НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ,
П. П. ЗАБРЕЙКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

517.2
К 77
УДК 517

*Серия «Нелинейный анализ и его приложения»
выпускается под общей редакцией
Н. Н. Боголюбова, М. А. Красносельского, Ю. А. Митропольского*

Геометрические методы нелинейного анализа. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1975.

В книге дано систематическое изложение современных методов исследования нелинейных операторных уравнений, основанных на топологических и геометрических идеях. Книга охватывает следующие вопросы: методы доказательства разрешимости уравнений, условия единственности решений и оценки числа решений, изучение структуры множества решений, исследование приближенных методов решения уравнений, методы исследования уравнений с параметрами, изучение бифуркации решений, исследование задач с континуумами решений и др. Указаны приложения к нелинейным интегральным уравнениям, краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, теории нелинейных колебаний.

Книга рассчитана на специалистов в области функционального анализа и его приложений.

В книге табл. 2, илл. 4, библ. 64 названия.

К $\frac{20203-164}{053(02)\text{-}75}$ 68-75

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга адресована математикам, механикам и инженерам, интересующимся методами качественного исследования операторных уравнений (теоремы существования, оценки числа решений, существование ненулевых решений, связность множества решений, применимость различных схем приближенного построения решений, анализ уравнений с параметрами и др.). В ней излагаются методы, основанные на геометрических идеях: вращение векторных полей, методы неподвижных точек, использование вогнутости и монотонности нелинейностей и т. д. Общие теоремы и принципы иллюстрируются приложениями к теории нелинейных колебаний, граничным задачам, нелинейным интегральным уравнениям, нелинейной механике, анализу критических значений функционалов и т. д.

В естественных ситуациях приходится изучать не индивидуальные операторные уравнения, а такие общие их классы, в которых уравнения можно в разумном смысле мало изменять, можно непрерывно деформировать, варьируя различные входящие в них элементы (ядра интегральных операторов, правые части дифференциальных уравнений, граничные условия, параметры и т. п.). Как правило, интерес представляют лишь математические утверждения, устойчивые по отношению к малым изменениям уравнения. Поэтому следует пытаться вначале обнаружить те общие характеристики уравнения, которые сохраняются при малых его изменениях, а уже после этого искать в терминах найденных характеристик ответ на интересующий нас конкретный вопрос. Указанная схема хорошо известна математикам; она особо плодотворна, если соответствующие характеристики могут быть эффективно вычислены или оценены и если в терминах этих характеристик достаточно просто формулируются содержательные задачи. Именно такое положение сложилось в теории широких классов нелинейных операторных уравнений. Это позволило подойти с единых позиций ко многим задачам, на первый взгляд совершенно различным.

Излагаемые в книге методы имеют давнюю историю. Они восходят к Кронекеру, Пуанкаре, Брауэру и Хопфу, построившим топологическую теорию непрерывных отображений конечномерных пространств. Второй исток — классические исследования Биркгофа и Келлога, Банаха, Каччиополи, Шаудера, А. Н. Тихонова, Лере по принципам неподвижной точки. Важную роль сыграли работы А. М. Ляпунова, Э. Шмидта, А. И. Некрасова, П. С. Урысона, Гаммерштейна, Голомба по теории различных классов нелинейных интегральных уравнений; работы Л. А. Люстерника по вариационным задачам. Существенное влияние на развитие методов исследования нелинейных операторных уравнений оказали работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, М. В. Келдыша, Г. И. Петрова, А. И. Лурье по проекционным методам приближенного решения уравнений — идеи этих методов лежат в основе многих схем построения топологических характеристик отображений бесконечномерных пространств. В ряде конструкций используются идеи общей теории Л. В. Канторовича приближенных методов. В последние пятнадцать — двадцать лет были предложены новые подходы и решены новые задачи.

В настоящее время качественные геометрические методы исследования нелинейных операторных уравнений образуют достаточно стройную теорию, которая широко применяется при анализе интегральных уравнений, различных краевых задач, задач физики и механики.

В первой главе книги изучаются векторные поля в конечномерном пространстве. Основную роль здесь играет понятие вращения векторного поля на границе области, детально описанное в ряде книг по топологии. Основное внимание в главе уделено теоремам и методам, позволяющим эффективно вычислять или оценивать вращение конкретных полей. Для понимания первой главы специальные знания по топологии не нужны, так как все основные построения используют лишь три общих просто формулируемых свойства вращения.

Теория вращения для различных классов векторных полей в функциональных пространствах излагается в главах 2 и 4. Наиболее детально изложена теория полей с вполне непрерывными операторами, ведущая начало от Лере и Шаудера. Рассмотрены также поля с фредгольмовыми, положительными, уплотняющими, многозначными и другими операторами из более специальных классов. Большое внимание уделено фактическому вычислению или оценке вращения.

При вычислении или оценке вращения векторного поля удобны так называемые теоремы родственности и инвариантности вращения, которым посвящена гл. 3. Теоремы родственности и инвариантности вращения — это формулы, связывающие вращения (на границах соответствующих областей) различных порожденных одной и той же задачей векторных полей в разных функциональных пространствах. Смысл теорем родственности можно пояснить, например, задачей о вынужденных колебаниях в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Начальные значения периодических решений являются особыми точками векторного поля сдвигов за период по траекториям дифференциальных уравнений; эти поля определены на конечномерном фазовом пространстве и в явном виде неизвестны, но для их исследования можно применять широко известные и хорошо разработанные методы качественной теории дифференциальных уравнений. С другой стороны, для отыскания периодических решений можно построить различные нелинейные интегральные уравнения, и поэтому периодические решения являются особыми точками определенного на соответствующем функциональном пространстве векторного поля с определенным явной формулой вполне непрерывным интегральным оператором. Теорема родственности в задаче о вынужденных колебаниях — это формула, связывающая вращение поля сдвигов в фазовом пространстве с вращением на границе соответствующей области в функциональном пространстве поля с интегральным оператором. Теоремы родственности и инвариантности вращения существенно расширяют возможности применения общих принципов, относящихся к абстрактным операторным уравнениям, к конкретным задачам.

В гл. 5 изложены различные геометрические методы доказательства теорем существования. Отбор материала для этой главы был особо труден для авторов. Авторы ограничились теоремами, важность которых для приложений к конкретным задачам ясна уже сейчас, и утверждениями, поразившими их своей неожиданностью и красотой. Многие важные принципы, которым посвящены подробные обзоры, монографии и книги учебного характера, лишь упоминаются.

Большое внимание уделено принципам неподвижной точки для операторов с инвариантными множествами — простейшими примерами являются классические принципы сжатых отображений, Шаудера, А. Н. Тихонова. Изучаются уравнения с нерастягивающими, уплотняющими и предельно компактными, многозначными, разрывными и другими операторами. Излагается принцип ненулевого вращения — отличие от нуля вращения векторного поля на границе области влечет существование у поля по крайней мере одной особой точки; показывается, как этот принцип в сочетании с принципами родственности и инвариантности вращения применяется при исследовании граничных задач и интегральных уравнений. Выясняется роль односторонних оценок в теоремах существования; особо важными являются схемы, ведущие свое начало от изящных и мало известных работ Шеффера по нелинейным интегральным уравнениям. Специальные признаки разрешимости операторных уравнений дают так называемые принципы покрытия, роль которых была обнаружена С. И. Похожаевым. Развивается метод изучения уравнений с диссипативными операторами (с приложениями к теории Левинсона — Плисса диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений).

В гл. 6 устанавливаются оценки числа решений уравнений с нелинейными операторами и доказываются различные принципы существования ненулевых решений. Нужно сказать, что во многих нелинейных проблемах (теория волн, исследование автоколебаний, изучение форм потери устойчивости упругих систем и др.) основную роль играют именно ненулевые решения. Изложенные в главе утверждения распадаются на четыре цикла. В первом из них для оценки числа решений применяется теория вращения векторных полей. Во втором цикле, существенно использующем методы полуупорядоченных пространств, изучаются уравнения с одной ведущей нелинейностью; здесь изучены уравнения со ступенчатыми нелинейностями (основной факт — наличие перемежающихся участков быстрого и медленного роста нелинейностей влечет существование такого количества решений, сколько есть указанных участков); выяснена роль вогнутости и выпуклости нелинейностей. В третьем цикле содержатся различные теоремы нелокального характера о разрешимости уравнений с параметрами. Наконец, доказаны общие принципы связности множества решений — примером приложений таких принципов может служить теорема о том, что из существования двух различных решений у смешанной граничной задачи для квазилинейного уравнения параболического типа вытекает существование континуума решений.

В небольшой гл. 7 рассматриваются приближенные методы решения нелинейных операторных уравнений. Устанавливаются связи между топологическим индексом решения и сходимостью метода последовательных приближений. Многие приближенные методы (Галеркина — Петрова, наименьших квадратов, схема Ляпунова — Чезари и др.) основаны на точном решении различных приближенных уравнений; выясняется, что сходимость решений приближенных уравнений к точному решению изучаемого уравнения определяется отличием от нуля вращения соответствующего векторного поля. Этот важный факт превращает условия многих теорем существования в условия применимости разнообразных приближенных методов. В главе описан алгоритм получения апостериорных оценок погрешностей, применимый в условиях, когда линеаризованные на приближенных решениях уравнения плохо обусловлены.

С проблемой сходимости последовательных приближений тесно связана задача об устойчивости состояний равновесия динамических систем. В гл. 7 обсуждается проблема о возможности непрерывной деформации системы с изолированным устойчивым по Ляпунову состоянием равновесия в систему, состояние равновесия которой устойчиво асимптотически. Такая деформация возможна не всегда.

В последней главе обсуждается ряд задач, связанных с малыми возмущениями операторных уравнений. Лишь бегло упоминаются классические теоремы об однозначных неявных функциях и об уравнениях разветвления Ляпунова — Шмидта, так как эти теоремы подробно изложены во многих руководствах. Устанавливается связь теории ветвления (для уравнений со многими скалярными параметрами) с гомотопической классификацией отображений сфер одной размерности на сферы меньших размерностей. Развивается метод «функционализации параметра», который позволяет применять теорию вращения векторных полей к исследованию возмущений уравнений с континуумами решений; этот метод иллюстрируется теоремами о периодических решениях автономных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Изложены геометрические методы исследования бифуркационных значений параметров; применения этих методов требуют сравнительно небольшой информации об изучаемом нелинейном уравнении (часто удается ограничиться линеаризованным уравнением). Завершается гл. 8 анализом устойчивости критических значений функционалов.

Для чтения книги достаточно знакомства с основными понятиями функционального анализа и топологии.

Значительная часть книги (почти все пункты в §§ 1—8, 10, 11, 15—26, 31—36 и некоторые пункты в § 42) написана авторами совместно, остальная часть написана М. А. Красносельским. Существенную помощь в написании отдельных страниц и пунктов (а иногда и целых параграфов) оказали Н. А. Бобылев, Ю. Г. Борисович, Г. М. Вайникко, В. М. Герштейн, В. С. Климов, Е. А. Лифшиц, Э. М. Мухамадиев, Ю. В. Покорный, Б. Н. Садовский, В. В. Стрыгин, А. С. Шварц. Большую работу по подготовке рукописи выполнили С. Н. Дементьев, В. С. Козякин, Н. П. Панских, В. Б. Привальский и А. В. Соболев. Всем указанным лицам авторы искренне благодарны.

М. А. Красносельский, П. П. Забрейко

Глава 1

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Одно из основных понятий, используемых в настоящей книге, — вращение конечномерного векторного поля. Это понятие восходит к Кронекеру и Пуанкаре; стройная теория в основном принадлежит Брауэру; завершили построение общей теории знаменитые теоремы Хопфа о классификации отображений n-мерной сферы на себя.

Вращение — совсем элементарная и простая целочисленная характеристика поля. Несмотря на простоту, строгое определение вращения при помощи элементарных понятий математического анализа (или при помощи основных понятий алгебраической топологии) требует сравнительно громоздких построений. Однако для применений способ определения вращения не играет роли. Важны лишь факт существования вращения и три простых его свойства. Это позволяет рассказать иа немногих страницах теорию вращения векторных полей и описать схемы построения понятия «вращение векторного поля». Подробное изложение основных понятий теории вращения или эквивалентной ей теории степени отображения содержится в любом курсе алгебраической топологии.

Для нас наиболее важны способы фактического вычисления или оценки вращения конкретных векторных полей. Этим способам посвящена основная часть настоящей главы. Излагаемая в главе теория в дальнейшем будет применена для изучения уравнений в бесконечномерных функциональных пространствах. Указаны в главе и непосредственные приложения: к исследованию специальных покрытий сфер и к задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 1. Продолжение векторного поля

1.1. Векторные поля. Через R^n ниже обозначается n-мерное вещественное пространство. Говорят, что на множестве $M \subset R^n$ задано n-мерное *векторное поле* Φ, если каждой точке $x \in M$ сопоставлен вектор Φx из R^n. Таким образом, задать векторное поле Φ на множестве M — это то же, что задать отображение $x \to \Phi x$ множества $M \subset R^n$ в R^n. При рассмотрении поля Φ удобно представлять себе Φx как вектор, начало которого расположено в точке x.

Пусть в R^n выбрана некоторая система координат. Тогда

$$\Phi x = \{\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\}, \qquad (1.1)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты точки (вектора, элемента) x, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — компоненты вектора Φx. Поле (1.1) называется *непрерывным* на M, если все компоненты $\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ непрерывны на M. В дальнейшем, если нет специальных оговорок, рассматриваются непрерывные векторные поля.

Точки, в которых поле обращается в нуль, будем называть *нулями поля* или его *особыми точками*. Особыми точками поля (1.1) будут решения системы

$$\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \ldots, \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0. \quad (1.2)$$

Поле Φ *невырождено* на M, если оно не имеет на M особых точек. Если у поля Φ есть на M особые точки, то оно *вырождено* на M.

1.2. Продолжение векторного поля. При изучении непрерывного векторного поля Φ, заданного на множестве M, часто приходится пользоваться его непрерывными продолжениями Φ_1 на более широкие множества M_1. Из известной теоремы Урысона вытекает, что любое непрерывное векторное поле Φ, заданное на замкнутом множестве $M \subset R^n$, можно продолжить с сохранением непрерывности на все пространство R^n. Иногда удобно несколько более полное утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть на замкнутом множестве $M \subset R^n$ задано непрерывное векторное поле Φ. Тогда Φ можно продолжить до определенного на всем R^n непрерывного векторного поля Φ_1 со значениями в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}}\,\Phi M$ множества ΦM значений отображения Φ на M.*

Теорема очевидна, если ΦM состоит из одной точки y_0, — достаточно положить $\Phi_1 x = y_0$.

Если ΦM содержит более одной точки, то $\overline{\text{co}}\,\Phi M$ является выпуклой областью в некоторой плоскости E_0. Пусть P_0 — оператор проектирования на E_0, а y_0 — внутренняя точка области $\overline{\text{co}}\,\Phi M$. Через Φ_0 обозначим произвольное (фиксированное) непрерывное продолжение поля Φ на все R^n. Тогда продолжение Φ_1 можно определить равенством $\Phi_1 = \Pi P_0 \Phi_0$, где оператор Π оставляет неподвижными все точки множества $\overline{\text{co}}\,\Phi M$, а каждую точку $x \in E_0$, $x \overline{\in} \overline{\text{co}}\,\Phi M$ переводит в точку пересечения отрезка, соединяющего y_0 и x, с границей области $\overline{\text{co}}\,\Phi M$ в E_0 *). ■

1.3. Теорема Сарда. Поле (1.1) называется *гладким*, если его компоненты $\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ непрерывно дифференцируемы. Точка x называется *правильной для гладкого поля* (отображения) Φ, если матрица $\Phi'(x)$ невырождена, и *сингулярной* в противном случае. Множество значений отображения Φ на сингулярных точках множества M назовем *складкой* и обозначим через $\text{wr}(\Phi, M)$ (wrinkle(Φ, M)). Важным фактом теории гладких полей является теорема Сарда (Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 883—897) о том, что складка не может занимать «слишком много места» в пространстве R^n. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 1.2. *Пусть поле Φ гладкое на области $\Omega \subset R^n$. Тогда лебегова мера складки $\text{wr}(\Phi, \Omega)$ равна нулю.*

Из теоремы 1.2 немедленно вытекает, что складка гладкого поля на каждом ограниченном замкнутом множестве является замкнутым нигде не плотным множеством. Складка на любой области является тощим множеством (множеством *первой категории по Бэру*).

1.4. Продолжения с минимальным числом особых точек. Особо важны продолжения векторных полей, не имеющие особых точек или имеющие «небольшое» число таких точек. Из теоремы 1.2 совсем просто (доказательство предоставляем читателю) вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть на ограниченном замкнутом множестве $M \subset R^n$ задано невырожденное непрерывное векторное поле Φ. Тогда существует непрерывное продолжение поля Φ на все R^n с конечным числом особых точек; эти точки расположены лишь в ограниченных компонентах связности множества $R^n \setminus M$, причем каждая такая компонента содержит не более одной особой точки.*

В частности, если M — граница связной ограниченной области $\Omega \subset R^n$, то Φ можно продолжить на $\overline{\Omega}$ с одной особой точкой.

§ 2. Гомотопные векторные поля

2.1. Деформации и гомотопные поля. Непрерывную по совокупности переменных $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in M$ вектор-функцию $\Phi(\lambda, x)$ со значениями в R^n назовем

*) Знаком ■ обозначается конец доказательства.

деформацией поля $\Phi_0 x = \Phi(0, x)$ в поле $\Phi_1 x = \Phi(1, x)$. Иногда удобно говорить, что деформация $\Phi(\lambda, x)$ *соединяет* поля Φ_0 и Φ_1.

Любые два непрерывных на M векторных поля Φ_0 и Φ_1 могут быть соединены деформацией; ее можно определить, например, формулой

$$\Phi(\lambda, x) = (1-\lambda)\Phi_0 x + \lambda\Phi_1 x \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad x \in M). \quad (2.1)$$

Деформацию (2.1) принято называть *линейной.*

Деформацию $\Phi(\lambda, x)$ назовем *невырожденной*, если $\Phi(\lambda, x) \neq 0$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in M$. Невырожденные деформации могут соединять только невырожденные поля.

Векторные поля Φ_0 и Φ_1 называются *гомотопными на* M (или просто *гомотопными*, когда область их определения очевидна), если их можно соединить невырожденной деформацией. Фундаментальным является то обстоятельство, что при любом n существуют невырожденные на некоторых множествах M пространства R^n векторные поля Φ_0 и Φ_1, которые негомотопны друг другу.

В случае одномерного пространства R поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на M в том и только том случае, если при каждом $x \in M$ векторы $\Phi_0 x$ и $\Phi_1 x$ направлены одинаково. В случае двумерного (и любого четномерного) пространства векторные поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны, например, если $\Phi_0 x = -\Phi_1 x$ при всех $x \in M$.

2.2. Признаки гомотопности. К установлению гомотопности конкретных векторных полей сводится ряд важных задач; доказательству гомотопности различных полей будут ниже посвящены многие страницы. Укажем вначале простой и удобный для приложений признак гомотопности, который принято называть *теоремой Пуанкаре — Боля.*

Теорема 2.1. *Пусть в каждой точке x множества M векторы $\Phi_0 x$ и $\Phi_1 x$ невырожденных на M полей Φ_0 и Φ_1 не направлены в противоположные стороны. Тогда поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на M.*

Для доказательства нужно построить невырожденную деформацию $\Phi(\lambda, x)$ поля Φ_0 в поле Φ. В качестве такой деформации в условиях теоремы можно взять линейную деформацию (2.1). ∎

Пусть в пространстве R^n скалярное произведение векторов $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ определяется равенством $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n$, а длина $\|x\|$ вектора x — формулой $\|x\|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Тогда все условия теоремы 2.1 (предположение невырожденности полей Φ_0 и Φ_1 и предположение о направлениях векторов этих полей) можно записать в виде одного условия

$$\|\Phi_0 x - \Phi_1 x\| < \|\Phi_0 x\| + \|\Phi_1 x\| \quad (x \in M), \quad (2.2)$$

или, что то же, условия

$$(\Phi_0 x, \Phi_1 x) > -\|\Phi_0 x\| \cdot \|\Phi_1 x\| \quad (x \in M). \quad (2.3)$$

Таким образом, каждое из условий (2.2) и (2.3) является признаком невырожденности на M векторных полей Φ_0 и Φ_1 и, одновременно, признаком их гомотопности.

Предоставляем читателю доказать следующий, более общий чем теорема 2.1, признак гомотопности.

Теорема 2.2. *Пусть определенные на множестве M непрерывные векторные поля Φ_0 и Φ_1 удовлетворяют условию*

$$(\Phi_0 x, S\Phi_1 x) + \|\Phi_0 x\| \cdot \|S\Phi_1 x\| > 0 \quad (x \in M), \quad (2.4)$$

где S — матрица с положительным определителем. Тогда поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на M.

Из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 2.3. *Пусть векторные поля Φ_0, Φ_1 определены и непрерывны на множестве $M \subset R^n$, причем*

$$\|\Phi_0 x - \Phi_1 x\| < \|\Phi_1 x\| \quad (x \in M). \quad (2.5)$$

Тогда поля Φ_0, Φ_1 невырождены на M и гомотопны друг другу.

2.3. Гомотопические классы. Отношение гомотопии векторных полей рефлексивно (каждое векторное поле гомотопно самому себе), симметрично (если поле Φ_0 гомотопно полю Φ_1, то поле Φ_1 гомотопно полю Φ_0) и транзитивно (если Φ_0 гомотопно Φ_1, а Φ_1 гомотопно Φ_2, то Φ_0 гомотопно Φ_2). Поэтому множество невырожденных на фиксированном множестве M непрерывных векторных полей распадается на классы гомотопных между собой полей (как говорят, на *гомотопические классы полей*).

В случае одномерного пространства R и одноточечного множества M векторные поля распадаются на два гомотопических класса (опишите их). Если M состоит из m точек, то векторные поля на M распадаются на 2^m гомотопических классов (опишите их).

Перейдем к полям в пространстве R^n, где $n > 1$.

Пусть ограниченное множество $M \subset R^n$ замкнуто, а $R^n \setminus M$ связно. Покажем, что любые два невырожденные векторные поля Φ_0 и Φ_1 на M гомотопны. В силу теоремы 1.3 поле Φ_0 можно продолжить до определенного на всем R^n непрерывного поля Ψ_0 без нулей. Невырожденная деформация $\Phi(\lambda, x) = \Psi_0(\lambda x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ соединяет векторное поле Φ_0 с невырожденным векторным полем, составленным из одинаковых векторов. Гомотопность же таких полей друг другу очевидна.

В дальнейшем нас будут в основном интересовать гомотопические классы векторных полей, заданных на границах ограниченных областей в R^n.

§ 3. Вращение векторного поля

3.1. Основные свойства вращения. Пусть $\dot{\Omega}$ — граница ограниченной области $\Omega \subset R^n$. Как оказывается, каждому невырожденному на $\dot{\Omega}$ непрерывному векторному полю Φ может быть приписана целочисленная характеристика $\gamma(\Phi, \Omega)$, которую называют *вращением поля* Φ *на* $\dot{\Omega}$. Метод введения вращения особой роли не играет; при использовании вращения достаточно знать, что оно обладает тремя свойствами, которые перечисляются в этом пункте.

Свойство 1. *Гомотопные на $\dot{\Omega}$ поля имеют одинаковое вращение.*

Из свойства 1 не вытекает, конечно, гомотопность полей с одинаковым вращением. Ниже будут приведены примеры негомотопных полей с одинаковым вращением и будут указаны классы ограниченных областей, для векторных полей на границах которых гомотопность вытекает из равенства вращений.

Свойство 2. *Пусть непрерывное поле Φ определено и невырождено на множестве $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$, причем области Ω_j попарно не пересекаются и лежат в ограниченной области Ω. Тогда вращения $\gamma(\Phi, \Omega_j)$ отличны от нуля лишь при конечном числе индексов j и*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi, \Omega_1) + \ldots + \gamma(\Phi, \Omega_j) + \ldots \qquad (3.1)$$

Свойство 3. *Если $\Phi x = x - x_0$ и $x_0 \in \Omega$, то* $\gamma(\Phi, \Omega) = 1$.

Перечисленными тремя свойствами вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ как «функция» своих аргументов (поля Φ и границы $\dot{\Omega}$ области Ω) определяется однозначно; уже после § 5 читатель это легко покажет. Ниже кратко описываются схемы введения понятия «вращение».

3.2. Вращение в одномерном пространстве. Связная область Ω в одномерном пространстве R — это промежуток; ее границей $\dot{\Omega}$ является пара точек. Невырожденные на $\dot{\Omega}$ поля распадаются на четыре гомотопических класса. Один из гомотопических классов образуют поля, векторы которых на каждом конце промежутка направлены во внешнюю от промежутка сторону; по определению вращение таких полей равно 1. Второй и третий гомотопические классы состоят из полей, векторы которых на обоих концах промежутка направлены одинаково; вращение таких полей полагается равным нулю. Наконец, четвертый гомотопический класс состоит из полей, векторы которых на обоих концах промежутка направлены внутрь этого промежутка; вращение таких полей полагается равным -1.

3.3. Вращение в двумерном пространстве. Уже в двумерном пространстве R^2 при определении вращения не удается избежать длительных построений. Пусть граница $\dot{\Omega}$ плоской ограниченной области Ω является замкнутой жордановой кривой

$$x = x(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \qquad (3.2)$$

где $x(t)$ непрерывна и $x(0) = x(1)$. Параметр t выбирается так, чтобы при его возрастании точка $x(t)$ пробегала контур $\dot{\Omega}$ в положительном направлении.

Пусть l — фиксированное направление на плоскости R^2. Обозначим через $\Xi(t)$ угол между вектором $\Phi[x(t)]$ и направлением l. Очевидно, $\Xi(t)$ — многозначная функция, определенная в промежутке $[0, 1]$; ее значения при каждом t отличаются друг от друга на величины, кратные числу 2π. Обозначим через $\theta(t)$ одну из однозначных непрерывных ветвей функции $\Xi(t)$. Тогда вращение поля Φ на $\dot{\Omega}$ определяется формулой

$$\boxed{\gamma(\Phi, \Omega) = \frac{1}{2\pi}[\theta(1) - \theta(0)].} \qquad (3.3)$$

Без труда показывается, что определенное равенством (3.3) число не зависит ни от выбора параметрического представления (3.2) границы $\dot{\Omega}$, ни от выбора направления l. Функцию $\theta(t)$ будем называть *угловой функцией* поля Φ; эта функция определяется неоднозначно, но ее приращение определяется однозначно. Вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ имеет простой геометрический смысл — оно равно числу полных оборотов, которые совершает вектор Φx поля Φ, когда точка x пробегает кривую $\dot{\Omega}$.

Вычисление вращения по формуле (3.3) затруднительно.

Обозначим через $P(t)$ и $Q(t)$ компоненты вектор-функции $\Phi[x(t)]$. Если множество N нулей $P(t)$ пусто, то $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Если N непусто, то можно считать, что оно содержит точки 0 и 1; пусть (α_i, β_i) — интервалы, из которых состоит $[0, 1] \setminus N$. Через $\operatorname{sign}[P(t), \alpha, \beta]$ будем обозначать знак компоненты $P(t)$ на интервале (α, β). Тогда вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ может быть определено равенством

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \sum_i \operatorname{sign}[P(t), \alpha_i, \beta_i] \cdot \frac{\operatorname{sign} Q(\beta_i) - \operatorname{sign} Q(\alpha_i)}{2} \tag{3.4}$$

(как легко видеть, в правой части есть лишь конечное число отличных от нуля слагаемых).

Укажем еще так называемую формулу Пуанкаре

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{P(t) Q'(t) - P'(t) Q(t)}{P^2(t) + Q^2(t)}\, dt, \tag{3.5}$$

применимую в случае непрерывно дифференцируемых компонент $P(t)$ и $Q(t)$.

После того как определено вращение на границах областей, являющихся замкнутыми жордановыми кривыми, переход к общим областям совсем прост.

3.4. Вращение в n-мерном пространстве ($n \geqslant 2$). Рассмотрим вначале ограниченные области Ω с «хорошими» границами. Пусть Φ — невырожденное векторное поле, определенное на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω.

Для читателя, знакомого с понятием степени отображения, достаточно сказать, что вращением $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля Φ на $\dot{\Omega}$ называется степень отображения

$$\Psi x = \Phi x / \|\Phi x\| \tag{3.6}$$

границы $\dot{\Omega}$ области Ω в единичную сферу $\|x\| = 1$.

Для читателей, знакомых лишь с самыми простыми понятиями комбинаторной топологии (симплекс, ориентация, симплициальное отображение), можно дать следующее определение. Нужно сначала аппроксимировать отображение (3.6) симплициальным отображением Ψ_1 границы $\dot{\Omega}$ области Ω в единичную сферу (при этом приходится предполагать, что $\dot{\Omega}$ допускает симплициальное разбиение и что произведено некоторое симплициальное разбиение единичной сферы). Затем нужно выбрать в симплициальном разбиении сферы один фиксированный симплекс σ_0 размерности $n-1$ и подсчитать число t тех симплексов симплициального разбиения границы $\dot{\Omega}$, которые при отображении Ψ_1 переходят в σ_0 с сохранением ориентации, и число s симплексов, которые переходят в σ_0 с изменением ориентации. Тогда вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ можно определить равенством $\gamma(\Phi, \Omega) = t - s$. Подробное изложение этой схемы есть в любом курсе комбинаторной или алгебраической топологии. В книге [22] для определения вращения выбраны специальные симплициальные отображения; это позволило дать простое «нумерационное» определение вращения, удобное при исследовании некоторых конкретных классов векторных полей.

Читатель, предпочитающий аналитические методы, может воспользоваться методом определения степени отображения, восходящим к Нагумо (Nagumo M., Amer. J. of Math. 73, № 3 (1951)).

Пусть граница $\dot{\Omega}$ области Ω достаточно гладкая. Тогда на $\dot{\Omega}$ можно определить локальные системы координат. В окрестности (в R^n) каждой точки $x \in \dot{\Omega}$ локальную систему координат на $\dot{\Omega}$ можно дополнить до локальной системы координат в пространстве R^n, определяя последнюю координату точки по внешней нормали к $\dot{\Omega}$. Будем считать локальные системы координат на $\dot{\Omega}$ выбранными так, что якобиан перехода от дополненной локальной системы координат к основной в пространстве R^n системе координат $\xi_1, \ldots, \xi_n$ положителен. На единичной сфере $\|x\| = 1$ будут также рассматриваться лишь такие локальные системы координат.

Для определения вращения поля Φ на $\dot{\Omega}$ нужно сначала отображение (3.6) аппроксимировать гладким отображением Ψ_1. Точку y_0, $\|y_0\| = 1$, будем называть *регулярной* по отношению к дифференцируемому отображению Ψ_1, если выполнены два требования. Во-первых, при отображении Ψ_1 в точку y_0 переходит лишь конечное число точек. Во-вторых, якобиан отображения Ψ_1 (в соответствующих локальных координатах) в каждой точке, переходящей при отображении Ψ_1 в y_0, отличен от нуля. Если t — число точек, переходящих в регулярную точку y_0 и таких, что в них якобиан преобразования Ψ_1 положителен, а s — число точек, в которых якобиан преобразования отрицателен, то разность $t - s$ не зависит от точки y_0 и от аппроксимации Ψ_1 (если, конечно, она достаточно близка к отображению (3.6)). Эта разность $t - s$ и есть вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω.

Пусть теперь Ω — произвольная ограниченная область и Φ — невырожденное на $\dot{\Omega}$ непрерывное векторное поле. Обозначим через Ψ непрерывное продолжение Φ на $\bar{\Omega}$, а через N — множество особых точек поля Ψ. Множество N находится на положительном расстоянии от $\dot{\Omega}$. Поэтому можно построить область Ω_0 с «хорошей» (гладкой или триангулируемой) границей $\dot{\Omega}_0$, удовлетворяющую условию $N \subset \Omega_0 \subset \Omega$. Вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля Φ на $\dot{\Omega}$ можно определить равенством $\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Psi, \Omega_0)$.

Определенное так вращение для границ произвольных областей не зависит ни от выбора продолжения Ψ, ни от выбора области Ω_0 и обладает свойствами 1—3.

Аксиоматическое построение теории вращения (степени отображения) предлагал Е. Цайдлер (E. Zeidler) [57].

Допустим, что ограниченные области $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ имеют одну и ту же границу. Следует иметь в виду, что вращения $\gamma(\Phi, \Omega_1), \ldots, \gamma(\Phi, \Omega_k)$ могут оказаться различными (постройте примеры). В том случае, когда множество Γ является границей только одной ограниченной области Ω, наряду с обозначением $\gamma(\Phi, \Omega)$ будет применяться и обозначение $\gamma(\Phi, \Gamma)$.

§ 4. Теоремы об особых точках

4.1. Существование особой точки. Укажем простые следствия свойств 1—3 вращения.

Теорема 4.1. *Пусть векторное поле Φ невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области Ω. Тогда* $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$.

Для доказательства рассмотрим $\bar{\Omega}$ как объединение конечного числа замыканий $\bar{\Omega}_\sigma$ непересекающихся областей Ω_σ настолько малых диаметров, что на каждом множестве $\bar{\Omega}_\sigma$ векторы поля Φ образуют друг с другом острый угол. В силу свойства 2 вращения достаточно показать, что $\gamma(\Phi, \Omega_\sigma) = 0$ при каждом σ.

Рассмотрим некоторую фиксированную область Ω_σ. Из теоремы 2.1 вытекает, что поле Φ гомотопно на $\dot{\Omega}_\sigma$ некоторому полю $\Psi x = x - x_0$, где $x_0 \overline{\in} \bar{\Omega}_\sigma$ и векторы Φx $(x \in \dot{\Omega}_\sigma)$ образуют острый угол с векторами Ψx. В силу свойства 1 вращения для доказательства теоремы 4.1 нужно показать, что вращение поля Ψ на $\dot{\Omega}_\sigma$ равно нулю. Последнее вытекает из свойств 2 и 3 вращения. ∎ Из теоремы 4.1 вытекает фундаментальная

Теорема 4.2. *Пусть поле Φ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω и непрерывно на ее замыкании $\bar{\Omega}$. Пусть $\gamma(\Phi, \Omega) \neq 0$. Тогда поле Φ имеет в области Ω по крайней мере одну особую точку.*

Теорема 4.2 является основным орудием доказательства разрешимости векторных уравнений — из нее вытекает, что каждый признак отличия от нуля вращения поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω является одновременно признаком существования у уравнения $\Phi x = 0$ по крайней мере одного решения в области Ω. Указанное обстоятельство является одной из основных (но далеко не единственной!) причин интереса к задаче о вычислении вращения.

4.2. Изменение области. Пусть непрерывное векторное поле Φ определено в некоторой области G, содержащей границу $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω, и невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда оно будет невырождено и в некоторой окрестности U границы $\dot{\Omega}$. Рассмотрим такую область Ω_0, которая содержит множество $\Omega \setminus U$ и содержится вместе с границей $\dot{\Omega}_0$ в области $\Omega \cup U$. Из теоремы 4.2 и свойства 2 вращения вытекает тогда, что $\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi, \Omega_0)$. Это равенство отражает устойчивость вращения векторного поля при малых изменениях области.

4.3. Алгебраическое число особых точек. Пусть непрерывное векторное поле Φ определено на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда все особые точки поля Φ (если они есть) лежат в Ω.

Особую точку x_0 называют *изолированной*, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек. Если особая точка x_0 изолирована, то в силу теоремы 4.1 вращение поля Φ на всех сферах $\|x - x_0\| = \rho$ достаточно малых радиусов ρ одинаково. Это общее вращение $\operatorname{ind}(x_0, \Phi)$ называют *индексом особой точки x_0* поля Φ или, что то же, *индексом нуля x_0* поля Φ. Понятие индекса особой точки аналогично понятию кратности нуля многочлена в алгебре.

Если в области Ω есть лишь конечное число особых точек, то сумму их индексов называют *алгебраическим числом особых точек.* Из теоремы 4.1 вытекает важная теорема Кронекера: вычеты

Теорема 4.3. *Пусть непрерывное векторное поле Φ имеет в области Ω конечное число особых точек $x_1, \ldots$ $\ldots, x_s$ и невырождено на границе $\dot{\Omega}$ этой области. Тогда*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \operatorname{ind}(x_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(x_s, \Phi). \qquad (4.1)$$

Теорема 4.3 может быть использована для вычисления вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ — если известны индексы всех особых точек поля Φ. Она позволяет доказывать существование особых точек, отличных от известных — если сумма индексов известных особых точек оказывается отличной от $\gamma(\Phi, \Omega)$. Наконец, теорема 4.3 в некоторых случаях применяется для доказательства теорем единственности — когда есть априорная информация о знаках индексов возможных особых точек.

4.4. Индекс бесконечно удаленной особой точки. Пусть поле Φ определено и невырождено при всех достаточно больших по норме $x \in R^n$. Будем тогда говорить, что *бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой* поля Φ.

Пусть бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой поля Φ. Вращения поля Φ на всех сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ достаточно большого радиуса в силу теоремы 4.1 одинаковы; это общее вращение $\operatorname{ind}(\infty, \Phi)$ будем называть *индексом бесконечно удаленной точки* (иногда *асимптотическим индексом*) поля Φ. Полезным частным случаем теоремы 4.3 является

Теорема 4.4. *Пусть непрерывное векторное поле Φ определено на всем пространстве R^n и имеет конечное число особых точек $x_1, \ldots, x_s$. Тогда*

$$\boxed{\operatorname{ind}(\infty, \Phi) = \operatorname{ind}(x_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(x_s, \Phi).}$$

§ 5. Теоремы Хопфа

5.1. Теорема о гомотопической классификации. Естественно возникает вопрос о том, обязательно ли гомотопны заданные на границе $\dot\Omega$ области Ω невырожденные векторные поля Φ_0 и Φ_1, если их вращения на $\dot\Omega$ одинаковы?

Ответ в общем случае отрицателен. Например, если Ω — это множество точек, заключенных между двумя $(n-1)$-мерными сферами S_i и S_l, первая из которых содержится внутри второй, то вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля Φ на границе $\dot\Omega$ этой области есть разность вращений $\gamma(\Phi, S_l)$ и $\gamma(\Phi, S_i)$ поля Φ на внешней сфере S_l и на внутренней сфере S_i. Поэтому поля Φ_0 и Φ_1, имеющие разные вращения на S_l и одинаковые вращения на всей границе $\dot\Omega$, будут негомотопны. В этом примере сферы S_i и S_l можно считать соприкасающимися в одной точке N — в этом случае область Ω гомеоморфна шару (но ее граница, конечно, не гомеоморфна сфере).

Если Ω является шаром, ответ на поставленный вопрос положителен. Этот факт составляет содержание замечательной теоремы Хопфа (см., например, [1]): *если невырожденные на некоторой сфере пространства R^n $(n > 1)$ непрерывные векторные поля имеют одинаковое вращение, то они гомотопны.* При $n = 1$ утверждение теоремы Хопфа неверно.

Утверждение теоремы Хопфа верно и для многих других, отличных от шара, областей. Ограниченную связную область Ω в пространстве R^n назовем *жордановой*, если множество $R^n \setminus \bar\Omega$ связно. Иначе говоря, ограниченная область Ω жорданова, если $R^n \setminus \dot\Omega$ состоит из двух компонент связности. К жордановым областям в пространстве R^n при $n > 1$ относятся выпуклые и звездные области, при $n > 2$ — «бублики» (произведения $(n-1)$-мерного шара на окружность) и др.

Теорема 5.1. *Пусть непрерывные векторные поля Φ и Ψ невырождены и имеют одинаковое вращение на границе $\dot\Omega$ жордановой области Ω. Тогда поля Φ и Ψ гомотопны на $\dot\Omega$.*

Покажем, как теорема 5.1 вытекает из приведенного выше более простого варианта теоремы Хопфа.

Обозначим через Φ_0 и Ψ_0 такие продолжения полей Φ и Ψ на все R^n, каждое из которых имеет в Ω единственную особую точку и не имеет особых точек вне Ω. Так как область Ω связна, то можно считать, что у полей Φ_0 и Ψ_0 особая точка одна и та же; обозначим ее через x_0. Пусть шар $\|x - x_0\| < r$ лежит в области Ω, а шар $\|x - x_0\| < R$ содержит Ω. Через Π обозначим шаровой слой $r \leqslant \|x - x_0\| \leqslant R$.

Рассмотрим на Π непрерывные векторные поля

$$\Phi_1 x = \Phi_0\left(x_0 + R\,\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right), \qquad \Psi_1 x = \Psi_0\left(x_0 + R\,\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right).$$

Каждое из этих полей невырождено на Π; первое из них гомотопно на Π полю Φ_0, а второе — полю Ψ_0. Гомотопный переход от поля Φ_0 к полю Φ_1 можно определить, например, следующей деформацией: $\Phi_\lambda x = \Phi_0\left[x_0 + \dfrac{R(x - x_0)}{\lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)R}\right]$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Аналогично определяется гомотопный переход от Ψ_0 к Ψ_1.

Так как поле Φ_0 гомотопно полю Φ_1 на Π, то, в частности, поле Φ гомотопно полю Φ_1 на $\dot\Omega$. Аналогично, поле Ψ гомотопно полю Ψ_1 на $\dot\Omega$. Поэтому достаточно доказать гомотопность полей Φ_1 и Ψ_1 на $\dot\Omega$. Мы докажем, что поля Φ_1 и Ψ_1 гомотопны на всем слое Π.

Обозначим через S сферу $\|x - x_0\| = R$. В силу теоремы 4.1

$$\gamma(\Phi_1, S) = \gamma(\Phi_0, S) = \gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Psi, \Omega) = \gamma(\Psi_0, S) = \gamma(\Psi_1, S).$$

Поэтому поля Φ_1 и Ψ_1 гомотопны на S. Следовательно, существует невырожденная деформация $X(\lambda, x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in S)$, соединяющая поля $X(0, x) = \Phi_1 x$, $X(1, x) = \Psi_1 x$ $(x \in S)$. Невырожденную деформацию, соединяющую поля Φ_1 и Ψ_1 на П, можно определить равенством

$$\mathrm{X}_1(\lambda, x) = \mathrm{X}\left(\lambda, x_0 + R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right)$$

$$(0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad r \leqslant \|x - x_0\| \leqslant R). \ ■$$

5.2. Векторные поля без особых точек. Равенство $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$ не означает, что в области Ω поле Φ не имеет нулей. Однако имеет место следующая теорема Хопфа о продолжении.

Теорема 5.2. *Пусть непрерывное векторное поле Φ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω и $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Тогда Φ можно продолжить до невырожденного на замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω непрерывного поля Ψ.*

Продолжение Ψ удобно строить в три этапа. Вначале по теореме 1.3 поле Φ нужно продолжить на $\bar{\Omega}$ так, чтобы продолженное поле Φ_0 имело лишь один нуль x_0. Пусть шар $\|x - x_0\| < r$ и его граница S лежат в Ω. В силу теоремы 4.1 и свойства 2 вращения справедливы равенства $\gamma(\Phi_0, S) = \gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Поэтому из теоремы Хопфа 5.1 вытекает, что поле Φ_0 на границе S шара $\|x - x_0\| < r$ гомотопно имеющему нулевое вращение полю $\Phi_1 x = x^*$, где x^* — произвольный фиксированный вектор. Это значит, что существует непрерывная и невырожденная на S деформация $\Phi(\lambda, x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in S)$ поля Φ_0 в поле Φ_1. Продолжение Ψ можно определить теперь равенствами $\Psi x = \Phi_0 x$ при $\|x - x_0\| \geqslant r$, $\Psi x_0 = x^*$, $\Psi x = \Phi\left[1 - \|x - x_0\|/r,\ x_0 + \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right]$ при $0 < \|x - x_0\| < r$. ■

§ 6. Линейные векторные поля

6.1. Линейные поля. Векторное поле Φ называется *линейным*, если $\Phi x = Cx$, где C — квадратная матрица порядка n.

Теорема 6.1. *Нулевая особая точка линейного поля $\Phi = C$ изолирована в том и только том случае, когда $\det C \neq 0$. Если нулевая особая точка поля Φ изолирована, то*

$$\operatorname{ind}(0, \Phi) = \operatorname{sign}\det C, \tag{6.1}$$

или, что то же,

$$\operatorname{ind}(0, \Phi) = (-1)^{\beta}, \tag{6.2}$$

где β — сумма кратностей вещественных и отрицательных собственных значений матрицы C.

Формула (6.1) может быть получена как простое следствие свойств 1—3 вращения и теоремы 4.1.

Рассмотрим сначала частный случай. Пусть P_0 — проектор на некоторое k-мерное подпространство R_0 пространства R^n: $P_0 x = \sum_{i=1}^{k} (g_i, x) h_i$, где $h_1, \ldots, h_k$ — некоторый базис в R_0, а $g_1, \ldots, g_k$ — элементы из R^n, для которых $(g_i, h_j) = \delta_{ij}$. Покажем, что

$$\operatorname{ind}(0, I - 2P_0) = (-1)^k, \tag{6.3}$$

где I — единичный оператор: $Ix = x$.

Пусть сначала k четно: $k = 2m$. Рассмотрим деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - P_0 x - \sum_{j=1}^{m} [(g_{2j-1}\cos\pi\lambda - g_{2j}\sin\pi\lambda, x) h_{2j-1} + (g_{2j}\cos\pi\lambda + g_{2j-1}\sin\pi\lambda, x) h_{2j}].$$

Так как эта деформация невырождена при $x \neq 0$, то поля $\Phi(0, x) = x - 2P_0 x$ и $\Phi(1, x) = x$ гомотопны на любой сфере $\|x\| = r$ с центром в нулевой точке. Поэтому вращения полей $I - 2P_0$ и I на этих сферах одинаковы, т. е. $\operatorname{ind}(0, I - 2P_0) = \operatorname{ind}(0, I) = 1$.

Пусть теперь k нечетно: $k = 2m + 1$. Рассмотрим деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - P_0 x - (g_1, x) h_1 - \sum_{j=1}^{m} [(g_{2j}\cos\pi\lambda - g_{2j+1}\sin\pi\lambda, x) h_{2j} + (g_{2j+1}\cos\pi\lambda + g_{2j}\sin\pi\lambda, x) h_{2j+1}].$$

Она невырождена при $x \neq 0$ и поэтому индекс нулевой особой точки поля $\Phi(0, x) = x - 2P_0 x$ равен индексу нулевой особой точки поля $\Phi(1, x) = \Psi x = x - 2(g_1, x) h_1$, совпадающего при $(g_1, x) \leqslant 1$ с полем

$$\Psi_0 x = x - (g_1, x) h_1 + [|(g_1, x) - 1| - 1] h_1. \tag{6.4}$$

Поле (6.4) имеет две особые точки: нулевую и точку $x_1 = 2h_1$. Индекс $\operatorname{ind}(0, \Psi_0)$ первой из них совпадает с индексом нулевой особой точки поля $I - 2P_0$. Индекс $\operatorname{ind}(x_1, \Psi_0)$ в силу свойства 3 вращения равен 1. Следовательно,

$$\operatorname{ind}(0, I - 2P_0) + 1 = \gamma(\Psi_0, S), \tag{6.5}$$

где $S = \{x\colon \ \|x\| = 3\|h_1\|\}$. Рассмотрим деформацию $\Psi(\lambda, x) = x - (g_1, x)h_1 + [|(g_1, x) - 1| + (2\lambda - 1)]h_1$ поля (6.4) в невырожденное на R^n непрерывное векторное поле $\Psi(1, x) = x - (g_1, x)h_1 + [|(g_1, x) - 1| + 1]h_1$. Так как эта деформация невырождена на S, то из свойства 1 вращения и из теоремы 4.1 вытекает равенство $\gamma(\Psi_0, S) = 0$. Поэтому из (6.5) следует равенство $\operatorname{ind}(0, I - 2P_0) = -1$.

Равенство (6.3) доказано и в случае нечетного k.

Рассмотрим теперь произвольное линейное поле $\Phi x = Cx$. Пусть $\det C \neq 0$; тогда пространство R^n можно (см., например, [12]) представить в виде прямой суммы $R^n = R_0 \dotplus R^0$ инвариантных для C подпространств R_0 и R^0, первое из которых является линейной оболочкой корневых подпространств C, отвечающих отрицательным собственным значениям C, и имеет размерность β, а второе — линейной оболочкой остальных корневых подпространств. Представление $R^n = R_0 \dotplus R^0$ означает, что каждый элемент x из R^n единственным способом представим в виде $x = u + v$, где $u \in R_0$, $v \in R^0$; положим $P_0 x = u$ и рассмотрим деформацию $X(\lambda, x) = (1 - \lambda)Cx + \lambda(x - 2P_0 x)$. Эта деформация невырождена в ненулевых точках пространства R^n и поэтому индекс $\operatorname{ind}(0, \Phi)$ нулевой особой точки поля $\Phi X(0, x) = Cx$ совпадает с индексом $\operatorname{ind}(0, I - 2P_0)$ нулевой особой точки поля $X(1, x) = x - 2P_0 x$. Остается сослаться на (6.3). ∎

6.2. Теорема Боля — Брауэра. Вычисление вращения нелинейных векторных полей часто сводится к вычислению вращения линейного поля. Приведем совсем простое утверждение, из которого вытекает знаменитая теорема Боля — Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 6.2. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область, A — определенный на границе $\dot{\Omega}$ этой области непрерывный оператор со значениями в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω. Пусть векторное поле $\Phi = I - A$ невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда $\gamma(\Phi, \Omega) = 1$.*

Для доказательства рассмотрим деформацию $\Phi(\lambda, x) = x - (1 - \lambda)Ax - \lambda x_0$, где x_0 — произвольная внутренняя точка Ω. Так как $Ax \in \bar{\Omega}$ при любом $x \in \dot{\Omega}$ и $x_0 \in \Omega$, то при всех $\lambda \in (0, 1]$ точка $(1 - \lambda)Ax + \lambda x_0$ лежит в Ω и, следовательно, деформация $\Phi(\lambda, x)$ невырождена на $\dot{\Omega}$. Поэтому поля $\Phi(0, x) = x - Ax$ и $\Phi(1, x) = x - x_0$ гомотопны на $\dot{\Omega}$ и утверждение теоремы вытекает из свойств 1 и 3 вращения. ∎

Пусть теперь Q — произвольное замкнутое ограниченное выпуклое множество и непрерывный на Q оператор A преобразует Q в себя. Тогда A имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

Действительно, без ограничения общности можно считать, что Q имеет внутренние точки и что A не имеет неподвижных точек на $\dot{Q}$. Тогда $\gamma(I - A, Q) = 1$ в силу теоремы 6.2, а в силу теоремы 4.2 поле $I - A$ имеет по крайней мере одну особую точку. Эта особая точка является неподвижной точкой оператора A. ∎

Дословно те же рассуждения показывают, что определенный на $\dot{Q}$ непрерывный оператор A имеет на Q по крайней мере одну неподвижную точку, если $A\dot{Q} \subset Q$.

6.3. Вычисление индекса особой точки по линеаризованному полю. Пусть векторное поле

$$\Phi x = \{\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \tag{6.6}$$

определено в окрестности точки $x_0 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\}$. Говорят, что поле Φ (или, что то же, отображение Φ) дифференцируемо в точке x_0, если все функции φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ дифференцируемы в этой точке. Иначе говоря, поле Φ дифференцируемо в точке x_0, если $\Phi(x_0 + h) - \Phi x_0 = \Phi'(x_0)h + \omega(x_0, h)$, где $\Phi'(x_0)$ — некоторая матрица, а $\|\omega(x_0, h)\| = o(\|h\|)$. Как легко видеть,

$$\Phi'(x_0) = \left(\frac{\partial \varphi_i(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)}{\partial \xi_j}\right)_{i, j=1}^{n}. \tag{6.7}$$

Теорема 6.3. *Пусть x_0 — особая точка поля Φ. Пусть поле Φ дифференцируемо в точке x_0 и пусть* *детерминант* $\det\Phi'(x_0)$ *производной* $\Phi'(x_0)$ *отличен от нуля. Тогда особая точка* x_0 *поля* Φ *изолирована и*

$$\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = \operatorname{sign}\det\Phi'(x_0), \tag{6.8}$$

или, что то же,

$$\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = (-1)^{\beta}, \tag{6.9}$$

где β — *сумма кратностей вещественных отрицательных собственных значений матрицы* $\Phi'(x_0)$.

Для доказательства рассмотрим поле $\Psi x = \Phi'(x_0)(x - x_0)$. В силу невырожденности матрицы $\Phi'(x_0)$ это поле имеет единственную особую точку x_0. На сферах $\|x - x_0\| = r$ больших радиусов r оно очевидным образом гомотопно линейному полю $\Phi'(x_0)x$, вращение которого в силу теоремы 6.1 равно $\operatorname{sign}\det\Phi'(x_0)$. Поэтому достаточно установить, что особая точка x_0 поля Φ изолирована и что на сферах $\|x - x_0\| = r$ малых радиусов r поля Φ и Ψ гомотопны.

Так как матрица $\Phi'(x_0)$ невырождена, то $\|\Psi x\| \geqslant a\|x - x_0\|$, где $a > 0$. Из равенства $\omega(x_0, h) = o(\|h\|)$ вытекает существование такого $r_0 > 0$, что $\|\Phi x - \Psi x\| \leqslant \frac{a}{2}\|x - x_0\|$ ($\|x - x_0\| \leqslant r$). Поэтому при $0 < \|x - x_0\| \leqslant r_0$ справедливо неравенство $\|\Phi x - \Psi x\| < \|\Psi x\|$ и остается сослаться на теорему 2.3. ∎

Теорема 6.3 приводит к простому способу введения понятия вращения векторного поля. По существу, именно этот способ использован в уже упоминавшейся (стр. 19) статье Нагумо, в которой рассматривалась эквивалентная задача об определении степени отображения.

Пусть непрерывное поле Φ задано на границе $\dot\Omega$ ограниченной области Ω. Можно показать, что поле Φ допускает такое непрерывное продолжение Ψ на замыкание $\overline{\Omega}$ области Ω, которое обладает следующими свойствами: во-первых, оно дифференцируемо во всех точках области Ω; во-вторых, оно имеет конечное число особых точек; в-третьих, в каждой особой точке x_0 поля Ψ якобиан преобразования $\Psi'(x_0)$ отличен от нуля. Если такое продолжение построено, то каждой особой точке можно приписать индекс по формуле (6.8), а затем определить вращение $\gamma(\Phi, \dot\Omega)$ поля Φ на $\dot\Omega$ как сумму индексов всех особых точек. При таком определении вращения трудности вызывает лишь доказательство корректности определения (нужно доказать существование продолжений Ψ и показать, что вращение не зависит от выбора продолжения Ψ поля Φ на $\overline{\Omega}$); проверка свойств 1—3 проводится просто.

Вычисление индекса особой точки становится трудной задачей, когда $\det\Phi'(x_0) = 0$ (см. §§ 15 и 24).

6.4. Асимптотически линейные поля. Пусть векторное поле Φ определено при всех достаточно больших x. Говорят, что поле Φ *асимптотически линейно*, если $\Phi x = \Phi'(\infty)x + \omega(x)$, где $\Phi'(\infty)$ — некоторая матрица, а $\|\omega(x)\| = o(\|x\|)$ $(\|x\| \to \infty)$. Матрицу $\Phi'(\infty)$ называют *асимптотической производной* или *производной на бесконечности* оператора Φ. Например, если поле Φ дифференцируемо и $\Phi'(x) \to D$ при $\|x\| \to \infty$, то поле Φ асимптотически линейно и $\Phi'(\infty) = D$.

Теорема 6.4. *Пусть векторное поле* Φ *асимптотически линейно и пусть* $\det\Phi'(\infty) \neq 0$. *Тогда бесконечно удаленная точка является изолированной особой точкой поля* Φ *и* $\operatorname{ind}(\infty, \Phi) = \operatorname{sign}\det\Phi'(\infty)$, *или, что то же,* $\operatorname{ind}(\infty, \Phi) = (-1)^{\beta}$, *где* β — *сумма кратностей вещественных отрицательных собственных значений матрицы* $\Phi'(\infty)$.

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 6.3. ∎

§ 7. Теоремы о произведении вращений

7.1. Формула произведения индексов. Пусть значения непрерывного поля Φ, заданного на множестве $M \subset R^n$, лежат в некотором множестве $N \subset R^n$. Пусть на множестве N в свою очередь определено непрерывное векторное поле Ψ. Через $\Psi\Phi$ будем обозначать суперпозицию $\Psi(\Phi x)$. Суперпозиция $\Psi\Phi$ является непрерывным векторным полем, заданным на M. Справедливо следующее утверждение, которое мы назовем *формулой произведения индексов*.

Теорема 7.1. *Пусть* x_0 — *изолированная особая точка поля* Φ, *а* 0 — *изолированная особая точка поля* Ψ. *Тогда* x_0 *является изолированной особой точкой поля* $\Psi\Phi$ *и*

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \operatorname{ind}(0, \Psi) \cdot \operatorname{ind}(x_0, \Phi). \tag{7.1}$$

Приведем доказательство. В силу теоремы 1.2 можно считать, что каждое из полей Φ, Ψ определено на всем R^n и каждое из них имеет единственную особую точку.

Предположим сначала, что $\operatorname{ind}(0, \Psi) = 0$. Тогда (в силу теоремы 5.2) при каждом $\delta > 0$ можно определить поле Ψ_δ без особых точек на всем R^n так, чтобы оно совпадало с полем Ψx при $\|x\| \geqslant \delta$. Поля $\Psi_\delta \Phi$ при малых δ совпадают на сфере $S = \{x\colon \|x - x_0\| = 1\}$ с полем $\Psi\Phi$ и поэтому

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \gamma(\Psi\Phi, S) = \gamma(\Psi_\delta\Phi, S). \qquad (7.2)$$

Но последнее вращение в силу теоремы 4.1 равно нулю, так как каждое поле $\Psi_\delta\Phi$ не имеет особых точек. Поэтому из (7.2) следует (7.1).

Аналогично доказывается (7.1) в случае, когда $\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\Phi x = B(x - x_0)$, где B — невырожденная матрица, т. е. $\operatorname{sign}\det B = \varepsilon_1 \neq 0$. Пусть $\operatorname{ind}(0, \Psi) = k\varepsilon_2$, где $|\varepsilon_2| = 1$, а k — натуральное число. Выберем k точек $y_1 = e_0$, $y_2 = 2e_0, \ldots, y_k = ke_0$, где e_0 — некоторый фиксированный элемент из R^n и $\|e_0\| = 3$. Определим на R^n вспомогательное поле $\Psi_1 y$, положив его равным Ψy вне шара $\|y\| \leqslant 3k + 1$, равным $D(y - y_i)$ на каждом шаре $\|y - y_i\| \leqslant 1$, где D — матрица и $\operatorname{sign}\det D = \varepsilon_2$, а затем продолжив его на все пространство без новых особых точек (это можно сделать в силу теоремы 5.2). Поле $\Psi_1\Phi$ на сферах $S_\rho = \{x\colon \|x\| = \rho\}$ больших радиусов ρ будет совпадать с полем $\Psi\Phi$. Поэтому $\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \gamma(\Psi_1\Phi, S_\rho)$ при больших ρ. У поля $\Psi_1\Phi$ особыми будут точки $x_0 + B^{-1}e_0$, $x_0 + 2B^{-1}e_0, \ldots, x_0 + kB^{-1}e_0$. Из теоремы 4.3 вытекает поэтому, что

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(x_0 + iB^{-1}e_0, \Psi_1\Phi). \qquad (7.3)$$

Но в окрестности каждой точки $x_i = x_0 + iB^{-1}e_0$ поле $\Psi_1\Phi$ имеет вид $\Psi_1\Phi x = DB(x - x_i)$ и, в силу теоремы 6.3, $\operatorname{ind}(x_i, \Psi_1\Phi) = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Таким образом, из (7.3) вытекает, что $\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = k\varepsilon_1\varepsilon_2$, т. е.

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \varepsilon_1 \operatorname{ind}(0, \Psi), \qquad (7.4)$$

а это равенство совпадает с (7.1).

Осталось рассмотреть общий случай, когда оба сомножителя в правой части (7.1) отличны от нуля.

Пусть $\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = \varepsilon_1 m$, где m — натуральное число и $\varepsilon_1 = \operatorname{sign}\operatorname{ind}(x_0, \Phi) \neq 0$. Пусть B — невырожденная матрица и $\operatorname{sign}\det B = \varepsilon_1$.

Выберем в шаре $T = \{x\colon \|x - x_0\| < 1\}$ точки $x_1, \ldots, x_m$. Пусть замыкания $\bar{T}_i$ шаров $T_i = \{x\colon \|x - x_i\| < r\}$ не пересекаются друг с другом и лежат в шаре T. Определим вспомогательное поле $\Phi_1 x$, положив его равным Φx вне шара T, равным $B(x - x_i)$ на каждом шаре T_i, а затем продолжив его с сохранением непрерывности на все R^n без новых особых точек (это можно сделать в силу теоремы 5.2). Индексы особых точек $x_1, \ldots, x_m$ поля $\Psi\Phi_1$ можно вычислить по уже доказанному равенству (7.4):

$$\operatorname{ind}(x_i, \Psi\Phi_1) = \varepsilon_1 \operatorname{ind}(0, \Psi) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Поэтому из теоремы 4.3 вытекает (7.1):

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \gamma(\Psi\Phi, T) = \gamma(\Psi\Phi_1, T) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{ind}(x_i, \Psi\Phi_1) =$$
$$= m\varepsilon_1 \operatorname{ind}(0, \Psi) = \operatorname{ind}(x_0, \Phi) \cdot \operatorname{ind}(0, \Psi). \blacksquare$$

Для читателей, знакомых с теорией степени отображения, покажем, как теорема 7.1 вытекает из теоремы о произведении степеней отображения: *если F и G — отображения некоторой сферы S в себя, то степень отображения GF сферы S в себя равна произведению степеней отображений F и G.*

При доказательстве можно считать, что $x_0 = 0$. Пусть поле Ψ не имеет ненулевых особых точек в шаре $T = \{x\colon \|x\| \leqslant r\}$, а поле Φ — в шаре $T_0 = \{x\colon \|x\| \leqslant r_0\}$, причем $\Phi T_0 \subset T$. Непрерывная деформация

$$\mathrm{X}(\lambda, x) =$$
$$= \left\{ \frac{(1-\lambda) r_0}{\left\| \Psi \left\{ \left[\frac{(1-\lambda) r_0}{\|\Phi x\|} + \lambda \right] \Phi x \right\} \right\|} + \lambda \right\} \Psi \left\{ \left[\frac{(1-\lambda) r_0}{\|\Phi x\|} + \lambda \right] \Phi x \right\}$$

невырождена на границе $\dot{T}_0$ шара T_0. Поэтому поля $\mathrm{X}_0 x = \mathrm{X}(0, x)$ и $\Psi\Phi x = \mathrm{X}(1, x)$ на $\dot{T}_0$ гомотопны и имеют одинаковое вращение, совпадающее с индексом изолированной нулевой особой точки поля $\Psi\Phi$. Поле X_0 — суперпозиция отображений $Fx = r_0 \|\Phi x\|^{-1} \Phi x$, $Gx = r_0 \|\Psi x\|^{-1} \Psi x$ сферы $\dot{T}_0$ в себя. Поэтому вращение на $\dot{T}_0$ поля X_0, совпадающее со степенью отображения X_0, равно произведению степеней отображений F и G сферы $\dot{T}_0$ в себя. Но первая из них совпадает с $\operatorname{ind}(x_0, \Phi)$, а вторая — с $\operatorname{ind}(0, \Psi)$. Тем самым формула (7.1) доказана. $\blacksquare$

7.2. Вращение суперпозиции векторных полей. Пусть непрерывное векторное поле Φ определено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω и пусть множество $\Phi\dot{\Omega}$ лежит в ограниченном замкнутом множестве N. Пусть далее на N определено непрерывное и невырожденное векторное поле Ψ. Тогда определенная на $\dot\Omega$ суперпозиция $\Psi\Phi$ будет непрерывным и невырожденным полем. Нас интересует вращение $\gamma(\Psi\Phi, \Omega)$ этого поля на $\dot\Omega$.

Пусть Ω_k — одна из ограниченных компонент связности множества $R^n \setminus N$. Тогда все поля $\Phi(z)x = \Phi x - z$ $(z \in \Omega_k)$ невырождены и гомотопны на $\dot\Omega$. Их общее вращение обозначим через $\gamma(\Phi_k, \Omega)$. Очевидно, $\gamma(\Phi_k, \Omega) = \gamma(\Phi, \Omega)$, если $0 \in \Omega_k$.

Теорема 7.2. *Пусть $\Phi\dot\Omega \subset N$ и на N задано непрерывное невырожденное векторное поле Ψ. Тогда поле $\Psi\Phi$ невырождено на $\dot\Omega$ и*

$$\gamma(\Psi\Phi, \Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(\Psi, \Omega_k)\, \gamma(\Phi_k, \Omega), \tag{7.5}$$

где Ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — ограниченные компоненты связности множества $R^n \setminus N$.

Сумма правой части равенства (7.5) содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых. Если $R^n \setminus N$ связно, то (7.5) означает, что $\gamma(\Psi\Phi, \Omega) = 0$.

Теорема 7.2 является следствием теоремы 7.1. Детали предоставляем читателю. ∎

В важном частном случае, когда множество $R^n \setminus N$ состоит только из двух компонент связности, причем нуль 0 лежит в ограниченной компоненте Ω_0, из теоремы 7.2 вытекает *формула произведения вращений*

$$\gamma(\Psi\Phi, \Omega) = \gamma(\Psi, \Omega_1)\, \gamma(\Phi, \Omega), \tag{7.6}$$

где Ω_1 — произвольная лежащая в $\Omega_0 \cup N$ область, граница которой лежит в N и которая содержит Ω_0.

7.3. Лемма Лере — Шаудера. Вычисление вращения векторного поля тем проще, чем меньше размерность n пространства R^n.

Опишем одну из основных схем перехода к вычислению вращения в пространстве меньшего числа измерений; соответствующее утверждение известно под названием *леммы Лере — Шаудера.*

Пусть пространство R^n является прямой суммой подпространств R_1 и R_2. Это значит, что каждая точка $x \in R^n$ однозначно представима в виде $x = u + v$, где $u \in R_1$, $v \in R_2$. Равенство $P_1 x = u$ определяет линейный оператор проектирования на R_1 по направлению R_2; равенство $P_2 x = v$ — оператор проектирования на R_2 по направлению R_1.

Теорема 7.3. *Пусть область $\Omega \subset R^n$ ограничена и пересечение $\Omega_0 = \Omega \cap R_1$ непусто. Пусть определенное на $\dot\Omega$ невырожденное непрерывное векторное поле Φ удовлетворяет условию*

$$P_2\Phi x = P_2 x \qquad (x \in \dot\Omega). \tag{7.7}$$

Тогда вращение $\gamma(\Phi, \Omega; R^n)$ поля Φ на $\dot\Omega$ совпадает с вращением $\gamma(\Phi_0, \Omega_0; R_1)$ поля $\Phi_0 = P_1\Phi = \Phi$ на границе в R_1 области Ω_0:

$$\gamma(\Phi, \Omega; R^n) = \gamma(\Phi_0, \Omega_0; R_1). \tag{7.8}$$

Доказательство. Обозначим через ω_j $(j = 1, \ldots, m)$ те компоненты связности области Ω_0, на границе которых поле Φ_0 имеет вращения γ_j, отличные от нуля. Пусть B_j — линейное отображение пространства R_1 на себя с определителем, знак которого совпадает с $\operatorname{sign}\gamma_j$. Выберем в каждой области ω_j точки $x_1^j, \ldots, x_{|\gamma_j|}^j$ и обозначим через $T_{ij}(\delta)$ замкнутые шаровые окрестности радиуса δ точек x_i^j в R^n; число δ будем считать настолько малым, что все шары $T_{ij}(\delta)$ лежат в Ω и не пересекаются друг с другом.

Построим на $\bar\Omega$ непрерывное отображение Ψ_1 со значениями в R_1 по следующему правилу. Положим вначале $\Psi_1 x = P_1\Phi x$ при $x \in \dot\Omega$ и $\Psi_1 x = B_j(P_1 x - x_i^j)$ на каждом шаре $T_{ij}(\delta)$. Затем продолжим построенное отображение на $\bar\Omega_0$ так, чтобы у него не появились новые особые точки — это возможно в силу теоремы 5.2. Наконец, продолжим его уже произвольным образом на все множество $\bar\Omega$ со значениями в R_1 — это возможно в силу теоремы 1.1.

Определим теперь на $\bar\Omega$ векторное поле $\Psi x = \Psi_1 x + P_2 x$. По построению, особыми для поля Ψ будут точки x_i^j. При этом в силу теоремы 6.3 справедливы равенства $\operatorname{ind}(x_i^j, \Psi; R^n) = \operatorname{ind}(x_i^j, \Psi; R_1)$. Поэтому из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает равенство

$\gamma(\Psi, \Omega; R^n) = \gamma(\Psi, \Omega_0; R_1)$, которое совпадает с (7.8), так как $\Psi x = \Phi x$ при $x \in \dot{\Omega}$.

Если вращение поля Φ_0 на границе каждой связной компоненты области Ω_0 равно нулю, то доказательство упрощается. В этом случае нужно вначале отображение $P_1\Phi$ продолжить до невырожденного на $\overline{\Omega}_0$ отображения со значениями в R_1, а затем продолжить его далее уже на $\overline{\Omega}$ произвольным образом до непрерывного отображения Ψ_1 со значениями в R_1. Если по Ψ_1 определить поле $\Psi x = \Psi_1 x + P_2 x$, то оба вращения $\gamma(\Psi, \Omega; R^n)$ и $\gamma(\Psi, \Omega_0; R_1)$, которые совпадают с $\gamma(\Phi, \Omega; R^n)$ и $\gamma(\Phi_0, \Omega_0; R_1)$, будут равны нулю. ∎

Теорема 7.3 позволяет привести простые примеры векторных полей любого вращения на границах областей в пространствах R^n $(n > 1)$.

Рассмотрим вначале двумерное пространство R_1. Очевидно, R_1 можно рассматривать как комплексную плоскость. Точки этой комплексной плоскости будем записывать в виде $x = \xi + i\eta$. При любом целом m через $\Phi_0^{(m)}$ обозначим поле $\Phi_0^{(m)} x = |x|^{1-m} x^m$. Это поле имеет единственную особую точку — нулевую. Вращение поля $\Phi_0^{(m)}$ на каждой окружности $S_\rho = \{x\colon |x| = \rho\}$ (и значит, на границе любой области, содержащей 0) равно m.

Перейдем к пространству R^n, где $n \geqslant 3$. Можно считать, что рассматриваемая выше комплексная плоскость является двумерным подпространством пространства R^n. Пусть P_1 — некоторый оператор проектирования на R_1, $P_2 = I - P_1$. Определим в R^n непрерывное векторное поле $\Phi^{(m)} x = \Phi_0^{(m)} P_1 x + P_2 x$. У поля $\Phi^{(m)}$ только 0 будет особой точкой. Из теоремы 7.3 вытекает, что вращение этого поля на границе любой ограниченной области Ω, содержащей 0, равно m.

Теорема 7.3 используется не только в случаях, когда осуществляется переход к пространствам меньшего числа измерений. Она играет основную роль при переносе понятия вращения на векторные поля в бесконечномерных пространствах.

7.4. Прямая сумма векторных полей. Допустим снова, что пространство R^n является прямой суммой подпространств R_1 и R_2 и пусть P_1 и P_2 — соответствующие проекторы на R_1 и R_2.

Пусть в R_1 и R_2 заданы ограниченные области Ω_1 и Ω_2 с границами $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$. *Произведением* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ областей Ω_1 и Ω_2 называют область в R^n, которая состоит из точек вида $x = u + v$, где $u \in \Omega_1$ и $v \in \Omega_2$. Граница $\dot{\Omega}$ области Ω состоит из точек вида $u + v$, где либо $u \in \dot{\Omega}_1$ и $v \in \overline{\Omega}_2$, либо $u \in \overline{\Omega}_1$ и $v \in \dot{\Omega}_2$.

Пусть на $\overline{\Omega}_1$ задано непрерывное векторное поле Φ_1 векторов, лежащих в подпространстве R_1 (иначе говоря, пусть $P_1\Phi = \Phi_1$). Аналогично, пусть на $\overline{\Omega}_2$ задано непрерывное векторное поле Φ_2 векторов, лежащих в подпространстве R_2 $(P_2\Phi_2 = \Phi_2)$. *Прямой суммой* $\Phi = \Phi_1 \dotplus \Phi_2$ полей Φ_1 и Φ_2 называют определенное на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \dot{\Omega}$ векторное поле

$$\Phi x = \Phi_1 P_1 x + \Phi_2 P_2 x. \tag{7.9}$$

Теорема 7.4. *Пусть поле Φ_1 невырождено на $\dot{\Omega}_1$, а поле Φ_2 невырождено на $\dot{\Omega}_2$. Тогда прямая сумма полей Φ_1 и Φ_2 невырождена на $\dot{\Omega}$ и*

$$\gamma(\Phi_1 \dotplus \Phi_2, \Omega) = \gamma(\Phi_1, \Omega_1) \cdot \gamma(\Phi_2, \Omega_2). \tag{7.10}$$

Теорема 7.4 является следствием теорем 7.1 и 7.3.

Рассмотрим сначала два произвольных векторных поля Φ_1' и Φ_1'' на $\overline{\Omega}_1$, удовлетворяющих условию $\Phi_1' x = \Phi_1'' x \neq 0$ $(x \in \dot{\Omega}_1)$, и два векторных поля Φ_2' и Φ_2'' на $\overline{\Omega}_2$, удовлетворяющих условию $\Phi_2' x = \Phi_2'' x \neq 0$ $(x \in \dot{\Omega}_2)$. Тогда на границе $\dot{\Omega}$ области $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ векторные поля $\Phi' = \Phi_1' \dotplus \Phi_2'$ и $\Phi'' = \Phi_1'' \dotplus \Phi_2''$ гомотопны. Действительно, векторы $\Phi' x$ и $\Phi'' x$ ни в одной точке $x \in \dot{\Omega}$ не направлены в противоположные стороны, так как из $\alpha\Phi' x + \beta\Phi'' x = 0$ $(\alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta > 0)$ при $x \in \dot{\Omega}_1 \times \overline{\Omega}_2$ вытекает, что $\alpha\Phi_1' P_1 x + \beta\Phi_1'' P_1 x = (\alpha + \beta)\Phi_1' P_1 x = 0$, а при $x \in \overline{\Omega}_1 \times \dot{\Omega}_2$, что $\alpha\Phi_2' P_2 x + \beta\Phi_2'' P_2 x = (\alpha + \beta)\Phi_2' P_2 x = 0$; эти равенства противоречат невырожденности Φ_1' на $\dot{\Omega}_1$ и Φ_2' на $\dot{\Omega}_2$.

Поэтому при вычислении вращения $\gamma(\Phi_1 \dotplus \Phi_2, \Omega)$ векторные поля Φ_1 и Φ_2 можно произвольным образом переопределить во внутренних точках областей Ω_1 и Ω_2. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что как поле Φ_1 в области Ω_1, так и поле Φ_2 в области Ω_2 имеют конечное число особых точек. Пусть $u_1, \ldots, u_p$ — особые точки в Ω_1 поля Φ_1, а $v_1, \ldots, v_q$ —

особые точки в Ω_2 поля Φ_2. Тогда u_i+v_j $(i=1, \ldots, p;\ j=1, \ldots, q)$ — особые точки прямой суммы $\Phi_1 \dotplus \Phi_2$ в области Ω.

Из теоремы 4.3 об алгебраическом числе особых точек вытекает, что

$$\gamma(\Phi_1 \dotplus \Phi_2, \Omega) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q} \operatorname{ind}(u_i+v_j, \Phi_1 \dotplus \Phi_2). \tag{7.11}$$

Далее, при любых i, j

$$\operatorname{ind}(u_i+v_j, \Phi_1 \dotplus \Phi_2) = \operatorname{ind}(u_i, \Phi_1) \cdot \operatorname{ind}(v_j, \Phi_2). \tag{7.12}$$

Действительно, поле $\Phi_1 \dotplus \Phi_2$ можно представить в виде суперпозиции $\Phi_1 \dotplus \Phi_2 = \Psi_1^{(i,j)}\Psi_2^{(i,j)}$ двух векторных полей $\Psi_1^{(i,j)}x = \Phi_1(P_1x+u_i)+P_2x$, $\Psi_2^{(i,j)}x = P_1x-u_i+\Phi_2P_2x$, и, в силу теоремы 7.1,

$$\operatorname{ind}(u_i+v_j, \Phi_1 \dotplus \Phi_2) = \operatorname{ind}\left(0, \Psi_1^{(i,j)}\right) \cdot \operatorname{ind}\left(u_i+v_j, \Psi_2^{(i,j)}\right).$$

Но, в силу теоремы 7.3,

$$\operatorname{ind}\left(0, \Psi_1^{(i,j)}\right) = \operatorname{ind}(u_i, \Phi_1),$$
$$\operatorname{ind}\left(u_i+v_j, \Psi_2^{(i,j)}\right) = \operatorname{ind}(v_j, \Phi_2)$$

и (7.12) доказано. Из (7.11) и (7.12) вытекает равенство

$$\gamma(\Phi_1 \dotplus \Phi_2, \Omega) = \left[\sum_{i=1}^{p} \operatorname{ind}(u_i, \Phi_1)\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{q} \operatorname{ind}(v_j, \Phi_2)\right],$$

которое совпадает с (7.10). ∎

7.5. Теорема о приводимом векторном поле. Укажем одно обобщение леммы Лере — Шаудера. Пусть, как выше, R^n является прямой суммой подпространств R_1 и R_2; пусть P_1 и P_2 — соответствующие линейные проекторы на R_1 и R_2.

Определенное на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R^n$ непрерывное векторное поле Φ назовем *P_1-приводимым*, если из $P_2x = P_2y$ $(x, y \in \overline{\Omega})$ вытекает равенство $P_2\Phi x = P_2\Phi y$. Из P_1-приводимости поля Φ вытекает, что на замыкании $\overline{Q}$ в R_2 области $Q = P_2\Omega$ определено непрерывное векторное поле

$$\mathrm{X}\, P_2x = P_2\Phi x \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{7.13}$$

Множество N особых точек поля (7.13) содержит, конечно, проекции на R_2 всех особых точек поля Φ; оно может содержать и другие точки. Ниже предполагается, что у поля (7.13) нет особых точек на $\dot{Q}$.

При любом $v \in N$ векторное поле в R_1, определенное равенством

$$\Psi_v u = P_1\Phi(u+v), \tag{7.14}$$

невырождено на границе $\dot{\Omega}_v$ области $\Omega_v = \{u : u+v \in \Omega\}$ и поэтому определено вращение $\gamma(\Psi_v, \dot{\Omega}_v)$ этого поля на $\dot{\Omega}_v$. Замкнутое множество N_0 особых точек $v \in N$ назовем *стационарным*, если вращение $\gamma(\Psi_v, \dot{\Omega}_v)$ одинаково при всех $v \in N_0$; это общее вращение обозначим через $\varkappa(\Phi, N_0)$. Множество $N_0 \subset N$, очевидно, стационарно, если оно связно.

Если поле (7.14) невырождено на границе $\dot{\Omega}_v$ области Ω_v при некотором $v = v_0$, то из непрерывности поля Φ вытекает, что поля (7.14) будут невырожденными на $\dot{\Omega}_v$ и при достаточно близких к v_0 значениях v. При этом, в силу теорем 2.1 и 4.2, вращения $\gamma(\Psi_v, \Omega_v)$ полей (7.14) на $\dot{\Omega}_v$ для этих v будут совпадать с вращением $\gamma(\Psi_{v_0}, \Omega_{v_0})$. Тем самым, вращение $\gamma(\Psi_v, \Omega_v)$ является непрерывной функцией, определенной в некоторой окрестности U множества N. Без ограничения общности можно считать, что окрестность U состоит из конечного числа компонент связности $U_1, \ldots, U_s$, на каждой из которых вращение $\gamma(\Psi_v, \Omega_v)$ принимает постоянное значение. Замкнутые множества $N_\sigma = N \cap U_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$, очевидно, стационарны. Таким образом, множество N является объединением конечного числа стационарных множеств.

Теорема 7.5. *Пусть непрерывное векторное поле Φ определено на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω и P_1-приводимо. Пусть поле Φ невырождено на $\dot{\Omega}$, а поле (7.13) невырождено на границе области $P_2\Omega$ в R_2. Тогда*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \varkappa(\Phi, N_1)\operatorname{ind}(N_1, \mathrm{X}) + \ldots + \varkappa(\Phi, N_s)\operatorname{ind}(N_s, \mathrm{X}), \tag{7.15}$$

где N_σ — стационарные множества особых точек поля (7.13), из которых состоит N, а $\operatorname{ind}(N_\sigma, \mathrm{X})$ — вращение поля X на границах малых окрестностей в R_2 множества N_σ.

Доказательство предоставляем читателю. ∎

Если в условиях теоремы 7.5 все множество N стационарно, то формула (7.15) принимает особо простой вид:

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \varkappa(\Phi, N)\,\gamma(\mathrm{X}, P_2\Omega;\ R_2). \tag{7.16}$$

7.6. Формула сложения вращений. В заключение параграфа приведем также без доказательства одну теорему специального характера; ранее она была установлена М. А. Красносельским (УМН **6**, № 2 (1951)) в частной ситуации.

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве R^n с базисом $e_1, \ldots, e_n$ и пусть в каждой точке $x \in \dot{\Omega}$ задана система $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ линейно независимых векторов, причем при каждом j векторное поле $g_j(x)$ непрерывно. Обозначим через $\varepsilon(e, g)$ знак определителя матрицы перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $g_1(x), \ldots, g_n(x)$.

Теорема 7. 6. *Пусть непрерывные невырожденные на $\dot{\Omega}$ поля Φ и Ψ имеют вид*

$$\Phi x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) e_i, \qquad \Psi x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) g_i(x) \qquad (x \in \dot{\Omega}). \quad (7.17)$$

Тогда их вращения на $\dot{\Omega}$ связаны равенством

$$\gamma(\Psi, \Omega) = \varepsilon(e, g)[\gamma(\Phi, \Omega) - \gamma(g, \Omega)], \qquad (7.18)$$

где $\gamma(g, \Omega)$ — вращение на $\dot{\Omega}$ поля $gx = g_1(x)$.

§ 8. Периодические и нечетные векторные поля

8.1. Периодические отображения. Пусть S — единичная сфера в R^n, U и V — непрерывные отображения S в себя. Определенное на S нормированное непрерывное векторное поле Φ назовем *$\{U, V\}$-симметричным*, если

$$\Phi U x = V \Phi x \qquad (x \in S). \qquad (8.1)$$

Обозначим через $\gamma(U)$, $\gamma(V)$ вращения на S невырожденных полей U и V. Если выполнено (8.1), то из формулы (7.6) произведения вращений вытекает равенство $\gamma(\Phi, S)\gamma(U) = \gamma(V)\gamma(\Phi, S)$. Поэтому *вращение $\{U, V\}$-симметричного векторного поля Φ на S равно нулю, если $\gamma(U) \neq \gamma(V)$.*

Говорят, что отображение U сферы S в себя *периодическое* и имеет *период p*, если $U \neq I$, $U^2 \neq I, \ldots, U^{p-1} \neq I$ и $U^p = I$. Если непрерывное отображение U сферы S в себя имеет период p, то в силу (7.6) справедливо равенство $[\gamma(U)]^p = 1$. Поэтому либо $\gamma(U) = 1$, либо $\gamma(U) = -1$,

Периодическое отображение U периода p называется *невырожденным*, если ни одно из отображений $U, \ldots, U^{p-1}$ не имеет неподвижных точек на S. Из невырожденности периодического отображения U периода p вытекает невырожденность всех отображений $U^2, U^3, \ldots, U^{p-1}$.

Если периодическое отображение U сферы S в себя невырождено, то при любом $k = 1, \ldots, p-1$ и любом $x \in S$ векторы $U^k x$ и $-x$ не направлены в противоположные стороны. В силу теоремы 2.1 отсюда вытекает, что векторные поля U^k $(k = 1, \ldots, p)$ гомотопны полю $-I$, вращение которого на S равно $(-1)^n$. Поэтому $\gamma(U^k) = (-1)^n$ при всех $k = 1, \ldots, p-1$. Но с другой стороны, из формулы (7.6) о произведении вращений вытекает, что $\gamma(U^k) = [\gamma(U)]^k = (-1)^{nk}$. Поэтому при нечетном n обязательно $p = 2$.

Периодические отображения U сферы S в себя периода 2 называются *инволюциями*. Для невырожденной инволюции U в четномерном пространстве справедливо равенство $\gamma(U) = 1$, а в нечетномерном пространстве — равенство $\gamma(U) = -1$. Невырожденные периодические отображения U, период которых отличен от 2, существуют только в четномерных пространствах; для них $\gamma(U) = 1$.

Ниже изучаются $\{U, V\}$-симметричные поля в случае, когда U и V являются периодическими отображениями периодов p и q соответственно, причем p кратно q.

8.2. Принцип сравнения. Начнем с общей теоремы*), относящейся к случаю, когда периодическое отображение U невырождено; отображение V может быть равно и I (тогда $q = 1$).

Теорема 8.1. *Пусть U и V — два периодических отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p и отображение U невырождено. Пусть Φ и Ψ — два непрерывных $\{U, V\}$-симметричных векторных поля. Тогда*

$$\gamma(\Phi, S) \equiv \gamma(\Psi, S) \pmod{p}. \qquad (8.2)$$

Изложим схему доказательства теоремы 8.1.

Если W — некоторое нормированное векторное поле на S, то той же буквой будем обозначать его естественное продолжение: $Wx = \|x\| W\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ при $\|x\| > 0$ и $W0 = 0$. Из теоремы 4.3 вытекает, что вращение естественного продолжения на каждой сфере $\{x: \|x\| = R\}$ совпадает с вращением на единичной сфере S. Ниже рассматриваются естественные продолжения нормированных векторных полей Φ и Ψ и отображений U и V (которые можно рассматривать как нормированные векторные поля).

Пусть T — шаровой слой $1 \leqslant \|x\| \leqslant 2$. Граница этого слоя состоит из сферы $S_1 = S$ и сферы $S_2 = \{x: \|x\| = 2\}$. Если $M \subset S$, то через M^0 будем обозначать множество тех точек $x \in T$, для кото-

*) М. А. Красносельский, ДАН СССР **101**, № 3 (1955).

рых $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$. Обозначим через Σ настолько мелкое симплициальное разбиение сферы S, что каждый замкнутый симплекс σ этого разбиения не пересекается с множествами $U\sigma, \ldots, U^{p-1}\sigma$. Через Q будем обозначать совокупность точек всех $(n-2)$-мерных замкнутых симплексов из Σ. Пусть $F = Q \cup UQ \cup \ldots \cup U^{p-1}Q$. Множество F инвариантно относительно преобразования U.

Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — все $(n-1)$-мерные замкнутые симплексы разбиения Σ, а $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ — их границы. Множества Γ_i^0 замкнуты; размерность каждого из них равна $n-1$. Любое невырожденное непрерывное векторное поле, заданное на замкнутой части множества Γ_i^0, можно продолжить на все Γ_i^0 без особых точек.

В частности, можно определить на Γ_1^0 невырожденное векторное поле X_1, совпадающее с Φ на Γ_1 и с Ψ на $\Gamma_1^0 \cap S_2$. Затем поле X_1 можно продолжить на все множества $U\Gamma_1^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_1^0$ (они не пересекаются друг с другом) при помощи равенств

$$\mathrm{X}_1 U^i x = V^i \mathrm{X}_1 x \qquad (i = 1, \ldots, p-1). \tag{8.3}$$

Полученное поле может оказаться определенным на некоторой части множества Γ_2^0; в силу $\{U, V\}$-симметричности полей Φ и Ψ и (8.3) оно будет совпадать с полем Φ в точках, в которых оно определено и которые лежат на S, и с полем Ψ в точках, в которых оно определено и которые лежат на S_2. Поэтому это поле можно продолжить на более широкое множество, содержащее Γ_2^0, положив его равным Φ на Γ_2, равным Ψ на $\Gamma_2^0 \cap S_2$ и произвольно продолжив его без особых точек на Γ_2^0. Затем полученное поле можно распространить на все множества $U\Gamma_2^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_2^0$ (они снова не пересекаются друг с другом) при помощи равенств (8.3). Продолжая описанную процедуру, получим определенное на множестве F^0 невырожденное векторное поле, которое по-прежнему будем обозначать через X_1, для которого будет справедливо равенство

$$\mathrm{X}_1 U x = V \mathrm{X}_1 x \qquad (x \in F^0). \tag{8.4}$$

Обозначим через X_2 продолжение поля X_1 на множество $F^0 \cup S \cup S_2$, совпадающее с Φ на S и с Ψ на S_2. Далее, обозначим через X_3 произвольное непрерывное продолжение поля X_2 на весь шаровой слой T, обладающее свойством

$$\mathrm{X}_3 U = V \mathrm{X}_3. \tag{8.5}$$

Продолжение X_3 удобно строить последовательно: сначала построить продолжение на σ_1^0, затем определить его на $U\sigma_1^0, \ldots, U^{p-1}\sigma_1^0$ так, чтобы выполнялось равенство (8.5); после этого произвольно продолжить на σ_2^0, затем определить его на $U\sigma_2^0, \ldots, U^{p-1}\sigma_2^0$ так, чтобы снова выполнялось равенство (8.5), и т. д.

Множество $F^0 \cup S \cup S_2$ разбивает слой T на не более чем счетное число компонент. Лишь в конечном числе $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(r)}$ этих компонент поле X_3 будет иметь особые точки, так как в противном случае особые точки были бы и на границе одной из компонент, на которой поле X_3 совпадает с невырожденным полем X_2. Система $G^{(1)}, \ldots, G^{(r)}$ может быть записана в виде

$$G_1, UG_1, \ldots, U^{p-1}G_1; \ldots; G_s, UG_s, \ldots, U^{p-1}G_s. \tag{8.6}$$

Обозначим через X_4 сужение поля X_3 на множество, которое получается выбрасыванием из слоя T множеств (8.6). Поле X_4 невырождено и в силу (8.5) обладает свойством

$$\mathrm{X}_4 U = V \mathrm{X}_4. \tag{8.7}$$

В силу теоремы 1.2 поле X_4 можно продолжить на множества $G_1, \ldots, G_s$ так, чтобы в каждом из этих множеств оно имело лишь одну особую точку. Это продолженное поле, в силу (8.7), можно, наконец, распространить на все остальные множества (8.6) так, чтобы на всем слое T полученное поле X удовлетворяло условию $\mathrm{X}U = V\mathrm{X}$. Построенное поле X совпадает с Φ на S, совпадает с Ψ на S_2, имеет в слое T конечное число особых точек (по одной в каждой компоненте (8.6)). Пусть x_i $(i = 1, \ldots, s)$ — особая точка поля X в компоненте G_i. Тогда $x_1, Ux_1, \ldots, U^{p-1}x_1; \ldots; x_s, Ux_s, \ldots, U^{p-1}x_s$ — все особые точки поля X.

Из свойства 2 вращения вытекает, что $\gamma(\mathrm{X}, T) = \gamma(\Psi, S) - \gamma(\Phi, S)$. Поэтому из теоремы 4.3 об алгебраическом числе особых точек вытекает равенство

$$\gamma(\Psi, S) - \gamma(\Phi, S) = \operatorname{ind}(x_1, \mathrm{X}) + \ldots + \operatorname{ind}(U^{p-1}x_1, \mathrm{X}) + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{ind}(x_s, \mathrm{X}) + \ldots + \operatorname{ind}(U^{p-1}x_s, \mathrm{X}). \tag{8.8}$$

Из теоремы 7.1 о произведении индексов вытекает равенство $\operatorname{ind}(Ux_i, \mathrm{X}) = \operatorname{ind}(x_i, \mathrm{X}) \cdot \gamma(U) \cdot \gamma(V)$, откуда $\operatorname{ind}(U^j x_i, \mathrm{X}) = [\gamma(U) \cdot \gamma(V)]^j \cdot \operatorname{ind}(x_i, \mathrm{X})$, и так как нас интересует лишь случай, когда $\gamma(U) = \gamma(V)$, то $\operatorname{ind}(U^j x_i, \mathrm{X}) = \operatorname{ind}(x_i, \mathrm{X})$ $(i = 1, \ldots, s;$ $j = 1, \ldots, p-1)$. Подставляя полученные выражения для индексов особых точек в (8.8), получим равенство

$$\gamma(\Psi, S) - \gamma(\Phi, S) = p\,[\operatorname{ind}(x_1, \mathrm{X}) + \ldots + \operatorname{ind}(x_s, \mathrm{X})],$$

из которого следует (8.2). ∎

8.3. Частные случаи. Утверждение теоремы 8.1 означает, что вращения $\gamma(\Phi, S)$ всех $\{U, V\}$-симметричных (относительно фиксированных периодических отображений U и V) нормированных векторных полей Φ сравнимы по модулю p, если U невырождено. Соответствующий элемент кольца вычетов C^p по модулю p обозначим через $\varkappa(U, V)$ и назовем *индексом пары* U, V.

Для вычисления индекса $\varkappa(U, V)$ достаточно уметь по паре отображений U и V конструировать одно такое

$\{U, V\}$-симметричное нормированное непрерывное векторное поле Ψ, вращение которого просто вычисляется. В ряде случаев это сделать просто.

Пусть отображение V имеет на S неподвижные точки. Выберем одну из них — точку x_0 и положим $\Psi x = x_0$. Тогда $\Psi U = V\Psi$. Так как вращение поля Ψ на S равно нулю, то из теоремы 8.1 вытекает

Теорема 8.2. *Пусть U и V — два периодических отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p, отображение U невырождено, а отображение V имеет на S по крайней мере одну неподвижную точку. Тогда $\varkappa(U, V) = 0$.*

Если U и V удовлетворяют условиям теоремы 8.2, то для каждого $\{U, V\}$-симметричного нормированного поля Φ в силу теоремы 8.1 справедливо равенство $\gamma(\Phi, S) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

Рассмотрим частный случай, когда $U = V$. В этом случае поле $\Psi x = x$ $\{U, V\}$-симметрично и его вращение на S равно 1. Поэтому из теоремы 8.1 следует

Теорема 8.3. *Пусть U — невырожденное периодическое отображение сферы S в себя периода p. Тогда $\varkappa(U, U) = 1$.*

Из теорем 8.1 и 8.3 вытекает, что для каждого $\{U, U\}$-симметричного (где U невырождено) непрерывного нормированного векторного поля Φ справедливо равенство $\gamma(\Phi, S) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Рассмотрим общий случай в двумерном пространстве R^2. В этом случае периодическое отображение U невырождено в том и только том случае, когда $\gamma(U) = 1$.

Пусть U — невырожденное периодическое отображение периода p. Для каждой точки $a \in S$ все точки a, Ua, ..., $U^{p-1}a$ различны. Существует единственное целое число k, удовлетворяющее неравенствам $0 < k < p$, для которого полудуги $[a, U^k a)$, $[U^k a, U^{2k} a)$, ..., $[U^{(p-1)k}a, a)$ (отсчитываемые против часовой стрелки) попарно не пересекаются и покрывают всю сферу S. Число k, очевидно, не зависит от выбора точки $a \in S$; обозначим его через $\sigma(U)$.

Теорема 8.4. *Пусть $n = 2$ и пусть U и V — невырожденные периодические отображения окружности S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p. Тогда $\varkappa(U, V) = pq^{-1}\sigma^{-1}(U)\sigma(V)$.*

Для доказательства выберем на окружности S две точки a, b и определим сначала поле Ψ на дуге $[a, U^k a]$, где $k = \sigma^{-1}(U)$, так, чтобы вектор Ψx при движении точки x от a до $U^k a$ монотонно поворачивался против часовой стрелки от b до $V^k b$. Далее, продолжим поле Ψ на всю окружность S при помощи равенства $\Psi U^i = V^i\Psi$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Полученное поле Ψ, очевидно, непрерывно. Его вращение равно pl/q, где l — число точек вида $V^i b$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$, расположенных на полудуге $[b, V^k b)$. Далее, как легко заметить, справедливо равенство $\sigma^{-1}(V)l = k$ и поэтому $l = k\sigma(V)$. Поэтому вращение поля Ψ на S равно $\frac{p}{q}\sigma^{-1}(U)\sigma(V)$, откуда и следует наше утверждение. ∎

Теорема 8.4 верна и при $n > 2$. Общая теория периодических отображений развита П. Смитом (см. прибавление В в книге С. Лефшеца «Алгебраическая топология», ИЛ, 1949); ряд результатов получен Я. А. Израилевичем и Э. Мухамадиевым («7-я летняя математическая школа», Киев, 1970). Определение и тем более фактическое вычисление $\sigma(U)$ при $n > 2$ требует тонких построений. Ограничимся двумя утверждениями, формулировки которых используют лишь индекс $\varkappa(U, V)$.

Теорема 8.5. *Пусть U и V — невырожденные периодические отображения сферы S в себя периода 2. Тогда $\varkappa(U, V) = 1$.*

Теорема 8.6. *Пусть n четно и пусть U и V — невырожденные периодические отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p. Тогда $\varkappa(U, V) = \left(\frac{p}{q}\right)^{n/2} \varkappa_0$, где $\varkappa_0$ — некоторый обратимый элемент кольца C^p.*

В частности, из теоремы 8.6 вытекает, что вращение каждого $\{U, V\}$-симметричного (относительно невырожденных отображений U и V периодов p и q соответственно) нормированного векторного поля отлично от нуля, если p не является делителем числа $\left(\frac{p}{q}\right)^{n/2}$.

8.4. Четные и нечетные векторные поля. Нормированное векторное поле Φ называется *четным*, если $\Phi(-x) = \Phi x$ $(x \in S)$, и *нечетным*, если $\Phi(-x) = -\Phi x$ $(x \in S)$. Очевидно, четное поле $\{-I, I\}$-симметрично, а нечетное поле $\{-I, -I\}$-симметрично. Из теорем 8.2 и 8.3 вытекает четность вращения четного поля на единичной сфере (если n нечетно, то оно равно нулю) и нечетность вращения нечетного поля на единичной сфере.

Нам удобно сформулировать эти утверждения в виде теорем, относящихся к полям, гомотопным четным или нечетным векторным полям. Обе теоремы в других терминах указаны Хопфом.

Теорема 8.7. *Пусть Φ — невырожденное непрерывное векторное поле на S, причем в симметричных относительно центра точках S векторы поля Φ не направлены в противоположные стороны:*

$$\frac{\Phi(-x)}{\|\Phi(-x)\|} \neq -\frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \quad (x \in S). \tag{8.9}$$

Тогда вращение поля Φ на S четно (равно нулю, если n нечетно).

Теорема 8.8. *Пусть Φ — невырожденное непрерывное векторное поле на S, причем в симметричных относительно центра точках S векторы поля Φ направлены неодинаково:*

$$\frac{\Phi(-x)}{\|\Phi(-x)\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S). \tag{8.10}$$

Тогда вращение поля Φ на S нечетно (и, следовательно, отлично от нуля).

В условиях теоремы 8.7 поле Φ линейно гомотопно четному полю $\tilde{\Phi}x = \Phi x + \Phi(-x)$, а в условиях теоремы 8.8 — нечетному полю $\tilde{\Phi}x = \Phi x - \Phi(-x)$. ∎

Четные и нечетные поля образуют частный класс $\{U, V\}$-симметричных полей относительно линейных отображений U и V. В заключение пункта мы приведем один общий признак гомотопности векторного поля Φ полю Ψ, которое $\{U, V\}$-симметрично для случая линейного V. Сформулируем этот признак в виде леммы.

Лемма 8.1. *Пусть U и V — периодические отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p, а отображение V линейно. Пусть определенное и невырожденное на S непрерывное векторное поле Φ удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i V^{p-i} \Phi U^i x \neq 0 \qquad (x \in S,\ \alpha_i > 0). \tag{8.11}$$

Тогда поле Φ гомотопно некоторому нормированному $\{U, V\}$-симметричному непрерывному векторному полю.

Для доказательства достаточно заметить, что невырожденная на S деформация

$$\Phi(\lambda, x) = (1-\lambda)\Phi x + \lambda \frac{\Phi x + V^{p-1}\Phi U x + \ldots + V\Phi U^{p-1}x}{\|\Phi x + V^{p-1}\Phi U x + \ldots + V\Phi U^{p-1}x\|}$$

соединяет поле Φ с $\{U, V\}$-симметричным полем

$$\Psi x = \frac{\Phi x + V^{p-1}\Phi U x + \ldots + V\Phi U^{p-1}x}{\|\Phi x + V^{p-1}\Phi U x + \ldots + V\Phi U^{p-1}x\|}. \ ∎$$

В наиболее важном случае, когда $p = 2$, условие (8.11) можно записать в виде

$$\frac{\Phi U x}{\|\Phi U x\|} \neq -\frac{V\Phi x}{\|V\Phi x\|} \qquad (x \in S). \tag{8.12}$$

8.5. Общая теорема. Пусть U — периодическое отображение периода p сферы S в себя. Обозначим через N_k, где k — некоторый делитель p, множество неподвижных точек отображения U^k. Множество $N(U) = \bigcup_k N_k$ является замкнутым подмножеством сферы S. Оно инвариантно для преобразования U, т. е. $UN(U) = N(U)$.

Периодическое отображение U назовем *регулярным*, если в некоторой окрестности W множества $N(U)$ можно определить непрерывное отображение П со значениями в $N(U)$, удовлетворяющее условию $\Pi U = U\Pi$. Невырожденное периодическое отображение регулярно по определению.

В качестве примера вырожденного регулярного периодического отображения рассмотрим отображение $Ux = (x - 2Px)/\|x - 2Px\|$, где P — оператор проектирования на некоторое k-мерное подпространство R^k пространства R^n. Оператор П можно определить равенством $\Pi x = (x - Px)/\|x - Px\|$.

В случае, когда $N(U)$ состоит только из неподвижных точек самого отображения U (такие отображения U называются *примитивными*), предположение о регулярности U равносильно тому, что $N(U)$ является абсолютным окрестностным ретрактом (множество N метрического пространства X называется *абсолютным окрестностным ретрактом*, если можно в некоторой окрестности W множества N определить непрерывное преобразование π со значениями в N, оставляющее неподвижными все точки N). Подобная ситуация имеет место, например, если p — простое число.

Пусть теперь U и V — два периодических отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем p кратно q. Как и выше, будем считать, что $\gamma(U) = \gamma(V)$.

Нормированные $\{U, V\}$-симметричные векторные поля Φ и Ψ назовем *полугомотопными*, если на множестве $N(U)$ можно определить деформацию $X(t, x)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ поля $\Phi x = X(0, x)$ в поле $\Psi x = X(1, x)$, обладающую свойством

$$X(t, Ux) = VX(t, x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in N(U). \tag{8.13}$$

Отношение полугомотопности является отношением эквивалентности. Поэтому все $\{U, V\}$-симметричные нормированные непрерывные векторные поля разбиваются на классы полугомотопных друг другу; обозначим множество этих классов через $\Gamma(U, V)$.

Если отображение U невырождено, то любые $\{U, V\}$-симметричные векторные поля полугомотопны и поэтому $\Gamma(U, V)$ состоит из одного элемента. Подобная ситуация имеет место и в том случае, когда отображения $U, \ldots, U^{q-1}$ не имеют неподвижных точек и множество $N(U)$ нигде не плотно на S. В общем случае множество $\Gamma(U, V)$ может состоять более чем из одного элемента. Рассмотрим, например, подробнее случай, когда отображения U и V примитивны, множество $N(U)$ гомеоморфно k-мерной сфере S^k, а множество $N(V)$ — l-мерной сфере S^l; пусть τ и σ — гомеоморфизмы между S^k и $N(U)$ и между S^l и $N(V)$ соответственно. Каждое $\{U, V\}$-симметричное векторное поле Φ определяет равенством $\Phi_0 h = \sigma^{-1}\Phi\tau h$ $(h \in S^k)$ непрерывное отображение сферы S^k в сферу S^l. Два $\{U, V\}$-симметричных поля Φ и Ψ полугомотопны в том и только том случае, когда существует определенная на S^k деформация $X(\lambda, h)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ со значениями в S^l отображения $\Phi_0 h = X(0, h)$ в отображение $\Phi_1 h = X(1, h)$. Иными словами, два $\{U, V\}$-симметричных векторных поля Φ и Ψ полугомотопны в том и только том случае, когда соответствующие отображения Φ_0 и Ψ_0 сферы S^k в сферу S^l гомотопны. Таким образом, описание множества $\Gamma(U, V)$ в рассматриваемом случае сводится к гомотопической классификации непрерывных отображений k-мерной сферы в l-мерную.

Если $k < l$, то эта гомотопическая классификация тривиальна — любые два непрерывных отображения сферы S^k в сферу S^l гомотопны. Таким образом, при $k < l$ множество $\Gamma(U, V)$ состоит из одного элемента.

Случай, когда $k \geqslant l$, более сложен. В этом случае в множество гомотопических классов отображений S^k на S^l можно естественным образом внести структуру коммутативной группы; обозначим ее через $\pi(k, l)$. Исследованию структуры групп $\pi(k, l)$ посвящена обширная литература (см. например, [54], [56]). Для многих (но не для всех!) пар k, l эта структура известна. Приведем простейшие утверждения.

Группа $\pi(0, 0)$ состоит из четырех элементов. При $k \geqslant 1$ группа $\pi(k, k)$ совпадает с группой целых чисел (это следует из классификационной теоремы Хопфа — см. § 5).

Каждая группа $\pi(k, 0)$ при $k \geqslant 1$ состоит, очевидно, из двух элементов. Каждая группа $\pi(k, 1)$ при $k \geqslant 2$ состоит из одного элемента (этот факт будет важен в § 54).

При $l \geqslant 2$ группа $\pi(k, l)$ бесконечна (счетна) в том и только том случае, если $l = 2r$ и $k = 4r - 1$. Таким образом, бесконечны группы $\pi(3, 2)$, $\pi(7, 4)$, $\pi(11, 6)$ и т. д.

При $l > 2$ группа $\pi(l + 1, l)$ состоит ровно из двух элементов. Группа $\pi(6,3)$ состоит из двенадцати элементов, группа $\pi(8, 5)$ — из двадцати четырех элементов и т. д.

Наконец, группы $\pi(l + r, l)$ при всех достаточно больших l одинаковы — они полностью определяются числом r.

Вернемся к исследованию $\{U, V\}$-симметричных полей. Приведем одну общую теорему *).

Теорема 8.9. *Пусть U и V — два периодических отображения сферы S в себя периодов p и q соответственно, причем q является делителем p. Пусть Φ и Ψ — два непрерывных $\{U, V\}$-симметричных полугомотопных друг другу векторных поля. Пусть, наконец, отображение U регулярно. Тогда* $\gamma(\Phi, S) \equiv \gamma(\Psi, S) \pmod p$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 8.1. Будем пользоваться обозначениями, введенными в этом доказательстве.

Пусть W — окрестность множества $N(U)$, на которой определен оператор П. Существует такое положительное число δ, что множества σ, $U\sigma$, ..., $U^{p-1}\sigma$, где σ — пересекающийся с $S \setminus W$ симплекс с диаметром меньше δ, попарно не пересекаются. Обозначим через P содержащий $S \setminus W$ полиэдр, составленный из пересекающихся с $S \setminus W$ симплексов, диаметры которых меньше δ. Множество $G = P \cup UP \cup \ldots \cup U^{p-1}P$ инвариантно для отображения U.

Через Q обозначим совокупность точек всех $(n-2)$-мерных замкнутых симплексов из естественной триангуляции Σ полиэдра P.

*) М. А. Красносельский, ДАН СССР **101**, № 3 (1955); П. П. Забрейко, Вестник Ярославского гос. ун-та 2 (1973).

Множество $F = Q \cup UQ \cup \ldots \cup U^{p-1}Q$ инвариантно относительно U. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — все $(n-1)$-мерные замкнутые симплексы из Σ, а $\Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ — их границы.

Определим поле X_0 на дополнении к множеству G^0 равенством $X_0x = X\left(\|x\| - 1, \Pi \frac{x}{\|x\|}\right)$. В силу (8.13) оно совпадает на S с полем Φ, а на сфере $\|x\| = 2$ — с полем Ψ. Кроме того, поле X_0 удовлетворяет условию $X_0U = VX_0$.

Поле X_0 может оказаться определенным на части множества Γ_1^0. Определим его тогда на всем Γ_1^0, положив $X_0x = \Phi x$ при $x \in \Gamma_1$, $X_0x = \Psi x$ при $x \in S_2 \cap \Gamma_1^0$, а затем продолжив его без особых точек на все Γ_1^0. Полученное поле распространим далее на множества $U\Gamma_1^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_1^0$ при помощи равенства $X_1U^ix = V^iX_1x$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Затем распространим аналогичным способом полученное поле на множества $\Gamma_2^0, U\Gamma_2^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_2^0$, на множества $\Gamma_3^0, U\Gamma_3^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_3^0$ и т. д. до тех пор, пока продолжаемое поле не окажется определенным на множествах $\Gamma_m^0, U\Gamma_m^0, \ldots, U^{p-1}\Gamma_m^0$. В результате получим определенное на множестве $[(S \setminus G) \cup F]^0$ непрерывное векторное поле X_1 без особых точек, для которого $X_1U = VX_1$ и которое совпадает с полем Φ на $(S \setminus G) \cup F$ и с полем Ψ на $S_2 \cap [(S \setminus G) \cup F]^0$.

Остальные рассуждения при доказательстве теоремы 8.9 полностью совпадают с соответствующими рассуждениями при доказательстве теоремы 8.1. ∎

Нам неизвестно, справедливо ли утверждение теоремы 8.9 без предположения о регулярности отображения U.

8.6. Векторные поля, симметричные относительно подпространства. Утверждение теоремы 8.9 означает, что по модулю p вращение каждого невырожденного и периодического относительно заданных отображений U и V непрерывного векторного поля Φ на S однозначно определяется классом $\mathfrak{R}$ всех полугомотопных Φ векторных полей; соответствующий элемент кольца C^p вычетов по модулю p обозначим через $\varkappa(U, V; \mathfrak{R})$.

В ряде случаев по заданному периодическому относительно отображений U и V векторному полю Φ удается построить такое полугомотопное Φ поле Φ_0, вращение которого вычисляется или оценивается сравнительно просто. Это позволяет вычислить или оценить вращение первоначального поля. В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$Ux = Vx = \frac{-x + 2Px}{\|x - 2Px\|}, \tag{8.14}$$

где P — некоторый линейный оператор проектирования на k-мерное подпространство R^k пространства R^n. Отображения U и V имеют период 2; множество $N(U) = N(V)$ совпадает с множеством неподвижных точек и является $(k-1)$-мерной сферой, которая ниже обозначается через S_0, $S_0 \subset R^k$.

Пусть Φ — нормированное $\{U, V\}$-симметричное векторное поле. Положим $\Phi_0 x = \Phi x$ $(x \in S_0)$. Поле Φ_0 невырождено. Обозначим через $\gamma(\Phi_0, S_0)$ вращение на S_0 поля Φ_0, рассматриваемого как векторное поле в R^k.

Определенное на S векторное поле

$$\Psi x = \frac{\| Qx \| \Phi_0 \left(\frac{Qx}{\| Qx \|} \right) + Px}{\left\| \| Qx \| \Phi_0 \left(\frac{Qx}{\| Qx \|} \right) + Px \right\|} \quad (Q = I - P,\ x \in S),$$

очевидно, невырождено и $\{U, V\}$-симметрично. Так как $\Psi x = \Phi x$ $(x \in S_0)$, то поля Φ и Ψ полугомотопны. Из теоремы 8.9 вытекает, что их вращения на S имеют одинаковую четность.

В силу теоремы 7.3 вращение поля Ψ на S (или, что то же, вращение на S поля $\Psi_1 x = \| Qx \| \Phi_0 \left(\frac{Qx}{\| Qx \|} \right) + Px$) совпадает с $\gamma(\Phi_0, S_0)$. Таким образом, вращение поля Φ на S имеет ту же четность, что и вращение сужения Ψ этого поля на S_0. Применяя лемму 8.1, приходим к более общему утверждению [22].

Теорема 8.10. *Пусть Φ — невырожденное и непрерывное на S векторное поле, причем*

$$\frac{\Phi U x}{\| \Phi U x \|} \neq -U \left(\frac{\Phi x}{\| \Phi x \|} \right) \quad (x \in S), \tag{8.15}$$

где U определено равенством (8.14).

Тогда вращение поля Φ на S имеет ту же четность, что и вращение на S_0 невырожденного поля

$$\Phi_1 x = (\Phi U x + U \Phi x)/2 \quad (x \in S_0). \tag{8.16}$$

§ 9. Специальные покрытия сфер

9.1. Род множества. Через S обозначим единичную сферу $\| x \| = 1$ в пространстве R^n. Сфера S имеет размерность $n-1$. Замкнутое множество $F \subset S$ назовем *множеством рода* 1, если каждая связная компонента множества $\{x\colon x \in F$ или $-x \in F\}$ не содержит ни одной пары диаметрально противоположных точек.

Лемма 9.1. *Пусть F — множество рода* 1. *Тогда при всех достаточно малых ε род множества $F(\varepsilon) = \{x\colon \rho(x, F) \leqslant \varepsilon, x \in S\}$ также равен* 1.

Доказательство предоставляем читателю.

Множество $M \subset S$ называется *множеством рода k*, если его можно покрыть k множествами рода 1 и нельзя покрыть $k-1$ множествами рода 1. Из леммы 9.1 вытекает, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ род множеств $M(\varepsilon) = \{x\colon \rho(x, M) \leqslant \varepsilon, x \in S\}$ совпадает с родом множества M. Отметим еще, что при переходе к меньшим множествам род либо сохраняется, либо убывает.

Целью настоящего пункта является доказательство следующего утверждения.

Теорема 9.1. *Род сферы $S \subset R^n$ равен n.*

Доказательство. Покажем вначале, что род сферы S не превышает n. Для этого построим по любому $\delta \in (0, 1)$ систему множеств

$$F_i = \{x\colon x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in S;\ |\xi_i| \geqslant \delta\}$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Каждое из этих множеств состоит из двух симметричных относительно центра связных компонент, поэтому его род равен 1. Если δ близко к 1, то множества $F_1, \ldots, F_n$ не покрывают сферу S; если же δ мало, то покрывают.

Нам осталось показать, что сферу S нельзя покрыть $n-1$ множествами рода 1.

Предположим противное. Пусть $F_1, \ldots, F_k$, где $k < n$ — покрытие сферы S множествами рода 1. В силу леммы 9.1 можно считать, что каждое множество F_i состоит из конечного числа связных компонент. При этом каждое F_i можно считать объединением двух непересекающихся замкнутых множеств F_{i1} и F_{i2}, каждое из которых не содержит ни одной пары диаметрально противоположных точек (докажите!).

Определим на сфере S непрерывные функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ равенством

$$\varphi_i(x) = \frac{\rho(x, F_{i1}) - \rho(x, F_{i2})}{\rho(x, F_{i1}) + \rho(x, F_{i2})} - \frac{\rho(-x, F_{i1}) - \rho(-x, F_{i2})}{\rho(-x, F_{i1}) + \rho(-x, F_{i2})}.$$

Каждая из этих функций нечетна, поэтому нечетно и векторное поле $\Phi x = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), 0, \ldots, 0\}$ $(x \in S)$. Функция $\varphi_i(x)$ принимает положительные значения на множестве F_{i2} и отрицательные на множестве F_{i1}, поэтому поле Φ невырождено на каждом множестве F_i, а значит, и на всей сфере S. Из теоремы 8.8 вытекает, что вращение $\gamma(\Phi, S)$ поля Φ на S нечетно.

С другой стороны, $\gamma(\Phi, S) = 0$, так как поле Φ линейно гомотопно полю $\Psi x = \{0, \ldots, 0, 1\}$ с нулевым вращением. Мы пришли к противоречию. ∎

Замкнутое множество F в пространстве П имеет, по определению, *категорию* 1, если его можно непрерывной деформацией стянуть в точку. Множество $M \subset \Pi$ имеет *категорию* n, если его можно покрыть n множествами категории 1 и нельзя покрыть $n-1$ множествами категории 1.

Вернемся к изучению сферы S. Если в этой сфере отождествить диаметрально противоположные точки, то мы получим $(n-1)$-мерное проективное пространство П (см., например, [1], [54]). Через $\tau(x)$ обозначим точку пространства П, которая соответствует точке $x \in S$. Нетрудно видеть, что род множества $M \subset S$ совпадает с категорией множества $\tau(M)$ в проективном пространстве П. Поэтому из теоремы 9.1 вытекает

Теорема 9.2. *Категория проективного пространства на* 1 *больше его размерности.*

Теорема 9.2 является одним из важных фактов теории Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана, созданной для оценки числа критических точек функций (мы вернемся к этому вопросу в гл. 8). Различные доказательства теоремы 9.2 (часто в других терминах и в связи с другими проблемами) были предложены К. Борсуком, Хопфом, А. И. Фетом, М. А. Красносельским, С. Г. Крейном и др. (частичную библиографию см. в [22]). Особо нужно отметить эквивалентную теореме 8.8 известную теорему К. Борсука (Borsuk K., Fund. Math. 20 (1933)) об антиподах.

Отметим, что теорема 8.8 может быть получена как следствие теоремы 9.1.

9.2. Род относительно периодического отображения. Пусть A — периодическое периода p отображение сферы $S \subset R^n$ на себя. В этом параграфе предполагается, что $A, A^2, \ldots, A^{p-1}$ не имеют на S неподвижных точек, а $A^p x \equiv x$. Замкнутое множество $F \subset S$ назовем *множеством рода* 1 *относительно отображения* A, если $AF = F$ и если ни в одной его связной компоненте нет пары точек вида x и $A^j x$, где $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Множество $M \subset S$ назовем *множеством рода* k *относительно отображения* A, если его можно покрыть k множествами рода 1 и нельзя покрыть $k-1$ множествами рода 1.

Теорема 9.3. *Род сферы $S \subset R^n$ относительно периодического отображения A равен n.*

Эта теорема переходит в теорему 9.1 при $A = -I$.

Для случая, когда A — инволюция ($p = 2$) без неподвижных точек, эквивалентное теореме 9.3 утверждение для сферы в трехмерном пространстве доказал Д. О. Шклярский (Матем. сб. 16 (1945), 125—128). Переход к сферам любой размерности потребовал преодоления значительных трудностей и был осуществлен А. И. Фетом (ДАН СССР 95, № 6 (1954)). Понятие «род множества» введено М. А. Красносельским; ему принадлежит и общая теорема 9.3 (ДАН СССР 103, № 6 (1955)). Теорема 9.3 и ее обобщения играют важную роль при анализе критических точек и критических значений периодических функций. Из дальнейших работ, посвященных развитию теории рода, отметим исследования А. С. Шварца (Труды Моск. матем. о-ва 10 (1961), 217—272; 11 (1962), 99—126), который перенес эту теорию на произвольные расслоенные пространства. Теорема 9.3— это теорема о роде «главных расслоений» сферы.

Обозначим через $\Pi(A)$ пространство, полученное из сферы S «склеиванием» в ней точек каждого набора $x, Ax, \ldots, A^{p-1}x$. Аналогично тому, как из теоремы 9.1 вытекало утверждение теоремы 9.2, так из теоремы 9.3 вытекает, что категория пространства $\Pi(A)$ равна n.

9.3. Деформации по большим окружностям. Напомним вначале некоторые важные общие понятия, которые не связаны с теоремой 9.3.

Пусть R — некоторое метрическое пространство. Непрерывная функция $\varkappa(x; t)$ $(x \in M, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ со значениями в R называется *деформацией множества* $M \subset R$ в множество $N = \varkappa(M; 1)$, если $\varkappa(x; 0) \equiv x$ при $x \in M$. Множество $\{y\colon\ y = \varkappa(x; t), x \in M, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ называется *следом деформации* $\varkappa(x; t)$. Множество M называется *стягиваемым в точку* y_0, если можно построить деформацию этого множества в множество N, состоящее из одной точки y_0.

Вернемся к множествам на сфере $S \subset R^n$.

Пусть задана фиксированная точка $y_0 \in S$. Определим на сфере S с выброшенной точкой $-y_0$ деформацию $\varkappa(x; t; y_0)$ по следующему правилу. Если x отлична от y_0 и от $-y_0$, то через точки x, y_0, $-y_0$ проходит двумерная плоскость, пересекающая сферу S по окружности Γ радиуса 1. Соединим точки x и y_0 дугой Γ_1 этой окружности, не содержащей точку $-y_0$. Пусть α — угол между векторами x и y_0. Значение $\varkappa(x; t; y_0)$ конструируемой деформации определим как точку на дуге Γ_1, выбранную так, чтобы угол между векторами $\varkappa(x; t; y_0)$ и y_0 был равен $(1-t)\alpha$. Если x совпадает с y_0, то положим $\varkappa(y_0; t; y_0) \equiv y_0$. Построенную функцию $\varkappa(x; t; y_0)$ назовем *деформацией по большим окружностям*.

Лемма 9.2. *Пусть замкнутое множество $T \subset S$ не содержит точку $-y_0$. Пусть B — непрерывное отображение замкнутого множества $F \subset S$ на множество T.*

Тогда отображение B можно продолжить до определенного на всей сфере S непрерывного отображения B_1 так, чтобы множество B_1S лежало в ε-окрестности $U(\varepsilon)$ следов деформации $\varkappa(x; t; y_0)$ множества T в точку y_0, где ε — любое заданное положительное число.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Продолжим вначале отображение B на замкнутую окрестность $F_1 \subset S$ множества F так, чтобы множество BF_1 лежало в $U(\varepsilon)$ и, более того, чтобы след деформации $\varkappa(x; t; y_0)$ множества BF_1 лежал в $U(\varepsilon)$. Окрестность F_1 выберем так, чтобы она была полиэдром и чтобы ее граница $\dot{F}_1$ не имела общих точек с F. Отображение B можно с любой точностью δ аппроксимировать симплициальным отображением $B(\delta)$. Положим

$$B_1x = \varkappa\left[Bx; \frac{\rho(x, F)}{\rho(x, F) + \rho(x, \dot{F}_1)}; B(\delta)x\right] \quad (x \in F_1).$$

Отображение B_1 снова является непрерывным продолжением отображения B с множества F на множество F_1. Если δ достаточно мало, то след K_1 деформации $\varkappa(x; t; y_0)$ множества B_1F_1 будет снова лежать в окрестности $U(\varepsilon)$. Отображение B_1 на $\dot{F}_1$ совпадает с отображением $B(\delta)$, т. е. оно является на $\dot{F}_1$ симплициальным отображением.

Нам осталось продолжить отображение B_1 на множество $S \setminus F_1$, которое является полиэдром. Это продолжение мы построим так, чтобы выполнялось включение $B_1(S \setminus F_1) \subset K_1$. Этим доказательство будет завершено.

Произведем симплициальное разбиение полиэдра $\overline{S \setminus F_1}$; оно индуцирует некоторое симплициальное разбиение множества $\dot{F}_1$. Каждый симплекс σ (симплекс любой размерности) стягиваем в себе к каждой точке; деформацию $\nu(x; t; \sigma)$ стягивания к внутренней точке z_0 симплекса можно определить так, чтобы следы деформации точек границы симплекса не пересекались друг с другом и чтобы они заполняли весь симплекс. Тогда каждой точке $z \in \sigma$, отличной от z_0, однозначно соответствуют такие точка $u(z) \in \dot{\sigma}$ и число $t(z) \in [0, 1)$, что $\nu[u(z); t(z); z_0] \equiv z$.

Продолжение B_1 на $S \setminus F_1$ будем строить по индукции, определяя его последовательно на симплексах возрастающей размерности.

Рассмотрим вначале нульмерные симплексы (вершины симплициального разбиения). На части из них (на тех вершинах, которые лежат на $\dot{F}_1$) отображение B_1 задано. На остальных зададим произвольные значения из K_1.

Пусть отображение B_1 уже определено на всех симплексах размерности $t < s$ так, что его значения лежат в K. Оно определено и на тех симплексах размерности s, которые лежат на $\dot{F}_1$. Определим его поочередно на остальных симплексах размерности s.

Пусть σ — один из таких симплексов. На его границе $\dot{\sigma}$ отображение B_1 уже определено. Выберем в симплексе σ некоторую внутреннюю точку z_0 и зададим B_1 на всех внутренних точках z симплекса σ равенствами $B_1z = \varkappa[B_1u(z); t(z); y_0]$ при $z \in \sigma$, $z \neq z_0$ и $B_1z_0 = y_0$. По предположению, $B_1\dot{\sigma} \subset K_1$; из построения ясно, что $B_1\sigma \subset K_1$. Таким образом, при указанном способе продолжения оператора B_1 все его значения принадлежат K_1. ∎

9.4. Доказательство теоремы 9.3. Ограничимся доказательством лишь того факта, что сферу S нельзя покрыть меньше чем n множествами рода 1 относительно отображения A.

Предположим противное. Пусть сфера S покрыта множествами $F_1, F_2, \ldots, F_s$ рода 1, где $s < n$. Как и при доказательстве теоремы 9.1, можно без ограничения общности считать, что каждое множество F_i $(i = 1, \ldots \ldots, s)$ является объединением p непересекающихся замкнутых множеств $F_{i1}, \ldots, F_{ip}$, причем $AF_{i1} = F_{i2}$, $AF_{i2} = F_{i3}, \ldots, AF_{ip} = F_{i1}$.

Выберем на сфере S некоторую точку z_0 и обозначим через T_0 нульмерное множество, состоящее из точек z_0, Az_0, ..., $A^{p-1}z_0$. Так как T_0 не покрывает сферу S, то найдется такая точка $y_0 \in S$, что $-y_0 \overline{\in} T_0$. Обозначим через K_1 след деформации $\varkappa(x; t; y_0)$ по большим окружностям множества T_0 в точку y_0, а через T_1 — объединение множеств K_1, AK_1, ..., $A^{p-1}K_1$. Множество T_1 будет одномерно. Дальнейшее построение множеств T_r $(r = 0, 1, \ldots, s-1)$ будем проводить по индукции.

Пусть замкнутое $(r-1)$-мерное множество T_{r-1} уже построено. Так как по предположению $s < n$, то множество T_{r-1} не покрывает всю сферу S. Следовательно, найдется такая точка $y_{r-1} \in S$, что $-y_{r-1} \overline{\in} T_{r-1}$. Тогда через T_r обозначим r-мерное множество, являющееся объединением множеств K_{r-1}, AK_{r-1}, ..., $A^{p-1}K_{r-1}$, где K_{r-1} — след деформации $\varkappa(x; t; y_{r-1})$ множества T_{r-1} в точку y_{r-1}.

Построенное множество T_{s-1} будет $(s-1)$-мерно и не покрывает всю $(n-1)$-мерную сферу S. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что и замкнутая ε-окрестность $U(\varepsilon)$ множества T_{s-1} не покрывает S. Пусть точка $-u_0$ не принадлежит замыканию $\bar{U}(\varepsilon)$ окрестности $U(\varepsilon)$.

Мы построим ниже на S нормированное векторное поле Φ, удовлетворяющее условию

$$\Phi Ax = A\Phi x \qquad (x \in S), \tag{9.1}$$

все векторы которого отличны от $-u_0$. Тогда, с одной стороны, вращение на S этого поля будет равно нулю (оно линейно гомотопно полю $\Psi x \equiv u_0$). С другой стороны, вращение этого поля в силу теоремы 8.3 равно 1 по модулю p, т. е. оно отлично от нуля. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определим поле Φ вначале на множестве F_1, положив $\Phi x = z_0$ при $x \in F_{11}$; затем $\Phi x = Az_0$ при $x \in F_{12}$ и вообще $\Phi x = A^i z_0$ при $x \in F_{1(i+1)}$. Значения построенного на F_1 поля (отображения) Φ лежат в множестве T_0 (множество значений даже совпадает с T_0, но это для нас неважно).

В силу леммы 9.2 отображение Φ можно продолжить на множество F_{21} так, чтобы значения продолженного отображения лежали в малой окрестности множества K_1. После этого продолжим Φ на все множество F_2 так, чтобы на F_2 выполнялось равенство (9.1). Значения отображения Φ на множестве $F_1 \cup F_2$ будут лежать в малой окрестности множества T_1.

Дальнейшие рассуждения проводятся по индукции. Если на множестве $F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_r$ уже построено удовлетворяющее (9.1) отображение Φ, значения которого лежат в малой окрестности множества T_{r-1}, то по лемме 9.2 отображение Φ можно продолжить на множество $F_{(r+1)1}$ так, чтобы значения продолженного отображения лежали в малой окрестности множества K_r. После этого отображение Φ продолжается на все F_{r+1} так, чтобы равенство (9.1) имело место при всех $x \in F_{r+1}$. Значения отображения Φ на множестве $F_1 \cup \ldots \cup F_{r+1}$ будут, очевидно, лежать в малой окрестности множества T_r.

После конечного числа шагов поле Φ будет определено на множестве $F_1 \cup \ldots \cup F_s$, которое совпадает со всей сферой S. Значения построенного поля Φ будут лежать в малой окрестности множества T_{s-1}. Поэтому точка $-u_0$ не принадлежит значениям поля Φ. По построению поле Φ удовлетворяет условию (9.1). ∎

§ 10. Однородные полиномиальные поля

10.1. Четность вращения. Векторное поле

$$\Phi x = \{\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \tag{10.1}$$

называется *полиномиальным* и *однородным*, если каждая компонента φ_i является однородным некоторого порядка m_i многочленом от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Нуль 0 (нулевая точка пространства R^n) является особой точкой однородного полиномиального поля. Если у такого поля есть и ненулевая особая точка x_0, то все точки вида $\alpha x_0 (-\infty < \alpha < \infty)$ также будут особыми. Поэтому у однородного полиномиального поля Φ изолированной особой точкой может быть только нуль 0. Если однородное полиномиальное поле имеет единственную особую точку, то будем его называть *невырожденным*.

Приведем простое правило, позволяющее определять четность вращения однородного полиномиального поля на единичной сфере S, если априори известна его невырожденность.

Теорема 10.1. *Пусть $\gamma(\Phi, S)$ — вращение на единичной сфере невырожденного однородного полиномиального поля* (10.1). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) $\gamma(\Phi, S)$ *нечетно, если все числа* $m_1, \ldots, m_n$ *нечетны*,

б) $\gamma(\Phi, S)$ *четно, если хотя бы одно из чисел* $m_1, \ldots, m_n$ *четно*,

в) $\gamma(\Phi, S) = 0$, *если* $(-1)^{m_1+\ldots+m_n} = (-1)^{n+1}$.

Доказательство. Определим вспомогательное векторное поле $\Psi x = \{\xi_1^{m_1}, \xi_2^{m_2}, \ldots, \xi_n^{m_n}\}$. Это поле линейно гомотопно на S полю I, если все числа $m_1, \ldots, m_n$ нечетны. Таким образом, вращение $\gamma(\Psi, S)$ нечетно, если все числа $m_1, \ldots, m_n$ нечетны. Если же хотя бы одно число m_j четно, то поле Ψ линейно гомотопно полю X, у всех векторов которого компонента с номером j равна 1, а остальные компоненты нулевые. Поэтому $\gamma(\Psi, S) = 0$, если хотя бы одно из чисел $m_1, \ldots, m_n$ четно.

Простая проверка показывает, что поля Φ и Ψ обладают свойством $\{U, V\}$-симметрии, где $U = -I$, а V определяется диагональной матрицей

$$V = \mathrm{diag}\left((-1)^{m_1}, (-1)^{m_2}, \ldots, (-1)^{m_n}\right).$$

Применим к полям Φ и Ψ теорему 8.1. Из нее вытекает, что $\gamma(\Phi, S) \equiv \gamma(\Psi, S) \pmod 2$. Следовательно, утверждения а) и б) доказаны (для доказательства утверждения а) можно было бы непосредственно сослаться на теорему 8.8).

Из равенства $\Phi U x = V \Phi x$ $(x \in S)$ и формулы произведения вращений вытекает, что $\gamma(\Phi, S)\gamma(U, S) = \gamma(\Phi, S)\gamma(V, S)$. Но в условиях утверждения в)

$$\gamma(V, S) = (-1)^{m_1+\ldots+m_n} = (-1)^{n+1} = -\gamma(U, S).$$

Поэтому в условиях утверждения в) вращение $\gamma(\Phi, S)$ равно нулю. ∎

Авторам неизвестны простые общие алгоритмы, которые позволяют выяснить, будет ли заданное однородное полиномиальное векторное поле Φ невырождено. Неизвестны и эффективные алгоритмы вычисления $\gamma(\Phi, S)$. Исключение составляют случаи $n = 1$ и $n = 2$. В случае $n = 1$ анализ настолько прост, что мы его предоставляем читателю. Случаю $n = 2$ посвящены остальные пункты параграфа.

Из доказательства теоремы 10.1 ясно, что в ее условиях полиномиальность поля Φ роли не играет — важна лишь однородность компонент.

10.2. Однородные поля на плоскости. Исследование однородных полиномиальных векторных полей на плоскости в других терминах было проведено, по существу, еще Кронекером (см., например, [12]).

Рассмотрим на плоскости $\{\xi, \eta\}$ поле

$$\Phi x = \{P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)\}, \tag{10.2}$$

компоненты которого являются однородными многочленами соответственно степеней m_1 и m_2.

При изучении поля (10.2) важную роль играют многочлены

$$T_0(t) = P(1, t), \quad T_1(t) = Q(1, t). \tag{10.3}$$

Как легко видеть, поле (10.2) невырождено в том и только том случае, когда многочлены (10.3) не имеют общих вещественных корней и когда

$$|P(0, 1)| + |Q(0, 1)| > 0. \tag{10.4}$$

Пользуясь алгоритмом Евклида, построим такие многочлены (*ряд Штурма*)

$$T_0(t), T_1(t), \ldots, T_l(t) \tag{10.5}$$

и такие многочлены $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \ldots, \varepsilon_l(t)$, что $T_0(t) = \varepsilon_1(t) T_1(t) - T_2(t)$, $T_1(t) = \varepsilon_2(t) T_2(t) - T_3(t)$, ..., $T_{l-2}(t) = \varepsilon_{l-1}(t) T_{l-1}(t) - T_l(t)$, $T_{l-1}(t) = \varepsilon_l(t) T_l(t)$, причем степень каждого многочлена $T_i(t)$ $(i = 2, \ldots, l)$ меньше степени предыдущего многочлена $T_{i-1}(t)$. Многочлен $T_l(t)$ является общим наибольшим делителем многочленов (10.3).

Пусть при некотором фиксированном вещественном t все многочлены (10.5) принимают ненулевые значения. Обозначим тогда через $s(t)$ количество перемен знака в этой последовательности значений. Число $s(t)$ одинаково при всех достаточно больших положительных t;

обозначим его через $s(+\infty)$. Аналогично, через $s(-\infty)$ обозначим значения $s(t)$ при отрицательных и больших по абсолютной величине t.

Теорема 10.2. *Поле* (10.2) *невырождено в том и только том случае, если выполнено условие* (10.4) *и если многочлен $T_l(t)$ не имеет вещественных корней. Если поле* (10.2) *невырождено, то индекс его нулевой особой точки определяется равенством*

$$\operatorname{ind}(0, \Phi) = [1 + (-1)^{m_1+m_2}] \frac{s(+\infty) - s(-\infty)}{2}. \quad (10.6)$$

Доказательство предоставляем читателю.

Если выполнено (10.4), то для невырожденности поля (10.2) достаточно, чтобы был отличен от нуля результант многочленов (10.3) — тогда $T_l(t)$ является ненулевой постоянной. Если результант оказывается равным нулю, то многочлен $T_l(t) = \alpha_0 t^r + \alpha_1 t^{r-1} + \ldots + \alpha_r$ приходится находить. Для анализа этого многочлена можно строить вспомогательное векторное поле $\Psi(\xi, \eta) = \{r\alpha_0\xi^{r-1} + (r-1)\alpha_1\xi^{r-2}\eta + \ldots + \alpha_{r-1}\eta^{r-1}, \ \alpha_1\xi^{r-1} + 2\alpha_2\xi^{r-2}\eta + \ldots + r\alpha_r\eta^{r-1}\}$. Как оказывается (см. доказываемую ниже теорему 12.7), *многочлен $T_l(t)$ не имеет вещественных корней в том и только том случае, если нуль является изолированной особой точкой поля Ψ и* $\operatorname{ind}(0, \Psi) = 1$.

10.3. Квадратичные поля. Для анализа квадратичных полей

$$\Phi(\xi, \eta) = \{a_0\xi^2 + 2a_1\xi\eta + a_2\eta^2, \ b_0\xi^2 + 2b_1\xi\eta + b_2\eta^2\} \quad (10.7)$$

можно воспользоваться явными формулами.

Определим четыре числа

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad (10.8)$$

$$D = D_1 D_2 - 4D_3^2. \quad (10.9)$$

Если определители D_1, D_2, D_3 равны нулю, то нулевая особая точка поля (10.7) изолирована в том и только том случае, когда одна из компонент поля является знакоопределенной квадратичной формой. Иначе говоря, нулевая особая точка изолирована, если выполнено одно из неравенств

$$a_1^2 < a_0 a_2, \qquad b_1^2 < b_0 b_2; \quad (10.10)$$

в этом случае индекс нулевой особой точки равен нулю.

Если не все определители D_1, D_2, D_3 равны нулю, то векторное поле (10.7) невырождено в том и только том случае, когда $D \neq 0$. Если $D \neq 0$, то индекс $\operatorname{ind}(0, \Phi)$ нулевой особой точки определяется следующей таблицей (табл. 1).

Таблица 1

$D < 0$	$\operatorname{ind}(0, \Phi) = 0$
$D > 0, \ D_1 > 0$	$\operatorname{ind}(0, \Phi) = 2$
$D > 0, \ D_1 < 0$	$\operatorname{ind}(0, \Phi) = -2$

Последние утверждения являются простым следствием теоремы 10.2; прямое доказательство см., например, в [28].

§ 11. Гладкие векторные поля

11.1. Позитивные векторные поля. Определенное на ограниченной области Ω гладкое поле Φ назовем *позитивным*, если

$$\det \Phi'(x) \geqslant 0 \qquad (x \in \Omega).$$

Позитивное поле Φ назовем *регулярно позитивным*, если множество его сингулярных точек нигде не плотно в Ω.

Ниже используется следующая лемма, которую указал Э. Мухамадиев.

Лемма 11.1. *Пусть на Ω определена функция $A(x)$, значениями которой являются невырожденные матрицы, не имеющие вещественных собственных значений. Пусть*

$$\Phi'(x) A(x) = A(x) \Phi'(x) \qquad (x \in \Omega). \quad (11.1)$$

Тогда поле Φ позитивно.

В предположении противного, у некоторой матрицы $\Phi'(x_0)$, где $x_0 \in \Omega$, есть отрицательное собственное значение λ_0, которому соответствует нечетномерное корневое подпространство $E(x_0)$. Из (11.1) вытекает, что $A(x_0)E(x_0) \subset E(x_0)$. Поэтому у матрицы $A(x_0)$ есть вещественное собственное значение. Мы пришли к противоречию. ∎

Теорема 11.1. *Пусть непрерывное невырожденное векторное поле Φ определено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R^n$. Пусть поле Φ можно продолжить с сохранением непрерывности до определенного на $\bar{\Omega}$ поля $\tilde{\Phi}$, гладкого и позитивного в области Ω. Тогда* $\gamma(\Phi, \Omega) \geqslant 0$.

Доказательство. В силу теоремы 1.2 можно указать элемент $y_0 \in R^n$, который не принадлежит складке $\mathrm{wr}(\tilde{\Phi}, \Omega)$ и норма которого удовлетворяет неравенству $\|y_0\| < a = \inf \|\Phi x\|$. Векторное поле $\Psi x = \tilde{\Phi} x - y_0$ $(x \in \bar{\Omega})$ будет невырождено на $\dot{\Omega}$ и будет гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю Φ. Поэтому поля Φ и Ψ имеют одинаковое вращение на $\dot{\Omega}$ и нам достаточно доказать, что $\gamma(\Psi, \Omega) \geqslant 0$.

Так как точка y_0 не принадлежит складке $\mathrm{wr}(\tilde{\Phi}, \Omega)$, то все особые точки поля Ψ являются правильными для поля $\tilde{\Phi}$. Поэтому каждая особая точка поля Ψ изолирована и, следовательно, поле Ψ имеет лишь конечное число особых точек. Пусть это будут точки $x_1, \ldots, x_k$.

Очевидно, $\det \Psi'(x_i) = \det \tilde{\Phi}'(x_i) > 0$ при каждом $i = 1, \ldots, k$ и в силу теоремы 6.3 индекс каждой из особых точек равен 1. Из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает тогда, что $\gamma(\Phi, \Omega) = k \geqslant 0$. ∎

Теорема 11.2. *Пусть векторное поле Φ определено и непрерывно на замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}$, гладко и регулярно позитивно в области Ω, невырождено на границе $\dot{\Omega}$ области Ω. Пусть $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Тогда поле Φ не имеет в области Ω особых точек.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $x_0 \in \Omega$ — особая точка поля Φ. В силу регулярной позитивности поля Φ можно указать последовательность правильных для поля Φ точек $x_k \in \Omega$ $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к x_0. Рассмотрим векторные поля $\Psi_k x = \Phi x - \Phi x_k$ $(x \in \bar{\Omega};\ k = 1, 2, \ldots)$. При каждом k точка x_k является особой точкой поля Ψ_k; в силу теоремы 6.3 эта особая точка изолирована и $\mathrm{ind}(x_k, \Psi_k) = 1$.

При достаточно больших k каждое поле Ψ_k гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю Φ, так как $\|\Phi x_k\| \to 0$. Поэтому при больших k выполнено равенство $\gamma(\Psi_k, \Omega) = 0$. Обозначим через Ω_k область $\Omega \diagdown T_k$, где T_k — лежащая в Ω замкнутая шаровая окрестность $T_k = \{x\colon \|x - x_k\| \leqslant \rho\}$ точки x_k настолько малого радиуса, что на T_k нет отличных от x_k особых точек поля Ψ_k. В силу свойства 2 вращения справедливо равенство $\gamma(\Psi_k, \Omega_k) = \gamma(\Psi_k, \Omega) - \mathrm{ind}(x_k, \Psi_k) = -1$, которое противоречит теореме 11.1. ∎

Из теоремы 11.1 вытекает, что *индекс изолированной особой точки каждого позитивного поля неотрицателен. Если поле регулярно позитивно, то в силу теоремы* 11.1 *индекс изолированной особой точки строго положителен.*

Отметим, что утверждение теоремы 11.2 для позитивных полей неверно. В частности, простые примеры показывают, что у позитивного поля может быть изолированная особая точка нулевого индекса.

11.2. Аналитические поля в комплексном пространстве. Пусть Z^n — комплексное n-мерное линейное пространство. Это пространство является одновременно вещественным $2n$-мерным пространством R^{2n}. Каждую точку $z = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \in Z^n$, где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, будем считать одновременно точкой $x = \{\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2; \ldots; \xi_n, \eta_n\}$ пространства R^{2n}. Векторное поле

$$Wz = \{w_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \ldots, w_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\} \tag{11.2}$$

в пространстве Z^n, где

$$w_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = u_j(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n) + iv_j(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n) \tag{11.3}$$

является одновременно полем

$$\Phi x = \{u_1(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n), v_1(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n); \ldots \\ \ldots; u_n(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n), v_n(\xi_1, \eta_1; \ldots; \xi_n, \eta_n)\} \tag{11.4}$$

в пространстве R^{2n}.

Поле (11.2) (или, что то же, поле (11.4)) называется *аналитическим* в области $\Omega \subset Z^n$, если в этой области все компоненты $w_j(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ аналитичны как функции n комплексных переменных. В силу аналитичности компонент поля (11.2) можно утверждать, что поле (11.4) гладкое. Условия Коши — Римана равносильны тому, что при каждом фиксированном x матрица $\Phi'(x)$ коммутирует с матрицей преобразования $A = iI$. Поэтому из леммы 11.1 вытекает

Лемма 11.2. *Аналитическое векторное поле, рассматриваемое на области $\Omega \subset R^{2n}$, позитивно.*

Из этой леммы и из теоремы 11.1 вытекает

Теорема 11.3. *Пусть поле* (11.4) *аналитично в некоторой ограниченной области $\Omega \subset R^{2n}$ и непрерывно на ее замыкании $\bar{\Omega}$. Пусть это поле Φ невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда $\gamma(\Phi, \Omega) \geqslant 0$.*

11.3. Особые точки аналитического поля. Утверждение леммы 11.2 допускает существенное усиление. Как оказывается, в естественных условиях аналитическое поле регулярно позитивно, и поэтому для аналитических полей верно утверждение теоремы 11.2. Это утверждение будет получено другим путем в § 23 сразу для аналитических полей в бесконечномерном пространстве.

Теоремы, доказываемые в § 23, в приложении к аналитическим полям (11.4) означают, что в условиях теоремы 11.3 у поля (11.4) в области Ω есть лишь конечное число особых точек и это число не превышает $\gamma(\Phi, \Omega)$. Поэтому *из $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$ вытекает невырожденность аналитического поля Φ на $\bar{\Omega}$*. Отсюда в свою очередь вытекает положительность индекса каждой изолированной особой точки аналитического поля.

§ 12. Потенциальные векторные поля

12.1. Индекс невырожденного потенциала. Пусть на некоторой области $\Omega \subset R^n$ задана непрерывно дифференцируемая функция $V(x) = V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Тогда на Ω определено непрерывное векторное поле

$$\nabla V(x) = \operatorname{grad} V(x) = \{V'_{\xi_1}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, V'_{\xi_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\} \tag{12.1}$$

градиентов функции $V(x)$. Векторные поля вида (12.1) называют *потенциальными*; функцию $V(x)$ называют *потенциалом* векторного поля (12.1).

Если непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ определена при всех достаточно больших x и если при этих значениях x векторы поля (12.1) отличны от нуля, то назовем функцию $V(x)$ *невырожденным потенциалом*. Если потенциал $V(x)$ невырожден, то вращение векторного поля (12.1) на всех сферах $\|x\| = \rho$ достаточно больших радиусов ρ одинаково; это общее вращение $\operatorname{ind} V(x)$ назовем *индексом невырожденного потенциала $V(x)$*.

Невырожденные потенциалы возникают и используются во многих задачах качественной теории дифференциальных уравнений; некоторые приложения будут указаны в последующих параграфах этой главы и в последующих главах.

12.2. Квадратичные потенциалы. В качестве первого примера рассмотрим квадратичные формы

$$V(x) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j = (Ax, x), \tag{12.2}$$

где $A = (a_{ij})$ — симметричная матрица ($a_{ij} = a_{ji}$). Простой подсчет показывает, что $\operatorname{grad} V(x) = 2Ax$. Поэтому *квадратичная форма* (12.2) *является невырожденным потенциалом в том и только том случае, когда матрица A невырождена*. Из теоремы 6.1 вытекает

Теорема 12.1. *Пусть $\det A \neq 0$. Тогда квадратичный потенциал* (12.2) *невырожден и его индекс равен* $\operatorname{sign} \det A$.

В частности, индекс положительно определенной квадратичной формы равен 1.

Иногда полезны линейные потенциалы

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i\xi_i = (b, x), \tag{12.3}$$

где $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Градиент потенциала (12.3) — это векторное поле из постоянных векторов: $\operatorname{grad} V(x) = b$ ($x \in R^n$). Поэтому верна

Теорема 12.2. *Если $b \neq 0$, то линейный потенциал* (12.3) *невырожден и его индекс равен нулю.*

12.3. Четные и нечетные потенциалы. Непосредственно из определения градиента функции $V(x)$ вытекает, что он четен $(\operatorname{grad} V(-x) \equiv \operatorname{grad} V(x))$, если $V(x)$ нечетна $(V(-x) \equiv -V(x))$, и нечетен $(\operatorname{grad} V(-x) \equiv$ $\equiv -\operatorname{grad} V(x))$, если $V(x)$ четна $(V(-x) \equiv V(x))$. Поэтому из теорем 8.7 и 8.8 вытекают следующие утверждения:

Теорема 12.3. *Индекс невырожденного четного потенциала нечетен.*

Теорема 12.4. *Индекс невырожденного нечетного потенциала четен.*

Теорема 12.5. *Индекс невырожденного нечетного потенциала в нечетномерном (n нечетно) пространстве равен нулю.*

Рассмотренные в предыдущем пункте квадратичные потенциалы (12.2) — это четные потенциалы, а линейные потенциалы (12.3) — нечетные.

12.4. Однородные потенциалы. В этом пункте мы рассмотрим потенциалы $V(x)$, удовлетворяющие условию

$$V(tx) \equiv t^{\alpha} V(x) \quad (x \in R^n,\ t > 0), \tag{12.4}$$

где α — некоторое фиксированное число. Число α называется *порядком однородности* потенциала $V(x)$. Из (12.4) вытекает, что

$$(\operatorname{grad} V(x),\ x) \equiv \alpha V(x) \quad (x \in R^n). \tag{12.5}$$

Поэтому однородный потенциал невырожден, если $\alpha \neq 0$ и $V(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Теорема 12.6. *Пусть однородный потенциал $V(x)$ имеет положительный порядок однородности и пусть он принимает положительные значения при $x \neq 0$. Тогда* $\operatorname{ind} V(x) = 1$.

Доказательство. Из (12.5) вытекает, что каждый вектор $\operatorname{grad} V(x)$ образует острый угол с вектором x. Поэтому векторное поле (12.1) гомотопно на каждой сфере $\|x\| = \rho > 0$ векторному полю $\Psi x = x$. Отсюда вытекает утверждение теоремы. ∎

Аналогично доказывается, что *индекс однородного потенциала с положительным порядком однородности равен $(-1)^n$, если потенциал принимает только отрицательные значения* (при $x \neq 0$). Читателю полезно проследить за тем, как изменяются последнее утверждение и утверждение теоремы 12.6, если перейти к потенциалам с отрицательным порядком однородности.

Если априори известно, что однородный потенциал $V(x)$ невырожден, то утверждение теоремы 12.6 сохранит силу и в том случае, когда потенциал принимает неотрицательные значения.

Остановимся более подробно на однородных потенциалах $V(x) = V(\xi, \eta)$, определенных на двумерном пространстве (т. е. на функциях двух скалярных переменных). При этом для простоты рассмотрим лишь потенциалы, порядок однородности которых ненулевой. Из теоремы 12.6 вытекает, что индекс таких потенциалов равен 1, если они принимают значения одного знака. Оказывается, что это утверждение обратимо. Верна

Теорема 12.7. *Пусть индекс невырожденного однородного потенциала $V(x) = V(\xi, \eta)$ равен 1. Тогда потенциал $V(x)$ при $x \neq 0$ принимает значения одного знака.*

Эта теорема является частным случаем следующего более общего утверждения.

Теорема 12.8. *Пусть невырожденный однородный потенциал $V(x) = V(\xi, \eta)$ обращается в нуль только на $2k$ лучах, выходящих из начала координат. Тогда*

$$\operatorname{ind} V(x) = 1 - k. \tag{12.6}$$

Формула (12.6) геометрически почти очевидна.

Заметим, что невырожденный однородный потенциал не может обращаться в нуль на бесконечном числе лучей (в противном случае градиент потенциала обращался бы в нуль во всех точках каждого предельного из этих лучей). Количество же лучей, на которых он обращается в нуль, всегда четно.

В связи с теоремой 12.7 естественно вернуться к теореме 10.2, в которой были даны общие условия невырожденности полиномиального векторного поля (10.2) и дано правило вычисления его вращения на окружностях $\|x\| = \rho$ большого радиуса ρ. Эти условия содержали предположение об отсутствии вещественных корней у наибольшего общего делителя $T_l(t)=c_0+c_1t+ +c_2t^2+\ldots+c_\alpha t^\alpha$ многочленов $P(1,t)$ и $Q(1,t)$. Отсутствие вещественных корней у многочлена $T_l(t)$ равносильно тому, что однородный (порядка α) потенциал

$$V(\xi,\eta)=c_0\xi^\alpha+c_1\xi^{\alpha-1}\eta+\ldots+c_\alpha\eta^\alpha \qquad (12.7)$$

принимает при $|\xi|+|\eta|>0$ значения одного знака. Из теоремы 12.7 вытекает, что *у многочлена $T_l(t)$ нет вещественных корней в том и только том случае, когда индекс потенциала* (12.7) *равен* 1.

12.5. Растущие потенциалы. Потенциал $V(x)$ $(x\in R^n)$ назовем *растущим*, если

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x)=+\infty. \qquad (12.8)$$

Теорема 12.9. *Индекс невырожденного растущего потенциала равен* 1.

Доказательство. Пусть $\operatorname{grad}V(x)\neq 0$ при $\|x\|\geqslant\rho_1$. Положим $M_1=\max\limits_{\|x\|\leqslant\rho_1}V(x)$. В силу (12.8) можно указать такое $\rho_2>\rho_1$, что $V(x)\geqslant M_1+1$ $(\|x\|\geqslant\rho_2)$; положим $M_2=\max\limits_{\|x\|\leqslant\rho_2}V(x)$ и обозначим через F множество тех x, лежащих вне шара $\|x\|<\rho_1$, при которых $V(x)\leqslant M_2$. Множество F ограничено и замкнуто. Поэтому можно указать такое $\delta\in(0,\rho_2-\rho_1)$, что

$$(\operatorname{grad}V(x),\ \operatorname{grad}V(y))\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\|\operatorname{grad}V(x)\|^2 \quad (x\in F,\ \|x-y\|\leqslant\delta). \qquad (12.9)$$

Введем в рассмотрение нелинейный функционал $a(x)$ равенствами: $a(x)=0$ при $\|x\|\leqslant\rho_1$, $a(x)= =\|x\|-\rho_1$ при $\rho_1\leqslant\|x\|\leqslant\rho_1+\delta$, $a(x)=\delta$ при $\|x\|\geqslant\rho_1+\delta$, а затем определим нелинейные операторы

$$T(x;\lambda)=x-\lambda a(x)\frac{\operatorname{grad}V(x)}{\|\operatorname{grad}V(x)\|} \quad (x\in F,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1). \qquad (12.10)$$

Из очевидного равенства *)

$$V[T(x;\lambda)]=$$
$$=V(x)-\lambda a(x)\int_0^1\left(\operatorname{grad}V\left[x+\theta\lambda a(x)\frac{\operatorname{grad}V(x)}{\|\operatorname{grad}V(x)\|}\right],\ \frac{\operatorname{grad}V(x)}{\|\operatorname{grad}V(x)\|}\right)d\theta$$

и из (12.9) вытекает оценка

$$V[T(x;\lambda)]\leqslant V(x)-\frac{\lambda a(x)}{2}\|\operatorname{grad}V(x)\| \quad (x\in F). \qquad (12.11)$$

Отсюда следует, что каждый оператор (12.10) преобразует множество F в себя.

Положим $T_1x=T(x;1)$ $(x\in F)$ и рассмотрим на сфере $S=\{x\colon \|x\|=\rho_2\}$ последовательность векторных полей $\Psi_kx=x-T_1^kx$ $(k=1,2,\ldots)$. Покажем, что все эти поля невырождены и гомотопны на S друг другу.

Гомотопный переход от поля Ψ_k к полю Ψ_{k+1} определим равенством

$$X(x;\lambda)=x-T(T_1^kx;\lambda) \quad (x\in S,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

Непрерывность $X(x;\lambda)$ по совокупности переменных очевидна; очевидны и равенства $X(x;0)\equiv x-T_1^kx$, $X(x;1)\equiv \equiv x-T_1^{k+1}x$. Поэтому нужно лишь показать, что поля $X(x;\lambda)$ невырождены. В предположении противного, найдутся такие точка $x_0\in S$ и число $\lambda_0\in[0,1]$, при которых $x_0=T(T_1^kx_0;\lambda_0)$. Тогда $V(x_0)=V[T(T_1^kx_0;\lambda_0)]$ и в силу (12.11)

$$V(x_0)\leqslant V(T_1^kx_0)\leqslant V(T_1^{k-1}x_0)\leqslant\ldots\leqslant V(T_1x_0)\leqslant$$
$$\leqslant V(x_0)-\frac{\delta}{2}\|\operatorname{grad}V(x_0)\|<V(x_0)$$

— мы пришли к противоречию.

Поле Ψ_1x состоит из векторов, направленных так же, как векторы поля $\operatorname{grad}V(x)$. Поэтому $\operatorname{ind}V(x)$

*) Мы здесь пользуемся интегральной формулой конечных приращений непрерывно дифференцируемой функции:

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1(\operatorname{grad}f(x+\theta h),\ h)\,d\theta.$$

совпадает с $\gamma(\Psi_1, S)$. Но по доказанному вращения на S всех полей Ψ_k одинаковы. Поэтому теорема будет доказана, если мы установим справедливость равенства

$$\gamma(\Psi_k, S) = 1 \tag{12.12}$$

при достаточно больших значениях k.

Пусть $m = \min_{x \in F} \| \operatorname{grad} V(x) \|$. Из определения множества F вытекает положительность числа m. В силу (12.11)

$$V(T_1 x) \leqslant V(x) - \frac{m\delta}{2} \quad (x \in F, \ \|x\| \geqslant \rho_2).$$

Поэтому при достаточно больших k множество $T_1^k F$ лежит внутри шара $\|x\| < \rho_2$; при этих k выполнено равенство (12.12). ∎

§ 13. Периодические и ограниченные решения дифференциальных уравнений

13.1. Постановка задачи. Развитая в предыдущих параграфах теория непрерывных векторных полей может применяться и в тех случаях, когда эти векторные поля не задаются явными формулами. Многочисленные примеры таких ситуаций дают различные проблемы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная трудность исследования возникающих при этом векторных полей связана с необходимостью описывать их свойства в терминах, относящихся к правым частям дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{13.1}$$

с непрерывной по совокупности переменных $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in R^n$ правой частью, удовлетворяющей по переменной $x \in R^n$ локальному условию Липшица. Через

$$x = p(t; s; x_0) \tag{13.2}$$

обозначим решение $x(t)$ системы (13.1), удовлетворяющее начальному условию $x(s) = x_0$.

Решение (13.2) определено, вообще говоря, не при всех значениях t. Например, у скалярного уравнения $x' = 1 + x^2$ каждое решение определено лишь на конечном промежутке. Если каждое решение (13.2) можно определить при всех $t \geqslant s$, то будем говорить, что решения системы (13.1) *нелокально продолжимы в сторону возрастания* t. Аналогично определяется *нелокальная продолжимость решений в сторону убывания* t.

Условия нелокальной продолжимости формулируются обычно в виде таких неравенств для $f(t, x)$, из которых непосредственно следуют оценки решений на конечных промежутках изменения t (см., например, [24], [55]).

Если $f(t, x)$ не зависит от t, то система (13.1) называется *автономной*; в противном случае — *неавтономной*. Если $f(t, x)$ периодична по t с периодом ω, то система (13.1) называется *ω-периодической*.

Удобным аппаратом доказательства существования ω-периодических решений у ω-периодических систем (13.1) и существования равномерно ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений у произвольных систем (13.1) является *метод направляющих потенциалов*, который был предложен М. А. Красносельским и А. И. Перовым. Основы метода излагаются в §§ 13, 14, 28, 41. Другие теоремы метода и частичную библиографию см. в [24].

13.2. Оператор сдвига. Допустим, что все решения системы (13.1) нелокально продолжимы в сторону возрастания t. Тогда по решениям (13.2) можно при всех $t \geqslant s$ определить операторы

$$U(t, s)x = p(t; s; x). \tag{13.3}$$

Операторы $U(t, s)$ будем называть *операторами сдвига по траекториям дифференциальных уравнений* за время от s до t. В явном виде оператор сдвига можно выписать лишь в редких случаях. Операторы $U(t, s)$, вообще говоря, нелинейны. Если не все решения системы (13.1) нелокально продолжимы, то равенство (13.3) определяет оператор сдвига лишь на некоторых множествах.

Полем сдвигов будем называть векторное поле

$$\Phi(t, s)x = x - U(t, s)x. \tag{13.4}$$

Из теорем о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных вытекает непрерывность операторов сдвига и, следовательно, непрерывность векторных полей (13.4).

Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы научиться по свойствам правых частей системы (13.1) устанавливать невырожденность полей (13.4) при $t > s$

и вычислять вращение этих полей. Если, например, для некоторой ω-периодической системы (13.1) вращение поля $\Phi(\omega, 0)$ на границе $\dot{\Omega}$ некоторой области Ω окажется отличным от нуля, то отсюда будет вытекать, что поле $\Phi(\omega, 0)$ имеет в области Ω по крайней мере одну особую точку, а эта особая точка является начальным значением ω-периодического решения. В случае непериодических систем из отличия от нуля вращения полей $\Phi(n, -n)$ на границах некоторых областей вытекает существование последовательности решений $x_n(t)$, обладающих свойством $x_n(-n) = x_n(n)$; по таким решениям часто можно конструировать решения системы (13.1), ограниченные на всей оси $(-\infty, \infty)$.

Лемма 13.1. *Пусть на ограниченном замкнутом множестве $F \subset R^n$ векторное поле $f(s, x)$ невырождено. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $s < t \leqslant s + \delta$ векторные поля $\Phi(t, s)$ невырождены на F и гомотопны на F полю $-f(s, x)$.*

Доказательство. В предположении противного найдутся последовательности $x_n \in F$ и $t_n \to s$ $(t_n > s)$ такие, что

$$x_n - p(t_n; s; x_n) = \alpha_n f(s, x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\alpha_n \geqslant 0$. Так как эти равенства можно переписать в виде

$$-\int_s^{t_n} f[\tau, p(\tau; s; x_n)]\, d\tau = \alpha_n f(s, x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\int_s^{t_n} (f[\tau, p(\tau; s; x_n)], f(s, x_n))\, d\tau \leqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13.5}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность x_n сходится к некоторой точке $x^* \in F$. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \min_{s \leqslant \tau \leqslant t_n} (f[\tau, p(\tau; s; x_n)], f(s, x_n)) = \| f(s, x^*) \|^2 > 0.$$

Следовательно, при больших n подынтегральные функции в (13.5) положительны. Это противоречит неравенствам (13.5). ∎

Пусть теперь $\dot{\Omega}$ — граница некоторой ограниченной области, пусть поле $f(s; x)$ невырождено на $\dot{\Omega}$. Из леммы 13.1 вытекает, что при близких к s (и бóльших чем s) значениях t поле сдвигов $\Phi(t, s)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и справедливо равенство

$$\gamma[\Phi(t, s); \dot{\Omega}] = \gamma[-f(s; x), \dot{\Omega}]. \tag{13.6}$$

Возрастанию t от s до некоторого s_1 соответствует непрерывная деформация поля (13.4); эта деформация определяет гомотопный на $\dot{\Omega}$ переход от полей $\Phi(t, s)$ с близкими к s значениями t к полю $\Phi(s_1, s)$, если поля (13.4) невырождены на $\dot{\Omega}$ при всех $t \in (s, s_1]$. Поэтому из (13.6) вытекает

Лемма 13.2. *Пусть поле $f(s; x)$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset R^n$. Пусть поля (13.4) также невырождены на $\dot{\Omega}$ при $s < t \leqslant s_1$. Тогда*

$$\gamma[\Phi(s_1, s); \dot{\Omega}] = \gamma[-f(s; x), \dot{\Omega}]. \tag{13.7}$$

Эта лемма означает, что вычисление вращения неизвестных в явном виде векторных полей (13.4) может быть сведено к вычислению вращения заданного, как правило, явной формулой поля $-f(s, x)$, если только удастся установить невырожденность полей (13.4).

13.3. Направляющие потенциалы. Непрерывно дифференцируемую функцию $V(x)$ $(x \in R^n)$ назовем *направляющим потенциалом* для системы (13.2), если

$$(\operatorname{grad} V(x), f(t, x)) > 0 \quad (\| x \| \geqslant \rho_0), \tag{13.8}$$

где ρ_0 — некоторое положительное число.

Условие (13.8) означает, в частности, что векторы непрерывных векторных полей $\operatorname{grad} V(x)$ и $f(t, x)$ направлены непротивоположно друг другу во всех точках x, для которых $\| x \| \geqslant \rho_0$. Поэтому на любой сфере $S_\rho = \{x: \| x \| = \rho\}$ радиуса $\rho \geqslant \rho_0$ каждое векторное поле $f(t, x)$ гомотопно полю $\operatorname{grad} V(x)$. Отсюда вытекает важное равенство $\gamma[f(t, x), S_\rho] = \operatorname{ind} V(x)$, или, что то же,

$$\gamma[-f(t, x), S_\rho] = (-1)^n \operatorname{ind} V(x). \tag{13.9}$$

Это равенство и лемма 13.2 показывают, что вращение на S_ρ полей (13.4) может отличаться лишь знаком от индекса $\operatorname{ind} V(x)$ направляющего потенциала $V(x)$, если только все поля (13.4) невырождены на S_ρ. Оказывается, что сам факт существования направляющего потенциала часто обеспечивает невырожденность полей (13.4).

Лемма 13.3. *Пусть решения системы* (13.1) *нелокально продолжимы в сторону возрастания* t. *Пусть для системы* (13.1) *может быть построен направляющий потенциал* $V(x)$. *Тогда каждым фиксированным* t *и* s $(t > s)$ *отвечает такое* $\rho_0(t, s) \geqslant \rho_0$, *что поле* $\Phi(t, s)$ *невырождено на сферах* S_ρ *радиусов* $\rho \geqslant \rho_0(t, s)$ *и*

$$\gamma[\Phi(t, s), S_\rho] = (-1)^n \operatorname{ind} V(x) \qquad (\rho \geqslant \rho_0(t, s)). \quad (13.10)$$

Нужно доказать лишь невырожденность полей $\Phi(\tau, s)$ $(s < \tau \leqslant t)$ на сферах S_ρ радиусов ρ. Положим

$$\rho_1 = \max_{s \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant t,\ \|x\| \leqslant \rho_0} \|U(\tau, \sigma) x\|$$

и покажем, что векторы $\Phi(\tau, s)x$ отличны от нуля при $s < \tau \leqslant t$, $\|x\| > \rho_1$. В предположении противного, найдутся такая точка x_0, $\|x_0\| > \rho_1$, и такое число $\tau_0 \in (s, t]$, что $U(\tau_0, s)x_0 = x_0$. Из определения числа ρ_1 вытекает тогда оценка

$$\|U(\tau, s)x_0\| \geqslant \rho_0 \qquad (s \leqslant \tau \leqslant \tau_0). \quad (13.11)$$

Рассмотрим скалярную функцию $v(\tau) = V[U(\tau, s)x_0]$ $(s \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$. Так как

$$\frac{dv}{d\tau} = \left(\operatorname{grad} V[U(\tau, s)x_0], \frac{d}{d\tau} U(\tau, s)x_0\right) = \\ = (\operatorname{grad} V[U(\tau, s)x_0], f[\tau, U(\tau, s)x_0]),$$

то из (13.8) и (13.11) вытекает неравенство $\dot v(\tau) > 0$ $(s \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$. Следовательно, $V[U(\tau_0, s)x_0] > V(x_0)$ и поэтому $U(\tau_0, s)x_0 \neq x_0$. Мы пришли к противоречию. ∎

13.4. Существование периодических решений. Приведем вначале одно совсем простое утверждение.

Теорема 13.1. *Пусть решения* ω*-периодической системы* (13.1) *нелокально продолжимы в сторону возрастания* t. *Пусть система* (13.1) *имеет направляющий потенциал* $V(x)$ *ненулевого индекса. Тогда у системы* (13.1) *есть по крайней мере одно* ω*-периодическое решение.*

Доказательство. В силу леммы 13.3 и теоремы 4.2 векторное поле сдвигов $\Phi(\omega, 0)$ имеет по крайней мере одну особую точку $x_0 \in R^n$. Из равенства $U(\omega, 0)x_0 = x_0$ вытекает, что x_0 — начальное (при $t = 0$) значение ω-периодического решения системы (13.1). ∎

Предположение о нелокальной продолжимости решений системы (13.1) является стеснительным ограничением, и мы постараемся от него избавиться. Однако для широких классов систем это предположение выполнено. Например, из теорем 13.1 и 12.9 вытекает

Теорема 13.2. *Пусть для* ω*-периодической системы* (13.1) *можно указать направляющий потенциал* $V(x)$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |V(x)| = \infty. \quad (13.12)$$

Тогда у системы (13.1) *есть по крайней мере одно* ω*-периодическое решение.*

Доказательство очевидно, если потенциал $V(x)$ отрицателен на элементах $x \in R^n$, имеющих большую норму, — из (13.8) вытекает нелокальная продолжимость решений, а из (13.12) и теоремы 12.9 вытекает равенство $\operatorname{ind} V(x) = (-1)^n$.

Если потенциал возрастающий, то можно перейти к уже рассмотренному случаю, произведя в системе (13.1) замену $x(t) = y(-t)$. ∎

13.5. Индекс периодического решения. Пусть $x_0(t)$ — известное нам ω-периодическое решение (например, тождественно равное нулю) ω-периодической системы (13.1). Из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных вытекает, что оператор сдвига $U(\omega, 0)$ определен и непрерывен в некоторой окрестности $\Omega \subset R^n$ точки $x_0 = x_0(0)$. На области Ω определено поле (13.4).

Если x_0 — изолированная особая точка поля (13.4), то периодическое решение $x_0(t)$ называется *изолированным*, а индекс $\operatorname{ind}(x_0, \Phi)$ этой особой точки — *индексом* $\operatorname{ind}[x_0(t); \omega]$ *решения* $x_0(t)$.

Вычисление индекса ω-периодического решения в основных случаях сводится к анализу однородной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть правая часть системы (13.1) непрерывно дифференцируема по переменной x. Тогда, как известно, решения системы дифференцируемы по начальным данным. Значит, нелинейный оператор $U(\omega, 0)$ дифференцируем в той области, на которой он определен. Производная в точке x_0 будет совпадать (см., например, [24], [55]) с $V(\omega, 0)$, где $V(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = f'_x[t, x_0(t)]\,x. \tag{13.13}$$

Оператор $V(\omega, 0)$ называют *оператором монодромии*; матрицу, определяющую оператор $V(\omega, 0)$, — *матрицей монодромии*; собственные значения матрицы монодромии — *мультипликаторами* системы (13.13). Подчеркнем, что (13.13) — это линейная система с ω-периодическими коэффициентами.

Если $f'_x[t, x_0(t)]$ — это постоянная матрица A, то мультипликаторами системы (13.13) будут числа $\exp(\omega\lambda_i)$, где λ_i — собственные значения матрицы A.

Допустим, что все мультипликаторы системы (13.13) отличны от 1. Тогда, в силу теоремы 6.3, периодическое решение $x_0(t)$ системы (13.1) изолировано, а его индекс определяется равенством

$$\operatorname{ind}[x_0(t); \omega] = (-1)^\beta, \tag{13.14}$$

где β — сумма кратностей вещественных мультипликаторов, бо́льших чем 1. Например, если линейная система (13.13) асимптотически устойчива, то все мультипликаторы μ_i удовлетворяют неравенству $|\mu_i| < 1$ и из (13.14) вытекает, что индекс периодического решения равен 1. Иначе говоря, *индекс асимптотически устойчивого ω-периодического решения равен* 1.

Если у системы (13.13) есть мультипликатор, равный 1, то анализ изолированности периодического решения и вычисление индекса этого периодического решения становятся более сложными задачами. Мы к ним вернемся впоследствии.

Теорема 13.3. *Пусть решения ω-периодической системы* (13.1) *нелокально продолжимы в сторону возрастания t. Пусть система* (13.1) *имеет направляющий потенциал $V(x)$. Пусть, наконец, у системы* (13.1) *есть ω-периодическое решение $x_0(t)$, индекс которого отличен от числа $(-1)^n \operatorname{ind} V(x)$, где $\operatorname{ind} V(x)$ — индекс потенциала $V(x)$.*

Тогда у системы (13.1) *есть по крайней мере одно ω-периодическое решение, отличное от $x_0(t)$.*

Утверждение этой теоремы является непосредственным следствием теоремы 4.3 и леммы 13.3. ∎

13.6. Правильные направляющие потенциалы. Пусть

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \ldots,\ V_k(x) \tag{13.15}$$

— направляющие потенциалы для системы (13.1). Будем говорить, что они образуют *полный набор направляющих потенциалов*, если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} [|V_1(x)| + |V_2(x)| + \ldots + |V_k(x)|] = \infty. \tag{13.16}$$

Ясно, что индекс всех направляющих потенциалов из полного набора одинаков.

Пусть направляющий для системы (13.1) потенциал $V(x)$ удовлетворяет более ограничительному, чем (13.8), условию

$$(\operatorname{grad} V(x), f(t, x)) > \alpha_0 \|\operatorname{grad} V(x)\| \cdot \|f(t, x)\| \qquad (\|x\| \geqslant \rho_0), \tag{13.17}$$

где $\alpha_0 > 0$, и пусть существует такая непрерывно дифференцируемая функция $W(x)$, которая удовлетворяет двум условиям: во-первых,

$$\|\operatorname{grad} W(x)\| < \|\operatorname{grad} V(x)\| \qquad (\|x\| \geqslant \rho_0) \tag{13.18}$$

и, во-вторых,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |W(x)| = \infty. \tag{13.19}$$

Тогда $V(x)$ называется *правильным направляющим потенциалом.*

Лемма 13.4. *Если для системы* (13.1) *может быть указан правильный направляющий потенциал $V(x)$, то для этой системы может быть указан полный набор направляющих потенциалов того же индекса.*

Доказательство. Положим $V_1(x)=V(x)$ и $V_2(x)=V(x)+\alpha_0 W(x)$. Очевидно,

$$(\operatorname{grad} V_2(x),\ f(t,\ x))=$$
$$=(\operatorname{grad} V(x),\ f(t,\ x))+\alpha_0(\operatorname{grad} W(x),\ f(t,\ x))\geqslant$$
$$\geqslant(\operatorname{grad} V(x),\ f(t,\ x))-\alpha_0\|\operatorname{grad} W(x)\|\cdot\|f(t,\ x)\|.$$

Поэтому из (13.17) и (13.18) вытекает оценка $(\operatorname{grad} V_2(x), f(t,x))>0$ $(\|x\|\geqslant\rho_0)$. Таким образом, $V_2(x)$ является направляющим потенциалом для системы (13.1).

Из (13.19) вытекает равенство

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\{|V_1(x)|+|V_2(x)|\}=$$
$$=\lim_{\|x\|\to\infty}\{|V(x)|+|V(x)+\alpha_0 W(x)|\}=\infty.$$

Следовательно, направляющие потенциалы $V_1(x)$ и $V_2(x)$ образуют полный набор. ∎

Понятия полного набора направляющих потенциалов и правильного направляющего потенциала позволяют освободиться в теоремах 13.1 и 13.3 от ограничительного предположения о нелокальной продолжимости решений системы (13.1).

Пусть все направляющие потенциалы $V_i(x)$ из полного набора (13.15) удовлетворяют условию

$$(\operatorname{grad} V_i(x),\ f(t,\ x))>0 \qquad (\|x\|\geqslant\rho_0). \tag{13.20}$$

Положим

$$m_i=\min_{\|x\|\leqslant\rho_0} V_i(x),\quad M_i=\max_{\|x\|\leqslant\rho_0} V_i(x) \qquad (i=1,\ \ldots,\ k)$$

и введем в рассмотрение множества

$$\Omega_i^-=\{x:\ V_i(x)<m_i\},\quad \Omega_i^+=\{x:\ V_i(x)>M_i\} \qquad (i=1,\ \ldots,\ k). \tag{13.21}$$

Из (13.16) вытекает существование такого $\rho_1>\rho_0$, что множества (13.21) покрывают множество $\{x:\|x\|\geqslant\rho_1\}$. Число ρ_1 определяется лишь по числу ρ_0, участвующему в условиях (13.20), но не зависит от конкретной системы (13.1).

Лемма 13.5. *Пусть выполнены условия* (13.20) *и* (13.16). *Пусть решение $x(t)$ системы* (13.1) *удовлетворяет условию $x(t_0)=x(s_0)$, где $t_0>s_0$. Тогда для решения $x(t)$ справедлива оценка*

$$\|x(t)\|<\rho_1 \qquad (s_0\leqslant t\leqslant t_0). \tag{13.22}$$

Доказательство. В предположении противного, найдется такое $t_1\in[s_0,t_0]$, что $x(t_1)$ лежит в одном из множеств (13.21). Пусть это будет множество с номером i_0. Положим $v(t)=V_{i_0}[x(t)]$ $(s_0\leqslant t\leqslant t_0)$. Эта функция на концах промежутка $[s_0,t_0]$ принимает одинаковые значения; наибольшее и наименьшее ее значения на $[s_0,t_0]$ обозначим соответственно через m и M. По предположению, либо $m<m_{i_0}$, либо $M>M_{i_0}$.

Допустим, что $m<m_{i_0}$ и $v(t_*)=m$ $(s_0\leqslant t_*\leqslant t_0)$. Тогда $x(t_*)\in\Omega_{i_0}^-$ и в силу (13.20) $v'(t_*)=(\operatorname{grad} V_{i_0}[x(t_*)],\ f[t,\ x(t_*)])>0$. Поэтому $t_*=s_0$. Иначе говоря, из $v(t_*)=m$ вытекает $t_*=s_0$. Но $v(t_0)=v(s_0)$ — мы пришли к противоречию. ∎

Откажемся теперь от предположения о нелокальной продолжимости решений системы (13.1).

Теорема 13.4. *Пусть для ω-периодической системы* (13.1) *может быть указан полный набор направляющих потенциалов ненулевого индекса (например, может быть указан один правильный направляющий потенциал ненулевого индекса). Тогда у системы* (13.1) *есть по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Теорема 13.5. *Пусть для ω-периодической системы* (13.1) *может быть указан полный набор направляющих потенциалов индекса χ_0 (например, может быть указан один правильный направляющий потенциал индекса χ_0). Пусть у системы* (13.1) *есть ω-периодическое решение $x_0(t)$, индекс которого отличен от $(-1)^n\chi_0$. Тогда у системы* (13.1) *есть по крайней мере одно ω-периодическое решение, отличное от $x_0(t)$.*

Доказательство этих двух теорем будем вести параллельно. В силу леммы 13.4 случай, когда у системы (13.1) есть правильный направляющий потенциал, специально рассматривать не нужно.

Пусть выполнены условия (13.20). В силу леммы 13.5 для всех ω-периодических решений системы (13.1) справедлива оценка (13.22).

Построим вспомогательную систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t, x)}{1 + \alpha(x)\|f(t, x)\|}, \tag{13.23}$$

где

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \|x\| \leqslant \rho_1, \\ \|x\| - \rho_1, & \text{если} \quad \rho_1 \leqslant \|x\| \leqslant \rho_1 + 1, \\ 1, & \text{если} \quad \rho_1 + 1 \leqslant \|x\|. \end{cases} \tag{13.24}$$

Правая часть

$$g(t, x) = \frac{f(t, x)}{1 + \alpha(x)\|f(t, x)\|} \tag{13.25}$$

вспомогательной системы удовлетворяет, очевидно, неравенствам

$$(\operatorname{grad} V_i(x),\ g(t, x)) > 0 \qquad (\|x\| \geqslant \rho_0,\ -\infty < t < \infty).$$

Из леммы 13.5 вытекает поэтому, что для ω-периодических решений $x(t)$ вспомогательной системы (13.23) также верна оценка $\|x(t)\| \leqslant \rho_1$. Поэтому у систем (13.23) и (13.1) одинаковые ω-периодические решения.

Правая часть вспомогательной системы (13.23) по построению ограничена. Следовательно, ее решения нелокально продолжимы как в сторону возрастания, так и в сторону убывания t. Поэтому к системе (13.23) можно применить теоремы 13.1 и 13.3. ∎

13.7. Примеры. Теоремы 13.1—13.5 удобны для исследования систем, правые части которых при «больших» значениях x имеют сравнительно простые «главные» части. По этим главным частям определяются направляющие потенциалы.

Пример 1. Пусть правая часть ω-периодической системы (13.1) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{\|x\| \to \infty}} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|f(t, x) - a_0\| < \|a_0\|, \tag{13.26}$$

где $a_0 \neq 0$. Тогда функция $V(x) = (x, a_0)$ будет правильным направляющим потенциалом для системы (13.1); индекс этого потенциала равен нулю. *Если известно ω-периодическое решение $x_0(t)$ системы* (13.1) *и у линейной системы* (13.13) *нет мультипликаторов, равных* 1, *то* (в силу теоремы 13.5) *система* (13.1) *имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение, отличное от $x_0(t)$.*

Последнее утверждение сохраняет силу, если условие (13.26) заменить неравенством

$$(f(t, x), a_0) > k\|f(t, x)\| \qquad (\|x\| > r_0), \tag{13.27}$$

где $k > 0$.

Пример 2. Пусть правая часть ω-периодической системы (13.1) содержит «главные» линейные члены

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \frac{\|f(t, x) - Ax\|}{\|x\|} = 0, \tag{13.28}$$

где A — постоянная матрица, у которой нет нулевых и чисто мнимых собственных значений. Тогда (см., например, [12]) пространство R^n можно представить как прямую сумму подпространств E_- и E_+, первое из которых содержит корневые подпространства, отвечающие собственным значениям с отрицательной вещественной частью, а второе — корневые подпространства, отвечающие собственным значениям с положительной вещественной частью. Через P_- (P_+) обозначим оператор проектирования на E_- по направлению E_+ (на E_+ по направлению E_-), так что

$$P_- R^n = E_-, \quad P_+ R^n = E_+, \quad P_+ + P_- = I,$$
$$P_+ P_- = P_- P_+ = 0.$$

Систему (13.1) можно записать в виде

$$\frac{du}{dt} = A_- u + \varphi(t, u, v), \quad \frac{dv}{dt} = A_+ v + \psi(t, u, v), \tag{13.29}$$

где $u \in E_-$, $v \in E_+$, $x = u + v$, A_- — сужение матрицы A на подпространство E_- ($A_- u = Au$ при $u \in E_-$), A_+ — сужение матрицы A на E_+, а

$$\begin{aligned} \varphi(t, u, v) &= P_- f(t, u + v), \\ \psi(t, u, v) &= P_+ f(t, u + v). \end{aligned} \tag{13.30}$$

Так как матрица A_- гурвицева (все ее собственные значения имеют отрицательную вещественную часть), то найдется (см., например, [12]) такая положительно определенная матрица S_-, что $(S_- u, A_- u) \leqslant -(u, u)$. Аналогично, найдется положительно определенная матрица

S_+ такая, что $(S_+v, A_+v) \geqslant (v, v)$ $(v \in E_+)$. Порядки матриц S_- и S_+ равны размерностям соответственно подпространств E_- и E_+. *Функция*

$$V(x) = V(u, v) = -(S_-u, u) + (S_+v, v) \quad (u \in E_-,\ v \in E_+) \tag{13.31}$$

в силу (13.28) *является правильным направляющим потенциалом системы* (13.29). *Поэтому из отсутствия нулевого и чисто мнимых собственных значений у матрицы A вытекает существование ω-периодического решения у системы* (13.1) — это следует из теоремы 13.4.

В условиях доказанного утверждения решения системы (13.1) нелокально продолжимы, поэтому можно было бы сослаться на теорему 13.1. Условие (13.28) можно заменить менее ограничительным:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} \frac{\|f(t, x) - A(t)x\|}{\|x\|} = 0, \tag{13.32}$$

где ω-периодическая матрица $A(t)$ такова, что все мультипликаторы линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

отличны от числа 1. Отметим еще, что условие (13.28) можно заменить неравенствами

$$\left.\begin{aligned}(\varphi(t, u, v), S_-u) - \beta_1(\psi(t, u, v), S_+v) < (u, u) + \beta_1(v, v),\\ (\varphi(t, u, v), S_-u) - \beta_2(\psi(t, u, v), S_+v) < (u, u) + \beta_2(v, v),\end{aligned}\right\} \tag{13.33}$$

где $\beta_1, \beta_2 > 0$, $\beta_1 \neq \beta_2$, которые выполняются при $\|u\| + \|v\| \geqslant \rho_0$. При условиях (13.33) полный набор направляющих потенциалов можно определить равенствами

$$\begin{aligned}V_1(u, v) = -(u, S_-u) + \beta_1(v, S_+v),\\ V_2(u, v) = -(u, S_-u) + \beta_2(v, S_+v).\end{aligned} \tag{13.34}$$

Условия (13.33) не обеспечивают нелокальную продолжимость решений системы (13.29).

Если $f(t, 0) \equiv 0$ и производная $B = f'_x(t, 0)$ не зависит от t, причем $\det(AB) < 0$, то (в силу теоремы 13.3)

система (13.1) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Периодическим решениям систем с «главными» линейными частями посвящена значительная литература (см., например, [15]).

Пример 3. Рассмотрим скалярное ω-периодическое уравнение

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + a\frac{d\xi}{dt} + f(\xi) = \varphi\left(t, \xi, \frac{d\xi}{dt}\right), \tag{13.35}$$

которое эквивалентно системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -f(\xi) - a\eta + \varphi(t, \xi, \eta). \tag{13.36}$$

Пусть числа

$$k_1 = \varliminf_{|\xi|\to\infty} \xi^{-1}f(\xi), \quad k_2 = \varlimsup_{|\xi|\to\infty} \xi^{-1}f(\xi) \tag{13.37}$$

конечны и имеют одинаковый знак, а функция $\varphi(t, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию $(|\xi| + |\eta|)^{-1}\varphi(t, \xi, \eta) \to 0$ при $|\xi| + |\eta| \to \infty$.

Простой подсчет показывает, что функция $V(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2\xi\eta$ является правильным направляющим потенциалом индекса -1 для системы (13.36), если числа (13.37) отрицательны. Если же числа (13.37) положительны и $a \neq 0$, то правильный направляющий потенциал можно определить равенством

$$V(\xi, \eta) = -a^3\xi^2 - 2a^2\xi\eta - 2a\eta^2 - 4a\int_0^\xi f(s)\,ds; \tag{13.38}$$

индекс этого потенциала равен 1.

Уравнения типа (13.35) играют важную роль в теории автоматического регулирования. Так, например, различные теоремы о периодических решениях таких уравнений получены В. А. Якубовичем, А. Б. Кущевым и другими авторами. Роль функций вида (13.38) («квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности») впервые была выяснена, по-видимому, А. И. Лурье в связи с анализом устойчивости систем регулирования.

13.8. Существование ограниченных на всей оси решений. В этом пункте не предполагается, что система (13.1) периодическая.

Теорема 13.6. *Пусть для системы* (13.1) *может быть указан полный набор направляющих потенциалов* *ненулевого индекса (например, может быть указан правильный направляющий потенциал ненулевого индекса). Тогда у системы* (13.1) *есть по крайней мере одно определенное и равномерно ограниченное на всей оси* $(-\infty, \infty)$ *решение.*

Доказательство. Пусть $U(t, s)$ — оператор сдвига по траекториям построенного по системе (13.1) уравнения (13.23). Из лемм 13.3 и 13.5 вытекает, что вращение на сферах больших радиусов векторного поля $x - U(n, -n)x$ отлично от нуля. Поэтому каждый оператор $U(n, -n)$ имеет неподвижную точку x_n. Решение $x_n(t) = U(t, -n)x_n$ системы (13.23) обладает свойством $x_n(n) = x_n(-n)$ и, в силу леммы 13.5, для него верна оценка $|x_n(t)| \leqslant \rho_1$ $(-n \leqslant t \leqslant n)$. Таким образом, каждая функция $x_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является решением системы (13.1).

Выберем из последовательности $x_n(0)$ сходящуюся подпоследовательность $x_{n_j}(0)$; предел ее обозначим через x^*. Из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных вытекает, что последовательность $x_{n_j}(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке $[-a, a]$ сходится к решению $x(t, 0, x^*)$ системы (13.1). Из леммы 13.5 следует, что $|x(t, 0, x^*)| \leqslant \rho_1$ $(-\infty < t < \infty)$. ∎

13.9. Граничные задачи общего вида. Рассмотрим векторное уравнение

$$\frac{d^m x}{dt^m} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right), \tag{13.39}$$

где $x \in R^n$. Уравнение (13.39) равносильно системе из nm скалярных уравнений. Поэтому для выделения частных решений должны быть заданы nm дополнительных скалярных условий.

Пусть эти условия имеют вид

$$l_{ij}(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n), \tag{13.40}$$

где l_{ij} при каждых i, j является вещественным функционалом. Будем считать, что все эти функционалы непрерывны на пространстве C_{m-1}, которое состоит из $m - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-

функций $x(t)$ со значениями в R^n; норма в C_{m-1} может быть задана, например, равенством

$$\| x(t) \|_{C_{m-1}} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \| x(t) \| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} \| x^{(m-1)}(t) \|.$$

Тогда система функционалов l_{ij} определяет непрерывный оператор

$$L[x(t)] = \{l_{11}(x), \ldots, l_{1n}(x); \ldots; l_{m1}(x), \ldots, l_{mn}(x)\}, \tag{13.41}$$

действующий из C_{m-1} в R^{mn}. Условия (13.40) в векторной форме имеют вид

$$L[x(t)] = 0. \tag{13.42}$$

Предположим, что каждое начальное условие

$$x(a) = x_0, \quad x'(a) = x_1, \ \ldots, \ x^{(m-1)}(a) = x_{m-1} \tag{13.43}$$

определяет единственное решение

$$x(t) = p(t; a; x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \tag{13.44}$$

уравнения (13.39), определенное на всем промежутке $[a, b]$. Каждый набор $z = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$ можно рассматривать как точку z пространства R^{mn}. Поэтому формула (13.44) определяет некоторый оператор $Fz = x(t)$, действующий из R^{mn} в C_{m-1}; этот оператор непрерывен.

Рассмотрим на R^{mn} векторное поле

$$\Phi z = L(F(z)) \quad (z \in R^{mn}). \tag{13.45}$$

По построению, нули поля (13.45) — это начальные значения решений системы (13.39), удовлетворяющих условиям (13.40). Таким образом, для доказательства разрешимости задачи (13.39), (13.40) достаточно найти ограниченную область $\Omega \subset R^{mn}$, на границе которой вращение поля (13.45) отлично от нуля.

Если (13.39) — это система (13.1), а условия (13.40) имеют вид $x(b) - x(a) = 0$, то поле (13.45) превращается в поле сдвигов, которое рассматривалось в предыдущих пунктах параграфа. Аналогичным образом можно изучить поля (13.45) общего вида и установить различные теоремы о разрешимости общих граничных задач. Однако изложение соответствующих утверждений увело бы нас далеко от основной цели книги.

§ 14. Построение направляющих потенциалов

В предыдущем параграфе были приведены примеры направляющих потенциалов для некоторых конкретных классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, были описаны потенциалы для систем, близких к линейным. В этом параграфе выясняются возможности построения правильных направляющих потенциалов для систем, правые части которых при больших x «близки» к однородным функциям порядка однородности выше первого.

14.1. Однородные системы. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x), \tag{14.1}$$

правая часть которой непрерывно дифференцируема (всюду, кроме, может быть, нулевой точки) и положительно однородна некоторого порядка $m > 0$ ($P(\lambda x) \equiv \lambda^m Px$ при $\lambda > 0$). Будем считать также, что система (14.1) не имеет ненулевых состояний равновесия.

Вопрос о построении направляющих потенциалов для систем (14.1) полностью решен теоремами Н. Н. Красовского (ПММ **18**, № 5 (1954), 513—532; **19**, № 5 (1955), 516—530) о функциях Ляпунова. Эти теоремы дополнены Э. Мухамадиевым (ДАН СССР **190**, № 4 (1970), 777—779), который показал, что в условиях Н. Н. Красовского можно строить *однородные* направляющие потенциалы. Это же дополнение к теореме Н. Н. Красовского недавно другим методом и независимо получено А. Я. Каневским и Л. Э. Рейзинем (Дифф. уравнения **9**, № 2 (1973), 251—259). Ограничимся формулировкой теорем Н. Н. Красовского с указанными дополнениями.

Теорема 14.1. *Пусть для системы* (14.1) *может быть построен правильный направляющий потенциал. Тогда у системы* (14.1) *нет ограниченных на всей оси* $(-\infty, \infty)$ *решений, отличных от нулевого.*

Теорема 14.2. *Пусть у системы* (14.1) *нет ограниченных на всей оси решений, отличных от нулевого. Тогда для системы* (14.1) *может быть построен однородный некоторого порядка* $p > 0$ *правильный направляющий потенциал, индекс которого совпадает с индексом нулевой особой точки поля* $P(x)$ *в фазовом пространстве* R^n.

14.2. Системы на плоскости. Теоремы 14.1 и 14.2, к сожалению, неэффективны. Исключение составляют системы на плоскости.

Пусть (14.1) — это система

$$\frac{d\xi}{dt} = P_1(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = P_2(\xi, \eta) \tag{14.2}$$

двух скалярных дифференциальных уравнений. Напомним, что по предположению у векторного поля

$$\Phi(\xi, \eta) = \{P_1(\xi, \eta), P_2(\xi, \eta)\} \tag{14.3}$$

начало координат является единственной особой точкой.

Ненулевая точка $\{\xi_0, \eta_0\}$ называется *собственным вектором поля* (14.3), если

$$P_1(\xi_0, \eta_0) = \lambda\xi_0, \quad P_2(\xi_0, \eta_0) = \lambda\eta_0, \tag{14.4}$$

где λ — некоторое число. Отыскание собственных векторов равносильно отысканию ненулевых решений скалярного уравнения

$$\eta P_1(\xi, \eta) = \xi P_2(\xi, \eta). \tag{14.5}$$

Пусть у поля (14.3) есть собственные векторы и одним из них является точка $\{1, 0\}$ (в противном случае можно перейти к новой системе координат). Введем в плоскости полярные координаты $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$ и обозначим через $\theta(\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ одну из непрерывных ветвей функции

$$\Xi(\varphi) = \operatorname{Arctg} \frac{P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)}{P_1(\cos\varphi, \sin\varphi)}. \tag{14.6}$$

Пусть у поля (14.3) есть собственные векторы, причем при каждом фиксированном целом k любой корень уравнения $\theta(\varphi) - \theta(0) - \varphi = k\pi$ строго меньше каждого корня уравнения $\theta(\varphi) - \theta(0) - \varphi = k\pi - \pi$. Будем говорить тогда, что правые части системы (14.2) обладают *свойством Гомори*. В нашем определении была использована специальная система координат — полярная ось выбиралась по направлению одного из собственных векторов; предоставляем читателю показать, что свойство Гомори не зависит от выбора собственного вектора.

Теорема 14.3. *Пусть у поля* (14.3) *есть собственные векторы. Тогда у системы* (14.2) *нет ненулевых ограниченных на* $(-\infty, \infty)$ *решений в том и только том случае, если правые части системы обладают свойством Гомори.*

Если правые части системы (14.2) обладают свойством Гомори, то вращение векторного поля (14.3) на единичной окружности не может быть больше чем 1 (проверьте!). Поэтому из теорем 14.1 и 14.3 вытекает огорчительный факт — *для системы* (14.2) *заведомо не может быть построен правильный направляющий потенциал, если* $\operatorname{ind}(0, \Phi) \geqslant 2$, *где* $\operatorname{ind}(0, \Phi)$ — *индекс нулевой особой точки поля* (14.3).

Условие Гомори заведомо выполнено, если функция $\theta(\varphi)$ монотонно убывает.

Допустим теперь, что у поля (14.3) нет собственных векторов. Тогда уравнение (14.5) не имеет ненулевых решений. Поэтому на $[0, 2\pi]$ определена и непрерывна функция

$$\varkappa(\varphi) = \frac{P_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi}{P_2(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - P_1(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi}. \tag{14.7}$$

Теорема 14.4. *Пусть у поля* (14.3) *нет собственных векторов. Тогда у системы* (14.2) *нет ненулевых ограниченных на* $(-\infty, \infty)$ *решений в том и только том случае, если*

$$\int_0^{2\pi} \varkappa(\varphi)\, d\varphi \neq 0. \tag{14.8}$$

Доказательства теорем 14.3 и 14.4 предоставляем читателю.

Теоремы 14.3 и 14.4 в объединении с теоремами 14.1 и 14.2 дают эффективные условия существования правильных направляющих потенциалов.

14.3. Уравнения с правыми частями — многочленами. Рассмотрим систему

$$\frac{d\xi}{dt}=a_1\xi^2+2a_2\xi\eta+a_3\eta^2,\quad \frac{d\eta}{dt}=b_1\xi^2+2b_2\xi\eta+b_3\eta^2. \quad (14.9)$$

Соответствующее этой системе векторное поле (14.3), если оно невырождено, имеет (см. п. 10.3) вращение γ_0, равное одному из трех чисел: 2, 0, —2. Если $\gamma_0=2$, то у системы (14.9) нет правильных направляющих потенциалов — это следует из теорем 14.1 и 14.3. Если $\gamma_0=0$, то для системы (14.9) может быть построен правильный направляющий потенциал в виде линейной формы (для доказательства достаточно выписать условия равенства $\gamma_0=0$ из табл. 1, стр. 59). Если $\gamma_0=-2$, то правильный направляющий потенциал существует — это следует из теорем 14.2 и 14.3.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt}&=a_0\xi^m+a_1\xi^{m-1}\eta+\ldots+a_m\eta^m,\\ \frac{d\eta}{dt}&=b_0\xi^m+b_1\xi^{m-1}\eta+\ldots+b_m\eta^m,\end{aligned} \quad (14.10)$$

у которой есть лишь нулевое состояние равновесия. Соответствующее этой системе поле (14.3) имеет вид

$$\Psi(\xi,\eta)=\{a_0\xi^m+a_1\xi^{m-1}\eta+\ldots+a_m\eta^m,\\ b_0\xi^m+b_1\xi^{m-1}\eta+\ldots+b_m\eta^m\}. \quad (14.11)$$

Индекс γ_0 нулевой особой точки этого поля может (см. § 10) принимать одно из значений $-m, -m+2, \ldots, m-2, m$. Если $\gamma_0>1$, то (в силу теорем 14.1 и 14.3) у системы (14.10) нет правильных направляющих потенциалов. Если $\gamma_0=-m$, то каждая ветвь функции (14.6) монотонно убывает и (снова в силу теорем 14.1 и 14.3) правильный направляющий потенциал существует. Специального анализа требуют лишь случаи, когда $-m+1\leqslant\gamma_0\leqslant 1$.

В полярных координатах система (14.10) имеет вид

$$\frac{dr}{dt}=r^mF(\varphi),\quad \frac{d\varphi}{dt}=r^{m-1}G(\varphi), \quad (14.12)$$

где $F(\varphi)$ и $G(\varphi)$ — многочлены относительно $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Допустим, что функция $G(\varphi)$ не принимает нулевых значений. Тогда (в силу теоремы 14.4) у системы (14.10) нет ненулевых ограниченных решений в том и только том случае, если

$$\int_0^{2\pi}\frac{F(\varphi)}{G(\varphi)}\,d\varphi\neq 0. \quad (14.13)$$

В силу теоремы 14.2 неравенство (14.13) необходимо и достаточно для существования правильного направляющего потенциала у системы (14.10) (напомним, что обсуждается случай, когда $G(\varphi)$ не принимает нулевых значений).

Допустим теперь, что $G(\varphi)\equiv 0$ (такой случай может представиться лишь при нечетном m). Тогда правильным направляющим потенциалом будет либо функция $\xi^2+\eta^2$, либо функция $-(\xi^2+\eta^2)$.

Наиболее интересен случай, когда $G(\varphi)\not\equiv 0$, но у уравнения

$$G(\varphi)=0 \quad (14.14)$$

есть решения. Предположим для простоты, что каждый корень φ_0 уравнения (14.14) простой: из $G(\varphi_0)=0$ следует $G'(\varphi_0)\neq 0$. Если $G(\varphi_0)=0$, то, очевидно, $F(\varphi_0)\neq 0$.

Направление $\varphi=\varphi_0$ называется *узловым*, если

$$G(\varphi_0)=0,\quad F(\varphi_0)G'(\varphi_0)<0, \quad (14.15)$$

и *седловым*, если

$$G(\varphi_0)=0,\quad F(\varphi_0)G'(\varphi_0)>0. \quad (14.16)$$

Узловые и седловые направления играют важную роль в качественной теории особых точек дифференциальных уравнений на плоскости. Геометрически очевидно, что у системы (14.10) нет ненулевых ограниченных на $(-\infty,\infty)$ решений в том и только том случае, если между каждыми двумя седловыми направлениями этой системы расположено хотя бы одно узловое направление. Из теорем 14.1 и 14.2 следует важный вывод: *у системы* (14.10) *есть правильный направляющий однородный потенциал в том и только том случае, если у этой системы между каждыми двумя седловыми направлениями есть узловые* (напомним, что обсуждается случай, когда у уравнения (14.14) есть корни и все эти корни простые).

14.4. Периодические и ограниченные решения. Рассмотрим совместно систему

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \quad (14.17)$$

и возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+h(t,x). \quad (14.18)$$

Лемма 14.1. *Пусть $V(x)$ — правильный направляющий потенциал для системы* (14.17), *причем*

$$(\operatorname{grad}V(x),f(t,x))>\alpha_0\|\operatorname{grad}V(x)\|\cdot\|f(t,x)\|\quad(\|x\|\geqslant\rho_0), \quad (14.19)$$

где $\alpha_0>0$. Пусть

$$\|h(t,x)\|\leqslant\alpha_1\|f(t,x)\|\quad(\|x\|\geqslant\rho_0), \quad (14.20)$$

где $\alpha_1<\alpha_0$. Тогда $V(x)$ является правильным направляющим потенциалом для системы (14.18).

Доказательство очевидно, так как из (14.19) и (14.20) вытекает справедливость при $\|x\|\geqslant\rho_0$ оценки

$$(\operatorname{grad}V(x),f(t,x)+h(t,x))>\\ >\frac{\alpha_0-\alpha_1}{1+\alpha_1}\|\operatorname{grad}V(x)\|\cdot\|f(t,x)+h(t,x)\|. \blacksquare$$

В силу леммы 14.1 каждый правильный направляющий потенциал системы (14.1) будет одновременно правильным направляющим потенциалом для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x) + h(t, x), \tag{14.21}$$

если $h(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \sup_t \|x\|^{-m} \|h(t, x)\| = 0. \tag{14.22}$$

Поэтому *каждый признак существования у системы* (14.1) *правильного направляющего потенциала ненулевого индекса является признаком существования у системы* (14.21) (*при условии* (14.22)) *периодических или ограниченных решений.* На формулировках соответствующих утверждений мы не останавливаемся.

Отметим лишь, что теоремы 14.3, 14.4 и построения п. 14.3 позволяют существенно усилить известные теоремы Гомори (изящно изложенные в книге В. А. Плисса [48]) о существовании периодических решений у систем второго порядка с главными однородными членами в правых частях. Эти усиления методом направляющих потенциалов получил Н. А. Бобылев (ДАН СССР **189**, № 2 (1968)).

§ 15. Индекс особой точки плоского векторного поля

15.1. Общие теоремы. Теорема 6.3 позволяет изучить особую точку x_0 поля Φ в случае, когда матрица $\Phi'(x_0)$ невырождена. Если же $\det \Phi'(x_0) = 0$, то исследование особой точки существенно усложняется; неизвестны достаточно простые общие алгоритмы исследования особых точек для этого случая. Исключением являются поля в одномерном и двумерном пространствах. Одномерный случай пояснений не требует. В этом параграфе изучаются поля в плоскости $\{\xi, \eta\}$. Мы ограничиваемся одной модификацией алгоритма, предложенного П. П. Забрейко (ДАН СССР **145**, № 5 (1961)) и в другом варианте изложенного в [28].

Пусть изучается нулевая особая точка 0 аналитического векторного поля

$$\Phi x = \{P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)\} = \sum_{i+j\geqslant 1} c_{ij}\xi^i\eta^j. \tag{15.1}$$

Пусть m_0 — наименьшая сумма $i + j$ индексов, при которых векторы c_{ij} отличны от нуля. Положим

$$\Psi_0 x = \{P_0(\xi, \eta), Q_0(\xi, \eta)\} = \sum_{i+j=m_0} c_{ij}\xi^i\eta^j. \tag{15.2}$$

Теорема 15.1. *Пусть поле* (15.2) *невырождено. Тогда нулевая особая точка поля* (15.1) *изолирована и* $\operatorname{ind}(0, \Phi) = \operatorname{ind}(0, \Psi_0)$.

При применении этой очевидной теоремы удобно пользоваться методами, изложенными в § 10.

Допустим теперь, что поле (15.2) вырождено. Тогда общий наибольший делитель $d_0(\xi, \eta)$ многочленов $P_0(\xi, \eta)$ и $Q_0(\xi, \eta)$ обращается в нуль на некоторых прямых $\alpha_i\xi + \beta_i\eta = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Каждая из прямых $\alpha_i\xi + \beta_i\eta = 0$ состоит из двух выходящих из нулевой точки *лучей* L_{2i-1} и L_{2i} *вырождения поля* (15.2). Поле (15.2) можно представить в виде

$$\Psi_0 x = \delta_0(\xi, \eta)(\alpha_1\xi + \beta_1\eta)^{\varkappa_1} \ldots (\alpha_s\xi + \beta_s\eta)^{\varkappa_s} \overline{\Psi}_0 x,$$

где однородный многочлен $\delta_0(\xi, \eta)$ лишь в нулевой точке обращается в нуль, а поле $\overline{\Psi}_0$ невырождено. Число $\varkappa_i$ назовем *кратностью лучей вырождения* L_{2i-1} и L_{2i}. Если кратность равна 1, то луч вырождения называется *простым*.

Луч вырождения L назовем *неособым* для поля (15.1), если поле (15.1) невырождено на множестве

$$K(\varepsilon, \rho) = \{x\colon \rho(x, L) \leqslant \varepsilon\|x\|,\ 0 \leqslant \|x\| \leqslant \rho\}$$

при некоторых $\varepsilon, \rho > 0$. Граница множества $K(\varepsilon, \rho)$ (рис. 1) состоит из двух отрезков, лежащих на лучах $L_{-\varepsilon}$, L_ε, и из части $S(\varepsilon, \rho)$ окружности $\|x\| = \rho$.

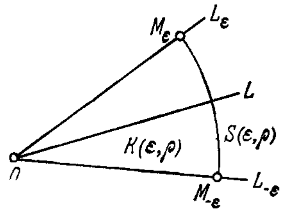


Рис. 1.

Если луч вырождения L поля (15.2) неособый для поля (15.1), то при малых ε, ρ на дуге $S(\varepsilon, \rho)$ можно построить угловую функцию $\theta(t)$ этого поля (см. п. 3.3). Пусть $\Delta(\varepsilon, \rho, L)$ — деленное на 2π приращение функции $\theta(t)$, отвечающее движению по $S(\varepsilon, \rho)$ от точки $M_{-\varepsilon}$ до точки M_ε (см. рис. 1). Очевидно, существует повторный предел

$$\operatorname{demi\,ind}(L; \Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\rho\to 0} \Delta(\varepsilon, \rho, L), \tag{15.3}$$

который является целым числом, если кратность луча L четна, и числом вида $m + 1/2$ (m целое), если кратность нечетна. Число (15.3) назовем *полуиндексом луча вырождения L*. Непосредственно из определения вытекает

Теорема 15.2. *Нулевая особая точка поля* (15.1) *изолирована в том и только том случае, когда все лучи вырождения $L_1, \ldots, L_{2s}$ поля* (15.2) *неособые для поля* (15.1). *Если нулевая особая точка поля Φ изолирована, то*

$$\operatorname{ind}(0, \Phi) = \operatorname{ind}(0, \overline{\Psi}_0) + \sum_{i=1}^{2s} \operatorname{demi\,ind}(L_i; \Phi). \qquad (15.4)$$

Для применения теоремы 15.2 нужно найти все лучи вырождения поля (15.2), а затем каждый луч вырождения исследовать независимо.

15.2. Простые лучи вырождения. Пусть луч вырождения L простой. Выберем в плоскости систему координат $\{u, v\}$ так, чтобы L совпадал с положительной осью абсцисс. Тогда поле (15.1) можно записать в виде

$$\Phi x = \sum_{i+j \geqslant m_0} h_{ij} u^i v^j. \qquad (15.5)$$

Очевидно, $h_{m_0, 0} = 0$; простота луча вырождения L равносильна тому, что $h_{m_0-1, 1} \neq 0$. Если все векторы

$$h_{m_0+1, 0}, \; h_{m_0+2, 0}, \; \ldots \qquad (15.6)$$

равны нулю, то поле (15.1) обращается в нуль на луче L — нулевая особая точка поля (15.1) не изолирована. Пусть среди векторов (15.6) есть ненулевые, причем $h_{m_1, 0}$ — первый из них. Число $m_1 - m_0 + 1$ назовем *весом луча вырождения L* поля Φ.

Через $[h_1; h_2]$ будем обозначать определитель, столбцы которого составлены из компонент векторов h_1, h_2.

Теорема 15.3. *Пусть* $[h_{m_0-1, 1}; h_{m_1, 0}] \neq 0$. *Тогда луч вырождения L неособый и*

$$\operatorname{demi\,ind}(L; \Phi) = \frac{1}{2} \operatorname{sign}[h_{m_0-1, 1}; h_{m_1, 0}].$$

Если $[h_{m_0-1, 1}; h_{m_1, 0}] = 0$, то $h_{m_1, 0} + c h_{m_0-1, 1} = 0$. Построим новое векторное поле

$$\Phi^1 x = \Phi(u, cu^r + v) = \sum_{i+j \geqslant m_0} h^1_{ij} u^i v^j, \qquad (15.7)$$

где $r = m_1 - m_0 + 1$. Очевидно, $h^1_{ij} = h_{ij}$ при $i + j = m_0$ и поэтому поле Ψ^1_0, построенное по полю Φ^1 так, как поле Ψ_0 строилось по полю Φ, совпадает с Ψ_0. Легко видеть, что луч вырождения L неособый для поля Φ в том и только том случае, если он неособый для поля Φ^1, причем

$$\operatorname{demi\,ind}(L; \Phi) = \operatorname{demi\,ind}(L; \Phi^1),$$

если луч вырождения L неособый. Поэтому для анализа луча вырождения L можно использовать поле Φ^1. При переходе от поля Φ к полю Φ^1 вес луча вырождения L возрастает по крайней мере на 1.

Для анализа луча вырождения L поля Φ^1 можно попытаться применить теорему 15.3. Если она окажется неприменимой, то от поля Φ^1 нужно перейти к новому полю Φ^2, которое находится в таком же отношении к полю Φ^1, как поле Φ^1 к полю Φ. Может оказаться, что к полю Φ^2 теорема 15.3 снова неприменима; тогда нужно перейти к полю Φ^3 и т. д. Если луч вырождения L неособый для поля (15.1), то, как оказывается, к одному из полей Φ, Φ^1, Φ^2, ... теорема 15.3 обязательно применима.

Если луч вырождения простой, то симметричный ему относительно нулевой точки луч вырождения L^* также простой. Если один из лучей L, L^* неособый, то и второй неособый. Если лучи L, L^* простые и неособые, то их полуиндексы одинаковы.

15.3. Кратные лучи вырождения (некритический случай). Как и при анализе простого луча вырождения, перейдем к такой системе координат, в которой изучаемый луч вырождения L кратности $\varkappa$ поля Ψ совпадает с положительной осью абсцисс. Поле Φ имеет тогда вид (15.5).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество пар (i, j) таких индексов, что $j < \varkappa$ и векторы h_{ij} отличны от нуля. Если $\mathfrak{M}$ пусто, то поле Φ на L равно нулю — нулевая особая точка поля Φ не изолирована и дальнейший анализ не нужен.

Пусть $\mathfrak{M}$ непусто. Тогда числовая функция $r(i, j) = \dfrac{i + \varkappa - m_0}{\varkappa - j}$ принимает на $\mathfrak{M}$ наименьшее значение r, причем $r > 1$; число r назовем *весом луча вырождения*

L. Так как уравнение $i+rj=m_0+(r-1)\varkappa$ имеет конечное число (не меньше двух) решений, то компоненты поля

$$\Psi_1=\{P_1(u,v),\ Q_1(u,v)\}=\sum_{i+rj=m_1} h_{ij}u^iv^j, \qquad (15.8)$$

где $m_1=m_0+(r-1)\varkappa$, являются многочленами.

Построим по многочленам $P_1(1,v)$, $Q_1(1,v)$ ряд Штурма (см. п. 10.2) и найдем величину $s_1(+\infty)-s_1(-\infty)$, равную изменению числа перемен знака в этом ряде при возрастании v от $-\infty$ до ∞. Через $d_1(v)$ обозначим наибольший общий делитель многочленов $P_1(1,v)$ и $Q_1(1,v)$.

Теорема 15.4. *Пусть многочлен $d_1(v)$ не имеет вещественных корней. Тогда луч вырождения L поля Ψ_0 неособый для поля Φ и*

$$\operatorname{demi\,ind}(L;\ \Phi)=\frac{1}{2}[s_1(+\infty)-s_1(-\infty)]. \qquad (15.9)$$

Луч вырождения L назовем *некритическим*, если для его исследования можно применить теорему 15.4. В противном случае луч L назовем *критическим*.

15.4. Кратные лучи вырождения (критический случай). Пусть $c_1,\ \ldots,\ c_l$ — вещественные корни многочлена $d_1(v)$. Тогда поле (15.8) обращается в нуль на кривых $v=c_iu^r$ $(u>0; i=1,\ldots,l)$. Каждую такую кривую Γ_i назовем *ветвью вырождения* поля (15.8), кратность $\varkappa_i$ корня c_i многочлена $d_1(v)$ назовем *кратностью* соответствующей ветви вырождения Γ_i.

Ветвь вырождения $\Gamma=\{\{u,v\}\colon v=cu^r, u\geqslant 0\}$ (ср. п. 15.1) назовем *неособой* для поля Φ, если при некоторых $\varepsilon,\rho>0$ это поле Φ не обращается в нуль на множестве $\Pi(\varepsilon,\rho)=\{\{u,v\}\colon |v-cu^r|\leqslant \varepsilon u^r,\ 0<u\leqslant\rho\}$. Граница множества $\Pi(\varepsilon,\rho)$ состоит из графиков кривых $v=(c-\varepsilon)u^r$, $v=(c+\varepsilon)u^r$ $(0\leqslant u\leqslant\rho)$ и одного прямолинейного отрезка $J(\varepsilon,\rho)$, концы которого обозначим через $M(-\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$.

Пусть ветвь вырождения Γ кратности $\varkappa$ неособая для поля Φ. Тогда при достаточно малых ε, ρ поле Φ невырождено на отрезке $J(\varepsilon,\rho)$ и можно построить угловую функцию $\theta(t)$, отвечающую данному полю. Пусть $\Delta(\varepsilon,\rho;\Gamma)$ — деленное на 2π приращение угловой функции $\theta(t)$ при движении по отрезку $J(\varepsilon,\rho)$ от точки $M(-\varepsilon)$ до точки $M(\varepsilon)$. Существует аналогичный (15.3) повторный предел

$$\operatorname{demi\,ind}(\Gamma;\ \Phi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\rho\to 0}\Delta(\varepsilon,\ \rho;\ \Gamma); \qquad (15.10)$$

он является целым числом, если кратность $\varkappa$ четна, и числом вида $m+1/2$, где m целое, если кратность $\varkappa$ нечетна. Предел (15.10), как и в случае лучей вырождения, будем называть *полуиндексом ветви вырождения*.

Теорема 15.5. *Луч вырождения L неособый для Φ в том и только том случае, когда все ветви $\Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_l$ поля Ψ_1 неособые для поля Φ. Если луч вырождения L неособый, то*

$$\operatorname{demi\,ind}(L;\ \Phi)=\frac{s_1(+\infty)-s_1(-\infty)}{2}+\sum_{i=1}^{l}\operatorname{demi\,ind}(\Gamma_i;\ \Phi). \qquad (15.11)$$

Теорема 15.5 сводит анализ луча вырождения L к исследованию ветвей вырождения $\Gamma_1,\ \ldots,\ \Gamma_l$ поля Ψ_1. Каждая ветвь вырождения изучается независимо от остальных.

Пусть $v=cu^r$ — уравнение изучаемой ветви вырождения кратности $\varkappa_1$. Построим по полю Φ новое поле

$$\Phi^1x=\Phi\{u^q,\ cu^p+v\}=\sum_{i+pj\geqslant qm_1} h^1_{ij}u^iv^j, \qquad (15.12)$$

где p и q взаимно простые и $p=rq$. В дальнейшем анализе ветви Γ используется лишь поле Φ^1.

Положим

$$X_1x=\sum_{i+pj=qm_1} h^1_{ij}u^iv^j. \qquad (15.13)$$

Луч $v=0$, $u\geqslant 0$ будет ветвью вырождения поля (15.13). Эта ветвь Γ_0 неособая для поля Φ^1 в том и только том случае, если ветвь вырождения Γ поля Ψ_1 неособая для поля Φ; если эти ветви вырождения неособые, то $\operatorname{demi\,ind}(\Gamma_0;\Phi^1)=\operatorname{demi\,ind}(\Gamma;\Phi)$. Таким образом, анализ ветви вырождения Γ можно заменить анализом ветви вырождения Γ_0. Кратность ветви вырождения Γ_0, очевидно, совпадает с кратностью $\varkappa_1$ ветви вырождения Γ; вес ветви вырождения при переходе к Γ_0 становится равным p.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество таких пар (i, j) индексов, что $j < \varkappa_1$ и векторы h^1_{ij} в разложении (15.13) отличны от нуля. Если $\mathfrak{M}_1$ пусто, то ветвь вырождения Γ особая и дальнейший анализ не нужен. Пусть множество $\mathfrak{M}_1$ непусто, тогда весом ветви Γ_0 назовем наименьшее на $\mathfrak{M}_1$ значение r функции $r_1(i, j) = (i - qm_1 + p\varkappa_1)/(\varkappa_1 - j)$.

Построим теперь новое поле

$$\Psi_2 x = \{P_2(u, v),\ Q_2(u, v)\} = \sum_{i + r_1 j = m_2} h^1_{ij} u^i v^j, \qquad (15.14)$$

где $m_2 = qm_1 + (r_1 - p)\varkappa_1$. Это поле находится в таком же отношении к полю (15.12), как поле (15.8) к полю (15.5). По многочленам $P_2(1, v)$ и $Q_2(1, v)$ построим ряд Штурма, числа $s_2(+\infty)$ и $s_2(-\infty)$ и их общий наибольший делитель $d_2(v)$. По аналогии с лучами вырождения ветвь вырождения Γ_0 назовем *некритической*, если $d_2(v)$ не имеет вещественных корней, и *критической* в противном случае.

Теорема 15.6. *Пусть $d_2(v)$ не имеет вещественных корней. Тогда ветвь вырождения Γ_0 неособая для поля Φ^1 и*

$$\operatorname{demi\,ind}(\Gamma_0, \Phi^1) = \frac{1}{2}[s_2(+\infty) - s_2(-\infty)].$$

Пусть многочлен $d_2(v)$ имеет вещественные корни $c^1_1, \ldots, c^1_{l_1}$. Тогда поле Ψ_2 обращается в нуль на кривых $v = c^1_i u^{r_1}$ $(i = 1, \ldots, l_1)$. Эти кривые $\Gamma^1_1, \ldots, \Gamma^1_{l_1}$ назовем *ветвями вырождения поля* Ψ_2; они могут быть особыми и неособыми (смысл этих терминов ясен); по аналогии с уже изучавшимися ветвями вырождения для неособых ветвей вырождения Γ^1_i вводится полуиндекс $\operatorname{demi\,ind}(\Gamma^1_i, \Phi^1)$. Справедливо аналогичное теореме 15.5 утверждение.

Теорема 15.7. *Ветвь вырождения Γ_0 неособая для поля Φ^1 в том и только том случае, когда все ветви $\Gamma^1_1, \ldots, \Gamma^1_{l_1}$ поля Ψ_2 неособые для поля Φ^1. Если ветвь вырождения Γ_0 неособая, то*

$$\operatorname{demi\,ind}(\Gamma_0, \Phi^1) = \frac{s_2(+\infty) - s_2(-\infty)}{2} + \sum_{i=1}^{l_1} \operatorname{demi\,ind}(\Gamma^1_i, \Phi^1).$$

Для анализа каждой ветви $\Gamma^1_i = \{(u, v):\ v = c^1_i u^{r_1},\ u \geqslant 0\}$ нужно снова перейти от поля Φ^1 к новому полю $\Phi^2 x = \Phi^1\{u^{q_1}, c^1_i u^{p_1} + v\}$, где p_1 и q_1 — взаимно простые числа, $p_1 = r_1 q_1$ и т. д.

Если особая точка поля Φ изолирована, то описанный алгоритм позволяет за конечное число шагов обнаружить этот факт и вычислить индекс особой точки.

15.5. **Геометрическая схема.** Рассмотрим в плоскости с координатами $\{\xi, \eta\}$ кривые Π_1 и Π_2, уравнения которых $P(\xi, \eta) = 0$ и $Q(\xi, \eta) = 0$. Известные методы теории аналитических функций позволяют построить разложения в степенные ряды уравнения отдельных ветвей кривых Π_1 и Π_2. Изолированность нулевой особой точки поля Φ равносильна тому, что в некоторой ее окрестности кривые Π_1 и Π_2 не имеют ненулевых общих точек. Для вычисления индекса нужно лишь знать знак функции $P(\xi, \eta)$ в «углах» между отдельными ветвями кривой Π_1 и знак функции $Q(\xi, \eta)$ в «углах» между отдельными ветвями кривой Π_2 — после этого можно воспользоваться формулой (3.4).

К сожалению, реализация описанной схемы требует решения слишком большого числа алгебраических уравнений!

15.6. Порядок невырожденности. Пусть x_0 — изолированная особая точка поля Φ. *Порядком невырожденности* $\nu(x_0, \Phi)$ особой точки x_0 назовем точную нижнюю грань положительных чисел ν, каждому из которых отвечают такие положительные α и ρ, что $\|\Phi x\| \geqslant \alpha \|x - x_0\|^\nu$ при $\|x - x_0\| \leqslant \rho$. О порядке невырожденности $\nu(x_0, \Phi)$ особой точки x_0 поля Φ будем говорить, что он *точный*, если при некоторых α_0, $\rho_0 > 0$ выполнено неравенство $\|\Phi x\| \geqslant \alpha_0 \|x - x_0\|^{\nu(x_0, \Phi)}$ $(\|x - x_0\| \leqslant \rho_0)$.

Конечно, не каждая особая точка имеет порядок невырожденности. Исключение составляют аналитические векторные поля — их изолированные особые точки всегда имеют ненулевой порядок невырожденности. Этот факт вытекает из известной теоремы Лихнеровича (см., например, [41]).

Ясна важность понятия порядка невырожденности. Пусть, например, $\Phi = \Phi_0 + \Omega$, x_0—особая точка поля Φ_0

порядка невырожденности $\nu(x_0, \Phi_0)$, а $\|\Omega x\| = o(\|x-x_0\|^k)$, где $k > \nu(x_0, \Phi_0)$; тогда x_0 будет изолированной особой точкой поля Φ, причем $\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = \operatorname{ind}(x_0, \Phi_0)$ и $\nu(x_0, \Phi) = \nu(x_0, \Phi_0)$. Если порядок невырожденности $\nu(x_0, \Phi_0)$ точный, то x_0 будет изолированной особой точкой поля Φ и будут справедливы равенства $\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = \operatorname{ind}(x_0, \Phi_0)$, $\nu(x_0, \Phi) = \nu(x_0, \Phi_0)$ уже при $\|\Omega x\| = o(\|x - x_0\|^{\nu(x_0, \Phi_0)})$.

Изложенные соображения относятся к полям в пространствах любой размерности.

Вернемся к аналитическим полям на плоскости. Для таких полей изолированная особая точка всегда имеет точный порядок невырожденности, который является рациональным (но не обязательно целым) числом. Если для исследования особой точки был применен изложенный в этом параграфе алгоритм, то в процессе вычислений были найдены и все числа, необходимые для определения порядка невырожденности особой точки. Как и в предыдущих пунктах, будем говорить о нулевой особой точке.

Очевидно, $\nu(0, \Phi) = m_0$, если применима теорема 15.1.

В общем случае ситуация сложнее. Наш алгоритм требовал построения и исследования конечного числа неособых ветвей (в частности, лучей) вырождения некоторых вспомогательных полей. Для каждой из этих ветвей был определен ее полуиндекс. Для вычисления полуиндекса некритических ветвей вырождения применялась теорема 15.6 (в случае лучей вырождения — теорема 15.4); для вычисления полуиндекса критических ветвей вырождения приходилось при помощи теоремы 15.7 (в случае лучей вырождения — теоремы 15.5) переходить к анализу новых ветвей вырождения.

Пусть Γ — некоторая некритическая ветвь вырождения, построенная при изучении нулевой особой точки поля Φ. Тогда можно указать конечную последовательность $L, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, где Γ_k — та ветвь вырождения кратности $\varkappa_k$, вычисление полуиндекса которой требовало построения ветви вырождения Γ; Γ_{k-1} — та ветвь вырождения кратности $\varkappa_{k-1}$, вычисление полуиндекса которой потребовало построения ветви вырождения Γ_k и т. д.; Γ_1 — ветвь вырождения кратности $\varkappa_1$, построение которой потребовал луч вырождения L кратности $\varkappa_0$. При построении последовательности $L, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ одновременно были определены вес $r_0 = p_0/q_0$ луча вырождения L, вес $r_1 = p_1/q_1$ ветви вырождения Γ_1, вес $r_2 = p_2/q_2$ ветви вырождения Γ_2 и т. д. вплоть до веса $r_k = p_k/q_k$ ветви вырождения Γ_k. *Порядком невырожденности* $\nu(\Gamma, \Phi)$ некритической ветви вырождения Γ назовем число

$$\nu(\Gamma, \Phi) = \frac{m_{k+1}}{q_0 q_1 \ldots q_k}, \tag{15.15}$$

где целое число m_{k+1} определено рекуррентными равенствами

$$m_{j+1} = q_{j-1} m_j + (r_j - p_{j-1}) \varkappa_j$$
$$(j = 0, 1, \ldots, k;\ p_{-1} = q_{-1} = 1).$$

Теорема 15.8. *Пусть нулевая особая точка поля Φ изолирована. Тогда ее порядок невырожденности $\nu(0, \Phi)$ совпадает с наибольшим из порядков невырожденности всех построенных некритических ветвей вырождения.*

Мы не излагали в этом параграфе доказательств приведенных утверждений; эти доказательства совсем просты (хотя и весьма громоздки).

В недавних работах П. П. Забрейко и Н. В. Сенчаковой (Вестник Ярославского ун-та, № 12 (1975)) предложено другое описание изложенного в § 15 алгоритма и указаны простые правила отыскания индекса особой точки однородного поля по коэффициентам его компонент. Эти правила аналогичны известным методам вычисления индекса Коши (см., например, [12]) рациональной функции; они содержат как частный случай изложенные в п. 10.3 правила отыскания индекса особой точки квадратичного поля.

Глава 2

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Изложенная в предыдущей главе теория векторных полей в конечномерных пространствах не переносится на произвольные непрерывные векторные поля в бесконечномерном банаховом пространстве. Однако наиболее важные ее факты остаются верными, если ограничиться специальными классами полей.

Основное содержание главы — введение понятия вращения вполне непрерывного векторного поля, изучение этого понятия, вычисление вращения. Распространения теории вращения на более широкие классы векторных полей обсуждаются в гл. 4. В последующих главах вращение поля будет одним из основных орудий исследования нелинейных операторных уравнений.

§ 16. Непрерывные поля в бесконечномерном пространстве

16.1. Непрерывные деформации полей. Пусть E — вещественное банахово пространство и Φ — действующий в нем оператор, заданный на некотором множестве $M\subset E$. Оператор Φ *непрерывен в точке* $x_0\in M$, если из $\|x-x_0\|\to 0$ $(x\in M)$ вытекает $\|\Phi x-\Phi x_0\|\to 0$; оператор Φ *ограничен*, если нормы его значений равномерно ограничены на каждой ограниченной части множества M. Аналогично определяются понятия непрерывности и ограниченности операторов, действующих из одного банахова пространства в другое. В приведенных определениях не предполагается, что рассматриваемые операторы линейны.

Для линейных операторов понятия непрерывности и ограниченности равносильны. Простые примеры показывают независимость свойств непрерывности и ограниченности в случае нелинейных операторов.

Как и в случае конечномерных пространств, часто удобно рассматривать оператор Φ как векторное поле, заданное на множестве M. Если оператор Φ непрерывен, то будем говорить, что поле Φ *непрерывно*. Непрерывное поле Φ называется *невырожденным* на M, если $\Phi x\neq 0$

при $x\in M$, и *равномерно невырожденным* на M, если $\|\Phi x\|\geqslant\alpha>0$ при $x\in M$. Равномерная невырожденность не является следствием невырожденности непрерывного поля, если множество M некомпактно.

Повторяя дословно определения из гл. 1, можно ввести понятие *деформации* непрерывных векторных полей, понятие *гомотопности* векторных полей. Затем можно пытаться развить теорию, аналогичную той, которая изложена в гл. 1 для полей в конечномерном пространстве. К сожалению, *попытки построить содержательную гомотопическую теорию произвольных непрерывных невырожденных* (*или равномерно невырожденных*) *полей в бесконечномерных пространствах заведомо обречены на провал*. Объяснению этого неприятного обстоятельства посвящен настоящий параграф.

16.2. Стягивание сферы. *В случае конечномерного пространства единичную сферу* $S=\{x\colon \|x\|=1\}$ *нельзя непрерывной деформацией в себе стянуть в точку.* Этот геометрически «очевидный» факт легко доказать при помощи понятия вращения. Действительно, если сферу S можно в себе стянуть в точку, то определена непрерывная деформация $\Phi(\lambda,x)$ $(x\in S, 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, обладающая свойствами: $\|\Phi(\lambda,x)\|=1$ при всех $x\in S$ и $0\leqslant\lambda\leqslant 1$; $\Phi(0,x)=x$ при $x\in S$; $\Phi(1,x)=z$ при $x\in S$, где z — некоторая фиксированная точка сферы S. Деформация $\Phi(\lambda,x)$ невырождена и поэтому поля $\Phi(0,x)=x$ и $\Phi(1,x)=z$ гомотопны. Следовательно, вращения этих полей одинаковы. В то же время вращение первого из них равно 1, а второго — нулю. Мы пришли к противоречию. ∎

Фундаментальная неприятность при переходе к бесконечномерным пространствам заключается в том, что в них единичную сферу S можно непрерывной деформацией в себе стянуть в точку! Пусть это стягивание в точку $z\in S$ осуществляется деформацией $\Phi(\lambda,x)$ $(x\in S, 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$. Тогда любое невырожденное на S векторное поле Ψ деформация $\Psi(\lambda,x)=\Psi\Phi(\lambda,x)$ переводит в поле $\Psi_1 x=\Psi z$; отсюда немедленно вытекает гомотопность на S друг другу всех невырожденных на S непрерывных векторных полей. Если рассматривать только равномерно невырожденные поля, то построенная деформация также будет равномерно невырожденной.

Ясно, что гомотопическая теория бесполезна, если все невырожденные поля гомотопны друг другу.

При помощи деформации $\Phi(\lambda, x)$ стягивания сферы в точку можно определить невырожденное непрерывное продолжение X_1 на весь шар $\|x\| \leqslant 1$ любого(!) невырожденного и непрерывного на S векторного поля X равенством $X_1 x = X\Phi(1 - \|x\|, x/\|x\|)$ $(\|x\| \leqslant 1)$. Эта конструкция обратима — по невырожденному непрерывному полю X_1, определенному на шаре $\|x\| \leqslant 1$ и совпадающему с единичным полем I на S, можно определить равенством $\Phi(\lambda, x) = \|X_1(1 - \lambda, x)\|^{-1} X_1(1 - \lambda, x)$ непрерывную деформацию сферы S в себе в точку.

Приведем простую конструкцию невырожденного непрерывного продолжения Φ_* на шар $\|x\| \leqslant 2$ невырожденного поля Φ, заданного на сфере $S = \{x: \|x\| = 2\}$ банахова пространства E.

Построим по индукции такие последовательности нормированных элементов e_k, нормированных функционалов f_k и подпространств E_k в бесконечномерном банаховом пространстве E, для которых $f_k(e_k) = 1$, $e_{k+1} \in E_k$, $E_k = \{x: f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\}$. Точки $e_1, \ldots, e_k, \ldots$ будем рассматривать как последовательные вершины бесконечнозвенной ломаной со звеньями $[e_k, e_{k+1}]$. Очевидно, расстояние от каждого звена до всех непримыкающих к нему не меньше чем $1/3$. Мы установим более сильное неравенство

$$\rho([e_k, e_{k+1}], E_{k+1}) \geqslant 1/3.$$

Предположим, что это неравенство неверно. Тогда найдутся такие $\alpha \in [0, 1]$ и $x \in E_{k+1}$, что норма элемента $y = \alpha e_k + (1 - \alpha) e_{k+1} - x$ меньше чем $1/3$. Применяя к элементу y функционал f_k, получим неравенство $\alpha < 1/3$, а применяя к нему функционал f_{k+1}, — неравенство $|\alpha f_{k+1}(e_k) + (1 - \alpha)| < 1/3$, из которого вытекает, что $\alpha > 1/3$. Мы пришли к противоречию.

Через G_k обозначим открытую δ-окрестность звена $[e_k, e_{k+1}]$ построенной выше ломаной, где $\delta < 1/6$. Очевидно, каждая точка шара $\|x\| \leqslant 2$ может принадлежать не более чем двум множествам G_k.

Пусть на шаре $\|x\| \leqslant 2$ задано непрерывное векторное поле Ψ с единственной особой точкой e_k. Через V_k мы будем обозначать операцию, которая превращает Ψ

в новое непрерывное векторное поле $V_k\Psi$, совпадающее с полем Ψ во всех не принадлежащих G_k точках и имеющее внутри G_k единственную неподвижную точку — точку e_{k+1}. Значения нового поля в отличных от e_{k+1} точках x множества G_k можно определить, например, как вектор $\dfrac{\|x - e_{k+1}\|}{\|x^* - e_{k+1}\|}\Psi x^*$, где x^* — точка пересечения с границей множества G_k луча, выходящего из e_{k+1} и проходящего через точку x.

Через Φ_1 обозначим произвольное непрерывное продолжение поля Φ на шар $\|x\| \leqslant 2$ с единственной особой точкой — точкой e_1. Затем определим последовательность полей $\Phi_{k+1} = V_k\Phi_k$. Эта последовательность полей в каждой точке стабилизируется и сходится поэтому к некоторому полю Φ_*, которое и будет невырожденным продолжением поля Φ на шар $\|x\| \leqslant 2$. ∎

16.3. Пример Лере. Специфика конкретных пространств E позволяет применять более простые конструкции для построения непрерывных невырожденных продолжений Φ_* на шар $\|x\| \leqslant 1$ непрерывных и невырожденных полей, заданных на сфере $S = \{x: \|x\| = 1\}$. Как нам уже известно, построение таких продолжений равносильно построению непрерывной деформации $\Phi(\lambda, x)$, при которой сфера S стягивается в себе в точку.

Пусть E — это пространство C непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций. Единичная сфера S — это множество функций $x(t)$, у которых $\|x(t)\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| = 1$. Определим при каждом $\lambda \in [0, 1/2]$ оператор

$$U(\lambda)x(t) = \begin{cases} x\left(\dfrac{t}{1-\lambda}\right), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant -\lambda + 1, \\ x(1) + 4\lambda[1 - x(1)](t - 1 + \lambda), & \text{если } 1 - \lambda \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

и положим при $x \in S$

$$\Phi(\lambda, x) = \begin{cases} U(\lambda)x(t), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ (2\lambda - 1)t + (2 - 2\lambda)U\left(\dfrac{1}{2}\right)x(t), & \text{если } \dfrac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1. \end{cases}$$

Простой подсчет показывает, что деформация $\Phi(\lambda, x)$ $(x \in S, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ непрерывна по совокупности переменных, что $\Phi(\lambda, x) \in S$ и $\Phi(0, x) = x$, $\Phi(1, x) = x_0$ $(x \in S)$, где $x_0(t) = t$. Таким образом, $\Phi(\lambda, x)$ осуществляет деформацию в себе сферы S пространства C в одну точку x_0. ∎

16.4. Пример Какутани. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ Положим $Ax = (x, e_1)e_2 + \ldots + (x, e_n)e_{n+1} + \ldots$ и

$$\Phi(\lambda, x) = \frac{(1-\lambda)x + \lambda Ax}{\|(1-\lambda)x + \lambda Ax\|} \qquad (x \in S,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Простая проверка показывает, что $\Phi(\lambda, x)$ осуществляет непрерывную деформацию сферы $S(\|x\| = 1)$ в себе в единичную сферу S_1 подпространства векторов x, ортогональных e_1. Сферу S_1 уже легко непрерывно деформировать в сфере S в точку.

16.5. Переход к узким классам полей. Приведенные примеры не должны обескуражить читателя. Они должны лишь заставить глубже вдуматься в задачу о гомотопической классификации векторных полей в бесконечномерных пространствах. Отказываться от идеи получить такую классификацию не следует, так как к векторным полям в бесконечномерных пространствах приводятся широкие классы краевых задач, по существу все несингулярные интегральные уравнения и многие другие задачи, а гомотопическая классификация дает широкие возможности получить разнообразные важные теоремы о свойствах векторных полей.

Выход, как обычно бывает, совсем простой! Нужно отказаться от одновременного рассмотрения всех непрерывных векторных полей, выделить более узкие классы полей и при построении деформаций применять только векторные поля из этих более узких классов. Узкие классы непрерывных векторных полей могут выделяться разными способами. Основную роль в различных приложениях играют так называемые *вполне непрерывные* векторные поля.

§ 17. Вполне непрерывные операторы

17.1. Определения. Пусть E_1 и E_2 — вещественные банаховы пространства; A — оператор, действующий из E_1 в E_2 (если $E_1 = E_2 = E$, то говорят, что A действует в E); $\mathfrak{D}(A)$ — область определения оператора A; $\mathfrak{R}(A)$ — множество его значений. В случаях, когда это не может привести к недоразумениям, будем пользоваться одинаковым обозначением для норм элементов разных пространств.

Оператор A называют *компактным* на множестве $M \subset \mathfrak{D}(A)$, если его значения на каждой ограниченной части множества M образуют компактное множество. В частности, если $M = E_1$, то A компактен, если он преобразует каждый шар в компактное множество. Компактный оператор, конечно, ограничен.

Компактный и непрерывный оператор называется *вполне непрерывным*; о вполне непрерывном операторе говорят также, что он обладает *свойством полной непрерывности*.

Если A и B — вполне непрерывные операторы, действующие из E_1 в E_2, то определенные на пересечении $\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(B)$ операторы $\alpha A + \beta B$ также вполне непрерывны. Часто приходится рассматривать суперпозиции AB оператора B, действующего из E_1 в E_2, и оператора A, действующего из E_2 в E_3; оператор AB действует из E_1 в E_3, он определен на тех элементах $x \in \mathfrak{D}(B)$, для которых $Bx \in \mathfrak{D}(A)$. Из полной непрерывности B и непрерывности A вытекает полная непрерывность оператора AB; если вполне непрерывен оператор A, то для полной непрерывности AB достаточно, чтобы оператор B был непрерывен и ограничен.

К уравнениям с вполне непрерывными операторами сводятся многочисленные задачи теории дифференциальных уравнений, интегральные уравнения, вариационные задачи, задачи теории колебаний, гидродинамики и т. д. Переход к уравнениям с вполне непрерывными операторами иногда совсем прост, а иногда требует преодоления значительных трудностей: построения сложного эквивалентного уравнения, выбора или изобретения нового специального функционального пространства.

17.2. Пространства и операторы. При рассмотрении примеров ограничимся в этом параграфе пространствами C и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ скалярных функций, заданных на замыкании G такой ограниченной области в R^N, граница которой имеет нулевую меру (например, граница кусочно-гладкая). Будут рассмотрены: линейный интегральный оператор

$$Bx(t) = \int_G k(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{17.1}$$

оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t,\ x(t)], \tag{17.2}$$

нелинейный интегральный оператор общего вида — *оператор Урысона*

$$Ax(t) = \int\limits_G k[t,\ s,\ x(s)]\,ds \tag{17.3}$$

и более специальный *оператор Гаммерштейна*

$$Ax(t) = \int\limits_G k(t,\ s)\,f[s,\ x(s)]\,ds. \tag{17.4}$$

Операторы (17.1)—(17.4) изучены в настоящее время с большой полнотой (см., например, [27] и имеющуюся там библиографию). Ниже приводятся самые простые признаки непрерывности, полной непрерывности, дифференцируемости и т. д. этих операторов.

17.3. Линейные интегральные операторы. Свойства оператора (17.1) определяются свойствами его ядра $k(t,s)$. Если оно непрерывно, то оператор (17.1) действует и вполне непрерывен и в пространстве C и в каждом пространстве L_p; более того, он вполне непрерывен и как оператор из каждого L_p в C. Если

$$\int\limits_G\int\limits_G |\,k(t,\ s)\,|^{1+\alpha}\,dt\,ds < \infty \tag{17.5}$$

и $\alpha > 0$, то (17.1) вполне непрерывен как оператор из каждого L_p, где $p\alpha \geqslant 1+\alpha$, в любое L_q, где $q \leqslant 1+\alpha$; в частности, если $\alpha \geqslant 1$, то (17.1) действует и вполне непрерывен в каждом пространстве L_p, где $1+\alpha^{-1} \leqslant p \leqslant 1+\alpha$.

В теории краевых задач важную роль играют интегральные *операторы* (17.1) *типа потенциала*. Их ядра имеют вид $k(t,s) = q(t,s)\,|\,t-s\,|^{-\lambda}$, где $0<\lambda<N$, а $|t-s|$ — расстояние между точками $t, s \in G$. Если $q(t,s)$ ограничена, то при $p(N-\lambda) > N$ оператор типа потенциала вполне непрерывен как оператор из L_p в пространство L_∞ (если $q(t,s)$ непрерывна, то как оператор из L_p в C), а при $p(N-\lambda) \leqslant N$ — из L_p в любое пространство L_q, где $q(N-Np+\lambda p) < Np$.

17.4. Спектральные свойства линейного вполне непрерывного оператора. Напомним основные утверждения известной теории Рисса — Шаудера.

Вещественное число λ_0 называется *собственным значением* линейного оператора B, действующего в банаховом пространстве E, если уравнение $(B-\lambda_0 I)x = 0$ имеет по крайней мере одно ненулевое решение $x_0 \in E$. Такие ненулевые решения называются *собственными элементами* или *собственными векторами* оператора B, отвечающими *собственному значению* λ_0. Собственные векторы (с присоединенным нулем) образуют собственное подпространство $\Pi(\lambda_0;\ B)$ оператора B, отвечающее собственному значению λ_0.

Пусть теперь λ_0 — ненулевое собственное значение линейного вполне непрерывного оператора B. Рассмотрим при всех $n = 1, 2, \ldots$ уравнения

$$(B-\lambda_0 I)^n x = 0. \tag{17.6}$$

С возрастанием n у уравнения (17.6) могут лишь появляться дополнительные решения. Первый основной факт теории Рисса — Шаудера заключается в существовании такого n_0, что при $n < n_0$ решения уравнения $(B-\lambda_0 I)^n x = 0$ образуют правильную часть множества решений уравнения $(B-\lambda_0 I)^{n+1} x = 0$, а при $n \geqslant n_0$ множество решений уравнения $(B-\lambda_0 I)^n x = 0$ совпадает с множеством решений уравнения $(B-\lambda_0 I)^{n_0} x = 0$. При этом множество решений каждого уравнения (17.6) является конечномерным подпространством. Подпространство $E(\lambda_0;\ B)$ решений уравнения (17.6) при $n=n_0$ называется *корневым подпространством* оператора B, отвечающим собственному значению λ_0. Размерность $s(\lambda_0)$ корневого подпространства $E(\lambda_0;\ B)$ называется *кратностью* собственного значения λ_0, а число $r(\lambda_0) = n_0$ — *рангом* собственного значения λ_0.

Корневое подпространство $E(\lambda_0;\ B)$ инвариантно для оператора B, более того, $BE(\lambda_0;\ B) = E(\lambda_0;\ B)$. Если рассмотреть сужение B_0 оператора B на $E(\lambda_0;\ B)$, то B_0 в некотором базисе имеет вид жордановой матрицы порядка $s(\lambda_0)$. В этой жордановой матрице каждый «ящик» отвечает одному и тому же собственному значению λ_0, порядок каждого ящика не более $r(\lambda_0)$, порядок по крайней мере одного ящика равен $r(\lambda_0)$.

Второй важный факт теории Рисса — Шаудера заключается в том, что пространство E можно расщепить в прямую сумму $E = E(\lambda_0; B) \dotplus N(\lambda_0; B)$ корневого подпространства $E(\lambda_0; B)$ и дополнительного (также инвариантного для B) бесконечномерного подпространства $N(\lambda_0; B)$. Сужение B^0 оператора B на подпространство $N(\lambda_0; B)$ также является линейным вполне непрерывным оператором; число λ_0 не является собственным значением оператора B^0. Расщепление в прямую сумму означает, что каждый элемент $x \in E$ однозначно представим в виде

$$x = u + v \quad (u \in E(\lambda_0; B), \quad v \in N(\lambda_0; B)). \tag{17.7}$$

Это представление определяет коммутирующие с B линейные операторы $P(\lambda_0)$ и $Q(\lambda_0)$ проектирования на подпространства $E(\lambda_0; B)$ и $N(\lambda_0; B)$:

$$P(\lambda_0)x = u, \quad Q(\lambda_0)x = v \quad (x \in E). \tag{17.8}$$

Очевидно, $P(\lambda_0) + Q(\lambda_0) = I$, $P(\lambda_0)Q(\lambda_0) = Q(\lambda_0)P(\lambda_0) = 0$.

Для линейных операторов B в вещественном пространстве вводится понятие комплексного собственного значения $\lambda = \sigma + i\tau$, его кратности, ранга и т. д. Если комплексные собственные значения понадобятся нам в дальнейшем, то мы более подробно будем говорить о них в соответствующем месте.

Третий фундаментальный факт теории Рисса — Шаудера заключается в том, что линейный вполне непрерывный оператор имеет не более чем счетное множество собственных значений и что единственной предельной точкой множества собственных значений может быть нуль.

Если ненулевое число λ не является собственным значением линейного вполне непрерывного оператора B, то на E определен непрерывный оператор $R(\lambda; B) = (B - \lambda I)^{-1}$ — *резольвента* оператора B.

Если B — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве E, то все его собственные значения вещественны; каждое корневое подпространство совпадает с соответствующим собственным (т. е. ранг каждого собственного значения равен 1). Самосопряженный вполне непрерывный оператор B имеет совсем простую структуру — его можно представить формулой

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i \quad (x \in E), \tag{17.9}$$

где $e_1, e_2, \ldots$ — ортонормированная система собственных векторов, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующие собственные значения. В формуле (17.9) все числа λ_i вещественны и $\lambda_i \to 0$ при $i \to \infty$.

17.5. Производная Фреше. Понятия дифференциального исчисления переносятся на операторы в банаховых пространствах различными способами (см., например, [17], [27]). В частности, существуют и полезны различные понятия производной нелинейного оператора. Нам понадобится лишь наиболее простой вариант.

Пусть действующий из пространства E_1 в пространство E_2 оператор A определен в некоторой окрестности точки $x_0 \in E_1$. Допустим, что приращение $A(x_0 + h) - Ax_0$ может быть записано в виде $A(x_0 + h) - Ax_0 = Bh + \omega(x_0, h)$, где B — линейный оператор (действующий из E_1 в E_2) и $\omega(x_0, h) = o(\| h \|)$. Тогда говорят, что оператор A *дифференцируем по Фреше* в точке x_0; оператор B называют ***производной Фреше*** оператора A в точке x_0 и обозначают через $A'(x_0)$.

Теорема 17.1. *Пусть дифференцируемый по Фреше в точке x_0 оператор A вполне непрерывен. Тогда его производная $A'(x_0)$ является линейным вполне непрерывным оператором.*

Если утверждение теоремы неверно, то множество значений оператора $A'(x_0)$ на единичной сфере $\|x\| = 1$ некомпактно. Следовательно, существуют такая последовательность нормированных элементов e_m и такое число $\delta > 0$, что $\|A'(x_0)(e_i - e_j)\| > 3\delta$ $(i, j = 1, 2, \ldots; i \neq j)$. Пусть при $\|h\| \leqslant \rho$ $(\rho > 0)$ выполняется неравенство $\|\omega(x_0; h)\| \leqslant \delta \|h\|$. Положим $x_m = x_0 + \rho e_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда из равенства

$$Ax_i - Ax_j = \rho A'(x_0)(e_i - e_j) + \omega(x_0, \rho e_i) - \omega(x_0, \rho e_j)$$

вытекает оценка

$$\| Ax_i - Ax_j \| \geqslant \rho \| A'(x_0)(e_i - e_j) \| - \| \omega(x_0, \rho e_i) \| - \| \omega(x_0, \rho e_j) \|,$$

откуда

$$\| Ax_i - Ax_j \| \geqslant \rho\delta > 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots; i \neq j).$$

Из последних неравенств вытекает некомпактность последовательности Ax_m, а это противоречит полной непрерывности оператора A. ∎

Допустим теперь, что оператор А определен вне некоторого шара $\| x \| \leqslant r$ пространства E_1. Оператор A

называется (ср. п. 6.4) *асимптотически линейным*, если найдется такой линейный оператор B, что

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|} = 0. \tag{17.10}$$

Оператор B, конечно, определяется по асимптотически линейному оператору A однозначно; его называют *производной оператора A в точке* ∞ и обозначают через $A'(\infty)$.

Теорема 17.2. *Пусть асимптотически линейный оператор A вполне непрерывен. Тогда его производная $A'(\infty)$ является линейным вполне непрерывным оператором.*

В предположении противного найдется последовательность нормированных элементов $e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots$, для которой $\|A'(\infty)e_i - A'(\infty)e_j\| \geqslant 3\delta > 0$ $(i \neq j)$. В силу 17.10 найдется такое $r > 0$, что $\|Ax - A'(\infty)x\| < \delta\|x\|$ $(\|x\| = r)$. Поэтому

$$\|A(re_i) - A(re_j)\| \geqslant \|A'(\infty)(re_i) - A'(\infty)(re_j)\| - \\ - \|A(re_i) - A'(\infty)(re_i)\| - \|A'(\infty)(re_j) - A(re_j)\| > \\ > r\|A'(\infty)e_i - A'(\infty)e_j\| - 2\delta r$$

и при $i \neq j$ справедливы неравенства $\|A(re_i) - A(re_j)\| \geqslant \delta r$. Эти неравенства противоречат компактности оператора A. ∎

17.6. Разложение Тейлора. Продолжим изучение оператора A, действующего из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Построения этого пункта (как и построения п. 17.5) относятся как к вещественным, так и к комплексным пространствам E_1 и E_2.

Пусть оператор A определен в некоторой окрестности точки x_0. Будем говорить, что оператор A *допускает в точке x_0 разложение Тейлора порядка k*, если приращение $A(x_0 + h) - A(x_0)$ можно записать в виде

$$A(x_0 + h) - A(x_0) = B_1h + B_2h + \ldots + B_kh + \omega(x_0, h), \tag{17.11}$$

где каждый оператор B_j $(j = 1, \ldots, k)$ однороден порядка j $(B_j(\lambda h) \equiv \lambda^j B_j(h)$ при $h \in E_1)$, а $\omega(x_0, h) = o(\|h\|^k)$.

В этом определении оператор B_1 не предполагается линейным. Если B_1 линеен, то он совпадает с производной Фреше $A'(x_0)$; существование производной Фреше

означает, что оператор A допускает в точке x_0 разложение Тейлора порядка 1.

Говорят, что оператор V_j является *формой порядка j*, если его можно представить в виде $V_jh = \tilde{V}_j(h, \ldots, h)$ $(h \in E_1)$, где $\tilde{V}_j(h_1, \ldots, h_j)$ непрерывен по совокупности переменных $h_1, \ldots, h_j \in E_1$ и *полилинеен*, т. е. линеен по каждой переменной. Оператор $\tilde{V}_j(h_1, \ldots, h_j)$ без ограничения общности можно считать симметрическим, т. е. не меняющим значений при перестановке аргументов.

В наиболее важных случаях операторы $B_1, \ldots, B_k$ из разложения Тейлора (17.11) являются формами соответствующих порядков. В этих случаях используют обозначения

$$j!\,B_jh = A^{(j)}(x_0)\,h \qquad (h \in E_1). \tag{17.12}$$

Операторы $A^{(j)}(x_0)$ — это *производные высших порядков* оператора A в точке x_0. Чтобы не было путаницы с последовательными производными (которые являются операторами, действующими в пространствах операторов), будем их называть *производными по Тейлору*.

Теоремы 17.1 и 17.2 были указаны М. А. Красносельским [22]. В их обобщение В. Б. Меламед и А. И. Перов (Сибирск. матем. ж. **4**, № 3 (1963)) провели анализ свойств операторов B_j из разложения (17.11). Приведем несколько более полные утверждения.

Установим сначала одно простое вспомогательное неравенство. Формулы $\|\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}\|_1 = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_k|\}$ и $\|\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi_1t + \xi_2t^2 + \ldots + \xi_kt^k|$ определяют две различные нормы в пространстве R^k. В конечномерном пространстве каждые две нормы эквивалентны. Поэтому найдется такое $\varkappa > 0$, что

$$|\xi_j| \leqslant \varkappa \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi_1t + \xi_2t^2 + \ldots + \xi_kt^k| \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{17.13}$$

Пусть оператор A ограничен в некоторой окрестности точки x_0. Покажем, что каждый оператор B_j из представления (17.11) *также ограничен, т. е.*

$$\|B_jh\| \leqslant b_j\|h\|^j \qquad (h \in E_1;\ j = 1, \ldots, k), \tag{17.14}$$

где b_j — постоянные.

Пусть $\|A(x_0+h)-Ax_0\| \leqslant a_1$ и $\|\omega(x_0,h)\| \leqslant a_2$ при $\|h\| \leqslant \rho_0$. Тогда из (17.11) вытекает оценка $\|B_1h+B_2h+\ldots+B_kh\| \leqslant a_1+a_2$ ($\|h\| \leqslant \rho_0$) или, что то же, оценка

$$\|tB_1h+t^2B_2h+\ \ldots\ +t^kB_kh\| \leqslant a_1+a_2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ \|h\|=\rho_0). \tag{17.15}$$

Обозначим через l произвольный нормированный ($\|l\|=1$) линейный функционал из E_2^*. Из (17.15) вытекает, что

$$|tl(B_1h)+t^2l(B_2h)+\ \ldots\ +t^kl(B_kh)| \leqslant a_1+a_2$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 1,\ \|h\|=\rho_0)$$

и из (17.13) вытекают оценки

$$|l(B_jh)| \leqslant (a_1+a_2)\varkappa \qquad (\|h\|=\rho_0;\ \|l\|=1;\ j=1,\ \ldots,\ k).$$

Поэтому справедливы оценки (17.14) при $b_j=(a_1+a_2)\varkappa\rho_0^{-j}$. ∎

Покажем теперь, что *каждый оператор B_j в представлении* (17.11) *непрерывен, если оператор A непрерывен в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство проведем по индукции. Пусть операторы B_j при $j<j_0$ ($j_0 \leqslant k$) непрерывны; покажем, что и оператор B_{j_0} непрерывен.

Допустим противное — пусть оператор B_{j_0} разрывен в некоторой точке h^*. Из оценки (17.14) вытекает, что $h^* \neq 0$. Выберем такую сходящуюся в E_1 к h^* последовательность точек $h_n \in E_1$ ($n=1,2,\ldots$), для которой $\|B_{j_0}h_n-B_{j_0}h^*\| \geqslant \delta_0>0$ при всех n. Из разложения (17.11) вытекает равенство $B_{j_0}h=A_1h+\omega_1(x_0,h)$, где $A_1h=A(x_0+h)-Ax_0-B_1h-\ \ldots\ -B_{j_0-1}h$ и $\omega_1(x_0,h)=-B_{j_0+1}h-\ldots-B_kh-\omega(x_0,h)$. По предположению, оператор A_1 непрерывен; очевидно, $\omega_1(x_0,h)=o(\|h\|^{j_0})$. Так как при малых положительных t

$$\|A_1(th_n)-A_1(th^*)\| \geqslant \|B_{j_0}(th_n)-B_{j_0}(th^*)\| -$$
$$-\|\omega_1(x_0,th)-\omega_1(x_0,th^*)\|,$$

то $\|A_1(th_n)-A_1(th^*)\| \geqslant \delta_0t^{j_0}-o(t^{j_0})$ и поэтому найдется такое положительное число τ, при котором справедливы оценки

$$\|A_1(\tau h_n)-A_1(\tau h^*)\| \geqslant \frac{1}{2}\delta_0\tau^{j_0}>0 \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Эти оценки противоречат непрерывности оператора A_1 в точке τh^*. Значит, оператор B_{j_0} непрерывен. ∎

Предположим, наконец, что *оператор A компактен в некоторой окрестности точки x_0. Тогда компактен каждый оператор B_j из разложения* (17.11).

Для доказательства достаточно провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 17.1.

Пусть операторы $B_1,\ \ldots,\ B_{j_0-1}$ компактны; покажем, что компактен и оператор B_{j_0} ($j_0 \leqslant k$). В предположении противного, для некоторой ограниченной последовательности $e_1,\ e_2,\ \ldots$ элементов из E_1 при $n \neq m$ выполнены неравенства $\|B_{j_0}e_n-B_{j_0}e_m\| \geqslant \delta_0>0$. Поэтому при достаточно малых положительных t справедливы оценки

$$\|A_1(te_n)-A_1(te_m)\| \geqslant \|B_{j_0}(te_n)-B_{j_0}(te_m)\| -$$
$$-\|\omega_1(x_0,te_n)\|-\|\omega_1(x_0,te_m\| \geqslant \delta_0t^{j_0}-o(t^{j_0}) \qquad (n \neq m),$$

из которых вытекает, что оператор A_1 не обладает свойством компактности. С другой стороны, по допущению оператор A_1 компактен (как сумма компактных операторов). Мы пришли к противоречию. ∎

Из проведенных рассуждений, в частности, вытекает

Теорема 17.3. *Пусть вполне непрерывный оператор A допускает в точке x_0 разложение* (17.11). *Тогда каждый оператор B_j ($j=1,\ \ldots,\ k$) вполне непрерывен.*

Допустим, что оператор A допускает в точке x_0 разложение Тейлора (17.11) любого порядка k. Сопоставим тогда приращению $A(x_0+h)-Ax_0$ бесконечный ряд

$$S(h)=B_1h+B_2h+\ \ldots\ +B_kh+\ \ldots \tag{17.16}$$

Может оказаться, что этот ряд сходится лишь при $h=0$; в этом случае его нужно рассматривать лишь как источник формул, дающих приближения для приращений $A(x_0+h)-A(x_0)$ с ошибкой разного порядка малости. Если же ряд (17.16) сходится в некоторой окрестности нуля к $A(x_0+h)-Ax_0$, то будем писать

$$A(x_0+h)-Ax_0=B_1h+B_2h+\ \ldots\ +B_kh+\ \ldots \tag{17.17}$$

Сходимость правой части может быть (в зависимости от конкретного оператора A) слабой, сильной, равномерной на некотором шаре и т. д.

Пусть операторы B_k являются формами; тогда формулу (17.17) можно переписать в виде

$$A(x_0+h)=Ax_0+A'(x_0)h+\frac{1}{2!}A''(x_0)h+\ \ldots$$
$$\ldots\ +\frac{1}{k!}A^{(k)}(x_0)h+\ \ldots \tag{17.18}$$

разложения оператора $A(x_0+h)$ в *ряд Тейлора*. Если при каждом x_0 из некоторой области $\Omega\subset E_1$ оператор $A(x_0+h)$ допускает разложение в ряд Тейлора, равномерно сходящийся в некоторой окрестности нуля, то оператор A называется *аналитическим* в области Ω. В случае комплексных банаховых пространств *определенный в области Ω оператор A аналитичен, если он дифференцируем по Фреше в каждой точке этой области.*

17.7. Оператор суперпозиции. Свойства оператора суперпозиции (17.2) полностью определяются свойствами функции $f(t, u)$ двух переменных $t\in G$, $-\infty<u<\infty$. Ниже всюду предполагается, что она удовлетворяет так называемому *условию Каратеодори*: она непрерывна по u и измерима по t.

Если $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных, то оператор (17.2) действует, непрерывен и ограничен в пространстве C. Оператор суперпозиции свойством полной непрерывности не обладает (кроме тривиального случая, когда $f(t, u)$ не зависит от u).

Если $f(t, u)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_u(t, u)$, то оператор суперпозиции дифференцируем по Фреше в любой точке $x_0=x_0(t)$ пространства C. Производная Фреше определяется равенством $\mathfrak{f}'(x_0)h=f'_u[t, x_0(t)]\,h(t)$. Если $f(t,u)$ непрерывна вместе с производными $f'_u(t, u), \ldots, f^{(k)}_{u^k}(t, u)$, то оператор суперпозиции допускает в каждой точке $x_0\in C$ разложение Тейлора порядка k и, более того, он имеет производные по Тейлору до порядка k, причем

$$\mathfrak{f}^{(k)}(x_0)\,h=f^{(k)}_{u^k}[t, x_0(t)]\,h^k(t) \qquad (h\in C). \tag{17.19}$$

Условия аналитичности оператора суперпозиции в пространстве C читатель без труда сформулирует сам.

Перейдем к пространствам L_p. Как и в случае пространства C, действующий из L_{p_1} в L_{p_2} оператор суперпозиции бывает вполне непрерывен лишь в случае, если $f(t, u)$ не зависит от u. Поэтому речь может идти лишь о непрерывности, ограниченности и дифференцируемости оператора суперпозиции.

Оператор суперпозиции, рассматриваемый в пространствах L_p, обладает многими свойствами линейного

оператора. Например, если его значения на некотором шаре пространства L_{p_1} принадлежат L_{p_2}, то его значения на всем L_{p_1} принадлежат L_{p_2}; если он непрерывен в одной точке $x_0\in L_{p_1}$, то он непрерывен в каждой точке пространства L_{p_1}. Приведем теорему, на которой основана теория оператора суперпозиции в пространствах L_p.

Теорема 17.4. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из пространства L_{p_1} в пространство L_{p_2}, где $p_2<\infty$. Тогда $\mathfrak{f}$ непрерывен и ограничен как оператор из L_{p_1} в L_{p_2}.*

Линейный непрерывный оператор на каждом шаре равномерно непрерывен. Оператор суперпозиции этим свойством обладает не всегда. Однако верна

Теорема 17.5. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из L_{p_1} в L_{p_2} и пусть $q_1\geqslant p_1$, $q_2\leqslant p_2$, $(q_1-p_1)+(p_2-q_2)>0$. Тогда $\mathfrak{f}$ равномерно непрерывен на каждом шаре пространства L_{q_1} как оператор из L_{q_1} в L_{q_2}.*

В связи с теоремами 17.4 и 17.5 естествен вопрос об условиях, при которых оператор $\mathfrak{f}$ действует из L_{p_1} в L_{p_2}, — для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t, u)$ допускала оценку

$$|f(t, u)|\leqslant a(t)+b\,|u|^{\frac{p_1}{p_2}} \quad (t\in G,\ -\infty<u<\infty), \tag{17.20}$$

где $a(t)\in L_{p_2}$. Таким образом, пространства L_p удобны лишь для изучения операторов суперпозиции, порожденных функциями $f(t, u)$ со степенными по переменной u нелинейностями.

Теорема 17.6. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из L_{p_1} в L_{p_2}, где $1\leqslant p_2<p_1<\infty$. Пусть функция $f(t, u)$ имеет производную $g(t, u)=f'_u(t, u)$, непрерывную по u. Тогда для дифференцируемости $\mathfrak{f}$ как оператора из L_{p_1} в L_{p_2} в каждой точке пространства L_{p_1}, необходимо и достаточно, чтобы оператор суперпозиции $\mathfrak{g}x(t)=g[t, x(t)]$ действовал из L_{p_1} в $L_{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}$.*

Если, например,

$$f(t, u)=a_0(t)+a_1(t)\,u+\ldots+a_k(t)\,u^k$$
$$(t\in G,\ -\infty<u<\infty), \tag{17.21}$$

причем все функции $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_k(t)$ ограничены, то оператор $\mathfrak{f}$ не только действует из каждого пространства L_{p_1} ($p_1 \geqslant k$) в любое пространство L_{p_2}, $kp_2 \leqslant p_1$, но и дифференцируем в каждой точке пространства L_{p_1} как оператор из L_{p_1} в L_{p_2}.

Теорема 17.6 дает ответ на вопрос об условиях, при которых оператор $\mathfrak{f}$ дифференцируем в каждой точке пространства L_{p_1}. При существенно более слабых ограничениях оператор $\mathfrak{f}$ дифференцируем в отдельных точках пространства L_{p_1}.

17.8. Оператор Гаммерштейна. При изучении интегрального оператора (17.4) его удобно представить в виде суперпозиции $A = B\mathfrak{f}$ оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$ и линейного интегрального оператора B с ядром $k(t, s)$.

Допустим, что нас интересуют условия, при которых оператор (17.4) действует в некотором пространстве E и обладает тем или иным свойством. Тогда можно ввести в рассмотрение вспомогательное пространство R (не обязательно банахово) и получать интересующие нас условия как объединение условий, обеспечивающих соответствующие свойства оператора $\mathfrak{f}$, действующего из E в R, с условиями, обеспечивающими соответствующие свойства оператора B, действующего из R в E. Мы приведем лишь простейшие (и наиболее важные!) утверждения, вытекающие из этой общей схемы.

Допустим вначале, что функция $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных, а линейный интегральный оператор B с ядром $k(t, s)$ вполне непрерывен в C. Тогда оператор (17.4) также действует и вполне непрерывен в C. Если $f(t, u)$ непрерывна вместе со своими производными по переменной u до порядка k, то оператор (17.4) допускает разложение Тейлора (17.11) до порядка k; его производные по Тейлору определяются формулой

$$A^{(k)}(x_0)\,h = \int_G k(t, s)\, f_{u^k}^{(k)}[s, x_0(s)]\, h^k(s)\, ds. \qquad (17.22)$$

Достаточными условиями полной непрерывности оператора (17.4) в пространстве L_p являются условия, при которых оператор $\mathfrak{f}$ действует из пространства L_p в некоторое пространство L_{p_1}, объединенные с условиями, при которых линейный оператор B действует из пространства L_{p_1} в пространство L_p и вполне непрерывен. Аналогичным способом можно получить достаточные условия дифференцируемости оператора (17.4), разложения его по Тейлору и т. д.

Укажем один пример. Пусть $f(t, u)$ — это функция (17.21), а $k(t, s)$ — ядро типа потенциала (п. 17.3). Тогда оператор Гаммерштейна (17.4) действует в каждом L_p, где $p \geqslant k$ и $(N-\lambda)p > N(k-1)$; он вполне непрерывен и дифференцируем в каждой точке этого пространства.

Читатель легко получит другие аналогичные утверждения, объединяя в пары каждое известное ему предложение об операторе B с соответствующим утверждением об операторе суперпозиции.

17.9. Нелинейный интегральный оператор общего вида. Пусть функция $k(t, s, u)$ $(t, s \in G, -\infty < u < \infty)$ непрерывна по совокупности переменных. Тогда оператор (17.3) действует в пространстве C и вполне непрерывен. Если ядро $k(t, s, u)$ непрерывно дифференцируемо по u, то оператор (17.3) дифференцируем в каждой точке пространства C и

$$A'(x_0)\,h(t) = \int_G k'_u[t, s, x_0(s)]\,h(s)\,ds. \qquad (17.23)$$

Легко указать также условия разложимости по Тейлору любого порядка k и условия аналитичности оператора (17.3), действующего в пространстве C.

Сложнее анализ оператора (17.3) в пространствах L_p.

Предположим, что $k(t, s, u)$ допускает оценку

$$|k(t, s, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{l} k_i(t, s)\, f_i(s, u). \qquad (17.24)$$

Через B_i обозначим линейный интегральный оператор с ядром $k_i(t, s)$, а через $\mathfrak{f}_i$ — оператор суперпозиции, определенный функцией $f_i(s, u)$ (эти функции предполагаются непрерывными по переменной u).

Теорема 17.7. *Пусть непрерывная по u функция $k(t, s, u)$ допускает оценку* (17.24), *причем при каждом i оператор $\mathfrak{f}_i$ действует из L_p $(1 < p < \infty)$ в пространство L_{q_i} $(1 < q_i < \infty)$, а B_i — вполне непрерывный оператор, действующий из L_{q_i} в L_p. Тогда оператор* (17.3) *действует в L_p и вполне непрерывен.*

Самой удивительной чертой этой теоремы является тот факт, что непрерывность оператора (17.3) вытекает не из существования мажорантных оценок для приращений оператора, а из оценок значений самого оператора.

Приведем один признак дифференцируемости оператора (17.3). Пусть существует непрерывная по u производная $k'_u(t, s, u)$, для которой верна оценка

$$|k'_u(t, s, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} k_i^0(t, s)\, g_i(s, u). \qquad (17.25)$$

Через B_i^0 будем обозначать линейный интегральный оператор с ядром $k_i^0(t, s)$, а через $\mathfrak{g}_i$ — оператор суперпозиции, определенный функцией $g_i(s, u)$ (мы ее считаем непрерывной по u). *Если оператор* (17.3) *действует в пространстве L_p, где $1 < p < \infty$, то для его дифференцируемости в каждой точке пространства L_p достаточно, чтобы при каждом i оператор $\mathfrak{g}_i$ действовал из L_p в некоторое L_{q_i}, где $\frac{p}{p-1} \leqslant q_i < \infty$, а B_i^0 действовал из пространства $L_{\frac{pq_i}{p+q_i}}$ в пространство L_p.*

17.10. Асимптотические производные интегральных операторов. Исследование асимптотической линейности действующего из E_1 в E_2 оператора суперпозиции удобно проводить по следующей схеме. Вначале нужно проверить, что существует предел $u^{-1}f(t, u)$ при $u \to \infty$. Если этот предел $g(t)$ существует, то асимптотическую производную нужно искать в виде

$$\mathfrak{f}'(\infty)\, h(t) = g(t)\, h(t), \qquad (17.26)$$

т. е. составить разность $\omega(t, u) = f(t, u) - g(t)u$ и попытаться показать, что $\|\omega[t, x(t)]\|_{E_2} = o(\|x(t)\|_{E_1})$ при $\|x(t)\|_{E_1} \to \infty$.

Если, например, $f(t, u)$ и $g(t)$ непрерывны, а $|\omega(t, u)| < a + \varphi(u)$, где $u^{-1}\varphi(u) \to 0$ при $|u| \to \infty$, то оператор суперпозиции действует в C и асимптотически линеен; его асимптотическая производная определяется равенством (17.26).

Пусть оператор суперпозиции действует из L_{p_1} в L_{p_2} и $p_2 > p_1$. Тогда он асимптотически линеен — его асимптотическая производная равна нулю.

Пусть, наконец, оператор суперпозиции действует из L_{p_1} в L_{p_2} и $p_2 \leqslant p_1$. Тогда формула (17.26) определяет его асимптотическую производную, если, например, $|f(t, u) - g(t)u| \leqslant a(t) + b(t)|u|^r$ $(t \in G, -\infty < u < < \infty)$, где $g(t) \in L_{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}$, $a(t) \in L_{p_2}$, $0 < r < 1$, $b(t) \in \in L_{\frac{p_1p_2}{p_1-rp_2}}$.

Для операторов Гаммерштейна (17.4) достаточные условия асимптотической линейности легко получить из признаков асимптотической линейности оператора суперпозиции. Если оператор $\mathfrak{f}$ действует из E_1 в E_2 и его асимптотическая производная определяется равенством (17.26), а линейный интегральный оператор B действует из E_2 в E_1 и непрерывен, то оператор A действует в пространстве E_1 и асимптотически линеен, причем

$$A'(\infty)\, h(t) = \int_G k(t, s)\, g(s)\, h(s)\, ds. \qquad (17.27)$$

Перейдем к оператору (17.3). Предположим, что существует предел

$$\lim_{u \to \infty} u^{-1} k(t, s, u) = k_0(t, s) \quad (t, s \in G). \qquad (17.28)$$

Тогда производную $A'(\infty)$ естественно искать в виде оператора

$$B_0 h(t) = \int_G k_0(t, s)\, h(s)\, ds. \qquad (17.29)$$

Рассмотрим случай, когда и оператор (17.3), и оператор (17.29) действуют в L_p и непрерывны. *Пусть $|k(t, s, u) - k_0(t, s)\, u| \leqslant R_0(t, s) f(s, u)$, где $f(s, u)$ непрерывна по u и определяет оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, действующий из L_p в некоторое пространство L_γ и имеющий нулевую асимптотическую производную, а $R_0(t, s)$ — ядро линейного непрерывного оператора, действующего из L_γ в L_p. Тогда оператор* (17.3) *асимптотически линеен в пространстве L_p и $A'(\infty) = B_0$.*

§ 18. Конечномерные аппроксимации

18.1. Проектирование на выпуклое множество. Пусть N — выпуклое множество банахова пространства E. Непрерывный оператор P, определенный на всем E, называется *проектором* на N, если $PE = N$ и $Px = x$ при $x \in N$.

Теорема 18.1. *Пусть N — замкнутое и выпуклое множество в E. Пусть α — произвольное положительное число. Тогда существует проектор P_α на N, для которого*

$$\|x - P_\alpha x\| \leqslant (1+\alpha)\rho(x, N) \qquad (x \in E), \tag{18.1}$$

где $\rho(x, N)$ — расстояние от x до N.

Доказательство. Пусть сначала N сепарабельно и пусть последовательность y_k плотна в N. Введем в рассмотрение непрерывные на $E \setminus N$ функции

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } (1+\alpha)\rho(x, N) \leqslant \|y_k - x\|, \\ 1 + \alpha - \dfrac{\|y_k - x\|}{\rho(x, N)}, & \text{если } (1+\alpha)\rho(x, N) \geqslant \|y_k - x\|. \end{cases}$$

Очевидно, $0 \leqslant \lambda_k(x) < 1 + \alpha$ при $x \in E \setminus N$ и любом k, функция

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^k} \lambda_k(x) \qquad (x \in E \setminus N)$$

положительна и непрерывна (так как ряд в правой части сходится равномерно). Функции

$$\mu_k(x) = \frac{\lambda_k(x)}{(1+\alpha)^k \lambda(x)} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

также непрерывны на $E \setminus N$. Очевидно, они неотрицательны и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) = 1$ при $x \in E \setminus N$. Рассмотрим теперь оператор

$$P_\alpha x = \begin{cases} x, & \text{если } x \in N, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) y_k, & \text{если } x \overline{\in} N, \end{cases}$$

и покажем, что он является проектором на N и удовлетворяет условию (18.1).

Пусть $x \in E \setminus N$. При каждом достаточно большом n элемент

$$z_n = \frac{\mu_1(x) y_1 + \ldots + \mu_n(x) y_n}{\mu_1(x) + \ldots + \mu_n(x)}$$

лежит в N в силу выпуклости N. Но $\|z_n - P_\alpha x\| \to 0$, откуда следует, что $P_\alpha x \in N$. Так как $P_\alpha N = N$, то $P_\alpha E = N$.

Докажем теперь справедливость оценки (18.1). При любом $x \in E \setminus N$ справедливо тождество

$$x - P_\alpha x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) x - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x)(x - y_k),$$

откуда

$$\|x - P_\alpha x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x) \|x - y_k\|.$$

По определению, функции $\mu_k(x)$ с номерами k, для которых $(1+\alpha)\rho(x, N) \leqslant \|y_k - x\|$, равны нулю. Поэтому в последней сумме отличны от нуля лишь слагаемые с номерами k, при которых справедлива оценка $\|x - y_k\| < (1+\alpha)\rho(x, N)$. Следовательно,

$$\|x - P_\alpha x\| < \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x)(1+\alpha)\rho(x, N) = (1+\alpha)\rho(x, N)$$

и тем самым неравенство (18.1) доказано.

Остается показать непрерывность P_α. В точках открытого множества $E \setminus N$ и во внутренних точках множества N непрерывность P_α очевидна. Пусть x_0 — граничная точка множества N и пусть $x_n \in E$ — сходящаяся к x_0 последовательность. Тогда из цепочки соотношений

$$\|P_\alpha x_n - P_\alpha x_0\| = \|P_\alpha x_n - x_0\| \leqslant \|P_\alpha x_n - x_n\| + \|x_n - x_0\| \leqslant \\ \leqslant (1+\alpha)\rho(x_n, N) + \|x_n - x_0\| \leqslant (2+\alpha)\|x_n - x_0\|$$

вытекает сходимость последовательности $P_\alpha x_n$ к элементу $P_\alpha x_0$.

Утверждение теоремы при дополнительном предположении о сепарабельности N доказано.

Для перехода к общему случаю напомним некоторые определения. Покрытие $\{V\}$ множества M называется *локально конечным*, если у каждой точки $x \in M$ существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств покрытия. Покрытие $\{V\}$ называется *вписанным* в покрытие $\{U\}$, если каждое множество V содержится в некотором множестве U. В силу известной теоремы А. Стоуна (см. [32]), в каждое покрытие открытыми множествами подмножества M метрического пространства можно вписать локально конечное покрытие также открытыми множествами.

Пусть теперь N — произвольное выпуклое замкнутое множество, α — положительное число. Выберем положительное число δ так, чтобы выполнялись неравенства $0 < \delta < 1$, $1 + 2\delta < (1+\alpha)(1-\delta)$. Для каждого $z \in E \setminus N$ обозначим через U_z шар $\| x - z \| < \delta\rho(z, N)$. Семейство $\{U_z\colon z \in E \setminus N\}$ этих шаров образует покрытие множества $E \setminus N$ открытыми множествами. Пусть $\{V_\tau\colon \tau \in T\}$ — локально конечное покрытие, вписанное в покрытие $\{U_z\colon z \in E \setminus N\}$. Каждое открытое множество V_τ лежит в некотором шаре U_{z_τ}. Пусть y_τ такая точка из N, что $\| z_\tau - y_\tau \| \leqslant (1+\delta)\rho(z_\tau, N)$.

Пусть $x \in V_\tau$. Тогда $\rho(z_\tau, N) \leqslant \| x - z_\tau \| + \rho(x, N) \leqslant \delta\rho(z_\tau, N) + \rho(x, N)$, откуда вытекает оценка $\rho(z_\tau, N) \leqslant \rho(x, N)/(1-\delta)$. Следовательно,

$$\| x - y_\tau \| \leqslant \| x - z_\tau \| + \| z_\tau - y_\tau \| \leqslant \delta\rho(z_\tau, N) + (1+\delta)\rho(z_\tau, N) \leqslant \frac{1+2\delta}{1-\delta}\rho(x, N) \leqslant (1+\alpha)\rho(x, N).$$

Рассмотрим теперь неотрицательные и непрерывные на $E \setminus N$ функции $\lambda_\tau(x) = \rho(x, E \setminus V_\tau)$ $(\tau \in T)$. Для каждого $x \in E \setminus N$ существуют такие τ, что $x \in V_\tau$, так как $\{V_\tau\colon \tau \in T\}$ — покрытие $E \setminus N$. Так как $\{V_\tau\colon \tau \in T\}$ — локально конечное покрытие $E \setminus N$, то для каждого $x \in E \setminus N$ существует окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств V_τ. Поэтому функция $\lambda(x) = \sum_\tau \lambda_\tau(x)$ определена на всем множестве $E \setminus N$, непрерывна на нем и положительна. Пусть $\mu_\tau(x) = \frac{\lambda_\tau(x)}{\lambda(x)}$ $(x \in E \setminus N)$. Очевидно, функции $\mu_\tau(x)$ неотрицательны, непрерывны и $\sum_\tau \mu_\tau(x) = 1$.

Определим теперь оператор P_α равенством

$$P_\alpha x = \begin{cases} x, & \text{если } x \in N, \\ \sum_\tau \mu_\tau(x) y_\tau, & \text{если } x \,\overline{\in}\, N. \end{cases}$$

Очевидно, его значения лежат в N. Из очевидного равенства $x - P_\alpha x = \sum_\tau \mu_\tau(x)(x - y_\tau)$ следует оценка

$$\| x - P_\alpha x \| \leqslant \sum_\tau \mu_\tau(x) \| x - y_\tau \|.$$

Если $\mu_\tau(x) \neq 0$, то $x \in V_\tau$ и поэтому $\| x - y_\tau \| < (1+\alpha)\rho(x, N)$. Следовательно,

$$\| x - P_\alpha x \| \leqslant \sum_\tau \mu_\tau(x)(1+\alpha)\rho(x, N) = (1+\alpha)\rho(x, N).$$

Непрерывность оператора P_α доказывается так же, как и в случае сепарабельного пространства E. ∎

Существование непрерывных проекторов на выпуклые множества фактически было доказано еще Дугунджи (Dugundji G., Pac. J. Math. 1, № 3 (1951)). Существование проекторов, удовлетворяющих важному для наших построений условию (18.1), ранее, по-видимому, не отмечалось.

18.2. Замечания. В случае произвольного банахова пространства не всегда можно построить проектор P_0 на N, удовлетворяющий условию (18.1) при $\alpha = 0$. В случае гильбертова пространства такой проектор можно построить. Для этого достаточно положить $P_0 x = z(x)$, где $z(x) \in N$ и $\| x - z(x) \| = \rho(x, N)$. Оператор P_0 называют *оператором ортогонального проектирования на множество N*.

Допустим, что множество N центрально симметрично, т. е. содержит вместе с каждым элементом $x \in N$ и элемент $-x$. Тогда удовлетворяющий условию (18.1) проектор P_α на N можно построить так, чтобы он обладал свойством нечетности:

$$P_\alpha(-x) = -P_\alpha x \quad (x \in E). \tag{18.2}$$

Действительно, если некоторый проектор Q_α на центрально симметричное множество N удовлетворяет условию (18.1), то нечетный оператор $P_\alpha x = \frac{1}{2}[Q_\alpha x - Q_\alpha(-x)]$ также будет проектором на N, удовлетворяющим условию (18.1). ∎

Пусть N — подпространство банахова пространства E. Построенный при доказательстве теоремы 18.1 проектор P_α не обладает свойством линейности. Более того, в произвольном банаховом пространстве E даже не каждое подпространство является множеством значений некоторого линейного проектора. В конечномерных банаховых пространствах каждое подпространство является, конечно, множеством значений некоторого линейного проектора, но далеко не всегда можно построить линейный проектор, удовлетворяющий условию (18.1).

Приятное исключение составляет гильбертово пространство E — оператор P ортогонального проектирования на подпространство N линеен и обладает более сильным, чем (18.1), свойством $\| x - Px \| = \rho(x, N)$ $(x \in E)$.

18.3. Конечномерная аппроксимация оператора. Важную часть класса вполне непрерывных операторов составляют операторы, множества значений которых лежат в конечномерных подпространствах. Такие операторы называют *конечномерными.*

Простым примером конечномерных операторов (в некотором функциональном пространстве E — см. п. 17.7) могут служить операторы Гаммерштейна вида

$$Ax(t) = \int_G \left[\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j(t)\, g_j(s) \right] f[s;\ x(s)]\, ds \qquad (18.3)$$

— их значения лежат в подпространстве, базисом которого являются функции $e_1(t), \ldots, e_k(t)$.

Теорема 18.2. *Пусть вполне непрерывный оператор A определен на ограниченном множестве $M \subset E$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор A_ε, что*

$$\| Ax - A_\varepsilon x \| < \varepsilon \quad (x \in M). \qquad (18.4)$$

Доказательство. Пусть α — положительное число и $y_1, \ldots, y_n$ — конечная $\frac{\varepsilon}{1+\alpha}$-сеть компактного множества AM. Обозначим через E_0 произвольное конечномерное подпространство, содержащее эту $\frac{\varepsilon}{1+\alpha}$-сеть. Очевидно, $\rho(y, E_0) < \frac{\varepsilon}{1+\alpha}$ $(y \in AM)$. В силу теоремы 18.1 существует такой проектор P на E_0, что $\| y - Py \| \leqslant (1+\alpha)\rho(y, E_0)$ $(y \in E)$ и, следовательно, $\| y - Py \| < \varepsilon$ $(y \in AM)$. Теперь остается положить $A_\varepsilon = PA$. ∎

18.4. Проектор Шаудера. Теорему 18.2 можно совсем просто доказать и без ссылки на теорему 18.1. Пусть N — произвольное компактное множество, $y_1, \ldots, y_n$ — конечная ε-сеть компактного множества N. Определенный на N конечномерный оператор

$$Px = \frac{\mu_1(x)\, y_1 + \ldots + \mu_n(x)\, y_n}{\mu_1(x) + \ldots + \mu_n(x)} \quad (x \in N), \qquad (18.5)$$

где

$$\mu_k(x) = \begin{cases} \varepsilon - \| x - y_k \|, & \text{если } \| x - y_k \| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \| x - y_k \| > \varepsilon, \end{cases}$$

называют *проектором Шаудера.* Очевидно, оператор (18.5) удовлетворяет неравенству $\| x - Px \| < \varepsilon$ $(x \in N)$. Для доказательства теоремы 18.2 достаточно положить $A_\varepsilon = PA$, где P — проектор Шаудера, построенный по компактному множеству $N = AM$ и его произвольной ε-сети.

Если A линеен, то часто желательно уметь строить также линейные аппроксимирующие A конечномерные операторы A_ε. Это можно сделать не всегда. В случае гильбертова пространства линейный вполне непрерывный оператор A с любой точностью ε можно аппроксимировать линейным конечномерным оператором $A_\varepsilon = P_\varepsilon A$, где P_ε — оператор ортогонального проектирования на любое конечномерное подпространство, содержащее какую-либо ε-сеть компактного множества AM.

18.5. Продолжение вполне непрерывных операторов. Установим аналог теоремы 1.1 для вполне непрерывных операторов.

Теорема 18.3. *Пусть на замкнутом множестве $M \subset E$ задан вполне непрерывный оператор A со значениями в банаховом пространстве E_1. Тогда A можно продолжить до определенного на всем пространстве E вполне непрерывного оператора $\tilde{A}$ со значениями в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}}\, AM \subset E_1$ множества AM.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда множество M ограничено. Тогда в силу теоремы

18.2 оператор A можно представить рядом

$$Ax = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x \quad (x \in M), \tag{18.6}$$

где каждый из операторов A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ конечномерен и

$$\| A_n x \| \leqslant 2^{-n} \quad (x \in M,\ n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{18.7}$$

Через P_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ обозначим определенный на E_1 непрерывный проектор на множество $\overline{\text{co}}\, A_n M$; такие проекторы существуют в силу теоремы 18.1.

Каждый из операторов A_n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ по известной теореме П. С. Урысона можно продолжить до определенного на всем E непрерывного оператора B_n со значениями в E_1. Положим $C_n = P_n B_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Каждый из операторов C_n является вполне непрерывным (даже конечномерным) продолжением на все E соответствующего оператора A_n. Из (18.7) вытекают оценки $\| C_n x \| \leqslant 2^{-n}$ $(x \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому ряд

$$Cx = C_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x \quad (x \in E)$$

определяет вполне непрерывное продолжение оператора A на все пространство E.

Обозначим теперь через P существующий в силу теоремы 18.1 проектор на множество $\overline{\text{co}}\, AM$. Это множество компактно в силу известной леммы Мазура, так как по условию компактно множество AM. Оператор $\tilde{A} = PC$ будет вполне непрерывным продолжением оператора A на все E со значениями в $\overline{\text{co}}\, AM$.

Перейдем к случаю, когда множество M неограниченное. Введем обозначение $T_n = \{x: \| x \|_E \leqslant n\}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. По уже доказанному можно определить на T_1 вполне непрерывный оператор A_1 со значениями в $\overline{\text{co}}\, A(M \cap T_1)$, принимающий на $M \cap T_1$ те же значения, что и оператор A. Через B_1 обозначим определенный на множестве $M_1 = M \cup T_1$ оператор, совпадающий с A на M и с A_1 на шаре T_1. Оператор B_1 является вполне непрерывным продолжением на M_1 оператора A со значениями в множестве $\overline{\text{co}}\, AM$.

Через A_2 обозначим оператор со значениями в $\overline{\text{co}}(M \cap T_2)$, определенный на T_2 и принимающий на $T_1 \cup [M \cap T_2]$ те же значения, что и оператор B_1. Затем через B_2 обозначим оператор, определенный на множестве $M_2 = M \cup T_2$, совпадающий с A на M и с A_2 на T_2. Оператор B_2 является продолжением и оператора A, и оператора B_1 на множество $M_2 = M \cup T_2$ со значениями в $\overline{\text{co}}\, AM$.

Аналогично строится продолжение B_3 операторов A и B_2 на множество $M_3 = M \cup T_3$ и т. д. ∎

Теорема 18.3 в случае ограниченного M является частным случаем известной теоремы Дугунджи о продолжении непрерывных операторов.

18.6. Продолжение с конечным числом неподвижных точек. Перенесем теперь на векторные поля с вполне непрерывными операторами теорему 1.2.

Точка x_0 называется *неподвижной точкой* оператора A, если $Ax_0 = x_0$.

Теорема 18.4. *Пусть на ограниченном замкнутом множестве $M \subset E$ задан вполне непрерывный оператор A со значениями в E, не имеющий на M неподвижных точек. Тогда оператор A можно продолжить до определенного на всем E вполне непрерывного оператора $\tilde{A}$ так, чтобы $\tilde{A}$ имел лишь конечное число неподвижных точек на всем E, чтобы $\tilde{A}$ имел не более одной неподвижной точки в каждой ограниченной компоненте связности множества $E \diagdown M$ и чтобы $\tilde{A}$ не имел неподвижных точек в неограниченной компоненте связности множества $E \diagdown M$.*

Доказательство. В силу теоремы 18.3 существует вполне непрерывное продолжение B_1 оператора A на все пространство E со значениями в компактном множестве $N = \overline{\text{co}}\, AM$. Обозначим через F множество неподвижных точек оператора B_1. Это множество компактно, так как $F \subset N$, и не имеет общих точек с M. Поэтому $\rho(M, F) = \inf\limits_{x \in M,\, y \in F} \| x - y \| = \delta > 0$.

Положим $\alpha = \inf\limits_{x \in M_1} \| x - B_1 x \|$, где $M_1 = \left\{ x: \rho(x, M) \leqslant \dfrac{\delta}{2} \right\}$ (множество M_1 ограничено, замкнуто и содержит M). Число α положительно, ибо, в предположении противного, найдется последовательность $x_n \in M_1$ такая, что $\| x_n - B_1 x_n \| \to 0$; при этом элементы $B_1 x_n$ принадлежат компактному множеству и поэтому можно считать, что последовательность $B_1 x_n$ сходится к некоторому элементу

y; следовательно, и последовательность x_n сходится к y; но тогда и $y \in M_1$ и $B_1 y = y$ — мы пришли к противоречию.

В силу теоремы 18.2 существует такой определенный на M_1 конечномерный оператор B_2, для которого $\|B_1 x - B_2 x\| < \alpha/2$ $(x \in M_1)$. Построим по операторам A, B_1 и B_2 определенный на M_1 новый оператор

$$B_3 x = \begin{cases} Ax, & \text{если} \quad x \in M, \\ B_1 x + \frac{2}{\delta}\rho(x, M)(B_2 x - B_1 x), & \text{если} \quad x \in M_1 \setminus M. \end{cases}$$

Оператор B_3 является также вполне непрерывным продолжением оператора A на множество M_1, не имеющим неподвижных точек.

Множество M_1 является замыканием $\overline{\Omega}$ области $\Omega = \left\{x: \rho(x, M) < \frac{\delta}{2}\right\}$. По построению, значения оператора B_3 на границе $\dot{\Omega}$ области Ω лежат в некотором конечномерном подпространстве $E_0 \subset E$. Через B_3^0 обозначим сужение оператора B_3 на множество $\dot{\Omega} \cap E_0$. По теореме 1.2 оператор B_3^0 можно продолжить на все подпространство E_0 до непрерывного оператора B_4^0 со значениями в E_0, имеющего лишь конечное число неподвижных точек.

Оператор B_5, определенный на $\dot{\Omega}$ и на $E_0 \setminus \Omega$ равенствами $B_5 x = B_3 x$ при $x \in \dot{\Omega}$ и $B_5 x = B_4^0 x$ при $x \in E_0 \setminus \Omega$, также будет иметь лишь конечное число неподвижных точек; значения его принадлежат E_0. В силу теоремы 18.3 оператор B_5 можно продолжить на все пространство E до вполне непрерывного оператора B_6 со значениями в E_0, у оператора B_6 все неподвижные точки лежат в пространстве E_0.

Нетрудно видеть, что оператор

$$Cx = \begin{cases} B_3 x, & \text{если} \quad x \in M_1, \\ B_6 x, & \text{если} \quad x \overline{\in} M_1, \end{cases} \tag{18.8}$$

является вполне непрерывным продолжением оператора A, определенным на всем E, имеющим лишь конечное число неподвижных точек (все они лежат в E_0).

Напомним теперь классическую процедуру «передвижения» и «склеивания» неподвижных точек.

Пусть некоторый вполне непрерывный оператор D имеет в шаре $\|x - x_0\| < r$ одну или несколько неподвижных точек, а на сфере $\|x - x_0\| = r$ у него неподвижных точек нет. Тогда вполне непрерывный оператор D_1, совпадающий с D при $\|x - x_0\| \geqslant r$ и определенный равенством $D_1 x = \frac{\|x - x_0\|}{r} D\left[x_0 + \frac{r(x - x_0)}{\|x - x_0\|}\right] + \left(1 - \frac{\|x - x_0\|}{r}\right) x_0$ в шаре $\|x - x_0\| \leqslant r$, имеет в этом шаре единственную неподвижную точку x_0.

Описанная процедура позволяет переопределить оператор (18.8) так, чтобы переопределенный оператор C_1 также был вполне непрерывным продолжением оператора A и чтобы у него в каждой компоненте связности множества $E \setminus M$ было не больше одной неподвижной точки. Без ограничения общности можно считать при этом, что единственная неподвижная точка z оператора C_1, лежащая в неограниченной компоненте связности множества $E \setminus M$ (если у оператора C_1 есть такая неподвижная точка), лежит вне шара $\|x\| \leqslant r_1$, содержащего множество M_1.

Для завершения доказательства теоремы 18.4 достаточно положить $\tilde{A}x = C_1 x$ при $\|x\| \leqslant r_1$ и $\tilde{A}x = \frac{\|x\|}{r_1} C_1\left(\frac{r_1 x}{\|x\|}\right)$ при $\|x\| \geqslant r_1$, так как у этого оператора $\tilde{A}$ вне шара $\|x\| \leqslant r_1$ нет неподвижных точек. ∎

§ 19. Гомотопные вполне непрерывные поля

19.1. Определения. Векторное поле Φ в банаховом пространстве E (определенное на всем E или на некотором множестве $M \subset E$) называется *вполне непрерывным*, если

$$\Phi x = x - Ax, \tag{19.1}$$

где A — действующий в E вполне непрерывный оператор. Вполне непрерывное поле (19.1) называется *конечномерным*, если оператор A конечномерный.

Пусть M — ограниченное множество в E. Рассмотрим непрерывную по совокупности переменных $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in M$ вектор-функцию

$$\Phi(\lambda, x) = x - A(\lambda, x). \tag{19.2}$$

Если $A(0, x) = A_0 x$ и $A(1, x) = A_1 x$, то назовем вектор-функцию (19.2) *деформацией поля* $\Phi_0 x = x - A_0 x$ $(x \in M)$ в поле $\Phi_1 x = x - A_1 x$ $(x \in M)$. Допустим, что при каждом фиксированном λ оператор $A(\lambda, x)$ вполне непрерывен и, кроме того, что множество

$$\mathfrak{R}(A) = \{y: y = A(\lambda, x),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in M\} \tag{19.3}$$

компактно; тогда деформацию (19.2) назовем *компактной*. О компактной деформации (19.2) будем говорить, что она *компактно соединяет* вполне непрерывные векторные поля $I - A_0$ и $I - A_1$ на множестве M.

Если при каждом фиксированном λ оператор $A(\lambda, x)$ компактен, то множество (19.3) может оказаться некомпактным (придумайте пример). Однако, *если оператор $A(\lambda, x)$ непрерывен по λ равномерно относительно $x \in M$,* *то компактность множества* (19.3) *вытекает из компактности каждого оператора* $A(\lambda, x)$.

Компактная деформация (19.2) частного вида

$$\Phi(\lambda, x) = x - \lambda A_1 x - (1-\lambda) A_0 x \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in M), \tag{19.4}$$

соединяющая вполне непрерывные поля $I - A_0$ и $I - A_1$, называется *линейной*.

Деформация (19.2) *невырождена*, если вектор-функция $\Phi(\lambda, x)$ не принимает нулевых значений. Невырожденные деформации могут соединять, конечно, только невырожденные векторные поля.

Вполне непрерывные векторные поля $\Phi_0 = I - A_0$ и $\Phi_1 = I - A_1$ назовем *гомотопными* на M, если их можно соединить невырожденной компактной деформацией. Если эту невырожденную деформацию можно определить формулой (19.4), то поля Φ_0 и Φ_1 назовем *линейно гомотопными* на M.

Отношение гомотопии вполне непрерывных векторных полей обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому все невырожденные и вполне непрерывные векторные поля, определенные на фиксированном множестве, распадаются на гомотопические классы.

19.2. Признаки гомотопности. Определение гомотопности вполне непрерывных векторных полей в случае конечномерного пространства E переходит в определение, которым мы пользовались в гл. 1 при изучении непрерывных векторных полей в конечномерном пространстве. Многие конструкции из гл. 1 применимы и при изучении вполне непрерывных полей.

Приведем два простых признака гомотопности. Оба они ниже будут применяться без специальных ссылок.

Теорема 19.1. *Пусть в каждой точке x ограниченного множества $M \subset E$ векторы вполне непрерывных и невырожденных полей $I - A_0$ и $I - A_1$ не направлены противоположно*:

$$\frac{x - A_0 x}{\|x - A_0 x\|} \neq -\frac{x - A_1 x}{\|x - A_1 x\|} \qquad (x \in M). \tag{19.5}$$

Тогда поля $I - A_0$ и $I - A_1$ гомотопны на M.

Теорема 19.2. *Пусть вполне непрерывные векторные поля $I - A_0$ и $I - A_1$ невырождены на ограниченном множестве $M \subset E$ и*

$$\|A_0 x - A_1 x\| \leqslant \|x - A_0 x\| \qquad (x \in M). \tag{19.6}$$

Тогда поля $I - A_0$ и $I - A_1$ гомотопны на M.

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях обеих теорем векторные поля $I - A_0$ и $I - A_1$ линейно гомотопны. Теорему 19.2 можно рассматривать и как следствие теоремы 19.1.∎

Отметим, что невырожденность на M поля $I - A_1$ является следствием невырожденности поля $I - A_0$, если вместо (19.6) выполнено более жесткое условие

$$\|A_0 x - A_1 x\| < \|x - A_0 x\| \qquad (x \in M). \tag{19.7}$$

Если E — гильбертово пространство, то и предположение о невырожденности полей $\Phi_0 = I - A_0$, $\Phi_1 = I - A_1$ и условие (19.5) можно заменить (ср. (2.2) и (2.3)) одним неравенством

$$(\Phi_0 x, \Phi_1 x) + \|\Phi_0 x\| \cdot \|\Phi_1 x\| > 0 \qquad (x \in M), \tag{19.8}$$

или, что то же, неравенством

$$\|\Phi_1 x - \Phi_0 x\| < \|\Phi_0 x\| + \|\Phi_1 x\| \qquad (x \in M). \tag{19.9}$$

При переходе к банаховым пространствам условие (19.8) теряет смысл (так как не определено скалярное произведение); условие (19.9) становится лишь достаточным, вообще говоря, признаком того, что выполнено (19.5) (условие (19.9) остается эквивалентным (19.5) в случае, когда сфера в пространстве E строго выпукла).

19.3. Об определении гомотопности. Естественно возникает вопрос о том, можно ли в определении гомотопности отказаться от предположения о компактности множества (19.3), предположив лишь, что непрерывный по совокупности переменных оператор $A(\lambda, x)$ (из деформации (19.2)) при каждом фиксированном λ вполне непрерывен. Ответ отрицательный — после такого отказа все вполне непрерывные на M поля могут оказаться «гомотопными» друг другу (хотя, как это будет показано ниже, в принятом нами определении гомотопны друг другу не все поля).

Рассмотрим в качестве примера поле в гильбертовом пространстве E. Пусть $e(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ — функция со значениями в E, обладающая следующими свойствами: при $0 < \lambda \leqslant 1$ она сильно непрерывна и нормирована ($\|e(\lambda)\| = 1$); в точке $\lambda = 0$ она слабо непрерывна и $e(0) = 0$. Последнее требование означает, что $(x, e(\lambda)) \to 0$ при $\lambda \to 0$ и любом фиксированном x. Положим

$\Psi x = x - [(x, e_1) + 1]e_1$ $(x \in E)$, где $e_1 = e(1)$. Поле Ψ вполне непрерывно и невырождено на всем E. Пусть M — ограниченное множество в E, а $\Phi = I - A$ — произвольное невырожденное на M вполне непрерывное векторное поле. Из полной непрерывности оператора A вытекает равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \sup_{x \in M} |(Ax, e(\lambda))| = 0,$$

поэтому можно определить на $[0, 1]$ непрерывную функцию $\theta(\lambda)$ так, что $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$ и $(1 - \lambda) | (Ax, e(\lambda)) | < \theta(\lambda)$ $(0 < \lambda < 1,$ $x \in M)$. При помощи $\theta(\lambda)$ определим деформацию (19.2) равенством

$$\Phi(\lambda, x) = x - (1 - \lambda) Ax - [(x, e(\lambda)) + \theta(\lambda)] e(\lambda).$$

Вектор-функция $\Phi(\lambda, x)$ очевидным образом непрерывна по совокупности переменных $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in M$; поле $\Phi(\lambda, x)$ при каждом фиксированном λ вполне непрерывно и невырождено, так как

$$(\Phi(\lambda, x), e(\lambda)) = -(1 - \lambda)(Ax, e(\lambda)) - \theta(\lambda) \qquad (x \in M, \lambda \neq 0),$$

а $\Phi(0, x) \equiv \Phi x$. При $\lambda = 1$ поле $\Phi(\lambda, x)$ превращается в поле Ψx. Таким образом, если отказаться от предположения о компактности множества (19.3), то каждое невырожденное вполне непрерывное векторное поле Φ станет «гомотопным» на M полю Ψ.

19.4. Равномерная невырожденность гомотопии.

Лемма 19.1. *Пусть вполне непрерывные векторные поля $I - A_0$, $I - A_1$ невырождены и гомотопны друг другу на ограниченном замкнутом множестве $M \subset E$. Пусть эти поля соединяет невырожденная компактная деформация* (19.2). *Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что*

$$\| x - A(\lambda, x) \| > \alpha \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in M). \qquad (19.10)$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такие последовательности $\lambda_n \in [0, 1]$ и $x_n \in M$, что $\| x_n - A(\lambda_n, x_n) \| < 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как деформация (19.2) компактна, то без ограничения общности можно считать последовательность λ_n сходящейся к некоторому числу $\lambda^* \in [0, 1]$, а последовательность $A(\lambda_n, x_n)$ сходящейся к некоторому элементу $y \in E$. Из оценок

$$\| x_n - y \| \leqslant \| x_n - A(\lambda_n, x_n) \| + \\ + \| A(\lambda_n, x_n) - y \| < \frac{1}{n} + \| A(\lambda_n, x_n) - y \|$$

вытекает, что последовательность x_n также сходится к y. Поэтому $y \in M$. Так как при каждом n

$$\| y - A(\lambda^*, y) \| \leqslant \| y - x_n \| + \| x_n - A(\lambda_n, x_n) \| + \\ + \| A(\lambda_n, x_n) - A(\lambda^*, y) \|$$

и каждое слагаемое в правой части при $n \to \infty$ стремится к нулю, то $y = A(\lambda^*, y)$. Это противоречит невырожденности деформации (19.2). ∎

Лемма 19.1 часто применяется в упрощенной форме: *если поле* (19.1) *невырождено на ограниченном замкнутом множестве $M \subset E$, то*

$$\| x - Ax \| \geqslant \alpha > 0 \qquad (x \in M). \qquad (19.11)$$

Таким утверждением мы уже пользовались при доказательстве теоремы 18.4.

19.5. Конечномерная аппроксимация компактных деформаций. Пусть M — ограниченное замкнутое множество в банаховом пространстве E. Пусть на M задано невырожденное вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$. В силу леммы 19.1 найдется такое $\alpha > 0$, при котором выполнена оценка (19.11). Из теоремы 18.2 вытекает существование такого конечномерного оператора A_1, что $\| Ax - A_1 x \| < \alpha/2$ $(x \in M)$. Из теоремы 19.2 следует, что поле $\Phi_1 = I - A_1$ гомотопно полю Φ. Нами доказана

Теорема 19.3. *Пусть M — ограниченное замкнутое множество. Тогда в каждом гомотопическом классе невырожденных на M вполне непрерывных векторных полей есть конечномерные векторные поля.*

Пусть теперь на M заданы два конечномерных векторных поля $\Psi_0 = I - B_0$, $\Psi_1 = I - B_1$. Пусть их соединяет невырожденная компактная деформация

$$\Psi(\lambda, x) = x - B(\lambda, x) \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in M), \qquad (19.12)$$

причем все значения оператора $B(\lambda, x)$ лежат в некотором конечномерном подпространстве $E_0 \subset E$. В этом случае будем говорить, что поля $I - B_0$ и $I - B_1$ *конечномерно гомотопны.*

Теорема 19.4. *Пусть множество $M \subset E$ ограничено и замкнуто. Тогда каждые гомотопные на M конечномерные поля $I - B_0$ и $I - B_1$ конечномерно гомотопны.*

Доказательство. Пусть поля $I - B_0$ и $I - B_1$ соединены компактной невырожденной деформацией (19.2). В силу леммы 19.1 найдется такое $\alpha > 0$, при котором выполнено неравенство (19.10). Обозначим через E_0 конечномерное подпространство, которое, во-первых, содержит некоторую конечную $\frac{\alpha}{3}$-сеть компактного множества (19.3), и, во-вторых, содержит множества B_0M и B_1M. В силу теоремы 18.1 можно определить такой проектор P на подпространство E_0, что $\| y - Py \| \leqslant \leqslant 2\rho(y, E_0)$ при $y \in E$.

Теперь уже легко показать конечномерную гомотопность полей $I - B_0$ и $I - B_1$ — для этого достаточно в деформации (19.12) положить $B(\lambda, x) = PA(\lambda, x)$. В проверке нуждается лишь невырожденность деформации (19.12); эта невырожденность вытекает из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}\| x - B(\lambda, x)\| &\geqslant \| x - A(\lambda, x)\| - \| B(\lambda, x) - A(\lambda, x)\| = \\ &= \| x - A(\lambda, x)\| - \| PA(\lambda, x) - A(\lambda, x)\| \geqslant \\ &\geqslant \alpha - 2\rho(A(\lambda, x), E_0) > \alpha - \frac{2}{3}\alpha = \frac{\alpha}{3}. \blacksquare\end{aligned}$$

Теорема 19.4 может быть доказана и без ссылки на теорему 18.1. Схема доказательства при этом почти не меняется. Вначале конструируется проектор Шаудера (см. п 18.4), построенный по конечной ε-сети множества (19.3), где ε достаточно мало, а затем определяется деформация (19.12) при помощи конечномерного оператора

$$B(\lambda, x) = \begin{cases} (1 - 3\lambda) A(0, x) + 3\lambda PA(0, x), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{3}, \quad x \in M; \\ PA(3\lambda - 1, x), & \text{если } \frac{1}{3} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{3}, \quad x \in M; \\ (3 - 3\lambda) PA(1, x) + (3\lambda - 2) A(1, x), & \text{если } \frac{2}{3} \leqslant \lambda \leqslant 1, \quad x \in M. \end{cases}$$

19.6. Специальный признак гомотопности. В этом пункте мы рассмотрим последовательность вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_n x = x - A_n x \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (19.13)$$

заданных на ограниченном замкнутом множестве $M \subset E$ Будем считать, что операторы A_n в некотором смысле «сходятся» к предельному вполне непрерывному оператору A_0. Нас будет интересовать вопрос о том, при какой сходимости можно утверждать, что поля (19.13) при

больших n невырождены на M и гомотопны «предельному» полю

$$\Phi_0 x = x - A_0 x \quad (x \in M). \qquad (19.14)$$

Теорема 19.5. *Пусть вполне непрерывное векторное поле* (19.14) *невырождено на* M. *Пусть* $\| A_n x - - A_0 x \| \to 0$ *равномерно относительно* $x \in M$. *Тогда найдется такое* n_0, *что при* $n \geqslant n_0$ *каждое вполне непрерывное поле* (19.13) *невырождено на* M *и гомотопно полю* (19.14).

Доказательство. В силу леммы 19.1 найдется такое $\alpha > 0$, при котором выполнено неравенство (19.11). Но так как при достаточно больших n верна оценка $\|A_n x - A_0 x\| < \alpha$ $(x \in M)$, то остается сослаться на теорему 19.2. $\blacksquare$

Предположение о равномерной сходимости последовательности A_n к A_0 нельзя заменить требованием

$$\lim_{n \to \infty} \| A_n x - A_0 x \| = 0 \quad (x \in M) \qquad (19.15)$$

точечной сходимости. В качестве простого примера можно рассмотреть на сфере $\| x \| = 1$ гильбертова пространства последовательность полей (19.13) с операторами $A_n x = (x, e_n) e_n$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — некоторая ортонормированная последовательность. Последовательность $A_n x$ при каждом фиксированном x сходится к нулю; предельное поле (19.14) будет единичным полем $\Phi = I$, которое невырождено на сфере. В то же время каждое поле (19.13) вырождено на сфере.

Не сохраняет силу теорема 19.5 и в том случае, если условие (19.15) дополнить предположением о невырожденности на M полей (19.13). Чтобы построить соответствующий пример, нужно знать признаки негомотопности; такие признаки появятся у нас в следующем параграфе. Читатель легко построит нужные примеры после изучения § 22.

Продолжим изучение вполне непрерывных векторных полей (19.13). Пусть существует такое компактное выпуклое множество $T \subset E$, что

$$M \cap \mathrm{co}(A_n M \cup A_0 M) \subset T \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (19.16)$$

Множество T заведомо можно построить, если компактно объединение $N = \bigcup A_n M$ всех множеств $A_n M$

($n = 0, 1, 2, \ldots$), — его можно определить как выпуклую оболочку множества N. Если стоящие в левой части включений (19.16) множества пустые, то в качестве T можно взять пустое множество.

Пусть $\|A_n x_n - A_0 x_0\| \to 0$, если последовательность $x_n \in M \cap \operatorname{co}(A_n M \cup A_0 M)$ сходится к некоторому элементу x_0. Будем тогда говорить, что последовательность вполне непрерывных операторов A_n *равномерно квазисходится* на множестве M к вполне непрерывному оператору A_0. Равномерная квазисходимость равносильна (в силу компактности T) равенству

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in M \cap \operatorname{co}(A_n M \cup A_0 M)} \|A_n x - A_0 x\| = 0. \qquad (19.17)$$

Теорема 19.6. *Пусть последовательность вполне непрерывных операторов A_n равномерно квазисходится на ограниченном замкнутом множестве $M \subset E$ к вполне непрерывному оператору A_0; пусть поле* (19.14) *невырождено на M. Тогда найдется такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ каждое вполне непрерывное поле* (19.13) *невырождено на M и гомотопно полю* (19.14).

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такая возрастающая последовательность индексов $n(k)$ ($k = 1, 2, \ldots$) и такая последовательность элементов $x_k \in M$, что либо вектор $x_k - A_{n(k)} x_k$ равен нулю, либо он направлен противоположно вектору $x_k - A_0 x_k$. Иначе говоря, элементы x_k удовлетворяют равенствам $x_k - A_{n(k)} x_k = -\alpha_k (x_k - A_0 x_k)$, где $\alpha_k \geqslant 0$. Перепишем последние равенства в виде

$$x_k = \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k} A_0 x_k + \frac{1}{1+\alpha_k} A_{n(k)} x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (19.18)$$

Из (19.18) вытекает, что каждый элемент x_k является точкой множества $M \cap \operatorname{co}[A_{n(k)} M \cup A_0 M]$. В силу (19.16) элементы x_k принадлежат компактному множеству T. Поэтому без ограничения общности можно считать, что последовательность x_k сходится к некоторой точке $x_0 \in M$; можно одновременно считать, что и последовательность $\frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}$ сходится к некоторому числу $\beta \in [0, 1]$. Но $\|A_{n(k)} x_k - A_0 x_0\| \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому в равенстве (19.18) можно перейти к пределу.

Предельное равенство $x_0 = \beta A_0 x_0 + (1-\beta) A_0 x_0$ противоречит предположению о невырожденности на M поля (19.14). ∎

Близкие к теореме 19.6 утверждения используются в теории дифференциальных уравнений нейтрального типа (Б. Н. Садовский, С. Ролевич).

§ 20. Вращение вполне непрерывного поля

20.1. Вращение поля с конечномерным оператором. В этом параграфе рассматриваются вполне непрерывные векторные поля

$$\Phi x = x - Ax \qquad (20.1)$$

на границах $\dot\Omega$ ограниченных областей $\Omega \subset E$.

Допустим, что оператор A конечномерен, и обозначим через E_0 конечномерное подпространство, в котором лежит множество $A\dot\Omega$ и которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку области Ω. Пусть $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ и $\dot\Omega_0$ — граница области Ω_0 в подпространстве E_0. Обозначим через A_0 сужение оператора A на множество $\dot\Omega_0$. *Вращением* $\gamma(\Phi, \Omega)$ *невырожденного поля* (20.1) *с конечномерным оператором* A назовем вращение $\gamma(\Phi_0, \Omega_0)$ непрерывного векторного поля $\Phi_0 x = x - A_0 x$ ($x \in \dot\Omega_0$), рассматриваемого в конечномерном пространстве E_0.

На первый взгляд может показаться, что вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ зависит от выбора подпространства E_0. Это не так. Пусть, действительно, значения оператора A лежат в конечномерном подпространстве E_1 и в конечномерном подпространстве E_2, причем в каждом из этих подпространств есть внутренние точки области Ω. Обозначим через E_0 конечномерное подпространство, содержащее и E_1, и E_2; пусть $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$, $\Omega_1 = \Omega \cap E_1$, $\Omega_2 = \Omega \cap E_2$; через A_0, A_1 и A_2 обозначим сужения оператора A соответственно на $\dot\Omega_0$, $\dot\Omega_1$ и $\dot\Omega_2$. Из теоремы 7.3 вытекают равенства $\gamma(I - A_1, \Omega_1) = \gamma(I - A_0, \Omega_0)$ и $\gamma(I - A_2, \Omega_2) = \gamma(I - A_0, \Omega_0)$. Поэтому $\gamma(I - A_1, \Omega_1) = \gamma(I - A_2, \Omega_2)$. Это равенство означает, что определение вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля (20.1) с конечномерным оператором не зависит от выбора конечномерного подпространства, содержащего множество $A\dot\Omega$.

20.2. Основное определение. Пусть вполне непрерывное векторное поле (20.1) невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. В силу теоремы 19.3 в гомотопическом классе невырожденных на $\dot{\Omega}$ вполне непрерывных векторных полей, содержащем поле (20.1), есть конечномерные поля; пусть

$$\Phi_1 x = x - A_1 x \quad (x \in \dot{\Omega}) \tag{20.2}$$

— одно из них. Вращение $\gamma(\Phi_1, \Omega)$ поля (20.2) на $\dot{\Omega}$ определено в предыдущем пункте. *Вращение* $\gamma(\Phi, \Omega)$ поля (20.1) на $\dot{\Omega}$ определим равенством $\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi_1, \Omega)$. Если нам нужно будет подчеркнуть, что речь идет о поле в пространстве E, то вместо $\gamma(\Phi, \Omega)$ будем писать $\gamma(\Phi, \Omega; E)$.

Если вполне непрерывный оператор A определен на $\bar{\Omega}$ и не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек, то вращение $\gamma(I - A, \Omega)$ совпадает со степенью Лере — Шаудера [35] отображения $I - A$ области Ω относительно нулевой точки. Переход к анализу полей, заданных лишь на границе области, в ряде случаев важен и удобен. В этой книге построение теории вращения производится по схеме, отличной от развитой в [22] (библиографию см. в [22]).

Чтобы приведенное определение было корректным, нужно установить равенство вращения $\gamma(\Phi_1, \Omega)$ вращению $\gamma(\Phi_2, \Omega)$ каждого конечномерного поля

$$\Phi_2 x = x - A_2 x \quad (x \in \dot{\Omega}), \tag{20.3}$$

гомотопного на $\dot{\Omega}$ полю (20.2).

Если поля (20.2) и (20.3) гомотопны, то в силу теоремы 19.4 найдутся такое конечномерное подпространство $E_0 \subset E$ и такая компактная деформация $\Phi(\lambda, x) = x - A(\lambda, x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in \dot{\Omega})$ поля Φ_1 в поле Φ_2, что все значения оператора $A(\lambda, x)$ лежат в E_0. Без ограничения общности можно считать, что пересечение $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ непусто. Обозначим через $\Phi_0(\lambda, x)$ и $A_0(\lambda, x)$ сужения операторов $\Phi(\lambda, x)$ и $A(\lambda, x)$ на $\dot{\Omega}_0$. По предположению, поля $\Phi_0(\lambda, x)$, рассматриваемые в пространстве E_0, невырождены на $\dot{\Omega}_0$. Поэтому поля $\Phi_0(0, x)$ и $\Phi_0(1, x)$ на $\dot{\Omega}_0$ гомотопны и их вращения на $\dot{\Omega}_0$ одинаковы. Следовательно, $\gamma(\Phi_1, \Omega) = \gamma(\Phi_2, \Omega)$. Итак, наше определение вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ вполне непрерывного поля корректно. ∎

Вращение вполне непрерывного векторного поля может быть любым целым числом. Действительно, пусть E_0 — некоторая двумерная плоскость в E, которую мы будем рассматривать как комплексную плоскость чисел z; пусть P_0 — линейный оператор проектирования на подпространство E_0. Непосредственно из определения вытекает, что при любом $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi x = x - [P_0 x - \varphi(P_0 x)]$, где $\varphi(z) = |z|^{-m+1} z^m$, на границе любой ограниченной области, содержащей нуль пространства E, имеет вращение, равное m.

При изучении вращения непрерывных векторных полей в конечномерном пространстве (см. гл. 1) длина векторов роли не играла — использовалось лишь их направление. Поэтому при изучении полей в конечномерном пространстве можно было применять операцию перехода к нормированным полям. Следует помнить, что нормирование вполне непрерывного векторного поля приводит, как правило, к полю, которое уже не допускает представления (20.1).

20.3. Свойства вращения. Непосредственно из определения вытекают свойства вращения вполне непрерывного векторного поля, аналогичные свойствам 1, 2 и 3 (см. п. 3.1) вращения непрерывного векторного поля в конечномерном пространстве. Для удобства ссылок сформулируем эти свойства в виде трех теорем.

Теорема 20.1. *Гомотопные на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ вполне непрерывные векторные поля имеют одинаковое вращение.*

Теорема 20.2. *Пусть вполне непрерывное поле $\Phi = I - A$ невырождено на множестве $\bar{\Omega} \setminus \bigcup_j \Omega_j$, где $\Omega \subset E$ — ограниченная область, области Ω_j попарно не пересекаются и $\Omega_j \subset \Omega$. Тогда вращение $\gamma(\Phi, \Omega_j)$ отлично от нуля лишь при конечном числе индексов j и*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi, \Omega_1) + \ldots + \gamma(\Phi, \Omega_n) + \ldots \tag{20.4}$$

Теорема 20.3. *Пусть Ω — ограниченная область и $x_0 \in \Omega$. Тогда вращение векторного поля $\Phi x = x - x_0$ на $\dot{\Omega}$ равно* 1.

На эти три теоремы опирается значительная часть дальнейших построений главы. Отправляясь от этих теорем, можно провести построение теории вполне непрерывных векторных полей, аналогичное изложенной в гл. 1 теории полей в конечномерном пространстве. Мы предпочтем в ряде случаев другой путь — сведение, там, где это делается совсем просто, к соответствующим утверждениям из гл. 1.

20.4. Существование особых точек. Определение особой точки при переходе от полей в конечномерном пространстве к полям в банаховых пространствах не меняется: точка x_0 — *особая для поля* Φ, если $\Phi x_0 = 0$. Установим аналоги теорем 4.1 и 4.2 для вполне непрерывных полей.

Теорема 20.4. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено и невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Тогда* $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$.

Доказательство. Из теоремы 19.3 вытекает гомотопность поля Φ на $\bar{\Omega}$ некоторому невырожденному на $\bar{\Omega}$ конечномерному полю $\Phi_0 = I - A_0$. По определению, $\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi_0, \Omega)$. Пусть E_0 — конечномерное подпространство, содержащее множество $A_0\bar{\Omega}$ и содержащее по крайней мере одну внутреннюю точку области Ω. По определению, $\gamma(\Phi_0, \Omega) = \gamma(\Phi_0, \Omega_0)$, где $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. Рассматриваемое в конечномерном пространстве E_0 поле Φ_0 не имеет на $\bar{\Omega}_0$ особых точек. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает равенство $\gamma(\Phi_0, \Omega_0) = 0$. ∎

Из теоремы 20.4 вытекает

Теорема 20.5. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ и невырождено на ее границе $\dot{\Omega}$; пусть $\gamma(\Phi, \Omega) \neq 0$. Тогда поле Φ в области Ω имеет по крайней мере одну особую точку.*

Теорема 20.5 будет применяться для доказательства разрешимости уравнений $\Phi x = 0$. Поэтому, в частности, нужно уметь вычислять или оценивать вращение полей.

Определения *изолированной особой точки* x_0 поля Φ, ее *индекса* $\operatorname{ind}(x_0, \Phi)$, *алгебраического числа особых точек* (см. п. 4.3) при переходе от полей в конечномерном пространстве к вполне непрерывным полям в банаховых пространствах не меняются. Из теорем 20.2 и 20.4 вытекает аналог теоремы 4.3.

Теорема 20.6. *Пусть определенное на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в области Ω конечное число особых точек $x_1, \ldots, x_k$. Тогда*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \operatorname{ind}(x_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(x_k, \Phi). \quad (20.5)$$

По аналогии с индексом изолированной особой точки можно определить *индекс* $\operatorname{ind}(F, \Phi)$ *замкнутого множества F особых точек* вполне непрерывного векторного поля Φ, в некоторой окрестности которого нет других особых точек; этот индекс — вращение на границе каждой такой окрестности. Если множество всех особых точек вполне непрерывного поля Φ в области Ω несвязно и разбито на непересекающиеся замкнутые подмножества $F_1, F_2, \ldots, F_k$, то справедлива более общая, чем (20.5), формула

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \operatorname{ind}(F_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(F_k, \Phi). \quad (20.6)$$

Естественным способом (см. п. 4.4) определяются понятия изолированной бесконечно удаленной особой точки вполне непрерывного векторного поля Φ и ее индекса (*асимптотического индекса*) $\operatorname{ind}(\infty, \Phi)$. Теорема 4.4 переносится на вполне непрерывные векторные поля без изменений (нужно лишь заменить ссылку на теорему 4.3 ссылкой на (20.5)).

Теорема 20.7. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено на всем E и имеет лишь конечное число особых точек $x_1, \ldots, x_k$. Тогда*

$$\operatorname{ind}(\infty, \Phi) = \operatorname{ind}(x_1, \Phi) + \ldots + \operatorname{ind}(x_k, \Phi). \quad (20.7)$$

Конечность числа особых точек вполне непрерывного векторного поля Φ, заданного на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$, вытекает из изолированности всех этих особых точек. Аналогично, если у определенного на всем E вполне непрерывного поля есть лишь изолированные особые точки, то конечность числа особых точек следует из их равномерной ограниченности. Эти замечания полезны при применениях теорем 20.6 и 20.7.

20.5. Обобщение теоремы Хопфа. Теорема 5.1 переносится на вполне непрерывные векторные поля без изменений в формулировке. Как и в случае конечномерного пространства, ограниченная связная область $\Omega \subset E$ называется *жордановой*, если связна область $E \setminus \bar{\Omega}$. Шар, в частности, является жордановой областью.

Теорема 20.8. *Пусть на границе $\dot{\Omega}$ жордановой области $\Omega \subset E$ заданы два невырожденных вполне непрерывных векторных поля $\Phi = I - A$ и $\Psi = I - B$; пусть $\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Psi, \Omega)$. Тогда поля Φ и Ψ гомотопны на $\dot{\Omega}$.*

Доказательство. Предположим вначале, что поля Φ и Ψ рассматриваются на некоторой сфере. Без ограничения общности можно считать, что Ω — это шар $\|x\| < 1$, а $\dot{\Omega}$ — сфера $\|x\| = 1$. В силу теоремы 19.3 поля Φ и Ψ можно считать конечномерными.

Пусть множества $A\dot{\Omega}$ и $B\dot{\Omega}$ лежат в конечномерном подпространстве E_0. Обозначим через A_0 и B_0 сужения операторов A и B на $\dot{\Omega}_0$, где $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. По определению вращения, в условиях доказываемой теоремы $\gamma(I - A_0, \Omega; E_0) = \gamma(I - B_0, \Omega_0; E_0)$. Поэтому (в силу теоремы Хопфа) поля $\Phi_0 x = x - A_0 x$, $\Psi_0 x = x - B_0 x$, рассматриваемые в пространстве E_0, гомотопны на $\dot{\Omega}_0$, т. е. можно определить такой непрерывный оператор $C_0(\lambda, x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in \dot{\Omega}_0)$ со значениями в E_0, что $C_0(0, x) \equiv A_0 x$, $C_0(1, x) \equiv A_1 x$ и $x \neq C_0(\lambda, x)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in \dot{\Omega}_0$.

Пусть P_0 — проектор на подпространство E_0, определенный на всем пространстве E (такой проектор существует в силу теоремы 18.1). Определим по операторам $C_0(\lambda, x)$ и P_0 компактную деформацию

$$X(\lambda, x) = \begin{cases} x - \|P_0 x\| C_0\left(\lambda, \dfrac{P_0 x}{\|P_0 x\|}\right), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ & x \in \dot{\Omega}_0, \quad P_0 x \neq 0; \\ x, & \text{если } P_0 x = 0. \end{cases}$$

Эта деформация невырождена. Поэтому поля

$$X(0, x) = x - \|P_0 x\| A\left(\frac{P_0 x}{\|P_0 x\|}\right),$$
$$X(1, x) = x - \|P_0 x\| B\left(\frac{P_0 x}{\|P_0 x\|}\right) \quad (x \in \dot{\Omega}),$$

которые она соединяет, гомотопны. Но в силу теоремы 19.1 поле $X(0, x)$ гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю Φ, а поле $X(1, x)$ — полю Ψ.

Итак, утверждение теоремы 20.8 для полей на сфере доказано. Переход к полям на границе произвольной жордановой области требует построений, не отличающихся от соответствующей части доказательства теоремы 5.1. ∎

20.6. Поля с нулевым вращением.

Теорема 20.9. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено и невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области $\Omega \subset E$; пусть $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Тогда поле Φ можно продолжить до вполне непрерывного поля $\tilde{\Phi}$, определенного и невырожденного на $\bar{\Omega}$.*

Доказательство предоставляем читателю (здесь можно применить рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 5.2 — нужно лишь заменить ссылку на теорему 5.1 ссылкой на содержащееся в теореме 20.8 утверждение о гомотопности полей с одинаковым вращением на сфере). ∎

Теорема 20.9 играет принципиальную роль в теории вполне непрерывных векторных полей. Обычно изучаются поля, заданные на $\bar{\Omega}$, но доступные изучению по их значениям на $\dot{\Omega}$ (например, поля заданы на всем E, а известен лишь характер их поведения в окрестности бесконечно удаленной точки). Теорема 20.9 означает, что *по значениям поля Φ на $\dot{\Omega}$ сделать вывод о разрешимости уравнения $\Phi x = 0$ в области Ω можно лишь в том случае, если* $\gamma(\Phi, \Omega) \neq 0$. Конечно, здесь идет речь о полях, которые не обладают кроме полной непрерывности дополнительными свойствами.

В связи с теоремой 20.9 интересны признаки равенства вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ нулю. Один из наиболее употребимых признаков мы приведем в этом пункте. Ниже будут описаны многочисленные классы вполне непрерывных векторных полей, вращение которых вычисляется без труда.

Будем говорить, что у невырожденного на множестве $M \subset E$ векторного поля Φ *отсутствует направление* e_0 ($e_0 \in E$, $\| e_0 \| = 1$), если $\Phi x \neq \| \Phi x \| e_0$ при каждом $x \in M$.

Теорема 20.10. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ невырождено на границе $\dot\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть у поля Φ, рассматриваемого на $\dot\Omega$, отсутствует некоторое направление e_0. Тогда* $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 18.2 можно построить такие конечномерные операторы A_n, что $\| A_n x - Ax \| \to 0$ равномерно относительно $x \in \dot\Omega$. Покажем, что при достаточно больших n у полей $\Phi_n = I - A_n$ также отсутствует на $\dot\Omega$ направление e_0.

В предположении противного, можно построить последовательность точек $x_n \in \dot\Omega$ так, что $x_n - A_n x_n = \lambda_n e_0$ и $\lambda_n > 0$. В силу леммы 19.1 из невырожденности поля $\Phi = I - A$ вытекают неравенства $0 < \alpha_1 \leqslant \| x_n - Ax_n \| \leqslant \alpha_2 < \infty$. Поэтому числа λ_n ограничены снизу и сверху некоторыми положительными числами. Это позволяет считать последовательность λ_n сходящейся к некоторому положительному числу λ^*. Полная непрерывность оператора A позволяет одновременно считать, что элементы Ax_n сходятся к некоторой точке z. Из равенства $x_n = Ax_n - (Ax_n - A_n x_n) + \lambda_n e_0$ вытекает тогда, что и последовательность x_n сходится к некоторой точке $x^* \in \dot\Omega$, причем $x^* - z^* = \lambda^* e_0$. Но из непрерывности оператора A в точке x^* вытекает равенство $z^* = Ax^*$ и поэтому $x^* - Ax^* = \lambda^* e_0$, что противоречит условию теоремы.

В силу теоремы 19.5 при достаточно больших n векторные поля $\Phi_n = I - A_n$ на $\dot\Omega$ невырождены и гомотопны полю $\Phi = I - A$, поэтому их вращение $\gamma(\Phi_n, \Omega)$ совпадает с $\gamma(\Phi, \Omega)$. Следовательно, достаточно доказать равенство $\gamma(\Phi_n, \Omega) = 0$ для конечномерных полей $\Phi_n = I - A_n$, которые невырождены на $\dot\Omega$ и у которых на $\dot\Omega$ отсутствует направление e_0.

Обозначим через E_0 конечномерное подпространство, в котором лежит множество $A_n\dot\Omega$, которому принадлежит точка e_0 и которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку области Ω. Как обычно, обозначим через A_n^0 сужение оператора A_n на границу $\dot\Omega_0$ в E_0 области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. По определению вращения, $\gamma(\Phi_n, \Omega) = \gamma(I - A_n^0, \Omega_0)$ и поэтому достаточно доказать равенство $\gamma(I - A_n^0, \Omega_0) = 0$.

Для доказательства последнего равенства воспользуемся теоремой 2.1. В силу этой теоремы поле $I - A_n^0$ гомотопно на $\dot\Omega_0$ непрерывному векторному полю $\Psi x = -e_0$ и поэтому $\gamma(I - A_n^0, \Omega_0) = \gamma(\Psi, \Omega_0)$. Вращение же поля Ψ на границе любой области равно нулю. ∎

Из теоремы 20.10 вытекает, что вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ равно нулю, если существует гомотопное на $\dot\Omega$ полю Φ конечномерное поле $\Phi_1 = I - A_1$ такое, что множество $A_1\dot\Omega$ лежит в подпространстве, не содержащем внутренних точек области Ω. Из теоремы 20.10 вытекает также, что $\gamma(I - A, \Omega) = 0$, если $\dot\Omega$ — сфера и $A\dot\Omega \cap \Omega = \varnothing$.

§ 21. Линейные и близкие к линейным вполне непрерывные поля

21.1. Вращение линейного поля. Вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - B$ называется *линейным*, если B линеен.

Если в замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ нет нулей линейного поля Φ, то $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$ (в силу теоремы 20.4). Поэтому задача о вычислении вращения линейного поля возникает лишь в случае, когда в области Ω есть нули этого поля. Но линейное поле может одновременно иметь нули в ограниченной области Ω и быть невырожденным на $\dot\Omega$ лишь в том случае, когда 1 не является собственным значением оператора B.

Линейное вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - B$ называется *невырожденным*, если 1 не является собственным значением оператора B. Невырожденное поле имеет единственную особую точку — нулевую точку 0 пространства E. В силу теоремы 20.6 вращение

$\gamma(\Phi, \Omega)$ линейного невырожденного вполне непрерывного поля $\Phi = I - B$ на границе любой содержащей нулевую точку ограниченной области Ω совпадает с индексом $\operatorname{ind}(0, \Phi)$.

Теорема 21.1 [35]. *Индекс нулевой особой точки линейного вполне непрерывного векторного поля $\Phi = I - B$ определяется равенством*

$$\operatorname{ind}(0, \Phi) = (-1)^{\beta}, \tag{21.1}$$

где β — сумма кратностей вещественных и бо́льших чем 1 собственных значений оператора B.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями п. 17.4.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все вещественные собственные значения оператора B, большие чем 1. Пусть при каждом $i = 1, \ldots, k$ через $P(\lambda_i)$ обозначен коммутирующий с B линейный оператор проектирования на корневое подпространство $E(\lambda_i, B)$ оператора B, отвечающее собственному значению λ_i. Размерность подпространства $E(\lambda_i, B)$ равна кратности $s(\lambda_i)$ собственного значения λ_i.

Оператор $P_0 = P(\lambda_1) + \ldots + P(\lambda_k)$ будет проектировать на прямую сумму E_0 подпространств $E(\lambda_1, B), \ldots, E(\lambda_k, B)$. Размерность E_0 равна β; сужение B_0 оператора B на подпространство E_0 не имеет отличных от $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ собственных значений.

Оператор $Q_0 = I - P_0$ проектирует на подпространство E^0, дополнительное к E_0 и инвариантное для оператора B; у сужения B^0 оператора B на подпространство E^0 нет вещественных собственных значений, больших чем 1.

Рассмотрим на сфере $S = \{x: \|x\| = 1\}$ компактную деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - [2\lambda P_0 x + (1 - \lambda) B_0 P_0 x] - (1 - \lambda) B^0 P^0 x. \tag{21.2}$$

Она невырождена при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Поэтому все поля $\Phi(\lambda, x)$ имеют на S одинаковое вращение. Но $\Phi(0, x) \equiv \Phi x$ и поэтому $\operatorname{ind}(0, \Phi) = \gamma[\Phi(0, x); S] = \gamma[\Phi(1, x); S]$. Очевидно, $\Phi(1, x) = x - 2P_0 x$ и по определению $\gamma[\Phi(1, x); S]$ совпадает с вращением поля $\Phi^0 x = -x$ на единичной сфере β-мерного подпространства E_0. Поэтому из (6.2) вытекает равенство $\gamma[\Phi(1, x); S] = (-1)^{\beta}$. ∎

Теорема 21.1 верна, конечно, и при $\beta = 0$.

21.2. Асимптотически линейные поля [22].

Теорема 21.2. *Пусть вполне непрерывный оператор A определен на всем E и асимптотически линеен. Пусть число 1 не является собственным значением асимптотической производной. Тогда вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ невырождено на сферах $S_\rho = \{x: \|x\| = \rho\}$ больших радиусов ρ и*

$$\gamma(\Phi, S_\rho) = (-1)^{\beta}, \tag{21.3}$$

где β — сумма кратностей вещественных и бо́льших чем 1 собственных значений оператора $A'(\infty)$.

Доказательство. Так как 1 не является собственным значением вполне непрерывного (в силу теоремы 17.2) оператора $A'(\infty)$, то $\|x - A'(\infty)x\| \geqslant \alpha\|x\| (x \in E)$, где $\alpha > 0$. Поэтому из определения асимптотической производной и из теоремы 19.2 вытекает, что на сферах S_ρ больших радиусов вполне непрерывные векторные поля $\Phi x = x - Ax$ и $\Psi x = x - A'(\infty)x$ гомотопны. Но тогда $\gamma(\Phi, S_\rho) = \gamma(\Psi, S_\rho)$, а для вычисления $\gamma(\Psi, S_\rho)$ можно воспользоваться теоремой 21.1. ∎

Пусть B — линейный вполне непрерывный оператор. Нетрудно видеть, что оператор $Ax = Bx + f$ при любом фиксированном $f \in E$ асимптотически линеен и $A'(\infty) = B$. По теореме 21.2 вращения полей $x - Bx$ и $x - Bx - f$ на сферах S_ρ больших радиусов ρ одинаковы (если, конечно, поле $x - Bx$ невырождено). Но это общее вращение совпадает с индексом единственной особой точки каждого поля (по теореме 20.6). Следовательно, *индекс особой точки $x_0 = (I - B)^{-1} f$ векторного поля $x - Bx - f$ совпадает с индексом нулевой особой точки поля $x - Bx$, который определяется формулой* (21.1). Последним замечанием мы будем систематически пользоваться без специальных ссылок.

21.3. Односторонние оценки. Теорема 21.1 в сочетании с теоремой 20.1 позволяет вычислять вращения ряда важных классов вполне непрерывных полей. Приведем три простых утверждения.

По аналогии с понятием собственного вектора линейных операторов определяется понятие *собственного вектора нелинейного оператора A* как ненулевого элемента $x_0 \in A$, для которого $Ax_0 = \lambda_0 x_0$; число λ_0 — *собственное значение* оператора A, отвечающее собственному вектору x_0. О собственном векторе x_0 также говорят, что он *отвечает собственному значению* λ_0.

Теорема 21.3. *Пусть нулевая точка принадлежит ограниченной области Ω. Пусть определенный на $\dot\Omega$ вполне непрерывный оператор A не имеет на $\dot\Omega$ собственных векторов, отвечающих вещественным либо большим чем 1, либо равным 1 собственным значениям. Тогда* $\gamma(I-A, \Omega)=1$.

Доказательство. В условиях теоремы при каждом $x\in\dot\Omega$ векторы $x-Ax$ и x направлены не противоположно (так как из $x-Ax=-\alpha x$, где $\alpha\geqslant 0$, следует $Ax=(1+\alpha)x$). Поэтому из теоремы 19.1 вытекает невырожденность на $\dot\Omega$ поля $I-A$ и гомотопность его единичному полю I. Остается сослаться на теоремы 20.1 и 21.1. ∎

Простым следствием теоремы 21.3 является *)

Теорема 21.4. *Пусть действующий в гильбертовом пространстве E вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$(Ax, x)<(x, x) \quad (x\in\dot\Omega), \tag{21.4}$$

где $\Omega\subset E$ — ограниченная область, содержащая нулевую точку. Тогда поле $I-A$ невырождено на $\dot\Omega$ и $\gamma(I-A, \Omega)=1$.

Несмотря на простоту, теорема 21.4 важна в приложениях.

Если априори известна невырожденность на $\dot\Omega$ поля $I-A$, то условие (21.4) можно заменить менее ограничительной и столь же простой односторонней оценкой

$$(Ax, x)\leqslant(x, x) \quad (x\in\dot\Omega). \tag{21.5}$$

Еще менее ограничительная односторонняя оценка (ср. (19.8) и (19.9))

$$(Ax, x)<(x, x)+\|x-Ax\|\cdot\|x\| \quad (x\in\dot\Omega), \tag{21.6}$$

или, что то же, оценка

$$\|Ax\|<\|x\|+\|x-Ax\| \quad (x\in\dot\Omega) \tag{21.7}$$

*) М. А. Красносельский. Изв. АН СССР, сер. матем. 20, № 2 (1956).

равносильна (в случае гильбертова пространства E) условиям теоремы 21.3.

При переходе к банаховым пространствам E условие (21.7) остается эквивалентным условиям теоремы 21.3, если сфера в E строго выпукла. В общем случае условие (21.7) достаточно для того, чтобы были выполнены условия теоремы 21.3.

Иногда и в случаях банаховых пространств E условия теоремы 21.3 можно заменить односторонней оценкой типа (21.4) или (21.6). Пусть, например, на ненулевых элементах x пространства E определен оператор S со значениями в пространстве E^*, удовлетворяющий условию

$$(x, Sx)>0 \quad (x\in E,\ x\neq 0). \tag{21.8}$$

Здесь через (x, y) обозначено значение линейного функционала $y\in E^*$ на элементе $x\in E$. Никакие предположения о линейности, непрерывности и т. д. оператора не делаются. Условия теоремы 21.3 заведомо выполнены, если

$$(Ax, Sx)<(x, Sx) \quad (x\in\dot\Omega). \tag{21.9}$$

Пусть, например, E — это пространство L_p, где $1<p<\infty$. Определим на L_p оператор

$$Sx(t)=|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t). \tag{21.10}$$

Простая проверка показывает, что $Sx(t)\in L_{p'}=(L_p)^*$ и

$$(x, Sx)=\int_G x(t)\,Sx(t)\,dt=\|x\|^p \quad (x(t)\in L_p). \tag{21.11}$$

Поэтому условие (21.8) выполнено, а условие (21.9) записывается в виде

$$\int_G Ax(t)\cdot|x(t)|^{p-1}\operatorname{sign} x(t)\,dt<\|x\|^p \quad (x\in\dot\Omega\subset L_p). \tag{21.12}$$

Теорема 21.5. *Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в пространстве E; пусть определенный на $\dot\Omega$ вполне непрерывный оператор A не имеет на $\dot\Omega$ неподвижных точек и удовлетворяет условию $A\dot\Omega\subset\bar\Omega$. Тогда поле $I-A$ невырождено на $\dot\Omega$ и* $\gamma(I-A, \dot\Omega)=1$.

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая внутренняя точка области Ω. Из включения $A\dot\Omega\subset\bar\Omega$ вытекает, что при каждом $x \in \dot{\Omega}$ векторы $x - Ax$ и $x - x_0$ направлены не противоположно. В силу теоремы 19.1 поле $x - Ax$ гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $x - x_0$. Поэтому $\gamma(I - A, \Omega)$ совпадает с индексом особой точки x_0 поля $x - x_0$. Отсюда вытекает, что $\gamma(I - A, \Omega) = 1$. ∎

21.4. Вычисление индекса особой точки в невырожденном случае.

Теорема 21.6 [35]. *Пусть вполне непрерывный оператор A определен в некоторой окрестности своей неподвижной точки $x_0 \in E$ и дифференцируем по Фреше в точке x_0. Пусть число 1 не является собственным значением линейного оператора $A'(x_0)$. Тогда x_0 является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля $\Phi = I - A$ и*

$$\operatorname{ind}(x_0, I - A) = (-1)^{\beta}, \tag{21.13}$$

где β — сумма кратностей вещественных и бóльших чем 1 собственных значений оператора $A'(x_0)$.

Доказательство. В силу теоремы 17.1 линейный оператор $A'(x_0)$ вполне непрерывен. Поэтому в условиях доказываемой теоремы 21.6 найдется такое $\alpha > 0$, что $\| h - A'(x_0) h \| \geqslant 2\alpha \| h \|$ $(h \in E)$.

Пусть $A(x_0 + h) = A(x_0) + A'(x_0) h + \omega(x_0, h)$. Так как $\|h\|^{-1} \| \omega(x_0, h) \| \to 0$ при $\| h \| \to 0$, то найдется такое $r_0 > 0$, что $\| \omega(x_0, h) \| \leqslant \alpha \| h \|$ при $\| h \| \leqslant r_0$. Если при этом число r_0 достаточно мало, то шар $\| x - x_0 \| \leqslant r_0$ лежит в области определения оператора A. Следовательно, при $\| x - x_0 \| \leqslant r_0$ верна оценка

$$\begin{aligned} \| x - Ax \| \geqslant \| x - x_0 - A'(x_0)(x - x_0) \| - \\ - \| \omega(x_0, x - x_0) \| \geqslant 2\alpha \| x - x_0 \| - \\ - \| \omega(x_0, x - x_0) \| \geqslant \alpha \| x - x_0 \|, \end{aligned}$$

из которой следует изолированность особой точки x_0 поля $I - A$. Аналогично устанавливается при $\| x - x_0 \| \leqslant r_0$ оценка

$$\begin{aligned} \| x - Ax - [x - x_0 - A'(x_0)(x - x_0)] \| = \\ = \| \omega(x_0, x - x_0) \| \leqslant \alpha \| x - x_0 \| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2} \| x - x_0 - A'(x_0)(x - x_0) \|, \end{aligned}$$

из которой (в силу теоремы 19.2) вытекает гомотопность поля $I - A$ полю $\Psi x = x - x_0 - A'(x_0)(x - x_0)$ на каждой сфере $\| x - x_0 \| = r$, где $0 < r \leqslant r_0$. Поэтому $\operatorname{ind}(x_0, I - A)$ совпадает с индексом нулевой особой точки линейного поля $I - A'(x_0)$ и для получения равенства (21.13) остается воспользоваться формулой (21.1). ∎

Трудности при анализе изолированности особой точки x_0 возникают в вырожденных случаях — когда 1 является собственным значением оператора $A'(x_0)$. В вырожденных случаях задачу, как правило, удается свести к анализу вспомогательного векторного поля в конечномерном подпространстве $E_1 \subset E$ неподвижных точек оператора $A'(x_0)$. К сожалению, построение этого вспомогательного поля в пространстве E_1 требует в общем случае специальных конструкций.

21.5. Поля с $\{B_1, B_2\}$-квазилинейными операторами. В этом пункте рассматривается один специальный класс вполне непрерывных векторных полей в гильбертовом пространстве E.

Пусть B_1 и B_2 — два линейных оператора, действующих в E. Будем писать $B_1 \cdot\!< B_2$, если $(B_1 x, x) \leqslant (B_2 x, x)$ при $x \in E$.

Пусть даны два самосопряженных оператора B_1 и B_2, причем $B_1 \cdot\!< B_2$ и число 1 не является точкой спектра ни оператора B_1, ни оператора B_2. Пусть часть спектра каждого из операторов B_1 и B_2, расположенная правее точки 1, состоит лишь из конечного числа собственных значений конечной кратности, причем сумма $\beta(B_1)$ кратностей этих больших чем 1 собственных значений оператора B_1 совпадает с суммой $\beta(B_2)$ кратностей больших чем 1 собственных значений оператора B_2. Тогда будем говорить, что операторы B_1 и B_2 образуют *правильную пару*. Если B_1 и B_2 образуют правильную пару, то через $\beta(B_1, B_2)$ будем обозначать совпадающие числа $\beta(B_1)$ и $\beta(B_2)$. Случай $\beta(B_1, B_2) = 0$ из наших рассмотрений не исключается.

Лемма 21.1. *Пусть линейные самосопряженные операторы B_1 и B_2 образуют правильную пару.*

Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что для каждого самосопряженного оператора B, удовлетворяющего условию

$$B_1 \cdot\!< B \cdot\!< B_2, \tag{21.14}$$

справедлива оценка

$$\|x - Bx\| \geqslant \alpha \|x\| \quad (x \in E). \tag{21.15}$$

Доказательство. Обозначим через λ_- точную верхнюю грань точек спектра оператора B_2, лежащих левее точки 1, а через λ_+ — наименьшее из бо́льших чем 1 собственных значений оператора B_1 (если $\beta(B_1, B_2) = 0$, то $\lambda_+ = \infty$). Очевидно, $\lambda_- < 1 < \lambda_+$.

Если самосопряженный оператор B удовлетворяет условию $B_1 \bullet\!< B$, то из известной минимаксной конструкции Р. Куранта (см., например, [14]) вытекает, что размерность инвариантного подпространства E_1 оператора B, отвечающего части спектра, лежащей на $[\lambda_+, \infty)$, не меньше $\beta(B_1, B_2)$. Аналогично, из $B_1 \bullet\!< B_2$ и из той же конструкции Куранта следует, что размерность инвариантного подпространства E_2 оператора B, отвечающего части спектра, лежащей на $[\lambda_-, \infty)$, не больше $\beta(B_1, B_2)$. Поэтому из (21.14) вытекает равенство $E_1 = E_2$. Это значит, что на промежутке (λ_-, λ_+) нет точек спектра оператора B и, следовательно, спектральное разложение оператора B имеет вид

$$B = \int_{-\|B\|}^{\lambda_-} \lambda\, dE_\lambda + \int_{\lambda_+}^{\|B\|} \lambda\, dE_\lambda.$$

Но тогда справедлива оценка (21.15) при $\alpha = \min\{1 - \lambda_-, \lambda_+ - 1\}$. ∎

Оператор A (вообще говоря, нелинейный), действующий в E, назовем $\{B_1, B_2\}$-*квазилинейным* на множестве $M \subset E$, если каждому $x \in M$ соответствует такой линейный самосопряженный оператор B, что $B_1 \bullet\!< B \bullet\!< B_2$ и $Bx = Ax$. Оператор D назовем *асимптотически* $\{B_1, B_2\}$-*квазилинейным*, если найдется такой $\{B_1, B_2\}$-квазилинейный вне некоторого шара оператор A, что

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Dx - Ax\|}{\|x\|} = 0. \tag{21.16}$$

Теорема 21.7. *Пусть самосопряженные операторы B_1 и B_2 образуют правильную пару, причем существует вполне непрерывный самосопряженный оператор B_0, удовлетворяющий соотношениям $B_1 \bullet\!< B_0 \bullet\!< B_2$. Пусть вполне непрерывный оператор D асимптотически $\{B_1, B_2\}$-квазилинеен. Тогда вполне непрерывное векторное поле $I - D$ невырождено на сферах $S_\rho = \{x: \|x\| = \rho\}$ больших радиусов ρ и вращение его на этих сферах определяется равенством*

$$\gamma(I - D, S_\rho) = (-1)^{\beta(B_1, B_2)}. \tag{21.17}$$

Доказательство. Представим оператор D в виде $D = A + C$, где $\{B_1, B_2\}$-квазилинейный оператор A удовлетворяет равенству (21.16). Выберем такое ρ_0, что $\|Dx - Ax\| \leqslant \frac{1}{2}\alpha\|x\|$ при $\|x\| \geqslant \rho_0$, где α — положительное число, при котором справедливы оценки (21.15). Пусть $\rho \geqslant \rho_0$. Рассмотрим на сфере S_ρ компактную деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - (1 - \lambda) Dx - \lambda B_0 x \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{21.18}$$

поля $\Phi(0, x) = x - Dx$ в поле $\Phi(1, x) = x - B_0 x$. Поле $I - B_0$ в силу леммы 21.1 невырождено; нетрудно видеть, что сумма кратностей его больших чем 1 собственных значений равна $\beta(B_1, B_2)$. В силу теоремы 21.1 $\gamma(I - B_0, S_\rho) = (-1)^{\beta(B_1, B_2)}$. Поэтому для доказательства (21.17) достаточно установить невырожденность деформации (21.18).

Предположим противное. Пусть $\Phi(\lambda_*, x_*) = 0$, где $\lambda_* \in [0, 1]$, $x_* \in S_\rho$. Тогда

$$\|x_* - [(1 - \lambda_*) A x_* + \lambda_* B_0 x_*]\| \leqslant \frac{\alpha\rho}{2}.$$

По условию можно найти удовлетворяющий соотношениям (21.14) самосопряженный оператор B_* такой, что $Ax_* = B_* x_*$. Поэтому последняя оценка может быть переписана в виде $\|x_* - [(1 - \lambda_*) B_* + \lambda_* B_0] x_*\| \leqslant \alpha\rho/2$. Но эта оценка противоречит лемме 21.1, так как $B_1 \bullet\!< (1 - \lambda_*) B_* + \lambda_* B_0 \bullet\!< B_2$. ∎

При применениях теоремы 21.7 (см. гл. 5) важны признаки $\{B_1, B_2\}$-квазилинейности оператора. Приведем одну теорему П. П. Забрейко и А. И. Поволоцкого (Матем. заметки 7, № 6 (1971)).

Пусть самосопряженные линейные операторы B_1 и B_2 связаны соотношением $B_1 \bullet\!< B_2$. Тогда оператор $B_2 - B_1$ неотрицательно определен и из него можно извлечь квадратный корень. Обозначим через E_0 подпространство (возможно, совпадающее со всем пространством E), в котором плотно множество $\mathfrak{R}$ значений оператора $(B_2-B_1)^{1/2}$. Как это следует из спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, оператор $(B_2-B_1)^{1/2}$ имеет на множестве $\mathfrak{R}$ однозначно определяемый правый обратный $(B_2-B_1)^{-1/2}$ со значениями в подпространстве E_0.

Лемма 21.2. *Пусть x и z — фиксированные элементы из E. Тогда для существования такого самосопряженного оператора B, что $B_1 \cdot\!< B \cdot\!< B_2$ и $Bx = z$, необходимо и достаточно, чтобы элементы $z - B_1x$ и $B_2x - z$ принадлежали $\mathfrak{R}$ и чтобы было выполнено одно скалярное неравенство*

$$([B_2-B_1]^{-1/2}(z-B_1x),\ [B_2-B_1]^{-1/2}(B_2x-z))\geqslant 0.$$

Из этой леммы вытекает

Теорема 21.8. *Для $\{B_1, B_2\}$-квазилинейности оператора A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$Ax - B_1x \in \mathfrak{R} \quad (x \in E), \tag{21.19}$$

$$([B_2-B_1]^{-1/2}(Ax-B_1x),\ [B_2-B_1]^{-1/2}(B_2x-Ax))\geqslant 0 \quad (x\in E). \tag{21.20}$$

Подчеркнем, что неравенство (21.20) не является односторонней оценкой значений оператора A.

Теорема 21.7 (в других терминах и при несколько более ограничительных условиях) была установлена А. И. Перовым (ДАН СССР **124**, № 4 (1959)).

21.6. Коэрцитивные дифференцируемые поля. Определенное в окрестности бесконечно удаленной точки векторное поле Φ назовем *коэрцитивным*, если $\|\Phi x\| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Коэрцитивное поле, очевидно, невырождено на сферах $S_\rho = \{x\colon \|x\| = \rho\}$ больших радиусов ρ.

Теорема 21.9. *Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше, причем 1 не является собственным значением каждого линейного оператора $A'(x)$ $(x \in E)$. Пусть векторное поле $\Phi = I - A$ коэрцитивно.*

Тогда при достаточно больших ρ

$$\gamma(I-A, S_\rho) = (-1)^{\beta_0}, \tag{21.21}$$

где β_0 — сумма кратностей больших чем 1 собственных значений какого-либо оператора $A'(x)$.

Доказательство. В формулировке теоремы 21.9 участвует сумма кратностей больших чем 1 собственных значений оператора $A'(x)$. Эта сумма $\beta(x)$, конечно, может быть различной при разных x, однако четность

числа $\beta(x)$ одинакова при всех $x \in E$ (так как вполне непрерывные линейные операторы $A'(x)$ непрерывно зависят от $x \in E$ и 1 не является собственным значением операторов $A'(x)$). Поэтому величина $(-1)^{\beta(x)}$ не зависит от x. Значит, формула (21.21) корректна.

Сопоставим каждому элементу $y \in E$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi_y x = x - Ax - y$ $(x \in E)$. В силу коэрцитивности поля Φ, каждые два поля Φ_u и Φ_v на сферах S_ρ больших радиусов ρ невырождены и гомотопны друг другу. Поэтому при больших ρ

$$\gamma(\Phi_u, S_\rho) = \gamma(\Phi_v, S_\rho). \tag{21.22}$$

Особые точки каждого поля Φ_y (если они существуют) изолированы — это вытекает из теоремы 21.6. Более того, в силу той же теоремы 21.6 индекс каждой особой точки равен $(-1)^{\beta_0}$. Поэтому вращение $\gamma(\Phi_y, S_\rho)$ равно $\varkappa(y)(-1)^{\beta_0}$, где $\varkappa(y)$ — количество особых точек поля Φ_y. Из (21.22) вытекает, что $\varkappa(y)$ не зависит от y. Но при $y = x_0 - Ax_0$ поле Φ_y имеет особую точку x_0. Таким образом, у всех полей Φ_y есть одинаковое ненулевое число k особых точек и при достаточно больших ρ справедливо равенство $\gamma(\Phi_y, S_\rho) = (-1)^{\beta_0} k$. Остается показать, что $k = 1$.

Пусть $k \geqslant 2$. Сопоставим каждому $y \in E$ множество $x(y)$ всех решений уравнения

$$x - Ax = y. \tag{21.23}$$

Из непрерывной обратимости операторов $I - A'(x)$ и из классической теоремы о неявной функции вытекает, что построенная многозначная функция $x(y)$ в малой окрестности каждой точки распадается на k однозначных непрерывных ветвей. Из односвязности пространства E вытекает, что каждая построенная в малой окрестности какой-либо точки y_0 непрерывная ветвь определенной уравнением (21.23) многозначной функции $x(y)$ однозначно продолжима на все пространство E. Таким образом, уравнение (21.23) определяет ровно k непрерывных однозначных функций $x_1(y), \ldots, x_k(y)$, определенных на всем E, причем множества значений разных функций $x_i(y)$ и $x_j(y)$ не пересекаются.

Снова в силу непрерывной обратимости линейных операторов $I - A'(x)$ множество G_i значений каждой функции $x_i(y)$ открыто в E.

Мы построили покрытие пространства E непересекающимися открытыми множествами $G_1, \ldots, G_k$, где $k \geqslant 2$. Это противоречит связности E. Значит, $k = 1$. ∎

Пусть E — гильбертово пространство. Предположим, что операторы $A'(x)$ самосопряжены и удовлетворяют условию

$$B_1 \bullet\!< A'(x) \bullet\!< B_2, \tag{21.24}$$

где B_1 и B_2 образуют правильную пару (см. п. 21.5). Тогда 1 не будет (в силу леммы 21.1) собственным значением операторов $A'(x)$. Это замечание позволяет применить для вычисления $\gamma(I - A, S_\rho)$ теорему 21.9 в условиях, когда выполнено условие (21.24).

Однако, если выполнено условие (21.24), то для вычисления $\gamma(I - A, S_\rho)$ удобнее применить теорему 21.7. Применение этой теоремы не использует непрерывную зависимость оператора $A'(x)$ от x. Асимптотическая $\{B_1, B_2\}$-квазилинейность оператора A вытекает из соотношений (21.24), так как эти соотношения позволяют представить оператор A в виде $Ax = B(x)x + A(0)$, где $B(x) = \int_0^1 A'(\theta x)\,d\theta$.

21.7. Специальный случай. К теореме 21.9 примыкает следующее утверждение.

Теорема 21.10. *Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть каждому $x_0 \in E$ соответствуют такие положительные $r(x_0)$ и $\beta(x_0)$, что у всех операторов $A'(x)$ при $\|x - x_0\| \leqslant r(x_0)$ нет собственных значений на интервале $(1 - \beta(x_0), 1)$. Пусть векторное поле $\Phi = I - A$ коэрцитивно.*

Тогда при достаточно больших ρ

$$\gamma(I - A, S_\rho) = (-1)^{\beta_0} k_0, \tag{21.25}$$

где β_0 — сумма кратностей равных 1 и бо́льших чем 1 собственных значений какого-либо оператора $A'(x)$, а k_0 — положительное целое число.

Доказательство. Корректность формулы (21.25) устанавливается так же, как при доказательстве теоремы 21.9.

Рассмотрим, как при доказательстве теоремы 21.9, поля Φ_y и заметим, что достаточно установить равенство

$$\gamma(\Phi_y, S_\rho) = (-1)^{\beta_0} k_0 \tag{21.26}$$

при каком-либо y.

Пусть $y = x_0 - Ax_0$. Обозначим через F множество особых точек поля Φ_y. Так как замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\mathrm{co}}\, F$ множества F компактна, то можно указать такие r, $\beta > 0$, что у всех операторов $A'(x)$ при $\rho(x, \overline{\mathrm{co}}\, F) < r$ нет собственных значений на промежутке $(1 - \beta, 1)$. Пусть $\Omega = \{x\colon \rho(x, \overline{\mathrm{co}}\, F) < r/2\}$. Поле Φ_y по построению невырождено на $\dot\Omega$ и поэтому $\|\Phi_y x\| \geqslant \alpha > 0$ при $x \in \dot\Omega$. Отсюда вытекает, что при достаточно малых положительных ε невырожденным и гомотопным Φ_y на $\dot\Omega$ будет каждое поле $\Psi(\varepsilon)x = x - (1 + \varepsilon)Ax - x_0 + (1 + \varepsilon)Ax_0$. Если ε достаточно мало $(0 < \varepsilon(1 - \beta) < \beta)$, то у всех операторов $(1 + \varepsilon)A'(x)$ при $x \in \overline{\Omega}$ число 1 не будет собственным значением. Поэтому при малых ε все особые точки поля $\Psi(\varepsilon)$, лежащие в Ω, изолированы и индекс каждой из них равен $(-1)^{\beta_0}$. Следовательно, $\gamma(\Psi(\varepsilon), \Omega) = (-1)^{\beta_0} k_0$, где $k_0 \geqslant 1$, откуда вытекает равенство $\gamma(\Phi_y, \Omega) = (-1)^{\beta_0} k_0$, и, далее, равенство (21.26) ∎

Нам неизвестен пример удовлетворяющего условиям теоремы 21.10 поля $I - A$, для которого в формуле (21.26) число k_0 было бы отлично от 1.

Пусть в условиях теоремы 21.10 предположение об отсутствии собственных значений у операторов $A'(x)$ на промежутке $(1 - \beta(x_0), 1)$ заменено предположением об отсутствии их на промежутке $(1, 1 + \beta(x_0))$. Тогда будет верна аналогичная (21.25) формула

$$\gamma(I - A, S_\rho) = (-1)^{\beta_1} k_0, \tag{21.27}$$

в которой β_1 — сумма кратностей строго бо́льших чем 1 собственных значений какого-либо оператора $A'(x)$.

Теоремы 21.9 и 21.10 получены М. А. Красносельским (ДАН СССР 208, № 6 (1973)).

21.8. Нечетные поля. Близкие к линейным векторные поля — часть более широкого класса полей, близких к нечетным. В этом пункте мы перенесем теоремы о вращении таких полей в конечномерном пространстве на вполне непрерывные поля.

Теорема 21.11. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ невырождено на сфере S и удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi x^*}{\|\Phi x^*\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \quad (x \in S), \tag{21.28}$$

где через x^* обозначается точка сферы S, диаметрально противоположная точке $x \in S$. Тогда вращение $\gamma(\Phi, S)$ нечетно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда S — это сфера с центром в нулевой точке; тогда $x^* = -x$. Рассмотрим на S компактную деформацию $\Phi(\lambda, x) = x - \frac{1}{1+\lambda} Ax + \frac{\lambda}{1+\lambda} A(-x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, соединяющую невырожденное поле $\Phi(0, x) = \Phi x$ с нечетным полем $\Phi(1, x) = x - \frac{1}{2} Ax + \frac{1}{2} A(-x)$ $(x \in S)$. Деформация $\Phi(\lambda, x)$ невырождена, так как из $\Phi(\lambda_0, x_0) = 0$ вытекает равенство $\Phi x_0 = \lambda_0 \Phi(-x_0)$, которое противоречит (21.28).

Таким образом, изучаемое поле Φ гомотопно на S нечетному полю $\Phi(1, x)$ и нам достаточно доказать теорему для нечетных полей.

В силу леммы 19.1 найдется такое $\alpha > 0$, что $\|\Phi x\| = \|x - Ax\| \geqslant 4\alpha$ $(x \in S)$. Обозначим через E_0 конечномерное подпространство, содержащее какую-либо конечную α-сеть множества ΦS. В силу теоремы 18.1 можно определить нечетный проектор P на подпространство E_0, удовлетворяющий условию $\|x - Px\| \leqslant 2\rho(x, E_0)$ $(x \in E)$. Легко видеть, что конечномерное векторное поле $\Phi_0 x = x - PAx$ нечетно, невырождено и гомотопно на S полю $\Phi = I - A$. Поэтому достаточно доказать нечетность вращения на S поля Φ_0.

Из определения вращения следует, что $\gamma(\Phi_0, S)$ совпадает с вращением $\gamma(\Phi_0, S_0; E_0)$ сужения поля Φ_0 на сферу $S_0 = S \cap E_0$ в конечномерном пространстве E_0. Нечетность числа $\gamma(\Phi_0, S_0)$ следует из теоремы 8.8. ∎

Аналогичными рассуждениями доказывается теорема о вращении полей, симметричных относительно подпространства.

Теорема 21.12. *Пусть P_0 — линейный оператор проектирования на некоторое подпространство $E_0 \subset E$. Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi x = x - Ax$ невырождено на сфере $S = \{x: \|x\| = \rho\}$, а поле $\Phi_0 x = x - P_0 Ax$ невырождено на сфере $S_0 = S \cap E_0$. Пусть, наконец,*

$$\frac{\Phi U x}{\|\Phi U x\|} \neq -\frac{U \Phi x}{\|U \Phi x\|} \quad (x \in S), \tag{21.29}$$

где $U \neq I - 2P_0$.

Тогда вращения $\gamma(\Phi, S)$ и $\gamma(\Phi_0, S_0)$ имеют одинаковую четность.

В связи с теоремами 21.11 и 21.12 у читателя может возникнуть вопрос о том, почему авторы не рассмотрели четные вполне непрерывные поля. Объясняется это просто — в бесконечномерном банаховом пространстве вполне непрерывное поле не может быть четным на сфере!

§ 22. Произведение вращений

22.1. Формула произведения индексов. Пусть оператор A вполне непрерывен и пусть значения оператора $\Phi = I - A$ на множестве $M \subset E$ лежат в некотором множестве $N \subset E$. Пусть на N определено вполне непрерывное векторное поле $\Psi = I - B$. Тогда на M определена суперпозиция $\Psi\Phi$, которая также является вполне непрерывным векторным полем, так как $\Psi\Phi x = x - Ax - B(x - Ax)$, а оператор $C = A + B(I - A)$ вполне непрерывен.

Установим аналог теоремы 7.1.

Теорема 22.1. *Пусть x_0 — изолированная особая точка вполне непрерывного векторного поля Φ, а нуль 0 — изолированная особая точка вполне непрерывного векторного поля Ψ. Тогда x_0 — изолированная особая точка вполне непрерывного векторного поля $\Psi\Phi$ и*

$$\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \operatorname{ind}(0, \Psi) \cdot \operatorname{ind}(x_0, \Phi). \tag{22.1}$$

Доказательство. Пусть поле Ψ не имеет в шаре $\|x\| \leqslant r_0$ особых точек, отличных от нулевой. Пусть в шаре $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ поле Φ не имеет отличных от x_0 особых точек и, кроме того, выполняется неравенство

$\|\Phi x\| \leqslant \frac{1}{2} r_0$. В силу леммы 19.1 существуют числа α_1 и α_2, удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < r_0$, при которых верны оценки $2\alpha_1 \leqslant \|\Phi x\| \leqslant \alpha_2/2$ ($\|x - x_0\| = \rho$). Далее, в силу той же леммы 19.1, $\|\Psi x\| > 2\alpha$ при $\alpha_1 \leqslant \|x\| \leqslant \alpha_2$, $\alpha > 0$.

Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{\alpha, \alpha_1\}$. Множество значений оператора A на сфере $S_\rho = \{x: \|x - x_0\| = \rho\}$ и множество значений оператора B на шаровом слое $\Pi(\alpha_1, \alpha_2) = \{x: \alpha_1 \leqslant \|x\| \leqslant \alpha_2\}$ компактны. Поэтому можно указать конечномерное подпространство $E_0 \subset E$, аппроксимирующее эти множества с точностью до $\varepsilon/2$. Пусть P — проектор на E_0, удовлетворяющий условию $\|x - Px\| \leqslant 2\rho(x, E_0)$; такой проектор существует в силу теоремы 18.2.

Введем обозначения $A_1 = PA$, $B_1 = PB$, $\Phi_1 = I - A_1$, $\Psi_1 = I - B_1$. Тогда $\|Ax - A_1x\| < \varepsilon$ при $x \in S_\rho$ и $\|Bx - B_1x\| < \varepsilon$ при $x \in \Pi(\alpha_1, \alpha_2)$. При любом $x \in S_\rho$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ вектор $\Phi(\lambda)x = x - (1 - \lambda)Ax - \lambda A_1x$ лежит в шаровом слое $\Pi(\alpha_1, \alpha_2)$, так как

$$\|\Phi(\lambda)x\| \geqslant \|x - Ax\| - \lambda\|Ax - A_1x\| \geqslant 2\alpha_1 - \varepsilon > \alpha_1,$$

$$\|\Phi(\lambda)x\| \leqslant \|x - Ax\| + \lambda\|Ax - A_1x\| \leqslant \frac{1}{2}\alpha_2 + \varepsilon \leqslant \alpha_2.$$

В частности, векторы $\Phi(\lambda)x$ отличны от нуля и поэтому поле $\Phi = \Phi(0)$ на S_ρ гомотопно конечномерному полю $\Phi_1 = \Phi(1)$.

При любых $x \in \Pi(\alpha_1, \alpha_2)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ вектор $\Psi(\lambda)x = x - (1 - \lambda)Bx - \lambda B_1x$ отличен от нуля, так как $\|\Psi(\lambda)x\| \geqslant \|x - Bx\| - \lambda\|Bx - B_1x\| \geqslant 2\alpha - \varepsilon > \alpha$. Поэтому на слое $\Pi(\alpha_1, \alpha_2)$ поле $\Psi = \Psi(0)$ гомотопно конечномерному полю $\Psi_1 = \Psi(1)$.

Шаровой слой $\Pi(\alpha_1, \alpha_2)$ лежит в шаре $\|x\| \leqslant r_0$. Поэтому определена суперпозиция $\Psi(\lambda)\Phi(\lambda) = I - C(\lambda)$, которая является компактной деформацией. При этом $\|\Psi(\lambda)\Phi(\lambda)x\| \geqslant \alpha$ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x \in S_\rho$) и, значит, поле $\Psi\Phi = \Psi(0)\Phi(0)$ гомотопно на S_ρ конечномерному полю $\Psi_1\Phi_1 = \Psi(1)\Phi(1)$.

Поле $\Psi\Phi$ в шаре $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ не имеет особых точек, отличных от нулевой. Поэтому $\operatorname{ind}(x_0, \Psi\Phi) = \gamma(\Psi\Phi, S_\rho)$, а по определению вращения $\gamma(\Psi\Phi, S_\rho) = \gamma(\Psi_1\Phi_1, S_\rho^0; E_0)$, где $\gamma(\Psi_1\Phi_1, S_\rho^0; E_0)$ — вращение поля $\Psi_1\Phi_1$ на конечномерной сфере $S_\rho^0 = S_\rho \cap E_0$. Аналогично, $\operatorname{ind}(x_0, \Phi) = \gamma(\Phi, S_\rho) = \gamma(\Phi_1, S_\rho^0)$. Наконец, при любом r, удовлетворяющем неравенствам $\alpha_1 < r < \alpha_2$, верно равенство $\operatorname{ind}(0, \Psi) = \gamma(\Psi, S_r)$, где $S_r = \{x: \|x\| = r\}$, и по определению вращения $\gamma(\Psi, S_r) = \gamma(\Psi_1, S_r^0; E_0)$, где $\gamma(\Psi_1, S_r^0; E_0)$ — вращение поля Ψ_1 на конечномерной сфере $S_r^0 = S_r \cap E_0$. Таким образом, для доказательства формулы (21.1) достаточно установить равенство $\gamma(\Psi_1\Phi_1, S_\rho^0) = \gamma(\Psi_1, S_r^0) \times \gamma(\Phi_1, S_\rho^0)$, которое следует из формулы (7.6). ∎

22.2. Вращение суперпозиции векторных полей. Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено на границе $\dot\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть множество $\Phi\dot\Omega$ лежит в ограниченном замкнутом множестве N, на котором в свою очередь определено невырожденное вполне непрерывное поле $\Psi = I - B$.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots$ — все ограниченные компоненты связности множества $E \setminus N$. Тогда при каждом фиксированном k обозначим через $\gamma(\Phi, \dot\Omega; \omega_k)$ вращение на $\dot\Omega$ всех полей $\Phi x - z$, где $z \in \omega_k$ (все эти поля гомотопны друг другу). Аналогом теоремы 7.2 является

Теорема 22.2. *Вращение на $\dot\Omega$ невырожденного на $\dot\Omega$ поля $\Psi\Phi$ определяется равенством*

$$\gamma(\Psi\Phi, \dot\Omega) = \sum_k \gamma(\Psi, \omega_k) \cdot \gamma(\Phi, \dot\Omega; \omega_k). \tag{22.2}$$

Как и в конечномерном случае, сумма в правой части содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых.

Если множество $E \setminus N$ состоит из двух компонент связности и нуль 0 принадлежит ограниченной компоненте ω этого множества, то формула (22.2) принимает более простой вид

$$\gamma(\Psi\Phi, \dot\Omega) = \gamma(\Psi, \dot\Omega_1) \cdot \gamma(\Phi, \dot\Omega), \tag{22.3}$$

где Ω_1 — произвольная лежащая в $\omega \cup N$ область, граница которой лежит в N.

Доказательство теоремы 22.2, как и доказательство двух последующих теорем, мы не приводим — достаточно провести рассуждения, использованные при доказательстве соответствующих утверждений в § 7. ∎

22.3. Векторные поля в прямой сумме подпространств. Допустим, что пространство E является прямой суммой двух подпространств E_0 и E^0. Тогда представление $x = u + v$ $(u \in E_0,\ v \in E^0)$ элементов $x \in E$ определяет линейные операторы проектирования

$$P_0 x = u, \qquad P^0 x = v \qquad (x \in E) \tag{22.4}$$

соответственно на E_0 по направлению E^0 и на E^0 по направлению E_0.

Теорема 22.3. *Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено и невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$; пусть $A\dot{\Omega} \subset E_0$. Тогда*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi_0, \Omega_0; E_0), \tag{22.5}$$

где Φ_0 — сужение поля Φ на границу $\dot{\Omega}_0$ области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ в пространстве E_0.

Конечно, этот аналог теоремы 7.3 представляет интерес лишь в случае, когда подпространство E_0 бесконечномерно.

Пусть в подпространствах E_0 и E^0 заданы ограниченные области Ω_0 и Ω^0. *Произведением* $\Omega_0 \times \Omega^0$ областей Ω_0 и Ω^0 называют такую область Ω в пространстве E, которая состоит из точек вида $u + v$, где $u \in \Omega_0$ и $v \in \Omega^0$. Граница $\dot{\Omega}$ области $\Omega = \Omega_0 \times \Omega^0$ состоит из точек вида $u + v$, где либо $u \in \dot{\Omega}_0$ и $v \in \overline{\Omega}^0$, либо $u \in \overline{\Omega}_0$ и $v \in \dot{\Omega}^0$.

Пусть на $\overline{\Omega}_0$ задан действующий в E_0 вполне непрерывный оператор A_0, а на $\overline{\Omega}^0$ — действующий в E^0 вполне непрерывный оператор A^0. *Прямой суммой* $\Phi = \Phi_0 \dotplus \Phi^0$ *полей* $\Phi_0 = I - A_0$ и $\Phi^0 = I - A^0$ назовем определенное на $\overline{\Omega}$ векторное поле

$$\Phi x = x - A_0 P_0 x - A^0 P^0 x. \tag{22.6}$$

Теорема 22.4. *Пусть вполне непрерывные поля Φ_0 и Φ^0 невырождены соответственно на $\dot{\Omega}_0$ и $\dot{\Omega}^0$. Тогда прямая сумма Φ этих полей невырождена на $\dot{\Omega}$ и*

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \gamma(\Phi_0, \Omega_0) \cdot \gamma(\Phi^0, \Omega^0). \tag{22.7}$$

Без изменения в определениях и формулировках на вполне непрерывные поля переносятся утверждения п. 7.5 о приводимых полях.

22.4. Гомеоморфизмы и вполне непрерывные поля. Пусть на некотором ограниченном множестве M определен вполне непрерывный оператор A. Пусть оператор $\Phi = I - A$ является гомеоморфизмом (т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением) множества M на множество $N = \Phi M$. Обратный к Φ оператор Ψ также имеет вид $\Psi = I - B$, где $B = -A\Psi$ и вполне непрерывен.

Лемма 22.1. *Пусть M_0 — некоторое замкнутое в E подмножество множества M. Тогда множество $N_0 = \Phi M_0$ также замкнуто в E.*

Доказательство. Пусть последовательность точек $y_n \in N_0$ сходится к некоторой точке $y^* \in E$. Представим каждую точку y_n в виде $y_n = x_n - Ax_n$, где $x_n \in M_0$. В силу полной непрерывности оператора A, последовательность Ax_n можно считать сходящейся к некоторой точке $z^* \in E$. Тогда последовательность x_n будет сходиться к точке $x^* = y^* + z^* \in M_0$. Переходя к пределу в равенстве $y_n = x_n - Ax_n$, получим предельное соотношение $y^* = x^* - Ax^*$. Поэтому $y^* \in M_0$. ∎

Лемма 22.2. *Пусть M_0 — некоторое открытое в E подмножество множества M. Тогда множество $N_0 = \Phi M_0$ также открыто в E.*

Доказательство. Пусть точка x_0 входит в M_0 вместе с шаром $\|x - x_0\| \leqslant \rho$ $(\rho > 0)$. Покажем, что точка $y_0 = \Phi x_0$ входит в N_0 вместе с некоторым шаром $\|y - y_0\| \leqslant r$, где $r > 0$.

Рассмотрим на сфере $S_\rho = \{x\colon \|x - x_0\| = \rho\}$ компактную деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - x_0 - A\left(x_0 + \frac{x - x_0}{1+\lambda}\right) + A\left[x_0 - \frac{\lambda(x - x_0)}{1+\lambda}\right]$$
$$(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

поля $\Phi(0, x) = x - x_0 - Ax + Ax_0 = \Phi x - y_0$ в поле $\Phi(1, x) = x - x_0 - A\left(x_0 + \frac{x - x_0}{2}\right) + A\left(x_0 - \frac{x - x_0}{2}\right)$. Деформация $\Phi(\lambda, x)$ невырождена, так как равенство $\Phi(\lambda_*, x_*) = 0$ $(\lambda_* \in [0, 1],\ x_* \in S_\rho)$ можно переписать в виде

$\Phi\left(x_0+\frac{x_*-x_0}{1+\lambda_*}\right)=\Phi\left[x_0-\frac{\lambda_*(x_*-x_0)}{1+\lambda_*}\right]$, откуда следует, что $x_0+\frac{x_*-x_0}{1+\lambda_*}=x_0-\frac{\lambda_*(x_*-x_0)}{1+\lambda_*}$ и $x_*=x_0\in S_\rho$. Поэтому поля $\Phi(0, x)$ и $\Phi(1, x)$ гомотопны на S_ρ и имеют на S_ρ одинаковое вращение.

Простая проверка показывает, что в диаметрально противоположных точках сферы S_ρ векторы поля $\Phi(1, x)$ направлены противоположно. В силу теоремы 21.11 вращение поля $\Phi(1, x)$ на S_ρ нечетно. Следовательно, и вращение на S_ρ поля $\Phi(0, x)=\Phi x-y_0$ нечетно. Из теоремы 19.1 вытекает существование такого $r>0$, что при $\|y-y_0\|\leqslant r$ вращение поля $\Phi x-y$ на S_ρ нечетно. Значит, при $\|y-y_0\|\leqslant r$ уравнение $\Phi x=y$ имеет в шаре $\|x-x_0\|\leqslant\rho$ решение, т. е. точка $y_0=\Phi x_0$ входит в N_0 вместе с шаром $\|y-y_0\|\leqslant r$. ∎

Теорема 22.5. *Пусть вполне непрерывный оператор A определен на некоторой окрестности U точки $x_0\in E$; пусть оператор $\Phi=I-A$ является гомеоморфизмом на этой окрестности. Тогда x_0 является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля*

$$X(x_0)x=\Phi x-\Phi x_0 \tag{22.8}$$

и

$$|\operatorname{ind}[x_0, X(x_0)]|=1. \tag{22.9}$$

Доказательство. В силу леммы 22.2 множество $V=X(x_0)U$ является областью в E, содержащей нулевую точку. На V определен обратный $X(x_0)$ оператор Ψ, причем поле Ψ вполне непрерывно и нуль 0 является его изолированной особой точкой. Так как $\Psi X(x_0)x\equiv x$ при $x\in U$, то из теоремы 22.1 вытекает равенство $\operatorname{ind}(0, \Psi)\cdot\operatorname{ind}[x_0, X(x_0)]=\operatorname{ind}(0, I)=1$, а из этого равенства следует (22.9). ∎

Допустим, что оператор $\Phi=I-A$ является гомеоморфизмом на некоторой связной области $\Omega\subset E$. Тогда поле (22.8) можно построить по любой точке $x_0\in\Omega$. Из связности области Ω вытекает, что $\operatorname{ind}[x_0, X(x_0)]$ принимает при всех $x_0\in\Omega$ одинаковое значение (оно в силу теоремы 22.5 либо равно 1, либо равно -1). Это значение назовем *степенью гомеоморфизма* и обозначим его через $s(\Phi)$.

22.5. Гомеоморфизмы границ областей. Пусть вполне непрерывное векторное поле $I-A$ определено на замыкании $\bar\Omega$ ограниченной области $\Omega\subset E$.

Если $\Phi=I-A$ является гомеоморфизмом на $\bar\Omega$ и если Φ невырождено на $\dot\Omega$, то либо $\gamma(\Phi, \Omega)=0$, либо $|\gamma(\Phi, \Omega)|=1$. Действительно, если поле Φ не имеет особых точек в области Ω, то $\gamma(\Phi, \Omega)=0$. Если же в области Ω поле Φ имеет особую точку, то такая точка единственная, а ее индекс в силу (22.9) равен или 1 или -1 — остается сослаться на теорему об алгебраическом числе особых точек. ∎

Необходимо подчеркнуть, что ситуация резко меняется, если поле $\Phi=I-A$ определено лишь на $\dot\Omega$ и является гомеоморфизмом лишь на $\dot\Omega$. В качестве примера рассмотрим в плоскости $\{\xi, \eta\}$ поле Φ, определенное на границе $\dot\Omega$ области Ω, заключенной между окружностями $\xi^2+\eta^2=1$ и $(\xi+1)^2+\eta^2=4$. Пусть на первой из этих окружностей поле Φ задано равенством $\Phi\{\xi, \eta\}=\{\xi, -\eta\}$, а на второй поле Φ совпадает с единичным полем I. Нетрудно видеть, что Φ гомеоморфно отображает $\dot\Omega$ на $\dot\Omega$ и $\gamma(\Phi, \Omega)=2$.

§ 23. Гладкие вполне непрерывные поля

23.1. Теорема Смейла. Векторное поле $\Phi=I-A$ называется *гладким*, если оператор A непрерывно дифференцируем. Пусть на области $\Omega\subset E$ задано гладкое вполне непрерывное поле $\Phi=I-A$. Точку $x_0\in\Omega$ назовем *правильной* для Φ, если 1 не является собственным значением оператора $A'(x_0)$, и *сингулярной* в противном случае. Как в конечномерном случае (§ 11), множество $\operatorname{wr}(\Phi, M)$ значений оператора Φ на сингулярных точках множества $M\subset\Omega$ назовем *складкой* поля Φ на M. Доказанная в § 11 теорема Сарда не переносится на поля в бесконечномерных пространствах (из-за отсутствия меры Лебега). Однако и в бесконечномерном случае «складка не может занимать слишком много места» в пространстве E; это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 23.1. *Складка $\operatorname{wr}(\Phi, M)$ гладкого вполне непрерывного векторного поля Φ на области $\Omega\subset E$ является тощим множеством в E.*

Доказательство. Покажем сначала, что складка $\mathrm{wr}(\Phi, M)$ является замкнутым множеством, если множество $M \subset \Omega$ ограничено и замкнуто. Пусть $y_n \in \mathrm{wr}(\Phi, M)$ и $\| y_n - y^* \| \to 0$. Тогда $y_n = x_n - Ax_n$, где $x_n \in M$ и 1 является собственным значением всех операторов $A'(x_n)$, причем последовательность Ax_n можно считать сходящейся к некоторой точке z^*. Последовательность $x_n = Ax_n + y_n$ будет сходиться к точке $x^* = z^* + y^* \in M$, причем $y^* = x^* - Ax^*$ (в силу непрерывности оператора A) и 1 является собственным значением оператора $A'(x^*)$ (в силу непрерывной дифференцируемости оператора A). Следовательно, $y^* \in \mathrm{wr}(\Phi, M)$. Значит, складка $\mathrm{wr}(\Phi, M)$ замкнута.

Мы докажем ниже, что складка $\mathrm{wr}(\Phi, M)$ нигде не плотна в E, если область Ω ограничена, а гладкое поле Φ определено в некоторой окрестности множества $\bar{\Omega}$. Отсюда общее утверждение теоремы 23.1 будет вытекать непосредственно.

Допустим противное. Тогда складка $\mathrm{wr}(\Phi, \bar{\Omega})$ (по уже доказанному она является замкнутым множеством) содержит некоторый шар $T = \{y\colon \| y - y_0 \| \leqslant r_0\}$. Рассмотрим множество $U_0 = \{x\colon x - Ax = y_0,\ x \in \bar{\Omega}\}$ и его ε-окрестности $U(\varepsilon)$; множество U_0 компактно. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ — такое число, что $\| x - Ax - y_0 \| > \delta$ при $x \in \bar{\Omega} \setminus U(\varepsilon)$. Тогда прообраз шара $\| y - y_0 \| \leqslant \delta$ при отображении Φ лежит в $U(\varepsilon)$ и поэтому складка $\mathrm{wr}(\Phi, U(\varepsilon))$ содержит этот шар. С другой стороны, мы ниже установим существование у каждой точки $x_0 \in U_0$ такой окрестности V, что $\mathrm{wr}(\Phi, V)$ нигде не плотна; покроем U_0 этими окрестностями и затем выберем конечное покрытие $V_1, \ldots, V_s$; множества $V_1, \ldots, V_s$ покрывают одновременно некоторое множество $U(\varepsilon_0)$ и поэтому складка $\mathrm{wr}(\Phi, U(\varepsilon_0))$ нигде не плотна. Полученное противоречие завершит доказательство теоремы 23.1.

Осталось построить для каждой точки $x_0 \in U_0$ окрестность V так, чтобы складка $\mathrm{wr}(\Phi, V)$ была нигде не плотна. Если точка x_0 регулярна, то у нее есть окрестность, полностью состоящая из регулярных точек; складка на этой окрестности является пустым множеством. Поэтому точку x_0 можно считать сингулярной.

Обозначим через P и Q коммутирующие с $A'(x_0)$ линейные операторы проектирования на корневое подпространство E_0 оператора $A'(x_0)$, отвечающее собственному значению 1, и на инвариантное для $A'(x_0)$ дополнительное подпространство E^0 (см. п. 17.3). Число 1 не будет собственным значением оператора $QA'(x_0)$; в силу гладкости оператора A оно не будет собственным значением и операторов $QA'(x)$ при всех x из некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим уравнение

$$x - QAx = PAx_0 + h; \tag{23.1}$$

оно имеет решение x_0 при $h = y_0$ и из классической теоремы о неявной функции вытекает существование таких $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$, что при $\| h - y_0 \| \leqslant \delta_0$ уравнение (23.1) имеет единственное решение $x = Dh$ в шаре $\| x - x_0 \| \leqslant \varepsilon_0$, причем оператор D непрерывно дифференцируем и $D'(h) = [I - QA'(Dh)]^{-1}$.

Обозначим через V шар $\| x - x_0 \| \leqslant \rho$ достаточно малого радиуса ρ и покажем, что складка $\mathrm{wr}(\Phi, V)$ нигде не плотна в E. В предположении противного найдется шар $\| y - y_* \| \leqslant r$, полностью лежащий в складке $\mathrm{wr}(\Phi, V)$. В частности, $\mathrm{wr}(\Phi, V)$ содержит все точки $y_* + u$, где элемент u пробегает шар $Ш = \{u\colon \| u \| \leqslant r\}$ в подпространстве E_0. По построению, при каждом $u \in Ш$ уравнение

$$x - Ax = y_* + u \tag{23.2}$$

имеет в шаре V такое решение $z = z(u)$, что 1 является собственным значением оператора $A'[z(u)]$. Элемент $z(u)$ является решением уравнения (23.1) при $h = z(u) - QAz(u) - PAx_0$ и поэтому $z(u) = D[z(u) - QAz(u) - PAx_0]$.

Введем в рассмотрение векторное поле $\Psi v = v - PAD(y_* + v) + PAx_0$. Если r достаточно мало, то поле Ψ непрерывно дифференцируемо на шаре $Ш$, причем

$$\Psi'(v) = I - PA'[D(y_* + v)]\{I - QA'[D(y_* + v)]\}^{-1}.$$

Положим

$$v(u) = z(u) - QAz(u) - PAx_0 - y_*.$$

Так как $z(u)$ является решением уравнения (23.2), то $v(u) \in E_0$. Если элемент $u \in E_0$ достаточно мал по норме, то $v(u) \in Ш$. Простой подсчет показывает, что $\Psi v(u) = u$ и

$$\Psi'[v(u)] = I - PA'[z(u)]\{I - QA'[z(u)]\}^{-1}.$$

Так как 1 является собственным значением каждого оператора $A'[z(u)]$, то существует ненулевой вектор $e(u)$, для которого $A'[z(u)]e(u) = e(u)$, причем $Pe(u) \neq 0$. Очевидно,

$$\Psi'[v(u)]\,Pe(u) =$$
$$= Pe(u) - PA'[z(u)]\{I - QA'[z(u)]\}^{-1}[e(u) - Qe(u)] = 0.$$

Значит, каждая точка $v(u)$ сингулярна для поля Ψ. Из тождества $\Psi v(u) \equiv u$ вытекает тогда, что складка поля Ψ на любой окрестности ненулевой точки в пространстве E_0 содержит некоторую другую окрестность этой нулевой точки. Мы пришли к противоречию с теоремой Сарда 1.2. ∎

23.2. Позитивные вполне непрерывные поля. Гладкое вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ назовем *позитивным* в области $\Omega \subset E$, если для любой регулярной точки $x \in \Omega$ сумма кратностей вещественных больших чем 1 собственных значений оператора $A'(x)$ четна. Позитивное поле назовем *регулярно позитивным*, если множество его сингулярных точек нигде не плотно.

Аналогично лемме 11.1 устанавливается, что поле $\Phi = I - A$ позитивно, если $A'(x)T(x) \equiv T(x)A'(x)$, где $T(x)$ при каждом x — некоторый линейный оператор, у которого нет вещественных собственных значений.

Теорема 23.2. *Пусть на замыкании $\bar\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset E$ определено вполне непрерывное векторное поле Φ, гладкое и позитивное в области Ω и невырожденное на $\dot\Omega$. Тогда $\gamma(\Phi, \Omega) \geqslant 0$.*

Теорема 23.3. *Пусть в условиях теоремы 23.2 поле Φ регулярно позитивно и $\gamma(\Phi, \Omega) = 0$. Тогда поле Φ не имеет в Ω особых точек.*

Обе теоремы доказываются так же, как их аналог в п. 11.1; единственное изменение состоит в том, что вместо теоремы Сарда используется теорема Смейла 23.1. ∎

23.3. Аналитические вполне непрерывные поля. Векторное поле $\Phi = I - A$ называется *аналитическим*, если оператор A аналитический (см. п. 17.6).

В этом пункте мы рассмотрим вполне непрерывные векторные поля $\Phi = I - A$ в комплексном банаховом пространстве E. Пространство E можно рассматривать и как вещественное, поэтому можно говорить о вращении поля Φ на границах ограниченных областей в E.

Векторные поля $\Phi = I - A$ с аналитическими операторами очевидным образом обладают свойством позитивности. Поэтому из теоремы 23.2 вытекает

Теорема 23.4. *Пусть вполне непрерывное векторное поле Φ определено на замыкании $\bar\Omega$ ограниченной области Ω в комплексном банаховом пространстве E; пусть Φ аналитично в области Ω и невырождено на $\dot\Omega$. Тогда $\gamma(\Phi, \Omega) \geqslant 0$.*

Основное свойство аналитических полей отражает

Теорема 23.5. *Пусть выполнены условия теоремы 23.4. Тогда поле Φ имеет в области Ω не больше чем $\gamma = \gamma(\Phi, \Omega)$ особых точек.*

Доказательство. В силу теоремы 23.3 число γ неотрицательно. Допустим, что у поля $\Phi = I - A$ есть в области Ω различные особые точки $z_1, \ldots, z_{\gamma+1}$. Обозначим через f такой линейный функционал на E, что $f(z_i) \neq f(z_j)$ при $i \neq j$. Затем определим на $\bar\Omega$ векторные поля $\Phi_\varepsilon = I - A_\varepsilon$, где $A_\varepsilon x = Ax + \varepsilon\alpha_1(x)D_1x + \ldots + \varepsilon\alpha_{\gamma+1}(x)D_{\gamma+1}x$; ε — малый параметр; $\alpha_j(x) = [f(x - z_1)]^2 \ldots [f(x - z_{j-1})]^2[f(x - z_{j+1})]^2 \ldots [f(x - z_{\gamma+1})]^2$; $D_1, \ldots, D_{\gamma+1}$ — линейные конечномерные операторы, которые будут выбраны ниже. Как легко видеть, поля Φ_ε при малых ε гомотопны на $\dot\Omega$ полю Φ и поэтому $\gamma(\Phi_\varepsilon, \Omega) = \gamma$.

Точки $z_1, \ldots, z_{\gamma+1}$ будут особыми для всех полей Φ_ε. Очевидно, $A'_\varepsilon(z_j) = A'(z_j) + \varepsilon b_j D_j$, где $b_1, \ldots, b_{\gamma+1}$ — некоторые ненулевые числа. Поэтому линейные конечномерные операторы $D_1, \ldots, D_{\gamma+1}$ можно выбрать так, чтобы при малых ε число 1 не было собственным значением всех операторов $A'_\varepsilon(z_j)$. Тогда (в силу теоремы 19.1) каждая из точек $z_1, \ldots, z_{\gamma+1}$ будет изолированной особой точкой полей Φ_ε, причем индекс каждой из них будет равен 1. Поэтому из теоремы об алгебраическом числе особых точек и из теоремы 23.4 вытекает, что $\gamma(\Phi_\varepsilon, \Omega) \geqslant \gamma + 1$ при всех малых ненулевых ε. Мы пришли к противоречию. ∎

Из теоремы 23.5 вытекает, в частности, что вполне непрерывное аналитическое поле в комплексном пространстве не имеет в области особых точек, если его вращение на границе области равно нулю. Из этой теоремы вытекает, что индекс изолированной особой точки аналитического поля в комплексном пространстве строго положителен, а если особая точка сингулярна, то ее индекс не меньше чем 2 (Э. Кронин).

§ 24. Вычисление индекса особой точки в вырожденных случаях

24.1. Постановка задачи и обозначения. Пусть x_0 — неподвижная точка вполне непрерывного и дифференцируемого в точке x_0 оператора A, действующего в банаховом пространстве E.

Если 1 не является собственным значением оператора $B = A'(x_0)$, то, в силу теоремы 21.6, x_0 будет изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля $I - A$, а ее индекс $\operatorname{ind}(x_0, I - A)$ будет равен $(-1)^{\beta(B)}$, где $\beta(B)$ — сумма кратностей больших чем 1 собственных значений оператора B. В этом параграфе изучаются вырожденные случаи — когда 1 является собственным значением оператора B. Как оказывается, исследование особой точки поля $I - A$ в вырожденных случаях можно свести к анализу некоторого вспомогательного векторного поля Ψ в конечномерном подпространстве E_0 нулей поля $I - B$. Алгоритмам построения поля Ψ посвящен настоящий параграф.

Пусть P_0 — линейный оператор проектирования на E_0, $P^0 = I - P_0$ и $E^0 = P^0E$. Элементы подпространств E_0 и E^0 будем обозначать соответственно через u и v.

Пусть L^0 — множество значений оператора $I - B$, а Q^0 — линейный оператор проектирования на L^0. Подпространство $L_0 = Q_0E$, где $Q_0 = I - Q^0$, имеет ту же размерность, что и E_0. Поэтому можно определить линейный оператор D, отображающий L_0 на E_0, у которого есть обратный D^{-1}.

Оператор $B - D^{-1}P_0$ вполне непрерывен, число 1 не является его собственным значением (проверьте). Поэтому оператор $I - B + D^{-1}P_0$ непрерывно обратим. Через $\beta(B, D)$ будем обозначать сумму кратностей бо́льших чем 1 собственных значений оператора $B - D^{-1}P_0$.

Отметим одно очевидное свойство оператора $B - D^{-1}P_0$, которым мы будем пользоваться без специальных ссылок. Оператор $I - B + D^{-1}P_0$ отображает E_0 на L_0 и E^0 на L^0. Поэтому оператор $(I - B + D^{-1}P_0)^{-1}$ отображает L^0 на E^0 (причем $(I - B + D^{-1}P_0)^{-1}(I - B)$ совпадает на E^0 с единичным оператором) и отображает L_0 на E_0 (причем $(I - B + D^{-1}P_0)^{-1}$ совпадает на L_0 с оператором D).

Конкретный вид операторов P_0, Q_0, D для наших построений роли не играет. Укажем способ их построения. Выберем в E_0 базис $e_1, \ldots, e_n$. Затем построим произвольные линейные функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ так, что $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Тогда оператор P_0 можно определить равенством

$$P_0x = \varphi_1(x)e_1 + \ldots + \varphi_n(x)e_n \quad (x \in E). \tag{24.1}$$

Для построения оператора Q_0 выберем базис $\psi_1, \ldots, \psi_n$ в подпространстве E_0^* собственных векторов в E^* оператора B^*, отвечающих собственному значению 1; затем выберем произвольные элементы $g_1, \ldots, g_n$ в E так, что $\psi_i(g_j) = \delta_{ij}$, и положим

$$Q_0x = \psi_1(x)\cdot g_1 + \ldots + \psi_n(x)g_n \quad (x \in E). \tag{24.2}$$

Операторы D и D^{-1} можно определить равенствами

$$DQ_0x = \psi_1(x)e_1 + \ldots + \psi_n(x)e_n \quad (x \in E), \tag{24.3}$$

$$D^{-1}P_0x = \varphi_1(x)g_1 + \ldots + \varphi_n(x)g_n \quad (x \in E). \tag{24.4}$$

В важном частном случае, когда E_0 совпадает со всем корневым подпространством оператора B, отвечающим собственному значению 1, построение операторов P_0, Q_0, D можно упростить. Для этого нужно заметить, что подпространства E_0 и L^0 не имеют ненулевых общих точек, а их прямая сумма совпадает с E. Поэтому функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно выбрать в подпространстве E_0^*. Тогда оператор (24.1) проектирует на E_0 по направлению L^0 (т. е. $L^0 = E^0$). Оператор Q_0 можно положить равным P_0, а оператор D — единичному на E_0. В рассматриваемом случае $\beta(B, D) = \beta(B)$.

В общем случае для вычисления $\beta(B, D)$ нужны дополнительные построения. Их можно упростить, если при построении оператора P_0 функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ выбрать из корневого подпространства $E_1^* \subset E^*$ оператора B^*, отвечающего собственному значению 1. Векторы $g_1, \ldots, g_n$ можно выбрать так, чтобы они лежали в корневом подпространстве E_1 оператора B, отвечающем собственному значению 1. Подпространство E_1 тогда инвариантно для оператора $B - D^{-1}P_0$; пусть $\beta_*(B - D^{-1}P_0)$ — сумма кратностей больших чем 1 собственных значений его сужения на E_1. Оператор $B - D^{-1}P_0$ на подпространстве E_1 легко задать матрицей и поэтому число $\beta_*(B - D^{-1}P_0)$ найти легко. Очевидно равенство

$$\beta(B,\ D) = \beta(B) + \beta_*(B - D^{-1}P_0). \tag{24.5}$$

В теоремах этого параграфа важна лишь четность числа $\beta(B,\ D)$. Поэтому вместо (24.5) удобно пользоваться равенством

$$(-1)^{\beta(B,\ D)} = (-1)^{\beta(B)} \operatorname{sign} \det (B - D^{-1}P_0). \tag{24.6}$$

Исследование особой точки x_0 поля $x - Ax$ равносильно исследованию нулевой особой точки поля $x - A(x_0 + x) + x_0$. Поэтому в дальнейшем предполагается, что рассматриваемая особая точка нулевая.

24.2. Простое вырождение. Пусть оператор A допускает в окрестности нулевой точки представление

$$Ax = Bx + C_k x + \omega(x), \tag{24.7}$$

где C_k — однородный порядка $k > 1$ оператор, удовлетворяющий условию

$$\| C_k x - C_k y \| \leqslant q_0 r^{k-1} \| x - y \| \quad (x,\ y \in E;\ \| x \|,\ \| y \| \leqslant r), \tag{24.8}$$

а $\omega(x) = o(\| x \|^k)$.

Лемма 24.1. *Пусть оператор C_k удовлетворяет условию*

$$\| Q_0 C_k u \| \geqslant a_0 \| u \|^k \quad (u \in E_0), \tag{24.9}$$

где $a_0 > 0$. Тогда нулевая особая точка поля $\Phi = I - A$ изолирована и на всех сферах $\| x \| = \rho$ малых радиусов ρ поле Φ гомотопно полю

$$\Phi_1(u + v) = -Q_0 C_k u + v - Bv \quad (u + v \in E). \tag{24.10}$$

Доказательство. В силу (24.9) поле Φ_1 не имеет ненулевых особых точек. Если утверждение леммы неверно, то (в силу теоремы 19.1) найдется такая сходящаяся к нулю последовательность ненулевых элементов $u_n + v_n \in E$ и такая последовательность чисел $\lambda_n \geqslant 0$, что $\Phi(u_n + v_n) = -\lambda_n \Phi_1(u_n + v_n)$. Эти равенства можно переписать в виде

$$v_n - Bv_n = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n} Q_0 C_k u_n + \frac{1}{1 + \lambda_n} [C_k(u_n + v_n) + \omega(u_n + v_n)]. \tag{24.11}$$

Из (24.11) вытекает справедливость при больших n оценки

$$\| (I - B) v_n \| \leqslant b_1 \| u_n \|^k + b_2 \| u_n + v_n \|^k = b_1 \| P_0(u_n + v_n) \|^k + b_2 \| u_n + v_n \|^k \leqslant b_3 \| u_n + v_n \|^k.$$

Но $I - B$, рассматриваемый как оператор из E^0 в L^0, имеет в силу теоремы Банаха непрерывный обратный и поэтому $\| (I - B) v_n \| \geqslant b_4 \| v_n \|$, где $b_4 > 0$. Следовательно, при больших n выполняется неравенство

$$\| v_n \| \leqslant b_5 \| u_n + v_n \|^k. \tag{24.12}$$

Применим к (24.11) оператор Q_0 и перепишем получившиеся равенства в виде

$$Q_0 C_k u_n = -\frac{1}{1 + \lambda_n} \{ Q_0 [C_k(u_n + v_n) - C_k u_n] + Q_0 \omega(u_n + v_n) \}.$$

Из (24.9) и (24.12) вытекает тогда оценка

$$a_0 \| u_n \|^k \leqslant \| Q_0 \| q_0 [\max \{ \| u_n + v_n \|,\ \| u_n \| \}]^{k-1} b_5 \| u_n + v_n \|^k + \| Q_0 \| \cdot \| \omega(u_n + v_n) \|.$$

Поэтому $\| u_n \| = o(\| u_n + v_n \|)$. Отсюда и из (24.12) следует, что $\| u_n + v_n \| = o(\| u_n + v_n \|)$, т. е. при больших n элементы $u_n + v_n$ равны нулю. Мы пришли к противоречию. ∎

Теорема 24.1. *Пусть оператор A допускает представление* (24.7) *и пусть выполнено условие* (24.9). *Тогда нулевая особая точка поля $I - A$ изолирована и*

$$\operatorname{ind}(0,\ I - A) = (-1)^{\beta(B,\ D)} \operatorname{ind}(0,\ \Psi_k;\ E_0), \tag{24.13}$$

где Ψ_k — векторное поле на E_0, определенное равенством

$$\Psi_k u = -DQ_0C_k u \quad (u \in E_0). \tag{24.14}$$

Доказательство. В силу леммы 24.1 достаточно доказать равенство

$$\operatorname{ind}(0,\ I - B - Q_0C_kP_0) = (-1)^{\beta(B,\,D)}\operatorname{ind}(0,\ \Psi_k;\ E_0). \tag{24.15}$$

Построим вспомогательное вполне непрерывное поле

$$X = (I - B + D^{-1}P_0)^{-1}(I - B - Q_0C_kP_0); \tag{24.16}$$

нуль является единственной его особой точкой. В силу теоремы 22.1 справедливо равенство

$$\operatorname{ind}(0,\ X)\cdot\operatorname{ind}(0, I - B + D^{-1}P_0) = \operatorname{ind}(0, I - B - Q_0C_kP_0),$$

причем $\operatorname{ind}(0,\ I - B + D^{-1}P_0)$ в силу теоремы 21.1 равен $(-1)^{\beta(B,\,D)}$. Поэтому вместо (24.15) достаточно установить равенство

$$\operatorname{ind}(0,\ X;\ E) = \operatorname{ind}(0,\ \Psi_k;\ E_0). \tag{24.17}$$

Но равенство (24.17) вытекает из определения вращения, так как $X(u+v) = \Psi_k u + v$. ∎

Условие (24.9) имеет простой геометрический смысл — оно означает, что векторы $C_k u$ не лежат в подпространстве L^0.

Проверка условия (24.9) особо проста в случае, когда E_0 одномерно. В этом случае операторы P_0, Q_0, D имеют вид

$$P_0x = \varphi(x)e, \qquad Q_0x = \psi(x)g,$$
$$DQ_0x = \psi(x)e, \quad D^{-1}P_0x = \varphi(x)g.$$

Условие (24.9) равносильно отличию от нуля числа $\psi(C_ke)$. Если при этом k четно, то $\operatorname{ind}(0,\ \Psi_k;\ E_0) = 0$ и поэтому $\operatorname{ind}(0,\ I - A) = 0$; если же k нечетно, то нужно найти число $\beta(B,\ D)$ — сумму кратностей бо́льших чем 1 собственных значений оператора $(B - D^{-1}P_0)x = Bx - \varphi(x)g$, затем определить знак числа $\psi(C_ke)$, после этого воспользоваться вытекающим из теоремы 24.1 равенством $\operatorname{ind}(0,\ I - A) = (-1)^{\beta(B,\,D)+1}\operatorname{sign}\psi(C_ke)$.

Если E_0 двумерно, то поле Ψ_k — это однородное поле в плоскости. Поэтому для вычисления $\operatorname{ind}(0,\ \Psi;\ E_0)$ можно воспользоваться методами, изложенными в § 15.

Естественно возникает вопрос о том, как поступить, если однородное поле (24.14) вырождено. Этот вопрос обсуждается в следующих пунктах.

Напрашивается, например, следующий подход. Пусть $Ax = Bx + C_kx + C_{k+1}x + \ldots + C_{k+m}x + o(\|x\|^{k+m})$, причем каждый оператор C_i однороден порядка i и удовлетворяет естественному условию Липшица. Пусть нуль является изолированной особой точкой рассматриваемого на E_0 векторного поля $-DQ_0[C_ku + C_{k+1}u + \ldots + C_{k+m}u]$. Можно ожидать, что тогда нуль является изолированной особой точкой поля $I - A$ и что для вычисления индекса этой особой точки верна формула, аналогичная (24.13). Оказывается, что это не так — нуль может оказаться неизолированной особой точкой поля $I - A$!

Теорему 24.1 естественно дополнить оценкой снизу длин векторов $x - Ax$ в окрестности нулевой точки. Непосредственно из утверждения теоремы вытекает существование в ее условиях таких c_0, $r_0 > 0$, что

$$\|x - Ax\| \geqslant c_0\|x\|^k \quad (x \in E,\ \|x\| \leqslant r_0). \tag{24.18}$$

Постоянную c_0 легко выразить через r_0 и характеристики операторов B, C_k, ω.

Первую теорему об индексе особой точки в вырожденном случае (теорему 24.1 в условиях, когда E_0 является корневым подпространством оператора B) получил М. А. Красносельский (ДАН СССР **73**, № 6 (1956)). Дальнейшие усиления предложил В. Б. Меламед (ДАН СССР **126**, № 3 (1959)). Общий алгоритм, излагаемый в последующих пунктах, разработали П. П. Забрейко и М. А. Красносельский (ДАН СССР **141**, № 2 (1961); Сибирск. матем. журнал **5**, № 3 (1964)).

24.3. Общий случай. Пусть оператор A имеет вид

$$Ax = Bx + \Omega x, \tag{24.19}$$

причем Ω удовлетворяет в шаре $\|x\| \leqslant r_0$ условию

$$\|\Omega x - \Omega y\| \leqslant q(r)\|x - y\| \quad (\|x\|,\ \|y\| \leqslant r < r_0), \tag{24.20}$$

где $q(r)$ $(r \geqslant 0)$ — неубывающая функция и

$$\lim_{r\to 0} q(r) = 0. \tag{24.21}$$

Из (24.20) и (24.21) вытекает, в частности, что $\Omega x = o(\|x\|)$.

Рассмотрим при малых фиксированных $u \in E_0$ уравнение

$$v - Bv = Q^0\Omega(u+v). \tag{24.22}$$

Оно эквивалентно уравнению

$$v = \Gamma\Omega(u+v), \tag{24.23}$$

где $\Gamma = (I - B + D^{-1}P_0)^{-1}Q^0$ (ясно, что Γ не зависит от D). Выберем настолько малое $r \leqslant r_0$, чтобы выполнялось неравенство

$$2\|\Gamma\| q(2r) \leqslant 1. \tag{24.24}$$

Тогда при $\|u\| \leqslant r$ оператор $\Gamma\Omega(u+v)$ преобразует в себя шар $\|v\| \leqslant r$; в силу (24.20) и (24.24)

$$\|\Gamma\Omega(u+v)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Gamma\| q(\|u\| + \|v\|)\|u+v\| \leqslant \|\Gamma\| q(2r)\cdot 2r \leqslant r$$

Кроме того, на шаре $\|v\| \leqslant r$ оператор $\Gamma\Omega(u+v)$ удовлетворяет следующему условию Липшица:

$$\|\Gamma\Omega(u+v_1) - \Gamma\Omega(u+v_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Gamma\| q(2r)\|v_1 - v_2\| \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|.$$

Поэтому из принципа сжатых отображений вытекает, что при $\|u\| \leqslant r$ уравнение (24.23), или, что то же самое, уравнение (24.22) имеет в шаре $\|v\| \leqslant r$ единственное решение

$$v = Ru \quad (\|u\| \leqslant r). \tag{24.25}$$

Оператор R, очевидно, непрерывен; он действует из E_0 в E^0.

Так как $Ru = \Gamma\Omega(u+Ru)$, то из (24.20) и (24.24) вытекает оценка $\|Ru\| \leqslant \frac{1}{2}(\|u+Ru\|)$, откуда следует, что $\|Ru\| \leqslant \|u\|$. Поэтому $\|Ru\| \leqslant \|\Gamma\| q(2\|u\|)(\|u\| + \|Ru\|)$ и

$$\|Ru\| \leqslant \frac{\|\Gamma\| q(2\|u\|)\|u\|}{1 - \|\Gamma\| q(2\|u\|)} \leqslant 2\|\Gamma\| q(2\|u\|)\|u\|, \tag{24.26}$$

т. е.

$$Ru = o(\|u\|). \tag{24.27}$$

Лемма 24.2. *Нулевая особая точка поля $\Phi = I - A$ изолирована в том и только том случае, если изолирована нулевая особая точка поля*

$$\Phi_1(u+v) = -Q_0\Omega(u+Ru) + v - Bv. \tag{24.28}$$

Лемма 24.3. *Если нулевая особая точка поля $\Phi = I - A$ изолирована, то на всех сферах $\|u+v\| = \rho$ малых радиусов ρ поле Φ гомотопно полю* (24.28).

Обе леммы будем доказывать одновременно. Вначале сравним поле

$$\Phi(u+v) = -Q_0\Omega(u+v) + v - Bv - Q^0\Omega(u+v)$$

с вспомогательным полем

$$\Phi_2(u+v) = -Q_0\Omega(u+Ru) + v - Bv - Q^0\Omega(u+v).$$

Оба эти поля могут обращаться в нуль лишь при таких u и v, которые связаны равенством (24.22); но при таких u и v поля Φ и Φ_2 совпадают. Поэтому нуль является изолированной особой точкой поля Φ в том и только том случае, если нуль является изолированной особой точкой поля Φ_2. Если нуль — изолированная особая точка поля Φ, то векторы $\Phi(u+v)$ и $\Phi_2(u+v)$ направлены непротивоположно (они могут быть направлены противоположно лишь при $v - Bv - Q^0\Omega(u+v) = 0$, но они в таких точках совпадают); поэтому поля Φ и Φ_2 гомотопны на сферах $\|u+v\| = \rho$ малых радиусов ρ.

Сравним теперь поля Φ_2 и Φ_1. Если первое из них обращается в нуль в точке $u+v$, то $v = Ru$ и $\Omega_0(u+Ru) = 0$; поэтому второе поле обращается в нуль в точке u. Аналогично, если поле Φ_1 обращается в нуль в точке $u+v$, то $v = 0$ и $Q_0\Omega(u+Ru) = 0$; поэтому поле Φ_2 обращается в нуль в точке $u + Ru$. Таким образом, нулевая особая точка поля Φ_2 изолирована в том и только том случае, если она изолирована для поля Φ_1. Лемма 24.2 доказана.

Пусть нулевая особая точка полей Φ_2 и Φ_1 изолирована. Тогда вектор $Q_0\Omega(u+Ru)$ отличен от нуля при всех малых ненулевых $u \in E_0$. Поэтому векторы $\Phi_2(u+v)$ и $\Phi_1(u+v)$ могут быть направлены противоположно лишь при $u = 0$. Но $\Phi_1 v = v - Bv$, $\Phi_2 v = v - Bv - Q^0\Omega v$ и эти векторы (при малых ненулевых v) направлены непротивоположно, так как $\|\Phi_1 v\| \geqslant a_0\|v\|$, а $\|\Phi_1 v - \Phi_2 v\| = o(\|v\|)$. Следовательно, поля Φ_1 и Φ_2 гомотопны на сферах $\|u+v\| = \rho$ малых радиусов. Лемма 24.3 доказана. ∎

Теорема 24.2. *Пусть оператор A допускает представление* (24.19) *и пусть нуль является изолированной особой точкой поля*

$$\Psi u = -DQ_0\Omega(u+Ru) \qquad (u \in E_0), \tag{24.29}$$

рассматриваемого в подпространстве E_0. Тогда нулевая особая точка поля $I-A$ изолирована и

$$\operatorname{ind}(0, I-A) = (-1)^{\beta(B, D)} \operatorname{ind}(0, \Psi; E_0). \tag{24.30}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 24.1. Нужно лишь вместо леммы 24.1 использовать леммы 24.2 и 24.3. ∎

Из леммы 24.2 вытекает важное дополнение к теореме 24.2.

Теорема 24.3. *Пусть нулевая особая точка поля* (24.29) *не изолирована. Тогда не изолирована нулевая особая точка поля $I-A$.*

Теорема 24.2 сложнее в приложениях, так как она требует построения оператора R, т. е. требует решения нелинейного уравнения (24.22). Следует, впрочем, помнить, что явный вид оператора R нам не нужен — достаточно уметь строить «хорошие» его приближения.

В заключение пункта отметим, что в условиях теоремы 24.2 справедливо простое и важное равенство

$$\nu(0, I-A) = \nu(0, \Psi) \tag{24.31}$$

порядков невырожденности (если они существуют; см. п. 15.6) нулевых особых точек полей $I-A$ и Ψ (если один из порядков невырожденности точный, то и второй точный). Доказательство предоставляем читателю.

24.4. Поля с аналитическими главными частями. Пусть A имеет вид (24.19), причем Ω — аналитический оператор, т. е. Ω представим равномерно сходящимся в окрестности нуля рядом

$$\Omega x = C_2x + C_3x + \ldots + C_kx + \ldots, \tag{24.32}$$

где C_k — форма порядка k. В силу теоремы 17.3 каждый оператор C_k вполне непрерывен. Обозначим через $\tilde{C}_k(x_1, \ldots, x_k)$ (см. п. 17.6) такой симметричный полилинейный оператор, что $C_kx = \tilde{C}_k(x, \ldots, x)$; через $\tilde{C}_k(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_s^{\alpha_s})$ обозначим значение оператора $\tilde{C}_k$, когда α_1 его аргументов равны x_1, α_2 его аргументов равны x_2 и т. д. (конечно, справедливо равенство $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = k$).

Если Ω имеет вид (24.32), то $\Omega'(0) = 0$, и в силу классической теоремы о неявных функциях (см., например, [17]) оператор (24.25) аналитичен и допускает представление

$$Ru = R_2u + R_3u + \ldots + R_ku + \ldots, \tag{24.33}$$

где R_k — форма порядка k, действующая из E_0 в E^0.

Для форм R_k легко получить явные формулы, если мы умеем находить значения линейного оператора

$$\Gamma = (I - B + D^{-1}P_0)^{-1} Q^0. \tag{24.34}$$

Подставим ряд (24.33) в тождество $Ru = \Gamma\Omega(u + Ru)$ и разложим его правую часть в ряд. Тогда из очевидных равенств

$$C_i(u+Ru) = \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = i} \frac{i!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_s!} \tilde{C}_i\left[u^{\alpha_1}, (R_2u)^{\alpha_2}, \ldots, (R_su)^{\alpha_s}\right]$$

будет вытекать, что

$$R_ku = \sum_{[\alpha]=k} \pi(k, \alpha)\, \Gamma \tilde{C}_{|\alpha|}\left[u^{\alpha_1}, (R_2u)^{\alpha_2}, \ldots, (R_{k-1}u)^{\alpha_{k-1}}\right], \tag{24.35}$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{k-1}$, $[\alpha] = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + (k-1)\alpha_{k-1}$ и

$$\pi(k, \alpha) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1})!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!}.$$

Например,

$$\begin{aligned} R_2u &= \Gamma C_2u, \\ R_3u &= \Gamma C_3u + 2\Gamma\tilde{C}_2(u, R_2u), \\ R_4u &= \Gamma C_4u + 3\Gamma\tilde{C}_3(u, R_2u) + \Gamma C_2R_2u + 2\Gamma\tilde{C}_2(u, R_3u). \end{aligned} \tag{24.36}$$

Зная операторы $R_2, R_3, \ldots$, легко выписать разложение

$$\Psi u = G_2u + G_3u + \ldots + G_ku + \ldots \tag{24.37}$$

в ряд Тейлора поля (24.29). Формулы для форм G_k отличаются от (24.35) и (24.36) лишь тем, что оператор Γ в них должен быть заменен оператором $-DQ_0$:

$$G_k u = -\sum_{|\alpha|=k} \pi(k, \alpha) DQ_0 \tilde{C}_{|\alpha|}\left[u^{\alpha_1}, (R_2 u)^{\alpha_2}, \ldots, (R_{k-1}u)^{\alpha_{k-1}}\right]. \tag{24.38}$$

Формулы для форм C_k и G_k существенно упрощаются, если найдутся такие натуральные числа $l_1 \leqslant l_2$, l_3, что

$$\begin{aligned} &\Gamma C_2 P_0 = \ldots = \Gamma C_{l_2-1} P_0 = 0, \quad && \Gamma C_{l_2} P_0 \neq 0; \\ &\Gamma C_2 = \ldots = \Gamma C_{l_1-1} = 0, && \Gamma C_{l_1} \neq 0; \\ &Q_0 C_2 = \ldots = Q_0 C_{l_3-1} = 0, && Q_0 C_{l_3} \neq 0. \end{aligned}$$

Соответствующие изменения в формулы читатель легко внесет сам.

Положим

$$\Psi_i = G_2 + \ldots + G_i \quad (i = 2, 3, \ldots). \tag{24.39}$$

Пусть при некотором натуральном k

$$\|\Psi_k u\| \geqslant a_k \|u\|^k \quad (u \in E_0, \ \|u\| \leqslant \rho_k), \tag{24.40}$$

где a_k, $\rho_k > 0$ (если нуль является изолированной особой точкой поля Ψ, то такое k обязательно найдется в силу известной теоремы Лихнеровича (см. [41]). Из (24.40) вытекает, что нуль поля Ψ изолирован и $\operatorname{ind}(0, \Psi; E_0) = \operatorname{ind}(0, \Psi_k; E_0)$. Таким образом, *для применения теоремы* 24.2 *достаточно конструировать последовательно операторы Ψ_i до тех пор, пока найдется индекс k, при котором верна оценка* (24.40). Если нулевая особая точка поля $I - A$ изолирована, то после конечного числа проб число k будет найдено. Если же оценка (24.40) неверна при всех k, то нулевая особая точка поля $I - A$ не изолирована.

Как это следует из формул (24.35) и (24.38), при построении оператора Ψ_k используются лишь операторы $C_2, \ldots, C_k$. Если для оператора Ψ_k справедлива оценка (24.40), то в силу (24.31) справедлива и оценка

$$\|x - Ax\| \geqslant a_k^* \|u\|^k \quad (x \in E, \ \|x\| \leqslant \rho_k^*). \tag{24.41}$$

Поэтому из теорем 24.2 и 19.2 вытекает

Теорема 24.4. *Пусть вполне непрерывный оператор A в окрестности нуля допускает представление*

$$Ax = Bx + C_2 x + \ldots + C_k x + \Omega_k x, \tag{24.42}$$

где $C_2, \ldots, C_k$ — формы соответствующих порядков, а $\Omega_k x = o(\|x\|^k)$. Пусть построенный по формам $C_2, \ldots, C_k$ оператор (24.39) (*при $i = k$*) *удовлетворяет условию* (24.40). *Тогда нуль является изолированной особой точкой поля $I - A$ и*

$$\operatorname{ind}(0, I - A; E) = (-1)^{\beta(B, D)} \operatorname{ind}(0, \Psi_k; E_0). \tag{24.43}$$

24.5. Одномерное вырождение. Пусть оператор A допускает представление (24.19). Рассмотрим в этом пункте случай, когда подпространство E_0 одномерно, т. е. E_0 состоит из элементов $u = \xi e_0 (-\infty < \xi < \infty)$, где e_0 — собственный вектор оператора B. Поле (24.29) имеет в этом случае вид

$$\Psi(\xi e_0) = \psi(\xi) e_0. \tag{24.44}$$

Так как индекс особой точки одномерного поля (24.44), если она изолирована, может быть равен одному из трех чисел -1, 0, 1, то в силу теоремы 24.2 индекс нулевой особой точки поля $I - A$ также может быть равен лишь одному из чисел -1, 0, 1.

Если оператор A аналитический, то функцию $\psi(\xi)$ можно в окрестности нуля разложить в ряд

$$\psi(\xi) = \gamma_2 \xi^2 + \gamma_3 \xi^3 + \ldots \tag{24.45}$$

Для изолированности нулевой особой точки поля Ψ необходимо и достаточно, чтобы функция (24.45) была ненулевая, т. е. чтобы среди коэффициентов ряда (24.45) были ненулевые. Из теорем 24.2 и 24.3 вытекает

Теорема 24.5. *Пусть нуль является особой точкой вполне непрерывного векторного поля $I - A$ с аналитическим оператором A. Пусть подпространство E_0 одномерно.*

Тогда нуль является изолированной особой точкой поля $I - A$ в том и только том случае, когда хотя бы один из коэффициентов γ_i ряда (24.45) *отличен от нуля. Если γ_k — первый отличный от нуля коэффициент, то*

$$\operatorname{ind}(0, I - A) = \frac{1 - (-1)^k}{2} \operatorname{sign} \gamma_k (-1)^{\beta(B, D)}. \tag{24.46}$$

Применение теоремы 24.5 требует последовательного отыскания коэффициентов γ_i до первого отличного от нуля. Явный вид коэффициентов γ_i легко получить из формул (24.38).

При одномерном вырождении особо проста в приложениях теорема 24.1 — условие (24.9) равносильно тому, что поле (24.14) имеет вид $\Psi(\xi e)=\gamma_k\xi^k$, где $\gamma_k\neq 0$, и поэтому индекс $\operatorname{ind}(0,\ I-A)$ может быть вычислен по формуле (24.46).

24.6. Многомерные вырождения. Теоремы 24.1 — 24.4 сохраняют полную эффективность и в том случае, когда подпространство E_0 двумерно. В этом случае для анализа нулевой особой точки соответствующего поля в E можно применить методы, изложенные в § 15.

Ситуация усложняется, если $\dim E_0\geqslant 3$. Однако и здесь в наиболее часто встречающихся случаях анализ особой точки можно довести до конца.

Рассмотрим поле $\Psi=G_k$, где G_k — однородный (порядка $k>1$) оператор. Пусть $G_ku\neq 0$ при $u\neq 0$; тогда (см. § 8) $\operatorname{ind}(0,\Psi)$ нечетен при нечетном k и четен при четном k (если k четно и пространство E_0 нечетномерно, то $\operatorname{ind}(0,\Psi)=0$).

Пусть u_0 — собственный вектор оператора G_k, отвечающий собственному значению λ_0, т. е. $G_ku_0=\lambda_0u_0$. Тогда весь луч $\{\alpha u_0\}$ $(\alpha>0)$ состоит из собственных векторов: $G_k(\alpha u_0)=\alpha^k\lambda_0G_ku_0$. Поэтому естественно весь луч назвать *собственным*. Собственный луч $\{\alpha u_0\}$ назовем *изолированным*, если в некоторой окрестности точки u_0 нет собственных векторов оператора G_k, не лежащих на луче. О собственном луче $\{\alpha u_0\}$ будем говорить, что он *отвечает положительным собственным значениям*, если $\lambda_0>0$, и *отрицательным*, если $\lambda_0<0$. На каждом собственном луче $\{\alpha u_0\}$, отвечающем положительным собственным значениям, есть единственная неподвижная точка $\lambda_0^{-\frac{1}{k-1}}u_0$ оператора G_k; если собственный луч изолирован, то неподвижная точка $\lambda_0^{-\frac{1}{k-1}}u_0$ также изолирована — ее индекс $\operatorname{ind}\left(\lambda_0^{-\frac{1}{k-1}}u_0,\ G_k-I\right)$ совпадает, очевидно, с $\operatorname{ind}(u_0,\ G_k-\lambda_0I)$.

Теорема 24.6. *Пусть оператор G_k невырожден ($G_ku\neq 0$ при $u\neq 0$) и пусть он имеет конечное число нормированных собственных векторов $u_1,\ \ldots,\ u_s$, которым отвечают положительные собственные значения $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_s$. Тогда*

$$\operatorname{ind}(0,\ G_k)=(-1)^n+\operatorname{ind}(u_1,\ G_k-\lambda_1I)+\ \ldots\\ \ldots+\operatorname{ind}(u_s,\ G_k-\lambda_sI),\qquad(24.47)$$

где $n=\dim E_0$.

Доказательство. Из невырожденности поля G_k вытекает оценка $\|G_ku\|\geqslant a\|u\|^k$, где $a>0$. Поэтому найдется такое $\rho>0$, что $\|G_ku\|>\|u\|$ при $\|u\|\geqslant\rho$. Рассмотрим на сфере $S=\{u\colon \|u\|=\rho\}$ вспомогательное поле G_k-I. Оно гомотопно на S полю G_k и поэтому $\operatorname{ind}(0,\ G_k)=\gamma(G_k,\ S)=\gamma(G_k-I,\ S)$. Далее, в силу теоремы об алгебраическом числе особых точек,

$$\gamma(G_k-I,\ S)=\operatorname{ind}(0,\ G_k-I)+\\+\operatorname{ind}\left(\lambda_1^{-\frac{1}{k-1}}u_1,\ G_k-I\right)+\ \ldots\ +\operatorname{ind}\left(\lambda_s^{-\frac{1}{k-1}}u_s,\ G_k-I\right).$$

Остается заметить, что в силу теоремы 6.3 $\operatorname{ind}(0,G_k-I)=(-1)^n$. ∎

Для вычисления $\operatorname{ind}(u_i,G_k-\lambda_iI)$ можно воспользоваться теоремой 6.3, а если ее условия невыполнены — теоремами 24.1—24.4.

Собственный вектор u_i оператора G_k назовем *простым*, если матрица $G_k'(u_i)-\lambda_iI$ невырождена. Из теоремы 6.3 вытекает равенство

$$\operatorname{ind}(0,\ G_k)=(-1)^n+\operatorname{sign}\det\left[G_k'(u_1)-\lambda_1I\right]+\ \ldots\\ \ldots+\operatorname{sign}\det\left[G_k'(u_s)-\lambda_sI\right],\qquad(24.48)$$

если в условиях теоремы 24.6 все собственные векторы $u_1,\ \ldots,\ u_s$ простые.

24.7. Метод последовательных замен. Вернемся к исследованию особой точки поля $I-A$, где A допускает представление (24.19). Как было показано в п. 24.3, к уравнению (24.23) при малых u применим принцип сжатых отображений. Это значит, что в некоторой окрестности нуля (легко оценить радиус этой окрестности) оператор (24.25) является равномерным пределом рекуррентно определяемой последовательности операторов

$$R_0 = 0, \quad R_n u = \Gamma\Omega(u + R_{n-1}u) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{24.49}$$

Поэтому последовательность векторных полей

$$\Psi_n u = -DQ_0\Omega(u + R_n u) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{24.50}$$

рассматриваемых на E_0, равномерно в некоторой окрестности нуля сходится к полю (24.29). Естественно ожидать, что исследование нулевой особой точки поля (24.29) в широких предположениях эквивалентно исследованию нулевой особой точки поля Ψ_n (при достаточно большом n). Если этот факт действительно имеет место, то задача исследования нулевой особой точки поля $I - A$ несколько упрощена, так как поля (24.48) заданы явными формулами.

Теорема 24.7. *Пусть оператор Ω удовлетворяет условиям*

$$\|Q_0\Omega x - Q_0\Omega y\| \leqslant c\rho^{k-1}\|x - y\|,$$
$$\|Q^0\Omega x - Q^0\Omega y\| \leqslant c\rho^{l-1}\|x - y\|$$
$$(\|x\|, \|y\| \leqslant \rho),$$
$$\|Q^0\Omega P_0 x\| \leqslant c\|P_0 x\|^s \quad (\|x\| \leqslant \rho),$$

где $1 < l \leqslant s$, $k > 1$. Пусть нуль — изолированная особая точка поля Ψ_n, причем порядок r ее невырожденности удовлетворяет неравенству

$$r < s + k - 1 + n(l - 1). \tag{24.51}$$

Тогда нулевая особая точка поля $I - A$ также невырождена, ее порядок невырожденности равен r и

$$\operatorname{ind}(0, I - A) = (-1)^{\beta(B, D)}\operatorname{ind}(0, \Psi_n). \tag{24.52}$$

Доказательство не требует никаких специальных построений и мы предоставляем его читателю. ∎

Утверждение теоремы сохраняет силу, если поля Ψ_n заменить полями $\tilde{\Psi}_n u = -DQ\Omega(u + \tilde{R}_n u)$, где $\tilde{R}_n$ ($\tilde{R}_0 = 0$) — операторы, для которых справедливы оценки

$$\|\tilde{R}_n u - \Gamma\Omega(u + \tilde{R}_{n-1}u)\| \leqslant c_n\|u\|^{s+(n-1)(l-1)}. \tag{24.53}$$

Построение операторов $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \ldots, \tilde{R}_n, \ldots$ проще построения операторов $R_1, R_2, \ldots$ — равенства (24.53) означают, что при вычислении оператора $\tilde{R}_n$ по оператору $\tilde{R}_{n-1}$ можно пренебрегать членами, порядок малости которых равен или больше $s + (n-1)(l-1)$.

24.8. Второй принцип сведения. Изложенный в предыдущих пунктах метод сведения анализа нулевой особой точки поля $I - A$ в пространстве E к анализу нулевой особой точки некоторого поля Ψ в конечномерном пространстве E_0 тесно связан по идеям с методом построения уравнений разветвления А. М. Ляпунова в теории малых решений нелинейных операторных уравнений. В теории малых решений можно пользоваться уравнениями разветвления, отличными от ляпуновских. Каждому такому методу (см. [26]) можно сопоставить свой способ построения конечномерного поля Ψ.

Если отправляться, например, от уравнений разветвления Э. Шмидта, то мы получим следующий принцип сведения. Пусть оператор A допускает представление (24.19). Тогда при малых $h \in L_0$ уравнение $x - Bx + D^{-1}P_0 x = \Omega x + h$ имеет единственное малое решение $x = Wh$ (в силу принципа сжатых отображений). Если определить на L_0 поле $X = I - D^{-1}P_0 W$, то нуль будет его особой точкой. Между полем X и полем (24.29) легко установить связи, аналогичные известным [26] зависимостям между уравнениями разветвления Ляпунова и Шмидта. Аналогично теоремам 24.2 и 24.3 доказывается, что *нулевая особая точка поля $I - A$ изолирована в том только случае, когда изолирована нулевая особая точка поля X; если нулевая особая точка изолирована, то*

$$\operatorname{ind}(0, I - A) = (-1)^{\beta(B, D)}\operatorname{ind}(0, X; L_0). \tag{24.54}$$

Это утверждение можно получить и как следствие теорем 24.2 и 24.3; его можно развивать так же, как теоремы 24.2 и 24.3 развивались в пп. 24.4—24.7.

Глава 3

ПРИНЦИПЫ РОДСТВЕННОСТИ

Многие задачи могут быть сведены к отысканию особых точек различных векторных полей в одном и том же или разных пространствах. Примером могут служить уравнения $x = B\mathfrak{f}x$ и $y = \mathfrak{f}By$. Между решениями x^* и y^* этих уравнений равенства $x^* = By^*$ и $y^* = \mathfrak{f}x^*$ устанавливают взаимно однозначное соответствие. Поэтому задача отыскания решений может быть сведена к отысканию особых точек как векторного поля $\Phi x = x - B\mathfrak{f}x$ в каком-либо пространстве, так и векторного поля $\Psi y = y - \mathfrak{f}By$ в том же или в другом пространстве.

В качестве второго примера рассмотрим задачу об ω-периодических решениях систем $\dot{x} = f(t, x)$ с ω-периодической по t правой частью. С одной стороны, для отыскания ω-периодических решений можно построить в фазовом пространстве R^n оператор $U(\omega, 0)$ сдвига за период по траекториям системы; особые точки непрерывного векторного поля $\Phi x = x - U(\omega, 0)x$ в фазовом пространстве R^n будут начальными значениями ω-периодических решений. С другой стороны, ω-периодические решения — это особые точки вполне непрерывного векторного поля

$$\Psi y = y(t) - y(\omega) - \int_0^t f[s, y(s)]\, ds$$

в пространстве C непрерывных на $[0, \omega]$ вектор-функций со значениями в R^n.

Ниже будут рассмотрены и другие примеры разных векторных полей, порожденных одной и той же задачей. Такие поля мы называем *родственными*; родственными мы называем и те уравнения, по которым определяются родственные векторные поля.

«Родство» родственных полей не ограничивается взаимно однозначным соответствием между особыми точками. Как оказывается, вращения родственных полей на границах соответствующих областей связаны простыми соотношениями. Такие соотношения мы назовем *принципами родственности*.

В этой главе будут установлены принципы родственности и близкие к ним теоремы как для абстрактных операторных уравнений, так и для конкретных задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Заметим, что и некоторые утверждения предыдущих глав можно трактовать как теоремы о родственных полях.

Как уже говорилось, одно и то же уравнение $x = Ax$ часто можно изучать при помощи различных пространств. В главе устанавливаются *принципы инвариантности* — теоремы об условиях, при которых вращение поля $\Phi = I - A$ не меняется при переходе от гра-

ницы области в одном пространстве к границе соответствующей области в другом пространстве.

Принципы инвариантности и принципы родственности существенно упрощают вычисление вращения векторного поля. Они позволяют изучать новые типы задач и часто приводят к неожиданным результатам.

§ 25. Принципы инвариантности вращения

25.1. Области с одинаковой сердцевиной. Пусть банаховы пространства E_1 и E_2 являются подмножествами некоторой линейной системы элементов. Пусть Ω_1 и Ω_2 — ограниченные области соответственно в E_1 и E_2; $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$ — их границы; $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ — их замыкания.

Пусть на $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ определен оператор A, причем $A\bar{\Omega}_1 \subset E_1$ и $A\bar{\Omega}_2 \subset E_2$. Пусть A не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}_1 \cup \dot{\Omega}_2$ и, кроме того, множество неподвижных точек оператора A, лежащих в области Ω_1, совпадает с множеством неподвижных точек оператора A, лежащих в области Ω_2. Будем тогда говорить, что *области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A.*

Допустим, что A вполне непрерывен и как оператор, действующий в E_1 (определенный на $\bar{\Omega}_1$), и как оператор, действующий в E_2 (определенный на $\bar{\Omega}_2$). Пусть области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A. Нашей ближайшей целью является отыскание условий, при которых справедливо равенство

$$\gamma(I - A, \dot{\Omega}_1; E_1) = \gamma(I - A, \dot{\Omega}_2; E_2). \qquad (25.1)$$

25.2. Контрпример. Без дополнительных предположений равенство (25.1) может оказаться неверным. Тривиальным примером служит оператор $Az = z - z^n$, где z — число. Векторное поле $z - Az \equiv z^n$ можно рассматривать и в одномерном пространстве вещественных чисел и в комплексной плоскости E_2, которая является двумерным вещественным пространством. В обоих пространствах нуль — единственная неподвижная точка оператора A. Областями Ω_1 и Ω_2 с одинаковой сердцевиной будут, например, интервал $(-1, 1)$ в пространстве E_1 и круг $|z| < 1$ в пространстве E_2. Очевидно, вращение

$\gamma(I-A, \Omega_1)$ равно нулю, если n четно, и равно 1, если n нечетно. Вращение же $\gamma(I-A, \Omega_2)$ равно n.

25.3. Линейные поля. Пусть линейный оператор A вполне непрерывен и в E_1, и в E_2, причем при некотором n

$$A^n E_1 \subset E_2, \qquad A^n E_2 \subset E_1. \tag{25.2}$$

Тогда все собственные и присоединенные векторы оператора A, отвечающие ненулевым собственным значениям, лежат в $E_1 \cap E_2$. Поэтому кратность каждого ненулевого собственного значения оператора A не зависит от того, рассматривается этот оператор в E_1 или в E_2. Отсюда и из теоремы 21.1 вытекает равенство индексов $\operatorname{ind}(0, I-A; E_1)$ и $\operatorname{ind}(0, I-A; E_2)$ нулевой особой точки поля $I-A$ в пространствах E_1 и E_2 (если, конечно, 1 не является собственным значением оператора A). Из равенства индексов нулевой особой точки вытекает справедливость для линейных полей равенства (25.1).

Для векторных полей с нелинейными операторами равенство (25.1) удалось установить лишь при более жестких (чем (25.2)) или качественно других условиях.

25.4. Основные леммы. Обозначим через $E_1 \wedge E_2$ пополнение пространства $D = E_1 \cap E_2$ по норме

$$\|x\| = \|x\|_1 + \|x\|_2, \tag{25.3}$$

где $\|x\|_1$ — норма в E_1, $\|x\|_2$ — норма в E_2. Через Ω обозначим пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$, а через $\bar{\Omega}$ — замыкание множества Ω в пространстве $E_1 \wedge E_2$.

Каждая фундаментальная по норме (25.3) последовательность $x_n \in \Omega$ будет фундаментальна и в E_1, и в E_2. Так как A непрерывен и в E_1, и в E_2, то последовательность Ax_n фундаментальна также и в E_1, и в E_2, т. е. фундаментальна в $E_1 \wedge E_2$. Следовательно, оператор A можно продолжить на множество $\bar{\Omega}$ как оператор, непрерывный в $E_1 \wedge E_2$. Сохраним за продолженным оператором обозначение A.

Из полной непрерывности оператора A в E_1 и в E_2 вытекает, что множество $A\Omega$ компактно и в E_1, и в E_2. Значит, множество $A\Omega$, а вместе с ним и множество $A\bar{\Omega}$ компактно в $E_1 \wedge E_2$. Таким образом, оператор A не только непрерывен, но и вполне непрерывен на $\bar{\Omega}$.

Будем говорить, что оператор A допускает *правильное продолжение* на множество $\bar{\Omega}$, если множество неподвижных точек продолженного оператора совпадает с множеством F его неподвижных точек, лежащих в Ω. Можно привести различные условия, при которых A допускает правильное продолжение; достаточно, например, включения $A\bar{\Omega} \subset E_1 \cap E_2$.

Обозначим через F_δ открытую δ-окрестность в пространстве $E_1 \wedge E_2$ множества F. При достаточно малых $\delta > 0$ очевидны включения $(E_1 \cap F_\delta) \subset (E_1 \cap \bar{F}_\delta) \subset \Omega_1$, $(E_2 \cap F_\delta) \subset (E_2 \cap \bar{F}_\delta) \subset \Omega_2$. Если A допускает правильное продолжение, то на границах $\dot{F}_\delta$ (в пространстве $E_1 \wedge E_2$) окрестностей F_δ оператор A не имеет неподвижных точек. Поэтому при малых положительных δ определено вращение $\gamma(I-A, F_\delta)$; оно, конечно, не зависит от δ.

Для доказательства (25.1) достаточно установить два равенства:

$$\gamma(I-A,\ \Omega_1;\ E_1) = \gamma(I-A,\ F_\delta;\ E_1 \wedge E_2), \tag{25.4}$$

$$\gamma(I-A,\ \Omega_2;\ E_2) = \gamma(I-A,\ F_\delta;\ E_1 \wedge E_2). \tag{25.5}$$

Ограничения в соответствующих теоремах будут симметричны относительно пространств E_1 и E_2; поэтому достаточно найти условия, при которых верно равенство (25.4).

Введем одно новое важное понятие. Пусть оператор A действует в банаховом пространстве E и определен на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Выпуклое множество S называется *фундаментальным для оператора A относительно множества M*, если $A(S \cap M) \subset S$ и если из $x_0 \in \operatorname{co}(Ax_0, S)$ следует, что $x_0 \in S$. Здесь, как обычно, через $\operatorname{co} N$ обозначается выпуклая оболочка множества N. Каждое фундаментальное множество содержит все неподвижные точки оператора A. Выпуклая оболочка множества всех неподвижных точек может не быть фундаментальным множеством. Отметим, как очевидные факты, что из фундаментальности S относительно M вытекает фундаментальность множества

$\overline{\mathrm{co}}\,A(S\cap M)$ относительно M; если S замкнуто, то вместе с S фундаментально множество $\overline{\mathrm{co}}\,A(S\cap M)$; наконец, пересечение любого числа фундаментальных для A множеств снова является фундаментальным множеством.

Вернемся к исследованию оператора A, заданного на объединении $\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$ замыканий областей Ω_1 и Ω_2 с одинаковой сердцевиной.

Лемма 25.1. *Пусть существует выпуклое и компактное в E_1 множество $S_1\subset(E_1\cap E_2)$, фундаментальное для оператора A в пространстве E_1 относительно области $\bar\Omega_1$. Пусть $A\bar\Omega\subset E_1$ и*

$$\inf_{x\in(\bar\Omega_1\cap S_1)\setminus F_\delta}\|Ax-x\|_1=\beta>0. \tag{25.6}$$

Тогда верно равенство (25.4).

Доказательство. Выберем в S_1 конечную $\beta/2$-сеть (по метрике пространства E_1) и обозначим через M_1 ее выпуклую оболочку. В силу теоремы 18.1 можно на всем пространстве E_1 определить непрерывный проектор P_1 на M_1, для которого

$$\|P_1y-y\|_1<\beta\qquad(y\in S_1). \tag{25.7}$$

Оператор P_1 можно по непрерывности продолжить с пересечения $E_1\cap E_2$ на пространство $E_1\wedge E_2$ (если последовательность $x_n\in E_1$ фундаментальна в $E_1\wedge E_2$, то она фундаментальна и в E_1; поэтому последовательность P_1x_n фундаментальна в E_1; но последовательность P_1x_n лежит в фиксированном конечномерном пространстве, на котором все нормы эквивалентны, и поэтому последовательность P_1x_n фундаментальна и в пространстве $E_1\wedge E_2$). Сохраним за продолженным оператором обозначение P_1.

Из непрерывности P_1 вытекает, что оператор P_1A вполне непрерывен и в пространстве E_1 (на $\bar\Omega_1$), и в пространстве $E_1\wedge E_2$ (на $\bar\Omega$). Поэтому формула

$$\Phi(\lambda,x)=x-(1-\lambda)Ax-\lambda P_1Ax\qquad(0\leqslant\lambda\leqslant1) \tag{25.8}$$

определяет компактную деформацию поля $I-A$ в поле $I-P_1A$ в пространстве E_1 (на множестве $\bar\Omega_1$), и в пространстве $E_1\wedge E_2$ (на множестве $\bar\Omega$).

Покажем, что деформация (26.8) невырождена на $\bar\Omega_1\setminus F_\delta$ и на $\dot F_\delta$. В предположении противного, при некоторых $\lambda_0\in[0,1]$ и $x_0\in(\bar\Omega_1\setminus F_\delta)\cup\dot F_\delta$

$$x_0=(1-\lambda_0)Ax_0+\lambda_0P_1Ax_0. \tag{25.9}$$

Поэтому $x_0\in\bar\Omega_1\setminus F_\delta$. Из (25.9) вытекает, далее, что $x_0\in S_1$ и, в силу (25.7), $\|P_1Ax_0-Ax_0\|_1<\beta$. Но тогда, в силу (25.6), $\|x_0-(1-\lambda_0)Ax_0-\lambda_0P_1Ax_0\|_1\geqslant\beta-\lambda_0\|Ax_0-P_1Ax_0\|_1>0$, и мы пришли к противоречию.

Из невырожденности деформации (25.8) вытекает гомотопность полей $I-A$ и $I-P_1A$ и на $\dot\Omega_1$ (как полей в E_1), и на $\dot F_\delta$ (как полей в $E_1\wedge E_2$). Поэтому $\gamma(I-A,\Omega;E_1)=\gamma(I-P_1A,\Omega_1;E_1)$ и $\gamma(I-A,F_\delta;E_1\wedge E_2)=\gamma(I-P_1A,F_\delta;E_1\wedge E_2)$. Следовательно, вместо (25.4) достаточно доказать равенство

$$\gamma(I-P_1A,\ \Omega_1;\ E_1)=\gamma(I-P_1A,\ F_\delta;\ E_1\wedge E_2). \tag{25.10}$$

Обозначим через Π конечномерное подпространство пространства E_1, в котором лежит множество M_1. Пусть $\Omega_1^0=\Omega_1\cap\Pi$, $F_\delta^0=F_\delta\cap\Pi$. Из определения вращения вытекают равенства $\gamma(I-P_1A,\ \Omega_1;\ E_1)=\gamma\big(I-P_1A,\ \Omega_1^0;\ \Pi\big)$ и $\gamma(I-P_1A,\ F_\delta;\ E_1\wedge E_2)=\gamma\big(I-P_1A,\ F_\delta^0;\ \Pi\big)$. Таким образом, вместо (25.10) достаточно установить равенство

$$\gamma\big(I-P_1A,\ \Omega_1^0;\ \Pi\big)=\gamma\big(I-P_1A,\ F_\delta^0;\ \Pi\big). \tag{25.11}$$

Из невырожденности деформации (25.8) на $\bar\Omega_1\setminus F_\delta$ вытекает, что у поля $I-P_1A$ нет особых точек на $\bar\Omega_1^0\setminus F_\delta^0$. Поэтому (25.11) вытекает из теоремы 20.2. ∎

Лемма 25.2. *Пусть существует выпуклое и компактное в $E_1\wedge E_2$ множество $S_1\subset E_1\cap E_2$, фундаментальное для оператора A в пространстве E_1 относительно области $\bar\Omega_1$. Пусть A непрерывен на $\bar\Omega_1$ как оператор из E_1 в $E_1\wedge E_2$. Тогда верно равенство* (25.4).

Доказательство. Из второго условия леммы вытекает, что $A\bar\Omega\subset E_1$. Действительно, если последовательность $x_n\in\Omega$ фундаментальна в $E_1\wedge E_2$, то она сходится в E_1 к некоторому элементу $z\in\bar\Omega_1$. Поэтому последовательность Ax_n сходится и в E_1, и в E_2 к элементу Az, т. е. Ax_n сходится к Az в $E_1\wedge E_2$. Поэтому Az

будет значением продолженного оператора в предельной (в $E_1 \wedge E_2$) точке последовательности x_n.

Обозначим через N замыкание в $E_1 \wedge E_2$ множества $(\overline{\Omega}_1 \cap S_1) \setminus F_\delta$. Оператор A не имеет на множестве N неподвижных точек. Поэтому из компактности N вытекает, что

$$\inf_{x \in (\overline{\Omega}_1 \cap S_1) \setminus F_\delta} \| x - Ax \| \geqslant \inf_{x \in N} \| x - Ax \| = \beta > 0. \quad (25.12)$$

Выберем в S_1 конечную $\frac{\beta}{2}$-сеть по метрике пространства $E_1 \wedge E_2$ и обозначим через M_1 ее выпуклую оболочку. В силу теоремы 18.1 можно построить на $E_1 \wedge E$ непрерывный в $E_1 \wedge E_2$ проектор P_1, который удовлетворяет (ср. (25.7)) условию

$$\| P_1 y - y \| < \beta \quad (y \in S_1). \quad (25.13)$$

Оператор $P_1 A$ вполне непрерывен и в пространстве E_1 (на $\overline{\Omega}_1$) и в пространстве $E_1 \wedge E_2$ (на $\overline{\Omega}$).

Рассмотрим снова деформацию (25.8). Она невырождена и на $\overline{\Omega}_1 \setminus F_\delta$, и на $\dot{F}_\delta$. В предположении противного, как и при доказательстве леммы 25.1, найдутся удовлетворяющие равенству (25.9) число $\lambda_0 \in [0, 1]$ и элемент $x_0 \in \overline{\Omega}_1 \setminus F_\delta$. Из (25.9) вытекает, что $x_0 \in S_1$; поэтому $Ax_0 \in S_1$ и из (25.13) вытекает оценка $\| P_1 A x_0 - - A x_0 \| < \beta$. Но тогда из (25.12) следуют неравенства

$$\| x_0 - (1 - \lambda_0) A x_0 - \lambda_0 P_1 A x_0 \| \geqslant \beta - \lambda_0 \| P_1 A x_0 - A x_0 \| > 0,$$

которые противоречат (25.9).

Заключительную часть рассуждений можно провести так же, как при доказательстве леммы 25.1. ∎

25.5. Принципы инвариантности.

Теорема 25.1. *Пусть ограниченные в банаховых пространствах E_1 и E_2 области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A. Пусть A на $\overline{\Omega}_1$ вполне непрерывен как оператор в E_1 и непрерывен как оператор из E_1 в E_2. Пусть A на $\overline{\Omega}_2$ вполне непрерывен как оператор в E_2 и непрерывен как оператор из E_2 в E_1.*

Тогда справедливо равенство (25.1).

Доказательство. Отметим вначале, что в условиях теоремы A непрерывен на $\overline{\Omega}_1$ как оператор из E_1 в $E_1 \wedge E_2$ и непрерывен на $\overline{\Omega}_2$ как оператор из E_2 в $E_1 \wedge E_2$.

Множества $\mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_1$ и $\mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_2$ компактны соответственно в E_1 и в E_2. Поэтому множества $A(\overline{\Omega}_1 \cap \mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_1)$ и $A(\overline{\Omega}_2 \cap \mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_2)$, а вместе с ними множества

$$S_1 = \mathrm{co}\, A(\overline{\Omega}_1 \cap \mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_1), \qquad S_2 = \mathrm{co}\, A(\overline{\Omega}_2 \cap \mathrm{co}\, A\overline{\Omega}_2)$$

компактны в $E_1 \wedge E_2$. Множества S_1 и S_2 фундаментальны для оператора A соответственно относительно областей $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$.

Из леммы 25.2 вытекает справедливость равенств (25.4) и (25.5). ∎

Говорят, что нормы в пространствах E_1 и E_2 *согласованы*, если пространство $D = E_1 \cap E_2$ полно по норме (25.3). Иначе говоря, нормы в пространствах E_1 и E_2 согласованы, если для каждой последовательности $x_n \in D$, сходящейся в E_1 к некоторому элементу $z_1 \in E_1$ и сходящейся в E_2 к некоторому элементу $z_2 \in E_2$, предельные элементы одинаковы: $z_1 = z_2$. Очевидно, нормы в пространствах E_1 и E_2 согласованы, если одно из них непрерывно вложено в другое (пространство E_1 непрерывно вложено в E_2, если $E_1 \subset E_2$ и $\| x \|_2 \leqslant a \| x \|_1$ при $x \in E_1$).

Действующий из одного банахова пространства в другое оператор называется *локально ограниченным*, если для каждой точки его области определения можно указать окрестность, которая преобразуется в ограниченное множество.

Теорема 25.2. *Пусть нормы в пространствах E_1 и E_2 согласованы. Пусть ограниченные области $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A. Пусть A на $\overline{\Omega}_1$ вполне непрерывен как оператор из E_1 в E_1, локально ограничен как оператор из E_1 в E_2 и компактен на $\overline{\Omega}_1 \cap E_2$ как оператор из E_2 в E_2. Аналогично, пусть A на $\overline{\Omega}_2$ вполне непрерывен как оператор из E_2 в E_2, локально ограничен как оператор из E_2 в E_1 и компактен на $\overline{\Omega}_2 \cap E_1$ как оператор из E_1 в E_1.*

Тогда справедливо равенство (25.1).

Доказательство. Множество $\operatorname{co} A\overline{\Omega}_1$ компактно в E_1. Поэтому множество $\operatorname{co} A(\overline{\Omega}_1 \cap \operatorname{co} A\overline{\Omega}_1)$ ограничено и в E_1, и в E_2. Следовательно, множество $S_1 = \operatorname{co} A[\overline{\Omega}_1 \cap \operatorname{co} A(\overline{\Omega}_1 \cap \operatorname{co} A\overline{\Omega}_1)]$ компактно в $E_1 \wedge E_2$. Множество S_1 фундаментально для A относительно области $\overline{\Omega}_1$.

Из согласованности норм в E_1 и E_2 вытекает включение $A\overline{\Omega} \subset E_1$ (так как $E_1 \cap E_2$ полно по норме (25.3)).

Покажем, что выполнено условие (25.6). В предположении противного, для некоторой последовательности $x_n \in (\overline{\Omega}_1 \cap S_1) \setminus F_\delta$

$$\lim_{n\to\infty} \| Ax_n - x_n \|_1 = 0. \tag{25.14}$$

Так как S_1 компактно в $E_1 \wedge E_2$, то последовательность x_n можно считать сходящейся в $E_1 \wedge E_2$ к некоторому элементу z. Из равенства (25.14) вытекает оценка

$$\| Az - z \|_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \| Az - Ax_n \|_1 + \lim_{n\to\infty} \| Ax_n - x_n \|_1 + \lim_{n\to\infty} \| x_n - z \|_1 = 0.$$

Поэтому $Az = z$, $z \in F$. С другой стороны, элементы последовательности x_n не принадлежат открытому в $E_1 \wedge E_2$ множеству F_δ и, следовательно, $z \,\overline{\in}\, F_\delta$. Мы пришли к противоречию.

Таким образом, выполнены все условия леммы 25.1. Равенство (25.4) доказано. Аналогично доказывается (25.5). ∎

Теорема 25.2 содержится в следующем таким же образом доказываемом утверждении.

Теорема 25.3. *Пусть нормы в пространствах E_1 и E_2 согласованы. Пусть ограниченные области $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A. Пусть A вполне непрерывен на $\overline{\Omega}_1$ как оператор в E_1 и на $\overline{\Omega}_2$ как оператор в E_2. Пусть, далее, существуют выпуклые и компактные в $E_1 \wedge E_2$ множества S_1 и S_2, которые фундаментальны для оператора A относительно областей Ω_1 и Ω_2.*

Тогда справедливо равенство (25.1).

Теорема 25.1 была вначале доказана М. А. Красносельским и В. В. Стрыгиным (Функц. анализ и его прилож. **1**, № 3 (1967), 33—39) при дополнительных условиях (либо предполагалось, что пространства E_1 и E_2 образуют в некотором специальном смысле «правильную пару», либо предполагалось, что A вполне непрерывен как оператор из E_1 в E_1, из E_1 в E_2, из E_2 в E_1 и из E_2 в E_2), которые были сняты Ю. И. Сапроновым (УМН **25**, № 5 (1970)). Изложенные в этом параграфе построения предложены П. П. Забрейко, М. А. Красносельским и В. В. Стрыгиным (Изв. вузов, Математика 5 (1972)); эти построения основаны на развитии и упрощении конструкций работы М. А. Красносельского — В. В. Стрыгина и на использовании важной идеи Ю. И. Сапронова о сужении векторного поля.

§ 26. Поля с суперпозициями операторов

26.1. Постановка задачи. Пусть Ω_1 и Ω_2 — ограниченные области соответственно в банаховых пространствах E_1 и E_2. Рассмотрим два оператора A и B, первый из которых действует из E_1 в E_2, а второй — из E_2 в E_1. Области определения операторов A и B будем считать настолько широкими, что суперпозиции BA и AB определены соответственно на $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$.

Уравнения

$$x = BAx, \tag{26.1}$$

$$y = ABy \tag{26.2}$$

эквивалентны — каждое решение $x^* \in E_1$ первого из них определяет решение $y^* = Ax^* \in E_2$ второго уравнения, а каждое решение $y^* \in E_2$ второго определяет решение $x^* = By^* \in E_1$ первого (иначе говоря, каждый из операторов A и B определяет взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (26.1) и (26.2)).

Обозначим через F_1 и F_2 множества лежащих соответственно в $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ решений уравнений (26.1) и (26.2). Будем говорить, что области Ω_1 и Ω_2 имеют *одинаковую сердцевину относительно пары полей* $I - BA$ *и* $I - AB$, если

$$AF_1 \subset \Omega_2, \qquad BF_2 \subset \Omega_1. \tag{26.3}$$

Из (26.3) следуют равенства $AF_1 = F_2$ и $BF_2 = F_1$, из (26.3) следует также невырожденность векторных полей $I—BA$ и $I—AB$ соответственно на $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$. В следующих двух пунктах описываются условия, при которых

$$\gamma(I - BA, \Omega_1; E_1) = \gamma(I - AB, \Omega_2; E_2). \qquad (26.4)$$

26.2. Основная теорема.

Теорема 26.1. *Пусть ограниченные области $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ имеют одинаковую сердцевину относительно пары полей $I - BA$ и $I - AB$. Пусть операторы A и B вполне непрерывны. Тогда справедливо равенство* (26.4).

Доказательство. Рассмотрим прямую сумму $E = E_1 \dotplus E_2$ пространств E_1 и E_2; элементы прямой суммы будем записывать в виде пары $\{x, y\}$, где $x \in E_1$, $y \in E_2$. Прямое произведение $\Omega \subset E$ областей $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ является ограниченной областью в пространстве E. Напомним, что граница $\dot\Omega$ области Ω состоит из пар $\{x, y\}$, где либо $x \in \overline{\Omega}_1$ и $y \in \dot\Omega_2$, либо $x \in \dot\Omega_1$ и $y \in \overline{\Omega}_2$.

Рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi_1\{x, y\} = \{x - By, y - Ax\}. \qquad (26.5)$$

Оно невырождено на $\dot\Omega$, так как из $\Phi_1\{x_0, y_0\} = 0$ вытекает, что $x_0 = By_0$ и $y_0 = Ax_0$, т. е. x_0 — решение уравнения (26.1), y_0 — решение уравнения (26.2), и поэтому $\{x_0, y_0\} \overline{\in} \dot\Omega$. Вращение на $\dot\Omega$ поля (26.5) обозначим через γ_0.

Сравним поле (26.5) с вполне непрерывным полем

$$\Phi_2\{x, y\} = \{x - BAx, y - Ax\}, \qquad (26.6)$$

которое также невырождено на $\dot\Omega$, так как из $\Phi_2\{x, y\} = 0$ следует $y = Ax$ и, далее, $\Phi_2\{x, y\} = \Phi_1\{x, y\}$. В каждой точке $\{x, y\} \in \dot\Omega$ векторы $\Phi_1\{x, y\}$ и $\Phi_2\{x, y\}$ не направлены противоположно (они могут быть направлены противоположно лишь при $y = Ax$, но в таких точках векторы полей Φ_1 и Φ_2 одинаковы). Поэтому поля Φ_1 и Φ_2 гомотопны на $\dot\Omega$ и, следовательно, $\gamma(\Phi_2, \Omega) = \gamma(\Phi_1, \Omega) = \gamma_0$.

Пусть множество $A\overline{\Omega}_1$ лежит в шаре $U_2 = \{y: y \in E_2, \|y\| < r\}$. Через U обозначим прямое произведение области Ω_1 и шара U_2. Так как поле (26.6) определено на $\overline{U}$ и не имеет особых точек на множестве $\overline{U} \setminus \Omega$, то из теоремы 20.2 вытекает равенство $\gamma(\Phi_2, U) = \gamma(\Phi_2, \Omega) = \gamma_0$.

Векторы поля Φ_2 во всех точках границы $\dot U$ области U направлены не противоположно векторам поля $\Phi_3\{x, y\} = \{x - BAx, y\}$. Следовательно, поля Φ_2 и Φ_3 гомотопны на $\dot U$ и $\gamma(\Phi_3, U) = \gamma(\Phi_2, U) = \gamma_0$. Но из определения вращения вполне непрерывного поля вытекает равенство $\gamma(\Phi_3, U) = \gamma(I - BA, \Omega_1)$. Поэтому справедливо равенство $\gamma(I - BA, \Omega_1) = \gamma_0$.

Равенство $\gamma(I - AB, \Omega_2) = \gamma_0$ доказывается так же. ∎

26.3. Обобщения. Откажемся от предположения о полной непрерывности каждого из операторов A и B.

Теорема 26.2. *Пусть операторы A и B непрерывны, а операторы BA и AB вполне непрерывны соответственно на $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$. Пусть существуют выпуклые компактные замкнутые множества $S_1 \subset E_1$ и $S_2 \subset E_2$, для которых*

$$BA\overline{\Omega}_1 \subset S_1, \quad B(\overline{\Omega}_2 \cap S_2) \subset S_1, \qquad (26.7)$$

$$AB\overline{\Omega}_2 \subset S_2, \quad A(\overline{\Omega}_1 \cap S_1) \subset S_2. \qquad (26.8)$$

Пусть, наконец, области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину относительно пары полей $I - BA$ и $I - AB$. Тогда справедливо равенство (26.4).

Доказательство. Теорема Дугунджи (Dugundji J., Pac. J. Math. **1**, № 3 (1951)) о продолжении непрерывных операторов позволяет считать, что оператор A определен и непрерывен на всем пространстве E_1, а оператор B — на всем пространстве E_2. В силу теоремы 18.1 на всем E_1 определен некоторый непрерывный проектор P_1 на S_1, а на всем E_2 — непрерывный проектор P_2 на S_2.

Рассмотрим на $\overline{\Omega}_1$ компактную деформацию

$$\Phi(\lambda, x) = x - P_1B[(1 - \lambda)Ax + \lambda P_2Ax] \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \qquad (26.9)$$

поля $\Phi(0, x) = x - P_1BAx = x - BAx$ в поле $\Phi(1, x) = x - P_1BP_2Ax$. Деформация (26.9) невырождена на $\dot\Omega_1$. Действительно, если

$$x_0 = P_1B[(1 - \lambda_0)Ax_0 + \lambda_0P_2Ax_0], \qquad (26.10)$$

то $x_0 \in S_1$ и, в силу второго включения (26.8), $Ax_0 \in S_2$; поэтому $P_2Ax_0 = Ax_0$ и $x_0 = P_1BAx_0$; отсюда, в силу первого включения (26.7), $BAx_0 \in S_1$ и поэтому $x_0 = BAx_0$ — значит, $x_0 \overline{\in} \dot\Omega_1$. Таким образом, поле $I - BA$

гомотопно на Ω_1 полю $I - P_1BP_2A$ и $\gamma(I - BA, \Omega_1) = \gamma(I - P_1BP_2A, \Omega_1)$.

Аналогично доказывается равенство $\gamma(I - AB, \Omega_2) = \gamma(I - P_2AP_1B, \Omega_2)$. Поэтому для доказательства (26.4) достаточно установить равенство

$$\gamma(I - P_1BP_2A, \Omega_1) = \gamma(I - P_2AP_1B, \Omega_2). \qquad (26.11)$$

Простая проверка показывает, что множество неподвижных точек оператора P_1BP_2A совпадает с множеством F_1 неподвижных точек оператора BA. Аналогично, множество неподвижных точек оператора P_2AP_1B совпадает с множеством F_2 неподвижных точек оператора AB. В силу (26.7) и (26.8) $P_2AF_1 = AF_1$ и $P_1BF_2 = BF_2$. Таким образом, области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину относительно пары полей $I - B_1A_1$ и $I - A_1B_1$, где $A_1 = P_2A$ и $B_1 = P_1B$. Операторы A_1 и B_1 вполне непрерывны и к построенным по этим операторам векторным полям можно применить теорему 26.1, а из этой теоремы вытекает равенство (26.11). ∎

Применения теоремы 26.2 требуют построения множеств S_1 и S_2, для которых справедливы соотношения (26.7) и (26.8). Их всегда можно построить, если одно из множеств

$$A[\bar\Omega_1 \cap \overline{\mathrm{co}}\, B(\bar\Omega_2 \cup A\bar\Omega_1)], \qquad B[\bar\Omega_2 \cap \overline{\mathrm{co}}\, A(\bar\Omega_1 \cup B\bar\Omega_2)] \quad (26.12)$$

компактно в соответствующем пространстве (первое — в E_2, второе — в E_1). Если, например, компактно первое из множеств (26.12), то достаточно положить

$$S_1 = \overline{\mathrm{co}}\,\{BA\bar\Omega_1, B(\bar\Omega_2 \cap S_2)\},$$

$$S_2 = \overline{\mathrm{co}}\,\{A[\bar\Omega_1 \cap \overline{\mathrm{co}}\, B(A\bar\Omega_1 \cup \bar\Omega_2)], AB\bar\Omega_2\}.$$

Теорема 26.3. *Пусть один из операторов A, B вполне непрерывен, второй непрерывен, а операторы BA и AB вполне непрерывны. Пусть области $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ имеют одинаковую сердцевину относительно пары полей $I - BA$ и $I - AB$. Тогда справедливо равенство* (26.4).

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях теоремы 26.3 одно из множеств (26.12) компактно. ∎

В связи с теоремой 26.3 отметим, что операторы BA и AB вполне непрерывны, если один из операторов A или B вполне непрерывен, а второй непрерывен и ограничен. Из полной непрерывности одного из операторов BA, AB в общем случае не вытекает полная непрерывность второго.

26.4. Эквивалентные уравнения. Рассмотрим уравнение

$$x = Dx \qquad (26.13)$$

с оператором D, действующим в пространстве E_1 и определенным на некоторой ограниченной области $G_1 \subset E_1$. При изучении уравнения (26.13) часто используются замены вида

$$x = Vy, \qquad (26.14)$$

где V — оператор, определенный на некотором множестве G_2 пространства E_2. Если D непрерывен (тем более, если он вполне непрерывен), то часто можно указать правильную часть G_1^0 области G_1, содержащую все решения уравнения (26.13). В качестве G_1^0 можно рассматривать, например, пересечение области G_1 либо с множеством значений оператора D, либо с множеством значений некоторой степени D^k оператора D. Поэтому при замене (26.14) мы не потеряем ни одного решения, если $G_1^0 \subset VG_2$ и если на множестве DG_1^0 определен обратный к V оператор V^{-1}. В этом случае y нужно определять из уравнения

$$y = V^{-1}DVy. \qquad (26.15)$$

Уравнения (26.13) и (26.15) эквивалентны в том смысле, что равенство (26.14) устанавливает взаимно однозначное соответствие между их решениями. Возникает естественный вопрос о зависимостях между вращениями векторных полей $x - Dx$ и $y - V^{-1}DVy$ на границах соответствующих областей в пространствах E_1 и E_2 (если, конечно, операторы D и $V^{-1}DV$ вполне непрерывны).

Рассмотрим вначале случай, когда оператор V гомеоморфно отображает область $G_2 \subset E_2$ на область $G_1 \subset E_1$. Пусть Ω_1 — такая ограниченная область в пространстве E_1, что $\bar\Omega_1 \subset G_1$ и $D\bar\Omega_1 \subset G_1$.

Теорема 26.4. *Пусть вполне непрерывный оператор D не имеет на границе $\dot{\Omega}_1$ области Ω_1 неподвижных точек. Тогда*

$$\gamma(I - D, \Omega_1) = \gamma(I - V^{-1}DV, V^{-1}\Omega_1). \tag{26.16}$$

Для доказательства достаточно положить $\Omega_2 = V^{-1}\Omega_1$, $A = V^{-1}D$, $B = V$ и сослаться на теорему 26.3. ∎

Пусть теперь V не является гомеоморфизмом. Пусть Ω_1 и Ω_2 — ограниченные области соответственно в E_1 и E_2. Пусть оператор D определен на $\overline{\Omega}_1$, а оператор $V^{-1}DV$ — на $\overline{\Omega}_2$. Множество неподвижных точек оператора D (лежащих в $\overline{\Omega}_1$) обозначим через F_1, а множество неподвижных точек оператора $V^{-1}DV$ (лежащих в $\overline{\Omega}_2$) — через F_2. Если $F_1 \subset \Omega_1$, $F_2 \subset \Omega_2$ и $F_1 = VF_2$, то будем говорить, что области Ω_1 и Ω_2 имеют *одинаковую сердцевину по отношению к оператору D и замене $x = Vy$.*

Теорема 26.5. *Пусть области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору D и замене $x = Vy$. Пусть оператор D вполне непрерывен (в пространстве E_1) и выполнено одно из условий:*

а) *Один из операторов V^{-1}, DV непрерывен, а второй вполне непрерывен.*

б) *Один из операторов V, $V^{-1}D$ непрерывен, а второй вполне непрерывен.*

Тогда справедливо равенство (26.16).

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 26.3. ∎

Теорема 26.5 содержит теорему 26.4 как частный случай.

26.5. Введение новой нормы. Отметим еще одну ситуацию, в которой важны утверждения типа теорем 26.4 и 26.5. При изучении уравнения (26.13) во многих случаях ясно, что решения имеют вид $x = Vy$, где V — линейный оператор, действующий в E_1 из некоторого банахова пространства E_2. Тогда уравнение (26.13) естественно изучать не на всем E_1, а лишь в линейном пространстве $F = VE_2 \subset E_1$. Пространство F обычно полное в норме $\|x\|_0 = \|V^{-1}x\|_2$, причем V устанавливает изометрическое соответствие между E_2 и F. При этом изометрическом соответствии изучение уравнения (26.13) в F полностью эквивалентно изучению в E_2 уравнения (26.15).

Таким образом, введение новой нормы равносильно замене (26.14).

26.6. Индексы особых точек итераций операторов. Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A имеет вид $A = B^p$, где p — некоторое натуральное число, а B — непрерывный оператор. Если A определен на некоторой области $\Omega \subset E$, то B предполагается определенным на такой области $\Omega_0 \subset E$, что $\Omega, B\Omega, \ldots, B^{p-1}\Omega \subset \Omega_0$.

Если x_0 — неподвижная точка оператора A, то все точки $Bx_0, B^2x_0, \ldots, B^{p-1}x_0$ также будут неподвижными точками оператора A. Это следует из цепочки равенств $A(B^jx_0) = B^{j+p}x_0 = B^jAx_0 = B^jx_0 \quad (j = 0, 1, \ldots, p-1)$. Если неподвижная точка x_0 оператора A изолирована, то изолирована и каждая неподвижная точка $Bx_0, \ldots, B^{p-1}x_0$.

Теорема 26.6. *Пусть x_0 — изолированная неподвижная точка вполне непрерывного оператора $A = B^p$. Тогда справедливо равенство*

$$\operatorname{ind}(Bx_0, I - A) = \operatorname{ind}(x_0, I - A). \tag{26.17}$$

Доказательство. Применим теорему 26.3. Выберем в качестве областей Ω_1 и Ω_2 настолько малые шаровые окрестности точек x_0 и Bx_0, чтобы в них не было отличных от x_0 и Bx_0 неподвижных точек оператора A. Области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину относительно пары полей $I - BA_1$ и $I - A_1B$, где $A_1 = B^{p-1}$. Из теоремы 26.3 вытекает равенство $\gamma(I - BA_1, \Omega_1) = \gamma(I - A_1B, \Omega_2)$, которое можно записать в виде

$$\gamma(I - A, \Omega_1) = \gamma(I - A, \Omega_2), \tag{26.18}$$

так как $BA_1 = A_1B = A$. Из (26.18) следует (26.17). ∎

Результаты этого параграфа принадлежат П. П. Забрейко и М. А. Красносельскому (ДАН СССР **196**, № 5 (1971)). При его написании существенно использованы замечания Э. М. Мухамадиева и Е. А. Лифшица. Теорема 26.4 для конечномерных векторных полей другим методом доказана в книге П. С. Александрова [1].

§ 27. Переход к уравнениям в подпространстве

27.1. Постановка задачи. Пусть пространство E является прямой суммой подпространств E_0, E^0. Представление $x = u + v$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$, определяет линейные операторы $P_0x = u$, $P^0x = v$ проектирования на E_0 и E^0.

Каждое уравнение

$$x = Ax \tag{27.1}$$

с действующим в E оператором A эквивалентно системе

$$u = P_0A(u+v), \qquad v = P^0A(u+v), \tag{27.2}$$

где $u \in E_0$, $v \in E^0$. Пусть второе из уравнений (27.2) при всех u из некоторого множества в E_0 (это множество будет описано ниже) имеет единственное решение

$$v = Ru, \tag{27.3}$$

где R действует из E_0 в E^0. Тогда (27.1) равносильно уравнению

$$u = P_0A(u + Ru) \tag{27.4}$$

в пространстве E_0 в том смысле, что равенства $u = P_0x$ и $x = u + Ru$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями x и u соответственно уравнений (27.1) и (27.4).

Целью параграфа является установление зависимости между вращениями на границах соответствующих областей в пространствах E и E_0 векторных полей $x - Ax$ и $u - P_0A(u + Ru)$, порожденных родственными уравнениями (27.1) и (27.4). Для случая, когда $Ru \equiv 0$, интересующая нас зависимость непосредственно вытекает из определения вращения.

Теорема 27.1. *Пусть Ω — ограниченная область в банаховом пространстве E. Пусть оператор A вполне непрерывен на $\dot\Omega$ и $A\dot\Omega \subset E_0$, где $E_0 \subset E$ — подпространство, содержащее внутренние точки области Ω. Пусть, наконец, A не имеет неподвижных точек на $\dot\Omega_0$, где $\dot\Omega_0$ — граница в E_0 области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. Тогда*

$$\gamma(I - A, \Omega; E) = \gamma(I - A, \Omega_0; E_0). \tag{27.5}$$

27.2. Лемма об индексе. Пусть x_0 — изолированная неподвижная точка оператора A и пусть A вполне непрерывен в некоторой окрестности этой точки. Тогда уравнение $v = P^0A(u_0 + v)$, где $u_0 = P_0x_0$, имеет решение $v_0 = P^0x_0$. Будем считать, что значения оператора R при близких к u_0 значениях u лежат в окрестности точки v_0. Из полной непрерывности оператора A вытекает тогда полная непрерывность оператора R в окрестности точки u_0. Поэтому вполне непрерывен в окрестности точки u_0 (в пространстве E_0) оператор $P_0A(u + Ru)$ и u_0 является его изолированной неподвижной точкой. Точка v_0 будет изолированной неподвижной точкой вполне непрерывного оператора $P^0A(u_0 + v)$ в пространстве E^0.

Лемма 27.1. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{ind}(x_0, x - Ax; E) = \\ = \operatorname{ind}(v_0, v - P^0A(u_0 + v); E^0)\operatorname{ind}(u_0, u - P_0A(u + Ru); E_0). \tag{27.6}$$

Доказательство. Рассмотрим в окрестности точки $x_0 \in E$ два векторных поля $\Phi_1x = x - Ax$ и $\Phi_2x = x - P_0A(P_0x + RP_0x) - P^0Ax$. Поле Φ_2 не имеет отличных от x_0 особых точек, причем в отличных от x_0 точках векторы Φ_1x и Φ_2x направлены непротивоположно. Чтобы в этом убедиться, вначале заметим, что компоненты $P^0\Phi_1x$ и $P^0\Phi_2x$ одинаковы; если эти компоненты в точке x равны нулю, то $P^0x = P^0Ax$, т. е. $P^0x = RP^0x$; но тогда $\Phi_1x = \Phi_2x$. Поэтому поля Φ_1 и Φ_2 гомотопны на сферах малых радиусов с центром x_0, а так как у гомотопных полей вращение одинаково, то

$$\operatorname{ind}(x_0, \Phi_1; E) = \operatorname{ind}(x_0, \Phi_2; E). \tag{27.7}$$

Рассмотрим теперь вполне непрерывное поле

$$\Phi_3x = x - P_0A(P_0x + RP_0x) - P^0A(u_0 + P^0x).$$

У этого поля x_0 также является изолированной особой точкой. В близких к x_0 точках x векторы Φ_2x и Φ_3x направлены не противоположно. Поэтому

$$\operatorname{ind}(x_0, \Phi_2; E) = \operatorname{ind}(x_0, \Phi_3; E). \tag{27.8}$$

Из (27.7) и (27.8) вытекает (27.6) в силу теоремы 22.1 о произведении индексов. ∎

27.3. Принцип родственности. Пусть G и G_0 — области в пространствах E и E_0. Пусть оператор A определен и вполне непрерывен на области G, а оператор R определен и ограничен на области G_0, причем $u+Ru \in G$ при $u \in G_0$. Из полной непрерывности оператора A вытекает полная непрерывность оператора R.

Рассмотрим такие ограниченные области $\Omega \subset E$ и $\Omega_0 \subset E_0$, что $\bar\Omega \subset G$ и $\bar\Omega_0 \subset G_0$. Пусть операторы Ax и $P_0A(u+Ru)$ не имеют неподвижных точек соответственно на $\dot\Omega$ и $\dot\Omega_0$; если при этом множество F_0 неподвижных точек оператора $P_0A(u+Ru)$, лежащих в Ω_0, совпадает с проекцией P_0F на E_0 множества F неподвижных точек оператора A, лежащих в Ω, то будем говорить, что области Ω и Ω_0 имеют *одинаковую сердцевину по отношению к оператору A и проектору P_0.*

Вполне непрерывное векторное поле $v - P^0A(u_0+v)$ (в пространстве E^0) при каждом фиксированном $u_0 \in G_0$ имеет единственную особую точку $v_0 = Ru_0$. Индекс $\varkappa(Ru_0)$ этой особой точки не меняется, когда u_0 пробегает связное множество $\mathfrak{N}$; общее значение индекса обозначим через $\varkappa(R\mathfrak{N})$.

Теорема 27.2. *Пусть ограниченные области Ω и Ω_0 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A и проектору P_0. Пусть область Ω_0 связна. Тогда*

$$\gamma(I-A, \Omega; E) = \varkappa(R\Omega_0)\cdot\gamma[u - P_0A(u+Ru), \Omega_0; E_0]. \quad (27.9)$$

Доказательство. Если A имеет в области Ω лишь конечное число неподвижных точек, то (27.9) вытекает из леммы 27.1 и теоремы 20.6 об алгебраическом числе особых точек. Перейдем к общему случаю.

По каждому $\varepsilon > 0$ можно построить такой определенный на всем E_0 вполне непрерывный оператор D со значениями в E_0, что $\|Du\| < \varepsilon$ $(u \in E_0)$ и у оператора $P_0A(u+Ru)+Du$ есть лишь конечное число неподвижных точек на Ω_0. Определим, далее, действующий в пространстве E вполне непрерывный оператор $A_1x = Ax + DP_0x$ $(x \in E)$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ векторные поля $x - A_1x$ и $u - P_0A_1(u+Ru)$ невырождены и гомотопны полям $x - Ax$ и $u - P_0A(u+Ru)$ соответственно на $\dot\Omega$ и $\dot\Omega_0$. Поэтому

$$\gamma(I-A, \Omega) = \gamma(I-A_1, \Omega), \quad (27.10)$$

$$\gamma[u - P_0A(u+Ru), \Omega_0] = \gamma[u - P_0A_1(u+Ru), \Omega_0]. \quad (27.11)$$

Через F_δ обозначим δ-окрестность в пространстве E множества F лежащих в Ω неподвижных точек оператора A. Выберем такое $\delta > 0$, что $F_\delta \subset \Omega$, $P_0F_\delta \subset \Omega_0$. После этого выберем настолько малое $\varepsilon > 0$, чтобы, с одной стороны, у оператора A_1 не было неподвижных точек на $\bar\Omega \setminus F_\delta$ и чтобы, с другой стороны, у оператора $P_0A_1(u+Ru)$ не было неподвижных точек на $\bar\Omega_0 \setminus P_0F_\delta$. Тогда области Ω и Ω_0 будут иметь одинаковую сердцевину по отношению к оператору A_1 и проектору P_0. По построению, оператор A_1 имеет в области Ω лишь конечное число неподвижных точек. По уже доказанному, $\gamma(I-A_1, \Omega; E) = \varkappa_1\cdot\gamma[u - P_0A_1(u+Ru), \Omega_0; E_0]$, где $\varkappa_1$ — общий индекс особых точек полей $v - P^0A_1(u_0+v)$ $(u_0 \in \Omega_0)$, рассматриваемых в E^0.

Для завершения доказательства нужно, во-первых, использовать равенства (27.10), (27.11) и, во-вторых, заметить, что $\varkappa_1 = \varkappa(RG_0)$, так как векторные поля $v - P^0A_1(u_0+v)$ и $v - P^0A(u_0+v)$ совпадают. ∎

Теорема 27.2 доказана Е. А. Лифшицем [37]. Здесь дано новое доказательство.

Так же, как теорема 27.2, доказывается

Теорема 27.3. *Пусть ограниченные области Ω и Ω_0 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A и проектору P_0. Пусть индекс $\varkappa(Ru_0)$ при всех $u_0 \in \Omega_0$ принимает одинаковое значение $\varkappa(R\Omega_0)$. Тогда справедливо равенство* (27.9).

27.4. Об индексе $\varkappa(R\Omega_0)$. Рассмотрим векторные поля

$$\mathrm{X}x = x - P^0A(u_0+x), \qquad \mathrm{X}^0v = v - P^0A(u_0+v)$$

соответственно в пространствах E и E^0. Проекция P_0x_0 каждой особой точки x_0 поля X равна нулю, поэтому единственной особой точкой поля X будет особая точка $v_0 = Ru_0$ поля X^0. В силу теоремы 27.1 индексы $\mathrm{ind}(v_0, \mathrm{X}; E)$, $\mathrm{ind}(v_0, \mathrm{X}^0, E^0)$ одинаковы.

Пусть поле X^0 имеет единственную особую точку $v_0 = Ru_0$ при каждом $u_0 \in E_0$. Так как E_0 связно, то индекс $\varkappa_0$ этой особой точки одинаков при всех u_0. Полагая $u_0 = 0$, получим

$$\varkappa_0 = \operatorname{ind}(0, I - P^0A; E_0) = \operatorname{ind}(0, I - P^0A; E). \tag{27.12}$$

§ 28. Задача о вынужденных колебаниях

28.1. Периодическая граничная задача. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{28.1}$$

Если правая часть этой системы ω-периодическая по t, то *вынужденными колебаниями* системы называют ее периодические решения с тем же периодом ω. Отыскание вынужденных колебаний равносильно отысканию решений $x(t)$, удовлетворяющих граничному условию $x(\omega) = x(0)$. Таким образом, задача о вынужденных колебаниях является частным случаем задачи об отыскании на некотором промежутке $[a, b]$ решений $x(t)$ системы (28.1), удовлетворяющих граничному условию

$$x(b) - x(a) = 0. \tag{28.2}$$

Описанную задачу будем называть *периодической граничной задачей*; в ее постановке уже нет предположений о периодичности по t правой части.

Для простоты изложения вектор-функция $f(t, x)$ ниже предполагается определенной при всех $t \in [a, b]$, $x \in R^n$ и непрерывной по совокупности переменных. Внимательный читатель увидит, что во всех построениях используются значения x лишь из некоторой области пространства R^n; условие непрерывности $f(t, x)$ можно заменить условием Каратеодори и т. д.

Рассмотрим три интегро-функциональных оператора

$$A_1x(t) = x(b) + \int_a^t f[s, x(s)]\,ds, \tag{28.3}$$

$$A_2x(t) = x(a) + \int_a^b f[s, x(s)]\,ds + \int_a^t f[s, x(s)]\,ds, \tag{28.4}$$

$$A_3x(t) = x(a) - \int_t^b f[s, x(s)]\,ds. \tag{28.5}$$

Каждый из них действует и вполне непрерывен в пространстве $C = C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций со значениями в R^n. Простая проверка показывает, что решения задачи (28.1), (28.2) совпадают с неподвижными точками каждого из операторов (28.3)—(28.5) или, что то же, с особыми точками каждого из вполне непрерывных в пространстве C векторных полей

$$\Phi_1x = x - A_1x, \quad \Phi_2x = x - A_2x, \quad \Phi_3x = x - A_3x.$$

Для сравнительного изучения полей с операторами (28.3)—(28.5) нам понадобятся линейные вполне непрерывные векторные поля

$$W_1x(t) = x(t) - x(a) + x(b), \qquad W_2x(t) = x(t) - x(a) - x(b), \tag{28.6}$$

определенные на пространстве C. У оператора $B_1 = I - W_1$ нет ненулевых собственных значений, так как $B_1^2x = 0$ при всех $x \in C$, у оператора $B_2 = I - W_2$ есть одно ненулевое собственное значение, оно равно 2 и имеет кратность n (проверьте). Поэтому нуль является изолированной особой точкой полей (28.6) и

$$\operatorname{ind}(0, W_1) = 1, \qquad \operatorname{ind}(0, W_2) = (-1)^n. \tag{28.7}$$

Справедливы равенства

$$I - A_2 = W_1(I - A_1), \qquad I - A_3 = W_2(I - A_1). \tag{28.8}$$

Например, для доказательства первого из них достаточно написать цепочку равенств

$$W_1(I - A_1)x(t) = W_1\left\{x(t) - x(b) - \int_a^t f[s, x(s)]\,ds\right\} =$$

$$= \left\{x(t) - x(b) - \int_a^t f[s, x(s)]\,ds\right\} -$$

$$- [x(a) - x(b)] - \int_a^b f[s, x(s)]\,ds =$$

$$= x(t) - x(a) - \int_a^b f[s, x(s)]\,ds - \int_a^t f[s, x(s)]\,ds.$$

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве C и пусть на $\dot{\Omega}$ нет решений задачи (28.1), (28.2). Тогда на $\dot{\Omega}$ невырождены вполне непрерывные векторные поля $I-A_1$, $I-A_2$, $I-A_3$ с операторами (28.3)—(28.5) и определены их вращения.

Теорема 28.1. *Справедливы равенства*

$$\gamma(I-A_2, \Omega) = \gamma(I-A_1, \Omega), \tag{28.9}$$

$$\gamma(I-A_3, \Omega) = (-1)^n \gamma(I-A_1, \Omega). \tag{28.10}$$

Утверждения теоремы вытекают из равенств (28.8), теоремы 22.2 о произведении вращений и из (28.7). ∎

28.2. Преобразования родственных уравнений. Утверждения теоремы 28.1 основаны на (28.8). В нашем изложении поля (28.6) задавались, а затем тождества (28.8) проверялись. В этом пункте описывается простое общее правило Е. А. Лифшица [37], которое во многих случаях позволяет конструировать (а не «догадываться» до них) аналогичные (28.8) равенства, связывающие родственные векторные поля.

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $E_1 \dotplus E_2$ — их прямая сумма. Пусть $\Phi(x,f)$ $(x \in E_1, f \in E_2)$ — линейный оператор, действующий из $E_1 \dotplus E_2$ в E_1; Π, X — линейные операторы из E_1 в E_1 и из E_1 в E_2. Тройку операторов Φ, Π, X назовем *согласованной*, если

$$\Phi(\Pi x, \mathrm{X}x) \equiv x \quad (x \in E_1). \tag{28.11}$$

Если, например, $\Phi(x,f) = x - Bf$, где B — линейный оператор, то для получения согласованной тройки достаточно к Φ присоединить любую пару операторов $\Pi = I + B\mathrm{X}$, X (в частности, согласована тройка Φ, I, 0).

Лемма 28.1. *Пусть линейный оператор $\Psi(x,f)$ действует из $E_1 \dotplus E_2$ в линейное пространство E_3. Пусть из $\Phi(x,f)=0$ вытекает равенство $\Psi(x,f)=0$. Пусть операторы Φ, Π, X образуют согласованную тройку. Тогда*

$$\Psi(x,f) = W\Phi(x,f) \quad (x \in E_1, f \in E_2), \tag{28.12}$$

где

$$Wx = \Psi(\Pi x, \mathrm{X}x) \quad (x \in E_1). \tag{28.13}$$

Доказательство. Из (28.11) вытекает тождество

$$\Phi[\Pi\Phi(x,f) - x, \mathrm{X}\Phi(x,f) - f] \equiv 0 \quad (x \in E_1, f \in E_2).$$

Поэтому

$$\Psi[\Pi\Phi(x,f) - x, \mathrm{X}\Phi(x,f) - f] \equiv 0 \quad (x \in E_1, f \in E_2).$$

Последнее равенство совпадает с (28.12). ∎

Из леммы 28.1 легко вывести тождества (28.8), зная лишь операторы (28.3)—(28.5). Найдем, в качестве примера, вид оператора W_2. Пусть $E_1 = E_2 = C$. Операторы

$$\Phi(x,f) = x(t) - x(b) - \int_a^t f(s)\,ds, \tag{28.14}$$

$$\Pi x(t) = x(t) - \frac{t-a}{b-a}x(b), \tag{28.15}$$

$$\mathrm{X}x(t) = -\frac{1}{b-a}x(b) \tag{28.16}$$

образуют согласованную тройку, так как

$$\Pi x(t) - \Pi x(b) - \int_a^t \mathrm{X}x(s)\,ds \equiv x(t) \quad (x \in C).$$

Рассмотрим оператор

$$\Psi(x,f) = x(t) - x(a) - \int_a^b f(s)\,ds - \int_a^t f(s)\,ds.$$

Если $\Phi(x_0, f_0) = 0$, то $x_0(a) = x_0(b)$ и $\int_a^b f(s)\,ds = 0$; поэтому $\Psi(x_0, f_0) = 0$. Из леммы 28.1 вытекает второе из тождеств (28.8) при $W_2x = \Psi(\Pi x, \mathrm{X}x) = x(t) - x(a) + x(b)$.

При доказательстве теоремы 28.1 важен был и тот факт, что каждый из операторов (28.6) отличается от единичного вполне непрерывным слагаемым. Естественно дополнить лемму 28.1 условиями, при которых оператор (28.13) обладает аналогичным свойством.

Лемма 28.2. *Пусть выполнены условия леммы 28.1. Пусть действующие из $E_1 \dotplus E_2$ в E_1 линейные операторы $x - \Phi(x,f)$ и $x - \Psi(x,f)$ вполне непрерывны. Тогда действующий в E_1 оператор $x - Wx$, где W определен равенством* (28.13), *также вполне непрерывен.*

Доказательство. В условиях леммы из непрерывности операторов Π и X вытекает полная непрерывность операторов $\Pi x - \Phi(\Pi x, \mathrm{X}x)$ и $\Pi x - \Psi(\Pi x, \mathrm{X}x)$. Но в силу (28.11) $x - Wx = [\Phi(\Pi x, \mathrm{X}x) - \Pi x] + [\Pi x - \Psi(\Pi x, \mathrm{X}x)]$ и поэтому оператор $x - Wx$ вполне непрерывен. ∎

Вернемся к анализу нелинейных полей. Пусть выполнены условия леммы 28.2 и пусть $\mathfrak{f}$ — ограниченный нелинейный оператор, действующий из E_1 в E_2. Тогда на E_1 определены и вполне непрерывны векторные поля

$$\Phi_1 x = \Phi(x, \mathfrak{f}x), \qquad \Psi_1 x = \Psi(x, \mathfrak{f}x). \tag{28.17}$$

Из условий леммы 28.1 вытекает, что каждая особая точка поля Φ_1 является одновременно особой точкой поля Ψ_1. Из тождества (28.12) вытекает равенство

$$\Psi_1 x = W\Phi_1 x \quad (x \in E_1). \tag{28.18}$$

Поэтому из теоремы 22.2 о произведении вращений вытекает

Лемма 28.3. *Пусть выполнены условия леммы 28.2. Пусть линейное вполне непрерывное векторное поле Wx невырожденное. Тогда у полей (28.17) одинаковые особые точки, а вращения этих полей на границе $\dot{\Omega}$ любой ограниченной области $\Omega \subset E_1$ (если на $\dot{\Omega}$ поля невырождены) связаны соотношением*

$$\gamma(\Psi_1, \Omega) = \operatorname{ind}(0, W) \cdot \gamma(\Phi_1, \Omega). \tag{28.19}$$

Пусть поля Φ_1 и Ψ_1 связаны равенством (28.18), причем линейное поле W вырождено. Пусть на Ω поля Φ_1 и Ψ_1 невырождены. Тогда все векторы $\Phi_1 x$ не лежат в подпространстве нулей линейного оператора W и поэтому $\gamma(\Phi_1, \Omega) = 0$. Аналогично, все векторы $\Psi_1 x$ лежат в подпространстве значений линейного оператора W и поэтому $\gamma(\Psi_1, \Omega) = 0$.

Пусть, как выше, тройка линейных операторов $\Phi(x, f)$, Πx, $\mathrm{X}x$ согласована. Пусть $\Psi(x, f)$ — нелинейный оператор, действующий из $E_1 \dotplus E_2$ в E_1. Будем предполагать, что операторы $x - \Phi(x, f)$ и $x - \Psi(x, f)$ вполне непрерывны; тогда вполне непрерывен и оператор $x - Wx$, где W определен равенством (28.13). К сожалению, равенство (28.12) в случае нелинейного $\Psi(x, f)$ неверно. Однако формула (28.19) в естественных условиях сохраняет силу.

Лемма 28.4. *Пусть операторы Φ, Π, X образуют согласованную тройку. Пусть из $\Psi(x, f) = 0$ следует $\Phi(x, f) = 0$. Пусть оператор $\mathfrak{f}$ действует из E_1 в E_2, непрерывен и ограничен; а вполне непрерывные векторные поля (28.17) невырождены на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Тогда справедливо равенство* (28.19).

Доказательство. Если $Wx = 0$, то $\Psi(\Pi x, \mathrm{X}x) = 0$ и поэтому $\Phi(\Pi x, \mathrm{X}x) = 0$. Из (28.11) вытекает тогда, что $x = 0$. Таким образом, нуль является единственной особой точкой поля W и, следовательно, определен индекс $\operatorname{ind}(0, W)$. Для доказательства (28.19) достаточно (в силу теоремы о произведении вращений) установить гомотопность на $\dot{\Omega}$ вполне непрерывных векторных полей $\Psi_1 x$ и $\Psi_2 x = W\Phi_1 x$.

Положим $\Xi(x; \lambda) = \Psi[(1-\lambda)x + \lambda\Pi\Phi_1 x, (1-\lambda)\mathfrak{f}x + \lambda\mathrm{X}\Phi_1 x]$. Разность $\Xi(x; \lambda) - x$ является суммой трех операторов

$$\Xi(x; \lambda) - (1-\lambda)x - \lambda\Pi\Phi_1 x, \quad \lambda\Pi(\Phi_1 x - x),$$
$$\lambda[\Pi x - \Phi(\Pi x, \mathrm{X}x)],$$

каждый из которых очевидным образом вполне непрерывен. Поэтому $\Xi(x; \lambda)$ $(x \in \dot{\Omega},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ является компактной деформацией на $\dot{\Omega}$ поля $\Xi(x; 0) = \Psi_1 x$ в поле $\Xi(x; 1) = \Psi(\Pi\Phi_1 x, \mathrm{X}\Phi_1 x) = \Psi_2 x$. Для завершения доказательства достаточно показать, что поля $\Xi(x; \lambda)$ невырождены на $\dot{\Omega}$.

Предположим, что $\Xi(x_0; \lambda_0) = 0$, где $x_0 \in \dot{\Omega}$, $\lambda_0 \in [0, 1]$. Тогда $\Phi[(1-\lambda_0)x_0 + \lambda_0\Pi\Phi_1 x_0, (1-\lambda_0)\mathfrak{f}x_0 + \lambda_0\mathrm{X}\Phi_1 x_0] = 0$ и в силу линейности оператора Φ

$$(1-\lambda_0)\Phi(x_0, \mathfrak{f}x_0) + \lambda_0\Phi(\Pi\Phi_1 x_0, \mathrm{X}\Phi_1 x_0) = 0.$$

Но $\Phi(x_0, \mathfrak{f}x_0) = \Phi_1 x_0$ по определению, а $\Phi(\Pi\Phi_1 x_0, \mathrm{X}\Phi_1 x_0) = \Phi_1 x_0$ в силу (28.11). Поэтому $\Phi_1 x_0 = 0$. Мы пришли к противоречию. ∎

28.3. Интегральные уравнения. Вернемся к периодической краевой задаче (28.1), (28.2). Укажем здесь некоторые отличные от (28.3)—(28.5) операторы, неподвижные точки которых совпадают с решениями задачи (28.1), (28.2).

Сначала рассмотрим оператор

$$A_4x(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\{x(s)+(s-a)f[s,\ x(s)]\}\,ds+\\ +\int_a^t f[s,\ x(s)]\,ds, \qquad (28.20)$$

который вполне непрерывен в пространстве C. Если $x_0(t)$ — неподвижная точка оператора A_4, то $x_0(t)$ является решением уравнения (28.1) и поэтому

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\{x_0(s)+(s-a)f[s,\ x_0(s)]\}\,ds=\\ =\frac{1}{b-a}\int_a^b\{x_0(s)+(s-a)x_0'(s)\}\,ds=x_0(b), \qquad (28.21)$$

т. е. $x_0(t)$ является неподвижной точкой оператора (28.3) и, следовательно, решением задачи (28.1), (28.2). Наоборот, если $x_0(t)$ является решением задачи (28.1), (28.2), то $x_0(t)$ является неподвижной точкой оператора (28.3), для нее верно равенство (28.21) и поэтому $x_0(t)$ является неподвижной точкой оператора (28.20). Итак, неподвижные точки оператора (28.20) совпадают с решениями задачи (28.1), (28.2).

Положим

$$\Psi_4(x,\ f)=x(t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b\{x(s)-(s-a)f(s)\}\,ds-\int_a^t f(s)\,ds. \qquad (28.22)$$

Рассмотрим согласованную тройку операторов (28.14)—(28.16) и определим по оператору (28.22) оператор W_4 равенством

$$W_4x(t)=x(t)-\frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)\,ds+x(b). \qquad (28.23)$$

Оператор (28.23) невырожден и, очевидно, $\operatorname{ind}(0,\ W_4)=1$. Из леммы 28.3 вытекает

Теорема 28.2. *Пусть на границе $\dot\Omega$ ограниченной области $\Omega\subset C$ нет решений периодической краевой задачи* (28.1), (28.2). *Тогда поле $I-A_4$ невырождено на $\dot\Omega$ и*

$$\gamma(I-A_4,\ \Omega)=\gamma(I-A_1,\ \Omega).$$

Опишем еще один способ построения интегрального оператора, неподвижные точки которого совпадают с решениями задачи (28.1), (28.2). Рассмотрим для этого вспомогательную линейную систему

$$x'+\alpha(t)x=0, \qquad (28.24)$$

где $\alpha(t)$ — непрерывно зависящая от t матрица. Пусть $V(t,s)$ — оператор сдвига (см. § 10) за время от s до t по траекториям системы (28.24) (если, например, $\alpha(t)\equiv\alpha_0$, то $V(t,\ s)=\exp[-\alpha_0(t-s)]$). Решение неоднородной системы

$$x'+\alpha(t)x=g(t) \qquad (28.25)$$

определится равенством

$$x(t)=V(t,\ a)x(a)+\int_a^t V(t,\ s)g(s)\,ds. \qquad (28.26)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию (28.2) в том и только том случае, если

$$x(a)=V(b,\ a)x(a)+\int_a^b V(b,\ s)g(s)\,ds. \qquad (28.27)$$

Перепишем систему (28.1) в виде

$$x'+\alpha(t)x=\alpha(t)x+f(t,\ x). \qquad (28.28)$$

Матрицу $\alpha(t)$ выберем так, чтобы была определена и просто конструировалась матрица

$$R=[I-V(b,\ a)]^{-1}. \qquad (28.29)$$

Из проведенных рассуждений вытекает тогда, что задача (28.1), (28.2) равносильна интегральному уравнению

$$x(t) = V(t, a)\,x(a) + \int_a^t V(t, s)\{\alpha(s)\,x(s) + f[s, x(s)]\}\,ds, \tag{28.30}$$

где

$$x(a) = R\int_a^b V(b, s)\{\alpha(s)\,x(s) + f[s, x(s)]\}\,ds. \tag{28.31}$$

Таким образом, решения задачи (28.1), (28.2) совпадают с неподвижными точками интегрального оператора

$$A_5 x(t) = \int_a^b K(t, s)\{\alpha(s)\,x(s) + f[s, x(s)]\}\,ds, \tag{28.32}$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} V(t, a)\,RV(b, s) + V(t, s) & \text{при } a \leqslant s \leqslant t, \\ V(t, a)\,RV(b, s) & \text{при } t < s \leqslant b. \end{cases} \tag{28.33}$$

Анализ поля $I - A_5$ предоставляем читателю.

28.4. Переход к другим пространствам. Векторные поля с операторами (28.3)—(28.5), (28.20) и (28.32) рассматривались в пространстве C. При переходе к другим пространствам E удобно пользоваться принципами инвариантности вращения из § 25. Ограничимся анализом полей с операторами A_1 и A_4 — операторами (28.3) и (28.20).

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве C, на границе $\dot\Omega$ которой нет решений задачи (28.1), (28.2). Пусть F — множество лежащих в Ω решений этой задачи. Множество F замкнуто и компактно в C, поэтому оно входит в Ω вместе с некоторой η-окрестностью; нам удобно считать, что $\eta \in (0, 1)$. Пусть Ω лежит в шаре $\|x\|_C \leqslant r$; через M обозначим такое положительное число, что $\|f(t, x)\| \leqslant M$ при $a \leqslant t \leqslant b$ и $\|x\| \leqslant r + 2$.

Лемма 28.5. *Пусть $x(t)$, $y(t)$ — решения задачи* (28.1), (28.2), *причем $x(t) \in F$, а $y(t) \overline{\in} F$. Тогда найдется такой замкнутый промежуток $\Delta \subset [a, b]$ длины $\min\left\{\frac{b-a}{2}, \frac{\eta}{3M}\right\} = \nu$, что $\|y(t) - x(t)\| \geqslant \eta/3$ при $t \in \Delta$.*

Доказательство. Нужно рассмотреть лишь случай, когда $\|y(t_1) - x(t_1)\| < \eta/3$ при некотором $t_1 \in [a, b]$. Тогда при некотором $t^* \in [a, b]$ справедливо равенство $\|y(t^*) - x(t^*)\| = \eta$, откуда вытекает оценка $\|y(t^*)\| < r + 1$. Обозначим через Δ примыкающий к t^* промежуток длины ν, лежащий в $[a, b]$. Очевидно,

$$\|x(t) - x(t^*)\|,\quad \|y(t) - y(t^*)\| \leqslant M\,|t - t^*| \leqslant \frac{\eta}{3} \quad (t \in \Delta)$$

и поэтому при $t \in \Delta$

$$\|y(t) - x(t)\| \geqslant \|y(t^*) - x(t^*)\| - \|y(t^*) - y(t)\| - \|x(t^*) - x(t)\| \geqslant \frac{\eta}{3}. \ \blacksquare$$

Кроме пространства C в этом пункте будут использованы пространства L_p и пространства C_k функций $x(t)$, имеющих на $[a, b]$ непрерывные производные до порядка k. Для каждого из этих пространств E можно указать такую постоянную $\sigma(E) > 0$ и такую положительную при $\mu > 0$ функцию $\varkappa(\mu; E)$, что для любых функций $x(t)$, $y(t) \in E$ из $\operatorname{mes}\{t\colon \|x(t) - y(t)\| \geqslant \alpha\} \geqslant \mu$ вытекает оценка $\|x(t) - y(t)\|_E \geqslant \sigma(E)\,\varkappa(\mu; E)\,\alpha$. Очевидно, $\sigma(C_k) = \varkappa(\mu; C_k) = 1$, $\sigma(L_p) = 1$, $\varkappa(\mu; L_p) = \mu^{1/p}$. Из леммы 28.5 вытекает

Лемма 28.6. *Пусть решение $y(t)$ задачи* (28.1), (28.2) *не принадлежит F. Тогда*

$$\rho_E[y(t), F] \geqslant \frac{1}{3}\,\sigma(E)\,\varkappa\left[\min\left(\frac{b-a}{2}, \frac{\eta}{3M}\right); E\right]\eta.$$

Из леммы 28.6 вытекает важное следствие. Пусть A — либо оператор (28.3), либо оператор (28.20); оба они вполне непрерывны в пространстве E. Пусть поле $I - A$ невырождено на $\dot\Omega \subset C$. Тогда при малых $\delta > 0$ каждая δ-окрестность $\Omega(F, \delta; E)$ в пространстве E множества F (лежащих в Ω неподвижных точек оператора A) имеет одинаковую относительно поля $I - A$ сердцевину с областью Ω.

В случае пространства L_p нет смысла говорить о значениях вектор-функций при отдельных значениях t. Поэтому в таких пространствах удобно рассматривать оператор (28.20). Этот оператор A_4 определен и вполне непрерывен на пространстве L_p, если

$$\|f(t, x)\| \leqslant \alpha + \beta \|x\|^p \quad (x \in R^n). \tag{28.34}$$

Более того, A_4 действует из C в L_p и из L_p в C как вполне непрерывный оператор. Поэтому из теоремы 25.1 вытекает

Теорема 28.3. *Пусть выполнено условие* (28.34). *Пусть ограниченные области* $\Omega_1 \subset C$, $\Omega_2 \subset L_p$ *имеют одинаковую сердцевину относительно поля* $I - A_4$. *Тогда*

$$\gamma(I - A_4, \Omega_1; C) = \gamma(I - A_4, \Omega_2; L_p).$$

По отношению к пространствам C_k операторы (28.3) и (28.20) обладают одинаковыми свойствами; рассмотрим первый из них — оператор A_1.

Множество $\mathfrak{M}$ функций $x(t) \in C_k$ компактно в C_k в том и только том случае (см., например, [17]), если функции из этого множества вместе со всеми производными до порядка k равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому оператор A_1 действует в C_k и вполне непрерывен, если вектор-функция $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных k раз.

Теорема 28.4. *Пусть* $f(t, x)$ *непрерывно дифференцируема по совокупности переменных* k *раз. Пусть ограниченные области* $\Omega_0 \subset C$, $\Omega_k \subset C_k$ *имеют одинаковую сердцевину относительно поля* $I - A_1$. *Тогда*

$$\gamma(I - A_1, \Omega_0; C) = \gamma(I - A_1, \Omega_k; C_k).$$

Доказательство. В условиях теоремы оператор A_1 действует и вполне непрерывен во всех пространствах $C, C_1, C_2, \ldots, C_k$. В силу леммы 28.6 можно к областям Ω_0 и Ω_k присоединить области $\Omega_1 \subset C_1, \ldots, \Omega_{k-1} \subset C_{k-1}$ так, чтобы все эти области имели одинаковую сердцевину относительно поля $I - A_1$. Непосредственно проверяется, что A_1 непрерывен как оператор из C в C_1, из C_1 в $C_2, \ldots$, из C_{k-1} в C_k; очевидна непрерывность A как оператора из C_1 в C, из C_2 в $C_1, \ldots$, из C_k в C_{k-1}. Из теоремы 25.1 вытекают равенства $\gamma(I - A_1, \Omega_0; C) = \gamma(I - A_1, \Omega_1; C_1)$, $\gamma(I - A_1, \Omega_1; C_1) = \gamma(I - A_1, \Omega_2; C_2), \ldots, \gamma(I - A_1, \Omega_{k-1}; C_{k-1}) = \gamma(I - A_1, \Omega_k; C_k)$, из которых следует утверждение теоремы. ∎

Утверждение теоремы 28.4 прямой ссылкой на теорему 25.1 получить нельзя, так как оператор A_1 даже не действует из C в C_k (при $k \geqslant 2$). Использованный при доказательстве теоремы 28.4 прием введения нескольких промежуточных пространств носит общий характер.

28.5. Поле сдвигов и основная теорема. Пусть, дополнительно, каждое начальное значение $x(s) = x_0$ определяет на $[s, b]$ единственное решение $x(t) = U(t, s)x_0$ системы (28.1). Оператор $U(t, s)$ сдвига по траекториям системы (28.1) изучался выше в § 13. Начальные значения решений задачи (28.1), (28.2) совпадают с особыми точками определенного на R^n непрерывного векторного поля сдвигов

$$\varphi(x) = x - U(b, a)x. \tag{28.35}$$

В отличие от рассмотренных в предыдущих пунктах этого параграфа векторных полей, связанных с задачей (28.1), (28.2), явный вид поля (28.35) неизвестен; однако вычисление вращения поля (28.35) в ряде случаев проводится совсем просто (см. § 13).

Будем говорить, что ограниченные области $G \subset R^n$, $\Omega \subset C$ имеют *одинаковую сердцевину относительно периодической граничной задачи* (28.1), (28.2), если выполнены следующие требования: на $\dot{G}$ нет начальных значений решений задачи (28.1), (28.2); на $\dot{\Omega}$ нет решений задачи (28.1), (28.2); множество лежащих в G начальных значений решений задачи (28.1), (28.2) совпадает с множеством значений при $t = a$ лежащих в Ω решений задачи (28.1), (28.2).

Теорема 28.5. *Пусть ограниченные области* $G \subset R^n$, $\Omega \subset C$ *имеют одинаковую сердцевину относительно задачи* (28.1), (28.2). *Тогда*

$$\gamma(I - U(b, a), G; R^n) = \gamma(I - A_1, \Omega; C).$$

Разобьем доказательство на этапы.

Первый этап. Пусть $f(t, x)$ удовлетворяет по переменной x локальному условию Липшица.

Рассмотрим в пространстве C векторные поля

$$\Phi(\lambda, x) = x(t) - x(b) - \lambda[U(t, a)x(a) - x(a)] - \\ - (1-\lambda)\int_a^t f[s, x(s)]\,ds. \qquad (28.36)$$

Допустим, $\Phi(\lambda_0, x_0) = 0$. Тогда

$$x_0(t) \equiv x_0(b) + \lambda_0[U(t, a)x_0(a) - x_0(a)] + \\ + (1-\lambda_0)\int_a^t f[s, x_0(s)]\,ds \qquad (28.37)$$

и поэтому $x_0(t)$ является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_0 f[t, U(t, a)x_0(a)] + (1-\lambda_0)f(t, x), \qquad (28.38)$$

удовлетворяющим начальному условию

$$x(a) = x_0(a). \qquad (28.39)$$

Правая часть системы (28.38) удовлетворяет по переменной x условию Липшица, поэтому начальное условие (28.39) определяет единственное ее решение. Но одно решение очевидно — это вектор-функция $U(t,a)x_0(a)$. Следовательно, $x_0(t) \equiv U(t,a)x_0(a)$. Полагая теперь $t = a$ в тождестве (28.37), получаем равенство $x_0(b) = x_0(a)$. Таким образом, особыми точками полей (28.36) могут быть лишь решения задачи (28.1), (28.2).

Справедливо и обратное утверждение — каждое решение задачи (28.1), (28.2) является особой точкой всех полей (28.36).

По доказанному, поля (28.36) определяют гомотопный переход на $\dot{\Omega}$ от поля $\Phi(0,x) = x - A_1x$ к полю $\Phi(1, x) = x - B_1x$, где $B_1x(t) = x(b) - x(a) + U(t,a)x(a)$. Поэтому для доказательства теоремы 28.5 достаточно установить равенство

$$\gamma(I - U(b, a), G; R^n) = \gamma(I - B_1, \Omega; C). \qquad (28.40)$$

Второй этап. Через $\Omega(r)$ $(r > 0)$ обозначим ограниченную область в C, состоящую из функций $x(t)$, для которых $x(a) \in G$ и $\|x(t)\|_C < r$. Граница $\dot{\Omega}(r)$ состоит из функций $x(t) \in G$, для которых либо $x(a) \in \dot{G}$ и $\|x(t)\|_C \leqslant r$, либо $x(a) \in G$ и $\|x(t)\|_C = r$. Через E_0 обозначим n-мерное подпространство пространства C, состоящее из функций-констант; нам удобно отождествлять E_0 с пространством R^n. Очевидно, $\Omega(r) \cap E_0 = G$, $\dot{\Omega}(r) \cap E_0 = \dot{G}$, $\overline{\Omega(r)} \cap E_0 = \bar{G}$.

Рассмотрим в C конечномерный оператор $Bx(t) = U(b,a)x(a)$; его значения лежат в E_0. Если $x_0(t)$ — неподвижная точка оператора B, то $x_0(t) \in E_0$ и поэтому $U(b,a)x_0(a) = x_0(a)$; следовательно, $x_0(a) \overline{\in} \dot{G}$. Значит, вполне непрерывное поле $I - B$ невырождено на $\dot{\Omega}(r)$ при $r > 0$ и определено вращение $\gamma(I - B, \Omega(r); C)$. Из определения вращения вытекает, что $\gamma(I - B, \Omega(r); C) = \gamma(I - B, G; R^n)$. Но на R^n поле $I - B$ совпадает с полем $I - U(b,a)$. Поэтому вместо (28.40) достаточно доказать справедливость хотя бы при одном $r > 0$ равенства

$$\gamma(I - B, \Omega(r); C) = \gamma(I - B_1, \Omega; C). \qquad (28.41)$$

Третий этап. Из непрерывной зависимости решений системы (28.1) от начальных данных вытекает существование такого r_0, что $\|U(t,a)x_0\| \leqslant r_0$ при $a \leqslant t \leqslant b$ и $x_0 \in \bar{G}$.

Рассмотрим в C векторные поля

$$\Psi(\lambda, x) = x(t) - (1-\lambda)U(b, a)x(a) - \\ - \lambda[x(b) - x(a) - U(t, a)x(a)] \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Допустим, что $\Psi(\lambda_0, x_0) = 0$, т. е.

$$x_0(t) \equiv (1-\lambda_0)U(b, a)x_0(a) + \\ + \lambda_0[x_0(b) - x_0(a) - U(t, a)x_0(a)]. \qquad (28.42)$$

Полагая в (28.42) $t = a$ и $t = b$, а затем исключая из полученных равенств $U(b,a)x_0(a)$, получим равенство $x_0(a) = x_0(b)$. Поэтому $U(b,a)x_0(a) = x_0(a)$ и, следовательно, $x_0(a) \overline{\in} \dot{G}$. Из (28.42) следует также оценка $\|x_0(t)\|_C \leqslant r_0$. Поэтому все поля $\Psi(\lambda, x)$ невырождены на $\dot{\Omega}(r)$, если $r > r_0$.

Поля $\Psi(\lambda, x)$ определяют на $\dot{\Omega}(r)$ $(r > r_0)$ гомотопный переход от поля $\Psi(0, x) = x - Bx$ к полю $\Psi(1, x) = x - B_1x$. Поэтому поля $I - B$ и $I - B_1$ имеют одинаковое вращение на $\dot{\Omega}(r)$ при $r > r_0$. Следовательно, вместо (28.41) достаточно доказать равенство

$$\gamma(I - B_1, \Omega(r); C) = \gamma(I - B_1, \Omega; C) \qquad (r > r_0). \quad (28.43)$$

Но равенство (28.43) очевидно, так как при $r > r_0$ множества неподвижных точек оператора B_1, лежащих в областях $\Omega(r)$ и Ω, одинаковы — они совпадают с множеством всех решений задачи (28.1), (28.2), начальные значения которых лежат в области $G \subset R^n$ (проверьте!).

Четвертый этап. Выше проведено доказательство теоремы 28.5 при дополнительном предположении — что $f(t, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Освободимся от этого предположения.

Построим последовательность $f_m(t, x)$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций, равномерно на каждом ограниченном множестве сходящуюся к $f(t, x)$. При достаточно больших m на множестве $\bar{G}$ будут определены операторы сдвига $U_m(t, s)$ по траекториям систем

$$\frac{dx}{dt} = f_m(t, x). \quad (28.44)$$

По уже доказанному при больших m справедливы равенства

$$\gamma(I - U_m(b, a), G; R^n) = \gamma(I - A_m, \Omega; C), \quad (28.45)$$

где

$$A_m x(t) = x(b) + \int_a^t f_m[s, x(s)]\, ds \qquad (x(t) \in C). \quad (28.46)$$

Но из классической теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра (см., например, [55]) вытекает, что $U_m(b, a)x \to U(b, a)x$ равномерно относительно $x \in \dot{G}$. Поэтому при больших m справедливы равенства $\gamma(I - U_m(b, a), G; R^n) = \gamma(I - U(b, a), G; R^n)$. С другой стороны, $\| A_m x(t) - A_1 x(t) \|_C \to 0$ равномерно относительно $x(t) \in \dot{\Omega}$ и поэтому при больших m справедливы равенства $\gamma(I - A_m, \Omega; C) = \gamma(I - A_1, \Omega; C)$. Следовательно, из (28.45) вытекает утверждение теоремы 28.5. ∎

При доказательстве теоремы 28.5 был использован гомотопный переход от поля $I - A_1$ к полям $I - B$ и $I - B_1$. Такой переход можно определять при помощи различных деформаций. Например, переход от поля $I - A_1$ к полю $I - B_1$ можно осуществить при помощи деформации

$$\mathrm{X}(\lambda, x) = x(t) - x(b) - J(\lambda)x(t) \qquad (x(t) \in C), \quad (28.47)$$

где

$$J(\lambda)x(t) = \begin{cases} \int_a^t f[s, x(s)]\, ds & \text{при } a \leqslant t \leqslant \lambda, \\ \int_a^\lambda f[s, x(s)]\, ds + U(t, \lambda)x(\lambda) - x(\lambda) & \text{при } \lambda \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Построение и исследование полей (28.47) не связано с условием Липшица, но их анализ более громоздкий.

Отметим еще, что теорему 28.5 можно получить и как следствие теоремы 27.2. Мы предпочли прямое доказательство.

Изложенные выше теоремы этого параграфа получены М. А. Красносельским и В. В. Стрыгиным (ДАН СССР **152**, № 3 (1963)). При написании параграфа существенно использованы дальнейшие усовершенствования, которые предложил Е. А. Лифшиц.

28.6. Применение направляющих потенциалов. В этом пункте мы пользуемся определениями и обозначениями из § 13.

Через S_ρ будем обозначать сферу $\|x\| = \rho$ в пространстве C.

Теорема 28.6. *Пусть выполнено одно из условий:*

а) *Каждое решение системы* (28.1) *однозначно определяется начальным условием и нелокально продолжимо в сторону возрастания t. Для системы* (28.1) *может быть указан направляющий потенциал $V_0(x)$.*

б) *Для системы* (28.1) *может быть указан полный набор направляющих потенциалов $V_0(x)$, $V_1(x)$, ..., $V_k(x)$ (например, может быть указан один правильный направляющий потенциал $V_0(x)$).*

Тогда найдется такое $\rho_1 > 0$, что векторное поле $I - A_1$ с оператором (28.3) *невырождено на всех сферах*

S_ρ $(\rho \geqslant \rho_1)$ и

$$\gamma(I - A_1, S_\rho) = (-1)^n \cdot \operatorname{ind} V_0(x) \quad (\rho \geqslant \rho_1). \quad (28.48)$$

Доказательство. Если выполнено условие а), то доказываемое утверждение вытекает из леммы 13.3 и из теоремы 28.5.

Пусть выполнено условие б), причем выполнены неравенства (13.25). В силу леммы 13.5 найдется такое ρ_1, что на сферах S_ρ при $\rho \geqslant \rho_1$ векторное поле $I - A_1$ невырождено.

Рассмотрим вспомогательные системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \quad (28.49)$$

где $f(t, x; \lambda) = f(t, x)/[1 + \lambda(\|x\| - \rho_0 - \rho_1)\|f(t, x)\|]$ при $\|x\| \geqslant \rho_0 + \rho_1$ и $f(t, x; \lambda) \equiv f(t, x)$ при $\|x\| \leqslant \rho_0 + \rho_1$ (здесь ρ_0 — постоянная из неравенств (13.25)). Снова в силу леммы 13.5 для решений $x(t)$ всех уравнений (28.49), удовлетворяющих периодическому граничному условию (28.2), справедлива общая оценка $\|x(t)\|_C < \rho_1$. Поэтому все вполне непрерывные векторные поля

$$\Phi(\lambda, x) = x(t) - x(b) + \int_0^t f[s, x(s); \lambda]\, ds \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

невырождены на сферах S_ρ при $\rho \geqslant \rho_1$. Поля $\Phi(\lambda, x)$ определяют гомотопный переход от поля $\Phi(0, x) = x - A_1 x$ к полю $\Phi(1, x)$.

Следовательно, для доказательства (28.48) достаточно установить равенства

$$\gamma(\Phi(1, x), S_\rho) = (-1)^n \operatorname{ind} V_0(x) \quad (\rho \geqslant \rho_1). \quad (28.50)$$

Построим последовательность непрерывных по совокупности переменных и удовлетворяющих по переменной x локальному условию Липшица вектор-функций $h_i(t, x)$, которая сходится равномерно к $f(t, x; 1)$ и для которой при всех i

$$(h_i(t, x), \operatorname{grad} V_j(x)) > 0$$
$$(\|x\| \geqslant \rho_0; \ j = 0, 1, \ldots, k)$$

(детали предоставляем читателю). По каждой функции $h_i(t, x)$ определим оператор

$$A_1^{[i]} x(t) = x(b) - \int_a^t h_i[s, x(s)]\, ds \quad (x(t) \in C).$$

По уже доказанной части теоремы векторные поля $I - A_1^{[i]}$ невырождены на сферах S_ρ при $\rho \geqslant \rho_1$ и

$$\gamma(I - A_1^{[i]}, S_\rho) = (-1)^n \operatorname{ind} V_0(x) \quad (\rho \geqslant \rho_1).$$

Из этих равенств вытекает (28.50), так как поля $I - A_1^{[i]}$ при $i \to \infty$ равномерно на каждой сфере S_ρ сходятся к полю $\Phi(1, x)$. ∎

28.7. Уравнения в банаховых пространствах. При переходе от конечных систем (28.1) к дифференциальным уравнениям в бесконечномерных банаховых пространствах E возникают специфичные особенности в формулировках теорем родственности.

Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t, x), \quad (28.51)$$

где $A(t)$ при каждом t является непрерывным линейным оператором, действующим в E. Пусть $A(t)$ непрерывно зависит от t, а нелинейный оператор $f(t, x)$ $(t \in [a, b]; x \in E)$ вполне непрерывен. Пусть определен оператор сдвига $U(t, a)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ по траекториям уравнения (28.51) в пространстве E.

Первая особенность заключается в том, что оператор сдвига $U(t, a)$ не бывает вполне непрерывен. Поэтому невозможен непосредственный перенос утверждений теоремы 28.5 на уравнения типа (28.51) в банаховых пространствах.

Обозначим через $W(t, s)$ оператор сдвига за время от s до t по траекториям линейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = 0 \quad (28.52)$$

и допустим, что оператор $I - W(b, a)$ имеет непрерывный обратный.

Рассмотрим задачу существования у уравнения (28.51) решений, удовлетворяющих граничному условию

(28.2). Если $A(t)$ и $f(t,x)$ обладают свойством ω-периодичности по t, где $\omega = b - a$, то эти решения будут ω-периодичны по t. Начальные значения $x(0)$ будут особыми точками вполне непрерывного векторного поля $[I - W(b,a)]^{-1}[I - U(b,a)]$ или, что то же, поля

$$\varphi x = x - [I - W(b, a)]^{-1}[U(b, a)x - W(b, a)x]. \quad (28.53)$$

Обозначим через $C(E)$ банахово пространство непрерывных на $[a,b]$ функций $x(t)$ со значениями в E. Норма в $C(E)$ определяется равенством

$$\|x(t)\|_{C(E)} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|x(t)\|_E. \quad (28.54)$$

Решения уравнения (28.51), удовлетворяющие граничному условию (28.2), совпадают с неподвижными точками действующего и вполне непрерывного в $C(E)$ оператора (ср. (28.32))

$$\tilde{A}_5 x(t) = W(t, a)[I - W(b, a)]^{-1}\int_a^b W(b, s) f[s, x(s)]\,ds + \int_a^t W(t, s) f[s, x(s)]\,ds. \quad (28.55)$$

Теорема 28.7. *Пусть области $G \subset E$ и $\Omega \subset C(E)$ ограничены. Пусть на $\dot{G}$ нет значений при $t = a$ решений уравнения* (28.51), *удовлетворяющих* (28.2), *а на $\dot{\Omega}$ нет решений уравнения* (28.51), *удовлетворяющих* (28.2). *Пусть лежащие в Ω решения задачи* (28.51), (28.2) *совпадают с теми решениями этой задачи, значения которых при $t = a$ лежат в G. Тогда*

$$\gamma([I - W(b, a)]^{-1}[I - U(b, a)], G; E) = \gamma(I - \tilde{A}_5, \Omega; C(E)).$$

Доказательство предоставляем читателю. ∎

К уравнениям вида (28.51) могут быть сведены разнообразные бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения с отклоняющимся аргументом, интегро-дифференциальные уравнения и др.

Если каждый оператор $A(t)$ неограничен, то операторы сдвига $U(t,s)$ $(t > s)$ по траекториям уравнения (28.51) уже могут оказаться вполне непрерывными. Многочисленные примеры подобной ситуации дают краевые задачи для эволюционных уравнений с частными производными. Для уравнений (28.51) с неограниченными операторами уже могут быть установлены теоремы родственности, связывающие вращение поля $x - U(\omega, 0)x$ в пространстве E с вращением поля $I - \tilde{A}_5$ (с оператором (28.55)) в пространстве $C(E)$ или вращением других полей, особые точки которых определяют решения соответствующей краевой задачи.

§ 29. Граничные задачи

29.1. Периодическая задача. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x^{(m)} + \alpha_1(t)x^{(m-1)} + \ldots + \alpha_m(t)x = f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}). \quad (29.1)$$

Здесь $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t)$ — квадратные матрицы порядка n с элементами, непрерывно зависящими от t; вектор-функция $f(t,x,y_1,\ldots,y_{m-1})$ $(-\infty < t < \infty; x, y_1, \ldots, y_{m-1} \in R^n)$ также предполагается непрерывной по совокупности переменных.

Пусть матрицы $\alpha_j(t)$ и функция $f(t,x,y_1,\ldots,y_{m-1})$ периодичны по t с периодом ω. Тогда задача об отыскании ω-периодических решений $x(t)$ системы (29.1) равносильна отысканию решений, удовлетворяющих граничным условиям $x(0) = x(\omega)$, $x'(0) = x'(\omega), \ldots, x^{(m-1)}(0) = x^{(m-1)}(\omega)$. Поэтому задача об ω-периодических решениях является частным случаем задачи об отыскании определенных на заданном промежутке $[a,b]$ решений, удовлетворяющих условиям

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b), \ldots, x^{(m-1)}(a) = x^{(m-1)}(b). \quad (29.2)$$

Задачу (29.1), (29.2) будем называть *периодической задачей*. В постановке задачи (29.1), (29.2) уже нет предположений о периодичности каких-либо функций; коэффициенты и правая часть системы (29.1) могут быть определены лишь при $t \in [a,b]$. В § 28 подробно изучалась периодическая задача для случая $m = 1$.

29.2. Построение эквивалентных интегральных уравнений. Положим

$$Lx(t) = x^{(m)} + \alpha_1(t)\,x^{(m-1)} + \ldots + \alpha_m(t)\,x. \qquad (29.3)$$

Если однородное уравнение $Lx = 0$ не имеет отличных от нуля решений, удовлетворяющих условиям (29.2), то при каждой $f(t) \in C$ неоднородное уравнение $Lx = f$ имеет единственное решение $x(t) = Bf$, удовлетворяющее условиям (29.2). Оператор B определяется равенством

$$Bf(t) = \int_a^b k(t, s)\,f(s)\,ds, \qquad (29.4)$$

где $k(t, s)$ — соответствующая функция Грина. Оператор B действует из C в C_{m-1} и вполне непрерывен.

Систему (29.1) можно записать в виде

$$Lx = \mathfrak{f}x, \qquad (29.5)$$

где

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t,\ x(t),\ x'(t),\ \ldots,\ x^{(m-1)}(t)]. \qquad (29.6)$$

Оператор $\mathfrak{f}$ действует из пространства C_{m-1} в пространство C, он непрерывен и ограничен.

Если уравнение $Lx = 0$ не имеет решений, удовлетворяющих (29.2), то задача (29.1), (29.2) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$x = B\mathfrak{f}x \qquad (29.7)$$

в пространстве C_{m-1}. Для отыскания решений $x(t)$ задачи (29.1), (29.2) можно вначале найти в пространстве C решения $y(t)$ уравнения

$$y = \mathfrak{f}By, \qquad (29.8)$$

а затем положить $x = By$. Равенства $x = By$, $y = \mathfrak{f}x$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (29.7) и (29.8). Поэтому уравнения (29.7), (29.8) — родственные по отношению к задаче (29.1), (29.2). *Из теоремы* 26.3 *вытекает равенство*

$$\gamma(I - B\mathfrak{f},\ \Omega;\ C_{m-1}) = \gamma(I - \mathfrak{f}B,\ \Omega_0;\ C) \qquad (29.9)$$

при любых ограниченных областях $\Omega \subset C_{m-1}$, $\Omega_0 \subset C$ с одинаковой сердцевиной относительно полей $I - B\mathfrak{f}$, $I - \mathfrak{f}B$.

29.3. Интегро-дифференциальное уравнение. Каждая вектор-функция $x(t)$ со значениями в R^n является набором n скалярных функций: $x(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$. Если функция $x(t) \in C_{m-1}$, то ей при каждом $t \in [a, b]$ можно сопоставить точку

$$P(t)\,x = \{\xi_1(t),\ \ldots,\ \xi_n(t);\ \xi_1'(t),\ \ldots,\ \xi_n'(t);\ \ldots \\ \ldots;\ \xi_1^{(m-1)}(t),\ \ldots,\ \xi_n^{(m-1)}(t)\} \qquad (29.10)$$

пространства R^{mn}. Линейный (действующий из C_{m-1} в R^{mn}) оператор $P(a)$ будем называть *оператором перехода к начальным данным.*

Напомним некоторые простые факты теории линейных систем. Каждое начальное условие (при $t = a$) для системы (29.1) можно записать в виде $P(a)x = z_0 \in R^{mn}$; начальное условие однозначно определяет решение $x(t) = V(t)z_0$ однородной системы $Lx = 0$, причем $V(t)$ — прямоугольная матрица порядка m на n с m раз непрерывно дифференцируемыми по t элементами. Решение неоднородного уравнения $Lx = f$, удовлетворяющее начальному условию $P(a)x = z_0$, определяется равенством

$$x(t) = V(t)\,z_0 + \int_a^t h(t, s)\,f(s)\,ds, \qquad (29.11)$$

где $h(t, s)$ — так называемое *ядро Коши.*

Нетрудно видеть, что *решения задачи* (29.1), (29.2) *совпадают с решениями нелинейного интегро-дифференциального уравнения*

$$x(t) = Ax(t), \qquad (29.12)$$

где

$$Ax(t) = V(t)\,P(b)\,x + \int_a^t h(t, s)\,\mathfrak{f}x(s)\,ds. \qquad (29.13)$$

Оператор A вполне непрерывен в пространстве C_{m-1}.

При построении уравнения (29.12) не были использованы никакие предположения о характере решений однородного уравнения $Lx=0$. Пусть у этого уравнения нет ненулевых решений, удовлетворяющих (29.2). Тогда линейный вполне непрерывный в C_{m-1} оператор $V(t)\cdot P(b)$ имеет единственную нулевую особую точку. В силу теоремы 26.3 $\operatorname{ind}(0, I-V(t)P(b); C_{m-1}) = \operatorname{ind}(0, I-P(b)V(t); R^{mn})$ и поэтому

$$\operatorname{ind}(0,\ I-V(t)P(b);\ C_{m-1}) = (-1)^{\beta_0}, \tag{29.14}$$

где β_0 — сумма кратностей больших чем 1 собственных значений матрицы $P(b)V(t)$ порядка mn.

Теорема 29.1. *Пусть однородное уравнение $Lx=0$ не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих* (29.2). *Пусть задача* (29.1), (29.2) *не имеет решений, лежащих на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega\subset C_{m-1}$. Тогда*

$$\gamma(I-A,\ \Omega) = (-1)^{\beta_0}\gamma(I-B\mathfrak{f},\ \Omega).$$

Для доказательства достаточно проверить тождество $[I-V(t)P(b)](I-B\mathfrak{f}) = I-A$ и воспользоваться теоремой о произведении вращений. (Использованное в доказательстве тождество мы получили при помощи леммы 28.1.) ∎

29.4. Принцип родственности для периодической задачи. Пусть каждому начальному условию $P(a)x = z\in R^{mn}$ соответствует единственное решение

$$x(t) = W(t)z \tag{29.15}$$

системы (29.1), определенное на всем промежутке $[a,b]$. Положим $Uz = P(b)W(t)z$; оператор U действует в R^{mn} и непрерывен. Очевидна

Лемма 29.1. *Пусть на R^{mn} определен оператор U. Тогда его неподвижные точки совпадают с начальными значениями решений задачи* (29.1), (29.2).

Эта лемма позволяет рассматривать уравнение

$$z = Uz \tag{29.16}$$

в пространстве R^{mn} как родственное уравнениям (29.7), (29.12) в пространстве C_{m-1} и уравнению (29.8) в пространстве C.

Пусть области $\Omega\subset C_{m-1}$, $G\subset R^{mn}$ ограничены. Пусть на $\dot{\Omega}$ нет решений задачи (29.1), (29.2), а на $\dot{G}$ нет начальных значений решений этой задачи. Пусть, наконец, в области G лежат начальные решения тех и только тех решений задачи (29.1), (29.2), которые принадлежат Ω. Тогда области Ω и G имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче (29.1), (29.2).

Теорема 29.2. *Пусть ограниченные области $\Omega\subset C_{m-1}$, $G\subset R^{mn}$ имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче* (29.1), (29.2). *Пусть на R^{mn} определен оператор U. Тогда*

$$\gamma(I-U,\ G;\ R^{mn}) = \gamma(I-A,\ \Omega;\ C_{m-1}), \tag{29.17}$$

где A определен равенством (29.13).

Равенство (29.17) является частным случаем доказываемой ниже теоремы 29.4. Равенство (29.17) в объединении с равенством (29.9) и теоремой 29.1 позволяет устанавливать связи между вращениями любых двух из полей $I-B\mathfrak{f}$, $I-\mathfrak{f}B$, $I-A$, $I-U$ на границах областей в соответствующих пространствах.

29.5. Общая граничная задача. Общие условия, при помощи которых выделяют индивидуальные решения системы (29.1), обычно можно записать в виде

$$l_1(x)=0,\quad l_2(x)=0,\ \ldots,\ l_{mn}(x)=0, \tag{29.18}$$

где каждый линейный или нелинейный функционал l_j определен на некотором классе вектор-функций $x(t)$ со значениями в R^n. Мы будем считать, что каждый функционал l_j определен на C_{m-1}, непрерывен и ограничен. Тогда формула

$$Qx = \{l_1(x),\ l_2(x),\ \ldots,\ l_{mn}(x)\} + P(a)x\quad (x\in C_{m-1}) \tag{29.19}$$

определяет непрерывный и ограниченный оператор Q, действующий из C_{m-1} в R^{mn}. Непосредственно проверяется, что граничная задача (29.1), (29.18) равносильна нелинейному интегро-функциональному уравнению

$$x(t) = A_1x(t), \tag{29.20}$$

где

$$A_1x(t) = V(t)Qx + \int_a^t h(t,\ s)\mathfrak{f}x(s)\,ds, \tag{29.21}$$

которое нужно решать в пространстве C_{m-1}. Оператор (29.21) вполне непрерывен в C_{m-1}; в случае периодической задачи он переходит в оператор (29.13).

Предположим, что функционалы l_j в условиях (29.18) линейны. Пусть уравнение $Lx = 0$ не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих условиям (29.18). Тогда при $f \in C$ уравнение $Lx = f$ имеет единственное решение $x = B_1 f$, удовлетворяющее условиям (29.18), причем B_1 действует из C в C_{m-1} и вполне непрерывный (в случае периодических граничных условий оператор B_1 превращается в оператор (29.4)). Аналогами уравнений (29.7) и (29.8) будут уравнения

$$x = B_1 \mathfrak{f} x, \qquad y = \mathfrak{f} B_1 y. \tag{29.22}$$

Первое из них нужно рассматривать в C_{m-1}, его решения совпадают с решениями задачи (29.1), (29.18); второе нужно рассматривать в C. Равенства $x = B_1 y$, $y = \mathfrak{f} x$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями уравнений (29.22).

Предоставляем читателю выписать для уравнений (29.22) аналог равенства (29.9). Аналогично теореме 29.1 доказывается

Теорема 29.3. *Пусть граничные условия* (29.18) *линейны и однородны, причем уравнение* $Lx = 0$ *не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих этим условиям. Пусть на границе* $\dot{\Omega}$ *ограниченной области* $\Omega \subset C_{m-1}$ *нет решений задачи* (29.1), (29.18). *Тогда*

$$\gamma(I - A_1, \Omega) = (-1)^{\beta_1} \gamma(I - B_1 \mathfrak{f}, \Omega),$$

где β_1 — *сумма кратностей больших чем* 1 *собственных значений матрицы* $QV(t)$ *(порядка* mn*).*

29.6. Общий принцип родственности. Перенесем на общие граничные задачи построения п. 29.4. Пусть снова каждому начальному условию $P(a)x = z \in R^{mn}$ отвечает единственное определенное на $[a, b]$ решение (29.15) системы (29.1). Тогда неподвижные точки оператора $U_1 z = QW(t) z$ $(z \in R^{mn})$ совпадают с начальными значениями решений задачи (29.1), (29.18).

Будем говорить, что ограниченные области $\Omega \subset C_{m-1}$, $G \subset R^{mn}$ *имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче* (29.1), (29.18), если на $\dot{\Omega}$ и $\dot{G}$ нет неподвижных точек соответственно операторов A_1 и U_1 и если для решений $x(t)$ задачи (29.1), (29.18) из $x \in \Omega$ вытекает $P(a)x \in G$, а из $x \overline{\in} \Omega$ вытекает $P(a)x \overline{\in} G$.

Теорема 29.4. *Пусть ограниченные области* $\Omega \subset C_{m-1}$, $G \subset R^{mn}$ *имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче* (29.1), (29.18). *Пусть на* R^{mn} *определен оператор* U_1. *Тогда*

$$\gamma(I - U_1, G; R^{mn}) = \gamma(I - A_1, \Omega; C_{m-1}).$$

Доказательство. Пространство C_{m-1} является прямой суммой подпространства E_0 функций $u(t) = V(t)z$ $(z \in R^{mn})$ и подпространства E^0 функций $v(t)$, для которых $P(a)v(t) = 0$. Пусть $T_0 x = V(t)P(a)x$, $T^0 x = x(t) - V(t)P(a)x$. Заменим уравнение (29.20) эквивалентной системой

$$u = T_0 A_1 (u + v), \quad v = T^0 A_1 (u + v) \quad (u \in E_0,\ v \in E^0). \tag{29.23}$$

Второе из уравнений (29.23) можно записать в виде

$$v(t) = \int_a^t h(t, s)\, \mathfrak{f}\,[u(s) + v(s)]\, ds. \tag{29.24}$$

Последнее уравнение при каждой фиксированной функции $u(t) \in E_0$ эквивалентно задаче $L(u + v) = \mathfrak{f}(u + v)$, $P(a)v = 0$. Поэтому уравнение (29.24) имеет единственное решение $v(t) = Mu(t)$, где $Mu(t) = W(t)P(a)u(t) - u(t)$. Подставляя найденное решение уравнения (29.24) в первое уравнение (29.23), получим для определения $u \in E_0$ уравнение

$$u = T_0 A_1 (u + Mu), \tag{29.25}$$

т. е. уравнение $u = V(t)P(a)V(t)QW(t)P(a)u$, которое можно (так как $P(a)V(t)z \equiv z$) переписать в виде

$$u = V(t)\, QW(t)\, P(a)\, u. \tag{29.26}$$

Операторы $V(t)$ и $P(a)$ устанавливают линейное взаимно однозначное соответствие между точками пространств R^{mn} и E_0. Пусть $G_0 = V(t)G$; тогда $\dot{G}_0 = V(t)\dot{G}$ и $\overline{G}_0 = V(t)\overline{G}$. Очевидно, области Ω и G_0 имеют одинаковую сердцевину по отношению к оператору A_1 и проектору T_0.

Ниже мы покажем, что индекс $\varkappa(v_0)$ единственной особой точки $v_0 = Mu_0$ векторного поля

$$\mathrm{X}v = v - \int_a^t h(t, s) f[u_0(s) + v(s)]\, ds, \qquad (29.27)$$

рассматриваемого в E^0, равен 1 при всех $u_0 \in E_0$. Тогда из теоремы 27.3 будет вытекать равенство

$$\gamma(I - A_1, \Omega; C_{m-1}) = \gamma(I - V(t)QW(t)P(a), G_0; E_0). \quad (29.28)$$

Но в силу теоремы 26.3

$$\gamma(I - V(t)QW(t)P(a), G_0; E_0) =$$
$$= \gamma(I - P(a)V(t)QW(t), G; R^{mn}) = \gamma(I - QW(t), G; R^{mn})$$

и из (29.28) будет вытекать утверждение теоремы.

Из единственности при всех $u_0 \in E_0$ особой точки у поля (29.27) вытекает, что индекс $\varkappa_0 = \varkappa(Mu_0)$ особой точки не зависит от u_0. Поэтому для вычисления индекса достаточно рассмотреть поле (29.27) при $u_0(t) = 0$. В силу теоремы 27.1 поле (29.27) можно при этом рассматривать не в подпространстве E^0, а во всем пространстве C_{m-1}.

Итак, нам осталось показать, что индекс единственной особой точки поля

$$\mathrm{X}_0 x = x(t) - \int_a^t h(t, s) f x(s)\, ds, \qquad (29.29)$$

рассматриваемого на C_{m-1}, равен 1. Определим на C_{m-1} зависящий от параметра $\lambda \in [a, b]$ оператор

$$H(\lambda)x(t) = \begin{cases} \int_a^t h(t, s) f x(s)\, ds & \text{при } a \leqslant t \leqslant \lambda, \\ V(t)V^{-1}(\lambda)\int_a^\lambda h(\lambda, s) f x(s)\, ds & \text{при } \lambda \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Векторные поля $I - H(\lambda)$ определяют компактную деформацию (на границе любой ограниченной области в C_{m-1}) поля $I - H(b) = \mathrm{X}_0$ в поле $I - H(a) = I$. Так как вращение поля I на любой сфере $\|x\| = r$ (в пространстве C_{m-1}) равно 1, то для завершения доказательства остается установить ограниченность множества неподвижных точек всех операторов $H(\lambda)$. Но у каждого оператора $H(\lambda)$ есть лишь одна неподвижная точка $x(t; \lambda) \in C_{m-1}$, причем $x(t; \lambda) = W(t)0$ при $a \leqslant t \leqslant \lambda$ и $x(t; \lambda) = V(t)V^{-1}(\lambda)W(\lambda)0$ при $\lambda \leqslant t \leqslant b$. Поэтому ограниченность норм функций $x(t; \lambda)$ очевидна. ∎

Внимательный читатель заметит отличия в доказательствах теорем 28.5 и 29.4. Мы сочли полезным привести различные варианты доказательства; одна из других близких схем используется ниже при анализе эллиптических уравнений.

29.7. Замечания. Принципы инвариантности вращения (§ 25) позволяют перенести теоремы родственности этого параграфа на случай, когда используются пространства, отличные от C и C_{m-1}.

Результаты § 28, § 29 переносятся на уравнения с запаздывающим аргументом и на общие уравнения с вольтерровыми операторами. Трудности при таком переносе не возникают — нужно лишь уметь строить эквивалентные уравнения с вполне непрерывными операторами.

§ 30. Принцип родственности для эллиптических уравнений

30.1. Линейные уравнения. В этом параграфе через G обозначается некоторая фиксированная ограниченная область в пространстве R^k, где $k \geqslant 2$. Через $C(\bar{G})$ и $C(\dot{G})$ обозначаются пространства заданных на $\bar{G}$ и $\dot{G}$ непрерывных функций со значениями в R^m, где $m \geqslant 1$. Нам удобно точки области G обозначать буквой t, а точки ее границы $\dot{G}$ — буквой s. На $C(\bar{G})$ определим оператор P, сопоставляющий каждой функции $x(t)$ ее сужение $x(s) \in C(\dot{G})$ на множество $\dot{G}$. Оператор P действует из $C(\bar{G})$ в $C(\dot{G})$, он линеен и $\|P\| = 1$.

Рассмотрим линейную граничную задачу

$$Lx(t) = f(t), \qquad Px(s) = g(s). \qquad (30.1)$$

Для нас неважен конкретный вид линейного оператора L; важно лишь, чтобы задача (30.1) имела в $C(\bar{G})$ единственное решение $x(t)$ при каждых $f(t) \in C(\bar{G})$ и $g(s) \in C(\dot{G})$ и чтобы это решение имело вид

$$x = Bf + B_0 g, \qquad (30.2)$$

где линейный оператор B действует из $C(\bar{G})$ в $C(\bar{G})$ и вполне непрерывен, а линейный оператор B_0 действует из $C(\dot{G})$ в $C(\bar{G})$ и непрерывен. Очевидно, $PBf = 0$ и $LBf = f$ при $f \in C(\bar{G})$, $PB_0 g = g$, $LB_0 g = 0$ при $g \in C(\dot{G})$.

Множество $E_0 = B_0C(\dot{G})$ является подпространством пространства $C(\bar{G})$. Операторы B_0 и P определяют линейный гомеоморфизм между $C(\dot{G})$ и E_0.

В случае, когда L — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, когда граница области G достаточно гладкая и когда однородная задача $Lx(t) = 0$, $Px(s) = 0$ имеет лишь нулевое решение, решение задачи (30.1) имеет вид (30.2), где

$$Bf(t) = \int_G k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad B_0 g(s) = \int_{\dot{G}} k_0(s, \sigma) g(\sigma)\, d\sigma, \tag{30.3}$$

а ядра операторов (30.3) — функции Грина (см., например, [42]).

30.2. Нелинейная задача. Рассмотрим задачу

$$Lx(t) = f[t, x(t)], \qquad Px(s) = Tx(s), \tag{30.4}$$

где $f(t, x)$ — вектор-функция со значениями в R^m, непрерывная по совокупности переменных $t \in \bar{G}$, $x \in R^m$, а T — некоторый нелинейный (или линейный) оператор, действующий из $C(\bar{G})$ в $C(\dot{G})$. Задача (30.4) эквивалентна операторному уравнению $x = Ax$ в пространстве $C(\bar{G})$ с оператором

$$Ax = B\mathfrak{f}x + B_0Tx, \tag{30.5}$$

где $\mathfrak{f}$ — оператор суперпозиции: $\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)]$.

Когда операторы B и B_0 имеют вид (30.3), уравнение $x = Ax$ является нелинейным интегральным уравнением.

Задача (30.4) при дополнительных предположениях может быть сведена и к операторному уравнению в пространстве $C(\dot{G})$.

Допустим, что при каждой фиксированной функции $g(s) \in C(\dot{G})$ задача

$$Lx(t) = f[t, x(t)], \qquad Px(s) = g(s) \tag{30.6}$$

имеет в $C(\bar{G})$ единственное решение

$$x(t) = Qg(s), \tag{30.7}$$

причем Q непрерывен и ограничен как оператор из $C(\dot{G})$ в $C(\bar{G})$. Рассмотрим тогда в пространстве $C(\dot{G})$ операторное уравнение

$$g = TQg. \tag{30.8}$$

Если g_0 — решение уравнения (30.8), то $LQg_0 = \mathfrak{f}Qg_0$, $PQg_0 = g_0 = TQg_0$ и поэтому функция $x_0 = Qg_0$ является решением задачи (30.4). Наоборот, если функция $x \in C(\bar{G})$ является решением задачи (30.4), то $x(t)$ является решением уравнения

$$x = QTx \tag{30.9}$$

в пространстве $C(\dot{G})$ и поэтому функция $g = Tx$ или, что то же, функция $g = Px$ является решением уравнения (30.8).

Таким образом, *равенства $x = Qg$ и $g = Px$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями x задачи* (30.4) *и решениями g уравнения* (30.8). Поэтому уравнения $x = Ax$, $x = QTx$ и $g = TQg$ родственные по отношению к задаче (30.4). К ним можно присоединить уравнение

$$y = B_0TQPy, \tag{30.10}$$

которое нужно рассматривать в $C(\bar{G})$, так как равенства

$$x = QPy, \qquad y = B_0Px \tag{30.11}$$

устанавливают взаимно однозначное соответствие между его решениями y и решениями x задачи (30.4).

Действительно, если x_0 — решение задачи (30.4), то $x_0 = QTx_0$, откуда вытекают равенства $Px_0 = Tx_0$ и $Tx_0 = TQTx_0$, а затем равенство $Px_0 = TQPx_0$. Отсюда и из тождества $PB_0g \equiv g$ ($g \in C(\dot{G})$) следует, что $B_0Px_0 = B_0TQP(B_0Px_0)$. Поэтому функция $y_0 = B_0Px_0$ является решением уравнения (30.10).

Наоборот, если y_0 — решение уравнения (30.10), то $QPy_0 = QPB_0T(QPy_0) = QT(QPy_0)$ и поэтому функция $x_0 = QPy_0$ является решением уравнения (30.9).

Остается заметить, что отображения (30.11) взаимно однозначны, так как из $x_0 = QPy_0$, $y_0 = B_0Px_0$ вытекает равенство $Px_0 = Py_0$, а по значениям Px_0 и Py_0 функции x_0 и y_0 определяются однозначно. ∎

30.3. Теоремы о равенстве вращений. Ниже предполагается, что T вполне непрерывен как оператор из $C(\bar{G})$ в $C(\dot{G})$. Тогда вполне непрерывны оператор TQ в $C(\dot{G})$, операторы QT и B_0TQP в $C(\bar{G})$.

Примером вполне непрерывного T может служить интегральный оператор

$$Tx(s) = g_0(s) + \int_{\bar{G}} h[s, \tau, x(\tau)]\, d\tau, \tag{30.12}$$

если $g_0 \in C(\dot{G})$, а ядро $h(s, t, x)$ непрерывно по совокупности переменных.

Пусть Ω и Ω_0 — ограниченные области соответственно в пространствах $C(\bar{G})$ и $C(\dot{G})$. Пусть на $\dot{\Omega}$ нет решений задачи (30.4), а на $\dot{\Omega}_0$ нет функций $g(t)$, являющихся граничными значениями $Px(s)$ решений $x(t)$ задачи (30.4). Пусть, наконец, для каждого решения $x_0(t)$ задачи (30.4) из $x_0(t) \in \Omega$ следует $Px_0(s) \in \Omega_0$, а из $Px_0(s) \in \Omega_0$ следует $x_0(t) \in \Omega$. Тогда будем говорить, что *области Ω, Ω_0 имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче* (30.4). Из теоремы 26.3 вытекает

Теорема 30.1. *Пусть области $\Omega \subset C(\bar{G})$, $\Omega_0 \subset C(\dot{G})$ ограничены и имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче* (30.4). *Тогда вполне непрерывные векторные поля $I - QT$, $I - TQ$ невырождены соответственно на $\dot{\Omega}$, $\dot{\Omega}_0$ и*

$$\gamma(I - QT, \Omega; C(\bar{G})) = \gamma(I - TQ, \Omega_0; C(\dot{G})). \tag{30.13}$$

Пусть Ω_0 — ограниченная область в $C(\dot{G})$. Через $\Omega(r)$ обозначим область в $C(\bar{G})$, состоящую из функций $x(t)$, для которых $Px(s) \in \Omega_0$ и $\|x\|_{C(\bar{G})} < r$. Через r_1 и r_2 обозначим такие постоянные, что $\|Qg\|_{C(\bar{G})} \leqslant r_1$ и $\|B_0TQg\| \leqslant r_2$ при $g \in \Omega_0$.

Пусть ограниченные области $\Omega \subset C(\overline{G})$, $\Omega_0 \subset C(\dot{G})$ имеют одинаковую сердцевину по отношению к задаче (30.4). Тогда при $r > r_1$ в областях Ω и $\Omega(r)$ лежат одни и те же решения задачи (30.4); на $\dot{\Omega}$ и $\dot{\Omega}(r)$ решений этой задачи нет (проверьте). Поэтому из (30.13) вытекает, что

$$\gamma(I - QT,\ \Omega(r);\ C(\overline{G})) = \gamma(I - QT,\ \Omega;\ C(\overline{G})) = \\ = \gamma(I - TQ,\ \Omega_0;\ C(\dot{G})). \qquad (30.14)$$

Теорема 30.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 30.1. *Тогда при $r > r_2$ вполне непрерывные векторные поля $I - B_0TQP$, $I - TQ$ невырождены соответственно на $\dot{\Omega}(r)$, $\dot{\Omega}_0$ и*

$$\gamma(I - B_0TQP;\ \Omega(r);\ C(\overline{G})) = \gamma(I - TQ,\ \Omega_0;\ C(\dot{G})). \quad (30.15)$$

Доказательство. Из теоремы 27.1 вытекает, что левая часть равенства (30.15) совпадает с вращением поля $I - B_0TQP$ на границе $\dot{\Omega}_*$ пересечения $\Omega_* = \Omega(r) \cap E_0$ области $\Omega(r)$ с подпространством E_0, содержащим все значения оператора B_0TQP. Из $r > r_2$ вытекает, что оператор P (и обратный к нему на $C(\dot{G})$ оператор B_0) устанавливает линейное взаимно непрерывное отображение области $\Omega_* \subset E_0$ на область $\Omega_0 \subset C(\dot{G})$ (и замкнутой области $\overline{\Omega}_*$ на замкнутую область $\overline{\Omega}_0$). Поэтому из теоремы 26.3 вытекает равенство

$$\gamma(I - B_0TQP,\ \Omega(r);\ C(\overline{G})) = \gamma(I - PB_0TQ,\ \Omega_0;\ C(\dot{G})),$$

которое совпадает с (30.15). ∎

30.4. Принцип родственности. Пусть на $C(\dot{G})$ определен оператор (30.7). Положим

$$\Gamma x = B\mathfrak{f}(x + Q0) - Q0 \qquad (x \in C(\overline{G})). \qquad (30.16)$$

Оператор Γ действует и вполне непрерывен в пространстве $C(\overline{G})$. Его единственной особой точкой является нулевая функция 0. Поэтому определен индекс $\operatorname{ind}(0, I - \Gamma)$; этот индекс не зависит от оператора T из граничного условия задачи (30.4).

Теорема 30.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 30.1. *Тогда вполне непрерывные векторные поля $I - A$, где A — оператор* (30.5), *и $I - TQ$ невырождены соответственно на $\dot{\Omega}$, $\dot{\Omega}_0$ и*

$$\gamma(I - A,\ \Omega;\ C(\overline{G})) = \operatorname{ind}(0,\ I - \Gamma)\,\gamma(I - TQ,\ \Omega_0;\ C(\dot{G})). \quad (30.17)$$

Доказательство. Пусть $A_1 = B\mathfrak{f} + B_0TQP$. Оператор A_1 действует в $C(\overline{G})$ и вполне непрерывен.

Если x_0 — неподвижная точка оператора A, то $QPx_0 = x_0$ и поэтому $A_1x_0 = x_0$. Справедливо и обратное утверждение — из $A_1x_0 = x_0$ вытекает $Ax_0 = x_0$. Мы ниже используем более общий факт: если $Ax_0 \neq x_0$, то $A_1x_0 \neq x_0$ и вектор $x_0 - A_1x_0$ направлен непротивоположно вектору $x_0 - Ax_0$, т. е. из

$$x_0 - A_1x_0 = -\lambda_0(x_0 - Ax_0), \qquad (30.18)$$

где $\lambda_0 \geqslant 0$, вытекает равенство $Ax_0 = x_0$.

Действительно, (30.18) можно переписать в виде

$$x_0 = B\mathfrak{f}x_0 + B_0\left(\frac{1}{1+\lambda_0}TQPx_0 + \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}Tx_0\right). \qquad (30.19)$$

Поэтому x_0 является решением задачи (30.6) при $g = \frac{1}{1+\lambda_0}TQPx_0 + \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}Tx_0$. Из $Lx_0 = \mathfrak{f}x_0$ вытекает, что $x_0 = QPx_0$, и из (30.19) следует равенство $x_0 = Ax_0$.

Таким образом, поля $I - A$ и $I - A_1$ гомотопны на любом множестве в $C(\overline{G})$, не содержащем решений задачи (30.4). Отсюда, в частности, вытекает справедливость равенства $\gamma(I - A, \Omega(r); C(\overline{G})) = \gamma(I - A_1,\ \Omega(r);\ C(\overline{G}))$ при всех $r > r_1$. Поэтому из очевидного равенства $\gamma(I - A,\ \Omega(r);\ C(\overline{G})) = \gamma(I - A,\ \Omega;\ C(\overline{G}))$ и из (30.14) следует, что для доказательства (30.17) достаточно установить при некотором $r > r_1$ равенство

$$\gamma(I - A_1,\ \Omega(r);\ C(\overline{G})) = \operatorname{ind}(0,\ I - \Gamma)\,\gamma(I - TQ,\ \Omega_0;\ C(\dot{G})). \quad (30.20)$$

Введем в рассмотрение операторы

$$D(\lambda)x = B\mathfrak{f}(x - \lambda B_0TQPx + \lambda Q0) + B_0TQPx - \lambda Q0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Каждый из них действует в $C(\overline{G})$ и вполне непрерывен. Векторные поля $X(\lambda) = I - D(\lambda)$ определяют компактную деформацию поля $X(0) = I - A_1$ в поле $X(1) = I - D_1$, где

$$D_1x = B\mathfrak{f}(x - B_0TQPx + Q0) + B_0TQPx - Q0. \qquad (30.21)$$

Положим

$$r_3 = \sup_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ g \in \overline{\Omega}_0} \|\lambda B_0TQg - \lambda Q0 + Q[(1-\lambda)TQg]\|_{C(\overline{G})}.$$

Очевидно, $r_3 < \infty$. Будем рассматривать значения $r > r_3$.

Пусть x_0 — неподвижная точка оператора $D(\lambda_0)$, где $\lambda_0 \in [0, 1]$, и $x_0 \in \dot{\Omega}(r)$. Так как

$$x_0 - \lambda_0B_0TQPx_0 + \lambda_0Q0 = \\ = B\mathfrak{f}(x_0 - \lambda_0BTQPx_0 + \lambda_0Q0) + (1-\lambda_0)B_0TQPx_0, \qquad (30.22)$$

то функция $v_0 = x_0 - \lambda_0B_0TQPx_0 + \lambda_0Q0$ является решением задачи (30.6) при $g = (1-\lambda_0)TQPx_0$. Значит, $x_0 - \lambda_0B_0TQPx_0 + \lambda_0Q0 = Q[(1-\lambda_0)TQPx_0]$. Так как $Px \in \overline{\Omega}_0$, то из последнего равенства вытекает оценка $\|x_0\|_{C(\overline{G})} \leqslant r_3$. Следовательно, $Px_0 \in \dot{\Omega}_0$ и поэтому $Px_0 \neq TQPx_0$. С другой стороны, если применить к (30.22) оператор P, то мы получим равенство $Px_0 = TQPx_0$. Мы пришли к противоречию. Поэтому операторы $D(\lambda)$ не имеют неподвижных точек на $\dot{\Omega}(r)$ при $r > r_3$. Значит, поля $X(\lambda)$ гомотопны друг другу на $\dot{\Omega}(r)$ при всех $r > r_3$. Поэтому справедливо равенство

$\gamma(I-A_1, \Omega(r); C(\bar{G})) = \gamma(I-D_1, \Omega(r); C(\bar{G}))$ и для доказательства (30.20) достаточно установить при некотором $r > r_3$ равенство

$$\gamma(I-D_1, \Omega(r); C(\bar{G})) = \operatorname{ind}(0, I-\Gamma)\,\gamma(I-TQ, \Omega_0; C(\dot{G})). \quad (30.23)$$

Очевидно, $I - D_1 = (I-\Gamma)(I - B_0TQP)$ и, в силу теоремы о произведении вращений,

$$\gamma(I-D_1, \Omega(r); C(\bar{G})) = \operatorname{ind}(0, I-\Gamma)\,\gamma(I - B_0TQP, \Omega(r); C(\bar{G})).$$

Остается заметить, что при $r > r_1 + r_2 + r_3$, в силу теоремы 30.2,

$$\gamma(I-TQ, \Omega_0; C(\dot{G})) = \gamma(I - B_0TQP, \Omega(r); C(\bar{G})). \blacksquare$$

30.5. Обобщения. Опишем один из вариантов обобщения изложенных выше теорем.

Пусть E, F, N — три банаховых пространства; их элементы будем обозначать соответственно через x, f, g. Пусть на линейном множестве $\Pi \subset E$ задан линейный оператор L со значениями в F, а на всем E задан действующий из E в N непрерывный линейный оператор P. Предположим, что каждая линейная задача $Lx = f$, $Px = g$ при $f \in F$, $g \in N$ имеет единственное решение $x = Bf + B_0g$ (ср. (30.2)), где B действует из F в E и вполне непрерывен, а B_0 — из N в E и непрерывен. Очевидно, операторы B_0 и P устанавливают взаимно однозначное соответствие между пространством N и подпространством $E_0 = \{x\colon x = B_0g,\ g \in N\} \subset E$.

Пусть нелинейный оператор $\mathfrak{f}$ определен на E, действует из E в F, непрерывен и ограничен; пусть на E определен вполне непрерывный оператор T со значениями в N. Тогда имеет смысл нелинейная задача

$$Lx = \mathfrak{f}x, \quad Px = Tx. \quad (30.24)$$

Эта задача эквивалентна операторному уравнению $x = Ax$, где (ср. (30.5)) $A = B\mathfrak{f} + B_0T$. В наших условиях оператор A действует в E и вполне непрерывен.

Предположим теперь, что при каждом $g \in N$ задача $Lx = \mathfrak{f}x$, $Px = g$ имеет единственное решение $x = Qg \in E$, где Q действует из N в E, непрерывен и ограничен (ср. (30.6) и (30.7)). Тогда задача (30.24) эквивалентна операторному уравнению $x = QTx$ с вполне непрерывным в E оператором QT.

Равенства $g = Tx$, $x = Qg$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями x задачи (30.24) и решениями в N уравнения $g = TQg$.

Таким образом, задаче (30.24) можно сопоставить родственные вполне непрерывные векторные поля $I - A$ и $I - QT$ в пространстве E, $I - TQ$ в пространстве N (читатель легко построит и другие родственные поля). Для этих полей верны все доказанные в предыдущих пунктах параграфа утверждения; доказательства не меняются.

Принципы инвариантности, доказанные в § 25, позволяют при изучении соответствующих векторных полей переходить, если в этом есть нужда, от пространств E и N (в случае задачи (30.4) от пространств $C(\bar{G})$ и $C(\dot{G})$) к другим парам пространств.

§ 31. Векторные поля с итерациями операторов

31.1. Основная теорема. В параграфе изучается зависимость между вращениями вполне непрерывных векторных полей $I - A$ и $I - A^p$.

Каждая неподвижная точка x_0 оператора A является одновременно неподвижной точкой операторов A^p при всех натуральных p. Если $A^px_0 = x_0$, то x_0 может не быть неподвижной точкой оператора A; точки Ax_0, $A^2x_0, \ldots, A^{p-1}x_0$ будут также неподвижными для оператора A^p. Если A непрерывен и x_0 — изолированная неподвижная точка оператора A^p, то изолированными будут и все неподвижные точки $Ax_0, A^2x_0, \ldots, A^{p-1}x_0$. Наконец, если A непрерывен и A^p вполне непрерывен, а x_0 — изолированная особая точка оператора A^p, то в силу теоремы 26.6 $\operatorname{ind}(x_0, I - A^p) = \operatorname{ind}(Ax_0, I - A^p) = \ldots$ $\ldots = \operatorname{ind}(A^{p-1}x_0, I - A^p)$.

Во всем параграфе через Ω обозначается ограниченная область в банаховом пространстве E. Рассматривается действующий в E вполне непрерывный оператор A, определенный на такой области $G \subset E$, что на $\bar{\Omega}$ определен оператор A^p. Через F_p обозначим множество неподвижных точек оператора A^p, лежащих в $\bar{\Omega}$.

Основной результат параграфа составляет

Теорема 31.1. *Пусть оператор A^p не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$, причем p — простое число. Пусть $AF_p \subset \Omega$. Тогда*

$$\gamma(I - A, \Omega) \equiv \gamma(I - A^p, \Omega) \pmod p. \quad (31.1)$$

Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

31.2. Переход к конечномерным пространствам. Так как $AF_p \subset \Omega$, то $AF_p = F_p$. Поэтому существует такая окрестность Ω_1 множества F_p, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\overline{A\Omega_1} \subset \Omega, \ldots$ $\ldots, \overline{A^{p-1}\Omega_1} \subset \Omega$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $\gamma(I - A, \Omega_1) \equiv \gamma(I - A^p, \Omega_1) \pmod p$. После перехода к области Ω_1 нужны лишь значения оператора A на области Ω. Сузим сначала оператор A на область Ω, а затем продолжим его до определенного на всем E непрерывного оператора A_1, множество значений которого на всем E компактно. Достаточно доказать теорему 31.1 для оператора A_1 и области Ω_1.

Это позволяет предполагать при доказательстве (31.1), что сам оператор A определен на всем E и что множество AE компактно.

Рассмотрим последовательность A_n конечномерных операторов, которая равномерно сходится на E к оператору A.

Из компактности множества AE вытекает, что последовательность A_n^p равномерно сходится к оператору A^p, т. е. $\sup\limits_{x \in E} \| A_n^p x - A^p x \| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому при достаточно больших n справедливы равенства $\gamma(I - A_n, \Omega) = \gamma(I - A, \Omega)$, $\gamma(I - A_n^p, \Omega) = \gamma(I - A^p, \Omega)$ и для доказательства (31.1) достаточно установить, что $\gamma(I - A_n, \Omega) \equiv \gamma(I - A_n^p, \Omega) (\operatorname{mod} p)$. Так как при больших n операторы A_n удовлетворяют условиям теоремы 31.1, то в дальнейших построениях без ограничения общности можно считать рассматриваемый оператор A конечномерным.

Пусть значения оператора A лежат в конечномерном подпространстве $E_0 \subset E$; тогда и значения оператора A^p лежат в E_0. Без ограничения общности можно считать, что в E_0 есть точки области Ω. Положим $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. По определению вращения равенство (31.1) равносильно равенству $\gamma(I - A_0, \Omega_0; E_0) \equiv \gamma(I - A_0^p, \Omega_0; E_0) (\operatorname{mod} p)$, где A_0 — сужение оператора A на подпространство E_0. Оператор A_0 удовлетворяет на области Ω_0 условиям теоремы 31.1. Поэтому *мы будем доказывать теорему* 31.1 *в условиях, когда E конечномерно, A определен на всем E и множество AE компактно.*

31.3. Переход к гладким отображениям. Так как E конечномерно, то оператор A с любой точностью можно аппроксимировать непрерывно дифференцируемым оператором (который, конечно, также будет удовлетворять условиям теоремы 31.1). Чтобы не увеличивать число обозначений, будем считать, что сам оператор A непрерывно дифференцируем. В силу теоремы Сарда без ограничения общности можно предполагать, что оператор A имеет в области Ω лишь конечное число неподвижных точек $x_1, \ldots, x_k$, причем 1 не является собственным значением всех производных $A'(x_1), \ldots, A'(x_k)$.

Через $T(x, \rho)$ обозначим шар радиуса ρ с центром x. Выберем ρ так, чтобы шары $T(x_1, \rho), \ldots, T(x_k, \rho)$ не пересекались друг с другом, лежали в области Ω и чтобы 1 не была собственным значением производной $A'(x)$ при всех x из указанных шаров. Через $\beta(x)$ будем обозначать сумму кратностей вещественных и больших чем 1 собственных значений линейного оператора $A'(x)$. Число $\beta(x)$ имеет одинаковую четность при всех x из каждого фиксированного шара $T(x_i, \rho)$.

Определим на E операторы

$$A_\varepsilon x = Ax + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \prod_{i \neq j} f^2(x - x_j)(x - x_i),$$

где f — такой линейный функционал, что $f(x_i) \neq f(x_j)$ при $i \neq j$. Операторы A_ε при всех достаточно малых ε удовлетворяют условиям теоремы 31.1 $\gamma(I - A_\varepsilon, \Omega) = \gamma(I - A, \Omega)$, $\gamma(I - A_\varepsilon^p, \Omega) = \gamma(I - A^p, \Omega)$. Поэтому достаточно доказать теорему для операторов A_ε при малых ненулевых ε.

Как оказывается, операторы A_ε при малых ненулевых ε обладают дополнительными важными свойствами. Каждая точка $x_1, \ldots, x_k$ является по построению неподвижной точкой всех операторов A_ε. Очевидно, при достаточно малых ε операторы A_ε не имеют в области $\bar{\Omega}$ неподвижных точек, лежащих вне шаров $T(x_1, \rho), \ldots, T(x_k, \rho)$. Покажем, что при переходе от оператора A к операторам A_ε у них не появляются новые неподвижные точки и в выделенных шарах.

Рассмотрим фиксированный шар $T(x_j, \rho)$. Так как x_j — единственная неподвижная точка оператора A в этом шаре, то

$$\gamma(I - A, T(x_j, \rho)) = \operatorname{ind}(x_j, I - A) = (-1)^{\beta(x_j)}.$$

Поэтому при достаточно малых ε

$$\gamma(I - A_\varepsilon, T(x_j, \rho)) = (-1)^{\beta(x_j)}. \tag{31.2}$$

Из непрерывной дифференцируемости оператора A вытекает непрерывная дифференцируемость операторов A_ε. При достаточно малых ε число 1 не является собственным значением всех линейных операторов $A'_\varepsilon(x)$, где $x \in T(x_j, \rho)$; отсюда вытекает, с одной стороны, изолированность каждой неподвижной точки операторов A_ε в шаре $T(x_j, \rho)$ и, с другой стороны, одинаковая четность суммы $\beta(x, \varepsilon)$ кратностей вещественных и больших чем 1 собственных значений операторов $A'_\varepsilon(x)$ при всех $x \in T(x_j, \rho)$. Поэтому индексы всех неподвижных точек операторов A_ε, лежащих в $T(x_j, \rho)$, одинаковы. Из теоремы 20.6 об алгебраическом числе особых точек вытекает тогда, что вращение $\gamma(I - A_\varepsilon,\ T(x_j, \rho))$ кратно количеству $\alpha_j(\varepsilon)$ этих неподвижных точек. Из (31.2) вытекает, что $\alpha_j(\varepsilon) = 1$.

Итак, точки $x_1, \ldots, x_k$ — это все неподвижные точки операторов A_ε при малых ε. Простой подсчет показывает, что $A'_\varepsilon(x_j) = A'(x_j) + a_j\varepsilon I$ $(j = 1, \ldots, k)$, где все числа a_j отличны от нуля. Поэтому при всех достаточно малых ненулевых ε у операторов $A'_\varepsilon(x_1), \ldots, A'_\varepsilon(x_k)$ нет собственных значений на единичной окружности.

Таким образом, *при доказательстве теоремы* 31.1 *без ограничения общности можно считать, что пространство E конечномерно, что оператор A непрерывно дифференцируем и, наконец, что AE компактно и что у оператора A в области Ω есть лишь конечное число неподвижных точек $x_1, \ldots, x_k$, причем у операторов $A'(x_1), \ldots, A'(x_k)$ нет собственных значений на единичной окружности.*

Из непрерывной дифференцируемости оператора A вытекает, что и оператор $B = A^p$ непрерывно дифференцируем. Как легко видеть,

$$B'(x_j) = [A'(x_j)]^p \qquad (j = 1, \ldots, k). \tag{31.3}$$

Поэтому 1 не является собственным значением операторов $B'(x_1), \ldots, B'(x_k)$. Отсюда вытекает, что $x_1, \ldots, x_k$ — изолированные неподвижные точки оператора A^p. Индекс каждой такой неподвижной точки определяется знаком определителя матрицы $I - B'(x_j)$. Поэтому из (31.3) вытекают следующие равенства: $\operatorname{ind}(x_j, I - A^p) = \operatorname{ind}(x_j, I - A)$, если число p нечетно, и $\operatorname{ind}(x_j, I - A^p) \equiv \operatorname{ind}(x_j, I - A) \pmod p$, если $p = 2$.

Обозначим через U такую окрестность точек $x_1, \ldots, x_k$, что $\bar U \subset \Omega$ и на $\bar U$ оператор A^p не имеет неподвижных точек, отличных от $x_1, \ldots, x_k$. Из установленных выше равенств для индексов особых точек и из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает, что $\gamma(I - A^p, U) \equiv \gamma(I - A, U) \pmod p$. Поэтому *для доказательства теоремы* 31.1 *достаточно установить равенство* $\gamma(I - A^p, W) \equiv \gamma(I - A, W) \pmod p$, *где* $W = \Omega \setminus \bar U$.

Иначе говоря, без ограничения общности *можно дополнительно предполагать, что у оператора A в первоначальной области Ω нет неподвижных точек.*

31.4. Завершение доказательства. Предположим вначале, что у оператора A^p в области Ω есть лишь конечное число неподвижных точек. Напомним, что у самого оператора A неподвижных точек в области Ω нет.

Пусть $y \in \Omega$ — одна из неподвижных точек оператора A^p. По условиям теоремы все точки $y, Ay, \ldots, A^{p-1}y$ лежат в области Ω. Все они будут неподвижными точками оператора A^p; из простоты p вытекает, что все они различны. Поэтому все неподвижные точки оператора A^p, лежащие в области Ω, можно разбить на непересекающиеся группы

$$y_1, Ay_1, \ldots, A^{p-1}y_1;\ y_2, Ay_2, \ldots, A^{p-1}y_2;\ \ldots;\ y_s, Ay_s, \ldots, A^{p-1}y_s.$$

Из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает равенство

$$\gamma(I - A^p, \Omega) = \sum_{j=1}^{s} [\operatorname{ind}(y_j, A^p) + \operatorname{ind}(Ay_j, A^p) + \ldots + \operatorname{ind}(A^{p-1}y_j, A^p)]$$

и в силу теоремы 26.6

$$\gamma(I - A^p, \Omega) = p \sum_{j=1}^{s} \operatorname{ind}(y_j, A^p). \tag{31.4}$$

Так как A не имеет в области Ω неподвижных точек, то $\gamma(I - A, \Omega) = 0$ и, следовательно, из (31.4) следует (31.1).

Для завершения доказательства теоремы 31.1 *достаточно показать, что каждый непрерывный в конечномерном пространстве оператор A с компактным множеством значений можно с любой точностью аппроксимировать таким непрерывным оператором A_ε, что у оператора A^p_ε во всем пространстве E есть лишь конечное число неподвижных точек.*

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как множество AE ограничено, то (см., например, [1]) можно построить такое симплициальное отображение B_ε пространства E на себя, что

$$\| B_\varepsilon x - Ax \| < \varepsilon \quad (x \in E). \tag{31.5}$$

Симплициальному отображению B_ε соответствует такое симплициальное разбиение Σ пространства E, на каждом симплексе которого отображение B_ε аффинное. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ — замкнутые симплексы разбиения Σ, размерность которых совпадает с размерностью пространства E и которые покрывают ε-окрестность U множества AE. На каждом симплексе σ_j оператор B_ε имеет вид $B_\varepsilon x = D_j x + a_j$ $(j = 1, 2, \dots, k)$, где D_j — некоторая матрица. Выберем положительное число δ так, чтобы, во-первых, была справедлива оценка

$$\delta \| B_\varepsilon x \| < \varepsilon \quad (x \in E) \tag{31.6}$$

и чтобы, во-вторых, число $(1+\delta)^{-p}$ не было собственным значением всех матриц $D_{j_p} D_{j_{p-1}} \dots D_{j_1}$, где каждый из индексов $j_1, j_2, \dots, j_p$ пробегает все значения $1, 2, \dots, k$. После этого положим $A_\varepsilon = (1+\delta) B_\varepsilon$. Из (31.5) и (31.6) вытекает оценка

$$\| A_\varepsilon x - Ax \| < 2\varepsilon \quad (x \in E) \tag{31.7}$$

и нужно лишь показать, что у оператора A_ε^p есть лишь конечное число неподвижных точек.

В силу (31.7) все неподвижные точки оператора A_ε^p лежат в окрестности U. Поэтому, если y — неподвижная точка оператора A_ε^p, то каждая из точек $y, A_\varepsilon y, \dots, A_\varepsilon^{p-1} y$ лежит по крайней мере в одном из симплексов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$.

Припишем каждой неподвижной точке y оператора A_ε^p набор $\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ таких чисел, что $y \in \sigma_{j_1}$, $A_\varepsilon y \in \sigma_{j_2}, \dots$ $\dots, A_\varepsilon^{p-1} y \in \sigma_{j_p}$.

Допустим, что двум различным неподвижным точкам y и z можно приписать одинаковый набор $\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$. Тогда

$$A_\varepsilon y = (1+\delta) D_{j_1} y + (1+\delta) a_{j_1} = (1+\delta) D_{j_1} y + b_1,$$
$$A_\varepsilon z = (1+\delta) D_{j_1} z + (1+\delta) a_{j_1} = (1+\delta) D_{j_1} z + b_1.$$

Далее,

$$A_\varepsilon^2 y = (1+\delta)^2 D_{j_2} D_{j_1} y + (1+\delta) D_{j_2} b_1 + (1+\delta) a_{j_2} = (1+\delta)^2 D_{j_2} D_{j_1} y + b_2,$$
$$A_\varepsilon^2 z = (1+\delta)^2 D_{j_2} D_{j_1} z + (1+\delta) D_{j_2} b_1 + (1+\delta) a_{j_2} = (1+\delta)^2 D_{j_2} D_{j_1} z + b_2.$$

Повторяя это рассуждение, приходим к равенствам

$$A_\varepsilon^p y = (1+\delta)^p D_{j_p} \dots D_{j_2} D_{j_1} y + b_p,$$
$$A_\varepsilon^p z = (1+\delta)^p D_{j_p} \dots D_{j_2} D_{j_1} z + b_p,$$

из которых вытекает, что

$$y - z = (1+\delta)^p D_{j_p} \dots D_{j_2} D_{j_1} (y - z).$$

Таким образом, $(1+\delta)^{-p}$ является собственным значением оператора $D_{j_p} \dots D_{j_2} D_{j_1}$ и мы пришли к противоречию.

Следовательно, различным неподвижным точкам оператора A_ε^p можно приписать лишь различные наборы индексов. Из конечности числа различных наборов вытекает конечность числа неподвижных точек оператора A_ε^p. Теорема 31.1 полностью доказана. ∎

31.5. Следствия и обобщения. Из теоремы 31.1, в частности, вытекает

Теорема 31.2. *Пусть вполне непрерывный оператор A действует в банаховом пространстве E. Пусть x_0 — изолированная неподвижная точка операторов A и A^p, где p — простое число. Тогда*

$$\operatorname{ind}(x_0, I - A^p) \equiv \operatorname{ind}(x_0, I - A) \pmod p.$$

Теорема 31.1 является частным случаем следующего утверждения.

Теорема 31.3. *Пусть на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области Ω определена степень A^{mq^k} вполне непрерывного оператора A. Пусть $AF_{mq^k} \subset \Omega$, где F_{mq^k} — множество всех неподвижных точек оператора A^{mq^k}, лежащих в $\overline{\Omega}$. Пусть q — простое число. Тогда*

$$\gamma\left(I - A^{mq^k}, \Omega\right) \equiv \gamma\left(I - A^{mq^{k-1}}, \Omega\right) \pmod{q^k}. \tag{31.8}$$

Доказывается эта теорема дословно так же, как теорема 31.1. Заметим, что непосредственно из теоремы 31.1 вытекает более слабое, чем (31.8), равенство

$$\gamma\left(I - A^{mq^k},\ \Omega\right) \equiv \gamma\left(I - A^{mq^{k-1}},\ \Omega\right) (\mathrm{mod}\ q).$$

Теоремы 31.1 и 31.3 позволяют устанавливать разнообразные соотношения между вращениями векторных полей с итерациями различного порядка оператора A. Ниже используются обозначения: F_j — это множество всех неподвижных точек оператора A^j на $\bar{\Omega}$, $\gamma_j = \gamma(I - A^j, \Omega)$.

Приведем в начале два примера.

Пусть $AF_{77} \subset \Omega$. Тогда из теоремы 31.1 вытекают равенства $\gamma_{77} \equiv \gamma_{11} (\mathrm{mod}\ 7)$, $\gamma_7 \equiv \gamma_1 (\mathrm{mod}\ 7)$ и $\gamma_{77} \equiv \gamma_7 (\mathrm{mod}\ 11)$, $\gamma_{11} \equiv \gamma_1 (\mathrm{mod}\ 11)$. Поэтому $\gamma_{77} \equiv \gamma_{11} + \gamma_7 - \gamma_1 (\mathrm{mod}\ 77)$.

Пусть $AF_{60} \subset \Omega$. Тогда из теоремы 31.1 вытекают равенства $\gamma_{60} \equiv \gamma_{20} (\mathrm{mod}\ 3)$, $\gamma_{30} \equiv \gamma_{10} (\mathrm{mod}\ 3)$, $\gamma_{12} \equiv \gamma_4 (\mathrm{mod}\ 3)$, $\gamma_6 \equiv \gamma_2 (\mathrm{mod}\ 3)$ и $\gamma_{60} \equiv \gamma_{12} (\mathrm{mod}\ 5)$, $\gamma_{30} \equiv \gamma_6 (\mathrm{mod}\ 5)$, $\gamma_{20} \equiv \gamma_4 (\mathrm{mod}\ 5)$, $\gamma_{10} \equiv \gamma_2 (\mathrm{mod}\ 5)$, а из теоремы 31.3 — равенства $\gamma_{60} \equiv \gamma_{30} (\mathrm{mod}\ 4)$, $\gamma_{20} \equiv \gamma_{10} (\mathrm{mod}\ 4)$, $\gamma_{12} \equiv \gamma_6 (\mathrm{mod}\ 4)$, $\gamma_4 \equiv \gamma_2 (\mathrm{mod}\ 4)$. Поэтому $\gamma_{60} \equiv \gamma_{30} + \gamma_{20} + \gamma_{12} - \gamma_{10} - \gamma_6 - \gamma_4 + \gamma_2 (\mathrm{mod}\ 60)$.

Эти примеры являются частными случаями следующего общего утверждения, в формулировке которого используется известная теоретико-числовая функция $\mu(a)$ Мебиуса. Напомним, что $\mu(1) = 1$; $\mu(p) = -1$ для простых p; $\mu(a) = (-1)^k$, если $a = p_1 p_2 \dots p_k$ и числа $p_1, p_2, \dots, p_k$ простые и различные; $\mu(a) = 0$ для остальных a.

Теорема 31.4. *Если $F_m \subset \Omega$ и $AF_m \subset \Omega$ при некотором натуральном m, то*

$$\sum \mu\left(\frac{m}{d}\right) \gamma(I - A^d, \Omega) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m), \tag{31.9}$$

где сумма берется по всем делителям d числа m.

Результаты пп. 28.6, 28.7 и §§ 29, 30 принадлежат Е. А. Лифшицу и М. А. Красносельскому (ДАН СССР **165**, № 2 (1965); **176**, № 5 (1967); «Elliptische Differentialgleichungen» 2, Berlin (1971), 147—153).

Теоремы, изложенные в § 31, получены П. П. Забрейко и М. А. Красносельским (ДАН СССР **196**, № 5 (1971)); частично они повторены Г. Штайнлайном (Steinlein H., Math. Z., **126**, № 2 (1972), 176—208; Manuscr. Math. 8, № 3 (1973), 251—266).

Глава 4

ПОЛЯ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Основные приложения развитой выше теории вполне непрерывных векторных полей $I - A$ опираются не на полную непрерывность оператора A, а на несколько простых свойств вращения: сохранение вращения при гомотопных деформациях; существование у оператора A неподвижных точек в области, на границе которой поле $I - A$ имеет ненулевое вращение; теорему об алгебраическом числе особых точек; классификационные теоремы. Обладающее (полностью или частично) такими свойствами вращение можно определить для различных классов полей, охватывающих класс вполне непрерывных. Для этого изобретены специальные приемы. Некоторые из них излагаются в этой главе.

§ 32. Метод частичного переопределения операторов

32.1. Компактно сужаемые операторы. В построениях этого параграфа существенную роль играет понятие фундаментального множества, введенное в п. 25.4. Фундаментальность для оператора A выпуклого множества S относительно множества M, на котором задан A, имеет простой геометрический смысл — во-первых, $A(S \cap M) \subset S$ и, во-вторых, если $x_0 \in M$ и $x_0 \,\overline{\in}\, S$, то Ax_0 не может принадлежать объединению $K(x_0)$ всех выходящих из x_0 лучей, продолжения которых проходят через точки множества S.

Ограниченное непустое замкнутое и выпуклое множество $R \subset E$ назовем *несущим* для оператора A относительно множества $M \subset E$, если R содержит хотя бы одно фундаментальное для A относительно M множество (это фундаментальное множество может быть пустым, если A не имеет на M неподвижных точек), если $A(M \cap R) \subset R$ и если, наконец, A вполне непрерывен на $M \cap R$. Последнее свойство всегда выполнено, если A непрерывен, а множество R компактно.

Оператор A назовем *компактно сужаемым* на M, если для него может быть указано несущее множество. Очевидно, каждый вполне непрерывный оператор компактно сужаем — в качестве R можно рассмотреть, например, любой содержащий AM шар (или множество $\overline{\text{co}}\,AM$).

Пусть $M = \overline{\Omega}$, где Ω — ограниченная область в E. Нашей ближайшей целью является определение вращения на $\dot{\Omega}$ поля $I - A$ с компактно сужаемым на $\overline{\Omega}$ оператором A. Новое определение в случае вполне непрерывного A будет совпадать с определением из гл. 2 — поэтому мы сохраним старое обозначение $\gamma(I - A, \Omega)$ для вращения в новой ситуации.

Пусть оператор A компактно сужаем на $\overline{\Omega}$, а R — некоторое несущее для A множество. Обозначим через $A(R)$ сужение оператора A на множество $\overline{\Omega} \cap R$. Как показано в п. 18.5, оператор $A(R)$ можно продолжить до определенного на $\overline{\Omega}$ вполне непрерывного оператора $\tilde{A}(R)$ со значениями в R. Если A не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$, то и у оператора $\tilde{A}(R)$ не будет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$, а следовательно, будет определено вращение $\gamma[I - \tilde{A}(R), \Omega]$. Положим

$$\gamma(I - A, \Omega) = \gamma[I - \tilde{A}(R), \Omega]. \qquad (32.1)$$

Для обоснования корректности введенного понятия нужно показать, что $\gamma[I - \tilde{A}(R), \Omega]$ *не зависит ни от выбора несущего множества R, ни от выбора продолжения $\tilde{A}(R)$ оператора $A(R)$.*

Наше утверждение очевидно, если оператор A не имеет на $\overline{\Omega}$ неподвижных точек — в этом случае все операторы $\tilde{A}(R)$ не имеют на $\overline{\Omega}$ неподвижных точек и поэтому все вращения $\gamma[I - \tilde{A}(R), \Omega]$ равны нулю. Поэтому в дальнейших рассуждениях можно считать все фундаментальные для A множества непустыми и имеющими непустое пересечение S_0 (содержащее все неподвижные точки). Множество S_0 также фундаментально для A.

Пусть R — несущее множество, а $\tilde{A}_1(R)$ и $\tilde{A}_2(R)$ — два продолжения оператора $A(R)$. Из выпуклости R вытекает, что при $x \in \dot{\Omega}$ и $x \in R$ векторы $x - \tilde{A}_1(R)x$ и $x - \tilde{A}_2(R)x$ направлены непротивоположно; эти векторы совпадают при $x \in \dot{\Omega} \cap R$. Следовательно, поля $I - \tilde{A}_1(R)$ и $I - \tilde{A}_2(R)$ гомотопны на $\dot{\Omega}$ и имеют одинаковое вращение.

Построим теперь операторы $\tilde{A}(R)$ и $\tilde{A}(S_0)$; нам осталось показать совпадение вращений на $\dot{\Omega}$ полей $I - \tilde{A}(R)$ и $I - \tilde{A}(S_0)$. В предположении противного эти поля негомотопны на $\dot{\Omega}$ и поэтому в некоторой точке $x_0 \in \dot{\Omega}$ векторы этих полей направлены противоположно. Тогда $x_0 \in R$. Но точка x_0 не может принадлежать S_0, так как на S_0 оба поля совпадают с полем $I - A$, и не может принадлежать $R \setminus S_0$, так как S_0 фундаментально ∎

Непосредственно из определения и из теории вполне непрерывных полей вытекают обычные свойства вращения. Для удобства ссылок сформулируем их.

Теорема 32.1. *Пусть векторное поле $I - A$ с компактно сужаемым оператором A определено на $\overline{\Omega}$ и невырождено на $\dot{\Omega}$, где Ω — ограниченная область в E. Пусть $\gamma(I - A, \Omega) \neq 0$. Тогда оператор A имеет в области Ω по крайней мере одну неподвижную точку.*

Теорема 32.2. *Пусть области Ω_1 и Ω_2 не имеют общих точек и лежат в ограниченной области Ω. Пусть оператор A компактно сужаем на $\overline{\Omega}$ и поле $I - A$ невырождено на $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Тогда*

$$\gamma(I - A, \Omega) = \gamma(I - A, \Omega_1) + \gamma(I - A, \Omega_2). \qquad (32.2)$$

Теоремы 32.1 и 32.2 позволяют ввести понятие *индекса* изолированной особой точки поля $I - A$ с компактно сужаемым оператором A, а затем установить теорему об алгебраическом числе особых точек. Так как определения, формулировки и доказательства соответствующих утверждений (см. п. 20.4) при переходе к компактно сужаемым операторам не меняются, то мы их здесь не приводим.

Пусть на $\overline{\Omega}$ задано семейство компактно сужаемых операторов $A(\lambda)$ $(\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2)$ с общим несущим множеством R. Если поля $\Phi(\lambda) = I - A(\lambda)$ определяют на $\dot{\Omega} \cap R$ гомотопный переход от поля $\Phi(\lambda_1)$ к полю $\Phi(\lambda_2)$, то скажем, что поля $I - A(\lambda_1)$ и $I - A(\lambda_2)$ *супергомотопны* на $\dot{\Omega}$. Поля $I - A_0$ и $I - A_1$ с компактно сужаемыми операторами называются *гомотопными на* $\dot{\Omega}$, если можно указать такой конечный набор полей $I - B_1, \ldots, I - B_k$, что $I - A_0$ супергомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $I - B_1$, каждое поле $I - B_i$ супергомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $I - B_{i+1}$, поле $I - B_k$ супергомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $I - A_1$.

Непосредственно из определения вытекает инвариантность вращения при переходе к супергомотопному полю. Поэтому верна

Теорема 32.3. *Пусть векторные поля $I-A_0$ и $I-A_1$ с компактно сужаемыми операторами A_0 и A_1, заданными на $\overline{\Omega}$, гомотопны на $\dot{\Omega}$. Тогда вращения этих полей на $\dot{\Omega}$ одинаковы.*

Для вполне непрерывных векторных полей понятия гомотопности и супергомотопности, конечно, совпадают. Отметим, что каждое невырожденное на $\dot{\Omega}$ поле $I-A$ с компактно сужаемым на $\overline{\Omega}$ оператором A супергомотопно на $\dot{\Omega}$ вполне непрерывному полю (например, всем построенным при исследовании корректности понятия вращения полям $I-\tilde{A}(R)$). Отсюда вытекает справедливость указанных в п. 20.5 обобщений теоремы Хопфа для полей с компактно сужаемыми операторами.

Применения утверждений этого пункта к исследованию векторных полей с операторами A, не обладающими свойством полной непрерывности, требуют построения несущих множеств. В последующих пунктах параграфа мы детально опишем один важный класс операторов, для которых такое построение возможно.

32.2. Меры некомпактности. Пусть каждому ограниченному множеству $M\subset E$ приписано неотрицательное число $\psi(M)$, причем $\psi(\overline{\mathrm{co}}\, M)=\psi(M)$ и из $M_1\subset M_2$ следует $\psi(M_1)\leqslant\psi(M_2)$. Тогда функция $\psi(M)$ называется *мерой некомпактности.*

Приведем несколько примеров мер некомпактности.

Мера некомпактности Куратовского $\alpha(M)$ — точная нижняя граница тех $d>0$, при которых M можно покрыть конечным числом множеств диаметра d. *Мера некомпактности Хаусдорфа* $\chi_R(M)$, порожденная выпуклым множеством $R\subset E$, — точная нижняя граница тех $\varepsilon>0$, при которых M обладает в R конечной ε-сетью.

Пусть последовательность линейных операторов P_n проектирования на конечномерные подпространства сильно сходится на E к единичному оператору I. Тогда в E можно задать меру некомпактности формулой

$$\psi(M)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in M}\|x-P_nx\|. \qquad (32.3)$$

Пусть E — это либо пространство C непрерывных на $[a,b]$ функций, либо одно из пространств L_p $(1\leqslant p<\infty)$. Тогда на E можно определить меру некомпактности

$$\psi(M)=\overline{\lim_{\lambda\to+0}}\sup_{x\in M}\|x(t,\lambda)-x(t)\|_E. \qquad (32.4)$$

Здесь $x(t,\lambda)=x(t+\lambda)$ при $t+\lambda\leqslant b$, $x(t+\lambda)=x(b)$ при $t+\lambda>b$ в случае пространства C, $x(t+\lambda)=0$ при $t+\lambda>b$ в случае пространств L_p.

Анализ конкретных мер некомпактности часто непрост. Приведенные выше меры некомпактности обладают следующими важными свойствами (доказательства предоставляем читателю).

1. *Множество M компактно в том и только том случае, когда* $\psi(M)=0$.

2. $\psi(M\cup N)=\max\{\psi(M),\psi(N)\}$.

3. $\psi(\alpha M+\beta N)\leqslant|\alpha|\psi(M)+|\beta|\psi(N)$, *где* $\alpha M+\beta N=\{x\colon x=\alpha u+\beta v,\ u\in M,\ v\in N\}$. *При этом* $\psi(\alpha M)=|\alpha|\psi(M)$, *где* $\alpha M=\{x\colon x=\alpha u,\ u\in M\}$.

4. *Каждому* $\varepsilon>0$ *соответствует такое* $\delta>0$, *что из* $\psi(M)<\delta$ *следует существование в M конечной ε-сети.*

5. *Каждому* $\varepsilon>0$ *соответствует такое* $\delta>0$, *что из* $M\subset M_0+T(\delta)$, *где* $T(\delta)=\{x\colon \|x\|<\delta\}$, *следует оценка* $\psi(M)<\psi(M_0)+\varepsilon$.

Определенный на $\overline{\Omega}$ непрерывный и ограниченный оператор A называется *ψ-уплотняющим*, если для каждого некомпактного $M\subset\overline{\Omega}$ выполнено строгое неравенство $\psi(AM)<\psi(M)$.

Теорема 32.4. *Каждый ψ-уплотняющий на $\overline{\Omega}$ оператор A компактно сужаем на $\overline{\Omega}$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть ψ-уплотняющий оператор A, у которого есть неподвижные точки, и построить для него компактное фундаментальное множество S_0.

Обозначим через S_0 пересечение всех фундаментальных для A относительно $\overline{\Omega}$ множеств. Фундаментальные множества существуют (к ним относятся все содержащие AM шары), их пересечение S_0 непусто — оно содержит все неподвижные точки оператора A. Множество S_0 фундаментально как пересечение фундаментальных множеств. Множество $\overline{\mathrm{co}}\,A(\overline{\Omega}\cap S_0)$ также фундаментально и содержится в S_0; поэтому $\overline{\mathrm{co}}\,A(\overline{\Omega}\cap S_0)=S_0$.

Наконец, множество S_0 компактно, так как в противном случае

$$\psi(S_0)=\psi[\overline{\mathrm{co}}\, A(\overline{\Omega}\cap S_0)]=$$
$$=\psi[A(\overline{\Omega}\cap S_0)]<\psi(\overline{\Omega}\cap S_0)\leqslant\psi(S_0). \blacksquare$$

В силу теоремы 32.4 определено вращение векторного поля $I-A$ с ψ-уплотняющим оператором A. Для таких полей верны утверждения п. 32.1.

Операторы, удовлетворяющие условию Липшица с постоянной $q<1$, очевидно, уплотняют в мере некомпактности Куратовского α. Более того, *α-уплотняющими будут операторы обобщенного сжатия, т. е. операторы A, удовлетворяющие условию*

$$\|Ax-Ay\|\leqslant q(\rho)\|x-y\| \quad (\|x-y\|\geqslant\rho;\ x,\ y\in\overline{\Omega}), \tag{32.5}$$

где $q(\rho)<1$ при $\rho>0$. Вполне непрерывные операторы уплотняют по любой мере некомпактности ψ, обладающей свойством 1. Нетрудно видеть, что *сумма вполне непрерывного оператора и оператора сжатия (или обобщенного сжатия) есть α-уплотняющий оператор.*

Пусть $\overline{\Omega}\subset R$, где R — выпуклое подмножество E. Предположим, что оператор A допускает представление $Ax=F(x,x)$ $(x\in\overline{\Omega})$, причем оператор $F(x,y)$ $(x\in R,\ y\in\overline{\Omega},\ F(x,y)\in R)$ при фиксированных x вполне непрерывен по y и

$$\|F(x_1,y)-F(x_2,y)\|\leqslant q(\rho)\|x_1-x_2\| \tag{32.6}$$
$$(\|x_1-x_2\|\geqslant\rho;\ x_1,\ x_2\in R;\ y\in\overline{\Omega}),$$

где $q(\rho)<1$ при $\rho>0$. Тогда A χ_R-уплотняет на $\overline{\Omega}$.

32.3. Поля с уплотняющими операторами. Семейство заданных на $\overline{\Omega}$ непрерывных операторов $A(\lambda)$ $(\lambda_1\leqslant\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)$ назовем *равномерно ψ-уплотняющим*, если множество $\bigcup\limits_\lambda A(\lambda)\overline{\Omega}$ ограничено и для каждого некомпактного $M\subset\overline{\Omega}$ выполнено строгое неравенство

$$\psi\Big[\bigcup_\lambda A(\lambda)M\Big]<\psi(M). \tag{32.7}$$

Пусть R — выпуклое подмножество E и $\overline{\Omega}\subset R$. Рассмотрим семейство заданных на $\overline{\Omega}$ операторов

$$A(\lambda)x=F(x,x;\lambda) \quad (x\in\overline{\Omega},\ \lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2), \tag{32.8}$$

где $F(x,y;\lambda)$ $(x\in R,\ y\in\overline{\Omega},\ \lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2)$ при каждом фиксированном $x\in R$ вполне непрерывен как оператор от двух остальных переменных и

$$\|F(x_1,y;\lambda)-F(x_2,y;\lambda)\|\leqslant q(\rho)\|x_1-x_2\| \quad (\|x_1-x_2\|\geqslant\rho), \tag{32.9}$$

причем $q(\rho)<1$ при $\rho>0$ и $q(\rho)$ не зависит от y и λ. Нетрудно проверить, что *семейство операторов* (32.8) *будет равномерно χ_R-уплотняющим.*

Векторные поля $I-A_0$ и $I-A_1$ с ψ-уплотняющими на $\overline{\Omega}$ операторами A_0 и A_1 назовем *ψ-гомотопными* на $\overline{\Omega}$, если можно построить равномерно ψ-уплотняющее семейство заданных на $\overline{\Omega}$ операторов $A(\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ так, что все поля $I-A(\lambda)$ невырождены на $\dot{\Omega}$, выполнены равенства $A(0)=A_0$ и $A(1)=A_1$, выражение $A(\lambda)x$ непрерывно по совокупности переменных $0\leqslant\leqslant\lambda\leqslant 1$, $x\in\overline{\Omega}$. О полях $I-A(\lambda)$ будем говорить при этом, что они *ψ-гомотопно на $\overline{\Omega}$ соединяют $I-A_0$ и $I-A_1$.*

Теорема 32.5. *Из ψ-гомотопности на $\overline{\Omega}$ полей $I-A_0$ и $I-A_1$ вытекает их супергомотопность на $\dot{\Omega}$.*

Доказательство. Пусть поля $I-A_0$ и $I-A_1$ соединены ψ-гомотопно на $\overline{\Omega}$ полями $I-A(\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\leqslant 1)$. Если все поля $I-A(\lambda)$ невырождены на $\overline{\Omega}$, то общим несущим множеством R_0 для всех операторов $A(\lambda)$ будет множество, состоящее из одной точки, лежащей вне шара, содержащего все множества $A(\lambda)\overline{\Omega}$, — остается сослаться на определение супергомотопности.

Пусть теперь множество F_0 всех особых точек всех полей $I-A(\lambda)$ (рассматриваемых, конечно, на $\overline{\Omega}$) непусто. Обозначим через $\mathfrak{R}$ семейство ограниченных замкнутых и выпуклых множеств R, для которых

$$A(\lambda)(\overline{\Omega}\cap R)\subset R \quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1) \tag{32.10}$$

и каждое из которых содержит хотя бы одно фундаментальное множество каждого оператора $A(\lambda)$. К семейству $\mathfrak{R}$ относится, например, множество $\overline{\mathrm{co}}\bigcup\limits_\lambda A(\lambda)\overline{\Omega}$. Пересечение R_0 всех множеств семейства $\mathfrak{R}$ непусто, так как оно содержит F_0. Из (32.10) вытекают включения $A(\lambda)(\overline{\Omega}\cap R_0)\subset R_0$; множество R_0 очевидным образом содержит минимальное фундаментальное множество (построенное при доказательстве теоремы 32.4) каждого оператора $A(\lambda)$. Поэтому $R_0 \in \mathfrak{R}$, т. е. R_0 является минимальным множеством в совокупности $\mathfrak{R}$. Доказательство будет завершено, если мы установим компактность множества $\overline{\Omega} \cap R_0$.

Допустим, что множество $\overline{\Omega} \cap R_0$ некомпактно. Положим тогда $R_1 = \overline{\text{co}} \bigcup\limits_{\lambda} A(\lambda)[\overline{\Omega} \cap R_0]$. Из (32.7) вытекает оценка $\psi(R_1) < \psi(\overline{\Omega} \cap R_0) \leqslant \psi(R_0)$. С другой стороны, $R_1 \in \mathfrak{R}$ (проверьте). Поэтому $R_0 \subset R_1$ и $\psi(R_0) \leqslant \psi(R_1)$. ∎

Из теорем 32.5 и 32.3 вытекает

Теорема 32.6. *Из ψ-гомотопности на $\overline{\Omega}$ полей $I - A_0$ и $I - A_1$ вытекает, что их вращение на $\dot{\Omega}$ одинаково.*

Для применения теоремы 32.6 нужно уметь строить равномерно ψ-уплотняющие семейства операторов $A(\lambda)$. Здесь полезна очевидная

Лемма 32.1. *Пусть каждый оператор $A(\lambda)$ $(\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2)$ задан на $\overline{\Omega}$ и ψ-уплотняет, причем мера некомпактности ψ обладает свойствами 2, 5. Пусть выражение $A(\lambda)x$ непрерывно по λ равномерно относительно $x \in \overline{\Omega}$. Тогда семейство $A(\lambda)$ будет равномерно ψ-уплотняющим.*

В силу этой леммы семейство $\lambda A_1 + (1-\lambda)A_0$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ будет равномерно ψ-уплотняющим на $\overline{\Omega}$, если оба оператора A_0 и A_1 ψ-уплотняют и ψ обладает свойствами 2, 5. Впрочем, этот факт легко доказывается непосредственно; при этом от ψ достаточно потребовать выполнения только условия 2. Отсюда вытекают важные следствия.

Теорема 32.7. *Пусть мера некомпактности ψ обладает свойством 2. Пусть ψ-уплотняющие на $\overline{\Omega}$ операторы A_0 и A_1 принимают одинаковые значения на $\dot{\Omega}$ и не имеют неподвижных точек на $\dot{\Omega}$. Тогда $\gamma(I - A_0, \Omega) = \gamma(I - A_1, \Omega)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что поля $I - A(\lambda)$ с операторами $A(\lambda) = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_0$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ невырождены на $\dot{\Omega}$ и ψ-гомотопно на $\overline{\Omega}$ соединяют поля $I - A_0$ и $I - A_1$. ∎

Теорема 32.7 означает, что *вращение поля $I - A$ с ψ-уплотняющим на $\overline{\Omega}$ оператором A определяется значениями A только на $\dot{\Omega}$.*

32.4. Примеры вычисления вращения. В этом пункте мы перенесем на поля с ψ-уплотняющими операторами несколько простых теорем из § 21.

Теорема 32.8. *Пусть мера некомпактности ψ обладает свойством 2. Пусть $\overline{\Omega}$ — замыкание ограниченной выпуклой области $\Omega \subset E$. Пусть заданный на $\overline{\Omega}$ ψ-уплотняющий оператор A не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек и $A\dot{\Omega} \subset \overline{\Omega}$. Тогда $\gamma(I - A, \Omega) = 1$.*

Для доказательства нужно выбрать в Ω точку x_0 и заметить, что семейство $A(\lambda)x = (1-\lambda)Ax + \lambda x_0$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ соединяет ψ-гомотопно поле $I - A$ с полем $\Phi(1)x = x - x_0$. Остается сослаться на теорему 32.6 и на очевидное равенство $\gamma[\Phi(1), \Omega] = 1$. ∎

Теорема 32.9. *Пусть мера некомпактности ψ обладает свойством 2 и четна: $\psi(-M) = \psi(M)$ для любого ограниченного множества M (например, ψ обладает свойством 3). Пусть ψ-уплотняющий оператор A задан на шаре $\overline{\Omega} = \{x: \|x\| \leqslant 1\}$. Пусть у A нет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и векторы поля $\Phi_0 = I - A$ в диаметрально противоположных точках сферы $\dot{\Omega}$ направлены неодинаково. Тогда вращение $\gamma(I - A, \Omega)$ нечетно.*

Для доказательства заметим вначале, что вместе с A будет ψ-уплотняющим на $\overline{\Omega}$ и оператор $Bx = -A(-x)$. Поэтому векторные поля $\Phi(\lambda) = I - (1-\lambda)A - \lambda B$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1/2)$ соединяют ψ-гомотопно на $\dot{\Omega}$ поле $\Phi(0) = I - A$ с нечетным на $\overline{\Omega}$ полем $\Phi(1/2)$. В силу теоремы 32.6 достаточно установить нечетность вращения на $\dot{\Omega}$ поля $\Phi(1/2)$, нечетного на $\overline{\Omega}$.

Для простоты будем считать, что сам оператор A нечетен на $\overline{\Omega}$. Тогда минимальное фундаментальное множество S_0 для оператора A относительно $\overline{\Omega}$ будет симметричным относительно нулевой точки пространства E.

Рассмотрим сужение $A(S_0)$ оператора A на S_0 и, далее, какое-либо его вполне непрерывное продолжение $\tilde{A}(S_0)$ на $\overline{\Omega}$ со значениями в S_0. Оператор $\hat{A}_1(S_0)x =$

$=\frac{1}{2}\tilde{A}(S_0)x-\frac{1}{2}\tilde{A}(S_0)(-x)$ также будет вполне непрерывным продолжением оператора $A(S_0)$ на $\bar{\Omega}$ со значениями в S_0. Поэтому $\gamma(I-A,\Omega)=\gamma[I-\tilde{A}_1(S_0),\Omega]$. Но поле $I-\tilde{A}_1(S_0)$ нечетно и его вращение на $\dot{\Omega}$ нечетно в силу теоремы 21.11. ∎

В качестве последнего примера рассмотрим задачу о вычислении индекса особой точки поля $I-A$ с ψ-уплотняющим оператором A.

Радиусом Фредгольма линейного оператора B называется инфимум таких $a>0$, что вне круга $|\lambda|<a$ оператор B имеет лишь конечное число точек спектра, причем каждая из этих точек спектра является собственным значением конечной кратности. Если радиус Фредгольма оператора B меньше чем 1, то назовем этот оператор *регулярным*.

Пусть x_0 — неподвижная точка ψ-уплотняющего оператора A и оператор A дифференцируем в точке x_0. Если число 1 не является точкой спектра оператора $A'(x_0)$, то неподвижная точка x_0 изолирована. Естественно попытаться получить для вычисления $\operatorname{ind}(x_0,A)$ формулу, аналогичную (21.13). Это можно сделать, если мера некомпактности ψ обладает свойствами 1, 3 и если $\psi(AM)\leqslant q\psi(M)$ $(q<1)$ для любого ограниченного множества M, — в этих условиях оператор $A'(x_0)$ оказывается регулярным и поэтому можно найти сумму β_0 кратностей положительных и бóльших чем 1 собственных значений оператора $A'(x_0)$. *Индекс неподвижной точки определяется равенством*

$$\operatorname{ind}(x_0,A)=(-1)^{\beta_0}. \tag{32.11}$$

32.5. Предельно компактные операторы. Для построения несущих множеств операторов могут быть применены конструкции, отличные от использованных выше.

Определим, например, трансфинитную последовательность множеств R_α равенствами $R_1=\overline{\mathrm{co}}\,A\bar{\Omega}$; $R_\alpha=\overline{\mathrm{co}}\,A(\bar{\Omega}\cap R_{\alpha-1})$, если $\alpha-1$ существует; $R_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}R_\beta$, если $\alpha-1$ не существует. Последовательность R_α, очевидно, «стабилизируется», и поэтому в ней есть наименьшее множество R^*, которое называют *предельной областью значений оператора A* на $\bar{\Omega}$. Если предельная область значений оператора A является компактным множеством, то A называется *предельно компактным оператором*. Каждый предельно компактный оператор компактно сужаем — в качестве фундаментального множества можно выбрать предельную область значений. Поэтому для векторных полей с предельно компактными операторами определено вращение и это вращение обладает естественными свойствами.

Как оказывается, *оператор A предельно компактен на $\bar{\Omega}$ в том и только том случае, когда из равенства $M=\overline{\mathrm{co}}\,A(M\cap\bar{\Omega})$ вытекает компактность множества M.*

Мы не имеем возможности изложить здесь детально теорию полей с предельно компактными операторами и ее приложения. Отметим лишь, что *каждый ψ-уплотняющий оператор предельно компактен.*

Теория, начала которой изложены в этом параграфе, в основном построена Б. Н. Садовским; им изучены общие меры некомпактности, развита общая теория уплотняющих и предельно компактных операторов, указаны ее приложения (в частности, к дифференциальным уравнениям нейтрального типа). Первое определение вращения поля с уплотняющим оператором предложили Г. М. Вайникко и Б. Н. Садовский; в построении теории вращения важную роль сыграли работы Ю. Г. Борисовича и Ю. И. Сапронова. Уплотняющим операторам и их применениям ряд работ посвятили А. Амброзетти (A. Ambrosetti), И. А Бахтин, В. А. Бондаренко, Дж. Вебб (J. R. L. Webb), А. Виньоли (A. Vignoli), К. Гебель (K. Goebel), И. Данеш (J. Daneš), В. Истратеску (V. Istratescu), М. И. Каменский, В. С. Козякин, Е. А. Лифшиц, В. В. Обуховский, А. И. Поволоцкий, А. Родкина, Х. Фенске (Ch. Fenske), М. Фури (M. Furi) и другие авторы. Библиография работ до 1971 г. имеется в интересном обзоре Б. Н. Садовского [49]

Изложенная в этом параграфе схема, основанная на понятиях фундаментального и несущего множеств, ранее не публиковалась.

Отметим еще, что изучение широких классов отображений, близких к отображениям вида «обратимый оператор плюс уплотняющий», интенсивно ведут Р. Д. Нуссбаум (R. D. Nussbaum) и В. В. Петришин (W. V. Petryshyn).

§ 33. Поля с положительными операторами

33.1. Конусы и полуупорядоченность. В первых пунктах этого параграфа излагаются основные понятия теории конусов в банаховых пространствах. Эти понятия будут играть важную роль во многих параграфах последующих глав.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если из $x \in K$ и $x \neq 0$ вытекает, что $\alpha x \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha x \overline{\in} K$ при $\alpha < 0$. Каждый конус K определяет в банаховом пространстве E *полуупорядоченность*: пишут $x \leqslant y$ или $y \geqslant x$, если $y - x \in K$. Соотношение $\leqslant$ обладает свойствами обычного знака $\leqslant$: неравенства можно умножать на неотрицательные числа, одноименные неравенства можно почленно складывать, в неравенствах можно переходить к пределам, из $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ следует $x \leqslant z$, из $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ следует $x = y$. Элементы из K называют *положительными*. Множество $\langle u, v \rangle = \{x\colon u \leqslant x \leqslant v\}$ называют *конусным отрезком*.

Конус K называется *телесным*, если хотя бы одна точка x_0 входит в K вместе с некоторой окрестностью. Конус K *воспроизводящий*, если каждый элемент $x \in E$ представим в виде

$$x = u - v \quad (u, v \in K). \tag{33.1}$$

Элементы u, v в представлении (33.1) определяются, конечно, неоднозначно; их можно выбрать так, что $\| u \|$, $\| v \| \leqslant a \| x \|$, где $a = a(K)$ и $a(K)$ не зависит от элемента x. Последнее свойство называют *несплющенностью* воспроизводящего конуса.

Множество $M \subset E$ называется *ограниченным по конусу* K, если найдется такой элемент $y \in E$, что $x \leqslant y$ при всех $x \in M$; элемент y называется *верхней границей* множества M. Аналогично определяется *нижняя граница* множества.

Если в множестве верхних границ множества M есть наименьший элемент z, то он называется *точной верхней границей* множества M и обозначается через $\sup M$. Аналогично определяется *точная нижняя граница* $\inf M$.

Конус K называется *миниэдральным*, если каждое множество M из двух элементов $x, y \in E$ имеет точную верхнюю границу $\sup(x, y)$. Если же точная верхняя граница есть у каждого ограниченного множества, то конус K называется *сильно миниэдральным*.

Конус K называется *нормальным*, если из $0 \leqslant x \leqslant y$ следует $\| x \| \leqslant N \| y \|$, где N не зависит от x и y. Число $N = N(K)$ называется *константой нормальности* конуса K. Если $N = 1$, то конус K называется *острым*.

Последовательность $x_n \in E$ называется *неубывающей*, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots$ Аналогично определяются *невозрастающие* последовательности. Неубывающие и невозрастающие последовательности образуют класс *монотонных* последовательностей. *Каждая компактная монотонная последовательность сходится по норме.*

Конус K называется *правильным*, если каждая неубывающая ограниченная по конусу последовательность сходится по норме. Если же сходится по норме каждая неубывающая ограниченная по норме последовательность, то конус K называется *вполне правильным*. *Из полной правильности конуса вытекает его правильность, а из правильности конуса — его нормальность.*

Конус K *оштукатуриваем* (или *допускает оштукатуривание*), если существует такой конус $K_1 \supset K$, что каждая точка $x_0 \in K$ входит в K_1 вместе с шаровой окрестностью $\| x - x_0 \| \leqslant \alpha \| x_0 \|$, где $\alpha > 0$ и α не зависит от x_0. *Из оштукатуриваемости конуса вытекает его полная правильность.* Конус K называется *локально компактным*, если компактно пересечение конуса K с каждым шаром. *Каждый локально компактный конус допускает оштукатуривание.*

Приведем примеры конусов.

В каждом из пространств C, C_1, L_p скалярных функций множество неотрицательных функций образует конус. В пространстве C непрерывных функций этот конус телесный, острый и миниэдральный; свойствами сильной миниэдральности и правильности он не обладает. В пространстве C_1 непрерывно дифференцируемых функций этот конус не воспроизводящий, не нормальный, не миниэдральный. В каждом из пространств L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ конус неотрицательных функций воспроизводящий (но не телесный), острый, сильно миниэдральный и вполне правильный. В L_1 этот конус допускает оштукатуривание.

В конечномерных пространствах каждый конус локально компактен и потому вполне правилен. Конусы векторов с неотрицательными компонентами (в некотором базисе) сильно миниэдральны.

Пусть F — некоторое ограниченное выпуклое и замкнутое множество в банаховом пространстве E, не содержащее нулевую точку. Обозначим через $K(F)$ множество элементов $x = \alpha z$, где $\alpha \geqslant 0$ и $z \in F$. Множество $K(F)$ является оштукатуриваемым конусом.

Дальнейшие примеры будут приводиться по мере надобности.

33.2. Линейные положительные операторы. Линейный оператор B называется *положительным* (относительно конуса K), если $BK \subset K$. Для линейных операторов B положительность эквивалентна *монотонности* (из $x \leqslant y$ следует $Bx \leqslant By$). Линейный оператор B называется *u_0-положительным*, где u_0 — фиксированный ненулевой элемент конуса K, если каждому $x \in K$ $(x \neq 0)$ отвечают такие $\alpha(x)$, $\beta(x) > 0$, при которых $\alpha(x) u_0 \leqslant Bx \leqslant \beta(x) u_0$. Пусть K телесен, тогда линейный оператор B называется *сильно положительным*, если он преобразует каждый ненулевой элемент из K во внутреннюю точку конуса K. Очевидно, *каждый сильно положительный оператор u_0-положителен, если только u_0 — внутренняя точка конуса K.*

Пусть спектр линейного оператора B состоит из ненулевой точки λ_0 и части, содержащейся в круге $|\lambda| \leqslant a$, где $a < |\lambda_0|$. Тогда собственное значение λ_0 называется *ведущим.*

Линейный положительный оператор B назовем *суперположительным*, если он обладает следующими свойствами: у него есть ведущее положительное собственное значение λ_0, это собственное значение простое, собственному значению λ_0 отвечает собственный вектор $e_0 \in K$ и, наконец, у оператора B нет в конусе K отличных от ξe_0 $(\xi > 0)$ собственных векторов.

Доказательству суперположительности различных конкретных операторов посвящены многочисленные работы. Суперположителен каждый вполне непрерывный u_0-положительный оператор. Если K — конус векторов с неотрицательными координатами в R^n, а B — матрица с элементами b_{ij}, то для суперположительности B достаточно положительности всех чисел b_{ij} (теорема Фробениуса) или положительности элементов одной из матриц B^k. Если K — конус неотрицательных функций в пространстве C, а B — линейный интегральный оператор с непрерывным ядром, то для суперположительности B достаточно, чтобы ядро было положительно (теорема Ентча). Относительно конуса неотрицательных функций в пространствах C, L_p и т. д. суперположителен интегральный оператор, ядром которого является функция Грина первой краевой задачи для эллиптического дифференциального оператора второго порядка. Если у линейного оператора B есть ведущее простое собственное значение и это собственное значение положительно, то можно построить телесный оштукатуриваемый конус K, относительно которого B суперположителен.

Линейный функционал $l \in E^*$ называется *положительным*, если $l(x) \geqslant 0$ при $x \in K$. Если линейная оболочка конуса K плотна в E (например, K воспроизводящий), то множество положительных функционалов образует сопряженный конус $K^* \subset E^*$.

Линейный функционал $l \in E^*$ называют *сильно положительным*, если

$$l(x) \geqslant \beta \| x \| \quad (x \in K), \tag{33.2}$$

где $\beta > 0$. *Сильно положительные функционалы $l \in E^*$ существуют в том и только том случае, когда K допускает оштукатуривание.*

33.3. Нелинейные положительные операторы. Нелинейный оператор A называют *положительным* на множестве $M \subset E$, если $AM \subset K$. Слова «на множестве M» обычно опускают, если $M = K$. Оператор A называют *монотонным* на множестве $M \subset E$, если из $x \leqslant y$ $(x, y \in M)$ следует $Ax \leqslant Ay$, и *антимонотонным*, если из $x \leqslant y$ $(x, y \in M)$ следует $Ax \geqslant Ay$. Если A антимонотонен, то оператор A^2 монотонен.

Пусть A — нелинейный интегральный оператор (17.3) с ядром $k(t, s, u)$, действующий в некотором пространстве E с выделенным конусом K неотрицательных функций. Если $k(t, s, u) \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$, то A положителен на K; если $k(t, s, u)$ не убывает по u, то A монотонен на всем E.

Определенный на K оператор A называется (ср. п. 17.5) *дифференцируемым по конусу K в нулевой точке*, если

$$\lim_{x \in K,\ \|x\| \to 0} \frac{\| Ax - A0 - A'(0)x \|}{\| x \|} = 0, \tag{33.3}$$

и *дифференцируемым по K на бесконечности*, если

$$\lim_{x \in K,\ \|x\| \to \infty} \frac{\| Ax - A'(\infty) x \|}{\| x \|} = 0, \tag{33.4}$$

где $A'(0)$ и $A'(\infty)$ — линейные операторы. Если K воспроизводящий и A вполне непрерывен, то операторы $A'(0)$ и $A'(\infty)$ также вполне непрерывны. Если A положителен, то $A'(\infty)$ положителен; если A положителен и $A0 = 0$, то $A'(0)$ положителен.

Пусть на множестве $M \subset E$ заданы два оператора A_1 и A_2, связанные соотношением $A_1 x \leqslant A_2 x$ при $x \in M$. Тогда A_1 называется *минорантой* оператора A_2 (на множестве M), а A_2 — *мажорантой* оператора A_1.

Общую теорию банаховых пространств с конусом и теорию положительных (линейных и нелинейных) операторов см. в [23].

33.4. Вращение поля с положительным оператором. Векторное поле $I - A$ назовем *положительным*, если положителен оператор A.

Рассмотрим два вполне непрерывных положительных векторных поля $I - A_0$ и $I - A_1$, определенных и невырожденных на ограниченном множестве $M \subset E$. Назовем их *положительно гомотопными*, если можно определить такой положительный вполне непрерывный оператор $A(x, \lambda)$ $(x \in M,\ \lambda \in [0, 1])$, что $A(x, 0) \equiv A_0 x$, $A(x, 1) \equiv A_1 x$ $(x \in M)$ и $A(x, \lambda) \neq x$ при $x \in M$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Если можно положить $A(x, \lambda) = (1 - \lambda) A_0 x + \lambda A_1 x$, то поля $I - A_0$ и $I - A_1$ *линейно положительно гомотопны*. Например, поля $I - A_0$ и $I - A_1$ линейно положительно гомотопны на M, если векторы $x - A_0 x$ и $x - A_1 x$ при каждом $x \in M$ не направлены противоположно (для этого достаточно, чтобы при всех $x \in M$ выполнялось неравенство $\| A_0 x - A_1 x \| < \| x - A_0 x \|$).

Ниже через $\Omega(K)$ обозначаются ограниченные области в конусе K, рассматриваемом как метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y) = \| x - y \|$. Конечно, открытое в K множество $\Omega(K)$ не обязательно открыто в E (подчеркнем, что конус K может не быть телесным). Однако для любой области $\Omega(K)$ в конусе K легко построить открытую область $\Omega \subset E$ так, что $\Omega \cap K = \Omega(K)$. Более того, верна

Лемма 33.1. *Для каждой ограниченной области $\Omega(K)$ в конусе K можно построить такую ограниченную область $\Omega \subset E$, что $\Omega \cap K = \Omega(K)$ и $\dot\Omega \cap K = \dot\Omega(K)$, где $\dot\Omega(K)$ — граница области $\Omega(K)$ в конусе K.*

Для доказательства достаточно определить область Ω как объединение шаров $\| x - x_0 \| < \frac{1}{2} d(x_0)$ $(x_0 \in \Omega(K))$, где $d(x_0)$ — расстояние от x_0 до $K \setminus \Omega(K)$. ∎

Пусть невырожденное положительное вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ определено на границе $\dot\Omega(K)$ области $\Omega(K) \subset K$. Обозначим через Ω область, существование которой гарантировано леммой 33.1, и продолжим оператор A с сохранением положительности и полной непрерывности на $\dot\Omega$ (это возможно в силу теоремы 18.3, так как K — выпуклое множество); за продолженным оператором сохраним обозначение A. Из невырожденности поля $I - A$ на $\dot\Omega(K)$ вытекает его невырожденность на $\dot\Omega$, поэтому определено вращение $\gamma(I - A, \Omega)$. Это вращение назовем *вращением положительного поля* $I - A$ на $\dot\Omega(K)$ и обозначим его через $\gamma[I - A, \Omega(K)]$.

Корректность нового понятия почти очевидна. Действительно если A_1 и A_2 — два положительных продолжения оператора A на $\dot\Omega$, то поля $I - A_1$ и $I - A_2$ линейно гомотопны на $\dot\Omega$ и поэтому $\gamma(I - A_1, \Omega) = \gamma(I - A_2, \Omega)$. Пусть Ω_1 и Ω_2 — две области, для которых $\Omega_1 \cap K = \Omega_2 \cap K = \Omega(K)$ и $\dot\Omega_1 \cap K = \dot\Omega_2 \cap K = \dot\Omega(K)$; тогда и для области $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ выполнены равенства $\Omega \cap K = \Omega(K)$ и $\dot\Omega \cap K = \dot\Omega(K)$. Продолжим оператор A с сохранением положительности и полной непрерывности на множество $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Так как все неподвижные точки продолженного оператора A лежат в $\Omega(K)$, то $\gamma(I - A, \Omega_1) = \gamma(I - A, \Omega)$ и $\gamma(I - A, \Omega_2) = \gamma(I - A, \Omega)$. ∎

Непосредственно из определения вытекает, что вращение положительных полей обладает, по существу, всеми свойствами вращения вполне непрерывных полей на границах ограниченных областей: вращения на $\dot\Omega(K)$ положительно гомотопных на $\dot\Omega(K)$ положительных вполне непрерывных полей одинаковы; определенный на $\Omega(K)$ положительный оператор A имеет на $\Omega(K)$ по крайней мере одну неподвижную точку, если $\gamma[I - A, \Omega(K)] \neq 0$; если области $\Omega_1(K)$ и $\Omega_2(K)$ не имеют общих точек, а $\overline{\Omega}(K)=\overline{\Omega}_1(K)\cup\overline{\Omega}_2(K)$, то для невырожденного на $\dot{\Omega}_1(K)\cup\dot{\Omega}_2(K)$ положительного вполне непрерывного поля $I-A$ будет справедливо равенство $\gamma[I-A,\Omega(K)]=\gamma[I-A,\Omega_1(K)]+\gamma[I-A,\Omega_2(K)]$. Обычным способом (см. пп. 4.3 и 20.4) определяется индекс $\operatorname{ind}(x_0, A; K)$ особой точки x_0 и доказывается теорема об алгебраическом числе особых точек: вращение поля $I-A$ на $\dot{\Omega}(K)$ равно сумме индексов лежащих в $\Omega(K)$ особых точек.

Без труда переносится на положительные поля классификационная теорема Хопфа вместе с обычными следствиями (см. § 5 и п. 20.5). Ограничимся формулировкой следующего утверждения: *если положительные вполне непрерывные векторные поля $I-A_0$ и $I-A_1$ невырождены и имеют одинаковое вращение на пересечении* Г *конуса K и сферы $\|x\|=1$, то они положительно гомотопны на* Г.

33.5. Вычисление вращения. Во всем этом пункте через $\Omega(K)$ обозначается область в конусе K, содержащая его вершину — нулевую точку 0. Очевидно, вращение на $\dot{\Omega}(K)$ поля $I-A$ равно 1, если $Ax\equiv 0$, и равно 0, если $Ax\equiv\beta h_0$, где $h_0\in K$, $\|h_0\|=1$ и β достаточно велико.

Теорема 33.1. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A определен на $\dot{\Omega}(K)$ и пусть из $Ax=\lambda x$ $(x\in\dot{\Omega}(K))$ вытекает $\lambda<1$. Тогда*

$$\gamma[I-A,\Omega(K)]=1. \tag{33.5}$$

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях теоремы поле $I-A$ линейно положительно гомотопно полю I. ∎

Будем писать $x\overline{\leqslant}y$ *или* $y\overline{\leqslant}x$, если $y-x\overline{\in}K$ (т. е. либо $x\geqslant y$, либо x и y несравнимы). Из теоремы 33.1 вытекает более грубая, но удобная

Теорема 33.2. *Пусть определенный на $\dot{\Omega}(K)$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$Ax\overline{\geqslant}x \quad (x\in\dot{\Omega}(K)). \tag{33.6}$$

Тогда справедливо равенство (33.5).

Для проверки соотношений (33.6) удобно пользоваться мажорантами A^+ оператора A — если $A^+x\overline{\geqslant}x$, то, очевидно, $Ax\overline{\geqslant}x$. В качестве мажорант часто удается использовать линейные операторы. При этом полезна

Лемма 33.2. *Пусть K — нормальный конус и $N(K)$ — его константа нормальности. Пусть $\sigma(B)<1$, где $\sigma(B)$ — спектральный радиус*) линейного положительного оператора B. Тогда при каждом $g\in K$*

$$Bx+g\overline{\geqslant}x \quad \left(x\in K,\ \|x\|>N(K)\|(I-B)^{-1}\|\cdot\|g\|\right). \tag{33.7}$$

Доказательство. Пусть $Bx+g\geqslant x$. Тогда $B^2x\geqslant Bx-Bg\geqslant x-g-Bg$ и, аналогично, $B^nx\geqslant x-g-Bg-\ldots-B^{n-1}g$ при любом n. Но $g+Bg+\ldots+B^{n-1}g\leqslant g+Bg+\ldots+B^ng+\ldots=(I-B)^{-1}g$. Поэтому $B^nx\geqslant x-(I-B)^{-1}g$. Переходя в этом соотношении к пределу при $n\to\infty$, получим оценку $x\leqslant(I-B)^{-1}g$, откуда (и из нормальности K) следует, что $\|x\|\leqslant N\cdot\|(I-B)^{-1}_g\| N\cdot\|(I-B)^{-}\|\cdot\|g\|$. ∎

Для оценок спектральных радиусов известны простые и эффективные приемы (см., например, [26]).

Теорема 33.3. *Пусть $h_0\in K$ и $\|h_0\|=1$. Пусть определенный на $\dot{\Omega}(K)$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию: из $x_0=Ax_0+\mu h_0$ $(x_0\in\dot{\Omega}(K))$ следует $\mu<0$. Тогда*

$$\gamma[I-A,\Omega(K)]=0. \tag{33.8}$$

Для доказательства покажем, что поле $I-A$ линейно положительно гомотопно на $\dot{\Omega}(K)$ полям $I-A_1$, где $A_1x\equiv\beta h_0$ и β — большие положительные числа. В предположении противного, для некоторой последовательности $\beta_n\to\infty$ можно построить такие последовательности $\lambda_n\in[0,1]$ и $y_n\in\dot{\Omega}(K)$, для которых

$$y_n-(1-\lambda_n)Ay_n=\lambda_n\beta_nh_0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{33.9}$$

В силу полной непрерывности оператора A последовательность Ay_n можно считать сходящейся по норме

*) Спектральный радиус линейного оператора B определяется известной формулой И. М. Гельфанда $\sigma(B)=\lim\|B^n\|^{1/n}$.

к некоторому элементу z. Левые части равенств (33.9) ограничены, поэтому ограничены произведения $\lambda_n\beta_n$; можно считать (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности), что последовательность $\lambda_n\beta_n$ сходится к некоторому числу $\mu \geqslant 0$. Из равенств (33.9) вытекает тогда сходимость последовательности y_n к элементу $x_0 = z + \mu h_0 \in \dot{\Omega}(K)$. Переходя в (33.9) к пределу, получаем равенство $x_0 - Ax_0 = \mu h_0$ — мы пришли к противоречию. ∎

Из теоремы 33.3 вытекает более грубая, но удобная

Теорема 33.4. *Пусть определенный на $\dot{\Omega}(K)$ положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$Ax \overline{\leqslant} x \quad (x \in \dot{\Omega}(K)). \tag{33.10}$$

Тогда справедливо равенство (33.8).

Для проверки соотношений (33.10) удобно пользоваться минорантами A^- оператора A — если $A^-x \overline{\leqslant} x$, то $Ax \overline{\leqslant} x$. Если применять линейные миноранты, то при этом удобна

Лемма 33.3. *Пусть линейный положительный оператор B удовлетворяет условию: каждому ненулевому $x \in K$ соответствуют такие положительные $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и такое натуральное $p = p(x)$, что*

$$\alpha(x) e_0 \leqslant B^p x \leqslant \beta(x) e_0, \tag{33.11}$$

где e_0 — собственный вектор оператора B, отвечающий собственному значению 1 ($Be_0 = e_0, e_0 \in K, \| e_0 \| = 1$). Тогда для всех $x \in K$, отличных от μe_0 ($\mu \geqslant 0$), элементы x и Bx несравнимы, т. е. $x - Bx \overline{\in} K$ и $Bx - x \overline{\in} K$.

Доказательство. Пусть $x \in K$. Обозначим через α_0 и β_0 соответственно наибольшее и наименьшее из значений α и β, при которых $\alpha e_0 \leqslant B^p x \leqslant \beta e_0$. Допустим, что $B^p x \neq \mu e_0$. Тогда положительные элементы $B^p x - \alpha_0 e_0$ и $\beta_0 e_0 - B^p x$ отличны от нуля и поэтому найдутся натуральные q, r и положительные α_1, α_2, при которых

$$B^q (B^p x - \alpha_0 e_0) \geqslant \alpha_1 e_0, \quad B^r (\beta_0 e_0 - B^p x) \geqslant \alpha_2 e_0. \tag{33.12}$$

Если $x \geqslant Bx$, то $B^p x \geqslant B^{p+q} x$ и, в силу первого из соотношений (33.12), верно неравенство $B^p x \geqslant (\alpha_0 + \alpha_1) e_0$, которое противоречит максимальности α_0. Аналогично, если $x \leqslant Bx$, то $B^p x \leqslant B^{p+r} x$ и, в силу второго из соотношений (33.12), справедливо неравенство $B^p x \leqslant \leqslant (\beta_0 - \alpha_2) e_0$, которое противоречит минимальности β_0.

Таким образом, если элементы x и Bx сравнимы, то $B^p x = \mu_0 e_0$.

Допустим, что $x \leqslant Bx$. Тогда $x \leqslant B^p x$, т. е. $\mu_0 e_0 - x \in K$. Если $\mu_0 e_0 - x \neq 0$, то при всех достаточно больших n элемент $B^n(\mu_0 e_0 - x)$ отличен от нуля. Но $B^p(\mu_0 e_0 - x) = 0$. Поэтому $x = \mu_0 e_0$.

Аналогично завершается доказательство, если $x \geqslant Bx$. ∎

Если у оператора A на $\dot{\Omega}(K)$ есть миноранта вида kB, где B удовлетворяет условиям леммы 33.3, а $k > 1$, то из леммы 33.3 вытекает справедливость соотношений (33.10).

Условие (33.11) заведомо выполнено, если B сильно положителен или u_0-ограничен. *Из* (33.11) *вытекает суперположительность оператора B.*

33.6. Вычисление индекса особой точки. Пусть $A0 = 0$. Нас будут интересовать признаки изолированности (в конусе K) нулевой неподвижной точки оператора A и правила вычисления ее индекса $\operatorname{ind}(0, A; K)$. Во всем пункте мы считаем, что оператор A дифференцируем по конусу K в точке 0 и его производная $A'(0)$ является линейным вполне непрерывным оператором.

Теорема 33.5. *Пусть у оператора $B = A'(0)$ нет в конусе K собственных векторов, отвечающих собственному значению* 1. *Тогда точка* 0 *является изолированной в конусе K неподвижной точкой оператора A и* $\operatorname{ind}(0, A; K) = \operatorname{ind}(0, B; K)$.

Для доказательства достаточно заметить, что на пересечении сфер $\| x \| = \rho$ малых радиусов ρ с конусом K поле $I - A$ линейно положительно гомотопно (в силу (33.3)) полю $I - B$. ∎

Теорема 33.6. *Пусть $\sigma(B) < 1$, где $\sigma(B)$ — спектральный радиус оператора $B = A'(0)$. Тогда справедливо равенство* $\operatorname{ind}(0, A; K) = 1$.

Доказательство. Из теоремы 33.1 вытекает, что $\operatorname{ind}(0, B; K) = 1$. Остается сослаться на теорему 33.5. ∎

Теорема 33.7. *Пусть у оператора $B = A'(0)$ есть в конусе K собственный вектор h_0 ($\| h_0 \| = 1$), которому* *соответствует собственное значение* $\lambda_0 > 1$, *и нет в конусе* K *собственных векторов, которым соответствует собственное значение* 1. *Тогда* $\operatorname{ind}(0, A; K) = 0$.

Доказательство. Пусть $x \in K$, $x \neq 0$, $x = Bx + \mu h_0$. Тогда $Bg = g$, где $g = x - \frac{\mu}{1-\lambda_0} h_0$. Поэтому либо $g \in K$, либо $g = 0$. Следовательно, $\mu < 0$. В силу теоремы 33.3, $\operatorname{ind}(0, B; K) = 0$. Остается сослаться на теорему 33.5. ∎

Если положительный вполне непрерывный оператор A определен и не имеет неподвижных точек на пересечении конуса K и множества $\|x\| \geq \rho_0$, то будем говорить, что ∞ *является изолированной особой точкой* поля $I - A$. В этом случае вращение поля $I - A$ на всех пересечениях конуса K со сферами $\|x\| = \rho$ радиусов $\rho \geq \rho_0$ будет одно и то же; обозначим его $\operatorname{ind}(\infty, A; K)$. Если A дифференцируем по K на бесконечности (см. (33.4)) и $A'(\infty)$ является линейным вполне непрерывным оператором, то справедливы аналогичные теоремам 33.5—33.7 и аналогично доказываемые следующие утверждения.

Теорема 33.8. *Пусть у оператора* $A'(\infty)$ *нет в конусе* K *собственных векторов, отвечающих собственному значению* 1. *Тогда* ∞ *является изолированной особой точкой поля* $I - A$ *и* $\operatorname{ind}(\infty, A; K) = \operatorname{ind}[0, A'(\infty); K]$.

Теорема 33.9. *Пусть* $\sigma[A'(\infty)] < 1$. *Тогда справедливо равенство* $\operatorname{ind}(\infty, A; K) = 1$.

Теорема 33.10. *Пусть у оператора* $A'(\infty)$ *есть в конусе* K *собственный вектор, которому соответствует собственное значение* $\lambda_0 > 1$, *и нет в конусе* K *собственных векторов, которым соответствует собственное значение* 1. *Тогда* $\operatorname{ind}(\infty, A; K) = 0$.

33.7. Вырожденные случаи. Продолжим анализ нулевой неподвижной точки положительного вполне непрерывного оператора A, дифференцируемого по конусу K в точке 0. Пусть вначале

$$Ax = Bx + Cx, \tag{33.13}$$

где $B = A'(0)$.

Теорема 33.11. *Пусть оператор* B *удовлетворяет условиям леммы* 33.3. *Пусть оператор* C *положителен на пересечении конуса* K *с малой окрестностью точки* 0 *и* $C(\xi e_0) \neq 0$ *при малых положительных* ξ. *Тогда нуль является изолированной в* K *неподвижной точкой оператора* A *и* $\operatorname{ind}(0, A; K) = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 33.4 достаточно установить, что $Ax \not\leq x$ при малых ненулевых $x \in K$.

Пусть $Ax \leq x$ при ненулевом $x \in K$, на котором оператор C положителен. Тогда $Bx \leq x$ и, в силу леммы 33.2, $x = \xi e_0$. Поэтому $Bx = x$ и $Ax \geq x$. Следовательно, $Ax = x$ и $Cx = C(\xi e_0) = 0$. Мы пришли к противоречию. ∎

Так же доказывается

Теорема 33.12. *Пусть оператор* B *удовлетворяет условиям леммы* 33.3. *Пусть оператор* $-C$ *положителен на пересечении конуса* K *с малой окрестностью точки* 0 *и* $C(\xi e_0) \neq 0$ *при малых положительных. Тогда нуль является изолированной в* K *неподвижной точкой оператора* A *и* $\operatorname{ind}(0, A; K) = 1$.

Верны и аналоги теорем 33.11 и 33.12 в условиях, когда ищется $\operatorname{ind}(\infty, A; K)$. Допустим, что A дифференцируем по конусу K на бесконечности и $A'(\infty)$ удовлетворяет условиям леммы 33.3. Пусть $A(\xi e_0) \neq \xi e_0$ при больших положительных ξ. Тогда для изолированности особой точки ∞ поля $I - A$ достаточно, чтобы был положителен либо оператор $C = A - A'(\infty)$, либо оператор $-C = A'(\infty) - A$; в первом случае $\operatorname{ind}(\infty, A; K) = 0$, во втором $\operatorname{ind}(\infty, A; K) = 1$.

Понятие вращения вполне непрерывного векторного поля с положительным оператором является частным случаем двух понятий: относительного вращения и полного индекса Лере (см. п. 33.8). Независимо оно вводилось Н. В. Марченко (ДАН СССР **137**, № 3 (1961)), Ю. Г. Борисовичем (ДАН СССР **153**, № 1 (1963)) и рядом других авторов. Техника вычисления вращения положительного поля указана (в других терминах) в [23]; дальнейшее развитие она получила в работах П. П. Забрейко (Уч. зап. Азерб. гос. ун-та 3 (1963)), Э. Мухамадиева и Ю. В. Покорного (ДАН Тадж. ССР **10**, № 10 (1967)), Э. Мухамадиева и Т. Сабирова (Тр. семинара по функц. анализу, Воронежский гос. ун-т **12** (1969), Ю. В. Покорного (ДАН УССР, А, № 6, 1963; Тр. матем. ф-та Воронежского гос. ун-та **4** (1971)), И. Н. Астафьевой и Ю. В. Покорного (УМН **24**, № 3 (1971)) и других авторов. В пп. 33.5—33.7 изложены лишь наиболее просто формулируемые теоремы об индексах $\operatorname{ind}(0, A; K)$ и $\operatorname{ind}(\infty, A; K)$.

33.8. Замечания. а) Все определения и построения п. 33.4 без изменений переносятся на случай, когда K — произвольное замкнутое выпуклое множество. В общем случае $\gamma[I-A, \Omega(K)]$ принято называть *относительным вращением*. Относительное вращение детально изучили и систематически применяют Ю. Г. Борисович и его ученики (библиографию см. в [5]).

б) Относительное вращение является частным случаем еще более общего понятия — *полного индекса Лере* [34]. Этот индекс определяется, если существует определенный на всем E непрерывный проектор P на K. Конструкция понятия вращения при этом не меняется — нужно лишь заметить, что каждый определенный на $\dot{\Omega}(K)$ вполне непрерывный оператор A со значениями в K допускает вполне непрерывное продолжение со значениями в K на все пространство E. Такое продолжение можно определить как оператор PA_1, где A_1 — уже произвольное вполне непрерывное продолжение оператора A на все E. Исследованию, применениям и дальнейшим обобщениям полного индекса Лере посвящена обширная литература. В основном нужно отметить работы Ф. Браудера и его учеников. Ограничимся ссылкой на обзор [52].

в) Вращение для полей $I-A$ с положительными операторами, относительное вращение и полный индекс Лере в случае бесконечномерных пространств можно ввести и для полей с операторами A, не обладающими свойством полной непрерывности. Нужно лишь, чтобы рассматриваемые операторы A допускали такие продолжения, что для полей с продолженными операторами определено вращение с естественными свойствами.

г) При построении теории вращения полей с положительными операторами A (или построении относительного вращения) можно было бы сослаться на изложенную в § 32 теорию компактно сужаемых операторов. Для того чтобы это сделать, достаточно заметить, что любое (даже разрывное!) продолжение оператора A с $\dot{\Omega}(K)$ до определенного на $\dot{\Omega}$ оператора $\tilde{A}$ со значениями в K является компактно сужаемым оператором — в качестве носителя можно рассмотреть K.

д) Опишем в заключение общую конструкцию введения вращения для специальных классов полей, охватывающую изложенные выше конструкции введения вращения положительного поля, относительного вращения, полного индекса Лере.

Пусть каждой точке $x \in E$ сопоставлено некоторое множество $\Pi(x) \subseteq E$. Вполне непрерывный оператор A назовем *П-допустимым*, если $Ax \in \Pi(x)$.

Рассмотрим некоторое замкнутое множество K, которое содержит все точки x, для которых $x \in \Pi(x)$. Через $\Omega(K)$ и $\dot{\Omega}(K)$ обозначим, как обычно, относительные область и ее границу в множестве K. Пусть на $\dot{\Omega}(K)$ определен П-допустимый вполне непрерывный оператор A. Предположим, что этот оператор можно продолжить до П-допустимого вполне непрерывного оператора $\tilde{A}$, определенного на границе $\dot{\Omega}$ такой ограниченной области $\Omega \subset E$, что $\Omega \cap K = \Omega(K)$ и $\dot{\Omega} \cap K = \dot{\Omega}(K)$. Если поле $I-A$ невырождено на $\dot{\Omega}(K)$, то поле $I-\tilde{A}$ автоматически будет невырождено на $\dot{\Omega}$ и поэтому будет определено вращение $\gamma(I-\tilde{A}, \Omega)$. Это вращение назовем *П-вращением* поля $I-A$ на $\dot{\Omega}(K)$ и обозначим его через $\gamma[I-A, \Omega(K); \Pi]$.

Если все множества $\Pi(x)$ совпадают с K, то мы получаем описанные выше конструкции относительного вращения и полного индекса Лере.

При введении П-вращения в общем случае необходимо установить корректность этого понятия (независимость его от выбора области Ω и от продолжения $\tilde{A}$). Нужно, далее, чтобы П-гомотопные в классе П-допустимых на $\dot{\Omega}(K)$ поля имели одинаковое П-вращение. Все это несложно сделать, если система множеств $\Pi(x)$ ($x \in E$) обладает соответствующими свойствами.

§ 34. Метод частичного обращения *)

34.1. Поля с обратимыми операторами. Пусть T и D — непрерывные операторы, действующие из банахова пространства E в банахово пространство E_1. Допустим, что T — это гомеоморфное отображение E на E_1. Тогда уравнение $Tx - Dx = 0$ равносильно уравнению $x - T^{-1}Dx = 0$. Поэтому задачи, связанные с отысканием нулей векторного поля $\Phi x = Tx - Dx$, равносильны задачам о нулях векторного поля $\Psi x = x - T^{-1}Dx$ в пространстве E. Если оператор $T^{-1}D$ вполне непрерывен (или уплотняющий, предельно компактный и т. д.), то

*) Излагаемый в § 34 метод предложен П. П. Забрейко и М. А. Красносельским (ДАН СССР **176**, № 6 (1967), 1233—1236). Позже аналогичный метод предложен Браудером и Нуссбаумом (Bull. Math. Soc. **74**, № 4 (1968), 671—676).

для изучения поля Ψ может быть применена теория вращения, изложенная выше. В некоторых случаях удобно не переходить от поля Φ к полю Ψ, а считать, что для поля Φ введена целочисленная характеристика — *квазивращение*, определяя это квазивращение как вращение поля Ψ на границе той же области. Ясно, что такой подход не требует преодоления каких-либо трудностей.

Опишем несколько более сложную ситуацию.

Пусть действующий из E в E_1 оператор Φ допускает диагональное представление $\Phi x = F(x,x)$, где $F(u,v)$ $(u,v\in E)$ — также оператор со значениями в E_1. Каждый оператор Φ допускает, конечно, различные диагональные представления. Допустим, что при каждом $v\in E$ уравнение $F(u,v)=0$ имеет единственное решение $u=Rv$. Тогда нули векторного поля Φx совпадают с нулями векторного поля $\Psi x = x - Rx$ в пространстве E. Если для поля Ψ определено вращение (например, оператор R вполне непрерывен), то это вращение можно назвать *квазивращением поля* Φ (*отвечающим диагональному представлению* $\Phi x = F(x,x)$). Квазивращение можно по изложенным выше схемам применять к изучению поля Φ. Описанный подход также не связан с преодолением каких-либо трудностей даже в тех случаях, когда уравнение $F(u,v)=0$ имеет единственное решение лишь при значениях v из $\overline{\Omega}$, где Ω — ограниченная область, на границе которой рассматривается поле Φ. Более того, уравнение $F(u,v)=0$ может иметь несколько решений (при всех или при некоторых v) — тогда полю Φ соответствует несколько полей Ψ.

Трудности возникают в случае, когда уравнение $F(u,v)=0$ имеет решение не при всех $v\in\Omega$. Однако, как будет показано в этом параграфе, и в этом случае можно ввести удобное для приложений понятие квазивращения.

Отметим здесь, что уравнение $F(u,v)=0$ заведомо имеет решение $u=v_0$ при $v=v_0$, если $\Phi v_0 = 0$.

34.2. Квазивращение частично обратимого поля. Пусть поле Φ определено на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega\subset E$. Обозначим через N множество нулей поля Φ на $\overline{\Omega}$.

Поле Φ назовем *F-частично обратимым*, если Φ допускает диагональное представление

$$\Phi x = F(x,\ x) \qquad (x\in\overline{\Omega}), \tag{34.1}$$

множество N компактно и замкнуто, уравнение

$$F(u,\ v) = 0 \tag{34.2}$$

имеет единственное решение

$$u = Rv \tag{34.3}$$

при значениях v из некоторой окрестности множества N, причем R вполне непрерывен и $Rx = x$ при $x\in N$. В этом определении множество N не предполагается известным. Если априори известно, что N — компакт, то оператор R определен и вполне непрерывен в окрестности множества N, если для каждой точки $x_0\in N$ можно указать окрестность, на которой R определен и вполне непрерывен. Если N пусто, то в определении F-частичной обратимости сохраняется лишь предположение о представлении (34.1).

Допустим, что F-частично обратимое поле Φ определено на $\overline{\Omega}$ и невырождено на $\dot{\Omega}$. Если N непусто, то на границах всех достаточно малых окрестностей множества N вполне непрерывное векторное поле $\Psi = I - R$ будет иметь одно и то же вращение. Это общее вращение назовем *квазивращением поля* Φ *на* $\dot{\Omega}$ (*относительно диагонального представления* (34.1)). Если N пусто, то будем считать, что квазивращение поля Φ на $\dot{\Omega}$ равно нулю. Квазивращение будем обозначать через $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$. Непосредственно из определения вытекает

Теорема 34.1. *Пусть F-частично обратимое поле Φ определено на $\overline{\Omega}$, невырождено на $\dot{\Omega}$ и $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)\neq 0$. Тогда поле Φ имеет в области Ω по крайней мере одну особую точку.*

Теорема 34.2. *Пусть области Ω_1 и Ω_2 не имеют общих точек и лежат в ограниченной области Ω. Пусть F-частично обратимое поле Φ определено на $\overline{\Omega}$ и невырождено на множестве $\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cap\Omega_2)$. Тогда*

$$\gamma^*(\Phi,\ F;\ \Omega) = \gamma^*(\Phi,\ F;\ \Omega_1) + \gamma^*(\Psi,\ F;\ \Omega_2). \tag{34.4}$$

Для вычисления или оценки квазивращения удобно применять приемы, развитые выше при изучении вполне непрерывных векторных полей и основанные на понятии гомотопности.

Пусть на $\bar{\Omega}$ заданы F_0-частично обратимое поле $\Phi_0 x = F_0(x, x)$ и F_1-частично обратимое поле $\Phi_1 x = F_1(x, x)$, причем эти поля невырождены на $\dot{\Omega}$. Пусть при $\lambda \in [0, 1]$; $u, v \in \bar{\Omega}$ определена непрерывная вектор-функция $F(\lambda; u, v)$, для которой

$$F(0; x, x) = F_0(x, x) = \Phi_0 x, \quad F(1; x, x) = F_1(x, x) = \Phi_1 x \ (x \in \bar{\Omega}). \tag{34.5}$$

Обозначим через $N(\lambda)$ множество лежащих в $\bar{\Omega}$ нулей поля $\Phi_\lambda x = F(\lambda; x, x)$ и через $\tilde{N}$ — объединение всех $N(\lambda)$; пусть и множество $\tilde{N}$, и каждое множество $N(\lambda)$ компактны и замкнуты, причем $\tilde{N} \subset \Omega$ (т. е. все поля Φ_λ невырождены на $\dot{\Omega}$). Наконец, пусть каждым $\lambda_0 \in [0, 1]$, $x_0 \in N(\lambda_0)$ соответствует такое $\delta > 0$, что уравнение

$$F(\lambda; u, v) = 0 \tag{34.6}$$

при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|v - x_0\| < \delta$ имеет в Ω единственное решение

$$u = R(\lambda; v), \tag{34.7}$$

где R вполне непрерывен как оператор от двух переменных со значениями в E. Будем тогда говорить, что поля Φ_0 и Φ_1 *квазигомотопны* на $\dot{\Omega}$.

Теорема 34.3. *Пусть определенные на $\bar{\Omega}$ векторные поля $\Phi_0 x = F_0(x, x)$ и $\Phi_1 x = F_1(x, x)$ невырождены и квазигомотопны на $\dot{\Omega}$. Тогда*

$$\gamma^*(\Phi_0, F_0; \Omega) = \gamma^*(\Phi_1, F_1; \Omega). \tag{34.8}$$

Доказательство. Обозначим через $\gamma(\lambda)$ квазивращение на $\dot{\Omega}$ векторного поля $F(\lambda; x, x)$ и покажем, что $\gamma(\lambda)$ в окрестности каждой точки $\lambda_0 \in [0, 1]$ принимает постоянное значение. Отсюда утверждение теоремы будет вытекать непосредственно.

Пусть $x_n \in N(\lambda_n)$ и $\lambda_n \to \lambda_0$. Из компактности $\tilde{N}$ вытекает, что последовательность x_n компактна; все ее предельные точки в силу непрерывности $F(\lambda; x, x)$ принадлежат множеству $N(\lambda_0)$. Отсюда, во-первых, вытекает, что множества $N(\lambda)$ пусты при близких к λ_0 значениях λ, если множество $N(\lambda_0)$ пустое. Во-вторых, если $N(\lambda_0)$ непусто, то для любой окрестности U этого множества можно указать такую окрестность числа λ_0, что $N(\lambda) \subset U$ при значениях λ из этой окрестности.

Пусть $N(\lambda_0)$ пусто. Мы показали, что множества $N(\lambda)$ также пусты при близких к λ_0 значениях λ. Значит, $\gamma(\lambda) = 0$ в окрестности точки λ_0.

Пусть $N(\lambda_0)$ непусто. По условию это множество компактно. Поэтому можно указать такое $\delta_0 > 0$ и такую окрестность U множества $N(\lambda_0)$, что оператор (34.7) определен при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0$, $v \in \bar{U}$ и вполне непрерывен. По уже доказанному можно одновременно считать, что $N(\lambda) \subset U$ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0$. Из определения квазивращения вытекает, что $\gamma(\lambda)$ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0$ совпадает с вращением на $\dot{U}$ вполне непрерывного векторного поля $x - R(\lambda; x)$. Но поля $x - R(\lambda; x)$ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$ гомотопны друг другу на $\dot{U}$ и поэтому их вращение одинаково. Следовательно, $\gamma(\lambda) = \gamma(\lambda_0)$ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta_0$. ■

Теоремы 34.1—34.3 позволяют применять для изучения F-частично обратимых полей основные конструкции, изложенные выше для вполне непрерывных полей. В качестве примера приведем некоторые утверждения об особых точках.

Пусть F-частично обратимое поле Φ определено на области $\Omega \subset E$. Пусть x_0 ($x_0 \in \Omega$) — изолированная особая точка поля Φ. Из теорем 34.1 и 34.2 вытекает, что квазивращение поля Φ на границах малых окрестностей точки x_0 одинаково. Это вращение $\operatorname{ind}^*(x_0, \Phi; F)$ назовем *квазииндексом особой точки* x_0. Если поле Φ определено на $\bar{\Omega}$, невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в области Ω конечное число особых точек $x_1, \ldots, x_s$, то справедлива *теорема об алгебраическом числе особых точек* (она следует из теоремы 34.2):

$$\gamma^*(\Phi, F; \Omega) = \operatorname{ind}^*(x_1, \Phi; F) + \ldots + \operatorname{ind}^*(x_s, \Phi; F). \tag{34.9}$$

Вычисление квазииндекса особой точки F-частично обратимого поля Φ по определению сводится к вычислению индекса особой точки вполне непрерывного поля.

Поэтому здесь применимы как теорема 21.6, так и приемы, изложенные в § 24.

Пусть, например, $\Phi x_0 = 0$ и

$$F(x_0 + h;\ x_0 + k) = Ch + Dk + o(\|h\| + \|k\|), \qquad (34.10)$$

где C и D — линейные операторы, действующие из E в E_1, причем D имеет непрерывный обратный D^{-1}. Тогда (проверьте!) оператор (34.3) дифференцируем в точке x_0 и его производная $R'(x_0)$ совпадает с $-D^{-1}C$. В силу теоремы 17.1 оператор $D^{-1}C$ вполне непрерывен; обозначим через β_* сумму кратностей его отрицательных и меньших чем -1 собственных значений. Из теоремы 21.6 вытекает

Теорема 34.4. *Пусть -1 не является собственным значением оператора $D^{-1}C$. Тогда x_0 — изолированная точка поля Φ и ее квазииндекс равен $(-1)^{\beta_*}$.*

34.3. Сжимающие операторы. Хорошо известен восходящий к С. Банаху принцип сжатых отображений. Мы уже пользовались им в § 24. Нам понадобится сам этот принцип и одно его обобщение.

Определенный на метрическом пространстве $\mathfrak{M}$ оператор A назовем *обобщенным сжатием*, если

$$\rho(Ax,\ Ay) \leqslant L(\alpha,\ \beta)\,\rho(x,\ y) \qquad (x,\ y \in \mathfrak{M};\ \alpha \leqslant \rho(x,\ y) \leqslant \beta), \qquad (34.11)$$

где $L(\alpha, \beta)$ определена при $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$ и $L(\alpha, \beta) < 1$. Оператор A будет обобщенным сжатием, если, например,

$$\rho(Ax,\ Ay) \leqslant \rho(x,\ y) - \gamma[\rho(x,\ y)] \qquad (x,\ y \in \mathfrak{M}), \qquad (34.12)$$

где $\gamma(u)$ — непрерывная и положительная при $u > 0$ функция.

Теорема 34.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — инвариантное для $A\,(A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M})$ полное метрическое пространство и пусть A является обобщенным сжатием. Тогда A имеет на $\mathfrak{M}$ одну и только одну неподвижную точку.*

Для доказательства покажем сначала, что A оставляет инвариантным некоторый шар $T = \{x\colon \rho(x, x_0) \leqslant r\} \subset \mathfrak{M}$ любого заданного радиуса r. В предположении противного, при некотором фиксированном $r > 0$ для любой точки $x \in \mathfrak{M}$ можно указать точку $x_1 \in \mathfrak{M}$, для которой $\rho(x_1, x) \leqslant r$ и $\rho(Ax_1, x) > r$. Если при этом $\rho(x_1, x) \leqslant r/2$, то $\rho(x, Ax) \geqslant \rho(x, Ax_1) - \rho(Ax_1, Ax) \geqslant r/2$; если же $\rho(x_1, x) > r/2$, то $\rho(x, Ax) \geqslant r - L(r/2, r)r$. Таким образом, при всех $x \in \mathfrak{M}$ справедливо неравенство $\rho(x, Ax) \geqslant \min\{r/2, r - rL(r/2, r)\} = a > 0$. Но тогда при каждом $x_0 \in T$ справедливы оценки

$$\rho(A^{k+1}x_0,\ A^k x_0) \leqslant \{L[a,\ \rho(x_0,\ Ax_0)]\}^k \rho(x_0,\ Ax_0)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

в силу которых найдется такое $x \in \mathfrak{M}$, для которого $\rho(x, Ax) < a$. Мы пришли к противоречию.

Обозначим через T_1 инвариантный для A шар радиуса 1. Оператор A является обобщенным сжатием на T_1 и по уже доказанному, найдется шар $T_2 \subset T_1$ радиуса 1/2, также инвариантный для A. Поступая аналогично, найдем последовательность инвариантных для A вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю. Общая точка этих шаров будет неподвижной для A. Единственность неподвижной точки вытекает из (34.11). ∎

Теорема 34.5 переходит в принцип Банаха при $L(\alpha, \beta) = q < 1$. Условия теоремы 34.5 выполнены, например, если A преобразует в себя метрический компакт $\mathfrak{M}$ и $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при $x, y \in R$ и $x \neq y$.

Перейдем к операторам в банаховом пространстве E. Пусть Ω — ограниченная область в E и пусть на Ω задан оператор A обобщенного сжатия. Уравнение $x = Ax + f$ будет иметь единственное решение $x = Rf$ при всех f из множества $\mathfrak{N} = \{f\colon f = x - Ax, x \in \Omega\}$. Из теоремы 34.5 вытекает, что $\mathfrak{N}$ — область в пространстве E и что оператор R непрерывен на $\mathfrak{N}$.

Действительно, пусть шар $T_0 = \{x\colon \|x - x_0\| \leqslant r\}$ содержится в области Ω и пусть $f_0 = x_0 - Ax_0$. Тогда оператор $B_0 x = Ax + f_0$ преобразует шар T_0 в часть шара $\|x - x_0\| \leqslant r_1 = \min\{r/2,\ rL(r/2, r)\}$ и поэтому оператор $Bx = Ax + f$ преобразует T_0 в себя, если $\|f - f_0\| \leqslant r - r_1$. Но каждый оператор B является обобщенным сжатием и поэтому уравнение $x = Ax + f$ имеет решение Rf в шаре $\|x - x_0\| \leqslant r$. ∎

Нам понадобятся ниже операторы обобщенного сжатия $A(\lambda)$, определенные на $\overline{\Omega}$ и зависящие от скалярного параметра $\lambda \in [0, 1]$. Будем говорить, что $A(\lambda)$ является *равномерным обобщенным сжатием*, если выражение $A(\lambda)x$ непрерывно по λ и при $x, y \in \bar{\Omega}$

$$\|A(\lambda)x - A(\lambda)y\| \leqslant L(\alpha, \beta)\|x-y\| \quad (\alpha \leqslant \|x-y\| \leqslant \beta), \tag{34.13}$$

где $L(\alpha, \beta) < 1$ при $0 < \alpha \leqslant \beta$ и $L(\alpha, \beta)$ не зависит от λ. Нетрудно видеть, что $A(\lambda)$ является равномерным обобщенным сжатием, если оператор $A(\lambda)$ является обобщенным сжатием при каждом фиксированном λ и если выражение $A(\lambda)x$ равномерно непрерывно по λ.

Область $[I - A(\lambda)]\Omega$ обозначим через $\mathfrak{R}(\lambda)$.

Лемма 34.1. *Пусть $f_0 \in \mathfrak{R}(\lambda_0)$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $f \in \mathfrak{R}(\lambda)$ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\|f - f_0\| < \delta$.*

Доказательство. Пусть $f_0 = x_0 - A(\lambda_0)x_0$ и $T_0 = \{x\colon \ \|x - x_0\| \leqslant r\} \subset \Omega$. Оператор $B_0x = A(\lambda_0)x + f_0$ в силу (34.13) преобразует шар T_0 в часть шара $\|x - x_0\| \leqslant r_1 = \min\{r/2, rL(r/2, r)\}$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\delta \leqslant (r - r_1)/2$ и из $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$ вытекает неравенство $\|A(\lambda)x_0 - A(\lambda_0)x_0\| < r_1/2$. Тогда для каждого оператора $Bx = A(\lambda)x + f$, где $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta$ и $\|f - f_0\| \leqslant \delta$, шар T_0 инвариантен. В силу теоремы 34.5 уравнение $x = A(\lambda)x + f$ имеет в шаре T_0 решение, т. е. $f \in \mathfrak{R}(\lambda)$. ∎

Рассмотрим уравнение

$$x = A(\lambda)x + f \tag{34.14}$$

при $f \in \mathfrak{R}(\lambda)$. Решение этого уравнения определяет оператор

$$x = R(\lambda, f). \tag{34.15}$$

В силу леммы 34.1 оператор (34.15) определен на некоторой области в пространстве пар $\{\lambda, f\}$.

Лемма 34.2. *Пусть $A(\lambda)$ является равномерным обобщенным сжатием. Тогда оператор* (34.15) *непрерывен по совокупности переменных.*

Это утверждение было установлено в доказательстве леммы 34.1. ∎

Построения этого пункта несколько упрощаются, если $L(\alpha, \beta) \equiv q < 1$.

34.4. Важный пример. Рассмотрим поля

$$\Phi x = x - Ax - Bx \tag{34.16}$$

с действующими в E операторами A обобщенного сжатия и вполне непрерывными B. Поля Φ будем рассматривать на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Положим

$$F(u, v) = u - Au - Bv \quad (u, v \in \bar{\Omega}). \tag{34.17}$$

Тогда равенство $\Phi x = F(x, x)$ будет диагональным представлением оператора (34.16). Очевидно, поле Φ будет F-частично обратимым. Если Φ невырождено на $\dot{\Omega}$, то определено квазивращение $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$.

Допустим, что задано семейство полей

$$\Phi(\lambda)x = x - A(\lambda)x - B(\lambda, x) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \ x \in \bar{\Omega}), \tag{34.18}$$

где $A(\lambda)$ — равномерное обобщенное сжатие, а $B(\lambda, x)$ — вполне непрерывный оператор. Если все поля $\Phi(\lambda)$ невырождены на $\dot{\Omega}$, то в силу леммы 34.2 они определяют квазигомотопию от поля $\Phi(0)$ к полю $\Phi(1)$ и из теоремы 34.3 вытекает

Лемма 34.3. *Квазивращение полей $\Phi(0)$ и $\Phi(1)$ на $\dot{\Omega}$ одинаково.*

Теорема 34.6. *Пусть ограниченная область Ω выпуклая. Пусть заданное на $\bar{\Omega}$ поле* (34.16) *невырождено на $\dot{\Omega}$ и $(A + B)\dot{\Omega} \subset \bar{\Omega}$. Тогда $\gamma^*(\Phi, F; \Omega) = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство полей

$$\Phi(\lambda)x = x - \lambda Ax - \lambda Bx - (1 - \lambda)x_0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \ x \in \bar{\Omega}),$$

где x_0 — некоторая внутренняя точка области Ω. Из включения $(A + B)\dot{\Omega} \subset \bar{\Omega}$ вытекает, что поля $\Phi(\lambda)$ невырождены на $\dot{\Omega}$ при $0 \leqslant \lambda < 1$; поле $\Phi(1) = \Phi$ невырождено на $\dot{\Omega}$ по условию. Оператор-функция $A(\lambda) = \lambda A$ является равномерным обобщенным сжатием, а оператор $B(\lambda, x) = \lambda Bx + (1 - \lambda)x_0$ вполне непрерывен. Поэтому из леммы 34.3 вытекает совпадение $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$ с квазивращением на $\dot{\Omega}$ поля $\Phi(0)x = x - x_0$. Но последнее квазивращение совпадает с обычным вращением и поэтому равно 1. ∎

Пусть Φ допускает два представления (34.16):

$$\Phi x = x - A_0x - B_0x, \qquad \Phi x = x - A_1x - B_1x \qquad (x \in \bar{\Omega}) \tag{34.19}$$

с обобщенными сжатиями A_0, A_1 и вполне непрерывными операторами B_0, B_1. В соответствии с этим квазивращение поля Φ на $\dot{\Omega}$ может быть определено по двум диагональным представлениям оператора Φ, порожденным операторами $F_0(u, v) = u - A_0u - B_0v$, $F_1(u, v) = u - A_1u - B_1v$. Оказывается, что эти два квазивращения одинаковы. Для доказательства достаточно рассмотреть поля (34.18) с операторами $A(\lambda) = (1-\lambda)A_0 + \lambda A_1$, $B(\lambda, x) = (1-\lambda)B_0x + \lambda B_1x$ и воспользоваться леммой 34.3.

Можно воспользоваться и тем фактом, что квазивращение поля (34.14) — это обычное вращение (см. п. 32.3) векторного поля с α-уплотняющим оператором $A + B$.

34.5. Обобщение. Пусть на замыкании $\bar\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset E$ задано семейство $\mathfrak{H}$ операторов H со значениями в E_1, причем каждый оператор $H \subset \mathfrak{H}$ гомеоморфно отображает область Ω в некоторую область пространства E_1. Если векторное поле Φ допускает представление $\Phi = H - D$, где $H \in \mathfrak{H}$, а D вполне непрерывен на $\bar\Omega$, то будем говорить, что оно *$\mathfrak{H}$-вполне непрерывно.* Очевидно, каждое $\mathfrak{H}$-вполне непрерывное и невырожденное на $\dot\Omega$ поле F-частично обратимо, где $F(u, v) = Hu - Dv$; поэтому для $\mathfrak{H}$-вполне непрерывных полей Φ определено квазивращение $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$.

Невырожденные на $\dot\Omega$ векторные поля $\Phi_0 = H_0 - D_0$ и $\Phi_1 = H_1 - D_1$, где $H_0, H_1 \in \mathfrak{H}$, а D_0, D_1 вполне непрерывны, назовем *$\mathfrak{H}$-квазигомотопными* на $\dot\Omega$, если существуют вполне непрерывные операторы $S(\lambda; x)$ и $D(\lambda; x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in \bar\Omega)$ такие, что

$$S(0; x) = 0, \qquad S(1; x) = H_1x - H_0x,$$
$$D(0; x) = D_0x, \qquad D(1; x) = D_1x,$$

отображение $H_0x + S(\lambda; x)$ при каждом $\lambda \in [0, 1]$ принадлежит $\mathfrak{H}$, векторные поля

$$\Phi(\lambda)x = H_0x + S(\lambda; x) - D(\lambda; x) \qquad (x \in \bar\Omega) \tag{34.20}$$

невырождены на $\dot\Omega$. В силу теоремы 34.3 *из $\mathfrak{H}$-квазигомотопности на $\dot\Omega$ полей Φ_0 и Φ_1 следует равенство*

$$\gamma^*(\Phi_0, F_0; \Omega) = \gamma^*(\Phi_1, F_1; \Omega), \tag{34.21}$$

где $F_0(u, v) = H_0u - D_0v$, $F_1(u, v) = H_1u - D_1v$.

Семейство $\mathfrak{H}$ назовем *компактно связным*, если для каждых двух операторов $H_0, H_1 \in \mathfrak{H}$, разность которых $H_0 - H_1$ вполне непрерывна, можно указать вполне непрерывный оператор $S(\lambda; x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in \bar\Omega)$ такой, что оператор $H_0x + S(\lambda; x)$ при каждом λ принадлежит $\mathfrak{H}$ и $S(0; x) = 0$, $S(1; x) = H_1x - H_0x$. Об операторе $H_0x + S(\lambda; x)$ будем говорить, что он *связывает гомеоморфизмы H_0 и H_1.*

Пусть H_0 — некоторый линейный гомеоморфизм пространства E на E_1. Рассмотрим множество $\mathfrak{H}(H_0)$ всех линейных гомеоморфизмов E на E_1 вида $H = H_0 - S$, где S вполне непрерывен, а сумма $\beta(H_0^{-1}S)$ кратностей больших чем 1 собственных значений оператора $H_0^{-1}S$ четна (число 1 не является, очевидно, собственным значением оператора $H_0^{-1}S$). Множество $\mathfrak{H}(H_0)$ является примером компактно связного семейства гомеоморфизмов.

Пусть $E_1 = E$. В этом случае компактно связным семейством гомеоморфизмов будет совокупность $\mathfrak{H}$ всех операторов вида $H = I - A$, где A — обобщенное сжатие.

Допустим, что $\mathfrak{H}$ компактно связно. Пусть $\mathfrak{H}$-вполне непрерывное векторное поле Φ невырождено на $\dot\Omega$ и допускает на $\bar\Omega$ два представления $\Phi = H_0 - D_0$ и $\Phi = H_1 - D_1$, где H_0, $H_1 \in \mathfrak{H}$, а D_0 и D_1 вполне непрерывны. Тогда поля (34.20) с оператором $D(\lambda; x) = D_0x - S(\lambda; x)$ невырождены на $\dot\Omega$ (все они совпадают с полем Φ) и поэтому справедливо равенство (34.21). Нами доказана

Теорема 34.7. *Пусть семейство $\mathfrak{H}$ компактно связно. Пусть $\mathfrak{H}$-вполне непрерывное векторное поле Φ определено на $\bar\Omega$ и невырождено на $\dot\Omega$. Тогда квазивращение $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$, где $F(u, v) = Hu - Dv$, одинаково при всех H из $\mathfrak{H}$ и вполне непрерывных D.*

Эта теорема позволяет в случае компактно связного $\mathfrak{H}$ говорить о квазивращении $\mathfrak{H}$-вполне непрерывных полей, не задумываясь об их диагональном представлении. Конечно, при этом подразумеваются лишь диагональные представления (34.1) с операторами $F(u, v) = Hu - Dv$, где $H \in \mathfrak{H}$, а D вполне непрерывен. Квазивращение $\mathfrak{H}$-вполне непрерывных полей обладает обычными свойствами вращения, вплоть до теоремы Хопфа: если область Ω жорданова, а определенные на $\bar\Omega$ и невырожденные на $\dot\Omega$ векторные $\mathfrak{H}$-вполне непрерывные поля Φ_0, Φ_1 имеют одинаковое квазивращение на $\dot\Omega$, то эти поля $\mathfrak{H}$-квазигомотопны на $\dot\Omega$ (докажите).

34.6. Вращение по модулю 2. Теорема 34.7 теряет силу, если семейство $\mathfrak{H}$ гомеоморфизмов не обладает свойством компактной связности. Однако имеет место следующее важное утверждение.

Пусть область Ω связна. Рассмотрим такие два оператора H_1, $H_2 \in \mathfrak{H}$, разность которых $H_1 - H_2$ вполне непрерывна. Тогда на области $\Omega_1 = H_1\Omega \subset E_1$ определен гомеоморфизм $H_2H_1^{-1}$ на область $\Omega_2 = H_2\Omega \subset E_1$, который отличается от единичного оператора вполне непрерывным слагаемым, так как $H_2H_1^{-1} - I = (H_2 - H_1)H_1^{-1}$. Поэтому (см. п. 22.4) определена степень $\varepsilon(H_1, H_2)$ гомеоморфизма $H_2H_1^{-1}$, причем $|\varepsilon(H_1, H_2)| = 1$. Легко видеть, что $\varepsilon(H_1, H_2) = \varepsilon(H_2, H_1)$ (нам это равенство здесь не понадобится; его можно рассматривать и как следствие теоремы 34.8, к доказательству которой мы переходим).

Теорема 34.8. *Пусть область Ω связна. Пусть $\mathfrak{H}$-вполне непрерывное векторное поле Φ задано на $\bar\Omega$ и невырождено на $\dot\Omega$. Пусть, наконец, $\Phi = H_1 - D_1$ и $\Phi = H_2 - D_2$, где H_1, $H_2 \in \mathfrak{H}$, а D_1 и D_2 вполне непрерывны. Тогда*

$$\gamma^*(\Phi, F_1; \Omega) = \varepsilon(H_1, H_2)\,\gamma^*(\Phi, F_2; \Omega), \quad (34.22)$$

где $F_1(u, v) = H_1u - D_1v$, $F_2(u, v) = H_2u - D_2v$.

Доказательство. Если у поля Φ нет на $\bar\Omega$ особых точек, то по определению квазивращения $\gamma^*(\Phi, F_1; \Omega)$ и $\gamma^*(\Phi, F_2; \Omega)$ равны нулю. Поэтому нужно рассмотреть лишь случай, когда множество N особых точек поля Φ непусто.

Множество N компактно и замкнуто; $N \subset \Omega$, $H_1N \subset \Omega_1$, $H_2N \subset \Omega_2$. Поэтому можно найти такую окрестность U множества N, что $\bar U \subset \Omega$, $\overline{D_1U} \subset \Omega_1$, $\overline{D_2U} \subset \Omega_2$. На $\bar U$ будут определены и вполне непрерывны операторы $H_1^{-1}D_1$ и $H_2^{-1}D_2$. По определению квазивращения справедливы равенства

$$\gamma^*(\Phi, F_1; \Omega) = \gamma\left(I - H_1^{-1}D_1; U\right),$$
$$\gamma^*(\Phi, F_2; \Omega) = \gamma\left(I - H_2^{-1}D_2; U\right).$$

Следовательно, вместо (34.22) достаточно доказать, что

$$\gamma\left(I - H_1^{-1}D_1; U\right) = \varepsilon(H_1, H_2)\,\gamma\left(I - H_2^{-1}D_2; U\right). \quad (34.23)$$

Положим $\Sigma_1 = H_1U$, $\Sigma_2 = H_2U$ и определим на $\bar\Sigma_1$, $\bar\Sigma_2$ вполне непрерывные векторные поля $\Psi_1 = I - D_1H_1^{-1}$, $\Psi_2 = I - D_2H_2^{-1}$ соответственно. Очевидно, $\Psi_1y = \Psi_2H_2H_1^{-1}y$ при $y \in \bar\Sigma_1$ и из теоремы 22.2 вытекает равенство

$$\gamma\left(I - D_1H_1^{-1}; \Sigma_1\right) = \varepsilon(H_1, H_2)\,\gamma\left(I - D_2H_2^{-1}; \Sigma_2\right).$$

Поэтому для доказательства (34.23) достаточно установить равенства

$$\gamma\left(I - D_1H_1^{-1}; \Sigma_1\right) = \gamma\left(I - H_1^{-1}D_1; U\right),$$
$$\gamma\left(I - D_2H_2^{-1}; \Sigma_2\right) = \gamma\left(I - H_2^{-1}D_2; U\right).$$

Но эти равенства вытекают из теоремы 26.3. ∎

Теорема 34.7 является следствием теоремы 34.8, так как $\varepsilon(H_1, H_2) = 1$ при H_1, $H_2 \in \mathfrak{H}$, если семейство $\mathfrak{H}$ компактно связно.

Из (34.22) вытекает, что в условиях теоремы 34.7

$$\gamma^*(\Phi, F_1; \Omega) \equiv \gamma^*(\Phi, F_2; \Omega) \pmod 2. \quad (34.24)$$

Поэтому, если говорить о квазивращении $\mathfrak{H}$-вполне непрерывного поля Φ по модулю 2, то при любом семействе гомеоморфизмов $\mathfrak{H}$ (а не только компактно связном!) можно не задумываться о его конкретном диагональном представлении. Конечно, речь идет лишь о представлениях (34.2) с оператором $F(u, v) = Hu - Dv$, где $H \in \mathfrak{H}$, а D вполне непрерывен. При переходе к квазивращениям по модулю 2 сохраняют силу утверждения теорем 34.1—34.3.

34.7. Лемма о линейных фредгольмовых операторах. Пусть B — линейный непрерывный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство E_1. Оператор B называется *нормально разрешимым*, если множество $\mathfrak{R}(B)$ его значений замкнуто в E_1. Пусть $\alpha(B)$ — размерность подпространства нулей оператора B, а $\omega(B)$ — *дефект* подпространства $\mathfrak{R}(B)$, т. е. размерность подпространства аннулирующихся на $\mathfrak{R}(B)$ линейных функционалов. Если $\alpha(B)$, $\omega(B)$ конечны и $\alpha(B) = \omega(B)$, то нормально разрешимый оператор B называется *фредгольмовым*. Фредгольмовыми являются все операторы $B = B_1 + B_2$, где B_1 непрерывно обратим, а B_2 вполне непрерывен (например, при $E_1 = E$ операторы $I - B$, где B вполне непрерывен, будут фредгольмовыми). Фредгольмовость линейного оператора сохраняется при произвольном малом по норме возмущении; фредгольмовость сохраняется при любом вполне непрерывном возмущении.

Пусть $\mathfrak{F}$ — компакт в E и пусть на $\mathfrak{F}$ задана непрерывная (по норме линейных операторов) функция $B(x)$, значениями которой являются фредгольмовы операторы, действующие из E в E_1. Пусть x_0 — фиксированная точка из $\mathfrak{F}$; по условию подпространство $\mathfrak{R}[B(x_0)]$ имеет конечный дефект и поэтому можно построить линейный оператор $Q(x_0)$ проектирования на $\mathfrak{R}[B(x_0)]$; очевидно, $Q(x_0)B(x_0) = B(x_0)$ и $Q(x_0)B(x_0)E = \mathfrak{R}[B(x_0)] = Q(x_0)E_1$. Из непрерывности оператор-функции $B(x)$ вытекает существование такой окрестности $V(x_0)$ точки x_0, что $Q(x_0)B(x)E = \mathfrak{R}[B(x_0)]$ при всех $x \in V(x_0)$ (проверьте). Покроем множество $\mathfrak{F}$ всеми окрестностями $V(x_0)$ $(x_0 \in \mathfrak{F})$, а затем выберем конечное покрытие $V(x_1), \ldots, V(x_s)$. Через E_{10} обозначим линейную оболочку конечномерных подпространств $[I - Q(x_1)]E_1, \ldots, [I - Q(x_s)]E_1$; подпространство E_{10} конечномерно и поэтому можно построить линейный оператор P_0 проектирования на E_{10}. Через E_1^0 обозначим подпространство Q_0E_1, где $Q_0 = I - P_0$.

Множество $Q_0\mathfrak{R}[B(x)]$ совпадает с E_1^0 при всех $x \in \mathfrak{F}$ (проверьте). Иначе говоря, множество значений каждого линейного оператора $B(x) - P_0B(x)$ $(x \in \mathfrak{F})$ совпадает с E_1^0. Так как эти операторы фредгольмовы, то множество нулей $N(x)$ каждого оператора $B(x) - P_0B(x)$ $(x \in \mathfrak{F})$ имеет одну и ту же размерность, совпадающую с дефектом ω_0 подпространства E_1^0 (т. е. с размерностью подпространства E_{10}).

Подпространства $N(x)$ непрерывно зависят от x в смысле *раствора* (см. [14]), т. е. в смысле метрики

$$\theta(N_1, N_2) = \max\{\sup_{x \in N_1, \|x\|=1} \rho(x, N_2), \sup_{x \in N_2, \|x\|=1} \rho(x, N_1)\}. \quad (34.25)$$

Поэтому можно построить непрерывную оператор-функцию $P(x)$, каждое значение $P(x)$ которой — линейный оператор проектирования на $N(x)$ в E.

Если пространство E гильбертово, то $P(x)$ можно определить как оператор ортогонального проектирования на $N(x)$. В случае банахова пространства построение $P(x)$ усложняется. Мы предоставляем его читателю.

Из компактности множества $\mathfrak{F}$ вытекает существование такого $\delta_0 > 0$, что из $\|x_1 - x_2\| \leqslant \delta_0$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{F})$ вытекает равенство $P(x_1)N(x_2) = N(x_1)$. Поэтому при $\|x_1 - x_2\| \leqslant \delta$ $(x_1, x_2 \in \mathfrak{F})$ сужение оператора $P(x_1)$ на $N(x_2)$ имеет обратный $\Delta(x_2, x_1)$, определенный на $N(x_1)$.

Предположим дополнительно, что компакт $\mathfrak{F}$ выпуклый. Выберем в этом компакте фиксированную точку x_0 и построим при каждом $x \in \mathfrak{F}$ оператор $S(x)$, который при $\|x - x_0\| \leqslant \delta_0$ равен $\Delta(x_0, x)$, а затем определяется рекуррентным равенством

$$S(x) = S\left(x_0 + k\delta_0\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right)\Delta\left(x_0 + k\delta_0\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, x\right)$$

при $k\delta_0 \leqslant \|x - x_0\| \leqslant (k+1)\delta_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Каждый оператор $S(x)$ линеен, он определен на $N(x)$, а множество его значений совпадает с $N(x_0)$. Каждый оператор $S(x)P(x)$ $(x \in \mathfrak{F})$ уже определен на всем пространстве E; множество его значений совпадает с $N(x_0) \subset E_1$; оператор-функция $S(x)P(x)$ по построению непрерывна на $\mathfrak{F}$ по норме операторов.

В силу теоремы 18.1 можно определить на E непрерывный проектор R на компакт $\mathfrak{F}$. Положим тогда

$$W(x) = P_0B(Rx) + S(Rx)P(Rx) \quad (x \in E). \quad (34.26)$$

Лемма 34.4. *Пусть на некоторой окрестности выпуклого компакта $\mathfrak{F} \subset E$ задана непрерывная (по норме линейных операторов) оператор-функция $B(x)$, значениями которой являются фредгольмовы операторы, действующие из E в E_1. Тогда можно определить на всем E непрерывную оператор-функцию $W(x)$, значения которой образуют компактное семейство линейных операторов, действующих из E в фиксированное конечномерное подпространство $E_{10} \subset E_1$ так, что операторы $B(x) - W(x)$ непрерывно обратимы при всех x из достаточно малой окрестности компакта $\mathfrak{F}$.*

Оператор-функцию $W(x)$ можно определить равенством (34.26). ∎

34.8. Нелинейные фредгольмовы операторы. Рассмотрим нелинейный оператор Φ, действующий из пространства E в пространство E_1, определенный на некоторой окрестности замыкания $\overline{\Omega}$ ограниченной выпуклой области $\Omega \subset E$. Предположим, что оператор Φ непрерывно дифференцируем по Фреше в этой окрестности и значения его производной $B(x) = \Phi'(x)$ являются фредгольмовыми линейными операторами. Тогда нелинейный оператор Φ называется *фредгольмовым.*

Обозначим через $M(y)$ множество лежащих в $\overline{\Omega}$ решений уравнения $\Phi x = y$. Оператор Φ называется *собственным* на $\overline{\Omega}$, если прообраз каждого компактного множества компактен.

Пусть оператор Φ собственный и фредгольмов. Пусть $\Phi x \neq 0$ при $x \in \dot{\Omega}$. Тогда замкнутое выпуклое и компактное множество $\mathfrak{F} = \overline{\mathrm{co}}\, M(0)$ будет лежать в Ω. В силу леммы 34.4 можно построить определенную на всем E непрерывную оператор-функцию $W(x)$, значения которой образуют компактное семейство линейных операторов, действующих из E в фиксированное конечномерное подпространство $E_{10} \subset E_1$ так, что операторы $\Phi'(x) - W(x)$ непрерывно обратимы при всех x из достаточно малой окрестности множества $\mathfrak{F}$. Положим

$$F(u, v) = \Phi(u) - W(v)u + W(v)v. \qquad (34.27)$$

Уравнение (34.2) с оператором (34.27) по построению (в силу принципа сжатых отображений) имеет единственное решение $u = Rv$ при значениях v из окрестности множества $M(0)$. Читатель легко проверит, что оператор R вполне непрерывен. Поэтому Φ является F-частично обратимым оператором. Следовательно, определено квазивращение $\gamma^*(\Phi, F; \Omega)$ (см. п. 34.2) .

Рассмотрим два диагональных представления (34.27) оператора Φ, порожденных оператор-функциями $W_1(x)$ и $W_2(x)$. Можно показать, что соответствующие вращения связаны аналогичным (34.22) равенством

$$\gamma^*(\Phi, F_1; \Omega) = \varepsilon(W_1, W_2)\,\gamma^*(\Phi, F_2; \Omega), \qquad (34.28)$$

где $|\varepsilon(W_1, W_2)| = 1$. Для вычисления $\varepsilon(W_1, W_2)$ нужно выбрать конечномерное подпространство $\Pi \subset E_1$, содержащее значения всех операторов $W_1(x)$, $W_2(x)$; рассмотреть матрицу D линейного преобразования $[\Phi'(x_0) + W_1(x_0)][\Phi'(x_0) + W_2(x_0)]^{-1}$ пространства Π на себя, где x_0 — одна из точек множества $M(0)$; а затем определить число $\varepsilon(W_1, W_2)$ равенством $\varepsilon(W_1, W_2) = \operatorname{sign} \det D$.

Равенство (34.28) можно использовать для определения вращения поля Φ (с фредгольмовым оператором Φ) по модулю 2 (как это сделано в близкой ситуации в п. 34.6).

Для определения вращения векторных полей с фредгольмовыми операторами Φ можно применять диагональные представления оператора Φ, отличные от (34.27). Например, удобны представления $\Phi x = F(x, x)$ с оператором

$$F(u, v) = \Phi(u) - A(u) + A(v), \qquad (34.29)$$

где A вполне непрерывен и непрерывно дифференцируем по Фреше, причем линейные операторы $\Phi'(u) - A'(u)$ непрерывно обратимы при всех u из некоторой окрестности множества $\mathfrak{F}$. Всегда ли можно построить такой оператор A? Положительный ответ на этот вопрос, поставленный одним из авторов книги, для операторов в гильбертовом пространстве дал В. И. Овчинников (Матем. заметки **10**, № 5 (1971)). Для случая операторов в банаховых пространствах E также положительный ответ дал Ю. И. Сапронов (Функц. анализ и его прилож. **5**, № 4 (1971)), но при дополнительных предположениях об усиленной гладкости оператора A и о некоторых свойствах пространства E.

Класс фредгольмовых собственных отображений был первым классом нелинейных отображений в бесконечномерных пространствах, на который удалось перенести теорию Брауэра — Хопфа степени отображений в конечномерных пространствах. Заслуга этого переноса принадлежит Каччиополи (библиографию см. в [42]), определившим степень по модулю 2. После классической работы Лере — Шаудера [35], ряда статей Э. Роте и других авторов интерес к фредгольмовым отображениям ослабел. Он снова возник в последние годы в основном в связи с исследованиями Смейла (Smale S., Amer. J. Math. **87** (1965)), применившего старую идею Нагумо: показывается, что почти при «каждом» малом y отображение $\Phi x + y$ имеет в области Ω лишь конечное число особых точек, каждая из которых регулярна; их количество (по модулю 2) объявляется степенью отображения Φ области Ω относительно нулевой точки. По той же схеме ориентированная степень определена Элвортом и Тромба (K. D. Elworty, A. T. Tromba, Proc. Sympos. Pure. Math., Calif. **15** (1968), 45—94; **18** (1970), 86—94). Новые идеи в теории фредгольмовых отображений выдвинул А. С. Шварц (ДАН СССР **154**, № 1 (1964)). Существенные результаты в теории фредгольмовых отображений получили Ю. Г. Борисович, В. Г. Звягин, Э. Мухамадиев, Нуссбаум (R. D. Nussbaum), Ремерт (R. Remmert), Ю. И. Сапронов, Фенске (Ch. Fenske), Дж. Шварц (J. T. Schwartz), Штейн (K. Stein), П. Б. Шерман и другие авторы.

Недостаток предложенной авторами и изложенной в § 34 простой схемы (сведение к вполне непрерывным полям) — предположение о выпуклости области Ω. Нам неясно, как от этого предположения освободиться.

§ 35. Некоторые обобщения

35.1. Проекционные схемы. Теория вращения векторных полей удобна при изучении приближенных методов решения операторных уравнений (см. гл. 7). С другой стороны, каждый приближенный метод, использующий конечномерные аппроксимации операторов (см. § 50) порождает некоторую общую схему построения теории вращения для новых классов векторных полей. При этом важную роль играет общая трактовка понятия аппроксимирующего уравнения, восходящая к Л. В. Канторовичу [16].

Рассмотрим действующий из банахова пространства E в банахово пространство F непрерывный оператор Φ, заданный на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть E_n, F_n — две последовательности конечномерных пространств и σ_n — непрерывные операторы, действующие из F_n в E_n (как правило, рассматриваются ситуации, в которых $\dim E_n = \dim F_n$, σ_n — линейное отображение F_n на E_n, размерности пространств E_n растут при возрастании n). Пусть на подпространствах E_n заданы *поднимающие* однозначные непрерывные отображения q_n со значениями в E; через Ω_n обозначаются прообразы множеств $\Omega \cap q_n E_n$; предполагается, что каждая область Ω_n ограничена в E_n и что $q_n \dot{\Omega}_n \subset \dot{\Omega}$. Наконец, пусть на множестве $\Phi\dot{\Omega} \subset F$ заданы *опускающие* непрерывные отображения p_n со значениями в F_n. Поднимающие и опускающие отображения q_n, p_n конструируются, как правило, по области Ω и оператору Φ.

Определим на границах $\dot{\Omega}_n$ областей $\Omega_n \subset E_n$ конечномерные векторные поля $\Phi_n = \sigma_n p_n \Phi q_n$. Если они невырождены, то определены вращения $\gamma_n = \gamma(\Phi_n, \Omega_n)$.

Возникает серия вопросов. В каких условиях определены вращения γ_n (хотя бы при всех больших n или при бесконечном числе значений n)? Можно ли утверждать, что вращения γ_n при достаточно больших n одинаковы (если такая стабилизация к некоторому числу γ^* имеет место, то γ^* можно объявить «вращением» $\gamma(\Phi, \Omega)$)? Можно ли по числам γ_n установить разрешимость уравнения $\Phi x = 0$ в области Ω? Можно ли определить разумный класс гомотопий, при которых числа γ_n с большими номерами n не меняются? Как вычислять числа γ_n с большими номерами n и т. д.

Все эти вопросы интересны и важны для приложений, все они или некоторые из них обсуждались различными авторами для разных классов отображений и векторных полей. Описанную общую схему естественно называть *аппроксимационной*. Если же $F = E$, $E_n = F_n \subset E$, q_n и σ_n — единичные операторы, P_n — операторы «проектирования» на E_n, то схему называют *проекционной*.

При определении в гл. 2 вращения вполне непрерывного векторного поля мы использовали понятие гомотопных полей. Можно было на первом этапе обойтись без этого понятия и воспользоваться, как это сделано у Лере и Шаудера, проекционной схемой: вначале получить оценку $\|Ax - x\| \geqslant \alpha > 0$ $(x \in \dot{\Omega})$; затем выбрать конечномерное подпространство $E_0 \subset E$, уклонение от которого множества $A\dot{\Omega}$ не превышает $\alpha_1 < \alpha$, и определить на $A(\Omega \cap E_0)$ проектор Шаудера $P_0 = P(E_0)$ (см. п. 18.4) на E_0 так, что $\|P_0 Ax - Ax\| < \alpha$ $(x \in \dot{\Omega} \cap E_0)$; тогда поле $x - PAx$ невырождено на границе $\dot{\Omega}_0 \subset \dot{\Omega} \cap E_0$ области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ в E_0 и определено вращение $\gamma(I - P_0 A, \Omega_0)$; остается доказать, что число $\gamma^* = \gamma(I - P_0 A, \Omega_0)$ не зависит от выбора подпространства E_0 и проектора P_0, и назвать число γ^* вращением $\gamma(I - A, \Omega)$.

Некоторые аппроксимационные и, в частности, проекционные схемы определения степени отображения или вращения векторного поля будут ниже обсуждаться; здесь отметим лишь два цикла работ.

В обширной серии работ В. В. Петришина, Ф. Браудера и их учеников (см. обзоры [6], [47]) изучены так называемые *P-компактные* и *k-собственные* отображения и различные их обобщения. Важную роль в теории В. В. Петришина сыграла работа С. И. Похожаева (Функц. анализ и его прилож. 1, № 3 (1967)).

Детальная теория векторных полей $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, главная часть Φ_1 которых удовлетворяет оценке типа $(\Phi_1 x - \Phi_1 y, x - y) \geqslant 0$ (оператор Φ действует из E в E^* скалярным произведением (z, x) является значение линейного функционала $z \in E^*$ на элементе

$x \in E$), построена и успешно применена к теории граничных задач И. В. Скрыпником [50]. Близкие классы векторных полей и нелинейных отображений изучались с различных точек зрения и другими авторами (библиографию см в [50]).

35.2. Теорема Фрум-Кеткова. В связи с изучением проекционных схем изящную геометрическую теорему установил Р. Л. Фрум-Кетков (ДАН СССР **175**, № 6 (1967)). Приведем ее формулировку для полей в гильбертовом пространстве.

Пусть E_0 — фиксированное конечномерное подпространство пространства E, S — единичная сфера в E; через $P(E_1)$ обозначим ортогональный проектор на подпространство $E_1 \supset E_0$. Пусть непрерывный оператор A задан на S и каждый оператор $P(E_1)A$ не имеет на $S \cap E_1$ неподвижных точек. Тогда, как оказывается,

$$\gamma[I - P(E_1)A,\ S \cap E_1] = \alpha + (-1)^{\dim E_1}\beta \quad (E_1 \supset E_0).$$

При помощи этой теоремы Р. Л. Фрум-Кетков установил некоторые новые признаки разрешимости уравнения $x = Ax$ и распространил теорию степени Лере — Шаудера на новые классы отображений.

35.3. Отображения в линейных топологических пространствах. Теория степени отображений и вращения векторных полей перенесена и на случай линейных топологических пространств. Ограничимся ссылками на основополагающие работы Нагумо [43] и Лере [34].

35.4. Другие работы. Новые схемы построения степени отображения в бесконечномерных пространствах предложили В. Г. Болтянский (ДАН СССР **105**, № 6 (1955)), В. Г. Болтянский и Э. А. Мирзаханян (ДАН Арм. ССР **51**, № 4 (1970)).

§ 36. Многозначные отображения

36.1. Замкнутые отображения. Пусть R и R_1 — два полных метрических пространства с метриками $\rho(x, y)$ и $\rho_1(u, v)$. Обозначим через $R \times R_1$ множество пар $w = \{x, u\}$ $(x \in R, u \in R_1)$ с метрикой $r(w, w_1) = \rho(x, x_1) + \rho_1(u, u_1)$.

Если каждой точке $x \in M \subset R$ сопоставлено некоторое подмножество $F(x) \subset R_1$, то будем говорить, что на M определен *многозначный оператор F. Графиком* этого оператора назовем множество $\Gamma(F; M) \subset R \times R_1$ пар

$\{x, u\}$, где $x \in M$, $u \in F(x)$. Понятие графика полезно и при изучении однозначных операторов.

Оператор F назовем *замкнутым*, если его график $\Gamma(F; M)$ является при каждом замкнутом $M_1 \subset M$ множеством, замкнутым в $R \times R_1$. Очевидна замкнутость каждого непрерывного однозначного оператора.

Через $\theta(F_1, F; M)$ будем обозначать *хаусдорфово уклонение*

$$\theta(F_1, F; M) = \sup_{w_1 \in \Gamma(F_1; M)} \ \inf_{w \in \Gamma(F; M)} r(w, w_1) \qquad (36.1)$$

графика $\Gamma(F_1; M)$ многозначного оператора F_1 от графика $\Gamma(F; M)$ оператора F. Напомним, что уклонение несимметрично ($\theta(F_1, F; M)$ в общем случае не совпадает с $\theta(F, F_1; M)$).

Рассмотрим семейство $F(x; \lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ определенных на M замкнутых многозначных отображений. Это семейство назовем *непрерывной деформацией* оператора $F(x; 0)$ в оператор $F(x; 1)$, если при каждом $\lambda_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \theta[F(\cdot\,; \lambda),\ F(\cdot\,; \lambda_0);\ M] = 0. \qquad (36.2)$$

Мы будем изучать многозначные операторы F, действующие в банаховом пространстве E $(R = R_1 = E)$. Если каждое множество $F(x)$ выпукло, то назовем оператор F *выпуклозначным*. Если многозначный оператор F замкнут и если при каждом ограниченном M_1 компактно множество $\{u\colon\ u \in F(x),\ x \in M_1\}$, то назовем F *вполне непрерывным*.

Вместе с многозначными операторами F будем рассматривать многозначные векторные поля $\Phi = I - F$. Если $x \overline{\in} F(x)$ при $x \in M$, то, как обычно, назовем поле Φ *невырожденным* на M. Поле Φ назовем *вполне непрерывным*, если вполне непрерывен оператор F.

36.2. Вращение поля с многозначным оператором. Пусть на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ заданы два невырожденных многозначных поля $\Phi_0 = I - F_0$ и $\Phi_1 = I - F_1$ с вполне непрерывными выпуклозначными операторами F_0 и F_1. Назовем эти поля *гомотопными* на $\dot{\Omega}$, если можно построить непрерывную деформацию $F(x;\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ оператора F_0 в F_1, обладающую следующими свойствами:

1. $x\,\overline{\in}\,F(x;\lambda)$ при $x\in\dot{\Omega}$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.
2. Каждое множество $F(x;\lambda)$ выпукло.
3. Объединение всех множеств $F(x;\lambda)$ $(x\in\dot{\Omega}, 0\leqslant\leqslant\lambda\leqslant 1)$ компактно.

Очевидны симметричность, рефлексивность и транзитивность соотношения гомотопности. Поэтому невырожденные на $\dot{\Omega}$ поля с вполне непрерывными выпуклозначными операторами распадаются на классы гомотопных полей.

Лемма 36.1. *В каждом классе гомотопных на $\dot{\Omega}$ полей Φ с вполне непрерывными выпуклозначными операторами есть векторные поля $\Phi_0 = I - A$ с однозначными операторами A. Вращение $\gamma(I-A,\Omega)$ у всех таких полей одинаково.*

Доказательство предоставляем читателю (оно совсем просто, хотя и громоздко). ∎

Лемма 36.1 позволяет определить *вращение* $\gamma(I-F,\Omega)$ невырожденного поля с многозначным оператором как вращение любого гомотопного ему на $\dot{\Omega}$ поля уже с однозначным оператором. Из самого определения вытекает, что *вращение многозначного поля (с вполне непрерывным выпуклозначным оператором) не меняется при переходе к гомотопным полям.*

36.3 Неподвижные точки. Элемент x_0 называется *обобщенной неподвижной точкой многозначного оператора F*, если $x_0\in F(x_0)$. Понятие вращения многозначного поля может быть использовано для доказательства существования обобщенных неподвижных точек таким же способом, как это делалось в случае однозначных операторов.

Теорема 36.1. *Пусть на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega\subset E$ задан вполне непрерывный выпуклозначный оператор F без обобщенных неподвижных точек на $\dot{\Omega}$. Пусть $\gamma(I-F,\Omega)\neq 0$. Тогда оператор F имеет в области Ω по крайней мере одну обобщенную неподвижную точку.*

Приведем схему доказательства. Ограничимся при этом случаем, когда пространство E гильбертово.

Если у оператора F нет неподвижных точек на $\overline{\Omega}$, то $\rho[x,F(x)]\geqslant\alpha>0$ $(x\in\overline{\Omega})$. Поэтому можно найти такое конечномерное подпространство $E_0\subset E$, что поле $I-P_0F$ гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $I-F$ и P_0F не имеет на $\overline{\Omega}$ неподвижных точек, где P_0 — оператор ортогонального проектирования на E_0.

Это построение позволяет перейти к рассмотрению полей лишь на множестве $\overline{\Omega}\cap E_0$. Иначе говоря, теорему достаточно доказать лишь для случая конечномерного E.

Пусть E конечномерно. Рассмотрим последовательность таких однозначных на $\overline{\Omega}$ непрерывных операторов A_n (постройте их!), что $\theta(A_n,F;\overline{\Omega})\to 0$. При достаточно больших n поля $I-A_n$ гомотопны на $\dot{\Omega}$ полю $I-F$ и поэтому их вращение на $\dot{\Omega}$ отлично от нуля. Следовательно, найдется последовательность $x_n\in\Omega$ такая, что $x_n = A_nx_n$. Эту последовательность без ограничения общности можно считать сходящейся. Ее предел — обобщенная неподвижная точка оператора F. ∎

Теорема 36.1 позволяет, по существу, полностью распространить изложенную в главах 1 и 2 теорию на поля с многозначными операторами (включая классификационные теоремы, теорему Кронекера об алгебраическом числе неподвижных точек и т. д.). Ясно, как распространяются и конструкции предыдущих параграфов этой главы на многозначные отображения.

36.4. Обобщения. В этом пункте мы обсудим проблему введения понятия вращения для поля $x-Ax$ с оператором A, который не обязательно замкнут (например, A — однозначный разрывный оператор) и не обязательно выпуклозначен. Одновременно с введением понятия «вращение» нужно пересмотреть и понятие «обобщенная неподвижная точка» — чтобы о существовании неподвижной точки в области Ω можно было судить по значениям оператора A лишь на границе $\dot{\Omega}$ области Ω (или на некоторой окрестности этой границы).

Пусть оператор A (однозначный или многозначный) задан на плотном в $\overline{\Omega}$ множестве $\mathfrak{D}$ и пусть множество $\{y\colon y\in A(x), x\in\mathfrak{D}\}$ компактно в E. Определим тогда на $\overline{\Omega}$ оператор

$$A^{\square}(x)=\bigcap_{n=1,2,\ldots}\overline{\mathrm{co}}\left\{y:\ y\in A(z),\ z\in\mathfrak{D},\ \|z-x\|\leqslant\frac{1}{n}\right\}.$$

Этот оператор вполне непрерывен и выпуклозначен.

Поле $I-A$ невырождено, если на соответствующем множестве невырождено поле $I-A^{\square}$. Для невырожденных на $\dot{\Omega}$ полей вращение определяется равенством $\gamma(I-A,\Omega)=\gamma(I-A^{\square},\Omega)$. Точка x_0 объявляется обобщенной неподвижной точкой оператора A, если $x_0\in A^{\square}(x_0)$. При таких определениях становятся применимыми теорема 36.1 и все рассуждения из пп. 36.1—36.3.

Различным способам построения теории многозначных и разрывных отображений, степени этих отображений, вращению полей с многозначными и разрывными операторами, теоремам о неподвижных точках таких операторов и т. д., различным приложениям посвятили ряд работ Дж. фон Нейман, Какутани (Kakutani S.), Ки Фан (Fan Ky), А. Д. Мышкис, Х. Ф. Боненбласт и С. Карлин, Гранас и Яворовский (Granas A., Jaworowski I. W.), Ф. Браудер, И. Л. Гликсберг, Хукухара (Hukuhara M.), Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, Ю. Е. Гликлих, Я. А. Израилевич, Э. М. Мухамадиев, В. В. Обуховский, Гимельберг, Портер и ван Влек (Himmelberg C. J., Porter J. R., van Vleck F. S.), Челина и Ласота (Cellina A., Lasota A.) и многие другие авторы.

36.5. Отображения в фактор-пространствах. Теория полей с многозначными операторами в конечномерных пространствах может служить основой для определения вращения различных новых классов векторных полей в бесконечномерных (банаховых или линейных топологических) пространствах E. Одна из схем такого определения использует переход к полям в фактор-пространствах.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — подпространства возрастающего конечного дефекта в пространстве E. Пусть действующий в E оператор A определен на множестве $\mathfrak{D}(A)$, плотном в замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega\subset E$. Обозначим через P_n линейный оператор, действующий в фактор-пространство E/E_n из E и относящий каждому элементу $x\in E$ класс смежности E_n+x, через Ω_n — область $P_n\Omega\subset E/E_n$, через $\mathfrak{D}_n$ — множество $P_n\mathfrak{D}(A)$ (оно плотно в $\overline{\Omega}_n$). Определим на $\mathfrak{D}_n$ действующий в E/E_n многозначный оператор A_n равенством

$$A_nz=\{w:\ w=P_nAx,\ P_nx=z,\ x\in\mathfrak{D}(A)\}.$$

По оператору A_n можно определить выпуклозначный замкнутый (и, очевидно, вполне непрерывный) оператор $A_n^{\square}$ — см. п. 36.4. Если окажется, что многозначные поля $I-A_n^{\square}$ невырождены на $\dot{\Omega}_n$, то будут определены вращения $\gamma_n=\gamma(I-A_n^{\square},\Omega_n)$. Числовую последовательность γ_n можно рассматривать как «вращение» поля $I-A$ на $\dot{\Omega}$.

При таком подходе возникает ряд вопросов. Во-первых, нужно найти классы операторов, для которых числа γ_n при всех достаточно больших n принимают одно и то же значение γ^*. (Тогда число γ^* можно считать вращением поля $I-A$ на $\dot{\Omega}$.) Если вращение γ^* определено, то нужно описать возможно более широкие классы деформаций поля, при которых вращение сохраняется. После этого нужно установить обычные теоремы теории вращения: из отличия вращения от нуля вытекает существование неподвижной точки (обычной или обобщенной) у оператора A, вращение на границе области равно сумме индексов особых точек и т. д.

Пока нет достаточно полных реализаций описанной схемы, приводящих к существенно новым приложениям. Отдельные важные результаты получены Ф. Браудером, Г. М. Вайникко, В. В. Петришиным и другими авторами.

Глава 5

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В главе устанавливаются общие принципы разрешимости уравнений с нелинейными операторами. Часть этих общих принципов основана на развитой в предыдущих главах теории вращения векторных полей. Другие принципы основаны на геометрических идеях другой природы.

Отметим, что ряд теорем о разрешимости уравнений $\Phi x = 0$ (или, что то же, о существовании нулей у векторного поля Φ) был приведен в главах 1, 2 и 4. Некоторые теоремы разрешимости будут доказаны в главах 6 и 8.

Наиболее часто изучаются уравнения вида $x = Ax$. Разрешимость такого операторного уравнения равносильна существованию у оператора A неподвижной точки. Теоремы о существовании неподвижной точки называют ***принципами неподвижной точки.***

§ 37. Инвариантные множества и неподвижные точки

37.1. Обобщенные сжатия. Множество $\mathfrak{M}$ называется инвариантным для A, если $A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$. В этом параграфе показывается, что определенная структура множества $\mathfrak{M}$ в объединении со специальными свойствами оператора A влекут существование у A по крайней мере одной неподвижной точки.

Наиболее простым и наиболее важным утверждением такого типа является следующий восходящий к С. Банаху *принцип сжатых отображений*, о котором выше уже шла речь.

Теорема 37.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — инвариантное для оператора A полное метрическое пространство и*

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant q\rho(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{M}), \tag{37.1}$$

где $q < 1$. Тогда A имеет на $\mathfrak{M}$ одну и только одну неподвижную точку x^*.

Эта теорема является частным случаем следующего утверждения, доказанного в п. 34.3 (теорема 34.5).

Теорема 37.2 (принцип обобщенного сжатия). *Пусть $\mathfrak{M}$ — инвариантное для оператора A полное мет-*

рическое пространство. Пусть A является обобщенным сжатием:

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant L(\alpha, \beta)\,\rho(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{M};\ \alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta), \tag{37.2}$$

где $L(\alpha, \beta) < 1$ при $0 < \alpha \leqslant \beta < \infty$. Тогда A имеет на $\mathfrak{M}$ одну и только одну неподвижную точку.

Условия теоремы 37.2 выполнены, например, если A преобразует в себя метрический компакт $\mathfrak{M}$ и $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ при $x, y \in \mathfrak{M}$ и $x \neq y$.

Приведем одно обобщение теоремы 37.2 для случая, когда оператор A действует в банаховом пространстве E.

Теорема 37.3. *Пусть $\overline{\Omega}$ — шар $\|x\| \leqslant \rho$ в банаховом пространстве E. Пусть A является обобщенным сжатием на $\overline{\Omega}$ и $A\dot{\Omega} \subset \overline{\Omega}$, где $\dot{\Omega}$ — сфера $\|x\| = \rho$. Тогда A имеет на $\overline{\Omega}$ одну и только одну неподвижную точку.*

Эта теорема является простым следствием теоремы 33.5. Приведем ее прямое доказательство.

Обозначим через Λ множество тех $\lambda \in [0, 1]$, при которых уравнение $x = \lambda Ax$ имеет решения в шаре $\overline{\Omega}$. Множество Λ непусто — оно содержит точку $\lambda = 0$. Пусть $\lambda_n \in \Lambda$, $x_n = \lambda_n Ax_n$ и $\lambda_n \to \lambda^*$. Из (37.2) вытекает оценка

$$\|x_{n+m} - x_n\| \leqslant \|Ax_n\| \cdot |\lambda_{n+m} - \lambda_n| + \\ + L(\|x_{n+m} - x_n\|, \rho) \cdot \|x_{n+m} - x_n\|,$$

откуда

$$\|x_{n+m} - x_n\| \cdot [1 - L(\|x_{n+m} - x_n\|, \rho)] \leqslant 2\rho\,|\lambda_{n+m} - \lambda_n|.$$

Поэтому последовательность x_n сходится к некоторой точке x^*, причем $x^* = \lambda^* Ax^*$. Значит, множество Λ замкнуто.

Пусть λ_0 — наибольшее число в множестве Λ. Нам нужно доказать, что $\lambda_0 = 1$. Предположим противное. Тогда решение $x_0 \in R$ уравнения $x = \lambda_0 Ax$ будет внутренней точкой шара $\overline{\Omega}$. Простые оценки показывают, что при близких к λ_0 значениях λ оператор $D = \lambda A$ преобразует в себя шар $\|x - x_0\| \leqslant \rho - \|x_0\|$ и является на этом шаре оператором сжатия. Поэтому уравнение $x = \lambda Ax$ имеет в шаре $\overline{\Omega}$ решения и при близких к λ_0, но больших чем λ_0 значениях λ. Мы пришли к противоречию. ∎

37.2. Принцип Шаудера. Знаменитый принцип Шаудера (Schauder, J., Math. Z. 26 (1927)) является развитием почти столь же знаменитых теорем Биркгофа и Келлога (Birkhoff G. D. and Kellog O. D., Trans. Amer.

Math. Soc. 23 (1922)). Для конечномерного случая этот принцип был установлен еще П. Болем и Л. Брауэром.

Теорема 37.4 (принцип Шаудера). *Пусть непрерывный оператор A преобразует выпуклое замкнутое множество T в банаховом пространстве E в свою компактную часть. Тогда A имеет на T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $T_1 = \overline{\mathrm{co}}\, AT$; множество T_1 компактно и $T_1 \subset T$. В силу теоремы 18.3 оператор A можно продолжить до определенного на всем E непрерывного оператора A_1 со значениями в T_1; оператор A_1 вполне непрерывен.

Пусть $\Omega = \{x\colon \|x\| < \rho\}$ — шар настолько большого радиуса, что $T_1 \subset \Omega$. Тогда вполне непрерывное векторное поле $I - A_1$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и, в силу теоремы 21.5, $\gamma(I - A_1, \Omega) = 1$. Из теоремы 20.5 вытекает существование у поля $I - A_1$ особой точки x^*. Из $x^* = A_1 x^*$ следует, что $x^* \in T_1$; поэтому $A_1 x^* = A x^*$ и, наконец, $x^* = Ax^*$. ∎

Если T ограничено и телесно (содержит внутренние точки), то доказательство теоремы 37.4 не требует предварительного продолжения оператора A — достаточно непосредственно сослаться на теоремы 20.5 и 21.5.

Если A определен на всем E и вполне непрерывен, то для применения теоремы 37.4 нужно лишь суметь построить инвариантное для A ограниченное выпуклое множество. Но полная непрерывность оператора A на всем пространстве не необходима для применения принципа Шаудера.

К принципу Шаудера примыкает ряд формально более общих признаков существования неподвижной точки. Например, из теорем 20.5 и 21.5 вытекает следующее утверждение, указанное Э. Роте.

Теорема 37.5. *Пусть оператор A вполне непрерывен на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной выпуклой области $\Omega \subset E$, причем $A\dot{\Omega} \subset \overline{\Omega}$. Тогда A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в множестве $\overline{\Omega}$.*

Принцип Шаудера отличается от принципа сжатых отображений, в частности, предположением о выпуклости инвариантного множества. Это предположение отбросить нельзя — простым примером может служить

преобразование A поворота окружности на некоторый угол $\varphi \in (0, 2\pi)$. Бинг (Bing R. H., Amer. Math. Mon. **76**, № 2 (1969)) указал остроумный пример трехмерного компактного и звездного множества, при непрерывном преобразовании которого в себя могут отсутствовать неподвижные точки.

Однако можно указать невыпуклые и негомеоморфные выпуклым множества, при преобразовании которых в себя вполне непрерывными операторами обязательно есть неподвижные точки. Приведем пример, принадлежащий М. А. Рутману. Этот пример интересен, в частности, и тем, что у него нет аналога для случая отображений в конечномерных пространствах!

Пусть $\{T_\alpha\}$ — набор (конечный или бесконечный) открытых шаров, замыкания которых не пересекаются друг с другом. Пусть все эти шары лежат в некотором открытом шаре T. Обозначим через Π замкнутое множество $\overline{T} \setminus \bigcup\limits_\alpha T_\alpha$.

Пусть вполне непрерывный оператор A преобразует множество Π в себя. Покажем, что *у оператора A есть по крайней мере одна неподвижная точка.*

Допустим противное и продолжим оператор A с сохранением полной непрерывности на шар $\overline{T}$. У продолженного оператора A_1 неподвижные точки могут быть лишь в конечном числе шаров из набора $\{T_\alpha\}$. Пусть это будут шары $T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_k}$. На множестве $\overline{\Pi}_1$, где $\Pi_1 = T \setminus (T_{\alpha_1} \cup \ldots \cup T_{\alpha_k})$, поле $I - A_1$ невырождено и поэтому $\gamma(I - A_1, \Pi_1) = 0$. Следовательно, из теоремы 20.2 вытекает, что

$$\gamma(I - A, T) = \gamma(I - A_1, T) = \gamma(I - A_1, \Pi_1) + \gamma(I - A_1, T_{\alpha_1}) + \ldots$$
$$\ldots + \gamma(I - A_1, T_{\alpha_k}) = \gamma(I - A_1, T_{\alpha_1}) + \ldots + \gamma(I - A_1, T_{\alpha_k}).$$

Но на каждой сфере $\dot{T}_\alpha$ поле $I - A_1$ совпадает с полем $I - A$, а $\gamma(I - A, T_\alpha) = 0$. Таким образом, $\gamma(I - A, T) = 0$. С другой стороны, из теоремы 21.5 вытекает равенство $\gamma(I - A, T) = 1$. Мы пришли к противоречию. ∎

Принцип Шаудера (как и принцип сжатых отображений) содержит лишь достаточные условия существования неподвижной точки. Достаточные условия содержат и принципы, доказываемые ниже. А как обстоит дело с необходимыми условиями?

Вместо ответа на этот вопрос приведем формулировки двух шуточных и абсолютно правильных теорем из студенческого фольклора. Первая: *действующий в метрическом пространстве оператор A имеет неподвижную точку в том и только том случае, если он* *удовлетворяет на некотором множестве $\mathfrak{M}$ условиям принципа сжатых отображений.* Вторая: *действующий в банаховом пространстве E оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку в том и только том случае, если он на некотором выпуклом множестве удовлетворяет условиям принципа Шаудера.*

В условиях принципа Шаудера и его следствий нельзя гарантировать единственность неподвижной точки. Примеры очевидны уже в случае одномерного E.

37.3. Априорные оценки. Пусть действующий в E оператор A определен на всем E и вполне непрерывен. Для доказательства разрешимости уравнения $x = Ax$ часто применяется метод вспомогательного параметра. Этот метод заключается в построении вполне непрерывного оператора $A(\lambda; x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in E)$, который при $\lambda = 1$ переходит в Ax, а при $\lambda = 0$ настолько прост, что разрешимость уравнения $x = A(0; x)$ очевидна. После этого стараются показать, что при изменении λ от 0 до 1 решение уравнения $x = A(\lambda; x)$ не исчезает, а переходит при $\lambda = 1$ в решение уравнения $x = Ax$. Заключение о том, что решение уравнения $x = A(\lambda; x)$ не исчезает, наиболее часто основывают на следующем простом утверждении, непосредственно вытекающем из принципа Шаудера.

Теорема 37.6. *Пусть для всех решений $x(\lambda)$ всех уравнений $x = A(\lambda; x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ известна общая априорная оценка*

$$\|x(\lambda)\| \leqslant a < \infty. \tag{37.3}$$

Пусть при некотором $b > a$ выполнено условие

$$\|A(0; x)\| \leqslant b \quad (\|x\| = b). \tag{37.4}$$

Тогда оператор $Ax = A(1; x)$ имеет в шаре $\|x\| \leqslant a$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Для доказательства определим на всем E оператор D положив $Dx = A(1; x)$ при $\|x\| \leqslant a$, $Dx = A\left(\frac{b - \|x\|}{b - a}; x\right)$ при $a \leqslant \|x\| \leqslant b$, $Dx = A\left(0; \frac{b}{\|x\|} x\right)$ при $\|x\| \geqslant b$. В силу принципа Шаудера оператор D имеет неподвижную точку x^*. Из (37.4) вытекает оценка $\|x^*\| \leqslant b$, а затем из (37.3) — оценка $\|x^*\| \leqslant a$. Поэтому $A(1; x^*) = x^*$. ∎

Можно было для доказательства теоремы 37.6 применить и общие теоремы о вращении вполне непрерывного векторного поля. Действительно, из (37.3) вытекает гомотопность друг другу на сфере $S = \{x: \|x\| = b\}$ всех полей $x - A(\lambda; x)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Поэтому вращение $\gamma(I - A, S)$ совпадает с вращением $\gamma(x - A(0; x), S)$, которое в силу (37.4) равно 1. Остается сослаться на теорему 20.5. ∎

Применение теоремы 37.6 часто называют *«методом Лере — Шаудера»*.

37.4. Операторы класса «сжимающий плюс вполне непрерывный». И принцип обобщенного сжатия, и принцип Шаудера содержатся в следующем утверждении.

Теорема 37.7. *Пусть оператор A преобразует в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество $T \subset E$. Пусть A допускает представление $A = B + C$, где B — обобщенное сжатие, а C вполне непрерывен. Тогда A имеет на T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Эту теорему содержит более общая

Теорема 37.8. *Пусть мера некомпактности $\psi(M)$ каждого ограниченного множества не меняется от присоединения к нему одной точки. Пусть ψ-уплотняющий оператор A преобразует в себя ограниченное выпуклое и замкнутое множество T. Тогда оператор A имеет на T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка в T. Обозначим через R_0 пересечение всех инвариантных для A содержащих x_0 и содержащихся в T замкнутых выпуклых множеств. Перечисленными свойствами обладает и множество $\overline{\mathrm{co}}\{AR_0, x_0\} \subset R_0$, поэтому $\overline{\mathrm{co}}\{AR_0, x_0\} = R_0$. Из определения уплотняющего оператора вытекает тогда компактность R_0, и существование у оператора A неподвижной точки на R_0 следует из принципа Шаудера. ∎

Заметим, что оператор может быть ψ-уплотняющим лишь по таким мерам некомпактности $\psi(M)$, что $\psi(M) > 0$, если M некомпактно.

Первые принципы неподвижной точки, содержащие и принцип сжатых отображений, и принцип Шаудера, указаны М. А. Красносельским (УМН 10, № 1 (1955)) и Дарбо (G. Darbo, Rend. sem. Math. Padova 24 (1955), 84—92). Достаточно полную библиографию по различным обобщениям и новым способам доказательства утверждений типа теоремы 37.7 см. в обзоре [49]. Основной результат — теорема 37.8 — принадлежит Б. Н. Садовскому (Функц. анализ и его прилож. 1,

№ 2 (1967)). В условиях, когда T — замыкание некоторой области, теоремы 37.7 и 37.8 являются следствиями соответствующих утверждений из п. 32.3 об уплотняющих операторах.

Изложим совсем простое доказательство теоремы 37.7 для случая, когда E — гильбертово пространство. Сопоставим каждой точке $x \in E$ точку $z = Px \in T$, на которой достигается расстояние от x до T. Очевидно, $\| Px - Py \| \leqslant \| x - y \|$ при всех $x, y \in E$. Поэтому оператор $B_1 = BP$ будет обобщенным сжатием на всем E, а оператор $C_1 = CP$ будет непрерывен на всем E. Уравнение $x = B_1 x + y$ в силу теоремы 37.2 имеет при каждом y единственное решение $x = Dy$, причем нелинейный оператор D непрерывен. Следовательно, оператор DC_1 вполне непрерывен. Но множество значений оператора DC_1 совпадает с компактным множеством DCT. Из принципа Шаудера вытекает разрешимость уравнения $x = DC_1 x$, т. е. разрешимость уравнения $x = B_1 x + C_1 x$. Но $B_1 x + C_1 x \in T$, значит, $x \in T$ и $x = Ax$. ∎

Проведенные рассуждения и доказываемая ниже теорема 37.9 указаны П. П. Забрейко, Р. И. Качуровским и М. А. Красносельским (Функц. анализ и его прилож. 1, № 2 (1967)).

Оператор B называется *нерастягивающим* на множестве $\mathfrak{M}$ метрического пространства $\mathfrak{R}$, если

$$\rho(Bx, By) \leqslant \rho(x, y) \quad (x, y \in \mathfrak{M}). \tag{37.5}$$

Теорема 37.9. *Пусть оператор A преобразует в себя ограниченное замкнутое выпуклое множество T гильбертова пространства E. Пусть $A = B + C$, где B — нерастягивающий на T, а C — усиленно непрерывный (преобразующий слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся). Тогда оператор A имеет на множестве T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in T$, $\lambda \in [0, 1)$. В силу теоремы 37.7 оператор $A_\lambda x = \lambda Ax + (1 - \lambda) Ax_0$ имеет неподвижную точку $x(\lambda) \in T$. При этом $\| x(\lambda) - Ax(\lambda) \| = (1 - \lambda) \| Ax(\lambda) - Ax_0 \|$. Следовательно, можно выбрать в T такую последовательность x_n, для которой $\| x_n - Ax_n \| \to 0$. Последовательность x_n можно считать слабо сходящейся к некоторому элементу $x^* \in T$. Тогда $\| Cx_n - Cx^* \| \to 0$ и поэтому $\| x_n - Bx_n - Cx^* \| \to 0$.

Пусть P — оператор, сопоставляющий каждой точке $x \in E$ точку $z \in T$, для которой $\| x - z \| = \rho(x, T)$.

Из (37.5) вытекает, что при любом $x \in E$ и всех $n = 1, 2, \ldots$

$$(x - BPx - x_n + BPx_n,\ x - x_n) \geqslant 0.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, а затем полагая $x = x^* + th$ $(h \in E, t > 0)$, получим

$$(x^* - BP(x^* + th) - Cx^*,\ h) + t(h, h) \geqslant 0.$$

Перейдем теперь к пределу при $t \to 0$. Из получающейся оценки $(x^* - Bx^* - Cx^*, h) \geqslant 0$ и произвольности h вытекает, что $x^* = Bx^* + Cx^*$. ∎

37.5. Нерастягивающие операторы.

Теорема 37.10. *Пусть T — ограниченное замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом (например, гильбертовом) пространстве E. Пусть нерастягивающий оператор A преобразует T в себя. Тогда A имеет на T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Теорема 37.10 теряет силу при переходе к произвольным банаховым пространствам. Пусть, например, E — это пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ с нормой $\| x \| = \max |\xi_i|$. Определим на E оператор A равенством $A\{\xi_1, \xi_2, \ldots\} = \{1, \xi_1, \xi_2, \ldots\}$. Очевидно, $\| Ax - Ay \| = \| x - y \|$ при всех $x, y \in E$. Оператор A оставляет инвариантным шар $\| x \| \leqslant 1$, но не имеет неподвижных точек. Однако E может быть произвольным банаховым пространством, если T является одновременно множеством нормальной структуры (т. е. у каждого его выпуклого и состоящего более чем из одной точки подмножества диаметр больше радиуса).

Отметим несколько простых свойств нерастягивающего оператора A. Если пространство E строго выпукло, то множество неподвижных точек оператора A выпукло. Если $\mathfrak{M}$ — компакт в строго выпуклом пространстве и $A\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$, то A является изометрическим аффинным преобразованием на $\mathfrak{M}$. В случае произвольного метрического компакта $\mathfrak{M}$ из $A\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ вытекает изометричность A на $\mathfrak{M}$ (М. С. Бродский).

Обзор обширного цикла работ по нерастягивающим операторам см. в [45]. Теорема 37.10, по существу, давно известна; библиографию и подробное обсуждение см. в [13]. В 1965 г. эта теорема примерно одновременно переоткрыта Браудером (Browder F. E., Proc. Nat. Acad. Sci USA **54** (1965), 1041—1044), Геде (Göhde, Math. Nachr. **30**, № 3—4 (1965), 251—258) и Кирком (Kirk W. A., Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004—1006), а затем получила дальнейшее развитие в работах К. Гебеля (Goebel K.), Бельюса (Belluce L. P.), В. Кирка и других авторов. Ниже излагается теорема, сообщенная нам Е. А. Лифшицем.

Пусть R — полное метрическое пространство. *Радиусом* $\operatorname{rad} M$ *ограниченного множества* $M \subset R$ называется инфимум радиусов шаров, содержащих M. *Характеристикой Лифшица* $\varkappa(R)$ пространства R назовем точную верхнюю грань чисел $\beta > 0$, которым соответствуют такие $\alpha(\beta) > 1$, что при всех $y \in R$, $r \geqslant 0$, $z \equiv V(y, r) = \{x\colon \rho(x, y) \leqslant r\}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{rad}\{V[y, \alpha(\beta) r] \cap V(z, \beta r)\} \leqslant r.$$

Очевидно, $\varkappa(R) \geqslant 1$. Если R — выпуклое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве E, то $\varkappa(R) > 1$; если E гильбертово, то $\varkappa(R) \geqslant \sqrt{2}$. Если банахово пространство E нерефлексивно, то характеристика Лифшица каждого шара равна 1.

Теорема 37.11. *Пусть оператор A преобразует в себя полное метрическое пространство R $(AR \subset R)$ и*

$$\rho(A^k x, A^k y) \leqslant q\rho(x, y) \quad (x, y \in R;\ k = 1, 2, \ldots), \tag{37.6}$$

где $q < \varkappa(R)$. Пусть траектория $x_0, Ax_0, \ldots, A^n x_0, \ldots$ некоторой точки $x_0 \in R$ ограничена. Тогда оператор A имеет в R по крайней мере одну неподвижную точку.

Доказательство. Шар $V(y, r) = \{x\colon \rho(x, y) \leqslant r\}$ назовем *правильным*, если он содержит траекторию некоторой точки. Последовательность шаров $V_n = V(y_n, r_n)$ назовем *фундаментальной*, если пересечения $V_n \cap V_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непусты и если $r_{n+1} \leqslant \mu r_n$, где $\mu < 1$. Очевидно, центры y_n фундаментальной последовательности шаров образуют сходящуюся последовательность.

Если существует фундаментальная последовательность правильных шаров, то в каждой окрестности предела y^* их центров лежит траектория некоторой точки. Поэтому $Ay^* = y^*$.

Пусть $q < \beta < \varkappa(R)$ и $\mu \in (0, 1)$ — такое число, что $\gamma = \min\{\mu\alpha(\beta), \mu\beta q^{-1}\} > 1$. Покажем, что по каждому правильному шару $V(y, r)$ можно построить шар $V(y_1, \mu r)$, содержащий лежащую в $V(y, r)$ траекторию некоторой точки. Этим доказательство будет завершено.

Пусть шар $V(y_0, r_0)$ правильный. Положим

$$\delta = \inf\{r\colon V(y_0, r) \text{ — правильный}\}.$$

Нужно рассмотреть лишь случай, когда $\delta > 0$.

Обозначим через n такое число, что $\rho(A^n y_0, y_0) > \mu\delta$. Так как шар $V_0 = V(y_0, \gamma\delta)$ правильный, то он содержит некоторую траекторию $u_0, Au_0, \ldots, A^k u_0, \ldots$ В силу (37.6) траектория точки $u_1 = A^n u_0$ лежит в шаре $V_1 = V(A^n y_0, q\gamma\delta)$. Следовательно, эта траектория лежит в пересечении $V_0 \cap V_1$, радиус которого не превышает $\mu\delta$. ∎

Теорема 37.11 сохраняет силу (изменения в доказательстве несущественны), если условие (37.6) заменить менее ограничительной оценкой

$$\rho(A^k x, A^k y) \leqslant q\rho(x, y) \quad (\rho(x, y) \leqslant r,\ k \geqslant k(x, r),\ q < \varkappa(R)).$$

37.6. Построение инвариантных множеств. Применение изложенных в этом параграфе теорем требует построения инвариантных множеств T для изучаемого оператора A. Если инвариантное множество T построено, то нужно выяснить, будет ли A на T сжатием, или вполне непрерывным оператором, или ψ-уплотняющим и т. д.

а) Рассмотрим уравнение

$$x = \lambda Dx + f \tag{37.7}$$

с определенным на всем E оператором D, значения которого на каждом шаре равномерно ограничены по норме.

Простая оценка показывает, что каждый шар $\|x - f\| \leqslant r$ инвариантен для оператора $Ax = \lambda Dx + f$, если значения параметра λ достаточно малы. Отсюда, например, вытекает разрешимость уравнения (37.7) при малых λ, если D вполне непрерывен или D на каждом шаре удовлетворяет условию Липшица.

Если D асимптотически линеен и $D'(\infty)=0$ (или спектральный радиус оператора $D'(\infty)$ равен нулю), то оператор A при каждом λ оставляет инвариантным шар $\|x\| \leqslant r(\lambda)$ достаточно большого радиуса. Когда спектральный радиус σ_0 оператора $D'(\infty)$ положителен, инвариантное для оператора A ограниченное замкнутое и выпуклое множество T легко построить, если $|\lambda|\sigma_0<1$.

Для доказательства построим (см., например, [26]) в E по каждому $\varepsilon>0$ эквивалентную основной норме $\|\cdot\|$ новую норму $\|\cdot\|_\varepsilon$ так, что $\|D'(\infty)x\|_\varepsilon \leqslant (\sigma_0+\varepsilon)\|x\|_\varepsilon$ $(x\in E)$. Далее, сопоставим каждому $\delta>0$ такое $\rho(\delta,\varepsilon)>0$, что $\|Dx-D'(\infty)x\|_\varepsilon \leqslant \delta\|x\|_\varepsilon$ при $\|x\|_\varepsilon \geqslant \rho(\delta,\varepsilon)$. Пусть $\|Dx\|_\varepsilon \leqslant M(\delta,\varepsilon)$ при $\|x\|_\varepsilon \leqslant \rho(\delta,\varepsilon)$. Тогда очевидна оценка

$$\|Ax\|_\varepsilon \leqslant |\lambda|(\sigma_0+\varepsilon+\delta)\|x\|_\varepsilon + |\lambda| M(\delta,\varepsilon) + \|f\|_\varepsilon \qquad (x\in E).$$

Если выбрать ε и δ так, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_0 = |\lambda|(\sigma_0+\varepsilon+\delta)<1$, то A будет оставлять инвариантным каждое множество $\|x\|_\varepsilon \leqslant r(\lambda)$ при $r(\lambda)(1-\alpha_0) \geqslant |\lambda| M(\delta,\varepsilon)+\|f\|_\varepsilon$. ■

б) Пусть в пространстве E выделен конус K. Пусть $DK\subset K$ и $f\in K$. Тогда при $\lambda\geqslant 0$ оператор $Ax = \lambda Dx + f$ будет положителен на K. Если оператор D имеет на K асимптотическую производную $B = D'(\infty; K)$, то, очевидно, инвариантное для A ограниченное замкнутое и выпуклое множество $T\subset K$ можно построить при $0\leqslant\lambda<\sigma_0^{-1}$, где σ_0 — спектральный радиус оператора B.

При построении инвариантных множеств удобно пользоваться мажорантами оператора A (см. п. 34.3). Пусть, например, оператор A положителен и $Ax \leqslant Bx+h$ $(x\in K)$, где B — линейный положительный оператор и $h\in K$, причем спектральный радиус σ_0 оператора B меньше чем 1; тогда инвариантными для A будут множества $T=\{x\colon x\in K, \|x\|_* \leqslant r\}$, где $\|\cdot\|_*$ — такая эквивалентная первоначальной новая норма, в которой $\|Bx\|_* \leqslant \sigma_1\|x\|_*$ $(\sigma_0<\sigma_1<1)$, а r — достаточно большие числа.

Наличие выпуклого инвариантного множества $T\subset K$ в объединении, например, со свойством полной непрерывности оператора A гарантируют существование положительного решения у оператора A.

в) Применение принципов неподвижной точки часто упрощается, если удается удачно выбрать норму, «хорошо согласованную» с изучаемым оператором A.

Пусть, например,

$$Ax(t) = \int_0^t k(t,s) f[s, x(s)]\,ds + h(t), \qquad (37.8)$$

где ядро $k(t,s)$ и функции $f(s,x)$, $h(t)$ $(t,s\geqslant 0; -\infty < x < \infty)$ непрерывны. Пусть при каждом $r>0$

$$|f(t,x)| \leqslant a(r) + b(r)|x| \quad (0\leqslant t\leqslant r,\ -\infty<x<\infty). \qquad (37.9)$$

Определим в пространстве $C(r)$ непрерывных на $[0,r]$ функций норму

$$\|x(t)\|_* = \max_{0\leqslant t\leqslant r} |e^{-\mu t}x(t)|, \qquad (37.10)$$

где μ положительно, но пока нефиксировано. В силу (37.9)

$$\|Ax(t)\|_* \leqslant \frac{b(r)M(r)(1-e^{-\mu r})}{\mu}\|x(t)\|_* + \gamma(r), \qquad (37.11)$$

где

$$M(r) = \max_{0\leqslant t,s\leqslant r} |k(t,s)|, \qquad \gamma(r) = rM(r)a(r) + \|h(t)\|_*.$$

В силу (37.11) оператор A при $\mu > b(r)M(r)$ оставляет инвариантным каждый шар $\|x\|_* \leqslant \rho$ достаточно большого радиуса ρ. Оператор A вполне непрерывен в пространстве $C(r)$ и поэтому из принципа Шаудера вытекает существование решения у уравнения $x(t)=Ax(t)$ на каждом промежутке $[0,r]$.

Если $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leqslant L(r)|x-y| \qquad (37.12)$$
$$(0\leqslant t\leqslant r;\ -\infty<x,\ y<\infty),$$

то уравнение $x(t)=Ax(t)$ имеет единственное решение, так как при больших μ оператор A в пространстве $C(r)$ является сжатием, — из (37.12) вытекает оценка

$$\|Ax(t)-Ay(t)\|_* \leqslant \frac{M(r)L(r)(1-e^{-\mu r})}{\mu}\|x(t)-y(t)\|_*$$
$$(x(t),\ y(t)\in C(r)).$$

г) Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(0)=x_0 \qquad (37.13)$$

в банаховом пространстве E. Непрерывность $f(t,x)$, как известно, не гарантирует существование решения. Однако, если $f(t,x)=f_1(t,x)+f_2(t,x)$, где $f_1(t,x)$ удовлетворяет по переменной x условию Липшица, а $f_2(t,x)$ вполне непрерывен, то справедлива локальная теорема существования. Для доказательства достаточно перейти к отысканию неподвижной точки у оператора

$$Ax(t)=x_0+\int_0^t f[s,\ x(s)]\,ds \tag{37.14}$$

в пространстве C непрерывных на $[0,\delta]$ функций со значениями в E. Если δ мало, то оператор A является суммой сжимающего и вполне непрерывного операторов — можно применить теорему 37.7.

37.7. Дополнительные замечания.

а) По существу, все известные принципы неподвижной точки в той или иной форме перенесены на операторы в линейных топологических пространствах. Основную роль продолжают играть одни из первых принципов неподвижной точки — теоремы Шаудера и А. Н. Тихонова. Приведем одно утверждение.

Теорема 37.12. *Пусть слабо непрерывный оператор A преобразует шар T банахова пространства E в свою слабо компактную часть. Тогда A имеет в T по крайней мере одну неподвижную точку.*

б) Действующий в локально выпуклом линейном топологическом пространстве E непрерывный оператор A называется *обобщенно уплотняющим* на множестве $T\subset E$, если для любого множества $M\subset T$ из $AM\subset M$ и из компактности множества $M\setminus\overline{\mathrm{co}}\,AM$ вытекает компактность $\bar{M}$. Е. А. Лифшиц и Б. Н. Садовский (ДАН СССР **183**, № 2 (1968)) предложили следующее важное уже в случае банаховых пространств обобщение классического принципа А. Н. Тихонова.

Теорема 37.13. *Пусть обобщенно уплотняющий непрерывный оператор A преобразует в себя выпуклое замкнутое множество $T\subset\subset E$. Тогда A имеет в T по крайней мере одну неподвижную точку.*

в) Условия нового типа существования неподвижной точки в инвариантном для изучаемого оператора A выпуклом множестве T предложил Р. Л. Фрум-Кетков (ДАН СССР **175**, № 6 (1967); **192**, № 6 (1970)). Основную роль в этих условиях играет существование такого компакта F (не обязательно выпуклого и не обязательно лежащего в множестве T), что $\rho(Ax,F)\leqslant\rho(x,F)$ при всех $x\in T$.

г) Укажем важное обобщение принципа Шаудера на многозначные отображения, полученное Боненбластом и Карлином. Доказательство предоставляем читателю — основные конструкции указаны в § 36.

Теорема 37.14. *Пусть на ограниченном выпуклом замкнутом множестве $T\subset E$ задан вполне непрерывный выпуклозначный оператор F. Пусть $F(x)\subset T$ при всех $x\in T$. Тогда оператор F имеет в T по крайней мере одну обобщенную неподвижную точку.*

§ 38. Неподвижные точки монотонных операторов

38.1. Монотонные операторы. Пусть банахово пространство E полуупорядочено конусом K (см. § 33). Действующий в E оператор A называется *монотонным* (по конусу K), если из $x\leqslant y$ следует $Ax\leqslant Ay$.

Если A монотонен, $u\leqslant v$, $Au\geqslant u$, $Av\leqslant v$, то из $u\leqslant x\leqslant v$ вытекают неравенства $u\leqslant Ax\leqslant v$, т. е. A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle u,v\rangle$. Для доказательства разрешимости уравнения $x=Ax$ с таким оператором A могут быть применены теоремы из § 37, если A сжимающий, или вполне непрерывный, или уплотняющий и т. д.

В этом параграфе не предполагается, что оператор A непрерывен. Как оказывается, в весьма широких предположениях монотонность оператора A и геометрические особенности структуры конуса K уже гарантируют существование у оператора A неподвижной точки.

Теорема 38.1. *Пусть конус K сильно миниэдрален. Пусть монотонный оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle u,v\rangle$. Тогда A имеет на $\langle u,v\rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим множество M, состоящее из тех элементов $x\in\langle u,v\rangle$, для которых $Ax\geqslant x$; оно непусто, так как $u\in M$. Очевидно, $AM\subset M$. Положим $z=\sup M$.

Из $x\in M$ следует, что $x\leqslant Ax\leqslant Az$, т. е. точка Az является одной из верхних границ множества M. Значит, $z\leqslant Az$, т. е. $z\in M$. Но тогда $Az\in M$ и поэтому $Az\leqslant z$. Таким образом, $z=Az$. ∎

38.2. Предельно монотонно компактные операторы. Оператор A назовем *предельно монотонно компактным* на ограниченном множестве $\mathfrak{M}\subset E$, если компактна (и, следовательно, сходится) каждая последовательность элементов

$$x_0\geqslant Ax_1\geqslant A^2x_2\geqslant\ \ldots\ \geqslant A^nx_n\geqslant\ \ldots, \tag{38.1}$$

где $x_n\in\mathfrak{M}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Понятие предельной монотонной компактности охватывает широкие классы нелинейных операторов. К ним относятся, очевидно, компактные операторы A и операторы, некоторая степень которых компактна; к ним относятся различные классы уплотняющих операторов. Если конус K вполне правилен, то свойством предельной монотонной компактности обладают все нелинейные операторы, ограниченные на $\mathfrak{M}$ по норме; напомним в связи с этим, что все конусы в конечномерном пространстве вполне правильны, вполне правилен конус неотрицательных функций в каждом пространстве L_p при $1 \leqslant p < \infty$. Если конус K правилен, то для предельной монотонной компактности оператора A достаточно, чтобы A преобразовывал $\mathfrak{M}$ в себя и чтобы множество $\mathfrak{M}$ (или одно из множеств $A^k\mathfrak{M}$) было ограничено снизу некоторым элементом. Все эти утверждения вытекают непосредственно из определений.

Теорема 38.2. *Пусть монотонный и предельно монотонно компактный оператор A преобразует в себя ограниченное замкнутое множество $\mathfrak{M} \subset E$ ($A\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$). Пусть $Ax_0 \leqslant x_0$ для некоторой точки $x_0 \in \mathfrak{M}$. Тогда оператор A имеет на $\mathfrak{M}$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}_0 = \{x\colon Ax \leqslant x, x \in \mathfrak{M}\}$. Затем определим на $\mathfrak{M}_0$ последовательность функционалов

$$\alpha_j(x) = \sup_{v,\, w \in \mathfrak{M}_0;\; A^j v \leqslant A^j w \leqslant x} \| A^j v - A^j w \|. \tag{38.2}$$

Эти функционалы имеют смысл, так как $A^j x \leqslant x$ при $x \in \mathfrak{M}_0$ и при любом $j = 1, 2, \ldots$ При возрастании j последовательность значений в каждой фиксированной точке x функционалов (38.2) не возрастает, так как $A\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_0$. Поэтому последовательность функционалов (38.2) точечно сходится на $\mathfrak{M}_0$ к некоторому функционалу $\alpha(x)$.

Из предельной монотонной компактности оператора A вытекает равенство

$$\inf\{\alpha\colon \alpha = \alpha(u), \quad u \in \mathfrak{M}_0,\ u \leqslant y\} = 0 \quad (y \in \mathfrak{M}_0). \tag{38.3}$$

В самом деле, в предположении противного, найдутся такой элемент $y_0 \in \mathfrak{M}_0$ и такое $\beta_0 > 0$, что при всех $u \leqslant y_0$ ($u \in \mathfrak{M}_0$) и всех j выполнено неравенство $\alpha_j(u) > \beta_0$. Но тогда можно построить последовательность

$$y_0 \geqslant A^2 v_1 \geqslant A^2 w_1 \geqslant A^4 v_2 \geqslant A^4 w_2 \geqslant \ldots \geqslant A^{2j} v_j \geqslant A^{2j} w_j \geqslant \ldots \tag{38.4}$$

($v_j, w_j \in \mathfrak{M}_0$) так, что $\| A^{2j} v_j - A^{2j} w_j \| > \beta_0$. Последние неравенства означают, что последовательность (38.4) расходится. Но, с другой стороны, последовательность (38.4) — это последовательность вида (38.1) и поэтому она компактна, а компактные монотонные последовательности сходятся. Мы пришли к противоречию.

Равенство (38.3) позволяет построить по элементу x_0, участвующему в формулировке теоремы, такую последовательность (38.1), что $\alpha(A^n x_n) < 1/n$ ($x_n \in \mathfrak{M}_0$). Построенная последовательность в силу предельной монотонной компактности оператора A сходится к некоторому элементу $z \in \mathfrak{M}$. Из $A^n x_n \geqslant z$ следует $A^{n+1} x_n \geqslant Az$ и, так как $A^n x_n \geqslant A^{n+1} x_n$, то $A^n x_n \geqslant Az$. Поэтому $z \geqslant Az$, т. е. $z \in \mathfrak{M}_0$.

Очевидно, при каждых n и m выполнены неравенства $A^n x_n \geqslant A^{n+m} x_{n+m} \geqslant z \geqslant Az \geqslant \ldots \geqslant A^{n+m} z$. Поэтому из $\alpha(A^n x_n) < 1/n$ вытекают оценки

$$\varlimsup_{m \to \infty} \| A^{n+m} x_{n+m} - A^{n+m} z \| \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В силу этих оценок найдется такая функция $m = m(n)$, что последовательность элементов $A^{n+m(n)} x_{n+m(n)} - A^{n+m(n)} z$ сходится по норме к нулю. Отсюда и из неравенств $z - Az \leqslant A^{n+m(n)} x_{n+m(n)} - A^{n+m(n)} z$ вытекает оценка $z \leqslant Az$. Таким образом, $z = Az$. ∎

В условиях теоремы 38.1 в множестве решений есть наибольшее и наименьшее. В условиях теоремы 38.2 есть наименьшее среди решений z, удовлетворяющих соотношению $z \leqslant x_0$.

Теорему 38.1 доказал Г. Биркгоф [2], теорему 38.2 — М. А. Красносельский и А. В. Соболев (Сибирск. матем. ж. **14**, № 1 (1973)). Ряд теорем о неподвижных точках разрывных монотонных операторов доказали И. А. Бахтин, А. А. Бахтина, К. Самадов, В. Я. Стеценко и другие авторы.

38.3. Пример. Теоремы 38.1 и 38.2 непосредственно применимы при анализе нелинейных интегральных уравнений и различных граничных задач. Рассмотрим в качестве примера скалярное уравнение

$$\dot{x} + a(t)x = f[t, x(t), x(t-h)], \tag{38.5}$$

где $a(t)$ и $f(t,x,y)$ периодичны (с периодом 2π) по переменной t, $f(t,x,y)$ не убывает по x, y и ограничена. Например, $f(t,x,y)$ может быть суммой релейной нелинейности $a \operatorname{sign} x$ и внешней силы $\psi(t)$. Периодические решения уравнения (38.5) совпадают с неподвижными точками оператора

$$Ax(t) = \left[e^{\int\limits_0^{2\pi} a(s)\,ds} - 1\right]^{-1} \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{\int\limits_t^{\tau} a(s)\,ds} f[\tau, x(\tau), Sx(\tau)]\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{t} e^{-\int\limits_{\tau}^{t} a(s)\,ds} f[\tau, x(\tau), Sx(\tau)]\,d\tau, \tag{38.6}$$

где $Sx(t) = x(t-h)$ при $h \leqslant t \leqslant 2\pi$ и $Sx(t) = x(t + 2\pi - h)$ при $0 \leqslant t \leqslant h$.

Оператор (38.6) действует и компактен в пространстве непрерывных на $[0, 2\pi]$ скалярных функций. Он оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle -u, u \rangle$, где $u(t) \equiv a$ и a достаточно велико. Наконец, оператор (38.6) монотонен (при полуупорядоченности по конусу K неотрицательных функций), если

$$\int\limits_0^{2\pi} a(s)\,ds > 0. \tag{38.7}$$

Конус K не обладает свойством сильной миниэдральности и поэтому для исследования оператора (38.6) теорема 38.1 непосредственно неприменима. Но для исследования этого оператора может быть использована теорема 38.2. В силу этой теоремы, *условие* (38.7) *гарантирует существование у уравнения* (38.5) *по крайней мере одного периодического решения.*

§ 39. Диссипативные операторы

39.1. Диссипативные уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{39.1}$$

в банаховом пространстве E с ω-периодической по t правой частью $f(t,x)$. Пусть каждому начальному условию $x(t_0) = x_0 \in E$ отвечает единственное решение $x(t) = p(t; t_0, x_0)$ уравнения (39.1), определенное и непрерывное при $t_0 \leqslant t < \infty$ и непрерывно зависящее от x_0. Кроме того, пусть каждый оператор

$$U(t, t_0)x = p(t; t_0, x) \qquad (x \in E,\ t \geqslant t_0) \tag{39.2}$$

при $t > t_0$ вполне непрерывен. Этими свойствами заведомо обладают решения уравнения (39.1), если $E = R^n$, а $f(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной x. Ими в обычных условиях обладают решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического типа.

Уравнение (39.1) называется *диссипативным*, если существует такое $d > 0$, что при любых t_0 и x_0

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \|U(t, t_0)x_0\| < d. \tag{39.3}$$

Диссипативные уравнения обладают рядом замечательных свойств. В частности, они имеют ω-периодические решения.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое c-замкнутое (замкнутое в бикомпактно открытой топологии) множество решений диссипативного уравнения (39.1), определенных при $-\infty < t < \infty$. Через $M(t_0)$ обозначим множество значений при $t = t_0$ всех решений из $\mathfrak{M}$. Если $M(0)$ ограничено и замкнуто и если $M(\omega) = M(0)$, то назовем множество $\mathfrak{M}$ *утолщенным ω-периодическим решением* уравнения (39.1). Каждое индивидуальное ω-периодическое решение, конечно, является одновременно и утолщенным.

Утолщенное ω-периодическое решение $\mathfrak{M}$ назовем *устойчивым по Ляпунову*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что из $\rho(x_0, M(t_0)) < \delta$ вытекает справедливость оценки $\rho(U(t, t_0)x_0, M(t)) < \varepsilon$ при всех

$t \geqslant t_0$. Утолщенное ω-периодическое решение $\mathfrak{M}$ назовем *λ-центром* диссипативного уравнения (39.1), если оно устойчиво по Ляпунову и если при любых t_0 и x_0

$$\lim_{t\to\infty} \rho\,[U(t, t_0)x_0, M(t)] = 0. \tag{39.4}$$

Мы покажем, что у каждого диссипативного уравнения есть λ-центр; нетрудно показать единственность λ-центра.

Понятие λ-центра для уравнений в R^2 было введено и изучено Н. Левинсоном, для уравнений в R^n — В. А. Плиссом [48]. Мы при изучении λ-центра следуем работе В. М. Герштейна и М. А. Красносельского (ДАН СССР **183**, № 2 (1968)).

39.2. Принцип Браудера. Пусть оператор A и все его итерации A^n $(n = 1, 2, \ldots)$ определены на $\bar{\Omega}$, где Ω — ограниченная область в E, причем $A^n\bar{\Omega} \subseteq \bar{\Omega}$ и $A^n x \neq x$ $(x \in \dot{\Omega})$ при $n \geqslant n_0$, где n_0 — некоторое натуральное число. Будем тогда говорить, что оператор A обладает на $\bar{\Omega}$ *свойством Браудера*.

Теорема 39.1. *Пусть вполне непрерывный оператор A обладает свойством Браудера на $\bar{\Omega}$ и область $\bar{\Omega}$ выпукла. Тогда $\gamma(I - A, \Omega) = 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 21.5 $\gamma(I - A^n, \Omega) = 1$ при всех достаточно больших n. Поэтому из теоремы 31.1 следует, что $\gamma(I - A, \Omega) - 1$ делится на все достаточно большие простые p. ∎

Из теорем 39.1 и 20.5 вытекает полученная Ф. Браудером (F. E. Browder, Duke Math. J. **26**, № 2 (1959)) другим путем следующая замечательная теорема.

Теорема 39.2 (принцип Браудера). *Пусть вполне непрерывный оператор A обладает свойством Браудера на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной выпуклой области $\Omega \subset E$. Тогда A имеет в области Ω по крайней мере одну неподвижную точку.*

39.3. Существование периодического решения.

Теорема 39.3. *Каждое диссипативное уравнение имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. Обозначим через A вполне непрерывный оператор $U(\omega, 0)$.

Пусть T_0 — шар $\|x\| \leqslant d$, где d — число из условия (39.3). В силу этого условия каждой точке z из компакта $\overline{AT_0}$ можно сопоставить такое натуральное $m(z)$, что $A^{m(z)}z$ является внутренней точкой шара T_0. Поэтому можно построить окрестность $V(z)$ точки z так, чтобы все точки $A^{m(z)}x$ при $x \in V(z)$ были внутренними точками шара T_0. Окрестности $V(z)$ покрывают $\overline{AT_0}$, и из них можно выбрать конечное покрытие $V(z_1), \ldots, V(z_s)$. Пусть m_0 — наибольшее из чисел $m(z_1), \ldots, m(z_s)$.

Обозначим теперь через T_1 шар $\|x\| \leqslant d_1$, в котором лежат все множества $T_0, AT_0, \ldots, A^{m_0}T_0$, и через Ω — шар $\|x\| < d_1 + 1$. Сопоставим каждой точке h компакта $\overline{A\Omega}$ такое натуральное число $k(h)$ и такую окрестность $W(h)$, что $A^{k(h)}x$ является внутренней точкой шара T_0 при всех $x \in W(h)$; очевидно, $A^n x \in T_1$ при $x \in W(h)$ и всех $n \geqslant m_0 + k(h)$. Выберем из множеств $W(h)$ конечное покрытие $W(h_1), \ldots, W(h_r)$ компакта $\overline{A\Omega}$ и положим $n_0 = m_0 + \max\{k(h_1), \ldots, k(h_r)\}$. По построению $A^n x \in T_1$ при $n \geqslant n_0$ и $x \in \bar{\Omega}$, т. е. оператор A обладает на $\bar{\Omega}$ свойством Браудера.

Из теоремы 39.2 вытекает существование у оператора $A = U(\omega, 0)$ неподвижной точки. Эта неподвижная точка является начальным значением ω-периодического решения уравнения (39.1). ∎

39.4. Неподвижные точки диссипативных операторов. Через $\mathfrak{R}$ в этом и последующих пунктах параграфа обозначается частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$. Подчеркнем, что $\mathfrak{R}$ не обязательно связано с каким-либо банаховым пространством. Более того, для наших приложений будут важны множества $\mathfrak{R}$, элементами которых являются подмножества некоторого множества; при этом $F_1 \leqslant F_2$, если F_1 — подмножество F_2.

Множество $\mathfrak{R}$ назовем *правильным*, если для каждой последовательности $F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots$ существует точная нижняя грань $G = \inf F_n$. Система $\mathfrak{R}$ всех подмножеств некоторого множества, очевидно, правильна; правильной является система всех замкнутых ограниченных подмножеств некоторого метрического пространства; в обоих указанных примерах $\inf F_n$ — это пересечение $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \cap \ldots$ (которое может быть пустым).

Мы будем рассматривать действующие в $\mathfrak{R}$ *монотонные* операторы A (из $F_1 \leqslant F_2$ следует $AF_1 \leqslant AF_2$). Действующий в правильном частично упорядоченном множестве $\mathfrak{R}$ монотонный оператор A назовем *направленно непрерывным*, если из $F_1 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots$ следует равенство $A(\inf F_n) = \inf AF_n$.

Лемма 39.1. *Пусть действующий в правильном частично упорядоченном множестве $\mathfrak{R}$ монотонный оператор A направленно непрерывен. Пусть существуют такой элемент $F \in \mathfrak{R}$ и такие взаимно простые m, n, что*

$$A^mF \leqslant F, \quad A^nF \leqslant F. \tag{39.5}$$

Тогда существует элемент

$$G_0 = \inf A^{km}F = \inf A^{kn}F \tag{39.6}$$

и этот элемент является неподвижной точкой оператора A.

Доказательство. В силу (39.5) при каждом $i = 0, 1, \ldots, m-1$ справедливы соотношения $A^iF \geqslant \geqslant A^{m+i}F \geqslant \ldots \geqslant A^{km+i}F \geqslant \ldots$ Поэтому определены элементы $G_i = \inf\limits_k A^{km+i}F$, причем $G_1 = AG_0$, $G_2 = AG_1, \ldots, G_{m-1} = AG_{m-2}$, $G_0 = AG_{m-1}$, откуда следует равенство $A^mG_0 = G_0$. Аналогично доказывается, что $A^nH_0 = H_0$, где $H_0 = \inf A^{kn}F$.

Последовательности $A^{km}F$ и $A^{kn}F$ $(k = 1, 2, \ldots)$ содержат общую подпоследовательность $A^{kmn}F$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Поэтому $H_0 = \inf\limits_k A^{kmn}F = \inf\limits_k A^{km}F = G_0$. Итак, $A^mG_0 = G_0$ и $A^nG_0 = G_0$.

Так как числа m и n взаимно простые, то при некоторых целых a, b справедливо равенство $ma + nb = 1$. Выберем настолько большое натуральное r, что $rn + a > 0$ и $rm + b > 0$. Тогда

$$AG_0 = A(A^{2rmn}G_0) = A^{1+2rmn}G_0 = \\ = A^{(rn+a)m}(A^{(rm+b)n}G_0) = A^{(rn+a)m}G_0 = G_0 \blacksquare.$$

Правильное частично упорядоченное множество $\mathfrak{R}$ назовем *$*$-пространством*, если

а) для каждых F, $G \in \mathfrak{R}$ найдется элемент $H \in \mathfrak{R}$, удовлетворяющий соотношениям $F \leqslant H$, $G \leqslant H$;

б) в $\mathfrak{R}$ выделен класс последовательностей, названных *сходящимися*, причем каждой сходящейся последовательности F_n поставлен в соответствие единственный элемент — ее предел $\lim F_n$. При этом из сходимости последовательности $G_k = F_{k+n_0}$ $(k = 1, 2, \ldots;$ n_0 — некоторое натуральное число) вытекает сходимость последовательности F_n и справедливость равенства $\lim F_n = \lim G_k$;

в) из $F_1 \geqslant F_2 \geqslant \ldots \geqslant F_n \geqslant \ldots$ вытекает сходимость последовательности F_n и равенство $\lim F_n = \inf F_n$;

г) если $F_k \leqslant G_k \leqslant H_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и невозрастающие последовательности F_k и H_k сходятся к общему пределу, то к тому же пределу сходится последовательность G_k.

Примером $*$-пространства может служить множество элементов правильного конуса в банаховом пространстве E при естественной упорядоченности и сходимости по норме. Основной для наших построений пример рассматривается в следующем пункте.

Пространства, в которых понятие сходимости является первичным, ввел еще Фреше.

Действующий в $*$-пространстве $\mathfrak{R}$ монотонный направленно непрерывный оператор A назовем *N_0-диссипативным*, где N_0 — некоторый элемент из $\mathfrak{R}$, если каждому $F \in \mathfrak{R}$ соответствует такое натуральное $n_0(F)$, что $A^nF \leqslant N_0$ при $n \geqslant n_0(F)$.

Лемма 39.2. *Пусть действующий в $*$-пространстве $\mathfrak{R}$ монотонный оператор A направленно непрерывен. Пусть каждому $F \in \mathfrak{R}$ соответствует такое $\nu(F)$, что $A^{\nu(F)}F \leqslant N_0$. Тогда A является N_0-диссипативным оператором.*

Доказательство. Из определения $*$-пространства (свойство а)) вытекает существование такого $G_0 \in \mathfrak{R}$, что $N_0 \leqslant G_0$, $AN_0 \leqslant G_0, \ldots, A^{\nu(N_0)-1}N_0 \leqslant G_0$. Очевидно, $A^kN_0 \leqslant G_0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому $A^{k+\nu(G_0)}N_0 \leqslant \leqslant N_0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Но тогда $A^{k+\nu(F)+\nu(G_0)}F \leqslant \leqslant A^{k+\nu(G_0)}N_0 \leqslant N_0$ при всех k. $\blacksquare$

Теорема 39.4. *Каждый N_0-диссипативный оператор A обладает следующими свойствами: множество $\mathfrak{P}$ неподвижных точек оператора A непусто; в множестве $\mathfrak{P}$ есть наибольшая точка P_0, причем $P_0 \leqslant N_0$; при* *любом $F_0 \geqslant P_0$ (в частности, при $F_0 \geqslant N_0$) последовательность $F_n = A^n F_0$ сходится к элементу P_0.*

Доказательство. По определению N_0-диссипативного оператора можно указать взаимно простые m и n, при которых $A^m N_0 \leqslant N_0$ и $A^n N_0 \leqslant N_0$. В силу леммы 39.1 элемент $P_0 = \inf\limits_k A^{km} N_0 = \inf\limits_k A^{kn} N_0$ является неподвижной точкой оператора A, т. е. множество $\mathfrak{P}$ непусто.

Пусть $G \in \mathfrak{P}$. Из диссипативности оператора A вытекает неравенство $G \leqslant N_0$ и поэтому $G \leqslant A^{km} N_0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$ Значит, $G \leqslant \inf A^{km} N_0 = P_0$.

Пусть $F_0 \geqslant P_0$ и $A^k F_0 \leqslant N_0$ при $k \geqslant n_0$. Положим $l(k) = \left[\frac{k - n_0}{n}\right]$ (квадратные скобки обозначают здесь целую часть числа) при $k \geqslant n_0$; число n в знаменателе — это такое число, при котором $A^n N_0 \leqslant N_0$. Очевидно, при каждом $k \geqslant n_0$ выполнены неравенства $P_0 \leqslant A^k F_0 = A^{nl(k)} A^{k - nl(k)} F_0 \leqslant A^{nl(k)} N_0$. Последовательность $A^{nl(k)} N_0$ $(k = n_0, n_0 + 1, \ldots)$ невозрастающая и по определению $*$-пространства сходится, причем $\lim\limits_k A^{nl(k)} N_0 = \lim\limits_k A^{kn} N_0 = P_0$ (свойство в)). Но тогда (свойства г) и б)) последовательность $A^k F_0$ также сходится к P_0. ∎

39.5. Существование λ-центра. Вернемся к изучению диссипативного уравнения (39.1).

Обозначим через $\mathfrak{R}$ систему непустых компактов $F \subseteq E$. Полуупорядоченность определим естественным образом: $F_1 \leqslant F_2$, если $F_1 \subseteq F_2$. На $\mathfrak{R}$ определим *хаусдорфову метрику*

$$\theta(F_1, F_2) = \max\{\max_{u \in F_1} \rho(u, F_2), \max_{v \in F_2} \rho(v, F_1)\}. \quad (39.7)$$

Тогда, как известно, $\mathfrak{R}$ будет полным метрическим пространством. Предоставляем читателю проверить, что $\mathfrak{R}$ является $*$-пространством.

Через A обозначим оператор, который сопоставляет каждому множеству $M \subseteq E$ множество $AM = \{u \colon u = U(\omega, 0) v, v \in M\}$. Оператор A, в частности, действует в пространстве $\mathfrak{R}$. Непосредственно из определения вытекает монотонность оператора A; нетрудно также показать, что A направленно непрерывен.

Лемма 39.3. *Существует такой элемент $N_0 \in \mathfrak{R}$, что оператор A в $\mathfrak{R}$ N_0-диссипативен.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 39.4. Положим $N_0 = AT_1$. Тогда из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 39.4, будет вытекать существование такой функции $n_0(F)$ $(F \in \mathfrak{R})$, что $A^{n_0(F)} F \leqslant N_0$. Осталось воспользоваться леммой 39.2. ∎

Теорема 39.5. *У каждого диссипативного уравнения* (39.1) *есть λ-центр.*

Доказательство. В силу леммы 39.3 и теоремы 39.4 оператор $A = U(\omega, 0)$ имеет наибольшее ограниченное неподвижное множество $P_0 \subseteq E$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество таких определенных на $(-\infty, \infty)$ решений $x(t)$ уравнения (39.1), для которых $x(n\omega) \in P_0$ при всех $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Множество $\mathfrak{M}$ будет утолщенным ω-периодическим решением уравнения (39.1). Устойчивость по Ляпунову и свойство (39.4) вытекают из теоремы 39.4. ∎

В теории компактных динамических систем важную роль играет так называемый *центр Хильми* (см. [44]) — минимальное множество M, обладающее тем свойством, что в каждой окрестности $U(M)$ множества M положительная полутраектория $x = x(t)$ $(t \geqslant t_0)$ находится с вероятностью 1:

$$\lim_{T \to \infty} T^{-1} \operatorname{mes}\{t \colon x(t) \in U(M),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\} = 1. \quad (39.8)$$

Можно выделить центр Хильми и в каждом утолщенном ω-периодическом решении $\mathfrak{M}$ уравнения (39.1). Для этого достаточно вначале рассмотреть объединение графиков функций из $\mathfrak{M}$, отождествить точки $\{t, x\}$, у которых разность первых компонент кратна ω, а вторые компоненты одинаковы; затем рассмотреть на получившемся компактном множестве D индуцированную уравнением (39.1) полугруппу движений; обычный центр Хильми выделит в $\mathfrak{M}$ минимальное утолщенное ω-периодическое решение $\mathfrak{M}_0$, обладающее аналогичным (39.8) свойством: для каждого решения $x(t) = p(t; t_0, x_0)$ из $\mathfrak{M}$ при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\lim_{T \to \infty} T^{-1} \operatorname{mes}\{t \colon \rho(p(t; t_0, x_0), M_0(t)) < \varepsilon;\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\} = 1.$$

Построенное по описанной схеме множество $\mathfrak{M}_0$ назовем *χ-центром уравнения* (39.1). Оказывается, что все решения уравнения (39.1) с вероятностью 1 находятся в каждой фиксированной окрестности χ-центра, причем χ-центр является минимальным утолщенным ω-периодическим решением, обладающим указанным свойством.

§ 40. Уравнения, близкие к линейным

40.1. Уравнения с вполне непрерывными операторами. В § 21 рассмотрены различные классы вполне непрерывных векторных полей $I - A$, близких к линейным, и найдены условия, при которых вращение таких полей на сферах $\|x\| = \rho$ больших радиусов ρ отлично от нуля. В силу теоремы 20.5 эти условия гарантируют существование у поля $I - A$ особой точки или, что то же, гарантируют разрешимость уравнения

$$x = Ax. \tag{40.1}$$

Сформулируем для удобства дальнейших ссылок утверждения, вытекающие из теорем 21.2, 21.7 и 21.10.

Теорема 40.1. *Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A определен на всем E и асимптотически линеен, причем 1 не является собственным значением оператора $A'(\infty)$. Тогда уравнение* (40.1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Теорема 40.2. *Пусть действующие в гильбертовом пространстве E линейные самосопряженные операторы B_1 и B_2 образуют правильную пару, причем существует вполне непрерывный самосопряженный оператор B_0, удовлетворяющий соотношениям $B_1 \bullet\!< B_0 \bullet\!< B_2$. Пусть действующий в E вполне непрерывный оператор A асимптотически $\{B_1, B_2\}$-квазилинеен. Тогда уравнение* (40.1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Теорема 40.3. *Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше и удовлетворяет условию*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x - Ax\| = \infty. \tag{40.2}$$

Пусть каждому $x_0 \in E$ соответствуют такие положительные $r(x_0)$ и $\beta(x_0)$, что у всех операторов $A'(x)$ при $\|x - x_0\| \leqslant r(x_0)$ нет собственных значений на интервале $(1 - \beta(x_0), 1)$. Тогда уравнение (40.1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Утверждение теоремы 40.3 сохраняет силу, если предположение об отсутствии собственных значений у операторов $A'(x)$ на промежутках $(1 - \beta(x_0), 1)$ заменить предположением об их отсутствии на промежутках $(1, 1 + \beta(x_0))$.

Теорему 40.1 можно получить и как следствие принципа Шаудера. Для этого нужно перейти к эквивалентному (40.1) уравнению $x = Fx$, где $Fx = [I - A'(\infty)]^{-1}[Ax - A'(\infty)x]$, и заметить, что $\|x\|^{-1}\|Fx\| \to 0$ при $\|x\| \to \infty$, откуда вытекает инвариантность для вполне непрерывного оператора F каждого шара $\|x\| \leqslant \rho$ достаточно большого радиуса.

Теорема 40.1 допускает следующее простое усиление. Пусть 1 не является собственным значением линейного вполне непрерывного оператора B, причем известна оценка $\|x - Bx\| \geqslant \alpha\|x\|$ $(x \in E)$, где $\alpha > 0$. Тогда разрешимость уравнения (40.1) с вполне непрерывным оператором A вытекает из условия $\|Ax - Bx\| \leqslant \beta\|x\| + \gamma$ $(x \in E)$, где $\beta < \alpha$. Для доказательства достаточно применить принцип Шаудера к оператору $Fx = (I - B)^{-1}(Ax - Bx)$.

Теорему 40.3 естественно дополнить следующим утверждением, установленным при доказательстве теоремы 21.9.

Теорема 40.4. *Пусть действующий в банаховом пространстве E вполне непрерывный оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше и удовлетворяет условию* (40.2). *Пусть 1 не является собственным значением всех операторов $A'(x)$ $(x \in E)$. Тогда уравнение* (40.1) *имеет в E единственное решение.*

Теорема 40.1 указана в [22]; она систематически применялась Р. И. Качуровским (ДАН СССР **192**, № 5 (1970); **196**, № 3 (1971); **197**, № 3 (1971) и др.). Теорему 40.2 указал А. И. Перов (ДАН СССР **124**, № 4 (1959)), теоремы 40.3, 40.4 и доказываемую ниже теорему 40.5 — М. А. Красносельский (ДАН СССР **208**, № 6 (1973)). Разрешимость уравнения (40.1) (но без факта единственности решения) в условиях теоремы 40.4 впервые, по-видимому, отметил Р. И. Качуровский.

40.2. Уравнения с гладкими операторами. В теореме 40.4 можно освободиться от полной непрерывности A.

Теорема 40.5. *Пусть действующий в банаховом пространстве E оператор A непрерывно дифференцируем по Фреше и удовлетворяет условию* (40.2). *Пусть операторы $I - A'(x)$ $(x \in E)$ имеют непрерывные обратные на E, причем*

$$\left\|[I - A'(x)]^{-1}\right\| \leqslant \varphi(r) \qquad (\|x\| \leqslant r). \tag{40.3}$$

Тогда уравнение (40.1) *имеет в E единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ уравнение

$$x - Ax + (1-\lambda)A0 = 0. \tag{40.4}$$

Оно имеет нулевое решение при $\lambda = 0$; нужно показать его разрешимость при $\lambda = 1$. Перейдем к задаче

$$\frac{dx}{d\lambda} = [I - A'(x)]^{-1} A0, \quad x(0) = 0. \tag{40.5}$$

Ее решения $x(\lambda)$ будут, очевидно, решениями уравнения (40.4). Поэтому достаточно доказать разрешимость задачи (40.5) на промежутке $[0, 1]$.

Пусть $x_1(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < t_1)$ и $x_2(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < t_2)$ — два решения задачи (40.5) и пусть $t_1 < t_2$. Тогда $x_2(\lambda) = x_1(\lambda)$ при $0 \leqslant \lambda < t_1$. В предположении противного, найдется $\lambda_0 \in [0, t_1)$ такое, что $x_1(\lambda_0) = x_2(\lambda_0) = x_0$, но $x_1(\lambda) \neq x_2(\lambda)$ при близких к λ_0 и больших чем λ_0 значениях λ. Но это противоречит классической теореме о неявной функции, в силу которой уравнение (40.4) определяет в окрестности числа λ_0 единственную неявную функцию $x(\lambda)$, удовлетворяющую условию $x(\lambda_0) = x_0$.

Мы доказали для уравнения (40.5) теорему единственности — решение однозначно определяется начальным значением (хотя правая часть лишь непрерывна по x).

Рассмотрим совокупность промежутков $0 \leqslant \lambda < t$, на которых можно определить решение $x^*(\lambda)$ задачи (40.5). Если $\sup t > 1$, то теорема доказана.

Пусть $t^* = \sup t \leqslant 1$. Тогда решение $x^*(\lambda)$ можно считать определенным при $0 \leqslant \lambda < t^*$. Это решение в силу (40.2) ограничено и поэтому (в силу (40.3) и (40.5)) имеет на $[0, t^*)$ ограниченную производную. Следовательно, при $\lambda \to t^*$ вектор-функция $x^*(\lambda)$ стремится к некоторому пределу x^*.

Переходя в тождестве $x^*(\lambda) - Ax^*(\lambda) + (1-\lambda)A0 = 0$ к пределу при $\lambda \to t^*$, получаем равенство $x^* - Ax^* + (1 - t^*)A0 = 0$. Из теоремы о неявной функции вытекает, что уравнение (40.4) имеет определенное на некотором промежутке $(t^* - \delta, t^* + \delta)$ решение $y(\lambda)$, удовлетворяющее условию $y(t^*) = x^*$. Но тогда вектор-функция $z(\lambda)$, совпадающая с $x^*(\lambda)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant t^*$ и равная $y(\lambda)$ при $t^* \leqslant \lambda < t^* + \delta$, будет решением задачи (40.5) при $0 \leqslant t < t^* + \delta$. Это противоречит определению числа t^*.

Мы доказали, что уравнение (40.1) имеет решение. Для доказательства единственности решения можно провести, например, рассуждения, использованные во второй половине доказательства теоремы 21.9. ∎

Утверждение теоремы 40.5 сохраняет силу, если условие (40.3) заменить менее ограничительным предположением о компактности множества всех решений всех уравнений (40.4) при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Доказательство, по существу, не меняется.

Утверждение теоремы 40.5 сохраняет силу, если формально отказаться от условия (40.2), но дополнительно к (40.3) предположить, что

$$\lim_{r \to \infty} \psi(r) = \infty, \qquad \psi(r) = \int_1^r \frac{du}{\varphi(u)}. \tag{40.6}$$

Действительно, условие (40.2) в доказательстве теоремы 40.5 использовано лишь при проверке ограниченности на $[0, 1]$ решения $x(\lambda)$ задачи (40.5). Но из (40.3) вытекает оценка $\|\dot{x}(\lambda)\| \leqslant a\varphi(\|x(\lambda)\|)$ и поэтому правое верхнее производное число $D^*\alpha(\lambda)$ функции $\alpha(\lambda) = \|x(\lambda)\|$ удовлетворяет неравенству $D^*\alpha \leqslant a\varphi(\alpha)$. Следовательно (см., например, [24]), $\psi[\alpha(\lambda)] - \psi[\alpha(0)] \leqslant a\lambda$ при тех $\lambda > 0$, при которых определено решение $x(\lambda)$. ∎

40.3. Лемма. Пусть y_0, $v \in E$ и $\|y_0 - v\| = R > 0$. Обозначим через $L(y_0, v, r, \rho)$ $(r < \rho < R)$ лежащую вне шара $\|y - y_0\| < \rho$ часть выпуклой оболочки шара $\|y - y_0\| \leqslant r$ и точки v. Если $y \in L(y_0, v, r, \rho)$, то $y = (1-\alpha)u + \alpha v$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\|u - y_0\| \leqslant r$ и $\|(1-\alpha)u + \alpha v - y_0\| \geqslant \rho$; поэтому $\rho \leqslant (1-\alpha)\|u - y_0\| + \alpha\|v - y_0\| \leqslant (1-\alpha)r + \alpha R$ и, следовательно, $1 - \alpha \leqslant (R-\rho)/(R-r)$. Поэтому $\|y - v\| = (1-\alpha)\|u - v\| \leqslant (R-\rho)(R+r)/(R-r)$. Отсюда вытекает оценка

$$\operatorname{diam} L(y_0, v, r, \rho) \leqslant 2\frac{R+r}{R-r}(R-\rho) \tag{40.7}$$

диаметра множества $L(y_0, v, r, \rho)$.

Лемма 40.1. *Пусть N — замкнутое множество в банаховом пространстве E и $y_0 \overline{\in} N$. Тогда можно построить содержащую y_0 ограниченную выпуклую область $\Omega \subset E$ так, что пересечение $\Omega \cap N$ пусто, а пересечение $\bar{\Omega} \cap N$ непусто.*

Доказательство. Пусть $R_1 = \rho(y_0, N)$ и $r = R_1/2$. Выберем в N точку v_1, для которой $\|y_0 - v_1\| < R_1 + 1$. Через Ω_1 обозначим множество внутренних точек выпуклой оболочки шара $\|y - y_0\| \leqslant r$ и точки v_1. Если пересечение $\Omega_1 \cap N$ пусто, то можно положить $\Omega = \Omega_1$.

Пусть множество $\Omega_1 \cap N$ непусто. Положим $N_1 = N \cap \bar{\Omega}_1$, тогда $R_2 = \rho(y_0, N_1) \geqslant R_1$. Выберем в N_1 такую точку v_2, для которой $\|y_0 - v_2\| < R_2 + 1/2$. Через Ω_2 обозначим множество внутренних точек выпуклой оболочки шара $\|y - y_0\| \leqslant r$ и точки v_2. Очевидно, $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Если пересечение $\Omega_2 \cap N$ пусто, то можно положить $\Omega = \Omega_2$. В противном случае процесс нужно продолжить.

Допустим, что построены области $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \supset \Omega_n$, точки $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и числа $R_1 \leqslant R_2 \leqslant \ldots \leqslant R_n$. Если пересечение $\Omega_n \cap N$ пусто, то положим $\Omega = \Omega_n$. Если же $\Omega_n \cap N$ непусто, то положим $N_n = N \cap \bar{\Omega}_n$, $R_{n+1} = \rho(y_0, N_n)$ и выберем в N_n точку v_{n+1}, для которой $\|y_0 - v_{n+1}\| < R_{n+1} - 1/(n+1)$. Затем обозначим через Ω_{n+1} множество внутренних точек выпуклой оболочки шара $\|y - y_0\| \leqslant r$ и точки v_{n+1}. Нужно рассмотреть лишь случай, когда процесс построения множеств Ω_n продолжается неограниченно.

По построению, каждое замкнутое множество N_n лежит в $L(y_0, v_n, r, R_n)$, поэтому из (40.7) вытекает, что

$$\operatorname{diam} N_n \leqslant 2\,\frac{\|y_0 - v_n\| + r}{\|y_0 - v_n\| - r} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{2(R_1 + r)}{n(R_1 - r)}.$$

Кроме того, $N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_n \supset \ldots$ Следовательно, у множеств N_n есть единственная общая точка $v_* \in N$. Требованиям леммы будет удовлетворять множество Ω внутренних точек выпуклой оболочки шара $\|y - y_0\| \leqslant r$ и точки v_*. ∎

40.4. Накрытия пространства. Отображение $I - A$ *накрывает* E, если $(I - A)E = E$, *и однолистно накрывает* E, если $I - A$ гомеоморфно отображает E на себя.

Нетрудно видеть, что в условиях теорем 40.1—40.3 отображения $I - A$ накрывают E, т. е. уравнения

$$x = Ax + y \tag{40.8}$$

имеют по крайней мере одно решение при каждом $y \in E$. В условиях теорем 40.4 и 40.5 отображение $I - A$ однолистно накрывает E и, в частности, каждое уравнение (40.8) имеет единственное решение. Например, для существования у каждого уравнения (40.8) единственного решения достаточно, чтобы A был непрерывно дифференцируем, а его производная Фреше допускала оценку (40.3), где $\varphi(r)$ удовлетворяет условию (40.6).

Приведем в заключение параграфа еще один признак накрытия пространства.

Рассмотрим оператор T, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Пусть при каждых $x, h \in E_1$ существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\,[T(x + th) - Tx] = D(x, h). \tag{40.9}$$

Оператор $D(x, h)$ при каждом фиксированном x однороден по h, т. е. $D(x, \alpha h) = \alpha D(x, h)$. Скажем, что T *принадлежит классу* $\mathfrak{M}$, если при каждом фиксированном x множество элементов $D(x, h)$ $(h \in E_1)$ плотно в E_2.

Теорема 40.6. *Пусть $T \in \mathfrak{M}$ и пусть множество TE_1 замкнуто в E_2. Тогда $TE_1 = E_2$, т. е. уравнение $Tx = y_0$ при каждом $y_0 \in E_2$ имеет решение в E_1.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $y_0 \in E_2$ и $y_0 \overline{\in} N = TE_1$. В силу леммы 40.1 можно построить содержащую y_0 выпуклую область Ω так, что на ее границе $\dot{\Omega}$ есть точка $v_* \in N$, а пересечение $\Omega \cap N$ пусто.

Пусть $v_* = Tx_*$. Так как множество $D(x_*, h)$ $(h \in E_1)$ плотно в E_2, то можно построить такую последовательность $h_n \in E_1$, для которой $\|D(x_*, h_n) - (y_0 - v_*)\| \to 0$. Но тогда при достаточно больших n и достаточно малых t элементы $T(x_* + th_n)$ в силу (40.9) будут лежать в области Ω. Мы пришли к противоречию. ∎

Теорема 40.6 при различных дополнительных предположениях (например, для пространств с равномерно выпуклой сферой) была доказана С. И. Похожаевым (ДАН СССР **184**, № 1 (1969); Функц.

анализ и его прилож. 3, № 2 (1969)), который опирался на красивые геометрические теоремы М. Эдельштейна. В приведенной выше общей форме теорема 40.6 установлена П. П. Забрейко и М. А. Красносельским (Функц. анализ и его прилож. 5, № 3 (1971)).

Теорема 40.6 оказалась, как показал С. И. Похожаев, удобным орудием исследования различных эволюционных уравнений.

§ 41. Принцип ненулевого вращения

41.1. Общие теоремы. Продолжим изучение уравнения

$$x = Ax \tag{41.1}$$

с вполне непрерывным оператором A, действующим в банаховом пространстве E. Важный общий принцип разрешимости этого уравнения составляет следующая теорема, которой мы пользуемся на протяжении всех последних глав.

Теорема 41.1. *Если векторное поле $I - A$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ и $\gamma(I - A, \Omega) \neq 0$, то уравнение* (41.1) *имеет в области Ω по крайней мере одно решение.*

Из теоремы 20.9 вытекает, что в случае связной области Ω отличие вращения $\gamma(I - A, \Omega)$ от нуля является единственной характеристикой поведения оператора A на $\dot{\Omega}$, гарантирующей разрешимость уравнения (41.1) в Ω (конечно, если известна лишь полная непрерывность оператора A).

Так как гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения, то из теоремы 41.1 вытекает

Теорема 41.2. *Пусть оператор $A(x, \lambda)$ $(x \in E, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ вполне непрерывен и $A(x, 0) \equiv Ax$. Пусть для всех решений x всех уравнений $x = A(x, \lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ справедлива общая априорная оценка $\|x\| \leqslant R_0$. Пусть, наконец, векторное поле $x - A(x, 1)$ имеет ненулевое вращение на сферах $\|x\| = R$ больших радиусов R. Тогда уравнение* (41.1) *имеет по крайней мере одно решение.*

В форме теоремы 41.2 (в других терминах) и был сформулирован знаменитый результат работы Лере — Шаудера [35]. Теорема 37.6 является частным случаем теоремы 41.2.

Каждый частный признак отличия $\gamma(I - A, \Omega)$ от нуля является, в силу теоремы 41.1, принципом существования неподвижной точки у оператора A. Некоторые такие принципы получены в § 37, § 38 и § 40, другие будут приведены ниже.

Мы в этом параграфе говорим в основном об уравнениях (41.1) с вполне непрерывным оператором A. Однако все рассуждения используют лишь тот факт, что для поля $I - A$ определено вращение с естественными свойствами. Поэтому эти рассуждения относятся и к полям из других классов, изученных в гл. 4.

41.2. Операторы с главной нечетной частью. Ограниченная область $\Omega \subset E$ называется *центрально симметричной* с центром симметрии x^*, если из $x \in \Omega$ вытекает $2x^* - x \in \Omega$. Граница $\dot{\Omega}$ центрально симметричной области Ω также центрально симметрична с тем же центром симметрии x^*: из $x \in \dot{\Omega}$ следует $2x^* - x \in \dot{\Omega}$.

Теорема 41.3. *Пусть центр симметрии x^* является внутренней точкой ограниченной центрально симметричной области Ω. Пусть заданный на $\bar{\Omega}$ вполне непрерывный оператор A не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и удовлетворяет условию*

$$\frac{A(2x^* - x) - (2x^* - x)}{\|A(2x^* - x) - (2x^* - x)\|} \neq \frac{Ax - x}{\|Ax - x\|} \quad (x \in \dot{\Omega}). \tag{41.2}$$

Тогда оператор A имеет в области Ω по крайней мере одну неподвижную точку.

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 41.1, так как из (41.2) вытекает нечетность $\gamma(I - A, \Omega)$. ∎

Наиболее часто теорема 41.3 применяется в ситуации, когда $x^* = 0$, т. е. для операторов на областях, центрально симметричных относительно нулевой точки; в этой ситуации условие (41.2) имеет вид

$$\frac{A(-x) + x}{\|A(-x) + x\|} \neq \frac{Ax - x}{\|Ax - x\|} \quad (x \in \dot{\Omega}). \tag{41.3}$$

Теорема 41.3 содержит как частные случаи принцип Шаудера и другие теоремы из § 37, § 38 о разрешимости уравнения (41.1) с вполне непрерывным оператором A.

В случае одномерного E теорема 41.3 переходит в теорему Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной функции (проверьте). Уже при переходе к двумерным пространствам теорема 41.3 становится нетривиальным утверждением.

Рассмотрим систему двух скалярных уравнений

$$P_k(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad Q_k(\xi, \eta) + \psi(\xi, \eta) = 0, \tag{41.4}$$

где $P_k(\xi, \eta) = \alpha_0\xi^k + \alpha_1\xi^{k-1}\eta + \ldots + \alpha_k\eta^k$, $Q_k(\xi, \eta) = \beta_0\xi^k + \beta_1\xi^{k-1}\eta + \ldots + \beta_k\eta^k$, а

$$\lim_{|\xi|+|\eta|\to\infty} \frac{|\varphi(\xi, \eta)| + |\psi(\xi, \eta)|}{|\xi|^k + |\eta|^k} = 0. \tag{41.5}$$

Пусть формы P_k и Q_k одновременно обращаются в нуль лишь в точке $\xi = \eta = 0$. Тогда при нечетном k оператор $A(\xi, \eta) = \{\xi + P_k(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta),\ \eta + Q_k(\xi, \eta) + \psi(\xi, \eta)\}$ удовлетворяет на окружностях $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ больших радиусов r условиям теоремы 41.3 (проверьте!). Следовательно, при нечетном k система (41.4) имеет по крайней мере одно решение.

В качестве второго примера рассмотрим систему

$$\cos\xi + \varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad \cos\eta + \psi(\xi, \eta) = 0. \tag{41.6}$$

Пусть $\varphi(2k\pi, t) > -1$, $\psi(t, 2l\pi) > -1$, $\varphi(2k\pi + \pi, t) < 1$, $\psi(t, 2l\pi + \pi) < 1$ при $-\infty < t < \infty$ и всех целых k, l. Тогда оператор $A(\xi, \eta) = \{\xi + \cos\xi + \varphi(\xi, \eta),\ \eta + \cos\eta + \psi(\xi, \eta)\}$ удовлетворяет условию (41.2) на границе каждого квадрата $2k\pi \leqslant \xi \leqslant 2k\pi + \pi$, $2l\pi \leqslant \eta \leqslant 2l\pi + \pi$. Поэтому в каждом из указанных квадратов система (41.6) имеет по крайней мере одно решение.

41.3. Единственность решения. Из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает полезное дополнение к теореме 41.1.

Теорема 41.4. *Пусть выполнены условия теоремы 41.1. Пусть индексы всех лежащих в* Ω *неподвижных точек* $x_1, \ldots, x_k$ *оператора* A *одинаковы и* $|\operatorname{ind}(x_i, A)| = |\gamma(I - A, \Omega)|$. *Тогда уравнение* (41.1) *имеет в области* Ω *единственное решение.*

Пусть, например, определены операторы $A'(x)$ $(x \in E)$ и $A'(\infty)$, причем 1 не является собственным значением всех этих операторов. Тогда из теоремы 41.4 вытекает, что уравнение $x = Ax + y$ имеет при каждом $y \in E$ единственное решение в E. Отметим, что теорема 41.4 содержит более общее утверждение.

Другие приложения теоремы 41.4 приведены ниже.

41.4. Применения принципов родственности. Установленные в гл. 3 принципы родственности и инвариантности вращения существенно расширяют возможности

приложений общих теорем 41.1 и 41.2. С применениями этих принципов мы еще неоднократно столкнемся в главах 6 и 8. Здесь ограничимся приложениями к доказательству теорем существования периодических решений у систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Общая схема рассуждений совершенно проста. Пусть некая задача (*) поставлена для двух различных уравнений; назовем их уравнениями (1) и (2). Пусть задача (*) для уравнения (1) легко сводится к уравнениям $x = A_1x$ и $y = A_2y$ в разных пространствах E_1 и E_2, причем вычисление вращения поля $I - A_2$ проводится без особого труда. Пусть задачу (*) для уравнения (2) удается свести лишь к уравнению $x = B_1x$ в пространстве E_1, причем неясны возможности перехода к уравнению в пространстве E_2. В этом случае нужно пытаться найти в пространстве E_1 область Ω, на границе $\dot\Omega$ которой поле $I - B_1$ гомотопно полю $I - A_1$. Тогда вращение $\gamma(I - B_1, \Omega)$ совпадает с $\gamma(I - A_1, \Omega)$.

Если в силу какой-либо теоремы родственности вычисление $\gamma(I - A_1, \Omega)$ можно свести к вычислению вращения поля $I - A_2$ на границе некоторой области в E_2, то задача решена — мы знаем вращение $\gamma(I - B_1, \Omega)$ и можем пытаться применять теорему 41.1 или теорему 41.2.

Именно в связи с изложенной схемой была поставлена и решена задача о связи вращений родственных векторных полей.

41.5. Периодические решения систем с запаздывающим аргументом. Пусть $C(a, b)$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций со значениями в R^n. Обозначим через $S(a, b)$ оператор, сопоставляющий каждой функции $x(t) \in C(a, b)$ функцию $S(a, b)x(t)$, определенную на $(-\infty, \infty)$, периодическую с периодом $b - a$ и совпадающую с $x(t)$ при $a \leqslant t < b$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot x(t) = f[t, x(t), x(t - h)]. \tag{41.7}$$

Здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание. Вектор-функцию $f(t, x, y)$ будем считать определенной и непрерывной по совокупности переменных при $-\infty < t < \infty$;

$x, y \in R^n$. Нас будут интересовать условия существования ограниченных и периодических решений у системы (41.7). Мы ограничиваемся простейшим классом уравнений с распределенным аргументом.

Положим

$$Ax(t) = x(b) + \int_a^t f[s, x(s), S(a, b)x(s-h)]\,ds. \quad (41.8)$$

Оператор A действует в $C(a, b)$ и вполне непрерывен. Очевидна

Лемма 41.1. *Функция $S(a, b)x(t)$ удовлетворяет уравнению (41.7) на промежутке $[a, b]$ и граничному условию*

$$x(a) = x(b) \quad (41.9)$$

в том и только том случае, если $x(t)$ является неподвижной точкой оператора (41.8).

Непрерывно дифференцируемая функция $V(x)$ $(x \in R^n)$ называется *правильным направляющим потенциалом* (ср. п. 13.6) для системы (41.7), если найдутся такие $\alpha_0, \rho_0 > 0$, что при всех $t \in [a, b]$ и всех $y \in R^n$

$$(f(t, x, y), \operatorname{grad} V(x)) > \alpha_0 \| f(t, x, y)\| \cdot \|\operatorname{grad} V(x)\| \quad (41.10)$$
$$(\|x\| \geqslant \rho_0).$$

В дальнейших построениях существенную роль играет индекс $\operatorname{ind} V$ направляющего потенциала $V(x)$.

Лемма 41.2. *Пусть система (41.7) имеет правильный направляющий потенциал $V(x)$. Тогда вполне непрерывное векторное поле $I - A$ с оператором (41.8) невырождено на сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ больших радиусов r и*

$$\gamma(I - A, S_r) = (-1)^n \operatorname{ind} V(x). \quad (41.11)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию $g(t, x, y; \lambda) = (1-\lambda) f(t, x, y) + \lambda f(t, x, x)$ и оператор

$$A(\lambda)x(t) =$$
$$= x(b) + \int_a^t g[s, x(s), S(a, b)x(s-h); \lambda]\,ds. \quad (41.12)$$

В силу леммы 41.1 каждая неподвижная точка $x_\lambda(t)$ оператора $A(\lambda)$ является удовлетворяющим условию (41.9) решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = g[t, x(t), x_\lambda(t-h); \lambda]. \quad (41.13)$$

Из леммы 13.5 вытекает, что все функции $x_\lambda(t)$ лежат в некотором шаре пространства $C(a, b)$. Следовательно, на сферах S_r больших радиусов r невырождено не только поле $I - A$, совпадающее с полем $I - A(0)$, но и все поля $I - A(\lambda)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Поля $I - A(\lambda)$ определяют гомотопный переход от поля $I - A$ к полю $I - A(1)$, где

$$A(1)x(t) = x(b) + \int_a^t f[s, x(s), x(s)]\,ds. \quad (41.14)$$

Поэтому $\gamma(I - A, S_r) = \gamma(I - A(1), S_r)$. Остается заметить, что $\gamma(I - A(1), S_r) = (-1)^n \operatorname{ind} V(x)$ в силу теоремы 28.6. ∎

Систему (41.7) будем называть *ω-периодической*, если $f(t + \omega, x, y) \equiv f(t, x, y)$.

Теорема 41.5. *Пусть ω-периодическая система (41.7) уравнений с запаздывающим аргументом имеет правильный направляющий потенциал $V(x)$ ненулевого индекса (например, $V(x)$ — четный потенциал). Тогда система (41.7) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть $a = 0$, $b = \omega$. Из леммы 41.2 и теоремы 41.1 вытекает, что оператор (41.8) имеет неподвижную точку $x^*(t) \in C(0, \omega)$. В силу леммы 41.1 ω-периодическая функция $S(0, \omega)x^*(t)$ является решением системы (41.7). ∎

Теорема 41.5 допускает широкие обобщения. Например, предположение о существовании правильного направляющего потенциала можно заменить предположением о существовании полного набора направляющих потенциалов (см. п. 13.6). Приведем без доказательства одну общую теорему.

Непрерывно дифференцируемые на R^n функции $V_1(x), \ldots, V_m(x)$ назовем *достаточным набором направляющих потенциалов* системы (41.7), если выполнены следующие три условия.

1. $|V_1(x)| + \ldots + |V_m(x)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$.

2. Найдется такое $r_0 > 0$, что при $\|x\| \geqslant r_0$ выпуклая оболочка m векторов $\operatorname{grad} V_1(x), \ldots, \operatorname{grad} V_m(x)$ не содержит нулевую точку пространства R^n.

3. При каждом $i = 1, \ldots, m$ и всех $y \in R^n$

$$(f(t, x, y), \operatorname{grad} V_i(x)) \geqslant \varphi_i[t, V_i(x)] \quad (\|x\| \geqslant r_0), \tag{41.15}$$

причем ни одно из скалярных дифференциальных уравнений

$$\dot{v} = \varphi_i(t, v) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{41.16}$$

не имеет определенного на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [0, \omega]$ решения, стремящегося к $+\infty$ при $t \to \alpha + 0$ или к $-\infty$ при $t \to \beta - 0$, а каждое определенное на $[0, \omega]$ решение $v(t)$ уравнения

$$\dot{v} = \varphi_1(t, v) \tag{41.17}$$

удовлетворяет неравенству $v(0) \leqslant v(\omega)$.

Уравнения (41.16) заведомо обладают указанными свойствами, если все функции $\varphi_i(t, v)$ неотрицательны.

Из свойства 2 вытекает, что определены индексы функций из достаточного набора направляющих потенциалов и все эти индексы совпадают с $\operatorname{ind} V_1(x)$.

Теорема 41.6. *Пусть для ω-периодической системы* (41.7) *может быть указан достаточный набор направляющих потенциалов $V_1(x), \ldots, V_m(x)$. Пусть $\operatorname{ind} V_1(x) \neq 0$ (например, функция $V_1(x)$ четная). Тогда у системы* (41.7) *есть по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Эта теорема доказана М. А. Красносельским и Е. А. Лифшицем (Автоматика и телемеханика **34**, № 8 (1973)).

Из существования достаточного набора направляющих потенциалов вытекает более общий, чем теорема 41.6, факт — поле $I - A$ с оператором (41.8) невырождено на сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ больших радиусов r и справедливо аналогичное (41.11) равенство

$$\gamma(I - A, S_r) = \operatorname{ind} V_1(x). \tag{41.18}$$

Если правая часть системы (41.7) не обладает свойством ω-периодичности по t, то из существования правильного направляющего потенциала (достаточного набора направляющих потенциалов) ненулевого индекса можно сделать лишь вывод о существовании определенного на $(-\infty, \infty)$ ограниченного решения. Для доказательства нужно рассмотреть существующие в силу леммы 41.2 решения $x_m(t)$ системы (41.7), определенные при $-m \leqslant t \leqslant m$ и удовлетворяющие условию $x_m(-m) = x_m(m)$. Последовательность вектор-функций $S(-m, m) x_m(t)$ равномерно ограничена на $(-\infty, \infty)$ и компактна в смысле равномерной сходимости на каждом конечном промежутке. Предел $x^*(t)$ $(-\infty < t < \infty)$

каждой сходящейся подпоследовательности будет ограниченным решением системы (41.7).

Для приложений теорем 41.5 и 41.6 об ω-периодических решениях или для доказательства существования ограниченных на $(-\infty, \infty)$ решений нужно уметь конструировать направляющие потенциалы. Читатель легко сформулирует конкретные признаки существования периодических и ограниченных решений, применяя, например, теоремы о направляющих потенциалах из § 13 и § 14.

41.6. Замороженные и усредненные коэффициенты. Рассмотрим задачу об ω-периодических решениях ω-периодической системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x) + f(t, x), \tag{41.19}$$

правая часть которой является суммой положительно однородной по x порядка $m > 0$ вектор-функции $P(t, x)$ $(P(t, \alpha x) \equiv \alpha^m P(t, x)$ при $\alpha > 0)$ и подчиненного слагаемого $f(t, x)$:

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|x\|^{-m} f(t, x) = 0. \tag{41.20}$$

Вектор-функции $P(t, x)$ и $f(t, x)$ предполагаются непрерывными по совокупности переменных $t \in (-\infty, \infty)$, $x \in R^k$ и ω-периодичными по t.

Обозначим через $\mathfrak{N}(m)$ множество однородных порядка m вектор-функций $P(x)$ таких, что у автономной системы $\dot{x} = P(x)$ нет отличных от тождественного нуля решений, определенных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$.

Лемма 41.3. *Пусть $m > 1$. Пусть $P(t, x) \in \mathfrak{N}(m)$ при всех $t \in [0, \omega]$. Тогда вполне непрерывные в $C(0, \omega)$ векторные поля $I - A$ и $I - A_1$ с операторами*

$$Ax(t) = x(\omega) + \int_0^t P[s, x(s)]\, ds + \int_0^t f[s, x(s)]\, ds, \tag{41.21}$$

$$A_1 x(t) = x(\omega) + \int_0^t P[s, x(s)]\, ds \tag{41.22}$$

невырождены и гомотопны друг другу на сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ больших радиусов r.

Доказательство. В предположении противного, можно указать такие последовательности чисел $\lambda_n \in [0,1]$ и ω-периодических вектор-функций $x_n(t)$, что $\|x_n(t)\| = r_n \to \infty$ и

$$x_n(t) = x_n(\omega) + \int_0^t P[s, x_n(s)]\,ds + \lambda_n \int_0^t f[s, x_n(s)]\,ds. \quad (41.23)$$

Пусть $\|x_n(\tau_n)\| = r_n$ (в этом равенстве берется норма в пространстве R^k) и $\tau_n \in [0,\omega]$; последовательность τ_n можно считать сходящейся к некоторому числу $\tau^* \in [0,\omega]$.

Если положить

$$y_n(t) = r_n^{-1} x_n(t r_n^{1-m} + \tau_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (41.24)$$

то из равенств (41.23) вытекает, что

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^t \{P[s r_n^{1-m} + \tau_n, y_n(s)] + \\ + \lambda_n r_n^{-m} f[s r_n^{1-m} + \tau_n, r_n y_n(s)]\}\,ds. \quad (41.25)$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность вектор-функций (41.24); эти функции равномерно ограничены, так как $\|y_n(t)\| \leqslant 1$. Поэтому можно считать последовательность $y_n(t)$ сходящейся к некоторой вектор-функции $y^*(t)$ равномерно на каждом конечном промежутке изменения t; при этом $\|y^*(0)\| = 1$, так как $\|y_n(0)\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Переходя к пределу в (41.25), получим равенство

$$y^*(t) = y^*(0) + \int_0^t P[\tau^*, y^*(s)]\,ds.$$

Следовательно, $y^*(t)$ является ограниченным на $(-\infty, \infty)$ решением системы $\dot{x} = P(\tau^*, x)$. Значит, $P(\tau^*, x) \,\overline{\in}\, \mathfrak{N}(m)$ — мы пришли к противоречию. ∎

Пусть существует ω-периодическая по t и непрерывная по совокупности переменных $t \in [0,\omega]$, $\lambda \in [0,1]$, $x \in R^n$ вектор-функция $Q(t,x;\lambda)$, для которой $Q(t,x;\lambda) \in \mathfrak{N}(m)$ при всех t, λ. Пусть $Q(t,x;0) \equiv P(t,x)$ и $Q(t,x;1) \equiv Q_0(x)$. Тогда будем говорить, что вектор-функция $P(t,x)$ *стягиваема* в $\mathfrak{N}(m)$ деформацией $Q(t,x;\lambda)$. Если $P(t,x)$ стягиваема в $\mathfrak{N}(m)$ деформацией $Q(t,x;\lambda)$, то без ограничения общности можно считать, что $Q_0(x) \equiv P(0,x)$.

Лемма 41.4. *Пусть $m > 1$. Пусть ω-периодическая вектор-функция $P(t,x)$ со значениями в $\mathfrak{N}(m)$ стягиваема в $\mathfrak{N}(m)$ деформацией $Q(t,x;\lambda)$ $(Q(t,x;1) \equiv P(0,x))$. Тогда вполне непрерывное в $C(0,\omega)$ векторное поле $I - A$ с оператором (41.21) гомотопно на сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ больших радиусов r вполне непрерывному векторному полю $I - A_2$ с оператором*

$$A_2 x(t) = x(\omega) + \int_0^t P[0, x(s)]\,ds. \quad (41.26)$$

Для доказательства достаточно показать невырожденность на сферах S_r больших радиусов r полей

$$\Phi(x; \lambda) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t Q[s, x(s); \lambda]\,ds.$$

В предположении противного, найдутся последовательность чисел $\lambda_n \in [0,1]$ (ее можно считать сходящейся к некоторому числу λ^*) и последовательность ω-периодических функций $x_n(t)$, для которых $\|x_n(t)\| = r_n \to \infty$ и

$$x_n(t) = x_n(\omega) + \int_0^t Q[s, x_n(s); \lambda_n]\,ds. \quad (41.27)$$

Пусть, как при доказательстве леммы 41.3, τ_n — такие числа из $[0,\omega]$, что $\|x_n(\tau_n)\| = r_n$ (последовательность τ_n можно считать сходящейся к некоторому числу τ^*). Определим тогда функции $y_n(t)$ равенствами (41.24). Из (41.27) вытекает, что

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^t Q[s r_n^{1-m} + \tau_n, y_n(s); \lambda_n]\,ds. \quad (41.28)$$

Последовательность $y_n(t)$ будет компактна в смысле равномерной сходимости на конечных промежутках изменения t. Поэтому ее можно считать сходящейся равномерно на каждом конечном промежутке к некоторой вектор-функции $y^*(t)$, причем $\| y^*(t) \| \leqslant \| y^*(0) \| = 1$ и

$$y^*(t) = y^*(0) + \int_0^t Q[\tau^*, y^*(s); \lambda^*]\, ds.$$

Следовательно, $Q[\tau^*, x; \lambda^*] \in \mathfrak{N}(m)$ — мы пришли к противоречию. ∎

Теорема 41.7. *Пусть $m > 1$. Пусть вектор-функция $P(t, x)$ со значениями в $\mathfrak{N}(m)$ стягиваема в $\mathfrak{N}(m)$. Пусть вращение γ векторного поля $P(0, x)$ на единичной сфере фазового пространства R^k отлично от нуля. Тогда система* (41.19) *имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. В силу теоремы 28.5 вращение поля $I - A_2$ с оператором (41.26) на любой сфере $\| x(t) \| = r$ пространства $C(0, \omega)$ равно $(-1)^k \gamma$. Поэтому это вращение отлично от нуля. Из леммы 41.4 вытекает тогда, что отлично от нуля вращение на сферах $\| x(t) \| = r$ больших радиусов r векторного поля $I - A$ с оператором (41.21). Из теоремы 41.1 следует существование неподвижной точки $x^*(t)$ у оператора (41.21) — эта неподвижная точка является ω-периодическим решением системы (41.19). ∎

Введем обозначение

$$Q(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega P(s, x)\, ds \qquad (x \in R^k). \tag{41.29}$$

Теорема 41.8. *Пусть $m > 1$, $P(t, x) \in \mathfrak{N}(m)$ при всех t и уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x) \tag{41.30}$$

не имеет ненулевых ω-периодических решений. Пусть нуль является изолированной особой точкой ненулевого индекса γ_0 поля $-Q(x)$ в фазовом пространстве R^k. Тогда у системы (41.19) *есть по крайней мере одно ω-периодическое решение.*

Доказательство. Рассмотрим семейство векторных полей

$$\Phi(x; \lambda) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t P[s, x(s)]\, ds - \lambda \int_t^\omega P[s, x(s)]\, ds \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{41.31}$$

в пространстве $C(0, \omega)$. Если $0 \leqslant \lambda < 1$, то особая точка $x^*(t)$ поля (41.31) является ω-периодическим решением уравнения $\dot{x} = (1 - \lambda) P(t, x)$; поэтому вектор-функция $y^*(t) = (1 - \lambda)^{-\frac{1}{m-1}} x^*(t)$ является ω-периодическим решением уравнения (41.30) и, следовательно, $x^*(t) \equiv 0$. Значит, поля (41.31) при $0 \leqslant \lambda < 1$ невырождены на каждой сфере $\| x(t) \| = r > 0$. При $\lambda = 1$ поле (41.31) имеет вид

$$\Phi(x; 1) = x(t) - x(\omega) - \int_0^\omega P[s, x(s)]\, ds. \tag{41.32}$$

Особые точки этого поля — это функции-константы $x^*(t) \equiv x^*$, которые удовлетворяют равенству $Q(x^*) = 0$. Значит, поле (41.31) и при $\lambda = 1$ невырождено на сферах $\| x \| = r > 0$. Таким образом, поля (41.31) определяют гомотопный переход на сферах $\| x \| = r$ от поля $I - A_1$ с оператором (41.22) к полю (41.32). Отсюда и из леммы 41.3 вытекает, что поле $I - A$ с оператором (41.21) имеет на сферах $\| x \| = r$ больших радиусов такое же вращение, как поле (41.32). Но поле (41.32) — это поле с оператором, значения которого лежат в конечномерном подпространстве E^k функций-констант. Поэтому для вычисления его вращения достаточно рассматривать поле в E^k, на котором $\Phi(x; 1)$ совпадает с $-Q(x)$.

Следовательно, вращение поля $I - A$ на сферах $\| x \| = r$ больших радиусов r совпадает с γ_0 и остается сослаться на теорему 41.1. ∎

Теорема 41.7 содержит условия, при которых существование периодического решения у системы (41.19) вытекает из свойств главного члена $P(t, x)$ правой части при замороженных коэффициентах, а теорема 41.8 — при усредненных коэффициентах.

Теорема 41.9. *Пусть $m = 1$. Пусть уравнение $\dot{x} = P(t,x)$ не имеет ненулевых периодических решений. Тогда поля $I - A$ и $I - A_1$ с операторами* (41.21) *и* (41.22) *гомотопны на сферах $\|x(t)\| = r$ больших радиусов r.*

Доказательство очевидно. Теорема 41.9 позволяет при анализе системы (41.19) отбрасывать в правой части подчиненные слагаемые $f(t,x)$. Утверждения типа теорем 41.7 и 41.8 для случая $m = 1$ неизвестны.

Перейдем к случаю $m < 1$. В этом случае анализ проще, так как значения $P(t,x)$ при отдельных t роли не играют.

Лемма 41.5. *Пусть $m < 1$. Пусть нуль 0 является изолированной особой точкой индекса γ_0 векторного поля $-Q(x)$ в фазовом пространстве R^k. Тогда вполне непрерывное в $C(0,\omega)$ векторное поле $I - A$ с оператором* (41.21) *невырождено на сферах $S_r = \{x: \|x\| = r\}$ больших радиусов r и его вращение на этих сферах равно γ_0.*

Доказательство. Покажем вначале, что на сферах S_r больших радиусов поле $I - A$ гомотопно полю $I - A_1$ с оператором (41.22). В предположении противного, найдутся последовательности чисел $\lambda_n \in [0, 1]$ и вектор-функций $x_n(t) \in C(0,\omega)$ с нормами $\|x_n(t)\| = r_n \to \infty$, для которых верны равенства (41.23). Положим $y_n(t) = r_n^{-1}x_n(t)$. Тогда $\|y_n(t)\| = 1$ и

$$y_n(t) = y_n(\omega) + r_n^{m-1}\int_0^t P[s, y_n(s)]\,ds + \lambda_n r_n^{-1}\int_0^t f[s, r_n y_n(s)]\,ds. \qquad (41.33)$$

Пусть векторы $y_n(\omega)$ сходятся в R^k к вектору y^*. Тогда правые части в (41.33) равномерно на $[0,\omega]$ сходятся к y^*. Поэтому последовательность $y_n(t)$ равномерно сходится к y^* и $\|y^*\| = 1$. Полагая в (41.33) $t = \omega$, получаем равенства

$$\int_0^\omega P[s, y_n(s)]\,ds + \lambda_n r_n^{-m}\int_0^\omega f[s, r_n y_n(s)]\,ds = 0. \qquad (41.34)$$

Отсюда и из (41.20) вытекает (после предельного перехода в (41.33)), что $Q(y^*) = 0$, — мы пришли к противоречию.

Для завершения доказательства достаточно установить гомотопность поля $I - A_1$ на сферах S_r больших радиусов полю (41.32), так как вращение этого поля на S_r равно γ_0. Если поля $I - A_1$ и (41.32) негомотопны на сферах S_r больших радиусов, то найдутся последовательности чисел $\lambda_n \in [0, 1)$ и вектор-функций $x_n(t) \in C(0,\omega)$, для которых $\|x_n(t)\| = r_n \to \infty$ и

$$x_n(t) = x_n(\omega) + \int_0^t P[s, x_n(s)]\,ds + \lambda_n\int_t^\omega P[s, x_n(s)]\,ds. \qquad (41.35)$$

Полагая в (41.35) $t = \omega$, получим равенства

$$\int_0^\omega P[s, x_n(s)]\,ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (41.36)$$

Поэтому из (41.35) вытекают равенства $x_n(0) = x_n(\omega)$. Таким образом, вектор-функции $x_n(t)$ ω-периодичны. Положим $y_n(t) = r_n^{-1}x_n(t)$ и перепишем равенства (41.35) в виде

$$y_n(t) = y_n(\omega) + r_n^{m-1}\left[\int_0^t P[s, y_n(s)]\,ds + \lambda_n\int_t^\omega P[s, y_n(s)]\,ds\right]. \qquad (41.37)$$

Последовательность векторов $y_n(\omega)$ можно считать сходящейся в R^k к вектору y^*. Тогда из (41.37) вытекает, что последовательность $y_n(t)$ равномерно на $[0,\omega]$ сходится к y^* и $\|y^*\| = 1$. Перепишем теперь равенства (41.36) в виде

$$\int_0^\omega P[s, y_n(s)]\,ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и перейдем в этих равенствах к пределу. Предельное равенство имеет вид $Q(y^*) = 0$ — мы пришли к противоречию. ∎

Из леммы 41.5 вытекает

Теорема 41.10. *Пусть* $m<1$. *Пусть нуль* 0 *является изолированной особой точкой ненулевого индекса поля* $Q(x)$ *в* R^k. *Тогда у системы* (41.19) *есть по крайней мере одно* ω*-периодическое решение.*

Результаты этого пункта (кроме теоремы 41.7) принадлежат Э. Мухамадиеву (ДАН СССР **194**, № 3 (1970); ДАН Тадж. ССР **14**, № 2 (1971)).

Построения этого параграфа переносятся (с очевидными модификациями) на системы $\dot{x}=P[t,x(t)]+f[t,x(t),x(t-h)]$ с запаздывающим аргументом и аналогичные системы нейтрального типа.

§ 42. Односторонние оценки

42.1. Общий принцип. Ненулевой элемент $x\in E$ называется *собственным вектором* действующего в банаховом пространстве E оператора A, отвечающим собственному значению λ, если $Ax=\lambda x$.

Теорема 42.1. *Пусть оператор* A *вполне непрерывен на замыкании* $\bar{\Omega}$ *ограниченной области* $\Omega\subset E$, *содержащей нулевую точку. Пусть* A *не имеет на* $\dot{\Omega}$ *собственных векторов, отвечающих собственным значениям* $\lambda>1$. *Тогда* A *имеет в* $\bar{\Omega}$ *по крайней мере одну неподвижную точку.*

Если A не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек, то для доказательства достаточно заметить, что поле $I-A$ линейно гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю I и поэтому $\gamma(I-A,\Omega)=1$. ∎

Символ скалярного произведения (x,y) в этом параграфе часто применяется для значений линейного функционала из E^* на элементе из E. Из контекста всегда будет ясно, какой из элементов x, y удобно рассматривать как функционал.

При применениях теоремы 42.1 основную сложность составляет проверка неравенств $\lambda x\neq Ax$ ($\lambda\geqslant 1$, $x\in\dot{\Omega}$). Эту проверку иногда удается заменить доказательством более ограничительного скалярного условия $(Ax,Kx)\leqslant$ $\leqslant(x,Kx)$ $(x\in\dot{\Omega})$, где K — действующий из E в E^* оператор, для которого $(x,Kx)>0$ $(x\in\dot{\Omega})$. В частности, из теоремы 42.1 вытекает

Теорема 42.2. *Пусть вполне непрерывный на шаре* $\|x\|\leqslant\rho$ *гильбертова пространства* E *оператор* A

удовлетворяет условию

$$(Ax,x)\leqslant(x,x)\qquad(\|x\|=\rho).\tag{42.1}$$

Тогда A *имеет в шаре* $\|x\|\leqslant\rho$ *по крайней мере одну неподвижную точку.*

Несмотря на простоту (а может быть, благодаря ей!), теоремы 42.1 и 42.2 приводят к прозрачным доказательствам многих теорем существования, содержащих в качестве условий односторонние оценки нелинейностей.

42.2. Линейные позитивные операторы. Через $E^{\square}$ ниже обозначается пересечение $E\cap E^*$ (смысл такого пересечения в случае, например, пространств E функций или последовательностей очевиден). На $E^{\square}$ определяется норма $\|x\|_{\square}=\|x\|_E+\|x\|_{E^*}$.

Действующий из E в $E^{\square}$ линейный оператор K назовем *позитивным* на E, если $(Kx,x)>0$ при $x\in E$ $(x\neq 0)$ и если

$$(Kx,Kx)\leqslant\mu(x,Kx)\qquad(x\in E)\tag{42.2}$$

при некотором $\mu\geqslant 0$. Наименьшее μ, при котором выполнено (42.2), обозначим через $\mu(K;E)$.

Напомним (см., например, [14], [27]), что действующий из пространства E в пространство E_1 оператор A *подчинен* оператору B, если $\|Ax\|_{E_1}\leqslant a\|Bx\|_{E_1}$ $(x\in E)$. Если B имеет на $BE\subset E_1$ обратный B^{-1}, действующий из E_1 в E, то подчиненность A оператору B равносильна непрерывности в E_1 оператора AB^{-1} (определенного на BE). Теория подчиненных операторов играет важную роль в различных проблемах, связанных с изучением краевых задач, и в общих вопросах функционального анализа.

Простейшим примером позитивного на гильбертовом пространстве E оператора является самосопряженный положительно определенный оператор K; для него $\mu(K;E)=\|K\|$. Однако самосопряженность оператора K не необходима для его позитивности. Опишем два более общих класса.

Каждый действующий в гильбертовом пространстве E линейный оператор K единственным образом представим в виде $K=K_0+K_1$, где K_0 самосопряжен, а K_1

кососимметричен (т. е. $(K_1x, x) \equiv 0$). Операторы K_0 и K_1 определяются равенствами $K_0 = \frac{1}{2}(K + K^*)$, $K_1 = \frac{1}{2}(K - K^*)$.

Лемма 42.1. *Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ положительно определен оператор $K_0 - \varepsilon K_1^* K_1$, где K_0 и K_1 — самосопряженная и кососимметричная части действующего в гильбертовом пространстве E линейного оператора K. Тогда K позитивен на E.*

Доказательство.

$$(Kx, Kx) = \|K_0x + K_1x\|^2 \leqslant 2(\|K_0x\|^2 + \|K_1x\|^2) =$$
$$= 2(K_0x, K_0x) + 2(K_1^*K_1x, x) \leqslant 2\left(\|K_0\| + \frac{1}{\varepsilon}\right)(K_0x, x) =$$
$$= 2\left(\|K_0\| + \frac{1}{\varepsilon}\right)(Kx, x). \blacksquare$$

Если K — линейный интегральный оператор, действующий в $E = L_2$, то операторы K_0 и K_1 также интегральные; пусть $k_0(t, s)$ и $k_1(t, s)$ — их ядра. Условие леммы 42.1 означает, что ядро

$$k_\varepsilon(t, s) = k_0(t, s) - \varepsilon \int_G k_1(\sigma, t)\, k_1(\sigma, s)\, d\sigma \tag{42.3}$$

положительно определено.

В ряде приложений оператор K возникает как обратный $K = M^{-1}$ к некоторому неограниченному оператору M. Роль M обычно играет дифференциальный оператор; непрерывность M^{-1} в конкретных пространствах вытекает либо из теорем вложения С. Л. Соболева (и их обобщений), либо из теорем о дробных степенях операторов и т. д. (см., например, [27], [51]). Пусть M имеет вид $M = M_0 + M_1$, где M_0 — самосопряженный, а M_1 — кососимметричный неограниченные операторы; пусть операторы M и M_0 имеют одинаковую область определения $\mathfrak{D}$ в гильбертовом пространстве E.

Лемма 42.2. *Пусть оператор M_0 положительно определен: $(M_0x, x) \geqslant a(x, x)$ при $x \in \mathfrak{D}$, где $a > 0$. Тогда оператор $K = M^{-1}$ позитивен на гильбертовом пространстве E.*

Доказательство.

$$(Kx, Kx) = (M_0^{-1}(M_0Kx), M_0^{-1}(M_0Kx)) \leqslant \|M_0^{-1}\|(M_0Kx, Kx) =$$
$$= \|M_0^{-1}\|(MKx, Kx) = \|M_0^{-1}\|(Kx, x). \blacksquare$$

Леммы 42.1 и 42.2 позволяют совсем просто устанавливать позитивность оператора на гильбертовом пространстве E. Переход к другим пространствам E_1 облегчает очевидная

Лемма 42.3. *Пусть позитивный на пространстве E оператор K является одновременно непрерывным линейным оператором, действующим из E_1 в $E_1^\square$. Тогда оператор K позитивен на замыкании в E_1 линейного множества $E_1 \cap E$ (позитивен на E_1, если $E_1 \cap E$ плотно в E_1).*

В условиях этой леммы $\mu(K; \overline{E_1 \cap E}) \leqslant \mu(K; E)$.

Пусть задана пара банаховых пространств E и F. Действующий из E в F линейный оператор K назовем *$\{E, F\}$-оператором*, если он действует также из E в $E^\square$ и

$$\|Kx\|_F \leqslant \nu \sqrt{(x, Kx)} \quad (x \in E). \tag{42.4}$$

Наименьшее ν, при котором верно (42.4), обозначим через $\nu(K; E \to F)$.

Лемма 42.4. *Пусть K — линейный непрерывный самосопряженный и положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве E. Пусть $K^{1/2}$ непрерывен как оператор из E в банахово пространство F. Тогда K является $\{E, F\}$-оператором.*

Доказательство. $\|Kx\|_F \leqslant \|K^{1/2}\|_{E\to F} \|K^{1/2}x\|_E = \|K^{1/2}\|_{E\to F} \sqrt{(Kx, x)}$ при $x \in E$. $\blacksquare$

Условиям, при которых оператор $K^{1/2}$ действует из одного пространства E в другое F, посвящена обширная литература (библиографию см. в [27]). Например, если

$$Kx(t) = \int_G k(t, s)\, x(s)\, ds \tag{42.5}$$

и положительно определенное симметрическое ядро $k(t, s)$ непрерывно (G — компакт в конечномерном пространстве), то $K^{1/2}$ действует из L_2 в C; если известно, что оператор (42.5) действует из L_p в $L_{p'}$ $(1/p + 1/p' = 1)$, то $K^{1/2}$ действует из L_2 в $L_{p'}$ и т. д.

Лемма 42.5. *Пусть самосопряженная часть K_0 действующего в гильбертовом пространстве E оператора K является $\{E, F\}$-оператором. Пусть кососимметричная часть K_1 удовлетворяет условию*

$$\varepsilon \| K_1 x \|_F \leqslant \| K_0 x \|_F \quad (x \in E), \tag{42.6}$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда K является $\{E, F\}$-оператором.

Доказательство. При каждом $x \in E$

$$\| Kx \|_F \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \| K_0 x \|_F \leqslant \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \nu (K_0;\ E \to F) \sqrt{(K_0 x, x)} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \nu (K_0;\ E \to F) \sqrt{(Kx, x)}. \ \blacksquare$$

Лемма 42.6. *Пусть выполнены условия леммы 42.2. Пусть M_0^{-1} является $\{E, F\}$-оператором. Тогда и $K = M^{-1}$ является $\{E, F\}$-оператором.*

Доказательство. Так как $(M_0 Kx, Kx) = (x, Kx)$ при всех $x \in E$, то верна оценка $\| Kx \|_F = \| M_0^{-1} M_0 Kx \|_F \leqslant \leqslant \nu (M_0^{-1};\ E \to F) \sqrt{(x, Kx)}$. $\blacksquare$

Леммы 42.4—42.6 пригодны в случае, когда пространство E гильбертово. При переходе к банаховым пространствам E_1 удобны следующие очевидные утверждения.

Лемма 42.7. *Каждый $\{E, F\}$-оператор K является одновременно $\{E_1, F\}$-оператором, если E_1 непрерывно вложено в E.*

Лемма 42.8. *Пусть $\{E, F\}$-оператор K одновременно непрерывен и как оператор из E_1 в F, и как оператор из E_1 в $E^{\square}$. Пусть пересечение $E_1 \cap E$ плотно в E_1. Тогда K является $\{E_1, F\}$-оператором.*

Общие условия, при которых $K = M^{-1}$ является $\{E, F\}$-оператором, для дифференциальных операторов M и широких классов пар пространств E, F вытекают из теорем вложения.

42.3. Нелинейные интегральные уравнения с позитивными ядрами. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x = K\mathfrak{f}x, \tag{42.7}$$

где K — оператор (42.5), а $\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)]$. Функцию $f(t, x)$ будем считать непрерывной по совокупности переменных.

Пару пространств E и F (функций, заданных на G) назовем *согласованной* для операторов K и $\mathfrak{f}$, если K действует из E в F и вполне непрерывен, а нелинейный оператор $\mathfrak{f}$ действует из F в E, непрерывен и ограничен. Если E и F согласованы, то оператор $A = \mathfrak{f}K$ действует в E и вполне непрерывен в E. Через (x, y) будем, как обычно, обозначать интеграл от произведения функций.

Теорема 42.3. *Пусть пространства E и F согласованы относительно K и $\mathfrak{f}$, причем K позитивен на E и является $\{E, F\}$-оператором. Тогда для существования у уравнения (42.7) хотя бы одного решения в F достаточно односторонней оценки*

$$xf(t, x) \leqslant qx^2 + b, \tag{42.8}$$

где

$$q\mu (K;\ E) < 1. \tag{42.9}$$

Доказательство. Пусть собственный вектор $x_0 \in E$ оператора $\mathfrak{f}K$ отвечает собственному значению $\lambda_0 \geqslant 1$. Из $\mathfrak{f}Kx_0 = \lambda_0 x_0$ вытекает, в силу (42.9), оценка

$$\lambda_0 (x_0, Kx_0) = (\mathfrak{f}Kx_0, Kx_0) \leqslant q (Kx_0, Kx_0) + b \operatorname{mes} G. \tag{42.10}$$

Следовательно,

$$\lambda_0 (x_0, Kx_0) \leqslant q\mu (K;\ E) (x_0, Kx_0) + b \operatorname{mes} G,$$

откуда

$$(x_0, Kx_0) \leqslant b_1 = \frac{b \operatorname{mes} G}{1 - q\mu (K;\ E)}. \tag{42.11}$$

Поэтому

$$\| Kx_0 \|_F \leqslant b_2 = \nu (K;\ E \to F) \sqrt{b_1}$$

и, далее,

$$\| x_0 \|_E = \frac{1}{\lambda_0} \| \mathfrak{f}Kx_0 \|_E \leqslant b_3 = \sup_{\| y \|_F \leqslant b_2} \| \mathfrak{f}y \|_E.$$

Таким образом, оператор $\mathfrak{f}K$ удовлетворяет условиям теоремы 42.1 на каждом шаре $\| x \| \leqslant r$ $(r \geqslant b_3)$ пространства E. Из теоремы 42.1 вытекает существование решения $x^* \in E$ уравнения $x = \mathfrak{f}Kx$. Функция $y^* = Kx^*$ будет решением уравнения (42.7). $\blacksquare$

Проведенные рассуждения без изменений переносятся на уравнения с векторнозначными функциями $x(t)$. Нелинейная функция $f(t, x)$ может быть непрерывной лишь по переменной x (и измеримой по t).

Без труда эти рассуждения обобщаются и на уравнения вида $x = K\mathfrak{f}(x, D_1x, \ldots, D_mx)$, где D_i — неограниченные операторы; в этих обобщениях удобно пользоваться свойствами дробных степеней оператора K. К уравнениям последнего вида сводятся различные граничные задачи для квазилинейных дифференциальных уравнений.

Теорема 42.3 допускает существенные усиления, если линейный оператор K обладает свойствами, аналогичными свойствам операторов, обратных к эллиптическим дифференциальным операторам.

Теорема 42.4. *Пусть оператор K вполне непрерывен и позитивен на L_2 и пусть из ограниченности последовательности чисел (Kx_n, x_n) вытекает компактность последовательности Kx_n в смысле сходимости по мере. Пусть оператор K преобразует каждую сходящуюся по мере последовательность функций с ограниченными нормами в пространстве L_p в последовательность, также сходящуюся по мере. Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет односторонней оценке* (42.8), *а порожденный ею оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_{p'}$ в L_p.*

Тогда уравнение (42.7) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Положим

$$f_N(t, x) = \begin{cases} f(t, x), & \text{если } |f(t, x)| \leqslant N, \\ N \operatorname{sign} f(t, x), & \text{если } |f(t, x)| \geqslant N, \end{cases} \tag{42.12}$$

и обозначим через $\mathfrak{f}_N$ порожденный функцией (42.12) оператор суперпозиции. Оператор $\mathfrak{f}_N K$ будет вполне непрерывен на пространстве L_2, а множество $\mathfrak{f}_N K L_2$ будет ограничено. Поэтому из принципа Шаудера вытекает существование (при каждом N) неподвижной точки $x_N \in L_2$ у оператора $\mathfrak{f}_N K$. Очевидно, для функций (42.12) верна односторонняя оценка (42.8): $x f_N(t, x) \leqslant qx^2 + b$. Поэтому для всех функций x_N справедлива оценка (42.11): $(x_N, Kx_N) \leqslant b_1$. Это позволяет выбрать последовательность $N(j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ так, что последовательность $Kx_{N(j)}$ сходится по мере к некоторой функции $z(t)$. Тогда последовательность $x_{N(j)} = \mathfrak{f} Kx_{N(j)}$ будет сходиться по мере к функции $\mathfrak{f}Kz(t)$.

Для завершения доказательства достаточно установить, что нормы в L_p функций x_N равномерно ограничены, — в этом случае последовательность $Kx_{N(j)}$ сходилась бы по мере и к функции $z(t)$, и к функции $K\mathfrak{f}z(t)$, т. е. $z(t)$ была бы решением уравнения (42.7).

Положим $G(N) = \{t\colon Kx_N(t) \cdot \mathfrak{f}_N Kx_N(t) \geqslant 0\}$. Тогда из (42.8) вытекает оценка

$$\int_{G(N)} Kx_N(t) \cdot \mathfrak{f}_N Kx_N(t)\, dt \leqslant \int_{G(N)} q\,[Kx_N(t)]^2 dt + b \operatorname{mes} G(N) \leqslant$$
$$\leqslant q\,(Kx_N, Kx_N) + b \operatorname{mes} G \leqslant q\mu(K;\, L_2)\, b_1 + b \operatorname{mes} G = b_2.$$

Поэтому $(|Kx_N|, |\mathfrak{f}_N Kx_N|) \leqslant b_1 + b_2$ при всех $N > 0$.

Так как оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_{p'}$ в L_p, то

$$\sup_{\|u(t)\|_{p'} \leqslant 1} \|\mathfrak{f}u(t)\|_p = M < \infty.$$

Поэтому при всех $N > 0$ верны оценки

$$\|\mathfrak{f}_N u(t)\| \leqslant M \qquad (u(t) \in L_{p'},\ \|u(t)\|_{p'} \leqslant 1). \tag{42.13}$$

Пусть $u(t) \in L_{p'}$ и $\|u(t)\|_{p'} = 1$. Оценим скалярное произведение $(u, \mathfrak{f}_N Kx_N)$. Положим $G(u) = \{t\colon |u(t)| \leqslant |Kx_N(t)|\}$ и обозначим через $y_N(t)$ функцию, совпадающую с $Kx_N(t)$ на $G(u)$ и равную нулю вне $G(u)$. Тогда

$$|(u, \mathfrak{f}_N Kx_N)| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{G(u)} |Kx_N(t)| \cdot |\mathfrak{f}_N Kx_N(t)|\, dt + \int_{G \setminus G(u)} |u(t)| \cdot |\mathfrak{f}_N y_N(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant (|Kx_N(t)|, |\mathfrak{f}_N Kx_N(t)|) + (|u(t)|, |\mathfrak{f}_N y_N(t)|) \leqslant$$
$$\leqslant b_1 + b_2 + \|u(t)\|_{p'} \cdot \|\mathfrak{f}_N y_N\|_p \leqslant b_1 + b_2 + M.$$

Следовательно,

$$\|x_N\|_p = \|\mathfrak{f}_N Kx_N\|_p = \sup_{\|u\|_{p'} \leqslant 1} (u, \mathfrak{f}_N Kx_N) \leqslant b_1 + b_2 + M. \blacksquare$$

Мы не останавливаемся на приложениях доказанной теоремы к дифференциальным уравнениям — они очевидны.

Заметим, что теорема 42.4 сохраняет силу, если сходимость по мере заменить какой-либо другой (например, слабой по отношению к некоторому множеству линейных функционалов) — доказательство не меняется.

42.4. Уравнения с симметрическими ядрами. При исследовании уравнений (42.7) с самосопряженным оператором K обычно применяются другие схемы исследования.

а) Пусть K вполне непрерывен одновременно и как оператор в L_2, и как оператор из E в E^*, где $E^* \subset L_2 \subset E$. Тогда $K = K^{1/2}(K^{1/2})^*$ (см., например, [27]), где $K^{1/2}$ действует из L_2 в E^* и вполне непрерывен, а $(K^{1/2})^*$ действует из E в L_2 и также вполне непрерывен. Если $\mathfrak{f}$ действует из E^* в E и непрерывен, то оператор $A = (K^{1/2})^*\mathfrak{f}K^{1/2}$ действует в L_2 и вполне непрерывен.

Допустим, что выполнено условие (42.8). Тогда оператор A будет удовлетворять на сферах $\| x \| = \rho$ больших радиусов (в пространстве L_2) условиям теоремы 42.2 и будет иметь поэтому неподвижную точку $x^* \in L_2$. Функция $y^* = K^{1/2}x^*$ будет решением уравнения (42.7).

б) Пусть вполне непрерывный в L_2 оператор K имеет конечное число отрицательных собственных значений:

$$Kx = \mu_1 (x, g_1) g_1 + \ldots$$
$$\ldots + \mu_r (x, g_r) g_r + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i, \qquad (42.14)$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_r$ отрицательны, все λ_i положительны, функции $g_1, \ldots, g_r, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ образуют ортонормированную систему. Положим

$$Px = (x, g_1) g_1 + \ldots + (x, g_r) g_r \quad (x \in L_2) \qquad (42.15)$$

и $H = K - 2KP$. Оператор H уже положительно определен.

Допустим, что $H = H^{1/2}(H^{1/2})^*$, где $H^{1/2}$ действует из L_2 в E^* и вполне непрерывен, $(H^{1/2})^*$ действует из E в L_2 и также вполне непрерывен, а $\mathfrak{f}$ действует из E^* в E. Тогда оператор $A = 2P + (H^{1/2})^*\mathfrak{f}H^{1/2}$ вполне непрерывен в L_2. Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию

$$xf(t, x) \leqslant -qx^2 + b, \qquad (42.16)$$

где q больше всех чисел $|\mu_1|^{-1}, \ldots, |\mu_r|^{-1}$. Тогда, как легко проверить, оператор A удовлетворяет на сферах $\| x \| = \rho$ больших радиусов ρ (в пространстве L_2) условиям теоремы 42.2. Поэтому оператор A имеет в L_2 неподвижную точку x^*. Функция $y^* = H^{1/2}x^*$ будет неподвижной точкой оператора $2P + H\mathfrak{f}$ и, следовательно, будет решением уравнения (42.7).

Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 42.2, переносятся на уравнения (42.7) с операторами K вида (42.14).

42.5. Вариационная схема.

а) Пусть снова K самосопряжен, положительно определен и вполне непрерывен в L_2. Пусть оператор $\mathfrak{f}$ действует из E^* в E, где $E^* \subset L_2 \subset E$. Тогда оператор $(K^{1/2})^*\mathfrak{f}K^{1/2}$ является градиентом так называемого *функционала Голомба*

$$V(x) = \int_G F[t, K^{1/2}x(t)]\,dt, \qquad (42.17)$$

где

$$F(t, x) = \int_0^x \mathfrak{f}(t, u)\,du, \qquad (42.18)$$

который определен и слабо непрерывен на L_2. Допустим, что функция (42.18) допускает оценку

$$F(t, x) \leqslant \frac{1}{2} qx^2 + b, \qquad (42.19)$$

где $q \| K \| < 1$. Тогда, как нетрудно проверить,

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \left[\frac{1}{2}(x, x) - V(x)\right] = \infty. \qquad (42.20)$$

Поэтому функционал $\frac{1}{2}(x, x) - V(x)$ принимает в некоторой точке $x^* \in L_2$ наименьшее значение. В этой точке градиент функционала $\frac{1}{2}(x, x) - V(x)$ равен нулю, т. е. $x^* = (K^{1/2})^*\mathfrak{f}K^{1/2}x^*$. Функция $y^* = K^{1/2}x^*$ будет решением уравнения (42.7).

Таким образом, оценка (42.19) является достаточным условием разрешимости уравнения (42.7).

Следует подчеркнуть, что оценка (42.19) является менее ограничительным условием, чем оценка (42.8). Однако в условиях, когда верна оценка (42.8), все рассуждения без каких бы то ни было изменений сохраняли силу при переходе от скалярных к векторнозначным функциям. Для применимости же вариационных соображений в векторнозначном случае приходится предполагать, что $f(t, x)$ является градиентом (по переменной x) некоторой скалярной функции $F(t, x)$!

б) Вариационная схема применима и в случае, когда оператор имеет собственные значения разных знаков. В этом случае достаточно обеспечить существование в L_2 точки минимума у функционала

$$W(x)=\frac{1}{2}(x, x)-(Px, x)-\int_{\Omega} F\left[t, H^{1/2}x(t)\right] dt \qquad (42.21)$$

$$(x \in L_2),$$

где $H=K+2KP$, P — оператор (42.15), $F(t, x)$ — функция (42.18). Точка минимума, очевидно, существует, если $W(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, а для этого достаточно, чтобы функция (42.18) удовлетворяла условию

$$F(t, x) \leqslant -\frac{1}{2} q x^2+b, \qquad (42.22)$$

где q больше всех чисел $|\mu_1|^{-1}, \ldots, |\mu_r|^{-1}$. Таким образом, оценка (42.22) является условием разрешимости уравнения (42.7).

42.6. Ослабление односторонних ограничений. Оценку (42.8) можно записать в виде

$$x f(t, x) \leqslant \frac{1}{\mu(K; E)} x^2+\varphi(|x|). \qquad (42.23)$$

Тогда условие (42.9) означает, что $\varphi(u)$ $(u \geqslant 0)$ при больших значениях u мажорируется некоторой квадратичной функцией $-\varepsilon u^2$ $(\varepsilon>0)$. В случае самосопряженного оператора K последнее предположение можно ослабить. Ограничимся формулировкой одной теоремы, хотя аналогичным способом могут быть усилены все утверждения пп. 42.3—42.5.

Теорема 42.5. *Пусть самосопряженный и положительно определенный оператор K допускает представление $K=K^{1/2}(K^{1/2})^*$, где $K^{1/2}$ действует из L_2 в E^* и вполне непрерывен, $(K^{1/2})^*$ действует из E в L_2 и вполне непрерывен, $E^* \subset L_2 \subset E$. Пусть каждая отвечающая наибольшему собственному значению $\|K\|$ оператора K собственная функция обращается в нуль лишь на множестве нулевой меры. Пусть оператор f действует из E^* в E и*

непрерывен. Тогда для разрешимости уравнения (42.7) *достаточно, чтобы $f(t, x)$ удовлетворяла условию*

$$x f(t, x) \leqslant \frac{1}{\|K\|} x^2+\varphi(|x|), \qquad (42.24)$$

где $\varphi(u)$ непрерывна и $\varphi(u) \leqslant -a$ $(a>0)$ при $u \geqslant u_0$.

Уравнению (42.7) с положительно определенным самосопряженным K и использованию односторонних оценок в условиях их разрешимости посвящена обширная литература, начиная с классических работ А. Гаммерштейна (Hammerstein A., Acta Math. **54** (1929)) и М. Голомба (Golomb M., Math. Z. **39** (1934)). Обширный класс дальнейших исследований был направлен на ослабление ограничений на ядра $k(t, s)$ и на отказ от их положительной определенности, на переход к более общим классам нелинейностей. Решение возникших при этом задач потребовало изобретения новых принципов неподвижной точки, развития теории дробных степеней линейных операторов, использования новых классов функциональных пространств и т. д. (библиографию см. в [7], [22], [29]).

Новый метод исследования уравнения (42.7) предложил Х. Шеффер [61], в условиях которого оператор Kf может оказаться определенным лишь на множествах, плотных в рассматриваемых пространствах; этот метод развит А. П. Махмудовым, А. И. Поволоцким, В. Петри (Petry W.), П. П. Забрейко и другими авторами. Переход к новым типам нелинейностей и несамосопряженным K осуществлен М. А. Красносельским (ДАН СССР **209**, № 2 (1974); из этой работы взяты теоремы 42.3—42.5).

42.7. Операторы, монотонные по Минти — Браудеру. Покажем вначале, как применить принцип сжатых отображений к изучению уравнений с операторами, удовлетворяющими специальным односторонним оценкам.

Пусть оператор F действует в гильбертовом пространстве E, удовлетворяет условию Липшица

$$\|Fx-Fy\| \leqslant N(r)\|x-y\| \quad (\|x\|, \|y\| \leqslant r) \qquad (42.25)$$

и односторонней оценке

$$(Fx-Fy, x-y) \geqslant m(r)\|x-y\|^2 \quad (\|x\|, \|y\| \leqslant r), \qquad (42.26)$$

причем $m(r)>0$ и

$$\varlimsup_{r \to \infty} r m(r)=\infty. \qquad (42.27)$$

В этих условиях уравнение

$$Fx=h \qquad (42.28)$$

имеет в E единственное решение при каждом $h \in E$. Для доказательства этого утверждения достаточно перейти к эквивалентному (42.28) уравнению $x = B(a, h)x$ с оператором

$$B(a, h)x = x - aFx + ah \qquad (42.29)$$

и заметить, что при достаточно больших r и достаточно малых положительных $a = a(r)$ оператор (42.29) удовлетворяет на шаре $\|x\| \leqslant r$ условиям принципа сжатых отображений.

Действительно, при $\|x\|, \|y\| \leqslant r$

$$\|B(a, h)x - B(a, h)y\|^2 \leqslant [1 - 2am(r) + a^2N^2(r)]\,\|x - y\|^2.$$

Поэтому достаточно вначале выбрать r так, чтобы выполнялось неравенство $2rm(r) > \|F(0) - h\|$, а затем положить

$$aN^2(r)\,r = \min\{rm(r),\ 2rm(r) - \|F(0) - h\|\}. \ ∎$$

Если оператор F дифференцируем по Фреше или по Гато, то условие (42.25) заведомо выполнено, если производная $F'(x)$ ограничена на каждом шаре, а условие (42.26) — если верна оценка $(F'(x)h,\ h) \geqslant m(r)\|h\|^2$ $(\|x\| \leqslant r)$.

Сформулированное выше утверждение переносится без существенных изменений в доказательстве на уравнения в банаховых пространствах с равномерно дифференцируемой нормой. При этом нужно лишь заменить условие (42.26) оценкой

$$(\Gamma(x - y),\ Fx - Fy) \geqslant m(r)\,\|x - y\| \qquad (\|x\|, \|y\| \leqslant r), \qquad (42.30)$$

где Γ — оператор градиента нормы.

В этом пункте мы установим разрешимость уравнения $Fx = 0$ при односторонних оценках, существенно менее ограничительных, чем (42.26).

Действующий из банахова пространства E в сопряженное пространство E^* оператор F называется *монотонным по Минти — Браудеру*, если

$$(Fx - Fy,\ x - y) \geqslant 0 \qquad (x, y \in E). \qquad (42.31)$$

Здесь, как обычно, через (z, x) обозначается значение линейного функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Теорема 42.6. *Пусть пространство E рефлексивно. Пусть монотонный по Минти — Браудеру оператор F преобразует каждую сильно сходящуюся в E последовательность элементов в последовательность функционалов, слабо сходящуюся в E^*. Пусть, наконец, при некотором $r > 0$*

$$(Fx, x) \geqslant 0 \qquad (\|x\| = r). \qquad (42.32)$$

Тогда уравнение $Fx = 0$ имеет в шаре $\|x\| \leqslant r$ по крайней мере одно решение.

Доказательство. Положим $U(x) = \{y\colon \|y\| \leqslant r,\ (Fx,\ x - y) \geqslant 0\}$ $(x \in E)$. Каждое из множеств $U(x)$, очевидно, слабо замкнуто. Мы ниже покажем, что все они образуют центрированную систему. Отсюда будет вытекать существование у них общей точки y^*. Из определения множеств $U(x)$ следует справедливость при всех $t > 0$ и всех $h \in E$ неравенств $(F(y^* + th),\ h) \geqslant 0$. Устремляя в этих неравенствах t к нулю, получаем оценки $(Fy^*, h) \geqslant 0$. Но h произвольно и поэтому $Fy^* = 0$.

Нам осталось установить существование общей точки у каждой конечной системы множеств $U(x_1), \ldots, U(x_m)$. Обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ базис в линейной оболочке E_0 точек $x_1, \ldots, x_m$ и определим действующий в E_0 вспомогательный оператор

$$Gx = (Fx, z_1)\,z_1 + \ldots + (Fx, z_n)\,z_n \qquad (x \in E_0).$$

Этот оператор, очевидно, непрерывен. Для завершения доказательства достаточно установить разрешимость в шаре $\|x\| \leqslant r$ подпространства E_0 уравнения $Gx = 0$ — решение x_0 этого уравнения принадлежит множествам $U(x_1), \ldots, U(x_m)$, так как $(Fx_i,\ x_i - x_0) = (Fx_i - Fx_0,\ x_i - x_0) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Если уравнение $Gx = 0$ не имеет решений в шаре $\|x\| \leqslant r$, то вращение конечномерного поля G на сфере $\|x\| = r$ равно нулю и поэтому в некоторой точке x этой сферы векторы Gx и x направлены противоположно, т. е.

$$(Fx, z_1)\,z_1 + \ldots + (Fx, z_n)\,z_n = -bx,$$

где $b > 0$. Применяя к этому равенству функционал Fx, получим

$$(Fx, z_1)^2 + \ldots + (Fx, z_n)^2 = -b\,(Fx, x) \leqslant 0,$$

а это невозможно. ∎

Если в оценке (42.31) при $x \neq y$ имеет место строгое неравенство, то в условиях теоремы 42.6 решение уравнения $Fx = 0$ единственно. В условиях теоремы 42.6 нельзя гарантировать разрешимость уравнения $Fx = h$

при каждом $h \in E^*$; как легко видеть, для такой разрешимости достаточно вместо (42.32) потребовать выполнение условия

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^{-1}(Fx, x) = \infty. \qquad (42.33)$$

И условие (42.31) (в усиленной форме, гарантирующей единственность решения), и условие (42.33) заведомо выполнены, если

$$(Fx - Fy, x - y) \geqslant c(\|x - y\|)\|x - y\|, \qquad (42.34)$$

причем функция $c(u)$ непрерывна, положительна при $u > 0$ и $c(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Теорема 42.6 имеет большую историю. Односторонние оценки на приращения оператора давно и систематически применялись в теоремах единственности решений задачи Коши для различных эволюционных задач. Роль аналогичных оценок в других граничных задачах для дифференциальных уравнений выяснил М. И. Вишик (Матем. сб. 59 (1962), 289—325). М. М. Вайнберг и его ученики (см. [7], [8], [18]) указали роль односторонних оценок приращений оператора в теоремах существования для уравнений с потенциальными операторами. Для уравнений с дифференцируемыми операторами (без предположения об их потенциальности) теоремы существования с односторонними ограничениями на производные предложил М. А. Красносельский (Тр. семинара по функц. анализу 6, Воронеж, 1958; результаты этой работы представляют интерес лишь для уравнений в гильбертовом пространстве). Фундаментальный шаг был сделан Г. Минти, теорема которого изложена выше. В первых работах Г. Минти изучались уравнения в гильбертовом пространстве; переход к другим пространствам примерно одновременно был осуществлен Г. Минти и Ф. Браудером. Замечательная конструкция Г. Минти послужила основой и для изложенного в книге доказательства. Теорема Минти — Браудера нашла разнообразные приложения и послужила отправным пунктом для многочисленных дальнейших работ (частичную библиографию читатель найдет в [8], [18], [45], [50], [63]).

К теории монотонных по Минти — Браудеру операторов примыкает теория так называемых аккретивных операторов (см. [8]), на которой мы не останавливаемся. В ряде работ изучаются уравнения с операторами, «главная часть» которых монотонна по Минти — Браудеру: важные результаты в этом направлении получены Ф. Браудером, Р. Д. Нуссбаумом, И. В. Скрыпником, В. С. Климовым и др.

Теория монотонных по Минти — Браудеру операторов широко применяется в настоящее время в общей теории краевых задач, математической физике, нелинейной механике. Эти вопросы выходят за рамки настоящей книги.

Глава 6

УРАВНЕНИЯ С МНОГИМИ РЕШЕНИЯМИ

Единственность решения — явление нетипичное для операторных уравнений с существенными нелинейностями. Часто возникает ситуация, когда одно решение известно, а интерес представляют другие решения (например, в теории периодических решений автономных дифференциальных уравнений известно состояние равновесия, а важно знать, есть ли автоколебательные режимы; в теории стержней и пластин интересны формы потери устойчивости; при изучении движущейся жидкости ищутся условия, при которых на ее поверхности возникают волны и т. д.).

В главе излагаются нелокальные теоремы о существовании ненулевых решений, теоремы об оценке числа ненулевых решений. Другой цикл теорем об уравнениях с многими решениями будет доказан в гл. 8.

§ 43. Существование ненулевого решения

43.1. Общие теоремы. Пусть действующий в банаховом пространстве E нелинейный оператор A относится к такому классу операторов, для которого определено вращение поля $I - A$ с обычными свойствами. Наиболее просто доказывается существование у A нескольких неподвижных точек, если удается выделить в E несколько непересекающихся областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, на границе каждой из которых поле $I - A$ невырождено и имеет ненулевое вращение, — тогда в каждой из областей Ω_i оператор A имеет неподвижную точку и эти неподвижные точки различны. Мы ограничимся в этом параграфе рассмотрением лишь вполне непрерывных операторов A, хотя излагаемые соображения относятся, например, к операторам из всех классов, описанных в гл. 4. Сформулируем некоторые утверждения, вытекающие из теоремы об алгебраическом числе особых точек.

Теорема 43.1. *Пусть оператор A вполне непрерывен на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — изолированные неподвижные точки оператора A, лежащие в Ω, индексы которых нам известны.*

Пусть выполнено неравенство

$$\gamma(I-A, \Omega) \neq \operatorname{ind}(x_1, I-A) + \ldots + \operatorname{ind}(x_m, I-A). \quad (43.1)$$

Тогда A имеет в области Ω по крайней мере $m+1$ неподвижных точек.

Особо важен следующий частный случай этой теоремы.

Теорема 43.2. *Пусть индекс $\operatorname{ind}(0, I-A)$ нулевой неподвижной точки вполне непрерывного оператора A отличен от вращения $\gamma(I-A, \Omega)$ поля $I-A$ на границе ограниченной области $\Omega \subset E$, содержащей нулевую особую точку. Тогда A имеет в области Ω по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Из теоремы 43.2, далее, вытекает

Теорема 43.3. *Пусть нуль является неподвижной точкой вполне непрерывного оператора A, определенного на всем банаховом пространстве E. Пусть определены числа $\operatorname{ind}(0, I-A)$ и $\operatorname{ind}(\infty, I-A)$, причем*

$$\operatorname{ind}(0, I-A) \neq \operatorname{ind}(\infty, I-A). \quad (43.2)$$

Тогда A имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.

Изложенные теоремы просты в приложениях. Объединение каждой теоремы о вращении поля $I-A$ на границе некоторой области Ω (как для абстрактных операторов A, так и для операторов конкретных задач) с информацией об индексе известного нам решения можно трактовать как принцип существования второго решения.

Отметим еще, что при применении теорем 43.1—43.3 удобны установленные в гл. 3 принципы родственности и инвариантности вращения — они позволяют при вычислении индексов особых точек и вращения $\gamma(I-A, \Omega)$ выбирать различные удобные пространства и переходить к разным эквивалентным уравнениям.

Рассмотрим в качестве простого примера нелинейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_G K[t, s, x(s)]\, ds, \quad (43.3)$$

который действует в пространстве C и вполне непрерывен. Допустим, что ядро $K(t, s, x)$ ограничено. Тогда $\operatorname{ind}(\infty, I-A) = 1$.

Предположим, далее, что A имеет нулевую неподвижную точку (т. е. $K(t, s, 0) \equiv 0$). Пусть ядро $K(t, s, x)$ имеет непрерывную производную $K'_x(t, s, x)$. Тогда определен и вполне непрерывен в C линейный оператор

$$A'(0)\, x(t) = \int_G K'_x(t, s, 0)\, x(s)\, ds.$$

В силу теоремы 43.3 *для существования у уравнения $x = Ax$ ненулевого решения достаточно, чтобы 1 не была собственным значением оператора $A'(0)$ и чтобы сумма кратностей его собственных значений, бо́льших чем 1, была нечетна.*

В качестве второго примера рассмотрим ω-периодическую систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f[t, x(t), x(t-h)] \quad (43.4)$$

с запаздывающим аргументом. Пусть у системы (43.4) есть правильная направляющая функция (см. п. 41.5) индекса γ_0. Тогда вращение $\operatorname{ind}(\infty, I-A)$ поля $I-A$ с оператором (41.8) на сферах $\|x(t)\| = r$ больших радиусов r совпадает с γ_0. Допустим, что у системы (43.4) есть нулевое решение ($f(t, 0, 0) \equiv 0$). Из теоремы 43.2 вытекает, что *система* (43.4) *имеет по крайней мере одно ненулевое ω-периодическое решение, если индекс нулевой неподвижной точки оператора A отличен от γ_0.* Например, если $|\gamma_0| \neq 1$, то для существования ненулевого ω-периодического решения достаточно, чтобы линейная система

$$\frac{dx}{dt} = f'_x(t, 0, 0)\, x(t) + f'_y(t, 0, 0)\, x(t-h)$$

не имела ненулевых ω-периодических решений.

43.2. Двухточечная задача. Рассмотрим задачу

$$x'' + f(t, x, x') = 0 \qquad (x(0) = x(\pi) = 0). \quad (43.5)$$

Этой задаче посвящена обширная литература, начиная с классических исследований С. Н. Бернштейна. Достаточно полную библиографию по двухточечной и другим краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений читатель найдет, например, в [55], книге Дж. Сансоне «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (М., ИЛ, т. 1, 1953; т. 2, 1954) и монографии И. Т. Кигурадзе «Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений» (Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1975).

Будем считать, что $f(t, x, y)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi;\ -\infty < x, y < \infty)$ непрерывна вместе с производными $f'_x(t, x, y)$, $f'_y(t, x, y)$ по совокупности переменных и удовлетворяет односторонним оценкам

$$f(t, x, y) \leqslant \sigma_1 |x| + \sigma_2 |y| + \psi(t) \quad \text{при} \quad x \geqslant 0, \tag{43.6}$$

$$f(t, x, y) \geqslant -\sigma_1 |x| - \sigma_2 |y| - \psi(t) \quad \text{при} \quad x \leqslant 0, \tag{43.7}$$

где σ_1, σ_2 — неотрицательные числа, причем

$$\sigma_1 + \sigma_2 < 1, \tag{43.8}$$

а функция $\psi(t)$ неотрицательна и суммируема:

$$a_0 = \int_0^\pi \psi(\tau)\, d\tau < \infty. \tag{43.9}$$

Пусть, кроме того, задача (43.5) имеет нулевое решение (т. е. $f(t, 0, 0) \equiv 0$). Нас будут интересовать условия, при которых у задачи (43.5) есть по крайней мере одно ненулевое решение.

Через $g_n(t)$, $e_n(t)$ обозначим следующие полные в $L_2 = L_2(0, \pi)$ ортогональные системы

$$g_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad g_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt, \quad e_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Через $G(t, s)$ обозначим функцию Грина оператора $-x''$ при краевых условиях $x(0) = x(\pi) = 0$. Как известно,

$$G(t, s) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} (\pi - s)\, t & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s, \\ (\pi - t)\, s & \text{при } s \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases} \tag{43.10}$$

причем $G(t, s)$ представима абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$G(t, s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{e_n(t)\, e_n(s)}{n^2}. \tag{43.11}$$

Положим

$$Kx(t) = \int_0^\pi G(t, s)\, x(s)\, ds = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} (x, e_n)\, e_n(t), \tag{43.12}$$

$$Hx(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} (x, e_n)\, e_n(t), \tag{43.13}$$

$$Vx(t) = \sum_{n=1}^\infty (x, e_n)\, g_n(t). \tag{43.14}$$

Оператор K действует из L_1 в C и вполне непрерывен; он самосопряжен и положительно определен в пространстве L_2. Функции $Kx(t)$ при $x(t) \in L_1$ имеют непрерывные производные

$$[Kx(t)]' = \int_0^\pi G'_t(t, s)\, x(s)\, ds \tag{43.15}$$

(чтобы в этом убедиться, нужно составить для функции $Kx(t)$ обычное конечно-разностное отношение и увидеть, что предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ равен правой части равенства (43.15)). Норма оператора K в L_2 равна единице.

Оператор H действует в L_2, вполне непрерывен и самосопряжен; норма его также равна единице. Очевидно равенство $H^2 x(t) = Kx(t)$ $(x(t) \in L_2)$. Наконец, оператор H действует из пространства L_2 в пространство C и вполне непрерывен, причем

$$\| Hx(t) \|_C \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \| x \|_{L_2} \quad (x \in L_2) \tag{43.16}$$

и

$$Hx(0) = Hx(1) = 0 \quad (x(t) \in L_2). \tag{43.17}$$

Действительно, при $x \in L_2$ и любых l, m

$$\left| \sum_{n=l}^m \frac{(x, e_n)}{n} e_n(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=l}^m \frac{e_n^2(t)}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=l}^m (x, e_n)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{n=l}^m \frac{e_n^2(t)}{n^2}}\, \| x \|_{L_2}. \tag{43.18}$$

Следовательно, ряды (43.13) сходятся равномерно относительно $t \in [0, \pi]$ и функций x из единичного шара пространства L_2 — отсюда вытекает полная непрерывность H как оператора из L_2 в C. Полагая в (43.18) $l = 1$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим оценку

$$|Hx(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n^2(t)}{n^2}} \|x\|_{L_2} = \sqrt{G(t, t)} \|x\|_{L_2} = \sqrt{\frac{t(\pi - t)}{\pi}} \|x\|_{L_2}, \quad (43.19)$$

из которой вытекают (43.16) и (43.17). ∎

Оператор V действует в L_2 и изометричен. Если функция $Hx(t)$ $(x \in L_2)$ имеет непрерывную производную, то справедливо равенство

$$[Hx(t)]' = Vx(t). \quad (43.20)$$

Для доказательства достаточно разложить функцию $[Hx]'$ в ряд по функциям g_i. Равенства (43.17) позволяют вычислить коэффициенты Фурье интегрированием по частям:

$$([Hx(t)]', g_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} [Hx(t)]' \, dt = 0,$$

$$([Hx(t)]', g_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} [Hx(t)]' \cos nt \, dt =$$
$$= n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} Hx(t) \sin nt \, dt = n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, e_k)}{k} e_k, e_n \right) = (x, e_n). ∎$$

Положим $\mathfrak{f}(u, v) = f[t, u(t), v(t)]$. Тогда краевая задача (43.5) эквивалентна нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$x(t) = H^2 \mathfrak{f}[x(t), x'(t)], \quad (43.21)$$

решения которого нужно искать в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Уравнение (43.21) эквивалентно операторному уравнению

$$y(t) = H\mathfrak{f}(Hy, Vy), \quad (43.22)$$

если искать решение этого уравнения среди таких функций $y(t) \in L_2$, для которых функция $Hy(t)$ имеет непрерывную производную (проверьте). При этом решения уравнения (43.21) определяются по решениям $y(t)$ уравнения (43.22) равенством $x(t) = Hy(t)$.

Лемма 43.1. *Пусть $y(t) \in L_2$ и функция $Hy(t)$ имеет непрерывную производную. Пусть $y(t)$ является решением уравнения* (43.22). *Тогда справедлива оценка*

$$\|y(t)\|_{L_2} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}\, a_0}{2(1 - \sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (43.23)$$

Доказательство. В силу (43.6) и (43.7)

$$\|y\|_{L_2}^2 = (H\mathfrak{f}(Hy, Vy), y) =$$
$$= (\mathfrak{f}(Hy, Vy), Hy) \leqslant \sigma_1 (Hy, Hy) + \sigma_2 (|Hy|, |Vy|) +$$
$$+ (\psi, |Hy|) \leqslant (\sigma_1 + \sigma_2) \|y\|_{L_2}^2 + \|Hy\|_C \|\psi\|_L$$

и в силу (43.16)

$$\|y\|_{L_2}^2 \leqslant (\sigma_1 + \sigma_2) \|y\|_{L_2}^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \|y\|_{L_2} \cdot a_0,$$

откуда следует (43.23). ∎

Лемма 43.2. *Пусть выполнены условия* (43.6) *и* (43.7). *Тогда для каждого решения $x(t)$ задачи* (43.5) *справедливы априорные оценки*

$$|x(t)| \leqslant \frac{\pi a_0}{4(1 - \sigma_1 - \sigma_2)}, \quad (43.24)$$

$$|x'(t)| \leqslant a_0 + (\sigma_1 \pi + \sigma_2) \frac{\pi a_0}{4(1 - \sigma_1 - \sigma_2)}. \quad (43.25)$$

Доказательство. Функция $x(t)$ является решением уравнения (43.21). Поэтому она имеет вид $x = Hy$, где y — решение уравнения (43.22), для которого в силу леммы 43.1 верна оценка (43.23). Из этой оценки и из (43.16) вытекает (43.24).

Для доказательства оценки (43.25) достаточно рассмотреть лишь те t_0, при которых оба числа $x'(t_0)$ и $x(t_0)$ отличны от нуля. Для определенности предположим, что $x'(t_0) > 0$ и $x(t_0) > 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда t_0 является левым концом некоторого промежутка $[t_0, t_1] \subset (0, \pi)$ такого, что $x'(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < t_1$ и $x'(t_1) = 0$; функция $x(t)$

принимает на $[t_0, t_1]$ положительные значения. Из (43.6) вытекает оценка

$$x'(t_0) = -\int_{t_0}^{t_1} x''(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t_1} f[\tau, x(\tau), x'(\tau)]\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_1 \int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\,d\tau + \sigma_2 \int_{t_0}^{t_1} x'(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \psi(\tau)\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \sigma_1 \int_{t_0}^{t_1} x(\tau)\,d\tau + \sigma_2 x(t_1) + a_0.$$

Поэтому из (43.24) следует (43.25). ∎

Определим такую функцию $f_1(t, u, v)$, которая равномерно ограничена, удовлетворяет условиям (43.6), (43.7) и совпадает с $f(t, u, v)$ при

$$|u| \leqslant \frac{\pi a_0}{4(1-\sigma_1-\sigma_2)}, \qquad |v| \leqslant a_0 + \frac{\pi a_0(\sigma_1\pi + \sigma_2)}{4(1-\sigma_1-\sigma_2)}.$$

В силу леммы 43.2 решения задачи (43.5) и задачи

$$x'' + f_1(t, x, x') = 0, \qquad x(0) = x(\pi) = 0 \qquad (43.26)$$

одинаковы. Поэтому при анализе задачи (43.5) можно перейти к задаче (43.26). Нам удобнее сразу предполагать ограниченной саму функцию $f(t, u, v)$:

$$|f(t, u, v)| \leqslant M \qquad (t \in [0, \pi];\ -\infty < u, v < \infty). \qquad (43.27)$$

Положим

$$Az = \mathfrak{f}\,[Kz, (Kz)']. \qquad (43.28)$$

Оператор A действует в пространстве C непрерывных на $[0, \pi]$ функций и вполне непрерывен. В силу (43.27) $\operatorname{ind}(\infty, I - A; C) = 1$. Отсюда вытекает, что уравнение $z = Az$ разрешимо. Но каждое решение z^* уравнения $z = Az$ определяет решение $x^* = Kz^*$ задачи (43.5). Поэтому *из условий* (43.6) *и* (43.7) *вытекает разрешимость задачи* (43.5).

Оператор A очевидным образом дифференцируем в C, причем

$$A'(0)z(t) = f'_u(t, 0, 0)\,Kz(t) + f'_v(t, 0, 0)\,VHz(t). \qquad (43.29)$$

Из теоремы 43.2 вытекает существование у задачи (43.5) по крайней мере одного ненулевого решения, если число 1 не является собственным значением оператора (43.29), а сумма кратностей больших чем 1 собственных значений этого оператора нечетна.

Пусть, например, $f'_u(t, 0, 0) \equiv \varkappa$. Тогда *задача* (43.5) *имеет по крайней мере одно ненулевое решение, если* $\varkappa$ *принадлежит одному из интервалов* $(4k^2 - 4k + 1,\ 4k^2)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *а*

$$|f'_v(t, 0, 0)| < \left|1 - \frac{\varkappa}{n^2}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (43.30)$$

43.3. Ненулевые решения вариационных задач. Пусть оператор A является градиентом некоторого определенного на гильбертовом пространстве E функционала $V(x)$. Тогда оператор $I - A$ является градиентом функционала $W(x) = \frac{1}{2}(x, x) - V(x)$ (см. п. 42.5).

Допустим, что при изучении уравнения $x = Ax$ был применен вариационный метод — было показано, что у функционала $W(x)$ есть точка минимума, которая и является решением уравнения $x = Ax$. Пусть одно решение x^* уравнения $x = Ax$ известно. Очевидно, *у уравнения* $x = Ax$ *есть хотя бы одно отличное от* x^* *решение, если* x^* *не является точкой минимума функционала* $W(x)$.

Поэтому для доказательства существования отличных от x^* решений можно пытаться изучать методами дифференциального исчисления вид функционала $W(x)$ в окрестности точки x^*. Пусть, например,

$$W(x) - W(x^*) = (B(x - x^*), x - x^*) + o(\|x - x^*\|^2),$$

где B — самосопряженный оператор, у которого есть отрицательные точки спектра. Тогда x^* не является точкой минимума.

Читатель может сформулировать, например, вытекающие из изложенных соображений признаки существования ненулевых решений у уравнения $x = K\mathfrak{f}x$ в условиях п. 42.5.

§ 44. Растяжения и сжатия конуса

44.1. Общие теоремы. Положим $K(r_1, r_2) = \{x\colon x \in K,\ r_1 \leqslant \|x\| \leqslant r_2\}$, $\Gamma(r) = \{x\colon\ x \in K,\ \|x\| = r\}$, $S(r_1, r_2) = \Gamma(r_1) \cup \Gamma(r_2)$.

Пусть положительный вполне непрерывный оператор A определен на $K(r_1, r_2)$ и не имеет неподвижных точек на $S(r_1, r_2)$. Тогда определены (см. п. 33.4) вращения γ_1 и γ_2 положительного поля $I - A$ на $\Gamma(r_1)$ и $\Gamma(r_2)$. Если $\gamma_1 \neq \gamma_2$, то A имеет на $K(r_1, r_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку. Для приложений этого очевидного утверждения (которым мы ниже пользуемся без специальных ссылок) нужно уметь вычислять вращение положительного поля $I - A$ на множествах $\Gamma(r)$. Здесь могут быть использованы теоремы 33.1—33.12.

Например, из теорем 33.2 и 33.4 вытекает

Теорема 44.1. *Пусть на одном из множеств $\Gamma(r_1)$, $\Gamma(r_2)$ выполнено условие $Ax \overline{\geqslant} x$, а на втором — условие $Ax \overline{\leqslant} x$. Тогда оператор A имеет на $K(r_1, r_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Легко доказывается более общая, чем 44.1,

Теорема 44.2. *Пусть на одном из множеств $\Gamma(r_1)$, $\Gamma(r_2)$ оператор A не имеет собственных векторов, которым отвечают большие чем 1 собственные значения, а на втором нормы значений оператора A ограничены снизу положительным числом и A не имеет собственных векторов, которым отвечают меньшие чем 1 собственные значения. Тогда A имеет на $K(r_1, r_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку.*

Рассмотрим теперь положительный вполне непрерывный оператор A, определенный на всем конусе K (кроме, может быть, нулевой точки). Пусть существуют такие положительные r_1 и r_2, что $Ax \overline{\geqslant} x$ при $x \in K(0, r_1)$ $(x \neq 0)$ и $Ax \overline{\leqslant} x$ при $x \in K(r_2, \infty)$; тогда будем называть оператор A *растяжением конуса* K. Аналогично, A является *сжатием конуса* K, если $Ax \overline{\leqslant} x$ при $x \in K(0, r_1)$ $(x \neq 0)$ и $Ax \overline{\geqslant} x$ при $x \in K(r_2, \infty)$. Из теоремы 44.1 вытекает

Теорема 44.3. *Пусть положительный и вполне непрерывный оператор A является растяжением или сжатием конуса K. Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Читатель легко сформулирует признак существования ненулевой неподвижной точки, находящийся в таком же отношении к теореме 44.2, как 44.3 — к теореме 44.1.

Пусть положительный вполне непрерывный оператор A имеет производные (по конусу K) $A'(0)$ и $A'(\infty)$, являющиеся положительными вполне непрерывными линейными операторами. Для существования у оператора A по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки достаточно, чтобы числа $\operatorname{ind}(0, A; K)$ и $\operatorname{ind}(\infty, A; K)$ были различны. Поэтому из теорем 33.6, 33.7, 33.9 и 33.10 вытекают следующие утверждения.

Теорема 44.4. *Пусть $\sigma[A'(0)] < 1$, а у оператора $A'(\infty)$ есть в конусе K собственный вектор, которому отвечает собственное значение $\lambda_0 > 1$, и нет собственных векторов, которым отвечает собственное значение 1. Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Теорема 44.5. *Пусть $\sigma[A'(\infty)] < 1$, а у оператора $A'(0)$ есть в K собственный вектор, которому отвечает собственное значение $\lambda_0 > 1$, и нет собственных векторов, которым отвечает собственное значение 1. Тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Результаты п. 33.7 позволяют дополнить теоремы 44.4 и 44.5 анализом случаев, в которых 1 является собственным значением одного из операторов $A'(0)$, $A'(\infty)$ (или их обоих).

Утверждения, близкие к теоремам п. 44.1, доказаны М. А. Красносельским (ДАН СССР **135**, № 3 (1960); см. также [23]); они нашли различные приложения к интегральным уравнениям, краевым задачам, нелинейной механике, дифференциальной геометрии и др. Новые доказательства и существенные дополнения указал Ю. В. Покорный (Матем. заметки **4**, № 5 (1968); Дифф. ур-ния **6**, № 9 (1970); Тр. матем. ф-та Воронежск. гос. ун-та **4** (1971) и др.). Интересные обобщения теоремы о растяжениях конуса предложил В. С. Климов (Дифф. ур-ния **7**, № 5 (1971); Изв. АН СССР, сер. матем. **35**, № 2 (1971); Сибирск. матем. ж. **12**, № 4 (1971); Дифф. ур-ния **9**, № 3 (1973)) в связи с исследованием ненулевых решений краевых задач; ряд теорем В. С. Климова связан с важными результатами С. И. Похожаева (ДАН СССР **134**, № 4 (1960); **138**, № 2 (1961); **165**, № 1 (1965); Функц. анализ и его прилож. **3**, № 2 (1969); Матем. сб. **78**, № 2 (1969)).

Ниже, в пп. 44.2 — 44.5 изучается интегральное уравнение

$$x(t) = \int_G g(t, s) f[s, x(s)]\, ds, \qquad (44.1)$$

где G — ограниченное замкнутое множество в некотором конечномерном пространстве. При этом предполагается, что ядро $g(t, s)$ $(t, s \in G)$ неотрицательно и определяет вполне непрерывный в C оператор

$$Bx(t) = \int_G g(t, s)\, x(s)\, ds; \qquad (44.2)$$

функция $f(t, x)$ $(t \in G, x \geqslant 0)$ предполагается неотрицательной и непрерывной. Нелинейность $f(t, x)$ будем считать «*слабой*», если при больших x функция $f(t, x)$ мажорируется линейной с не слишком большим угловым коэффициентом, и «*сильной*», если при росте x функция $f(t, x)$ растет быстрее линейной с достаточно большим коэффициентом. Сразу же отметим, что анализ уравнений со слабыми нелинейностями, как правило, менее сложен.

44.2. Уравнения со слабыми нелинейностями. Предположим, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет двум условиям:

$$f(t, x) \leqslant a_\infty(t)\, x + b_\infty(t) \quad (t \in G,\ x \geqslant 0) \qquad (44.3)$$

и

$$f(t, x) \geqslant a_0(t)\, x \quad (t \in G,\ 0 \leqslant x \leqslant r), \qquad (44.4)$$

где функции $a_\infty(t)$, $b_\infty(t)$, $a_0(t)$ неотрицательны и непрерывны, $r > 0$. Будем считать, что $f(t, 0) \equiv 0$.

Теорема 44.6. *Пусть спектральный радиус $\sigma(B_\infty)$ линейного интегрального оператора B_∞ с ядром $g(t, s)a_\infty(s)$ меньше чем 1, а спектральный радиус $\sigma(B_0)$ оператора B_0 с ядром $g(t, s)a_0(s)$ больше чем 1 и, кроме того, оператор B_0 суперположителен на конусе K неотрицательных непрерывных функций. Тогда уравнение (44.1) имеет по крайней мере одно отличное от тождественного нуля неотрицательное решение.*

Доказательство. Покажем, что оператор $B\mathfrak{f}$ является сжатием конуса K. Тогда доказываемое утверждение будет вытекать из теоремы 44.3.

Из леммы 33.2 вытекает, что $B_0 x \overline{\leqslant} x$ при ненулевых $x \in K$. Но в силу (44.4) $B\mathfrak{f}x \geqslant B_0 x$ при $x \in K$ и $\| x \| \leqslant r$. Поэтому $B\mathfrak{f}x \overline{\leqslant} x$ при малых по норме ненулевых $x \in K$.

Остается показать, что $B\mathfrak{f}x \overline{\geqslant} x$ при больших по норме $x \in K$. В предположении противного, найдется последовательность $x_n = \xi_n h_n \in K$ $(\xi_n \to \infty,\ \| h_n \| = 1)$, для которой $B\mathfrak{f}x_n \geqslant x_n$. Из (44.3) вытекают тогда соотношения $B_\infty x_n + Bb_\infty \geqslant x_n$, т. е. $B_\infty h_n + \xi_n^{-1} Bb_\infty \geqslant h_n$ и, далее,

$$B_\infty\left(B_\infty h_n + \xi_n^{-1} Bb_\infty\right) \geqslant B_\infty h_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (44.5)$$

Так как оператор B_∞ вполне непрерывен, то последовательность $B_\infty h_n$ можно считать сходящейся к некоторому элементу $w \in K$ (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности). Переходя в (44.5) к пределу, получим $B_\infty w \geqslant w$ и, так как $\sigma(B_\infty) < 1$, $w = 0$. Следовательно, $\| B_\infty h_n \| \to 0$ и из $h_n \leqslant B_\infty h_n + \xi_n^{-1} Bb_\infty$ следует, что $\| h_n \| \to 0$. Мы пришли к противоречию. ∎

В случае, когда оператор B_0 не обладает свойством суперположительности на K, часто удобно при изучении оператора $B\mathfrak{f}$ перейти к более узкому конусу $K_1 \subset K$. Такой переход возможен, если $BK \subset K_1$. Мы не развиваем это соображение; оно будет более существенным при исследовании уравнений с сильными нелинейностями.

44.3. Конус $K(v^*)$. Пусть в банаховом пространстве E задан конус K и элемент $v^* \in K$, $0 < \| v^* \| < 1$. Положим $K(v^*) = \{x\colon x \in K,\ x \geqslant \| x \| v^*\}$. Нетрудно проверить, что $K(v^*)$ — оштукатуриваемый конус. Ясна геометрическая структура этого конуса — он является объединением всех лучей, выходящих из нуля и проходящих через точки множества $\{x\colon x \in K + v^*,\ \| x \| \leqslant 1\}$.

Пусть K — конус неотрицательных функций в пространстве $C = C(G)$, $v^*(t) \in K$, $0 < \| v^*(t) \| < 1$.

Лемма 44.1. *Линейный интегральный оператор (44.2) преобразует конус K в конус $K(v^*)$ в том и только том случае, если*

$$g(t, s) \geqslant v^*(t)\, g(\tau, s) \qquad (t, \tau, s \in G). \qquad (44.6)$$

Доказательство. Пусть $x(t) \in K$ и $\max Bx(t) = Bx(t_0)$. Тогда из (44.6) вытекает оценка

$$Bx(t) = \int_G g(t, s)\, x(s)\, ds \geqslant \\ \geqslant v^*(t) \int_G g(t_0, s)\, x(s)\, ds = v^*(t) \| Bx \|.$$

Следовательно, $BK \subset K(v^*)$.

Пусть $BK \subset K(v^*)$, тогда из $Bx \geqslant \| Bx \| v^*$ следует, что

$$\int_G [g(t, s) - v^*(t)\, g(\tau, s)]\, x(s)\, ds \geqslant 0 \qquad (t, \tau \in G).$$

Последнее неравенство верно при всех $x \in K$ — поэтому из него вытекает оценка (44.6). ∎

Введем в рассмотрение еще один важный класс конусов.

Пусть u_0, v_0 — ненулевые элементы из K и $u_0 \leqslant v_0$. Положим $K(u_0, v_0) = \{x\colon au_0 \leqslant x \leqslant av_0,\ a \geqslant 0\}$. Нетрудно проверить, что $K(u_0, v_0)$ — конус. Этот конус является объединением лучей, выходящих из нуля и проходящих через точки конусного отрезка $\langle u_0, v_0 \rangle$. Если конус K нормален, то из $au_0 \leqslant x \leqslant av_0$ вытекают неравенства $a \| u_0 \| \leqslant N \| x \| \leqslant N^2 a \| v_0 \|$, где $N > 0$. Поэтому

$$\frac{\| x \|}{N \| v_0 \|} u_0 \leqslant x \leqslant \frac{N \| x \|}{\| u_0 \|} v_0 \qquad (x \in K(u_0, v_0)). \tag{44.7}$$

Значит, $K(u_0, v_0) \subset K\left(\frac{1}{N \| v_0 \|} u_0\right)$.

Конус $K(u_0, \rho u_0)$ обозначим через $K(u_0, \rho)$ $(\rho \geqslant 1)$.

Лемма 44.2. *Пусть ядро $g(t, s)$ оператора* (44.2) *удовлетворяет оценке*

$$u_0(t)\, g(s) \leqslant g(t, s) \leqslant v_0(t)\, g(s), \tag{44.8}$$

где $u_0(t)$ и $v_0(t)$ неотрицательны и непрерывны, а функция $g(s)$ неотрицательна и суммируема. Тогда оператор (44.2) *преобразует конус K неотрицательных функций в конус $K(u_0, v_0)$.*

Доказательство очевидно. ∎

Отметим, что из (44.8) вытекает (44.6) при $v^*(t) = \frac{u_0(t)}{\| v_0 \|}$.

Опишем один специальный конус в пространстве C функций, непрерывных на замкнутой выпуклой области G в конечномерном пространстве. Через $u(t, t_0)$, где t_0 — внутренняя точка области G, обозначим функцию, равную нулю на границе области G, равную 1 в точке t_0 и линейную на каждом промежутке $[t_0, t_1]$. Через K_Δ обозначим конус неотрицательных функций $x(t)$, удовлетворяющих неравенствам $x(t) \geqslant x(t_0)\, u(t, t_0)$ $(t \in G)$ при каждом t_0, являющемся внутренней точкой области G. Нетрудно проверить, что K_Δ содержится в каждом конусе $K(v^*)$, где $v^*(t) = \varepsilon(t^*)\, u(t, t^*)$ и $\varepsilon(t^*)$ достаточно мало.

Конус K_Δ очевидным образом содержит конус вогнутых неотрицательных функций, т. е. таких неотрицательных функций $x(t)$, для которых $x(\alpha t_1 + \beta t_2) \geqslant \alpha x(t_1) + \beta x(t_2)$ при $\alpha, \beta \geqslant 0$; $\alpha + \beta = 1$; $t_1, t_2 \in G$.

44.4. Первая теорема об уравнениях с сильными нелинейностями. Вернемся к уравнению (44.1).

Теорема 44.7. *Пусть ядро $g(t, s)$ удовлетворяет условию* (44.8), *$f(t, x)$ — условиям*

$$f(t, x) \geqslant c_\infty(t)\, x - d_\infty(t) \qquad (t \in G,\ x \geqslant 0) \tag{44.9}$$

и

$$f(t, x) \leqslant c_0(t)\, x \qquad (t \in G,\ 0 \leqslant x \leqslant r), \tag{44.10}$$

где $c_\infty(t)$, $d_\infty(t)$, $c_0(t)$ неотрицательны и непрерывны, $r > 0$. Пусть $B_\infty u_0 \neq 0$ и $B_\infty x \not\leqslant x$ при ненулевых $x \in K(u_0, v_0)$ (например, $\sigma(B_\infty) > 1$ и B_∞ суперположителен), где B_∞ — линейный интегральный оператор с ядром $g(t, s)\, c_\infty(s)$. Пусть, наконец, спектральный радиус оператора B_0 с ядром $g(t, s)\, c_0(s)$ меньше чем 1. Тогда уравнение (44.1) *имеет по крайней мере одно отличное от тождественного нуля неотрицательное решение.*

Доказательство. В силу леммы 44.2 вполне непрерывный оператор $B\mathfrak{f}$ преобразует конус $K(u_0, v_0)$ в себя. Мы покажем, что $B\mathfrak{f}$ является растяжением конуса $K(u_0, v_0)$, — тогда доказываемое утверждение будет вытекать из теоремы 44.3.

Оператор $B\mathfrak{f}$ заведомо является растяжением конуса $K(u_0, v_0)$, если $B\mathfrak{f}x \overline{\leqslant} x$ при больших по норме $x \in K(u_0, v_0)$ и $B\mathfrak{f}x \overline{\geqslant} x$ при малых по норме ненулевых $x \in K(u_0, v_0)$, где полуупорядоченность $\leqslant$ определена по конусу K всех неотрицательных функций.

Так как $\sigma(B_0) < 1$, то $B_0 x \overline{\geqslant} x$ при всех ненулевых $x \in K$. Поэтому из (44.10) вытекает, что $B\mathfrak{f}x \overline{\geqslant} x$ при всех малых по норме ненулевых $x \in K$.

Остается показать, что $B\mathfrak{f}x \overline{\leqslant} x$ при больших по норме $x \in K(u_0, v_0)$. В предположении противного, найдется последовательность $x_n = \xi_n h_n \in K(u_0, v_0)$ ($\xi_n \to \infty$; $\| h_n \| = 1$), для которой $B\mathfrak{f}x_n \leqslant x_n$. Тогда из (44.9) будут вытекать соотношения $B_\infty h_n - \xi_n^{-1} B d_\infty \leqslant h_n$ и, далее,

$$B_\infty \left(B_\infty h_n - \xi_n^{-1} B d_\infty\right) \leqslant B_\infty h_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{44.11}$$

Без ограничения общности можно считать последовательность $B_\infty h_n$ сходящейся к некоторой функции $w \in K(u_0, v_0)$. Из неравенств (44.7) вытекают оценки $B_\infty h_n \geqslant N^{-1} \| v_0 \|^{-1} u_0$. Поэтому функция w отлична от нуля.

Переходя к пределу в (44.11), получим соотношение $B_\infty w \leqslant w$. Мы пришли к противоречию. ∎

Условия теоремы 44.7 несколько упрощаются, если $v_0(t) \equiv u_0(t)$ и функция $c_\infty(t)$ положительна, — остаются лишь условия (44.9), (44.10) и неравенства $\sigma(B_\infty) > 1$, $\sigma(B_0) < 1$.

Отметим еще, что условиям (44.8) удовлетворяет каждое непрерывное положительное ядро $g(t, s)$ при функциях $u_0(t)$, $v_0(t)$, $g(t)$ — константах.

44.5. Вторая теорема об уравнениях с сильными нелинейностями. Если ядро $g(t, s)$ удовлетворяет менее ограничительному, чем (44.8), условию (44.6), то удобен особый прием, предложенный М. А. Красносельским и Ю. В. Покорным (Матем. заметки **5**, № 2 (1969); из этой статьи взяты построения пп. 44.3 и 44.5).

Будем предполагать, что

$$f(t, x) \geqslant a(t)\varphi(x) - a_1 \quad (t \in G,\ x \geqslant 0), \tag{44.12}$$

где $\varphi(x)$ непрерывна, неотрицательна, не убывает и

$$\lim_{x \to \infty} x^{-1}\varphi(x) = \infty; \tag{44.13}$$

функция $a(t)$ непрерывна и неотрицательна, причем оператор (44.2) преобразует произведение $a(t)v^*(t)$ в ненулевую функцию.

Теорема 44.8. *Пусть ядро $g(t, s)$ удовлетворяет условию* (44.6), *а функция $f(t, x)$ — условиям* (44.10) *и* (44.12). *Пусть, далее, $\sigma(B_0) < 1$, где B_0 — линейный интегральный оператор с ядром $g(t, s)c_0(s)$. Тогда уравнение* (44.1) *имеет по крайней мере одно отличное от тождественного нуля неотрицательное решение.*

Доказательство. В силу леммы 44.1 вполне непрерывный оператор $B\mathfrak{f}$ преобразует конус $K(v^*)$ в себя. В силу теоремы 44.3 достаточно показать, что $B\mathfrak{f}$ является растяжением конуса $K(v^*)$. Мы ограничимся доказательством соотношений $B\mathfrak{f}x \overline{\leqslant} x$ при больших по норме $x \in K(v^*)$. Остальные части доказательства предоставляем читателю.

В предположении противного можно указать последовательность $x_n = \xi_n h_n \in K(v^*)$ ($\xi_n \to \infty$, $\| h_n \| = 1$), для которой $B\mathfrak{f}x_n \leqslant x_n$. В силу (44.12)

$$x_n(t) \geqslant B\{a(t)\varphi[x_n(t)] - a_1\} \geqslant B\{a(t)\varphi[\xi_n v^*(t)] - a_1\}. \tag{44.14}$$

Функция $a(t)v^*(t)$ по условию не равна тождественно нулю. Пусть $\varkappa_m(t)$ — характеристическая функция множества $\{t\colon t \in G,\ ma(t) \geqslant 1,\ mv^*(t) \geqslant 1\}$. Из отличия от нуля функции $B[a(t)v^*(t)]$ вытекает отличие от нуля и функций $B[\varkappa_m(t)a(t)v^*(t)]$ при больших m, а следовательно, и отличие от нуля функции $B\varkappa_m(t)$ при больших m.

С другой стороны, из (44.14) вытекает оценка

$$B\varkappa_m(t) \leqslant \frac{1}{\frac{1}{m}\varphi\left(\frac{1}{m}\xi_n\right)} B\{a(t)\varphi[\xi_n v^*(t)]\} \leqslant \frac{\xi_n h_n(t)}{\frac{1}{m}\rho\left(\frac{1}{m}\xi_n\right)} + \frac{Ba_1}{\frac{1}{m}\varphi\left(\frac{1}{m}\xi_n\right)}$$

и, в силу (44.13), $B\varkappa_m(t) \equiv 0$. Мы пришли к противоречию. ∎

Теоремы 44.7 и 44.8 охватывают нелинейности $f(t, x)$ типа x^{α} $(\alpha > 1)$, $e^{x} - x - 1$, $e^{x^2} - 1$ и т. д. Теорема же 44.6 относилась к нелинейностям $f(t, x)$ типа x^{α} $(\alpha < 1)$.

44.6. Ненулевые решения краевых задач. Теоремы этого параграфа можно применять к исследованию нелинейных уравнений

$$Lx = f(t, x), \tag{44.15}$$

где L — линейный дифференциальный оператор с такими краевыми условиями, что его функция Грина $g(t, s)$ неотрицательна. Для этого достаточно перейти от уравнения (44.15) к эквивалентному интегральному уравнению (44.1) и пытаться доказывать существование ненулевых решений уже у интегрального уравнения. Применения теоремы 44.6 совсем просты, так как в условиях этой теоремы к ядру $g(t, s)$ не предъявлялись особые требования. Более сложны уравнения с сильными нелинейностями.

Даже функция Грина (43.10) не удовлетворяет условию (44.8). Однако она удовлетворяет условию (44.6) с функцией $v^*(t) = \min\{t, \pi - t\}$. Поэтому теорема 44.8 полностью применима к двухточечной задаче (43.5).

Рассмотрим в качестве последнего примера задачу Валле-Пуссена об отыскании определенных на $[a, b]$ решений уравнения

$$Lx \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n(t)\,x = f_0(t, x), \tag{44.16}$$

удовлетворяющих условиям

$$x(a_i) = x'(a_i) = \ldots = x^{(r_i - 1)}(a_i) = 0 \tag{44.17}$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ r_1 + \ldots + r_m = n),$$

где $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_m = b$. Каждый коэффициент $p_i(t)$ будем предполагать $n - i$ раз непрерывно дифференцируемым, а функцию $f(t, x)$ $(a \leqslant t \leqslant b,\ -\infty < u < \infty)$ непрерывной по совокупности переменных. Ниже предполагается, что $[a, b]$ является промежутком неосцилляции для оператора L. Тогда, как известно, существует функция Грина $g_0(t, s)$ оператора L при краевых условиях (44.17).

Введем обозначения

$$q(t) = (t - a_1)^{r_1} \ldots (t - a_m)^{r_m}, \qquad \sigma(t) = \operatorname{sign} q(t).$$

Известно (см. [33]), что $q(t) g_0(t, s) \geqslant 0$. Поэтому каждое решение нелинейного интегрального уравнения

$$x(t) = \int_a^b |g_0(t, s)|\, f_0[s, \sigma(s)\, x(s)]\, ds \tag{44.18}$$

будет решением задачи (44.16), (44.17). Будем считать функцию $f_0[t, \sigma(t)x]$ неотрицательной. Тогда (44.18) — это уравнение типа (44.1) и к нему можно применить теоремы 44.6—44.8.

Ю. В. Покорный (Матем. заметки **4**, № 5 (1968)) установил для ядра $g(t, s) = |g_0(t, s)|$ оценку (44.6), в которой $v^*(t) > 0$ при $t \neq a_i$. Поэтому к задаче (44.16), (44.17) можно применить теорему 44.8. Например, как показали М. А. Красносельский и Ю. В. Покорный (Матем. заметки **5**, № 2 (1969)), *задача* (44.16), (44.17) *имеет по крайней мере одно ненулевое решение, если* $f'_u(t, 0) \equiv 0$ *и если при всех* $u > 0$ *и значениях* t *из некоторого множества положительной меры справедлива оценка* $f(t, u) \geqslant \varphi(u)$, *где* $u^{-1}\varphi(u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$.

§ 45. Ступенчатые нелинейности

45.1. Основная теорема. В параграфе будут описаны уравнения

$$x = Ax, \tag{45.1}$$

для которых может быть указана оценка снизу числа решений. Доказываемые ниже теоремы приспособлены для анализа уравнений с нелинейностями, содержащими перемежающиеся участки медленного и быстрого роста.

Рассмотрим вначале скалярное уравнение $x = \varphi(x)$. Пусть $u_1 < v_1 < u_2 < v_2 < \ldots < u_m < v_m$ и $\varphi(u_i) > u_i$, $\varphi(v_i) < v_i$. Если известно, что $\varphi(x)$ не убывает на промежутке $[u_1, v_m]$, то уравнение $x = \varphi(x)$ имеет (например, в силу теоремы 38.1) на $[u_1, v_m]$ не меньше чем m решений. Если же $\varphi(x)$ непрерывна на промежутке $[u_1, v_m]$, то уравнение $x = \varphi(x)$ имеет на нем по крайней мере $2m - 1$ решений.

Оба сформулированных утверждения допускают обобщения на уравнения (45.1) с операторами, действующими в банаховом пространстве E, полуупорядоченном некоторым конусом K. Нам удобно считать во всем параграфе, что конус K нормален (это обеспечит ограниченность всех конусных отрезков, встречающихся в различных построениях). В проводимых ниже построениях существенную роль играет понятие вращения векторного поля $I-A$; мы ограничимся в этих построениях полями с вполне непрерывными положительными операторами (построения не изменятся, конечно, при переходе к любым другим классам полей, для которых определено вращение с обычными свойствами).

Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_l$ — такие ограниченные окрестности (в E) нулевой точки, что

$$\bar{\Omega}_i \cap K = \overline{\Omega_i \cap K} \quad (i=1, \ldots, l), \qquad \bar{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1} \quad (i=1, \ldots, l-1).$$

Например, последовательность Ω_i может состоять из шаров $\|x\| < r_i$ растущих радиусов r_i.

Лемма 45.1. *Пусть оператор A вполне непрерывен и положителен на множестве $T=(\bar{\Omega}_l \setminus \Omega_1) \cap K$. Пусть A не имеет неподвижных точек на множествах $\dot{\Omega}_i(K)$ и*

$$\gamma[I-A, \Omega_i(K)] \neq \gamma[I-A, \Omega_{i+1}(K)] \qquad (45.2)$$
$$(i=1, \ldots, l-1).$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в T по крайней мере $l-1$ решений.*

Действительно, из (45.2) и общих свойств вращения (см. § 33) вытекает существование по крайней мере одного решения в каждом множестве $(\Omega_{i+1} \setminus \bar{\Omega}_i) \cap K$. ∎

В § 33 установлены различные признаки равенства вращения числам 0 и 1. Объединяя их с леммой 45.1, можно формулировать более эффективные теоремы об оценке числа решений. Например, из теорем 33.2 и 33.4 вытекает

Теорема 45.1. *Пусть A вполне непрерывен и положителен на множестве $T=(\bar{\Omega}_l \setminus \Omega_1) \cap K$ и $AT \subset K$. Пусть выполнено одно из условий: либо*

$$Ax \overline{\leqslant} x \quad (x \in \dot{\Omega}_i(K);\ i=1, 3, \ldots),$$
$$Ax \overline{\geqslant} x \quad (x \in \dot{\Omega}_j(K);\ j=2, 4, \ldots),$$

либо

$$Ax \overline{\geqslant} x \quad (x \in \dot{\Omega}_i(K);\ i=1, 3, \ldots),$$
$$Ax \overline{\leqslant} x \quad (x \in \dot{\Omega}_j(K);\ j=2, 4, \ldots).$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в T по крайней мере $l-1$ решений.*

45.2. Монотонные нелинейности. В условиях леммы 45.1 (и теоремы 45.1) нужна информация о значениях оператора A во всех точках некоторых поверхностей. При переходе к монотонным операторам в ряде случаев можно ограничиться анализом значений оператора A в конечном числе точек.

Теорема 45.2. *Пусть оператор A предельно монотонно компактен на конусе $K_1 \subset K$ и $AK_1 \subset K_1$. Пусть существуют такие элементы $u_i, v_i \in K_1$ $(i=1, \ldots, m)$, для которых*

$$u_i \leqslant v_i, \quad u_i \leqslant u_{i+1}, \quad v_i \leqslant v_{i+1}, \quad v_i \overline{\geqslant} u_{i+1} \qquad (45.3)$$

и

$$Au_i \geqslant u_i, \qquad Av_i \leqslant v_i. \qquad (45.4)$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в K_1 по крайней мере m решений.*

Действительно, в силу теоремы 38.2 оператор A имеет по крайней мере одну неподвижную точку на каждом из непересекающихся друг с другом множеств $\{x\colon u_i \leqslant x \leqslant v_i,\ x \in K_1\}$. ∎

В условиях теоремы 45.2 не предполагается, что оператор A непрерывен. Теорема 45.2 является следствием теоремы 38.2; аналогичное следствие можно получить из теоремы 38.1.

Теорема 45.3. *Пусть конус K телесен. Пусть монотонный оператор A вполне непрерывен на конусе $K_1 \subset K$ и $AK_1 \subset K_1$. Пусть, наконец, существуют элементы $u_i, v_i \in K_1$ $(i=1, \ldots, m)$, для которых справедливы соотношения* (45.3) *и более сильные, чем* (45.4), *соотношения* *)

$$Au_i \gg u_i, \qquad Av_i \ll v_i. \qquad (45.5)$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в K_1 по крайней мере $2m-1$ решений.*

Теорема 45.3 доказывается совсем просто, если $K_1 = K$. В этом случае каждый конусный отрезок $\langle u_i, v_j\rangle$ $(i \leqslant j)$ является телесным множеством, а оператор A преобразует его в свою внутреннюю часть. Поэтому обычное вращение поля $I-A$ на границе каждого

*) Символ $y \ll z$ в (45.5) и далее означает, что $z-y$ является внутренним элементом конуса K.

конусного отрезка $\langle u_i, v_j\rangle$ $(i \leqslant j)$ равно 1. Отсюда сразу же следует (можно было бы в этой части рассуждений воспользоваться и принципом Шаудера) существование у уравнения (45.1) по крайней мере одного решения в каждом из m конусных отрезков $\langle u_i, v_i\rangle$, не имеющих общих точек. Кроме того, по крайней мере одно решение есть в каждом из $m-1$ множеств

$$T_i = \{x\colon x \in \langle u_i, v_{i+1}\rangle,\ x \overline{\in} \langle u_i, v_i\rangle,\ x \overline{\in} \langle u_{i+1}, v_{i+1}\rangle\}$$

(на рис. 2 одно из таких множеств заштриховано) — в противном случае равное 1 вращение поля $I - A$ на

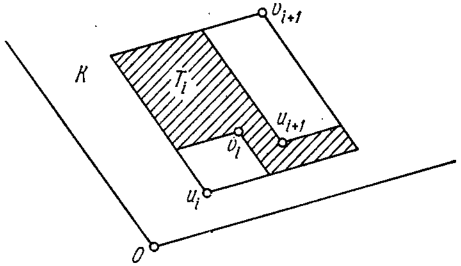


Рис. 2.

границе отрезка $\langle u_i, v_{i+1}\rangle$ должно было бы равняться сумме вращений на границах двух отрезков $\langle u_i, v_i\rangle$ и $\langle u_{i+1}, v_{i+1}\rangle$, каждое из которых также равно 1.

Доказательство в общем случае предоставляем читателю; его легко провести при помощи леммы 45.1. ∎

Теоремы 45.2 и 45.3 обобщаются и на уравнения с операторами, не обладающими свойством монотонности. Например, из принципа Шаудера вытекает следующее дополнение к теореме 45.2.

Теорема 45.4. *Пусть оператор A вполне непрерывен на конусе $K_1 \subset K$ и $AK_1 \subset K_1$. Пусть существуют элементы $u_i, v_i \in K_1$ $(i = 1, \ldots, m)$, для которых справедливы соотношения* (45.3), *и пусть*

$$u_i \leqslant Ax \leqslant v_i \quad (u_i \leqslant x \leqslant v_i,\ x \in K_1). \tag{45.6}$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в K_1 по крайней мере m решений.*

Аналогично теореме 45.3 доказывается

Теорема 45.5. *Пусть конус K телесен. Пусть оператор A вполне непрерывен на конусе $K_1 \subset K$ и $AK_1 \subset K_1$. Пусть, наконец, существуют элементы $u_i, v_i \in K_1$ $(i = 1, \ldots, m)$, для которых справедливы соотношения* (45.3), *причем*

$$u_i \ll Ax \ll v_i \quad (u_i \leqslant x \leqslant v_i,\ x \in K_1) \tag{45.7}$$

и

$$u_i \ll Ax \ll v_{i+1} \quad (u_i \leqslant x \leqslant v_{i+1},\ x \in K_1). \tag{45.8}$$

Тогда уравнение (45.1) *имеет в K_1 по крайней мере $2m - 1$ решений.*

Основная трудность применения теорем 45.1 — 45.5 заключается в эффективном построении элементов, на которых оператор A принимает значения, обладающие нужными свойствами.

Теорема 45.1 в несколько другой форме указана М. А. Красносельским (ДАН СССР **135**, № 3 (1960)). Утверждения типа теорем 45.2 и 45.4 получены М. А. Красносельским и В. Я. Стеценко (Сибирск. матем. ж. **4**, № 1 (1963)), а типа теорем 45.3 и 45.5 (с уточненной оценкой числа решений) — Э. М. Мухамадиевым и Ю. В. Покорным (ДАН Тадж. ССР **10**, № 4 (1967)). Здесь все эти утверждения усилены. Результаты Э. М. Мухамадиева и Ю. В. Покорного повторил с некоторыми дополнениями Аманн (Amann H., Indiana Univ. Math. J. **21**, № 2 (1971); **21**, № 10 (1972); J. Funct. Anal. **11**, № 3 (1972)).

Утверждения типа теорем 45.1—45.5 нашли приложения к интегральным уравнениям, различным краевым задачам, теории поверхностей как перечисленными выше, так и другими авторами (например, И. Я. Бакельман, И. Я. Губерман, Б. Имомназаров, T. Laetsch). Некоторые приложения читатель найдет в монографии [23]. Мы ограничимся в этом параграфе простейшими примерами.

45.3. Замечание. Если уравнение (45.1) имеет нулевое решение, а нас интересуют ненулевые решения, то при применениях теорем 45.2—45.5 нужно уметь строить такой ненулевой элемент $u_1 \in K_1$, для которого $Au_1 \geqslant u_1$ или $Au_1 \gg u_1$.

Пусть, например, у оператора A на множестве $K_1(0, r) = \{x\colon x \in K_1,\ \|x\| \leqslant r\}$ есть линейная минорантa B ($Ax \geqslant Bx$ при $x \in K_1(0, r)$) и у оператора B есть в K_1 собственный вектор e_0, которому соответствует собственное значение $\lambda_0 \geqslant 1$; тогда соотношению $Au_1 \geqslant u_1$ будет удовлетворять каждый элемент $u_1 = te_0$ при малых положительных t. Сформулируем в виде отдельной леммы близкое утверждение.

Лемма 45.2. *Пусть конус K телесен. Пусть оператор A имеет на $K_1(0, r)$ миноранту A_-, дифференцируемую в нулевой точке. Пусть оператор $A'_-(0)$ имеет собственный вектор $e_0 \in K_1$, который* *является внутренним элементом конуса K и которому соответствует собственное значение $\lambda_0 > 1$. Тогда $A(te_0) \gg te_0$ при всех достаточно малых положительных t.*

Для доказательства достаточно установить справедливость при малых положительных t неравенств $A_-(te)_0 \gg te_0$ или, что то же, неравенств $t^{-1}[A'_-(0)(te_0) - A_-(te_0)] \ll (\lambda_0 - 1)e_0$.

В предположении противного найдется такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел t_n, что элементы $(\lambda_0 - 1)e_0 - x_n$, где

$$x_n = t_n^{-1}\left[A'_-(0)(t_n e_0) - A_-(t_n e_0)\right],$$

не являются внутренними точками конуса K. Очевидно, $\|x_n\| \to 0$. Поэтому последовательность $(\lambda_0 - 1)e_0 - x_n$ сходится к элементу $(\lambda_0 - 1)e_0$. Значит, e_0 не является внутренним элементом конуса K — мы пришли к противоречию. ∎

Аналогично можно рассуждать и при поиске такого $v \in K_1$, для которого $Av \leqslant v$ или $Av \ll v$. Например, если $Ax \leqslant Bx$ при $x \in K_1$ и $\|x\| \geqslant r_1$, где B линеен и имеет в K_1 собственный вектор g_0, которому соответствует собственное значение $\lambda_1 \leqslant 1$, то $A(tg_0) \leqslant tg_0$ при всех достаточно больших t. Если существует производная $A'(\infty)$ и у оператора $A'(\infty)$ есть собственный вектор $g_0 \in K_1$, который является внутренним элементом конуса K и которому соответствует собственное значение $\lambda_\infty < 1$, то $A(tg_0) \ll tg_0$ при всех достаточно больших t.

45.4. Приложения к интегральным уравнениям. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_G k(t, s) f[s, x(s)]\, ds \tag{45.9}$$

с неотрицательным ядром $k(t, s)$ $(t, s \in G)$ и неубывающей по переменной u функцией $f(t, u)$. В этих предположениях оператор

$$Ax(t) = \int_G k(t, s) f[s, x(s)]\, ds, \tag{45.10}$$

порожденный правой частью уравнения (45.9), будет монотонен относительно конуса K неотрицательных функций в том функциональном пространстве, в котором он действует.

Будем считать, что линейный интегральный оператор

$$Bx(t) = \int_G k(t, s) x(s)\, ds \tag{45.11}$$

действует из пространства L_∞ ограниченных на G функций в пространство C как вполне непрерывный оператор, а оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)] \tag{45.12}$$

действует в L_∞ (тогда он автоматически преобразует каждое ограниченное в L_∞ множество функций в множество, также ограниченное в L_∞). В этих условиях оператор $A = B\mathfrak{f}$ будет предельно монотонно компактен на конусе K в пространстве C.

Допустим, далее, что ядро $k(t, s)$ обладает следующим свойством:

$$\int_{G_1} k(t, s)\, ds \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (t \in G_1), \tag{45.13}$$

где $G_1 \subset G$ и G_1 имеет ненулевую меру. Свойством (45.13) обладает, конечно, не каждое неотрицательное ядро. Однако многие важные ядра этим свойством обладают (см. [23]); например, им обладают функции Грина многих краевых задач, им обладают непрерывные неотрицательные ядра, принимающие положительное значение хотя бы в одной точке диагонали $t = s$, и т. д.

Через $\|B\|$ обозначим норму линейного интегрального оператора (45.11) в пространстве C.

Теорема 45.6. *Пусть $f(t, 0) \geqslant 0$ $(t \in G)$ и*

$$f(t, \xi_i) \geqslant \beta\xi_i, \quad f(t, \eta_i) \leqslant \alpha\eta_i \quad (t \in G;\ i = 1, \ldots, m), \tag{45.14}$$

где $0 \leqslant \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots < \xi_m < \eta_m$ и

$$\alpha\|B\| \leqslant 1, \quad \beta\varepsilon_0 \geqslant 1. \tag{45.15}$$

Тогда уравнение (45.9) *имеет по крайней мере m различных непрерывных решений.*

Доказательство. Обозначим через $\varkappa(t)$ характеристическую функцию множества G_1 из условия (45.13). Положим

$$u_i(t) = A[\xi_i \varkappa(t)], \quad v_i(t) \equiv \eta_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{45.16}$$

Из первого условия (45.14) вытекает оценка

$$u_i(t) \geqslant \beta\xi_i \int_{G_1} k(t, s)\, ds \geqslant \beta\varepsilon_0 \xi_i \varkappa(t) \tag{45.17}$$

и, в силу (45.15),

$$Au_i(t) \geqslant u_i(t) \quad (t \in G). \tag{45.18}$$

Из второго условия (45.14) вытекает оценка

$$Av_i(t) \leqslant \alpha\eta_i \int_G k(t, s)\,ds \leqslant \alpha \| B \| v_i(t) \quad (t \in G). \tag{45.19}$$

Оценки (45.18) и (45.19) можно рассматривать как соотношения (45.4). Поэтому теорема 45.6 будет вытекать из теоремы 45.2, если мы покажем, что функции (45.16) удовлетворяют соотношениям (45.3).

Из $\xi_i < \eta_i$ вытекает, что $\xi_i\varkappa(t) \leqslant v_i(t)$. Отсюда и из (45.19) вытекает, что $u_i(t) \leqslant \alpha \| B \| v_i(t)$. Поэтому из (45.15) вытекают первые соотношения (45.3). Вторые и третьи соотношения (45.3) являются простыми следствиями монотонности оператора A.

Для доказательства последних соотношений достаточно показать, что хотя бы при одном значении t выполнено неравенство $u_{i+1}(t) > \eta_i$. Но последнее неравенство выполнено, в силу (45.17) и (45.15), при всех значениях $t \in G_1$. ∎

Оценка числа решений, полученная в условиях теоремы 45.6, точная — простые примеры показывают, что у уравнения (45.9) может оказаться ровно m решений. Однако, если предположить, что функция $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных, то «почти в условиях теоремы 45.6» можно гарантировать существование уже $2m - 1$ решений.

Теорема 45.7. *Пусть неубывающая по и функция $f(t, u)$ непрерывна. Пусть ядро $k(t, s)$ непрерывно и положительно. Пусть выполнены условия теоремы* 45.6, *причем вместо* (45.15) *выполнены более жесткие неравенства*

$$\alpha \| B \| < 1, \quad \beta\varepsilon_0 > 1. \tag{45.20}$$

Тогда уравнение (45.9) *имеет по крайней мере* $2m - 1$ *различных непрерывных решений.*

Для доказательства достаточно заметить, что оператор (45.10) вполне непрерывен в C и удовлетворяет на функциях (45.16) условиям (45.5), а затем сослаться на теорему 45.3. ∎

В заключение параграфа приведем без доказательства одну теорему об оценке числа решений интегрального уравнения с немонотонной нелинейностью, которая является простым следствием теоремы 45.4.

Рассмотрим более общее, чем (45.9), интегральное уравнение

$$x(t) = \int_G k[t, s, x(s)]\,ds. \tag{45.21}$$

Будем считать, что функция $k(t, s, u)$ непрерывна по совокупности переменных $t, s \in G$, $u \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$k(t, s) f(s, u) \leqslant k(t, s, u) \leqslant k_1(t, s) f_1(s, u), \tag{45.22}$$

где $f(s, u)$ и $f_1(s, u)$ непрерывны, неотрицательны и не убывают по переменной u, а ядра $k(t, s)$ и $k_1(t, s)$ неотрицательны и определяют вполне непрерывные в пространстве C линейные интегральные операторы B и B_1.

Теорема 45.8. *Пусть ядро $k(t, s)$ удовлетворяет условию* (45.13). *Пусть*

$$f(t, \xi_i) \leqslant \beta\xi_i, \quad f_1(t, \eta_i) \leqslant \alpha\eta_i \quad (t \in G;\ i = 1, \ldots, m), \tag{45.23}$$

где $0 \leqslant \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots < \xi_m < \eta_m$ *и*

$$\alpha \| B_1 \| \leqslant 1, \quad \beta\varepsilon_0 \geqslant 1. \tag{45.24}$$

Тогда уравнение (45.21) *имеет по крайней мере m различных непрерывных решений.*

Для доказательства нужно рассмотреть оператор

$$Ax(t) = \int_G k[t, s, x(s)]\,ds \tag{45.25}$$

на конусе K неотрицательных функций в пространстве C и заметить, что он удовлетворяет условиям теоремы 45.4, если элементы u_i и v_i определить аналогичными (45.16) равенствами

$$u_i(t) = \int_{G_1} k(t, s) f(s, \xi_i)\,ds, \quad v_i(t) \equiv \eta_i. \ ∎ \tag{45.26}$$

Если ядра $k(t, s)$ и $k_1(t, s)$ в оценках (45.22) непрерывны и положительны, а вместо (45.24) выполнены строгие неравенства $\alpha \| B_1 \| < 1$ и $\beta\varepsilon_0 > 1$, то уравнение (45.21) имеет (в силу теоремы 45.5) по крайней мере $2m - 1$ различных непрерывных решений.

§ 46. Уравнения с вогнутыми и выпуклыми операторами

46.1. Постановка задачи. В этом параграфе будут установлены некоторые специальные признаки единственности ненулевого решения в конусе K у уравнения

$$x = Ax \tag{46.1}$$

с положительным оператором A.

Чтобы пояснить их идею, рассмотрим вначале скалярное уравнение $x = \varphi(x)$ с непрерывной функцией $\varphi(x)$, определенной на $[0, \infty)$. Допустим, что у этого уравнения есть положительное решение x^*. Пусть $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$ при $x_1 < x_2$. Тогда для единственности положительного решения достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была вогнутой или выпуклой. Более того, достаточно (рис. 3), чтобы функция $x^{-1}\varphi(x)$ была строго

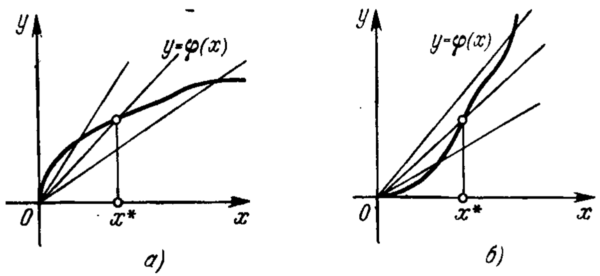


Рис. 3.

монотонной. Последнее свойство легко записать в виде неравенств: строгое убывание функции $x^{-1}\varphi(x)$ (обобщенная вогнутость функции $\varphi(x)$) означает, что $\varphi(tx) > t\varphi(x)$ при $x > 0$ и $0 < t < 1$, а строгое возрастание (обобщенная выпуклость функции $\varphi(x)$) — что $\varphi(tx) < t\varphi(x)$ при $x > 0$ и $0 < t < 1$.

Так как последние свойства записаны в виде неравенств, то легко описать их естественные обобщения на операторы в полуупорядоченных пространствах. Таким образом, легко определить понятия вогнутых и выпуклых операторов (полные определения даны ниже). Их естественность определится и тем, что вогнутость и выпуклость, например, интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_G k[t, s, x(s)]\,ds \tag{46.2}$$

обеспечиваются соответственно вогнутостью и выпуклостью скалярной функции $k(t, s, u)$ по переменной u.

Уравнения (46.1) с вогнутыми операторами и уравнения с выпуклыми операторами обладают неожиданными, на первый взгляд, различиями. Как оказывается, уравнения с вогнутыми операторами весьма близки по свойствам к соответствующим скалярным уравнениям. Для уравнений же с выпуклыми операторами такой близости нет — например, для них неверна, как правило, теорема о единственности положительного решения.

Конкретные уравнения с вогнутыми нелинейностями изучались давно. В частности, П. С. Урысон (Матем. сб. **31** (1924)) изучил при помощи специального варианта метода последовательных приближений интегральное уравнение с оператором (46.2), в котором функция $k(t, s, u)$ вогнута по переменной u. Анализ теорем П. С. Урысона был первым толчком в создании теории вогнутых операторов.

Первые общие теоремы о вогнутых операторах получены М. А. Красносельским и Л. А. Ладыженским (Тр. Моск. матем. о-ва **3** (1954), 321—346). Дальнейшее развитие теории вогнутых и выпуклых операторов, ряд ее приложений и библиографию работ до 1962 г. см. в [23]. Особо отметим большую роль в развитии этой теории работ И. А. Бахтина, В. С. Климова, В. Я. Стеценко, Б. Имомиазарова. В последующие годы теория вогнутых и выпуклых операторов получила существенное развитие и широко применялась в теории интегральных уравнений, краевых задач, теории нелинейных колебаний, исследовании устойчивости решений эволюционных задач, теории почти периодических решений дифференциальных уравнений и др. Ряд новых результатов и библиографию читатель может найти в книгах [24], [25], [26], [27]. Новые пути развития теории вогнутых операторов недавно предложил В. И. Опойцев (Сибирск. матем. ж. **16**, № 4 (1975)). Полное изложение теории вогнутых и выпуклых операторов заняло бы слишком много места — это отдельная проблема. Мы ограничимся несколькими простыми утверждениями, либо непосредственно примыкающими к построениям этой книги, либо необходимыми для понимания дальнейшего текста.

46.2. Вогнутые операторы. Рассмотрим нелинейный оператор A, положительный на конусе K в банаховом пространстве E. Пусть u_0 — некоторый фиксированный ненулевой элемент из K. Оператор A называется *u_0-вогнутым* на K, если для каждого ненулевого $x \in K$ выполнены соотношения

$$\alpha(x)\,u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta(x)\,u_0, \tag{46.3}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x) > 0$, и если для каждого такого $x \in K$, что $\alpha_1(x)\,u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x)\,u_0$ $(\alpha_1(x),\ \beta_1(x) > 0)$, справедливы соотношения

$$A(tx) \geqslant [1 + \eta(x; t)]\,tAx \quad (0 < t < 1), \tag{46.4}$$

где $\eta(x; t) > 0$.

Теорема 46.1. *Пусть оператор A монотонен и u_0-вогнут на K. Тогда уравнение* (46.1) *имеет в конусе K не больше чем одно ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть $Ax_1 = x_1$ и $Ax_2 = x_2$, где x_1 и x_2 — различные ненулевые элементы из K. Без ограничения общности можно считать, что $x_1 \overline{\geqslant} x_2$.

Из неравенств $x_1 = Ax_1 \geqslant \alpha(x_1)u_0$ и $x_2 = Ax_2 \leqslant \beta(x_2)u_0$ вытекает, что $x_1 \geqslant tx_2$ при малых положительных t. Поэтому найдется такое $t_0 \in (0, 1)$, что $x_1 \geqslant t_0x_2$ и $x_1 \overline{\geqslant} tx_2$ при $t > t_0$.

Из свойства (46.4) вытекает, что

$$A(t_0x_2) \geqslant (1+\eta)\, t_0Ax_2,$$

где $\eta > 0$. Но тогда из монотонности оператора A вытекает цепочка соотношений

$$x_1 = Ax_1 \geqslant A(t_0x_2) \geqslant (1+\eta)\, t_0Ax_2 = (1+\eta)\, t_0x_2.$$

Следовательно, $x_1 \geqslant tx_2$ при $t = (1+\eta)\,t_0 > t_0$ — мы пришли к противоречию. ∎

Оператор A называется *u_0-монотонным*, если он обладает свойством (46.3), обладает более слабым, чем (46.4), свойством

$$A(tx) \geqslant tAx \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in K), \tag{46.5}$$

если $A(tx) \neq tAx$ при $0 < t < 1$ и при каждом $x \geqslant \gamma(x)\,u_0$ $(\gamma(x)>0)$ и, наконец, если из $x \geqslant y$ и $x \neq y$ следует неравенство $Ax \geqslant Ay + \varepsilon_0u_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x, y) > 0$. Очевидна монотонность в обычном смысле каждого u_0-монотонного оператора.

Теорема 46.2. *Уравнение* (46.1) *с u_0-монотонным оператором имеет в конусе K не больше чем одно ненулевое решение.*

Доказательство. Пусть $Ax_1 = x_1$ и $Ax_2 = x_2$, где x_1 и x_2 — ненулевые элементы из K. Обозначим (как при доказательстве теоремы 46.1) через t_0 такое число из промежутка (0, 1), что $x_1 \geqslant t_0x_2$ и $x_1 \overline{\geqslant} tx_2$ при $t > t_0$.

Из равенства $x_1 = t_0x_2$ следовало бы, что

$$x_1 = Ax_1 = A(t_0x_2) \neq t_0Ax_2 = t_0x_2 = x_1.$$

Поэтому $x_1 \neq t_0x_2$ и

$$Ax_1 \geqslant A(t_0x_2) + \varepsilon u_0 \geqslant t_0Ax_2 + \varepsilon u_0 \quad (\varepsilon > 0). \tag{46.6}$$

Но $Ax_2 \leqslant \beta(x_2)\,u_0$ и из (46.6) вытекает оценка $Ax_1 \geqslant \left[t_0 + \frac{\varepsilon}{\beta(x_2)}\right] Ax_2$. Таким образом, $x_1 \geqslant tx_2$ при $t = t_0 + \frac{\varepsilon}{\beta(x_2)} > t_0$ — мы пришли к противоречию. ∎

Простым примером u_0-вогнутого монотонного оператора может служить оператор-константа $Ax \equiv u_0$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_G k(t, s)\,\varphi[x(s)]\,ds \tag{46.7}$$

с непрерывным и положительным ядром $k(t, s)$. Пусть функция $\varphi(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ непрерывна и неотрицательна, причем $\varphi(x)$ не убывает, а функция $x^{-1}\varphi(x)$ строго убывает (см. график а) на рис. 3, стр. 380). Положим $u_0(t) \equiv 1$. Тогда оператор (46.7) вполне непрерывен, положителен, монотонен и u_0-вогнут на конусе K неотрицательных функций в пространстве C. Читатель легко построит другие примеры.

В этом пункте и ниже мы рассматриваем операторы, определенные и вогнутые на всем конусе K. Теоремы 46.1, 46.2 и дальнейшие утверждения об уравнениях с вогнутыми операторами естественным образом модифицируются, если соответствующий оператор определен и вогнут на множествах другой природы (конусных отрезках, пересечениях конуса с некоторым шаром и т. д.).

46.3. Разрешимость уравнений с вогнутым оператором. Для доказательства существования ненулевых решений у уравнения (46.1) с монотонным вогнутым оператором A естественно применять теоремы из §§ 33, 44, 45. Оказывается, что *у таких уравнений с вполне непрерывным оператором A ненулевые решения есть в том и только том случае, когда A является сжатием конуса K*! Более того, верна

Теорема 46.3. *Пусть конус K нормален. Пусть вполне непрерывный оператор A положителен, монотонен и u_0-вогнут на конусе K. Пусть, наконец, уравнение* (46.1) *имеет в конусе K ненулевое решение x^*. Тогда найдутся такие $r, R > 0$, что*

$$Ax \overline{\leqslant} x \quad (x \in K,\ \ 0 < \|x\| < r) \tag{46.8}$$

и

$$Ax \overline{\geqslant} x \quad (x \in K,\ \ \|x\| > R). \tag{46.9}$$

Доказательство. Пусть $Ax \leqslant x$, $x \in K$ и $x \neq 0$. Предположим, что $x \overline{\geqslant} x^*$. Так как $x \geqslant Ax \geqslant \alpha(x)\,u_0$ и $x^* = Ax^* \leqslant \beta(x^*)\,u_0$, то $x \geqslant tx^*$ при малых положительных t.

Следовательно, найдется такое $t_0 \in (0, 1)$, что $x \geqslant t_0 x^*$ и $x \overline{\geqslant} tx^*$ при $t > t_0$. Из $x \geqslant t_0 x^*$, монотонности оператора A и свойства (46.4) вытекают соотношения

$$x \geqslant Ax \geqslant A(t_0 x^*) \geqslant t_0(1+\eta) Ax^* \geqslant t_0(1+\eta) x^*.$$

Таким образом, $x \geqslant tx^*$ при $t = t_0(1+\eta) > t_0$ — мы пришли к противоречию.

Итак, из $Ax \leqslant x$ вытекает соотношение $x \geqslant x^*$. Следовательно, из $x \overline{\geqslant} x^*$ следует, что $Ax \overline{\leqslant} x$. Поэтому (46.8) выполнено при

$$r = \rho(0, K + x^*) = \inf_{z \in K} \|z + x^*\|.$$

В этих рассуждениях нормальность конуса K не была использована.

Пусть теперь $Ax \geqslant x$, $x \in K$ и $x \neq 0$. Допустим, что $x \leqslant x^*$. Из $x \leqslant Ax \leqslant \beta(x) u_0$ и $x^* = Ax^* \geqslant \alpha(x^*) u_0$ вытекает справедливость оценок $x^* \geqslant tx$ при малых положительных t. Следовательно, найдется такое $t_0 \in (0, 1)$, что $x^* \geqslant t_0 x$ и $x^* \overline{\geqslant} tx$ при $t > t_0$. Но тогда при некотором положительном η

$$x^* = A\left(t_0 \frac{x^*}{t_0}\right) \geqslant t_0(1+\eta) A\left(\frac{x^*}{t_0}\right) \geqslant t_0(1+\eta) Ax \geqslant t_0(1+\eta) x$$

— мы снова пришли к противоречию.

Итак, из $Ax \geqslant x$ вытекает соотношение $x \leqslant x^*$. Поэтому $Ax \overline{\geqslant} x$ при $x \overline{\leqslant} x^*$. Значит, (46.9) выполнено при

$$R = \sup_{0 \leqslant z \leqslant x^*} \|z\|.$$

Конечность числа R вытекает из нормальности конуса K. ∎

Непосредственным следствием (см. § 33) теорем 46.1 и 46.3 является

Теорема 46.4. *Пусть уравнение* (46.1) *с вполне непрерывным, положительным, монотонным и u_0-вогнутым оператором A имеет ненулевое решение $x^* \in K$. Тогда*

$$\operatorname{ind}(x^*, I - A; K) = 1. \tag{46.10}$$

По существу без изменений в доказательствах устанавливаются аналоги теорем 46.3 и 46.4 для уравнений (46.1) с вполне непрерывными, положительными и u_0-монотонными операторами.

Подчеркнем принципиальную роль теоремы 46.3. В силу этой теоремы при доказательстве существования ненулевых положительных решений у уравнений с вполне непрерывными монотонными и вогнутыми операторами нужно пытаться пользоваться каким-либо вариантом теоремы о сжатии конуса K. Если удается построить для оператора A инвариантный конусный отрезок, то полная непрерывность оператора становится, как правило, лишним предположением (см. § 38).

46.4. Выпуклые операторы. Определение выпуклого оператора полностью аналогично определению вогнутого оператора.

Пусть u_0 — фиксированный ненулевой элемент конуса $K \subset E$. Оператор A называется *u_0-выпуклым* на конусе K, если для каждого ненулевого $x \in K$ выполнены соотношения (46.3) и если для каждого такого $x \in K$, который удовлетворяет неравенствам $\alpha_1(x) u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x) u_0$ $(\alpha_1(x), \beta_1(x) > 0)$, выполнены соотношения

$$A(tx) \leqslant [1 - \eta(x, t)] tAx \quad (0 < t < 1), \tag{46.11}$$

где $\eta(x, t) > 0$.

Рассмотрим, например, интегральный оператор (46.7) с непрерывным и положительным ядром $k(t, s)$. Пусть функция $\varphi(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ непрерывна и неотрицательна, причем функции $\varphi(x)$ и $x^{-1}\varphi(x)$ возрастают (см. график б) на рис. 3, стр. 380). Тогда, как нетрудно показать, оператор (46.7) u_0-выпуклый $(u_0(t) \equiv 1)$ на конусе неотрицательных функций в пространстве C.

Вогнутость оператора означает (см. теорему 46.3), что он содержит лишь «слабые» нелинейности — значения оператора на элементах конуса растут «медленно» при росте норм элементов. Выпуклость же оператора означает, как правило, что он содержит «сильные» нелинейности. В связи с этим для доказательства существования ненулевых решений в конусе K у уравнения (46.1) с выпуклым оператором следует пытаться применять различные варианты теорем о растяжении конуса.

К сожалению, для уравнений (46.1) с монотонными u_0-выпуклыми операторами A, удовлетворяющими условию $A0 = 0$, нет аналога теоремы 46.1 — такие уравнения могут иметь несколько различных ненулевых решений в конусе K.

Рассмотрим в качестве примера оператор

$$A\{\xi_1, \xi_2\} = \left\{ \xi_1^2 + \xi_2,\ 4\xi_2^2 + \frac{1}{16}\xi_1 \right\} \tag{46.12}$$

в двумерном пространстве точек $x = \{\xi_1, \xi_2\}$. Пусть $u_0 = \{1, 1\}$. Оператор (46.12) монотонен и u_0-выпуклый на конусе K точек с неотрицательными компонентами. Однако, уравнение (46.1) с оператором (46.12) имеет ровно три положительных решения (проверьте).

Мы приведем в этом пункте три простые теоремы об условиях единственности ненулевого положительного решения у уравнений с выпуклыми операторами.

Теорема 46.5. *Пусть монотонный и u_0-выпуклый оператор A обладает дополнительным свойством: из $0 \leqslant x \leqslant y$ и $x \neq y$ следует оценка $Ay \geqslant Ax + \varepsilon u_0$, где $\varepsilon > 0$. Пусть каждые два ненулевых положительных решения x_1 и x_2 уравнения* (46.1) (*если такие решения существуют*) *сравнимы друг с другом — либо $x_1 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant x_2$. Тогда уравнение* (46.1) *имеет в конусе K не больше одного ненулевого решения.*

Доказательство. Пусть $x_1 = Ax_1$, $x_2 = Ax_2$ и, для определенности, $x_1 \leqslant x_2$. Если $x_1 \neq x_2$, то при некотором положительном ε выполнены неравенства

$$x_2 = Ax_2 \geqslant Ax_1 + \varepsilon u_0 \geqslant x_1 \left[1 + \frac{\varepsilon}{\beta(x_1)}\right].$$

Поэтому найдется такое $t_0 \in (0, 1)$, что $x_1 \leqslant t_0 x_2$ и $x_1 \overline{\leqslant}$ при $t < t_0$. Но тогда, в силу (46.11), при некотором положительном η

$$x_1 = Ax_1 \leqslant A(t_0 x_2) \leqslant t_0(1 - \eta) Ax_2 = t_0(1 - \eta) x_2$$

— мы пришли к противоречию. Значит, $x_1 = x_2$. ∎

В условиях теоремы 46.5 можно отказаться от дополнительного свойства, которым должен обладать u_0-выпуклый монотонный оператор A, если из каких-либо других соображений известно, что каждые два ненулевых положительных решения x_1 и x_2 уравнения (46.1) либо совпадают, либо для них при некотором $t < 1$ справедливо одно из соотношений: $x_1 \leqslant tx_2$ или $x_2 \leqslant tx_1$.

Теорема 46.5 упрощается (причем доказательство, по существу, не меняется), если конус K телесен.

Теорема 46.6. *Пусть конус K телесен. Пусть для каждых двух ненулевых положительных решений x_1 и x_2 уравнения* (46.1) *с монотонным u_0-выпуклым оператором A одна из разностей $x_1 - x_2$, $x_2 - x_1$ либо равна нулю, либо является внутренним элементом конуса K. Тогда уравнение* (46.1) *имеет в конусе K не больше одного ненулевого решения.*

Последний признак единственности положительного решения, который мы приведем, является непосредственным следствием теоремы 20.6 об алгебраическом числе особых точек векторного поля и относится не только к уравнениям с выпуклыми операторами.

Теорема 46.7. *Пусть вполне непрерывный положительный оператор A является растяжением или сжатием телесного конуса K. Пусть для положительных ненулевых решений уравнения* (46.1) *известна априорная оценка $x \in T$, где T — связное множество, состоящее из внутренних элементов конуса K. Пусть, наконец, A дифференцируем на T и число 1 не является собственным значением линейных операторов $A'(x)$ при всех $x \in T$. Тогда уравнение* (46.1) *имеет в конусе K не больше одного ненулевого решения.*

Опишем две ситуации, в которых при помощи теорем 46.5 — 46.7 можно получить эффективные признаки единственности положительных решений у конкретных нелинейных уравнений (46.1). Во всех дальнейших построениях параграфа конус K предполагается телесным и нормальным.

Предположим, что $A0 = 0$ и оператор A дифференцируем в нулевой точке. Пусть у оператора $B = A'(0)$ есть простое положительное собственное значение λ_0, а остальной спектр лежит в круге $|\lambda| \leqslant a < \lambda_0$. Обозначим через e_0 собственный вектор оператора B, отвечающий собственному значению λ_0, а через E_0 инвариантное подпространство оператора B, отвечающее остальной части его спектра. Тогда каждый элемент $x \in E$ единственным образом представим в виде $x = \xi(x) e_0 + Px$, где $\xi(x)$ — линейный функционал, а P — линейный оператор проектирования на E_0. Обозначим через $K(\rho)$ конус, выделенный в пространстве E неравенствами $\xi(x) \geqslant 0$, $\|Px\| \leqslant \rho\xi(x)$. Несложный подсчет показывает, что оператор A положителен (относительно конуса $K(\rho)$) на пересечении $K(\rho)$ с малой шаровой окрестностью нулевой точки.

Допустим, далее, что A можно представить в виде суммы $A = B + C + D$, где C — однородный оператор некоторого порядка $k \geqslant 2$, а D содержит члены более высокого, чем k, порядка малости. Как показывает сравнительно простой (но громоздкий) подсчет, при $\xi(Ce_0) < 0$ оператор A в окрестности нулевой точки обладает на конусе $K(\rho)$ свойством e_0-вогнутости, а при $\xi(Ce_0) > 0$ — свойством e_0-выпуклости. При этом, как оказывается, одна из разностей $x_1 - x_2$, $x_2 - x_1$ двух ненулевых решений уравнения (46.1), имеющих достаточно малую норму и лежащих в $K(\rho)$ (если такие решения существуют), либо равна нулю, либо является внутренним элементом конуса $K(\rho)$. Поэтому теоремы 46.1 и 46.6 гарантируют единственность в конусе $K(\rho)$ ненулевого решения малой нормы.

Описанная конструкция (см. [23], гл. 6, § 4) удобна при анализе точек бифуркации. Задача о точках бифуркации исследуется другими методами ниже в § 56.

В качестве второго примера рассмотрим интегральное уравнение частного вида

$$x(t) = \int_0^1 k(t, s)[x(s) + ax^p(s)]\,ds, \tag{46.13}$$

где $a > 0$, $p > 1$, а ядро $k(t, s)$ непрерывно и

$$0 < m \leqslant k(t, s) \leqslant M < 1. \tag{46.14}$$

Определенный правой частью уравнения (46.13) оператор A вполне непрерывен, дифференцируем, положителен, монотонен и u_0-выпуклый ($u_0(t) \equiv 1$) на конусе K неотрицательных функций в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ функций.

Обозначим через K_1 конус таких функций $x(t) \in K$, для которых

$$M \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) \geqslant m \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t).$$

Очевидно, $AK \subset K_1$.

Так как при $x(t) \in K$

$$Ax(t) \leqslant M[\|x(t)\| + a\|x(t)\|^p] \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{46.15}$$

и при $x(t) \in K_1$

$$Ax(t) \geqslant m\left[\frac{m}{M}\|x(t)\| + a\frac{m^p}{M^p}\|x(t)\|^p\right] \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{46.16}$$

то A является растяжением конуса K_1. Из теоремы 44.3 вытекает существование у уравнения (46.13) по крайней мере одного положительного решения. Каждое такое решение, конечно, лежит в конусе K_1.

Обозначим через T множество функций, для которых справедливы оценки

$$\frac{m}{M}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{M} - 1\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \leqslant x(t) \leqslant \frac{M}{m}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{46.17}$$

Пусть $x(t)$ — положительное решение уравнения (46.13). Из (46.15) вытекает, что

$$x(t) \geqslant \frac{m}{M}\|x(t)\| \geqslant \frac{m}{M}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{M} - 1\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

С другой стороны,

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) \geqslant m\{\min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) + a[\min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t)]^p\}$$

и поэтому

$$x(t) \leqslant \frac{M}{m} \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t) \leqslant \frac{M}{m}\left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Итак, все положительные решения уравнения (46.13) лежат в T.

Допустим, что у уравнения (46.13) есть два различных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В силу теоремы 46.6 разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ будет знакопеременной функцией и поэтому при каждом постоянном c справедливо неравенство $\|y(t) - c\| \geqslant \frac{1}{2}\|y(t)\|$. В частности,

$$\left\|y(t) - \frac{b_1 + b_2}{2}\int_0^1 y(s)\,ds\right\| \geqslant \frac{1}{2}\|y(t)\|, \tag{46.18}$$

где

$$b_1 = m\left[1 + p\left(\frac{1}{M} - 1\right)\frac{m^{p-1}}{M^{p-1}}\right],$$

$$b_2 = M\left[1 + p\left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{M^{p-1}}{m^{p-1}}\right].$$

По теореме о среднем

$$y(t) = \int_0^1 k(t, s)[1 + apz^{p-1}(s)]\, y(s)\, ds,$$

причем $\min\{x_1(t), x_2(t)\} \leqslant z(t) \leqslant \max\{x_1(t), x_2(t)\}$, т. е. $z(t) \in T$. Следовательно,

$$b_1 \leqslant k(t, s)[1 + apz^{p-1}(s)] \leqslant b_2 \quad (0 \leqslant t,\ s \leqslant 1),$$

откуда

$$\left| k(t, s)[1 + apz^{p-1}(s)] - \frac{b_1 + b_2}{2} \right| \leqslant \frac{b_2 - b_1}{2}$$

и, далее,

$$\left| y(t) - \frac{b_1 + b_2}{2} \int_0^1 y(s)\, ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left\{ k(t, s)[1 + apz^{p-1}(s)] - \frac{b_1 + b_2}{2} \right\} y(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{b_2 - b_1}{2} \| y(t) \|.$$

Но тогда из (46.18) вытекает, что $b_2 - b_1 \geqslant 1$. Таким образом, если $b_2 - b_1 < 1$, то у уравнения (46.13) не может быть различных положительных решений. Нами доказана

Теорема 46.8. *Если*

$$M\left[1 + p\left(\frac{1}{m} - 1\right)\frac{M^{p-1}}{m^{p-1}}\right] <$$

$$< 1 + m\left[1 + p\left(\frac{1}{M} - 1\right)\frac{m^{p-1}}{M^{p-1}}\right], \quad (46.19)$$

то уравнение (46.13) *имеет одно и только одно положительное решение.*

Теоремы 46.5 — 46.7 позволяют устанавливать единственность положительного решения у уравнений с выпуклыми нелинейностями лишь в жестких условиях — когда эти нелинейности «не слишком быстро» растут. Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим внимательнее неравенство (46.19). Оно заведомо выполнено при близких к 1 значениях p, если

$$M^2 - m^2 < Mm; \quad (46.20)$$

оно выполнено при каждом фиксированном p, если M и m достаточно близки к 1. Если ядро $k(t, s)$ фиксировано и выполнено (46.20), то (46.19) справедливо лишь при значениях p, не превышающих некоторое $p_0 = p_0(m, M)$.

В связи с последними рассуждениями возникает естественная гипотеза, что для единственности ненулевого решения у уравнения (46.1) с выпуклым оператором нужна некоторая квалифицированная оценка роста величин $\| A(\xi x) \|$ при росте ξ. Оказывается, что это неверно. Например, уравнение (46.1) с оператором

$$Ax(t) = \int_0^1 g(t, s) f[x(s)]\, ds, \quad (46.21)$$

ядром которого является функция Грина дифференциального оператора $Lx(t) = -x''(t)$ при граничных условиях $x(0) = x(1) = 0$, имеет не более одного ненулевого неотрицательного решения при любой выпуклой и монотонной функции $f(u)$ ($f(0) = 0$)! Для доказательства этого хорошо известного факта достаточно рассмотреть фазовый портрет уравнения $x'' + f(x) = 0$. Однако неизвестно, какие таинственные свойства функции Грина $g(t, s)$ могут позволить выделить такой достаточно обширный класс неотрицательных ядер $k(t, s)$, для которых каждое уравнение (46.1) с оператором (46.7) имеет не больше одного ненулевого неотрицательного решения при любой монотонной выпуклой $f(u)$ ($f(0) = 0$).

Многочисленные примеры анализа задач с ненулевыми и неотрицательными решениями читатель может найти в [23].

§ 47. Ненулевые решения уравнений с параметрами

47.1. Постановка задачи. Различные проблемы теоретического и прикладного характера приводят к анализу уравнений с параметрами. Интерес представляют вопросы о существовании и числе решений либо при заданных, либо при априори неопределенных значениях параметров; о характере зависимости решений от параметров; о топологической структуре множества решений, отвечающих всем рассматриваемым значениям параметров, и т. д. Примерами могут служить задачи, в которых ищутся формы потери устойчивости упругих или упругопластических систем, — здесь роль параметров играют нагрузки. Далее укажем задачи о периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений — здесь роль параметра играет неизвестный период. Количество примеров легко умножить.

Наиболее хорошо изучена ситуация, когда при одном из значений параметров решения изучаемого уравнения известны, а интерес представляют изменения решений при малых вариациях заданных значений параметров. Здесь могут встретиться самые различные явления: при малых изменениях параметров решения могут мало меняться, но могут и исчезать, решения могут разветвляться, могут «из бесконечности» приходить новые решения и т. д. Для анализа этих явлений разработаны эффективные аналитические, приближенные и качественные методы (А. М. Ляпунов, А. Пуанкаре, Э. Шмидт, А. И. Некрасов, Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов и др.); соответствующие задачи выходят за рамки этой книги и мы их коснемся лишь частично в гл. 8. Более сложны нелокальные задачи теории уравнений с параметрами; некоторые теоремы, относящиеся к нелокальным задачам, излагаются в этом параграфе.

Нас будут интересовать лишь ненулевые решения рассматриваемых уравнений (независимо от того, является ли нуль их решением). Например, в задачах о формах потери устойчивости именно ненулевые решения описывают эти формы, в задачах о периодических решениях ненулевым решениям соответствующих операторных уравнений отвечают периодические решения, отличные от состояний равновесия, и т. д.

Ограничимся уравнениями вида

$$x = A(x;\ \lambda) \tag{47.1}$$

с вполне непрерывным оператором A, действующим в банаховом пространстве E и зависящим от скалярного параметра λ. Полная непрерывность оператора A позволит

нам применить теорию вращения векторных полей

$$\Phi(\lambda)x = x - A(x;\ \lambda). \tag{47.2}$$

В доказываемых ниже теоремах можно отказаться от полной непрерывности операторов A, но тогда поля (47.2) должны принадлежать какому-либо другому классу полей (см. гл. 4), для которых определено вращение с обычными свойствами.

Описание множества тех значений параметра λ, при которых уравнение (47.1) имеет ненулевые решения, обычно не требует новых соображений по сравнению с обычными теоремами о ненулевых решениях уравнений без параметров. Здесь применимы все теоремы глав 5 и 6.

Пусть, например, $A(0;\ \lambda) \neq 0$ и существует производная $A'(\infty;\ \lambda)$; тогда из принципа ненулевого вращения вытекает существование у уравнения (47.1) ненулевых решений при всех тех λ, при которых 1 не является собственным значением линейного оператора $A'(\infty;\ \lambda)$. Если $A(0;\ \lambda) \equiv 0$ и существуют производные $A'(0;\ \lambda)$ и $A'(\infty;\ \lambda)$, то в силу теоремы об алгебраическом числе особых точек векторного поля у уравнения (47.1) есть ненулевые решения при всех тех λ, при которых 1 не является собственным значением операторов $A'(0;\ \lambda)$ и $A'(\infty;\ \lambda)$, а сумма $\beta(\lambda)$ кратностей всех больших чем 1 вещественных собственных значений двух операторов $A'(0;\ \lambda)$ и $A'(\infty;\ \lambda)$ нечетна. Сформулированные утверждения можно в различных планах усиливать; если оператор положителен, то можно говорить о ненулевых положительных решениях и т. д.

В этом параграфе мы более подробно остановимся лишь на конструкциях специального характера, теряющих смысл в случае уравнений без параметров.

Во-первых, наличие в уравнении параметра позволит нам установить существование решений не в некоторых областях (как это было в большинстве теорем гл. 5 и предыдущих параграфов настоящей главы), а на некоторых поверхностях в пространстве E. Во-вторых, мы покажем, что в широких предположениях ненулевые решения уравнения (47.1) образуют так называемые непрерывные ветви. В частности, будет выделен класс положительных операторов с монотонными минорантами; положительные собственные векторы которых образуют бесконечные непрерывные ветви. Наконец, для некоторых более частных классов уравнений мы установим монотонность решений как функций параметра λ. Будут приведены некоторые иллюстративные примеры приложений.

Библиографию работ до 1962 г., посвященных теоремам типа доказываемых в параграфе и их приложениям, см. в [22], [23]. Теоремам о ненулевых решениях различных уравнений с параметрами посвящены сотни статей. В частности, уравнения с положительными операторами изучали И. А. Бахтин, А. Р. Есоян, Е. Цайдлер (E. Zeidler), Д. С. Конен (D. S. Conen), Ю. П. Красовский, А. Лангенбах (A. Langenbach), П. В. Летш (P. W. Laetsch), Я. Д. Мамедов, С. Н. Мухтаров, В. Я. Стеценко и другие авторы.

47.2. Лемма о негомотопных полях. Ниже будет удобна простая переформулировка теоремы о сохранении вращения при переходе к гомотопным полям. Эта переформулировка будет полезна и в § 56.

Будем считать, что рассматриваемые в этом параграфе вполне непрерывные по совокупности переменных операторы $A(x;\ \lambda)$ определены при всех $x \in E$, $-\infty < \lambda < \infty$. Через Ω будет обозначаться ограниченная область в E. Когда будут рассматриваться уравнения (47.1) с положительным относительно некоторого конуса K оператором A, то будет предполагаться, что $\overline{\Omega} \cap K = \overline{\Omega \cap K}$.

Лемма 47.1. *Пусть поля* (47.2) *при* $\lambda = \lambda_1$ *и* $\lambda = \lambda_2$ *невырождены на* $\dot{\Omega}$ *и*

$$\gamma[\Phi(\lambda_1),\ \Omega] \neq \gamma[\Phi(\lambda_2),\ \Omega]. \tag{47.3}$$

Тогда найдется по крайней мере одно такое $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, *при котором уравнение* (47.1) *имеет на* $\dot{\Omega}$ *по крайней мере одно решение.*

Лемма 47.2. *Пусть оператор* $A(x;\ \lambda)$ *положителен на конусе* K. *Пусть поля* (47.2) *при* $\lambda = \lambda_1$ *и* $\lambda = \lambda_2$ *невырождены на множестве* $\dot{\Omega}(K)$ *и*

$$\gamma[\Phi(\lambda_1),\ \Omega(K);\ K] \neq \gamma[\Phi(\lambda_2),\ \Omega(K);\ K]. \tag{47.4}$$

Тогда найдется по крайней мере одно такое $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, *при котором уравнение* (47.1) *имеет на* $\dot{\Omega}(K)$ *по крайней мере одно решение.*

Обе леммы доказываются одинаково — если уравнение (47.1) не имеет на $\dot{\Omega}$ (на $\dot{\Omega}(K)$) решений при всех $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, то поля $x - A(x;\ \lambda_1)$ и $x - A(x;\ \lambda_2)$ на этом множестве гомотопны (положительно гомотопны), а это противоречит неравенству (47.3) (неравенству (47.4)). ∎

Рассмотрим частный класс уравнений (47.1) — уравнения

$$x = \lambda A x. \tag{47.5}$$

Ненулевые решения этих уравнений называют *собственными векторами* нелинейного оператора A, а соответствующие значения λ — *характеристическими значениями* (числа λ^{-1} называются *собственными значениями*). Так как для нелинейных уравнений неверен принцип суперпозиции, то роль собственных векторов в нелинейных задачах совсем не та, что в линейных, — это только лишь ненулевые решения. Впрочем, именно уравнения вида (47.5) часто встречаются в конкретных нелинейных задачах и поэтому выделение их в специальный объект исследования оправдано.

Теорема 47.1. *Пусть вполне непрерывный оператор* A *не имеет неподвижных точек на границе ограниченной области* Ω, *содержащей нулевую точку, и пусть*

$$\gamma(I - A,\ \Omega) \neq 1. \tag{47.6}$$

Тогда оператор A *имеет на* $\dot{\Omega}$ *по крайней мере один собственный вектор, которому соответствует положительное характеристическое значение.*

Теорема 47.2. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор* A *не имеет неподвижных точек на относительной границе* $\dot{\Omega}(K)$, *где ограниченная область* Ω *содержит нулевую точку. Пусть*

$$\gamma[I - A,\ \Omega(K);\ K] \neq 1. \tag{47.7}$$

Тогда оператор A *имеет на* $\dot{\Omega}(K)$ *по крайней мере один собственный вектор, которому соответствует положительное характеристическое значение.*

Обе теоремы доказываются одинаково. Рассмотрим поля $\Phi(\lambda) = I - \lambda A$. Вращение поля $\Phi(0)$ на $\dot{\Omega}$ (соответственно на $\dot{\Omega}(K)$) равно 1. Остается сослаться на лемму 47.1 (на лемму 47.2). ∎

Как видно из доказательства, в условиях теорем 47.1 и 47.2 существует собственный вектор, которому соответствует характеристическое значение из промежутка (0, 1).

Отметим еще две теоремы о существовании собственных векторов на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω, содержащей нулевую точку.

Теорема 47.3. *Пусть пространство E бесконечномерно. Пусть вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$\|Ax\| \geqslant \alpha > 0 \quad (x \in \dot{\Omega}). \tag{47.8}$$

Тогда A имеет на $\dot{\Omega}$ по крайней мере один собственный вектор, которому отвечает положительное собственное значение.

Теорема 47.4. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$\|Ax\| \geqslant \alpha > 0 \quad (x \in \dot{\Omega} \cap K). \tag{47.9}$$

Тогда A имеет на $\dot{\Omega} \cap K$ по крайней мере один собственный вектор.

Для доказательства этих теорем достаточно заметить, что вращение на $\dot{\Omega}$ (на $\dot{\Omega} \cap K$) поля $I - \xi A$ при больших ξ равно нулю, а затем сослаться на теорему 47.1 (теорему 47.2). ∎

47.3. Непрерывные ветви решений. Если при каждом λ уравнение (47.1) имеет единственное решение $x(\lambda)$, то в естественных условиях $x = x(\lambda)$ — это непрерывная кривая в пространстве E. Как оказывается, и в более общих условиях совокупности решений уравнения (47.1) образуют множества, обладающие многими свойствами непрерывных кривых.

Через $X(\lambda)$ будем обозначать множество всех решений уравнения (47.1) при фиксированном значении параметра λ, а через $\mathfrak{M}$ — объединение всех $X(\lambda)$. Каждое множество $X(\lambda)$ замкнуто; из $\lambda_n \to \lambda_0$, $x_n \to x_0$, $x_n \in X(\lambda_n)$ следует равенство $x_0 = A(x_0, \lambda_0)$. Каждой точке $x \in \mathfrak{M}$ отвечают такие $\lambda(x)$, что $x \in X[\lambda(x)]$. Функционал $\lambda(x)$ в общем случае неоднозначен.

Скажем, что множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ решений уравнения (47.1) образует *непрерывную ветвь длины r в окрестности нулевой точки*, если непусто пересечение множества $\mathfrak{N}$ с границей каждой лежащей в шаре $\|x\| < r$ окрестности нуля; слова «длины r» мы будем опускать в тех случаях, когда точное значение длины непрерывной ветви не играет роли. Аналогичным образом определяются *непрерывные ветви решений в окрестности бесконечно удаленной точки* пространства E. Множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ образует *бесконечную непрерывную ветвь*, если непусто пересечение множества $\mathfrak{N}$ с границей каждой ограниченной области, содержащей нулевую точку. Наконец, множество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ образует *непрерывную ветвь решений уравнения* (47.1), *соединяющую множества F_1 и F_2 без общих точек*, если непусто пересечение множества $\mathfrak{N}$ и границы каждой области, содержащей F_1 и не имеющей общих точек с F_2.

Из утверждений предыдущего пункта вытекают простые признаки существования непрерывных ветвей решений уравнения (47.1). Сформулируем некоторые из них.

Теорема 47.5. *Пусть нулевая точка* (*точка* ∞) *является изолированной особой точкой векторных полей* (47.2) *при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, причем ее индекс при $\lambda = \lambda_1$ отличен от индекса при $\lambda = \lambda_2$. Тогда множество $\mathfrak{N}$ решений уравнения* (47.1), *отвечающих значениям λ из промежутка* (λ_1, λ_2), *образует непрерывную ветвь в окрестности нулевой точки* (*в окрестности точки* ∞).

Для доказательства достаточно сослаться на лемму 47.1.

Из леммы 47.2 вытекает аналогичное теореме 47.5 утверждение о существовании непрерывных ветвей решений в K уравнения (47.1) с положительным оператором $A(x; \lambda)$ — нужно лишь в условиях теоремы предполагать, что речь идет об индексах в смысле § 33.

Пусть существуют производные $A'(0; \lambda) = \lambda B$ и $A'(\infty; \lambda) = \lambda B_1$, причем у линейных операторов B и B_1 нет на промежутке $[a, b]$ $(0 < a < b)$ собственных значений, а сумма кратностей больших чем b собственных значений двух операторов B и B_1 нечетна. Из теоремы 43.3 вытекает, что все множества $X(\lambda)$ при $b^{-1} \leqslant \lambda \leqslant a^{-1}$ непусты. При перечисленных условиях *множество $\mathfrak{N}(b^{-1}, a^{-1})$ решений уравнения* (47.1) *при $b^{-1} < \lambda < a^{-1}$ образует непрерывную ветвь, соединяющую множества $X(b^{-1})$ и $X(a^{-1})$.*

Перейдем к уравнению (47.5) — к задаче о собственных векторах вполне непрерывного оператора A. Если пространство E имеет конечную и нечетную размерность, то проблема существования собственных векторов не возникает — каждый непрерывный оператор имеет хотя бы один собственный вектор на границе любой окрестности нулевой точки.

Из теорем 47.3 и 47.4 вытекают

Теорема 47.6. *Пусть пространство E бесконечномерно. Пусть вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию $A0 \neq 0$. Тогда собственные векторы оператора A образуют непрерывную ветвь в окрестности нулевой точки.*

Теорема 47.7. *Пусть положительный относительно конуса K вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию $A0 \neq 0$. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора A образуют непрерывную ветвь в окрестности нулевой точки.*

В связи с теоремой 47.7 напомним, что не каждый положительный вполне непрерывный оператор имеет собственные векторы — примером могут служить линейные вольтерровы интегральные операторы с непрерывным неотрицательным ядром.

Утверждения этого пункта, конечно, очень просты. Важный нетривиальный класс уравнений с бесконечной непрерывной ветвью решений мы опишем в следующем пункте.

47.4. Операторы с монотонными минорантами.

Теорема 47.8. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию*

$$Ax \geqslant Bx \quad (x \in K, \ \|x\| \leqslant r), \tag{47.10}$$

где B положителен и монотонен (но не обязательно вполне непрерывен). Пусть

$$B(tu) \geqslant \alpha t u \quad (0 \leqslant t \leqslant \gamma), \tag{47.11}$$

где $\alpha > 0$, $u \in K$ и $u \neq 0$, γ — такое число, что из $x \geqslant tu$ и $\|x\| \leqslant r$ вытекает оценка $t \leqslant \gamma$. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора A образуют в окрестности нуля непрерывную ветвь длины r.

Доказательство. Пусть Ω — лежащая в шаре $\|x\| < r$ окрестность нулевой точки. Нам нужно доказать, что на множестве $\Gamma = \dot{\Omega} \cap K$ оператор A имеет хотя бы один собственный вектор.

Выберем сходящуюся к нулю последовательность δ_n положительных чисел и положим

$$A_n x = Ax + \delta_n u \quad (x \in K). \tag{47.12}$$

Каждый из операторов (47.12) удовлетворяет условию

$$\|A_n x\| \geqslant \rho(-\delta_n u, K) = \inf_{y \in K} \|y + \delta_n u\| > 0 \quad (x \in K).$$

Поэтому из теоремы 47.4 вытекает существование у каждого оператора (47.12) по крайней мере одного собственного вектора на Γ. Иначе говоря, найдется такая последовательность $x_n \in \Gamma$, для которой

$$Ax_n + \delta_n u = \lambda_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{47.13}$$

Из (47.13) вытекает, с одной стороны, положительность чисел λ_n и, с другой, справедливость оценок

$$x_n \geqslant \lambda_n^{-1} \delta_n u. \tag{47.14}$$

В силу (47.14) найдутся такие $t_n > 0$, что $x_n \geqslant t_n u$ и $x_n \overline{\geqslant} tu$ при $t > t_n$. Так как $\|x_n\| \leqslant r$, то $t_n \leqslant \gamma$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Оператор B по условию монотонен, поэтому $Bx_n \geqslant B(t_n u)$ и, в силу (47.11),

$$Bx_n \geqslant \alpha t_n u \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{47.15}$$

Из (47.13) вытекают также неравенства $Bx_n \leqslant \lambda_n x_n$. Поэтому из (47.15) следует, что $\lambda_n x_n \geqslant \alpha t_n u$, т. е.

$$x_n \geqslant \lambda_n^{-1} \alpha t_n u \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{47.16}$$

Но числа t_n были определены так, что из (47.16) следуют оценки $\lambda_n^{-1} \alpha t_n \leqslant t_n$, т. е.

$$\lambda_n \geqslant \alpha \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{47.17}$$

Левые части в равенствах (47.13) равномерно ограничены сверху, нормы элементов x_n ограничены снизу положительным числом. Поэтому последовательность λ_n можно считать сходящейся к некоторому числу λ_* (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности). В силу (47.17) число λ_* положительно.

Так как оператор A вполне непрерывен, то последовательность Ax_n можно считать сходящейся к некоторому элементу z (в противном случае мы снова перешли бы к подпоследовательности).

Из (47.13) вытекает сходимость последовательности x_n к элементу $x_* = \lambda_*^{-1} z \in \Gamma$. Переходя в (47.13) к пределу, получим равенство $Ax_* = \lambda_* x_*$, т. е. x_* является собственным вектором оператора A, лежащим на Γ. ∎

В условиях теоремы 47.8 (и в дальнейших утверждениях пункта) элемент u может не принадлежать конусу K — достаточно, чтобы выполнялись соотношения $-u \overline{\in} K$ и $u = v - w$, где $v, w \in K$. Доказательства при этом не меняются (нужно лишь вместо операторов (47.12) рассмотреть операторы $A_n x = Ax + \delta_n v$).

В приложениях теоремы 47.8 к исследованию конкретных операторов A удобно в качестве монотонных минорант B рассматривать линейные и вогнутые операторы. Из теоремы 47.8 легко получить различные признаки существования у положительных операторов бесконечных непрерывных ветвей собственных векторов; мы приведем лишь один такой признак.

Теорема 47.9. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор A удовлетворяет соотношениям*

$$Ax \geqslant B_n x \quad (x \in K,\ \|x\| \leqslant n;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{47.18}$$

где B_n — линейные положительные операторы, у каждого из которых есть в конусе K собственный вектор, отвечающий положительному собственному значению. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора A, отвечающие положительным собственным значениям, образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

Приведем два примера приложений теоремы 47.9.

Теорема 47.10. *Пусть ядро $k(t, s, u)$ вполне непрерывного в пространстве C интегрального оператора*

$$Ax(t) = \int_G k[t, s, x(s)]\, ds \tag{47.19}$$

удовлетворяет условию

$$k(t, s, u) \geqslant g(t, s) f(u) \quad (t, s \in G;\ u \geqslant 0), \tag{47.20}$$

где $f(u)$ $(u \geqslant 0)$ непрерывна и положительна при $u > 0$, причем либо $f(0) > 0$, либо $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$, а действующий в C линейный интегральный оператор

$$Bx(t) = \int_G g(t, s)\, x(s)\, ds \tag{47.21}$$

положителен и имеет неотрицательную собственную функцию, которой отвечает положительное собственное значение. Тогда оператор (47.19) имеет в пространстве C бесконечную непрерывную ветвь неотрицательных собственных функций, которым отвечают положительные собственные значения.

Для доказательства нужно положить $B_n = \varepsilon_n B$, где B — оператор (47.21), а числа ε_n положительны и достаточно малы, после чего сослаться на теорему 47.9. ∎

В качестве второго примера рассмотрим задачу о периодических решениях автономной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} + f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{47.22}$$

Теорема 47.11. *Пусть функции $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ непрерывны по совокупности переменных и нечетны:*

$$f_i(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_m) \equiv -f_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m). \tag{47.23}$$

Пусть при каждом i справедливы оценки

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) \geqslant a\xi_i \quad (a > 0;\ \xi_1, \ldots, \xi_m \geqslant 0). \tag{47.24}$$

Тогда система (47.22) имеет континуум различных циклов.

Доказательство. Допустим, что определенное на некотором промежутке $[0, \beta]$ $(\beta > 0)$ решение $x(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)\}$ системы (47.22) удовлетворяет граничным условиям

$$\xi_i(0) = \xi_i(\beta) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{47.25}$$

Продолжим вектор-функцию $x(t)$ по нечетности на промежуток $[-\beta, \beta]$, а затем по периодичности (с периодом 2β) на всю числовую ось $-\infty < t < \infty$. Продолженная вектор-функция в силу (47.23) будет 2β-периодическим решением системы (47.22). Поэтому для доказательства теоремы 47.11 достаточно показать, что у системы (47.22) есть континуум различных решений, удовлетворяющих граничным условиям (47.25) при некоторых положительных β.

Если в системе (47.22) и граничных условиях (47.25) произвести замену времени $t = \beta\tau$, то мы получим граничную задачу

$$\frac{d^2\xi_i}{d\tau^2} + \lambda f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \quad \xi_i(0) = \xi_i(1) = 0 \tag{47.26}$$

с положительным параметром $\lambda = \beta^2$. Таким образом, для доказательства теоремы 47.11 достаточно установить существование континуума различных решений задачи (47.26) при некоторых положительных λ.

Задача (47.26) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\xi_i(\tau) = \lambda \int_0^1 g(\tau, \sigma) f_i[\xi_1(\sigma), \ldots, \xi_m(\sigma)]\, d\sigma, \tag{47.27}$$

где $g(\tau, \sigma)$ — функция Грина скалярной задачи $\xi''(\tau) + \lambda\xi(\tau) = 0$, $\xi(0) = \xi(1) = 0$. Систему (47.27) можно рассматривать как операторное уравнение (47.5) в пространстве E непрерывных на $[0, 1]$ вектор-функций $x(\tau) = \{\xi_1(\tau), \ldots, \xi_m(\tau)\}$ с оператором $Ax(\tau) = \{A_1x(\tau), \ldots, A_mx(\tau)\}$, где

$$A_ix(\tau) = \int_0^1 g(\tau, \sigma) f_i[\xi_1(\sigma), \ldots, \xi_m(\sigma)]\, d\sigma. \tag{47.28}$$

Так как функция Грина $g(\tau, \sigma)$ непрерывна, то оператор A вполне непрерывен в пространстве E; так как она неотрицательна, то в силу (47.24) оператор A положителен на конусе K вектор-функций с неотрицательными компонентами.

Для доказательства теоремы 47.11 достаточно установить существование в конусе K континуума различных собственных векторов оператора A, которым отвечают положительные собственные значения. Существование же таких собственных векторов вытекает из теоремы 47.9, так как в силу (47.24) оператор A имеет на конусе K миноранту

$$Bx(\tau) = a \int_0^1 g(\tau, \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma,$$

собственной функции $u(\tau) = \{\sin \pi\tau, \ldots, \sin \pi\tau\}$ которой отвечает положительное собственное значение. ∎

Интересные усиления и приложения теорем о собственных векторах операторов с монотонными минорантами указал Е. Цайдлер (E. Zeidler, Math. Nachr. **43** (1970), 1—6; **49** (1971), 69—83, 85—99). См. также [61], [63], [64].

47.5. Принцип топологического включения. Понятие непрерывной ветви решений позволяет описать новую схему доказательства разрешимости уравнения

$$x = Ax \tag{47.29}$$

без параметров.

В широко известной схеме продолжения решения по параметру в правую часть уравнения (47.29) вводится параметр λ таким способом, чтобы получающееся уравнение (47.1) обладало следующими тремя свойствами: при $\lambda = 1$ уравнение (47.1) превращается в уравнение

(47.29); разрешимость уравнения (47.1) при $\lambda = 0$ очевидна; из разрешимости уравнения (47.1) при $\lambda = \lambda_0$ вытекает единственность решения и возможность продолжить это решение на промежуток $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 + h$, где h не зависит от λ_0. По существу, именно в связи с желанием обобщить схему продолжения по параметру была выполнена классическая работа Лере — Шаудера [35].

Допустим, что нас интересуют ненулевые решения уравнения (47.29). Перейдем к уравнению (47.1), которое при $\lambda = 1$ переходит в (47.29). Пусть нам удалось установить существование у уравнения (47.1) бесконечной непрерывной ветви $\mathfrak{N}$ ненулевых решений. В естественных условиях несложно установить асимптотику значений функционала $\lambda(x)$ (см. п. 47.3) на $\mathfrak{N}$ при $\|x\| \to 0$ и $\|x\| \to \infty$. Если из этой асимптотики вытекает непустота множеств $X(\lambda_1)$ и $X(\lambda_2)$, причем $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$, то из непрерывности ветви ненулевых решений можно, как правило, вывести непустоту множества $X(1)$. Описанную общую схему назовем *принципом включения.*

Ограничимся одной теоремой существования, вытекающей из принципа включения (другие теоремы и приложения см. в [23]).

Теорема 47.12. *Пусть вполне непрерывный оператор A имеет бесконечную непрерывную ветвь $\mathfrak{N}$ собственных векторов. Пусть либо*

$$\mu^*(0, \mathfrak{N}) < 1 < \mu_*(\infty, \mathfrak{N}), \tag{47.30}$$

либо

$$\mu^*(\infty, \mathfrak{N}) < 1 < \mu_*(0, \mathfrak{N}), \tag{47.31}$$

где

$$\mu^*(0, \mathfrak{N}) = \varlimsup_{x \in \mathfrak{N},\ \|x\| \to 0} \lambda(x), \quad \mu_*(0, \mathfrak{N}) = \varliminf_{x \in \mathfrak{N},\ \|x\| \to 0} \lambda(x) \tag{47.32}$$

и

$$\mu^*(\infty, \mathfrak{N}) = \varlimsup_{x \in \mathfrak{N},\ \|x\| \to \infty} \lambda(x), \quad \mu_*(\infty, \mathfrak{N}) = \varliminf_{x \in \mathfrak{N},\ \|x\| \to \infty} \lambda(x). \tag{47.33}$$

Тогда уравнение (47.29) *имеет по крайней мере одно ненулевое решение.*

Доказательство совсем просто и мы предоставляем его читателю. ∎

Для приложений теоремы 47.12 нужно уметь оценивать собственные значения нелинейного оператора A. Здесь полезны два приема; мы опишем их применительно к случаю, когда A положителен на конусе K и $\mathfrak{N} \subset K$. Читателю полезно проследить за тем, как при помощи этих приемов можно из теоремы 47.12 получить признаки существования неподвижных точек, близкие к теоремам о растяжениях и сжатиях конуса.

Первый прием удобен в тех случаях, когда существуют производные $A'(0) = B_0$ и $A'(\infty) = B_1$, где B_0 и B_1 — линейные операторы, собственные значения которых известны. Нетрудно видеть, что числа (47.32) и (47.33) являются характеристическими значениями соответственно операторов B_0 и B_1. Если A положителен и $\mathfrak{N} \subset K$, то характеристическим значениям (47.32) и (47.33) отвечают собственные векторы в K. Но в широких предположениях (см., например, [12], [23]) линейные операторы имеют в K единственный (с точностью до скалярного множителя) собственный вектор и этому собственному вектору отвечает наименьшее характеристическое значение. Поэтому проверка условий (47.30) и (47.31) сводится к проверке соотношений между известными характеристическими значениями двух линейных операторов.

Второй прием — это использование различных минорант и мажорант оператора A. Техника получения оценок собственных значений нелинейного оператора A при помощи минорант и мажорант достаточно хорошо разработана (см., например, [23]). Получение оценок облегчается тем, что для многих классов линейных положительных операторов B (например, для вполне непрерывных суперположительных) неравенство $Bx \geqslant \lambda x$ $(x \in K, x \neq 0)$ влечет оценку $\lambda \leqslant \lambda_0$, где λ_0 — наибольшее собственное значение оператора B; аналогично, из $Bx \leqslant \lambda x$ $(x \in K, x \neq 0)$ следует оценка $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Отметим еще, что $\mu_*(0, \mathfrak{N}) = \mu^*(0, \mathfrak{N}) = \infty$, если $A0 \neq 0$.

47.6. Собственные векторы вогнутых операторов. В этом пункте мы опишем класс операторов, совокупность собственных векторов которых обладает простыми свойствами.

Оператор A назовем *слабо вогнутым* (ср. п. 46.2) на конусе K, если

$$A(tx) \geqslant tAx \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, \ x \in K). \tag{47.34}$$

Теорема 47.13. *Пусть вполне непрерывный оператор A положителен, монотонен и слабо вогнут на конусе K. Пусть существует такой ненулевой элемент $w \in K$, что*

$$Aw \geqslant aw, \tag{47.35}$$

где $a > 0$. Тогда лежащие в K собственные векторы оператора A, которым отвечают положительные собственные значения, образуют бесконечную непрерывную ветвь.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество лежащих в K собственных векторов оператора A, которым отвечают положительные собственные значения.

Пусть задано число $r > 0$. Положим $u = r\xi^{-1}w$, где $\xi = \inf\{\eta: \eta = \| w + y \|, y \in K\}$. Тогда из $x \geqslant tu$ и $\|x\| \leqslant r$ вытекает неравенство $t \leqslant 1$. Поэтому при $0 \leqslant t \leqslant 1$ из (47.34) и монотонности оператора A вытекает цепочка соотношений

$$A(tu) \geqslant tAu = tA\left(\frac{r}{\xi} w\right) \geqslant t \min\left\{1, \frac{r}{\xi}\right\} Aw \geqslant \alpha t u,$$

где $\alpha = a \min\{r/\xi, 1\}$. Таким образом, оператор A можно рассматривать как удовлетворяющую условию (47.11) положительную монотонную миноранту для самого себя и можно применить теорему 47.8. В силу этой теоремы множество $\mathfrak{N}$ образует в окрестности нуля непрерывную ветвь длины r.

Из произвольности r вытекает бесконечность непрерывной ветви $\mathfrak{N}$. ∎

Как оказывается, собственные векторы слабо вогнутых операторов, отвечающие различным собственным значениям, в достаточно общих ситуациях сравнимы друг с другом. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 47.14. *Пусть положительный монотонный оператор A слабо вогнут на конусе K и удовлетворяет условию*

$$\alpha(x) u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta(x) u_0 \quad (x \in K), \tag{47.36}$$

где u_0 — некоторый фиксированный ненулевой элемент из K, а $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ положительны при $x \neq 0$. Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, где x_1, x_2 — ненулевые элементы из K и $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда $x_2 \leqslant x_1$.

Доказательство. Пусть $x_1 \geqslant t_0 x_2$ и $x_1 \overline{\geqslant} t x_2$ при $t > t_0$. Из (47.36) вытекает положительность числа t_0. Нужно показать, что $t_0 > 1$.

В предположении противного $0 < t_0 \leqslant 1$. Тогда из (47.34) вытекает цепочка соотношений

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} Ax_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_1} A(t_0 x_2) \geqslant \frac{1}{\lambda_1} t_0 A x_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} t_0 x_2,$$

т. е. $x_1 \geqslant \lambda_2 \lambda_1^{-1} t_0 x_2$ и поэтому $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$. Мы пришли к противоречию. ∎

Обозначим через $\Lambda(A)$ множество собственных значений оператора A, отвечающих лежащим в K собственным векторам оператора A. Завершим параграф простыми утверждениями о структуре множества $\Lambda(A)$.

Теорема 47.15. *Пусть положительный и монотонный вполне непрерывный оператор A слабо вогнут на нормальном конусе K и удовлетворяет условию* (47.36). *Тогда множество $\Lambda(A)$ является промежутком.*

Доказательство. Нужно показать, что из $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(A)$ вытекает включение $(\lambda_1, \lambda_2) \subset \Lambda(A)$. Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ и $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ ($x_1, x_2 \in K$; $x_1, x_2 \neq 0$). В силу теоремы 47.14 справедливо соотношение $x_2 \leqslant x_1$. Если $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$, то

$$x_2 = \frac{1}{\lambda_2} Ax_2 \leqslant \frac{1}{\lambda} Ax_2 \leqslant \frac{1}{\lambda} Ax \leqslant \frac{1}{\lambda} Ax_1 \leqslant \frac{1}{\lambda_1} Ax_1 = x_1,$$

т. е. оператор $\frac{1}{\lambda} A$ преобразует конусный отрезок $\langle x_2, x_1 \rangle$ в себя и имеет в нем (в силу принципа Шаудера) неподвижную точку. Эта неподвижная точка — собственный вектор, которому отвечает собственное значение λ. ∎

В условиях теоремы 47.15 множество $\Lambda(A)$ может быть промежутком любого вида (даже точкой). Если каждому $\lambda \in \Lambda(A)$ отвечает единственный собственный вектор в K (см. п. 46.2), то $\Lambda(A)$ является интервалом.

§ 48. Принципы связности

48.1. Нормально разрешимые уравнения. В этом параграфе будут описаны уравнения, множества решений которых связны.

Рассмотрим уравнение

$$Px = 0 \tag{48.1}$$

с оператором P, действующим в банаховом пространстве E. Через $N(P, M)$ обозначим совокупность решений уравнения (48.1), лежащих в множестве $M \subset E$. Если P непрерывен, а M замкнуто, то множество $N(P, M)$ также замкнуто.

Уравнение (48.1) назовем *нормально разрешимым* на множестве $M \subset E$, если из ограниченности и замкнутости в E множества $F \subset M$ следует замкнутость в E множества PF.

Основным для нас примером нормально разрешимого уравнения (48.1) является уравнение

$$x = Ax \tag{48.2}$$

с вполне непрерывным оператором A.

Пусть, действительно, F ограничено и замкнуто, $z \in \overline{(I - A)F}$ и $\|x_n - Ax_n - z\| \to 0$ ($x_n \in F$). Последовательность Ax_n без ограничения общности можно считать сходящейся к некоторому элементу $h \in E$. Тогда последовательность x_n сходится к элементу $h + z \in F$ и $z = h + z - A(h + z) \in (I - A)F$. ∎

Вторым примером может служить уравнение (48.2) с оператором A, удовлетворяющим условию Липшица с постоянной $q < 1$. В качестве последующих примеров можно рассмотреть уравнения (48.2) с различными уплотняющими и предельно компактными операторами A (см. § 32), с обобщенными сжатиями (см. § 34), с различными вогнутыми операторами (см. §§ 46, 47) и др.

Уравнение (48.1) назовем *сглаживаемым* на множестве $M \subset E$, если каждым двум точкам $x_0, x_1 \in N(P, M)$ и каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое уравнение

$$P(\varepsilon, \alpha) x = 0 \tag{48.3}$$

с зависящим от параметра α оператором $P(\varepsilon, \alpha)$, у которого есть при каждом $\alpha \in [0, 1]$ единственное решение

$x(\alpha) \in M$, причем $x(\alpha)$ непрерывно зависит от α,

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1 \tag{48.4}$$

и

$$\| P(\varepsilon, \alpha) x(\alpha) - Px(\alpha) \| < \varepsilon \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{48.5}$$

Теорема 48.1. *Пусть уравнение* (48.1) *с непрерывным оператором P нормально разрешимо и сглаживаемо на ограниченном и замкнутом множестве $M \subset E$. Тогда множество $N(P, M)$ связно.*

Доказательство. В предположении противного, множество $N(P, M)$ является объединением двух непересекающихся замкнутых множеств N_0 и N_1. Обозначим через U_0 и U_1 непересекающиеся открытые окрестности множеств N_0 и N_1. Множество $\dot{U}_0$ не будет иметь общих точек с $N(P, M)$ и в силу нормальной разрешимости уравнения (48.1) будет справедлива оценка

$$\| Px \| \geqslant \beta > 0 \quad (x \in \dot{U}_0 \cap M). \tag{48.6}$$

Воспользуемся теперь сглаживаемостью уравнения (48.1): выберем точки $x_0 \in N_0$, $x_1 \in N_1$, положим $\varepsilon = \beta$ и построим уравнение (48.3). Кривая $x = x(\alpha)$ должна в некоторой точке $x(\alpha_*) \in M$ пересечь границу $\dot{U}_0$ области U_0. Тогда из (48.5) вытекает оценка $\| Px(\alpha_*) \| < \beta$, которая противоречит (48.6). ∎

При доказательстве теоремы 48.1 неявно использована непустота пересечения $\dot{U}_0 \cap M$ — она очевидна.

Сделаем три замечания.

а) В теореме 48.1 решения уравнения (48.3) образуют непрерывную кривую. Это условие можно заменить менее ограничительным предположением о том, что решения уравнения (48.3) образуют непрерывную ветвь (см. п. 47.3), соединяющую точки x_0 и x_1.

б) Теорема 48.1 без изменений переносится на уравнения (48.1) с оператором P, действующим из E в другое пространство E_1.

в) Очевидным образом переносится теорема 48.1 и на уравнения в линейных топологических пространствах. В случае уравнения вида (48.2) она переносится и на уравнения в метрических пространствах.

48.2. Сильно сглаживаемые операторы. Наиболее сложной процедурой в применениях теоремы 48.1 является построение уравнений (48.3). В некоторых случаях этого построения можно избежать.

Пусть Ω — ограниченная область в E. Определенный на $\overline{\Omega}$ вполне непрерывный оператор A назовем *сильно сглаживаемым* на $\overline{\Omega}$, если по каждому $\varepsilon > 0$ можно построить такой вполне непрерывный оператор $A(\varepsilon)$, что

$$\| Ax - A(\varepsilon) x \| < \varepsilon \quad (x \in \overline{\Omega}) \tag{48.7}$$

и уравнение

$$x = A(\varepsilon) x + h \tag{48.8}$$

имеет на $\overline{\Omega}$ не больше одного решения при каждом h из шара $\| h \| < \varepsilon$.

Теорема 48.2. *Пусть вполне непрерывный и сильно сглаживаемый на $\overline{\Omega}$ оператор A не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек. Пусть*

$$\gamma(I - A, \Omega) \neq 0. \tag{48.9}$$

Тогда множество $N(I - A, \Omega)$ лежащих в Ω решений уравнения (48.2) *связно.*

Доказательство. В силу теоремы 20.5 из (48.9) вытекает непустота множества $N(I - A, \Omega)$. Это множество замкнуто и компактно, так как A вполне непрерывен.

Если $N(I - A, \Omega)$ несвязно, то оно является объединением двух непересекающихся множеств N_0 и N_1. Обозначим через Ω_0 и Ω_1 лежащие в Ω их непересекающиеся окрестности. В силу теоремы 20.2

$$\gamma(I - A, \Omega_0) + \gamma(I - A, \Omega_1) = \gamma(I - A, \Omega)$$

и из (48.9) вытекает отличие от нуля одного из чисел $\gamma(I - A, \Omega_0)$, $\gamma(I - A, \Omega_1)$. Пусть, для определенности, $\gamma(I - A, \Omega_0) \neq 0$.

По построению, оператор A не имеет на $\dot{\Omega}_0$ неподвижных точек, поэтому

$$\| x - Ax \| \geqslant \beta > 0 \quad (x \in \dot{\Omega}_0). \tag{48.10}$$

Положим $\varepsilon = \beta/3$. Пусть $x_1 \in N_1$. Так как A сильно сглаживаем на $\overline{\Omega}$, то можно построить такой удовлетворяющий (48.7) вполне непрерывный оператор $A(\varepsilon)$, что уравнение

$$x = A(\varepsilon) x + Ax_1 - A(\varepsilon) x_1 \tag{48.11}$$

имеет на $\overline{\Omega}$ не более одного решения. Но одно решение уравнения (48.11) очевидно — это точка x_1, которая не лежит в $\overline{\Omega}_0$. Поэтому уравнение (48.11) не имеет решений в $\overline{\Omega}_0$ и из теоремы 20.4 вытекает равенство нулю вращения на $\dot{\Omega}_0$ поля

$$\Psi x = x - A(\varepsilon)x - Ax_1 + A(\varepsilon)x_1. \qquad (48.12)$$

В силу (48.10) и (48.7) при $x \in \dot{\Omega}_0$

$$\|\Psi x - (x - Ax)\| \leqslant \|Ax - A(\varepsilon)x\| + \|Ax_1 - A(\varepsilon)x_1\| < \\ < \frac{2}{3}\beta < \|x - Ax\|,$$

поэтому поля Ψ и $I - A$ гомотопны на $\dot{\Omega}_0$ и их вращения на $\dot{\Omega}_0$ одинаковы. Значит, $\gamma(I - A, \Omega_0) = 0$ — мы пришли к противоречию. ∎

Сделаем два замечания.

а) В условиях теоремы 48.2 участвующие в уравнениях (48.8) операторы $A(\varepsilon)$ равномерно аппроксимировали оператор A на всей замкнутой области $\overline{\Omega}$. Это предположение мы использовали при доказательстве гомотопности на $\dot{\Omega}_0$ полей $I - A$ и (48.12). От равномерной аппроксимации можно отказаться, если использовать более общие конструкции, гарантирующие необходимую гомотопность (см. § 19 и особенно п. 19.6).

б) Полная непрерывность оператора A нужна была лишь для того, чтобы иметь возможность применить теорию вращения. Поэтому теорема 48.2 легко переносится на уравнения (48.1) с такими операторами P, что для векторных полей Px определено вращение с обычными свойствами (см., например, гл. 4).

48.3. Уравнения с нерастягивающими операторами. В случае строго выпуклых банаховых пространств множество неподвижных точек нерастягивающего (см. п. 37.5) оператора A имеет простую структуру — оно выпукло. В случае произвольных банаховых пространств удается установить менее сильные утверждения.

Теорема 48.3. *Пусть нерастягивающий вполне непрерывный оператор A преобразует в себя ограниченное и замкнутое выпуклое множество M. Тогда множество $N(I - A, M)$ лежащих в M неподвижных точек оператора A непусто и связно.*

Доказательство. Из принципа Шаудера вытекает непустота множества $N(I - A, M)$. Уравнение (48.2) в условиях теоремы 48.3 нормально разрешимо, так

как A вполне непрерывен. Уравнение (48.2) сглаживаемо — чтобы в этом убедиться, достаточно по каждым двум точкам $x_0, x_1 \in N(I - A, M)$ и каждому достаточно малому $\varepsilon > 0$ построить уравнение (48.3) с оператором $P(\varepsilon, \alpha) = I - A(\varepsilon, \alpha)$, где

$$A(\varepsilon, \alpha)x = \left(1 - \frac{\varepsilon}{d}\right)Ax + \frac{\varepsilon}{d}A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_0]$$

и $d = \sup\{t\colon\ t = \|x\|,\ x \in M\}$. Таким образом, выполнены условия теоремы 48.1. Поэтому $N(I - A, M)$ связно. ∎

В ряде случаев можно отказаться от предположения о выпуклости множества M. Приведем одно простое утверждение.

Теорема 48.4. *Пусть нерастягивающий вполне непрерывный оператор A определен на $\overline{\Omega}$, где Ω — ограниченная область в банаховом пространстве E. Пусть A не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и выполнено условие* (48.9). *Тогда множество лежащих в Ω неподвижных точек оператора A связно.*

Для доказательства можно воспользоваться теоремой 48.2, так как A сильно сглаживаем — операторы $A(\varepsilon)$ можно определить равенством $A(\varepsilon) = (1 - \varepsilon)A$. ∎

Пусть выполнены условия теоремы 48.4 и пусть x_0 — одно из лежащих в Ω решений уравнения (48.2). Построим вспомогательное вполне непрерывное векторное поле $\Psi x = x - (1 - \varepsilon)Ax - \varepsilon Ax_0$. Если ε достаточно мало, то $\gamma(I - A, \Omega) = \gamma(\Psi, \Omega)$. Но $\gamma(\Psi, \Omega)$ совпадает с индексом единственной особой точки x_0 поля Ψ, а этот индекс равен 1. Следовательно, *в условиях теоремы* 48.4 *всегда* $\gamma(I - A, \Omega) = 1$.

48.4. Уравнения с гладкими операторами. В этом пункте мы докажем утверждение, дополняющее теоремы 40.3 и 40.4.

Теорема 48.5. *Пусть вполне непрерывный и непрерывно дифференцируемый на банаховом пространстве E оператор A удовлетворяет условиям*

$$\varliminf_{\|x\| \to \infty} \|x - Ax\| > 0 \qquad (48.13)$$

и

$$|\operatorname{ind}(\infty, I - A)| = 1. \qquad (48.14)$$

Пусть каждому $x_0 \in E$ соответствуют такие $r(x_0) > 0$ и $\beta(x_0) \in (0, 1)$, что у всех линейных операторов $A'(x)$ при $\|x - x_0\| \leqslant r(x_0)$ нет собственных значений на интервале $(1 - \beta(x_0),\ 1)$. Тогда множество N решений уравнения (48.2) непусто и связно.

Доказательство. Множество N непусто в силу (48.14), ограничено в силу (48.13) и компактно в силу полной непрерывности оператора A. По известной лемме Мазура компактной будет и замкнутая выпуклая оболочка F множества N.

Выберем из покрытия множества F шарами $\|x - x_0\| < \frac{1}{3} r(x_0)$ $(x_0 \in F)$ некоторое конечное покрытие. Пусть это конечное покрытие состоит из шаров с центрами в точках $x_1, \ldots, x_k$; обозначим их объединение через Ω.

Введем в рассмотрение операторы $A(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)A$. Каждый из этих операторов вполне непрерывен и непрерывно дифференцируем, причем его производная по x отличается от $A'(x)$ множителем $1 + \varepsilon$. Пусть β_0 — наименьшее из чисел $\beta(x_1), \ldots, \beta(x_k)$. По построению области Ω, у всех операторов $A'(x)$ при $x \in \overline{\Omega}$ нет собственных значений на интервале $(1 - \beta_0,\ 1)$. Поэтому у всех операторов $(1 + \varepsilon)A'(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ нет собственных значений на интервале $((1 - \beta_0)(1 + \varepsilon),\ 1 + \varepsilon)$. В частности, при

$$0 < \varepsilon < \frac{\beta_0}{1 - \beta_0} \tag{48.15}$$

число 1 не является собственным значением всех операторов $(1 + \varepsilon)A'(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$. Из связности множества $\overline{\Omega}$ вытекает тогда, что сумма кратностей больших чем 1 вещественных собственных значений операторов $(1 + \varepsilon)A'(x)$ имеет одинаковую четность при всех удовлетворяющих (48.15) значениях ε и при всех $x \in \overline{\Omega}$.

Рассмотрим теперь уравнения (48.8) при удовлетворяющих (48.15) значениях ε и произвольных h. В силу теоремы 21.6 каждое лежащее в $\overline{\Omega}$ решение каждого такого уравнения изолировано, причем индексы всех этих решений одинаковы и по абсолютной величине равны 1. Поэтому абсолютная величина вращения $\gamma(\Psi, \Omega)$, где $\Psi x = x - A(\varepsilon)x - h$, совпадает с количеством лежащих в Ω решений (если, конечно, нет решений на $\dot{\Omega}$). Но при малых ε и при малых x поле Ψ гомотопно на $\dot{\Omega}$ полю $I - A$ и, следовательно, $\gamma(\Psi, \Omega) = \gamma(I - A, \Omega)$. С другой стороны, $\gamma(I - A, \Omega) = \operatorname{ind}(\infty, I - A)$ и, в силу (48.14), справедливо равенство $|\gamma(I - A, \Omega)| = 1$. Таким образом, уравнение (48.8) при малых ε и h имеет на $\overline{\Omega}$ единственное решение. Мы показали, что оператор A сильно сглаживаем на $\overline{\Omega}$.

Из равенства (48.14) вытекает (48.9). Значит, оператор A удовлетворяет на $\overline{\Omega}$ всем условиям теоремы 48.2. Поэтому множество N его неподвижных точек, лежащих в Ω, связно. ∎

Утверждение теоремы 48.5 сохраняет силу, если предположение об отсутствии собственных значений у операторов $A'(x)$ на интервалах $(1 - \beta(x_0),\ 1)$ заменить аналогичным предположением об их отсутствии на интервалах $(1, 1 + \beta(x_0))$.

48.5. Структура интегральной воронки. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi) \tag{48.16}$$

с непрерывной по совокупности переменных $-\infty < t < \infty$, $\xi \in R^m$ правой частью. Множество решений этой системы, удовлетворяющих фиксированному начальному условию

$$\xi(t_0) = \xi_0, \tag{48.17}$$

называют *интегральной воронкой*. Пусть

$$\|f(t, \xi)\| \leqslant M \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1,\ \|\xi - \xi_0\| \leqslant 1).$$

Тогда, как известно, каждое решение задачи (48.16), (48.17) можно считать определенным на промежутке $\Delta = [t_0,\ t_0 + (1 + M)^{-1}]$. Эти решения образуют некоторое множество N в пространстве C непрерывных на Δ функций $x = \xi(t)$ со значениями в R^m.

Теорема 48.6 (Кнезер — Фукухара). *Множество N связно в C.*

Доказательство. Решения задачи (48.16), (48.17) совпадают с неподвижными точками оператора

$$A\xi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, \xi(\tau)]\,d\tau, \tag{48.18}$$

действующего и вполне непрерывного в пространстве $C = C(\Delta)$. Очевидно, все неподвижные точки оператора (48.18) лежат в шаре $\|\xi(t) - \xi_0\| \leqslant 1$. Поэтому достаточно показать, что оператор (48.18) удовлетворяет условиям теоремы 48.2 на каждом шаре $\|\xi(t) - \xi_0\| \leqslant \leqslant 1 + \delta$ $(\delta > 0)$. Условие (48.9) при этом очевидно, так как вращение поля $I - A$ на каждой сфере $\|\xi(t) - - \xi_0\| = 1 + \delta$ равно 1.

Для доказательства сильной сглаживаемости оператора (48.18) достаточно при каждом малом положительном ε вначале аппроксимировать на множестве $t \in \Delta$, $\|\xi - \xi_0\| \leqslant 1 + \delta$ с точностью до ε/M вектор-функцию $f(t, \xi)$ гладкой вектор-функцией $g(t, \xi; \varepsilon)$, а затем определить оператор $A(\varepsilon)$ равенством

$$A(\varepsilon)\xi(t) = \xi_0 + \int_{t_0}^{t} g[\tau, \xi(\tau); \varepsilon]\,d\tau. \tag{48.19}$$

Оценка (48.7) тогда очевидна; единственность решения уравнения (48.8) с оператором (48.19) вытекает, например, из того факта, что $A(\varepsilon)$ является оператором сжатия по норме

$$\|x\|_* = \|\xi(t)\|_* = \max_{t \in \Delta} \|\xi(t)\,e^{-tL}\|_{R^m},$$

если только L достаточно велико. ∎

48.6. Замечания.

а) Из существования двух различных точек в связном множестве вытекает существование в нем континуума различных точек. Поэтому в условиях каждой из теорем 48.1—48.6 можно утверждать, что из существования двух различных решений вытекает существование континуума различных решений.

б) Первая теорема о связности сечений интегральной воронки установлена А. Кнезером (Math. Ann. **42**, 1893), о связности множества решений — М. Фукухара (Proc. Imperial Acad. Japan **4**, 1928). Эти теоремы переносились многими авторами на более общие классы дифференциальных уравнений. Особую роль сыграли обобщения Е. Е. Викторовского (Изв. Киевск. политехн. ин-та **19** (1965)) на уравнения с неоднозначными правыми частями, В. А. Чечика (Тр. Моск. мат. о-ва **8** (1959)) на сингулярную задачу Коши, А. Д. Мышкиса (УМН **4**, № 5 (1949)) на уравнения с запаздывающим аргументом.

в) Топологическую схему доказательства теорем о связности множества решений операторных уравнений предложили М. А. Красносельский и А. И. Перов (ДАН СССР **126**, № 1 (1959); к одному из утверждений этой статьи близка теорема 48.2). Общую схему развили и применили: М. А. Красносельский и П. Е. Соболевский (ДАН СССР **146**, № 1 (1962); Укр. матем. ж. **16**, № 3 (1964)) к уравнениям с неограниченными операторами в банаховом пространстве и к уравнениям параболического типа с частными производными; В. А. Погореленко и П. Е. Соболевский (Сиб. матем. ж. **8**, № 1 (1967)) к уравнениям гиперболического типа; В. Ф. Субботин (Укр. матем. ж. **19**, № 1 (1967); Тр. сем. по функц. анализу **12**, Воронежск. ун-т, 1969) к новым классам уравнений с запаздывающим аргументом; А. Е. Родкина и Б. Н. Садовский (Тр. матем. ф-та Воронежск. ун-та **4** (1970)), Р. В. Ахмеров и А. Е. Родкина (Дифф. ур-ния **9**, № 5 (1973)) к уравнениям нейтрального типа; В. В. Петрышин (W. V. Petryshyn, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1972); Archive Rat. Mech. Anal. **40**, № 4 (1971)) к уравнениям с операторами из некоторых специальных классов.

г) В перечисленных выше работах установлена связность интегральной воронки для многих эволюционных задач. Следует помнить, однако, что интегральная воронка может оказаться несвязной уже в случае конечной системы (48.16) и начального условия (48.17), если правые части системы непрерывны при $t > t_0$, а при $t = t_0$ могут иметь особенности; этот факт, по-видимому, впервые установил В. А. Чечик.

д) Приводимые в параграфе теоремы 48.1—48.4 ранее не публиковались; теорема 48.5 указана М. А. Красносельским (ДАН СССР **208**, № 6 (1973)).

Глава 7

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Развитые в предыдущих главах методы позволяют по-новому смотреть на многие приближенные методы решения нелинейных уравнений. Для ряда приближенных методов условия их применимости очевидным образом выражаются через топологические характеристики векторных полей, соответствующих решаемым уравнениям.

§ 49. Метод последовательных приближений

49.1. Сходимость. Один из основных методов приближенного решения различных задач заключается (см., например, [19], [26]) в сведении их к такому операторному уравнению

$$x = Ax, \tag{49.1}$$

решение x^* которого является пределом последовательных приближений

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{49.2}$$

при некотором (или произвольном) начальном приближении x_0. Если приближения (49.2) сходятся к x^* равномерно относительно начальных приближений из некоторой окрестности точки x^*, то будем говорить, что метод (49.2) построения решения x^* *равномерен.*

Следует иметь в виду, что из сходимости при любом начальном приближении x_0 последовательности (49.2) к единственному решению x^* уравнения (49.1) равномерность метода (49.2) не вытекает. В условиях принципа сжатых отображений или теоремы 34.5 об обобщенных сжатиях метод (49.2) равномерен.

Понятие равномерности важно с точки зрения фактических вычислений. В таких вычислениях неизбежны случайные ошибки и поэтому последовательные приближения определяются отличными от (49.2) равенствами $x_{n+1} = Ax_n + \delta_n$, где δ_n — случайный вектор. Обычно можно лишь оценить норму векторов δ_n. Если метод ите-

раций равномерен, то по каждому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\| \delta_n \| < \delta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вытекает справедливость при всех достаточно больших n оценок $\| x_n - x^* \| < \varepsilon$.

Часто возникает необходимость приближенно решать уравнение (49.1) в условиях недостаточной информации о свойствах оператора A. Если попытки обнаружить свойства, обеспечивающие устойчивую по отношению к малым ошибкам сходимость метода (49.2) оказываются неудачными, то следует проверить, не лишены ли эти попытки смысла. В ряде случаев от ненужной работы может предостеречь следующее утверждение, вытекающее из теоремы 39.1.

Теорема 49.1. *Пусть x^* — единственное решение уравнения* (49.1) *с вполне непрерывным оператором A; пусть* $\operatorname{ind}(x^*, I - A) \neq 1$. *Тогда метод* (49.2) *не обладает свойством сходимости.*

49.2. Уравнения с вогнутыми операторами. В пп. 49.2—49.4 рассматриваются уравнения (49.1) в банаховом пространстве E, полуупорядоченном конусом K. Наличие полуупорядоченности позволяет установить условия специального типа сходимости метода (49.2).

Теорема 49.2. *Пусть u_0 — внутренний элемент нормального и телесного конуса K. Пусть $x^* \in K$ — ненулевое решение уравнения* (49.1) *с u_0-вогнутым монотонным оператором A. Тогда при каждом ненулевом начальном приближении $x_0 \in K$ последовательные приближения* (49.2) *сходятся к x^*.*

Доказательство. Из свойства (46.3) u_0-вогнутого оператора вытекают оценки $\alpha^* u_0 \leqslant x^* \leqslant \beta^* u_0$, где $\alpha^*, \beta^* > 0$. Поэтому x^* — внутренний элемент конуса K. Снова из (46.3) вытекает, что

$$\frac{\alpha(x)}{\beta^*} x^* \leqslant Ax \leqslant \frac{\beta(x)}{\alpha^*} x^* \quad (x \in K,\ x \neq 0). \tag{49.3}$$

Определим скалярные функции

$$\varphi(t) = \max\{\tau\colon\ A(tx^*) \geqslant \tau x^*\}, \quad \psi(t) = \min\{\tau\colon\ A(tx^*) \leqslant \tau x^*\}. \tag{49.4}$$

Они, очевидно, непрерывны и монотонны. Из свойства (46.4) u_0-вогнутого оператора вытекает, что $\varphi(t) > t$ при $t < 1$, $\psi(t) < t$ при $t > 1$; при этом $\varphi(1) = \psi(1) = 1$.

Отсюда вытекает сходимость к 1 при каждых $t_0 \in (0, 1]$ и $s_0 \geqslant 1$ последовательностей

$$t_n = \varphi(t_{n-1}), \qquad s_n = \psi(s_{n-1}). \tag{49.5}$$

Пусть $x_0 \in K$ и $x_0 \neq 0$. В силу (49.3) $t_0 x^* \leqslant Ax_0 \leqslant s_0 x^*$ при некоторых $t_0 \in (0, 1)$ и $s_0 > 1$. Из монотонности A вытекают соотношения $A^n(t_0 x^*) \leqslant A^{n+1} x_0 \leqslant A^n(s_0 x^*)$. Но, по определению функций (49.4), верны оценки $A^n(t_0 x^*) \geqslant t_n x^*$ и $A^n(s_0 x^*) \leqslant s_n x^*$, где t_n и s_n определены рекуррентными формулами (49.5). Поэтому $t_n x^* \leqslant A^{n+1} x_0 \leqslant s_n x^*$. Остается перейти в последних неравенствах к пределу. ∎

Аналогичные теореме 49.2 утверждения верны и для других классов вогнутых операторов (библиографию см. в [23], [26]).

Если оператор A выпуклый, а $x^* \in K$ — ненулевое решение уравнения (49.1), то приближения (49.2) не будут сходиться к x^* «почти при всех» начальных приближениях (даже «почти при всех» начальных приближениях из каждой малой окрестности точки x^* в конусе K).

49.3. Сжатия на сравнимых элементах. Ниже доказывается близкая к принципу сжатых отображений теорема, в которой специальным оценкам должны удовлетворять лишь разности значений оператора на сравнимых элементах.

Теорема 49.3. *Пусть конус K воспроизводящий и нормальный. Пусть оператор A удовлетворяет условию*

$$-B(x-y) \leqslant Ax - Ay \leqslant B(x-y) \qquad (x \geqslant y;\ x,\ y \in E), \tag{49.6}$$

где B — некоторый линейный положительный оператор, для спектрального радиуса $\sigma(B)$ которого справедлива оценка $\sigma(B) < 1$. Тогда A имеет в E единственную неподвижную точку, к которой сходятся приближения (49.2) *при любом начальном приближении x_0.*

Доказательство. По каждому линейному оператору B в пространстве E можно (см. [26]) ввести эквивалентную норму так, чтобы числа $\|B\|$ и $\sigma(B)$ отличались сколь угодно мало. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\|B\| < 1$.

Так как конус K воспроизводящий, то каждый элемент $x \in E$ можно представить в виде $x = u(x) - v(x)$,

где $u(x),\ v(x) \in K$. Поэтому каждому $x \in E$ соответствуют такие элементы y, что $-y \leqslant x \leqslant y$ (в качестве одного из таких y можно рассмотреть элемент $u(x) + v(x)$). Это позволяет определить на E новую норму

$$\|x\|_0 = \inf_{-y \leqslant x \leqslant y} \|y\|. \tag{49.7}$$

Аксиомы нормы проверяются без труда.

Воспроизводящий конус K обладает свойством *несплющенности* (см. п. 33.1): представление $x = u - v$ $(u,\ v \in K)$ каждого элемента $x \in E$ можно выбрать так, что $\|u\|,\ \|v\| \leqslant a\|x\|$, где a не зависит от x; поэтому $\|x\|_0 \leqslant 2a\|x\|$ $(x \in E)$. С другой стороны, в силу нормальности K из $0 \leqslant x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant M\|y\|$, где M не зависит от x и y; поэтому $\|x\| \leqslant (2M+1)\|x\|_0$. Таким образом, *нормы $\|x\|$ и $\|x\|_0$ эквивалентны.*

Рассмотрим две произвольные точки $x,\ y \in E$; пусть $-u \leqslant x - y \leqslant u$, где $u \in K$. Очевидно, $x \geqslant \frac{1}{2}(x+y-u)$ и $y \geqslant \frac{1}{2}(x+y-u)$. Поэтому из (49.6) вытекают неравенства

$$-B\left(\frac{x-y+u}{2}\right) \leqslant Ax - A\left(\frac{x+y-u}{2}\right) \leqslant B\left(\frac{x-y+u}{2}\right),$$

$$-B\left(\frac{y-x+u}{2}\right) \leqslant Ay - A\left(\frac{x+y-u}{2}\right) \leqslant B\left(\frac{y-x+u}{2}\right).$$

Вычитая из первых неравенств вторые, получим

$$-Bu \leqslant Ax - Ay \leqslant Bu.$$

Поэтому $\|Ax - Ay\|_0 \leqslant \|Bu\|$ и, далее, $\|Ax - Ay\|_0 \leqslant q\|u\|$, где $q < 1$. Значит,

$$\|Ax - Ay\|_0 \leqslant q \inf_{-u \leqslant x-y \leqslant u} \|u\| = q\|x - y\|_0.$$

Мы показали, что в норме (49.7) A является сжимающим оператором. ∎

Если A удовлетворяет условиям теоремы 49.3, то единственное решение в E будет иметь уравнение $x = Ax + y$ при каждом $y \in E$.

Теорема 49.2 сохраняет силу, если условие (49.6) заменить предположением

$$-B_1(x-y) \leqslant Ax - Ay \leqslant B_2(x-y) \qquad (x,\ y \in E;\ x \geqslant y),$$

где B_1, B_2 — линейные положительные операторы и $\sigma(B_1+B_2)<1$ (последнюю оценку нельзя заменить неравенствами $\sigma(B_1)<1$ и $\sigma(B_2)<1$ даже в случае линейного A).

49.4. Уравнения с положительно обратимыми операторами. Рассмотрим уравнение

$$Fx=z \tag{49.8}$$

с нелинейным оператором F, действующим из нормированного пространства E_1 с конусом K_1 в банахово пространство E_2 с конусом K_2; z — произвольный фиксированный элемент из E_2. На F будет наложено условие

$$B_1(x-y)\leqslant Fx-Fy\leqslant B_2(x-y)\quad (x,\ y\in E_1;\ x\geqslant y), \tag{49.9}$$

где B_1 и B_2 — аддитивные и однородные операторы, действующие из E_1 в E_2. В отличие от условия (49.6), здесь нет предположений о знаке операторов B_1 и B_2.

Теорема 49.4. *Пусть конус K_2 нормальный и воспроизводящий. Пусть выполнено условие* (49.9), *причем операторы B_1 и B_1+B_2 имеют положительные обратные (действующие из E_2 в E_1). Тогда уравнение* (49.8) *имеет в E_1 единственное решение при каждом $z\in E_2$.*

Доказательство. Положим $D=\frac{1}{2}(B_1+B_2)$. Тогда уравнение (49.8) можно заменить эквивалентным уравнением (49.1) в пространстве E_2 с оператором

$$Ay=y-FD^{-1}y+z. \tag{49.10}$$

Решение x^* уравнения (49.8) определяется по решению y^* уравнения (49.1) равенством $x^*=D^{-1}y^*$.

По условию, оператор D^{-1} положителен. Поэтому из $u\geqslant v$ $(u,v\in E_2)$ вытекает, что $D^{-1}u\geqslant D^{-1}v$, и из (49.9) следуют оценки $B_1D^{-1}(u-v)\leqslant FD^{-1}u-FD^{-1}v\leqslant B_2D^{-1}(u-v)$, которые можно переписать в виде

$$-\left(I-B_1D^{-1}\right)(u-v)\leqslant Au-Av\leqslant\left(I-B_1D^{-1}\right)(u-v)\quad (u,\ v\in E_2;\ u\geqslant v). \tag{49.11}$$

Неравенства (49.11) можно рассматривать как условие (49.6) с оператором $B=I-B_1D^{-1}$.

В силу теоремы 49.3 для завершения доказательства достаточно установить неравенство

$$\sigma\left(I-B_1D^{-1}\right)<1. \tag{49.12}$$

Отметим сразу же, что из (49.11) вытекает положительность на конусе K_2 действующего в E_2 линейного оператора $I-B_1D^{-1}$; поэтому *) оператор $I-B_1D^{-1}$ непрерывен. Но тогда непрерывны операторы B_1D^{-1} и обратный к нему DB_1^{-1}. Неравенство (49.12) будет доказано, если мы установим оценку

$$\sigma(P)\leqslant\frac{\sigma(Q)}{1+\sigma(Q)}, \tag{49.13}$$

где

$$P=B=I-B_1D^{-1},\qquad Q=DB_1^{-1}-I. \tag{49.14}$$

Операторы (49.14) положительны; они связаны соотношениями

$$Q=P(I-P)^{-1}=(I-P)^{-1}-I=(I-P)^{-1}P. \tag{49.15}$$

Пусть $\varepsilon>0$ и $\sigma(\varepsilon Q)<1$. Тогда оператор $I-\varepsilon Q$ имеет непрерывный обратный $(I-\varepsilon Q)^{-1}=I+\varepsilon Q+\ldots+\varepsilon^nQ^n+\ldots$, причем из положительности Q вытекает положительность оператора $(I-\varepsilon Q)^{-1}$. Из тождества $I-(1+\varepsilon)P=(I-P)(I-\varepsilon Q)$ вытекает, что оператор $I-(1+\varepsilon)P$ имеет непрерывный обратный и при каждом $n=1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(1+\varepsilon)^iP^{i+1}&=\\&=\left[I-(1+\varepsilon)P\right]^{-1}\left[P-(1+\varepsilon)^{n+1}P^{n+2}\right]=\\&=(I-\varepsilon Q)^{-1}(I-P)^{-1}P\left[I-(1+\varepsilon)^{n+1}P^{n+1}\right]=\\&=(I-\varepsilon Q)^{-1}Q\left[I-(1+\varepsilon)^{n+1}P^{n+1}\right].\end{aligned}$$

Поэтому положительный оператор P удовлетворяет условиям

$$(1+\varepsilon)^nP^{n+1}u\leqslant(I-\varepsilon Q)^{-1}Qu\qquad (u\in K;\ n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{49.16}$$

Пусть теперь x — произвольный элемент из E_2. Так как конус K_2 воспроизводящий, то $x=u-v$, где

*) Если аддитивный и однородный оператор преобразует некоторый воспроизводящий конус в нормальный, то он непрерывен (см. [23]).

$u, v \in K_2$. Из неравенств $-v \leqslant x \leqslant u$ и из (49.16) следует, что $-(I-\varepsilon Q)^{-1}Qv \leqslant (1+\varepsilon)^n P^{n+1}x \leqslant (I-\varepsilon Q)^{-1}Qu$. Из этих соотношений и из нормальности конуса K_2 вытекает ограниченность числовой последовательности $\|(1+\varepsilon)^n P^{n+1}x\|$. Но тогда ограничена последовательность $(1+\varepsilon)^n \|P^{n+1}\|$ и поэтому $(1+\varepsilon)\sigma(P) \leqslant 1$. Таким образом,

$$\sigma(P) \leqslant \inf_{\sigma(\varepsilon Q)<1} \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\sigma(Q)}{1+\sigma(Q)}. \blacksquare$$

Интересно отметить, что в условиях теоремы 49.4 решение $x(z)$ уравнения (49.8) монотонно зависит от z: если $z_1 \leqslant z_2$, то $x(z_1) \leqslant x(z_2)$.

В (49.13) фактически имеет место знак равенства (нам это интересное и важное равенство не понадобилось).

Рассмотрим теперь уравнение

$$Tx = Gx, \tag{49.17}$$

где T и G действуют из E_1 в E_2, T аддитивен и однороден, а нелинейный оператор G удовлетворяет условию

$$-B(x-y) \leqslant Gx - Gy \leqslant B(x-y) \quad (x, y \in E_1;\ x \geqslant y), \tag{49.18}$$

где B аддитивен и однороден. Аналогично теореме 49.4 доказывается

Теорема 49.5. *Пусть конус K_2 нормальный и воспроизводящий. Пусть выполнено условие* (49.18), *причем операторы T и $T-B$ имеют положительные обратные. Тогда уравнение* (49.17) *имеет единственное решение.*

Продолжим изучение уравнения (49.17). Оно эквивалентно уравнению $y = G(T^{-1}y)$. Допустим, что G удовлетворяет условию

$$0 \leqslant Gx \leqslant B_1x + z_0 \quad (x \in K_1), \tag{49.19}$$

где $z_0 \in K_2$, а B_1 — действующий из E_1 в E_2 аддитивный и однородный оператор. Из (49.19) вытекает положительность оператора B_1. Допустим, что операторы T и $T-B_1$ имеют положительные обратные. Тогда из тождества $T(T-B_1)^{-1} = I + B_1(T-B_1)^{-1}$ вытекает, что элемент $u_0 = T(T-B_1)^{-1}z_0$ принадлежит K_2.

Пусть $\mathfrak{M}$ — это конусный отрезок $0 \leqslant y \leqslant u_0$. Если $y \in \mathfrak{M}$, то из положительности T^{-1} вытекают соотношения $0 \leqslant T^{-1}y \leqslant T^{-1}u_0$ и из (49.19) вытекают оценки $0 \leqslant GT^{-1}y \leqslant B_1T^{-1}y + z_0$. Но $B_1T^{-1}y + z_0 \leqslant B_1T^{-1}u_0 + z_0 = [B_1(T-B_1)^{-1} + I]z_0 = z_0$. Таким образом, оператор GT^{-1} преобразует конусный отрезок $\mathfrak{M}$ в себя. Если GT^{-1} непрерывен на $\mathfrak{M}$ и преобразует $\mathfrak{M}$ в компактное множество (например, GT^{-1} вполне непрерывен на E_2), то из принципа Шаудера вытекает разрешимость уравнения $y = GT^{-1}y$, а следовательно, и уравнения (49.17).

Содержащиеся в пп. 49.3 и 49.4 утверждения получены М. А. Красносельским, Е. А. Лифшицем, Ю. В. Покорным и В. Я. Стеценко (ДАН Тадж. ССР **17**, № 1 (1974)). Мы не останавливаемся здесь на обсуждении условий положительной обратимости линейных операторов — это специальная сложная задача.

§ 50. Аппроксимирующие уравнения

50.1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Tx = 0 \tag{50.1}$$

с оператором T, действующим из одного банахова пространства E_1 во второе E_2 и определенным на замыкании ограниченной области $\Omega_1 \subset E_1$. Многие классы приближенных методов заключаются в переходе к приближенному уравнению

$$Gy = 0 \tag{50.2}$$

в некотором вспомогательном пространстве $\tilde{E}$ (как правило, конечномерном); решения $\tilde{y}$ уравнения (50.2) объявляются «приближенными решениями» уравнения (50.1).

Если $\tilde{E} \subset E$, то после построения уравнения (50.2) пытаются получить априорную оценку величины $\|\tilde{y} - x^*\|$, где x^* — точное решение уравнения (50.1). Можно вначале найти решение $\tilde{y}$ уравнения (50.2), а после этого искать апостериорную оценку этой же погрешности $\|\tilde{y} - x^*\|$. Если и нет возможности получить удовлетворительную априорную оценку погрешности и нет возможности начинать вычисления «вслепую» (не зная, чего можно ожидать от этих вычислений), то о качестве будущих приближенных решений судят по косвенным характеристикам избранного метода.

Часто вводится в рассмотрение не одно приближенное уравнение (50.2), а целая их последовательность

$$G_n y = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{50.3}$$

Если все уравнения (50.3) (или уравнения с большими номерами) имеют решения $\tilde{y}_n$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{y}_n, F) = 0, \tag{50.4}$$

где F — множество решений уравнения (50.1), то говорят, что *метод перехода к уравнениям* (50.3) *сходится*. Сходимость метода считают достаточным основанием для применения в фактических вычислениях одного (или двух — трех) уравнений (50.3). Поэтому желателен апостериорный анализ найденных приближенных решений.

Анализ метода перехода к уравнениям (50.3) считается проведенным с большей полнотой, если вместо (50.4) установлены оценки $\rho(\tilde{y}_n, F) \leqslant \beta_n$, где $\beta_n \to 0$, или более тонкие оценки вида $a_0\beta_n \leqslant \rho(\tilde{y}_n, F) \leqslant \beta_n$. Быстроту стремления чисел β_n к нулю называют *быстротой сходимости* метода.

50.2. Метод Галеркина — Петрова. Рассмотрим уравнение вида

$$x = Ax \tag{50.5}$$

с оператором A, действующим в банаховом пространстве E и определенным на замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$. Пусть уравнения (50.3) имеют вид

$$x = A_n x \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{50.6}$$

причем каждый оператор A_n определен на $\overline{\Omega}$ и действует в E.

Теорема 50.1. *Пусть A вполне непрерывен на $\overline{\Omega}$, не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и*

$$\gamma(I - A, \Omega) \neq 0. \tag{50.7}$$

Пусть каждый оператор A_n вполне непрерывен на $\overline{\Omega}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|A_n x - Ax\| = 0. \tag{50.8}$$

Тогда метод перехода к уравнениям (50.6) *сходится.*

Доказательство. Из (50.8) вытекает гомотопность на $\dot{\Omega}$ при больших n полей $I - A_n$ полю $I - A$. Поэтому $\gamma(I - A_n, \Omega) \neq 0$ при больших n. При этих n уравнения (50.6) имеют в области Ω решения. Остается показать, что при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ и при больших n уравнения (50.6) не имеют решений вне ε-окрестности $U(F; \varepsilon)$ множества F решений уравнения (50.5). Но этот простой факт вытекает из (50.8), так как $\|x - Ax\| \geqslant \delta_0 > 0$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $x \overline{\in} U(F; \varepsilon)$. ∎

В условиях теоремы 50.1 структура операторов A_n роли не играет. Если $A_n = P_n A$, где P_n — линейные проекторы на конечномерные подпространства, то уравнения (50.6) называют *уравнениями Галеркина*; они имеют вид

$$x = P_n Ax. \tag{50.9}$$

Переход к уравнениям Галеркина называют *методом Галеркина* или *общим проекционным методом*.

Последовательность проекторов P_n назовем *согласованной* с вполне непрерывным оператором A, если для операторов $A_n = P_n A$ выполнено условие (50.8). Последовательность P_n согласована с любым вполне непрерывным оператором, если $\|P_n x - x\| \to 0$ $(x \in E)$. Проекторы P_n могут быть и неограниченными — если, например, A вполне непрерывен как оператор из E в $E_1 \subset E$ и $\|P_n x - x\|_E \to 0$ при $x \in E_1$. Из теоремы 50 1 вытекает

Теорема 50.2. *Пусть вполне непрерывный на $\overline{\Omega}$ оператор A не имеет неподвижных точек на $\dot{\Omega}$ и $\gamma(I - A, \Omega) \neq 0$. Пусть проекторы P_n согласованы с A. Тогда метод Галеркина* (50.9) *приближенного решения уравнения* (50.5) *сходится.*

Эта простая теорема освещает новую сторону многих теорем существования — *полученные при помощи теории вращения условия существования решений одновременно обеспечивают применимость для приближенного их построения метода Галеркина.*

Перейдем к анализу быстроты сходимости метода Галеркина.

Теорема 50.3. *Пусть уравнение* (50.5) *имеет в $\overline{\Omega}$ единственное решение $x^* \in \Omega$. Пусть вполне непрерыв-*

ный оператор A дифференцируем по Фреше в точке x^* и 1 не является собственным значением оператора $A'(x^*)$. Пусть $\| P_n x - x \| \to 0$ при всех $x \in E$. Тогда галеркинские уравнения (50.6) *имеют при больших n решения x_n в области Ω, для которых справедливы оценки*

$$\alpha \| x^* - P_n x^* \| \leqslant \| x_n - x^* \| \leqslant \beta \| x^* - P_n x^* \|, \qquad (50.10)$$

где $\alpha, \beta > 0$.

Доказательство. Так как $\gamma(I - A, \Omega)$ равно $\operatorname{ind}(x^*, I - A)$, то из теорем 21.6 и 50.2 вытекает как существование при больших n решений x_n уравнений (50.9), так и сходимость последовательности x_n к x^*.

Остается установить оценки (50.10). Представим разности $x_n - x^*$ в виде

$$x_n - x^* = P_n A'(x^*)(x_n - x^*) - x^* + P_n x^* + \omega_n. \qquad (50.11)$$

Операторы $P_n A'(x^*)$ сходятся по норме к $A'(x^*)$. Поэтому при больших n операторы $I - P_n A'(x^*)$ имеют непрерывные обратные и нормы этих обратных операторов стремятся к норме оператора $[I - A'(x^*)]^{-1}$. Так как $\omega_n = - P_n [A x_n - A x^* - A'(x^*)(x_n - x^*)]$ и нормы операторов P_n ограничены равномерно, то $\| \omega_n \| = o(\| x_n - x^* \|)$. Для завершения доказательства остается переписать равенства (50.11) в виде

$$x_n - x^* = [I - P_n A'(x^*)]^{-1} (x^* - P_n x^* + \omega_n). \ \blacksquare$$

В условиях теоремы 50.3 нельзя гарантировать единственность решений у уравнений (50.9) даже при больших n. Если, однако, оператор A непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности точки x^*, то при больших n уравнения (50.9) имеют в Ω единственное решение. Теорема 50.3 относится и к линейным уравнениям $x = Cx + f$ с вполне непрерывным C в условиях, когда решение единственно.

Если $P_n x$ — сумма первых n членов разложения x в ряд по некоторому базису, то оценка (50.10) означает, что *галеркинские приближения сходятся к x^* с такой же быстротой, как разложение элемента x^* в ряд по выбранному базису.*

Методу Галеркина, его применениям и его анализу посвящена обширная литература, начиная с классических работ Н. Н. Боголюбова — Н. М. Крылова, М. В. Келдыша. Оценки вида (50.10) излагались в лекциях Н. Н. Боголюбова в 1939 г. для некоторых конкретных классов линейных задач. В общем виде они были получены С. Г. Михлиным, Н. И. Польским также для линейных операторных уравнений. Для нелинейных уравнений первые теоремы о сходимости метода Галеркина и оценки вида (50.10) предложил М. А. Красносельский (применив, по-видимому, впервые при исследовании приближенных методов теорию вращения векторных полей). Фундаментальные результаты по теории галеркинских схем для операторных уравнений принадлежат Г. М. Вайникко, который в связи с этим существенно модернизировал и усилил известную общую теорию Л. В. Канторовича приближенных методов. Библиографию см. в [26].

50.3. Метод Ляпунова — Чезари. Вернемся к уравнению (50.1). Пусть в пространствах E_1 и E_2 выбраны подпространства L_1 и L_2 одной и той же конечной размерности k и пусть заданы линейные проекторы P_1 и P_2 на эти подпространства. Ниже используются обозначения $Q_1 = I - P_1$, $Q_2 = I - P_2$ и $u = P_1 x$, $v = Q_1 x$ $(x \in E_1)$. Уравнение (50.1) очевидным образом равносильно системе

$$P_2 T(u + v) = 0, \qquad Q_2 T(u + v) = 0. \qquad (50.12)$$

Допустим, что второе из уравнений (50.12) при каждом $u \in L_1$ имеет единственное решение

$$v = Ru. \qquad (50.13)$$

Тогда уравнение (50.1) сводится к одному векторному уравнению

$$P_2 T(u + Ru) = 0, \qquad (50.14)$$

т. е. к системе k скалярных уравнений с k скалярными неизвестными.

Фактическое построение оператора R возможно лишь в редких случаях, но последовательность сходящихся к R операторов R_n часто может быть указана. Тогда вместо (50.14) естественно рассматривать уравнения

$$P_2 T(u + R_n u) = 0 \qquad (50.15)$$

и истолковывать их как уравнения (50.3). По решению u_n уравнения (50.15) приближенное решение x_n уравнения (50.1) определяется равенством

$$x_n = u_n + R_n u_n. \qquad (50.16)$$

Допустим, что уравнение (50.15) не имеет решений на границе $\dot{\Omega}_1$ (в L_1) ограниченной области $\Omega_1 \subset L_1$.

Тогда при каждом линейном невырожденном отображении S пространства L_2 на L_1 определено вращение $\gamma(\Phi, \Omega_1)$ поля

$$\Phi u = SP_2T(u + Ru). \qquad (50.17)$$

Если последовательность операторов R_n равномерно на $\overline{\Omega}_1$ сходится к R и если $\gamma(\Phi, \Omega_1) \neq 0$, то из теоремы 50.1 вытекает сходимость метода приближенного решения уравнения (50.1), основанного на переходе от (50.14) к уравнениям (50.15).

Вращение поля (50.17) зависит, конечно, от выбора отображения S. Но в силу теоремы о произведении вращений

$$\gamma[SP_2T(I + R), \Omega_1] = \gamma[S_1P_2T(I + R), \Omega_1] \operatorname{sign} \det S^{-1}S_1. \qquad (50.18)$$

Отметим, что описанная процедура перехода от уравнения (50.1) к уравнению (50.14) и последующему построению приближенных решений (50.16) может быть истолкована как замена уравнения (50.1) эквивалентным уравнением

$$SP_2T(P_1x + RP_1x) + Q_1x - RP_1x = 0 \qquad (50.19)$$

в пространстве E_1 и переходом к приближенным уравнениям

$$SP_2T(P_1x + R_nP_1x) + Qx - R_nP_1x = 0, \qquad (50.20)$$

рассматриваемым также в пространстве E_1.

В конкретных задачах основная трудность заключается в построении операторов R_n.

Рассмотрим снова уравнение (50.5) с оператором A, действующим в банаховом пространстве E. Выберем в E конечномерное подпространство L, оператор P проектирования на L; положим $Q = I - P$, $N = QE$. В качестве (50.12) рассмотрим систему

$$u = PA(u + v), \quad v = QA(u + v). \qquad (50.21)$$

Если оператор A вполне непрерывный и достаточно гладкий, то при удачном выборе подпространства L оператор QA удовлетворяет условиям принципа сжатых отображений и поэтому оператор (50.13) может быть получен (по крайней мере в ограниченной области пространства L) как равномерный предел последовательности операторов

$$R_nu = QA(u + R_{n-1}u), \quad R_0u = 0. \qquad (50.22)$$

Уравнения (50.15) будут иметь при этом вид

$$u = PA(u + R_nu), \qquad (50.23)$$

уравнение (50.19) — вид

$$x = PA(Px + RPx) + RPx, \qquad (50.24)$$

а уравнения (50.20) — вид

$$x = PA(Px + R_nPx) + R_nPx. \qquad (50.25)$$

Метод, основанный на переходе к уравнениям (50.23), мы называем *методом Ляпунова — Чезари*. Для обоснования сходимости этого метода нужно лишь установить отличие от нуля вращения поля $I - PA(I + R)$ на границе некоторой ограниченной области $\Omega_0 \subset E$. В естественных условиях из теорем родственности вытекает совпадение вращения поля $I - PA(I + R)$ на $\dot{\Omega}_0$ с вращением поля $I - A$ на границе соответствующей области Ω в пространстве E. Таким образом, *метод Ляпунова — Чезари применим в условиях теорем существования, в которых устанавливалось отличие от нуля вращения поля $I - A$.*

Основная идея перехода к уравнениям вида (50.14) была использована А. М. Ляпуновым в связи с теорией ветвления малых решений, а затем эксплуатировалась многими авторами. В настоящей книге она применялась, например, в ряде теорем родственности, в алгоритме вычисления индекса особой точки и др.

Л. Чезари (L. Cesari, Contr. to Diff. Equat. I, N. Y., 1963; Michigan Math. J. 11 (1964)), М. Урабе (Механика, сб. переводов, т. 3, № 97, 1966), С. А. Вильямс (S. A. Williams, Michigan Math. J. 15 (1968)), П. П. Забрейко и С. О. Стрыгина (ДАН УССР, № 7, 1970) и другие авторы применяли изложенную схему для приближенного построения периодических решений различных дифференциальных уравнений. При этом элемент Px определялся как сумма первых k членов разложения $x(t)$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям.

50.4. Метод Тонелли. Приближенные уравнения можно использовать и для доказательства теорем существования.

Скажем, что последовательность действующих из E_1 в E_2 операторов G_n *квазиприближает* оператор T, если предел x^* каждой сходящейся в E_1 последовательности решений x_{n_j} уравнений $G_{n_j}x = 0$ принадлежит Ω_1 и $Tx^* = 0$. В этом определении ничего не говорится о том, на каком множестве задан каждый оператор G_n.

Теорема 50.4. *Пусть можно построить квазиприближающую оператор T последовательность G_n так, что каждое уравнение* (50.3) *разрешимо в E_1 и множество $\mathfrak{M}$ всех решений всех уравнений* (50.3) *компактно. Тогда уравнение* (50.1) *имеет решения.*

Очевидность теоремы 50.4 не мешает ее полезности.

Утверждение теоремы 50.4 сохраняет силу, если предположение о компактности $\mathfrak{M}$ заменить менее ограничительным предположением о компактности каждой последовательности $z_k \in \mathfrak{M}(k)$, где $\mathfrak{M}(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — замкнутая выпуклая оболочка множества всех решений всех уравнений (50.3) с номерами $n \geqslant k$.

Для иллюстрации рассмотрим в R^n задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(0) = x_0. \tag{50.26}$$

Пусть $f(t, x)$ непрерывна и $\|f(t, x)\| \leqslant M$ при $0 \leqslant t \leqslant a$, $\|x - x_0\| \leqslant b$. Обозначим через Ω шар $\|x(t) - x_0\| < b$ в пространстве C непрерывных на $[0, \delta]$ $\left(0 < \delta \leqslant a, \delta \leqslant bM^{-1}\right)$ функций со значениями в R^n. Определим на $\overline{\Omega}$ последовательность операторов

$$G_n(x) = x(t) - x_0 - \int_0^t f_n\left[\tau, x\left(\tau - \frac{1}{n}\right)\right] d\tau, \tag{50.27}$$

где $f_n(\tau, x) = f(\tau, x_0)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant 1/n$ и $f_n(\tau, x) = f(\tau, x)$ при $\tau \geqslant 1/n$. Каждое уравнение (50.3) с оператором (50.27) имеет в $\overline{\Omega}$ единственное решение $x_n(t)$. Производные $x_n'(t)$ равномерно ограничены и поэтому последовательность $x_n(t)$ компактна в C, причем каждая предельная функция $x^*(t)$ является решением предельного уравнения (50.1) с оператором

$$Tx = x(t) - x_0 - \int_0^t f[\tau, x(\tau)]\, d\tau. \tag{50.28}$$

Значит, $x^*(t)$ является решением задачи (50.26).

Мы доказали классическую теорему Пеано. При этом фактически применена теорема 50.4 — операторы (50.27) квазиприближают оператор (50.28). При доказательстве одновременно установлена сходимость метода решения задачи (50.26), основанного на переходе к уравнениям (50.3) с операторами (50.27).

Изложенный метод исследования задачи Коши восходит к Тонелли. По поводу этого метода см. монографию Я. Д. Мамедова «Односторонние оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах» (Баку, «Элм», 1971). Эта монография интересна и в связи с задачами, рассмотренными в § 42.

50.5. Метод механических квадратур. Основные способы вычисления интегралов заключаются в использовании формул механических квадратур:

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n f\left(t_i^n\right) + r_n(f) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{50.29}$$

Точки t_i^n называют *узлами*, а числа α_i^n *коэффициентами* квадратурного процесса (50.29). Квадратурный процесс (50.29) называют *сходящимся*, если $r_n(f) \to 0$ для любой $f(t) \in C$.

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_a^b K[t, s, x(s)]\, ds. \tag{50.30}$$

Если воспользоваться формулой механических квадратур (50.29), то его можно заменить приближенным уравнением

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n K\left[t, s_i^n, x\left(s_i^n\right)\right]. \tag{50.31}$$

Решения уравнения (50.31) определяются равенством

$$x(t) = Q_n \tilde{y},$$

где $\tilde{y} = \left\{\tilde{\xi}_1^n, \ldots, \tilde{\xi}_n^n\right\}$ — решение системы

$$\xi_j^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^n K\left(s_j^n, s_i^n, \xi_i^n\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{50.32}$$

n скалярных уравнений с n скалярными неизвестными, а

$$Q_n y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n K(t, s_i^n, \xi_i^n). \qquad (50.33)$$

Переход от уравнения (50.30) к системе (50.32) — это *метод механических квадратур решения интегральных уравнений.*

Пусть E — пространство векторов $y = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с нормой $\| y \| = \max|\xi_i|$. Обозначим через P_n действующий из C в E линейный оператор

$$P_n x = \{x(t_1^n), \ldots, x(t_n^n)\} \qquad (x(t) \in C). \qquad (50.34)$$

Очевидно, $\| P_n \| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть $x^*(t)$ — решение уравнения (50.30), а $\tilde{y}^n$ — решение системы (50.33). Мерой близости этих решений (см. п. 50.1) будем считать величину $\| P_n x^* - \tilde{y}^n \|$. В соответствии с этой мерой близости определяется и понятие сходимости метода механических квадратур. Будем говорить, что этот метод *сходится*, если при достаточно больших n существуют решения $\tilde{y}^n$ систем (50.32) и для каждой последовательности $\tilde{y}^n$ таких решений выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{y}^n, P_n F) = 0, \qquad (50.35)$$

где F — множество решений уравнения (50.30).

Пусть, например, ядро $K(t, s, x)$ непрерывно и уравнение (50.30) имеет единственное решение $x^*(t)$. Тогда, как легко видеть, из (50.35) вытекает, что $\| \tilde{x}_n(t) - x^*(t) \|_C \to 0$, где $\tilde{x}_n(t) = Q_n \tilde{y}^n$. Аналогичным образом можно истолковать (50.35) и в других случаях.

Перейдем к описанию абстрактного аналога метода механических квадратур.

Последовательность линейных операторов P_n, отображающих банахово пространство E на банаховы пространства E^n, назовем *правильной*, если нормы операторов P_n ограничены в совокупности,

$$\inf_{P_n x = y} \| x \|_E \leqslant \alpha \| y \|_{E^n} \qquad (y \in E^n), \qquad (50.36)$$

$$\underline{\lim} \| P_n x \|_{E^n} \geqslant \beta \| x \|_E \qquad (x \in E), \qquad (50.37)$$

где α не зависит от n, а $\beta > 0$.

Пусть на замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$ задан вполне непрерывный оператор A. Пусть P_n — правильная последовательность линейных отображений E на пространства E^n. Скажем, что последовательность определенных на $\bar{\Omega}_n = \overline{P_n \Omega}$ действующих в E^n вполне непрерывных операторов A_n *компактно аппроксимирует* оператор A на $\bar{\Omega}$, если

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n P_n x - P_n A x \| = 0 \qquad (x \in \bar{\Omega} \cap \overline{\mathrm{co} A \bar{\Omega}}), \qquad (50.38)$$

если для любой последовательности $y_n \in \bar{\Omega}_n$ можно указать компактную в E последовательность $x_n \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющую равенствам

$$P_n x_n = A_n y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (50.39)$$

и, наконец, если из $\| y_n - P_n x \| \to 0$ следует соотношение $\| A_n y_n - A_n P_n x \| \to 0$ при всех $x \in \bar{\Omega}$.

Если операторы A_n компактно аппроксимируют оператор A, то переход от уравнения $x = Ax$ в пространстве E к уравнениям $y = A_n y$ в пространствах E^n назовем *методом компактной аппроксимации.* Метод компактной аппроксимации по определению сходится, если уравнения $y = A_n y$ при больших n имеют в $\bar{\Omega}_n$ решения $\tilde{y}_n$ и для этих решений справедливо равенство (50.35), где F — теперь уже множество решений уравнения $x = Ax$.

Метод механических квадратур решения уравнения (50.30) с непрерывным ядром можно истолковать как метод компактной аппроксимации, если P_n — это операторы (50.34) (правильность последовательности P_n вытекает из сходимости квадратурного процесса (50.29)), а

$$A_n y = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n K(s_1^n, s_i^n, \xi_i^n), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n K(s_n^n, s_i^n, \xi_i^n) \right\}. \qquad (50.40)$$

Поэтому приводимая ниже теорема о сходимости метода компактной аппроксимации является одновременно теоремой о сходимости метода механических квадратур.

Теорема 50.5. *Пусть последовательность вполне непрерывных операторов A_n компактно аппроксимирует на замкнутом шаре $\overline{\Omega}$ действующий в E вполне непрерывный оператор A. Пусть A не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек и $\gamma(I - A, \Omega) \neq 0$. Тогда метод компактной аппроксимации приближенного решения уравнения $x = Ax$ сходится.*

Доказательство см. в [10]. ∎

Несмотря на простоту и естественность содержащегося в теореме 50.5 результата, известные нам ее доказательства содержат сложные и нетривиальные построения. Неизвестны удовлетворительные оценки быстроты сходимости метода компактной аппроксимации.

Теорема 50.5 снова подчеркивает важность теорем существования, в которых разрешимость уравнения $x = Ax$ вытекает из отличия от нуля вращения поля $x - Ax$ — условия этих теорем существования одновременно гарантируют сходимость метода компактной аппроксимации!

В теореме 50.2 о сходимости метода Галеркина не содержалось никаких предположений о структуре области Ω. В теореме 50.5 мы предположили, что область Ω является шаром. Это не случайно. Примеры показывают, что в теореме 50.5 нельзя даже перейти к произвольной выпуклой ограниченной области! Однако сходимость метода компактной аппроксимации сохраняется, если область Ω обладает следующим свойством: каждому $x_0 \in \overline{\Omega}$ соответствует такое n_0, что $P_n x_0 \in \overline{P_n \Omega}$ при $n \geqslant n_0$.

Основные определения метода компактной аппроксимации, теоремы о сходимости метода компактной аппроксимации и метода механических квадратур, анализ роли структуры области Ω принадлежат Г. М. Вайникко [10], [11]. Ряд дополнений указал Н. А. Бобылев (ДАН СССР **199**, № 1 (1971)); в частности, оказалось, что по любой правильной последовательности отображений P_n для каждого вполне непрерывного оператора A можно построить компактно аппроксимирующую последовательность A_n. Н. А. Бобылев (УМН **27**, № 4 (1972)) обосновал на базе теоремы 50.5 сходимость метода механических квадратур отыскания периодических решений неавтономных систем в условиях, когда алгебраическое число периодических решений отлично от нуля (например, если для системы может быть указана правильная направляющая функция ненулевого индекса, — см. §§ 13, 14).

§ 51. Оценки погрешности

51.1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$x = Ax \tag{51.1}$$

с нелинейным вполне непрерывным оператором A, действующим в пространстве E. Допустим, что каким-либо методом (итерационным, переходом к аппроксимирующему уравнению, из физических соображений, моделированием уравнения и т. д.) найдена точка $x_0 \in E$, которая объявляется приближенным решением уравнения (51.1). Естественно возникает вопрос о «точности» приближенного решения x_0. Ясно, что применявшаяся процедура построения точки x_0 ответа на этот вопрос не дает. Наиболее доступная информация о «качестве» приближенного решения x_0 заключается в оценке нормы невязки $Ax_0 - x_0$. Если $\| Ax_0 - x_0 \|$ «достаточно мала», то принято считать приближенное решение x_0 «хорошим». Смысл слов «достаточно мала» обычно бывает неясен и понимается каждым математиком, приближенно решающим уравнение, в соответствии с имеющимся у него практическим опытом. Следует иметь в виду, что никакая малость невязки без дополнительной информации об операторе A не служит гарантией близости приближенного решения к некоторому точному решению уравнения (51.1); более того, невязка может быть сколь угодно малой, а у уравнения (51.1) может не быть решений!

Поэтому при анализе «качества» приближенного решения x_0 желательно иметь количественную оценку величины $\rho(x_0, F)$, где F — множество решений уравнения (51.1). *Получение оценки*

$$\rho(x_0, F) \leqslant \delta_0 \tag{51.2}$$

— не что иное, как доказательство существования решения у уравнения (51.1) *в шаре* $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$. Поэтому для получения оценок (51.2) применимы все методы, изложенные в предыдущих главах.

51.2. Общая схема. Получение оценок (51.2) упрощается, если величина $\rho(x_0, F)$ фактически мала — в этом случае нелинейный (и, возможно, сложный) оператор A в окрестности точки x_0 достаточно хорошо можно приблизить оператором более простой природы.

Пусть при $\|x-x_0\| \leqslant r$ верна оценка

$$\|Ax - Ax_0 - A'(x_0)(x-x_0)\| \leqslant a(r)\|x-x_0\|^2. \quad (51.3)$$

Пусть 1 не является собственным значением оператора $A'(x_0)$. Тогда x_0 — единственная особая точка поля $\Phi x = x - x_0 - A'(x_0)(x-x_0)$ и ее индекс равен 1 или -1. Если на некоторой сфере $\|x-x_0\| = \delta$ поле $I-A$ окажется гомотопным полю Φ, то его вращение на этой сфере будет отлично от нуля и уравнение (51.1) будет иметь в шаре $\|x-x_0\| \leqslant \delta$ по крайней мере одно решение, т. е. будет верна оценка (51.2). Поэтому (51.2) вытекает из справедливости при $\|x-x_0\| = \delta$ оценки

$$\|Ax - x_0 - A'(x_0)(x-x_0)\| < \|x - x_0 - A'(x_0)(x-x_0)\|,$$

которая заведомо верна, если

$$\|x_0 - Ax_0\| + \delta^2 a(\delta) < \left\|[I - A'(x_0)]^{-1}\right\|^{-1}\delta. \quad (51.4)$$

Таким образом, получение оценки (51.2) сводится к анализу скалярного неравенства. Если невязка мала, то из (51.4) вытекает, что можно в качестве δ выбрать число, примерно равное $\|[I - A'(x_0)]^{-1}\|\cdot\|x_0 - Ax_0\|$.

Более сложная схема рассуждений нужна в случае, когда 1 является собственным значением оператора $A'(x_0)$ или норма оператора $[I-A'(x_0)]^{-1}$ велика.

Ограничимся изложением одного соображения. Другие конструкции см. в [26]; они недавно обобщены А. М. Потаповым (сб. «Прикладная и вычислительная математика», Изд-во Киевского ун-та, № 6, № 7 (1975)).

Пусть фиксировано некоторое натуральное число k и A можно представить в виде

$$Ax = B_k x + C_k x + Ax_0 - x_0 \quad (51.5)$$

так, что B_k, C_k вполне непрерывны и

$$\|x - B_k x\| \geqslant a_k \|x-x_0\|^k \quad (\|x-x_0\| \leqslant r_0), \quad (51.6)$$

$$\|C_k x\| \leqslant \varepsilon_1\|x-x_0\| + \varepsilon_2\|x-x_0\|^2 + \ldots + \varepsilon_k\|x-x_0\|^k + b(r_0)\|x-x_0\|^{k+1} \quad (\|x-x_0\| \leqslant r_0). \quad (51.7)$$

Тогда при $\delta \leqslant r_0$ и

$$\|Ax_0 - x_0\| + \varepsilon_1\delta + \ldots + \varepsilon_k\delta^k + b(\delta)\delta^{k+1} < a_k\delta^k \quad (51.8)$$

векторные поля $I-A$ и $I-B_k$ гомотопны на сфере $\|x-x_0\| = \delta$ и поэтому их вращения на этой сфере одинаковы. Следовательно, вращение поля $I-A$ совпадает с $\operatorname{ind}(x_0, I-B_k)$. Нами доказана

Лемма 51.1. *Пусть* $\operatorname{ind}(x_0, I-B_k) \neq 0$. *Пусть* $\delta \leqslant r$ *и* δ *удовлетворяет неравенству* (51.8). *Тогда верна оценка* (51.2).

Приложения леммы 51.1 требуют удачного расщепления оператора A в сумму (51.5). Следует строить расщепления (51.5), соответствующие различным k, и при каждом k пытаться получить на базе леммы 51.1 оценку (51.2).

При фиксированном k удобно разложить оператор A в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора

$$Ax = Ax_0 + A'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{k!}A^{(k)}(x_0)(x-x_0) + \omega(x-x_0),$$

где

$$\|\omega(x-x_0)\| \leqslant b(r)\|x-x_0\|^k \quad (\|x-x_0\| \leqslant r).$$

После этого следует определить оператор B_k как сумму $B_k x = x_0 + B_{k1}(x-x_0) + \ldots + B_{kk}(x-x_0)$, где B_{kj} — это однородный порядка j оператор и

$$\left\|B_{kj}x - \frac{1}{j!}A^{(j)}(x_0)x\right\| \leqslant \varepsilon_j\|x\|^j.$$

Операторы B_{kj} нужно выбрать так, чтобы изолированность особой точки x_0 поля $I-B_k$ можно было установить при помощи алгоритмов, изложенных в § 24. При реализации этих алгоритмов оценка (51.6) устанавливается одновременно.

51.3. Замечания.

а) Если невязка достаточно мала (и числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ достаточно малы), то из (51.8) вытекает, что в качестве δ может быть взято число, примерно равное $a_k^{1/k}\|Ax_0 - x_0\|^{1/k}$. Поэтому следует (если это возможно) пользоваться расщеплениями (51.5) при малых k. В начале п. 51.2 была описана схема, соответствующая $k=1$.

б) Скалярное неравенство (51.4) легко получить при помощи принципа Шаудера. Однако этот принцип не удается применить в случаях, когда оценка погрешности требует учета нескольких производных оператора A в точке x_0.

в) Мы рассматривали уравнение (51.1) с вполне непрерывным оператором A. Все рассуждения сохраняют силу для более общих уравнений; достаточно, чтобы поле $I - A$ относилось к одному из таких классов (см. гл. 4), для которых определено вращение с обычными свойствами.

г) Если индекс особой точки x_0 поля $I - B_k$ равен нулю, то гарантировать оценку (51.2) с малым δ в общем случае нельзя даже при малой невязке $Ax_0 - x_0$. Однако, если известна не только величина нормы невязки, но и ее направление, то оценки типа (51.2) возможны. Для их получения нужно рассматривать поле $x - Ax$ уже не на сфере $\|x\| = \delta$, а на границах некоторых частей шара $\|x\| \leqslant \delta$. Как правило, приходится конструировать некоторые линейные функционалы $l_j(x)$ по оператору B_k и предполагать, что $l_j(Ax_0 - x_0) > 0$, — тогда при малых нормах невязки удается получить оценки типа (51.3).

§ 52. Индекс устойчивого решения

52.1. Последовательные приближения и устойчивость. Рассмотрим ω-периодическую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{52.1}$$

порядка n. Пусть нулевая точка 0 является состоянием равновесия этой системы ($f(t, 0) \equiv 0$). Тогда (см. § 13) в некоторой окрестности нуля будет определен оператор $U(\omega)$ сдвига по траекториям системы (52.1) за время ω.

Напомним, что нулевое состояние равновесия называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и если каждое решение, принимающее при $t = 0$ достаточно малое значение, стремится к нулю при $t \to \infty$. Непосредственно из определения вытекает, что нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво в том и только том случае, если найдется такая окрестность G нулевой точки, на которой определены все итеции $U^k(\omega)$ оператора сдвига, и если $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{x\in G} \|U^k(\omega)x\| = 0$.

Таким образом, *каждый признак сходимости (равномерной относительно начальных значений x_0 из окрестности состояния равновесия x_*) последовательных приближений*

$$x_k = U(\omega)x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{52.2}$$

является признаком асимптотической устойчивости состояния равновесия x_*.

Пусть, например, линеаризованная в нуле система (52.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{52.3}$$

Матрица $A(t)$ будет ω-периодическая. Обозначим через $V(\omega)$ *оператор монодромии* (матрицу монодромии) системы (52.3). Иначе говоря, $V(\omega)$ — это оператор сдвига по траекториям линейной системы (52.3) за время ω. Как известно, $V(\omega)$ является производной оператора $U(\omega)$ в нулевой точке. Если все мультипликаторы системы (52.3) лежат в круге $|\mu| < 1$, то в R^n можно так определить норму $\|\cdot\|_*$, что $\|V(\omega)x\|_* \leqslant q\|x\|_*$, где $q < 1$. Поэтому из оценки $|\mu| < 1$ мультипликаторов линейной системы (52.3) вытекает асимптотическая устойчивость нулевого состояния равновесия нелинейной системы (52.1). Мы привели, по существу, обычное доказательство одной из теорем А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Если хотя бы один мультипликатор лежит вне круга $|\mu| \leqslant 1$, то состояние равновесия неустойчиво.

Более сложен случай, когда все мультипликаторы лежат в круге $|\mu| \leqslant 1$, а некоторые из них на окружности $|\mu| = 1$. Анализу этого критического случая посвящена обширная литература. Обратим внимание на возможности применения в этой ситуации методов теории монотонных операторов, теории вогнутых и выпуклых операторов.

Рассмотрим частные случаи.

а) Пусть 1 является простым мультипликатором системы (52.3), а остальные мультипликаторы лежат в круге $|\mu| < 1$. Пусть e_0, g_0 — собственные векторы матрицы $U(\omega)$ и сопряженной матрицы $U^*(\omega)$, причем $(e_0, g_0) = 1$. Определим действующие в R^n линейные проекторы $Px = (x, g_0)e_0$, $Qx = x - Px$. Оператор Q проектирует на подпространство E, инвариантное для $V(\omega)$, которое является прямой суммой корневых подпространств, отвечающих собственным значениям из круга $|\mu| < 1$.

Зададимся числами $\delta_0, \delta_1 > 0$ и положим

$$K(\delta_0) = \{x: \ (x, g_0) \geqslant 0, \ \|Qx\| \leqslant \delta_0 (x, g_0)\},$$
$$-K(\delta_0) = \{x: \ -x \in K(\delta_0)\},$$
$$M(\delta_0, \delta_1) = \{x: \ x \in K(\delta_0), \ \|x\| \leqslant \delta_1\},$$
$$-M(\delta_0, \delta_1) = \{x: \ x \in -K(\delta_0), \ \|x\| \leqslant \delta_1\}.$$

Нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво в том и только том случае, если при некоторых $\delta_0, \delta_1 > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in M(\delta_0, \delta_1) \cap -M(\delta_0, \delta_1)} \|U^k(\omega) x\| = 0. \qquad (52.4)$$

Геометрически этот факт очевиден. Он указывает пути применения к анализу устойчивости нулевого состояния равновесия конусных методов. Как легко видеть, каждое из множеств $K(\delta_0)$ и $-K(\delta_0)$ является конусом, причем оператор $U(\omega)$ положителен (по соответствующему конусу) на пересечении конуса с малой окрестностью нуля. Проверка условия (52.4) равносильна анализу свойств оператора $U(\omega)$ на конусах $K(\delta_0)$ и $-K(\delta_0)$ (в окрестности нуля). Например, если оператор $U(\omega)$ на обоих конусах вогнут, то нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво. Если хотя бы на одном из них оператор $U(\omega)$ выпуклый, то нулевое состояние равновесия неустойчиво!

б) Пусть у системы (52.3) есть простой мультипликатор -1, а остальные мультипликаторы лежат в круге $|\mu| < 1$. Тогда удобно рассматривать систему (52.1) как 2ω-периодическую. При этом переходе и систему (52.3) нужно рассматривать как 2ω-периодическую. Но оператор сдвига $V(2\omega)$ по траекториям системы (52.3) за время 2ω будет равен $V^2(\omega)$ и поэтому у него будет простое собственное значение, равное 1, а остальные собственные значения будут в круге $|\mu| < 1$. Поэтому в рассматриваемом случае можно применить построения пункта а).

в) Все предыдущие соображения относились и к автономным системам

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \qquad (52.5)$$

(во всех построениях в качестве ω можно было брать произвольное положительное число). Теперь мы рассматриваем только автономные системы. Тогда (52.3) будет системой с постоянными коэффициентами.

Допустим, что у матрицы A есть два мнимых простых собственных значения $i\tau_0, -i\tau_0$ ($\tau_0 > 0$), а у остальных собственных значений вещественные части отрицательны. Обозначим через E_0 двумерное инвариантное для A подпространство, отвечающее собственным значениям $i\tau_0$ и $-i\tau_0$, а через E^0 — инвариантное подпространство, отвечающее остальным собственным значениям. Каждая точка $x \in R^n$ единственным образом представима в виде $x = u + v$, где $u \in E_0$, $v \in E^0$; операторы $Px = u$ и $Qx = v$ проектируют соответственно на E_0 и E^0. Выберем в E_0 некоторый вектор e_0 и обозначим через R^0 подпространство дефекта 1, содержащее E^0 и e_0.

Зададимся числом $\delta_0 > 0$ и положим $\Pi(\delta_0) = \{x: \ \|Qx\| \leqslant \delta_0 \|Px\|\}$. Пересечение $\Pi(\delta_0)$ и R^0 будет состоять из двух конусов; через $K(\delta_0)$ обозначим тот из них, который содержит e_0. Пусть

$$M(\delta_0, \delta_1) = \{x: \ x \in \Pi(\delta_0), \ \|x\| \leqslant \delta_1\},$$
$$K(\delta_0, \delta_1) = M(\delta_0, \delta_1) \cap R^0.$$

Если рассмотреть решения $x(t; x_0)$ системы (52.5), удовлетворяющие начальному условию $x(0; x_0) = x_0 \in K(\delta_0, \delta_1)$ при достаточно малом $\delta_1 = \delta_1(\delta_0) > 0$, то каждое из них через время, близкое к $2\pi/\tau_0$ пересечет подпространство R^0 в некоторой точке $y_0 = Wx_0$. Иначе говоря, на $K(\delta_0, \delta_1)$ определен оператор последования W. Очевидно, *нулевое состояние равновесия системы* (52.5) *асимптотически устойчиво в том и только том случае, если при некоторых* $\delta_0, \delta_1 > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in K(\delta_0, \delta_1)} \|W^k x\| = 0.$$

Множество $K(\delta_0)$ является конусом, оператор W положителен на $K(\delta_0)$ (в окрестности нуля). Снова для анализа устойчивости может быть применена теория вогнутых и выпуклых операторов.

Изложенные соображения допускают обобщения и на более сложные вырождения. Возможности их реализации мало исследованы.

Выше обсуждалась устойчивость заданного состояния равновесия. Однако все рассуждения можно применить и в случае неизвестного нам ω-периодического решения.

Пусть, например, удалось установить, что оператор $U(\omega)$ сдвига за время ω по траекториям ω-периодической системы (52.1) имеет в конусе $K \subset R^n$ ненулевую неподвижную точку x_*. Эта неподвижная точка является начальным значением ω-периодического решения $x_*(t)$ (см. § 13). Из общих теорем о вогнутых и выпуклых операторах вытекает, что решение $x_*(t)$ асимптотически устойчиво, если оператор $U(\omega)$ вогнутый, и неустойчиво, если он выпуклый.

Мы рассмотрели (52.1) в конечномерном пространстве. Рассуждения не изменились бы при переходе к бесконечномерным функциональным пространствам, если только оператор сдвига $U(\omega)$ по траекториям уравнения (или один из операторов $BU(\omega)B^{-1}$ квазисдвига) непрерывен. Поэтому изложенные схемы применимы для исследования устойчивости решений смешанных граничных задач для уравнений параболического типа, уравнений Навье — Стокса, бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с распределенным аргументом и т. д.

52.2. Признак отсутствия асимптотической устойчивости. Продолжим изучение системы (52.5) с нулевым состоянием равновесия. Будем считать, что состояние равновесия изолировано. Пусть $\varkappa(f)$ — индекс нулевой особой точки векторного поля $-f(x)$.

Теорема 52.1. *Если нулевое состояние равновесия системы* (52.5) *асимптотически устойчиво, то* $\varkappa(f)=1$.

Для доказательства нужно рассмотреть векторные поля $\Phi(t)x = x - U(t)x$, где $U(t)$ — оператор сдвига за время t по траекториям системы (52.5). Эти поля при $t>0$ невырождены на сферах $\|x\| = 2r$ малых радиусов $2r$. Поля $\Phi(t)$ при малых положительных t гомотопны полю $-f(x)$ и поэтому их вращение равно $\varkappa(f)$. Следовательно, вращение полей $\Phi(t)$ равно $\varkappa(f)$ и при сколь угодно больших t. Но при больших t все точки $U(t)x$ лежат в шаре $\|x\| \leqslant r$, поэтому поля $\Phi(t)$ гомотопны единичному полю I и их вращение равно 1. ∎

Из теоремы 52.1 вытекает

Теорема 52.2. *Пусть нулевое состояние равновесия системы* (52.5) *изолировано и* $\varkappa(f) \neq 1$. *Тогда нулевое состояние равновесия не обладает свойством асимптотической устойчивости.*

В главах 1 и 2 были изложены различные приемы вычисления вращения для различных общих и частных классов полей. Воспользуемся поводом и приведем без доказательства еще одну формулу, которая восходит к Кронекеру (читателю полезно ее доказать).

Пусть x_0 — изолированная особая точка непрерывного дифференцируемого векторного поля $g(x)$ в R^n. Обозначим через $J[\hat g](x)$ якобиан отображения

$$\hat g(x) = \frac{\|x - x_0\|}{\|g(x)\|} \cdot g(x);$$

этот якобиан определен и непрерывен в окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0). Обозначим через $T(\rho)$ шар $\|x - x_0\| \leqslant \rho$, а через $v_n(\rho)$ — его объем. Пусть x_0 — единственная особая точка поля $g(x)$ в шаре $\|x - x_0\| \leqslant \rho_0$. Тогда при $\rho \leqslant \rho_0$

$$\operatorname{ind}(x_0, g) = \frac{1}{v_n(\rho)} \int \ldots \int\limits_{T(\rho)} J[\hat g](x)\, dx. \tag{52.6}$$

Формула (52.6) для фактических вычислений мало удобна. Впрочем, правую часть можно вычислять приближенно — если допущенная ошибка меньше 0,5, то округление приведет к точному ответу.

52.3. Непрерывная деформация системы с изолированным состоянием равновесия. Пусть дано однопараметрическое семейство

$$\frac{dx}{dt} = f(x;\ \lambda) \qquad (\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1) \tag{52.7}$$

автономных систем. Пусть нуль — единственное в некотором шаре состояние равновесия этих систем. Если при этом правая часть непрерывна по x и λ, то будем говорить, что системы $\frac{dx}{dt} = f_0(x)$ и $\frac{dx}{dt} = f_1(x)$, где $f_0(x) = f(x; \lambda_0)$ и $f_1(x) = f(x; \lambda_1)$, можно непрерывно и невырожденно относительно нулевого состояния равновесия деформировать друг в друга.

Лемма 52.1. *Пусть нуль является изолированным состоянием равновесия двух систем*

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \qquad \frac{dx}{dt} = h(x). \tag{52.8}$$

Каждую из этих систем можно непрерывно и невырожденно относительно нулевого состояния равновесия деформировать во вторую в том и только том случае, если $\varkappa(g) = \varkappa(h)$.

Доказательство. Если системы (52.8) можно невырожденно деформировать друг в друга, то на сферах $\|x\| = \rho$ малых радиусов ρ поля $-g(x)$ и $-h(x)$ гомотопны друг другу по определению. Отсюда вытекает равенство их вращений, которые совпадают с $\varkappa(g)$ и $\varkappa(h)$.

Пусть $\varkappa(g) = \varkappa(h)$ и пусть у систем (52.8) нет отличных от нулевой точки состояний равновесия в шаре $\|x\| \leqslant r$. Тогда поля $g(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковое вращение на сфере $\|x\| = r$ и поэтому они гомотопны на этой сфере. Следовательно, найдется непрерывная и не принимающая нулевых значений вектор-функция $\varphi(x; \mu)$ ($\|x\| = r$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$) такая, что $\varphi(x; 0) = g(x)$ и $\varphi(x; 1) = h(x)$. Положим

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\left[(1+\lambda)\dfrac{\|x\|}{r}-\lambda\right]g\left[(1+\lambda)\dfrac{r}{\|x\|}x-\lambda x\right] & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad -1\leqslant\lambda\leqslant 0, & \\ \dfrac{\|x\|}{r}\varphi\left(\dfrac{r}{\|x\|}x;\lambda\right) \qquad \text{при} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1, & \\ \left[(2-\lambda)\dfrac{\|x\|}{r}+\lambda-1\right]h\left[(2-\lambda)\dfrac{r}{\|x\|}x+(\lambda-1)x\right] & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad 1\leqslant\lambda\leqslant 2. & \end{cases}$$

Тогда системы (52.7) определят непрерывную и невырожденную деформацию одной системы (52.8) во вторую (проверьте). ∎

Из леммы 52.1 и теоремы 52.1 вытекает, в частности,

Теорема 52.3. *Автономная система* (52.5) *может быть непрерывно и невырожденно относительно нулевого состояния равновесия деформирована в систему с асимптотически устойчивым состоянием равновесия в том и только том случае, если* $\varkappa(f) = 1$.

52.4. Индекс устойчивого по Ляпунову состояния равновесия. Поставим теперь вопрос о том, всегда ли можно непрерывно деформировать в систему с асимптотически устойчивым нулевым состоянием равновесия систему с нулевым состоянием равновесия, о котором известно лишь то, что оно устойчиво по Ляпунову. В силу теоремы 52.3 для ответа на этот вопрос нужно знать, каким может быть индекс устойчивого по Ляпунову состояния равновесия.

Ответ несколько неожиданен — он различен для систем разных порядков.

Если $n = 1$ (уравнение (52.5) скалярное), то каждое изолированное устойчивое по Ляпунову состояние равновесия асимптотически устойчиво и поэтому никакой задачи нет. Если $n = 2$, то индекс каждого устойчивого по Ляпунову изолированного состояния равновесия равен 1 (покажите).

Теорема 52.4. *Пусть $n = 3$. Тогда по каждому целому числу $\gamma_0 \leqslant 1$ можно построить такую систему* (52.5) *с устойчивым по Ляпунову изолированным состоянием равновесия, для которой $\varkappa(f) = \gamma_0$.*

Теорема 52.5. *Пусть $n \geqslant 4$. Тогда по каждому целому числу γ_0 можно построить такую систему* (52.5) *с устойчивым по Ляпунову изолированным состоянием равновесия, для которой $\varkappa(f) = \gamma_0$.*

Обе эти теоремы будут доказаны в следующем пункте.

Покажем еще, что при $n = 3$ в весьма общих предположениях (которые ясны из проводимых ниже рассуждений) верно неравенство $\varkappa(f) \leqslant 1$, если состояние равновесия изолировано и устойчиво по Ляпунову. Действительно, пусть в шаре $\|x\| \leqslant r$ нет отличных от нуля состояний равновесия системы (52.5). Из устойчивости по Ляпунову вытекает существование такого $\delta > 0$, что на шаре $\|x\| \leqslant \delta$ определены операторы сдвига $U(t)$ по траекториям системы (52.5) при всех $t \geqslant 0$ и $\|U(t)x\| \leqslant r/2$ ($\|x\| \leqslant \delta$, $t \geqslant 0$). Множество $G = \{y\colon y = U(t)x,\ \|x\| \leqslant \delta,\ t \geqslant 0\}$ замкнуто; нуль 0 является его внутренней точкой. Так как нуль — единственное состояние равновесия системы (52.5) на G, то можно определить такой неотрицательный функционал $t(x)$, что оператор $Ax = U[t(x)]x$ не имеет на G отличных от нуля неподвижных точек. Но тогда число Лефшеца множества G конечно. Индекс нулевой неподвижной точки просто выражается через число Лефшеца (см., например, [1]), и наше утверждение говорит лишь о том, какие значения может принимать число Лефшеца соответствующих множеств. ∎

52.5. Сферы с ручками. Рассмотрим в трехмерном пространстве R^3 шар $Ш_k$ с k ручками. Будем считать, что граница шара $Ш_k$ с ручками достаточно гладкая, и обозначим через $\Phi(x)$ векторное поле внешних нормалей. Мы используем ниже равенство

$$\gamma(\Phi, Ш_k) = 1 - k. \tag{52.9}$$

Приведем схему доказательства формулы (52.9). При этом мы используем тот очевидный факт, что величина $\gamma(\Phi, Ш_k)$ не меняется при переходе от одного шара с k ручками к другому шару также с k ручками.

Если $k = 0$, то $Ш_0$ можно считать единичным шаром с центром в нулевой точке. Тогда поле внешних нормалей совпадает с $\Phi x \equiv x$ и поэтому $\gamma(\Phi, Ш_0) = 1$. Если $k = 1$, то $Ш_1$ — это тор. Ясно, что поле внешних нормалей можно продолжить внутрь тора без нулевых векторов. Поэтому $\gamma(\Phi, Ш_1) = 0$.

Перейдем к общему случаю.

Пусть на одной из ручек множества $Ш_{k+1}$ есть часть, являющаяся круговым цилиндром. Выберем две плоскости Π_1 и Π_2, перпендикулярные оси цилиндра, которые «отрезают» от ручки цилиндрическую область Ω. Граница области Ω состоит из части границы ручки и из двух кругов Γ_1 и Γ_2. Обозначим через Ψ векторное поле, совпадающее с Φ на $Ш_{k+1}$ и продолженное с сохранением непрерывности и невырожденности на круги Γ_1 и Γ_2 так, что проекции векторов Ψ_x на направление оси цилиндра направлены внутрь области Ω при всех x, являющихся внутренними точками кругов Γ_1 и Γ_2. Очевидно, $\gamma(\Psi, \Omega) = -1$.

Если из $Ш_{k+1}$ «выбросить» $\overline{\Omega}$ (и добавить круги Γ_1 и Γ_2), то мы получим множество $Ш_k^0$, являющееся шаром с k ручками. Правда, граница множества $Ш_k^0$ не будет гладкой. Однако множество $Ш_k^0$ легко так деформировать в множество $Ш_k$ уже с гладкой границей, чтобы при этом определенное на границе деформированного множества поле Ψ деформировалось в поле внешних нормалей к $Ш_k$. Поэтому $\gamma(\Psi, Ш_k^0) = \gamma(\Phi, Ш_k)$ и, следовательно, $\gamma(\Phi, Ш_{k+1}) = \gamma(\Psi, Ш_k^0) + \gamma(\Psi, \Omega) = \gamma(\Phi, Ш_k) - 1$. ∎

Перейдем к доказательству теоремы 52.4.

Пусть задано число $\gamma_0 \leqslant 1$. Пусть $k = 1 - \gamma_0$. Построим в R^3 последовательность $Ш_k^1, Ш_k^2, \ldots$ шаров с k ручками. Предполагается, что множества $Ш_k^j$ имеют гладкие границы, их диаметры стремятся к нулю, каждое множество $Ш_k^{j+1}$ содержится вместе с некоторой своей окрестностью в множестве $Ш_k^j$. Через G^j обозначим совокупность внутренних точек множества $Ш_k^j$, не принадлежащих $Ш_k^{j+1}$. Каждая область G^j связна, ее граница состоит из двух частей — границ множеств $Ш_k^j$ и $Ш_k^{j+1}$.

Обозначим через Φ определенное на границах всех множеств $Ш_k^j$ поле нормированных внешних нормалей. Продолжим вначале поле Φ с сохранением невырожденности на $R^n \setminus Ш_k^1$. В силу (52.9) вращение этого поля на границе каждого «слоя» G^j равно нулю. Поэтому поле Φ можно продолжить с сохранением непрерывности и невырожденности на «слой» G^1, затем на «слой» G^2 и т. д. Таким образом, можно построить непрерывное и невырожденное на пространстве R^3 с выброшенной нулевой точкой векторное поле Ψ, которое на границах множеств $Ш_k^j$ совпадает с Φ. Поле Ψ можно считать гладким и нормированным.

Положим $f(x) = -\|x\|^2\Psi x$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Система (52.5) с этой правой частью будет устойчива по Ляпунову, так как при движении по ее траекториям точка, находящаяся в некотором множестве $Ш_k^j$, не может выйти из него при возрастании t. В то же время для вычисления величины $\varkappa(f)$ можно вычислить вращение поля $-f(x)$ на границе одного из множеств $Ш_k^j$. Поэтому $\varkappa(f) = \gamma(\Phi, Ш_k^j) = 1 - k = \gamma_0$. Теорема 52.4 доказана. ∎

К шарам в пространствах R^n размерности $n \geqslant 4$ можно приклеивать «ручки» различного типа. Нам понадобятся ручки двух родов.

Ручки первого рода — это такие же ручки, которые конструировались в случае трехмерного пространства. Иначе говоря, ручка первого рода получается приклеиванием к шару $Ш_0 \subset R^n$ некоторой простой одномерной дуги (приклеиваются только концы дуги, а остальная ее часть лежит вне $Ш_0$), переходом к окрестности полученного множества и последующим «сглаживанием» границы.

Для построения ручки второго рода нужно к $Ш_0$ вначале «приклеить» двумерный круг по граничной окружности (внутренние точки круга остаются вне $Ш_0$), а затем снова перейти к окрестности и «сгладить» границу.

Обозначим через $Ш_{k,l}$ шар с k ручками первого рода и l ручками второго рода. Тогда $\gamma(\Phi, Ш_{k,l}) = 1 + l - k$, где Φ — поле внешних нормалей к $Ш_{k,l}$. Это равенство доказывается так же, как равенство (52.9): показывается, что вращение поля Φ уменьшается на 1 при добавлении ручки первого рода и увеличивается на 1 при добавлении ручки второго рода и используется очевидное равенство $\gamma(\Phi, Ш_{0,0}) = 1$.

Зададимся некоторыми k и l. Рассмотрим последовательность $Ш_{k,l}^1 \subset Ш_{k,l}^2 \subset \ldots$ сфер с ручками. Пусть диаметры этих сфер стремятся к нулю, и пусть все эти сферы содержат нулевую точку. Нормированное поле Φ

внешних нормалей к поверхностям сфер $Ш_{k,l}$ можно (см. доказательство теоремы 52.4) продолжить до гладкого нормированного поля Ψ, определенного на пространстве R^n с выброшенным нулем. Положим $f(x) = -\|x\|^2\Psi x$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Тогда система (52.5) будет иметь единственное состояние равновесия; это нулевое состояние равновесия устойчиво по Ляпунову. При этом $\varkappa(f) = \gamma(\Psi, Ш_{k,l}) = \gamma(\Phi, Ш_{k,l}) = 1 + l - k$. Остается заметить, что числа вида $1 + l - k$ — это все целые числа. ∎

Теоремы 52.3—52.5 доказаны Н. А. Бобылевым и М. А. Красносельским (Автоматика и телемеханика **35**, № 2 (1974)). Процедуры приклеивания ручек детально описаны в ряде курсов топологии (см., например, [56]).

52.6. Замечания. а) Пусть каждое решение системы (52.5) втекает при $t \to \infty$ в нулевое состояние равновесия (отсюда, конечно, не следует его устойчивость по Ляпунову). Тогда, как легко показать, $\varkappa(f) = 1$. Поэтому из теоремы 52.3 следует, что в рассматриваемой ситуации систему (52.5) можно непрерывно и невырожденно относительно нулевого состояния равновесия деформировать в систему с асимптотически устойчивым состоянием равновесия.

б) В книге С. Улама «Нерешенные математические задачи» (М., «Наука», 1964) есть вопрос о существовании неподвижной точки у каждого такого диффеоморфизма A пространства $R^n (n \geqslant 3)$ на себя, что диаметры $d(x)$ всех траекторий $x, Ax, A^2x, \ldots$ равномерно ограничены. Конструкции п. 52.5 позволяют легко построить диффеоморфизм A без неподвижной точки, при котором диаметры $d(x)$ ограничены (но не равномерно).

Построим последовательность торов $T_j \subset R^n$ так, что T_j содержит T_{j-1} и шар $\|x\| \leqslant j$. На границе каждого T_j построим гладкое поле нормированных касательных векторов. Вращение этого поля на границе тора T_1 и на границе каждого слоя $T_j \setminus T_{j-1}$ равно нулю, и поэтому его можно продолжить до гладкого нормированного поля $f(x)$ на все R^n. У системы (52.5) с построенной правой частью $f(x)$ нет состояний равновесия, а каждое решение ограничено. Пусть $U(t)$ — оператор сдвига по траекториям построенной системы. Положим $A = U[\beta(x)]$, где $\beta(x)$ положительна, мала и достаточно быстро убывает при $\|x\| \to \infty$. Тогда оператор A обладает нужными свойствами.

Глава 8

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В главе изучаются различные вопросы, связанные с тем, как меняется структура множества решений при малых возмущениях изучаемых уравнений.

§ 53. Возмущения и теоремы существования

53.1. Принцип ненулевого вращения. Рассмотрим уравнение

$$x = Ax \tag{53.1}$$

с нелинейным оператором A, действующим в банаховом пространстве E. Пусть каким-либо способом (см., например, главы 4—7) доказана разрешимость уравнения (53.1). Важен вопрос о том, при каких «малых» возмущениях D оператора A можно гарантировать, во-первых, существование решений у возмущенного уравнения

$$x = Ax + Dx \tag{53.2}$$

и, во-вторых, «близость» решений уравнения (53.2) к решениям уравнения (53.1).

Отметим вначале два отрицательных результата.

Пусть A определен на всем E и вполне непрерывен. Пусть E бесконечномерно. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно построить такой непрерывный на E оператор D, что $\|Dx\| < \varepsilon$ $(x \in E)$ и уравнение (53.2) *не имеет в E решений.*

Для доказательства построим вначале вполне непрерывный на E оператор D_1 так, что $\|D_1x\| \leqslant \varepsilon/3$ $(x \in E)$ и оператор $A + D_1$ имеет лишь изолированные неподвижные точки. Разделим эти неподвижные точки непересекающимися шарами $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ настолько малого (не обязательно одинакового) радиуса, что на каждом из них верна оценка $\|Ax + D_1x - x\| < \varepsilon/3$. Далее определим на каждом шаре T_k непрерывный оператор C, совпадающий на границе шара с оператором $A + D_1$, не имеющий в шаре неподвижных точек и удовлетворяющий условию $\| Cx - x \| \leqslant \varepsilon/3$ (см. § 16). После этого можно определить D как оператор, совпадающий с D_1 вне шаров $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ и равный $C - A$ на каждом из этих шаров. ∎

Пусть A удовлетворяет условиям принципа Шаудера или принципа сжатых отображений на некотором множестве $\Omega \subset E$. Даже в случае конечномерного E нельзя утверждать, что разрешимо простейшее возмущенное уравнение $x = Ax + f$, где f — элемент малой нормы.

Например, оператор $A\xi = \xi + |\xi|$ действует в одномерном пространстве и на отрезке $[-1, 0]$ удовлетворяет условиям обоих указанных принципов. Но уравнение $\xi = A\xi + \delta$ не имеет решений при $\delta > 0$. ∎

Оба последние утверждения не должны обескуражить читателя. Нужно лишь понимать, что класс малых возмущений, при которых решения уравнений мало меняются, в каждом конкретном случае требует специального изучения.

Теорема 53.1. *Пусть Ω — ограниченная область в E; A и D — операторы, определенные на $\bar{\Omega}$ и действующие в E. Пусть A удовлетворяет на $\bar{\Omega}$ условиям принципа сжатых отображений и его неподвижная точка x^* является внутренней точкой области Ω. Наконец, пусть $D = D_1 + D_2$, где D_1 вполне непрерывен и*

$$\begin{aligned} &\| D_1 x \|, \quad \| D_2 x \| < \alpha \qquad (x \in \bar{\Omega}); \\ &\| D_2 x - D_2 y \| \leqslant \beta \| x - y \| \qquad (x, y \in \bar{\Omega}). \end{aligned} \tag{53.3}$$

Тогда каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при $\alpha, \beta < \delta$ множество F лежащих в $\bar{\Omega}$ решений уравнения (53.2) непусто и $\| x - x^* \| < \varepsilon$ при $x \in F$.

Доказательство предоставляем читателю. ∎

Перейдем к анализу уравнения (53.1) с таким оператором A, что для поля $I - A$ определено вращение с обычными свойствами (см. главы 2 и 4). Пусть при доказательстве разрешимости уравнения (53.1) было установлено отличие от нуля вращения поля $I - A$ на границе (или относительной границе) некоторой области $\Omega \subset E$. Тогда при малых D из того же класса операторов будет отлично от нуля вращение поля $I - A - D$ и,

следовательно, уравнение (53.2) будет иметь в области Ω по крайней мере одно решение. Сформулируем в виде теоремы наиболее важный случай этого принципа ненулевого вращения.

Теорема 53.2. *Пусть Ω — ограниченная область в E; A и D — операторы, определенные на $\bar{\Omega}$ и действующие в E. Пусть A вполне непрерывен на $\bar{\Omega}$, множество F^* его неподвижных точек лежит в Ω и $\gamma(I - A, \Omega) \neq 0$. Наконец, пусть $D = D_1 + D_2$, где D_1 вполне непрерывен и для D_1, D_2 верны оценки (53.3). Тогда каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при $\alpha, \beta < \delta$ множество F лежащих в $\bar{\Omega}$ решений уравнения (53.2) непусто и $\rho(x, F^*) < \varepsilon$ при $x \in F$.*

Применение теорем 53.1, 53.2 или близких утверждений к задачам с многими решениями требует построения непересекающихся областей Ω_j, в каждой из которых возмущенное уравнение имеет по крайней мере одно решение. Такие области легко указать, например, если A — это оператор со ступенчатыми нелинейностями (см. § 45).

В качестве простого примера докажем известную теорему об устойчивости корней алгебраического уравнения $P(\xi) = 0$, где $P(\xi) = \xi^m + a_1\xi^{m-1} + \ldots + a_m$, относительно малых возмущений коэффициентов. В этой теореме наряду с уравнением $P(\xi) = 0$ рассматривается возмущенное уравнение $Q(\xi) = 0$, где $Q(\xi) = \xi^m + b_1\xi^{m-1} + \ldots + b_m$, корни которого сравниваются с корнями $\xi_1, \ldots, \xi_k$ уравнения $P(\xi) = 0$. Если γ_j — кратность корня ξ_j, то $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k = m$.

Обозначим через $T(\xi_0, \varepsilon)$ круг $|\xi - \xi_0| \leqslant \varepsilon$ в комплексной плоскости; при малых ε круги $T(\xi_1, \varepsilon), \ldots, T(\xi_k, \varepsilon)$ не пересекаются друг с другом. Теорема об устойчивости корней означает следующее: *каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что из неравенств $|a_i - b_i| < \delta$ вытекает существование у уравнения $Q(\xi) = 0$ в каждом круге $T(\xi_j, \varepsilon)$ группы корней, сумма кратностей которых равна γ_j.*

Для доказательства достаточно заметить, что при малых ε вращение поля $P(\xi)$ на окружности $|\xi - \xi_j| = \varepsilon$ равно γ_j. Поэтому при малых δ вращение поля $Q(\xi)$ на окружности $|\xi - \xi_j| = \varepsilon$ также будет равно γ_j. После этого остается сослаться на теорему 20.6 об алгебраическом числе особых точек. ∎

53.2. Слабо связанные уравнения. Рассмотрим систему

$$x = A_1 x, \qquad y = A_2 y \tag{53.4}$$

двух независимых уравнений с вполне непрерывными операторами A_1 и A_2, действующими в двух различных банаховых пространствах E_1 и E_2. Пусть разрешимость каждого из уравнений (53.4) установлена при помощи принципа ненулевого вращения, т. е.

$$\gamma(I - A_1, \Omega_1; E_1) = \gamma_1 \neq 0, \qquad \gamma(I - A_2, \Omega_2; E_2) = \gamma_2 \neq 0,$$

где $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ — некоторые ограниченные области.

Введем обозначения $E = E_1 \dotplus E_2$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; $z = x + y$ $(x \in E_1,\ y \in E_2,\ z \in E)$, $x = P_1 z$, $y = P_2 z$; $Az = A_1 P_1 z + A_2 P_2 z$. В силу теоремы о произведении вращений, $\gamma(I - A, \Omega; E) = \gamma_1 \gamma_2 \neq 0$. Это позволяет применить теорему 53.2 к исследованию системы

$$\begin{aligned} x &= A_1 x + D_{11}(x, y) + D_{12}(x, y), \\ y &= A_2 y + D_{21}(x, y) + D_{22}(x, y), \end{aligned} \tag{53.5}$$

где D_{11} и D_{21} вполне непрерывны, $\| D_{ij}(x, y) \| < \alpha$ $(x + y \in \bar{\Omega})$ и

$$\begin{gathered} \| D_{i2}(x, y) - D_{i2}(u, v) \| \leqslant \beta (\| x - u \| + \| y - v \|) \\ (x, u \in \bar{\Omega}_1;\ y, v \in \bar{\Omega}_2). \end{gathered} \tag{53.6}$$

Из теоремы 53.2 вытекает, в частности, существование такого $\delta > 0$, что *при* α, $\beta < \delta$ *система* (53.5) *имеет в области* Ω *по крайней мере одно решение.*

Последнее утверждение связано с построениями из § 50; оно означает, что систему (53.4) можно рассматривать как «хорошо» аппроксимирующую более сложную систему (53.5).

53.3. Применения принципов родственности и инвариантности вращения. Приложения теоремы 53.2 требуют удачного выбора пространства E, в котором действуют операторы A и D, и построения области $\Omega \subset E$, на границе которой поле $I - A$ имеет ненулевое вращение. Теоремы гл. 3 позволяют переходить при вычислении $\gamma(I - A, \Omega; E)$ к другим пространствам, другим областям и другим векторным полям.

Рассмотрим, например, нелинейное интегральное уравнение

$$x(t) = \int_G k(t, s) f[s, x(s)]\, ds + \mu \int_G k_1[t, s, x(s)]\, ds, \tag{53.7}$$

где $k(t, s)$, $k_1(t, s, u)$, $f(s, u)$ непрерывны по совокупности переменных, ядро $k(t, s)$ симметрично и положительно определено. Пусть

$$u f(t, u) \leqslant q u^2 + a \qquad (t \in G,\ -\infty < u < \infty),$$

где $q\lambda_0 < 1$, а λ_0 — наибольшее собственное значение ядра $k(t, s)$. Покажем, что уравнение (53.7) имеет при малых μ по крайней мере одно ненулевое решение.

Обозначим через B линейный интегральный оператор с ядром $k(t, s)$. Оператор $B^{1/2}$ действует из L_2 в C и вполне непрерывен. Поэтому оператор $B^{1/2} \mathfrak{f} B^{1/2}$, где $\mathfrak{f}x(t) = f[t, x(t)]$, действует в L_2 и вполне непрерывен. Очевидно,

$$\begin{aligned} (B^{1/2} \mathfrak{f} B^{1/2} x, x) &= (\mathfrak{f} B^{1/2} x, B^{1/2} x) \leqslant \\ &\leqslant q (B^{1/2} x, B^{1/2} x) + a \operatorname{mes} G \leqslant q\lambda_0 (x, x) + a \operatorname{mes} G. \end{aligned}$$

Поэтому $(B^{1/2} \mathfrak{f} B^{1/2} x, x) < (x, x)$ при больших по норме $x \in L_2$. Значит, вполне непрерывное векторное поле $I - B^{1/2} \mathfrak{f} B^{1/2}$ невырождено на L_2 вне некоторого шара $\| x \| \leqslant r_0$ и его вращение на сферах $\| x \| = r$ больших радиусов r равно 1. В силу принципа инвариантности вращения равно 1 и вращение вполне непрерывного поля $I - B^{1/2} \mathfrak{f} B^{1/2}$ на сферах $\| x \| = r$ больших радиусов в пространстве C. В силу теоремы 26.1 то же вращение имеет поле $I - A$, где $A = B\mathfrak{f}$. Остается рассмотреть (53.7) как уравнение (53.2) в пространстве C и сослаться на теорему 53.2. ∎

53.4. Об одной краевой задаче. Рассмотрим систему двух скалярных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi(t) &= f_1[t, \xi(t), \eta(t)] + \mu g_1\{t; \xi(t), \xi[t-h_1(t)], \ldots \\ &\ldots, \xi[t-h_k(t)]; \eta(t), \eta[t-h_1(t)], \ldots, \eta[t-h_k(t)]\}, \\ \dot\eta(t) &= f_2[t, \xi(t), \eta(t)] + \mu g_2\{t; \xi(t), \xi[t-h_1(t)], \ldots \\ &\ldots, \xi[t-h_k(t)]; \eta(t), \eta[t-h_1(t)], \ldots, \eta[t-h_k(t)]\}. \end{aligned}\right\} \quad (53.8)$$

Функции f_1, f_2, g_1, g_2, h_j будем считать непрерывными, запаздывания $h_j(t)$ — неотрицательными, μ — скалярный параметр. Далее, будем считать, что решения системы

$$\dot\xi = f_1(t, \xi, \eta), \qquad \dot\eta = f_2(t, \xi, \eta) \qquad (53.9)$$

однозначно определяются начальными значениями при $t = a$ и продолжимы на промежуток $[a, b]$.

Нас будут интересовать условия, при которых система (53.8) имеет определенные на $[a, b]$ решения, удовлетворяющие обычным условиям Штурма — Лиувилля:

$$\xi(a)\sin\alpha - \eta(a)\cos\alpha = 0, \quad \xi(b)\sin\beta - \eta(b)\cos\beta = 0 \quad (53.10)$$

и дополнительным условиям, возникающим при изучении уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\xi(t) = \xi(a)\psi_1(t), \qquad \eta(t) = \eta(a)\psi_2(t) \qquad (a_0 \leqslant t \leqslant a), \quad (53.11)$$

где $a_0 \leqslant t - h_i(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b;\ i = 1, \ldots, k)$, функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ непрерывны и $\psi_1(a) = \psi_2(a) = 1$.

Пусть

$$\xi(t) = p_1(t, r), \qquad \eta(t) = p_2(t, r) \qquad (a \leqslant t \leqslant b,\ r > 0) \quad (53.12)$$

— решение системы (53.9), удовлетворяющее начальному условию

$$p_1(a, r) = r\cos\alpha, \qquad p_2(a, r) = r\sin\alpha \qquad (r > 0). \quad (53.13)$$

Если решение (53.12) не проходит через нулевую точку, то определена его угловая функция $\theta(t, r)$ — непрерывная ветвь угла между вектором $\{p_1(t, r), p_2(t, r)\}$ и положительным направлением оси абсцисс, для которой $\theta(a, r) = \alpha$.

Теорема 53.3. *Пусть функция $\theta(b, r)$ определена при $r > 0$ и строго возрастает. Пусть при некоторых r_1 и r_2 $(r_1 < r_2)$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} 0 &< \left|\frac{1}{2\pi}[\theta(b, r_1) - \beta] - n_1\right| < 1, \\ 0 &< \left|\frac{1}{2\pi}[\theta(b, r_2) - \beta] - n_2\right| < 1. \end{aligned} \qquad (53.14)$$

Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ система (53.8) *имеет по крайней мере $n_2 - n_1$ решений, удовлетворяющих условиям* (53.10) *и* (53.11).

Доказательство. Пусть $U(t, a)x = \{q_1(t, \xi, \eta), q_2(t, \xi, \eta)\}$ — оператор сдвига за время от a до t по траекториям системы (53.9) в плоскости точек $x = \{\xi, \eta\}$. По оператору сдвига построим векторное поле

$$\varphi(\xi, \eta) = \{\xi\sin\alpha - \eta\cos\alpha,\ q_1(b, \xi, \eta)\sin\beta - q_2(b, \xi, \eta)\cos\beta\}. \quad (53.15)$$

Нули поля (53.15) и только они будут начальными значениями решений системы (53.9), удовлетворяющих условиям (53.10). Все эти нули лежат на прямой

$$\xi = r\cos\alpha, \qquad \eta = r\sin\alpha \qquad (-\infty < r < \infty). \quad (53.16)$$

Из (53.14) и монотонности функции $\theta(b, r)$ вытекает, что на отрезке $r_1 < r < r_2$ прямой (53.16) поле (53.15) имеет ровно $l = n_2 - n_1$ нулей $y_1, \ldots, y_l$. Геометрически очевидно, что индексы этих нулей поочередно равны $+1$ и -1.

Пусть C — пространство непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций $x(t) = \{\xi(t), \eta(t)\}$. Определим на C вполне непрерывный оператор

$$Ax(t) = \Big\{\xi(a) - \xi(a)\sin\alpha + \eta(a)\cos\alpha + \int_a^t f_1[s, \xi(s), \eta(s)]\,ds,$$
$$\eta(a) - \xi(b)\sin\beta + \eta(b)\cos\beta + \int_a^t f_2[s, \xi(s), \eta(s)]\,ds\Big\}. \quad (53.17)$$

Неподвижные точки оператора (53.17) очевидным образом совпадают с решениями системы (53.9), удовлетворяющими условиям (53.10). В частности, неподвижными точками оператора (53.17) будут решения $x_1(t), \ldots, x_l(t)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$x_1(a) = y_1, \ \ldots, \ x_l(a) = y_l;$$

эти неподвижные точки будут изолированы. Иначе говоря, $x_1(t), \ldots, x_l(t)$ являются изолированными особыми точками вполне непрерывного поля $I - A$. В силу теоремы родственности 29.3 индекс каждой из этих особых точек $x_j(t)$ определяется по индексу соответствующей особой точки y_j поля (53.15) и поэтому он равен или $+1$, или -1.

Введем в рассмотрение действующие в множестве определенных на $[a, b]$ скалярных функций операторы H_j, G_j $(j = 1, \ldots, k)$:

$$H_j u(t) = \begin{cases} u[t - h_j(t)], & \text{если } t - h_j(t) \geqslant a, \\ u(a)\psi_1[t - h_j(t)], & \text{если } t - h_j(t) < a, \end{cases}$$

$$G_j u(t) = \begin{cases} u[t - h_j(t)], & \text{если } t - h_j(t) \geqslant a, \\ u(a)\psi_2[t - h_j(t)], & \text{если } t - h_j(t) < a. \end{cases}$$

Положим, далее,

$$Dx(t) = \left\{ \int_a^t g_1[s;\ \xi(s),\ H_1\xi(s),\ \ldots,\ H_k\xi(s);\ \eta(s),\ G_1\eta(s),\ \ldots \right.$$
$$\ldots,\ G_k\eta(s)]\,ds, \quad \int_a^t g_2[s;\ \xi(s),\ H_1\xi'(s),\ \ldots$$
$$\left. \ldots,\ H_k\xi(s);\ \eta(s),\ G_1\eta(s),\ \ldots,\ G_k\eta(s)]\,ds \right\}.$$

Оператор D вполне непрерывен в C. Простая проверка показывает, что неподвижные точки оператора $A + \mu D$ совпадают с решениями системы (53.8), удовлетворяющими условиям (53.10) и (53.11), если эти неподвижные точки (функции $\xi(t)$, $\eta(t)$) доопределить на значения $t < a$ равенствами (53.11). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить существование $l = n_2 - n_1$ различных неподвижных точек у операторов $A + \mu D$ при малых μ.

Обозначим через $T_1, \ldots, T_l$ непересекающиеся шары в пространстве C с центрами $x_1(t), \ldots, x_l(t)$, в каждом из которых есть лишь одна неподвижная точка оператора (53.17) — оператора A. На границах этих шаров поле $I - A$ невырождено. Поэтому найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $|\mu| < \mu_0$ поля $I - A$ и $I - A - \mu D$ гомотопны на границах этих шаров и, следовательно, $|\gamma(I - A - \mu D, T_j)| = |\gamma(I - A, T_j)| = 1$ при $j = 1, \ldots, l$. Значит, операторы $A + \mu D$ $(|\mu| < \mu_0)$ имеют в каждом шаре T_j по крайней мере по одной неподвижной точке. ∎

Предположение о строгом возрастании функции $\theta(b, r)$ в условиях теоремы 53.3 можно заменить предположением о ее строгом убывании. Утверждение теоремы 53.3 сохраняет силу и в том случае, если $\theta(b, r)$ не обладает свойством монотонности, но

$$\varlimsup_{r_1 \to 0,\ r_2 \to \infty} |\theta(b, r_1) - \theta(b, r_2)| > 2\pi(n_2 - n_1 + 1). \quad (53.18)$$

Свойства угловой функции $\theta(b, r)$ (монотонность, неравенства типа (53.18) и др.) часто совсем просто устанавливаются по несложным неравенствам, которым должны удовлетворять функции $f_1(t, \xi, \eta)$, $f_2(t, \xi, \eta)$ (см. [28]).

Теорема 53.3 доказана М. А. Красносельским и Е. А. Лифшицем (ДАН СССР **176**, № 5 (1967)).

§ 54. Возмущения изолированных решений

54.1. Решения ненулевого индекса. Рассмотрим уравнение *)

$$x = A(x; \lambda) \quad (54.1)$$

с оператором A, действующим в банаховом пространстве E и зависящим от векторного параметра $\lambda \in \Lambda$. Решение $x(\lambda)$ уравнения (54.1) — это *неявная функция*, определенная уравнением (54.1). Неявная функция, вообще говоря, многозначна; множество ее значений при каждом λ обозначим через $X(\lambda)$. Часто в E выделяется некоторая область Ω и рассматриваются лишь те решения уравнения (54.1), которые лежат в Ω. Неявную функцию назовем *непрерывной* в точке $\lambda_1 \in \Lambda$, если при

*) Построения параграфа меняются несущественно, если вместо (54.1) рассматривать уравнение $F(x, \lambda) = 0$ с оператором F, действующим из $E + \Lambda$ в некоторое пространство E_1.

близких к λ_1 значениях λ множества $X(\lambda)$ непусты и

$$\lim_{\lambda\to\lambda_1} \sup_{x\in X(\lambda)} \inf_{x_1\in X(\lambda_1)} \|x-x_1\|_E = 0. \tag{54.2}$$

Об операторе A нам ниже удобно говорить, что он действует из $E \dotplus \Lambda$ в E.

Теорема 54.1. *Пусть A вполне непрерывен. Пусть x_0 — единственное решение уравнения* (54.1) *при $\lambda=\lambda_0$ в шаре $T=\{x\colon \|x-x_0\|\leqslant r_0\}$, причем индекс γ этого решения отличен от нуля. Тогда уравнение* (54.1) *определяет в окрестности точки λ_0 непрерывную неявную функцию со значениями в T.*

Если A непрерывен по λ равномерно относительно $x\in T$, то достаточно сослаться для доказательства на теорему 53.1. В общем случае требуются дополнительные рассуждения.

Пусть задано $\varepsilon\in(0, r_0)$. Обозначим через $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое положительное число, что при $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta$ у уравнений (54.1) нет решений в шаровом слое $\varepsilon\leqslant\|x-x_0\|\leqslant r_0$. Если бы число δ нельзя было определить, то нашлись бы такие последовательности λ_n и x_n, что $\lambda_n\to\lambda_0$, $\varepsilon\leqslant\|x_n-x_0\|\leqslant r_0$ и $x_n=A(x_n;\lambda_n)$; в силу полной непрерывности оператора A последовательность x_n можно считать сходящейся к некоторой точке x^*; тогда $x^*=A(x^*;\lambda_0)$, а это противоречит единственности решения x_0.

По определению числа δ векторные поля $x-A(x;\lambda)$ при $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta$ гомотопны друг другу на шаровом слое $\varepsilon\leqslant\|x-x_0\|\leqslant r_0$. В частности, они гомотопны полю $x-A(x;\lambda_0)$ на сфере $\|x-x_0\|=\varepsilon$. Следовательно, вращения полей $x-A(x;\lambda)$ при $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta$ на сфере $\|x-x_0\|=\varepsilon$ равны γ и поэтому отличны от нуля. Отсюда вытекает, что на шаре $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta$ определена неявная функция. Ее значения лежат в шаре $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon$. Непрерывность неявной функции очевидна. ∎

Изложенные в главах 1 и 2 приемы вычисления индекса особой точки упрощают приложения теоремы 54.1 к исследованию конкретных уравнений.

54.2. Основная теорема о неявной функции. Пусть

$$x_0=A(x_0;\lambda_0) \tag{54.3}$$

и операторы $A(x;\lambda)$ (со значениями в E) и $A'_x(x;\lambda)$ (со значениями в пространстве линейных операторов, действующих в E) определены при $\|x-x_0\|\leqslant r_0$, $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant r_0$.

Теорема 54.2. *Пусть $A(x;\lambda)$ и $A'_x(x;\lambda)$ непрерывны по совокупности переменных. Пусть на E определен непрерывный оператор*

$$\Gamma=[I-A'_x(x_0;\lambda_0)]^{-1}. \tag{54.4}$$

Тогда найдутся такие $\varepsilon_0, \delta_0>0$, что при $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta_0$ уравнение (54.1) *имеет в шаре $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon_0$ единственное решение $x(\lambda)$, которое непрерывно по λ.*

Этой классической теоремой о неявной функции мы неоднократно пользовались выше; она принадлежит Ламсону — Гильдебрандту — Гревсу (см., например, [17]).

Доказывается теорема совсем просто. Положим

$$B(x,\lambda)=x_0+\Gamma\left[A(x;\lambda)-A(x_0;\lambda_0)-A'_x(x_0;\lambda_0)(x-x_0)\right]. \tag{54.5}$$

Неподвижные точки этого оператора совпадают с решениями уравнения (54.1). Из очевидного тождества

$$B(x,\lambda)-x_0=\Gamma\int_0^1\left\{A'_x[x_0+\theta(x-x_0);\lambda]-A'_x(x_0;\lambda_0)\right\}(x-x_0)\,d\theta+ \\ +\Gamma[A(x_0;\lambda)-A(x_0;\lambda_0)]$$

вытекает, что оператор (54.5) преобразует в себя каждый шар $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon_0$ достаточно малого радиуса ε_0, если только $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta_0=\delta_0(\varepsilon_0)$. Из второго очевидного тождества

$$B(x,\lambda)-B(y,\lambda)= \\ =\Gamma\int_0^1\left\{A'_x[y+\theta(x-y);\lambda]-A'_x(x_0;\lambda_0)\right\}(x-y)\,d\theta$$

вытекает, что при малых ε_0 и δ_0 оператор (54.5) удовлетворяет на шаре $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon_0$ условию Липшица с постоянной $q<1$. Поэтому существование однозначной неявной функции $x(\lambda)$ вытекает из принципа сжатых отображений. Непрерывность функции $x(\lambda)$ очевидна.

Многие нелинейные операторы дифференцируемы лишь в отдельных точках или на специальных подмножествах пространства E. Поэтому важны обобщения теоремы 54.2 на случай, когда A дифференцируем лишь в точке (x_0, λ_0). Приведем одно простое утверждение.

Теорема 54.3. *Пусть A вполне непрерывен. Пусть существует производная $A'_x(x_0;\lambda_0)$ и определен непрерывный оператор* (54.4). *Тогда найдутся такие $\varepsilon_0, \delta_0 > 0$, что уравнение* (54.1) *определяет на шаре $\|\lambda-\lambda_0\|\leqslant\delta_0$ непрерывную неявную функцию со значениями в шаре $\|x-x_0\|\leqslant\varepsilon_0$.*

Доказательство. Из существования оператора (54.4) вытекает, что индекс решения x_0 уравнения (54.1) при $\lambda=\lambda_0$ равен 1 или -1. Остается сослаться на теорему 54.1. ∎

В ряде случаев оператор $A(x;\lambda)$ обладает «улучшающими» свойствами — он действует из $E \dotplus \Lambda$ в пространство E_1, которое вложено в E ($E_1\subset E$, $\|x\|_E\leqslant a\|x\|_{E_1}$ при $x\in E_1$). Пусть A непрерывен и имеет при $\|x-x_0\|_{E_1}\leqslant r_1$, $\|\lambda-\lambda_0\|_\Lambda\leqslant r_1$ производную $A'_x(x;\lambda)$ в смысле Гато, причем эта производная непрерывна как оператор-функция из $E_1\dotplus\Lambda$ в пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в E_1. В этих условиях оператор (54.5) удовлетворяет в окрестности точки $\{x_0,\lambda_0\}$ условию Липшица по переменной x с постоянной $q<1$ и неявная функция, если она существует, однозначна.

54.3. Уравнение разветвления. Если оператор

$$B=I-A'_x(x_0;\lambda_0) \tag{54.6}$$

не имеет обратного, анализ уравнения (54.1) существенно усложняется. В этом случае неявная функция, как правило, многозначна. Для определения числа однозначных ветвей неявной функции, для их приближенного или асимптотического построения А. М. Ляпуновым, Э. Шмидтом, А. И. Некрасовым и другими авторами разработаны специальные аналитические методы, которых мы в этой книге не касаемся (библиографию см. в [26]).

Все дальнейшие построения относятся к случаю, когда оператор (54.6) не имеет непрерывного обратного, но он нормально разрешим, подпространство E_0 его нулей конечномерно, а множество N^0 его значений ($N^0=BE$) имеет конечный дефект.

Пусть P — линейный проектор на E_0 и $E^0=(I-P)E$. Элементы подпространств E_0 и E^0 обозначим через u и v. Решение x уравнения (54.1) будем искать в виде $x=x_0+u+v$; тогда (54.1) примет вид

$$u+v=A(x_0+u+v;\lambda)-A(x_0;\lambda_0). \tag{54.7}$$

Обозначим через B_0 сужение оператора B на подпространство E^0. Очевидно, $B_0E^0=BE=N^0$, поэтому B_0 имеет на N^0 непрерывный обратный, который мы обозначим через Γ_0. Пусть Q — некоторый фиксированный линейный проектор на N^0.

Уравнение (54.7) можно переписать в виде

$$Bv=A(x_0+u+v;\lambda)-A(x_0;\lambda_0)-A'_x(x_0;\lambda_0)(u+v).$$

Поэтому оно равносильно системе двух уравнений

$$v=\Gamma_0Q[A(x_0+u+v;\lambda)-A(x_0;\lambda_0)-\\-A'_x(x_0;\lambda_0)(u+v)], \tag{54.8}$$

$$(I-Q)[A(x_0+u+v;\lambda)-A(x_0;\lambda_0)-\\-A'_x(x_0;\lambda_0)(u+v)]=0. \tag{54.9}$$

Если $A(x;\lambda)$ и $A'_x(x;\lambda)$ непрерывны по совокупности переменных, то уравнение (54.8) имеет при малых u и близких к λ_0 значениях λ единственное малое решение

$$v=R(u;\lambda) \tag{54.10}$$

(достаточно воспользоваться принципом сжатых отображений — ср. п. 50.3). Поэтому построение решений системы (54.8), (54.9) равносильно решению одного векторного уравнения

$$(I-Q)\{A[x_0+u+R(u;\lambda);\lambda]-\\-A(x_0;\lambda_0)-u-A'_x(x_0;\lambda_0)R(u;\lambda)\}=0, \tag{54.11}$$

которое называется *уравнением разветвления* Ляпунова. Уравнение (54.11) — это конечная система скалярных уравнений с конечным числом неизвестных. Число неизвестных совпадает с размерностью E_0, число уравнений — с дефектом оператора B (т. е. с размерностью подпространства $(I-Q)E$).

Уравнение (54.11) *обладает важной особенностью — производная левой части по u в точке $u=0$, $\lambda=\lambda_0$ является нулевым оператором.* В этом легко убедиться непосредственным подсчетом. Уравнение (54.11) при $\lambda=\lambda_0$ имеет решение $u=0$; *это решение изолировано в том и только том случае, если изолировано решение x_0 уравнения* (54.1) *при $\lambda=\lambda_0$.*

Пусть подпространства E_0 и $(I-Q)E$ имеют одинаковую размерность и D — некоторый линейный оператор, отображающий $(I-Q)E$ на E_0. Тогда решения уравнения (54.11) совпадают с нулями векторного поля

$$\Phi(x;\lambda)=D(I-Q)\{A[x_0+u+R(u;\lambda);\lambda]-\\ -A(x_0;\lambda_0)-u-A'_x(x_0;\lambda_0)R(u;\lambda)\} \qquad (54.12)$$

в пространстве E_0. Для изучения этого поля можно применять все результаты гл. 1.

Пусть A вполне непрерывен, тогда и $A'_x(x_0;\lambda_0)$ вполне непрерывен. Поэтому E_0 и $(I-Q)E$ имеют одинаковую размерность. Возникает естественный вопрос о связи индексов нулевой особой точки поля (54.12) и индекса особой точки x_0 поля $x-A(x;\lambda_0)$ (если, конечно, x_0 — изолированное решение уравнения (54.1) при $\lambda=\lambda_0$). В § 24 доказано, по существу, равенство

$$\operatorname{ind}[x_0, x-A(x;\lambda_0); E]=\varepsilon\cdot\operatorname{ind}[0, \Phi(x;\lambda_0); E_0], \qquad (54.13)$$

где $|\varepsilon|=1$ (выразите ε через характеристики линейных операторов B, P, Q, D).

54.4. (n,m)-вращение. При построении теории вращения векторных полей Φ не обязательно было считать, что векторы Φx принадлежат тому же пространству, в котором лежат точки x. Возникла бы лишь необходимость следить за ориентациями пространств. Однако при построении теории вращения необходимо было, чтобы x и Φx были векторами пространств одинаковой размерности. В этом и последующих пунктах параграфа мы переходим к более общему случаю.

Пусть R^n и R^m — пространства, размерность которых не обязательно одинакова. Мы будем рассматривать векторные поля Φ, заданные на множествах в R^n и состоящие из векторов $\Phi x\in R^m$; назовем их *(n, m)-полями.* Для (n, m)-полей обычным способом определяются понятия непрерывности, невырожденности, непрерывной деформации, определяются классы гомотопных полей и т. д. (нужно лишь помнить, что при деформации полей все векторы должны принадлежать R^m). Если бы оказалось, что (n, m)-поля на границах некоторых областей $\Omega\subset R^n$ не обязательно гомотопны друг другу, и если бы не любое невырожденное (n, m)-поле можно было с границы области продолжить внутрь области без нулей, то можно было бы пытаться построить для (n, m)-полей теорию, аналогичную теории вращения (и переходящую в нее при $m=n$). Такая теория была бы полезна (см. пп. 54.5, 54.6) при изучении систем скалярных уравнений, в которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных.

Случай $m>n$ неинтересен, так как в этом случае любые два невырожденных непрерывных (n, m)-поля, заданные на любом замкнутом множестве в R^n, гомотопны друг другу и любое (n, m)-поле, невырожденное на границе области, можно с сохранением невырожденности продолжить на всю область.

Далее используются гомотопические группы $\pi(k, l)$ отображений k-мерных сфер S^k в l-мерные сферы S^l (см. п. 8.5).

Перейдем к изучению (n, m)-полей при $m\leqslant n$, заданных на сфере S^{n-1} в пространстве R^n. Назовем *(n, m)-вращением* такого невырожденного поля Φ элемент группы $\pi(n-1, m-1)$, который соответствует гомотопическому классу отображений S^{n-1} в S^{m-1}, содержащему отображение

$$fx=\|\Phi x\|^{-1}\Phi x \quad (x\in S^{n-1}). \qquad (54.14)$$

Теорема 54.4. *Непрерывные и невырожденные (n, m)-поля имеют одинаковое (n, m)-вращение на сфере $S^{n-1}\subset R^n$ в том и только том случае, если они гомотопны на S^{n-1}.*

Теорема 54.5. *Если (n, m)-поле Φ непрерывно на шаре $T\subset R^n$ и его (n, m)-вращение на граничной сфере отлично от нуля, то по крайней мере в одной точке шара поле Φ обращается в нуль.*

Теорема 54.6. *Пусть непрерывное и невырожденное (n, m)-поле Φ задано на сфере S^{n-1}, являющейся границей шара $T\subset R^n$, и его (n, m)-вращение равно нулю. Тогда Φ можно продолжить до определенного на всем T непрерывного (n, m)-поля без нулей.*

Все эти теоремы непосредственно вытекают из определения (n, m)-вращения. ∎

Мы ограничились понятием (n,m)-вращения полей Φ на сферах. Можно пойти дальше в построении теории, аналогичной теории обычного вращения: определить (n, m)-вращение на границах произвольных областей, ввести индекс изолированных особых точек поля, индекс множеств особых точек и т. д.

54.5. Системы скалярных уравнений с избыточным числом неизвестных. Рассмотрим скалярное уравнение $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ $(n \geqslant 2)$ и допустим, что у него есть изолированное решение $\xi_1 = \xi_1^0, \ldots, \xi_n = \xi_n^0$ (например, $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 - \xi_1^0)^2 + \ldots + (\xi_n - \xi_n^0)^2$). Тогда в окрестности точки $\{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\}$ функция φ принимает значения одного знака. Поэтому уравнение можно сколь угодно мало возмутить так, чтобы у возмущенного уравнения не было решений в некоторой фиксированной окрестности точки $\{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\}$.

Перейдем к анализу системы двух скалярных уравнений

$$\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \varphi_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0. \tag{54.15}$$

Пусть функции φ_1 и φ_2 непрерывны и пусть у системы (54.15) есть изолированное решение $x^0 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\}$. Обозначим через $T(r_0)$ шар $\| x - x^0 \| \leqslant r_0$ в пространстве R^n, в котором нет отличных от x^0 решений системы (54.15). Тогда на всех сферах $\| x - x^0 \| = r$ $(0 < r \leqslant r_0)$ будет невырождено $(n, 2)$-поле Φ с компонентами φ_1 и φ_2. Его $(n, 2)$-вращение будет элементом группы $\pi(n-1, 1)$ и при $n \geqslant 3$ будет нулем. Из теоремы 54.6 вытекает, что систему (54.15) можно сколь угодно мало возмутить так, что у возмущенной системы на шаре $T(r_0)$ не будет решений.

Таким образом, *изолированное решение одного скалярного уравнения с двумя и бо́льшим числом неизвестных и, аналогично, изолированное решение системы двух скалярных уравнений с тремя и бо́льшим числом неизвестных не обладают свойством устойчивости — при сколь угодно малом возмущении уравнений решения могут исчезнуть.*

При переходе к системам из трех (или большего числа) скалярных уравнений картина полностью меняется!

Рассмотрим систему

$$\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{54.16}$$

где $n > m \geqslant 3$, с непрерывными левыми частями. Пусть $x^0 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0\} \in R^n$ — единственное в шаре $T(r_0)$ решение системы (54.16). Тогда x^0 будет единственным в шаре $T(r_0)$ нулем (n, m)-поля

$$\Phi x = \{\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, \varphi_m(\xi_1, \ldots, \xi_n)\}. \tag{54.17}$$

Вращение поля (54.17) на всех сферах $\| x - x^0 \| = r$ $(0 < r \leqslant r_0)$ будет одинаково; обозначим его через $\operatorname{ind}(x^0, \Phi; n, m)$.

Наряду с (54.16) рассмотрим возмущенную систему

$$\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{54.18}$$

где $\psi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ непрерывны на $T(r_0)$.

Теорема 54.7. *Пусть*

$$\gamma_0 = \operatorname{ind}(x^0, \Phi; n, m) \neq 0. \tag{54.19}$$

Тогда каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что возмущенная система (54.18) *имеет в шаре $\| x - x^0 \| \leqslant \varepsilon$ по крайней мере одно решение, если*

$$\psi_1^2(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \ldots + \psi_m^2(\xi_1, \ldots, \xi_n) < \delta^2 \tag{54.20}$$

$$(\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \in T(r_0)).$$

Доказательство. Очевидно, $\| \Phi x \| \geqslant \alpha > 0$ при $\varepsilon \leqslant \| x - x^0 \| \leqslant r_0$. Пусть $\delta < \alpha$. Тогда из (54.20) вытекает гомотопность на слое $\varepsilon \leqslant \| x - x^0 \| \leqslant r_0$ поля (54.17) и (n, m)-поля $\Phi + \Psi$, где Ψ — это (n, m)-поле с компонентами ψ_i. В силу теоремы 54.4 (n, m)-вращение на сфере $\| x - x^0 \| = \varepsilon$ полей Φ и $\Phi + \Psi$ одинаково и совпадает с γ_0. Из (54.19) и теоремы 54.5 вытекает, что у поля $\Phi + \Psi$ есть нули в шаре $\| x - x_0 \| < \varepsilon$. ∎

Если $\operatorname{ind}(x^0, \Phi; n, m) = 0$, то в силу теоремы 54.6 систему (54.16) можно сколь угодно мало возмутить так, чтобы у возмущенной системы в шаре $T(r_0)$ не было решений. В этом смысле теорема 54.7 неулучшаема.

В условиях теоремы 54.7 решения возмущенной системы (54.18) образуют, вообще говоря, континуальное множество — многообразие размерности $n - m$ (теорема Дубовицкого — Сарда; см., например, [54]).

54.6. Системы с параметрами. Нелинейные уравнения с достаточно гладкими операторами, зависящими от параметров, сводятся, как показано в п. 54.3, к уравнениям разветвления (54.11). Мы рассмотрим случай, когда (54.11) — это конечная система m скалярных уравнений

$$\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \qquad (54.21)$$

с n скалярными неизвестными $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и k скалярными параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Для простоты будем считать, что

$$\varphi_i(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \qquad (54.22)$$

Предполагается, что функции φ_i в окрестности нуля непрерывны и (если будет нужно) достаточно гладкие.

Мы обсудим те аспекты анализа системы (54.21), которые связаны с применением теории вращения (по поводу аналитических, алгебраических и некоторых других методов см., например, [26]).

Будем считать, что у системы (54.21) при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ нулевое решение изолировано. Тогда определен индекс $\operatorname{ind}(0, \Phi_0; n, m)$, где Φ_0 — это (n, m)-поле с компонентами $\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n; 0, \ldots, 0)$. *Если этот индекс отличен от нуля, то из теоремы* 54.7 *вытекает существование при всех малых* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *малых решений у системы* (54.21).

Пусть теперь $\operatorname{ind}(0, \Phi_0; n, m) = 0$ или $n < m$ и поэтому не определено (n, m)-вращение поля Φ_0. В этом случае следует разбить параметры на две группы (может быть, предварительно перейдя в пространстве Λ к новой системе координат) и одну из них отнести к неизвестным. Обозначим новые неизвестные через $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r}$, а оставшиеся параметры через $\mu_1, \ldots, \mu_{k-r}$. Тогда система (54.21) примет вид

$$\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n+r}; \mu_1, \ldots, \mu_{k-r}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \qquad (54.23)$$

Допустим, что нуль является изолированным решением этой системы при $\mu_1 = \ldots = \mu_{k-r} = 0$. Тогда можно пытаться найти индекс $\operatorname{ind}(0, \Phi_1; n + r, m)$, где Φ_1 — это $(n + r, m)$-поле с компонентами $\varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{n+r}; 0, \ldots, 0)$. Если этот индекс окажется отличным от нуля, то в силу той же теоремы 54.7 можно будет утверждать, что при всех малых $\mu_1, \ldots, \mu_{k-r}$ система (54.23) имеет малые решения. Эти малые решения будут существовать уже не при произвольных малых значениях параметров

$\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r}$, а лишь при некоторых неизвестных нам значениях.

Вопросы о том, какие параметры $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+r}$ следует отнести к неизвестным, как их выбирать, сколько их отобрать и т. д., почти не изучены.

54.7. Уравнения с вполне непрерывными операторами. Вернемся к изучению уравнения (54.1) с вполне непрерывным оператором A. Откажемся от предположений о гладкости оператора A, которые позволяют переходить к уравнению разветвления (54.11) в конечномерном пространстве. При изучении таких уравнений также полезна теория (n, m)-вращения. Более того, эта теория позволяет перенести многие результаты гл. 2 на новые классы векторных полей и уравнений.

Нам понадобятся дополнительные свойства гомотопических групп $\pi(k, l)$. Как мы уже напоминали в п. 8.5, при достаточно больших l и $k \geqslant l$ группы $\pi(k, l)$ определяются лишь разностью $r = k - l$. Эти группы, зависящие лишь от числа $r \geqslant 0$, называют *стабильными гомотопическими группами*; обозначим их через $\pi_\infty(r)$. Стабильная группа $\pi_\infty(0)$ — это группа целых чисел; стабильная группа $\pi_\infty(1)$ состоит из двух элементов; все стабильные группы $\pi_\infty(r)$ при $r \geqslant 1$ конечны.

Пусть пространство $R^{l+r+s+1}$ является прямой суммой двух пространств: $R^{l+r+s+1} = R^{l+r+1} \dotplus N$. Пусть R^{l+1} — некоторое подпространство пространства R^{l+r+1}, а $R_0^{l+s+1} = R^{l+1} \dotplus N$. Обозначим через S^{l+r+s}, S^{l+r}, S_0^{l+s}, S^l единичные сферы соответственно в пространствах $R^{l+r+s+1}$, R^{l+r+1}, R_0^{l+s+1}, R^{l+1}. Мы считаем для простоты пространство $R^{l+r+s+1}$ евклидовым, а подпространства R^{l+r+1} и N взаимно ортогональными. Пусть P и Q — операторы ортогонального проектирования на R^{l+r+1} и N.

Рассмотрим два непрерывных отображения f и g сфер S^{l+r} и S^{l+r+s} соответственно в сферы S^l и S_0^{l+s}. Допустим, что эти отображения связаны равенством

$$gx = Qx + \|Px\| f(\|Px\|^{-1}Px) \quad (x \in S^{l+r+s}). \qquad (54.24)$$

Тогда говорят, что отображение g получено из отображения f при помощи *операции надстройки.*

Непосредственно из определения вытекает гомотопность отображений g_1 и g_2 сферы S^{l+r+s} в сферу S_0^{l+s}, если эти отображения получены операцией надстройки из гомотопных отображений f_1 и f_2 сферы S^{l+r} в сферу S^l. Поэтому операция надстройки порождает гомоморфизм группы $\pi(l + r + s, l + s)$ в группу $\pi(l + r, l)$. Если l достаточно велико, то $\pi(l + r + s, l + s)$ и $\pi(l + r, l)$ совпадают со стабильной группой $\pi_\infty(r)$. Оказывается (см., например,

[56]), что *операция надстройки определяет в этом случае не гомоморфизм, а изоморфизм.* Этот важный для нас факт при $r=0$ переходит в лемму Лере — Шаудера, на которой в гл. 2 основана корректность понятия вращения вполне непрерывного векторного поля.

Пусть F — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Пусть $\Phi = I - F$ и все векторы Φx при значениях x из некоторого множества $M \subset E$ лежат в некотором подпространстве $E^0 \subset E$. Из полной непрерывности F вытекает, что $E = E^0 \dotplus N$, причем N конечномерно. Поле Φ назовем *вполне непрерывным r-полем* на M, если r — размерность подпространства N. Через P обозначим линейный проектор на E^0 по направлению N ($Px = x$ при $x \in E^0$ и $Px = 0$ при $x \in N$); пусть $Q = I - P$. Поле Φ является r-полем в том и только том случае, если

$$\Phi x = x - Qx - PFx. \tag{54.25}$$

Допустим, что вполне непрерывное r-поле Φ невырождено на сфере $S \subset E$. Построим последовательность F_j ($j = 1, 2, \ldots$) конечномерных операторов, равномерно сходящуюся на S к оператору F. Последовательность операторов PF_j тогда равномерно сходится к оператору PF. Пусть значения оператора PF_j лежат в конечномерном подпространстве $E_j \subset E$; размерность E_j обозначим через m_j и будем считать, что $m_1 < m_2 < \ldots$

Обозначим через S^{m_j+r-1} пересечение сферы S с подпространством $E_j \dotplus N$. Векторные поля $\Phi_j x = x - Qx - PF_j x$ будут (при больших j) невырождены на S^{m_j+r-1}; они будут $(m_j + r, m_j)$-полями и поэтому будет определено их $(m_j + r, m_j)$-вращение. Это вращение является элементом группы $\pi(m_j + r - 1, m_j - 1)$, которая при больших j совпадает со стабильной группой $\pi_\infty(r)$. Соответствующий элемент α_j группы $\pi_\infty(r)$ в силу леммы об изоморфизме стабильной группы при операции надстройки не зависит от j. Назовем его *r-вращением вполне непрерывного r-поля* (54.25) *на* S и обозначим через $\gamma(\Phi, S; r)$.

Обычными конструкциями (см. гл. 2) устанавливается корректность понятия r-вращения. Такие обычные конструкции позволяют установить аналоги теорем 54.4 — 54.6: *из гомотопности на S двух r-полей Φ_1 и Φ_2*

вытекает равенство $\gamma(\Phi_1, S; r) = \gamma(\Phi_2, S; r)$; из равенства r-вращений на сфере вытекает гомотопность r-полей; если вполне непрерывное r-поле Φ задано на шаре и его r-вращение на граничной сфере отлично от нуля, то поле Φ имеет в шаре по крайней мере один нуль; если r-поле невырождено на границе шара и его r-вращение равно нулю, то его можно продолжить до непрерывного r-поля, которое определено и невырождено на всем шаре.

Очевидны пути дальнейшего развития теории r-полей: переход к полям на границах более сложных областей, анализ особых точек, алгоритмы вычисления r-вращения и т. д.

В качестве приложения продолжим изучение уравнения (54.1) с вполне непрерывным оператором A. Пусть x_0 — изолированное решение уравнения (54.1) при $\lambda = \lambda_0$.

Если индекс решения x_0 уравнения (54.1) при $\lambda = \lambda_0$ равен нулю, то теорема 54.1 не приводит ни к каким суждениям о решениях уравнения (54.1) при отличных от λ_0 значениях λ. Представим в этом случае пространство параметров в виде прямой суммы $\Lambda = N \dotplus \mathrm{M}$, где N имеет конечную размерность r. Элементы пространства N будем обозначать через y, элементы пространства M — через μ. Тогда уравнение (54.1) можно переписать в виде

$$x = A(x, y; \mu). \tag{54.26}$$

При каждом фиксированном μ уравнение (54.26) можно рассматривать как уравнение в пространстве $E \dotplus N$. Допустим, что точка $x_0 + y_0 \in E \dotplus N$ является изолированным решением уравнения (54.26) при $\mu = \mu_0$, где $y_0 + \mu_0 = \lambda_0$. В этом случае точка $x_0 + y_0$ является изолированной особой точкой определенного на $E \dotplus N$ вполне непрерывного r-поля $\Phi_0(x + y) = x - A(x, y; \mu_0)$. Поле Φ_0 будет иметь одно и то же r-вращение на всех сферах малого радиуса с центром в $x_0 + y_0$; это общее r-вращение обозначим через $\operatorname{ind}(x_0 + y_0, \Phi_0; r)$.

Если $\operatorname{ind}(x_0 + y_0, \Phi_0; r)$ окажется отличным от нуля, то можно будет утверждать, что при достаточно близких к μ_0 значениях μ уравнение (54.26) имеет решения $x + y$, близкие к $x_0 + y_0$. Если $\operatorname{ind}(x_0 + y_0, \Phi_0; r) = 0$, то разложение $\Lambda = N \dotplus \mathrm{M}$ оказалось неудачным и можно пытаться перейти к новому.

Все приведенные рассуждения без существенных осложнений переносятся на уравнения вида

$$B(\lambda)x = A(x, \lambda), \tag{54.27}$$

где $x \in E$, $\lambda \in \Lambda$, B и A — операторы со значениями в некотором банаховом пространстве E_1, если A вполне непрерывен, а $B(\lambda)$ — непрерывная оператор-функция, значениями которой являются линейные нормально разрешимые операторы, действующие из E в E_1. Этот перенос может быть сделан двумя путями: либо свести (54.27) к уравнению вида (54.1) с вполне непрерывным оператором и воспользоваться теорией r-вращения, либо сначала распространить теорию r-вращения на поля $Bx - Ax$ с нётеровым B и вполне непрерывным A.

О группах $\pi(k, l)$ и $\pi_\infty(r)$ см., например, [54], [56] и книгу Спаньера «Алгебраическая топология» (М., «Мир», 1971).

Некоторые аспекты применения групп $\pi_\infty(r)$ в гомотопической топологии банаховых пространств указал А. С. Шварц (ДАН СССР 154, № 1 (1964)). В. Г. Звягин (Тезисы 6 Всесоюзн. топологической конф., Тбилиси, 1972) ввел и изучил индекс собственных векторов нелинейных вполне непрерывных операторов (В. Г. Звягин использует так называемые вторые препятствия В. Г. Болтянского [4]).

§ 55. Функционализация параметра

55.1. Общая схема. В ряде теоретических и прикладных задач возникают операторы с континуумами неподвижных точек. В качестве примера можно назвать задачи о периодических решениях различных автономных дифференциальных уравнений (им посвящена значительная часть параграфа); краевые задачи для уравнений с частными производными, инвариантных относительно некоторой непрерывной группы преобразований координат, и т. д.

В то же время исследование уравнений со связными континуумами решений представляет значительные трудности. Во-первых, в задачах с континуумами решений присутствуют, как правило, скалярные или векторные параметры, и нетривиальные решения существуют лишь при изолированных и априори неизвестных значениях параметров. Во-вторых, неизолированность решений затрудняет применение большинства приближенных методов. В-третьих, усложняется применение качественных и, в частности, топологических методов исследования уравнений. Суммарный топологический индекс континуума решений во многих случаях равен нулю.

Представляют интерес способы перехода от задач с континуумами решений к эквивалентным в естественном смысле задачам с изолированными решениями. Иногда этого можно достичь выделением решений, обладающих специальными дополнительными свойствами. Параграф посвящен другой общей схеме.

Здесь излагаются результаты Н. А. Бобылева и М. А. Красносельского (Дифф. ур-ния 6, № 11 (1970); ДАН СССР 205, № 5 (1972)). Интересные приложения метода функционализации параметра в последнее время указали Р. Р. Ахмеров, Б. Н. Садовский, В. В. Стрыгин, Нитч (J. Nietzsch), Шнайдер (K. R. Schneider) и др.

Рассмотрим уравнение

$$F(x; \lambda) = 0 \tag{55.1}$$

с векторным параметром $\lambda \in R^n$. Пусть $\Pi \subset E$ — некоторое n-мерное многообразие решений уравнения (55.1) при $\lambda = \lambda_0$. Будем предполагать, что существуют окрестности $W(\lambda_0)$ точки λ_0 в R^n и $W(\Pi)$ многообразия Π в банаховом пространстве E, которые обладают следующим свойством: при $\lambda \in W(\lambda_0)$ и $\lambda \neq \lambda_0$ уравнение (55.1) не имеет решений в области $W(\Pi)$. Определим действующий из $W(\Pi)$ в $W(\lambda_0) \subset R^n$ оператор $\lambda(x)$, одним из значений которого является λ_0. Тогда *решениями уравнения*

$$F[x; \lambda(x)] = 0 \tag{55.2}$$

(уже не содержащего никаких параметров!) будут те и только те точки $x_0 \in \Pi$, *в которых* $\lambda(x)$ *принимает значение* λ_0. Иначе говоря, решения уравнения (55.2) — это точки пересечения многообразия Π с многообразием $M = \{x: \lambda(x) = \lambda_0\}$. Многообразие M, вообще говоря, имеет дефект n и поэтому пересечение $\Pi \cap M$, как правило, состоит из изолированных точек.

Переход к уравнению (55.2) (полученному функционализацией параметра λ) не требует, конечно, точного знания многообразия Π и вектора λ_0. Достаточно иметь грубую информацию об их расположении. Конечно, решая уравнение (55.2), мы найдем лишь некоторые решения уравнения (55.1); однако, во многих задачах по каждой точке многообразия Π можно восстановить все многообразие полностью.

Так как решения уравнения (55.2) изолированы, то для их отыскания и исследования применимы уже все методы, изложенные в предыдущих главах книги.

55.2. Индекс цикла. Автономные системы

$$\dot{x} = f(x) \tag{55.3}$$

отличаются от неавтономных той неприятной особенностью, что период ω^* их периодических решений $x^*(t)$ (отличных от состояния равновесия) априори неизвестен. Поэтому отыскание этих периодических решений сводится к решению различных уравнений типа (55.1) со скалярным параметром $\omega = \lambda$ и требуется найти такие $\omega = \omega^* > 0$, при которых у уравнения (55.1) есть решения. Если $x^*(t)$ — периодическое решение системы (55.3), то каждая функция $x(t) = x^*(t+h)$ также будет периодическим решением того же периода; поэтому соответствующее задаче о периодических решениях системы (55.3) операторное уравнение (55.1) должно иметь континуумы решений.

Будем предполагать для простоты, что правая часть системы (55.3) определена и непрерывна на всем фазовом пространстве R^n и что каждое начальное значение определяет единственное решение системы. Пусть $x^*(t)$ — периодическое решение системы (55.3), отличное от состояния равновесия; ω^* — его период. Решение $x = x^*(t)$ описывает движение по замкнутому циклу Γ в R^n. Будем считать, что цикл Γ изолирован. Тогда можно указать окрестность G этого цикла, на которой определены операторы $U(\omega)$ $(0 \leqslant \omega \leqslant 2\omega^*)$ сдвига по траекториям системы (55.3) за время ω, причем эти операторы сдвига при $0 < \omega < \omega^*$ и $\omega^* < \omega < 2\omega^*$ не имеют в G неподвижных точек, а неподвижные точки оператора $U(\omega^*)$ образуют цикл Γ.

Пусть $\lambda(x)$ — определенный на G (или на части G) непрерывный функционал со значениями в $(0, 2\omega^*)$. Тогда неподвижные точки оператора $U_1x = U[\lambda(x)]x$ будут совпадать с точками пересечения цикла Γ с поверхностью $\lambda(x) = \omega^*$. В общем случае число таких точек конечно.

Рассмотрим некоторую изолированную неподвижную точку $x^* \in \Gamma$ оператора U_1. Скажем, что $\lambda(x)$ является *функционалом первого* (*второго*) *рода* в окрестности точки x^*, если произведение $t\{\lambda[U(t)x^*] - \omega^*\}$ положительно (отрицательно) при малых ненулевых t. Положим

$$\varphi x = x - U[\lambda(x)]x. \tag{55.4}$$

Назовем *индексом* $\chi(\Gamma)$ *цикла* Γ число $\operatorname{ind}(x^*, \varphi; R^n)$, если $\lambda(x)$ — функционал первого рода, и число $-\operatorname{ind}(x^*, \varphi; R^n)$, если $\lambda(x)$ — функционал второго рода.

Теорема 55.1. *Определение индекса цикла корректно.*

Доказательство. Нужно установить, что индекс цикла не зависит от функционала $\lambda(x)$ и точки x^*, по которым он определялся, и что существуют функционалы, по которым он может быть определен.

Если $\lambda_0(x)$ и $\lambda_1(x)$ — два функционала одинакового рода в окрестности точки x^*, то x^* будет изолированной особой точкой всех непрерывных векторных полей $x - U[(1-\theta)\lambda_0(x) + \theta\lambda_1(x)]x$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Поэтому индекс особой точки x^* не зависит от θ. Следовательно, определение индекса цикла по функционалам $\lambda_0(x)$ и $\lambda_1(x)$ приводит к одному и тому же числу.

Если $\lambda_0(x)$ — функционал первого или второго рода в окрестности точки x^*, то формула $\lambda_\tau(x) = \lambda_0[U(-\tau)x]$ определяет при каждом τ функционал того же рода в окрестности точки $U(\tau)x^*$. Точки $U(\tau)x^*$, составляющие весь цикл Γ, будут изолированными нулями непрерывно зависящего от τ векторного поля $x - U\{\lambda_0[U(-\tau)x]\}x$; поэтому индексы этих нулей одинаковы. Следовательно, в определении индекса цикла точка x^* роли не играет.

Для завершения доказательства остается показать, что индексы особых точек x^* и x^{**} полей $x - U[\lambda_0(x)]x$ и $x - U[\lambda_{00}(x)]x$ отличаются лишь знаком, если $\lambda_0(x)$ и $\lambda_{00}(x)$ имеют разный род в окрестностях соответственно точек x^* и x^{**}. По уже доказанному последнее утверждение достаточно установить для одной какой-либо пары функционалов $\lambda_0(x)$ и $\lambda_{00}(x)$.

Определим $\lambda(x)$, задав его вначале при $x = U(t)x^*$ равенством $\lambda(x) = \omega^* + \frac{\omega^*}{2}\sin\frac{2\pi t}{\omega^*}$, а затем продолжив его на все R^n с сохранением непрерывности. Очевидно, оператор $U[\lambda(x)]x$ имеет в области G ровно две неподвижные точки: x^* и $U(\omega^*/2)x^*$; причем в окрестности одной из них функционал $\lambda(x)$ имеет первый род, а в окрестности второй — второй род. Поэтому остается показать, что сумма индексов особых точек x^* и $U(\omega^*/2)x^*$ векторного поля (55.4) равна нулю. По теореме об алгебраическом числе особых точек эта сумма совпадает с вращением поля (55.4) на границе произвольной малой окрестности цикла Г, и нам нужно показать, что это вращение равно нулю.

Семейство полей $x - U\left[(1-\theta)\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\omega^*\right]x$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$ при $\theta = 0$ превращается в поле (55.4), а при $\theta = 1$ в поле $x - U\left(\frac{1}{2}\omega^*\right)x$, которое не имеет ни на цикле Г, ни в его окрестности особых точек. Иначе говоря, поле (55.4) на границе малой окрестности цикла гомотопно полю, вращение которого равно нулю. Следовательно, $\gamma = 0$. ∎

Индекс цикла может быть введен и при помощи *функции последования Пуанкаре.* Пусть П — некоторая гиперплоскость, проходящая через точку $x^* \in \Gamma$ и не имеющая контакта в окрестности точки x^* с интегральными кривыми системы (55.3). Тогда выходящая из каждой точки $x \in \Pi$ (из достаточно малой окрестности точки x^*) интегральная кривая «близка» к циклу Г, и поэтому можно указать первый момент времени $t(x)$, при котором точка x вернется в гиперплоскость П. *Функция последования* — это оператор, определенный равенством

$$Tx = U[t(x)]x \quad (x \in \Pi). \tag{55.5}$$

Из изолированности цикла Г вытекает, что x^* — изолированная неподвижная точка оператора (55.5), действующего в П. Нетрудно видеть, что

$$\chi(\Gamma) = \operatorname{ind}(x^*, I - T; \Pi). \tag{55.6}$$

55.3. Вычисление индекса цикла. Для вычисления индекса цикла Г системы (55.3) можно применить общие приемы, развитые в главах 1 и 2. Мы остановимся лишь на двух очевидных утверждениях.

Цикл Г системы (55.3) называется *орбитально асимптотически устойчивым,* если найдется такая его окрестность G, что для каждого решения $x(t)$ системы с начальным значением из области G справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \rho[x(t), \Gamma] = 0. \tag{55.7}$$

Напомним, что из орбитальной асимптотической устойчивости цикла Г не вытекает устойчивость по Ляпунову соответствующего периодического решения $x^*(t)$. Однако из асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова решения $x^*(t)$ орбитальная асимптотическая устойчивость цикла Г, конечно, вытекает.

Теорема 55.2. *Индекс орбитально асимптотически устойчивого цикла равен* 1.

Для доказательства проще всего заметить, что оператор (55.5) в окрестности точки x^* удовлетворяет условию Браудера (см. п. 39.2), сослаться на теорему 39.1 и воспользоваться равенством (55.6). ∎

Составим по решению $x^*(t)$ системы (55.3) уравнение в вариациях:

$$\dot y = g(t, y), \tag{55.8}$$

где $g(t, y) = f[x^*(t) + y] - f[x^*(t)]$. Тогда у системы (55.8) будет нулевое решение. Пролинеаризуем систему (55.8) в нуле; линеаризованная система

$$\dot y = A(t)y \tag{55.9}$$

будет системой с ω^*-периодическими коэффициентами. Как известно, число 1 всегда является мультипликатором системы (55.9).

Теорема 55.3. *Пусть* 1 *является простым мультипликатором системы* (55.9). *Пусть* $\beta(\Gamma)$ — *сумма кратностей больших чем* 1 *вещественных мультипликаторов системы* (55.9). *Тогда* $\chi(\Gamma) = (-1)^{\beta(\Gamma)}$.

55.4. Теорема родственности. Если в системе (55.3) произвести замену времени $t = \omega\tau$, то она примет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \omega f(x). \tag{55.10}$$

Задача о циклах системы (55.3) эквивалентна задаче о периодических с периодом 1 решениях системы (55.10), которая в свою очередь эквивалентна интегральному уравнению

$$y(\tau) = y(1) + \omega \int_0^\tau f[y(s)]\,ds \qquad (55.11)$$

с параметром ω. Таким образом, для отыскания циклов системы (55.3) можно искать такие значения ω^* параметра ω, при которых у (55.11) есть решения $y(\tau)$, а затем определять периодические решения $x^*(t)$ системы (55.3) равенством $x^*(t) = y(t/\omega^*)$.

Правая часть (55.11) определяет оператор

$$A(\omega)\,y(\tau) = y(1) + \omega \int_0^\tau f[y(s)]\,ds, \qquad (55.12)$$

который действует и вполне непрерывен в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ вектор-функций со значениями в фазовом пространстве R^n. Пусть $y^*(\tau)$ — решение уравнения (55.11) при $\omega = \omega^*$, его решениями будут и все функции $y^*(\tau + h)$; множество этих решений образует в C замкнутую кривую $\mathscr{L}$.

Допустим, что $y^*(\tau)$ соответствует изолированному циклу Γ системы (55.3). Тогда оператор (55.12) при $0 < \omega < \omega^*$ и $\omega^* < \omega < 2\omega^*$ не имеет неподвижных точек в некоторой фиксированной окрестности W кривой $\mathscr{L}$, а при $\omega = \omega^*$ его неподвижные точки образуют только кривую $\mathscr{L}$. Пусть непрерывный функционал $\omega(x)$ задан на W и принимает в точке $y^* \in \mathscr{L}$ значение ω^*. Будем говорить, что $\omega(x)$ является *функционалом первого рода* (*второго рода*) *в окрестности точки* y^*, если произведение $h \cdot \{\omega[y^*(\tau + h)] - \omega^*\}$ положительно (отрицательно) при малых ненулевых h. Если $\omega(x)$ — функционал первого или второго рода в окрестности точки $y^* \in C$, то эта точка y^* будет изолированной неподвижной точкой вполне непрерывного оператора

$$A_1 y = y(1) + \omega(y) \int_0^\tau f[y(s)]\,ds. \qquad (55.13)$$

Число $\operatorname{ind}(y^*, I - A_1; C)$, если $\omega(y)$ является функционалом первого рода в окрестности точки y^*, или число $-\operatorname{ind}(y^*, I - A_1; C)$, если $\omega(y)$ является функционалом второго рода, назовем *функциональной характеристикой* $\mu(\Gamma)$ *цикла* Γ.

Корректность понятия «функциональная характеристика» легко устанавливается рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 55.1.

Теорема 55.4. *Индекс* $\chi(\Gamma)$ *изолированного цикла системы* (55.3) *совпадает с его функциональной характеристикой* $\mu(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть ω^* — период решения $x^*(t)$ системы (55.3), соответствующего циклу Γ.

Обозначим через $u(t, x)$ $(-\infty < t < \infty,\ x \in R^n)$ непрерывную положительную и периодическую по t с периодом 1 скалярную функцию, которая в точках $x^*(t)$ цикла Γ принимает значения

$$u[t, x^*(s)] = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\pi\left(\frac{s}{\omega^*} - t\right). \qquad (55.14)$$

По функции $u(t, x)$ построим неавтономную систему

$$\frac{dy}{d\tau} = \omega^* f(y)\,u(\tau, y). \qquad (55.15)$$

Нетрудно проверить, что каждое решение $y = q[\tau, x^*(s)]$ системы (55.15) с начальным условием $y(0) = x^*(s)$ имеет вид

$$q[\tau, x^*(s)] = x^*[\omega^*\tau + \omega^* h(\tau)], \qquad (55.16)$$

где

$$h(\tau) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(e^{\pi\tau}\operatorname{tg}\frac{\pi s}{\omega^*}\right). \qquad (55.17)$$

Поскольку траектории системы (55.15) в фазовом пространстве R^n совпадают с траекториями системы (55.3), то функция $y_0(\tau) = q[\tau, x^*(0)]$ будет изолированным периодическим решением неавтономной системы (55.15); период этого решения равен 1. Поэтому $y_0(\tau)$ будет одновременно изолированной неподвижной точкой оператора

$$By(\tau) = y(1) + \omega^* \int_0^\tau f[x(s)]\,u[s, x(s)]\,ds, \qquad (55.18)$$

который действует и вполне непрерывен в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ вектор-функций со значениями в R^n.

Обозначим через V оператор сдвига за время 1 по траекториям системы (55.15). Этот оператор определен в окрестности точки $x^*(0)$ и $x^*(0)$ является его изолированной неподвижной точкой. В силу теоремы родственности 28.5 (для неавтономных систем) справедливо равенство

$$\operatorname{ind}[x^*(0), I - V; R^n] = \operatorname{ind}[y_0(\tau), I - B; C]. \quad (55.19)$$

Так как траектории систем (55.3) и (55.15) совпадают, то можно построить на R^n такой функционал $t(x)$, принимающий в точке $x^*(0)$ значение ω^*, что $Vx = U[t(x)]x$. Из (55.16) и (55.17) следует, что $t(x)$ является в окрестности точки $x^*(0)$ функционалом первого рода. Поэтому $\operatorname{ind}[x^*(0), I-V; R^n] = \chi(\Gamma)$ и для завершения доказательства теоремы остается установить равенство

$$\operatorname{ind}[y_0(\tau), I - B; C] = \mu(\Gamma). \quad (55.20)$$

Рассмотрим в окрестности точки $y_0 = y_0(\tau) \in C$ семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi(\theta)\, y = y(t) - y(1) - \\ - [\theta\omega^* + (1-\theta)\,\omega(y)] \int_0^\tau f[y(s)]\{\theta u[s, y(s)] + 1 - \theta\}\, ds,$$

где $\omega(y)$ — некоторый функционал первого рода в окрестности точки y_0, а $u(s, x)$ — функция из уравнения (55.15). Точка y_0 при каждом $\theta \in [0, 1]$ является (проверьте!) изолированной особой точкой поля $\Phi(\theta)$. Поэтому индекс γ_0 этой особой точки одинаков при всех $\theta \in [0, 1]$. Но $\Phi(0) = I - A_1$ и $\Phi(1) = I - B$ и, следовательно, справедливо равенство (55 20). ∎

55.5. Автономные системы с запаздыванием. Переход от уравнения (55.11) к уравнению с функционализованным параметром — к уравнению с оператором (55.13) — может быть использован в различных направлениях.

Пусть известно ω^*-периодическое решение $x^*(t)$ системы (55.3). Тогда при построении оператора (55.13) можно использовать, например, функционал

$$\omega(y) = \omega^* + \int_0^1 y(s)\, dx^*(\omega^* s). \quad (55.21)$$

Можно в явном виде выписать и другие функционалы, пригодные для построения оператора (55.13). Эти функционалы можно использовать для изучения систем, «близких» к системе (55.3).

Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = f[x(t)] + g[x(t), x(t-h)]. \quad (55.22)$$

Если возмущение g не слишком велико, то можно ожидать, что у системы (55.22) существуют периодические решения, близкие к ω^*.

Теорема 55.5. *Пусть* $\chi(\Gamma) \neq 0$, *где* Γ — *цикл системы* (55.3), *отвечающий* ω^*-*периодическому решению* $x^*(t)$. *Тогда каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* $\delta > 0$, *что у системы* (55.22) *есть по крайней мере один цикл в* ε-*окрестности цикла* Γ, *если только* $\| g(x, y) \| < \delta$.

Доказательство. Построим интегро-функциональный оператор

$$Ty(\tau) = y(1) + \omega(y) \int_0^\tau \{f[y(\sigma)] + g[y(\sigma), Sy(\sigma)]\}\, d\sigma, \quad (55.23)$$

где $Sy(\sigma) = y(\sigma - h/\omega^*)$ при $h \leqslant \sigma\omega^*$ и $Sy(\sigma) = y(\sigma - h/\omega^* + 1)$ при $0 \leqslant \omega^*\sigma < h$, а $\omega(y)$ — функционал первого или второго рода, по которому построен оператор (55.13). Так как $y^* = x^*(\omega^*\tau)$ является изолированной неподвижной точкой ненулевого индекса оператора (55.13), то при малых $g(x, y)$ у оператора (55.23) в ε-окрестности точки y^* есть неподвижная точка. Эта неподвижная точка определяет периодическое решение системы (55.22). ∎

Переход к оператору (55.23) полезен и в случае, когда возмущенное уравнение (55.22) не содержит запаздываний. У оператора (55.23), как правило, неподвижные точки изолированы. Для их приближенного построения можно применять общие методы отыскания изолированных решений нелинейных операторных уравнений.

55.6. Замечания.

а) Мы рассмотрели лишь одно интегро-функциональное уравнение (55.11), эквивалентное задаче о периодических решениях системы (55.3). Аналогичным способом можно исследовать и другие уравнения, которые в гл. 3 применялись для исследования задачи о периодических решениях неавтономных систем.

б) Рассмотрим автономную систему

$$z^{(m)} + a_1 z^{(m-1)} + \ldots + a_m z = f(z, z', \ldots, z^{(m-1)}), \quad (55.24)$$

где $z \in R^k$; $a_1, \ldots, a_m$ — квадратные матрицы порядка k. Система (55.24) эквивалентна системе (55.3) уравнений первого порядка; порядок n системы (55.3) при этом равен mk. Допустим, что у системы (55.3) есть изолированный цикл Γ индекса $\chi(\Gamma)$.

В п. 55.4 мы конструировали операторное уравнение в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ функций со значениями в R^n с изолированным (после функционализации параметра) решением y^*, определяющим цикл. В силу теоремы 55.4 индекс решения y^* был равен $\chi(\Gamma)$.

Однако задачу о периодических решениях системы (55.24) легко свести к отысканию неподвижных точек операторов, действующих в пространстве вектор-функций со значениями в R^k. Такие операторы, как правило, проще. Эти операторы также зависят от неизвестного периода, как от параметра. Если произвести функционализацию параметра, то мы снова получим операторы с изолированными неподвижными точками. Индексы этих неподвижных точек просто выражаются через $\chi(\Gamma)$; более того, эти индексы в естественных ситуациях либо совпадают с $\chi(\Gamma)$, либо отличаются от $\chi(\Gamma)$ знаком.

§ 56. Принцип смены индекса

56.1. Точки бифуркации. Продолжим изучение уравнения

$$F(x; \lambda) = 0 \quad (56.1)$$

со скалярным параметром λ. Пусть $F(0; \lambda) \equiv 0$.

Число λ_0 называется *точкой бифуркации* для уравнения (56.1), если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, при котором уравнение (56.1) имеет по крайней мере одно ненулевое решение в шаре $\|x\| < \varepsilon$. Точки бифуркации в задачах естествознания соответствуют таким понятиям, как критические нагрузки в проблемах устойчивости, критические температуры в задачах конвекции, критические скорости в теории волн, критические значения параметров в задачах о рождении периодических решений и т. д.

Число λ_0 называется *точкой ответвления* от известного решения $y^*(\lambda)$ уравнения $G(y; \lambda) = 0$, если найдутся такие последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$, $y_n \to y^*(\lambda_0)$ $(y_n \neq y^*(\lambda_n))$, что $G(y_n; \lambda_n) = 0$. Точки ответвления будут точками бифуркации для уравнения (56.1) с оператором $F(x; \lambda) = G[y^*(\lambda) + x; \lambda]$.

В задачах о точках бифуркации можно с успехом применять все обычные методы теории ветвления (см., например, [26]). Например, если входящие в (56.1) операторы достаточно гладкие, то можно предварительно перейти к какому-либо уравнению разветвления, так как точки бифуркации уравнения разветвления совпадают с точками бифуркации основного уравнения. Однако задача о точках бифуркации обладает существенными особенностями по сравнению с задачей об общих точках ветвления — информация об известном при всех λ нулевом решении и отказ от обязательного существования малых ненулевых решений при значениях λ из целого промежутка. Эти особенности позволяют применить для анализа точек бифуркации специальные геометрические приемы и получить удобные для приложений простые и общие теоремы.

Мы ограничимся уравнением (56.1) вида

$$x = A(x; \lambda) \quad (56.2)$$

с вполне непрерывным оператором A $(A(0; \lambda) \equiv 0)$ и используем для анализа его точек бифуркации теорию вращения вполне непрерывных векторных полей. Результаты, конечно, сохраняют силу при переходе к более общим уравнениям, если для соответствующих векторных полей определено вращение с обычными свойствами.

56.2. Необходимое условие. Из классической теоремы о неявной функции вытекает, что для уравнения (56.2) с гладким оператором A точками бифуркации могут быть лишь такие λ_0, при которых оператор $I - A'_x(0; \lambda_0)$ не имеет непрерывного обратного. Если A вполне непрерывен, то и линейный оператор $A'_x(0; \lambda_0)$ вполне непрерывен. Отсюда вытекает, например, следующая

Теорема 56.1. *Пусть λ_0 — точка бифуркации для уравнения* (56.2) *с вполне непрерывным оператором A. Пусть в окрестности точки λ_0 определена оператор-функция $A'_x(0; \lambda)$, которая непрерывна в точке λ_0 по операторной норме. Пусть, наконец, $\|x\|^{-1} \|A(x; \lambda) - A'_x(0; \lambda) x\| \to 0$ при $\|x\| \to 0$ равномерно относительно* *значений λ из некоторой окрестности точки λ_0. Тогда число 1 является собственным значением оператора $A'_x(0; \lambda_0)$.*

В частности, *если $A'_x(0; \lambda) = \lambda B$, то λ_0 может быть точкой бифуркации лишь в случае, если λ_0^{-1} — собственное значение линейного оператора B.* Этот случай наиболее важен для приложений.

Если (56.2) — уравнение в R^n, то точками бифуркации могут быть лишь корни скалярного уравнения $\det[A'_x(0; \lambda) - I] = 0$.

56.3. Достаточные признаки. Положим

$$\Phi(\lambda)x = x - A(x; \lambda). \tag{56.3}$$

Допустим, что нуль является изолированной особой точкой поля (56.3) при $\lambda = \lambda_n$ и $\lambda = \lambda'_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\lambda_n \to \lambda_0$ и $\lambda'_n \to \lambda_0$. Если при этом

$$\operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda_n)] \neq \operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda'_n)] \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{56.4}$$

то назовем число λ_0 *точкой смены индекса*. В этом определении одна из последовательностей λ_n, λ'_n может совпадать с точкой λ_0.

Теорема 56.2. *Пусть λ_0 — точка смены индекса для уравнения* (56.2) *с вполне непрерывным оператором A. Тогда λ_0 является точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

Доказательство. В анализе нуждается лишь случай, когда нуль является изолированной особой точкой поля (56.3) при $\lambda = \lambda_0$. В этом случае можно считать, что $\operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda_n)] \neq \operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda_0)]$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через Ω шар $\|x\| < \rho$ радиуса $\rho < \varepsilon$, в замыкании которого поле $\Phi(\lambda_0)$ не имеет отличных от нуля особых точек. Из теоремы об алгебраическом числе особых точек вытекает, что поля $\Phi(\lambda_n)$ при достаточно больших n имеют в шаре Ω ненулевые особые точки. ∎

Наиболее обычна ситуация, когда λ_0 — изолированная точка в множестве значений параметра, которые могут быть точками бифуркации. В этом случае определен индекс $\operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda)]$ при всех близких к λ_0 и меньших чем λ_0 значениях λ, причем этот индекс не зависит от λ; обозначим его через $\gamma(\lambda_0 - 0)$. Аналогично определяется индекс $\gamma(\lambda_0 + 0)$. Может оказаться определенным и известным нам индекс $\gamma(\lambda_0) = \operatorname{ind}[0, \Phi(\lambda_0)]$.

Теорема 56.3. *Пусть среди чисел*

$$\gamma(\lambda_0 - 0), \quad \gamma(\lambda_0), \quad \gamma(\lambda_0 + 0) \tag{56.5}$$

есть два различных. Тогда λ_0 является точкой бифуркации.

Для доказательства достаточно сослаться на теорему 56.2. ∎

Теорема 56.4. *Пусть $A'_x(0; \lambda) = \lambda B$ и λ_0^{-1} — нечетнократное собственное значение линейного оператора B. Тогда λ_0 является точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

Для доказательства достаточно выписать равенство $\gamma(\lambda_0 - 0) \cdot \gamma(\lambda_0 + 0) = (-1)^k$, где k — кратность собственного значения λ_0^{-1} оператора B, а затем сослаться на теорему 56.3. ∎

В условиях теоремы 56.4 нельзя отказаться от предположения о том, что λ_0^{-1} является собственным значением нечетной кратности. Например, если A действует в R^2, $x = \{\xi, \eta\}$ и $A(x; \lambda) = \lambda\{\xi + \eta(\xi^2 + \eta^2), \eta - \xi(\xi^2 + \eta^2)\}$, то $A'_x(0; \lambda) = \lambda B$, где $B = I$; число $\lambda_0 = 1$ является собственным значением кратности 2 оператора B, но оно не будет точкой бифуркации нелинейного уравнения (56.2).

Удобство приложений теоремы 56.4 определяется в первую очередь тем, что наличие бифуркации определяется только по линеаризованному уравнению. В этом плане теорема 56.4 допускает существенное развитие.

Пусть 1 является собственным значением кратности k оператора $A'_x(0; \lambda_0)$. Положим $\lambda = \lambda_0 + \mu$. Тогда при малых μ у оператора $A'_x(0; \lambda_0 + \mu)$ есть ровно k (с учетом кратности) собственных значений, близких к 1; эти собственные значения можно, как правило, найти с любой нужной точностью методами теории возмущений. Сумму кратностей указанных собственных значений, больших чем 1, обозначим через $\pi(\mu)$. Назовем число λ_0 *точкой смены кратности*, если найдутся такие последовательности $\mu_n \to 0$ и $\mu'_n \to 0$, что 1 не является собственным значением всех операторов $A'_x(0; \lambda_0 + \mu_n)$ и $A'_x(0; \lambda_0 + \mu'_n)$, а суммы $\pi(\mu_n) + \pi(\mu'_n)$ нечетны. Из теоремы 56.2 вытекает следующее усиление теоремы 56.4.

Теорема 56.5. *Пусть λ_0 — точка смены кратности для оператора $A'_x(0;\lambda)$. Тогда λ_0 является точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

Если λ_0 не является точкой смены кратности (в частности, если $A'_x(0;\lambda)=\lambda B$ и λ_0^{-1} — собственное значение четной кратности оператора B), то для исследования точки λ_0 необходимо привлечь нелинейные члены разложения Тейлора оператора $A(x;\lambda)$ в окрестности точки $x=0$. Нелинейные члены позволяют (по крайней мере в принципе) вычислить индекс $\gamma(\lambda_0)$. После этого следует пытаться применять теорему 56.3.

Приложения теорем 56.1—56.5 к интегральным уравнениям, краевым задачам и т. д. не требуют специальных соображений, и мы поэтому не приводим даже иллюстрирующих примеров. Отметим лишь, что при вычислении индексов нулевой особой точки полей (56.3) удобно применять принцип инвариантности и различные теоремы родственности из гл. 3.

56.4. Непрерывные ветви ненулевых решений. Если λ_0 — точка бифуркации для уравнения (56.2), то сразу возникают естественные задачи описания геометрической структуры множества ненулевых решений и определения тех значений λ, при которых у уравнения (56.2) есть ненулевые решения малой нормы. Для описания структуры множества ненулевых решений мы используем понятие непрерывной ветви, в близкой ситуации примененное в гл. 6.

Пусть каждому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\rho>0$, что на границе любой лежащей в шаре $\|x\|<\rho$ окрестности U нулевой точки уравнение (56.1) имеет по крайней мере одно решение при некотором $\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)$. Тогда будем говорить, что точке бифуркации λ_0 уравнения (56.1) соответствует *непрерывная ветвь ненулевых решений.*

Лемма 56.1. *Пусть нуль является изолированной особой точкой полей* (56.3) *при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, причем* $\operatorname{ind}[0,\Phi(\lambda_1)]\neq\operatorname{ind}[0,\Phi(\lambda_2)]$. *Тогда найдется такое $\rho>0$, что на границе $\dot U$ каждой лежащей в шаре $\|x\|<\rho$ окрестности U нулевой точки уравнение* (56.2) *имеет решение по крайней мере при одном $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$.*

Доказательство. Выберем ρ так, чтобы в шаре $\|x\|<\rho$ поля $\Phi(\lambda_1)$ и $\Phi(\lambda_2)$ не имели ненулевых особых точек. Тогда вращения $\gamma[\Phi(\lambda_1),U]$ и $\gamma[\Phi(\lambda_2),U]$ различны и поэтому поля $\Phi(\lambda_1)$ и $\Phi(\lambda_2)$ не могут быть гомотопны на $\dot U$.

Следовательно, при некотором $\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$ поле $\Phi(\lambda)$ вырождено на $\dot U$. ∎

Из этой леммы вытекает

Теорема 56.6. *Пусть среди чисел* (56.5) *есть два различных (например, выполнены условия теоремы* 56.4 *или теоремы* 56.5). *Тогда точке бифуркации λ_0 уравнения* (56.2) *соответствует непрерывная ветвь ненулевых решений.*

Перейдем к исследованию множества тех близких к точке бифуркации λ_0 значений λ, при которых уравнение (56.2) имеет ненулевые решения малой нормы. В общем случае никакие содержательные утверждения не имеют места. Например, если $A(x;\lambda)=\lambda Bx$, где B линеен, то уравнение (56.2) имеет решения любой нормы при $\lambda=\lambda_0$ и не имеет ненулевых решений при всех близких к λ_0 и отличных от λ_0 значений λ. Легко построить примеры уравнений (56.2), у которых малые ненулевые решения есть лишь при значениях λ_n, образующих сходящуюся к λ_0 последовательность.

Обозначим через $\mathfrak{N}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$ множество лежащих в шаре $\|x\|\leqslant\rho$ ненулевых решений уравнения (56.2) при значениях λ из промежутка (λ_1,λ_2). Скажем, что $\mathfrak{N}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$ образует *непрерывную ветвь, выходящую из нуля,* если непусто пересечение $\mathfrak{N}(\lambda_1,\lambda_2,\rho)$ с границей любой лежащей в шаре $\|x\|<\rho$ окрестности нуля. Пусть нуль является изолированным решением уравнения (56.2) при $\lambda=\lambda_0$ и пусть множество $\mathfrak{N}(\lambda_0,\lambda_1,\rho)$ образует выходящую из нуля непрерывную ветвь. Из полной непрерывности оператора A вытекают тогда два важных утверждения: *во-первых, в $\mathfrak{N}(\lambda_0,\lambda_1,\rho)$ есть решения уравнения* (56.2) *при всех значениях λ из некоторой примыкающей к λ_0 части (λ_0,λ_*) промежутка (λ_0,λ_1); во-вторых, если разность $|\lambda_0-\lambda_1|$ и ρ достаточно малы, то при $\lambda\to\lambda_0$ $(\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1))$ решения $x(\lambda)\in\mathfrak{N}(\lambda_0,\lambda_1,\rho)$ уравнения* (56.2) *стремятся к нулю.* Эти утверждения дополняют теорему 56.6, так как из $\gamma(\lambda_0)\neq\gamma(\lambda_0+0)$ (из $\gamma(\lambda_0)\neq\gamma(\lambda_0-0)$) вытекает существование такого $\lambda_1>\lambda_0$ (такого $\lambda_1<\lambda_0$) и такого

$\rho > 0$, что множество $\mathfrak{N}(\lambda_0, \lambda_1, \rho)$ образует непрерывную ветвь, выходящую из нуля.

56.5. Ведущие нелинейности. Проведем несколько более полный анализ точки бифуркации λ_0 уравнения (56.2) для важного частного случая, когда

$$A(x;\lambda) = B(x;\lambda) + C_k(x;\lambda) + \omega(x), \tag{56.6}$$

где B — линейный оператор, C_k — однородный оператор порядка k, $\omega(x) = o(\|x\|^k)$. Будем считать, что 1 является простым собственным значением оператора $B_0x = B(x;\lambda_0)$; пусть этому собственному значению отвечает нормированный собственный вектор e_0 ($B_0e_0 = e_0$, $\|e_0\| = 1$). Через $g_0 \in E^*$ обозначим отвечающий собственному значению 1 собственный вектор сопряженного оператора B_0^* ($B_0^* g_0 = g_0$), нормированный равенством $(e_0, g_0) = 1$. Положим $Px = x - (x, g_0)e_0$.

Пусть $B(x;\lambda) = B_0x + (\lambda - \lambda_0)B_1x + o(\lambda - \lambda_0)$ и выполнено условие

$$\alpha_0 = -(B_1e_0, g_0) \neq 0. \tag{56.7}$$

Тогда λ_0 будет точкой смены кратности, причем из теории возмущений вытекает, что $\mu(\lambda) = 1 + \alpha_0(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0)$, где $\mu(\lambda)$ — близкое к 1 собственное значение оператора $B(x;\lambda)$. В силу теоремы 56.5 *число λ_0 является точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность x_n ненулевых решений уравнения (56.2); пусть соответствующие значения λ_n параметра λ сходятся к λ_0. В силу равенств

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} = B\left(\frac{x_n}{\|x_n\|};\lambda_n\right) + \frac{1}{\|x_n\|}C_k(x_n;\lambda_n) + \frac{1}{\|x_n\|}\omega(x_n) \tag{56.8}$$

последовательность $\|x_n\|^{-1}x_n$ можно считать сходящейся к некоторому нормированному элементу h_0. Переходя в (56.8) к пределу, получаем равенство $h_0 = B(h_0, \lambda_0)$. Таким образом, либо $h_0 = e_0$, либо $h_0 = -e_0$. Мы показали, что *множество $\mathfrak{N}$ малых ненулевых решений уравнения* (56.2), *отвечающих близким к λ_0 значениям параметра λ, в естественном смысле «касательно» в нулевой точке к одномерному подпространству $E_0 \subset E$, содержащему e_0.* Отсюда вытекает, что множество $\mathfrak{N}$ распадается на две части $\mathfrak{N}_+$ и $\mathfrak{N}_-$, первая из которых лежит в полупространстве $(x, g_0) > 0$, вторая — в полупространстве $(x, g_0) < 0$. Каждая из этих частей образует непрерывную ветвь. В дальнейших построениях основную роль играет число

$$\alpha_1 = (C_k(e_0, \lambda_0), g_0). \tag{56.9}$$

Допустим, что $\alpha_1 \neq 0$. В этом случае (см. § 24) нуль является изолированной особой точкой поля (56.3) при $\lambda = \lambda_0$, индекс которой при четных k равен нулю, а при нечетных k равен $(-1)^{\beta_0+1}\operatorname{sign}\alpha_1$, где β_0 — сумма кратностей больших чем 1 вещественных собственных значений оператора B_0. Таким образом, *при четных k уравнение* (56.2) *имеет малые ненулевые решения как при больших чем λ_0, так и при меньших чем λ_0 значениях λ. При нечетных k заведомо есть малые ненулевые решения при таких близких к λ_0 значениях λ, для которых $(\lambda - \lambda_0)\alpha_0\alpha_1 > 0$, т. е.*

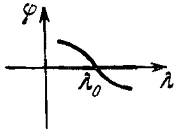
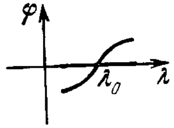
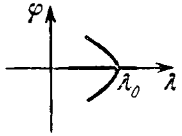
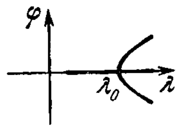
$$(\lambda - \lambda_0)(B_1e_0, g_0)(C_ke_0, g_0) < 0. \tag{56.10}$$

Читатель легко покажет, что при близких к λ_0 значениях λ, для которых (56.10) не выполнено, уравнение (56.2) не имеет малых ненулевых решений (в [23], [26] этот факт установлен в близкой ситуации).

Более полное представление о точке бифуркации дает таблица 2. В ней утолщенными линиями показан примерный вид функций $\varphi(\lambda) = (x(\lambda), g_0)$, с точностью до членов высших порядков малости характеризующих зависимость малых ненулевых решений $x(\lambda)$ от разности $\lambda - \lambda_0$.

Анализ графиков таблицы 2 приводит к важным выводам общего характера. Во-первых, если в изучаемой задаче бифуркация по физическому смыслу должна происходить так, чтобы ненулевые решения у уравнения (56.2) появлялись лишь при разностях $\lambda - \lambda_0$ определенного знака, то в разложениях оператора A по формуле Тейлора вслед за линейными членами первыми ненулевыми должны быть, вообще говоря, члены нечетного порядка! К таким задачам относятся, например, многие проблемы теории статического равновесия — потеря устойчивости происходит, как правило, лишь при увеличении нагрузок. Во-вторых, характер бифуркации

Таблица 2

	$(B_1e_0,\ g_0)\,(C_ke_0,\ g_0)>0$	$(B_1e_0,\ g_0)\,(C_ke_0,\ g_0)<0$
k четно		
k нечетно		

однозначно определяет «знак» основных (ведущих) нелинейных членов.

56.6. Критические нагрузки. Рассмотрим в качестве примера задачу о формах потери устойчивости шарнирно-закрепленного стержня переменной жесткости и

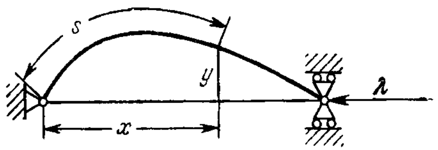


Рис. 4.

единичной длины при продольной нагрузке λ (рис. 4). Как известно, прогиб $y(s)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\left[1-\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2\right]^{1/2}}=-\lambda\rho(s)\,y,\quad y(0)=y(1)=0,\qquad (56.11)$$

где $\rho(s)$ характеризует переменную жесткость стержня. Если положить

$$z(s)=-\frac{d^2y}{ds^2},\qquad y(0)=y(1)=0,$$

то от граничной задачи (56.11) можно перейти к эквивалентному интегральному уравнению

$$z(s)=\lambda\rho(s)\int_0^1 G(s,\ \sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma\sqrt{1-\left[\int_0^1 G'_s(s,\ \sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma\right]^2},\qquad (56.12)$$

где $G(s,\sigma)$ — функция Грина оператора $-y''$ при граничных условиях $y(0)=y(1)=0$. Жесткость $\rho(s)$ будем считать непрерывной и положительной. Тогда оператор

$$Az(s)=\rho(s)\int_0^1 G(s,\ \sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma\sqrt{1-\left[\int_0^1 G'_s(s,\ \sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma\right]^2}$$

действует в пространстве C и вполне непрерывен (он определен в некоторой окрестности нуля пространства C)

Критические нагрузки — это точки бифуркации для уравнения (56.12). В соответствии с изложенной выше методикой для их отыскания нужно вначале по уравнению (56.12) построить линеаризованное уравнение

$$z(s)=\lambda\rho(s)\int_0^1 G(s,\ \sigma)\,z(\sigma)\,d\sigma.\qquad (56.13)$$

В соответствии с теоремой 56.1 критическими нагрузками могут быть только такие $\lambda=\lambda_0$, при которых уравнение (56.13) имеет ненулевые решения. Интегральное уравнение (56.13) эквивалентно линеаризованной задаче (56.11), т. е. задаче

$$\frac{d^2y}{ds^2}=-\lambda\rho(s)\,y,\qquad y(0)=y(1)=0.\qquad (56.14)$$

Собственные значения задачи (56.14) положительны, так как из (56.14) вытекает равенство

$$\lambda\int_0^1 \rho(s)\,y^2(s)\,ds=\int_0^1 [y'(s)]^2\,ds;$$

все они простые. Из теоремы 56.4 вытекает, что λ_0 *является критической нагрузкой в том и только том случае, если* λ_0 — *собственное значение линейной задачи* (56.14).

Уравнение (56.12) можно переписать в виде

$$z(s)=\lambda\rho(s)\int_0^1 G(s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma-\lambda C_3 z(s)+o(\|z\|^4),$$

где

$$C_3 z(s)=\frac{1}{2}\rho(s)\int_0^1 G(s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma\left[\int_0^1 G_s'(s,\sigma)z(\sigma)\,d\sigma\right]^2,$$

и применить для анализа точки бифуркации λ_0 вторую строку таблицы 2. В соответствии с ней нужно найти числа (56.7) и (56.9). Легко видеть, что в рассматриваемом случае $\alpha_0\alpha_1<0$ и поэтому зависимость малых прогибов от разности $\lambda-\lambda_0$ описывается графиком в правом нижнем углу таблицы 2.

Точки бифуркации задачи (56.11) называют критическими нагрузками, наименьшую из них — критической нагрузкой Эйлера. Метод отыскания критических нагрузок, основанный на переходе к линеаризованной задаче (56.14), — это метод Эйлера. Попытки обосновать метод линеаризации проводились неоднократно. Долгое время считалось, что обоснование дано Ф. С. Ясинским; однако, примерно в 1948—49 годах А. Ю. Ишлинский и М. Г. Крейн обнаружили в его построениях принципиальную ошибку. Проблема обоснования метода Эйлера снова стала открытой. Она послужила одним из основных отправных пунктов для создания топологических методов исследования точек бифуркации. Топологические соображения, как показано в п. 56.6 (см. М. А. Красносельский, УМН 12, № 1 (1957)), позволяют провести анализ метода Эйлера совсем просто.

56.7. Решения большой нормы. В предыдущих пунктах параграфа изложены основанные на теории вращения методы анализа процесса «рождения» ненулевых решений малой нормы. Эти методы, по существу, без изменений применимы для анализа процессов «рождения» (при изменении параметров) решений большой нормы.

Продолжим изучение уравнения (56.2) с вполне непрерывным оператором A. Будем считать, что при рассматриваемых значениях λ оператор $A(x;\lambda)$ определен вне некоторого шара $\|x\|\leqslant r$. Число λ_0 назовем *асимптотической точкой бифуркации* для уравнения (56.2), если каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое число $\lambda\in(\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon)$, при котором уравнение (56.2) имеет решение с нормой, большей чем ε^{-1}.

Допустим, что оператор $A(x;\lambda)$ имеет асимптотическую производную $A'(\infty;\lambda)$. Аналогично теореме 56.1 устанавливается, что число λ_0 может быть точкой бифуркации лишь в том случае, если 1 является собственным значением линейного оператора $A'(\infty;\lambda_0)$ (этот оператор в силу теоремы 17.2 вполне непрерывен). Поэтому вначале нужно найти все такие λ_0, при которых уравнение $x=A'(\infty;\lambda_0)x$ имеет ненулевые решения, а затем каждое из них отдельно исследовать.

Читатель легко сформулирует для асимптотических точек бифуркации аналоги всех утверждений, приведенных в пп. 56.3—56.5. Мы ограничимся формулировкой двух простых теорем.

Теорема 56.7. *Пусть λ_0 — точка смены кратности для линейного оператора $A'(\infty;\lambda)$. Тогда λ_0 является асимптотической точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

В частности, λ_0 будет асимптотической точкой бифуркации, если $A'(\infty;\lambda)=\lambda B_\infty$ и λ_0^{-1} — нечетнократное собственное значение оператора B_∞.

Теорема 56.8. *Пусть* 1 *не является собственным значением операторов $A'(\infty;\lambda)$ при близких к λ_0 и отличных от λ_0 значениях λ. Пусть множество решений уравнения* (56.2) *при $\lambda=\lambda_0$ ограничено и вращение поля* (56.3) *при $\lambda=\lambda_0$ на сферах $\|x\|=R$ больших радиусов R отлично от* 1 *и от* -1. *Тогда λ_0 является асимптотической точкой бифуркации для уравнения* (56.2).

Отметим, что неизвестен аппарат для построения аналитических представлений решений большой нормы в условиях теорем 56.7 и 56.8 (кроме совсем тривиальных случаев).

Основные построения и утверждения этого параграфа предложены М. А. Красносельским (более простые факты и библиографию первых работ см. в [22]). Топологические методы исследования точек бифуркации получили существенное развитие в работах И. А. Бахтина, М. Бергера (M. S. Berger), Е. Данцера (E. N. Dancer), П. П. Забрейко, Е. Цайдлера (E. Zeidler), Я. Д. Мамедова, А. И. Поволоцкого, Ю. В. Покорного, А. В. Покровского, Д. Сатера (D. Sather), В. А. Треногина, В. И. Юдовича, И. Ноймана (J. Naumann) и др. Доказанные в параграфе теоремы и их модификации применялись рядом авторов в задачах теории колебаний, тепловой конвекции, гидродинамики, теории критических режимов работы атомных и химических реакторов, критических нагрузок и т. п. Библиографию см. в [58], [63], [64].

§ 57. Устойчивость критических значений

57.1. Собственные векторы потенциальных операторов. Для широких классов задач с параметрами существование решений, отвечающих априори неизвестным значениям параметра, легко устанавливается при помощи простых вариационных соображений.

Пусть $V(x)$ и $V_1(x)$ — дифференцируемые функционалы, определенные на банаховом пространстве E (или на некоторой области в пространстве E), а A и A_1 — операторы их градиента. Допустим, что x_0 — это точка экстремума функционала $V(x)$ на поверхности $V_1(x) = V_1(x_0)$ уровня функционала $V_1(x)$. Тогда, как легко показать, векторы Ax_0 и A_1x_0 коллинеарны. Если оператор A_1 принимает только ненулевые значения, то x_0 будет решением уравнения

$$Ax = \lambda A_1 x. \tag{57.1}$$

Решениями уравнения (57.1) будут и различные точки минимакса функционала $V(x)$ на поверхности $V_1(x) = \mathrm{const}$.

Мы ограничимся функционалами в гильбертовом пространстве. В основных построениях будем считать, что $V_1(x) = \frac{1}{2}(x, x)$. Тогда уравнение (57.1) примет вид

$$Ax = \lambda x \tag{57.2}$$

и его решениями будут *собственные векторы* оператора A.

Теорема 57.1. *Пусть функционал $V(x)$ слабо непрерывен и дифференцируем на шаре $\|x\| \leqslant r_0$ гильбертова пространства E. Тогда оператор $A = \operatorname{grad} V$ имеет континуум собственных векторов.*

Доказательство. В рассмотрении нуждается лишь тот случай, когда у оператора A нет собственных векторов на некоторой сфере $\|x\| = r$, где $0 < r \leqslant r_0$. Обозначим в этом случае через m и M наименьшее и наибольшее значения $V(x)$ на шаре $\|x\| \leqslant r$. Очевидно, $m \neq M$ (в противном случае все точки шара являются собственными векторами оператора A, отвечающими нулевому собственному значению). Поэтому одно из чисел m, M отлично от $V(0)$. Пусть для определенности $V(0) < M$.

Рассмотрим на шаре $\|x\| \leqslant r$ новый функционал $W(x) = V(x) - \varepsilon(x, x)$, где $0 < \varepsilon r^2 < M - V(0)$. Пусть $M_1 = \sup W(x)$; очевидно, $M_1 > W(0) = V(0)$. Обозначим через x_n такую последовательность, что $W(x_n) \to M_1$. Эту последовательность можно считать слабо сходящейся к некоторому элементу x^*. Из слабой непрерывности функционала V вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x_n) = \frac{1}{\varepsilon}[V(x^*) - M_1].$$

Поэтому

$$(x^*, x^*) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}[V(x^*) - M_1],$$

откуда вытекает оценка $W(x^*) \geqslant M_1$. Следовательно, $W(x^*) = M_1$ и $(x^*, x^*) > 0$.

Если $\|x^*\| = r$, то в точке x^* градиент функционала W, который равен $(A - 2\varepsilon I)x^*$, коллинеарен вектору x^* и поэтому x^* является собственным вектором оператора A. Но по предположению на сфере $\|x\| = r$ оператор A собственных векторов не имеет. Следовательно, $0 < \|x^*\| < r$. Но тогда $\operatorname{grad} W(x^*) = 0$, т. е. $Ax^* = \varepsilon x^*$.

Для завершения доказательства остается заметить, что число ε могло принимать континуум различных значений. ∎

В условиях теоремы 57.1 функционал $V(x)$ может не быть дифференцируем в нуле. Теорему 57.1 можно дополнить следующим очевидным, но полезным замечанием: *если градиент A слабо непрерывного функционала не имеет собственных векторов на сферах $\|x\| = r_n \to 0$, то он принимает нулевые значения на некоторых ненулевых элементах x_n, причем $\|x_n\| \to 0$.* Поэтому A имеет собственные векторы на каждой сфере $\|x\| = r$ малого радиуса r, если $Ax \neq 0$ при $x \neq 0$.

Вариационные соображения широко применяются в задаче о собственных векторах нелинейных операторов, начиная с работ А. Гаммерштейна и М. Голомба (библиографию см. в [7], [8], [22]).

57.2. Четные функционалы. Построения, использованные при доказательстве теоремы 57.1, позволяют «выловить» лишь небольшое число решений уравнения (57.2). Они, в частности, «не замечают» точек минимакса. Для обнаружения различных критических точек функционалов, отличных от точек минимума и максимума, специальные методы были изобретены Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом; этим методам посвящена в настоящее время обширная литература.

Одна из теорем Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана утверждает, что гладкая функция на $(n-1)$-мерном проективном пространстве Π^{n-1} имеет по крайней мере n критических точек. Но пространство Π^{n-1} можно рассматривать как $(n-1)$-мерную сферу $\|x\|=r$ (в пространстве R^n) с отождествленными диаметрально противоположными точками, а функцию на Π^{n-1} как четную функцию на сфере. Поэтому *четная функция на сфере имеет по крайней мере $2n$ критических точек.* Отсюда вытекает, что градиент четной функции имеет на сфере по крайней мере $2n$ различных собственных векторов.

Последнее утверждение является далеко идущим обобщением теоремы о существовании n линейно независимых собственных векторов у симметрической матрицы.

При переходе к бесконечномерным пространствам естественно ожидать, что у градиентов четных функционалов на сферах есть счетное число различных собственных векторов. Грубо говоря, так и оказывается. Приведем формулировку теоремы Л. А. Люстерника (Изв. АН СССР, сер. матем. **3** (1939)) с усилениями, полученными В. И. Соболевым, Э. С. Цитланадзе, М. М. Вайнбергом, М. А. Красносельским и др. — библиографию см. в [22].

Говорят, что функционал V *равномерно дифференцируем* на шаре $T=\{x\colon \|x\|\leqslant 1\}$, если величина $\|h\|^{-1}|V(x+h)-V(x)-(Ax,h)|$, где $A=\operatorname{grad} V$, стремится к нулю при $h\to 0$ равномерно относительно $x\in T$. Если V равномерно дифференцируем, то $\operatorname{grad} V(x)$ равномерно непрерывен по x.

Теорема 57.2. *Пусть $V(x)$ — четный равномерно дифференцируемый на шаре T слабо непрерывный функционал. Пусть $V(0)=0$ и $V(x)\neq 0$ при $x\neq 0$. Наконец, пусть значения оператора $A=\operatorname{grad} V$ на ненулевых элементах отличны от нуля. Тогда A имеет на сфере $S=\{x\colon \|x\|=1\}$ не менее чем счетное число собственных векторов.*

57.3. Малые возмущения. Перейдем от четного функционала $V(x)$ к возмущенному функционалу

$$W(x)=V(x)+V_1(x), \tag{57.3}$$

где $V_1(x)$ принимает малые значения, но не обладает свойством четности. При исследовании собственных векторов оператора $\operatorname{grad} W$ уже невозможно перейти к проективному пространству и для доказательства существования «большого» числа собственных векторов нужны новые геометрические соображения.

Назовем *нормой* равномерно дифференцируемого на шаре T функционала U число

$$|||U|||=\sup_{x\in T}|U(x)|+\sup_{x\in T}\|\operatorname{grad} U(x)\|. \tag{57.4}$$

Теорема 57.3. *Пусть функционал V удовлетворяет условиям теоремы 57.2. Тогда каждому натуральному N соответствует такое $\varepsilon=\varepsilon(N)>0$, что градиент функционала (57.3) имеет на сфере S не менее чем N собственных векторов, если V_1 слабо непрерывен и $|||V_1|||<\varepsilon$.*

Эта теорема будет доказана в следующих пунктах.

57.4. Леммы о слабо непрерывных функционалах. Ниже через T и S обозначаются соответственно единичный шар и единичная сфера в сепарабельном гильбертовом пространстве E; через P_n обозначаются операторы ортогонального проектирования на линейную оболочку первых n элементов полной ортонормированной системы $\{l_i\}$.

Лемма 57.1 ([22], [59]). *Пусть функционал $V(x)$ слабо непрерывен на T. Тогда каждому $\varepsilon>0$ отвечает такое n_0, что*

$$|V(x+P_ny)-V(x+y)|<\varepsilon \tag{57.5}$$
$$(x,\ y,\ x+y\in T;\ n\geqslant n_0).$$

Доказательство. В предположении противного, для некоторого $\alpha>0$ можно указать такие последовательности $x_n, y_n\in T$, что $x_n+y_n\in T$ и $|V(x_n+P_ny_n)-V(x_n+y_n)|>\alpha$. В силу слабой компактности шара T последовательности x_n, y_n, P_ny_n можно считать слабо сходящимися к некоторым элементам ξ, η, ζ. В силу слабой непрерывности функционала V, будет выполнено предельное неравенство $|V(\xi+\zeta)-V(\xi+\eta)|\geqslant\alpha$, откуда следует, что $\zeta\neq\eta$. Но, с другой стороны,

$$\|\eta-\zeta\|^2=\lim_{n\to\infty}((I-P_n)y_n,\ \eta-\zeta)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(y_n,(I-P_n)(\eta-\zeta))\leqslant\lim_{n\to\infty}\|(I-P_n)(\eta-\zeta)\|=0. \ \blacksquare$$

Лемма 57.2. *Пусть оператор A является градиентом слабо непрерывного и равномерно дифференцируемого функционала V. Тогда A преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность в последовательность, сходящуюся по норме.*

Эту важную лемму, принадлежащую Э. С. Цитладзе [59], мы приведем без доказательства (см. [22]).

Если функционал $V(x)$ равномерно дифференцируем на T, то можно указать такую непрерывную неубывающую функцию $\delta(\varepsilon)$, равную нулю лишь при $\varepsilon=0$, что из $\|h\|\leqslant\delta(\varepsilon)$ следует оценка

$$|V(x+h)-V(x)-(\operatorname{grad}V(x),h)|\leqslant\varepsilon\|h\|.$$

Положим $Dx=Ax-(Ax,x)x$ $(x\in S)$, где $A=\operatorname{grad}V$;

$$M_1=\sup_{x\in S}\|Dx\|,\qquad M_2=\sup_{x\in S,\ y\in T}|(Ax,x)+(Ax,y)|,$$

и введем в рассмотрение преобразующий S в себя оператор

$$B_0x=\frac{x+a(x)Dx}{\|x+a(x)Dx\|}\qquad(x\in S),\tag{57.6}$$

где

$$a(x)=\min\left\{\frac{1}{2M_1}\delta\left(\frac14\|Dx\|\right),\ \frac{1}{2M_1},\ \frac{1}{4M_2}\right\}.\tag{57.7}$$

Из непрерывности оператора $\operatorname{grad}V$ вытекает непрерывность оператора (57.6).

Лемма 57.3. *Если $V(x)$ непрерывно дифференцируем, то*

$$V(B_0x)\geqslant V(x)+\frac{a(x)}{4}\|Dx\|^2\qquad(x\in S).$$

Доказательство. Для сокращения записи удобны вспомогательные обозначения

$$A=\operatorname{grad}V,\quad g=a(x)Dx,\quad h=B_0x-x=\frac{x+g}{\|x+g\|}-x.$$

Если $x\in S$, то $\|x+g\|\geqslant 1$ (так как $(x,g)=0$) и

$$\|x+g\|-1=\frac{\|g\|^2}{\|x+g\|+1}<\|g\|^2.\tag{57.8}$$

Отсюда и из (57.7) следует оценка

$$\|h\|=\frac{\|g+(1-\|x+g\|)x\|}{\|x+g\|}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\|g\|+\|x+g\|-1}{\|x+g\|}\leqslant 2\|g\|\leqslant\delta\left(\frac14\|Dx\|\right).\tag{57.9}$$

Из равенств $Ax=Dx+(Ax,x)x$ и $(x,g)=(x,Dx)=0$ следует, что

$$(Ax,h)=\left(Dx+(Ax,x)x,\ \frac{x+g}{\|x+g\|}-x\right)=$$
$$=\frac{1}{\|x+g\|}(Dx,g)+\frac{1}{\|x+g\|}(Ax,x)-(Ax,x)=$$
$$=\frac{1-\|x+g\|}{\|x+g\|}[(Ax,x)+(Dx,g)]+(Dx,g),$$

откуда, в силу (57.7) и (57.8),

$$|(Ax,h)-(Dx,g)|\leqslant M_2\|g\|^2=$$
$$=M_2a^2(x)\|Dx\|^2\leqslant\frac{a(x)}{4}\|Dx\|^2.\tag{57.10}$$

Из (57.9) вытекает, что

$$|V(x+h)-V(x)-(Ax,h)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\|Dx\|}{4}\|h\|\leqslant\frac{\|Dx\|}{2}\|g\|=\frac{a(x)}{2}\|Dx\|^2.$$

Следовательно,

$$V(B_0x)-V(x)\geqslant(Ax,h)-\frac{a(x)}{2}\|Dx\|^2$$

и, в силу (57.10),

$$V(B_0x)-V(x)\geqslant(Dx,g)-\frac34a(x)\|Dx\|^2=\frac14a(x)\|Dx\|^2. \ \blacksquare$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс компактных множеств $F\subset S$, каждое из которых оператор (57.6) преобразует в множество $B_0F\in\mathfrak{M}$. Определим на $\mathfrak{M}$ функционал $\tilde V$ равенством

$$\tilde V(F)=\inf_{x\in F}V(x)\qquad(F\in\mathfrak{M})\tag{57.11}$$

и пусть

$$c = c(\mathfrak{M}) = \sup_{F \in \mathfrak{M}} \tilde{V}(F). \tag{57.12}$$

Лемма 57.4. *Существует такая последовательность $x_n \in S$, что*

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n) = c(\mathfrak{M}), \qquad \lim_{n\to\infty} \| Dx_n \| = 0. \tag{57.13}$$

Доказательство. В предположении противного, найдутся такие α, $\beta > 0$, что из $|V(x) - c(\mathfrak{M})| < \beta$ $(x \in S)$ вытекает неравенство $\| Dx \| > \alpha$. Пусть $F_0 \in \mathfrak{M}$ и $\tilde{V}(F_0) > c - \frac{\nu\alpha^2}{4}$, где $0 < \nu < \min\left\{\frac{1}{2M_1}\delta\left(\frac{\alpha}{4}\right), \frac{1}{2M_1}, \frac{1}{4M_2}\right\}$. Обозначим через F_{00} такую часть множества F_0, на которой $V(x)$ принимает значения, меньшие чем $c(\mathfrak{M}) + \beta$.

Так как $B_0F_0 \in \mathfrak{M}$, то $\tilde{V}(B_0F_0) \leqslant c(\mathfrak{M})$. С другой стороны, в силу леммы 57.3, и для точек $x \in F_0 \setminus F_{00}$

$$V(B_0x) \geqslant c + \beta > c,$$

и для точек $x \in F_{00}$

$$V(B_0x) \geqslant V(x) + \frac{1}{4}a(x)\| Dx \|^2 > c - \frac{\nu\alpha^2}{4} + \frac{a(x)}{4}\alpha^2 \geqslant c$$

(так как $a(x) \geqslant \nu$, если $\| Dx \| \geqslant \alpha$), т. е. $\tilde{V}(B_0F_0) > c$. Мы пришли к противоречию. ∎

Лемма 57.5. *Пусть последовательность $x_n \in S$ слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in T$ и $\| Dx_n \| \to 0$. Пусть последовательность Ax_n сильно сходится к некоторому элементу $z \neq 0$. Тогда $\| x_n - x_0 \| \to 0$ и x_0 является собственным вектором оператора A.*

Доказательство. Так как числовая последовательность (Ax_n, x_n) сходится к числу $\lambda = (z, x_0)$, то из равенств

$$(Ax_n, x_n)\, x_n = Ax_n - Dx_n \tag{57.14}$$

вытекает, что последовательность $(Ax_n, x_n)x_n$ сходится по норме к ненулевому элементу z. Следовательно, $\lambda \neq 0$ и последовательность x_n сходится по норме. Переходя в (57.14) к пределу, получаем соотношение $Ax_0 = \lambda x_0$. ∎

Число c назовем *критическим значением* функционала V, если в пересечении сферы S и множества уровня $V(x) = c$ функционала V есть по крайней мере один собственный вектор оператора $A = \operatorname{grad} V$. Основной результат этого пункта составляет вспомогательная

Теорема 57.4. *Пусть функционал V слабо непрерывен и равномерно дифференцируем. Пусть $\mathfrak{M}$ — класс компактных множеств $F \subset S$, для каждого из которых $B_0F \in \mathfrak{M}$. Пусть на поверхности уровня $V(x) = c(\mathfrak{M})$ $(x \in T)$, где $c(\mathfrak{M})$ определено равенством* (57.12), *оператор $A = \operatorname{grad} V$ принимает лишь ненулевые значения. Тогда $c(\mathfrak{M})$ является критическим значением функционала V.*

Доказательство. В силу леммы 57.4 можно построить последовательность $x_n \in S$, для которой справедливы равенства (57.13). Последовательность x_n можно при этом считать слабо сходящейся к некоторому элементу x_0. В силу леммы 57.2 последовательность Ax_n будет сильно сходиться к элементу $z = Ax_0$, причем $z \neq 0$, так как $V(x_0) = c(\mathfrak{M})$. Из леммы 57.5 вытекает, что $x_0 \in S$ и x_0 — собственный вектор оператора A. ∎

57.5. Множества конечного рода. Ниже используются обозначения: $T = \{x\colon \| x \| \leqslant 1\}$, $S = \{x\colon \| x \| = 1\}$, $x^* = -x$, $F^* = \{x\colon -x \in F\}$.

Компактное и замкнутое множество $F \subset S$ назовем *множеством первого рода* и будем писать $r(F) = 1$, если каждая связная компонента объединения $F \cup F^*$ не содержит ни одной пары x, x^*. Замкнутое множество $F \subset S$ назовем *множеством рода n* и будем писать $r(F) = n$, если каждую его компактную часть можно покрыть n множествами первого рода и некоторую компактную часть нельзя покрыть $n - 1$ множествами первого рода.

Лемма 57.6. *Пусть B — нечетное преобразование компактного множества $F \subset S$ $(Bx^* = -Bx$ при $x \in F)$, причем $BF \subset S$. Тогда $r(BF) \geqslant r(F)$.*

Доказательство. Допустим, что $r(F) > 1$. Тогда в $F \cup F^*$ найдется связная компонента F_1, которая содержит пару точек x, x^*. Множество BF_1 будет связной частью объединения $BF \cup BF^*$, содержащей пару точек Bx, $(Bx)^*$. Поэтому $r(BF) > 1$.

Следовательно, из $r(BF)=1$ вытекает, что $r(F)=1$.

Пусть $r(BF)=n$. Тогда множество BF можно покрыть n множествами $H_1, \ldots, H_n$ первого рода. Род прообразов $F_1, \ldots, F_n$ $(BF_i = H_i; i=1,2,\ldots,n)$ по доказанному равен 1. Но эти прообразы покрывают F и, значит, $r(F) \leqslant n$. ∎

Лемма 57.7. *Пусть B — нечетное непрерывное отображение $(k-1)$-мерной сферы S^{k-1} в S. Тогда $r(BS^{k-1}) \geqslant k$.*

Доказательство. Род сферы S^{k-1} равен k в силу теоремы 9.1. Остается сослаться на лемму 57.6. ∎

Обозначим через $\mathfrak{M}_k$ класс множеств $BS^{k-1} \subset S$, где B — нечетное непрерывное отображение. В силу леммы 57.7 род каждого множества класса $\mathfrak{M}_k$ не меньше k; но могут быть множества рода k, которые не входят в $\mathfrak{M}_k$.

Лемма 57.8. *Каждое множество класса $\mathfrak{M}_k$ является подмножеством некоторого множества из $\mathfrak{M}_{k+1}$.*

Доказательство. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}\}$ — ортогональная система координат в R^{k+1}, S^k — единичная сфера в R^{k+1}, S^{k-1} — ее экватор, определенный уравнением $\xi_{k+1}=0$. Каждый элемент $x \in R^{k+1}$ представим в виде $x = x_1 + \xi_{k+1}e_{k+1}$, где x_1 — элемент подпространства $\xi_{k+1}=0$, а e_{k+1} — орт $(k+1)$-й координатной оси.

Так как BS^{k-1} является компактным подмножеством сферы $S \subset E$, то можно указать такое конечномерное подпространство $E_0 \subset E$, что $\rho(Bx, E_0) < 1/4$ при $x \in S^{k-1}$. Обозначим через h_0 какой-либо единичный элемент пространства E, ортогональный E_0, и положим

$$B_1 x = \frac{\|x_1\| B\left(\dfrac{x}{\|x_1\|}\right) + \xi_{k+1} h_0}{\left\| \|x_1\| B\left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|}\right) + \xi_{k+1} h_0 \right\|} \qquad (x = x_1 + \xi_{k+1} e_{k+1} \in S^k).$$

Этот оператор очевидным образом нечетен и непрерывен (для проверки непрерывности нужно лишь заметить, что знаменатель не обращается в нуль), поэтому $B_1 S^k \in \mathfrak{M}_{k+1}$.

Остается заметить, что $BS^{k-1} = B_1 S^{k-1} \subset B_1 S^k$. ∎

Лемма 57.9. *Пусть B — непрерывное нечетное преобразование сферы S в себя. Тогда из $F \in \mathfrak{M}_k$ следует, что $BF \in \mathfrak{M}_k$.*

Лемма очевидна. ∎

Пусть множество $F \subset S$ стянуто в S непрерывной деформацией u в точку $x_0 \in S$. Это значит, что известна непрерывная оператор-функция $u(x;t)$ $(x \in F, 0 \leqslant t \leqslant 1)$ со значениями в S, для которой $u(x;0) \equiv x$, $u(x;1) \equiv x_0$ при $x \in F$. Множество $u(F)$ значений $u(x;t)$ называют *следом деформации u* множества F в точку.

Лемма 57.10. *Пусть $u(F)$ — след непрерывной деформации $u(x;t)$ в точку x_0 множества $F \in \mathfrak{M}_k$. Тогда $u(F) \cup [u(F)]^* \in \mathfrak{M}_{k+1}$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства леммы 57.8. Пусть $F = BS^{k-1}$. Определим на S^k оператор

$$B_1 x = \begin{cases} u\left[B\left(\dfrac{x_1}{\|x_1\|}\operatorname{sign}\xi_{k+1}\right);\ |\xi_{k+1}|\right]\operatorname{sign}\xi_{k+1}, & \\ & \text{если } |\xi_{k+1}| < 1, \\ x_0 \operatorname{sign}\xi_{k+1}, & \text{если } |\xi_{k+1}| = 1, \end{cases}$$

где $\operatorname{sign}\xi = 1$ при $\xi \geqslant 0$ и $\operatorname{sign}\xi = -1$ при $\xi < 0$. Оператор B_1 непрерывен и нечетен. Остается заметить, что $u(F) \cup [u(F)]^* = B_1 S^k$. ∎

Пусть $\tilde V$ — функционал (57.11). Положим

$$c_k = \sup_{F \in \mathfrak{M}_k} \tilde V(F) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{57.15}$$

Из теоремы 9.1 вытекает, что на сфере S бесконечномерного пространства есть множества любого рода. Поэтому числа c_k определены при всех k. Очевидна их положительность. Из леммы 57.8 вытекают оценки

$$c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k \geqslant c_{k+1} \geqslant \ldots \tag{57.16}$$

При этом выполняется равенство

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0. \tag{57.17}$$

Действительно, в силу леммы 57.1, при любом $\varepsilon > 0$ можно указать такой конечный набор ортонормированных векторов $e_1, \ldots, e_n$, что V принимает значения, меньшие чем ε, в окрестности G, выделенной в шаре T неравенствами $|(x, e_j)| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, n)$. Как легко видеть, род множества $T \setminus G$ равен n. Поэтому каждое множество $F \in \mathfrak{M}_{n+1}$ имеет непустое пересечение с G и, следовательно, $c_{n+1} \leqslant \varepsilon$. ∎

Если функционал V четный, то оператор (57.6) нечетный. Поэтому из теоремы 57.4 и леммы 57.9 вытекает, что в условиях теоремы 57.2 каждое число (57.15) является критическим значением функционала V. Из положительности чисел (57.15) и равенства (57.17) вытекает, далее, что в условиях теоремы 57.2 функционал V имеет счетное число различных критических значений. Отсюда вытекает утверждение теоремы 57.2. ∎

57.6. Устойчивые критические значения. Критическое значение c функционала V назовем *устойчивым*, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при $|||V_1||| < \delta$ функционал $W = V + V_1$ имеет по крайней мере одно критическое значение $c_1 \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$. Напомним, что норма функционала определена равенством (57.4).

Теорема 57.3 будет доказана, если в условиях теоремы 57.2 будет показано, что функционал V имеет счетное число различных устойчивых критических значений. Неизвестно, устойчивы ли критические значения (57.15).

Пусть $M = \sup V(x)$. В силу (57.16) при каждом $a \in (0, M)$ можно определить натуральное число $k(a)$ так, что $c_{k(a)} > a \geqslant c_{k(a)+1}$. Через $\mathfrak{N}(a)$ $(0 < a < M)$ обозначим класс всех компактных множеств, полученных непрерывными деформациями (не обязательно нечетными) множеств $F \in \mathfrak{M}_{k(a)}$ в множестве $S(a) = \{x: x \in S, V(x) > a\}$.

Лемма 57.11. *Множества класса $\mathfrak{N}(a)$ нестягиваемы в точку в $S(a)$.*

Доказательство. Пусть множество $F_1 \in \mathfrak{N}(a)$ получено непрерывной деформацией в $S(a)$ из множества $F \in \mathfrak{M}_{k(a)}$. Если множество F_1 стягиваемо в $S(a)$ в точку, то и F также стягиваемо в $S(a)$ в точку. Поэтому достаточно показать, что в $S(a)$ нестягиваемы в точку все множества $F \in \mathfrak{M}_{k(a)}$, $F \subset S(a)$.

Допустим, что $F \in \mathfrak{M}_{k(a)}$ и F стягиваемо в $S(a)$ в точку непрерывной деформацией u. Тогда множество $F_0 = u(F) \cup [u(F)]^*$, в силу леммы 57.10, будет принадлежать $\mathfrak{M}_{k(a)+1}$. Следовательно, $\tilde{V}(F_0) \leqslant c_{k(a)+1}$ и поэтому на F_0 (а значит, и на $u(F)$) есть точки, в которых функционал V принимает значения, меньшие чем $c_{k(a)+1}$. Но $c_{k(a)+1} \leqslant a$ и, значит, множество F_0 не лежит полностью в $S(a)$. Мы пришли к противоречию. ∎

Положим

$$d(a) = \sup_{F \in \mathfrak{N}(a)} \tilde{V}(F) \qquad (0 < a < M). \tag{57.18}$$

Числа (57.18) определены, так как каждый класс $\mathfrak{N}(a)$ непуст — он содержит по крайней мере одно из множеств $F \in \mathfrak{M}_{k(a)}$. Очевидно, $d(a) > 0$.

Теорема 57.5. *Пусть функционал V удовлетворяет условиям теоремы 57.2. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{a \to 0} d(a) = 0. \tag{57.19}$$

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу леммы 57.1 можно указать такой нормированный элемент $h_0 \in E$, что

$$V(th_0) < \varepsilon/4 \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \tag{57.20}$$

В силу той же леммы 57.1 можно построить оператор P ортогонального проектирования на некоторое конечномерное подпространство $E_0 \subset E$, содержащее h_0, так, что

$$|V(x) - V(Px)| < \varepsilon/4 \qquad (x \in T). \tag{57.21}$$

Пусть $S(\varepsilon) = \{x: V(x) > \varepsilon, x \in S\}$. Тогда

$$V(Px) \geqslant V(x) - |V(x) - V(Px)| > \frac{3}{4}\varepsilon \quad (x \in S(\varepsilon)). \tag{57.22}$$

Рассмотрим множество L элементов

$$y = \frac{(1-t)x + tPx}{\|(1-t)x + tPx\|} \qquad (x \in S(\varepsilon),\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Положим

$$\varkappa = \frac{1}{2} \min \{ \min_{x \in S \cap E_0} V(x),\ \inf_{x \in L} V(x) \} \tag{57.23}$$

и покажем, что $\varkappa > 0$. Положительность первого выражения в фигурных скобках очевидна (минимум положительной непрерывной функции на конечномерной сфере положителен), и нужно установить лишь положительность второго.

В предположении противного, существует слабо сходящаяся к некоторому элементу $y_0 \in T$ последовательность

$$y_n = \frac{(1-t_n)x_n + t_n P x_n}{\|(1-t_n)x_n + t_n P x_n\|} \quad (x_n \in S(\varepsilon),\ 0 \leqslant t_n \leqslant 1),$$

для которой $V(y_n) < 1/n$. Из слабой непрерывности функционала V вытекает, что $V(y_0) = 0$, и поэтому $y_0 = 0$. Тогда последовательность Py_n сходится по норме к нулю. Но $\| Px_n \| = \|(1-t_n)x_n + t_n P x_n\| \cdot \| Py_n \| \leqslant \leqslant \| Py_n \|$. Значит, $\| Px_n \| \to 0$ и, далее, $V(Px_n) \to 0$. Последнее соотношение противоречит (57.22).

Итак, $\varkappa > 0$. Покажем, что $d(a) \leqslant \varepsilon$ при $a < \varkappa$. Этим теорема 57.5 будет полностью доказана.

Если $d(a) > \varepsilon$, то в $\mathfrak{N}(a)$ есть по крайней мере одно множество F, полностью лежащее в $S(\varepsilon)$. Это множество, в силу леммы 57.11, нестягиваемо в точку в множестве $S(a)$ и тем более в множестве $S(\varkappa)$. Поэтому неравенство $d(a) \leqslant \varepsilon$ будет доказано, если мы покажем, что каждое компактное множество F, лежащее в $S(a)$, стягиваемо в точку в множестве $S(\varkappa)$.

Пусть $F \subset S(a)$. Определим вначале деформацию

$$u(x; t) = \frac{(1-t)x + tPx}{\|(1-t)x + tPx\|} \quad (x \in F,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

множества F в некоторое множество $F_1 \subset E_0 \cap S$. Непрерывность деформации $u(x; t)$ очевидна. Число $\varkappa$ было выбрано так, что $V[u(x; t)] > \varkappa$ при $x \in F$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому F_1 получено из F непрерывной деформацией в множестве $S(\varkappa)$. Если мы покажем, что F_1 стягиваемо в $S(\varkappa)$ в точку, то этим будет показано, что и множество F стягиваемо в $S(\varkappa)$ в точку.

Множество F_1 состоит из точек $y = \| Px \|^{-1} Px$, т. е. $F_1 \subset S \cap E_0 \subset S(\varkappa)$. Из (57.20) и (57.22) вытекает, что $h_0 \overline{\in} F_1$. Поэтому F_1 не покрывает полностью конечномерную сферу $S_0 = S \cap E_0$. Следовательно, F_1 можно непрерывной деформацией в S_0 (а значит, в $S(\varkappa)$) стянуть в точку. ∎

Лемма 57.12. *Пусть функционал V удовлетворяет условиям теоремы 57.2. Тогда*

$$\gamma(a) = \inf_{x \in S(a)} \| Ax \| > 0 \quad (0 < a < M). \tag{57.24}$$

Доказательство. В предположении противного, при некотором $a \in (0, M)$ можно указать слабо сходящуюся к некоторому элементу $y_0 \in T$ последовательность $x_n \in S(a)$, для которой $\| Ax_n \| \to 0$. Из слабой непрерывности функционала V вытекает, что $V(y_0) \geqslant \geqslant a > 0$, и поэтому $y_0 \neq 0$. С другой стороны, из леммы 57.2 вытекает, что $Ay_0 = 0$, и поэтому $y_0 = 0$. Мы пришли к противоречию. ∎

Теорема 57.6. *Пусть функционал V_0 удовлетворяет условиям теоремы 57.2. Тогда каждое значение $d(a)$ функции (57.18) является устойчивым критическим значением функционала V_0.*

Доказательство. Зададим число $\varepsilon > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon < d(a) - a$.

Пусть положительное число δ удовлетворяет неравенствам

$$\delta < \frac{1}{3}[d(a) - a], \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \delta < \gamma(a) \tag{57.25}$$

(здесь $\gamma(a)$ — функция (57.24)). Пусть $V = V_0 + V_1$ и $|||V_1||| < \delta$. Покажем, что V имеет по крайней мере одно критическое значение в замкнутом промежутке $[d(a) - \varepsilon, d(a) + \varepsilon]$.

Определим по функционалу V оператор (57.6). Выберем затем в классе $\mathfrak{N}(a)$, построенном по четному функционалу V_0, такое множество F_0, что

$$\tilde{V}_0(F_0) > d(a) - \delta, \tag{57.26}$$

и обозначим через $\mathfrak{M}$ последовательность множеств $B_0^n F_0$. Если мы покажем, что определенное равенством (57.12) число $c(\mathfrak{M})$ лежит в $[d(a) - \varepsilon, d(a) + \varepsilon]$, то из теоремы 57.4 будет вытекать утверждение теоремы 57.6 (из (57.25) и леммы 57.12 следует, что grad V не принимает нулевых значений во всех точках x, в которых $d(a) - \varepsilon \leqslant V(x) \leqslant d(a) + \varepsilon$).

Рассмотрим оператор-функцию

$$u(x; t) = \frac{x + ta(x)Dx}{\|x + ta(x)Dx\|} \quad (x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{57.27}$$

Рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 57.3, легко показать, что

$$V[u(x; t)] \geqslant V(x) \quad (x \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{57.28}$$

Из (57.26) и оценки $|V_1(x)| < \delta$ $(x \in S)$ вытекает, что $V(x) > d(a) - 2\delta$ $(x \in F_0)$. Из (57.28) вытекает, что при деформации (57.27) каждая точка множества $R = \{x\colon V(x) > d(a) - 2\delta\}$ не будет выходить из этого множества. Следовательно, множество $F_1 = B_0F_0$ можно получить из F_0 непрерывной деформацией (57.27) в R. Аналогично, множество $F_2 = B_0F_1$ можно получить из F_1 непрерывной деформацией также в R и т. д. Таким образом, каждое множество $F_n = B_0^nF_0$ можно получить из F_0 непрерывной деформацией в R. Но из оценки $|V_1(x)| < \delta$ вытекает включение $R \subset S[d(a) - 3\delta] \subset S(a)$. Поэтому каждое множество F_n можно получить непрерывной деформацией в $S(a)$ из множества F_0, которое принадлежит $\mathfrak{N}(a)$. Значит, $F_n \in \mathfrak{N}(a)$ при всех n. Следовательно, $\tilde{V}_0(F_n) \leqslant d(a)$ и $\tilde{V}(F_n) \leqslant d(a) + \delta$, откуда вытекает оценка $c(\mathfrak{M}) \leqslant d(a) + \delta < d(a) + \varepsilon$.

Оценка $c(\mathfrak{M}) \geqslant d(a) - \varepsilon$, по существу, была уже установлена: каждое F_n лежит в множестве R, поэтому $\tilde{V}(F_n) > d(a) - 2\delta$. ∎

Теоремы 57.5 и 57.6 содержат утверждения теорем 57.2 и 57.3.

57.7. Точки бифуркации уравнений с потенциальными операторами. Приведем в заключение формулировки двух теорем [22] о точках бифуркации потенциальных операторов. Доказательства этих теорем легко провести методом, изложенным в предыдущих пунктах параграфа.

Теорема 57.7. *Пусть вполне непрерывный оператор A является градиентом слабо непрерывного функционала, определенного в окрестности нуля гильбертова пространства E. Пусть существует производная Фреше $A'(0)$, которая является самосопряженным оператором. Тогда наибольшее положительное и наименьшее отрицательное собственные значения оператора $A'(0)$ являются точками бифуркации для уравнения $Ax = \lambda x$.*

Теорема 57.8. *Пусть вполне непрерывный оператор A является градиентом слабо непрерывного и равномерно дифференцируемого функционала, определенного в окрестности нуля гильбертова пространства E. Пусть существует производная Фреше $A'(0)$, которая является самосопряженным оператором. Тогда каждое*

ненулевое собственное значение оператора $A'(0)$ является точкой бифуркации для уравнения $Ax = \lambda x$.

В отличие от основных теорем о точках бифуркации, доказанных в § 56, в теоремах 57.7 и 57.8 нет никаких предположений о кратности собственных значений оператора $A'(0)$.

Использование изложенных в §§ 56, 57 теорем о точках бифуркации, как и другие аспекты применений в задачах механики и физики общих методов нелинейного функционального анализа, часто требует преодоления различных специальных трудностей. Одна из основных заключается в выборе (или изобретении) таких функциональных пространств, в которых соответствующие операторы обладают нужными свойствами. Эти трудности успешно преодолены при решении самых разнообразных задач (обзор многих результатов и частичную, но значительную библиографию читатель найдет в [58], [62]—[64]). На авторов особо яркое впечатление произвели исследования по гидродинамике, теории пластин и оболочек И. И. Воровича, А. М. Тер-Крикорова, Ю. П. Красовского, В. И. Юдовича и их учеников.

Построения параграфа являются модификацией конструкций из нескольких работ М. А. Красносельского (УМН **7**, № 2 (1952); Матем. сб. **33**, № 1 (1953); Матем. сб. **37**, № 2 (1955); ДАН СССР **103**, № 6 (1955)) и одной статьи М. А. Красносельского и А. И. Поволоцкого (ДАН СССР **91**, № 1 (1953)); см. также [22].

Изложенный метод допускает различные обобщения и распространяется на более сложные объекты. Фундаментальные результаты по теории устойчивых критических значений функционалов, заданных на расслоенных пространствах, получил А. С. Шварц (Тр. Моск. матем. о-ва **10** (1961), 217—272; **11** (1962), 99—126).

Особо отметим, что построения параграфа без существенных изменений переносятся на уравнения вида $(I - 2P)Ax = \lambda x$, где P — оператор проектирования на некоторое конечномерное подпространство, а A — градиент некоторого слабо непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

1. Александров П. С., Комбинаторная топология, М., Гостехиздат, 1947.
2. Биркгоф Г., Теория структур, М., ИЛ, 1952.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1974.
4. Болтянский В. Г., Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., Тр. МИАН СССР **47** (1955).
5. Борисович Ю. Г., Об относительном вращении компактных векторных полей в линейных пространствах, Воронеж, Тр. сем. по функц. анализу, вып. 12, 1969.
6. Браудер Ф., Петришин В. (Browder F. E., Petryshyn W. V.), Approximation methods and the generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces, J. of Funct. Anal. **3**, № 2 (1969), 217—245.
7. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., Гостехиздат, 1956.
8. Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., «Наука», 1972.
9. Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., «Наука», 1969.
10. Вайникко Г. М., Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов, ЖВМ и МФ **9**, № 4 (1969), 739—761.
11. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, Изд-во Тартусского ун-та, 1970.
12. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, М., «Наука», 1967.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1962.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Спектральная теория, М., «Мир», 1965.
15. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, М., «Наука», 1967.
16. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН **3**, вып. 6 (1948), 89—185.
17. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
18. Качуровский Р. И., Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах, УМН **23**, вып. 2 (1968), 121—168.
19. Коллатц Л., Функциональный анализ и вычислительная математика, М., «Мир», 1969.

20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1968.
21. Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа, УМН **9**, № 3 (1954), 57—114.
22. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., Гостехиздат, 1956.
23. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962.
24. Красносельский М. А., Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1966.
25. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С., Нелинейные почти периодические колебания, М., «Наука», 1970.
26. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969.
27. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., «Наука», 1966.
28. Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П., Векторные поля на плоскости, М., Физматгиз, 1963.
29. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
30. Красовский Н. Н., Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.
31. Кронин Дж. (Cronin J.), Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
32. Куратовский К., Топология, т. 2, М., «Мир», 1969.
33. Левин А. Ю., Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)x = 0$, УМН **24**, вып. 2 (1969), 43—96.
34. Лере Ж. (Leray J.), Theorie des points fixes, indice total et nombre de Lefschetz, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 221—233.
35. Лере Ж., Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения, УМН **1**, вып. 3—4 (1946).
36. Лефшец С., Алгебраическая топология, М., ИЛ, 1949.
37. Лифшиц Е. А., Принципы родственности и эквивалентные операторные уравнения, Автореферат канд. диссертации, Воронеж, Изд-во Воронежского ун-та, 1968.
38. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, М., Гостехиздат, 1951.
39. Люстерник Л. А., Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом, М., Тр. МИАН СССР **19** (1947).
40. Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей, УМН **2**, вып. 1 (1947).
41. Милнор Дж., Уоллес А., Дифференциальная топология, М., «Мир», 1972.
42. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, М., ИЛ, 1957.
43. Нагумо М. (Nagumo M.), Degree of mapping in linear local convex topological spaces, Amer. J. of Math. **73**, № 3 (1951), 497—511.

44. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, М., Гостехиздат, 1949.
45. Опяль З. (Opial Z.), Lecture notes on nonexpansive and monotone mapping in Banach space, Center for Dinamical Systems, Brown University, Providence 1, USA (1967).
46. Пелчинский А., Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций, М., «Мир», 1970.
47. Петришин В., Таккер Т. (Petryshyn W. V., Tucker T. S.), On the functional equations involwing nonlinear generalized P-compact operators, Trans. Amer. Math. Soc. **135** (1969), 343—373.
48. Плисс В. А., Нелокальные проблемы теории колебаний, М., «Наука», 1964.
49. Садовский Б. Н., Предельно компактные и уплотняющие операторы, УМН **27**, вып. 1 (1972), 81—146.
50. Скрыпник И. В., Квазилинейные эллиптические уравнения высших порядков, Донецк, Изд-во АН УССР, 1971.
51. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
52. Томпсон Р. (Thompson R. B.), A unified approach to local and global fixed point indices, Adv. in Math. **3** (1969), 1—72.
53. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, М., Гостехиздат, 1951, 45—77.
54. Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л., Гомотопическая топология, М., Изд-во МГУ, 1969.
55. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Мир», 1970.
56. Ху Сы-цзян, Теория гомотопий, М., «Мир», 1964.
57. Цайдлер Е. (Zeidler E.), Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften und Anwendungen des Abbildungsgrades im R^n, Theory of nonlinear operators, Proc. Summer — School, Akademie — Verlag, Berlin, 1974, 259—311.
58. Цайдлер Е. (Zeidler E.), Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben, Akademie — Verlag, Berlin, 1971.
59. Цитланадзе Э. С., О дифференцировании функционалов, Матем. сб. **29**, № 1 (1951).
60. Шварц Л., Анализ, т. 1, М., «Мир», 1972.
61. Шефер X. (Schaefer H.), Neue Existenzsatze in der Theorie nichtlineare Integralgleichungen, Berlin, 1955.
62. Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed E. H. Zarantonello, Academic Press, New York, 1971.
63. Nonlinear functional analysis, ed F. E. Browder, Proc. Symp. Pure Math. AMS, Vol. 18. 1, Providence, 1970.
64. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения, редакторы Дж. Б. Келлер и С. Антман, М., «Мир», 1974.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Марк Александрович Красносельский,
Петр Петрович Забрейко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

М., 1975 г., 512 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Рябенькая*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректор *Е. Я. Строева*

Сдано в набор 28/I 1975 г.
Подписано к печати 1/XII 1975 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$
тип. № 1. Физ. печ. л. 16. Условн. печ. л. 26,88.
Уч.-изд. л. 27,88. Тираж 7000 экз. Т-21303.
Цена книги 1 р. 97 к. Заказ № 659

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29