М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, П. П. ЗАБРЕЙКО,
Е. И. ПУСТЫЛЬНИК, П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ



# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

517.2
К 78
УДК 517.5

## АННОТАЦИЯ

Многие задачи функционального анализа и математической физики требуют решения или исследования линейных и нелинейных интегральных уравнений. В связи с этим важную роль играет изучение различных классов интегральных операторов.

В монографии проводится систематический анализ линейных и нелинейных интегральных операторов, устанавливаются общие признаки их непрерывности, полной непрерывности, дифференцируемости и т. д. Изложены различные теоремы об интерполировании свойства непрерывности и полной непрерывности операторов; излагается теория дробных степеней операторов.

Монография рассчитана на математиков и физиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся функциональным анализом, математической физикой и их приложениями.

$\frac{2\text{-}2\text{-}3}{87\text{-}66}$

# ОГЛАВЛЕНИЕ



1*

Глава 5

**Нелинейные интегральные операторы**

## Глава 6
## Некоторые приложения

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование многих математических задач существенно упрощается, если их удается свести к уравнениям в функциональных пространствах с непрерывными и вполне непрерывными операторами. Особенно это относится к нелинейным краевым задачам, интегро-дифференциальным и интегральным уравнениям.

Для перехода к уравнениям с непрерывным или вполне непрерывным оператором обычно стремятся свести исходную задачу к некоторому интегральному уравнению. При этом существенно используются отрицательные целые и дробные степени неограниченных дифференциальных операторов, составляющих «основную часть» исходной задачи. После этого подбирается или конструируется такое функциональное пространство, в котором соответствующий интегральный оператор обладает достаточно хорошими свойствами. Если такое пространство найдено, то для исследования исходной задачи во многих случаях достаточно применить общие теоремы (теоремы Фредгольма при исследовании линейных уравнений, принципы неподвижной точки при исследовании нелинейных уравнений, методы теории конусов при изучении положительных решений и т. д.).

Иначе говоря, исследование многих задач фактически распадается на три независимые части: переход к интегральному уравнению, затем исследование соответствующего интегрального выражения как оператора, действующего в функциональных пространствах и, наконец, применение общих методов функционального анализа исследования линейных и нелинейных операторных уравнений.

Настоящая книга посвящена второй из указанных задач. В ней изучаются операторы, действующие в пространствах $L_\alpha$ суммируемых функций, устанавливаются признаки непрерывности, регулярности, полной непрерывности линейных операторов и их дробных степеней; эти же свойства рассматриваются для нелинейных операторов; рассматривается вопрос о дифференцируемости нелинейных операторов и т. д. Подчеркнем, что свойства интегральных операторов важны не только при изучении интегральных уравнений — интегральные операторы и их дробные степени играют важную роль при изучении сходимости рядов Фурье, при исследовании приближенных методов, при рассмотрении различных эволюционных задач, в теории колебаний и др.

При исследовании конкретных интегральных операторов важна бывает возможность рассматривать их в различных пространствах $L_\alpha$. В связи с этим операторы изучаются сразу по всем семействе пространств $L_\alpha$. Такое изучение линейных операторов позволяет широко пользоваться интерполяционными теоремами, ведущими свое начало от известной работы М. Рисса. Оно позволяет просто формулировать теоремы об общих свойствах дробных степеней линейных операторов. Для описания общих свойств линейных и нелинейных операторов по отношению к семейству пространств $L_\alpha$ используются так называемые $L$-характеристики.

Книга состоит из шести глав.

В первой главе изучаются общие свойства линейных операторов. Центральное место здесь занимают интерполяционные теоремы Рисса и Марцинкевича. Подробно обсуждается свойство полной непрерывности линейного оператора.

Во второй главе выясняется, что линейный интегральный оператор обладает рядом дополнительных свойств по сравнению с абстрактными линейными операторами. Приведены различные достаточные признаки непрерывности и полной непрерывности интегрального оператора с ядром $K(t, s)$ в терминах, относящихся к свойствам ядра. В частности, излагаются важные теоремы Л. В. Канторовича и предлагаются некоторые их модификации. Изложена также интерполяционная теорема Стейна — Уэйсса, которая приводит к простым доказательствам предельных теорем С. Л. Соболева и В. П. Ильина об операторах типа потенциала.

Третья глава посвящена дробным степеням самосопряженных операторов. Здесь установлены теоремы о расщеплении самосопряженных положительно определенных операторов $A$, о свойствах дробных степеней $A^\tau$, о неравенствах, связывающих дробные степени и т. д.

В четвертой главе изучаются дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах. Выясняется, из каких пространств в какие действуют дробные степени позитивных операторов. В качестве приложений рассмотрены эллиптические дифференциальные операторы.

Пятая глава посвящена нелинейным операторам. Здесь систематизированы известные и указаны новые признаки непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов. Специальному анализу подвергнут вопрос о дифференцируемости нелинейных операторов в отдельных точках пространств $L_\alpha$.

В последней, шестой главе указаны простейшие приложения общих теорем, установленных в основной части книги. Здесь описаны общие пути применения теорем о непрерывности и полной непрерывности интегральных операторов для доказательства разрешимости различных уравнений, для оценки числа решений, для обоснования сходимости некоторых приближенных методов, для исследования бифуркационных значений параметров и др. Изложены применения дробных степеней операторов к анализу сходимости рядов Фурье и метода Фурье решения краевых задач. Изучен оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах; неподвижные точки таких операторов определяют, например, периодические решения параболических уравнений.

Книга рассчитана на читателя, владеющего лишь основными понятиями функционального анализа в объеме университетских программ (достаточно, например, знакомства с основными главами курса Л. А. Люстерника и В. И. Соболева). Используемые в книге элементы теории неограниченных самосопряженных операторов подробно описаны. Авторы сочли целесообразным изложить с полными доказательствами некоторые теоремы о производящих операторах полугрупп ограниченных операторов.

Авторы пользуются приятной возможностью выразить искреннюю благодарность Б. С. Митягину и Я. Б. Рутицкому, прочитавшим рукопись в ее первом варианте. Их многочисленные советы содействовали улучшению книги. Авторы благодарны также Е. М. Семенову, С. Г. Крейну, С. Д. Эйдельману за ряд советов.

ГЛАВА 1

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_\alpha$

## § 1. Пространства $L_\alpha$

**1.1. Описание пространств*).** Ниже излагаются основные сведения о некоторых пространствах вещественных или комплекснозначных функций $x(s)$, определенных на множестве $\Omega$ конечной лебеговой меры конечномерного пространства. Можно также считать, что $\Omega$ — множество произвольной природы с непрерывной**) мерой.

Через $S = S(\Omega)$ обозначается, как обычно, пространство всех измеримых почти везде конечных функций $x(s)$ с метрикой $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где***)

$$\|x\| = \inf_{a>0} \{a + \text{mes}\{s : |x(s)| \geqslant a\}\}. \tag{1.1}$$

Сходимость в пространстве $S$ совпадает с обычной сходимостью по мере. Одновременно в пространстве $S$ рассматривается сходимость почти всюду. Из сходимости последовательности $x_n(s)$ почти всюду вытекает ее сходимость по мере. Обратное неверно. Однако из каждой последовательности, сходящейся по мере, можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.

---

*) Излагаемые в этом параграфе и используемые во всей книге свойства пространств $L_\alpha$ с большой полнотой изложены, например, в книге И. П. Натансона [1] (см. также Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1] и С. Л. Соболев [2]).

**) Мера называется *непрерывной*, если каждое измеримое множество $D \subset \Omega$ можно разбить на две части одинаковой меры.

***) Через $\{t : |x(t)| \geqslant a\}$ обозначается множество тех точек $t$, в которых $|x(t)| \geqslant a$.

Пусть $\alpha$ — положительное вещественное число. Через $L_\alpha = L_\alpha(\Omega)$ обозначается множество измеримых функций $x(s)$, для которых интеграл $\int\limits_\Omega |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds$ конечен. Число

$$\|x\|_\alpha = \left\{ \int\limits_\Omega |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds \right\}^\alpha \tag{1.2}$$

называется *нормой элемента* $x \in L_\alpha$.

При $\alpha \leqslant 1$ пространства $L_\alpha$ являются банаховыми пространствами (с нормой (1.2)). При $\alpha > 1$ пространство $L_\alpha$ ненормируемо; однако оно является полным метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y) = (\|x - y\|_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Сходимость в $L_\alpha$ называется обычно *сходимостью в среднем со степенью* $\frac{1}{\alpha}$.

Вместе с пространствами $L_\alpha$ обычно рассматривается пространство $M$ ограниченных в существенном функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\|_0 = \operatorname*{vrai\,max}_{s \in \Omega} |x(s)|. \tag{1.3}$$

Это пространство обозначается также через $L_0$, так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \|x\|_\alpha = \|x\|_0 \quad (x \in L_0 = M). \tag{1.4}$$

В отличие от пространств $L_\alpha (0 < \alpha < \infty)$, пространство $L_0$ несепарабельно. Наиболее важным подпространством пространства $L_0$ является пространство $C$ равномерно непрерывных на $\Omega$ функций. Пространство $C$ сепарабельно, если множество $\Omega$ ограничено.

Ниже приходится одновременно рассматривать различные пространства $L_\alpha$. В соответствующих построениях основную роль играет известное *неравенство Гёльдера*

$$\|x \cdot y\|_{\alpha+\beta} \leqslant \|x\|_\alpha \cdot \|y\|_\beta \quad (x \in L_\alpha, \ y \in L_\beta), \tag{1.5}$$

справедливое для любых $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Из неравенства Гёльдера, в частности, следует, что функция $\lambda(\alpha) = \|x\|_\alpha$ при любом фиксированном элементе $x(s)$ непрерывна и логарифмически выпукла. Последнее означает, что при любом $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\| x \|_{\alpha(\tau)} \leqslant \| x \|_{\alpha_0}^{1-\tau} \cdot \| x \|_{\alpha_1}^{\tau}, \tag{1.6}$$

где

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1.$$

Из неравенства (1.5) вытекает, что при $\alpha_1 < \alpha_2$ пространство $L_{\alpha_1}$ вложено в пространство $L_{\alpha_2}$, т. е. $L_{\alpha_1} \subset L_{\alpha_2}$ и

$$\| x \|_{\alpha_2} \leqslant k \| x \|_{\alpha_1} \quad \left(x \in L_{\alpha_1};\ k = [\operatorname{mes} \Omega]^{\alpha_2 - \alpha_1}\right). \tag{1.7}$$

**1.2. Признаки компактности.** Пусть $D$ — измеримое подмножество $\Omega$. Обозначим через $P_D$ линейный оператор, определяемый равенством

$$P_D x(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если } s \in D, \\ 0, & \text{если } s \notin D. \end{cases} \tag{1.8}$$

Очевидно, $P_D^2 = P_D$ и*) $\| P_D \|_{\alpha \to \alpha} = 1$, если $\operatorname{mes} D \neq 0$.

Норма в пространствах $L_\alpha$ при $\alpha > 0$ обладает свойством *абсолютной непрерывности*. Это значит, что для каждой фиксированной функции $x(s) \in L_\alpha$

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \| P_D x \|_\alpha = 0.$$

Говорят, что семейство $\mathfrak{M}$ функций из $L_\alpha$ имеет *равностепенно абсолютно непрерывные нормы*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\operatorname{mes} D < \delta$ и $x(s) \in \mathfrak{M}$ вытекает неравенство $\| P_D x(s) \|_\alpha < \varepsilon$.

Очевидно, из сходимости последовательности функций $x_n(s)$ к $x_0(s)$ по норме $L_\alpha$ вытекает сходимость этой последовательности и по мере (но не почти всюду!). Обратное неверно. Для пространств $L_\alpha (0 < \alpha < \infty)$ справедливо предложение: последовательность $x_n(s)$, сходящаяся по мере к функции $x_0(s)$, сходится по норме в $L_\alpha (0 < \alpha < \infty)$ в том и только том случае, если функции $x_n(s)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы.

---

*) Через $\| A \|_{\alpha \to \beta}$ обозначается норма $A$ как оператора, действующего из $L_\alpha$ в $L_\beta$ (см. п. 2.1).

Из последнего утверждения очевидным образом вытекает следующий простой критерий компактности в пространствах $L_\alpha (0 < \alpha < \infty)$.

Лемма 1.1. *Семейство $\mathfrak{M}$ функций $x(s) \in L_\alpha (0<\alpha<\infty)$ компактно в том и только том случае, если оно компактно по мере и если нормы функций из $\mathfrak{M}$ равностепенно абсолютно непрерывны.*

При исследовании конкретных семейств функций наиболее сложно проверяется компактность по мере. Здесь обычно применяется следующая схема рассуждений. Вначале выясняется, что изучаемое множество $\mathfrak{M}$ функций из $L_\alpha$ компактно в некотором пространстве $L_{\alpha_0}$, где $\alpha_0 > \alpha$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{M}$ компактно по мере.

Для проверки равностепенно абсолютной непрерывности норм функций некоторого множества $\mathfrak{M}$ иногда удобно пользоваться следующим критерием Валле-Пуссена:

*Нормы функций $x(s)$ множества $\mathfrak{M}$ в том и только том случае равностепенно абсолютно непрерывны, если существует четная непрерывная функция $\Phi(u)$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty,$$

*для которой*

$$\|\Phi[x(s)]\|_\alpha \leqslant A \quad (x \in \mathfrak{M}).$$

Перейдем к пространству $L_0$. Норма в этом пространстве свойством абсолютной непрерывности не обладает. Более того, для каждой ненулевой функции $x(s) \in L_0$ можно указать такие множества $D_n \in \Omega$, что

$$\operatorname{mes} D_n \to 0, \text{ но } \|P_{D_n} x\|_0 = \|x\|_0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 1.2. *Ограниченное семейство $\mathfrak{M}$ функций из $L_0$ компактно в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества $\Omega$ на конечное число таких подмножеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$,*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_n,$$

*что для любой функции $x(s) \in \mathfrak{M}$*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s', s'' \in \Omega_i} |x(s') - x(s'')| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Условия компактности могут быть видоизменены, если известно, что $\mathfrak{M}$ лежит в некотором сепарабельном подпространстве $L_0$. Например, если $\mathfrak{M} \subset C$ ($C$ — пространство равномерно непрерывных функций) и $\Omega$ — ограниченное множество, то справедлив критерий компактности Арцела: множество $\mathfrak{M} \subset C$ компактно в том и только том случае, если оно ограничено по норме и если функции $x(s)$ из $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывны.

Приведенные в этом пункте признаки компактности будут использованы при доказательстве полной непрерывности некоторых линейных и нелинейных операторов. Лемма 1.1 систематически использовалась для этой цели у М. А. Красносельского [7], М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого [4, 5] и др.; лемма 1.2 — у Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1]. Рядом авторов применялись критерии компактности А. Н. Колмогорова [1] и Ф. Рисса [1]. Отметим, что при исследовании конкретных операторов часто удобно непосредственно пользоваться определением компактности множеств, не прибегая к каким-либо критериям компактности.

**1.3. Линейные непрерывные функционалы и слабая сходимость.** Функционал $f(x)$, определенный на линейном пространстве $E$, называется линейным и непрерывным, если

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

и из $\|x_n - x_0\| \to 0$ вытекает $f(x_n) \to f(x_0)$.

Не существует ненулевых линейных непрерывных функционалов на пространствах $L_\alpha$, где $\alpha > 1$. Ниже будут описаны линейные непрерывные функционалы на пространствах $L_\alpha$, где $\alpha \in [0,1]$.

Для линейных непрерывных функционалов $f(x)$, определенных на банаховом пространстве $E$ (в частности, на пространствах $L_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$), вводится понятие нормы функционала:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Совокупность линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $E$ образует также банахово пространство. Это пространство обозначают через $E^*$; говорят, что оно сопряжено $E$.

Выражение

$$(x, y) = \int_\Omega x(s)\overline{y(s)}\,ds \tag{1.9}$$

называется скалярным произведением функций $x(s)$, $y(s)$. Из неравенства Гёльдера вытекает, что $|(x, y)| < \infty$, если $x \in L_\alpha$, $y \in L_{1-\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Естественно, что скалярное произведение может быть конечным и в других случаях.

Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Важную роль играет тот факт, что $a(t) \in L_{1-\alpha}$, если для всех функций $x(s) \in L_\alpha$ выполняется неравенство $|(x, a)| < \infty$. Более того,

$$\| a \|_{1-\alpha} = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} |(x, a)|. \tag{1.10}$$

Как оказывается, каждый линейный непрерывный функционал $f(x)$, определенный на $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, представим в виде

$$f(x) = (x, a),$$

где $a \in L_{1-\alpha}$, причем $\|f\| = \|a\|_{1-\alpha}$. В связи с этим говорят, что пространство $L_{1-\alpha}$ сопряжено $L_\alpha$.

Выражение $f(x) = (x, a)$ при $a \in L_1$ является линейным непрерывным функционалом на $L_0$; однако на $L_0$ существуют и другие линейные непрерывные функционалы; $L_1$ можно рассматривать как подпространство сопряженного к $L_0$ пространства $L_0^*$.

Пространство $E$ называется рефлексивным, если *) $(E^*)^* = E$. Из проведенных выше рассуждений вытекает, что пространства $L_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ рефлексивны, а при $\alpha = 0,1$ нерефлексивны. Пространство $L_{\frac{1}{2}}$ гильбертово.

Последовательность $x_n \in E$ называется слабо сходящейся, если для любого $f \in E^*$ последовательность $f(x_n)$ сходится. Последовательность $x_n \in E$ слабо сходится к элементу $x_0$, если для любого $f \in E^*$ последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$. Если каждая слабо сходящаяся последовательность слабо сходится к некоторому пределу, то пространство $E$ называется слабо полным. Пространство $E$ называется слабо

*) Последующее равенство понимается в том смысле, что каждый функционал $\varphi \in E^{**}$ имеет вид $\varphi(f) = f(x_0)$, где $x_0$ — некоторый элемент из $E$.

компактным, если из каждой ограниченной последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Каждое рефлексивное пространство слабо полно и слабо компактно. Поэтому пространства $L_\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ слабо полны и слабо компактны. Пространство $L_1$ слабо полно, но не обладает свойством слабой компактности.

Лемма 1.3 *). *Множество $\mathfrak{M}$ функций из $L_1$ слабо компактно в том и только том случае, если нормы функций из $\mathfrak{M}$ равностепенно абсолютно непрерывны.*

В пространствах $L_1$ и $L_0$ ниже будут рассмотрены специальные слабые сходимости, отличные от той, которая была определена.

Пусть $F$ — линейное подпространство пространства $E^*$. Говорят, что последовательность $x_n \in E$ $F$-слабо сходится, если для любого $f \in F$ последовательность $f(x_n)$ сходится. Естественным образом вводятся понятия $F$-слабой полноты и $F$-слабой компактности. Если $F$ сепарабельно, то пространство $E$ будет $F$-слабо компактно.

В пространстве $L_0$ под слабой сходимостью мы всегда будем понимать слабую сходимость, определенную подпространством $F = L_1$. Так как $L_1$ сепарабельно, то в этой слабой сходимости пространство $L_0$ слабо компактно. Можно показать, что оно в этой сходимости обладает свойством слабой полноты.

В заключение заметим, что из слабой сходимости не вытекает сходимость по мере, а из сходимости по мере не вытекает слабая сходимость. Однако если последовательность $x_n$ сходится слабо и сходится по мере, то слабый предел совпадает с пределом по мере. В некоторых случаях удобно пользоваться следующим замечанием: *если последовательность $x_n$ слабо сходится к $x_0$ и компактна по мере, то она сходится к $x_0$ и по мере.*

**1.4. Полуупорядоченность в пространствах $S$ и $L_\alpha$.** Пространства $S$ и $L_\alpha (0 \leqslant \alpha < \infty)$ удобно рассматривать с естественной полуупорядоченностью: функция $x(s)$ меньше функции $y(s)$, если $x(s) \leqslant y(s)$ почти при всех $s \in \Omega$. Эта полуупорядоченность обладает следующими свойствами:

1. Из $x \leqslant y$, $y \leqslant z$ вытекает, что $x \leqslant z$.

*) И. П. Натансон [1], Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1].

2. Из $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ вытекает, что $x = y$.
3. Из $x \leqslant y$ вытекает, что $x + z \leqslant y + z$ при любом $z$.
4. Из $x \leqslant y$, $\lambda \geqslant 0$ вытекает, что $\lambda x \leqslant \lambda y$.
5. Если $x_n(s) \leqslant y_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и последовательности $x_n(s)$ и $y_n(s)$ при $n \to \infty$ сходятся по мере (или по норме $L_\alpha$) соответственно к $x^*(s)$ и $y^*(s)$, то $x^*(s) \leqslant y^*(s)$. Иными словами, в неравенствах можно переходить к пределу.

В полуупорядоченных пространствах (в частности, $S$, $L_\alpha$) вводятся понятия точных верхней и нижней границ множества $\mathfrak{M}$. Элемент $z_1(z_2)$ называется точной верхней (нижней) границей множества $\mathfrak{M}$ и обозначается через $\sup \mathfrak{M}$ ($\inf \mathfrak{M}$), если $x \leqslant z_1$ $(x \geqslant z_2)$ для каждого $x \in \mathfrak{M}$ и если из неравенства $x \leqslant u$ $(x \geqslant u)$, справедливого для любого элемента $x \in \mathfrak{M}$, вытекает $z_1 \leqslant u$ $(z_2 \geqslant u)$.

Каждое ограниченное сверху (снизу) элементом множество в $S$ или $L_\alpha$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань. Если множество $\mathfrak{M}$ содержит не более счетного множества элементов, то справедлива формула

$$z_1(s) = \sup \mathfrak{M} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} x(s).$$

В общем случае имеет место равенство

$$z_1(s) = \sup_n \{x_n(s)\},$$

где $x_n(s)$ — любое счетное множество функций из $\mathfrak{M}$, плотное в $\mathfrak{M}$. Аналогичные формулы справедливы для точной нижней границы.

Приведем некоторые свойства пространств $L_\alpha$, связанные с полуупорядоченностью.

1. Каждый элемент $x \in L_\alpha$ однозначно представим в виде

$$x = x_+ - x_- \quad (x_+,\ x_- \geqslant 0),$$

где

$$x_+ = \sup(x, 0), \quad x_- = \sup(-x, 0).$$

При этом

$$\| x_+ \|_\alpha + \| x_- \|_\alpha \leqslant 2 \| x \|_\alpha.$$

2. Из неравенств $0 \leqslant x \leqslant y$ вытекает, что $\| x \|_\alpha \leqslant \| y \|_\alpha$.
3. В пространстве $L_1$ норма $\| x \|_1$ обладает свойством

$$\| x + y \|_1 = \| x \|_1 + \| y \|_1 \quad (x,\ y \geqslant 0).$$

4. В пространстве $L_0$ норма $\|x\|_0$ обладает свойством

$$\|\sup\{x_1, x_2\}\|_0 = \max\{\|x_1\|_0, \|x_2\|_0\} \quad (x_1, x_2 \geqslant 0).$$

5. Пусть $\alpha \in (0, \infty)$. Тогда каждая монотонная ограниченная по норме последовательность $x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится по норме к некоторому элементу $x^*$.

При $\alpha = 0$ это утверждение неверно: последовательность будет сходиться к некоторому элементу лишь почти всюду.

**1.5. Проектирующие операторы и базисы типа Хаара.** В построениях этого пункта условие $\alpha \leqslant 1$ существенно. Нас будут интересовать специальные базисы в пространствах $L_\alpha$. Их построение связано с некоторыми конечномерными операторами проектирования, действующими в пространствах $L_\alpha$ (операторы усреднения).

Допустим, что множество $\Omega$ разбито на некоторое число непересекающихся частей:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_q. \tag{1.11}$$

Определим оператор $P$ равенством

$$Px(s) = \int_\Omega K(s, \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma, \tag{1.12}$$

где

$$K(s, \sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{mes}\Omega_i}, & \text{если } s, \sigma \in \Omega_i \quad (i = 1, \ldots, q), \\ 0 & \text{при остальных } s, \sigma \in \Omega. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$Px(s) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_i} \int_{\Omega_i} x(\sigma)\, d\sigma \qquad (s \in \Omega_i,\ i = 1, \ldots, q). \tag{1.13}$$

Нетрудно видеть, что оператор $P$ определен на всех суммируемых функциях. Значения его принадлежат конечномерному пространству — линейной оболочке совокупности характеристических функций множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_q$. Таким образом, оператор (1.12) действует в каждом пространстве $L_\alpha(\Omega)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

Пусть сначала $\alpha > 0$. Тогда для каждой функции $x(s) \in L_\alpha$ в силу неравенства Гёльдера

$$\int_\Omega |Px(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds = \sum_{i=1}^{q} (\operatorname{mes} \Omega_i)^{1-\frac{1}{\alpha}} \left| \int_{\Omega_i} x(\sigma)\, d\sigma \right|^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{q} (\operatorname{mes} \Omega_i)^{1-\frac{1}{\alpha}} \int_{\Omega_i} |x(\sigma)|^{\frac{1}{\alpha}} d\sigma\, (\operatorname{mes} \Omega_i)^{\frac{1}{\alpha}-1} = \int_\Omega |x(\sigma)|^{\frac{1}{\alpha}} d\sigma,$$

т. е.

$$\| Px \|_\alpha \leqslant \| x \|_\alpha \quad (x \in L_\alpha). \tag{1.14}$$

В случае $\alpha = 0$ неравенство (1.14) очевидным образом следует из (1.13). Следовательно, оператор (1.12) непрерывен в каждом пространстве $L_\alpha(\Omega)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

Непосредственно проверяется равенство $P^2 = P$. Следовательно, $P$ является оператором, проектирующим $L_\alpha$ на конечномерное пространство.

Рассмотрим последовательность

$$\Omega = \Omega_1^{(n)} \cup \ldots \cup \Omega_{q(n)}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

разбиений типа (1.11). По каждому из этих разбиений определим оператор $P_n$ формулой (1.12). Последовательность $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ назовем *правильной*, если для каждого измеримого множества $F \in \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0 = n_0(F, \varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0$ в разбиении (1.15) можно выбрать такие множества $\Omega_{i_1}^{(n)}, \ldots, \Omega_{i_k}^{(n)}$, что

$$\left| \operatorname{mes} \left( \Omega_{i_1}^{(n)} \cup \ldots \cup \Omega_{i_k}^{(n)} \right) \cap F - \operatorname{mes} F \right| < \varepsilon \tag{1.16}$$

и

$$\left| \operatorname{mes} \left( \Omega_{i_1}^{(n)} \cup \ldots \cup \Omega_{i_k}^{(n)} \right) \cap F - \operatorname{mes} \left( \Omega_{i_1}^{(n)} \cup \ldots \cup \Omega_{i_k}^{(n)} \right) \right| < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Для правильности последовательности $P_n$ достаточно, например, чтобы наибольший диаметр множеств $\Omega_i^{(n)}$ в разбиении (1.15) стремился к нулю при $n \to \infty$.

Лемма 1.4. *Пусть $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — правильная последовательность проектирующих операторов* (1.12).

*Тогда последовательность $P_n$ в каждом пространстве $L_\alpha$ ($\alpha \in (0, 1]$) сильно сходится к единичному оператору*:

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n x(s) - x(s) \|_\alpha = 0 \quad (x \in L_\alpha). \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть сначала $x(s)$ — характеристическая функция некоторого измеримого множества $F \in \Omega$. Так как последовательность $P_n$ правильная, то можно определить последовательность характеристических функций $x_n(s)$ $(n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots)$ множеств $\Omega_{i_1}^{(n)} \cup \ldots \cup \Omega_{i_k}^{(n)}$, удовлетворяющих условиям (1.16) и (1.17). Очевидно,

$$P_n x_n(s) \equiv x_n(s) \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$$

и

$$\| x_n(s) - x(s) \|_\alpha \leqslant 2^\alpha \varepsilon^\alpha \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Из (1.14) вытекает, что при $n \geqslant n_0$

$$\| P_n x(s) - x(s) \|_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \| P_n [x(s) - x_n(s)] \|_\alpha + \| P_n x_n(s) - x_n(s) \|_\alpha +$$
$$+ \| x(s) - x_n(s) \|_\alpha \leqslant 2 \| x(s) - x_n(s) \|_\alpha \leqslant 2^{1+\alpha} \varepsilon^\alpha.$$

Следовательно, для характеристических функций выполнено равенство (1.18).

Из линейности операторов $P_n$ вытекает, что они сильно сходятся к единичному на линейной оболочке множества характеристических функций. Линейная оболочка множества характеристических функций плотна в каждом $L_\alpha(\Omega)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, а нормы операторов $P_n$ равномерно ограничены. Поэтому операторы $P_n$ сильно сходятся к единичному на всем $L_\alpha$.

Лемма доказана.

Для случая пространства $L_0(\Omega)$ утверждение леммы 1.4 неверно, так как пространство $L_0(\Omega)$ несепарабельно, а множество значений всех операторов $P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для всех $x(s) \in L_0$ лежит в некотором его сепарабельном подпространстве.

Обозначим через $L_0(\Omega; \{P_n\})$ множество тех функций $x(s) \in L_0(\Omega)$, на которых последовательность $P_n(x)$ сильно сходится к $x$ по метрике пространства $L_0(\Omega)$. Нетрудно видеть, что конечномерные подпространства $P_nL_0(\Omega)$ ($n=1, 2, \ldots$) могут быть не включены в $L_0(\Omega; \{P_n\})$.

Интересно отметить, что из сходимости $P_nx_0$ к некоторому элементу $y_0 \in L_0$ вытекает равенство $y_0 = x_0$ и принадлежность элемента $x_0$ подпространству $L_0(\Omega; \{P_n\})$. Предположим противное: $x_0 \bar{\in} L_0(\Omega; \{P_n\})$, $\| y_0 - P_nx_0 \|_0 \to 0$. Из очевидных неравенств $\| y_0 - P_ny_0 \|_0 \leqslant \| y_0 - P_nx_0 \|_0 + \| P_n(y_0 - P_nx_0) \|_0 \leqslant 2 \| y_0 - P_nx_0 \|_0$ вытекает, что $y_0 \in L_0(\Omega; \{P_n\})$. Тогда $z_0 = x_0 - y_0 \bar{\in} L_0(\Omega; \{P_n\})$ и последовательность функций $P_nz_0$ равномерно сходится к нулю. Без ограничения общности можно считать, что функция $z_0(s)$ на множестве ненулевой меры принимает положительные значения; пусть $\mathcal{F}$ — такое множество ненулевой меры, что

$$\alpha_0 \leqslant z_0(s) \leqslant \| z_0 \|_0 \quad (t \in \mathcal{F}),$$

где $\alpha_0$ — некоторое положительное число. Так как последовательность $P_n$ правильна, то можно найти такое $n_0$, что при $n \geqslant n_0$ в разбиении (1.15) найдется такое множество $\Omega_{i_0}^{(n)}$, что

$$\operatorname{mes}\left(\Omega_{i_0}^{(n)} \cap \mathcal{F}\right) \geqslant \frac{2\| z_0 \|_0 + \alpha_0}{2(\| z_0 \|_0 + \alpha_0)} \operatorname{mes} \Omega_{i_0}^{(n)}.$$

Тогда при $s \in \Omega_{i_0}^{(n)}$ будет выполнено неравенство

$$P_nz_0(s) = \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_{i_0}^{(n)}} \int\limits_{\Omega_{i_0}^{(n)}} z_0(\sigma)\,d\sigma \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega_{i_0}^{(n)}} \left( \int\limits_{\Omega_{i_0}^{(n)} \cap \mathcal{F}} z_0(\sigma)\,d\sigma - \int\limits_{\Omega_{i_0}^{(n)} \setminus \Omega_{i_0}^{(n)} \cap \mathcal{F}} | z_0(\sigma) |\,d\sigma \right) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \frac{\operatorname{mes}\left(\Omega_{i_0}^{(n)} \cap \mathcal{F}\right)}{\operatorname{mes}\Omega_{i_0}^{(n)}} - \| z_0 \|_0 \frac{\operatorname{mes}\Omega_{i_0}^{(n)} - \operatorname{mes}\left(\Omega_{i_0}^{(n)} \cap \mathcal{F}\right)}{\operatorname{mes}\Omega_{i_0}^{(n)}} \geqslant \frac{\alpha_0}{2}.$$

Это значит, что последовательность $P_nz_0$ не сходится к нулю. Мы пришли к противоречию.

Лемма 1.5. *Пусть $E$ — произвольное сепарабельное подпространство пространства $L_0(\Omega)$.*

*Тогда существует правильная последовательность операторов $P_n$, сильно сходящаяся в $E$ к единичному оператору*:

$$\lim_{n \to \infty} \| P_nx(s) - x(s) \|_0 = 0 \quad (x \in E). \tag{1.19}$$

Доказательство. Пусть последовательность $x_1, x_2, \ldots$ плотна в шаре $\|x\|_0 \leqslant 1$ пространства $E$. Обозначим через $D_{ki}^{(n)}$ множество точек $t \in \Omega$, в которых

$$\frac{i}{n} \leqslant x_k(s) < \frac{i+1}{n} \qquad (i = -n, \ -n+1, \ \ldots, \ 0, \ 1, \ \ldots, \ n).$$

В качестве $n$-го разбиения (1.15) возьмем совокупность $\Omega_1^{(n)}, \ldots, \Omega_{q(n)}^{(n)}$ таких попарно непересекающихся множеств, чтобы каждое множество $D_{ki}^{(n)}$ $(k = 1, \ldots, n)$ можно было представить в виде суммы некоторых множеств этой совокупности. Очевидно, при таком выборе множеств $\Omega_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, q(n); \ n = 1, 2, \ldots)$ последовательность $P_n x_m$ при $n \to \infty$ сходится к $x_m$ для любого $m$. Множества $\Omega_i^{(n)}$ можно, как легко видеть, выбрать настолько малыми по мере, что построенная по этим разбиениям последовательность $P_n$ будет правильной.

Пусть теперь $x(s)$ — произвольная функция из $E$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется функция $x_m(s)$, такая, что $\|x - x_m\|_0 < \frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому для достаточно больших $n$ будет выполняться неравенство

$$\|P_n x - x\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant \|P_n(x - x_m)\|_0 + \|P_n x_m - x_m\|_0 + \|x - x_m\|_0 < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

В частности, для включения $C(\Omega) \in L_0(\Omega; \{P_n\})$ достаточно, чтобы наибольший диаметр множеств $\Omega_i^{(n)}$ в разбиении (1.15) стремился к нулю при $n \to \infty$.

Утверждения лемм 1.4 и 1.5 равносильны утверждениям о разложимости функции $x(s)$ в ряд

$$x(s) = P_1 x(s) + (P_2 - P_1)\,x(s) + \ldots$$
$$\ldots + (P_{n+1} - P_n)\,x(s) + \ldots \qquad (1.20)$$

Естественным образом возникает вопрос о том, является ли ряд (1.20) разложением по некоторому базису.

Чтобы ряд (1.20) был разложением по базису, нужно, чтобы каждый из операторов $P_{n+1} - P_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ являлся оператором проектирования на одномерное подпространство. Для этого в свою очередь достаточно, чтобы

$(n+1)$-е разбиение получалось из $n$-го разбиения (1.15) заменой одного из множеств $\Omega_i^{(n)}$ на две его такие части, сумма которых равна $\Omega_i^{(n)}$.

Следовательно, построения предыдущего пункта дают возможность конструировать различные системы функций, являющиеся базисами одновременно во всех пространствах $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и в некотором пространстве $E \in L_0$, содержащем пространство $C$. В частности, при соответствующем выборе разбиений (1.15) мы приходим к известным базисам Хаара [1] (см. также М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий [5]).

**1.6. Операторы в пространствах $L_\alpha$.** Исследование интегральных, интегро-дифференциальных и других уравнений, как правило, упрощается, если их можно рассматривать как операторные уравнения в некоторых функциональных пространствах. Удачный выбор пространства обеспечивает «хорошие» свойства операторов, входящих в уравнение: непрерывность, полную непрерывность, дифференцируемость и т. п.

При исследовании операторов в пространствах $L_\alpha$ естественно искать те $\alpha$, в которых эти операторы обладают нужными свойствами. Удобным способом описания и изучения свойств операторов в пространствах $L_\alpha$ при разных $\alpha$ является понятие $L$-характеристики данного оператора.

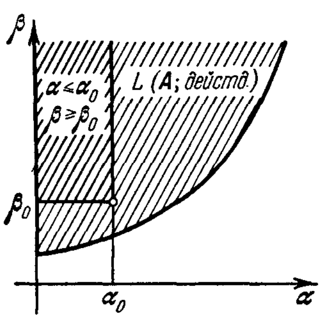


Рис. 1.1.

Пусть $A$ — некоторый конкретный оператор, например, интегральный

$$Ax(t) = \int\limits_\Omega K[t, s, x(s)]\,ds,$$

действующий из некоторого пространства функций, определенных на множестве $\Omega$, в пространство функций, определенных, вообще говоря, на другом множестве $\Omega^*$. Множество $L$ ($A$; *действ.*) (рис. 1.1) всех таких точек $\{\alpha, \beta\}$ квадранта $\alpha, \beta \geqslant 0$, что оператор $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, называется *$L$-характеристикой* оператора $A$. Она обладает важным свойством экстраполяционности: если

$\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(A;$ *действ.*$)$, то

$$\{\alpha, \beta\} \in L(A; \textit{действ.}) \text{ при } \alpha \leqslant \alpha_0, \quad \beta \geqslant \beta_0.$$

Действительно, если $A$ действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, то он будет действовать и из более узкого $L_\alpha$ $(\alpha \leqslant \alpha_0)$ в более широкое $L_\beta$ $(\beta \geqslant \beta_0)$.

Из свойства экстраполяционности вытекает, что функция

$$\xi(\alpha) = \xi(\alpha; A; \textit{действ.}) = \inf_{\{\alpha, \beta\} \in L(A; \textit{действ.})} \beta \tag{1.21}$$

определена либо на некотором полуинтервале $[0, \alpha_0)$, либо на некотором отрезке $[0, \alpha_0]$ и не убывает. Очевидно,

$$\{\{\alpha, \beta\} : \beta > \xi(\alpha)\} \subset L(A; \textit{действ.}) \subset \{\{\alpha, \beta\} : \beta \geqslant \xi(\alpha)\}. \tag{1.22}$$

Множество $L(A;$ *действ.*$)$ обладает некоторыми простыми свойствами, непосредственно вытекающими из определения.

1. Для $L$-характеристик любых двух операторов $A$ и $B$ справедливы включение

$$L(A+B; \textit{действ.}) \supset L(A; \textit{действ.}) \cap L(B; \textit{действ.})$$

и неравенство

$$\xi(\alpha; A+B; \textit{действ.}) \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\xi(\alpha; A; \textit{действ.}), \xi(\alpha; B; \textit{действ.})\}.$$

Если $\xi(\alpha; A) \neq \xi(\alpha; B)$ при всех $\alpha$, то

$$L(A+B; \textit{действ.}) = L(A; \textit{действ.}) \cap L(B; \textit{действ.}).$$

2. Справедливо неравенство

$$\xi(\alpha; C; \textit{действ.}) \leqslant \xi(\alpha; A; \textit{действ.}) + \xi(\alpha; B; \textit{действ.}),$$

где через $C$ обозначен оператор, определенный равенством $Cx = Ax \cdot Bx$.

3. Пусть $A$ и $B$ — два оператора. $L$-характеристика $L(AB;$ *действ.*$)$ содержит множество точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых существует такое число $\gamma$, что

$$\{\alpha, \gamma\} \in L(B; \textit{действ.}), \quad \{\gamma, \beta\} \in L(A; \textit{действ.}).$$

Поэтому (если $\xi(\alpha, A;$ *действ.*$)$ непрерывна справа)

$$\xi(\alpha; AB; \textit{действ.}) \leqslant \xi[\xi(\alpha; B; \textit{действ.}); A; \textit{действ.}].$$

Естественно рассматривать подмножества $L$-характеристик $L(A;$ *действ.*$)$, состоящие из таких точек $\{\alpha, \beta\}$, что оператор $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и обладает каким-либо дополнительным свойством $\mathfrak{N}$: непрерывностью, компактностью и т. д. Эти подмножества будем обозначать через $L(A; \mathfrak{N})$ (рис. 1.2) и также будем называть *L-характеристиками* оператора $A$.

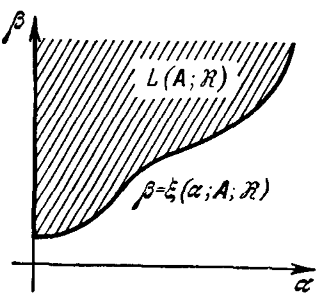


Рис. 1.2.

Для большинства изучаемых ниже свойств $\mathfrak{N}$ множества $L(A; \mathfrak{N})$ обладают свойством экстраполяционности. Аналогично $L$-характеристике $L(A;$ *действ.*$)$ множества $L(A; \mathfrak{N})$ в этих случаях определяются в основном монотонными функциями

$$\xi(\alpha; A; \mathfrak{N}) = \inf_{\{\alpha, \beta\} \in L(A; \mathfrak{N})} \beta.$$

Очевидно, $\xi(\alpha; A; \mathfrak{N}) \geqslant \xi(\alpha; A;$ *действ.*$)$. Часто будут рассматриваться $L$-характеристики $L(A;$ *непр.*$)$ и $L(A;$ *вп. непр.*$)$, соответствующие свойствам непрерывности или полной непрерывности оператора $A$.

В качестве простейшего примера рассмотрим оператор $A$, определенный равенством

$$Ax(s) = a(s)\,x(s),$$

где $a(s)$ — измеримая функция. Предположим, что $a(s) \in L_\gamma$. Тогда из (1.5) вытекает, что $Ax(s)$ — функция из $L_{\gamma+\alpha}$, если $x(s) \in L_\alpha$, причем

$$\| Ax(s) \|_{\gamma+\alpha} \leqslant \| a(s) \|_\gamma \, \| x(s) \|_\alpha.$$

Иными словами, $L$-характеристика $L(A;$ *непр.*$)$ содержит множество точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant \gamma + \alpha$.

$L$-характеристику $L(A;$ *непр.*$)$ оператора $A$ можно определить более полно. Пусть $\gamma_0$ — такое число, что $a(s) \in L_\gamma$ при $\gamma > \gamma_0$ и $a(s) \bar{\in} L_\gamma$ при $\gamma < \gamma_0$. Нетрудно видеть, что в случае $a(s) \in L_{\gamma_0}$ множество $L(A) = L(A;$ *непр.*$)$ совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant \gamma_0 + \alpha$, а в слуние $a(s) \in L_{\gamma_0}$ — с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant \gamma_0 + \alpha$ (рис. 1.3).

Понятие $L$-характеристики систематически применялось рядом авторов при геометрическом описании интерполяционных теорем для линейных операторов. Ряд утверждений

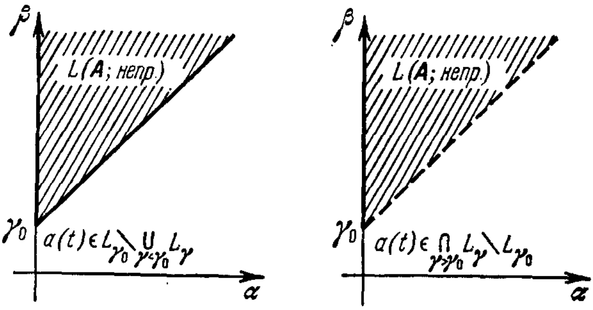


Рис. 1.3.

об общих свойствах $L$-характеристик приведен в статье П. П. Забрейко и М. А. Красносельского [1].

## § 2. Линейные непрерывные операторы

**2.1. Линейные операторы*).** В этом пункте мы напомним основные определения, относящиеся к линейным операторам, действующим из одного пространства $E_1$ в другое пространство $E_2$. Оператор $A$ линеен, если он аддитивен и однороден:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \equiv \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2. \tag{2.1}$$

Линейный оператор $A$ непрерывен, если он переводит сходящиеся по норме последовательности в последовательности, сходящиеся по норме. Если $E_1$ и $E_2$ — банаховы пространства, то линейный непрерывный оператор преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность в последовательность, сходящуюся слабо.

---

*) Общие вопросы теории линейных операторов в функциональных пространствах изложены во многих курсах функционального анализа (см. С. Банах [1], Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], А. Цаанен [3], Э. Хилле и Р. Филлипс [1], В. И. Смирнов [1]). Современное состояние вопроса и библиографию см. у Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1].

Линейным непрерывным операторам $A$ приписывают норму $\|A\|$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{E_1} \leqslant 1} \|Ax\|_{E_2}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) имеет смысл в случае любых банаховых пространств $E_1$ и $E_2$. Мы ее будем распространять и на тот случай, когда $E_1$ и $E_2$ — некоторые пространства $L_\alpha$ и $L_\beta$, причем числа $\alpha$ и $\beta$ могут быть бóльшими, чем 1. Норму линейного оператора $A$, действующего из $L_\alpha$ в $L_\beta$, будем обозначать через $\|A\|_{\alpha\to\beta}$.

Нас будут интересовать в этом параграфе вопросы, связанные с непрерывностью линейных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Доказательство непрерывности таких операторов равносильно доказательству неравенства

$$\|Ax\|_\beta \leqslant M\|x\|_\alpha \qquad (x \in L_\alpha). \tag{2.3}$$

Очевидно, infimum чисел $M$, при которых выполнено (2.3), равен $\|A\|_{\alpha\to\beta}$.

Оказывается, что нет ненулевых линейных непрерывных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$, если $\alpha > 1$ и $\beta < \alpha$. Для доказательства достаточно показать, что линейный непрерывный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, принимает нулевые значения на всех характеристических функциях $\varkappa_D$. Разобьем множество $D$ на $n$ частей $D_1, \ldots, D_n$ равной меры. Очевидно,

$$\|\varkappa_{D_i}\|_\alpha = n^{-\alpha}(\operatorname{mes} D)^\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

и поэтому

$$\|A\varkappa_{D_i}\|_\beta \leqslant \|A\|_{\alpha\to\beta}\, n^{-\alpha}(\operatorname{mes} D)^\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть сначала $\beta \leqslant 1$; тогда

$$\|A\varkappa_D\|_\beta = \left\|\sum_{i=1}^n A\varkappa_{D_i}\right\|_\beta \leqslant \sum_{i=1}^n \|A\varkappa_{D_i}\|_\beta \leqslant \|A\|_{\alpha\to\beta}(\operatorname{mes} D)^\alpha n^{1-\alpha}.$$

Если $\beta > 1$, то

$$\|A\varkappa_D\|_\beta = \left\|\sum_{i=1}^n A\varkappa_{D_i}\right\|_\beta \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|A\varkappa_{D_i}\|_\beta^{\frac{1}{\beta}}\right)^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|_{\alpha\to\beta}(\operatorname{mes} D)^\alpha n^{\beta-\alpha}.$$

Из полученных неравенств и произвольности $n$ вытекает, что $Ax_p \equiv 0$.

Доказанное утверждение означает, что $L$-характеристика $L(A;\ \textit{непр.})$ каждого ненулевого линейного оператора $A$ расположена в области, заштрихованной на рис. 2.1. Ниже, как правило, рассматриваются те части $L$-характеристик, которые лежат в полосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta < \infty$. Более того, в основных случаях интересны части $L$-характеристик, расположенные в единичном квадрате $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$.

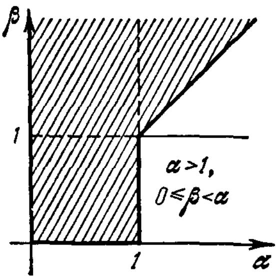


Рис. 2.1.

При изучении линейного оператора $A$, действующего из одного банахова пространства в другое, важную роль играет сопряженный оператор $A^*$, который действует из $\overset{*}{E_2}$ в $\overset{*}{E_1}$. Этот оператор определяется равенством

$$[A^*f](x) = f(Ax) \quad \left(x \in E_1,\ f \in \overset{*}{E_2}\right). \tag{2.4}$$

В случае линейных операторов $A$, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$, $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$, оператор $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ и равенство (2.4) имеет вид

$$(Ax,\ y) = (x,\ A^*y) \quad (x \in L_\alpha,\ y \in L_{1-\beta}). \tag{2.5}$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, $\beta = 0$, то сопряженный оператор $A^*$ будет действовать из $(L_0)^*$ в $L_{1-\alpha}$. Так как $L_1$ есть подпространство $(L_0)^*$, то $A^*$ можно рассматривать и как оператор из $L_1$ в $L_{1-\alpha}$; этот оператор также будем обозначать через $A^*$.

В заключение напомним, что

$$\| A \|_{E_1 \to E_2} = \| A^* \|_{E_2^* \to E_1^*}. \tag{2.6}$$

Это равенство верно и в случае, когда $A^*$ — оператор из $L_1$ в $L_{1-\alpha}$.

**2.2. Регулярные операторы.** Непосредственная проверка непрерывности линейного оператора или установление неравенства типа (2.3) часто связано с преодолением значительных трудностей. В связи с этим представляют интерес достаточные признаки непрерывности линейных операторов, выраженные в более простых их характеристиках.

Оператор $A$, действующий из функционального пространства $E_1$ в пространство $E_2$, называется *положительным*, если он неотрицательные функции переводит в неотрицательные. Для положительных линейных операторов легко устанавливается неравенство

$$|Ax| \leqslant A|x|. \tag{2.7}$$

Теорема 2.1. *Пусть $A$ — линейный положительный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

*Тогда $A$ непрерывен.*

Доказательство. Покажем сначала, что при некоторой постоянной $M$ выполнены неравенства

$$\| Ax \|_\beta \leqslant M \| x \|_\alpha \qquad (x \in L_\alpha,\ x \geqslant 0). \tag{2.8}$$

В противном случае найдется последовательность $x_n \in L_\alpha$, $\| x_n \|_\alpha \leqslant 1$, $x_n \geqslant 0$, для которой выполняется неравенство

$$\| Ax_n \|_\beta \geqslant n2^n. \tag{2.9}$$

Положим

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n. \tag{2.10}$$

Легко видеть, что $u_0 \in L_\alpha$. При $\alpha \leqslant 1$ это следует из абсолютной сходимости ряда (2.10), при $\alpha > 1$ — проверяется непосредственно:

$$\int_\Omega \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n(t) \right]^{\frac{1}{\alpha}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{\alpha}} \int_\Omega | x_n(t) |^{\frac{1}{\alpha}} dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left( 2^{-\frac{1}{\alpha}} \right)^n < \infty.$$

С другой стороны, $u_0 \geqslant \frac{x_n}{2^n}$, откуда вытекает, что

$$Au_0 \geqslant \frac{1}{2^n} Ax_n$$

и, следовательно,

$$\|Au_0\|_\beta \geqslant \frac{1}{2^n}\|Ax_n\|_\beta \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу (2.9),

$$\|Au_0\|_\beta \geqslant n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная функция из $L_\alpha$. В силу (2.7) и (2.8)

$$\|Ax(t)\|_\beta \leqslant \|A(|x|)\|_\beta \leqslant M\|x\|_\alpha.$$

Теорема доказана *).

Теорема 2.1 означает, что для положительных операторов множества $L(A;$ *действ.*$)$ и $L(A;$ *непр.*$)$ совпадают.

Линейный оператор $A$ называется *регулярным* **), если он представим в виде

$$A = A_1 - A_2,$$

где $A_1$ и $A_2$ — положительные операторы. Регулярный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, в силу теоремы 2.1 непрерывен. В последующих главах рассматриваются в основном регулярные операторы.

Для регулярности оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный положительный оператор $B$, удовлетворяющий неравенству

$$|Ax| \leqslant B(|x|). \tag{2.11}$$

---

*) Теорема 2.1 (если $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$) является частным случаем более общего утверждения, доказанного в статье И. А. Бахтина, М. А. Красносельского и В. Я. Стеценко [1]. В этой работе установлено, что линейный оператор $A$, действующий из банахова пространства $E_1$ с воспроизводящим конусом $K_1$ в банахово пространство $E_2$ с нормальным конусом $K_2$, непрерывен, если $AK_1 \subset K_2$. Это последнее утверждение является, с одной стороны, обобщением теоремы С. Банаха [1] о непрерывности интегрального оператора и, с другой стороны, теоремы М. Г. Крейна (см. М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]) о непрерывности положительного функционала на телесном конусе.

**) Подробный анализ регулярных линейных операторов проведен в монографии Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха и А. Г. Пинскера [1]. В этой монографии доказан ряд утверждений более общих, чем теоремы 2.2 и 2.3.

Оператор $B$, удовлетворяющий условию (2.11), будем называть положительной мажорантой оператора $A$.

Теорема 2.2. *Линейный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, регулярен в том и только том случае, если для каждой неотрицательной функции $u(t) \in L_\alpha$ можно указать такую неотрицательную функцию $v(t) \in L_\beta$, что*

$$Ax(t) \leqslant v(t) \qquad (0 \leqslant x(t) \leqslant u(t)). \tag{2.12}$$

Доказательство. Предположим, что оператор $A$ регулярен. Тогда можно указать положительную мажоранту $B$ оператора $A$.

Для каждой $u(t) \in L_\alpha$, $u(t) \geqslant 0$, положим $v(t) = Bu(t)$. Из (2.11) тогда вытекает

$$Ax(t) \leqslant |Ax(t)| \leqslant B(|x(t)|) \leqslant Bu(t) = v(t).$$

Необходимость доказана.

Перейдем к достаточности. В силу (2.12) множество функций $\{Ax(t),\ 0 \leqslant x(t) \leqslant u(t)\}$ ограничено в $L_\beta$ некоторым элементом $v(t)$. Поэтому существует $\sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant u} Ax$. Определим для неотрицательных $u(t) \in L_\alpha$ оператор

$$A_1 u(t) = \sup_{0 \leqslant x(t) \leqslant u(t)} Ax(t). \tag{2.13}$$

Очевидно, $A_1$ переводит неотрицательные функции $u(t)$ в неотрицательные и $A_1 u(t) \geqslant Au(t)$ $(u(t) \geqslant 0)$.

Покажем, что $A_1$ — аддитивный оператор на неотрицательных функциях в $L_\alpha$. Действительно, если $x = x_1 + x_2$, $0 \leqslant u_1 \leqslant x_1$, $0 \leqslant u_2 \leqslant x_2$, то

$$A_1 x = \sup_{0 \leqslant u \leqslant x} Au \geqslant \sup_{0 \leqslant u_i \leqslant x_i} A(u_1 + u_2) =$$
$$= \sup_{0 \leqslant u_i \leqslant x_i} (Au_1 + Au_2) \geqslant \sup_{0 \leqslant u_1 \leqslant x_1} Au_1 + \sup_{0 \leqslant u_2 \leqslant x_2} Au_2 = A_1 x_1 + A_1 x_2.$$

С другой стороны, если $0 \leqslant u \leqslant x_1 + x_2$, то существуют элементы $u_1$ и $u_2$ *), для которых $0 \leqslant u_i \leqslant x_i$ $(i = 1, 2)$, $u_1 + u_2 = u$. Поэтому из $Au = Au_1 + Au_2$ вытекает, что

$$Au \leqslant \sup_{0 \leqslant u_1 \leqslant x_1} Au_1 + \sup_{0 \leqslant u_2 \leqslant x_2} Au_2$$

*) Достаточно, например, положить $u_1 = \inf\{x_1, u\}$, $u_2 = u - u_1$.

і, следовательно,

$$A_1 x \leqslant A_1 x_1 + A_1 x_2.$$

Аддитивность оператора $A_1$ на неотрицательных функциях доказана. В силу (2.13) оператор $A_1$ однороден:

$$A_1 \lambda u(t) \equiv \lambda A_1 u(t) \quad (\lambda \geqslant 0).$$

Продолжим оператор $A_1$ равенством

$$A_1 x = A_1 x_+ - A_1 x_-,$$

где

$$x_+ = \sup\{x, 0\}, \quad x_- = \inf\{x, 0\},$$

и линейный оператор, определенный на всем $L_\alpha$. По теореме 2.1 $A_1$ непрерывен. Из (2.13) вытекает, что оператор $A_2 = A_1 - A$ также положителен и непрерывен. Так как $A = A_1 - A_2$, то $A$ регулярен.

Теорема доказана.

Заметим, что оператор $B = A_1 + A_2$ является положительной мажорантой оператора $A$. Более того, можно показать, что $B$ является «наименьшей» мажорантой оператора $A$. Последнее означает, что для любой другой положительной мажоранты $B_1$ оператора $A$ всегда выполняется соотношение

$$Bx(t) \leqslant B_1 x(t) \qquad (x(t) \geqslant 0).$$

Таким образом, одновременно доказано, что каждый регулярный оператор имеет наименьшую мажоранту.

Пусть $A$ — регулярный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1)$, т. е.

$$A = A_1 - A_2,$$

где $A_1$ и $A_2$ — положительные линейные операторы. Тогда сопряженный оператор $A^*$, действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$, также будет регулярным, так как

$$A^* = A_1^* - A_2^*,$$

а оператор, сопряженный к положительному, положителен.

Теорема 2.3. *Каждый линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_0$ или из $L_1$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \beta < 1)$, регулярен.*

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_0$. Так как $A$ непрерывен, то для любого $u(t)$ множество функций $\{Ax(t),\ 0 \leqslant x(t) \leqslant u(t)\}$ ограничено по норме: $\| Ax(t) \|_0 \leqslant \| A \|_{\alpha \to 0} \| u \|_\alpha$. Следовательно,

$$Ax(t) \leqslant v(t) \qquad (0 \leqslant x(t) \leqslant u(t)),$$

где $v(t) = \| A \|_{\alpha \to 0} \| u \|_\alpha \in L_0$. Регулярность оператора $A$ вытекает теперь из теоремы 2.2.

Пусть $A$ — непрерывный оператор, действующий из $L_1$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \beta < 1)$. Тогда сопряженный оператор $A^*$, действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_0$, регулярен и, следовательно, оператор $A$, который сопряжен оператору $A^*$, также регулярен. Теорема доказана.

**2.3. Интерполяционная теорема М. Рисса.** В этом пункте изучаются операторы, действующие из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega^*)$, причем предполагается, что $\alpha$ и $\beta$ - произвольные неотрицательные числа.

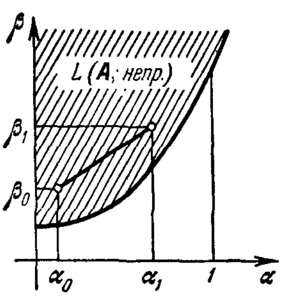


Рис. 2.2.

М. Риссу принадлежит замечательная теорема о том, что $L$-характеристики линейных операторов $A$, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$, являются выпуклыми множествами. Иначе говоря, $L$-характеристики $L$ ($A$; *непр.*) вместе с каждыми двумя точками *) $\{\alpha_0, \beta_0\}$ и $\{\alpha_1, \beta_1\}$ содержат полностью отрезок, их соединяющий (см. рис. 2.2). Этот факт установлен М. Риссом в форме так называемой интерполяционной теоремы.

Теорема 2.4. *Пусть $A$ — линейный оператор, являющийся одновременно непрерывным оператором из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$:*

$$\| Ax \|_{\beta_0} \leqslant M_0 \| x \|_{\alpha_0}, \tag{2.14}$$

$$\| Ax \|_{\beta_1} \leqslant M_1 \| x \|_{\alpha_1}. \tag{2.15}$$

---

*) М. Рисс [1] рассматривал лишь значения $\alpha_0$, $\beta_0$, $\alpha_1$ и $\beta_1$ из промежутка [0, 1]. Общая теорема получена А. Кальдероном и А. Зигмундом [1, 2].

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$ *оператор* $A$ *непрерывно действует из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$, *где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1, \tag{2.16}$$

*причем в случае комплексных пространств* $L_\alpha$

$$\| Ax \|_{\beta(\tau)} \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}, \tag{2.17}$$

*а в случае вещественных* $L_\alpha$

$$\| Ax \|_{\beta(\tau)} \leqslant C(\beta_0, \beta_1, \tau) M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}, \tag{2.18}$$

*где постоянная* $C(\beta_0, \beta_1, \tau)$ *не зависит от оператора* $A$.

Доказательство. Ограничимся проведением подробного доказательства для индексов $\alpha_0$, $\beta_0$, $\alpha_1$, $\beta_1$ из промежутка $[0, 1]$.

Рассмотрим сначала случай комплексных пространств $L_\alpha$, $L_\beta$.

Пусть $\alpha_0 > \alpha_1$. Покажем, что неравенство (2.17) справедливо для всех конечнозначных функций

$$x(s) = c_1\varkappa_1(s) + \ldots + c_m\varkappa_m(s),$$

где $\varkappa_1(s), \ldots, \varkappa_m(s)$ — характеристические функции непересекающихся множеств $\Omega_i \subset \Omega$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Неравенство (2.17) с фиксированной функцией $x(t) \in L_{\alpha(\tau)}$ эквивалентно неравенству

$$\sup \frac{|(Ax, y)|}{\| y \|_{1-\beta(\tau)}} \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}, \tag{2.19}$$

где supremum берется по всем $y(t)$ из некоторого всюду плотного в $L_{1-\beta(\tau)}$ множества. Для доказательства (2.17) достаточно поэтому установить неравенство

$$|(Ax, y)| \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)} \| y \|_{1-\beta(\tau)}$$

для любой конечнозначной функции $y(t)$:

$$y(t) = d_1\chi_1(t) + \ldots + d_n\chi_n(t),$$

где $\chi_1(t), \ldots, \chi_n(t)$ — характеристические функции непересекающихся множеств $\Omega_j^* \subset \Omega^*$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(z)$ комплексного переменного $z=u+iv$, определенную равенством

$$\Phi(z)=\left(A\left[|x|^{\alpha(z)-1}x\right],\ |y|^{\beta(z)-1}y\right)= \\ =\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}} c_i\bar{d}_j|c_i|^{\alpha(z)-1}|d_j|^{\beta(z)-1}\left(\int_{\Omega^*}A\varkappa_i(t)\chi_j(t)\,dt\right), \tag{2.20}$$

где

$$\alpha(z)=\frac{(1-z)\alpha_0+z\alpha_1}{\alpha(\tau)},\quad \beta(z)=\frac{1-(1-z)\beta_0-z\beta_1}{1-\beta(\tau)}. \tag{2.21}$$

Очевидно, $\Phi(z)$ аналитична в полосе $0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1$.

По теореме Адамара о трех прямых *) для любого $\tau\in(0,1)$ справедливо неравенство

$$|\Phi(\tau)|\leqslant \sup_v|\Phi(iv)|^{1-\tau}\sup_v|\Phi(1+iv)|^{\tau}. \tag{2.22}$$

Оценим выражения $\Phi(iv)$ и $\Phi(1+iv)$.

При $\operatorname{Re} z=0$ выполняются равенства

$$\alpha(z)=\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}+iv\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha(\tau)},\quad \beta(z)=\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}+iv\frac{\beta_0-\beta_1}{1-\beta(\tau)},$$

откуда

$$|\Phi(iv)|\leqslant\left|\left(A\left[|x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}-1+iv\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha(\tau)}}x\right],\ |y|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}-1+iv\frac{\beta_0-\beta_1}{1-\beta(\tau)}}y\right)\right|\leqslant \\ \leqslant\left\|A\left[|x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}-1+iv\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha(\tau)}}x\right]\right\|_{\beta_0}\left\||y|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}-1+iv\frac{\beta_0-\beta_1}{1-\beta(\tau)}}y\right\|_{1-\beta_0}\leqslant \\ \leqslant\left\|A\left[|x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}-1+iv\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha(\tau)}}x\right]\right\|_{\beta_0}\left\||y|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}}\right\|_{1-\beta_0}.$$

В силу (2.14) из этого неравенства следует, что

$$|\Phi(iv)|\leqslant M_0\left\||x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}-1+iv\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\alpha(\tau)}}x\right\|_{\alpha_0}\left\||y|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}}\right\|_{1-\beta_0}= \\ =M_0\left\||x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}}\right\|_{\alpha_0}\left\||y|^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}}\right\|_{1-\beta_0},$$

*) Для любой аналитической в полосе $0<\operatorname{Re} z<1$ и непрерывной в полосе $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$ функции $f(z)$ справедливо неравенство

$$|f(\tau)|\leqslant\sup_y|f(iy)|^{1-\tau}\sup_y|f(1+iy)|^{\tau}\qquad(0<\tau<1)$$

(см., например, А. И. Маркушевич [1]).

или

$$|\Phi(iv)| \leqslant M_0 \| x \|_{\alpha(\tau)}^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} \| y \|_{1-\beta(\tau)}^{\frac{1-\beta_0}{1-\beta(\tau)}}. \tag{2.23}$$

Аналогичными рассуждениями оценивается и второй сомножитель в правой части неравенства (2.22):

$$|\Phi(1+iv)| \leqslant M_1 \| x \|_{\alpha(\tau)}^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} \| y \|_{1-\beta(\tau)}^{\frac{1-\beta_1}{1-\beta(\tau)}}. \tag{2.24}$$

Из неравенств (2.22), (2.23) и (2.24) вытекает, что

$$|(Ax, y)| \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)} \| y \|_{1-\beta(\tau)}$$

и, следовательно, неравенство (2.17) выполняется для любой конечнозначной функции $x(s) \in L_{\alpha(\tau)}$.

Множество всех конечнозначных функций всюду плотно в $L_{\alpha(\tau)}$. Пусть $x(s) \in L_{\alpha(\tau)}$ и $x_1(s), x_2(s), \ldots$ — последовательность конечнозначных функций, сходящаяся в $L_{\alpha(\tau)}$ к $x(s)$. Из неравенства (2.17), справедливого для всех конечнозначных функций, вытекает тогда, что последовательность $Ax_n$ сходится по норме $L_{\beta(\tau)}$ к некоторому элементу $y \in L_{\beta(\tau)}$. С другой стороны, последовательность функций $x_n(s)$ сходится к $x(s)$ и по норме $L_{\alpha_0}$, так как $\alpha_0 > \alpha_1$. Поэтому последовательность $Ax_n(s)$ по норме $L_{\beta_0}$ сходится к элементу $Ax$. Отсюда вытекает, что $y = Ax$.

Переходя в неравенстве

$$\| Ax_n \|_{\beta(\tau)} \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x_n \|_{\alpha(\tau)}$$

к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (2.17) для функции $x \in L_{\alpha(\tau)}$.

Пусть теперь $\alpha_0 = \alpha_1$. Неравенство (2.17) вытекает тогда непосредственно из (1.7):

$$\| Ax \|_{\beta(\tau)} \leqslant \| Ax \|_{\beta_0}^{1-\tau} \| Ax \|_{\beta_1}^{\tau} \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}.$$

Теорема для случая комплексных пространств $L_\alpha$ доказана.

Пусть теперь пространства $L_\alpha$ вещественны и $A$ — данный оператор. Обозначим через $\tilde{A}$ продолжение оператора $A$ на комплекснозначные функции $z(t)=x(t)+iy(t)$, определенное равенством

$$\tilde{A}(x+iy)=Ax+iAy.$$

Из цепочки неравенств

$$\|\tilde{A}(x+iy)\|_{\beta_0}\leqslant\|Ax\|_{\beta_0}+\|Ay\|_{\beta_0}\leqslant$$
$$\leqslant M_0(\|x\|_{\alpha_0}+\|y\|_{\alpha_0})\leqslant 2M_0\|x+iy\|_{\alpha_0}$$

вытекает, что

$$\|\tilde{A}z\|_{\beta_0}\leqslant 2M_0\|z\|_{\alpha_0}.$$

Аналогично,

$$\|\tilde{A}z\|_{\beta_1}\leqslant 2M_1\|z\|_{\alpha_1}.$$

Применяя к оператору $\tilde{A}$ уже доказанную для комплексного случая часть теоремы, получим, что оператор $\tilde{A}$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ и

$$\|\tilde{A}z\|_{\beta(\tau)}\leqslant 2M_0^{1-\tau}M_1^{\tau}\|z\|_{\alpha(\tau)},$$

откуда вытекает неравенство

$$\|Ax\|_{\beta(\tau)}\leqslant 2M_0^{1-\tau}M_1^{\tau}\|x\|_{\alpha(\tau)}. \tag{2.25}$$

Теорема доказана для индексов $\alpha_0$, $\beta_0$, $\alpha_1$ и $\beta_1$ промежутка $[0, 1]$.

Приведенное доказательство заимствовано у А. Кальдерона и А. Зигмунда. Их доказательство, как мы уже отмечали, охватывает и индексы, большие чем 1. Основное изменение доказательства заключается в том, что вместо аналитической функции (2.20) рассматривается субгармоническая функция

$$\Phi(z)=\left(|A[|x|^{\alpha(z)-1}x]|^k,\ |y|^{\beta(z)-1}y\right),$$

где

$$\alpha(z)=\frac{(1-z)\alpha_0+z\alpha_1}{\alpha(\tau)},$$

$$\beta(z)=\frac{1-(1-z)k\beta_0-zk\beta_1}{1-k\beta(\tau)},$$

и $k$ удовлетворяет неравенствам

$$\beta_0k<1,\quad \beta_1k<1.$$

При этом вместо теоремы Адамара о трех прямых приходится пользоваться ее обобщением на субгармонические функции.

Как уже отмечалось, утверждение теоремы 2.3 означает, что $L$-характеристика $L(A;$ *непр.*$)$ является выпуклым множеством. Отсюда вытекает, что функция $\xi(\alpha, A;$ *непр.*$)$ выпукла и, в частности, непрерывна по $\alpha$.

В заключение пункта отметим, что неравенство (2.17) для вещественных пространств в общем случае несправедливо. Однако и для вещественных пространств неравенство (2.17) выполняется для специальных пар индексов $\alpha_i$, $\beta_i$ (тривиальным образом неравенство (2.17) выполняется, если $\alpha_0=\alpha_1$; нетривиальные утверждения излагаются ниже в п. 10.4). В следующем пункте будет показано, что неравенство (2.17) в случае вещественных пространств справедливо для специальных классов операторов.

**2.4. Интерполяционная теорема для регулярных операторов.** В этом пункте доказываются интерполяционные теоремы для положительных и регулярных операторов.

Теорема 2.5 *). *Пусть $A$ — линейный положительный оператор, действующий одновременно из пространства $L_{\alpha_0}$ в пространство $L_{\beta_0}$ и из пространства $L_{\alpha_1}$ в пространство $L_{\beta_1}$:*

$$\|Ax\|_{\beta_0}\leqslant M_0\|x\|_{\alpha_0},\qquad \|Ax\|_{\beta_1}\leqslant M_1\|x\|_{\alpha_1},$$

*где $\beta_0$ и $\beta_1$ могут быть любыми неотрицательными числами.*

*Тогда при любом $\tau\in(0, 1)$ оператор $A$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau)=(1-\tau)\alpha_0+\tau\alpha_1,\qquad \beta(\tau)=(1-\tau)\beta_0+\tau\beta_1,$$

*причем*

$$\|Ax\|_{\beta(\tau)}\leqslant M_0^{1-\tau}M_1^{\tau}\|x\|_{\alpha(\tau)}. \tag{2.26}$$

*) Матричный аналог теоремы 2.5 указан в книге Г. Харди, Д. Литтльвуда и Г. Полиа [1]. В общем виде теорема доказана в статье П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльника [2]. Близкое утверждение было ранее получено Е. И. Пустыльником [4].

Подчеркнем, что для положительных операторов неравенство (2.17) справедливо как для вещественных, так и для комплексных пространств.

Доказательство. Теорему достаточно доказать для случая $\alpha_0 > \alpha_1$. Как и при доказательстве теоремы 2.4, неравенство (2.26) достаточно установить для конечнозначных функций

$$x(s) = c_1\varkappa_1(s) + \ldots + c_m\varkappa_m(s) \tag{2.27}$$

($\varkappa_i(s)$ — характеристические функции непересекающихся множеств $\Omega_i \subset \Omega$ ($i = 1, \ldots, m$)).

Докажем вначале неравенство

$$|Ax(t)| \leqslant \left[A\left(|x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}}\right)\right]^{1-\tau} \left[A\left(|x|^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}}\right)\right]^{\tau}. \tag{2.28}$$

В силу (2.27) это неравенство можно переписать в виде

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i A\varkappa_i(t)\right| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{m} |c_i|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} A\varkappa_i(t)\right]^{1-\tau} \left[\sum_{i=1}^{m} |c_i|^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} A\varkappa_i(t)\right]^{\tau}. \tag{2.29}$$

Пусть при $t = t_0$ все числа $A\varkappa_i(t)$ конечны. Положим $\Delta_i = A\varkappa_i(t)\big|_{t=t_0}$ ($i = 1, \ldots, m$). Очевидно, все $\Delta_i$ неотрицательны. Поэтому справедливо неравенство Гёльдера

$$\left|\sum_{i=1}^{m} u_i v_i \Delta_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i|^{\frac{1}{1-\tau}} \Delta_i\right)^{1-\tau} \left(\sum_{i=1}^{m} |v_i|^{\frac{1}{\tau}} \Delta_i\right)^{\tau} \quad (0 < \tau < 1).$$

Полагая в нем $u_i = |c_i|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}(1-\tau)} \operatorname{sign} c_i$, $v_i = |c_i|^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}\tau}$, получим неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{m} c_i \Delta_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} |c_i|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} \Delta_i\right)^{1-\tau} \left(\sum_{i=1}^{m} |c_i|^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} \Delta_i\right)^{\tau},$$

которое в силу линейности оператора $A$ равносильно неравенству

$$|Ax(t)| \leqslant \left[A\left(|x|^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}}\right)\right]^{1-\tau} \left[A\left(|x|^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}}\right)\right]^{\tau}$$

при $t = t_0$.

Так как почти при всех $t \in \Omega^*$ функции $A\varkappa_l(t)$ конечны, то неравенство (2.28) справедливо почти при всех $t \in \Omega^*$. Поэтому

$$\| Ax(t) \|_{\beta(\tau)} \leqslant \left\| \left[ A\left( | x |^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} \right) \right]^{1-\tau} \left[ A\left( | x |^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} \right) \right]^{\tau} \right\|_{\beta(\tau)},$$

откуда, в силу неравенства Гёльдера (1.5),

$$\| Ax(t) \|_{\beta(\tau)} \leqslant \left\| A\left( | x |^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} \right) \right\|_{\beta_0}^{1-\tau} \left\| A\left( | x |^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} \right) \right\|_{\beta_1}^{\tau}. \quad (2.30)$$

Из (2.24) и (2.30) непосредственно следует, что

$$\| Ax(t) \|_{\beta(\tau)} \leqslant M_0^{1-\tau} \left\| | x |^{\frac{\alpha_0}{\alpha(\tau)}} \right\|_{\alpha_0}^{1-\tau} M_1^{\tau} \left\| | x |^{\frac{\alpha_1}{\alpha(\tau)}} \right\|_{\alpha_1}^{\tau} =$$
$$= M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}.$$

Неравенство (2.26) доказано для всех конечнозначных функций $x(t)$. Отсюда вытекает (см. доказательство теоремы 2.4), что оно справедливо для всех функций $x(t) \in L_{\alpha(\tau)}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2.5 и определения регулярного оператора непосредственно вытекает

Теорема 2.6. *Пусть оператор* $A$ *имеет положительную мажоранту* $B$:

$$| Ax | \leqslant B(| x |). \quad (2.31)$$

*Пусть положительный оператор* $B$ *действует одновременно из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$ *и из* $L_{\alpha_1}$ *в* $L_{\beta_1}$:

$$\| Bx \|_{\beta_0} \leqslant N_0 \| x \|_{\alpha_0}, \quad \| Bx \|_{\beta_1} \leqslant N_1 \| x \|_{\alpha_1}.$$

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$ *оператор* $A$ *непрерывно действует из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$, *где*

$$\alpha(\tau) = (1 - \tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1 - \tau)\beta_0 + \tau\beta_1,$$

*причем*

$$\| Ax \|_{\beta(\tau)} \leqslant N_0^{1-\tau} N_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}.$$

Пусть $A$ — регулярный линейный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$, $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$. Обозначим через $B$ «наименьшую» положительную мажоранту $A$ как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ (см. п. 2.2). В силу (2.13) оператор $B$ будет также «наименьшей» положительной мажорантой $A$ как оператора из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$. Но отсюда в силу теоремы 2.5 следует, что $B$ является положительным оператором, действующим из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ $(0<\tau<1)$. Тем самым $B$ является положительной мажорантой $A$ как оператора из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$.

Из проведенных рассуждений вытекает, что *$L$-характеристика $L(A;\ рег.)$ каждого линейного оператора $A$ выпукла.*

**2.5. Класс $L$-характеристик линейных операторов.** Выше было показано, что $L$-характеристика $L\ (A;\ \textit{непр.})$ линейного оператора $A$ является выпуклым множеством, обладающим свойством экстраполяционности (см. п. 1.6). Возникает естественный вопрос о том, нет ли других общих свойств у $L$-характеристик линейных операторов. Этот вопрос полностью не исследован. Однако, как показывает доказываемая ниже теорема 2.7, каждое выпуклое множество, обладающее свойством экстраполяционности, отличается от $L$-характеристики некоторого линейного оператора $A$ лишь граничными точками.

Для простоты в этом пункте рассматриваются пространства функций, определенных на $[0,\ 1]$.

Теорема 2.7 *). *Пусть выпуклое в полосе $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ открытое множество $L_0$ обладает тем свойством, что оно вместе с точкой $\{\alpha_0,\ \beta_0\}$ содержит точки $\{\alpha,\ \beta\}$, для которых $\alpha\leqslant\alpha_0$, $\beta\geqslant\beta_0$.*

*Тогда существует линейный оператор $A$, для которого множество внутренних точек $L$-характеристики $L(A;\ непр.)$ совпадает с множеством $L_0$.*

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t)=\int_0^1 K(t,\ s)\,x(s)\,ds, \tag{2.32}$$

где

$$K(t,\ s)=\frac{1}{t^{a_1}s^{b_1}+t^{a_2}s^{b_2}}, \tag{2.33}$$

а числа $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ удовлетворяют неравенствам

$$0<a_1<a_2<\infty,\quad 0<b_2<b_1<1.$$

---

*) Основную идею доказательства этой теоремы указал Б. С. Митягин.

Из (2.33) вытекает, что

$$|K(t, s)| \leqslant t^{-a_i} s^{-b_i} \qquad (i = 1, 2). \tag{2.34}$$

Пусть $i$ фиксировано. Тогда оператор $A$ действует из любого $L_\alpha$ в любое $L_\beta$ при $\alpha < 1 - b_i$, $\beta > a_i$. Действительно, при $x(s) \in L_\alpha$, $\alpha < 1 - b_i$

$$|Ax(t)| = \left| \int_0^1 K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant t^{-a_i} \int_0^1 s^{-b_i} |x(s)|\, ds \leqslant$$
$$\leqslant t^{-a_i} \left( \int_0^1 s^{\frac{-b_i}{1-\alpha}}\, ds \right)^{1-\alpha} \|x\|_\alpha$$

и, следовательно,

$$\|Ax\|_\beta \leqslant \frac{1}{\left[1 - \frac{a_i}{\beta}\right]^\beta \left[1 - \frac{b_i}{1-\alpha}\right]^{1-\alpha}} \|x\|_\alpha. \tag{2.35}$$

Применяя к оператору $A$ теорему 2.4, получаем, что он действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, если числа $\alpha$, $\beta$ удовлетворяют неравенствам

$$\alpha < 1 - b_2, \quad \beta > \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}\alpha + a_1 - (1 - b_1)\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}, \quad \beta > a_1. \tag{2.36}$$

Границу множества точек, координаты которых удовлетворяют этим неравенствам, обозначим через Г. Из неравенства (2.35) и интерполяционной теоремы М. Рисса вытекает, что

$$\|Ax\|_\beta \leqslant M \|x\|_\alpha, \tag{2.37}$$

где $M$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированных $\alpha$, $\beta$ лишь от расстояния точки $\{\alpha, \beta\}$ до Г. Таким образом, множество $L(A;$ *непр.*$)$ содержит все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых выполняются три неравенства (2.36).

Оказывается, что множество внутренних точек $L$-характеристики оператора $A$ совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых выполняются неравенства (2.36) (рис. 2.3). Для доказательства достаточно показать, что точка $\{\alpha, \beta\}$, для которой выполняется одно из неравенств

$$\alpha > 1 - b_2,$$
$$\beta < \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}\alpha + a_1 - (1 - b_1)\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2},$$
$$\beta < a_1,$$

не принадлежит $L(A;\ \textit{непр.})$.

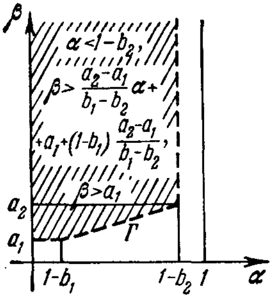

Рис. 2.3.

Функция $x_0(s) = s^{-\gamma}$ принадлежит $L_\alpha$ при $\alpha > \gamma$. Рассмотрим функцию

$$Ax_0(t) = \int_0^1 \frac{s^{-\gamma}\,ds}{t^{a_1}s^{b_1} + t^{a_2}s^{b_2}}. \qquad (2.38)$$

Для оценки $Ax_0(t)$ произведем в (2.38) замену $s = t^{\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}}u$:

$$Ax_0(t) = t^{-\left[a_1 + (\gamma + b_1 - 1)\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}\right]} \int_0^{t^{-\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}}} \frac{u^{-b_2 - \gamma}}{1 + u^{b_1 - b_2}}\,du. \qquad (2.39)$$

При $\gamma > 1 - b_2$ интеграл в правой части (2.39) расходится и оператор $A$ из пространства $L_\alpha$, $\alpha > 1 - b_2$ не действует ни в какое $L_\beta$. Иными словами, множество $L(A;\ \textit{непр.})$ не содержит точек $\{\alpha, \beta\}$ с $\alpha > 1 - b_2$.

Пусть $1 - b_2 > \gamma > 1 - b_1$. Из (2.39) вытекает, что

$$Ax_0(t) \geqslant c_0 t^{-\left[a_1 + \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}(b_1 + \gamma - 1)\right]},$$

где

$$c_0 = \int_0^1 \frac{u^{-b_2 - \gamma}}{1 + u^{b_1 - b_2}}\,du.$$

Поэтому $Ax_0(t)$ не суммируема со степенью $\frac{1}{\beta}$, если

$$\beta \leqslant a_1 + \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}(b_1 + \gamma - 1). \qquad (2.40)$$

Это означает, что оператор $A$ не действует из $L_\alpha$, $1 - b_1 < \alpha < 1 - b_2$, в пространства $L_\beta$, если $\beta$ удовлетворяет неравенству (2.40), или, иначе, множество $L(A;\ \textit{непр.})$ не содержит точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых

$$\beta < \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}\alpha + a_1 - (1 - b_1)\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}, \quad 1 - b_1 < \alpha < 1 - b_2.$$

Пусть, наконец, $\gamma < 1 - b_1$. Из (2.39) вытекает неравенство

$$Ax_0(t) \geqslant ct^{-\left[a_1 + \frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}(b_1 + \gamma - 1)\right]} \int\limits_0^{t^{-\frac{a_2 - a_1}{b_1 - b_2}}} u^{-b_1 - \gamma}\, du \geqslant c_1 t^{-a_1}$$

$$(t \leqslant t_0 < 1).$$

Следовательно, функция $Ax_0(t)$ не суммируема со степенями $r$, для которых

$$\frac{1}{r} < a_1.$$

Иными словами, множество $L(A;\ \textit{непр.})$ не содержит точек, для которых $\beta < a_1$.

Рассмотрим теперь произвольное открытое множество $L_0$, удовлетворяющее условиям теоремы; через $\xi_0(\alpha)$ обозначим выпуклую непрерывную функцию

$$\xi_0(\alpha) = \inf_{\{\alpha, \beta\} \in L_1} \beta.$$

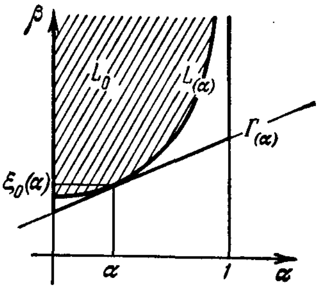

Рис. 2.4.

Обозначим, далее, через $\Gamma_{(\alpha)}$ опорную прямую к множеству $L_0$ в точке $\{\alpha, \xi_0(\alpha)\}$, а через $L_{(\alpha)}$ — множество точек полосы $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, лежащих выше $\Gamma_{(\alpha)}$ (рис. 2.4).

Выберем на отрезке [0, 1] счетное всюду плотное множество чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ Очевидно,

$$L_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{(\alpha_n)}.$$

Пусть $A_n$ — оператор вида (2.32) с ядром $K_n(t, s)$ вида (2.33), внутренняя часть $L$-характеристики которого совпадает с множеством $L_{(\alpha_n)}$.

Рассмотрим положительный оператор $B$, определенный равенством

$$B=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}A_i, \tag{2.41}$$

и покажем, что он удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть $\{\alpha, \beta\}\in L_0$. Так как расстояние от этой точки до границ $\Gamma_{(\alpha_n)}$ множеств $L_{(\alpha_n)}$ ограничено снизу, то в силу (2.36) можно считать, что выполняются неравенства

$$\| A_i x\|_\beta \leqslant M\| x\|_\alpha \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Поэтому для любого $x\in L_\alpha$ ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}A_i x$$

сходится по норме $L_\beta$ и $Bx\in L_\beta$. Таким образом, $\{\alpha, \beta\}\in$ $\in L(A;$ *непр.*$)$.

Пусть теперь точка $\{\alpha, \beta\}$ не принадлежит замыканию $L_0$. Тогда, очевидно, существует такое число $i_0$, что $\{\alpha, \beta\}\overline{\in} L_{(i_0)}$. Это означает, что $A_{i_0}$ не действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Из неравенства

$$Ax\geqslant\frac{1}{2^{i_0}}A_{i_0}x,$$

справедливого для положительных функций из $L_\alpha$, вытекает, что оператор $B$ также не действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, т. е. $\{\alpha, \beta\}\overline{\in} L(B;$ *непр.*$)$.

Теорема доказана.

### 2.6. Об одном свойстве линейных регулярных операторов.

Теорема 2.8 *). *Пусть $A$ — линейный регулярный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0\leqslant\alpha<\infty, 0<\beta<\infty)$.*

*Тогда каждое множество функций $\mathfrak{M}$ с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\alpha$ оператор $A$ переводит в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\beta$.*

---

*) Эта теорема доказана П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльником (П. П. Забрейко [2]).

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно в случае, когда $\alpha = 0$. Пусть $\alpha > 0$. Достаточно рассмотреть положительные операторы $A$. Можно также считать, что функции $x(s) \in \mathfrak{M}$ неотрицательны.

Из условий теоремы следует, что

$$\| x(s) \|_\alpha \leqslant a \qquad (x(s) \in \mathfrak{M}).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из равностепенной абсолютной непрерывности норм в $L_\alpha$ функций $x(s) \in \mathfrak{M}$ вытекает существование такого $\delta_0 > 0$, что

$$\| P_D x(s) \|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2^{\beta+1} \| A \|_{\alpha \to \beta}} \qquad (x \in \mathfrak{M}),$$

если $\operatorname{mes} D < \delta_0$. Положим

$$h_0 = \frac{a}{\delta_0^\alpha}.$$

Каждую функцию $x(s) \in \mathfrak{M}$ представим в виде

$$x(s) = x_1(s) + x_2(s),$$

где

$$x_1(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если} \quad |x(s)| \leqslant h_0, \\ 0, & \text{если} \quad |x(s)| > h_0. \end{cases}$$

Очевидно, $|x_1(s)| \leqslant h_0$ и мера множества $D(\varepsilon; x)$ точек $s$, для которых $x_2(s) \neq 0$, меньше $\delta_0$. Отсюда вытекает, что

$$\| x_2(s) \|_\alpha = \| P_{D(\varepsilon;\, x)} x(s) \|_\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{\beta+1} \| A \|_{\alpha \to \beta}}.$$

Из последнего неравенства следует, что для произвольного множества $D^* \subset \Omega^*$

$$\| P_{D^*} A x(t) \|_\beta \leqslant 2^\beta h_0 \| P_{D^*} A u_0(t) \|_\beta + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x(s) \in \mathfrak{M}),$$

где $u_0(s) \equiv 1$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что

$$\| P_{L^*} A x(t) \|_\beta < \varepsilon \qquad (x(s) \in \mathfrak{M}),$$

если $\operatorname{mes} D^* < \delta$.

Теорема доказана.

**2.7. Интерполяционная теорема Марцинкевича** [1]. Через $\lambda(h) = \lambda(z;\ h)$, где $z(t)$ — некоторая измеримая функция, обозначим меру множества точек $t$, при которых $|z(t)| \geqslant h$:

$$\lambda(z;\ h) = \operatorname{mes}\{t : |z(t)| \geqslant h\}. \tag{2.42}$$

Для каждой измеримой функции $z(t)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega |z(t)|\,dt = \int_0^\infty \lambda(z;\ h)\,dh.$$

Из него вытекает, что при $r > 0$

$$\int_\Omega |z(t)|^r\,dt = \int_0^\infty \lambda[|z(t)|^r;\ h]\,dh = \int_0^\infty \lambda\left(|z|;\ h^{\frac{1}{r}}\right)dh =$$
$$= \int_0^\infty \lambda(z;\ h)\,dh^r = r\int_0^\infty h^{r-1}\lambda(z;\ h)\,dh.$$

Поэтому при $\beta > 0$

$$\|z\|_\beta = \left\{\frac{1}{\beta}\int_0^\infty h^{\frac{1-\beta}{\beta}}\lambda(z;\ h)\,dh\right\}^\beta \quad (z(t)\in L_\beta). \tag{2.43}$$

Функция

$$\mu(h) = h\,[\lambda(z;\ h)]^\beta \tag{2.44}$$

очевидным образом ограничена, если $z(t)\in L_\beta$. Обратное места не имеет, например, функция $z(t) = t^{-\beta}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ не принадлежит $L_\beta$, в то время как построенная по ней функция (2.44) ограничена. Из ограниченности функции (2.44) вытекает лишь, что функция $z(t)$ принадлежит всем пространствам $L_{\beta+\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$.

Обозначим через $M_\beta$ $(\beta > 0)$ совокупность всех функций $z(t)$, для которых функция (2.44) ограничена, и положим

$$\|z(t)\|^*_{M_\beta} = \sup_{0<h<\infty} h\,[\lambda(z;\ h)]^\beta.$$

Удобно считать, что $M_0 = L_0$ и

$$\|z(t)\|^*_{M_0} = \|z(t)\|_0.$$

Пусть линейный оператор $A$ определен на пространстве $L_\alpha$, где $\alpha$ — некоторое число из промежутка $[0,\ 1]$. Будем говорить, что оператор $A$ удовлетворяет условию Марцинкевича $LM(\alpha, \beta)$, если для всех функций $x(s) \in L_\alpha$ выполняется неравенство

$$\| Ax \|^*_{M_\beta} \leqslant C \| x \|_\alpha, \tag{2.45}$$

где $C$ — некоторая постоянная.

Нетрудно показать, что оператор $A$ удовлетворяет условию Марцинкевича $LM(\alpha, \beta)$, если неравенство (2.45) выполнено для функций из некоторого плотного в $L_\alpha$ множества.

Теорема 2.9. *Пусть линейный оператор $A$ удовлетворяет условиям Марцинкевича* $LM(\alpha_0, \beta_0)$, $LM(\alpha_1, \beta_1)$:

$$\| Ax \|^*_{M_{\beta_0}} \leqslant C_0 \| x \|_{\alpha_0}, \tag{2.46}$$

$$\| Ax \|^*_{M_{\beta_1}} \leqslant C_1 \| x \|_{\alpha_1}. \tag{2.47}$$

*Пусть выполнены неравенства*

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1 \tag{2.48}$$

*и*

$$\beta_0 \neq \beta_1. \tag{2.49}$$

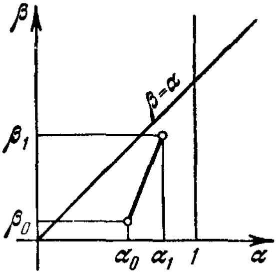


Рис. 2.5.

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$ *оператор $A$ действует из пространства $L_{\alpha(\tau)}$ в пространство $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1, \tag{2.50}$$

*непрерывен и*

$$\| A \|_{\alpha \to \beta} \leqslant \frac{2}{|\beta_0 - \beta_1| \, \tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^\tau. \tag{2.51}$$

Неравенства (2.48) и (2.49) означают (рис. 2.5), что отрезок, соединяющий точки $\{\alpha_0, \beta_0\}$ и $\{\alpha_1, \beta_1\}$, лежит под биссектрисой $\beta = \alpha$ первого координатного угла и образует ненулевой угол с осью ординат. Утверждение теоремы 2.9 означает, что все внутренние точки этого отрезка принадлежат $L(A;$ *непр.*). В этом смысле теорема Марцинкевича является существенным дополнением к интерполяционной теореме М. Рисса.

Ограничимся доказательством теоремы 2.9 для случая, когда оба числа $\beta_0$ и $\beta_1$ положительны. Для определенности будем считать, что $\beta_0 < \beta_1$.

Приводимое доказательство принадлежит А. Зигмунду [1]. Пусть $y(t)\in M_{\beta_0}$. Рассмотрим интеграл

$$J=\int_0^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}}\lambda(y;\ h)\,dh.$$

При любом положительном $c$

$$J=\int_0^c h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}}\lambda(y;\ h)\,dh+\int_c^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}}\lambda(y;\ h)\,dh\leqslant$$

$$\leqslant\left(\|y\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\frac{1}{\beta_1}}\int_0^c h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_1}}\,dh+\left(\|y\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}\int_c^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_0}}\,dh=$$

$$=\frac{\beta_1\beta(\tau)}{(1-\tau)(\beta_1-\beta_0)}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\frac{1}{\beta_1}}c^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_1}}+$$

$$+\frac{\beta_0\beta(\tau)}{\tau(\beta_1-\beta_0)}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{\frac{1}{\beta_0}}c^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_0}}.$$

Правая часть этого неравенства принимает наименьшее значение при

$$c=\frac{\left(\|y\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_0}}}{\left(\|y\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\frac{\beta_0}{\beta_1-\beta_0}}}.$$

Поэтому

$$J\leqslant\frac{[\beta(\tau)]^2}{(\beta_1-\beta_0)\,\tau\,(1-\tau)}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{\frac{1-\tau}{\beta(\tau)}}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\frac{\tau}{\beta(\tau)}}$$

и из (2.43) вытекает, что

$$\|y\|_{\beta(\tau)}\leqslant\frac{1}{|\beta_0-\beta_1|\,\tau\,(1-\tau)}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{1-\tau}\left(\|y\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\tau}. \tag{2.52}$$

Из этого неравенства утверждение теоремы 2.9 при $\alpha_0=\alpha_1$ вытекает очевидным образом.

Пусть теперь $\alpha_0\neq\alpha_1$.

Пусть $x(s)$ — некоторая конечнозначная функция. Положим

$$u_c(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если } |x(s)| \leqslant c, \\ c \operatorname{sign} x(s), & \text{если } |x(s)| > c, \end{cases}$$

и

$$v_c(s) = x(s) - u_c(s).$$

Очевидно,

$$\lambda(u_c;\ h) = \begin{cases} \lambda(x;\ h), & \text{если } 0 \leqslant h \leqslant c, \\ 0, & \text{если } c < h < \infty, \end{cases} \tag{2.53}$$

и

$$\lambda(v_c;\ h) = \lambda(x;\ c+h) \qquad (h > 0). \tag{2.54}$$

Из (2.46) вытекает, что

$$\lambda\left(Au_c;\ \frac{1}{2}h\right) \leqslant (2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}} h^{-\frac{1}{\beta_0}} \left(\|u_c\|_{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{\beta_0}} =$$

$$= (2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}} h^{-\frac{1}{\beta_1}} \left[\frac{1}{\alpha_0} \int_0^\infty k^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} \lambda(u_c;\ k)\, dk\right]^{\frac{\alpha_0}{\beta_1}},$$

и, в силу (2.53),

$$\lambda\left(Au_c;\ \frac{1}{2}h\right) \leqslant (2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}} \alpha_0^{-\frac{\alpha_0}{\beta_0}} h^{-\frac{1}{\beta_1}} \left[\int_0^c k^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} \lambda(x,\ k)\, dk\right]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}. \tag{2.55}$$

Аналогично, из (2.47) вытекает, что

$$\lambda\left(Av_c;\ \frac{h}{2}\right) \leqslant (2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}} h^{-\frac{1}{\beta_1}} \left(\|v_c\|_{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1}} =$$

$$= (2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}} h^{-\frac{1}{\beta_1}} \left[\frac{1}{\alpha_1} \int_0^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}} \lambda(v_c;\ k)\, dk\right]^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}},$$

и поэтому из (2.54) и из

$$\int_0^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}} \lambda(x;\ c+k)\, dk \leqslant \int_c^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}} \lambda(x;\ k)\, dk$$

следует, что

$$\lambda\left(Av_c;\ \frac{1}{2}h\right)\leqslant(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}}\alpha_1^{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}h^{-\frac{1}{\beta_1}}\left[\int\limits_c^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}\lambda(x;\ k)\,dk\right]^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}. \tag{2.56}$$

Перейдем к оценке функции $\lambda(Ax;\ h)$. Из равенства

$$Ax=Au_c+Av_c$$

вытекает, что

$$\lambda(Ax;\ h)\leqslant\lambda\left(Au_c;\ \frac{1}{2}h\right)+\lambda\left(Av_c;\ \frac{1}{2}h\right),$$

откуда, в силу (2.55) и (2.56),

$$\lambda(Ax;\ h)\leqslant(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}}\alpha_0^{-\frac{\alpha_0}{\beta_0}}h^{-\frac{1}{\beta_0}}\left[\int\limits_0^c k^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}}\lambda(x;\ k)\,dk\right]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}+$$
$$+(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}}\alpha_1^{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}h^{-\frac{1}{\beta_1}}\left[\int\limits_c^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}\lambda(x;\ k)\,dk\right]^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}. \tag{2.57}$$

Из (2.57) вытекает неравенство

$$J(x)=\frac{1}{\beta(\tau)}\int\limits_0^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}}\lambda(Ax;\ h)\,dh\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}}}{\alpha_0^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}\beta(\tau)}\int\limits_0^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_0}}\left[\int\limits_0^c k^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}}\lambda(x;\ k)\,dk\right]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}dh+$$
$$+\frac{(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\beta(\tau)}\int\limits_0^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_1}}\left[\int\limits_c^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}}\lambda(x;\ k)\,dk\right]^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}dh. \tag{2.58}$$

В последнем иеравенстве можно считать, что $c$ зависит от $h$. Будем считать, что

$$c=\left(\frac{1}{b}h\right)^{\frac{1}{\xi}},$$

где

$$\xi=\frac{\alpha_1-\alpha_0}{\beta_1-\alpha_0}\,\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)},$$

а $b$ — произвольное положительное число.

Для оценки каждого из интегралов, стоящих в правой части неравенства (2.58), применим обобщенное неравенство Минковского *)

$$\int\limits_h \left| \int\limits_k \varphi(h, k)\,dk \right|^q dh \leqslant \left\{ \int\limits_k \left[ \int\limits_h |\varphi(h, k)|^q\,dh \right]^{\frac{1}{q}} dk \right\}^q \quad (q \geqslant 1) \tag{2.59}$$

— к первому интегралу при $q = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$, а ко второму — при $q = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$. В результате получим

$$J(x) \leqslant \frac{(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}}}{\alpha_0^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} \beta(\tau)} \left\{ \int\limits_0^\infty k^{\frac{1-\alpha_0}{\alpha_0}} \left[ \int\limits_{\psi(k)}^\infty h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)} - \frac{1}{\beta_0}}\,dh \right]^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}} \lambda(x;\, k)\,dk \right\}^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} +$$

$$+ \frac{(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \beta(\tau)} \left\{ \int\limits_0^\infty k^{\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}} \left[ \int\limits_0^{\psi(k)} h^{\frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)} - \frac{1}{\beta_1}}\,dh \right]^{\frac{\beta_1}{\alpha_1}} \lambda(x;\, k)\,dk \right\}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}, \tag{2.60}$$

*) Неравенство (2.59) вытекает из цепочки очевидных соотношений:

$$\int\limits_h \left| \int\limits_k \varphi(h, k)\,dk \right|^q dh \leqslant \int\limits_h \left[ \int\limits_k |\varphi(h, k)|\,dk \right]^q dh =$$

$$= \int\limits_h \left[ \int\limits_k |\varphi(h, k)|\,dk \right]^{q-1} \int\limits_{k_1} |\varphi(h, k_1)|\,dk_1\,dh =$$

$$= \int\limits_{k_1} \int\limits_h \left\{ \left[ \int\limits_k |\varphi(h, k)|\,dk \right]^{q-1} |\varphi(h, k_1)| \right\} dh\,dk_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{k_1} \left\{ \int\limits_h \left[ \int\limits_k |\varphi(h, k)|\,dk \right]^q dh \right\}^{\frac{q-1}{q}} \left\{ \int\limits_h |\varphi(h, k_1)|^q\,dh \right\}^{\frac{1}{q}} dk_1 =$$

$$= \left\{ \int\limits_h \left[ \int\limits_k |\varphi(h, k)|\,dk \right]^q dh \right\}^{\frac{q-1}{q}} \int\limits_{k_1} \left\{ \int\limits_h |\varphi(h, k_1)|^q\,dh \right\}^{\frac{1}{q}} dk_1.$$

Перестановки интегралов в этой цепочке законны в силу теоремы Фубини.

где

$$\psi(k) = bk^{\xi}.$$

Вычисляя в (2.60) внутренние интегралы, получим неравенство

$$J(x) \leqslant \frac{(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}}}{\alpha_0^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}} \frac{\beta_0}{(\beta_1-\beta_0)\tau} \left\{ \int_0^\infty k^{\frac{1-\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)}} \lambda(x;\ k)\,dk \right\}^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} b^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_0}} +$$

$$+ \frac{(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} \frac{\beta_1}{(\beta_1-\beta_0)(1-\tau)} \left\{ \int_0^\infty k^{\frac{1-\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)}} \lambda(x;\ k)\,dk \right\}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} b^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_1}}$$

или

$$J(x) \leqslant \frac{(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}} [\alpha(\tau)]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} \beta_0}{\alpha_0^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} (\beta_1-\beta_0)\tau} \left( \| x \|_{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{\alpha_0}{\beta_0 \alpha(\tau)}} b^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_0}} +$$

$$+ \frac{(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}} [\alpha(\tau)]^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \beta_1}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} (\beta_1-\beta_0)(1-\tau)} \left( \| x \|_{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1 \alpha(\tau)}} b^{\frac{1}{\beta(\tau)}-\frac{1}{\beta_1}}. \qquad (2.61)$$

Неравенство (2.61) выполнено при всех $b$. В частности, оно выполнено и при

$$b = \left\{ \frac{(2C_0)^{\frac{1}{\beta_0}} \alpha_0^{-\frac{\alpha_0}{\beta_0}}}{(2C_1)^{\frac{1}{\beta_1}} \alpha_1^{-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} [\alpha(\tau)]^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}-\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \left( \| x \|_{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}\left(\frac{\alpha_0}{\beta_0}-\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)} \right\}^{\frac{\beta_0\beta_1}{\beta_1-\beta_0}}.$$

Подставляя это значение в (2.61), получаем неравенство

$$J(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\alpha(\tau)]^{\frac{\alpha(\tau)}{\beta(\tau)}}}{\alpha_0^{\frac{(1-\tau)\alpha_0}{\beta(\tau)}} \alpha_1^{\frac{\tau\alpha_1}{\beta(\tau)}}} \frac{\beta(\tau)}{(\beta_1-\beta_0)\tau(1-\tau)} (2C_0)^{\frac{1-\tau}{\beta(\tau)}} (2C_1)^{\frac{\tau}{\beta(\tau)}} \left( \| x \|_{\alpha(\tau)} \right)^{\frac{1}{\beta(\tau)}},$$

откуда следует, что

$$\| Ax \|_{\beta(\tau)} \leqslant \frac{2[\alpha(\tau)]^{\alpha(\tau)}}{\alpha_0^{(1-\tau)\alpha_0} \alpha_1^{\tau\alpha_1}} \frac{[\beta(\tau)]^{\beta(\tau)}}{[(\beta_1-\beta_0)\tau(1-\tau)]^{\beta(\tau)}} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)}. \qquad (2.62)$$

Множество конечнозначных функций плотно в пространстве $L_{\alpha(\tau)}$. Поэтому оператор $A$ допускает продолжение в непрерывный оператор $\tilde{A}$, действующий из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{A}x = Ax \qquad (x \in L_{\alpha(\tau)}).$$

Поэтому оператор $A$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ и непрерывен. Его норма $\|A\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)}$ удовлетворяет неравенству (2.51), которое вытекает из (2.62) и из очевидных числовых неравенств

$$[\alpha(\tau)]^{\alpha(\tau)} \leqslant \alpha_0^{(1-\tau)\alpha_0}\alpha_1^{\tau\alpha_1}, \qquad [\beta(\tau)]^{\beta(\tau)} \leqslant 1,$$

$$[(\beta_1-\beta_0)\tau(1-\tau)]^{\beta(\tau)} \geqslant (\beta_1-\beta_0)\tau(1-\tau).$$

Теорема 2.9 доказана.

## § 3. Вполне непрерывные линейные операторы

**3.1. Вполне непрерывные линейные операторы *).** Оператор называется *компактным*, если он преобразует ограниченные множества в компактные. Для линейных операторов из компактности вытекает непрерывность. Линейные компактные операторы называются *вполне непрерывными*.

Будем говорить, что оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, *компактен по мере*, если множество элементов $\{Ax: \|x\|_\alpha \leqslant 1\}$ компактно по мере. Как оказывается, наиболее важные операторы, действующие в пространствах $L_\alpha$, — интегральные — обладают обычно свойством компактности по мере.

Теорема 3.1. *Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty)$. Для компактности оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы $A$ был компактным по мере оператором и чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \|P_{D^*}A\|_{\alpha\to\beta} = 0. \tag{3.1}$$

*) Пункты 3.1—3.3 написаны на основе ряда теорем, ранее указанных в работах М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [2], М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого [1, 3, 5], Т. Андо [1], П. П. Забрейко [2]. Особо отметим, что основные идеи доказательств теорем 3.5 и 3.9 взяты у Т. Андо; полные их формулировки указаны П. П. Забрейко [2].

Доказательство. Из (3.1) вытекает, что значения оператора $A$ на каждом шаре имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Поэтому достаточность условий теоремы вытекает из леммы 1.1.

Если $A$ компактен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$, то он компактен и по мере. Остается показать, что выполняется (3.1).

Предположим противное. Тогда найдутся такие элементы $x_1, x_2, \ldots, \|x_n\|_\alpha \leqslant 1$, и такая последовательность множеств $D_n^*$ с мерой, стремящейся при $n \to \infty$ к нулю, что

$$\left\| P_{D_n^*} A x_n \right\|_\beta \geqslant \varepsilon_0 > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Однако это неравенство противоречит равностепенно абсолютной непрерывности норм элементов $Ax_n$.

Теорема доказана.

Для регулярных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$), справедливо более сильное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $A$ — линейный регулярный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($0 \leqslant \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$).*

*Для компактности оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы $A$ был компактным по мере оператором и чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* + \operatorname{mes} D \to 0} \| P_{D^*} A P_D \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 в доказательстве нуждается лишь тот факт, что для регулярных операторов из (3.2) вытекает (3.1).

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\delta_0 > 0$, что при $\operatorname{mes} D < \delta_0$ ($D \subset \Omega$), $\operatorname{mes} D^* < \delta_0$ ($D^* \subset \Omega^*$) выполнено неравенство

$$\| P_{D^*} A P_D \|_{\alpha \to \beta} < \frac{\varepsilon}{2^{\beta+1}}.$$

Пусть $u_0(s) \equiv 1$. Выберем число $\delta \leqslant \delta_0$ так, чтобы из $\operatorname{mes} D^* < \delta$ вытекало неравенство

$$\| P_{D^*} B u_0 \|_\beta < \frac{\varepsilon \delta_0^\alpha}{2^{\beta+1}},$$

где $B$ — некоторая положительная мажоранта оператора $A$.

Пусть $x(s)$ — фиксированная функция из единичного шара пространства $L_\alpha$. Обозначим через $D_x$ множество тех точек $s$, в которых выполняется неравенство $|x(s)| \geqslant \delta_0^{-\alpha}$. Пусть $\operatorname{mes} D^* < \delta$. Тогда

$$\|P_{D^*}Ax\|_\beta \leqslant 2^\beta \|P_{D^*}A(x - P_{D_x}x)\|_\beta + 2^\beta \|P_{D^*}AP_{D_x}x\|_\beta \leqslant$$
$$\leqslant 2^\beta \|P_{D^*}B(|x - P_{D_x}x|)\|_\beta + 2^\beta \|P_{D^*}AP_{D_x}\|_{\alpha\to\beta} \leqslant$$
$$\leqslant 2^\beta \delta_0^{-\alpha} \|P_{D^*}Bu_0\|_\beta + 2^\beta \|P_{D^*}AP_{D_x}\|_{\alpha\to\beta}.$$

Следовательно, $\|P_{D^*}A\|_{\alpha\to\beta} < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Отметим, что утверждения теорем 3.1. и 3.2 неверны для операторов со значениями в пространстве $L_0$.

**3.2. Полная непрерывность и сопряженные операторы.** В этом пункте рассматриваются операторы, действующие из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$.

В приложениях вместо оператора $A$ иногда более удобно исследовать сопряженный оператор $A^*$. Напомним, что оператор $A$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда вполне непрерывен оператор $A^*$. Это утверждение сохраняет силу и в том случае, когда $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_0$, а $A^*$ рассматривается как оператор из $L_1$ в $L_{1-\alpha}$ (см. п. 2.1). Кроме того, сформулированное утверждение верно и для таких линейных операторов $A$, которые действуют из $L_0$ в некоторое пространство $L_\beta$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ и сопряженные операторы к которым принимают на функциях из $L_{1-\beta}$ значения, принадлежащие $L_1$. Отметим, что к таким классам принадлежат многие важные в приложениях линейные операторы (например, регулярные интегральные операторы; см. § 4).

В дальнейших построениях участвуют суперпозиции линейных операторов $A$ с проекционными операторами вида $P_D$ и $P_{D^*}$ $(D \subset \Omega,\ D^* \subset \Omega^*)$. Часто используются очевидные равенства

$$(P_{D^*}A)^* = A^*P_{D^*}, \quad (AP_D)^* = P_DA^*.$$

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекают следующие утверждения.

Теорема 3.3. *Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 < \alpha < 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1)$.*

*Для полной непрерывности оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$*

*оператор $A^*$ был компактным по мере и чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0} \| AP_D \|_{\alpha\to\beta} = 0. \tag{3.3}$$

Теорема 3.4. *Пусть $A$ — линейный регулярный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0<\alpha<1,\ 0\leqslant\beta\leqslant 1)$.*

*Для полной непрерывности оператора $A$ необходимо и достаточно, чтобы действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ оператор $A^*$ был компактным по мере и чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D^*+\operatorname{mes} D\to 0} \| P_{D^*}AP_D \|_{\alpha\to\beta} = 0. \tag{3.4}$$

В условиях этих теорем можно считать, что $\alpha=0$, если оператор $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_1$.

Теорема 3.5. *Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0<\alpha<1,\ 0<\beta<1)$.*

*Для полной непрерывности $A$ необходимо и достаточно, чтобы операторы $A$ и $A^*$ были компактными по мере и чтобы выполнялось равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D^*+\operatorname{mes} D\to 0} \| P_{D^*}AP_D \|_{\alpha\to\beta} = 0. \tag{3.4}$$

Для доказательства достаточности мы установим, что оператор $A$ преобразует слабо сходящиеся последовательности в последовательности, сходящиеся сильно. Отсюда будет вытекать, что $A$ преобразует единичный шар $\|x\|_\alpha\leqslant 1$ в компактное множество (для каждой последовательности $Ax_n$, $\|x_n\|_\alpha\leqslant 1$ можно указать последовательность $x_{n_i}$, сходящуюся слабо, так как пространства $L_\alpha$ при $0<\alpha<1$ слабо компактны).

Предположим, что $A$ некоторую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, не сходящуюся по норме. Тогда найдется слабо сходящаяся к нулю последовательность $x_n\in L_\alpha$, $\|x_n\|_\alpha\leqslant 1$, для которой

$$\|Ax_n\|_\beta\geqslant c_0>0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{3.5}$$

Последовательность $Ax_n$ также слабо сходится (в $L_\beta$) к нулю. Из компактности по мере оператора $A$ вытекает, что последовательность $Ax_n$ сходится к нулю по мере. Без ограничения общности можно считать, что $Ax_n$ сходится к нулю почти всюду.

По теореме Егорова для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое множество $D_\varepsilon^* \subset \Omega^*$, что $\operatorname{mes} D_\varepsilon^* < \varepsilon$, и на $\Omega^* \setminus D_\varepsilon^*$ последовательность функций $Ax_n$ сходится к нулю равномерно. Это значит, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| P_{\Omega^* \setminus D_\varepsilon^*} A x_n \right\|_\beta = 0. \tag{3.6}$$

Будем считать, что $D_\varepsilon^*$ — выбранное фиксированное множество.

Из (3.5) вытекает существование таких функций $y_n \in \in L_{1-\beta}$, $\|y_n\|_{1-\beta} \leqslant 1$, что

$$(Ax_n,\ y_n) \geqslant c_0 > 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

При этом без ограничения общности можно считать, что последовательность $y_n$ сходится слабо к некоторой функции $y_0$, $\|y_0\|_{1-\beta} \leqslant 1$. Очевидно,

$$(Ax_n,\ y_n - y_0) = (Ax_n,\ y_n) - (x_n,\ A^* y_0).$$

Второе слагаемое в правой части при $n \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому можно считать, что при всех $n$ выполнено неравенство

$$(Ax_n,\ y_n - y_0) > \frac{1}{2} c_0 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последовательность $A^* P_{D_\varepsilon^*} (y_n - y_0)$ сходится слабо к нулю. Из компактности по мере оператора $A^*$ вытекает, что последовательность $A^* P_{D_\varepsilon^*} (y_n - y_0)$ также сходится по мере к нулю (см. конец п. 1.3). Без ограничения общности можно считать, что последовательность $A^* P_{D_\varepsilon^*} (y_n - y_0)$ сходится к нулю почти всюду. Поэтому для каждого $\varepsilon_1 > 0$ можно указать такое множество $D_{\varepsilon_1} \subset \Omega$, что $\operatorname{mes} D_{\varepsilon_1} < \varepsilon_1$ и на $\Omega \setminus D_{\varepsilon_1}$ последовательность $A^* P_{D_{\varepsilon_1}} (y_n - y_0)$ сходится к нулю равномерно. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| P_{\Omega \setminus D_{\varepsilon_1}} A^* P_{D_\varepsilon^*} (y_n - y_0) \right\|_{1-\alpha} = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим тождество

$$(Ax_n, y_n - y_0) = \left(P_{\Omega^* \setminus D_\varepsilon^*} A x_n, y_n - y_0\right) + \\ + \left(P_{D_\varepsilon^*} A P_{D_\varepsilon} x_n, y_n - y_0\right) + \left(x_n, P_{\Omega \setminus D_\varepsilon} A^* P_{D_\varepsilon^*}(y_n - y_0)\right).$$

Первое и третье слагаемые в силу (3.6) и (3.7) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Поэтому при достаточно больших $n$ выполнено неравенство

$$\left(P_{D_\varepsilon^*} A P_{D_\varepsilon} x_n, y_n - y_0\right) \geqslant \frac{c_0}{4}.$$

Отсюда

$$\left\| P_{D_\varepsilon^*} A P_{D_\varepsilon} x_n \right\|_\beta \| y_n - y_0 \|_{1-\beta} \geqslant \frac{c_0}{4},$$

а так как $\| x_n \|_\alpha \leqslant 1$ и $\| y_n - y_0 \|_{1-\beta} \leqslant 2$, то

$$\left\| P_{D_\varepsilon^*} A P_{D_\varepsilon} \right\|_{\alpha \to \beta} \geqslant \frac{c_0}{8}.$$

Полученное неравенство противоречит (3.4). Достаточность условий теоремы доказана. Необходимость вытекает, например, из теоремы 3.1.

Теорема доказана.

**3.3. Свойства компактных по мере операторов.** В следующей главе будет показано, что при естественных предположениях линейные интегральные операторы компактны по мере. Поэтому представляет интерес независимое изучение компактных по мере линейных операторов.

Теорема 3.6. *Линейный непрерывный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta \leqslant 1$), компактен по мере тогда и только тогда, когда он преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность $x_n \in L_\alpha$ в последовательность $Ax_n$, сходящуюся по мере.*

Доказательство. Достаточность вытекает из слабой компактности единичного шара в пространстве $L_\alpha$ ($0 \leqslant \alpha < 1$).

Пусть теперь оператор $A$ компактен по мере и последовательность $x_n$ слабо сходится к $x_0$. Из непрерывности оператора $A$ вытекает тогда, что последовательность $Ax_n$ слабо сходится к $Ax_0$. С другой стороны, последовательность элементов $Ax_n$ компактна по мере. Поэтому $Ax_n$ сходится к $Ax_0$ по мере.

Теорема доказана.

В ряде случаев из компактности оператора по мере вытекает его полная непрерывность.

Пусть, например, $A$ — компактный по мере и регулярный оператор, действующий из $L_0$ в $L_\beta$, где $\beta > 0$. Тогда оператор $A$ удовлетворяет неравенству $|Ax| \leqslant B(|x|)$ (см. (2.10)), где $B$ — некоторый положительный линейный оператор. Функции $x(t)$ из шара $\|x(t)\|_0 \leqslant 1$ удовлетворяют неравенству $|x(t)| \leqslant 1$. Поэтому

$$|Ax(t)| \leqslant Bu_0 \qquad (\|x\|_0 \leqslant 1),$$

где $u_0(s) \equiv 1$. Из последнего неравенства вытекает, что функции $Ax(t)$ $(\|x\|_0 \leqslant 1)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Из леммы 1.1 вытекает, что множество функций $Ax(t)$ $(\|x\|_0 \leqslant 1)$ компактно в $L_\beta$. Значит, $A$ вполне непрерывен.

Из проведенных рассуждений немедленно вытекает, что действующий из $L_\alpha$, где $\alpha < 1$, в $L_1$ регулярный оператор $A$ вполне непрерывен, если сопряженный оператор $A^*$ компактен по мере.

Теорема 3.7. *Пусть $A$ — непрерывный компактный по мере оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

*Тогда $A$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_{\beta_1}$, где $\beta_1 > \beta$.*

Теорема 3.8. *Пусть $A$ — регулярный компактный по мере оператор, действующий из $L_{\alpha_1}$ в $L_\beta$ $(\beta > 0)$.*

*Тогда $A$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_{\alpha_1}$ в $L_\beta$, где $\alpha_1 > \alpha$.*

Доказательство теоремы 3.7 очевидно: оператор $A$ преобразует шар $\|x\|_\alpha \leqslant 1$ в множество функций, которое компактно по мере и имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_{\beta_1}$. Остается сослаться на лемму 1.1.

Для доказательства теоремы 3.8 нужно заметить, что единичный шар пространства $L_{\alpha_1}$ является множеством функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\alpha$. Поэтому по теореме 2.7 функции $Ax$, $\|x\|_{\alpha_1} \leqslant 1$, имеют также равностепенно абсолютно непрерывные нормы и, следовательно, $A$ вполне непрерывен.

Теоремы 3.7 и 3.8 доказаны.

Утверждения, аналогичные теоремам 3.7 и 3.8, справедливы и для линейных операторов $A$, сопряженные к которым являются компактными по мере.

Дальнейшей нашей целью является доказательство интересной теоремы Т. Андо [1], усиливающей утверждения теорем 3.7 и 3.8 для случая $\alpha<\beta\leqslant 1$.

Лемма 3.1. *Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0<\alpha<\beta\leqslant 1$. Тогда*

$$\lim_{\operatorname{mes} D+\operatorname{mes} D^*\to 0} \| P_{D^*}AP_D \|_{\alpha\to\beta}=0. \tag{3.8}$$

Доказательство. В предположении противного можно построить такие последовательности множеств $D_n^*\subset\Omega^*$, $D_n\subset\Omega$, что $\operatorname{mes} D_n+\operatorname{mes} D_n^*\to 0$ и

$$\left\| P_{D_n^*}AP_{D_n}\right\|_{\alpha\to\beta}>c_0>0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Можно считать, что

$$\operatorname{mes} D_n^*+\operatorname{mes} D_n\leqslant\frac{1}{2^n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Введем в рассмотрение новые множества

$$E_n=\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k, \qquad E_n^*=\bigcup_{k=n}^{\infty} D_k^*.$$

Очевидно, $\operatorname{mes} E_n+\operatorname{mes} E_n^*\to 0$ и

$$\left\| P_{E_n^*}AP_{E_n}\right\|_{\alpha\to\beta}\geqslant\left\| P_{D_n^*}AP_{D_n}\right\|_{\alpha\to\beta}>c_0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Из равенства

$$\left\| P_{E_n^*}AP_{E_n}\right\|_{\alpha\to\beta}=\lim_{m\to\infty}\left\| P_{E_n^*-E_m^*}AP_{E_n-E_m}\right\|_{\alpha\to\beta}$$

вытекает существование такой последовательности индексов $n_k$, что

$$\left\| P_{E_{n_k}^*-E_{n_{k+1}}^*}AP_{E_{n_k}-E_{n_{k+1}}}\right\|_{\alpha\to\beta}>c_0 \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Иначе говоря, найдутся такие функции $x_k \in L_\alpha$, $y_k \in L_{1-\beta}$, что $\| x_k \|_\alpha \leqslant 1$, $\| y_k \|_{1-\beta} \leqslant 1$ и

$$\left(P_{E^*_{n_k} - E^*_{n_{k+1}}} A P_{E_{n_k} - E_{n_{k+1}}} x_k,\ y_k\right) > c_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Функции

$$u_k = P_{E^*_{n_k} - E^*_{n_{k+1}}} x_k, \quad v_k = P_{E_{n_k} - E_{n_{k+1}}} y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

имеют непересекающиеся носители *), их нормы в соответствующих пространствах $L_\alpha$ и $L_{1-\beta}$ не превосходят 1 и

$$(Au_k,\ v_k) > c_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.9}$$

Из равенства

$$\lim_{k \to \infty} \left[\operatorname{mes}\left(E^*_{n_k} - E^*_{n_{k+1}}\right) + \operatorname{mes}\left(E_{n_k} - E_{n_{k+1}}\right)\right] = 0,$$

вытекает, что

$$\lim_{l \to \infty} (Au_k,\ v_l) = \lim_{l \to \infty} \left(Au_k,\ P_{E^*_{n_l} - E^*_{n_{l+1}}} v_l\right) =$$
$$= \lim_{l \to \infty} \left(P_{E^*_{n_l} - E^*_{n_{l+1}}} Au_k,\ v_l\right) = 0. \tag{3.10}$$

Аналогично,

$$\lim_{k \to \infty} (Au_k,\ v_l) = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) следует существование такой последовательности индексов $k_i$, что

$$\left(Au_{k_i},\ v_{k_j}\right) < \frac{1}{2^{i+j}} \qquad (i \neq j). \tag{3.12}$$

Определим теперь функции $\xi(s)$, $\eta(t)$ равенствами

$$\xi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_{k_i}(s), \qquad \eta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i v_{k_i}(t),$$

где числа $a_i$, $b_i$ неотрицательны и

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{\frac{1}{1-\beta}} \leqslant 1. \tag{3.13}$$

Очевидно, $\xi(s) \in L_\alpha$, $\eta(t) \in L_{1-\beta}$. Поэтому

$$|(A\xi,\ \eta)| = \left| \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j \left(Au_{k_i},\ v_{k_j}\right) \right| < \infty.$$

---

*) Это значит, что $u_i(s)\, u_j(s) \equiv 0$, $v_i(t)\, v_j(t) \equiv 0$ при $i \neq j$.

Отсюда, в силу (3.9) и (3.12),

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leqslant \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i (Au_{k_i}, v_{k_i}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{c_0}(A\xi, \eta) + \sum_{i, j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} < \infty.$$

С другой стороны, так как $\alpha > \beta$, то последовательности $\{a_i\} \in l_\alpha$ и $\{b_i\} \in l_{1-\beta}$ можно выбрать так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ расходился.

Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Теорема 3.9. *Пусть $A$ - линейный непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 < \alpha < \beta < 1$. Пусть выполнено одно из условий:*

*а) $A$ компактен по мере и регулярен,*

*б) $A^*$ компактен по мере и регулярен,*

*в) $A$ и $A^*$ компактны по мере.*

*Тогда $A$ — вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Рассмотрим случай а). Так как оператор $A$ регулярен, то существует (см. п. 2.2) положительный оператор $B$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и удовлетворяющий неравенству

$$|Ax| \leqslant B(|x|). \tag{3.14}$$

Из леммы 3.1 следует, что

$$\lim_{\text{mes } D^* + \text{mes } D \to 0} \| P_{D^*} B P_D \|_{\alpha \to \beta} = 0.$$

Поэтому, как было показано при доказательстве теоремы 3.2, справедливо равенство

$$\lim_{\text{mes } D^* \to 0} \| P_{D^*} B \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) следует, что

$$\lim_{\text{mes } D^* \to 0} \| P_{D^*} A \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{3.16}$$

Полная непрерывность вытекает теперь из теоремы 3.1.

В случае б) вполне непрерывен оператор $A^*$, действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$. Следовательно, вполне непрерывен и оператор $A$.

В случае в) нужно сослаться на теорему 3.5.

Теорема доказана.

**3.4. Интерполирование свойства полной непрерывности.** Свойство полной непрерывности линейного оператора $A$ также может быть проинтерполировано. Соответствующие утверждения *) являются следствием неравенств (2.16) — (2.17) интерполяционной теоремы о непрерывности.

Теорема 3.10. *Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$ ($0 \leqslant \alpha_0$, $\beta_0$, $\alpha_1$, $\beta_1 \leqslant 1$). Пусть $A$ - вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$.*

*Тогда $A$ при любом $\tau \in (0, 1)$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1. \qquad (3.17)$$

Доказательство. Обозначим через $P_1$, $P_2$, ... такую правильную последовательность проекционных операторов (см. п. 1.3), которая сильно сходится к единичному оператору $I$ на подпространстве $E \subset L_{\beta_0}$, являющемся замкнутой линейной оболочкой множества значений оператора $A$ на $L_{\alpha_0}$. Если $\beta_0 = 0$ то возможность построения такой последовательности проекционных операторов вытекает из леммы 1.5. Если $\beta_0 > 0$, то в силу леммы 1.4 указанным свойством будет обладать каждая правильная последовательность проекционных операторов.

Так как $A$ вполне непрерывный оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_\beta$, и так как $\|Ax - P_nAx\|_{\beta_0} \to 0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер $n_0$, что при $n \geqslant n_0$ будет выполняться неравенство

$$\|(A - P_nA)x\|_{\beta_0} < \varepsilon \|x\|_{\alpha_0}. \qquad (3.18)$$

Действительно, в противном случае существует последовательность $x_k$, $\|x_k\|_\alpha \leqslant 1$, для которой

$$\left\|\left(I - P_{n_k}\right)Ax_k\right\|_{\beta_0} \geqslant \varepsilon_0. \qquad (3.19)$$

*) Теорема 3.10 доказана М. А. Красносельским [8]. Более общая теорема 3.11 установлена в статье П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльника [2].

В силу полной непрерывности $A$ без ограничения общности можно считать, что $Ax_k \Rightarrow y_0$. Из неравенства

$$\|(I-P_{n_k})Ax_k\|_{\beta_0} \leqslant \|(I-P_{n_k})(Ax_{n_k}-y_0)\|_{\beta_0} + \\ + \|(I-P_{n_k})y_0\|_{\beta_0} \leqslant 2\|Ax_k-y_0\|_{\beta_0} + \|(I-P_{n_k})y_0\|_{\beta_0}$$

вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|(I-P_{n_k})Ax_k\|_{\beta_0} = 0,$$

что противоречит (3.19).

С другой стороны, выполняется неравенство

$$\|(A-P_nA)x\|_{\beta_1} \leqslant 2\|A\|_{\alpha_1\to\beta_1}\|x\|_{\alpha_1}. \tag{3.20}$$

При каждом $n$ оператор $P_nA$ является, очевидно, вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$. Из теоремы 2.3 (неравенства (2.16) и (2.17)) и оценок (3.18), (3.20) следует неравенство

$$\|(I-P_n)Ax\|_{\beta(\tau)} \leqslant 2\varepsilon^{1-\tau}\|A\|_{\alpha_1\to\beta_1}\|x\|_{\alpha(\tau)}.$$

Таким образом, при любом $\tau\in(0, 1)$ оператор $A$, действующий из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ является пределом (по норме операторов) вполне непрерывных операторов $P_nA$. Поэтому оператор $A$ вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Теорема 3.11. *Пусть $A$—линейный непрерывный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$ ($0\leqslant\alpha_0$, $\alpha_1\leqslant 1$, $0\leqslant\beta_0$, $\beta_1<\infty$). Пусть $A$ — вполне непрерывный оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$.*

*Тогда при любом $\tau\in(0, 1)$ оператор $A$ — вполне непрерывный оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1.$$

Доказательство. Пусть сначала $\beta_0>0$. Из полной непрерывности оператора $A$ как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ в силу теоремы 3.1 вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D^*\to 0} \|P_{D^*}A\|_{\alpha_0\to\beta_0} = 0.$$

Очевидно,

$$\|P_{D^*}A\|_{\alpha_1\to\beta_1} \leqslant \|A\|_{\alpha_1\to\beta_1}.$$

Из последних двух соотношений и из интерполяционной теоремы 2.4 вытекает равенство

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} A \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} = 0.$$

В силу теоремы 3.1 для доказательства полной непрерывности $A$ как оператора из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ достаточно показать, что $A$ компактен по мере.

Компактность по мере оператора $A$, действующего из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, очевидна, если $\alpha_0 \geqslant \alpha_1$. Остается рассмотреть случай, когда $\alpha_0 < \alpha_1$.

Введем в рассмотрение оператор

$$T_h x(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если } |x(s)| \leqslant h, \\ h \cdot \operatorname{sign} x(t), & \text{если } |x(s)| > h. \end{cases}$$

Этот оператор преобразует каждое множество функций в множество равномерно ограниченных функций, которое лежит в некотором шаре пространства $L_{\alpha_0}$. Из полной непрерывности $A$ как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ вытекает, что множество значений оператора $AT_h$ при каждом фиксированном $h$ компактно по мере. Поэтому компактность по мере $A$ как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ будет установлена, если мы покажем, что при некотором $\beta^*$ норма $\| Ax - AT_h x \|_{\beta^*}$ стремится к нулю при $h \to \infty$ равномерно относительно функций $x(s)$ из шара $\| x \|_{\alpha(\tau)} \leqslant 1$.

Положим $\beta^* = \beta_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \| Ax - AT_h x \|_{\beta_1} &\leqslant \| A \|_{\alpha_1 \to \beta_1} \| x - T_h x \|_{\alpha_1} = \\ &= \| A \|_{\alpha_1 \to \beta_1} \| (x - T_h x) \cdot \varkappa(h;\ x) \|_{\alpha_1} \leqslant \\ &\leqslant \| A \|_{\alpha_1 \to \beta_1} \| (x - T_h x) \|_{\alpha(\tau)} \| \varkappa(h;\ x) \|_{\alpha_1 - \alpha(\tau)}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\varkappa(h;\ x)$ — характеристическая функция множества тех точек, в которых $|x(s)| \geqslant h$. Очевидно,

$$\operatorname{mes} \{ s : |x(s)| \geqslant h \} \leqslant h^{-\frac{1}{\alpha(\tau)}},$$

откуда

$$\| \varkappa(h;\ x) \|_{\alpha_1 - \alpha(\tau)} \leqslant h^{\frac{\alpha(\tau) - \alpha_1}{\alpha(\tau)}}.$$

Из (3.21) следует тогда, что

$$\| Ax - AT_h x \|_{\beta_1} \leqslant \| A \|_{\alpha_1 \to \beta_1} \cdot h^{\frac{\alpha(\tau) - \alpha_1}{\alpha(\tau)}}.$$

Утверждение теоремы в случае $\beta_0 > 0$ доказано.

Пусть $\beta_0 = 0$. Если $\beta_1 \leqslant 1$, то мы находимся в условиях теоремы 3.10 и полная непрерывность $A$ как оператора из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ доказана. Остается рассмотреть случай, когда $\beta_1 > 1$.

Положим $\alpha^* = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$. Из теоремы 2.5 вытекает, что $A$ непрерывен как оператор из $L_{\alpha^*}$ в $L_1$. Из теоремы 3.10 следует тогда, что $A$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ при всех таких $\tau$, что $\beta(\tau) < 1$.

Пусть теперь $\tau_0$ — произвольное фиксированное число из $(0, 1)$. Так как $\beta_0 = 0$, то можно найти такое $\tau_1$, что $0 \leqslant \beta(\tau_1) \leqslant 1$, $\beta(\tau_1) < \beta(\tau_0)$. Рассмотрим теперь $A$ как непрерывный оператор, действующий из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$, и как вполне непрерывный оператор, действующий из $L_{\alpha(\tau_1)}$ в $L_{\beta(\tau_1)}$. Нетрудно видеть, что

$$\alpha(\tau_0) = (1 - s)\alpha(\tau_1) + s\alpha_1, \quad \beta(\tau_0) = (1 - s)\beta(\tau_1) + s\beta_1,$$

где $s \in (0, 1)$. Так как $\beta(\tau_1) > 0$, то по уже доказанной части теоремы $A$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau_0)}$ в $L_{\beta(\tau_0)}$.

Теорема полностью доказана.

Полная непрерывность оператора $A$ является объединением двух свойств: компактности по мере и равенства

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} A \|_{\alpha \to \beta} = 0.$$

При доказательстве теоремы 3.11 мы фактически показали, что каждое из этих свойств допускает интерполяцию. Поэтому полная непрерывность $A$ как оператора из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ $(0 < \tau < 1)$ может быть получена как следствие компактности $A$ по мере как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из равенства

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} A \|_{\alpha_1 \to \beta_1} = 0$$

(если только $\beta_1 > 0$).

Из теоремы 3.11 вытекает, в частности, что часть множества $L$ ($A$; *вп. непр.*), лежащая в полосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta < \infty$, выпукла; поэтому функция $\xi$ ($\alpha$; $A$; *вп. непр.*)

выпукла и непрерывна. Из нее следуют и более тонкие утверждения о множестве $L$ ($A$; *вп. непр.*).

Допустим, что $A$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$. Тогда в силу теоремы 3.11 $L$-характеристике $L(A$; *вп. непр.*) принадлежат все точки лучей, выходящих из $\{\alpha_0, \beta_0\}$, являющиеся внутренними точками $L$-характеристики $L(A$; *непр.*). Отсюда вытекает, что $L(A$; *вп. непр.*) содержит все внутренние точки $L(A$; *непр.*),если $L$ ($A$; *вп. непр.*) содержит хотя бы одну точку. Последнее предположение существенно — для единичного оператора $I$ множество $L(I$; *непр.*) содержит все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant \alpha$, а множество $L$ ($I$; *вп. непр.*) пусто.

Ниже будут рассмотрены такие операторы $A$, для которых просто устанавливается, что они вполне непрерывны как операторы из $L_0$ в $L_1$. Для этих операторов все внутренние точки $L$ ($A$; *непр.*) являются точками $L$ ($A$; *вп. непр.*).

Доказательство теоремы 3.11 (с несущественными дополнениями) сохраняет силу в случае, когда оба числа $\alpha_0$, $\alpha_1$, или одно из них больше чем 1. Мы не привели соответствующей более общей теоремы, так как нам неизвестны линейные вполне непрерывные операторы, действующие из некоторого $L_\alpha$, где $\alpha > 1$, в какое-либо $L_\beta$.

**3.5. Усиленная непрерывность линейных операторов.** Оператор $A$, действующий из банахова пространства $E_1$ в пространство $E_2$, называется *усиленно непрерывным*, если он переводит каждую слабо сходящуюся в $E_1$ к элементу $x_0$ последовательность $x_n$ в последовательность $Ax_n$, сильно сходящуюся в $E_2$ к $Ax_0$.

Для линейных операторов $A$, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, усиленная непрерывность эквивалентна полной непрерывности. Действительно, если $A$ вполне непрерывен, то он переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности, которые компактны и поэтому сходятся сильно. Если, наоборот, $A$ усиленно непрерывен, то компактность в $L_\beta$ множества его значений на каждом шаре пространства $L_\alpha$ вытекает из слабой компактности этого шара.

Для линейных операторов, действующих из $L_1$ в $L_\beta$, где $\beta \in [0, 1]$, из полной непрерывности вытекает усиленная непрерывность. Обратное неверно.

Рассмотрим теперь линейные операторы $A$, действующие из $L_\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, в $L_\beta$, где $\beta > 1$. В этом случае из усиленной непрерывности вытекает полная непрерывность.

Через $P_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) обозначим операторы проектирования на конечномерные подпространства $E_n$ банахова пространства $E$.

Будем предполагать, что $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$ и, более того, что $P_iP_j = P_jP_i = P_j$ при $i \geqslant j$. Последовательность таких проекционных операторов будем называть полной, если она сходится сильно к единичному оператору $I$, т. е. при каждом фиксированном $x \in E$ выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \| x - P_nx \| = 0$. Легко построить правильные последовательности (см. п. 1.5) проекционных операторов $P_n$ так, чтобы они образовывали полную последовательность во всех пространствах $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Лемма 3.2. *Линейный непрерывный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta < \infty$, усиленно непрерывен, если для некоторой полной в $L_\alpha$ последовательности проекционных операторов $P_n$ выполнено равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \| A(I - P_n) \|_{\alpha\to\beta} = 0. \tag{3.22}$$

*Наоборот, если $A$ усиленно непрерывен, то равенство* (3.22) *справедливо для каждой полной в $L_\alpha$ последовательности проекционных операторов.*

Доказательство. Установим сначала первое утверждение леммы. Пусть $x_n$, $\| x_n \| \leqslant M$, слабо сходится к $x_0$ и $\varepsilon > 0$. Выберем номер $n_0$, для которого выполняется неравенство $\| A(I - P_{n_0}) \|_{\alpha\to\beta} < \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot 2^\beta M}$. Последовательность $P_{n_0}x_n$ слабо сходится к $P_{n_0}x_0$. Но так как эта последовательность лежит в конечномерном пространстве, то она сходится и сильно к $P_{n_0}x_0$. Поэтому существует такое число $n_1 \geqslant n_0$, что при $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $\| P_{n_0}x_n - P_{n_0}x_0 \| < \dfrac{\varepsilon}{2 \cdot 2^\beta \| A \|_{\alpha\to\beta}}$. Из неравенства

$$\| Ax_n - Ax_0 \|_\beta \leqslant 2^\beta \| A(I - P_n)(x_n - x_0) \|_\beta + 2^\beta \| AP_{n_0}(x - x_0) \|_\beta$$

следует, что при $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство

$$\| Ax_n - Ax_0 \|_\beta < \varepsilon.$$

Пусть теперь оператор $A$ усиленно непрерывен, но

$$\| A(I - P_n) \|_{\alpha\to\beta}$$

не стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда найдется такая последовательность $x_n$, $\| x_n \|_\alpha \leqslant 1$, что

$$\| A(x_n - P_nx_n) \|_\beta \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.23}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательности $x_n$ и $P_nx_n$ слабо сходятся к некоторым элементам $z_1$ и $z_2$.

Из справедливости при всех $n_0$ равенств

$$P_{n_0}z_1 = P_{n_0}\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} P_{n_0}x_n = \lim_{n\to\infty} P_{n_0}P_n x_n = \\ = P_{n_0}\cdot \lim_{n\to\infty} P_n x_n = P_{n_0}z_2$$

(здесь предел понимается в смысле слабой сходимости) вытекает, что $z_1 = z_2$. Таким образом, последовательность $x_n - P_n x_n$ слабо сходится к нулю и, следовательно, последовательность $A(x_n - P_n x_n)$ должна сильно сходиться к нулю, что противоречит (3.23).

Лемма доказана.

Утверждения этой леммы верны для любых рефлексивных банаховых пространств (первое утверждение — для произвольных банаховых пространств).

Отметим, что свойство усиленной непрерывности линейного оператора также допускает интерполирование. Этот факт интересен, конечно, лишь для случая, когда рассматриваются операторы со значениями в $L_\beta$, где $\beta > 1$.

Доказательство соответствующих утверждений можно получить тем же методом, который был применен при доказательстве теоремы 3.10. При этом нужно лишь заменить операторы $(I - P_n)A$ операторами $A(I - P_n)$ и воспользоваться леммой 3.2.

# ГЛАВА 2

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПОЛНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## § 4. Общие теоремы о непрерывности интегральных операторов*)

**4.1. Линейные интегральные операторы.** Через $\Omega$ и $\Omega^*$ ниже обозначаются некоторые множества в конечномерных пространствах, имеющие конечную меру.

В настоящей главе рассматриваются операторы вида

$$Kx(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{4.1}$$

и выясняется, при каких условиях они действуют из одних заданных пространств $L_\alpha = L_\alpha(\Omega)$ в другие заданные пространства $L_\beta = L_\beta(\Omega^*)$ и обладают достаточно хорошими свойствами (непрерывность, полная непрерывность и др.).

Интеграл в определении оператора (4.1) понимается в смысле Лебега. В связи с этим всегда предполагается, что ядро $K(t, s)$ почти при всех $t \in \Omega^*$ измеримо по $s$ на $\Omega$. Мы будем обычно предполагать, что выполнено более жесткое

---

*) Вопрос о непрерывности и полной непрерывности интегральных операторов в различных функциональных пространствах рассматривался рядом авторов (см., например, С. Банах [1], С. Л. Соболев [1, 2], Л. В. Канторович [1], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], А. Цаанен [1—3], Т. Ано [1], М. А. Красносельский [7—9], В. П. Ильин [1—3], М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий [1, 3, 5], М. А. Красносельский и Е. И. Пустыльник [1, 2], Е. И. Пустыльник [3, 6], П. П. Забрейко [2, 3], А. Кальдерон и А. Зигмунд [1, 2], Я. Б. Рутицкий [2, 4, 5]). Значительная часть излагаемых в § 4 результатов (иногда в других терминах или в несколько другой форме) применялась указанными, а также и другими авторами.

ограничение — ядро $K(t, s)$ измеримо по совокупности переменных $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$. В этом случае функция $Kx(t)$ измерима при любой такой измеримой $x(s)$, что интеграл (4.1) конечен почти при всех $t \in \Omega^*$.

Отметим сразу же, что для интегральных операторов (4.1) $L$-характеристики $L$ ($K$; *действ.*) и $L$($K$; *непр.*) совпадают. Приведем схему доказательства этой интересной теоремы С. Банаха [1]. Пусть $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Обозначим через $\mathfrak{M}_n$ множество таких функций из $L_\alpha$, что $\| Kx \|_\beta \leqslant n$. Если $x_k \in \mathfrak{M}_n$ и $\| x_k - x^* \|_\alpha \to 0$, то последовательность $x_k(s)$ сходится к $x^*(s)$ по мере, причем можно считать, что почти при всех $s \in \Omega$ выполнено неравенство $|x_k(s) - x^*(s)| \leqslant u(s)$, где $u(s) \in L_\alpha$. Почти при всех $t \in \Omega^*$ функция

$$v(t) = \int_\Omega |K(t, s)| \, u(s) \, ds$$

принимает конечные значения. При этих значениях $t$

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega K(t, s) \, x_k(s) \, ds = \int_\Omega K(t, s) \, x^*(s) \, ds$$

и из леммы Фату (см. И. П. Натансон [1]) вытекает, что

$$\| Kx^* \|_\beta \leqslant \lim_{k \to \infty} \| Kx_k \|_\beta \leqslant n.$$

Поэтому каждое из множеств $\mathfrak{M}_n$ замкнуто в $L_\alpha$. Пространство $L_\alpha$ имеет вторую категорию, так как оно полно. Следовательно, одно из множеств $\mathfrak{M}_n$ содержит некоторый шар. Отсюда вытекает ограниченность значений оператора $K$ на каждом шаре.

Нас будут интересовать условия, при которых $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывен (как мы только что выяснили, это одно и то же). Иначе говоря, нас будут интересовать условия, при которых для всех функций из $L_\alpha$ справедливо неравенство

$$\| Kx \|_\beta \leqslant M \| x \|_\alpha. \tag{4.2}$$

Это неравенство иногда просто доказывается для функций $x(s)$ из некоторого плотного в $L_\alpha$ множества $\mathfrak{M}$ (например, для ограниченных функций). Вопрос о том, при каких ядрах $K(t, s)$ отсюда вытекает его справедливость при всех $x(s) \in L_\alpha$, исследован недостаточно. Приведем частный результат, который охватывает основные для приложений случаи.

Теорема 4.1. *Пусть ядро $K(t, s)$ измеримо по совокупности переменных и неотрицательно. Пусть для всех конечнозначных функций $x(s)$ выполнено неравенство* (4.2), *где $\alpha$ и $\beta$ — фиксированные числа.*

*Тогда оператор* (4.1) *определен на всех функциях $x(s) \in L_\alpha$ и неравенство* (4.2) *выполнено для всех этих функций.*

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (4.2) для неотрицательных функций $x(s) \in L_\alpha$. Для каждой такой функции можно построить монотонно возрастающую и сходящуюся к $x(s)$ в $L_\alpha$ последовательность $x_n(s)$ конечнозначных функций. В силу (4.2)

$$\| Kx_n - Kx_m \|_\beta \leqslant M \| x_n - x_m \|_\alpha.$$

Поэтому последовательность $Kx_n$ сходится в $L_\beta$ к некоторой функции $y(t)$. Так как последовательность $Kx_n(t)$ не убывает, то она сходится к $y(t)$ почти при всех $t \in \Omega^*$.

Из теоремы Б. Леви (см. И. П. Натансон [1]) о предельном переходе под знаком интеграла Лебега вытекает, что почти при всех $t$

$$\int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega K(t, s)\, x_n(s)\, ds = y(t).$$

При этом

$$\int_{\Omega^*} \left| \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds \right|^\beta dt = \| y(t) \|_\beta^\beta = \lim_{n\to\infty} (\| Kx_n \|_\beta)^\beta \leqslant$$

$$\leqslant M^\beta \varlimsup_{n\to\infty} (\| x_n \|_\alpha)^\beta = M^\beta (\| x \|_\alpha)^\beta.$$

Теорема доказана.

**4.2. Регулярные операторы.** Положим

$$K_+(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \text{если } K(t, s) \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } K(t, s) < 0, \end{cases}$$

$$K_-(t, s) = \begin{cases} -K(t, s), & \text{если } K(t, s) \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } K(t, s) > 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$K(t, s) = K_+(t, s) - K_-(t, s)$$

и

$$|K(t, s)| = K_+(t, s) + K_-(t, s).$$

Через $K_+$, $K_-$, $|K|$ обозначим линейные операторы

$$K_+x(t) = \int_\Omega K_+(t, s)\,x(s)\,ds, \tag{4.3}$$

$$K_-x(t) = \int_\Omega K_-(t, s)\,x(s)\,ds, \tag{4.4}$$

$$|K|\,x(t) = \int_\Omega |K(t, s)|\,x(s)\,ds. \tag{4.5}$$

Допустим, что оператор $K$ определен на некоторой фиксированной функции $x(s)$. Это значит, что почти при всех $t \in \Omega^*$ функция $K(t, s)\,x(s)$ суммируема по $s$. Следовательно, суммируемы по $s$ функции

$$|K(t, s)|\,|x(s)|, \quad K_+(t, s)\,|x(s)|, \quad K_-(t, s)\,|x(s)|.$$

Иначе говоря, на функции $|x(s)|$ определены операторы (4.3) — (4.5). Отсюда вытекает, что эти операторы определены и на функции $x(s)$. Поэтому имеют место равенства

$$Kx = K_+x - K_-x, \tag{4.6}$$

$$|K|\,x = K_+x + K_-x. \tag{4.7}$$

Подчеркнем, что равенства (4.6) и (4.7) не всегда можно рассматривать как равенства для операторов, действующих в фиксированных пространствах. Например, может оказаться, что $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, а значения на $L_\alpha$ операторов $K_+$ и $K_-$ не принадлежат $L_\beta$. Соответствующий пример будет приведен в следующем пункте.

Напомним, что линейный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, называется *регулярным*, если он представим в виде

$$A = A_1 - A_2, \tag{4.8}$$

где $A_1$ и $A_2$ — линейные положительные операторы, действующие из $L_\alpha$ в $L_\beta$ (см. п. 2.2).

Теорема 4.2. *Линейный интегральный оператор $K$ является регулярным оператором, действующим из*

*$L_\alpha$ в $L_\beta$, в том и только том случае, если интегральный оператор $|K|$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

Доказательство достаточности. Так как выполняются неравенства

$$0 \leqslant K_+(t, s),\ K_-(t, s) \leqslant |K(t, s)|,$$

то операторы $K_+$ и $K_-$ также действуют из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Поэтому оператор

$$K_1 = K_+ - K_-$$

является регулярным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Остается заметить, что $K_1 = K$ (в силу (4.6)).

Доказательство необходимости. Пусть интегральный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ регулярен. Тогда (см. п. 2.2) существует такой положительный оператор $B$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, что справедливо неравенство

$$|Kx| \leqslant B|x|. \tag{4.9}$$

В частности, из (4.9) вытекает, что для любой неотрицательной функции $x \in L_\alpha$ справедливо неравенство

$$\sup_{|u(s)| \leqslant x(s)} |Ku| \leqslant Bx$$

или, иначе,

$$\sup_{|u(s)| \leqslant x(s)} \left| \int_\Omega K(t, s)\, u(s)\, ds \right| \leqslant Bx(t). \tag{4.10}$$

Функция $Bx(t)$ принадлежит $L_\beta$ и поэтому почти везде конечна. Пусть $Bx(t_0) < \infty$. Рассмотрим линейный непрерывный функционал $F_{t_0}$ на пространстве $L_0$, определенный равенством

$$F_{t_0}(h) = \int_\Omega K(t_0, s)\, x(s)\, h(s)\, ds.$$

Число

$$\sup_{|h(s)| \leqslant 1} \left| \int_\Omega K(t_0, s)\, x(s)\, h(s)\, ds \right| = \\ = \sup_{|u(s)| \leqslant x(s)} \left| \int_\Omega K(t_0, s)\, u(s)\, ds \right|$$

является нормой этого функционала и поэтому (см. п. 1.1)

$$\sup_{|u(s)| \leqslant x(s)} \left| \int_{\Omega} K(t_0, s)\, u(s)\, ds \right| = \int_{\Omega} |K(t_0, s)|\, x(s)\, ds,$$

откуда, в силу (4.10),

$$|K|\, x(t_0) = \int_{\Omega} |K(t_0, s)|\, x(s)\, ds \leqslant B\, x(t_0). \qquad (4.11)$$

Из (4.11) вытекает, что $|K|\, x \in L_\beta$ при $x \geqslant 0$. Но каждая функция $x(s) \in L_\alpha$ представима в виде разности неотрицательных функций

$$x(s) = x_+(s) - x_-(s),$$

где

$$x_+(s) = \sup\{x(s),\ 0\}, \quad x_-(s) = -\inf\{x(s),\ 0\}.$$

Так как $|K|$ — аддитивный оператор, то

$$|K|\, x = |K|\, x_+ - |K|\, x_- \in L_\beta.$$

Таким образом, доказано, что оператор $|K|$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Теорема доказана.

Теорема 4.2 означает, что для регулярных операторов равенство (4.6) можно рассматривать как представление (4.8). Из (4.6) и (4.7) вытекает, что

$$\|K\|_{\alpha \to \beta} \leqslant \|\,|K|\,\|_{\alpha \to \beta}. \qquad (4.12)$$

Утверждение теоремы 4.2 можно сформулировать и в терминах $L$-характеристик. Оно означает, что $L(|K|;\ \textit{действ.}) = L(K;\ \textit{рег.})$ и, так как $L$-характеристики $L(A;\ \textit{действ.})$ и $L(A;\ \textit{непр.})$ интегральных операторов совпадают, то

$$L(K;\ \textit{рег.}) = L(|K|;\ \textit{непр.}). \qquad (4.13)$$

При исследовании оператора (4.1) часто применяются оценки вида

$$|K(t, s)| \leqslant K_0(t, s) \qquad (t \in \Omega^*,\ s \in \Omega). \qquad (4.14)$$

Из этих оценок немедленно вытекает, что для любой неотрицательной функции $x(s)$ выполняется неравенство

$$|Kx(t)| \leqslant |K|\, x(t) \leqslant K_0 x(t), \tag{4.15}$$

где

$$K_0 x(t) = \int\limits_{\Omega} K_0(t,\ s)\, x(s)\, ds. \tag{4.16}$$

Таким образом, верна

Теорема 4.3. *Пусть выполнено неравенство* (4.14). *Тогда*

$$L(K;\ \textit{рег.}) \subset L(K_0;\ \textit{непр.}). \tag{4.17}$$

Покажем, что $L$-характеристика $L(K;\ \textit{рег.})$ каждого ненулевого интегрального оператора $K$ расположена в полуполосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$. В предположении противного найдется интегральный оператор $K_0$ с неотрицательным ядром $K_0(t,\ s)$, действующий из некоторого $L_{\alpha_0}$, где $\alpha_0 > 1$, в некоторое $L_{\beta_0}$. Как было показано в п. 2.1, все $L$-характеристики линейных операторов расположены в области, заштрихованной на рис. 4.1, и поэтому $\beta_0 \geqslant \alpha_0$. Введем в рассмотрение вспомогательное ядро

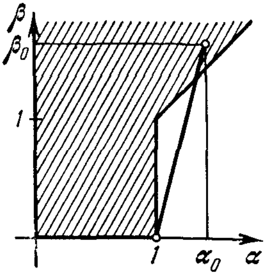


Рис. 4.1.

$$K_1(t,\ s) = \min\{1,\ K_0(t,\ s)\}.$$

Интегральный оператор $K_1$ с ядром $K_1(t,\ s)$ также действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$. Кроме этого, из ограниченности ядра $K_1(t,\ s)$ вытекает, что $K_1$ действует из $L_1$ в $L_0$ и непрерывен. Из теоремы 2.4 вытекает тогда, что $L(K_1;\ \textit{непр.})$ полностью содержит отрезок, соединяющий точки $\{1,\ 0\}$ и $\{\alpha_0,\ \beta_0\}$. Часть этого отрезка лежит вне заштрихованной на рис. 4.1 области — мы пришли к противоречию.

**4.3. Пример нерегулярного оператора.** Ограничимся для простоты примером (его указал нам Б. С. Митягин) оператора в пространстве $L_{\frac{1}{2}}$ функций, определенных на множестве $\Omega = [0,\ 1]$.

Положим

$$Px(s) = 2^i \int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}} x(\sigma)\, d\sigma, \text{ если } \frac{1}{2^i} \leqslant s < \frac{1}{2^{i-1}}. \tag{4.18}$$

Нетрудно показать, что этот оператор действует в $L_{\frac{1}{2}}$ и непрерывен.

Область $E = PL_{\frac{1}{2}}$ значений оператора $P$ состоит из счетнозначных функций $y(s)$, принимающих постоянное значение на промежутках $\frac{1}{2^i} \leqslant s < \frac{1}{2^{i-1}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Сопоставим каждой функции $y(s) \in E$ числовую последовательность

$$\tau y(s) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} c_1, \frac{1}{2} c_2, \ldots, \frac{1}{(\sqrt{2})^i} c_i, \ldots \right\}, \tag{4.19}$$

где через $c_i$ обозначено значение функции $y(s)$ на соответствующем промежутке $\frac{1}{2^i} \leqslant s < \frac{1}{2^{i-1}}$. Простой подсчет показывает, что последовательность (4.19) принадлежит $l_{\frac{1}{2}}$ *) и, более того,

$$\| \tau y(s) \|_{\frac{1}{2}} = \| y(s) \|_{\frac{1}{2}}. \tag{4.20}$$

Пусть теперь $\xi = \{\xi_i\}$ — произвольная последовательность из $l_{\frac{1}{2}}$. Определим тогда функцию $y(s)$ равенством

$$y(s) = (\sqrt{2})^i \xi_i, \text{ если } \frac{1}{2^i} \leqslant s < \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Очевидно, $Py(s) = y(s)$ и $\tau y(s) = \{\xi_i\}$.

Из приведенных рассуждений вытекает, что отображение $\tau$ является изометрическим отображением $E$ на $l_{\frac{1}{2}}$.

---

*) По аналогии с принятыми обозначениями пространств функций мы обозначаем через $l_\alpha$ пространство, состоящее из таких числовых последовательностей, у которых конечна норма

$$\| \{\xi_i\} \|_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^\alpha.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$T_0\{\xi_i\}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{i-j+\frac{1}{2}}\right\}. \tag{4.21}$$

Как показал Д. Гильберт (см., например, Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа [1], стр. 256—258), $T_0$ является непрерывным оператором, действующим в $l_{\frac{1}{2}}$, причем оператор

$$T\{\xi_i\}=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j}{\left|i-j+\frac{1}{2}\right|}\right\} \tag{4.22}$$

уже не действует в $l_{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{из } l_{\frac{1}{2}} \text{ в } l_{\frac{1}{2}}\right)$.

Рассмотрим теперь оператор

$$Kx=\tau^{-1}T_0\tau Px\,(s). \tag{4.23}$$

Этот оператор очевидным образом действует в $L_{\frac{1}{2}}$ и непрерывен. При этом

$$Kx=\tau^{-1}T_0\left\{(\sqrt{2})^i\int_{2^{-i}}^{2^{-i+1}}x(\sigma)\,d(\sigma)\right\}=\tau^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^j\int_{2^{-j}}^{2^{-j-1}}x(\sigma)\,d\sigma}{i-j+\frac{1}{2}}\right\}$$

и, следовательно,

$$Kx(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^{i+j}\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}x(\sigma)\,d\sigma}{i-j+\frac{1}{2}}\qquad\left(\frac{1}{2^i}\leqslant t<\frac{1}{2^{i-1}}\right).$$

Значит, $K$ — это интегральный оператор

$$Kx(t)=\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,ds \tag{4.24}$$

с ядром

$$K(t,s)=\frac{(\sqrt{2})^{i+j}}{i-j+\frac{1}{2}},\quad\text{если}\quad \frac{1}{2^i}\leqslant t<\frac{1}{2^{i-1}},\ \frac{1}{2^j}\leqslant s<\frac{1}{2^{j-1}}.$$

Покажем, что построенный оператор $K$ не обладает свойством регулярности. В предположении противного в $L_{\frac{1}{2}}$ действует и непрерывен интегральный оператор $|K|$ с ядром $|K(t, s)|$. Значения оператора $|K|$ принадлежат подпространству $E$. Поэтому в $l_{\frac{1}{2}}$ действует и непрерывен оператор $\tau|K|\tau^{-1}$.

С другой стороны, функция $x(s) = \tau^{-1}\{\xi_i\}$ $\left(\{\xi_i\} \in l_{\frac{1}{2}}\right)$ определяется равенством

$$x(s) = (\sqrt{2})^j \xi_j, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2^j} \leqslant s < \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Поэтому при $\frac{1}{2^i} \leqslant t < \frac{1}{2^{i-1}}$ справедливо тождество

$$|K|x(t) = \int_0^1 |K(t, s)|\, x(s)\, ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{i+j} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} x(\sigma)\, d\sigma}{\left|i - j + \frac{1}{2}\right|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^i \xi_j}{\left|i - j + \frac{1}{2}\right|},$$

откуда следует, что

$$\tau|K|\tau^{-1}\xi = T_1\xi \quad \left(\xi \in l_{\frac{1}{2}}\right).$$

Как уже указывалось, оператор $T_1$ не действует в $l_{\frac{1}{2}}$. Мы пришли к противоречию.

**4.4. Сопряженный оператор*).** Через $K^{\ddagger}$ будем обозначать интегральный оператор

$$K^{\ddagger} y(s) = \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt. \tag{4.25}$$

В отличие от оператора $K$ с ядром $K(t, s)$, оператор $K^{\ddagger}$ действует из пространств функций, определенных на $\Omega^*$,

*) Вопрос о связи между транспонированным и сопряженным операторами рассматривался еще С. Банахом. По этому поводу см. также работу Я. Б. Рутицкого [3].

в пространства функций, определенных на $\Omega$. Оператор $K^{\sharp}$ будем называть *транспонированным* (по отношению к оператору $K$). В естественных предположениях $K^{\sharp}$ совпадает с оператором $K^*$, сопряженным оператору $K$.

Теорема 4.4. *Пусть оператор*

$$Kx(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{4.26}$$

*действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1)$ и непрерывен, а оператор*

$$K^{\sharp} y(s) = \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt$$

*действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ и также непрерывен. Пусть ядро $K(t, s)$ суммируемо:*

$$\int_{\Omega^*} \int_{\Omega} |K(t, s)|\, ds\, dt < \infty. \tag{4.27}$$

*Тогда $K^{\sharp}$ сопряжен оператору $K$.*

Доказательство. Для ограниченных функций $x(s)$ и $y(t)$ справедливо (в силу теоремы Фубини) равенство

$$\int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds \right] y(t)\, dt = \int_{\Omega} x(s) \left[ \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt \right] ds,$$

т. е.

$$(Kx, y) = (x, K^{\sharp} y).$$

С другой стороны,

$$(Kx, y) = (x, K^* y).$$

Поэтому для любых ограниченных функций $x(s)$ и $y(t)$

$$(x, (K^* - K^{\sharp})\, y) = 0.$$

Так как множество ограниченных функций плотно в $L_\alpha$, то из последнего равенства вытекает, что $K^* y = K^{\sharp} y$ для ограниченных функций $y(t)$. Из непрерывности операторов $K^*$ и $K^{\sharp}$ и из того факта, что множество ограниченных функций плотно в $L_{1-\beta}$, следует, что $K^{\sharp} = K^*$.

Теорема доказана.

Перейдем к регулярным операторам.

Теорема 4.5. *Пусть оператор* (4.26) *регулярен как оператор, действующий из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ ($0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$).

*Тогда транспонированный оператор* $K^{\#}$ *действует из* $L_{1-\beta}$ *в* $L_{1-\alpha}$, *совпадает с сопряженным оператором* $K^*$ *и регулярен.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что ядро $K(t, s)$ неотрицательно. В доказательстве нуждается только тот факт, что транспонированный оператор совпадает с сопряженным. В силу теоремы 4.4 достаточно показать, что транспонированный оператор $K^{\#}$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$.

Для доказательства последнего утверждения нужно воспользоваться теоремой Фубини, в силу которой

$$\int_\Omega x(s) K^{\#} y(s)\, ds = \int_\Omega Kx(t)\, y(t)\, dt \qquad (x \in L_\alpha,\ y \in L_{1-\beta}).$$

Поэтому

$$\int_\Omega x(s) K^{\#} y(s)\, ds < \infty \qquad (x \in L_\alpha,\ y \in L_{1-\beta}),$$

откуда вытекает, что $K^{\#} y(s) \in L_{1-\alpha}$, если $y(t) \in L_{1-\beta}$.

Теорема доказана.

Подчеркнем, что теорема 4.5 охватывает и те случаи, когда оператор $K$ действует из $L_0$ в $L_\beta$ ($0 \leqslant \beta \leqslant 1$). Таким образом, для регулярных интегральных операторов $K$, действующих из $L_0$ в $L_\beta$, сопряженный оператор также интегральный и действует из $L_{1-\beta}$ в $L_1$ (ср. п. 2.1).

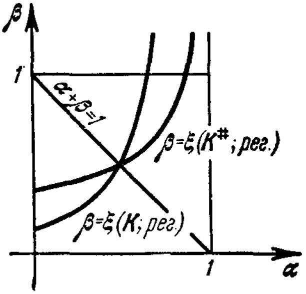


Рис. 4.2.

Теорема 4.5 означает, что точка $\{\alpha, \beta\}$, где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, принадлежит $L$-характеристике $L(K^{\#};\ \textit{рег.})$ в том и только том случае, если $\{1-\beta, 1-\alpha\} \in L(K;\ \textit{рег.})$. Иными словами, лежащие в единичном квадрате части $L$-характеристик $L(K;\ \textit{рег.})$ и $L(K^{\#};\ \textit{рег.})$ симметричны относительно прямой $\alpha + \beta = 1$ (рис. 4.2).

**4.5. Операторы с симметрическими ядрами.** Предположим, что $\Omega^* = \Omega$. Ядро $K(t, s)$ называется *симметрическим*, если

$$K(t, s) \equiv K(s, t) \qquad (s, t \in \Omega). \tag{4.28}$$

В случае симметрических ядер операторы $K$ и $K^{\#}$ совпадают. Из теоремы 4.5 вытекает тогда, что лежащая в единичном квадрате часть $L$-характеристики $L(K; \textit{рег.})$ симметрична относительно прямой $\alpha + \beta = 1$ (рис. 4.3).

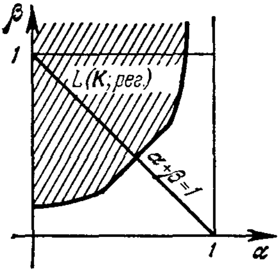


Рис. 4.3.

Можно указать и другие классы таких ядер $K(t, s)$, что $L$-характеристика $L(K; \textit{рег.})$ симметрична относительно прямой $\alpha + \beta = 1$. К ним относятся, например, так называемые *кососимметрические* ядра $K(t, s)$, т. е. ядра, для которых

$$K(t, s) \equiv -K(s, t) \qquad (t, s \in \Omega). \tag{4.29}$$

Отметим также, что $L$-характеристика $L(K; \textit{рег.})$ симметрична относительно прямой $\alpha + \beta = 1$, если ядро $K(t, s)$ зависит от разности аргументов:

$$K(t, s) = k(t - s),$$

и если $\Omega$ симметрично относительно начала координат.

Допустим, что $L$-характеристика $L(K; \textit{рег.})$ симметрична относительно прямой $\alpha + \beta = 1$ и $\{\alpha, \beta\} \in L(K; \textit{рег.})$. Тогда и $\{1 - \beta, 1 - \alpha\} \in L(K; \textit{рег.})$. Из выпуклости $L$-характеристики $L(K; \textit{рег.})$ вытекает, что все точки $\{\alpha(\tau), \beta(\tau)\}$ отрезка

$$\alpha(\tau) = (1 - \tau)\alpha + \tau(1 - \beta), \quad \beta(\tau) = (1 - \tau)\beta + \tau(1 - \alpha)$$
$$(0 < \tau < 1)$$

также принадлежат $L(K; \textit{рег.})$.

**4.6. Суперпозиции интегральных операторов.** Пусть $\Omega$, $\Omega^*$, $\Omega^{**}$ — три множества. Рассмотрим два интегральных оператора

$$K_1x(t) = \int_{\Omega} K_1(t, s)\, x(s)\, ds \quad (t \in \Omega^*), \tag{4.30}$$

$$K_2y(u) = \int_{\Omega^*} K_2(u, t)\, y(t)\, dt \quad (u \in \Omega^{**}). \tag{4.31}$$

Предположим, что $K_1$ действует из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega^*)$ и непрерывен, а $K_2$ — из $L_\beta(\Omega^*)$ в $L_\gamma(\Omega^{**})$ и также непрерывен. Тогда оператор

$$K = K_2K_1 \tag{4.32}$$

действует из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\gamma(\Omega^{**})$ и непрерывен. Возникает естественный вопрос, будет ли оператор $K$ интегральным? Этот вопрос просто решается, если в правой части равенства

$$Kx(u) = \int_{\Omega^*} K_2(u, t) \left[ \int_{\Omega} K_1(t, s)\, x(s)\, ds \right] dt$$

можно поменять порядок интегрирования. Если это можно сделать, то

$$Kx(u) = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega^*} K_2(u, t) K_1(t, s)\, dt \right] x(s)\, ds.$$

Иначе говоря,

$$Kx(u) = \int_{\Omega} K(u, s)\, x(s)\, ds, \tag{4.33}$$

где

$$K(u, s) = \int_{\Omega^*} K_2(u, t)\, K_1(t, s)\, dt. \tag{4.34}$$

Как обычно, изменение порядка интегрирования наиболее просто обосновывается, когда применима теорема Фубини.

Теорема 4.6. *Пусть операторы* (4.30) *и* (4.31) *регулярны.*

*Тогда оператор* (4.32) *допускает представление* (4.33) *с ядром* (4.34) *и регулярен.*

Для положительных ядер эта теорема следует непосредственно из теоремы Фубини. В общем случае нужно ядра

$K_1(t, s)$ и $K_2(u, t)$ представить в виде

$$K_1(t, s) = K_1^+(t, s) - K_1^-(t, s),$$
$$K_2(u, t) = K_2^+(u, t) - K_2^-(u, t),$$

где

$$K_1^+(t, s) = \max\{K_1(t, s), 0\}, \quad K_1^-(t, s) = -\min\{K_1(t, s), 0\},$$
$$K_2^+(u, t) = \max\{K_2(u, t), 0\}, \quad K_2^-(u, t) = -\min\{K_2(u, t), 0\},$$

и заметить, что

$$\int_{\Omega^*} K_2(u, t) K_1(t, s)\, dt =$$
$$= \int_{\Omega^*} K_2^+(u, t) K_1^+(t, s)\, dt - \int_{\Omega^*} K_2^+(u, t) K_1^-(t, s)\, dt -$$
$$- \int_{\Omega^*} K_2^-(u, t) K_1^+(t, s)\, dt + \int_{\Omega^*} K_2^-(u, t) K_1^-(t, s)\, dt.$$

Предположим, что $\Omega^* = \Omega$. Вместе с интегральным оператором

$$Kx(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{4.35}$$

часто приходится рассматривать его степени $K^n$. Допустим, что $K$ действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\alpha_1}$, из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\alpha_2}$, ..., из $L_{\alpha_{n-1}}$ в $L_{\alpha_n}$. Тогда $K^n$ действует из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\alpha_n}$. Из теоремы 4.6 вытекает, что оператор $K^n$ регулярен, если регулярен оператор (4.35). При этом $K^n$ является интегральным оператором

$$K^n x(t) = \int_{\Omega} K_{[n]}(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{4.36}$$

где

$$K_{[n]}(t, s) =$$
$$= \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} K(t, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_{n-1}, s)\, ds_1 \dots ds_{n-1}. \tag{4.37}$$

Ядра (4.37) называются *итерациями* ядра $K(t, s)$ или *итерированными ядрами*.

В п. 1.6 указано, как по $L$-характеристикам операторов $K_1$ и $K_2$ выделить часть плоскости $\{\alpha, \beta\}$, принадлежащую $L$-характеристике $L(K_2K_1;$ *непр.*). Эта часть, вообще говоря, существенно меньше всей $L$-характеристики. Однако для некоторых важных интегральных операторов (например, для рассматриваемых в § 8 потенциалов) упомянутая часть совпадает со всей $L$-характеристикой.

**4.7. Срезки ядер интегральных операторов.** Пусть $K(t, s)$ — некоторое ядро. Через $K_h(t, s)$, где $h>0$, обозначим ограниченное ядро

$$K_h(t, s) = \min\{|K(t, s)|, h\} \operatorname{sign} K(t, s), \tag{4.38}$$

а через $\boldsymbol{K}_h$ — линейный интегральный оператор

$$\boldsymbol{K}_h x(t) = \int_\Omega K_h(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{4.39}$$

Теорема 4.7. *Пусть интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ 0 < \beta < \infty)$ и регулярен.*

*Тогда операторы $\boldsymbol{K}_h$ сильно сходятся к оператору $\boldsymbol{K}$ при $h \to \infty$, т. е. для каждой функции $x(s) \in L_\alpha$*

$$\lim_{h\to\infty} \| \boldsymbol{K}_h x - \boldsymbol{K}x \|_\beta = 0. \tag{4.40}$$

Доказательство. Пусть $x(s)$ — фиксированная функция из $L_\alpha$. Так как ядра $K_h(t, s)$ ограничены, то функции $\boldsymbol{K}_h x$ $(0 < h < \infty)$ также ограничены и, следовательно, принадлежат $L_\beta$.

Очевидно, почти при всех $t \in \Omega^*$ выполняется неравенство

$$|K_h(t, s)\, x(s)| \leqslant |K(t, s)|\, |x(s)|$$

и функции $K_h(t, s)\, x(s)$ сходятся при $h \to \infty$ почти всюду (по $s$) к $K(t, s)\, x(s)$. Из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает, что почти при всех $t \in \Omega^*$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega K_h(t, s)\, x(s)\, ds = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

т. е. функции $\boldsymbol{K}_h x(t)$ сходятся к $\boldsymbol{K}x(t)$ почти всюду.

Из неравенства

$$\left| \int_\Omega K_h(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant \int_\Omega |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \quad (t \in \Omega^*)$$

вытекает, что функции $\boldsymbol{K}_h x(t)$ имеют в $L_\beta$ равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Поэтому $\boldsymbol{K}_h x(t)$ сходится в $L_\beta$ в $\boldsymbol{K}x(t)$ и по норме.

Теорема доказана.

Утверждение этой теоремы неверно для операторов, действующих из $L_0$ в $L_0$, как показывает пример оператора $K$ с ядром:

$$K(t, s) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t, \quad s < \dfrac{1}{2^{n-1}}; \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{при других } t, s. \end{cases}$$

Действительно, если $x_0(s) \equiv 1$, то функции $K_h x_0(t)$ сходятся почти всюду к $Kx_0(t)$, но

$$\| Kx_0(t) - K_h x_0(t) \|_0 = 1 \qquad (0 < h < \infty).$$

## § 5. Общие теоремы о полной непрерывности интегральных операторов *)

**5.1. Постановка задач.** Продолжим изучение линейного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{5.1}$$

В этом и последующих параграфах настоящей главы нас интересует вопрос о том, при каких условиях $K$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Ответ на этот вопрос может быть дан в различных терминах: в виде оценок ядра, в различных свойствах итераций ядра, в различных свойствах $L$-характеристики $L(K;\ \textit{непр.})$.

В настоящем параграфе будем предполагать, что известна одна точка $\{\alpha_0, \beta_0\}$ $L$-характеристики $L(K;\ \textit{непр.})$. Будет выяснено, при каких дополнительных общих предположениях эта точка принадлежит множеству $L(K;\ \textit{вп. непр.})$. Эти общие предположения могут формулироваться, например, в виде соотношений между числами $\alpha_0$ и $\beta_0$.

В некоторых случаях из $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(K;\ \textit{непр.})$ можно сделать заключение о том, что некоторые отличные от $\{\alpha_0, \beta_0\}$ точки $\{\alpha, \beta\}$ принадлежат множеству $L(K;\ \textit{вп. непр.})$.

Ниже изучаются операторы (5.1), действующие из $L_\alpha$ в $L_\beta$, причем обычно предполагается, что $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq 0$. Выпадаю-

*) Основные результаты параграфа взяты из статей М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [2], П. П. Забрейко [2], П. П. Забрейко и М. А. Красносельского [1]. Теоремы 5.5 и 5.6 принадлежат Т. Андо [1], который рассматривал операторы в пространствах Орлича.

щие при этом из рассмотрения случаи требуют специального анализа, который проводится в § 6.

Пусть $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(K;$ *рег.*$)$ $(0 \leqslant \alpha_0, \beta_0 \leqslant 1)$. В предыдущем параграфе показано (см. теорему 4.5), что в этом случае точка $\{1-\beta_0, 1-\alpha_0\}$ принадлежит $L$-характеристике $L(K^{\#};$ *рег.*$)$ транспонированного оператора

$$K^{\#}y(s) = \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(K;$ *рег.*$)$.

*Тогда* $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(K;$ *вп. непр.*$)$ *в том и только том случае, если* $\{1-\beta_0, 1-\alpha_0\} \in L(K^{\#};$ *вп. непр.*$)$.

Утверждение этой теоремы вытекает из того факта, что транспонированный оператор $K^{\#}$ совпадает с сопряженным, а сопряженный оператор, как известно, вполне непрерывен в том и только том случае, когда вполне непрерывен сам оператор.

Из теоремы 5.1 вытекает, что лежащие в единичном квадрате части $L$-характеристик $L(K;$ *рег. и вп. непр.*$)$ и $L(K^{\#};$ *рег. и вп. непр.*$)$ симметричны друг другу относительно прямой $\alpha+\beta=1$. В частности, для операторов с симметрическими ядрами $L$-характеристика $L(K;$ *рег. и вп. непр.*$)$ симметрична относительно прямой $\alpha+\beta=1$ (ср. с аналогичными рассуждениями в конце п. 4.4).

**5.2. Регулярные операторы, действующие из $L_0$ в $L_{\beta_0}$ и из $L_\alpha$ в $L_1$.** Теорема 5.2. *Каждый линейный регулярный интегральный оператор $K$, действующий из $L_0$ в $L_{\beta_0}$, где $\beta_0 > 0$, вполне непрерывен.*

Доказательство. Введем обозначение

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} |K(t, s)|\, ds.$$

Так как $\varphi(t)$ — это значение оператора $|K|$ на функции $u_0(s) \equiv 1$, то $\varphi(t) \in L_{\beta_0}$. Очевидно неравенство

$$|Kx(t)| \leqslant \int_{\Omega} |K(t, s)|\, |x(s)|\, ds \leqslant \varphi(t) \|x\|_0 \quad (x \in L_0). \tag{5.3}$$

Отсюда вытекает, что для любого множества $D^* \in \Omega^*$

$$\| P_{D^*} K \|_{0 \to \beta_0} \leqslant \| P_{D^*} \varphi(t) \|_{\beta_0}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\text{mes } D^* \to 0} \| P_{D^*} K \|_{0 \to \beta_0} = 0. \qquad (5.4)$$

Выражение

$$F_t(x) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds$$

является линейным непрерывным функционалом на $L_0$ при тех $t$, при которых $\varphi(t)$ конечна. Поэтому (см. п. 1.3) из каждой ограниченной в $L_0$ последовательности можно выбрать такую подпоследовательность $x_n(s)$, что значения на ней функционалов $F_t$ сходятся. Это значит, что почти при всех

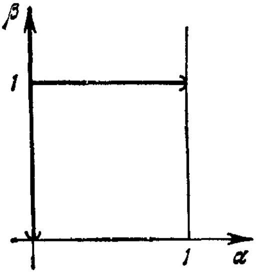


Рис. 5.1.

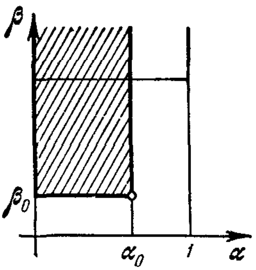


Рис. 5.2.

$t \in \Omega^*$ последовательность чисел $Kx_n(t)$ сходится. Отсюда вытекает, что $K$ преобразует каждый шар пространства $L_0$ в множество функций, компактное по мере.

В силу теоремы 3.1 компактный по мере и удовлетворяющий условию (5.4) оператор вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Теорема 5.3. *Каждый линейный регулярный интегральный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_1$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 1$, вполне непрерывен.*

Теоремы 5.2 и 5.3 означают, что каждая точка $\{\alpha_0, \beta_0\}$ на отрезках, обозначенных на рис. 5.1 утолщенными линиями, принадлежит $L$-характеристике $L(K;$ *вп. непр.*$)$, если она принадлежит $L(K;$ *рег.*$)$.

Из теоремы 5.2 можно сделать еще один важный вывод. Допустим, что $L$-характеристика $L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$ непуста и пусть $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$. Тогда все точки $\{0, \beta\}$ при $\beta \geqslant \beta_0$ также принадлежат множеству $L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$ и, следовательно, множество $L(\boldsymbol{K};\ \textit{вп. непр.})$ непусто. Отсюда (см. теорему 3.11) вытекает

Теорема 5.4. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — регулярный интегральный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta_0 < \infty$.*

*Тогда $\boldsymbol{K}$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, если либо $\alpha \leqslant \alpha_0 < 1$, $\beta > \beta_0$, либо $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0 > 0$.*

Если $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$, то теорема 5.4 означает, что $L(\boldsymbol{K};\ \textit{вп. непр.})$ содержит множество, заштрихованное на рис. 5.2. В частности, множество внутренних точек $L$-характеристики $L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$ принадлежит $L$-характеристике $L(\boldsymbol{K};\ \textit{вп. непр.})$.

**5.3. Регулярные операторы, действующие из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \alpha_0 < 1$, $0 < \beta_0 \leqslant 1$.** Рассматриваемые в этом пункте случаи можно считать основными.

Лемма 5.1. *Каждый линейный регулярный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 1$, $0 \leqslant \beta_0 \leqslant 1$, компактен по мере.*

Доказательство. В условиях леммы оператор $\boldsymbol{K}$ действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_1$. В силу теоремы 5.3 он вполне непрерывен и поэтому компактен по мере.

Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 3.9 непосредственно следует

Теорема 5.5. *Каждый линейный регулярный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \alpha_0 < \beta_0 \leqslant 1$, вполне непрерывен.*

В терминах $L$-характеристик эта теорема означает, что часть множества $L(\boldsymbol{K};\ \textit{рег.})$, лежащая в единичном квадрате над прямой $\beta = \alpha$, принадлежит $L$-характеристике $L(\boldsymbol{K};\ \textit{вп. непр.})$.

К сожалению, утверждение теоремы 5.5 неверно, если $\alpha_0 \geqslant \beta_0$. Это показывают примеры так называемых операторов типа потенциала, которым посвящен § 8.

Исследование полной непрерывности интегральных операторов, действующих из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $\alpha_0 \geqslant \beta_0$, в дальнейшем будет в основном проводиться при помощи следующей простой теоремы.

Теорема 5.6. *Линейный регулярный интегральный оператор $K$, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \beta_0 \leqslant \leqslant \alpha_0 < 1$, вполне непрерывен в том и только том случае, если*

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* + \operatorname{mes} D \to 0} \| P_{D^*} K P_D \|_{\alpha_0 \to \beta_0} = 0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Из леммы 5.1 и теоремы 4.5 вытекает, что операторы $K$ и $K^*$ компактны по мере. Остается сослаться на теорему 3.5.

При исследовании конкретных операторов $K$ в ряде случаев непосредственно устанавливается одно из равенств:

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} K \|_{\alpha_0 \to \beta_0} = 0 \tag{5.6}$$

или

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \| K P_D \|_{\alpha_0 \to \beta_0} = 0. \tag{5.7}$$

Ясно, что (5.5) является следствием каждого из них.

**5.4. Регулярные операторы, действующие из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \alpha_0 < 1$, $\beta_0 \geqslant 1$.** В этом пункте мы докажем общее утверждение, которое содержит теорему 5.3 и существенно дополняет теоремы 5.5 и 5.6.

Теорема 5.7. *Пусть линейный регулярный оператор $A$ действует из $L_{\alpha_0}$, где $0 < \alpha_0 < 1$, в $L_{\beta_0}$, где $\beta_0 \geqslant 1$. Тогда*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \| A P_D \|_{\alpha_0 \to \beta_0} = 0. \tag{5.8}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $A$ положителен.

Теорему будем доказывать от противного. Пусть существует такая последовательность множеств $D_n \subset \Omega$, что $\operatorname{mes} D_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ и

$$\| A P_{D_n} \|_{\alpha_0 \to \beta_0} > \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.9}$$

Введем в рассмотрение множества

$$D_n' = \bigcup_{m \geqslant n} D_m.$$

Ясно, что $\operatorname{mes} D_n' \to 0$ и

$$\left\| AP_{D_n'} \right\|_{\alpha_0 \to \beta_0} > \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из равенств

$$\left\| AP_{D_n'} \right\|_{\alpha_0 \to \beta_0} = \sup_{\|x\|_{\alpha_0} \leqslant 1,\, m \geqslant n} \left\| AP_{D_n' \setminus D_m'} x \right\|_{\beta_0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что для любого $n$ можно указать такой номер $m$ и такой элемент $x$, $\|x\|_{\alpha_0} \leqslant 1$, что

$$\left\| AP_{D_n' \setminus D_m'} x \right\|_{\beta_0} > \varepsilon_0.$$

Поэтому по индукции можно построить последовательность чисел $n_k$ и последовательность элементов $x_k$, для которых будут выполняться неравенства

$$\left\| AP_{D_{n_k}' \setminus D_{n_{k+1}}'} x_k \right\|_{\beta_0} > \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.10}$$

Положим

$$\Omega_k = D_{n_k}' \setminus D_{n_{k+1}}'.$$

Множества $\Omega_k$ не пересекаются и из (5.10) следует, что

$$\left\| AP_{\Omega_k} x_k \right\|_{\beta_0} > \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.11}$$

Функции $x_k$ без ограничения общности можно считать неотрицательными.

Положим

$$u(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P_{\Omega_k} x_k(s). \tag{5.12}$$

Очевидно,

$$\int_{\Omega} |u(s)|^{\frac{1}{\alpha_0}} ds \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha_0}} < \infty,$$

и поэтому $u(s) \in L_{\alpha}$. Следовательно, $Au(t) \in L_{\beta_0}$.

С другой стороны, в представлении

$$Au(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} AP_{\Omega_k} x_k \tag{5.13}$$

все слагаемые неотрицательны. Поэтому из обратного неравенства Минковского *) вытекает, что

$$\| Au(t) \|_{\beta_0} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \| AP_{\Omega_k} x_k \|_{\beta_0}$$

и в силу (5.11) $Au(t) \bar{\in} L_{\beta_0}$. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Теорема 5.8. *Каждый линейный регулярный интегральный оператор $K$, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \alpha_0 < 1$, $\beta_0 \geqslant 1$, вполне непрерывен.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}_h$ множество функций, удовлетворяющих неравенству $|x(s)| \leqslant h$, где $h$ — произвольное положительное число.

Рассмотрим $K$ как оператор, действующий из $L_0$ в $L_{\beta_0}$. Из теоремы 5.2 вытекает, что он вполне непрерывен. Поэтому множество $K\mathfrak{M}_h$ компактно в $L_{\beta_0}$.

Представим каждую функцию $x(s)$ из единичного шара пространства $L_{\alpha_0}$ в виде

$$x(s) = x_1(s) + x_2(s),$$

где

$$x_1(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если} \quad |x(s)| \leqslant h, \\ 0, & \text{если} \quad |x(s)| > h. \end{cases}$$

Множество функций $Kx_1(t)$ компактно в $L_{\beta_0}$. Поэтому для доказательства теоремы остается показать, что при больших $h$ нормы функций $Kx_2(t)$ достаточно малы равномерно относительно функций $x(s)$ из единичного шара пространства $L_{\alpha_0}$.

Обозначим через $D(x)$ множество таких $s$, при которых $|x(s)| > h$. Очевидно,

$$\operatorname{mes} D(x) \leqslant h^{-\frac{1}{\alpha_0}} \quad (\| x \|_{\alpha_0} \leqslant 1)$$

и

$$x_2(s) = P_{D(x)} x(s).$$

---

*) Для любых неотрицательных функций $z_i(t) \in L_\beta$ $(\beta \geqslant 1)$

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} z_i(t) \right\|_\beta \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \| z_i(t) \|_\beta.$$

Поэтому при $\|x(s)\|_{\alpha_0} \leqslant 1$

$$\|Kx_2(t)\|_{\beta_0} = \|KP_{D(x)}x(t)\|_{\beta_0} \leqslant$$
$$\leqslant \|KP_{D(x)}\|_{\alpha_0 \to \beta_0} \leqslant \sup_{\text{mes}\, D \leqslant h^{-\frac{1}{\alpha_0}}} \|KP_D\|_{\alpha_0 \to \beta_0}$$

и в силу теоремы 5.7 равномерно относительно функций $x(s)$ из шара $\|x\|_{\alpha_0} \leqslant 1$:

$$\lim_{h \to \infty} \|Kx_2(t)\|_{\beta_0} = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.8 означает, что все точки $L$-характеристики $L(K;\ рег.)$, лежащие в полуполосе $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta \geqslant 1$, принадлежат $L$-характеристике $L(K;\ вп.\ непр.)$.

Отметим, что теорема 5.8 содержит усиление леммы 5.1: *каждый регулярный интегральный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, $\beta \geqslant 0$, компактен по мере.*

**5.5. Регулярные интегральные операторы, действующие из $L_1$ в $L_{\beta_0}$.** Лемма 5.2. *Пусть регулярный линейный интегральный оператор $K$ действует из $L_1$ в $L_{\beta_0}$, где $\beta_0 > 0$.*

*Тогда оператор $K$ преобразует каждое слабо компактное множество $\mathfrak{M}$ функций из $L_1$ в множество $K\mathfrak{M}$ функций, компактное в $L_{\beta_0}$.*

Для доказательства этой леммы нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 5.8. Изменение заключается лишь в том, что вместо равенства (5.8) используется равенство

$$\lim_{\text{mes}\, D \to 0} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|KP_D x\|_{\beta_0} = 0.$$

Последнее соотношение следует из неравенства

$$\|KP_D x\|_{\beta_0} \leqslant \|K\|_{1 \to \beta_0} \|P_D x\|_1$$

и из равенства

$$\lim_{\text{mes}\, D \to 0} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|P_D x\|_1 = 0$$

(которое в силу леммы 1.3 эквивалентно слабой компактности множества $\mathfrak{M} \subset L_1$).

Теорема 5.5. *Каждый регулярный интегральный оператор $K$, действующий из $L_1$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \beta_0 \leqslant 1$, усиленно непрерывен.*

Доказательство. Оператор $K$ преобразует каждую слабо сходящуюся в $L_1$ последовательность $x_n$ в последовательность $Kx_n$, которая слабо сходится в $L_{\beta_0}$ и которая в силу леммы 5.2 компактна в $L_{\beta_0}$. Поэтому последовательность $Kx_n$ сходится в $L_{\beta_0}$ по норме.

Теорема доказана.

При исследовании интегральных операторов в предыдущих пунктах часто использовались компактность по мере и равенства типа (5.8). Оба эти приема неприменимы при изучении операторов, действующих из $L_1$ в $L_{\beta_0}$. Поясним это.

Допустим, что имеет место равенство

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \|KP_D\|_{1 \to \beta_0} = 0,$$

где $0 < \beta_0 \leqslant 1$. Тогда для сопряженного оператора выполнено равенство

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \|P_D K^*\|_{1-\beta_0 \to 0} = 0.$$

Норма ненулевых функций в $L_0$ не обладает свойством абсолютной непрерывности. Поэтому из последнего равенства вытекает, что $K^*$, а следовательно и $K$, — нулевой оператор.

Пусть $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — равномерно ограниченная последовательность неотрицательных функций, определенных на $\Omega = [0, 1]$, которая не обладает свойством компактности по мере (например, можно положить $\varphi_k(t) = 1 + \sin kt$). Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ — последовательность непересекающихся промежутков на $[0, 1]$; через $\varkappa_k(s)$ будем обозначать характеристическую функцию промежутка $\Delta_k$. Положим

$$K(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\, \varkappa_k(s). \tag{5.14}$$

Ядро $K(t, s)$ ограничено и поэтому интегральный оператор $K$ с этим ядром действует из $L_1$ в любое $L_\beta$ и непрерывен. Очевидно,

$$Kx_k(t) = \varphi_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

если
$$x_k(s)=\frac{1}{\operatorname{mes}\Delta_k}\varkappa_k(s).$$

Нормы в $L_1$ функций $x_k(s)$ равны 1. В то же время значения оператора $K$ на этих функциях образуют множество, которое некомпактно по мере.

Таким образом, даже операторы с ограниченным ядром могут не обладать свойством компактности по мере, если их рассматривать как операторы, определенные на $L_1$.

**5.6. Операторы с вполне непрерывными мажорантами.** Пусть $K$ — линейный интегральный оператор
$$Kx(t)=\int_\Omega K(t,s)\,x(s)\,ds. \tag{5.15}$$

Во многих случаях известны оценки ядра $K(t,s)$:
$$|K(t,s)|\leqslant K_0(t,s), \tag{5.16}$$
где $K_0(t,s)$ — более простое ядро. Если оператор
$$K_0x(t)=\int_\Omega K_0(t,s)\,x(s)\,ds \tag{5.17}$$
действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, то из (5.16) вытекает, что и оператор $K$ действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и регулярен, т. е. $L(K;\ \textit{рег.})\supset\supset L(K_0;\ \textit{рег.})$. Возникает естественный вопрос о том, какие другие свойства оператора $K$ вытекают из соответствующих свойств оператора $K_0$.

Теорема 5.10. *Пусть выполнено условие* (5.16) *и пусть оператор* $K_0$ *действует из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$, *где* $0\leqslant\alpha_0<1$, $0<\beta_0\leqslant1$, *и вполне непрерывен.*

*Тогда* $K$ *также вполне непрерывен как оператор из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$.

Доказательство. Если $\alpha_0=0$, то утверждение теоремы 5.10 содержится в утверждении теоремы 5.2.

Пусть $0<\alpha_0<1$. Из (5.16) и теоремы 3.1 вытекает, что
$$\lim_{\operatorname{mes}D^*\to0}\|P_{D^*}K\|_{\alpha_0\to\beta_0}=\lim_{\operatorname{mes}D^*\to0}\ \sup_{\|x\|_{\alpha_0}\leqslant1}\|P_{D^*}Kx\|_{\beta_0}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\operatorname{mes}D^*\to0}\ \sup_{\|x\|_{\alpha_0}\leqslant1}\|P_{D^*}K_0(|x|)\|_{\beta_0}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\operatorname{mes}D^*\to0}\|P_{D^*}K_0\|_{\alpha_0\to\beta_0}=0.$$

Кроме того, оператор $K$ в силу леммы 5.1 компактен по мере. Из теоремы 3.1 вытекает, что $K$ вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы 5.10 неверно для операторов, действующих из $L_{\alpha_0}$ в $L_0$ или из $L_1$ в $L_{\beta_0}$, $0 < \beta_0 < 1$. Примером может служить оператор с ядром (5.14). Это ядро ограничено, т. е. оно допускает оценку (5.16), где $K_0(t, s) = M$. Оператор $K_0$ при этом вполне непрерывен как оператор, действующий из любого $L_\alpha$ в любое $L_\beta$. В то же время оператор $K$ с ядром (5.14) не обладает свойством полной непрерывности, если его рассматривать как оператор, определенный на $L_1$. Транспонированный оператор $K^{\#}$ также является оператором с ограниченным ядром. Он не обладает свойством полной непрерывности, если его рассматривать как оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_0$.

Из теоремы 5.10, в частности, вытекает *), что оператор (5.15) вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ $(0 \leqslant \alpha_0 < 1,\ 0 < \beta_0 \leqslant 1)$, если этим свойством обладает оператор $|K|$. Как и общая теорема 5.10, это утверждение теряет силу для операторов, действующих из $L_1$ в $L_{\beta_0}$ $(0 < \beta_0 \leqslant 1)$ или из $L_{\alpha_0}$ в $L_0$ $(0 \leqslant \alpha_0 < 1)$.

Теорема 5.10 обобщается на интегральные операторы $A$, действующие из $L_1$ в $L_\beta$, где $0 < \beta < \infty$, если дополнительно предположить, что $A$ компактен по мере.

Наиболее простыми нужно, по-видимому, считать линейные интегральные операторы с ограниченными ядрами. Из теоремы 5.10 вытекает, что такие операторы вполне непрерывны, если рассматривать их как операторы, действующие из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 1$, $0 < \beta_0 < \infty$.

**5.7. Использование ядер с усиленными особенностями.** Рассмотрим интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{5.18}$$

действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta_0 < \infty$.

---

*) Неясно, верно ли обратное утверждение — вытекает ли из полной непрерывности регулярного оператора $K$ полная непрерывность оператора $|K|$?

Наряду с (5.18) будем рассматривать интегральные операторы

$$K_{\varphi}x(t)=\int_{\Omega} K_{\varphi}(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{5.19}$$

ядра которых имеют вид

$$K_{\varphi}(t, s)=K(t, s)\, \varphi(t, s), \tag{5.20}$$

где $\varphi(t, s)$ измеримая по совокупности переменных $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$ функция.

Если оператор (5.18) регулярен, а функция $\varphi(t, s)$ ограничена, то, как это следует из теоремы 4.3, оператор (5.19) также действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и регулярен. Аналогичное утверждение неверно, если оператор (5.18) не обладает свойством регулярности.

Оператор (5.19) действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и при некоторых неограниченных функциях $\varphi(t, s)$. Оказывается, что оператор (5.18) вполне непрерывен, если такие неограниченные функции $\varphi(t, s)$ обладают специальными свойствами.

Будем говорить, что ядро $K(t, s)$ оператора (5.18), действующего из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, *допускает усиление особенностей*, если можно выбрать функцию $\varphi(t, s)$ так, чтобы удовлетворялись три требования:

1°. $\varphi(t, s) \geqslant 1$ $(t \in \Omega^*,\ s \in \Omega)$.

2°. *Оператор* (5.19) *действует из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$ *и регулярен* *).

3°. *При любом* $h$ *интегральный оператор*

$$K_h x(t)=\int_{\Omega} K(t, s)\, \varkappa_h(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{5.21}$$

*где*

$$\varkappa_h(t, s)=\begin{cases} 1, & \textit{если}\ \ \varphi(t, s) \leqslant h, \\ 0, & \textit{если}\ \ \varphi(t, s)>h, \end{cases}$$

*действует из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$ *и вполне непрерывен.*

Теорема 5.11. *Если ядро* $K(t, s)$ *оператора* (5.18), *действующего из* $L_{\alpha_0}$ *в* $L_{\beta_0}$, *допускает усиление особенностей, то оператор* (5.18) *вполне непрерывен.*

Доказательство. Для каждой функции $x \in L_{\alpha_0}$

$$\|(K-K_h)x\|_{\beta_0}=\left\|\int_{\Omega} K(t, s)[1-\varkappa_h(t, s)]\, x(s)\, ds\right\|_{\beta_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\left\|\int_{\Omega} |K(t, s)| \cdot [1-\varkappa_h(t, s)]\, \varphi(t, s)\, x(s)\, ds\right\|_{\beta_0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\left\|\int_{\Omega} |K(t, s)|\, \varphi(t, s)\, x(s)\, ds\right\|_{\beta_0}.$$

*) Из 1° и 2° вытекает, что оператор (5.18) действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и регулярен.

Отсюда вытекает, что

$$\| K - K_h \|_{\alpha_0 \to \beta_0} \leqslant \frac{1}{h} \| |K_\varphi| \|_{\alpha_0 \to \beta_0}.$$

Следовательно, оператор $K$ с любой точностью по норме операторов может быть аппроксимирован вполне непрерывным оператором. Теорема доказана.

Отметим одно следствие из теоремы 5.11. Пусть четная и положительная функция $M(u)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty. \tag{5.22}$$

Допустим, далее, что интегральный оператор

$$K_M x(t) = \int_\Omega M[K(t, s)] x(s) \, ds \tag{5.23}$$

действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$. Если $\alpha_0 < 1$, $\beta_0 > 0$, то ядро $K(t, s)$ допускает усиление особенностей — достаточно положить

$$\varphi(t, s) = \begin{cases} 1, & \text{если } |K(t, s)| \leqslant 1, \\ \dfrac{M[K(t, s)]}{K(t, s)}, & \text{если } |K(t, s)| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, если оператор (5.23) действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, то оператор (5.18) вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$.

В заключение отметим, что *у регулярных вполне непрерывных операторов ядра всегда допускают усиление особенностей.*

**5.8. Срезки ядер интегральных операторов.** Здесь мы пользуемся обозначениями, введенными в п. 4.7.

Теорема 5.12. *Пусть $|K|$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 1$, $0 < \beta_0 \leqslant 1$.*

*Тогда операторы*

$$K_h x(t) = \int_\Omega K_h(t, s) x(s) \, ds,$$

*где*

$$K_h(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & \textit{если } |K(t, s)| \leqslant h, \\ h \operatorname{sign} K(t, s), & \textit{если } |K(t, s)| > h, \end{cases}$$

*сходятся к $K$ по норме операторов.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha_0 = 0$. Пусть $x(s) \in L_0$, $\|x\|_0 \leqslant 1$. Тогда

$$\left| \int_\Omega [K(t, s) - K_h(t, s)] x(s) \, ds \right| \leqslant \int_\Omega [\, |K(t, s)| - |K_h(t, s)| \,] \, ds,$$

откуда

$$\|(K - K_h) x\|_{\beta_0} \leqslant \|(|K| - |K|_h) u_0\|_{\beta_0}, \tag{5.24}$$

где $u_0(s) \equiv 1$, и

$$|K|_h x(t) = |K_h| x(t) = \int_\Omega |K_h(t, s)| x(s)\, ds.$$

Из теоремы 4.7 вытекает, что правая часть неравенства (5.24) стремится к нулю при $h \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{h\to\infty} \| K - K_h \|_{0 \to \beta_0} = 0. \tag{5.25}$$

Отметим, что проведенное рассуждение верно при всех $\beta_0 > 0$. Пусть теперь $\alpha_0 < 1$, $\beta_0 = 1$. Из очевидного равенства

$$(K_h)^{\dagger} = (K^{\dagger})_h$$

и теоремы 4.5 вытекает, что

$$\| K - K_h \|_{\alpha_0 \to 1} = \| K^{\dagger} - (K^{\dagger})_h \|_{0 \to 1-\alpha_0},$$

и в силу (5.25)

$$\lim_{h\to\infty} \| K - K_h \|_{\alpha_0 \to 1} = 0. \tag{5.26}$$

Перейдем к основному случаю, когда $0 < \alpha_0 < 1$, $0 < \beta_0 < 1$. Если утверждение теоремы неверно, то найдется такая последовательность $x_n \in L_{\alpha_0}$, $\| x_n \|_{\alpha_0} = 1$, и такая последовательность чисел $h_n \to \infty$, что

$$\| (K - K_{h_n}) x_n \|_{\beta_0} \geqslant \delta_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.27}$$

По уже доказанному последовательность $(K - K_{h_n}) x_n$ сходится к нулю в $L_1$ по норме. Поэтому $(K - K_{h_n}) x_n$ сходится к нулю и по мере. Кроме того,

$$| (K - K_{h_n}) x_n | \leqslant |K| (|x_n|),$$

откуда вытекает, что функции $(K - K_{h_n}) x_n$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_{\beta_0}$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \| (K - K_{h_n}) x_n \|_{\beta_0} = 0,$$

что противоречит (5.27).

Теорема доказана.

**5.9. Суперпозиции интегральных операторов.** Воспользуемся обозначениями п. 4.6.

Для того чтобы суперпозиция $K_2 K_1$ была вполне непрерывным оператором, достаточно, чтобы один из операторов $K_1$, $K_2$ был вполне непрерывен, а второй непрерывен. Однако суперпозиция может быть вполне непрерывным оператором и в тех случаях, когда оба оператора $K_1$, $K_2$

не обладают свойством полной непрерывности (например, произведение двух не вполне непрерывных операторов может быть равно нулю).

**5.10. Полная непрерывность нерегулярных операторов.** Для нерегулярных интегральных операторов удается доказать более слабые утверждения, чем установленные в предыдущих пунктах для регулярных операторов.

Лемма 5.3. *Каждый интегральный оператор $K$, действующий из $L_0$ в $L_{\beta_0}$, компактен по мере.*

Доказательство этого факта совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 5.2.

Теорема 5.13. *Пусть интегральный оператор $K$ действует из $L_0$ в $L_{\beta_0}$ и непрерывен.*

*Тогда $K$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_0$ в $L_\beta$ при $\beta > \beta_0$.*

Для доказательства достаточно сослаться на лемму 5.3 и воспользоваться теоремой 3.1.

Теорема 5.14. *Пусть интегральный оператор $K$ действует из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$, где $0 < \alpha_0 \leqslant 1$, $\beta_0 \geqslant 0$, и непрерывен.*

*Тогда $K$ вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ при $\alpha < \alpha_0$ и $\beta > \beta_0$.*

Доказательство. Пусть $\alpha < \alpha_0$ и $\beta > \beta_0$. Очевидно, $\|P_{D^*}K\|_{\alpha\to\beta} \leqslant (\mathrm{mes}\, D^*)^{\beta-\beta_0}\|K\|_{\alpha\to\beta_0}$ и, следовательно,

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D^*\to 0}\|P_{D^*}K\|_{\alpha\to\beta} = 0.$$

Из теоремы 3.1 вытекает, что достаточно показать компактность по мере оператора $K$ на $L_\alpha$.

Обозначим через $T_h$ оператор, определенный равенством

$$T_h x(s) = \begin{cases} x(s), & \text{если } |x(s)| \leqslant h, \\ 0, & \text{если } |x(s)| > h. \end{cases}$$

Из леммы 5.4 вытекает, что множество функций $KT_hx$ ($\|x\|_\alpha \leqslant 1$) при любом $h$ компактно по мере. Поэтому достаточно показать, что равномерно относительно функций $x(s)$ из единичного шара пространства $L_\alpha$ выполнено равенство

$$\lim_{h\to\infty}\|Kx - KT_hx\|_{\beta_0} = 0. \qquad (5.28)$$

Функция $T_h x(s)$ не совпадает с функцией $x(s)$ ($\|x(s)\|_\alpha \leqslant 1$) лишь на множестве $D(x;\ h)$, мера которого не превышает $h^{-\frac{1}{\alpha}}$. Поэтому

$$\|x - T_h x\|_{\alpha_0} \leqslant \|x - T_h x\|_\alpha \cdot h^{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\|Kx - KT_h x\|_\beta \leqslant \|K\|_{\alpha_0 \to \beta} \|x - T_h x\|_\alpha \cdot h^{\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha}},$$

откуда и вытекает (5.28).

Теорема доказана.

В силу этой теоремы внутренние точки $L$-характеристики $L(K;\ \textit{непр.})$ (если они существуют) линейного интегрального оператора принадлежат $L(K;\ \textit{вп. непр.})$. Аналогичный факт был ранее установлен для множества $L(K;\ \textit{рег.})$ (теорема 5.4).

## § 6. Линейные $u_0$-ограниченные операторы*)

**6.1. Простейшие признаки непрерывности интегральных операторов.** Обычно ядро $K(t,\ s)$ интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t,\ s)\, x(s)\, ds \tag{6.1}$$

задано и требуется выяснить, действует ли он из $L_\alpha$ в $L_\beta$ при заданных $\alpha$ и $\beta$, либо нужно описать более полно его $L$-характеристики.

---

*) Рассматриваемые в этом параграфе классы интегральных операторов играют существенную роль во многих приложениях теории конусов (М. А. Красносельский [9]). Ряд общих теорем о свойствах решений уравнений с $u_0$-ограниченными операторами был установлен Л. А. Ладыженским и М. А. Красносельским [2]. Классы $v_0$-коограниченных операторов изучены в работе П. П. Забрейко [3].

Важная теорема 6.2 для случая $\beta = 0$ доказана И. М. Гельфандом [1]; общий случай рассмотрен (в других терминах) Л. В. Канторовичем, Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером [1]. Теоремы 6.4—6.6 в близкой форме установлены И. М. Гельфандом [1] (см. также Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]). У Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1] указан ряд утверждений, содержащих теорему 6.10. Операторы со значениями в пространстве $C$ изучены Ф. Риссом [2].

Предположим, что почти при всех $t \in \Omega^*$ ядро $K(t, s)$ как функция от $s$ принадлежит пространству $L_r$ $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ и положим

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r. \tag{6.2}$$

Во многих случаях просто устанавливается, что $\varphi(t) \in L_q$, где $q \geqslant 0$.

Пусть $r > 0$. Тогда $\varphi(t) \in L_q$ при $q > 0$, если

$$\int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega} |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds \right]^{\frac{r}{q}} dt < \infty, \tag{6.3}$$

и $\varphi(t) \in L_0$, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} \int_{\Omega} |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds < \infty. \tag{6.4}$$

В частности, неравенство (6.3) выполнено, если

$$\int_{\Omega^*} \int_{\Omega} |K(t, s)|^m ds\, dt, \tag{6.5}$$

где

$$m \geqslant \max\left\{\frac{1}{r}, \frac{1}{q}\right\}. \tag{6.6}$$

Пусть $r = 0$. Тогда $\varphi(t) \in L_q$ при $q > 0$, если

$$\int_{\Omega^*} \left[ \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} |K(t, s)|^{\frac{1}{q}} \right] dt < \infty, \tag{6.7}$$

и $\varphi(t) \in L_0$, если

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} \left[ \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} |K(t, s)| \right] < \infty. \tag{6.8}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r \in L_q$.

*Тогда интегральный оператор* $K$ *с ядром* $K(t, s)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$, *где* $\alpha = 1 - r$, $\beta = q$, *причем*

$$\|K\|_{\alpha \to \beta} \leqslant \|\varphi(t)\|_q. \tag{6.9}$$

Доказательство почти очевидно. В условиях теоремы почти при всех $t \in \Omega^*$ значения функций $Kx(t)$ допускают оценку

$$|Kx(t)| \leqslant \varphi(t)\, \|x\|_\alpha, \tag{6.10}$$

откуда следует неравенство (6.9).

Условие теоремы 6.1, как видно из дальнейшего, охватывает лишь частные классы интегральных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Ниже будут установлены существенно более слабые ограничения, при которых ядро $K(t, s)$ определяет непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Если оператор (6.1) регулярен и действует из $L_0$ в некоторое $L_\beta$, то функция

$$\varphi(t) = \int_\Omega |K(t, s)|\, ds$$

принадлежит $L_\beta$. Это значит, что выполнено условие (6.3) при $r = 1$, $q = \beta$. Таким образом, условие (6.3) при $r = 1$, $q = \beta$ не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы интегральный оператор (6.1) действовал из $L_0$ в $L_\beta$ и был регулярным. Верно аналогичное утверждение и для операторов, действующих из произвольного $L_\alpha$ в $L_0$; этот факт будет установлен в следующих пунктах.

Сделаем несколько замечаний об операторах, ядра которых удовлетворяют условиям теоремы 6.1.

Во-первых, эти операторы регулярны.

Во-вторых, эти операторы преобразуют каждую сходящуюся по норме $L_\alpha$ последовательность функций $x_n(t)$ в последовательность функций $Kx_n(t)$, которая не только сходится по норме $L_\beta$, но одновременно сходится и почти всюду. Для доказательства достаточно заметить, что из (6.10) вытекают неравенства

$$|Kx_n(t) - Kx_m(t)| \leqslant \varphi(t)\, \|x_n - x_m\|_\alpha.$$

**6.2. Пространства $E_{u_0}$.** Пусть $E$ – некоторое линейное пространство. Мы пока не предполагаем, что в $E$ задана какая-либо сходимость.

Через $\mathcal{K}$ обозначим такое выпуклое и линейно замкнутое *) множество элементов, которое вместе с каждой ненулевой точкой $x$ содержит все точки вида $\lambda x$, где $0 \leqslant \lambda < \infty$, и не содержит точки $-x$. Множество $\mathcal{K}$ называется *конусом*. Конус $\mathcal{K}$ позволяет ввести в $E$ полуупорядоченность: пишут (ср. п. 1.4), $x \preccurlyeq y$, если $y - x \in \mathcal{K}$. Знак $\preccurlyeq$ обладает обычными свойствами знака $\leqslant$.

Пусть $u_0$ — некоторый фиксированный ненулевой элемент из $\mathcal{K}$. Через $E_{u_0}$ обозначим совокупность таких $x \in E$, которые удовлетворяют при некоторых $\mu$ (зависящих, конечно, от $x$) неравенствам

$$-\mu u_0 \preccurlyeq x \preccurlyeq \mu u_0. \tag{6.11}$$

Положим

$$\| x \|_{u_0} = \inf \mu, \tag{6.12}$$

где infimum берется по всем тем $\mu$, при которых выполнено неравенство (6.11). Простой подсчет показывает, что функционал (6.12) удовлетворяет всем аксиомам нормы. Норму (6.12) называют *$u_0$-нормой*.

Для наших приложений важен тот случай, когда $E$ — некоторое пространство $L_\alpha$, $\mathcal{K}$ — множество всех неотрицательных на $\Omega$ функций, а $u_0$ — некоторая фиксированная ненулевая функция из $\mathcal{K}$. В этом случае $E_{u_0} = L_{\alpha, u_0}$ — это совокупность функций $x(t)$, удовлетворяющих почти всюду при некотором $\mu = \mu(x)$ неравенству

$$|x(t)| \leqslant \mu u_0(t). \tag{6.13}$$

Пространство функций, удовлетворяющих неравенству (6.13), полно по $u_0$-норме. Доказательство предоставляем читателю.

Отметим, что норма $\| x \|_\alpha$ на $L_{\alpha, u_0}$ подчинена $u_0$-норме $\| x \|_{\alpha, u_0}$ в том смысле, что

$$\| x \|_\alpha \leqslant \| x \|_{\alpha, u_0} \cdot \| u_0 \|_\alpha. \tag{6.14}$$

Пространство $L_{\alpha, u_0}$ является правильной частью пространства $L_\alpha$, если $\alpha > 0$.

Пусть $u_0(t)$ — фиксированная неотрицательная функция из $L_\beta$. Будем говорить, что линейный оператор $A$, дейст-

---

*) Выпуклое множество называется *линейно замкнутым*, если замкнуто его пересечение с любой прямой.

вующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, *$u_0$-ограничен*, если существует такое число $k$, что

$$-k\|x\|_\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant k\|x\|_\alpha u_0. \tag{6.15}$$

Это условие означает, что $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta, u_0}$ и является непрерывным оператором, причем

$$\|Ax\|_{\beta, u_0} \leqslant k\|x\|_\alpha \quad (x \in L_\alpha).$$

Легко видеть, что интегральный оператор (6.1) $u_0$-ограничен, если его ядро удовлетворяет условиям теоремы 6.1.

**6.3. Общий вид $u_0$-ограниченных операторов.** Через $\Omega^*(t;\varepsilon)$ будем обозначать пересечение шара радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $t$ с множеством $\Omega^*$.

По каждой функции $z(t) \in L_0$ можно определить функцию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega^*(t;\varepsilon)} \int_{\Omega^*(t;\varepsilon)} z(\tau)\,d\tau = f_t(z). \tag{6.16}$$

Она будет определена почти при всех $t$ и почти при всех $t$ будет совпадать с $z(t)$. Для гладких функций этот факт очевиден; в общем случае нужно воспользоваться понятием точек аппроксимативной непрерывности (см. И. П. Натансон [1]). Множество тех $t$, при которых определена функция (6.16), зависит, конечно, от функции $z(t)$.

Лемма 6.1. *Пусть $E_0$ — сепарабельное подпространство пространства $L_0$.*

*Тогда функция* (6.16) *почти при каждом $t \in \Omega^*$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $E_0$.*

Доказательство. Пусть последовательность функций $z_1(t), z_2(t), \ldots$ образует плотное в $E_0$ множество. Обозначим через $\Omega_0^* \subset \Omega^*$ множество полной меры $\left(\operatorname{mes} \Omega_0^* = \operatorname{mes} \Omega^*\right)$, в точках которого выполняются равенства

$$z_i(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} \Omega^*(t;\varepsilon)} \int_{\Omega^*(t;\varepsilon)} z_i(\tau)\,d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{6.17}$$

Из (6.17) вытекает, что при $t \in \Omega_0^*$ значение функции $f_t(x)$ является на линейной оболочке последовательности функций $z_1(t), z_2(t), \ldots$ линейным ограниченным функционалом.

Этот функционал можно продолжить по непрерывности на все $E_0$; продолженный функционал обозначим через $\tilde{f}_t(y)$. Осталось показать, что значение продолженного функционала совпадает со значением функции $f_t(y)$. Последний факт очевидным образом вытекает из неравенства

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega^*(t;\,\varepsilon)}\int_{\Omega^*(t;\,\varepsilon)} y(\tau)\,d\tau-\tilde{f}_t(y)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega^*(t;\,\varepsilon)}\int_{\Omega^*(t;\,\varepsilon)}[y(\tau)-y_n(\tau)]\,d\tau\right|+|\tilde{f}_t(y_n)-\tilde{f}_t(y)|,$$

где последовательность функций $y_n(t)$ сходится к $y(t)$ в $L_0$ и обладает тем свойством, что $f_t(y_n)=y_n(t)$.

Лемма доказана.

Теорема 6.2. *Каждый линейный $u_0$-ограниченный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0<\alpha\leqslant 1,$ $0\leqslant\beta<\infty)$, является линейным интегральным оператором*

$$Ax(t)=\int_\Omega K(t,\,s)\,x(s)\,ds,$$

*ядро $K(t,\,s)$ которого удовлетворяет условию*

$$\varphi(t)=\|K(t,\,s)\|_{1-\alpha}\leqslant ku_0(t).$$

Доказательство. Докажем теорему сначала для операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_0$, в случае, когда $u_0(t)\equiv 1$.

Пространство $L_\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ сепарабельно. Поэтому элементы $Ax$ лежат в некотором сепарабельном подпространстве $E_0$ пространства $L_0$. В силу леммы 6.1 можно указать такое подмножество $\Omega_0^*\subset\Omega^*$ полной меры, что при $t\in\Omega_0^*$ выражение

$$f_t(y)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\operatorname{mes}\Omega^*(t;\,\varepsilon)}\int_{\Omega^*(t;\,\varepsilon)} y(\tau)\,d\tau$$

является линейным непрерывным на $E_0$ функционалом.

Пусть $t_0\in\Omega_0^*$. Из непрерывности оператора $A$ и непрерывности функционала $f_{t_0}(x)$ следует, что функционал

$g_{t_0}(x) = f_{t_0}(Ax)$ является линейным непрерывным функционалом на $L_\alpha$; поэтому

$$g_{t_0}(x) = \int_\Omega K(t_0, s)\, x(s)\, ds, \tag{6.18}$$

где $K(t_0, s)$ — измеримая функция из $L_{1-\alpha}$. Так как

$$Ax(t) \equiv g_t(x),$$

то

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{6.19}$$

причем интегральный оператор (6.19) действует из $L_\alpha$ в $L_0$.

Обозначим через $x_1(s), \ldots, x_n(s), \ldots$ счетное всюду плотное в шаре $\|x\|_\alpha \leqslant 1$ пространства $L_\alpha$ множество. Тогда

$$\sup_n \left| \int_\Omega K(t, s)\, x_n(s)\, ds \right| = \|K(t, s)\|_{1-\alpha} = \varphi(t). \tag{6.20}$$

С другой стороны, из $u_0$-ограниченности оператора $A$ следует, что

$$|Ax| \leqslant \|A\|_{\alpha \to 0}$$

и, значит,

$$\sup_n |Ax_n| \leqslant \|A\|_{\alpha \to 0}. \tag{6.21}$$

Из (6.20) и (6.21) вытекает, что

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_{1-\alpha} \leqslant \|A\|_{\alpha \to 0} \cdot u_0(t).$$

Пусть теперь $A$ — произвольный $u_0$-ограниченный оператор, действующий из $L_\alpha$ в произвольное $L_\beta$, $\beta \geqslant 0$.

Рассмотрим оператор

$$Bx(t) = u_1(t)\, Ax(t),$$

где

$$u_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{u_0(t)}, & \text{если} \quad u_0(t) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad u_0(t) = 0. \end{cases}$$

Оператор $B$, очевидно, является линейным непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_0$. По доказанному, он является интегральным оператором

$$Bx(t) = \int_\Omega K_0(t, s)\, x(s)\, ds$$

с ядром $K_0(t, s)$, удовлетворяющим условию

$$\varphi_0(t) = \| K_0(t, s) \|_{1-\alpha} \leqslant k.$$

Поэтому оператор

$$Ax = u_0(t) \cdot Bx(t)$$

допускает представление

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с ядром $K(t, s) = u_0(t) K_0(t, s)$, удовлетворяющим условию

$$\varphi(t) = \| K(t, s) \|_{1-\alpha} \leqslant k u_0(t).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 6.2 неверна для $u_0$-ограниченных операторов, действующих из $L_0$ в некоторое $L_\beta$. В качестве примера достаточно рассмотреть оператор $Ax \equiv x$.

Полезно помнить, что каждый линейный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_0$, $u_0$-ограничен, так как в качестве $u_0$ можно взять функцию $u_0(t) \equiv 1$. Из теоремы 6.2 вытекает поэтому, что *каждый линейный непрерывный оператор, действующий из* $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ *в* $L_0$, *является интегральным оператором.*

Иногда приходится рассматривать действующие из $L_\alpha$ в $L_\beta$ линейные операторы $A$, удовлетворяющие аналогичному (6.15) условию

$$-k \| x \|_\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant k \| x \|_\alpha u_0, \tag{6.22}$$

где $u_0 \in L_\beta$. Легко видеть, что и такие операторы допускают интегральное представление. Этот факт будет использован при доказательстве теоремы 9.4.

**6.4. Полная непрерывность $u_0$-ограниченных операторов.**

Теорема 6.3. *Пусть линейный интегральный оператор $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha < 1,\ 0 < \beta < \infty)$ и $u_0$-ограничен.*

*Тогда $K$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

причем

$$\varphi(t) = \left\{ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\, ds \right\}^{1-\alpha} \in L_\beta. \tag{6.23}$$

Пусть последовательность $x_n(t)$ слабо сходится *) к $x_0(t)$ в пространстве $L_\alpha$. Тогда почти при всех $t \in \Omega^*$ числа $Kx_n(t)$ сходятся к $Kx_0(t)$. Иначе говоря, последовательность функций $Kx_n(t)$ сходится почти всюду к функции $Kx_0(t)$. Из слабой сходимости последовательности $x_n(t)$ вытекает, что она ограничена по норме: $\|x_n(t)\|_\alpha \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому из неравенства (6.10) вытекает, что

$$|Kx_n(t)| \leqslant M\varphi(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, функции $Kx_n(t)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_\beta$. Значит, последовательность $Kx_n(t)$ сходится к функции $Kx_0(t)$ не только почти всюду, но и по норме.

Мы показали, что оператор $K$ усиленно непрерывен в том смысле, что он преобразует слабо сходящиеся в $L_\alpha$ последовательности в последовательности, сходящиеся в $L_\beta$ по норме.

Ограниченные по норме множества в $L_\alpha$ при $0 \leqslant \alpha < 1$ слабо компактны *). Поэтому из усиленной непрерывности оператора $K$ вытекает его полная непрерывность.

Теорема доказана.

Полезным упражнением для читателя будут поиски других доказательств теоремы 6.3. Можно, например, воспользоваться результатами § 3 и 5.

---

*) Если $\alpha = 0$, то речь идет об $L_1$-слабой сходимости (см. п. 1.3).

**6.5. Полная непрерывность $u_0$-ограниченных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_0$.** Рассмотрим линейные интегральные операторы, действующие из $L_\alpha$ ($0 \leqslant \alpha < 1$) в $L_0$. Как было отмечено в конце предыдущего пункта, эти операторы $u_0$-ограничены и ими исчерпывается класс операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_0$ (если $\alpha > 0$).

Отметим сразу же, что такие операторы могут не быть вполне непрерывными. В качестве примера *) достаточно рассмотреть оператор $K_1$ с ядром

$$K_1(t, s) = \begin{cases} 2^{n(1-\alpha)}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t,\ s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } t,\ s \in [0,1] \end{cases}$$

(здесь $\Omega^* = \Omega = [0,1]$). Из очевидного неравенства

$$\int_0^1 |K_1(t, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}} ds \leqslant 1$$

вытекает, что $K_1$ действует из $L_\alpha$ в $L_0$ и $u_0$-ограничен (при $u_0(t) \equiv 1$). В то же время оператор $K_1$ преобразует ограниченную по норме последовательность функций

$$x_n(s) = \begin{cases} 2^{n\alpha}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{если } s < \dfrac{1}{2^n} \text{ или } s \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}, \end{cases}$$

в последовательность функций

$$K_1 x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{если } t < \dfrac{1}{2^n} \text{ или } t \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}, \end{cases}$$

которая некомпактна в $L_0$, так как

$$\| Kx_n - Kx_m \|_0 = 1 \qquad (n \neq m).$$

Заметим, что действующий из $L_\alpha$ в $L_0$ $u_0$-ограниченный оператор (6.1) преобразует каждую слабо сходящуюся в $L_\alpha$

*) Идею этого примера указал А. И. Перов.

последовательность в последовательность, сходящуюся почти всюду.

Вектор-функцию $w(t)$ $(t \in \Omega^*)$ со значениями в некотором $L_r = L_r(\Omega)$ называют *компактной в существенном*, если найдется такое подмножество $\Omega_0^* \subset \Omega^*$ полной меры, на котором значения функции $w(t)$ принадлежат компактному в $L_r$ множеству.

Если $K$ — интегральный $u_0$-ограниченный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_0$, то ядро $K(t, s)$ можно рассматривать как вектор-функцию $w(t) = K(t, s)$, определенную при $t \in \Omega^*$, со значениями в пространстве $L_{1-\alpha} = L_{1-\alpha}(\Omega)$.

Теорема 6.4. *Пусть линейный интегральный оператор $K$ действует из $L_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ в $L_0$.*

*Тогда он вполне непрерывен в том и только том случае, когда вектор-функция*

$$w(t) = K(t, s) \qquad (t \in \Omega^*) \tag{6.24}$$

*со значениями в пространстве $L_{1-\alpha}(\Omega)$ компактна в существенном.*

Доказательство. Пусть функция (6.24) компактна в существенном. Обозначим через $\Omega_0^*$ такое множество полной меры, на котором она принимает значения, принадлежащие компактному множеству $\mathfrak{M} \subset L_{1-\alpha}$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Разобьем тогда множество $\Omega_0^*$ на конечное число таких частей $\Omega_{(1)}^*, \ldots, \Omega_{(n)}^*$, что значения функции (6.24) на каждой из этих частей образуют в $L_{1-\alpha}$ множество, диаметр которого меньше $\varepsilon$. Если $t_1$ и $t_2$ принадлежат фиксированному множеству $\Omega_{(i)}^*$, то

$$|Kx(t_1) - Kx(t_2)| = \left| \int_\Omega [K(t_1, s) - K(t_2, s)]\, x(s)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \| w(t_1) - w(t_2) \|_{1-\alpha} \| x \|_\alpha \leqslant \varepsilon \| x \|_\alpha.$$

Из леммы 1.2 вытекает, что множество значений оператора $K$ на каждом шаре пространства $L_\alpha$ компактно в $L_0$. Значит, $K$ вполне непрерывен.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть оператор $K$ вполне непрерывен. Тогда множество его значений принадлежит сепарабельному подпространству пространства $L_0$. Из леммы 6.1 вытекает существование такого подмножества $\Omega_0^* \subset \Omega^*$ полной меры, что значение $Kx(t)$ при каждом фиксированном $t \in \Omega_0^*$ является линейным непрерывным функционалом на $L_\alpha$. Поэтому при любых $t_1$, $t_2 \in \Omega_0^*$ выполняется равенство

$$\| w(t_1) - w(t_2) \|_{1-\alpha} = \\ = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left| \int_\Omega [K(t_1, s) - K(t_2, s)]\, x(s)\, ds \right|. \qquad (6.25)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из леммы 1.2 вытекает, что множество $\Omega_0^*$ можно разбить на конечное число таких частей $\Omega_{(1)}^*, \ldots, \Omega_{(n)}^*$, что при $t_1$ и $t_2$ из фиксированного $\Omega_{(i)}^*$ выполняется неравенство

$$|Kx(t_1) - Kx(t_2)| < \varepsilon \qquad (6.26)$$

для всех функций $x(t)$ из единичного шара пространства $L_\alpha$. Следовательно, при каждом $t$

$$\| w(t_1) - w(t_2) \|_{1-\alpha} \leqslant \varepsilon \qquad (t_1,\ t_2 \in \Omega_{(i)}^*).$$

Это значит, что функция $w(t)$ в существенном компактна.

Теорема доказана.

Во многих случаях компактность множества значений функции $w(t)$ проверяется без труда. Если множество $\Omega^*$ ограничено и замкнуто, то достаточно, например, чтобы вектор-функция $w(t)$ была непрерывна. Отсюда вытекает, что интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ действует из $L_\alpha$ $(\alpha > 0)$ в $L_0$ и вполне непрерывен, если

$$\int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}} ds \leqslant C_1 < \infty \qquad (6.27)$$

и при каждом $t \in \Omega^*$

$$\lim_{h \to 0} \int_\Omega |K(t+h, s) - K(t, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}} ds = 0. \qquad (6.28)$$

Если $\Omega^*$ ограничено, но незамкнуто, то компактность множества значений функции $w(t)$ вытекает, например, из ее равномерной непрерывности. Следовательно, интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ действует из $L_\alpha$ в $L_0$ и вполне непрерывен, если выполнено условие (6.27) и если

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \Omega^* \\ |t_1-t_2|\leqslant h}} \int_\Omega |K(t_1, s) - K(t_2, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}} ds = 0. \quad (6.29)$$

**6.6. Полная непрерывность $u_0$-ограниченных операторов, действующих из $L_1$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$).** Общим свойством $u_0$-ограниченных операторов, действующих из $L_1$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$), является их усиленная непрерывность (это доказывается теми же рассуждениями, которые были проведены при доказательстве теоремы 6.3). Однако из усиленной непрерывности этих операторов не вытекает их полная непрерывность, так как шар в $L_1$ не обладает свойством слабой компактности. Примером может служить интегральный оператор $K$ с ядром (5.14).

Пусть $w(t)$ ($t \in \Omega^*$) — вектор-функция со значениями в пространстве $L_0$. Допустим, что значения $w(t)$ почти при всех $t$ принадлежат такому пространству $F \subset L_0$, что единичный шар пространства $L_1$ является $F$-слабо компактным множеством (см. п. 1.3). Это условие, например, выполнено, если значения $w(t)$ принадлежат сепарабельному подпространству $F \subset L_0$ (в частности, если $w(t)$ непрерывна). Тогда будем говорить, что функция $w(t)$ *в существенном кокомпактна.*

Теорема 6.5. *Пусть линейный интегральный $u_0$-ограниченный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_1$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$).*

*Тогда он вполне непрерывен в том и только том случае, когда вектор-функция*

$$w(t) = K(t, s) \qquad (t \in \Omega^*)$$

*со значениями в пространстве $L_0(\Omega)$ в существенном кокомпактна.*

Доказательство почти очевидно.

Если $\beta \in [0, 1]$, то условие полной непрерывности можно записать в более обозримой форме. В этом случае сопряженный к $K$ оператор $K^*$ будет совпадать с транспонированным и будет непрерывным оператором, действующим из $L_{1-\beta}$ в $L_0$. Вопросы о полной непрерывности операторов $K$ и $K^*$

эквивалентны. Оператор $K^*$ очевидным образом $u_0$-ограничен и поэтому условие его полной непрерывности можно получить из теоремы 6.4. Таким образом, верна

Теорема 6.6. *Пусть линейный интегральный $u_0$-ограниченный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_1$ в $L_\beta$ $(0 < \beta \leqslant 1)$.*

*Тогда он вполне непрерывен в том и только том случае, когда вектор-функция*

$$w^*(s) = K(t, s) \qquad (s \in \Omega)$$

*со значениями в пространстве $L_\beta(\Omega^*)$ в существенном компактна.*

## 6.7. Интегральные операторы, действующие из $L_\alpha$ в $C$.

В этом пункте мы будем предполагать, что множество $\Omega^*$ ограничено и замкнуто.

Если линейный непрерывный оператор $A$ действует из $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ в $C$, то формула

$$f_t(x) = Ax(t) \qquad (x \in L_\alpha) \tag{6.30}$$

определяет при каждом фиксированном $t \in \Omega^*$ линейный непрерывный функционал. Из теоремы об общем виде таких функционалов вытекает, что оператор $A$ допускает интегральное представление

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{6.31}$$

При этом ядро $K(t, s)$ при каждом фиксированном $t \in \Omega$ является функцией из $L_{1-\alpha}$. Из теоремы 6.2 вытекает, что функция $\varphi(t) = \|K(t, s)\|_{1-\alpha}$ принадлежит $L_0$. Если ядро $K(t, s)$ рассматривать как вектор-функцию

$$w(t) = K(t, s) \quad (t \in \Omega^*) \tag{6.32}$$

со значениями в $L_{1-\alpha}$, то она будет слабо непрерывна.

Легко видеть, что перечисленные свойства ядра $K(t, s)$ достаточны для того, чтобы интегральный оператор с этим ядром действовал из $L_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ в $C$ и был непрерывен.

Слабая непрерывность в $L_{1-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ вектор-функции (6.32) равносильна тому, что ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям:

$$1^\circ. \qquad \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\, ds \leqslant M.$$

2°. Для каждого измеримого подмножества $D \subset \Omega$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to t_0} \int_D K(t, s)\, ds = \int_D K(t_0, s)\, ds.$$

Нам осталось рассмотреть случай линейных операторов, действующих из $L_0$ в $C$. Такие операторы уже не обязательно интегральные. Однако для интегрального оператора с ядром $K(t, s)$ условия 1° и 2° по-прежнему необходимы и достаточны для того, чтобы этот оператор действовал из $L_0$ в $C$.

Если в перечисленных выше условиях ограничения, которые обеспечивают слабую непрерывность вектор-функции (6.32), заменить предположением о ее сильной непрерывности, то мы получим признак полной непрерывности интегрального оператора. Вектор-функция (6.32) будет сильно непрерывной в пространстве $L_{1-\alpha}$, если она удовлетворяет условию 1°, а вместо условия 2° условию

$$3^\circ. \qquad \lim_{t\to t_0} \int_\Omega |K(t, s) - K(t_0, s)|^{\frac{1}{1-\alpha}}\, ds = 0.$$

**6.8. Линейные $v_0$-коограниченные операторы.** В некоторых случаях проще доказывать полную непрерывность оператора $A^*$, сопряженного изучаемому линейному непрерывному оператору $A$. Из полной непрерывности оператора $A^*$, как известно, вытекает полная непрерывность оператора $A$.

Если $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и $0<\alpha\leqslant 1$, $0\leqslant\beta\leqslant 1$, то сопряженный оператор $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$. Если $A$ действует из $L_0$ в $L_\beta$, то $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в пространство, сопряженное $L_0$; во всех дальнейших рассмотрениях этого параграфа предполагается, что значения $A^*$ принадлежат $L_1$ (напомним, что этим свойством обладают регулярные интегральные операторы).

Пусть $v_0(s)$ — некоторая фиксированная неотрицательная функция из пространства $L_{1-\alpha}$.

Действующий из пространства $L_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ в пространство $L_\beta$ линейный непрерывный оператор $A$ назовем *$v_0$-коограниченным*, если

$$\|Ax\|_\beta \leqslant k f_0(|x|) \qquad (x \in L_\alpha), \tag{6.33}$$

где

$$f_0(x) = \int_\Omega x(s) v_0(s)\, ds. \tag{6.34}$$

Отметим, что каждый линейный непрерывный оператор, действующий из $L_1$ в $L_\beta$, является $v_0$-коограниченным, если положить $v_0(s) \equiv 1$. Для операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$ при $\alpha < 1$, предположение о $v_0$-коограниченности является существенным ограничением.

Теорема 6.7. *Линейный непрерывный оператор $A$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1)$ $v_0$-коограничен тогда и только тогда, когда действующий из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ сопряженный оператор $A^*$ $v_0$-ограничен.*

Доказательство. Из (6.33) вытекает, что для любого функционала $g \in L_{1-\beta}$ выполнены неравенства

$$-k\|g\| f_0(|x|) \leqslant g(Ax) \leqslant k\|g\| f_0(|x|),$$

которые можно переписать в виде

$$-k\|g\| f_0(|x|) \leqslant [A^*g](x) \leqslant k\|g\| f_0(|x|)$$

или

$$-k\|g\| \int_\Omega |x(s)| v_0(s)\, ds \leqslant [A^*g](x) \leqslant$$
$$\leqslant k\|g\| \int_\Omega |x(s)| v_0(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$-k\|g\| v_0(s) \leqslant A^*g(s) \leqslant k\|g\| v_0(s).$$

Мы показали, что из $v_0$-коограниченности оператора $A$ вытекает $v_0$-ограниченность сопряженного оператора. Обратное утверждение устанавливается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 6.8. *Пусть*

$$\psi(s) = \|K(t, s)\|_r \in L_q, \tag{6.35}$$

*причем* $0 \leqslant q$, $r \leqslant 1$.

*Тогда интегральный оператор* $K$ *с ядром* $K(t, s)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$, *где* $\alpha = 1 - q$, $\beta = r$ *и* $v_0$-*коограничен.*

Доказательство. Из условия (6.35) и теоремы 6.1 вытекает, что транспонированный оператор

$$K^{\tau} y(s) = \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt \tag{6.36}$$

действует из $L_{1-r}$ в $L_q$, регулярен и $v_0$-ограничен, где $v_0(s) = \psi(s)$. Остается сослаться на предыдущую теорему. Теорема доказана.

Условия (6.35) можно записать в виде следующих неравенств:

1°. $$\int_\Omega \left[\int_{\Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} dt\right]^{\frac{r}{q}} ds < \infty, \tag{6.37}$$

если $r, q > 0$.

2°. $$\int_\Omega \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{1}{q}} ds < \infty, \tag{6.38}$$

если $r = 0$, $q > 0$.

3°. $$\operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} \int_{\Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} dt < \infty, \tag{6.39}$$

если $r > 0$, $q = 0$.

4°. $$\operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} |K(t, s)| < \infty, \tag{6.40}$$

если $r = q = 0$.

Если $v_0$-коограниченный оператор $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 1$, то он может не быть интегральным — простым примером служит оператор $Ax \equiv x$. Если же $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta < 1$, то $v_0$-коограниченный оператор $A$ обязательно является интегральным. Для доказательства нужно воспользоваться теоремой 6.7. Из нее вытекает, что сопряженный оператор $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ и $v_0$-ограничен. В силу теоремы 6.2 оператор $A^*$ допускает интегральное представление

$$A^*y(s) = \int_{\Omega^*} K_0(t, s)\, y(t)\, dt,$$

причем ядро $K_0(t, s)$ удовлетворяет условию

$$\psi(s) = \|K_0(t, s)\|_{1-\beta} \in L_\alpha.$$

Оператор $A^*$ регулярен и в силу теоремы 4.4 сопряженный к нему оператор совпадает с транспонированным. Следовательно,

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K_0(t, s)\, x(s)\, ds.$$

**6.9. Полная непрерывность $v_0$-коограниченных операторов.**

Теорема 6.9. *Пусть линейный непрерывный оператор $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1)$ и $v_0$-коограничен.*

*Тогда он вполне непрерывен.*

Доказательство. Из теоремы 6.7 вытекает, что оператор $A^*$ $v_0$-ограничен. В силу теоремы 6.3 он вполне непрерывен. Поэтому вполне непрерывен оператор $A$.

Теорема доказана.

Теорема 6.9 является аналогом теоремы 6.3. Предоставляем читателю сформулировать аналоги предложений пп. 6.5 и 6.6.

**6.10. Интерполирование свойства $u_0$-ограниченности.** Через $L(K;\ *\text{-}огр.)$ обозначим совокупность таких точек $\{\alpha, \beta\}$, что оператор $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и является $u_0$-ограниченным. При этом элемент $u_0$ может зависеть от точки $\{\alpha, \beta\}$.

Лемма 6.2. *Пусть*

$$\varphi_0(t) = \|K(t, s)\|_{r_0} \in L_{q_0}, \quad \varphi_1(t) = \|K(t, s)\|_{r_1} \in L_{q_1}, \qquad (6.41)$$

*где $r_0$, $q_0$, $r_1$, $q_1$ — некоторые неотрицательные числа.*

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$

$$\varphi_\tau(t) = \|K(t, s)\|_{r(\tau)} \in L_{q(\tau)}, \tag{6.42}$$

*где*

$$r(\tau) = (1-\tau) r_0 + \tau r_1, \quad q(\tau) = (1-\tau) q_0 + \tau q_1. \tag{6.43}$$

Доказательство. Из логарифмической выпуклости нормы в $L_\alpha$ (см. формулу (1.6)) вытекает неравенство

$$\varphi_\tau(t) \leqslant [\varphi_0(t)]^{1-\tau} [\varphi_1(t)]^\tau.$$

Отсюда и из неравенства Гёльдера следует, что $\varphi_\tau(t) \in L_{q(\tau)}$ и

$$\|\varphi_\tau(t)\|_{q(\tau)} \leqslant \|\varphi_0(t)\|_{q_0}^{1-\tau} \|\varphi_1(t)\|_{q_1}^\tau.$$

Лемма доказана.

Из леммы 6.2 вытекает выпуклость $L$-характеристики $L(K;$ *-огр.).

Пусть выполнены условия (6.41) и пусть

$$\alpha_0 = 1 - r_0, \quad \alpha_1 = 1 - r_1, \quad \beta_0 = q_0, \quad \beta_1 = q_1.$$

Построим в плоскости $\{\alpha, \beta\}$ точки $M_0 = \{\alpha_0, \beta_0\}$ и $M_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$. Если обе эти точки лежат в полуполосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$ (рис. 6.1, *а*), то отрезок, соединяющий точки $M_0$ и $M_1$,

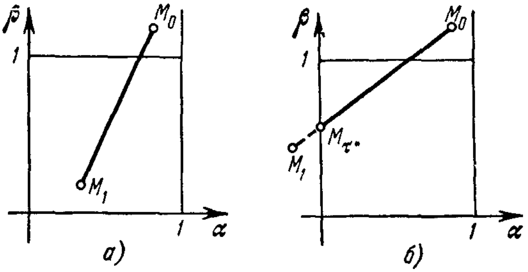


Рис. 6.1.

полностью принадлежит $L(K;$ *-огр.*); внутренние точки отрезка принадлежат $L(K;$ *вп. непр.*); если точки $M_0$ и $M_1$ лежат внутри полуполосы, то и они принадлежат $L(K;$ *вп. непр.*). Если точка $M_0$ лежит в полуполосе $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, а точка $M_1$ – вне ее (рис. 6.1, *б*), то $L$-характеристике $L(K;$ *-огр.*) принадлежат все точки той части $[M_0, M_{\tau^*}]$ отрезка, соединяющего $M_0$ и $M_1$, которая лежит в полуполосе; точки отрезка $[M_0, M_{\tau^*}]$ (кроме, может быть, точки $M_0$) принадлежат $L(\boldsymbol{K};$ *вп. непр.*).

Перейдем к $v_0$-коограниченности линейных интегральных операторов. Естественным образом определяется $L$-характеристика $L(\boldsymbol{A};$ *$*$-коогр.*). В п. 6.8 указаны условия $v_0$-коограниченности в терминах, относящихся к сопряженному оператору. Поэтому из леммы 6.2 можно сделать заключение лишь о выпуклости той части $L$-характеристики $L(\boldsymbol{A};$ *$*$-коогр.*), которая лежит в единичном квадрате $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$.

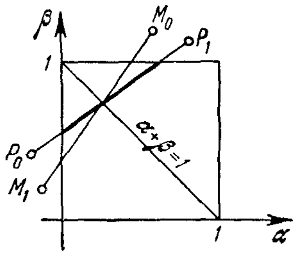


Рис. 6.2.

Пусть выполнены условия

$$\psi_0(s) = \|K(t, s)\|_{r_0} \in L_{q_0},$$
$$\psi_1(s) = \|K(t, s)\|_{r_1} \in L_{q_1}, \qquad (6.44)$$

где $r_0$, $r_1$, $q_0$, $q_1$ — некоторые неотрицательные числа. Тогда по изложенному в начале этого пункта рецепту можно построить часть $L$-характеристики $L(\boldsymbol{K}^{\perp};$ *$*$-огр.*) транспонированного оператора $\boldsymbol{K}^{\perp}$. Рассмотрим пересечение $M_0(\boldsymbol{K}^{\perp};$ *$*$-огр.*) этой части с единичным квадратом. Множество $N_0$, симметричное $M_0(\boldsymbol{K}^{\perp};$ *$*$-огр.*) относительно прямой $\alpha + \beta = 1$, будет принадлежать $L$-характеристике $L(\boldsymbol{K};$ *$*$-коогр.*) (рис. 6.2). Для построения множества $N_0$ можно вначале построить точки $P_0 = \{1 - q_0, r_0\}$, $Q_0 = \{1 - q_1, r_1\}$ и соединить их отрезком; часть отрезка, лежащая в единичном квадрате $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$, будет принадлежать $L(\boldsymbol{K};$ *$*$-коогр.*).

**6.11. О слабо вполне непрерывных операторах в $L_1$.** Напомним, что линейный оператор $A$, действующий из банахова пространства $E_1$ в банахово пространство $E_2$, называется *слабо вполне непрерывным*, если множество элементов $Ax$, $\|x\|_{E_1} \leqslant 1$, слабо компактно в $E_2$. Слабо вполне непрерывные операторы непрерывны.

Линейные операторы, действующие из $L_\alpha$ в $L_\beta$, всегда слабо вполне непрерывны, если хотя бы одно из чисел $\alpha$, $\beta$ лежит в интервале (0, 1). Интегральные операторы, действующие из $L_0$ в $L_1$, также слабо вполне непрерывны (они даже вполне непрерывны).

Перейдем к слабо вполне непрерывным операторам, действующим в пространстве $L_1$. Каждый такой оператор (см. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]) — регулярный и является интегральным оператором. Мы не останавливаемся на этой теореме, так как нас здесь интересуют априори интегральные операторы.

Напомним, что интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ действует и регулярен в пространстве $L_1$ тогда и только тогда, когда

$$\psi(s) = \int_{\Omega^*} |K(t, s)|\,dt \in L_0. \tag{6.45}$$

Будем говорить, что вектор-функция $w^*(s) = K(t, s)$ $(s \in \Omega)$ *слабо компактна в существенном*, если можно указать такое множество $\Omega_0 \subset \Omega$ полной меры, что значения $w^*(s)$ на $\Omega_0$ лежат в слабо компактном множестве. Слабая компактность в существенном вектор-функции $w^*(s)$ в силу леммы 1.3 означает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \sup_{s \in \Omega_0} \int_{D^*} |K(t, s)|\,dt = 0. \tag{6.46}$$

Теорема 6.10. *Пусть $K$ — линейный интегральный оператор с ядром $K(t, s)$, действующий из $L_1$ в $L_1$.*

*Тогда он слабо вполне непрерывен в том и только том случае, если вектор-функция*

$$w^*(s) = K(t, s) \quad (s \in \Omega)$$

*со значениями в пространстве $L_1(\Omega^*)$ слабо компактна в существенном.*

Доказательство. Слабо полная непрерывность оператора $K$ означает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} K \|_{1 \to 1} = 0.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\| P_{D^*} K \|_{1 \to 1} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} \int_{D^*} |K(t, s)|\,dt. \tag{6.47}$$

Так как для каждой функции $x(s) \in L_1$ выполняется неравенство

$$\| P_{D^*} K x \|_1 = \int_{D^*} \left| \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\,ds \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{D^*} \int_{\Omega} |K(t, s)|\,|x(s)|\,ds\,dt = \int_{\Omega} \left[ \int_{D^*} |K(t, s)|\,dt \right] |x(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_{D^*} |K(t, s)|\,dt \right\|_0 \|x\|_1,$$

то

$$\| P_{D^*} K \|_{1 \to 1} \leqslant \left\| \int_{D^*} |K(t, s)|\,dt \right\|_0. \tag{6.48}$$

С другой стороны, при каждом $s \in \Omega$

$$\int_{D^*} |K(t, s)|\, dt = \sup_{\|y\|_0 \leqslant 1} \int_{D^*} K(t, s)\, y(t)\, dt$$

и, значит,

$$\left\| \int_{D^*} |K(t, s)|\, dt \right\|_0 \leqslant \sup_{\|x\|_1 \leqslant 1,\ \|y\|_0 \leqslant 1} \int_\Omega \int_{D^*} K(t, s)\, y(t)\, x(s)\, dt\, ds =$$
$$= \sup_{\|x\|_1 \leqslant 1} \| P_{D^*} K x \|_1 = \| P_{D^*} K \|_{1 \to 1}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \int_{D^*} |K(t, s)|\, dt \right\|_0 \leqslant \| P_{D^*} K \|_{1 \to 1}. \tag{6.49}$$

Из (6.48) и (6.49) следует (6.47).

Теорема доказана.

Интересным свойством слабо вполне непрерывного оператора $K$, действующего в $L_1$, является тот факт, что его квадрат $K^2$ вполне непрерывен. Это вытекает из леммы 5.2, в силу которой множество значений оператора $K$ на каждом слабо компактном множестве компактно.

## § 7. Интегральные операторы с ядрами, удовлетворяющими условиям типа Л. В. Канторовича *)

**7.1. Простейшие признаки.** В предыдущем параграфе рассмотрены два класса интегральных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$: $u_0$-ограниченные и $v_0$-коограниченные операторы. Рассматриваемые в этом параграфе операторы образуют в некотором смысле промежуточные классы. Во всем параграфе изучаются только регулярные операторы.

*) Излагаемые здесь теоремы получены на пути развития идей Л. В. Канторовича [1] (см. также Х. Л. Смолицкий [1], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1]). В одном из докладов С. Г. Крейн обратил внимание на «интерполяционный характер» теорем Л. В. Канторовича о непрерывности интегральных операторов. Связь теорем Л. В. Канторовича о полной непрерывности интегральных операторов с теоремами об интерполировании свойства полной непрерывности была рассмотрена М. А. Красносельским [8].

Переход от условий Л. В. Канторовича к условиям типа (7.1) и (7.2) указан в книге М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого [3] (см. также статьи Я. Б. Рутицкого [4, 5]).

Новые результаты, изложенные в параграфе, получены в основном П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльником.

Доказываемые ниже теоремы содержат, как правило, два различных ограничения на ядро $K(t, s)$. Простейшие (и наиболее важные!) такие теоремы непосредственно вытекают из интерполяционных теорем 2.4 и 3.10. Приведем одну из них.

Теорема 7.1. *Пусть ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r \in L_q, \tag{7.1}$$

$$\psi(s) = \|K(t, s)\|_{r^*} \in L_{q^*}, \tag{7.2}$$

*где $0 \leqslant r^*, q^*, r \leqslant 1, \ 0 \leqslant q < \infty$.*

*Тогда при любом $\tau \in (0, 1)$ интегральный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = 1 - (1-\tau) r - \tau q^*, \quad \beta(\tau) = (1-\tau) q + \tau r^*, \tag{7.3}$$

*причем*

$$\|K\|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} \leqslant \|\varphi\|_q^{1-\tau} \cdot \|\psi\|_{q^*}^{\tau}. \tag{7.4}$$

*Если выполнено одно из дополнительных условий:*

а) $\qquad q^* > 0, \quad q + r^* > 0,$

б) $\qquad q > 0, \quad q^* + r > 0,$

*то $K$, как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, вполне непрерывен.*

Доказательство. Из условия (7.1) и теоремы 6.1 вытекает, что оператор $K$ действует из $L_{1-r}$ в $L_q$, а из условия (7.2) и теоремы 6.8 вытекает, что $K$ действует из $L_{1-q^*}$ в $L_{r^*}$. Утверждение о непрерывности и оценка (7.4) вытекают теперь из интерполяционных теорем. Отметим, что из интерполяционной теоремы вытекает и более общая оценка

$$\|P_{D^*} K P_D\|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} \leqslant \|P_{D^*}\varphi\|_q^{1-\tau} \, \|P_D \psi\|_{q^*}^{\tau}. \tag{7.5}$$

Перейдем к доказательству полной непрерывности оператора $K$.

Если выполнено одно из условий а) или б), то $\alpha(\tau) < 1$ и $\beta(\tau) > 0$. В силу теоремы 5.8 нужно рассмотреть лишь тот случай, когда $\beta(\tau) \leqslant 1$.

Если выполнено условие а), то из (7.5) вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \|K P_D\|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} = 0,$$

а если выполнено условие б), то снова из (7.5) вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D^* \to 0} \| P_{D^*} K \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} = 0.$$

Поэтому из теоремы 5.6 следует полная непрерывность оператора $K$.

Теорема доказана.

Если условия а), б) теоремы 7.1 не выполнены, то $K$, как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, может не обладать свойством полной непрерывности.

Рассмотрим, например, интегральный оператор $K_0$ с ядром

$$K_0(t, s) = \begin{cases} 2^{nrr^*}, & \text{если} \quad t \in \Omega_n^*, \ s \in \Omega_n; \\ 0 & \text{при остальных значениях } t \in \Omega^*, \ s \in \Omega. \end{cases} \tag{7.6}$$

Здесь

$$\Omega^* = \left[0, \frac{1}{1 - 2^{-r}}\right], \quad \Omega = \left[0, \frac{1}{1 - 2^{-r^*}}\right],$$

а

$$\Omega_n^* = \left[\frac{1 - 2^{-r(n-1)}}{1 - 2^{-r}}, \frac{1 - 2^{-rn}}{1 - 2^{-r}}\right),$$

$$\Omega_n = \left[\frac{1 - 2^{-r^*(n-1)}}{1 - 2^{-r^*}}, \frac{1 - 2^{-r^*n}}{1 - 2^{-r^*}}\right)$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ядро (7.6) удовлетворяет всем условиям теоремы 7.1 (при $q = q^* = 0$), исключая условия а), б). Поэтому интегральный оператор $K_0$ будет при всех $\tau \in (0, 1)$ действовать из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где

$$\alpha(\tau) = 1 - (1 - \tau) r, \quad \beta(\tau) = \tau r^*.$$

В то же время этот оператор не является вполне непрерывным — ограниченную в $L_{\alpha(\tau)}$ последовательность функций

$$x_n(s) = \begin{cases} 2^{nr^*\alpha(\tau)}, & \text{если} \quad s \in \Omega_n, \\ 0, & \text{если} \quad s \notin \Omega_n, \end{cases}$$

он переводит в некомпактную в $L_{\beta(\tau)}$ последовательность функций

$$K_0 x_n(t) = \begin{cases} 2^{nr\beta(\tau)}, & \text{если} \quad t \in \Omega_n^*, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin \Omega_n^*. \end{cases}$$

Вернемся к теореме 7.1. Пусть ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям (7.1) и (7.2), но условия а) и б) не выполнены. Предположим, что $q = q^* = 0$; $r, r^* > 0$. В этом случае $K$ будет вполне непрерывен *) как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ $(0 < \tau < 1)$, если выполнено либо условие

$$\lim_{\text{mes } D \to 0} \left\| \int_D |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds \right\|_0 = 0,$$

либо условие

$$\lim_{\text{mes } D^* \to 0} \left\| \int_{D^*} |K(t, s)|^{\frac{1}{r^*}} dt \right\|_0 = 0.$$

Для доказательства достаточно выписать неравенство

$$\| P_{D^*} K P_D \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \left\{ \int_D |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds \right\}^r \right\|_0^{1-\tau} \cdot \left\| \left\{ \int_{D^*} |K(t, s)|^{\frac{1}{r^*}} dt \right\}^{r^*} \right\|_0^{\tau}$$

и сослаться на теорему 5.6.

Предположим теперь, что $\Omega^* = \Omega$, и рассмотрим класс интегральных операторов с ядрами, обладающими свойством «симметричности»:

$$|K(t, s)| = |K(s, t)| \quad (t, s \in \Omega). \tag{7.7}$$

Допустим, что выполнено условие

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r \in L_q, \tag{7.8}$$

причем $0 \leqslant r, q \leqslant 1$. Из (7.7) тогда следует, что

$$\psi(s) = \|K(t, s)\|_r \in L_q.$$

Таким образом, выполнены условия (7.1) и (7.2) при $r = r^*$ и $q = q^*$. Поэтому из теоремы 7.1 вытекает

*) Это утверждение указал Я. Б. Рутицкий.

Теорема 7.2. *Пусть ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям* (7.7) и (7.8).

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$ *интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(t, s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где

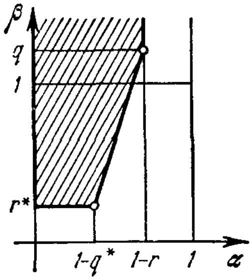


Рис. 7.1.

$$\alpha(\tau) = 1 - (1 - \tau) r - \tau q,$$

$$\beta(\tau) = (1 - \tau) q + \tau r,$$

причем

$$\| \boldsymbol{K} \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} \leqslant \| \varphi \|_q.$$

*Если* $q > 0$, *то* $\boldsymbol{K}$ *вполне непрерывен как оператор из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$.

Теоремы 7.1 и 7.2 позволяют построить некоторые части $L$-характеристик оператора $\boldsymbol{K}$. Пусть, например, выполнены условия теоремы 7.1 и $q^* > r$, $q > r^*$; тогда $L(\boldsymbol{K};\ \text{рег.})$ содержит заштрихованный на рис. 7.1 многоугольник.

Следует отметить, что теоремы 7.1 и 7.2 «точные» — можно указать такие ядра $K(t, s)$, что $L$-характеристики соответствующих операторов полностью определяются этими теоремами.

**7.2. Теоремы с промежуточным условием.** В этом пункте предполагается, что ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условию

$$\psi(s) = \| |K(t, s)|^{\nu} \cdot |\varphi(t)|^{1-\nu} \|_{\theta} \in L_{q^*}, \tag{7.9}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ и

$$\varphi(t) = \| K(t, s) \|_r. \tag{7.10}$$

Условие (7.9) – промежуточное между условиями $u_0$-ограниченности и $v_0$-коограниченности — в первое из них оно переходит при $\nu = 0$ и во второе при $\nu = 1$. Если числа $r$, $\theta$, $q^*$ положительны, то условие (7.9) можно записать в виде неравенства

$$\int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} \left[ \int_{\Omega} |K(t, \sigma)|^{\frac{1}{r}} d\sigma \right]^{\frac{r(1-\nu)}{\theta}} dt \right\}^{\frac{\theta}{q^*}} ds < \infty.$$

Теорема 7.3. *Пусть $K(t, s)$ удовлетворяет условию* (7.9) *и пусть*

$$\theta \geqslant q^*, \quad (1-\nu) r + \theta \leqslant 1. \tag{7.11}$$

*Тогда интегральный оператор* **K** *с ядром $K(t, s)$ является непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где*

$$\alpha = 1 - (1-\nu) r - q^*, \quad \beta = \theta, \tag{7.12}$$

*причем*

$$\| \mathbf{K} \|_{\alpha \to \beta} \leqslant \| \psi(s) \|_{q^*}. \tag{7.13}$$

*Если дополнительно*

$$q^* > 0, \tag{7.14}$$

*то* **K** *вполне непрерывен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим число

$$b = \frac{1-(1-\nu) r - \theta}{1-(1-\nu) r - q^*}.$$

В силу (7.11) выполняются неравенства

$$0 \leqslant b \leqslant 1.$$

При этом

$$1 - (1-\nu) r - b\alpha = \theta.$$

Очевидно,

$$|\mathbf{K} x(t)| \leqslant \int_\Omega |K(t, s)|^{1-\nu} |K(t, s)|^\nu |x(s)|^{1-b} |x(s)|^b \, ds.$$

Применим к правой части неравенство Гёльдера

$$\left| \int_\Omega u(s) v(s) w(s) \, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int_\Omega |u(s)|^{\frac{1}{\gamma_1}} ds \right\}^{\gamma_1} \left\{ \int_\Omega |v(s)|^{\frac{1}{\gamma_2}} ds \right\}^{\gamma_2} \left\{ \int_\Omega |w(s)|^{\frac{1}{\gamma_3}} ds \right\}^{\gamma_3} \tag{7.15}$$
$$(\gamma_i \geqslant 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1),$$

в котором

$$u(s) = |K(t, s)|^{1-\nu}, \; v(s) = |K(t, s)|^\nu |x(s)|^{1-b}, \; w(s) = |x(s)|^b$$

и

$$\gamma_1 = r(1-\nu), \quad \gamma_2 = \theta, \quad \gamma_3 = b\alpha.$$

В результате получим неравенство

$$|Kx(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds \right\}^{r(1-\nu)} \left\{ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}} ds \right\}^{\theta} \times$$
$$\times \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds \right\}^{b\alpha} =$$
$$= \varphi(t)^{1-\nu} \left[ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}} ds \right]^{\theta} \|x\|_\alpha^b.$$

Тем самым получаем оценку и для $\|Kx\|_\beta$:

$$\|Kx\|_\beta \leqslant \left\{ \int_{\Omega^*} \varphi(t)^{\frac{1-\nu}{\theta}} \left[ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}} ds \right] dt \right\}^{\theta} \|x\|_\alpha^b. \tag{7.16}$$

В правой части интегралы можно переставить в силу теоремы Фубини. Поэтому из (7.16) следует, что

$$\|Kx\|_\beta \leqslant \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}} \left[ \int_{\Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} \varphi(t)^{\frac{1-\nu}{\theta}} dt \right] ds \right\}^{\theta} \|x\|_\alpha^b,$$

или, что то же самое,

$$\|Kx\|_\beta \leqslant \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}} [\psi(s)]^{\frac{1}{\theta}} ds \right\}^{\theta} \cdot \|x\|_\alpha^b. \tag{7.17}$$

Для окончательной оценки $\|Kx\|_\beta$ воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\left| \int_\Omega u(s) v(s) ds \right| \leqslant \left\{ \int_\Omega |u(s)|^{\frac{1}{\gamma_1}} ds \right\}^{\gamma_1} \left\{ \int_\Omega |v(s)|^{\frac{1}{\gamma_2}} ds \right\}^{\gamma_2} \tag{7.18}$$
$$(\gamma_i \geqslant 0; \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1),$$

в котором

$$u(s) = |x(s)|^{\frac{1-b}{\theta}}, \quad v(s) = [\psi(s)]^{\frac{1}{\theta}}$$

и

$$\gamma_1 = \frac{\alpha(1-b)}{\theta}, \quad \gamma_2 = \frac{q^*}{\theta}.$$

Мы приходим к окончательной оценке

$$\|Kx\|_\beta \leqslant \|\psi(s)\|_{q^*}\|x\|_\alpha.$$

Утверждение теоремы о непрерывности и оценка (7.13) доказаны.

Полная непрерывность оператора $K$ следует из теоремы 5.8 и оценки

$$\|KP_D\|_{\alpha\to\beta} \leqslant \|P_D\psi\|_{q^*},$$

которая доказывается точно так же, как и оценка (7.13). Теорема доказана.

Предположим теперь, что условие (7.14) не выполнено, т. е. $q^* = 0$. В этом случае, как показывает пример, интегральный оператор может не обладать свойством полной непрерывности как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Положим

$$K(t, s) = \begin{cases} 2^{n(\theta + r - \nu r)}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t, \ s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } t, s. \end{cases} \qquad (7.19)$$

Здесь $\Omega^* = \Omega = [0, 1]$, а числа $\nu$, $r$, $\theta$ фиксированы и удовлетворяют соотношениям

$$0 \leqslant \nu \leqslant 1, \quad \theta \geqslant 0, \quad (1 - \nu) r + \theta \leqslant 1.$$

Функция $\varphi(t)$ в этом случае определится равенством

$$\varphi(t) = 2^{n(\theta - \nu r)}, \quad \text{если } \frac{1}{2^n} \leqslant t < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$\| |K(t, s)|^\nu |\varphi(t)|^{1-\nu} \|_\theta \equiv 1 \quad (s \in [0, 1])$$

и, значит,

$$\psi(s) = \| |K(t, s)|^\nu |\varphi(t)|^{1-\nu} \|_\theta \in L_0.$$

Условия теоремы 7.3 выполнены и оператор $K$ с ядром (7.19) действует из $L_\alpha$, $\alpha = 1 - r(1 - \nu)$, в $L_\beta$, $\beta = 0$. В то же время этот оператор не является вполне непрерывным, так как он ограниченную в $L_\alpha$ последовательность функций

$$x_n(s) = \begin{cases} 2^{n\alpha}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } s \in [0, 1] \end{cases}$$

переводит в последовательность функций

$$Kx_n(t)=\begin{cases} 2^{n\beta}, & \text{если } \frac{1}{2^n}\leqslant t<\frac{1}{2^{n-1}},\\ 0 & \text{при остальных } t\in[0,\ 1],\end{cases}$$

которая очевидным образом некомпактна в $L_\beta$.

Из теоремы 7.2 и теоремы о сопряженном операторе вытекает еще одно предложение об условиях непрерывности и полной непрерывности интегральных операторов.

Теорема 7.4 *Пусть функция $K(t,\ s)$ удовлетворяет условию*

$$\varphi(t)=\left\|\,|K(t,\ s)|^{\nu}\,|\psi(s)|^{1-\nu}\right\|_{\theta^*}\in L_q, \tag{7.20}$$

*где*

$$\psi(s)=\|K(t,\ s)\|_{r^*}, \tag{7.21}$$

*причем выполняются неравенства*

$$\theta^*\geqslant q,\quad (1-\nu)\,r^*+\theta^*\leqslant 1. \tag{7.22}$$

*Тогда интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(t,\ s)$ является непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где*

$$\alpha=1-\theta^*,\quad \beta=(1-\nu)\,r^*+q, \tag{7.23}$$

*причем*

$$\|\boldsymbol{K}\|_{\alpha\to\beta}\leqslant\|\varphi(t)\|_q. \tag{7.24}$$

*Если дополнительно*

$$q>0,$$

*то $\boldsymbol{K}$ — вполне непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

**7.3. Леммы.** В этом пункте будет подробно изучен класс линейных интегральных операторов $\boldsymbol{K}$, ядра $K(t,\ s)$ которых удовлетворяют одновременно двум условиям

$$\varphi(t)=\|K(t,\ s)\|_r\in L_q, \tag{7.25}$$

$$\psi(s)=\left\|\,|K(t,\ s)|^{\nu}\,|\varphi(t)|^{1-\nu}\right\|_{\theta}\in L_p\ (0<\nu\leqslant 1). \tag{7.26}$$

Если в некоторой точке $s_0\in\Omega$ почти при всех $t\in\Omega^*$ выполняется неравенство

$$|K(t,\ s)|\geqslant c_0>0,$$

то из (7.26) вытекает, что $\varphi(t) \in L_{\frac{1-\nu}{\theta}}$. Поэтому условие (7.25) есть следствие условия (7.26), если $(1-\nu) \leqslant q\theta$.

Для тех случаев, когда каждое из условий (7.25) и (7.26) является независимым признаком регулярности (или полной непрерывности) $\boldsymbol{K}$ как оператора из $L_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и соответственно из $L_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$, к оператору $\boldsymbol{K}$ можно применить интерполяционную теорему и получить тем самым новые точки, принадлежащие $L$-характеристике $L(\boldsymbol{K}$; *рег.*) (или $L(\boldsymbol{K}$; *вп. непр.*)). В других случаях удобно рассматривать условия (7.25) и (7.26) одновременно.

Лемма 7.1. *Пусть функция $K(t, s)$ удовлетворяет условиям* (7.25) *и* (7.26), *причем $\theta \geqslant p$. Пусть число $\tau$ удовлетворяет неравенствам*

$$1-\nu \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{7.27}$$

$$\tau r+\frac{(1-\tau)}{\nu}\theta \leqslant 1. \tag{7.28}$$

*Тогда интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau)=1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu} p, \quad \beta(\tau)=\frac{1-\tau}{\nu}\theta+\frac{\tau+\nu-1}{\nu} q, \tag{7.29}$$

*причем выполняется неравенство*

$$\|K\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)} \leqslant \|\varphi\|_l^{\frac{\tau+\nu-1}{\nu}} \|\psi\|_p^{\frac{1-\tau}{\nu}}. \tag{7.30}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 7.3 Рассмотрим число

$$b=\frac{1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}\theta}{1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}p}=\frac{1}{\alpha(\tau)}\left(1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}\theta\right).$$

Из неравенства (7.28) вытекает, что

$$1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}\theta \geqslant 0;$$

поэтому

$$1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}p \geqslant 1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}\theta \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leqslant b \leqslant 1.$$

Очевидно,

$$|Kx(t)| \leqslant \int_\Omega |K(t, s)|^\tau |K(t, s)|^{1-\tau} |x(s)|^{1-b} |x(s)|^b \, ds. \tag{7.31}$$

Применим к правой части (7.31) неравенство Гёльдера (7.15), в котором

$$u(s) = |K(t, s)|^\tau, \quad v(s) = |K(t, s)|^{1-\tau} |x(s)|^{1-b},$$

$$w(s) = |x(s)|^b,$$

$$\gamma_1 = \tau r, \quad \gamma_2 = \frac{(1-\tau)\theta}{\nu}, \quad \gamma_3 = b\alpha(\tau).$$

В результате получим оценку

$$|Kx(t)| \leqslant \left\{ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{1}{r}} ds \right\}^{\tau r} \times$$

$$\times \left\{ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right\}^{\frac{(1-\tau)\theta}{\nu}} \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{1}{\alpha(\tau)}} ds \right\}^{b\alpha(\tau)} =$$

$$= \varphi^\tau(t) \left[ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right]^{\frac{(1-\tau)\theta}{\nu}} \|x\|^b_{\alpha(\tau)}.$$

Тем самым получим оценку и для $\|Kx\|_{\beta(\tau)}$:

$$\|Kx\|_{\beta(\tau)} \leqslant \left\{ \int_{\Omega^*} \varphi^{\frac{\tau}{\beta(\tau)}}(t) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \int_\Omega |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |x(s)|^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right]^{\frac{(1-\tau)\theta}{\nu\beta(\tau)}} dt \right\}^{\beta(\tau)} \|x\|^b_{\alpha(\tau)}. \tag{7.32}$$

Положим

$$c = \frac{1-\nu}{\nu} \cdot \frac{1-\tau}{\tau}.$$

Из (7.27) очевидным образом вытекает, что $0 \leqslant c \leqslant 1$ и

$$\frac{\beta(\tau)}{q\tau(1-c)} = 1 + \frac{\theta(1-\tau)}{q(\tau+\nu-1)} \geqslant 1.$$

Перепишем неравенство (7.32) в виде

$$\| Kx \|_{\beta(\tau)} \leqslant \left\{ \int\limits_{\Omega^*} \varphi^{\frac{\tau(1-c)}{\beta(\tau)}}(t)\, \varphi^{\frac{\tau c}{\beta(\tau)}}(t) \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \int\limits_{\Omega} | K(t, s) |^{\frac{\nu}{\theta}} | x(s) |^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right]^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu\beta(\tau)}} dt \right\}^{\beta(\tau)} \| x \|^{b}_{\alpha(\tau)}. \quad (7.33)$$

Применим к внешнему интегралу в (7.33) неравенство Гёльдера

$$\left| \int\limits_{\Omega^*} u(t)\, v(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{\Omega^*} | u(t) |^{\frac{1}{\gamma_1}} dt \right\}^{\gamma_1} \cdot \left\{ \int\limits_{\Omega^*} | v(t) |^{\frac{1}{\gamma_2}} dt \right\}^{\gamma_2} \quad (\gamma_i \geqslant 0, \ \ \gamma_1 + \gamma_2 = 1),$$

в котором

$$u(t) = \varphi^{\frac{\tau(1-c)}{\beta(\tau)}}(t),$$

$$v(t) = \varphi^{\frac{\tau c}{\beta(\tau)}}(t) \left[ \int\limits_{\Omega} | K(t, s) |^{\frac{\nu}{\theta}} | x(s) |^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right]^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu\beta(\tau)}}$$

и

$$\gamma_1 = \frac{q\tau(1-c)}{\beta(\tau)}, \qquad \gamma_2 = \frac{\theta(1-\tau)}{\nu\beta(\tau)}.$$

В результате получим, что

$$\| Kx \|_{\beta(\tau)} \leqslant \left\{ \int\limits_{\Omega^*} \varphi(t)^{\frac{1}{q}} dt \right\}^{q\tau(1-c)} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{\Omega^*} \varphi(t)^{\frac{\tau c \nu}{\theta(1-\tau)}} \left[ \int\limits_{\Omega} | K(t, s) |^{\frac{\nu}{\theta}} | x(s) |^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right] dt \right\}^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu}} \times$$

$$\times \| x \|^{b}_{\alpha(\tau)} = \| \varphi \|_q^{\tau(1-c)} \left\{ \int\limits_{\Omega^*} \varphi(t)^{\frac{1-\nu}{\theta}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \int\limits_{\Omega} | K(t, s) |^{\frac{\nu}{\theta}} | x(s) |^{\frac{\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}} ds \right] dt \right\}^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu}} \| x \|^{b}_{\alpha(\tau)}.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, получим неравенство

$$\|Kx\|_{\beta(\tau)} \leqslant \|\varphi\|_q^{\tau(1-c)} \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{\nu}{\theta} \cdot \frac{1-b}{1-\tau}} \times \right.$$
$$\left. \times \left[ \int_{\Omega^*} |K(t, s)|^{\frac{\nu}{\theta}} |\varphi(t)|^{\frac{1-\nu}{\theta}} dt \right] ds \right\}^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu}} \|x\|_{\alpha(\tau)}^b$$

или, что то же самое,

$$\|Kx\|_{\beta(\tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_q^{\tau(1-c)} \left\{ \int_\Omega |x(s)|^{\frac{\nu}{\theta} \frac{1-b}{1-\tau}} [\psi(s)]^{\frac{1}{\theta}} ds \right\}^{\frac{\theta(1-\tau)}{\nu}} \|x\|_{\alpha(\tau)}^b. \quad (7.34)$$

Из (7.34) можно получить окончательную оценку. Для этого применим к интегралу в правой части (7.34) неравенство Гёльдера (7.18), полагая

$$u(s) = |x(s)|^{\frac{\nu}{\theta} \cdot \frac{1-b}{1-\tau}}, \quad v(s) = [\psi(s)]^{\frac{1}{\theta}}$$

и

$$\gamma_1 = \frac{\alpha(\tau)\nu(1-b)}{\theta(1-\tau)}, \quad \gamma_2 = \frac{p}{\theta}.$$

В результате получим

$$\|Kx\|_{\beta(\tau)} \leqslant \|\varphi\|_q^{\tau(1-c)} \cdot \|\psi(s)\|_p^{\frac{1-\tau}{\nu}} \cdot \|x\|_{\alpha(\tau)}. \quad (7.35)$$

Из (7.35) вытекает неравенство (7.30).

Лемма доказана.

Отметим, что с помощью тех же рассуждений можно доказать неравенство

$$\|P_{D^*}KP_D\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)} \leqslant \|P_{D^*}\varphi\|_q^{\tau(1-c)} \|P_D\psi\|_p^{\frac{1-\tau}{\nu}}. \quad (7.36)$$

Лемма 7.2. *Пусть выполнены условия леммы* 7.1 *Пусть выполнено одно из условий*:

а) $\tau < 1$, $p > 0$,

б) $1 - \nu < a$, $q > 0$, $\tau r + p\dfrac{1-\tau}{\nu} > 0$.

*Тогда $K$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$.*

Доказательство. В условиях леммы очевидны неравенства

$$\alpha(\tau) < 1, \quad \beta(\tau) > 0.$$

Если $\beta(\tau) \geqslant 1$, то полная непрерывность оператора $K$ вытекает из теоремы 5.8.

Пусть $\beta(\tau) < 1$.

Если выполнено условие а), то из (7.36) вытекает соотношение

$$\lim_{\text{mes } D \to 0} \| KP_D \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} = 0.$$

Если же выполнено условие б), то из (7.36) вытекает соотношение

$$\lim_{\text{mes } D^* \to 0} \| P_{D^*} K \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} = 0.$$

В обоих случаях полная непрерывность оператора $K$ вытекает из теоремы 5.6.

Лемма доказана.

**7.4. Применение теоремы о сопряженном операторе.** При определении $L$-характеристик $L(K$; *рег.*) и $L(K$; *рег. и вп. непр.*) линейного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds$$

часто бывает удобным сначала рассматривать транспонированный оператор

$$K^{\#} y(s) = \int_{\Omega^*} K(t, s)\, y(t)\, dt.$$

Пусть точка $\{\alpha_0, \beta_0\}$ принадлежит $L$-характеристике $L(K^{\#}$ *рег.*) (или $L$-характеристике $L(K^{\#}$; *рег. и вп. непр.*)). Тогда точка $\{1-\beta_0, 1-\alpha_0\}$ принадлежит $L$-характеристике $L(K$; *рег.*) (или $L$-характеристике $L(K$; *рег. и вп. непр.*)). Этим соображением мы уже неоднократно пользовались (см., например, пп. 5.1, 5.2 и 6.2). Оно означает, что каждому признаку регулярности (или полной непрерывности) интегрального оператора $K$ соответствует двойственный признак, получающийся переходом к транспонированному оператору.

Ниже формулируются леммы, двойственные в указанном смысле леммам 7.1 и 7.2. В этих леммах рассматривается класс интегральных операторов с ядрами $K(t, s)$, удовлетворяющими условиям

$$\varphi^*(s) = \| K(t, s) \|_{r^*} \in L_{q^*}, \tag{7.37}$$

$$\psi^*(t) = \| |K(t, s)|^{\nu} \varphi^*(s)^{1-\nu} \|_{\theta^*} \in L_{p^*} \quad (0 < \nu \leqslant 1). \tag{7.38}$$

Лемма 7.3. *Пусть функция $K(t, s)$ удовлетворяет условиям* (7.37) *и* (7.38), *причем $\theta^* \geqslant p^*$. Пусть число $\tau$ удовлетворяет неравенствам*

$$1 - \nu \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{7.39}$$

$$\tau r^* + \frac{1-\tau}{\nu} \theta^* \leqslant 1, \tag{7.40}$$

$$\frac{1-\tau}{\nu} \theta^* + \frac{\tau + \nu - 1}{\nu} q^* \leqslant 1. \tag{7.41}$$

*Тогда интегральный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = 1 - \frac{1-\tau}{\nu} \theta^* - \frac{\tau+\nu-1}{\nu} q^*, \quad \beta(\tau) = \tau r^* + \frac{1-\tau}{\nu} p^*, \tag{7.42}$$

*причем выполняется неравенство*

$$\| K \|_{\alpha(\tau) \to \beta(\tau)} \leqslant \| \varphi^* \|_{q^*}^{\frac{\tau+\nu-1}{\nu}} \| \psi^* \|_{p^*}^{\frac{1-\tau}{\nu}}. \tag{7.43}$$

Лемма 7.4 *Пусть выполнены условия леммы 7.3. Пусть выполнено одно из условий*:

а) $\tau < 1$, $p^* > 0$;

б) $1 - \nu < \tau$, $q^* > 0$, $\tau r^* + \frac{1-\tau}{\nu} p^* > 0$.

*Тогда $K$, как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, вполне непрерывен.*

**7.5. Основные теоремы.** В этом пункте будут сформулированы некоторые утверждения, вытекающие из лемм 7.1 — 7.4. Они получаются следующим образом.

В условиях лемм 7.1, 7.2 или 7.3, 7.4 фигурирует свободный параметр $\tau$. Этот параметр может изменяться в пределах некоторого отрезка. По величинами $\nu$, $r$, $q$, $\theta$, $p$ ($\nu$, $r^*$, $q^*$, $\theta^*$, $p^*$) можно определить концы этого отрезка. Это позволяет сформулировать несколько простых признаков регулярности и полной непрерывности линейных интегральных операторов.

Предположим, что ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условиям (7.25) и (7.26).

Пусть $\nu r \geqslant \theta$. Неравенство (7.28) можно в этом случае переписать в виде

$$\tau \leqslant \frac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}.$$

Следовательно, число $\tau$ удовлетворяет условиям леммы 7.1, если выполняются неравенства

$$1-\nu \leqslant \tau \leqslant \min\left\{1, \frac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}\right\}.$$

Эти неравенства непротиворечивы, если

$$1-\nu \leqslant \frac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}$$

или, что то же самое,

$$\theta+r(1-\nu) \leqslant 1.$$

Очевидно также, что

$$\min\left\{1, \frac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если } r \leqslant 1, \\ \dfrac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}, & \text{если } r \geqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому из лемм 7.1 и 7.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.5. *Пусть функция $K(t, s)$ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r \in L_q,$$
$$\psi(s) = \left\| |K(t, s)|^\nu \varphi(t)^{1-\nu} \right\|_\theta \in L_p,$$

*причем выполняются неравенства*

$$0<\nu \leqslant 1, \quad \nu r \geqslant \theta \geqslant p, \quad \theta+r(1-\nu) \leqslant 1.$$

*Тогда для любого $\tau$ из промежутка $[1-\nu, 1]$, если $r \leqslant 1$, или из промежутка $\left[1-\nu, \dfrac{\nu-\theta}{\nu r-\theta}\right]$, если $r>1$, оператор **K** действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau)=1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu} p, \quad \beta(\tau)=\frac{1-\tau}{\nu} \theta+\frac{\tau+\nu-1}{\nu} q,$$

*причем выполняется неравенство*

$$\|K\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)} \leqslant \|\varphi(t)\|_q^{\frac{\tau+\nu-1}{\nu}} \|\psi(s)\|_p^{\frac{1-\tau}{\nu}}.$$

*Если выполняется одно из дополнительных условий:*

а) $p>0$, $\tau<1$;

б) $1-\nu<\tau$, $q>0$, $\tau r+p\frac{1-\tau}{\nu}>0$,

*то $K$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$.*

Аналогично рассматривается случай, когда $\nu r<\theta$. Неравенство (7.28) в этом случае можно переписать в виде

$$\tau \geqslant \frac{\theta-\nu}{\theta-r\nu}.$$

Поэтому условия леммы 7.1 выполняются, если число $\tau$ удовлетворяет наравенствам

$$\max\left\{1-\nu,\ \frac{\theta-\nu}{\theta-r\nu}\right\} \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Для совместности этих неравенств нужно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\theta-\nu}{\theta-r\nu} \leqslant 1$$

или, иначе, неравенство

$$r \leqslant 1.$$

При этом, очевидно,

$$\max\left\{1-\nu,\ \frac{\theta-\nu}{\theta-r\nu}\right\} = \begin{cases} 1-\nu, & \text{если } \theta+r(1-\nu)\leqslant 1,\\ \dfrac{\theta-\nu}{\theta-r\nu}, & \text{если } \theta+r(1-\nu)\geqslant 1.\end{cases}$$

Из лемм 7.1 и 7.2 вытекает

Теорема 7.6. *Пусть функция $K(t, s)$ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_r \in L_q,$$

$$\psi(s) = \|\,|K(t, s)|^{\nu}\varphi(t)^{1-\nu}\|_{\theta} \in L_p,$$

*причем выполняются неравенства*

$$0<\nu\leqslant 1,\quad 0\geqslant p,\quad 0>\nu r,\quad r<1.$$

*Тогда для любого $\tau$ из промежутка* $[1-\nu,\ 1]$, *если* $\theta+r(1-\nu)\leqslant 1$, *или из промежутка* $\left[\frac{\theta-\nu}{\theta-r\nu},\ 1\right]$, *если* $\theta+r(1-\nu)\geqslant 1$, *оператор* $K$ *действует из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$, *где*

$$\alpha(\tau)=1-\tau r-\frac{1-\tau}{\nu}p,\quad \beta(\tau)=\frac{1-\tau}{\nu}\theta+\frac{r+\nu-1}{\nu}q,$$

*причем выполняется неравенство*

$$\|K\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)}\leqslant\|\varphi(t)\|_q^{\frac{\tau+\nu-1}{\nu}}\|\psi(s)\|_p^{\frac{1-\tau}{\nu}}.$$

*Если выполняется одно из дополнительных условий*

а) $p>0,\ \tau<1$;

б) $1-\nu<\tau,\ q>0,\ \tau r+\frac{1-\tau}{\nu}p>0$,

*то* $K$ *вполне непрерывен как оператор из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$.

Аналогичный анализ можно провести и в случае, когда ядро $K(t,\ s)$ удовлетворяет условиям (7.37) и (7.38). Предоставляем читателю сформулировать соответствующие теоремы.

**7.6. Условия типа Л. В. Канторовича.** В этом пункте рассматривается класс интегральных операторов с ядрами, удовлетворяющими двум условиям:

$$\varphi(t)=\|K(t,\ s)\|_r\in L_q, \tag{7.44}$$

и

$$\psi(s)=\|K(t,\ s)\|_{r^*}\in L_{q^*}. \tag{7.45}$$

Введем обозначение

$$\alpha(\tau)=1-(1-\tau)r-\tau q^*,\quad \beta(\tau)=\tau r^*+(1-\tau)q.$$

В п. 7.1 показано, что оператор $K$ с ядром $K(t,\ s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в соответствующее $L_{\beta(\tau)}$ и непрерывен (а при некоторых дополнительных предположениях о числах $r$, $r^*$, $q$, $q^*$ вполне непрерывен) при всех значениях $\tau$ из промежутка $(0,\ 1)$. При этом существенную роль играло предположение о том, что числа $r$ и $r^*$ не больше чем 1.

В этом пункте будет рассмотрен случай, когда одно из чисел $r$ или $r^*$ больше чем 1. Оказывается, что в этом случае справедливы аналогичные утверждения о непрерывности и полной непрерывности оператора $K$, но лишь для значений $\tau$ из некоторых частей промежутка $(0, 1)$. Эти части определяются дополнительными соотношениями между числами $r$, $r^*$, $q$, $q^*$.

Положим

$$d=\begin{cases} \dfrac{1-r}{r^*-r}, & \text{если } r^*\geqslant q^*,\ r^*>1\geqslant r, \\ \dfrac{1-r}{q^*-r}, & \text{если } q^*>r^*>1\geqslant r\geqslant q, \\ \dfrac{r-1}{r-r^*}, & \text{если } r>1\geqslant r^*\geqslant q^*, \\ \dfrac{r-1}{r-q^*}, & \text{если } r^*<q^*\leqslant 1<r,\ r\geqslant q. \end{cases} \tag{7.46}$$

Очевидно, $d\in[0, 1]$.

Теорема 7.7. *Пусть выполнены условия* (7.44) *и* (7.45).

*Тогда интегральный оператор $K$ с ядром $K(t, s)$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ и регулярен при значениях $\tau$ из промежутка $[0, d]$, если*

$$r^*>1\geqslant r, \tag{7.47}$$

*и при значениях $\tau$ из промежутка $[d, 1]$, если*

$$r>1\geqslant r^*; \tag{7.48}$$

*при этом выполняются неравенства*

$$\|K\|_{\alpha(\tau)\to\beta(\tau)}\leqslant\|\varphi\|_q^{1-\tau}\|\psi\|_{q^*}^{\tau}.$$

Теорема 7.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.7 *и пусть выполнено одно из дополнительных условий*:

$$q^*>0,\quad q+r^*>0$$

*или*

$$q>0,\quad q^*+r>0.$$

*Тогда $K$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ при $\tau\in(0, d]$, если выполнены неравенства* (7.47), *и при $\tau\in[d, 1)$, если выполнены неравенства* (7.48).

Утверждения обеих теорем вытекают из лемм 7.1—7.4. Более точно, леммы 7.1 и 7.2 нужно применять тогда, когда $r^*\geqslant q^*$, а леммы 7.3 и 7.4 — когда $r\geqslant q$.

Отметим, что теоремы 7.7 и 7.8 не охватывают всех возможных соотношений между числами $r$, $r^*$, $q$, $q^*$. Здесь не рассмотрены случаи, когда $r < q$, $r^* < q^*$ и когда $r \geqslant q$, $q^* > 1 > r^*$.

**7.7. Суммируемость ядер интегральных операторов*).** Пусть интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{7.49}$$

с неотрицательным ядром $K(t, s)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, т. е. при некотором $C$ выполняется неравенство

$$\|Kx(t)\|_\beta \leqslant C \|x\|_\alpha \quad (x \in L_\alpha). \tag{7.50}$$

Нас будет интересовать, вытекает ли отсюда, что ядро $K(t, s)$ суммируемо по совокупности переменных $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$ с некоторой степенью $r$?

В предыдущих пунктах рассматривался в определенном смысле обратный вопрос — по свойствам суммируемости ядра $K(t, s)$ выяснялось, из каких пространств $L_\alpha$ в какие пространства $L_\beta$ действует оператор $K$.

Ограничимся рассмотрением операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$ при $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$. В этом случае неравенство (7.50) можно переписать в виде

$$\left| \int_{\Omega^*} \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, y(t)\, ds\, dt \right| \leqslant C \|x\|_\alpha \|y\|_{1-\beta}. \tag{7.51}$$

Из него сразу же вытекает, что ядро $K(t, s)$ суммируемо с первой степенью. Оказывается, что ядро $K(t, s)$ может не быть суммируемым с какой-либо более высокой степенью.

Рассмотрим, например, интегральный оператор $K_0$ с ядром

$$K_0(t, s) = \frac{1}{|t - s| \ln^2 \left| \dfrac{t - s}{2} \right|}$$

(здесь $\Omega = \Omega^* = [0, 1]$). Так как ядро $K_0(t, s)$ симметрично и удовлетворяет условию

$$\varphi(t) = \|K_0(t, s)\|_1 \in L_0,$$

*) Вопрос о суммируемости ядер интегральных операторов рассматривался в статьях Д. В. Салехова [1] и Е. И. Пустыльника [6].

то по теореме 7.1 оператор $K_0$ действует из любого $L_\alpha$ в любое $L_\beta$ при $\beta \geqslant \alpha$. При этом функция $K_0(t, s)$ не суммируема ни с какой степенью $r > 1$.

Рассмотрим более подробно оператор $K$, который действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\alpha > \beta$. В этом случае можно при некоторых ограничениях на лебеговы множества

$$\hat{\Omega}(h) = \{\{t, s\} : |K(t, s)| \geqslant h\}$$

доказать, что ядро суммируемо с некоторой более высокой, чем 1, степенью. Ниже будем считать, что числа $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha > \beta)$ фиксированы.

Введем некоторые новые понятия. Множество $\hat{D} \subset \Omega^* \times \Omega$ назовем *прямоугольником со сторонами* $a$, $b$, если

$$\hat{D} = D^* \times D, \quad D^* \subset \Omega^*, \quad D \subset \Omega$$

и $\operatorname{mes} D = a$, $\operatorname{mes} D^* = b$. Очевидно, мера прямоугольника $\hat{D}$ равна $ab$. Квазимерой $\chi_{\alpha, \beta}(\hat{D})$ прямоугольника $\hat{D}$ будем называть число

$$\chi_{\alpha, \beta}(\hat{D}) = a^\alpha b^{1-\beta}.$$

Пусть $\hat{Q}$ — произвольное измеримое подмножество из $\Omega^* \times \Omega$. Будем рассматривать произвольные счетные покрытия множества $\hat{Q}$, составленные из прямоугольников $\hat{D}_n$ со сторонами $a_n$, $b_n$. Определим квазимеру множества $\hat{Q}$ формулой

$$\chi_{\alpha, \beta}(\hat{Q}) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha b_n^{1-\beta},$$

где infimum берется по всем указанным покрытиям.

Точное вычисление квазимеры даже не очень сложных множеств вызывает затруднения. Однако для дальнейшего достаточно знать лишь оценку для $\chi_{\alpha, \beta}(\hat{Q})$ сверху.

Рассмотрим, например, множество $\hat{Q}$, заштрихованное на рис. 7.2 (здесь $\Omega^* = \Omega = [0, 1]$). Для квазимеры этого множества справедлива оценка

$$\chi_{\alpha, \beta}(\hat{Q}) \leqslant C(\operatorname{mes} \hat{Q})^{\alpha-\beta}. \tag{7.52}$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно покрыть множество $\hat{Q}$ квадратами со стороной $a = 1 - \sqrt{1 - \operatorname{mes} \hat{Q}}$, как это показано на рис. 7.2.

Теорема 7.9. *Пусть интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *с неотрицательным ядром* $K(t, s)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$, *где* $\beta < \alpha$. *Пусть квазимера* $\chi_{\alpha, \beta}[\hat{\Omega}(h)]$ *лебеговых множеств ядра* $K(t, s)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\chi_{\alpha, \beta}[\hat{\Omega}(h)] \leqslant C_0 [\operatorname{mes} \hat{\Omega}(h)]^k, \quad (7.53)$$

*где* $k \in (0, 1)$.

*Тогда ядро* $K(t, s)$ *суммируемо по совокупности переменных с каждой степенью* $r < r_0$, *где*

$$r_0 = \frac{1}{1-k}.$$

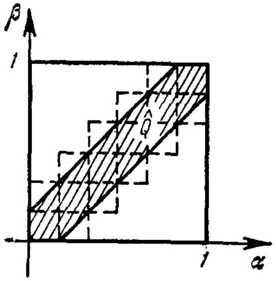


Рис. 7.2.

Доказательство. Покажем, что

$$\operatorname{mes} \hat{\Omega}(h) \leqslant C h^{-r_0}.$$

Отсюда в силу (2.43) будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \ldots, \hat{D}_n, \ldots$ — произвольное покрытие прямоугольниками множества $\hat{\Omega}(h)$. Тогда из (7.51) вытекает, что

$$\iint\limits_{\hat{D}_i} K(t, s)\, ds\, dt \leqslant \|\boldsymbol{K}\|_{\alpha \to \beta} a_i^\alpha b_i^{1-\beta} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где $a_i$, $b_i$ — стороны прямоугольников $\hat{D}_i$. Поэтому

$$\iint\limits_{\hat{\Omega}(h)} K(t, s)\, ds\, dt \leqslant C_1 \chi_{\alpha, \beta}[\hat{\Omega}(h)]$$

и, в силу (7.53),

$$\iint\limits_{\hat{\Omega}(h)} K(t, s)\, ds\, dt \leqslant C_2 [\operatorname{mes} \hat{\Omega}(h)]^k.$$

Но, с другой стороны,

$$\iint\limits_{\widehat{\Omega}(h)} K(t,\ s)\,ds\,dt \geqslant h \operatorname{mes} \widehat{\Omega}(h),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mes} \widehat{\Omega}(h) \leqslant Ch^{\frac{1}{k-1}} = Ch^{-r_0}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим пример. Пусть $\Omega = \Omega^* = [0,\ 1]$. Предположим, что функция $K(t,\ s)$ имеет вид

$$K(t,\ s) = k(|t - s|),$$

где $k(u)$ — определенная при $0 \leqslant u \leqslant 1$ и монотонно убывающая функция. Лебеговы множества этой функции имеют, очевидно, вид, показанный на рис. 7.2. Поэтому справедливо неравенство (7.52). Из теоремы 7.9 вытекает, что ядро $K(t,\ s)$ суммируемо с любой степенью $r$, для которой выполняется неравенство

$$r < \frac{1}{1-\alpha+\beta},$$

если оператор $K$ с ядром $K(t,\ s)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

## § 8. Операторы типа потенциала*)

**8.1. Определения.** Через $|t - s|$ ниже обозначается расстояние между точками $t$ и $s$ $n$-мерного вещественного евклидова пространства $R_n$.

---

*) Одномерные операторы типа потенциала детально изучались в связи с теорией рядов Фурье, дробным дифференцированием и др. (достаточно полную библиографию см. в монографии Г. Харди, Д. Литтльвуда и Г. Полиа [1]). Основополагающие работы по теории многомерных операторов типа потенциала принадлежат С. Л. Соболеву [1, 2]. С. Л. Соболев выяснил роль таких операторов в теории пространств дифференцируемых функций и в краевых задачах математической физики. Первые теоремы о полной непрерывности операторов типа потенциала были указаны В. И. Кондрашовым. Важные результаты в теории операторов типа потенциала принадлежат В. П. Ильину [1—3] и другим авторам.

Использованная в этом параграфе схема применения теоремы Стейна—Уэйсса [1] к исследованию некоторых классов операторов типа потенциала отмечена в статье С. Г. Крейна и Е. М. Семенова [1]. Изложенное в п. 8.8 доказательство теоремы В. П. Ильина, возможно, новое.

В этом параграфе изучаются интегральные операторы

$$A_\lambda x(t) = \int_\Omega K_\lambda(t, s)\, x(s)\, ds \tag{8.1}$$

со специальными ядрами

$$K_\lambda(t, s) = |t-s|^{-\lambda}. \tag{8.2}$$

Здесь $\Omega$ — ограниченное множество пространства $R_n$, имеющее ненулевую лебегову меру. Операторы (8.1) называют *потенциалами* *); число $\lambda$ иногда называют показателем этого потенциала (показателем оператора $A_\lambda$).

Основной интерес для нас будет представлять описание $L$-характеристик $L(A_\lambda;$ *непр.*$)$ и $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*$)$ потенциалов $A_\lambda$.

Оператор

$$A_{(\ln)} x(t) = \int_\Omega K_{(\ln)}(t, s)\, x(s)\, ds \tag{8.3}$$

с ядром

$$K_{(\ln)}(t, s) = |\ln|t-s||\tag{8.4}$$

называют *логарифмическим потенциалом.*

Непосредственным обобщением операторов (8.1) являются операторы *типа потенциала*

$$Ax(t) = \int_\Omega \frac{Q(t, s)}{|t-s|^\lambda}\, x(s)\, ds. \tag{8.5}$$

Здесь $Q(t, s)$, как правило, ограниченная функция. Отметим, что к интегральным уравнениям с такими операторами приводятся краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

**8.2. Простейшие теоремы о непрерывности и полной непрерывности потенциалов.** Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_r(t) = \|K_\lambda(t, s)\|_r = \left\{\int_\Omega |t-s|^{-\frac{\lambda}{r}}\, ds\right\}^r. \tag{8.6}$$

Эта функция определена при всех значениях $t \in R_n$.

---

*) Если $n=3$, $\lambda=1$, то правая часть (8.1) представляет потенциал в точке $t$ заряда, распределенного в области $\Omega$ с плотностью $x(s)$.

Лемма 8.1. *Если*

$$\frac{\lambda}{n} < r < \infty, \tag{8.7}$$

*то функция* (8.6) *ограничена на* $R_n$.

Доказательство. Очевидно неравенство

$$\int_{\Omega} |t-s|^{-\frac{\lambda}{r}} ds \leqslant \int_{T(t;\,R)} |t-s|^{-\frac{\lambda}{r}} ds,$$

где $T(t;\,R)$ — шар с центром в точке $t$ и радиусом $R$, равным диаметру множества $\Omega$. Интеграл $J$, стоящий в правой части последнего неравенства, не зависит от $t$ и легко вычисляется, если перейти к полярным координатам:

$$J = \int_{T(t;\,R)} |t-s|^{-\frac{\lambda}{r}} ds = \gamma_n \int_0^R \rho^{n-\frac{\lambda}{r}-1} d\rho = \frac{r\gamma_n}{nr-\lambda} R^{n-\frac{\lambda}{r}},$$

где $\gamma_n$ — площадь единичной сферы в $R_n$. Таким образом,

$$\int_{\Omega} |K_\lambda(t,\,s)|^{\frac{1}{r}} ds \leqslant \frac{r\gamma_n}{nr-\lambda} R^{n-\frac{\lambda}{r}}. \tag{8.8}$$

Лемма доказана.

Из симметричности ядра $K_\lambda(t,\,s)$, леммы 8.1 и теоремы 7.2 вытекает основная часть утверждений следующей теоремы.

Теорема 8.1. *Пусть* $0 < \lambda < n$.

*Тогда потенциал вполне непрерывен как оператор, действующий из* $L_\alpha = L_\alpha(\Omega)$ *в* $L_0 = L_0(\Omega)$ *при*

$$0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}, \tag{8.9}$$

*и как оператор из* $L_\alpha = L_\alpha(\Omega)$ *в* $L_\beta = L_\beta(\Omega)$ *при*

$$1 - \frac{\lambda}{n} \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \beta > \alpha - 1 + \frac{\lambda}{n}. \tag{8.10}$$

В доказательстве нуждается лишь тот факт, что $A_\lambda$ вполне непрерывен как оператор из $L_\alpha$ в $L_0$, если $\alpha$ удовлетворяет неравенствам (8.9), и как оператор из $L_1$ в $L_\beta$, если $\beta > \frac{\lambda}{n}$.

Полная непрерывность $A_\lambda$ как оператора из $L_\alpha$ $\left(0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}\right)$ в $L_0$ немедленно следует из теоремы 6.4, так как значения вектор-функции

$$w(t) = |t - s|^{-\lambda} \quad (t \in \Omega)$$

в пространстве $L_{1-\alpha}$ образуют компактное множество (множество значений $w(t)$ при $t \in \Omega$ компактно по мере очевидным образом; равностепенная абсолютная непрерывность $w(t)$ в $L_{1-\alpha}$ следует из того, что $w(t) \in L_\delta$, где $\delta$ — некоторое число из промежутка $\left(\frac{\lambda}{n}, 1-\alpha\right)$).

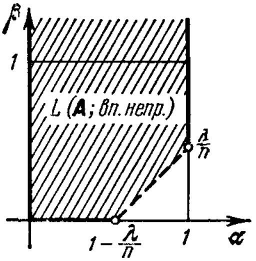

Рис. 8.1.

Полная непрерывность $A_\lambda$ как оператора из $L_1$ в $L_\beta$, $\beta > \frac{\lambda}{n}$, следует теперь из симметричности ядра $K_\lambda(t, s)$ и из теоремы 5.1.

Утверждение теоремы 8.1 означает, что $L$-характеристики $L(A_\lambda;$ *непр.*) и $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) потенциала $A_\lambda$ содержат все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых выполняются неравенства

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \beta \geqslant 0, \quad \beta > \alpha - 1 + \frac{\lambda}{n} \tag{8.11}$$

(рис. 8.1). Оказывается, что $L$-характеристика $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) потенциала $A_\lambda$ не содержит других точек. $L$-характеристика $L(A_\lambda;$ *непр.*) содержит и другие точки — в п. 8.4 будет показано, что этой $L$-характеристике принадлежат все внутренние точки отрезка, соединяющего точки $\left\{1 - \frac{\lambda}{n}, 0\right\}$, $\left\{1, \frac{\lambda}{n}\right\}$.

**8.3. Интерполяционная теорема Стейна — Уэйсса.** В пункте 2.7 была доказана интерполяционная теорема Марцинкевича. Для доказательства дальнейших теорем о потенциалах нам понадобится существенное усиление этой теоремы, принадлежащее Стейну и Уэйссу.

Напомним (см. п. 2.7), что через $\lambda(x; h)$ обозначается мера множества тех точек $t \in \Omega$, в которых $|x(t)| \geqslant h$.

Через $M_\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ обозначается линейная система функций $x(t)$ с конечной квазинормой

$$\|x\|^*_{M_\alpha}=\sup_{0<h<\infty} h\,[\lambda(x;\ h)]^\alpha. \tag{8.12}$$

Через $M_0$ обозначается пространство $L_0$, причем

$$\|x\|^*_{M_0}=\|x\|_{L_0}. \tag{8.13}$$

Пусть $0<\alpha<1$. Положим

$$\|x\|_{M_\alpha}=\sup_{D\subset\Omega}\left\{\frac{1}{(\operatorname{mes} D)^{1-\alpha}}\int\limits_D |x(t)|\,dt\right\} \tag{8.14}$$

и покажем, что класс функций, для которых $\|x\|_{M_\alpha}<\infty$, совпадает с $M_\alpha$.

Пусть $\|x\|_{M_\alpha}<\infty$, т. е. для каждого $D\subset\Omega$

$$\int\limits_D |x(t)|\,dt\leqslant\|x\|_{M_\alpha}(\operatorname{mes} D)^{1-\alpha}.$$

Тогда, в частности,

$$\int\limits_{\{t:\,|x(t)|\geqslant h\}} |x(t)|\,dt\leqslant\|x\|_{M_\alpha}[\lambda(x;\ h)]^{1-\alpha}.$$

Но, с другой стороны,

$$\int\limits_{\{t:\,|x(t)|\geqslant h\}} |x(t)|\,dt\geqslant h\lambda(x;\ h).$$

Поэтому

$$h\,[\lambda(x;\ h)]^\alpha\leqslant\|x\|_{M_\alpha}\quad(0<h<\infty) \tag{8.15}$$

и, следовательно, $x\in M_\alpha$.

Пусть теперь $x\in M_\alpha$, т. е. $\|x\|^*_{M_\alpha}<\infty$. Тогда для любого множества $D\subset\Omega$

$$\int\limits_D |x(t)|\,dt\leqslant\int\limits_0^{\operatorname{mes} D}\tilde{x}(\tau)\,d\tau,$$

где $\tilde{x}(\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant\operatorname{mes} D)$ — такая монотонно убывающая функция, что

$$\lambda(x,\ h)=\lambda(\tilde{x};\ h).$$

Из (8.12) следует, что

$$\tilde{x}(\tau) \leqslant \frac{\|x\|^*_{M_\alpha}}{\tau^\alpha}$$

и поэтому

$$\int_D |x(t)|\,dt \leqslant \|x\|^*_{M_\alpha} \int_0^{\operatorname{mes} D} \tau^{-\alpha}\,d\tau = \frac{\|x\|^*_{M_\alpha}}{1-\alpha}(\operatorname{mes} D)^{1-\alpha}, \tag{8.16}$$

откуда вытекает, что $\|x\|_{M_\alpha} < \infty$.

Из (8.15) и (8.16) следуют важные неравенства

$$(1-\alpha)\|x\|_{M_\alpha} \leqslant \|x\|^*_{M_\alpha} \leqslant \|x\|_{M_\alpha}. \tag{8.17}$$

Легко показать, что $M_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ является банаховым пространством, если считать, что норма определена равенством (8.14). Пространства $M_\alpha$ будем называть пространствами Марцинкевича.

Будем говорить, что линейный оператор $A$ удовлетворяет условию $\Lambda M(\alpha, \beta)$, если он определен на всех характеристических функциях $\varkappa_D$ измеримых множеств $D \subset \Omega$ и если

$$\|A\varkappa_D\|^*_{M_\beta} \leqslant C(\operatorname{mes} D)^\alpha, \tag{8.18}$$

где $C$ — некоторая постоянная, не зависящая от $D$. Условие $\Lambda M(\alpha, \beta)$, конечно, выполнено, если $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывен или если $A$ удовлетворяет условию Марцинкевича (см. п. 2.7) $LM(\alpha, \beta)$.

Теорема 8.2. *Пусть линейный оператор $A$ удовлетворяет условиям $\Lambda M(\alpha_0, \beta_0)$ и $\Lambda M(\alpha_1, \beta_1)$:*

$$\begin{aligned} \|A\varkappa_D\|^*_{M_{\beta_0}} &\leqslant C_0(\operatorname{mes} D)^{\alpha_0} \quad (D \subset \Omega), \\ \|A\varkappa_D\|^*_{M_{\beta_1}} &\leqslant C_1(\operatorname{mes} D)^{\alpha_1} \quad (D \subset \Omega), \end{aligned} \tag{8.19}$$

*где*

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1 \tag{8.20}$$

*и*

$$\beta_0 \neq \beta_1, \quad \alpha_0 \neq \alpha_1. \tag{8.21}$$

*Тогда при любом $\tau \in (0,1)$ оператор $A$ действует из пространства $L_{\alpha(\tau)}$ в пространство $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1, \tag{8.22}$$

*и непрерывен. При этом*

$$\|A\|_{L_{\alpha(\tau)}\to L_{\beta(\tau)}} \leqslant k(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \tau)\, C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}. \tag{8.23}$$

Доказательство. Из неравенства (2.52) вытекает, что при каждом $\tau \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\|A\varkappa_D\|_{L_{\beta(\tau)}} \leqslant \frac{1}{|\beta_0-\beta_1|\,\tau(1-\tau)} \left(\|A\varkappa_D\|^*_{M_{\beta_0}}\right)^{1-\tau} \left(\|A\varkappa_D\|^*_{M_{\beta_1}}\right)^{\tau},$$

откуда, в силу (8.19),

$$\|A\varkappa_D\|_{L_{\beta(\tau)}} \leqslant \frac{1}{|\beta_0-\beta_1|\,\tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} (\operatorname{mes} D)^{\alpha(\tau)}. \tag{8.24}$$

Пусть $y(t)$ — некоторая конечнозначная функция. В силу неравенства (8.24) и неравенства $\alpha(\tau) \neq 0$ аддитивная функция множеств

$$\psi(D) = \int_\Omega A\varkappa_D y(t)\, dt \tag{8.25}$$

абсолютно непрерывна; поэтому по теореме Радона — Никодима (см., например, Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]) ее можно представить в виде

$$\psi(D) = \int_D y^*(s)\, ds \quad (D \subset \Omega). \tag{8.26}$$

Определим оператор $B$ на конечнозначных функциях равенством

$$By(s) = y^*(s). \tag{8.27}$$

Очевидно, оператор $B$ на множестве конечнозначных функций линеен.

Покажем, что для каждой конечнозначной функции $y(t)$ выполняется неравенство

$$\|By\|_{M_{1-\alpha(\tau)}} \leqslant \frac{2C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}}{|\beta_0-\beta_1|\,\tau(1-\tau)} \|y\|_{L_{1-\beta(\tau)}}. \tag{8.28}$$

Пусть $D \subset \Omega$. Тогда

$$\int_D |By(s)|\, ds = \int_{D^+} By(s)\, ds - \int_{D^-} By(s)\, ds,$$

где $D^+$ — множество точек $s \in D$, в которых $By(s)$ неотрицательна, а $D^- = D \setminus D^+$. В силу (8.25) — (8.27) последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_D |By(s)|\, ds = \int_\Omega A\varkappa_{D^+} y(t)\, dt - \int_\Omega A\varkappa_{D^-} y(t)\, dt.$$

Применяя к каждому интегралу в правой части неравенство Гёльдера и используя оценку (8.24), получим

$$\int_D |By(s)|\, ds \leqslant \frac{2}{|\beta_0 - \beta_1|\, \tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \| y \|_{L_{1-\beta(\tau)}} (\operatorname{mes} D)^{\alpha(\tau)}.$$

Отсюда вытекает (8.28).

Из (8.28), в частности, следует, что $B$ можно продолжить в оператор $B_1$, который действует из каждого $L_{1-\beta(\tau)}$ $(0 < \tau < 1)$ в соответствующее $M_{1-\alpha(\tau)}$ и непрерывен. Последнее означает, что оператор $B_1$ удовлетворяет условию Марцинкевича $LM[1-\beta(\tau),\ 1-\alpha(\tau)]$ при всех $\tau \in (0, 1)$. Из (8.28) и (8.17) следует, что

$$\| B_1 y(s) \|^*_{M_{1-\beta(\tau)}} \leqslant \frac{2}{|\beta_0 - \beta_1|\, \beta(\tau)\, \tau(1-\tau)} C_0^{1-\tau} C_1^{\tau} \| y(t) \|_{L_{1-\alpha(\tau)}}. \tag{8.29}$$

Применим теперь интерполяционную теорему Марцинкевича 2.9. Из нее вытекает, что $B_1$ действует из $L_{1-\beta(\tau)}$ в $L_{1-\alpha(\tau)}$ (при всех $\tau \in (0, 1)$) и непрерывен. Из неравенств (2.51) и (8.29) вытекает, что при

$$0 < \tau_0 < \tau < \tau_1 < 1$$

выполняется неравенство

$$\| B_1 \|_{L_{1-\beta(\tau)} \to L_{1-\alpha(\tau)}} \leqslant \frac{4(\tau_1 - \tau_0)^2}{|\beta(\tau_0) - \beta(\tau_1)|\, (\tau_1 - \tau)(\tau - \tau_0)} \times$$

$$\times \left[ \frac{C_0^{1-\tau_0} C_1^{\tau_0}}{|\beta_0 - \beta_1|\, \beta(\tau_0)\, \tau_0 (1-\tau_0)} \right]^{\frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - \tau_0}} \left[ \frac{C_0^{1-\tau_1} C_1^{\tau_1}}{|\beta_0 - \beta_1|\, \beta(\tau_1)\, \tau_1 (1-\tau_1)} \right]^{\frac{\tau - \tau_0}{\tau_1 - \tau_0}} =$$

$$= k(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \tau, \tau_0, \tau_1)\, C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|B_1\|_{L_{1-\beta(\tau)}\to L_{1-\alpha(\tau)}} \leqslant k(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \tau) C_0^{1-\tau} C_1^{\tau}, \qquad (8.30)$$

если положить, например, $\tau_0 = \frac{1}{2}\tau$, $\tau_1 = \frac{1}{2}(1+\tau)$.

Из (8.25) — (8.27) следует, что для любых конечнозначных функций $x(s)$ и $y(t)$ справедливо равенство

$$(Ax, y) = (x, B_1 y).$$

Из него вытекает, что $A = B_1^*$. Поэтому оператор $A$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ (при $0 < \tau < 1$) и непрерывен. Оценка (8.23) следует из оценки (8.30).

Теорема доказана.

### 8.4. Предельная теорема о непрерывности потенциала.

Теорема 8.3. *Пусть* $0 < \lambda < n$.

*Тогда при* $1 - \frac{\lambda}{n} < \alpha < 1$ *потенциал* $A_\lambda$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_{\alpha - 1 + \frac{\lambda}{n}}$ *и непрерывен.*

Доказательство. Покажем, что оператор $A_\lambda$ удовлетворяет условиям $\Lambda M\left(1 - \frac{\lambda}{n}, 0\right)$ и $\Lambda M\left(1, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Пусть $\varkappa_D(s)$ — характеристическая функция множества $D \subset \Omega$. Тогда

$$A_\lambda \varkappa_D(s) = \int_D |t - s|^{-\lambda} ds.$$

Оценим $A_\lambda \varkappa_D(s)$.

Обозначим через $T(t, r)$ шар с центром в точке $t$ и таким радиусом $r$, что

$$\operatorname{mes} T(t, r) = \operatorname{mes} D. \qquad (8.31)$$

Очевидно,

$$\nu_n r^n = \operatorname{mes} D, \qquad (8.32)$$

где $\nu_n$ — объем единичного шара в $R_n$.

Пусть

$$T_1 = T(t; r) \cap D.$$

В силу (8.31)

$$\operatorname{mes}(D \setminus T_1) = \operatorname{mes}(T(t, r) \setminus T_1)$$

и поэтому

$$\int\limits_{T(t,r)} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} - \int\limits_D \frac{ds}{|t-s|^\lambda} = \int\limits_{T(t,r)\setminus T_1} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} - \int\limits_{D\setminus T_1} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{r^\lambda} \{\operatorname{mes}[T(t, r)\setminus T_1] - \operatorname{mes}(D\setminus T_1)\} = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_D \frac{ds}{|t-s|^\lambda} \leqslant \int\limits_{T(t,r)} \frac{ds}{|t-s|^\lambda} = \int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda}. \tag{8.33}$$

Для оценки последнего интеграла в (8.33) перейдем к полярным координатам. Тогда

$$\int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda} = n\nu_n \int\limits_0^r \rho^{n-\lambda-1} d\rho = \frac{n\nu_n}{n-\lambda} r^{n-\lambda}$$

и в силу (8.32)

$$\int\limits_{T(0,r)} \frac{ds}{|s|^\lambda} = \frac{n\nu_n^{\frac{\lambda}{n}}}{n-\lambda} (\operatorname{mes} D)^{1-\frac{\lambda}{n}}. \tag{8.34}$$

Сравнивая (8.33) и (8.34), получаем, что при любом $t\in\Omega$ выполняется неравенство

$$|A_\lambda \varkappa_D(t)| \leqslant C(\operatorname{mes} D)^{1-\frac{\lambda}{n}},$$

где $C$ — некоторая постоянная. Значит,

$$\|A_\lambda \varkappa_D(t)\|_0 \leqslant C(\operatorname{mes} D)^{1-\frac{\lambda}{n}}. \tag{8.35}$$

Доказано, что оператор $A_\lambda$ удовлетворяет условию $\Lambda\mathrm{M}\left(1-\frac{\lambda}{n},\ 0\right)$.

Пусть теперь $x(s)$ — произвольная суммируемая функция. Тогда для каждого измеримого множества $D\subset\Omega$

$$\int\limits_D |A_\lambda x(t)|\, dt = \int\limits_D \left| \int\limits_\Omega \frac{x(s)}{|t-s|^\lambda} ds \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_D \int\limits_\Omega \frac{|x(s)|}{|t-s|^\lambda} ds\, dt = \int\limits_\Omega \left[ \int\limits_D \frac{dt}{|t-s|^\lambda} \right] |x(s)|\, ds.$$

Из (8.35) следует, что

$$\int_D \frac{dt}{|t-s|^\lambda} \leqslant C\,(\mathrm{mes}\,D)^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Поэтому

$$\int_D |A_\lambda x(t)|\,dt \leqslant C\,\|x(s)\|_1\,(\mathrm{mes}\,D)^{1-\frac{\lambda}{n}}. \tag{8.36}$$

Следовательно, оператор $A_\lambda$ удовлетворяет условию $LM\left(1,\ \frac{\lambda}{n}\right)$ и, тем более, условию $\Lambda M\left(1,\ \frac{\lambda}{n}\right)$.

Теперь остается применить интерполяционную теорему Стейна — Уэйсса.

Теорема доказана.

Покажем, что $A_\lambda$, как оператор из $L_\alpha$, $1-\frac{\lambda}{n}<\alpha<1$, в $L_{\alpha-1+\frac{\lambda}{n}}$, не является вполне непрерывным *).

Рассмотрим последовательность множеств $\Omega_k\subset\Omega$ ($k=1,\ 2,\ \ldots$), диаметр каждого из которых меньше $\frac{1}{k}$, а мера равна $c_k k^{-n}$, где $0<a\leqslant c_k\leqslant b<\infty$ **). Положим

$$x_k(s)=\begin{cases} k^{n\alpha}, & \text{если}\ s\in\Omega_k,\\ 0, & \text{если}\ s\,\overline{\in}\,\Omega_k\end{cases}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Очевидно,

$$\|x_k(s)\|_{L_\alpha}=k^{n\alpha}(\mathrm{mes}\,\Omega_k)^\alpha\leqslant b^\alpha.$$

Поэтому функции

$$A_\lambda x_k(s)=k^{n\alpha}\int_{\Omega_k}\frac{ds}{|t-s|^\lambda}$$

---

*) Этот факт впервые доказал, по-видимому, В. М. Бабич [1].

**) Существование таких множеств вытекает, например, из того, что почти все точки множества $\Omega$ являются точками плотности (см. Валле-Пуссен [1]). Пусть $s_0$ — некоторая точка плотности множества $\Omega$ и $\Omega_k$ — пересечение с $\Omega$ шара радиуса $\frac{1}{2k}$ с центром в точке $s_0$. Очевидно, диаметр $\Omega_k$ равен $\frac{1}{k}$, а мера — $c_k k^{-n}$, где $c_k$ ограничены сверху и снизу.

принадлежат пространству $L_{\alpha-1+\frac{\lambda}{n}}$. Покажем, что эти функции не обладают равностепенно абсолютно непрерывными нормами — отсюда по теореме 3.1 следует, что $A_\lambda$, как оператор из $L_\alpha$ в $L_{\alpha-1+\frac{\lambda}{n}}$, не является вполне непрерывным.

Так как диаметр $\Omega_k$ меньше $\frac{1}{k}$, то

$$A_\lambda x_k(t) \geqslant k^{n\alpha} k^\lambda \operatorname{mes} \Omega_k \geqslant a k^{n\left(\alpha-1+\frac{\lambda}{n}\right)} \quad (t \in \Omega_k)$$

и, следовательно,

$$\| P_{\Omega_k} A_\lambda x_k(t) \|_{\alpha-1+\frac{\lambda}{n}} \geqslant a^{\alpha+\frac{\lambda}{n}}.$$

Это неравенство и означает, что нормы функций $A_\lambda x_k$ не обладают свойством равностепенной абсолютной непрерывности, так как $\operatorname{mes} \Omega_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Мы показали, что точки $\left\{\alpha, \alpha-1+\frac{\lambda}{n}\right\}$ при $1-\frac{\lambda}{n}<\alpha<1$ не принадлежат $L$-характеристике $L(A_\lambda;\ \textit{вп. непр.})$. Отсюда следует (см. теорему 5.4), что никакая точка $\{\alpha, \beta\}$, для которой

$$\beta < \alpha - 1 + \frac{\lambda}{n}, \quad 1 - \frac{\lambda}{n} < \alpha < 1,$$

не принадлежит $L$-характеристике $L(A_\lambda;\ \textit{непр.})$. Это утверждение вытекает также и из теоремы 7.9.

Отметим еще, что из теорем 6.2 и 6.7 следует, что точки $\left\{1-\frac{\lambda}{n}, 0\right\}$, $\left\{1, \frac{\lambda}{n}\right\}$ не принадлежат $L$-характеристике $L(A_\lambda;\ \textit{непр.})$.

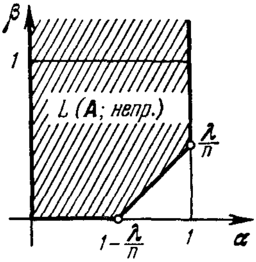


Рис. 8.2.

Утверждения теорем 8.1 и 8.3 дают полное описание $L$-характеристик $L(A_\lambda;\ \textit{вп. непр.})$ и $L(A_\lambda;\ \textit{непр.})$ (см. рис. 8.1 и рис. 8.2).

**8.5. Операторы типа потенциала.** Перейдем к изучению оператора

$$Ax(t) = \int_\Omega \frac{Q(t, s)}{|t-s|^\lambda} x(s)\, ds. \tag{8.37}$$

Простые, но наиболее важные теоремы об $L$-характеристиках этого оператора можно получить, если функция $Q(t, s)$ ограничена. В этом случае из теорем 4.2, 5.10 и 6.4 вытекают:

Теорема 8.4. *Пусть* $0 < \lambda < n$, *а функция* $Q(t, s)$ *ограничена.*

*Тогда* $L(A$; *непр.*) *содержит* $L(A_\lambda$; *непр.*).

Теорема 8.5. *Пусть* $0 < \lambda < n$, *а функция* $Q(t, s)$ *ограничена.*

*Тогда* $L(A$; *вп. непр.*) *содержит все точки $L$-характеристики* $L(A_\lambda$; *вп. непр.*) *за исключением, возможно, некоторых точек ее границы.*

Теорема 8.6. *Пусть* $0 < \lambda < n$, *а функция* $Q(t, s)$ *ограничена и непрерывна по совокупности переменных при* $t \neq s$.

*Тогда* $L(A$; *вп. непр.*) *содержит* $L(A_\lambda$; *вп. непр.*).

Приведенные теоремы с соответствующими изменениями могут быть перенесены на случай, когда функция $Q(t, s)$, определяющая оператор (8.37), имеет слабые особенности. Пусть, например, функция $Q(t, s)$ ограничена в каждой области $|t-s| \geqslant c_0$ и при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{|t-s| \to 0} |t-s|^{\varepsilon} Q(t, s) = 0.$$

Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{Q(t, s)}{|t-s|^{\lambda}} \leqslant c(\varepsilon) |t-s|^{-(\lambda+\varepsilon)}.$$

Из этого неравенства вытекает, что $L$-характеристика $L(A$; *непр.*) оператора (8.37) содержит все точки $L$-характеристики $L(A_\lambda$; *непр.*), исключая, возможно, точки прямой $\beta = \alpha - 1 + \frac{\lambda}{n}$. При этом $L$-характеристика $L(A$; *вп. непр.*) содержит все внутренние точки $L$-характеристики $L(A_\lambda$; *вп. непр.*), а при дополнительном предположении о непрерывности $Q(t, s)$ при $t \neq s$ — все точки $L(A_\lambda$; *вп. непр.*).

Рассмотрим более подробно интегральные операторы

$$A_{\lambda, \nu} x(t) = \int_{\Omega} K_{\lambda, \nu}(t, s)\, x(s)\, ds \tag{8.38}$$

с ядрами

$$K_{\lambda,\nu}(t, s) = |t-s|^{-\lambda} |\ln|t-s||^{\nu}. \tag{8.39}$$

Если $\nu > 0$, то операторы $A_{\lambda,\nu}$ — это операторы (8.37), в которых функции $Q(t, s)$ имеют слабую особенность. В этом случае $L(A_{\lambda,\nu};$ *непр.*$) = L(A_{\lambda,\nu};$ *вп. непр.*$) = L(A_{\lambda};$ *вп. непр.*$)$. Если $\nu < 0$, то $L(A_{\lambda,\nu};$ *непр.*$) = L(A_{\lambda,\nu};$ *вп. непр.*$)$, причем при $0 < \nu \leqslant \lambda n$ $L$-характеристика $L(A_{\lambda,\nu};$ *вп. непр.*$)$ совпадает с $L$-характеристикой $L(A_{\lambda};$ *непр.*$)$, а при $\lambda n < \nu$ $L$-характеристика $L(A_{\lambda,\nu};$ *вп. непр.*$)$ состоит из $L$-характеристики $L(A_{\lambda};$ *непр.*$)$ и двух точек $\left\{1 - \frac{\lambda}{n}, 0\right\}$ и $\left\{1, \frac{\lambda}{n}\right\}$. Вычисления предоставляем читателю. Отметим лишь, что при исследовании операторов $A_{\lambda,\nu}$ целесообразно использовать теорему 5.11.

В заключение отметим, что изложенная методика позволяет изучить интегральные операторы с ядрами $K(t, s)$, особенности которых расположены не на «диагонали» $t = s$, а на некоторых «гладких поверхностях».

**8.6. Логарифмический потенциал.** Рассмотрим оператор

$$A_{(\ln)}x(t) = \int_{\Omega} K_{(\ln)}(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{8.40}$$

где

$$K_{(\ln)}(t, s) = |\ln|t-s||. \tag{8.41}$$

Теорема 8.7. *$L$-характеристики $L(A_{(\ln)};$ непр.$)$ и $L(A_{(\ln)};$ вп. непр.$)$ одинаковы и совпадают с полуполосой $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$, из которой выброшена точка $\{1, 0\}$.*

Доказательство очевидно.

Легко сформулировать аналогичное утверждение для операторов, ядра $K(t, s)$ которых удовлетворяют неравенствам

$$|K(t, s)| \leqslant M|\ln|t-s|| + N. \tag{8.42}$$

**8.7. Итерации операторов типа потенциала.** Пусть даны два оператора типа потенциала

$$A_1x(t) = \int_{\Omega} \frac{Q_1(t, s)}{|t-s|^{\lambda_1}}\, x(s)\, ds,$$

$$A_2x(t) = \int_{\Omega} \frac{Q_2(t, s)}{|t-s|^{\lambda_2}}\, x(s)\, ds,$$

где $Q_1(t, s)$, $Q_2(t, s)$ — ограниченные функции. Нас будет интересовать интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с ядром

$$K(t, s) = \int_\Omega \frac{Q_2(t, u)\, Q_1(u, s)}{|t-u|^{\lambda_2}\, |u-s|^{\lambda_1}}\, du. \tag{8.43}$$

Если оператор $A_1$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, а оператор $A_2$ действует из $L_\beta$ в $L_\gamma$, то по теореме 4.3 оператор $K$ действует из $L_\alpha$ в $L_\gamma$ и

$$K = A_2 A_1. \tag{8.44}$$

Теорема 8.8. *Если* $\lambda_1 + \lambda_2 > n$, $0 < \lambda_1$, $\lambda_2 < n$, *то ядро* (8.43) *удовлетворяет неравенству*

$$|K(t, s)| \leqslant \frac{M}{|t-s|^{\lambda_1+\lambda_2-n}} \quad (t, s \in \Omega). \tag{8.45}$$

*Если* $\lambda_1 + \lambda_2 = n$, *то ядро* (8.43) *удовлетворяет неравенству* (8.42):

$$|K(t, s)| \leqslant M\, |\ln|t-s|| + N \quad (t, s \in \Omega). \tag{8.46}$$

*Если* $\lambda_1 + \lambda_2 < n$, *то ядро* (8.43) *ограничено*:

$$|K(t, s)| \leqslant M \quad (t, s \in \Omega). \tag{8.47}$$

Доказательство. Из ограниченности функций $Q_1(t, s)$ и $Q_2(t, s)$ вытекает, что

$$|K(t, s)| \leqslant c \int_\Omega \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\, |u-s|^{\lambda_2}},$$

где $c$ — некоторая постоянная. Поэтому доказательство теоремы сводится к оценке интеграла

$$J(\lambda_1, \lambda_2) = \int_\Omega \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\, |u-s|^{\lambda_2}}. \tag{8.48}$$

Пусть сначала $\lambda_1 + \lambda_2 > n$. Воспользуемся очевидным неравенством

$$J(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \int_{R_n} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\, |u-s|^{\lambda_2}}, \tag{8.49}$$

где $R_n$ — евклидово пространство, в котором лежит $\Omega$. Производя замену (при $t \neq s$)

$$u = t - v\,|t - s|,$$

получим

$$\int\limits_{R_n} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\,|u-s|^{\lambda_2}} = |t-s|^{n-\lambda_1-\lambda_2} \int\limits_{R_n} \frac{dv}{|v|^{\lambda_1}\,|v_0 - v|^{\lambda_2}},$$

где $v_0 = (t-s)/|t-s|$. Так как $|v_0| = 1$, то интеграл в правой части не зависит от $v_0$. Поэтому

$$\int\limits_{R_n} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\,|u-s|^{\lambda_2}} = c_0\,|t-s|^{n-\lambda_1-\lambda_2}$$

и нужная оценка вытекает из (8.49).

Пусть теперь $\lambda_1 + \lambda_2 = n$. Будем считать, что точки $t$, $s \in \Omega$ фиксированы и $t \neq s$. Через $Ш_1$ и $Ш_2$ обозначим шары в пространстве $R_n$ с центрами $t$ и $s$ соответственно и с радиусом, равным $\frac{1}{2}|t-s|$ (рис. 8.3). Положим

$$Щ_1 = Ш_1 \cap \Omega, \quad Щ_2 = Ш_2 \cap \Omega.$$

Через $Щ_3$ обозначим множество таких точек $u$ из $\Omega$, для которых $|u-t| \leqslant |u-s|$ и которые не лежат в шаре $Ш_1$ (на рис. 8.3 это множество заштриховано). Через $Щ_4$ обозначим множество точек $u \in \Omega$, для которых $|u-t| > |u-s|$ и которые не лежат в шаре $Ш_2$.

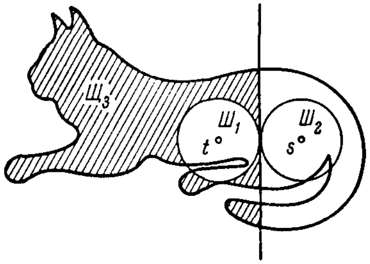

Рис. 8.3.

Интеграл (8.48) является суммой четырех интегралов

$$J_i(\lambda_1, \lambda_2) = \int\limits_{Щ_i} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\,|u-s|^{\lambda_2}} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \qquad (8.50)$$

Для первого из них очевидна оценка

$$J_1(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \int\limits_{Ш_1} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}\,|u-s|^{\lambda_2}} \leqslant \frac{2^{\lambda_2}}{|t-s|^{\lambda_2}} \int\limits_{Ш_1} \frac{du}{|t-u|^{\lambda_1}}.$$

Интеграл в правой части последнего неравенства просто вычисляется (для этого достаточно перейти к полярным координатам). В результате получаем

$$J_1(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant c_1,$$

где $c_1$ не зависит от $t$ и $s$. Аналогично получается оценка

$$J_2(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant c_2$$

для второго интеграла (8.50).

Перейдем к интегралу $J_3(\lambda_1, \lambda_2)$. Очевидно,

$$J_3(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \int\limits_{Ш_3} \frac{du}{|t-u|^n} \leqslant \int\limits_{\frac{1}{2}|t-s| \leqslant |t-u| \leqslant \Delta} \frac{du}{|t-u|^n},$$

где $\Delta$ — диаметр области $\Omega$. Вычисляя последний интеграл (для этого снова удобно перейти к полярным координатам), приходим к неравенству

$$J_3(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant c_3 |\ln|t-s|| + c_4.$$

Аналогично доказывается, что

$$J_4(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant c_3 |\ln|t-s|| + c_4.$$

Из полученных оценок для интегралов (8.50) вытекает неравенство (8.46).

Пусть, наконец, $\lambda_1 + \lambda_2 < n$. Пусть $\delta \in \left(\frac{\lambda_1}{n}, 1-\frac{\lambda_2}{n}\right)$. Тогда из неравенства Гёльдера следует, что

$$J(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \left\{\int\limits_{\Omega} \frac{du}{|t-u|^{\frac{\lambda_1}{\delta}}}\right\}^{\delta} \left\{\int\limits_{\Omega} \frac{du}{|u-s|^{\frac{\lambda_2}{1-\delta}}}\right\}^{1-\delta}.$$

Отсюда и из леммы 8.1 вытекает, что интеграл $J(\lambda_1, \lambda_2)$ ограничен.

Теорема полностью доказана.

В частных случаях оценки, содержащиеся в теореме 8.8, могут оказаться грубыми. Рассмотрим, например, суперпозицию (8.44) операторов

$$A_1x(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{-\lambda_1} x(s)\, ds$$

и

$$A_2 x(t) = \int_0^t (t-s)^{-\lambda_2} x(s)\, ds,$$

где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Ядро (8.43) имеет вид

$$K(t, s) = \begin{cases} \int_s^t (t-u)^{-\lambda_2} (u-s)^{-\lambda_1} du, & \text{если} \quad 0 < s \leqslant t, \\ 0, & \text{если} \quad s > t. \end{cases}$$

Сделав в интеграле замену $u - s = \xi(t - s)$, получим

$$\int_s^t (t-u)^{-\lambda_2} (u-s)^{-\lambda_1} du = \int_0^1 (1-\xi)^{-\lambda_2} \xi^{-\lambda_1} d\xi = c < \infty.$$

Таким образом, в этом примере функция $K(t, s)$ ограничена; в то же время из теоремы 8.8 вытекает лишь оценка (8.46).

Пусть $A$ — некоторый оператор типа потенциала с показателем $\lambda$. Из теоремы 8.8 следует, что:

1°. $A^k$ при

$$k < \frac{n}{n-\lambda}$$

является интегральным оператором типа потенциала с показателем $k\lambda - (k-1)n$.

2°. $A^k$ при

$$k = \frac{n}{n-\lambda}$$

является интегральным оператором типа логарифмического потенциала.

3°. $A^k$ при

$$k > \frac{n}{n-\lambda}$$

является интегральным оператором с ограниченным ядром.

**8.8. Обобщения на случай разных размерностей.** В предыдущих пунктах мы рассматривали потенциалы и операторы типа потенциала как операторы, область определения и множество значений которых состояли из функций, определенных на одном и том же множестве $\Omega$. Во многих приложениях встречаются другие ситуации.

В этом пункте будем рассматривать интегральные операторы с ядрами

$$K_\lambda(t, s) = |t - s|^{-\lambda},$$

где переменные $t$ и $s$ пробегают разные множества. Ограничимся при этом простейшими случаями.

Пусть $R_m (m < n)$ — подпространство пространства $R_n$, $\Omega$ — ограниченное множество ненулевой меры в $R_n$, а $\Omega^*$ — некоторое подмножество множества $\Omega$, лежащее в подпространстве $R_m$ и имеющее в $R_m$ ненулевую меру. Рассмотрим интегральный оператор

$$A_\lambda x(t) = \int_\Omega K_\lambda(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{8.51}$$

действующий из пространств функций, определенных на $\Omega$ в пространства функций, определенных на $\Omega^*$.

Теорема 8.9. *Пусть* $0 < \lambda < m < n$. *Тогда интегральный оператор* (8.51)

а) *при* $0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$ *и вполне непрерывен;*

б) *действует из* $L_{1-\frac{\lambda}{n}}$ *в любое пространство* $L_\beta$, *где* $\beta > 0$, *и вполне непрерывен;*

в) *при* $1 - \frac{\lambda}{n} < \alpha < 1$ *действует из пространства* $L_\alpha$ *в пространство* $L_\beta$, *где* $\beta = \frac{n}{m}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m}$, *и непрерывен;*

г) *действует из* $L_1$ *в* $L_\beta$, *где* $\beta > \frac{\lambda}{m}$, *и вполне непрерывен.*

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теорем 8.1 и 8.2.

Теорема 8.9 в случае, когда $0 < \lambda < m < n$, полностью описывает $L$-характеристики $L(A_\lambda;$ *непр.*) и $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) оператора $A_\lambda$ (рис. 8.4).

Теорема 8.10. *Пусть* $m \leqslant \lambda < n$.

*Тогда интегральный оператор* (8.51)

а) *при* $0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$ *и вполне непрерывен*;

б) *действует из* $L_{1-\frac{\lambda}{n}}$ *в любое пространство* $L_\beta$, *где* $\beta > 0$, *и вполне непрерывен*;

в) *при* $\frac{n-\lambda}{n} < \alpha < \frac{n-\lambda}{n-m}$ *действует из пространства* $L_\alpha$ *в пространство* $L_\beta$, *где* $\beta = \frac{n}{m}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m}$, *и непрерывен.*

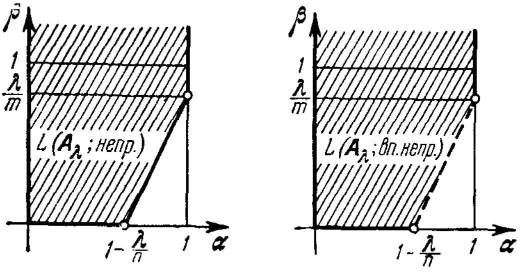


Рис. 8.4.

Утверждение а) этой теоремы вытекает из теорем 6.1 и 6.4. Из теоремы 6.1 следует, что оператор (8.51) действует из $L_\alpha$ при $0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}$ в $L_0$ и непрерывен. Полная непрерывность оператора (8.51) вытекает из теоремы 6.4 (здесь нужно провести рассуждения, аналогичные началу доказательства теоремы 8.1).

Основную трудность представляет доказательство утверждения в). Допустим, что оно уже доказано. Тогда $\{\alpha, \beta\}$ является внутренней точкой $L$-характеристики $L(A_\lambda;$ *непр.*), если $\alpha < \frac{n-\lambda}{n-m}$ и $\beta > \frac{n}{m}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m}$, $\beta > 0$. Но внутренние точки $L(A_\lambda;$ *непр.*) в силу теоремы 5.4 принадлежат $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*). Отсюда, в частности, вытекает утверждение б).

Мы ниже докажем, что оператор (8.51) удовлетворяет условию *) $\Lambda M\left(\alpha, \frac{n}{m}(\alpha-1)+\frac{\lambda}{m}\right)$ при всех $\alpha$ из интервала $\left(\frac{n-\lambda}{n}, \frac{n-\lambda}{n-m}\right)$. Тогда из теоремы 8.2 будет вытекать утверждение в).

Пусть $\varkappa_D(s)$ — характеристическая функция подмножества $D \subset \Omega$. Тогда

$$A_\lambda \varkappa_D(t) = \int_D |t-s|^{-\lambda}\, ds = \int_D |t-s|^{-(\lambda-\beta m)} |t-s|^{-\beta m}\, ds. \tag{8.52}$$

Для оценки последнего интеграла в правой части (8.52) применим к нему неравенство Гёльдера с показателями $\frac{1}{1-\gamma}$ и $\frac{1}{\gamma}$, где $\gamma$ — некоторое число из интервала $(\beta, \alpha)$. В результате получим, что

$$|A_\lambda \varkappa_D(t)| \leqslant \left\{\int_D |t-s|^{-\frac{\lambda-\beta m}{1-\gamma}}\, ds\right\}^{1-\gamma} \left\{\int_D |t-s|^{-\frac{\beta m}{\gamma}}\, ds\right\}^{\gamma}. \tag{8.53}$$

Как и при доказательстве теоремы 8.3, можно показать, что

$$\int_D |t-s|^{\frac{-\lambda-\beta m}{1-\gamma}}\, ds \leqslant \int_{T(t;\, r)} |t-s|^{-\frac{\lambda-\beta m}{1-\gamma}}\, ds, \tag{8.54}$$

где $T(t, r)$ — шар с центром в точке $t$, радиусом $r$ и объемом $v = \nu_n r^n = \operatorname{mes} D$ ($\nu_n$ — объем единичного $n$-мерного шара). Переходя к полярным координатам, получим неравенство

$$\int_D |t-s|^{-\frac{\lambda-\beta m}{1-\gamma}}\, ds \leqslant \nu_n^{\frac{\lambda-\beta m}{n(1-\gamma)}} (\operatorname{mes} D)^{1-\frac{\lambda-\beta m}{n(1-\gamma)}}.$$

---

*) Мы не знаем, удовлетворяет ли он условию $\Lambda M\left(\frac{n-\lambda}{n-m}, \frac{n-\lambda}{n-m}\right)$. Нетрудно показать, что он удовлетворяет условию $\Lambda M\left(1-\frac{\lambda}{n}, 0\right)$ (для этого достаточно повторить, например, первую часть доказательства теоремы 8.3).

Таким образом, мы пришли к оценке

$$|A_\lambda \varkappa_D(t)| \leqslant c\,(\operatorname{mes} D)^{\alpha-\gamma}\left(\int_D |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}}\,ds\right)^{\gamma}.$$

Из полученной оценки следует, что

$$\|A_\lambda \varkappa_D\|_{M_\beta} \leqslant c\,(\operatorname{mes} D)^{\alpha-\gamma}\left\|\left(\int_D |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}}\,ds\right)^{\gamma}\right\|_{M_\beta}$$

или (см. п. 8.3), что

$$\|A_\lambda \varkappa_D\|_{M_\beta} \leqslant c_1\,(\operatorname{mes} D)^{\alpha-\gamma}\left(\left\|\int_D |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}}\,ds\right\|_{M_{\frac{\beta}{\gamma}}}\right)^{\gamma}.$$

Выражение $|t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}}$ можно рассматривать как определенную на $D$ ограниченную вектор-функцию

$$w(s) = |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \quad (s \in D)$$

со значениями в пространстве $M_{\frac{\beta}{\gamma}}$ функций переменной $t \in \Omega^*$. Действительно, если $s$ фиксировано, то неравенство $|t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \geqslant h$ эквивалентно неравенству $|t-s| \leqslant h^{-\frac{\gamma}{m\beta}}$. Поэтому

$$\operatorname{mes}\left\{t\colon |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \geqslant h\right\} \leqslant \nu_m \left(h^{-\frac{\gamma}{m\beta}}\right)^m = \nu_m h^{-\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Но отсюда следует, что при каждом $s \in D$ (см. п. 8.3)

$$\left\| |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \right\|^{*}_{M_{\frac{\beta}{\gamma}}} = \sup_h h\left[\operatorname{mes}\left\{t\colon |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \geqslant h\right\}\right]^{\frac{\beta}{\gamma}} \leqslant \nu_m^{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Из общих свойств интегралов *) от вектор-функций следует, что

$$\left\| \int_D |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} ds \right\|_{M_{\frac{\beta}{\gamma}}} \leqslant \int_D \left\| |t-s|^{-\frac{m\beta}{\gamma}} \right\|_{M_{\frac{\beta}{\gamma}}} ds \leqslant c_1 \operatorname{mes} D.$$

Таким образом, мы пришли к неравенству

$$\| A_\lambda \varkappa_D \|_{M_\beta} \leqslant c_2 (\operatorname{mes} D)^\alpha,$$

которое означает, что оператор (8.51) удовлетворяет условию

$$\Lambda M\left(\alpha, \frac{n}{m}(\alpha-1)+\frac{\lambda}{m}\right) \text{ при } \frac{n-\lambda}{n} < \alpha < \frac{n-\lambda}{n-m}.$$

Теорема доказана.

Теорема 8.10 означает, что множество точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых выполняются условия

$$0 \leqslant \alpha < \frac{n-\lambda}{n-m}, \quad \beta \geqslant 0, \quad \beta \geqslant \frac{n}{m}(\alpha-1)+\frac{\lambda}{m}$$

$\left(\text{исключая точку } \left\{1-\frac{\lambda}{n}, 0\right\}\right)$, включено в $L$-характеристику $L(A_\lambda;$ *непр.*$)$, а множество точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых выполняются условия

$$0 \leqslant \alpha < \frac{n-\lambda}{n-m}, \quad \beta \geqslant 0, \quad \beta > \frac{n}{m}(\alpha-1)+\frac{\lambda}{m},$$

включено в $L$-характеристику $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*$)$ (рис. 8.5). Нам неизвестно, принадлежат ли $L$-характеристике $L(A_\lambda;$ *непр.*$)$ точки $\left\{\frac{n-\lambda}{n-m}, \beta\right\}$, где $\beta > \frac{n-\lambda}{n-m}$.

Предположим теперь, что $R_n$ $(n < m)$ есть подпространство пространства $R_m$, $\Omega^*$ — ограниченное множество ненулевой меры в $R_m$, а $\Omega$ — подмножество $\Omega^*$, лежащее в $R_n$

---

*) Если $E$ — банахово пространство, а $w(t)$ — вектор-функция, определенная на $D \subset R_n$ со значениями в $E$, то

$$\left\| \int_D w(t)\, dt \right\| \leqslant \int_D \| w(t) \| \, dt$$

(см. также п. 13.1).

и имеющее в $R_n$ ненулевую меру. Нас будут интересовать $L$-характеристики $L(A_\lambda;$ *непр.*) и $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) оператора

$$A_\lambda x(t) = \int_\Omega K_\lambda(t, s)\, x(s)\, ds. \qquad (8.55)$$

Для построения этих $L$-характеристик можно вначале с помощью теорем 8.9 и 8.10 построить соответствующие $L$-характеристики транспонированного оператора

$$A_\lambda^{\#} y(s) = \int_{\Omega^*} K_\lambda(t, s)\, y(t)\, dt. \qquad (8.56)$$

После этого остается воспользоваться теоремами 4.5 и 5.1. Получающиеся при этом утверждения сформулируем в виде, аналогичном теоремам 8.9 и 8.10.

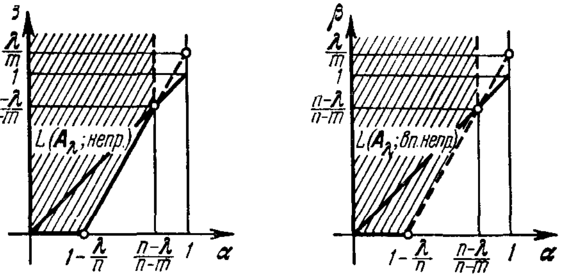


Рис. 8.5.

Теорема 8.11. *Пусть* $0 < \lambda < n < m$.
*Тогда интегральный оператор* (8.55)

а) *при* $0 \leqslant \alpha < 1 - \frac{\lambda}{n}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$ *и вполне непрерывен*;

б) *действует из* $L_{1-\frac{\lambda}{n}}$ *в любое пространство* $L_\beta$, *где* $\beta > 0$, *и вполне непрерывен*;

в) *при* $\frac{n-\lambda}{n} < \alpha < 1$ *действует из пространства* $L_\alpha$ *в пространство* $L_\beta$, *где* $\beta = \frac{n}{m}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m}$, *и непрерывен*;

г) *действует из* $L_1$ *в любое* $L_\beta$, *где* $\beta > \frac{\lambda}{m}$, *и вполне непрерывен.*

Теорема 8.12. *Пусть* $n \leqslant \lambda < m$.

*Тогда интегральный оператор* (8.55):

а) *при* $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\lambda - n}{m - n}$ *действует из пространства* $L_\alpha$ *в любое пространство* $L_\beta$, *где* $\beta > \frac{\lambda - n}{m - n}$, *и вполне непрерывен;*

б) *при* $\frac{\lambda - n}{m - n} < \alpha < 1$ *действует из пространства* $L_\alpha$ *в пространство* $L_\beta$, *где* $\beta = \frac{n}{m}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m}$, *и непрерывен;*

в) *действует из пространства* $L_1$ *в любое пространство* $L_\beta$, *где* $\beta > \frac{\lambda}{m}$, *и вполне непрерывен.*

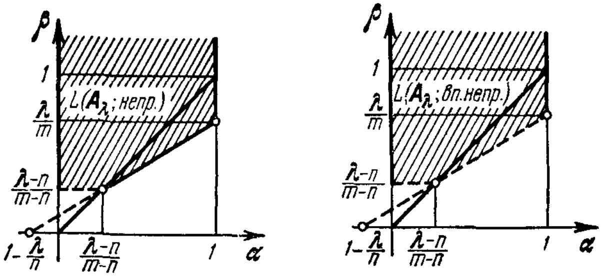


Рис. 8.6.

$L$-характеристики операторов (8.55) изображены на рис. 8.6 (для случая, когда $n < \lambda < m$).

Предоставляем читателю рассмотреть интегральные операторы с ядрами вида

$$K(t, s) = Q(t, s)\,|t - s|^{-\lambda},$$

где $Q(t, s)$ ограничена.

**8.9. Потенциалы на множествах с нелебеговой мерой*).** Пусть $G$ — некоторое ограниченное множество $n$-мерного евклидо-

---

*) Этот пункт написан в соответствии со статьей Е. И. Пустыльника [6].

на пространства $R_n$. Через $G(s; \rho)$ ниже обозначается пересечение множества $G$ и шара $|u - s| \leqslant \rho$.

Пусть на $\overline{G}$ задана некоторая неотрицательная нелебегова мера $\mu = \mu(D)$ $(D \subset \overline{G})$, причем $\mu(\overline{G}) < \infty$. Предположим, что существуют такие положительные числа $k$, что при всех $s \in R_n$ и при всех $\rho > 0$ выполняются неравенства

$$\mu G(s; \rho) \leqslant c(k)\rho^k. \tag{8.57}$$

Если эти неравенства выполнены при $k = k_0$, то, как нетрудно видеть, они будут выполнены и при всех $k < k_0$. Точную верхнюю грань чисел $k$, при которых выполнены неравенства (8.57), назовем *размерностью множества $G$ по отношению к мере* $\mu$. Эту размерность будем обозначать через $\dim_\mu G$.

Размерность по отношению к мере всегда положительна. Она может быть любым целым или дробным числом, которое не превышает $n$.

Легко видеть, что размерность каждой области пространства $R_n$ по отношению к лебеговой мере равна $n$. Размерность квадрируемой поверхности относительно естественной меры (т. е. «площади») равна $n - 1$. В качестве еще одного примера рассмотрим меру $\mu$, определенную равенством

$$\mu(D) = \int_D f(s)\,ds \qquad (D \subset \overline{\Omega}), \tag{8.58}$$

где $f(s)$ — неотрицательная и суммируемая (по отношению к обычной лебеговой мере) функция. Размерность $\dim_\mu G$ множества $G$ по отношению к этой мере определяется «особенностями» функции $f(s)$; если $\alpha_0$ $(0 \leqslant \alpha_0 < 1)$ — это infimum таких $\alpha$, что $f(s) \in L_\alpha(G)$, то

$$\dim_\mu G = n(1 - \alpha_0).$$

Если функция $f(s)$ не принадлежит ни одному $L_\alpha(G)$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, то размерность множества $G$ по отношению к мере (8.58) не определена.

Перейдем к операторам типа потенциала

$$Ax(t) = \int_\Omega \frac{Q(t, s)}{|t - s|^\lambda}\, x(s)\, d\mu(s) \qquad (t \in \Omega^*), \tag{8.59}$$

где $Q(t, s)$ — ограниченная функция. Будем считать, что на множествах $\Omega$ и $\Omega^*$ заданы меры $\mu$ и $\mu^*$ и определены размерности $\dim_\mu(\Omega)$ и $\dim_{\mu^*}(\Omega^*)$.

На операторы (8.59) переносится значительная часть установленных в настоящем параграфе теорем об $L$-характеристиках операторов типа потенциала.

Для любого множества $T \subset R_n$ через $T_r$ будем обозначать замыкание объединения шаров радиуса $r$ с центрами в точках множества $T$. На множествах

$$G_\rho = \Omega \cap \Omega_\rho^*, \qquad G_\rho^* = \Omega^* \cap \Omega_\rho$$

соответственно заданы меры $\mu$ и $\mu^*$. Из определения размерностей $\dim_\mu G_\rho$ и $\dim_{\mu^*} G_\rho^*$ вытекает, что при убывании $\rho$ они могут только возрастать. Положим

$$n_0 = \sup_\rho \dim_\mu G_\rho, \qquad m_0 = \sup_\rho \dim_{\mu^*} G_\rho^*$$

(очевидно, $m_0 \leqslant n$ и $n_0 \leqslant n$).

Теорема 8.13. *Если* $0 < \lambda < n_0, m_0$, *то* $L$-*характеристика* $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) *оператора* $A_\lambda$ *содержит все точки* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad \beta \geqslant 0, \qquad \beta > \frac{n_0}{m_0}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m_0}.$$

*Если* $0 < m_0 \leqslant \lambda < n_0$, *то* $L$-*характеристика* $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) *оператора* $A_\lambda$ *содержит все точки* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad \alpha \geqslant \beta \geqslant 0, \qquad \beta > \frac{n_0}{m_0}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m_0}.$$

*Если* $0 < n_0 \leqslant \lambda < m_0$, *то* $L$-*характеристика* $L(A_\lambda;$ *вп. непр.*) *оператора* $A_\lambda$ *содержит все точки* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad \alpha \geqslant \beta \geqslant 0, \qquad \beta > \frac{n_0}{m_0}(\alpha - 1) + \frac{\lambda}{m_0}.$$

Доказательства предоставляем читателю.

ГЛАВА III

# ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

## § 9. Расщепление линейных операторов

**9.1. Корень квадратный из самосопряженного оператора.** Важным классом линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$, являются самосопряженные операторы. Напомним, что линейный непрерывный оператор $A$ называется *самосопряженным*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad (x, y \in H). \tag{9.1}$$

Приведенное определение относится как к случаю вещественного, так и к случаю комплексного гильбертова пространства.

Важным примером самосопряженного оператора, действующего в пространстве $L_{\frac{1}{2}}$, является интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{9.2}$$

ядро которого удовлетворяет условию

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)} \qquad (t, s \in \Omega). \tag{9.3}$$

В случае вещественного ядра условие (9.3) означает, что оно симметрично:

$$K(t, s) = K(s, t) \qquad (t, s \in \Omega). \tag{9.4}$$

Естественно, что ядро $K(t, s)$ должно при этом обладать дополнительными свойствами, в силу которых оператор (9.2) непрерывен в $L_{\frac{1}{2}}$; такие условия изучались в предыдущей главе.

Самосопряженный оператор $A$ называется *положительно определенным*, если

$$(Ax,\ x) \geqslant 0 \qquad (x \in H). \tag{9.5}$$

Из каждого самосопряженного положительно определенного оператора $A$ можно *) извлечь положительный квадратный корень в том смысле, что существует единственный самосопряженный и положительно определенный оператор $A^{\frac{1}{2}}$ такой, что $A = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

Рассмотрим всевозможные операторы $B$ вида

$$B = A^{\frac{1}{2}}U, \qquad ? \tag{9.6}$$

частично изометрич. о-р, м-во значений которого сод.

где $U$ — ~~произвольный унитарный оператор, действ~~ующий в ~~гильбертовом~~ пространстве $H$. Сопряженный к $B$ оператор $B^*$ определится тогда равенством

$$B^* = \left(A^{\frac{1}{2}}U\right)^* = U^*\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^* = \cancel{U^{-1}} A^{\frac{1}{2}}.\ U^* A^{\frac{1}{2}}$$

Поэтому для оператора $A$ справедливы представления

$$A = BB^*, \tag{9.7}$$

где $B$ — любой оператор вида (9.6). Оказывается, что справедливо и обратное утверждение — из равенства (9.7) вытекает, что оператор $B$ представим в виде (9.6).

Нормы положительно определенного оператора $A$ и квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}$ связаны друг с другом равенством

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} \right\| = \| A \|^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\| B \| = \| A \|^{\frac{1}{2}}, \tag{9.8}$$

где $B$ — любой оператор (9.6).

*) См., например, Л. А. Люстерник и В. И. Соболев [1], Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1].

**9.2. Расщепление оператора** *). Допустим, что гильбертово пространство $H$ образует всюду плотное множество в банаховом пространстве $E$, причем *оператор вложения $H$ в $E$ непрерывен*:

$$\|x\|_E \leqslant C\,\|x\|_H \qquad (x \in H). \tag{9.9}$$

Отсюда вытекает, что сопряженное пространство $E^*$ вложено в $H$ в том смысле, что между элементами $E^*$ и элементами некоторого линейного множества в $H$ установлено взаимно однозначное соответствие. Это значит, что каждый функционал $y \in E^*$ можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $H$. Мы будем при этом вложение $E^*$ в $H$ считать таким, что для каждого $y \in E^*$ выполнено равенство

$$y(x) = (x,\ y) \qquad (x \in H). \tag{9.10}$$

Если выполнены перечисленные условия, то будем говорить, что пространства

$$E^* \subset H \subset E \tag{9.11}$$

образуют *правильную тройку пространств*.

В качестве примера правильной тройки можно рассмотреть пространства $E^* = L_\alpha$ $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $H = L_{\frac{1}{2}}$, $E = L_{1-\alpha}$.

Ниже нам будет удобно символ скалярного произведения $(x,\ y)$ распространить на тот случай, когда один из сомножителей принадлежит пространству $E$, а другой — пространству $E^*$. Если $x \in E$, $y \in E^*$, то $(x,\ y)$ — это значение функционала $y$ на элементе $x$; если $x \in E^*$, $y \in E$, то $(x,\ y)$ — значение функционала $x$ на элементе $y$.

Допустим, что линейный оператор $A$ действует из пространства $E$ в пространство $E^*$. Такие операторы естественно

---

*) Вопрос о расщеплении линейного оператора для различных случаев рассматривался в работах А. Гаммерштейна [1], Н. Голомба [1, 2], М. А. Красносельского [4—7], М. А. Красносельского и В. И. Соболева [1], М. М. Вайнберга [4, 6], В. И. Соболева [1], М. А. Красносельского и Я. Б. Рутицкого [5, 6] и других авторов. Здесь излагаются теоремы из статьи М. А. Красносельского и С. Г. Крейна [1].

называть *сужающими*. Во многих задачах полезны *расщепления* сужающего оператора в суперпозицию

$$A = A_1 A_2, \tag{9.12}$$

где $A_2$ действует из $E$ в $H$, а $A_1$ из $H$ в $E^*$. Вопрос о том, возможно ли представление (9.12), в общем случае не исследован.

Действующий из $E$ в $E^*$ непрерывный оператор $A$ назовем *самосопряженным*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad (x, y \in E). \tag{9.13}$$

Можно проверить, что (9.13) выполнено, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \qquad (x, y \in H). \tag{9.14}$$

Действительно, для любых элементов $x_0, y_0 \in E$ можно указать последовательности $x_n, y_n \in H$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящиеся в $E$ к $x_0, y_0$. В равенствах

$$(Ax_n, y_n) = (x_n, Ay_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

можно перейти к пределу. Предельное равенство имеет вид

$$(Ax_0, y_0) = (x_0, Ay_0).$$

Следовательно, из (9.14) вытекает (9.13).

Самосопряженный оператор $A$, действующий из $E$ в $E^*$, назовем *положительно определенным*, если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \qquad (x \in E). \tag{9.15}$$

Легко видеть, что (9.15) выполнено, если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \qquad (x \in H). \tag{9.16}$$

Через $A^{\frac{1}{2}}$ будем обозначать положительный корень из $A$, рассматриваемого как оператор, действующий в $H$.

Теорема 9.1. *Пусть $A$ действует из $E$ в $E^*$ и является непрерывным самосопряженным и положительно определенным оператором. Пусть значения оператора $A$ принадлежат подпространству $\overset{*}{E_0}$ пространства $E^*$.*

*Тогда $A^{\frac{1}{2}}$ является непрерывным оператором, действующим из $H$ в $\overset{*}{E_0}$.*

Доказательство. Очевидно,

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} x \right\|_H = \sqrt{\left(A^{\frac{1}{2}} x,\ A^{\frac{1}{2}} x\right)} = \\ = \sqrt{(Ax,\ x)} \leqslant \sqrt{\|Ax\|_{E^*} \|x\|_E} \qquad (x \in H), \qquad (9.17)$$

откуда следует, что

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} x \right\|_H \leqslant a \|x\|_E \qquad (x \in H), \qquad (9.18)$$

где

$$a^2 = \|A\|_{E \to E^*}.$$

Неравенство (9.18) показывает, что $A^{\frac{1}{2}}$ допускает продолжение в непрерывный оператор $C$, определенный на всем пространстве $E$ и действующий из $E$ в $H$; при этом

$$\|Cx\|_H \leqslant a \|x\|_E \qquad (x \in E). \qquad (9.19)$$

Сопряженный к $C$ оператор $C^*$ будет действовать из $H$ в $E^*$, причем будет выполнено неравенство

$$\|C^* y\|_{E^*} \leqslant a \|y\|_H \qquad (y \in H). \qquad (9.20)$$

Но при любых $x,\ y \in H$ выполнено равенство

$$\left(x,\ A^{\frac{1}{2}} y\right) = \left(A^{\frac{1}{2}} x,\ y\right) = (Cx,\ y) = (x,\ C^* y),$$

откуда вытекает, что $C^* y = A^{\frac{1}{2}} y$ при $y \in H$. Таким образом, неравенство (9.20) означает, что

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} y \right\|_{E^*} \leqslant a \|y\|_H \qquad (y \in H). \qquad (9.21)$$

Мы показали, что $A^{\frac{1}{2}}$ действует из $H$ в $E^*$ и непрерывен.

Обозначим через $H_0$ замыкание в $H$ множества значений оператора $A^{\frac{1}{2}}$ на $H$. Из самосопряженности $A^{\frac{1}{2}}$ вытекает, что он принимает нулевые значения на ортогональном дополнении $H_1$ к $H_0$ в $H$. Поэтому множество значений оператора $A^{\frac{1}{2}}$ на $H$ совпадает с множеством значений на $H_0$.

Пусть $x_0 \in H_0$. Можно указать такую последовательность элементов $y_n \in H$, что элементы $A^{\frac{1}{2}} y_n$ сходятся в $H$ к $x_0$. Тогда элементы $Ay_n$ будут сходиться к $A^{\frac{1}{2}} x_0$ по норме $E^*$. Но $Ay_n \in E_0^*$; поэтому $A^{\frac{1}{2}} x_0 \in E_0^*$.

Теорема доказана.

В дальнейшем будем сохранять обозначение $A^{\frac{1}{2}}$ (вместо $C$) за непрерывным продолжением корня на все пространство $E$.

Теорема 9.1 дает положительный ответ на вопрос о возможности расщепления самосопряженного положительно определенного оператора в суперпозицию (9.12). Более того, из этой теоремы вытекает, что *оператор* $A$ *может быть представлен в виде*

$$A = BB^*, \tag{9.22}$$

*где* $B$ — *произвольный оператор* (9.6); *операторы* $B$ *действуют из* $H$ *в* $E_0^*$ *и непрерывны.*

Теорема 9.2. *Пусть* $A$ *действует из* $E$ *в* $E^*$ *и является вполне непрерывным самосопряженным и положительно определенным оператором.*

*Тогда* $A^{\frac{1}{2}}$ *является вполне непрерывным оператором, действующим из* $H$ *в* $E^*$.

Доказательство. Рассмотрим вначале $A^{\frac{1}{2}}$ как оператор из $E$ в $H$ и покажем, что он вполне непрерывен. Для этого достаточно показать, что он преобразует элементы пересечения $T$ единичного шара $\|x\|_E \leqslant 1$ и пространства $H$ в множество, компактное в $H$.

Пусть задана последовательность $x_n \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу полной непрерывности $A$ можно указать такую подпоследовательность $x_{n_k} \in T$, что элементы $Ax_{n_k}$ сходятся в $E^*$. Но тогда

$$\lim_{k, l \to \infty} \left\| A^{\frac{1}{2}} x_{n_k} - A^{\frac{1}{2}} x_{n_l} \right\|_H =$$

$$= \lim_{k, l \to \infty} \sqrt{\left(A\left(x_{n_k} - x_{n_l}\right), x_{n_k} - x_{n_l}\right)} = 0.$$

Следовательно, $A^{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывен как оператор из $E$ в $H$. Сопряженный к нему оператор будет действовать из $H$ в $E^*$ и также будет вполне непрерывен. Но сопряженный оператор совпадает с самим оператором $A^{\frac{1}{2}}$.

Теорема доказана.

Теоремы 9.1 и 9.2 будут ниже в основном применяться к пространствам $E = L_{1-\alpha}$, $H = L_{\frac{1}{2}}$, $E^* = L_\alpha \left(0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}\right)$.

При этом в случае, когда $E^* = L_0$, в качестве подпространства $E_0^*$ выделяется обычно пространство $C$ непрерывных функций.

**9.3. $L$-характеристика квадратного корня.** Рассмотрим правильную тройку пространств

$$L_{\alpha_0} \subset L_{\frac{1}{2}} \subset L_{1-\alpha_0}, \tag{9.23}$$

где $\alpha_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Допустим, что оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 9.1 по отношению к тройке (9.23). Из этой теоремы вытекает, что $L$-характеристика $L\left(A^{\frac{1}{2}}, \textit{непр.}\right)$ содержит две точки: $\left\{\frac{1}{2}, \alpha_0\right\}$ и $\left\{1-\alpha_0, \frac{1}{2}\right\}$. В силу интерполяционной теоремы 2.4 $L$-характеристика $L\left(A^{\frac{1}{2}}, \textit{непр.}\right)$ содержит полностью многоугольник, указанный на рис. 9.1.

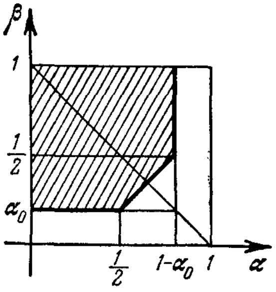

Рис. 9.1.

Если оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 9.2, то аналогичные замечания можно сделать по отношению к $L$-характеристике $L\left(A^{\frac{1}{2}}, \textit{вп. непр.}\right)$. Для этого достаточно сослаться на теорему 3.10.

**9.4. Представление вполне непрерывных операторов рядами *).** Каждый линейный вполне непрерывный само-

*) Такие представления изучались многими авторами. Теорема 9.3 в близкой форме установлена Е. И. Пустыльником [1,5]. Здесь дано существенно более простое доказательство.

сопряженный оператор $C$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, может быть представлен в виде

$$Cx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) e_k, \tag{9.24}$$

где $\lambda_k$ — собственные значения оператора $C$, а $e_k$ — соответствующие им нормированные собственные векторы. Собственные значения $\lambda_k$ самосопряженного оператора $C$ вещественны; будем считать, что они расположены в порядке убывания абсолютных величин; если $C$ положительно определен, то собственные значения неотрицательны. Из полной непрерывности оператора $C$ вытекает, что $\lambda_k \to 0$. Ряд (9.24) сходится в $H$ равномерно на каждом ограниченном множестве. Это значит, что операторы $C_n$,

$$C_n x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) e_k, \tag{9.25}$$

сходятся к $C$ по норме операторов.

Представление (9.24) играет существенную роль в теории самосопряженных операторов.

Лемма 9.1. *Пусть $E^* \subset H \subset E$ правильная тройка пространств. Пусть оператор* (9.24) *действует из $H$ в $E^*$ и вполне непрерывен.*

*Тогда операторы* (9.25) *сходятся к оператору* (9.24) *по норме операторов, действующих из $H$ в $E^*$.*

Доказательство. Введем обозначение

$$Q_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k. \tag{9.26}$$

Сопряженный к $C$ оператор $C^*$ можно рассматривать как вполне непрерывный оператор, действующий из $E$ в $H$. Поэтому значения оператора $C^*$ на единичном шаре $\|x\|_E \leqslant 1$ образуют компактное в $H$ множество. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Q_n C^* x - C^* x\|_H = \lim_{n\to\infty} \|Q_n C^* - C^*\|_{E\to H} = 0. \tag{9.27}$$

Из равенства

$$\|CQ_n - C\|_{H\to E^*} = \|Q_n C^* - C^*\|_{E\to H}$$

вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \|CQ_n - C\|_{H\to E^*} = 0.$$

Остается заметить, что $C_n = CQ_n$.

Лемма доказана.

Пусть теперь $B$ — произвольный вполне непрерывный оператор, действующий из $H$ в $E^*$. Этот оператор можно представить в виде

$$B = CU,$$

частично изометрический (см. 9.6)

где $U$ — ~~унитарный~~, а $C$ — самосопряженный положительно определенный оператор. Из полной непрерывности оператора $B$ вытекает полная непрерывность $C$ как оператора, действующего в $H$, и как оператора, действующего из $H$ в $E^*$. Пусть оператор $C$ представлен в виде (9.24). Тогда для оператора $B$ справедливо представление

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, g_k) e_k, \tag{9.28}$$

где $g_k = U^* e_k$. Представление (9.28) называют *разложением оператора по союзным фундаментальным функциям Шмидта*. Из леммы 9.1 вытекает, что *ряд* (9.28) *сходится* *) *по норме операторов, действующих из $H$ в $E^*$.*

Аналогичное утверждение можно сделать относительно сопряженного к $B$ оператора $B^*$. Этот оператор представим в виде

$$B^* = U^* C^*.$$

Если $B$ действует вполне непрерывно из $H$ в $E^*$, то $B^*$ и $C^*$ действуют вполне непрерывно из $E$ в $H$. В силу леммы 9.1

$$\|B^* Q_n - B^*\|_{E\to H} = \|C^* Q_n - C^*\|_{E\to H} \to 0$$

при $n \to \infty$. А это означает, что для $B^*$ имеет место представление

$$B^* x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, e_k) g_k, \tag{9.29}$$

где ряд сходится по норме операторов, действующих из $E$ в $H$.

---

*) Здесь и в дальнейшем, когда речь идет о сходимости рядов типа (9.28) по норме операторов, понимается сходимость последовательности операторов, определенных частичными суммами ряда.

Рассмотрим теперь самосопряженный положительно определенный оператор $A$, действующий вполне непрерывно из $E$ в $E^*$. На основании теоремы 9.2 его можно расщепить, т. е. представить в виде

$$A = BB^*,$$

где операторы $B$ в $B^*$ действуют соответственно из $H$ в $E^*$ и из $E$ в $H$, вполне непрерывны и, следовательно, представимы в виде рядов (9.28) и (9.29). Таким образом, для $A$ получается представление

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (x,\ e_k)\, e_k, \tag{9.30}$$

где ряд сходится по норме операторов, действующих из $E$ в $E^*$. Нетрудно видеть, что $e_k$ являются собственными векторами оператора $A$, а $\lambda_k^2$ — соответствующими им собственными значениями. Ряд (9.30) сходится, конечно, и по норме операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 9.3. *Пусть $\mu_k$ и $e_k$ есть соответственно собственные значения и собственные векторы самосопряженного положительно определенного, вполне непрерывного в гильбертовом пространстве $H$ оператора $A$. Пусть $A$ является также вполне непрерывным оператором, действующим из $E$ в $E^*$, где $E^* \subset H \subset E$ — некоторая правильная тройка пространств.*

*Тогда операторы*

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k (x,\ e_k)\, e_k \tag{9.31}$$

*сходятся к оператору $A$ по норме операторов, действующих из $E$ в $E^*$.*

**9.5. Корень квадратный из интегрального оператора.** Представляет интерес вопрос о том, при каких условиях самосопряженный вполне непрерывный оператор

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x,\ e_k)\, e_k, \tag{9.32}$$

действующий в $L_{\frac{1}{2}}$, допускает интегральное представление

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{9.33}$$

Этот вопрос исследован недостаточно *).

Ряд (9.32) сходится по норме операторов, действующих в $L_{\frac{1}{2}}$. Это значит, что $A$ является пределом по норме операторов последовательности $A_n$ интегральных операторов

$$A_n x(t) = \int_\Omega K_n(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{9.34}$$

с вырожденными ядрами

$$K_n(t, s) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)\, e_k(s). \tag{9.35}$$

Естественно ожидать, что оператор (9.32) допускает представление (9.33) в том случае, когда вырожденные ядра (9.35) в некотором смысле сходятся к функции $K(t, s)$, которая является ядром интегрального оператора.

Легко видеть, что *вырожденные ядра* (9.35) *сходятся в среднем к некоторой суммируемой с квадратом функции* $K(t, s)$ *в том и только том случае, если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 < \infty. \tag{9.36}$$

---

*) Как показал недавно В. Б. Коротков [1], самосопряженный оператор $A$ удовлетворяет условию (6.22) в том и только том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \,|\, e_k(t) \,|^2 \leqslant u_0^2(t).$$

Поэтому из замечания в конце п. 6.3 вытекает, что самосопряженный оператор $A$ является интегральным, если почти при всех $t \in \Omega$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \,|\, e_k(t) \,|^2 < \infty.$$

При этом для каждой функции $x(s) \in L_{\frac{1}{2}}$

$$\left\| \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds - A_n x(t) \right\|_{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_\Omega \int_\Omega |K(t, s) - K_n(t, s)|^2\, ds\, dt}\, \| x(s) \|_{\frac{1}{2}},$$

а следовательно, оператор $A$ допускает представление (9.33).

Пусть теперь $A$ — положительно определенный вполне непрерывный оператор. Рассмотрим корень $A^{\frac{1}{2}}$:

$$A^{\frac{1}{2}} x = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \sqrt{\lambda_k}\, (x, e_k)\, e_k. \tag{9.37}$$

Из проведенных выше рассуждений вытекает, что оператор $A^{\frac{1}{2}}$ интегральный, если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty. \tag{9.38}$$

Операторы, собственные значения которых удовлетворяют условию (9.38), называются *ядерными*. Корень $A^{\frac{1}{2}}$ является интегральным оператором и в том случае *), когда почти при всех $t \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |e_k(t)|^2 < \infty.$$

Условия, при которых корень из интегрального оператора также является интегральным, можно формулировать и в других терминах.

Теорема 9.4. *Пусть симметричное и положительно определенное ядро $K(t, s)$ определяет непрерывный оператор, действующий в $L_{\frac{1}{2}}$. Пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$|K(t, s)| \leqslant u_0(t)\, u_0(s) \qquad (t, s \in \Omega), \tag{9.39}$$

*где $u_0(t)$ конечна почти всюду.*

---

*) См. сноску на стр. 183.

*Тогда корень* $A^{\frac{1}{2}}$ *из интегрального оператора* $A$ *с ядром* $K(t, s)$ *также является интегральным оператором.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u_0(t)$ положительна. Обозначим через $E_{u_0}$ (см. п. 6.2) совокупность функций $y(t)$ $(t \in \Omega)$, для которых при некотором $\mu > 0$ выполняется неравенство

$$-\mu u_0(t) \leqslant y(t) \leqslant \mu u_0(t).$$

Эта совокупность становится банаховым пространством, если infimum тех значений $\mu$, при которых выполнены последние неравенства, считать нормой функции $y(t)$. Через $E'_{u_0}$ обозначим совокупность функций $x(t)$, для которых

$$\| x \|^*_{u_0} = \int_\Omega | x(t) | u_0(t)\, dt < \infty.$$

Из условия (9.39) вытекает, что для каждой функции $x(t) \in E'_{u_0}$ выполнены неравенства

$$-u_0(t) \| x \|^*_{u_0} \leqslant Ax(t) \leqslant u_0(t) \| x \|^*_{u_0}.$$

Это значит, что $A$ действует из $E'_{u_0}$ в $E_{u_0}$ и непрерывен, причем его норма не превышает 1.

Перейдем к рассмотрению оператора $A^{\frac{1}{2}}$. Очевидно, для каждого $x(t) \in E'_{u_0} \cap L_{\frac{1}{2}}$ выполнены неравенства

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} x \right\|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{(Ax, x)} \leqslant \sqrt{\| Ax \|_{u_0} \| x \|^*_{u_0}} \leqslant \| x \|^*_{u_0}.$$

Поэтому оператор $A^{\frac{1}{2}}$ может быть продолжен по непрерывности в оператор $B$, действующий из $E'_{u_0}$ в $L_{\frac{1}{2}}$. Сопряженный оператор $B^*$ будет действовать из $L_{\frac{1}{2}}$ в $E_{u_0}$ и также будет ограниченным оператором (его норма не будет превышать 1).

Оператор $B^*$ допускает интегральное представление (см. замечание в конце п. 6.3). Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что $B^*$ совпадает с $A^{\frac{1}{2}}$. Более того, достаточно показать, что операторы $B^*$ и $A^{\frac{1}{2}}$ принимают одинаковые значения на некотором плотном в $L_{\frac{1}{2}}$ множестве. В качестве этого плотного множества достаточно взять $L_{\frac{1}{2}} \cap E'_u$.

Теорема доказана.

В частности, из теоремы 9.4 вытекает, что корень квадратный из интегрального оператора с ограниченным ядром также является интегральным оператором. Это последнее утверждение допускает простое прямое доказательство. Из ограниченности ядра вытекает, что оператор $A$ действует из $L_1$ в $L_0$ и непрерывен. Тогда в силу теоремы 9.1 корень $A^{\frac{1}{2}}$ является ограниченным оператором, действующим из $L_1$ в $L_{\frac{1}{2}}$, а все такие операторы — интегральные.

Известно, что корень квадратный из интегрального оператора является также интегральным, если ядро рассматриваемого оператора есть функция Грина некоторого эллиптического дифференциального оператора второго порядка.

Допустим, что корень $A^{\frac{1}{2}}$ из интегрального оператора

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{9.40}$$

допускает интегральное представление

$$A^{\frac{1}{2}} x(t) = \int_{\Omega} K_{\frac{1}{2}}(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{9.41}$$

Если оператор (9.41) регулярен, то из равенств

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} x \right\|^2_{\frac{1}{2}} = \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} K_{\frac{1}{2}}(t, s)\, x(s)\, ds \int_{\Omega} K_{\frac{1}{2}}(t, \sigma)\, x(\sigma)\, d\sigma \right] dt =$$
$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left[ \int_{\Omega} K_{\frac{1}{2}}(t, s)\, K_{\frac{1}{2}}(t, \sigma)\, dt \right] x(s)\, x(\sigma)\, ds\, d\sigma =$$
$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(s, \sigma)\, x(\sigma)\, x(s)\, ds\, d\sigma = (Ax, x) \tag{9.42}$$

вытекает, что $K(t, s)$ можно рассматривать как итерированное ядро

$$K(t, s) = \int_\Omega K_{\frac{1}{2}}(t, \sigma) K_{\frac{1}{2}}(s, \sigma)\, d\sigma. \tag{9.43}$$

Возникает естественный вопрос о том, вытекает ли из представления ядра $K(t, s)$ в виде

$$K(t, s) = \int_\Omega R(t, \sigma) R(s, \sigma)\, d\sigma \tag{9.44}$$

тот факт, что $A^{\frac{1}{2}}$ — интегральный оператор с ядром $R(t, s)$. На этот вопрос легко дать положительный ответ, если ядро $R(t, s)$ неотрицательно. Выкладки предоставляем читателю.

**9.6. Пример.** В этом пункте мы укажем *), как построить такой интегральный оператор $A$, ядро которого суммируемо с любой степенью, а корень $A^{\frac{1}{2}}$ не является интегральным оператором.

Через $T_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ будем обозначать операторы, определенные на функциях $x(s)$ переменной $s \in [0, 2\pi]$ равенством

$$T_\alpha x(s) = \begin{cases} x(s+\alpha), & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant 2\pi - \alpha, \\ x(s+\alpha-2\pi), & \text{если } 2\pi - \alpha \leqslant s \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Рассмотрим на $L_{\frac{1}{2}}[0, 2\pi]$ оператор

$$Ax(t) = \int_0^{2\pi} K(t-s)\, x(s)\, ds, \tag{9.45}$$

где $K(u)$ — четная и определенная на всей оси $2\pi$-периодическая функция. Легко проверить, что оператор (9.45) коммутирует со всеми операторами $T_\alpha$. Из четности функции $K(u)$ вытекает, что оператор (9.45) самосопряжен. Предположим дополнительно, что оператор (9.45) положительно определен. Операторы $T_\alpha$ коммутируют с оператором $A$. Из общих теорем о функциях от операторов вытекает, что корень $A^{\frac{1}{2}}$ коммутирует со всеми операторами $T_\alpha$.

---

*) Здесь используется схема, предложенная Б. С. Митягиным (который указал нам несколько другой пример).

Допустим, что оператор $A^{\frac{1}{2}}$ — интегральный с ядром $Q(t, s)$. Тогда из равенств

$$T_\alpha \int_0^{2\pi} Q(t, s)\, x(s)\, ds = \int_0^{2\pi} Q(t, s)\, T_\alpha x(s)\, ds \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$$

вытекает, что $Q(t, s)$ также есть четная функция, зависящая только от разности $t - s$:

$$Q(t, s) = f(t - s).$$

Пусть теперь ряд Фурье функции $K(u)$ имеет вид

$$K(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \cos 2^k u, \tag{9.46}$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^4 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty. \tag{9.47}$$

Из общих теорем о лакунарных рядах (Н. К. Бари [1]) вытекает, что функция $K(u)$ суммируема с любой степенью.

Можно проверить, что ненулевые собственные значения оператора (9.45) совпадают с числами $a_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Каждому такому собственному значению соответствуют две собственные функции $\cos 2^k s$ и $\sin 2^k s$. У оператора $A^{\frac{1}{2}}$ будут те же собственные функции, а его собственные значения будут равны $a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Если оператор $A^{\frac{1}{2}}$ интегральный с ядром $Q(t, s) = f(t - s)$, то ряд Фурье функции $f(u)$ имеет вид

$$f(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2^k u. \tag{9.48}$$

Этот ряд снова лакунарный, причем сумма квадратов коэффициентов Фурье бесконечна. Такой ряд не является рядом Фурье ни для какой функции (Н. К. Бари [1]).

Следовательно, корень $A^{\frac{1}{2}}$ из оператора (9.45) — это оператор, не допускающий интегрального представления.

**9.7. Изучение интегрального оператора по свойствам итерированного ядра.** Рассмотрим интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{9.49}$$

с неотрицательным ядром. Тогда итерированное ядро

$$K_2(t, s) = \int_\Omega K(t, \sigma) K(s, \sigma)\, d\sigma \tag{9.50}$$

симметрично и положительно определено независимо от того, обладает ли этими свойствами ядро $K(t, s)$.

Теорема 9.5. *Пусть оператор*

$$K_2 x(t) = \int_\Omega K_2(t, s)\, x(s)\, ds \tag{9.51}$$

*действует из* $L_\alpha \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\right)$ *в* $L_{1-\alpha}$ *и непрерывен.*

*Тогда оператор* (9.49) *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{1-\alpha}$ *и непрерывен.*

Теорема 9.6. *Пусть оператор* (9.51) *действует из* $L_\alpha \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\right)$ *в* $L_{1-\alpha}$ *и вполне непрерывен.*

*Тогда оператор* (9.49) *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{1-\alpha}$ *и вполне непрерывен.*

Оба сформулированных утверждения вытекают из теорем 9.1 и 9.2. Для применения их достаточно показать, что оператор $K_2$ можно представить в виде $K_2 = KK^{\#}$, где

$$K^{\#} x(t) = \int_\Omega K(s, t)\, x(s)\, ds,$$

и установить, что $K^{\#}$ непрерывен в пространстве $L_{\frac{1}{2}}$. Первое из этих утверждений вытекает из теоремы Фубини, а второе — из цепочки равенств

$$\left\| K^{\#} x \right\|^2_{\frac{1}{2}} = \int_\Omega \left\{ \int_\Omega K(t, \sigma) \left[ \int_\Omega K(s, \sigma)\, x(s)\, ds \right] x(t)\, dt \right\} d\sigma =$$
$$= \int_\Omega \left\{ \int_\Omega \left[ \int_\Omega K(t, \sigma) K(s, \sigma)\, d\sigma \right] x(s)\, ds \right\} x(t)\, dt = (K_2 x, x).$$

Теоремы 9.5 и 9.6 доказаны.

Теоремы 9.5 и 9.6 можно применить к исследованию $L$-характеристик оператора $K$. Если ядро $K(t, s)$ при этом симметрично, то из этих теорем вытекает принадлежность $L$-характеристикам целых отрезков (см. п. 9.3).

**9.8. Замечание о теореме Мерсера.** Теорема 9.7. *Пусть ограниченное ядро $K(t, s)$ симметрично и положительно определено. Пусть*

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{9.52}$$

*вполне непрерывен как оператор из $L_1$ в $L_0$.*

*Тогда билинейное разложение ядра*

$$K(t, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(t)\, e_k(s) \tag{9.53}$$

*(где $\lambda_k$, $e_k$ — собственные значения и собственные функции ядра $K(t, s)$) является разложением в абсолютно и равномерно (с точностью до множеств меры нуль) сходящийся ряд.*

Доказательство. Из теоремы 9.3 вытекает, что нормы интегральных операторов

$$F_n x(t) = \int_\Omega \left\{K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)\, e_k(s)\right\} x(s)\, ds$$

(как операторов из $L_1$ в $L_0$) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Но

$$\|F_n\|_{1 \to 0} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega} \left\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} \left| K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)\, e_k(s) \right| \right\},$$

и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega} \left\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in \Omega} \left| K(t, s) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(t)\, e_k(s) \right| \right\} = 0.$$

Теорема доказана *).

---

*) Эта теорема содержит известную теорему Мерсера (см., например, И. Г. Петровский [1]). Здесь приведено новое доказательство (П. П. Забрейко, М. А. Красносельский и Е. И. Пустыльник [3]). Другая функционально-аналитическая схема доказательства аналогичных утверждений указана М. Г. Крейном [1], в связи с чем нм была развита теория банаховых пространств с двумя нормами.

Предположение о том, что оператор (9.52) вполне непрерывен как оператор из $L_1$ в $L_0$, выполняется, например, в том случае, когда множество $\Omega$ ограничено и замкнуто, а ядро $K(t, s)$ непрерывно. Более общие условия дает теорема 6.4.

## § 10. Дробные степени ограниченного оператора *)

**10.1. Спектральная функция.** Напомним некоторые понятия, связанные с самосопряженными операторами, действующими в гильбертовом пространстве $H$. Все определения и утверждения этого пункта относятся и к случаю вещественного и к случаю комплексного пространства $H$.

Пусть $A$ и $B$ — два самосопряженных оператора. В дальнейшем будем писать $A < B$, если

$$(Ax, x) \leqslant (Bx, x) \quad (x \in H).$$

Легко видеть, что операторы $P_1$ и $P_2$ ортогонального проектирования на подпространства $H_1, H_2 \subset H$ удовлетворяют неравенству $P_1 < P_2$ в том и только том случае, когда $H_1 \subset H_2$. В этом случае оператор $P_3 = P_2 - P_1$ является оператором ортогонального проектирования на подпространство $H_3$, являющееся ортогональным дополнением в $H_2$ к $H_1$ $(H_3 = H_2 \ominus H_1)$.

Оператор-функция $P_\lambda$ вещественной переменной $\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ называется *спектральной функцией*, если она обладает следующими свойствами:

1°. Значения $P_\lambda$ этой функции — это операторы ортогонального проектирования.

2°. $P_{\lambda_1} < P_{\lambda_2}$, если $\lambda_1 < \lambda_2$.

3°. Для каждого элемента $x \in H$ справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \|P_\lambda x\| = 0$$

и

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|P_\lambda x - x\| = 0.$$

Эти равенства позволяют считать, что $P_{-\infty} = 0$, $P_\infty = I$ (здесь $I$ — единичный оператор).

---

*) Теорию самосопряженных операторов см. в книгах Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [1], М. А. Наймарка [1]. Приведенные в параграфе теоремы о дробных степенях в более слабой форме были установлены М. А. Красносельским [5, 7] другим методом. Точные результаты были получены М. А. Красносельским и Е. И. Пустыльником [1].

4°. Функция $P_\lambda x$ при каждом фиксированном $x \in H$ непрерывна справа:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \|P_{\lambda+\varepsilon} x - P_\lambda x\| = 0.$$

Обозначим через $H_\lambda$ подпространства, на которые проектируют операторы $P_\lambda$, образующие спектральную функцию. Легко видеть, что *семейство подпространств* $H_\lambda$ *обладает следующими свойствами*: $H_{\lambda_1} \subset H_{\lambda_2}$ *при* $\lambda_1 < \lambda_2$, *пересечение всех* $H_\lambda$ *состоит из одного нулевого элемента, объединение всех* $H_\lambda$ *плотно в* $H$ *и, наконец,* $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} H_{\lambda_0+\varepsilon} = H_{\lambda_0}$ *при каждом фиксированном* $\lambda_0$.

Верно и обратное утверждение — *если некоторое семейство подпространств* $H_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *обладает перечисленными свойствами, то операторы* $P_\lambda$ *ортогонального проектирования на эти подпространства образуют спектральную функцию.*

Приведем два примера спектральных функций.

Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — некоторая полная ортонормированная система элементов из $H$, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — неубывающая последовательность чисел. Обозначим через $H_\lambda$ конечномерные подпространства, являющиеся линейной оболочкой всех таких $e_i$, что $\lambda_i \leqslant \lambda$. Оператор $P_\lambda$ ортогонального проектирования на $H_\lambda$ определится, очевидно, равенством

$$P_\lambda x = \sum_{\lambda_i \leqslant \lambda} (x, e_i) e_i. \tag{10.1}$$

Операторы (10.1) образуют спектральную функцию.

В качестве второго примера рассмотрим пространство $L_{\frac{1}{2}}$ функций, суммируемых с квадратом на отрезке $[a, b]$. Положим $P_\lambda = 0$ при $-\infty < \lambda \leqslant a$, $P_\lambda x(t) = x(t)\varkappa(t; \lambda)$ при $a < \lambda \leqslant b$, где $\varkappa(t; \lambda)$ — характеристическая функция отрезка $[a, \lambda]$ и, наконец, $P_\lambda x(t) \equiv x(t)$ при $\lambda \geqslant b$. Определенная таким образом оператор-функция $P_\lambda$ будет спектральной.

Пусть $P_\lambda$ — некоторая спектральная функция. Пусть $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2]$. Как уже отмечалось, оператор $P_\Delta = P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1}$ является оператором ортогонального проектирования на некоторое подпространство $H_\Delta$. Допустим, что числовая ось разбита на отрезки $\Delta_1 = (-\infty, \lambda_1]$, $\Delta_2 = (\lambda_1, \lambda_2]$, $\ldots$, $\Delta_n = (\lambda_{n-1}, \infty)$. Тогда подпространства $H_{\Delta_1}, H_{\Delta_2}, \ldots$ будут ортогональны друг другу и их ортогональная сумма будет совпадать со всем пространством:

$$H = H_{\Delta_1} \oplus H_{\Delta_2} \oplus \ldots \oplus H_{\Delta_n}.$$

В соответствии с этим имеет место формула

$$I = P_{\Delta_1} + P_{\Delta_2} + \dots + P_{\Delta_n} \tag{10.2}$$

разложения единичного оператора. При этом $P_{\Delta_i} P_{\Delta_j} = 0$ при $i \neq j$.

**10.2. Дробные степени ограниченного самосопряженного оператора.** Пусть $A$ – ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H$. Оказывается, что он однозначно определяет спектральную функцию $P_\lambda$, обладающую следующими двумя свойствами. Во-первых, каждое подпространство $H_\Delta$ является инвариантным подпространством оператора $A$. Во-вторых, на каждом подпространстве $H_\Delta$, где $\Delta = (\lambda - \varepsilon,\ \lambda + \varepsilon]$, оператор $A$ является «почти» оператором растяжения в $\lambda$ раз:

$$\|Ax - \lambda x\| \leqslant \varepsilon \|x\| \quad (x \in H_\Delta).$$

Из указанных свойств вытекает, как это легко показать, что $P_\lambda = 0$ при $\lambda < -\|A\|$ и что $P_\lambda = I$ при $\lambda \geqslant \|A\|$. В соответствии со вторым свойством оператор $A$ можно с любой точностью (по норме операторов) аппроксимировать суммой вида $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_{\Delta_i}$, где $\lambda_0 P_{\Delta_0} = -\|A\| P_{-\|A\|}$, а $\lambda_i$ — некоторые точки промежутков $\Delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), на которые разбит промежуток $(-\|A\|, \|A\|]$. Предел этих сумм можно записать в виде интеграла Стилтьеса по спектральной функции; этот предел совпадает с оператором $A$.

Таким образом, мы пришли к фундаментальной формуле *)

$$A = \int_{-\|A\|-0}^{\|A\|} \lambda \, dP_\lambda. \tag{10.3}$$

---

*) Здесь

$$\int_{\alpha-0}^{\beta} \lambda \, dP_\lambda = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta} \lambda \, dP_\lambda.$$

В дальнейшем в обозначениях нижнего предела мы часто будем писать $\alpha$ вместо $\alpha - 0$.

В случае, когда $A$ вполне непрерывен, формула (10.3) приобретает простой вид

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i, \tag{10.4}$$

где $e_i$ — собственные элементы, а $\lambda_i$ — соответствующие им собственные значения оператора $A$ (см. формулу (9.24)).

Для положительно определенных самосопряженных операторов спектральная функция $P_\lambda$ равна нулю при $\lambda < 0$. Для таких операторов формула (10.3) имеет вид

$$A = \int_0^{\|A\|} \lambda \, dP_\lambda; \tag{10.5}$$

в формуле (10.4) все собственные значения неотрицательны.

Дробные степени $A^\tau$ $(0 < \tau < \infty)$ положительно определенного ограниченного самосопряженного оператора $A$ определяются формулой

$$A^\tau = \int_0^{\|A\|} \lambda^\tau \, dP_\lambda. \tag{10.6}$$

Интеграл в правой части понимается в обычном смысле как предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\tau P_{\Delta_i}$. Дробные степени $A^\tau$ являются ограниченными операторами. Легко видеть, что $\|A^\tau\| = \|A\|^\tau$ $(0 < \tau < \infty)$. Удобно считать, что $A^0$ совпадает с единичным оператором $I$.

Операторы $A^\tau$ образуют полугруппу в том смысле, что

$$A^\tau A^\sigma = A^\sigma A^\tau = A^{\tau+\sigma} \quad (\tau, \sigma \geqslant 0). \tag{10.7}$$

Если $\tau_0 > 0$, то очевидно равенство

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|A^\tau - A^{\tau_0}\| = 0. \tag{10.8}$$

При $\tau_0 = 0$ формула (10.8), вообще говоря, неверна. В этом случае справедливо более слабое утверждение: при каждом фиксированном $x \in H$

$$\lim_{\tau \to 0} \|A^\tau x - Qx\| = 0, \tag{10.9}$$

где $Q$ — оператор ортогонального проектирования на замыкание множества значений оператора $A$.

**10.3. Основная теорема.** Дальнейшие построения будут относиться к линейным операторам $A$, которые, с одной стороны, действуют в пространстве $L_{\frac{1}{2}}$ и, с другой стороны, являются непрерывными операторами, действующими из некоторых пространств $L_\alpha\left(\alpha \geqslant \frac{1}{2}\right)$ в пространства $L_\beta$ с индексами $\beta < \frac{1}{2}$. Такие операторы мы выше называли сужающими. Будет показано, что дробные степени $A^\tau$ сужающих операторов также являются сужающими операторами. Будут указаны формулы, которые позволяют по $L$-характеристикам оператора $A$ находить части соответствующих $L$-характеристик операторов $A^\tau$.

Предположим, что оператор $A$ действует в пространстве $L_{\frac{1}{2}}$. Тогда он определен на плотном множестве $D$ в каждом пространстве $L_\alpha$, где $\alpha > \frac{1}{2}$. Может оказаться, что $A$ допускает продолжение по непрерывности на все $L_\alpha$, если его рассматривать как оператор, действующий из $L_\alpha$ в некоторое $L_\beta$. За продолженным таким образом оператором мы обычно будем сохранять то же обозначение $A$. Для того чтобы это обозначение было оправдано, нужно, чтобы, с одной стороны, значения продолженного оператора не зависели от выбора пространства $L_\beta$ и, с другой стороны, чтобы значения оператора, продолженного на различные пространства $L_{\alpha_1}$ и $L_{\alpha_2}$, совпадали на более узком из них. Предоставляем читателю провести соответствующие рассуждения.

После того как введено понятие естественного продолжения оператора $A$, заданного сначала лишь на пространстве $L_{\frac{1}{2}}$, можно говорить о его $L$-характеристиках. Если $A$ самосопряжен в $L_{\frac{1}{2}}$, то его $L$-характеристики будут симметричны (рис. 10.1) относительно прямой $\alpha+\beta=1$. При этом, если $\{\alpha, \beta\} \in L(A,\ \textit{непр.})$, то

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay) \quad (x \in L_\alpha,\ y \in L_{1-\beta}).$$

В предыдущем пункте были определены дробные степени $A^\tau$ положительно определенного самосопряженного оператора $A$. Тем же символом $A^\tau$ мы будем обозначать их продолжения по непрерывности.

В этом пункте мы будем рассматривать операторы в комплексных пространствах $L_\alpha$.

Теорема 10.1. *Пусть положительно определенный и непрерывный в $L_{\frac{1}{2}}$ самосопряженный оператор $A$ является одновременно непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$, и пусть*

$$\|A\|_{\frac{1}{2} \to \beta} \leqslant a. \tag{10.10}$$

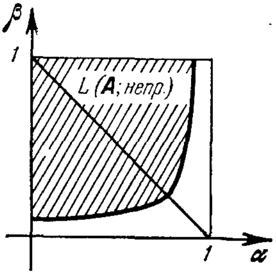


Рис. 10.1.

*Тогда оператор $A^\tau$ при каждом $\tau \in [0, 1]$ является непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\beta(\tau) = \frac{1}{2} + \tau\left(\beta - \frac{1}{2}\right); \tag{10.11}$$

*при этом*

$$\|A^\tau\|_{\frac{1}{2} \to \beta(\tau)} \leqslant a^\tau. \tag{10.12}$$

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы уже доказано для двух значений $\tau_1$, $\tau_2 \in [0, 1]$. Покажем, что отсюда вытекает его справедливость для значений $\tau_3 = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$. Оператор $A^{\tau_1}$, по предположению, действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau_1)}$ и норма его не превосходит $a^{\tau_1}$. В силу самосопряженности он действует из $L_{1-\beta(\tau_1)}$ в $L_{\frac{1}{2}}$ и норма его также не превосходит $a^{\tau_1}$. Аналогично оператор $A^{\tau_2}$ действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau_2)}$ и из $L_{1-\beta(\tau_2)}$ в $L_{\frac{1}{2}}$, причем норма его в обоих случаях не превосходит $a^{\tau_2}$. Это значит, что оператор $A^{2\tau_3} = A^{\tau_1+\tau_2}$ действует одновременно из $L_{1-\beta(\tau_1)}$ в $L_{\beta(\tau_2)}$ и из $L_{1-\beta(\tau_2)}$ в $L_{\beta(\tau_1)}$; при этом норма его не превосходит $a^{\tau_1+\tau_2}$. Применяя интерполяционную теорему 2.4, получим, что $A^{2\tau_3}$ действует из $L_{1-\beta(\tau_3)}$ в $L_{\beta(\tau_3)}$ и $\| A^{2\tau_3} \|_{1-\beta(\tau_3)\to\beta(\tau_3)} \leqslant$ $\leqslant a^{2\tau_3}$. Утверждение теоремы для оператора $A^{\tau_3}$ получается теперь непосредственным применением теоремы 9.1 о расщеплении оператора.

Полученный результат позволяет методом индукции доказать теорему для всех чисел $\tau$ вида

$$\tau = \frac{k}{2^n} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^n;\ n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{10.13}$$

Действительно, при $n = 0$ (т. е. для случаев $\tau = 0$ и $\tau = 1$) утверждение теоремы очевидно. Если же это утверждение верно для всех чисел (10.13) при $n = n_0$, то, полагая

$$\tau_1 = \frac{k}{2^n}, \quad \tau_2 = \frac{k+1}{2^n} \quad \left(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2^{n_0} - 1\right),$$

мы получим его справедливость для чисел

$$\tau_3 = \frac{2k+1}{2^{n_0+1}},$$

что и даст нам все числа (10.13) при $n = n_0 + 1$.

Пусть теперь $\tau$ — произвольное число из интервала (0, 1). Обозначим через $\tau_i$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots$) последовательность таких двоичных дробей вида (10.13), что

$$\tau - \frac{1}{i} < \tau_i < \tau \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Уже доказано, что для каждой фиксированной функции $x \in L_{\frac{1}{2}}$ при любом $i = 1,\ 2,\ \ldots$ справедливо неравенство

$$\| A^{\tau} x \|_{\beta(\tau_i)} = \| A^{\tau_i} A^{\tau-\tau_i} x \|_{\beta(\tau_i)} \leqslant a^{\tau_i} \| A^{\tau-\tau_i} x \|_{\frac{1}{2}}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получим

$$\| A^{\tau} x \|_{\beta(\tau)} \leqslant a^{\tau} \| x \|_{\frac{1}{2}}. \tag{10.14}$$

Теорема доказана.

**10.4. Операторы в вещественных пространствах.** Теорема 10.1 полностью сохраняет силу в случае вещественных пространств $L_\alpha$. При этом доказательство ее не меняется — это объясняется тем, что используемое при доказательстве неравенство (2.17) из интерполяционной теоремы 2.4 остается справедливым и для вещественных пространств $L_\alpha$, если числа $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\beta_0$, $\beta_1$ удовлетворяют дополнительным неравенствам

$$\alpha_0 \geqslant \beta_0, \quad \alpha_1 \geqslant \beta_1. \tag{10.15}$$

Для доказательства*) последнего утверждения достаточно показать (см. доказательство теоремы 2.4; до конца пункта будут применяться обозначения из п. 2.3), что из неравенств (2.14) и (2.15) вытекает неравенство

$$|(Ax, y)| \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \|x\|_{\alpha(\tau)} \|y\|_{1-\beta(\tau)} \tag{10.16}$$

для произвольной пары функций $x(s) \in L_{\alpha(\tau)}$ и $y(t) \in L_{1-\beta(\tau)}$.

Предположим сначала, что оператор $A$ конечномерный. Рассмотрим функцию

$$M(\tau) = \sup |(Ax, y)|, \tag{10.17}$$

где supremum берется по всем функциям $x(s)$ и $y(t)$, удовлетворяющим условиям $\|x\|_{\alpha(\tau)} \leqslant 1$, $\|y\|_{1-\beta(\tau)} \leqslant 1$.

Неравенство (10.16) равносильно неравенству

$$M(\tau) \leqslant M^{1-\tau}(0) M^{\tau}(1) \quad (0 < \tau < 1).$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что функция $M(\tau)$ логарифмически выпукла. Так как $M(\tau)$ непрерывна, то для этого в свою очередь достаточно показать, что в любом промежутке $(\tau_0, \tau_1) \subset (0, 1)$ найдется такое число $\tau = (1-\lambda)\tau_0 + \lambda\tau_1$, что выполняется неравенство

$$M(\tau) \leqslant M(\tau_0)^{1-\lambda} M(\tau_1)^{\lambda}. \tag{10.18}$$

Это последнее утверждение мы и будем доказывать.

Пусть заданы два произвольных фиксированных числа $\tau_0$, $\tau_1$ из промежутка $(0, 1)$. В силу неравенств $\alpha_0 \geqslant \beta_0$, $\alpha_1 \geqslant \beta_1$

*) Здесь мы следуем М. Риссу [1].

выполняются неравенства $\alpha(\tau_0) \geqslant \beta(\tau_0)$ и $\alpha(\tau_1) \geqslant \beta(\tau_1)$. Поэтому найдется число $\lambda \in (0, 1)$, для которого

$$\frac{\beta(\tau_1)}{1-\beta(\tau_0)} \leqslant \frac{1-\lambda}{\lambda} \leqslant \frac{\alpha(\tau_1)}{1-\alpha(\tau_0)}. \tag{10.19}$$

Положим

$$\tau = (1-\lambda)\tau_0 + \lambda\tau_1;$$

докажем, что при этом $\tau$ выполняется неравенство (10.18).

В силу конечномерности оператора $A$ существуют две функции $x_0$ и $y_0$, удовлетворяющие условиям $\|x_0\|_{\alpha(\tau)} = \|y_0\|_{1-\beta(\tau)} = 1$ и такие, что

$$M(\tau) = (Ax_0, y_0).$$

При этом

$$M(\tau) = \|Ax_0\|_{\beta(\tau)} = \|A^*y_0\|_{1-\alpha(\tau)},$$

где $A^*$ — оператор, сопряженный оператору $A$. Последние равенства могут выполняться только в том случае, когда *)

$$|Ax_0(t)| = M(\tau)\,|y_0(t)|^{\frac{\beta(\tau)}{1-\beta(\tau)}}, \quad |A^*y_0(s)| = M(\tau)\,|x_0(s)|^{\frac{1-\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)}}. \tag{10.20}$$

Введем для краткости обозначения

$$\mu(\tau) = \frac{1-\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)}, \quad \nu(\tau) = \frac{1-\beta(\tau)}{\beta(\tau)}, \quad \delta = \frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\alpha(\tau_1) = [1 - \delta\mu(\tau)]\,\alpha(\tau) + \delta\mu(\tau)\,\frac{1-\alpha(\tau_0)}{\mu(\tau)},$$

$$1-\beta(\tau_0) = \left[1 - \frac{1}{\delta\nu(\tau)}\right][1-\beta(\tau)] + \frac{1}{\delta\nu(\tau)}\,\beta(\tau_1)\,\nu(\tau).$$

Кроме того (в силу (10.19)),

$$0 \leqslant \delta\mu(\tau) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \frac{1}{\delta\nu(\tau)} \leqslant 1.$$

*) См. Г. Харди, Д. Литтльвуд, Г. Полиа [1].

Поэтому (в силу (1.6))

$$\| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)} \leqslant \left(\| x_0 \|_{\alpha(\tau)}\right)^{1-\delta\mu(\tau)} \left(\| x_0 \|_{\frac{1-\alpha(\tau_0)}{\mu(\tau)}}\right)^{\delta\mu(\tau)} =$$

$$= \left(\| x_0 \|_{\frac{1-\alpha(\tau_0)}{\mu(\tau)}}\right)^{\delta\mu(\tau)}, \qquad (10.21)$$

$$\| y_0 \|_{1-\beta(\tau_0)} \leqslant \left(\| y_0 \|_{1-\beta(\tau)}\right)^{1-\frac{1}{\delta\nu(\tau)}} \left(\| y_0 \|_{\nu(\tau)\beta(\tau_1)}\right)^{\frac{1}{\delta\nu(\tau)}} =$$

$$= \left(\| y_0 \|_{\nu(\tau)\beta(\tau_1)}\right)^{\frac{1}{\delta\nu(\tau)}}. \qquad (10.22)$$

Из равенств (10.20) вытекает, что

$$M(\tau) \left(\| x_0 \|_{\frac{1-\alpha(\tau_0)}{\mu(\tau)}}\right)^{\mu(\tau)} = \| A^* y_0 \|_{1-\alpha(\tau_0)} \leqslant M(\tau_0) \| y_0 \|_{1-\beta(\tau_0)}, \qquad (10.23)$$

$$M(\tau) \left(\| y_0 \|_{\nu(\tau)\beta(\tau_1)}\right)^{\frac{1}{\nu(\tau)}} = \| A x_0 \|_{\beta(\tau_1)} \leqslant M(\tau_1) \| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)}. \qquad (10.24)$$

Объединяя неравенства (10.21) и (10.22) с неравенствами (10.23) и (10.24), получим, что

$$\left(\| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)}\right)^{\frac{1}{\delta}} \leqslant \frac{M(\tau_0)}{M(\tau)} \| y_0 \|_{1-\beta(\tau_0)},$$

$$\left(\| y_0 \|_{1-\beta(\tau_0)}\right)^{\delta} \leqslant \frac{M(\tau_1)}{M(\tau)} \| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)},$$

откуда

$$\| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)} \leqslant \left[\frac{M(\tau_0)}{M(\tau)}\right]^{\delta} \frac{M(\tau_1)}{M(\tau)} \| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)}.$$

Сокращая на $\| x_0 \|_{\alpha(\tau_1)}$, придем к неравенству (10.18), что и требовалось.

Пусть теперь $P_n$ — произвольная последовательность конечномерных проектирующих операторов, сильно сходящаяся в каждом $L_\beta$ $(\beta > 0)$ к единичному оператору и такая, что $\| P_n \| = 1$ *). Оператор $P_n A$ при каждом $n$ конечномерен; поэтому справедливо равенство

$$|(P_n A x, y)| \leqslant M_0^{1-\tau} M_1^{\tau} \| x \|_{\alpha(\tau)} \| y \|_{1-\beta(\tau)} .$$

*) Такие последовательности операторов конструировались в п. 1.5.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (10.16) для произвольного оператора $A$.

**10.5. Дробные степени вполне непрерывного оператора.** Если самосопряженный положительно определенный в $L_{\frac{1}{2}}$ оператор $A$ вполне непрерывен в $L_{\frac{1}{2}}$, то и все его дробные степени $A^\tau$ ($\tau > 0$) вполне непрерывны в $L_{\frac{1}{2}}$. Более того, из представления (10.4) для оператора $A$ вытекает, что оператор $A^\tau$ представим рядом

$$A^\tau x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\tau (x, e_i) e_i, \tag{10.25}$$

который равномерно сходится в $L_{\frac{1}{2}}$ на шаре $\|x\|_{\frac{1}{2}} \leqslant 1$.

Теорема 10.2. *Пусть самосопряженный и положительно определенный в $L_{\frac{1}{2}}$ оператор $A$ является одновременно вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$.*

*Тогда оператор $A^\tau$ при каждом $\tau \in (0, 1)$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где $\beta(\tau)$ определяется формулой* (10.11).

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i) e_i, \quad A - A_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i.$$

Тогда $A^\tau = A_n^\tau + (A - A_n)^\tau$, так как

$$A_n^\tau x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\tau (x, e_i) e_i, \quad (A - A_n)^\tau x = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^\tau (x, e_i) e_i$$

$$\left(x \in L_{\frac{1}{2}}\right).$$

В силу теоремы 9.3 ряд (10.4) сходится к оператору $A$ по норме операторов, действующих из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_\beta$, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_\varepsilon$, что при всех $n \geqslant n_\varepsilon$

$$\|(A - A_n)x\|_\beta \leqslant \varepsilon \|x\|_{\frac{1}{2}}.$$

Применим к операторам $A - A_n$ $(n \geqslant n_\varepsilon)$ теорему 10.1. Это даст нам неравенство

$$\|(A^\tau - A_n^\tau)x\|_{\beta(\tau)} = \|(A - A_n)^\tau x\|_{\beta(\tau)} \leqslant \varepsilon^\tau \|x\|_{\frac{1}{2}},$$

откуда следует, что операторы $A_n^\tau$ сходятся к $A^\tau$ по норме операторов, действующих из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$. Операторы $A_n^\tau$ при каждом $n$ конечномерны; следовательно, оператор $A^\tau$ вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Одновременно доказано, что ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\tau (x, e_i) e_i$$

сходится к $A^\tau$ по норме операторов, действующих из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$.

**10.6. $L$-характеристика дробной степени оператора.** Теоремы 10.1 и 10.2 позволяют по $L$-характеристикам $L(A;\ \textit{непр.})$ и $L(A;\ \textit{вп. непр.})$ выделять части $L$-характеристик операторов $A^\tau$. При этом одни и те же построения могут быть применены для выделения части $L$-характеристики $L(A^\tau; \textit{непр.})$ по $L$-характеристике $L(A;\ \textit{непр.})$ и части $L$-характеристики $L(A^\tau;\ \textit{вп. непр.})$ по $L$-характеристике $L(A;\ \textit{вп. непр.})$. Мы ограничимся поэтому рассмотрением $L$-характеристик $L(A;\ \textit{непр.})$ и $L(A^\tau;\ \textit{непр.})$.

Непосредственное применение теоремы 10.1 позволяет использовать точку $\left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\}$ из $L(A;\ \textit{непр.})$, если $\beta_0 < \frac{1}{2}$ (точка $M$ на рис. 10.2). Для этого нужно сначала найти ту точку (точка $M_\tau$ на рис. 10.2), которая делит в отношении $\tau$ отрезок, соединяющий две точки $M = \left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\}$

и $M_0=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, а затем воспользоваться симметричностью и выпуклостью $L$-характеристики $L\left(A^\tau;\ \textit{непр.}\right)$ (на рис. 10.2 соответствующая часть $L\left(A^\tau;\ \textit{непр.}\right)$ заштрихована).

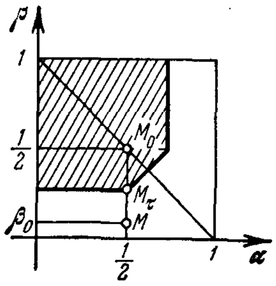

Рис. 10.2.

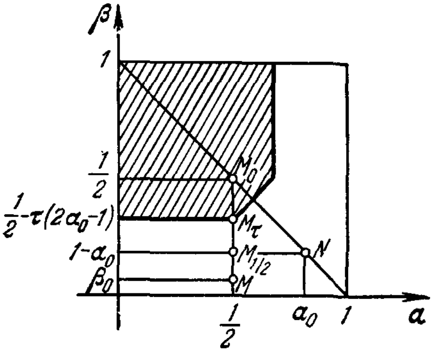

Рис. 10.3.

Предположим теперь, что нам известны две точки $M=\left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\}$ и $N=\{\alpha_0, 1-\alpha_0\}$, принадлежащие $L$-характеристике $L(A;\ \textit{непр.})$. Будем считать, что $\alpha_0+\beta_0 \leqslant 1$, $\alpha_0 \geqslant \frac{3}{4}-\frac{\beta_0}{2}$ (рис. 10.3). Через $M_{\frac{1}{2}}$ обозначим точку $\left\{\frac{1}{2}, 1-\alpha_0\right\}$; в силу теоремы 9.1 эта точка принадлежит $L\left(A^{\frac{1}{2}};\ \textit{непр.}\right)$.

Предположим, что $0<\tau<\frac{1}{2}$. Так как $A^\tau=\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{2\tau}$, то из теоремы 10.1 вытекает, что $L$-характеристика $L\left(A^\tau;\ \textit{непр.}\right)$ содержит точку $M_\tau$, которая делит в отношении $2\tau$ отрезок, соединяющий точку $M_{\frac{1}{2}}$ с точкой $M_0=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Отсюда вытекает, что $L\left(A^\tau;\ \textit{непр.}\right)$ содержит заштрихованное на рис. 10.3 множество.

Перейдем к случаю, когда $\tau=\frac{1}{2}+\sigma$, где $0<\sigma<\frac{1}{2}$. При построении точек $L$-характеристики $L\left(A^\tau;\ \textit{непр.}\right)$ в этом случае удобно воспользоваться следующим вспомогательным утверждением, которое представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 10.3. *Пусть* $\left\{\frac{1}{2};\ \beta_0\right\} \in L(A^{\tau_0};\ непр.)$ *и* $\left\{\frac{1}{2};\ \beta_1\right\} \in L(A^{\tau_1};\ непр.)$. *Положим*

$$\beta_\lambda = (1-\lambda)\beta_0 + \lambda\beta_1; \quad \tau_\lambda = (1-\lambda)\tau_0 + \lambda\tau_1.$$

*Тогда при любом* $\lambda \in (0,\ 1)$ *точка* $\left\{\frac{1}{2},\ \beta_\lambda\right\}$ *принадлежит* $L\ (A^\tau;\ непр.)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 10.1. Детали предоставляем читателю.

Вернемся теперь к построению точек $L$-характеристики $L(A^\tau;\ непр.)$. Из теоремы 10.3 вытекает, что $L$-характеристика $L\left(A^{\frac{1}{2}+\sigma};\ непр.\right)$ содержит точку $M_\tau$, делящую в отношении $2\sigma$ отрезок, который соединяет точки $M_{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2},\ 1-\alpha_0\right\}$, $M = \left\{\frac{1}{2},\ \beta_0\right\}$ (рис. 10.4).

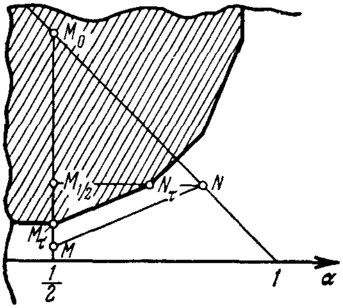


Рис. 10.4.

Оператор $A^\sigma$ действует из $L_{\frac{1}{2}+\sigma(2\alpha_0-1)}$ в $L_{\frac{1}{2}}$, а оператор $A^{\frac{1}{2}}$ действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{1-\alpha_0}$. Поэтому оператор $A^{\frac{1}{2}+\sigma} = A^{\frac{1}{2}}A^\sigma$ действует и непрерывен из $L_{\frac{1}{2}+\sigma(2\alpha_0-1)}$ в $L_{1-\alpha_0}$. Это значит, что точка $N_\tau = \left\{\frac{1}{2} + \sigma(2\alpha_0 - 1),\ 1-\alpha_0\right\}$, которая делит в отношении $2\sigma$ отрезок $M_{\frac{1}{2}}N$, принадлежит $L$-характеристике $L\ (A^\tau;\ непр.)$.

Таким образом, для случая $\tau \in \left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ мы построили две точки, $M_\tau$ и $N_\tau$, принадлежащие $L\ (A^\tau;\ непр.)$. Следовательно, $L$-характеристика $L\left(A^{\tau};\ \textit{непр.}\right)$ содержит многоугольник, заштрихованный на рис. 10.4.

Нам неизвестно, можно ли в общем случае получить какую-либо дополнительную информацию об $L$-характеристиках оператора $A^{\tau}$ по точкам $L$-характеристик оператора $A$, не лежащим на прямых $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ и $\alpha+\beta=1$. Для специальных классов операторов ниже будут получены более полные утверждения.

**10.7. Дробные степени интегральных операторов.** Пусть $K$ — интегральный оператор с симметричным положительно определенным ядром:

$$Kx(t)=\int_{\Omega}K(t,\ s)\,x(s)\,ds. \tag{10.26}$$

Пусть $K$ непрерывен (или вполне непрерывен) как оператор в $L_{\frac{1}{2}}$. В этом случае к нему применимы теоремы 10.1 и 10.2, что позволяет изучать дробные степени $K^{\tau}$ оператора $K$. Эти дробные степени, однако, сами могут не быть интегральными операторами.

Теоремы 10.1 и 10.2 могут быть также использованы для получения признаков непрерывности и полной непрерывности интегрального оператора (10.26), если известны свойства интегрального оператора с итерированным ядром.

Рассмотрим итерацию

$$K_r(t,\ s)=\int_{\Omega}\ldots\int_{\Omega}K(t,\ s_1)\ldots K(s_{r-1},\ s)\,ds_1\ldots ds_{r-1} \tag{10.27}$$

ядра $K(t,\ s)$ и соответствующий интегральный оператор

$$K_rx(t)=\int_{\Omega}K_r(t,\ s)\,x(s)\,ds. \tag{10.28}$$

Если оператор $K$ регулярен в $L_{\frac{1}{2}}$, то $K_r$ ограничен в $L_{\frac{1}{2}}$ и $K_r=K^r$ (см. п. 4.6). Следовательно, $K=(K_r)^{\frac{1}{r}}$.

Из теорем 10.1 и 10.2 вытекает

Теорема 10.4. *Пусть оператор* (10.28) *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_\beta$ $\left(\beta < \frac{1}{2}\right)$, *а оператор* (10.26) *регулярен в* $L_{\frac{1}{2}}$.

*Тогда оператор* (10.26) *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{\beta(r)}$, *где*

$$\beta(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\left(\beta - \frac{1}{2}\right), \tag{10.29}$$

*причем*

$$\|K\|_{\frac{1}{2}\to\beta(r)} \leqslant \|K_r\|^{\frac{1}{r}}_{\frac{1}{2}\to\beta}. \tag{10.30}$$

*Если при этом оператор* $K_r$ *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_\beta$ *и вполне непрерывен, то оператор* $K$ *действует из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{\beta(r)}$ *и также вполне непрерывен.*

## § 11. Неограниченные самосопряженные операторы *)

**11.1. Замкнутые операторы.** Рассмотрим действующий в гильбертовом пространстве $H$ линейный оператор $A$, определенный на множестве $D(A) \subset H$.

Оператор $A$ называется *замкнутым*, если для каждой фундаментальной последовательности $x_n \in D(A)$ ($\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$) из сходимости последовательности $Ax_n$ к некоторому пределу $y_0$ вытекает, что предел $x_0$ последовательности $x_n$ принадлежит $D(A)$ и что $Ax_0 = y_0$.

Нетрудно видеть, что каждый ограниченный линейный оператор замкнут. Имеет место и обратное утверждение: *определенный на замкнутом подпространстве гильбертова пространства оператор ограничен, если он замкнут.*

Обозначим через $\tilde{H}$ гильбертово пространство, элементами которого являются упорядоченные пары $\{x, y\}$, где $x, y \in H$. Линейные операции в $\tilde{H}$ задаются естественным равенством

$$\alpha\{x, y\} + \beta\{x_1, y_1\} = \{\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1\},$$

а скалярное произведение — равенством

$$(\{x, y\}, \{x_1, y_1\}) = (x, x_1) + (y, y_1).$$

*) См., например, Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1], М. А. Наймарк [1], В. И. Смирнов [1].

Иначе говоря, $\tilde{H}$ — это ортогональная сумма двух экземпляров пространства $H$.

Графиком $\Gamma$ оператора $A$ называют совокупность элементов вида $\{x, Ax\}$ пространства $\tilde{H}$, где $x$ пробегает все $D(A)$. График $\Gamma$ является линейным множеством, если оператор $A$ линеен, так как линейная комбинация двух элементов $\{x_1, Ax_1\}$ и $\{x_2, Ax_2\}$, является элементом такого же вида.

Легко видеть, что *оператор $A$ замкнут тогда и только тогда, когда его график $\Gamma$ является подпространством, т. е. является замкнутым линейным множеством.*

Допустим, что замкнутый оператор $A$ имеет обратный $A^{-1}$. Оператор $A^{-1}$ будет также замкнут. Это следует из того, что график оператора $A^{-1}$ состоит из элементов вида $\{Ax, x\}$, а совокупность таких элементов замкнута, если замкнута совокупность элементов вида $\{x, Ax\}$.

Оператор $A_1$ с областью определения $D(A_1)$ называется *расширением* оператора $A$ с областью определения $D(A)$, если $D(A) \subset D(A_1)$ и $A_1x = Ax$ при $x \in D(A)$. Очевидно, *график расширения $A_1$ содержит график оператора $A$ как подмножество.*

Говорят, что оператор $A$ *допускает замыкание*, если он имеет по крайней мере одно расширение $A_1$, являющееся замкнутым оператором. График $\Gamma$ оператора $A$ является подмножеством замкнутого подпространства $\Gamma_1$ — графика оператора $A_1$. Замыкание $\bar{\Gamma}$ графика $\Gamma$ является тогда также подмножеством $\Gamma_1$. Поэтому $\bar{\Gamma}$ можно рассматривать как график некоторого оператора $\bar{A}$. Оператор $\bar{A}$ будет, очевидно, также замкнутым расширением оператора $A$. Это минимальное замкнутое расширение (из проведенных рассуждений видно, что любое замкнутое расширение оператора $A$ будет одновременно расширением оператора $\bar{A}$) называется *замыканием оператора $A$*.

Рассмотрим всевозможные последовательности $x_n \in D(A)$, сходящиеся к некоторому элементу $x_0$. Рассмотрим далее последовательности $Ax_n$; некоторые из этих последовательностей будут фундаментальными. Предоставляем читателю показать, что оператор $A$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда предел указанных выше последовательностей $Ax_n$ (для тех последовательностей, для которых этот предел существует) однозначно определяется элементом $x_0$. Область определения замыкания $\bar{A}$ оператора $A$ совпадает при этом с совокупностью тех $x_0 \in H$, для которых по крайней мере одна из указанных выше последовательностей $Ax_n$ имеет предел; этот предел $y_0$ является значением замыкания $\bar{A}$ на элементе $x_0$.

**11.2. Сопряженный оператор.** Выше неоднократно применялось понятие оператора, сопряженного к непрерывному линейному оператору. Приведем обобщение этого понятия на случай неограниченных операторов.

Пусть $A$ — линейный оператор, область определения которого плотна во всем пространстве: $\overline{D(A)} = H$.

Обозначим через $D(A^*)$ совокупность тех $y \in H$, для которых может быть указан такой элемент $y^*$, что при всех $x \in D(A)$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, y^*). \tag{11.1}$$

Элемент $y^*$ определяется по элементу $y$ однозначно, так как из (11.1) и из равенства

$$(Ax, y) = (x, y^{**}) \quad (x \in D(A))$$

вытекает, что $y^* - y^{**}$ ортогонален всюду плотному в $H$ множеству $D(A)$, в силу чего он равен нулю. Это позволяет считать $y^*$ значением некоторого оператора $A^*$, который называют оператором, *сопряженным* оператору $A$. Основное соотношение (11.1) для сопряженного оператора может быть записано в виде

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad (x \in D(A),\ y \in D(A^*)).$$

Непосредственно из определения вытекает, что область определения $D(A^*)$ сопряженного оператора является линейным множеством и что оператор $A^*$ линеен.

Пусть $\Gamma$ — график оператора $A$ в пространстве $\tilde{H}$. Из определения сопряженного оператора вытекает, что $y \in D(A^*)$ тогда и только тогда, когда найдется такое $y^*$, что элемент $\{-y^*, y\}$ ортогонален графику $\Gamma$. Иначе говоря, ортогональное дополнение в $\tilde{H}$ к $\Gamma$ совпадает с совокупностью всех элементов вида $\{-A^*y, y\}$. Значит, совокупность таких элементов замкнута. Поэтому замкнута и совокупность элементов вида $\{y, A^*y\}$, которая является графиком $\Gamma^*$ оператора $A^*$. Следовательно, *сопряженный оператор всегда замкнут*.

Предоставляем читателю показать, что $A^{**} = (A^*)^*$ совпадает с замыканием оператора $A$, если это замыкание существует.

Оператор $A$ называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным. Из определения вытекает, что самосопряженный оператор замкнут. Самосопряженный оператор обладает свойством симметричности:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (x, y \in D(A)).$$

Наконец, из справедливости равенства $(Ax, y) = (x, y^*)$ при всех $x \in D(A)$ вытекает, что $y \in D(A)$.

**11.3. Интегралы по спектральной функции.** С простейшим интегралом по спектральной функции — с интегральным представлением ограниченного самосопряженного оператора мы уже встречались в предыдущем параграфе. В дальнейшем нам понадобятся интегралы более общего вида.

Пусть $P_\lambda$ — некоторая спектральная функция (см. п. 10.1) и, как обычно, $P_\Delta = P_{\lambda_2} - P_{\lambda_1}$, где $\Delta = (\lambda_1, \lambda_0]$ Интеграл

$$J_{ab}x = \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x \tag{11.2}$$

от непрерывной функции $f(\lambda)$ определяется как предел интегральных сумм

$$Sx = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) P_{\Delta_i} x,$$

где

$$\xi_0 = a, \quad P_{\Delta_0} = \lim_{\varepsilon \to +0} (P_a - P_{a-\varepsilon}),$$

а $\xi_i$ — произвольные точки промежутков $\Delta_i = (\lambda_{i-1}, \lambda_i]$, на которые разбит промежуток $(a, b]$. Переходя к пределу в очевидном равенстве

$$\| Sx \|^2 = \sum_{i=0}^{n} | f(\xi_i) |^2 (P_{\Delta_i} x, x),$$

приходим к важной формуле

$$\left\| \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x \right\|^2 = \int_a^b | f(\lambda) |^2 \, d(P_\lambda x, x). \tag{11.3}$$

Определим интеграл по бесконечному промежутку при помощи формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x. \tag{11.4}$$

Этот интеграл будет определен, конечно, при заданной функции $f(\lambda)$ не для всех элементов $x$. Для сходимости интеграла (11.4) нужно, чтобы при $a$, $a_1 \to -\infty$ и $b$, $b_1 \to \infty$ стремились к нулю нормы интегралов

$$\int_{a_1}^{a} f(\lambda)\, dP_\lambda x, \qquad \int_{b}^{b_1} f(\lambda)\, dP_\lambda x,$$

т. е. чтобы стремились к нулю интегралы

$$\int_{a_1}^{a} | f(\lambda) |^2 \, d(P_\lambda x, x), \qquad \int_{b}^{b_1} | f(\lambda) |^2 \, d(P_\lambda x, x).$$

Иначе говоря, интеграл (11.4) определен в том и только том случае, когда выполнено условие

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2 \, d(P_\lambda x, x) < \infty. \tag{11.5}$$

Если $f(\lambda) \equiv 1$, то мы приходим к равенствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} dP_\lambda x \equiv x, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d(P_\lambda x, x) = \| x \|^2. \tag{11.6}$$

Формула

$$Bx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \tag{11.7}$$

определяет некоторый линейный оператор. Если функция $f(\lambda)$ ограничена, то в силу (11.5) и (11.6) оператор $B$ определен при всех $x \in H$. При этом

$$\| Bx \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2 d(P_\lambda x, x) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_\lambda | f(\lambda) |^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(P_\lambda x, x) = \sup | f(\lambda) |^2 \| x \|^2,$$

т. е.

$$\| B \| \leqslant \sup_\lambda | f(\lambda) |. \tag{11.8}$$

Если, наоборот, функция $| f(\lambda) |$ ограничена снизу положительным числом, то имеет место неравенство

$$\| Bx \|^2 \geqslant \inf_\lambda | f(\lambda) |^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d(P_\lambda x, x) = \inf_\lambda | f(\lambda) |^2 \cdot \| x \|^2.$$

**11.4. Основная теорема о спектральном представлении неограниченного самосопряженного оператора.** Для каждого самосопряженного оператора $A$ существует одна и только одна спектральная функция $P_\lambda$, обладающая следующими свойствами:

1°. $x \in D(A)$ *тогда и только тогда, когда сходится интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} | \lambda |^2 d(P_\lambda x, x) < \infty. \tag{11.9}$$

2°. *Имеет место равенство*

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_\lambda x, \tag{11.10}$$

*причем*

$$\| Ax \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | \lambda |^2 d(P_\lambda x, x). \tag{11.11}$$

Формула (11.10) является обобщением формулы (10.3).

Из представления (11.10) вытекает, что скалярное произведение $(Ax, y)$ при $x \in D(A)$ и любом $y \in H$ представимо в виде

$$(Ax, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(P_\lambda x, y). \tag{11.12}$$

Число $\lambda$ называется *регулярной точкой* оператора $A$, если существует определенный на всем пространстве $H$ непрерывный оператор $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$; этот оператор называют *резольвентой* оператора $A$.

Все точки, не являющиеся регулярными, образуют спектр оператора $A$. К спектру, очевидно, относятся все собственные значения оператора $A$. Отметим, что у *самосопряженных операторов все собственные значения (если они существуют) вещественны.*

Комплексные числа не принадлежат спектру самосопряженного оператора $A$. Для доказательства достаточно заметить, что

$$\|(\lambda I - A)x\| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu) \, dP_\mu x \right\| \geqslant |\operatorname{Im} \lambda| \cdot \|x\|. \tag{11.13}$$

Это значит, что оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ непрерывен на множестве значений оператора $\lambda I - A$, причем

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|}. \tag{11.14}$$

Так как $(\lambda I - A)^{-1}$ замкнут, то множество значений оператора $\lambda I - A$ замкнуто. Для завершения доказательства достаточно показать, что это множество плотно в $H$. Если элемент $y$ ортогонален этому множеству значений, т. е. $(\lambda x - Ax, y) = 0$ при всех $x \in D(A)$, то $(x, \bar{\lambda} y - Ay) = 0$. Отсюда в силу плотности $D(A)$ в $H$ вытекает равенство $Ay = \bar{\lambda} y$. Но комплексное число не может быть собственным значением самосопряженного оператора $A$. Значит, $y = 0$.

Регулярными точками самосопряженного оператора $A$ могут быть и вещественные числа. Можно показать, что регулярность вещественной точки $\lambda$ равносильна существованию интервала $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$, на котором спектральная функция $P_\lambda$ постоянна (отсюда, в частности, вытекает, что спектр — замкнутое множество). Поэтому основную формулу интегрального представления оператора $A$ можно записать в виде

$$A = \int_E \lambda \, dP_\lambda, \tag{11.15}$$

где $E$ — произвольное множество, содержащее спектр, или сам спектр.

Например, если оператор $A$ ограничен, то весь спектр оператора $A$ лежит на сегменте $[-\|A\|, \|A\|]$. Поэтому для ограниченного оператора справедлива формула

$$A = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda \, dP_\lambda, \tag{11.16}$$

которая уже была использована в предыдущем параграфе.

Оператор $A$ называется полуограниченным, если

$$(Ax, x) \geqslant m (x, x) \qquad (x \in D(A)). \tag{11.17}$$

Непосредственная проверка показывает, что спектр таких операторов расположен на промежутке $[m, \infty)$. Поэтому их спектральное представление имеет вид

$$A = \int_m^\infty \lambda \, dP_\lambda. \tag{11.18}$$

В частности, если $m = 0$, т. е. $(Ax, x) \geqslant 0$, то оператор называют *положительно определенным*, а если $(Ax, x) \geqslant a (x, x)$, где $a > 0$, то оператор $A$ называют *строго положительно определенным.*

**11.5. Функции от самосопряженных операторов.** Пусть $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции. Определим непрерывные операторы $A_1$ и $A_2$ формулами

$$A_1 = \int_a^b f_1(\lambda) \, dP_\lambda, \quad A_2 = \int_a^b f_2(\lambda) \, dP_\lambda,$$

где $P_\lambda$ — некоторая спектральная функция. Тогда

$$A_1 A_2 = \int_a^b f_1(\lambda) f_2(\lambda) \, dP_\lambda. \tag{11.19}$$

Действительно, операторы $A_1$ и $A_2$ с любой точностью можно аппроксимировать соответственно суммами

$$S_1 = \sum_{i=0}^n f_1(\lambda_i) P_{\Delta_i}, \quad S_2 = \sum_{i=0}^n f_2(\lambda_i) P_{\Delta_i},$$

где $\Delta_i$ — промежутки, на которые разбит отрезок $[a, b]$. Тогда оператор $S_1 S_2$ будет аппроксимировать оператор $A_1 A_2$. Но в силу свойств спектральной функции

$$S_1 S_2 = \sum_{i=0}^n f_1(\lambda_i) f_2(\lambda_i) P_{\Delta_i},$$

откуда и вытекает формула (11.19).

В частности, если самосопряженный оператор $A$ ограничен, то

$$A^n = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda^n \, dP_\lambda. \tag{11.20}$$

Из (11.20) вытекает, что для любого многочлена от ограниченного самосопряженного оператора $A$ имеет место представление

$$c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + c_0 I = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} \left(c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + c_0\right) dP_\lambda. \tag{11.21}$$

Пусть ряд Тейлора для аналитической функции $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \ldots$$

сходится в круге, радиус которого больше $\|A\|$. Тогда будет сходиться по норме операторов ряд

$$c_0 I + c_1 A + c_2 A^2 + \ldots$$

Сумма этого ряда будет также линейным оператором; его обозначают через $f(A)$. Совершая предельный переход в (11.21), приходим к формуле

$$f(A) = \int_{-\|A\|}^{\|A\|} f(\lambda) \, dP_\lambda. \tag{11.22}$$

Для неаналитических функций $f(\lambda)$ оператор $f(A)$ также определяется при помощи формулы (11.22).

В случае вполне непрерывных операторов $A$, представленных рядом

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, e_i) e_i$$

(где $e_i$ — ортонормированная последовательность собственных векторов, а $\lambda_i$ — собственные значения), формула (11.22) принимает вид

$$f(A)x = \sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)(x, e_i) e_i.$$

Перейдем к рассмотрению неограниченных операторов $A$. Нетрудно показать, что справедлива формула

$$A^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, dP_\lambda, \tag{11.23}$$

если

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda.$$

Область определения операторов $A^n$ в силу основной спектральной теоремы состоит из тех элементов $x \in H$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{2n} \, d(P_\lambda x, x) < \infty.$$

Отсюда вытекает, что область определения $D(A^n)$ сужается при возрастании $n$.

Произвольные непрерывные функции от неограниченных операторов определяются при помощи формулы, аналогичной (11.22):

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dP_\lambda. \tag{11.24}$$

Пусть $\sigma(A)$ — спектр оператора $A$ и пусть

$$\sup_{\sigma(A)} |f(\lambda)| = m < \infty.$$

Тогда оператор $f(A)$ ограничен и

$$\|f(A)\| = m. \tag{11.25}$$

Действительно, неравенство $\|f(A)\| \leqslant m$ вытекает из цепочки соотношений

$$\|f(A)x\| = \left\| \int_{\sigma(A)} f(\lambda) \, dP_\lambda x \right\| \leqslant m \|x\|.$$

Зафиксируем теперь произвольное $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Пусть $x \in H_\Delta$, где $\Delta = (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$. Тогда

$$\|f(A)x\|^2 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} |f(\lambda)|^2 \, d(P_\lambda x, x) \geqslant \inf_\Delta |f(\lambda)|^2 \|x\|^2,$$

откуда следует, что

$$\|f(A)\| \geqslant \inf_{\lambda_0-\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0+\varepsilon} |f(\lambda)|.$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю, приходим к неравенству $\|f(A)\| \geqslant |f(\lambda_0)|$, откуда вытекает, что $\|f(A)\| \geqslant m$.

В дальнейшем нас будут интересовать функции от положительно определенного оператора $A$. Пусть

$$A = \int_a^{\infty} \lambda \, dP_\lambda,$$

где $a \geqslant 0$. Рассмотрим следующие функции этого оператора:

$$(tI+A)^{-1}=\int_a^\infty \frac{1}{t+\lambda}\,dP_\lambda,\quad A(tI+A)^{-1}=\int_a^\infty \frac{\lambda}{t+\lambda}\,dP_\lambda\ (t>0). \tag{11.26}$$

Очевидно,

$$\|(tI+A)^{-1}\|\leqslant \frac{1}{a+t},\quad \|A(tI+A)^{-1}\|\leqslant 1 \quad (t\geqslant 0). \tag{11.27}$$

Детальному анализу ниже будет подвергнута функция

$$A^\alpha=\int_a^\infty \lambda^\alpha\,dP_\lambda \quad (-\infty<\alpha<\infty). \tag{11.28}$$

Если оператор $A$ имеет дискретный спектр (с собственными значениями $\lambda_i$ и соответствующими собственными векторами $e_i$), то он может быть представлен рядом

$$Ax=\sum_{i=1}^\infty \lambda_i(x, e_i)\,e_i;$$

формула (11.28) в этом случае принимает вид

$$A^\alpha x=\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^\alpha(x, e_i)\,e_i.$$

Здесь собственные значения $\lambda_i$ могут быть произвольными неотрицательными числами.

**11.6. Коммутирующие самосопряженные операторы.** Рассмотрим две функции от одного и того же самосопряженного оператора $A$:

$$A_1=\int_{-\infty}^\infty f_1(\lambda)\,dP_\lambda,\quad A_2=\int_{-\infty}^\infty f_2(\lambda)\,dP_\lambda.$$

Операторы $A_1A_2$ и $A_2A_1$ имеют, вообще говоря, различную область определения, если понимать произведение операторов как результат последовательного применения сомножителей. Например, если $A$ — неограниченный оператор и $\lambda$ — регулярная точка для этого оператора, то оператор $(\lambda I-A)(\lambda I-A)^{-1}$ определен на всем $H$, а оператор $(\lambda I-A)^{-1}(\lambda I-A)$ имеет смысл лишь для $x\in D(A)$. Можно показать, что на общей части областей определения операторов $A_1A_2$ и $A_2A_1$ их значения одинаковы и совпадают со значениями оператора, определенного как интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(\lambda)\,f_2(\lambda)\,dP_\lambda. \tag{11.29}$$

В связи с этим говорят, что операторы $A_1$ и $A_2$ коммутируют.

Область определения оператора (11.29), вообще говоря, шире, чем совокупность элементов, к которым можно последовательно применять $A_1$ и $A_2$. В дальнейшем мы будем считать, что произведение операторов $A_1A_2$ определяется интегралом (11.29):

$$A_1A_2 = A_2A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\, dP_\lambda \tag{11.30}$$

с естественной областью определения.

Имеет место и обратное утверждение. Допустим, что самосопряженные операторы $A_1$ и $A_2$ коммутируют в том смысле, что

$$A_1A_2x = A_2A_1x$$

при всех тех $x$, при которых обе части равенства определены. Оказывается, в этом случае операторы $A_1$ и $A_2$ являются функциями от одного и того же самосопряженного оператора.

**11.7. Интеграл от оператор-функции.** В предыдущих пунктах функции от самосопряженных операторов конструировались при помощи спектральных представлений. В ряде случаев удобно такие функции представлять интегралами другого типа.

Пусть $B(t)$ — некоторая оператор-функция, значения которой — непрерывные линейные операторы. Различают три вида непрерывности таких оператор-функций. Функция $B(t)$ называется *равномерно непрерывной* (или непрерывной по норме операторов) в точке $t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} \| B(t) - B(t_0) \| = 0. \tag{11.31}$$

Функция $B(t)$ называется *сильно непрерывной*, если при каждом фиксированном $x \in H$ выполняется равенство

$$\lim_{t\to t_0} \| B(t)x - B(t_0)x \| = 0.$$

Нетрудно видеть, что сильная непрерывность вытекает из равномерной непрерывности (но не наоборот!). Наконец, функция $B(t)$ называется *слабо непрерывной* в точке $t_0$, если для любой фиксированной пары элементов $x, y \in H$

$$\lim_{t\to t_0} | (B(t)x, y) - (B(t_0)x, y) | = 0.$$

Слабая непрерывность вытекает из сильной непрерывности.

Операторы — интегралы от непрерывных на конечном отрезке $[a, b]$ оператор-функций мы будем понимать в смысле Римана. Определение римановского интеграла зависит при этом от того, в каком смысле непрерывна функция $B(t)$.

Если $B(t)$ равномерно непрерывна, то интеграл

$$B = \int_a^b B(t)\, dt \tag{11.32}$$

будем понимать как предел по норме операторов интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} B(t_i)\,\Delta t_i,$$

где $t_i$ — произвольные точки промежутков $\Delta t_i$, на которые разбит отрезок $[a, b]$. В случае сильно непрерывных функций $B(t)$ значения оператора — интеграла (11.32) определяются при каждом фиксированном $x$ как предел по норме пространства $H$ интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} B(t_i)\,x\,\Delta t_i.$$

Наконец, если $B(t)$ слабо непрерывна, то вначале определяются значения скалярных произведений $(Bx, y)$, как пределы интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} (B(t_i)\,x,\ y)\,\Delta t_i;$$

затем показывается, что эти пределы определяют линейный функционал от $y$; из общего вида функционала в гильбертовом пространстве вытекает тогда, что элемент $Bx$ определен.

В соответствии с тремя приведенными выше определениями говорят о *равномерном, сильном* и *слабом интегралах.*

Если оператор-функция $B(t)$ сильно или равномерно непрерывна, то, очевидно, ее слабый интеграл совпадает соответственно с сильным или равномерным интегралом. Это простое замечание позволяет сводить вычисление сильных или равномерных интегралов от оператор-функций к вычислению обычных интегралов от скалярных функций.

Наиболее часто будут встречаться интегралы от функции вида

$$B(t) = f(t,\ A), \tag{11.33}$$

где $A$ — фиксированный положительно определенный самосопряженный оператор. Для всех трех видов интеграла (11.32) от функции (11.33) в естественных предположениях справедливо представление

$$\int_a^b f(t,\ A)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_a^b f(t,\ \lambda)\,dt\right] dP_\lambda, \tag{11.34}$$

которое доказывается путем перестановки порядка интегрирования. На обосновании законности такой перестановки мы не останавливаемся; заметим лишь, что законность такой перестановки достаточно доказать для слабого интеграла.

Интегралы от оператор-функций по бесконечным промежуткам или интегралы от функций, имеющих особенности на концах промежутка интегрирования, будем обычно определять как несобственные интегралы. Например, интеграл по промежутку $[0, \infty)$ от функции, непрерывной на $(0, \infty)$, будем определять как предел интеграла (11.32), в котором $a \to 0$, $b \to \infty$. Предел при этом понимается в смысле нормы операторов в случае равномерного интеграла, как предел по норме значений на каждом фиксированном элементе $x$ — в случае сильного интеграла и, наконец, как слабый предел значений — в случае слабого интеграла.

Для интегралов по бесконечным промежуткам справедливы представления, аналогичные (11.34). Например,

$$\int_0^\infty f(t, A)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^\infty f(t, \lambda)\,dt \right] dP_\lambda. \tag{11.35}$$

Интегралы от оператор-функции удовлетворяют обычным образом доказываемым неравенствам:

$$\left\| \int_a^b B(t)\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|B(t)\|\,dt, \tag{11.36}$$

$$\left\| \int_a^b B(t)\,x\,dt \right\| \leqslant \int_a^b \|B(t)\,x\|\,dt. \tag{11.37}$$

Применяя эти неравенства и признак Коши сходимости несобственных интегралов, который для интегралов от операторов-функций и вектор-функций формулируется так же, как и для несобственных интегралов от скалярных функций, можно указать условия сходимости интегралов от оператор-функций.

Для равномерной сходимости, например, несобственного интеграла (11.35) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^\infty \|B(t)\|\,dt < \infty. \tag{11.38}$$

Для сильной сходимости интеграла (11.35) достаточно, чтобы неравенство

$$\int_0^\infty \|B(t)\,x\|\,dt < \infty \tag{11.39}$$

выполнялось при каждом фиксированном $x \in H$.

Пусть $F$ — замкнутый оператор. Допустим, что значения операторов $B(t)$ принадлежат $D(F)$. Пусть, наконец, существуют сильные интегралы

$$y = \int_a^b B(t)\,x\,dt, \qquad z = \int_a^b FB(t)\,x\,dt$$

(собственные или несобственные). Тогда $y \in D(F)$ и $z = Fy$, т. е.

$$F\int_a^b B(t)\,x\,dt = \int_a^b FB(t)\,x\,dt.$$

Для доказательства последней формулы достаточно заметить, что элемент $y$ можно получить как сильный предел такой последовательности $\sum_{i=1}^{n} B(t_i)\,x\,\Delta t_i$ и что последовательность

$$F\sum_{i=1}^{n} B(t_i)\,x\,\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} FB(t_i)\,x\,\Delta t_i$$

также сильно сходится к элементу $z$. Поэтому $y \in D(F)$ и $z = Fy$.

**11.8. Интегральное представление дробной степени оператора.** Пусть самосопряженный оператор $A$ удовлетворяет условию

$$(Ax,\ x) \geqslant a(x,\ x) \quad (x \in D(A)), \tag{11.40}$$

где $a$ — некоторое положительное число. Тогда спектр оператора $A$ расположен на $[a,\ \infty)$. Поэтому

$$A = \int_a^\infty \lambda\, dP_\lambda.$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$B(t) = t^{-\alpha}(tI + A)^{-1} \quad (0 < t < \infty),$$

где $\alpha$ — некоторое фиксированное число из $(0,1)$. Непосредственная проверка показывает, что эта функция непрерывна по норме операторов в каждой точке $t > 0$. Из (11.27) вытекает, что

$$\|B(t)\| \leqslant \frac{t^{-\alpha}}{a+t}.$$

Отсюда видно, что оператор-функция $B(t)$ равномерно интегрируема на промежутке $(0,\ \infty)$. Интеграл от нее определяет некоторый ограниченный оператор. В силу равенства (11.35)

$$\int_0^\infty t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}\,dt = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{t^{-\alpha}}{t+\lambda}\,dt\right] dP_\lambda =$$

$$= \int_a^\infty \lambda^{-\alpha}\left[\int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1+s}\,ds\right] dP_\lambda.$$

Таким образом,

$$A^{-\alpha} = k(\alpha)\int_0^\infty t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}\,dt, \tag{11.41}$$

где

$$\frac{1}{k(\alpha)} = \int_0^\infty \frac{s^{-\alpha}}{1+s}\,ds = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}. \tag{11.42}$$

## § 12. Свойства дробных степеней неограниченных операторов

**12.1. Постановка задачи.** В предыдущих параграфах изучались ограниченные линейные операторы $A$ и их дробные степени $A^\tau$. Основное внимание при этом было уделено изучению $L$-характеристик $L(A;\ \textit{непр.})$, $L(A^\tau;\ \textit{непр.})$ и $L(A;\ \textit{вп. непр.})$, $L(A^\tau;\ \textit{вп. непр.})$. Многие задачи математической физики требуют изучения неограниченных операторов (дифференциальных операторов с граничными условиями). Здесь во многих случаях непрерывны операторы $A^{-\tau}$ $(\tau > 0)$.

Настоящий параграф посвящен изучению дробных степеней неограниченных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$. Как оказывается, дробные степени удовлетворяют важным соотношениям, которые могут быть применены как для установления свойств операторов $A^{-1}$ и $A^{-\tau}$ (в частности, для исследования их $L$-характеристик), так и для обоснования различных построений, в которых участвуют неограниченные операторы $A$.

Неограниченный в $L_{\frac{1}{2}}$ самосопряженный оператор $A$ может оказаться непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$

в некоторое пространство $L_\beta$, где $\beta > \frac{1}{2}$. Как показывается в конце настоящего параграфа, дробные степени таких операторов являются непрерывными операторами, действующими из $L_{\frac{1}{2}}$ в некоторые $L_{\beta(\tau)}$, где $\frac{1}{2} < \beta(\tau) \leqslant 1$.

**12.2. Неравенство моментов для дробных степеней.** В этом пункте существенную роль играет неравенство Гёльдера

$$\int_G f(\lambda)\, g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_G \left| f(\lambda) \right|^{\frac{1}{\tau}} d\sigma(\lambda) \right\}^{\tau} \left\{ \int_G \left| g(\lambda) \right|^{\frac{1}{1-\tau}} d\sigma(\lambda) \right\}^{1-\tau}, \qquad (12.1)$$

где $G$ — произвольное множество, на котором задана положительная мера $\sigma(\lambda)$, а $\tau \in (0, 1)$. Кроме этого, мы используем неравенство Юнга

$$uv \leqslant \tau |u|^{\frac{1}{\tau}} + (1-\tau) |v|^{\frac{1}{1-\tau}} \quad (0 < \tau < 1). \qquad (12.2)$$

Если в неравенстве Юнга положить

$$u = \varepsilon^{\tau} \tau^{-\tau} a, \qquad v = \varepsilon^{-\tau} \tau^{\tau} b,$$

то мы придем к неравенству

$$ab \leqslant \varepsilon |a|^{\frac{1}{\tau}} + \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\frac{\tau}{1-\tau}} (1-\tau) |b|^{\frac{1}{1-\tau}}, \qquad (12.3)$$

справедливому при любых неотрицательных $a$, $b$ и любом $\varepsilon > 0$.

Теорема 12.1. *Пусть $A$ — положительно определенный самосопряженный оператор.*

*Тогда при любом* $\tau \in (0, 1)$ *выполняется неравенство* *) *моментов*

$$\| A^{\tau} x \| \leqslant \| Ax \|^{\tau} \| x \|^{1-\tau} \qquad (x \in D(A)). \tag{12.4}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся спектральным представлением оператора $A$:

$$A = \int_0^{\infty} \lambda \, dP_{\lambda}.$$

Из этого представления вытекает, что

$$\| A^{\tau} x \|^2 = \int_0^{\infty} \lambda^{2\tau} d(P_{\lambda} x, x) \qquad (x \in D(A))$$

и, в силу неравенства (12.1),

$$\| A^{\tau} x \|^2 \leqslant \left\{ \int_0^{\infty} \lambda^2 d(P_{\lambda} x, x) \right\}^{\tau} \left\{ \int_0^{\infty} d(P_{\lambda} x, x) \right\}^{1-\tau} = \\ = \| Ax \|^{2\tau} \| x \|^{2(1-\tau)}.$$

Теорема доказана.

Отметим, что неравенство (12.4) можно рассматривать при всех $x \in D(A^{\tau})$; если при этом $x \notin D(A)$, то его нужно понимать в том смысле, что левая часть является конечным числом, а правая часть обращается в бесконечность. Если $x \notin D(A^{\tau})$, то обе части неравенства (12.4) обращаются в бесконечность.

---

*) Соотношения типа неравенств (12.4) часто встречаются в различных разделах анализа. Например, хорошо известны неравенства, связывающие нормы производных различных порядков (здесь тонкие результаты принадлежат Г. Е. Шилову, А. Н. Колмогорову и др.). Уместно упомянуть также мультипликативные неравенства в теоремах вложения (В. П. Глушко и С. Г. Крейн [1], В. П. Ильин [1—3], Л. Ниренберг [1] и др.). Неравенство моментов (12.4) было использовано при построении общей теории дробных степеней операторов М. А. Красносельским [5, 7]. Неравенства моментов играют существенную роль в теории дробных степеней операторов в банаховых пространствах (см. § 14—16).

Применим к правой части неравенства (12.4) неравенство (12.3). Тогда мы получим соотношение

$$\|A^\tau x\| \leqslant \varepsilon \|Ax\| + \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\frac{\tau}{1-\tau}} (1-\tau)\|x\| \quad (x \in D(A)). \tag{12.5}$$

Отметим, что неравенство (12.4) является в свою очередь следствием неравенства (12.5). Это следует из того, что при каждом фиксированном $x \in D(A)$ правая часть неравенства (12.5) принимает минимальное значение при таком $\varepsilon$, при котором производная по $\varepsilon$ от правой части обращается в нуль, т. е. при

$$\varepsilon = \tau \frac{\|x\|^{1-\tau}}{\|Ax\|^{1-\tau}}.$$

Подставляя это значение $\varepsilon$ в правую часть неравенства (12.5), приходим к неравенству (12.4).

Неравенство (12.4) иногда удобно записывать в виде неравенства для квадратичных форм:

$$(A^\tau x,\ x) \leqslant (Ax,\ x)^\tau (x,\ x)^{1-\tau}. \tag{12.6}$$

Из спектрального представления дробных степеней $A^\tau$ оператора $A$ следует, что

$$A^\tau = (A^{\tau_1})^{\frac{\tau}{\tau_1}} \quad (\tau,\ \tau_1 > 0). \tag{12.7}$$

Поэтому из теоремы 12.1 вытекает важное неравенство

$$\|A^\tau x\| \leqslant \|A^{\tau_0} x\|^{\frac{\tau-\tau_1}{\tau_0-\tau_1}} \|A^{\tau_1} x\|^{\frac{\tau_0-\tau}{\tau_0-\tau_1}}, \tag{12.8}$$

справедливое при $\tau_1 < \tau < \tau_0$.

От мультипликативных неравенств (12.6) и (12.8) можно перейти к аддитивным неравенствам аналогично тому, как был совершен переход от неравенства (12.4) к неравенству (12.5).

**12.3. Подчиненные операторы.** Установим вначале вспомогательное утверждение общего характера.

Лемма 12.1. *Пусть $A$ и $B$ — замкнутые линейные операторы, причем $D(A) \subset D(B)$.*

*Тогда найдется такая постоянная $M$, что при всех $x \in D(A)$ выполняется неравенство*

$$\|Bx\| \leqslant M(\|Ax\| + \|x\|). \tag{12.9}$$

Доказательство. Обозначим через $\Gamma$ график оператора $A$. На элементах $\{x, Ax\}$ графика $\Gamma$ определим оператор $B_1$ равенством

$$B_1\{x, Ax\} = Bx.$$

Допустим, что последовательности $\{x_n, Ax_n\}$ и $Bx_n$ сходятся соответственно к элементам $\{x_0, y_0\}$ и $z_0$. Это значит, что $\|x_n - x_0\| \to 0$, $\|Ax_n - y_0\| \to 0$, $\|Bx_n - z_0\| \to 0$. Из замкнутости операторов $A$ и $B$ вытекает, что $x_0 \in D(A)$ и $x_0 \in D(B)$, причем $y_0 = Ax_0$ и $z_0 = Bx_0$. Отсюда следует, что оператор $B_1$ замкнут.

График является подпространством. Как уже упоминалось, замкнутые операторы, определенные на подпространствах, ограничены. Отсюда вытекает, что

$$\|B_1\{x, Ax\}\| \leqslant M\|\{x, Ax\}\|,$$

т. е.

$$\|Bx\| \leqslant M\sqrt{\|x\|^2 + \|Ax\|^2} \leqslant M(\|x\| + \|Ax\|).$$

Лемма доказана.

Очевидно, утверждение леммы сохраняет силу, если оператор $B$ не замкнут, но допускает замыкание.

Будем говорить, что оператор $B$ *подчинен* оператору $A$, если $D(A) \subset D(B)$ и

$$\|Bx\| \leqslant k_0\|Ax\| \quad (x \in D(A)), \tag{12.10}$$

где $k_0$ — некоторое положительное число.

Если оператор $A$ имеет ограниченный обратный, то в условиях леммы 12.1 оператор $B$ очевидным образом подчинен оператору $A$. Иначе говоря, подчиненность оператора $B$ замкнутому оператору $A$ вытекает уже из включения $D(A) \subset D(B)$, если $A^{-1}$ ограничен.

В некоторых случаях неравенство (12.10) удобно писать в следующей эквивалентной форме:

$$\|BA^{-1}x\| \leqslant k_0\|x\| \tag{12.11}$$

(если, конечно, определен оператор $A^{-1}$).

*Пусть оператор $B$ подчинен оператору $A$, допускающему замыкание $A_1$, причем $D(A) = D(B)$. Тогда оператор $B$ имеет расширение $B_1$, являющееся оператором, подчиненным оператору $A_1$.*

Доказательство почти очевидно. Если $x_0 \in D(A_1)$, то существует такая последовательность $x_n \in D(A)$ $(n=1, 2, \ldots)$, для которой одновременно $\|x_n - x_0\| \to 0$ и $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$. Из неравенств

$$\|Bx_n - Bx_m\| \leqslant k_0 \|Ax_n - Ax_m\|$$

вытекает, что последовательность $Bx_n$ фундаментальна и ее предел $y_0$ однозначно определяется элементом $x_0 \in D(A_1)$. Для завершения доказательства достаточно определить оператор $B_1$ равенством

$$B_1 x_0 = y_0 \qquad (x_0 \in D(A_1)).$$

Подчиненность оператора $B_1$ оператору $A_1$ следует теперь из неравенства

$$\|B_1 x_0\| \leqslant k_0 \|A_1 x_0\|,$$

которое можно получить предельным переходом из неравенств

$$\|Bx_n\| \leqslant k_0 \|Ax_n\| \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Из проведенных рассуждений вытекает важное утверждение.

Лемма 12.2. *Для того чтобы доказать подчиненность замкнутого оператора $B$ замкнутому оператору $A$, достаточно показать, что неравенство $\|Bx\| \leqslant k_0 \|Ax\|$ выполняется для элементов $x$, принадлежащих некоторому линейному множеству $H_A$ (включенному и в $D(A)$, и в $D(B)$), обладающему тем свойством, что $A$ является замыканием оператора $A_1$ с областью определения $H_A$ и такого, что $A_1 x = Ax$ $(x \in H_A)$.*

Если оператор $A$ самосопряжен:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda,$$

то в качестве множества $H_A$ можно рассмотреть объединение подпространств $H_\Delta$ (см. п. 10.1), на каждом из которых оператор $A$ ограничен.

В дальнейшем лемма 12.2 будет использована для положительно определенных операторов $A$. При рассмотрении таких операторов множество $H_A$ мы будем определять как объединение подпространств $H_\Delta$, где $\Delta = (t_1, t_2]$ и $t_1, t_2 > 0$.

Непосредственная проверка показывает, что линейные множества $H_A$, $H_{A^\alpha}$, $H_{A^{-\tau}}$, $H_{(tI+A)^{-\tau}}$ и т. д. совпадают.

Будем писать $B \ll C$, если оператор $C$ подчинен оператору $B$, причем

$$\|Bx\| \leqslant \|Cx\| \qquad (x \in D(C)). \tag{12.12}$$

Допустим, что $B \ll C$, причем $B$ и $C$ — самосопряженные операторы, имеющие обратные $B^{-1}$ и $C^{-1}$ (возможно, неограниченные). Из (12.12) после замены $Cx = y$ вытекает, что $\|BC^{-1}y\| \leqslant \|y\|$ при всех $y \in D(C^{-1})$. Это значит, что при всех $y \in D(C^{-1})$ и каждом фиксированном $z \in D(B)$ выполняется неравенство

$$|(C^{-1}y, Bz)| = |(BC^{-1}y, z)| \leqslant \|BC^{-1}y\| \cdot \|z\| \leqslant \|y\| \cdot \|z\|.$$

Следовательно, $(C^{-1}y, Bz)$ можно продолжить в непрерывный линейный функционал, определенный на всем $H$. Значит,

$$(C^{-1}y, Bz) = (y, y^*) \qquad (y \in D(C^{-1})).$$

Отсюда вытекает, что $Bz \in D(C^{-1})$, т. е. $D(B^{-1}) \subset D(C^{-1})$. Очевидно,

$$(y, C^{-1}Bz)| = |(BC^{-1}y, z)| \leqslant \|y\| \, \|z\| \quad (y \in D(C^{-1}),\ z \in D(B)),$$

откуда

$$\|C^{-1}Bz\| \leqslant \|z\| \qquad (z \in D(B)).$$

После замены $Bz = u$ приходим к неравенству

$$\|C^{-1}u\| \leqslant \|B^{-1}u\| \qquad (u \in D(B^{-1})). \tag{12.13}$$

Мы доказали следующее утверждение.

Лемма 12.3. *Пусть самосопряженные операторы $B$ и $C$, имеющие обратные $B^{-1}$ и $C^{-1}$, удовлетворяют соотношению $B \ll C$.*

*Тогда $C^{-1} \ll B^{-1}$.*

Теми же рассуждениями можно показать, что в случае несамосопряженных $B$ и $C$ из $B \ll C$ следует

$$(C^{-1})^* \ll (B^*)^{-1},$$

если, конечно, существуют соответствующие операторы.

**12.4. Подчиненность дробных степеней.** Пусть $A$—ограниченный положительно определенный самосопряженный оператор. Из равенства $A^{\sigma}=A^{\sigma-\tau}A^{\tau}$ вытекает, что

$$\|A^{\sigma}x\|\leqslant\|A^{\sigma-\tau}\|\,\|A^{\tau}x\|.$$

Это значит, что *оператор* $A^{\sigma}$ *подчинен оператору* $A^{\tau}$ *при* $0<\tau<\sigma$.

Обратная ситуация возникает в случае, когда $A$ — строго положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор:

$$A=\int_{a}^{\infty}\lambda\,dP_{\lambda}\quad(a>0).\tag{12.14}$$

В этом случае $A^{\sigma}$ *подчинен оператору* $A^{\tau}$, *если* $0<\sigma<\tau$. Для доказательства можно воспользоваться леммой 12.3. Читатель без труда проведет и прямое доказательство.

Если положительно определенный оператор $A$ и обратный к нему неограничены, то различные дробные степени не обладают свойством подчиненности друг другу.

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, каким дробным степеням строго положительно определенного оператора $A$ подчинен другой оператор $B$.

Из теоремы 12.1 непосредственно вытекает

Теорема 12.2. *Пусть $A$ — положительно определенный самосопряженный оператор. Необходимым условием подчиненности линейного оператора $B$ оператору $A^{\tau_0}$, где $\tau_0\in(0,1)$, является неравенство*

$$\|Bx\|\leqslant k\,\|Ax\|^{\tau_0}\,\|x\|^{1-\tau_0}\quad(x\in D(A)).\tag{12.15}$$

Эту теорему удается «почти обратить».

Теорема 12.3 *). *Пусть $A$ — строго положительно определенный самосопряженный оператор. Пусть $B$ — замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условию* (12.15) *при некотором* $\tau_0\in(0,1)$.

*Тогда оператор $B$ подчинен всем операторам $A^{\tau}$, где $\tau>\tau_0$.*

---

*) Эта теорема установлена С. Г. Крейном и П. Е. Соболевским [1]. Здесь дано другое доказательство.

Доказательство. Пусть $A$—оператор (12.14). Из (12.15) вытекает, что $D(A) \subset D(B)$. В силу (11.27) оператор $A$ определен на элементах вида $(tI + A)^{-1} x$ $(t > 0)$; поэтому вектор-функция $t^{-\tau} B(tI + A)^{-1} x$ определена при всех $t > 0$. Эта вектор-функция непрерывна при $t > 0$, так как оператор $BA^{-1}$ ограничен и

$$t^{-\tau} B(tI + A)^{-1} x = BA^{-1} t^{-\tau} A(tI + A)^{-1} x,$$

а непрерывность вектор-функции $A(tI + A)^{-1}$ проверяется непосредственно. Наконец, в силу (12.15) и (11.27)

$$\int_0^\infty t^{-\tau} \| B(tI + A)^{-1} x \| \, dt \leqslant$$
$$\leqslant k \int_0^\infty t^{-\tau} \| A(tI + A)^{-1} x \|^{\tau_0} \| (tI + A)^{-1} x \|^{1-\tau_0} dt \leqslant$$
$$\leqslant k \int_0^\infty \frac{t^{-\tau} \, dt}{(a+t)^{1-\tau_0}} \| x \| = k_1 \| x \| < \infty.$$

Это значит, что

$$\int_0^\infty t^{-\tau} (tI + A)^{-1} x \, dt \in D(B)$$

и

$$B \int_0^\infty t^{-\tau} (tI + A)^{-1} x \, dt = \int_0^\infty t^{-\tau} B(tI + A)^{-1} x \, dt.$$

Из интегрального представления (11.41) дробной степени оператора вытекает тогда, что $D(A^\tau) \subset D(B)$ и

$$\| BA^{-\tau} x \| \leqslant k_2 \| x \|.$$

Теорема доказана.

В пункте 12.2 была показана эквивалентность условий (12.4) и (12.5). Поэтому утверждения двух последних теорем можно выразить в следующей форме.

Теорема 12.4. *Для того чтобы замкнутый оператор $B$ был подчинен оператору $A^\tau$ $(0 < \tau < 1)$, где*

*$A$ — строго положительно определенный самосопряженный оператор, необходимо, чтобы неравенство*

$$\|Bx\| \leqslant \varepsilon^{1-\tau_0}\|Ax\| + \frac{k_1}{\varepsilon^{\tau_0}}\|x\| \quad (x \in D(A)) \tag{12.16}$$

*выполнялось при некотором $k_1$, при $\tau_0 = \tau$ и при всех $\varepsilon > 0$, и достаточно, чтобы это неравенство выполнялось при некотором $k_1$, каком-либо $\tau_0 < \tau$ и всех $\varepsilon > 0$.*

*Порядком оператора $B$ относительно строго положительно определенного самосопряженного оператора $A$* назовем точную нижнюю границу таких неотрицательных $\tau$, что $B$ подчинен $A^\tau$.

Очевидно, каждый ограниченный оператор будет оператором нулевого порядка. Более того, ограниченный оператор $B$ подчинен нулевой степени оператора $A$. Существуют и неограниченные операторы, имеющие нулевой порядок относительно оператора $A$. Например, оператор

$$B = \ln A = \int_a^\infty \ln\lambda\, dP_\lambda \quad (a > 0)$$

имеет нулевой порядок. Действительно, при любом $\tau > 0$

$$|\ln\lambda|^2 \leqslant c(\tau) + \lambda^{2\tau} \quad (a \leqslant \lambda < \infty),$$

где $c(\tau)$ — некоторая положительная функция; поэтому при $x \in D(A^\tau)$ справедливы соотношения

$$\|Bx\|^2 = \int_a^\infty |\ln\lambda|^2\, d(P_\lambda x, x) \leqslant \int_a^\infty \left[c(\tau) + \lambda^{2\tau}\right] d(P_\lambda x, x) =$$
$$= c(\tau)\|x\|^2 + \|A^\tau x\|^2 \leqslant \left[\frac{c(\tau)}{a^{2\tau}} + 1\right]\|A^\tau x\|^2,$$

т. е. $B$ подчинен операторам $A^\tau$ при всех $\tau > 0$. Аналогично, оператор $B = A^{\tau_0}\ln A$ имеет порядок $\tau_0$; при этом оператор $B$ подчинен всем операторам $A^\tau$, где $\tau > \tau_0$, и не подчинен оператору $A^{\tau_0}$ — в условиях подчиненности

$$\|Bx\| \leqslant k(\tau)\|A^\tau x\| \quad (x \in D(A^\tau);\ \tau > \tau_0)$$

постоянная $k(\tau)$ неограниченно возрастает при $\tau \to \tau_0$.

Теорема 12.3 означает, что оператор $B$, удовлетворяющий неравенству

$$\|Bx\| \leqslant k\|Ax\|^{\tau}\|x\|^{1-\tau} \quad (x \in D(A)), \tag{12.17}$$

имеет порядок (относительно оператора $A$), не превышающий $\tau$.

**12.5. Первое неравенство Гайнца.** В настоящем пункте изучается вопрос о подчиненности друг другу дробных степеней двух положительно определенных самосопряженных операторов.

Лемма 12.4. *Пусть $A$ и $B$ — ограниченные линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $H$, и пусть $AB$ — самосопряженный оператор. Тогда*

$$\|AB\| \leqslant \|BA\|. \tag{12.18}$$

Доказательство. Из формулы (11.25) следует, что для любого самосопряженного ограниченного оператора $C$ справедливо равенство

$$\|C^n\| = \|C\|^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\|AB\| = \sqrt[n]{\|(AB)^n\|} = \|A(BA)\cdot \ldots \cdot (BA)B\|^{\frac{1}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant [\|A\|\,\|BA\|^{n-1}\|B\|]^{\frac{1}{n}} = \|A\|^{\frac{1}{n}}\|BA\|^{1-\frac{1}{n}}\|B\|^{\frac{1}{n}}.$$

Устремляя $n$ к бесконечности, получим (12.18).

Лемма доказана.

Теорема 12.5*). *Пусть $A$ — положительно определенный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H_1$, а $B$ — положительно определенный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H_2$. Пусть $T$ — ограниченный оператор, действующий из пространства $H_2$ в пространство $H_1$, $\|T\| = N$. Пусть*

$$\|ATx\|_{H_1} \leqslant M\|Bx\|_{H_2} \quad (x \in D(B)). \tag{12.19}$$

*) Эта теорема установлена Т. Като [3]. Приведенное в конце пункта утверждение ранее было другим способом доказано Гайнцем [1]. Из работы Т. Като [3] заимствовано и приводимое ниже доказательство теоремы 12.6, также принадлежащей Гайнцу.

*Тогда при любом* $\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$,

$$TD(B^\tau) \subset D(A^\tau)$$

*и для любого* $x \in D(B^\tau)$ *справедливо неравенство*

$$\| A^\tau T x \|_{H_1} \leqslant M^\tau N^{1-\tau} \| B^\tau x \|_{H_2}. \tag{12.20}$$

Доказательство. Предположим сначала, что оператор $A$ непрерывен, а оператор $B$ имеет непрерывный обратный $B^{-1}$. Тогда при любом $\tau \in [0, 1]$ оператор $A^\tau$ ограничен, а оператор $B^\tau$ имеет ограниченный обратный $B^{-\tau}$. Неравенство (12 20) будет доказано, если показать, что

$$\varphi(\tau) = \| A^\tau T B^{-\tau} \|_{H_2 \to H_1} \leqslant M^\tau N^{1-\tau}. \tag{12.21}$$

Покажем, что функция $\varphi(\tau)$ логарифмически выпукла, т. е.

$$\varphi[(1-\lambda)\tau_0 + \lambda\tau_1] \leqslant [\varphi(\tau_0)]^{1-\lambda} [\varphi(\tau_1)]^\lambda. \tag{12.22}$$

Отсюда и будет следовать неравенство (12.21), так как $\varphi(0) = N$, $\varphi(1) = M$. Функция $\varphi(\tau)$ непрерывна. Поэтому нам достаточно доказать, что при любых $\tau \in (0, 1)$ и при $\varepsilon \in (0, \min(\tau, 1-\tau))$ выполняется неравенство

$$\varphi(\tau) \leqslant \sqrt{\varphi(\tau - \varepsilon)\varphi(\tau + \varepsilon)}. \tag{12.23}$$

Из тождества

$$(A^\tau T B^{-\tau} x, A^\tau T B^{-\tau} x)_{H_1} = (B^{-\tau} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau} x, x)_{H_2}$$

вытекает неравенство

$$[\varphi(\tau)]^2 \leqslant \| B^{-\tau} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau} \|_{H_2 \to H_2}.$$

Так как оператор $B^{-\tau} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau}$ ограничен и самосопряжен в $H_2$, то из представления

$$B^{-\tau} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau} = B^{-\varepsilon} (B^{-\tau+\varepsilon} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau})$$

и из леммы 12.4 следует, что

$$\| B^{-\tau} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau} \|_{H_2 \to H_2} \leqslant \| B^{-\tau+\varepsilon} T^* A^{2\tau} T B^{-\tau-\varepsilon} \|_{H_2 \to H_2} \leqslant$$

$$\leqslant \| B^{-\tau+\varepsilon} T^* A^{\tau-\varepsilon} \|_{H_1 \to H_2} \| A^{\tau+\varepsilon} T B^{-\tau-\varepsilon} \|_{H_2 \to H_1}.$$

или, в силу равенства норм сопряженных операторов,

$$[\varphi(\tau)]^2 \leqslant \| A^{\tau-\varepsilon} T B^{-\tau+\varepsilon} \|_{H_2 \to H_1} \| A^{\tau+\varepsilon} T B^{-\tau-\varepsilon} \|_{H_2 \to H_1}.$$

Неравенство (12.23) доказано.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть

$$A = \int_0^\infty \lambda \, dP_\lambda.$$

Введем обозначения

$$A_n = \int_0^n \lambda \, dP_\lambda, \qquad B_n = B + \frac{1}{n} I \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Операторы $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ очевидным образом ограничены, а операторы $B_n$ имеют ограниченные обратные. Из очевидных неравенств

$$\| A_n y \|_{H_1} \leqslant \| A y \|_{H_1} \quad (y \in D(A)),$$
$$\| B x \|_{H_2} \leqslant \| B_n x \|_{H_2} \quad (x \in D(B))$$

и из (12.19) следует, что

$$\| A_n T x \|_{H_1} \leqslant M \| B_n x \|_{H_2} \quad (x \in D(B); \quad n = 1, 2, \ldots).$$

В силу доказанного для каждого $\tau \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\| A_n^\tau T x \|_{H_1} \leqslant M^\tau N^{1-\tau} \| B_n^\tau x \|_{H_2} \quad (x \in D(B^\tau), \ n = 1, 2, \ldots). \tag{12.24}$$

Легко видеть, что $\| B_n^\tau x \|_{H_2} \to \| B^\tau x \|_{H_2}$ при $n \to \infty$; поэтому $\sup\limits_n \| A_n^\tau T x \|_{H_1} < \infty$, а это в свою очередь означает, что $Tx \in D(A^\tau)$ и $\| A_n^\tau T x \|_{H_1} \to \| A^\tau T x \|_{H_1}$. Переходя в неравенствах (12.24) к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (12.20).

Теорема полностью доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что *из соотношения* $A \ll B$ *для положительно определенных* *самосопряженных операторов $A$ и $B$, действующих в гильбертовом пространстве $H$, вытекает соотношение* $A^\tau \ll B^\tau$ $(0 < \tau < 1)$.

**12.6. Второе неравенство Гайнца.** Теорема 12.6. *Пусть положительно определенный самосопряженный оператор $A$ действует в гильбертовом пространстве $H_1$, а положительно определенный самосопряженный оператор $B$ действует в гильбертовом пространстве $H_2$. Пусть $C$ — замкнутый линейный оператор с областью определения $D(C) \subset H_1$ и областью значений $R(C) \subset H_2$. Пусть $D(A) \subset D(C)$, $D(B) \subset D(C^*)$ и для любых $x \in D(C)$, $y \in D(C^*)$ справедливы неравенства*

$$\| Cx \|_{H_2} \leqslant \| Ax \|_{H_1}, \qquad \| C^* y \|_{H_1} \leqslant \| By \|_{H_2}. \tag{12.25}$$

*Тогда для любого $\tau \in [0, 1]$ при $x \in D(A)$, $y \in D(B)$ справедливо неравенство*

$$|(Cx, y)_{H_2}| \leqslant \| A^\tau x \|_{H_1} \| B^{1-\tau} y \|_{H_2}. \tag{12.26}$$

Доказательство. Предположим сначала, что оператор $A$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}$. Тогда из первого неравенства (12.25) следует, что оператор $T = CA^{-1}$ действует из $H_1$ в $H_2$, причем

$$\| T \|_{H_1 \to H_2} \leqslant 1. \tag{12.27}$$

Рассмотрим оператор $S = TA$, определенный на $D(A) \subset H_1$ и действующий из $H_1$ в $H_2$. Очевидно, $D(S) \subset D(C)$ и

$$Sx = Cx \ (x \in D(S)).$$

Отсюда следует, что оператор $T^*$ переводит $D(C^*)$ в $D(A)$ и $S^* y = AT^* y = C^* y$ при $y \in D(C^*)$.

Из (12.25) вытекает, что при $y \in D(B)$ справедливо неравенство

$$\| AT^* y \|_{H_1} \leqslant \| By \|_{H_2}. \tag{12.28}$$

Из (12.27), (12.28) и теоремы 12.5 следует, что $T^* D(B^\tau) \subset$ $\subset D(A^\tau)$ при любом $\tau \in [0, 1]$ и

$$\| A^\tau T^* y \|_{H_1} \leqslant \| B^\tau y \|_{H_2} \qquad (y \in D(B^\tau)). \tag{12.29}$$

Пусть теперь $x \in D(A)$, $y \in D(B)$. Тогда

$$(Cx, y)_{H_2} = (TAx, y)_{H_2} = (Ax, T^*y)_{H_1} = (A^\tau x, A^{1-\tau}T^*y)_{H_1};$$

отсюда и из неравенства (12.29) следует, что

$$|(Cx, y)_{H_2}| \leqslant \|A^\tau x\|_{H_1} \|A^{1-\tau}T^*y\|_{H_1} \leqslant \|A^\tau x\|_{H_1} \|B^{1-\tau}y\|_{H_2}.$$

Утверждение теоремы доказано в предположении, что оператор $A^{-1}$ ограничен. От этого ограничения можно освободиться так же, как и в доказательстве теоремы 12.5.

Теорема доказана.

**12.7. Дробные степени проекций операторов*).** Пусть подпространство $H_0$ полностью расположено в области определения $D(C)$ замкнутого линейного оператора $C$, действующего в гильбертовом пространстве $H$. Оператор $C$, если его рассматривать только на подпространстве $H_0$, также замкнут. Поэтому он непрерывен на $H_0$, т. е.

$$\|Cx\| \leqslant k\|x\| \qquad (x \in H_0).$$

Рассмотрим теперь действующий в $H_0$ оператор $PC$, где $P$ — оператор ортогонального проектирования на $H_0$; этот оператор также непрерывен.

Если $C$ самосопряжен, то оператор $PC$ также самосопряжен. Если $C$ положительно определен, то оператор $PC$ также положительно определен. Последнее утверждение вытекает из тождества

$$(PCx, x) \equiv (Cx, x) \qquad (x \in H_0).$$

Это тождество можно переписать в виде

$$\left\|(PC)^{\frac{1}{2}}x\right\| = \left\|C^{\frac{1}{2}}x\right\| \qquad (x \in H_0). \tag{12.30}$$

Возникает естественный вопрос о соотношении между нормами элементов $C^\tau x$ и $(PC)^\tau x$ $(x \in H_0)$ при различных показателях $\tau$.

Теорема 12.7. *Пусть $C$ — положительно определенный самосопряженный оператор и пусть* $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

---

*) Результаты этого пункта получены П. Е. Соболевским [13].

*Тогда выполнены неравенства*

$$\|C^{\tau}x\| \leqslant \|(PC)^{\tau}x\| \qquad (x \in H_0). \tag{12.31}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 12.5. Положим

$$H_1 = H, \qquad H_2 = H_0, \qquad A = C^{\frac{1}{2}}, \qquad B = (PC)^{\frac{1}{2}},$$
$$Tx = x \qquad (x \in H_0).$$

Тогда из равенства (12.30) вытекает условие (12.19), причем $M = 1$. Неравенства (12.31) совпадают с оценкой (12.20).

Теорема доказана.

Теорема 12.8. *Пусть $C$ — положительно определенный самосопряженный оператор и пусть*

$$\|Cx\| \leqslant k\|PCx\| \qquad (x \in H_0), \tag{12.32}$$

*где $k$ — некоторая постоянная. Пусть* $\tau \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

*Тогда выполнены неравенства*

$$\|C^{\tau}x\| \leqslant k^{2\tau-1}\|(PC)^{\tau}x\| \qquad (x \in H_0). \tag{12.33}$$

Доказательство. Предположим вначале, что $C$ — строго положительно определенный оператор. Тогда операторы $(PC)^{-\tau}$ $(\tau > 0)$ существуют и непрерывны в $H_0$.

При доказательстве теоремы 12.5 было показано, что функция (12.21) логарифмически выпукла при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Положим

$$H_1 = H, \qquad H_2 = H_0, \qquad A = C, \qquad B = PC,$$
$$Tx = x \qquad (x \in H_0).$$

Функция (12.21) примет тогда вид

$$\varphi(\tau) = \|C^{\tau}(PC)^{-\tau}\|_{H_1 \to H}.$$

Из логарифмической выпуклости этой функции следует, что

$$\varphi(\tau) \leqslant \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2(1-\tau)} [\varphi(1)]^{2\tau-1} \qquad \left(\frac{1}{2} < \tau \leqslant 1\right). \tag{12.34}$$

Равенство (12.30) означает, что $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Неравенство (12.32) означает, что $\varphi(1) \leqslant k$. Поэтому из (12.34) вытекает (12.33).

От дополнительного предположения о строгой положительной определенности оператора $C$ можно освободиться, рассмотрев сначала операторы $C+\frac{1}{n}I$ и устремив затем $n$ к бесконечности (см. конец доказательства теоремы 12.5).

Теорема доказана.

Теоремы 12.7 и 12.8 допускают обобщение на тот случай, когда $H_0$ не лежит полностью в $D(C)$, но множество $D_0=H_0\cap D(C)$ плотно в $H_0$. Оператор $PC$, рассматриваемый на $D_0$, будет симметрическим и положительно определенным. Известно, что каждый такой оператор допускает положительно определенные самосопряженные расширения. Мы сохраним обозначение $PC$ за так называемым фридриховским расширением *). Можно показать, что при $\tau\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$ имеют место включения $D\left((PC)^\tau\right)\subset D\left(C^\tau\right)$ и выполняются неравенства

$$\|C^\tau x\|\leqslant\|(PC)^\tau x\| \qquad (x\in D(PC)). \tag{12.35}$$

Если $D(PC)=H_0\cap D(C)$ и

$$\|Cx\|\leqslant k\|PCx\| \qquad (x\in D(PC)), \tag{12.36}$$

то при $\tau\in\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ имеют место включения $D\left((PC)^\tau\right)\subset D\left(C^\tau\right)$ и выполняются неравенства

$x\in\mathcal{D}(\nu)$

$$\|C^\tau x\|\leqslant k^{2\tau-1}\|(PC)^\tau x\|\left(x\in D\left((PC)^\tau\right)\right). \tag{12.37}$$

**12.8. Об одном специальном классе самосопряженных операторов.** Пусть на некотором множестве $G$ задан оператор $B$. Пусть $F\subset G$. Через $B_F$ будем обозначать оператор, который определен на $F$ и значения которого на $F$ совпадают со значениями оператора $B$. Построенный таким образом оператор $B_F$ будем называть *сужением оператора $B$ на множество $F$* или просто *сужением* оператора $B$.

Пусть линейный непрерывный оператор $A$ действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_\beta$, где $\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1$. Допустим, что сужение оператора $A$

*) См., например, С. Г. Михлин [2].

на линейное множество $D_0 \subset L_{\frac{1}{2}}$ является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в $L_{\frac{1}{2}}$. Оператор $A_{D_0}$, конечно, не будет ограниченным в $L_{\frac{1}{2}}$, если $D_0 \neq L_{\frac{1}{2}}$. Можно определить дробные степени $A_{D_0}^{\tau}$ оператора $A_{D_0}$; эти дробные степени будут неограниченными операторами. По аналогии с теоремами, доказанными в § 10, можно ожидать, что операторы $A_{D_0}^{\tau}$ допускают продолжение в непрерывные операторы, действующие из $L_{\frac{1}{2}}$ в некоторые пространства $L_{\beta(\tau)}$, где $\beta(\tau) > \frac{1}{2}$. Доказательству соответствующих теорем и анализу $L$-характеристик непрерывных продолжений $A^{\tau}$ операторов $A_{D_0}^{\tau}$ посвящены этот и последующие пункты параграфа.

Рассмотрим снова линейный непрерывный оператор $A$, действующий из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta}$; сопряженный к нему оператор $A^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{\frac{1}{2}}$. Будем говорить, что оператор $A$ *симметричен*, если $A^*x = Ax$ $(x \in L_{1-\beta})$. Обозначим через $D$ совокупность всех элементов $x \in L_{\frac{1}{2}}$, для которых $Ax \in L_{\frac{1}{2}}$. Тогда $L_{1-\beta} \subset D$ и справедливо следующее равенство:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \left(x \in L_{1-\beta},\ y \in L_{\frac{1}{2}}\right). \tag{12.38}$$

Пусть $y$ — такой элемент из $L_{\frac{1}{2}}$, что

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad (x \in L_{1-\beta}),$$

где $y^*$ также принадлежит $L_{\frac{1}{2}}$. Тогда из (12.38) вытекает, что $y \in D$ и $y^* = A_D y$. Это значит, что

$$\left(A_{L_{1-\beta}}\right)^* = A_D. \tag{12.39}$$

Оператор $A_{L_{1-\beta}}$ в силу (12.38) симметричен. *Равенство (12.39) означает, что все его симметричные расшире-*

*ния (если они существуют) являются сужениями оператора $A$.*

Оператор $A$ назовем *положительно определенным*, если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \quad (x \in L_{1-\beta}). \tag{12.40}$$

Оператор $A_{L_{1-\beta}}$ допускает тогда *) положительно определенное самосопряженное расширение в $L_{\frac{1}{2}}$. Из проведенных выше рассуждений вытекает, что это самосопряженное расширение является сужением оператора $A$ на некоторое множество $D_0 \subset L_{\frac{1}{2}}$.

Нами доказана

Теорема 12.9. *Пусть $A$ — симметрический непрерывный оператор, действующий из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_\beta$ $\left(\frac{1}{2} < \beta \leqslant 1\right)$ и положительно определенный в смысле условия* (12.40).

*Тогда существует такое сужение $A_{D_0}$ $\left(D_0 \subset L_{\frac{1}{2}}\right)$ оператора $A$, которое является положительно определенным самосопряженным оператором в $L_{\frac{1}{2}}$.*

Возникает естественный вопрос о том, в каких случаях самосопряжен оператор $A_D$, где $D$ — множество всех таких $x \in L_{\frac{1}{2}}$, что $Ax \in L_{\frac{1}{2}}$.

Теорема 12.10. *Пусть положительный* **) *оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы* 12.9. *Пусть множество $D$ обладает тем свойством, что из $x \in D$ вытекает, что $|x| \in D$.*

*Тогда оператор $A_D$ самосопряжен.*

Доказательство. Достаточно показать, что оператор $A_D$ является замыканием оператора $A_{L_{1-\beta}}$. Для этого нужно показать, что для любого $x \in D$ найдется такая последовательность $x_n \in L_{1-\beta}$, что $\| x_n - x \|_{\frac{1}{2}} \to 0$ и одновременно $\| Ax_n - Ax \|_{\frac{1}{2}} \to 0$.

---

*) См. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман [1]. Полное описание таких расширений дано М. Г. Крейном.

**) Напомним, что оператор $A$ называется положительным, если он преобразует неотрицательные функции в неотрицательные.

Положим
$$x_n(t) = \min\{|x(t)|,\ n\}\operatorname{sign} x(t) \quad (n = 1, 2, \ldots);$$
тогда $\|x_n - x\|_{\frac{1}{2}} \to 0$. Из соотношения $\|Ax_n - Ax\|_\beta \to 0$ вытекает, что последовательность $Ax_n$ сходится к $Ax$ по мере. Кроме того, функции $Ax_n(t)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы, так как в силу положительности оператора $A$
$$|Ax_n(t)| \leqslant \varphi(t) \in L_{\frac{1}{2}},$$
где $\varphi = A|x|$. Поэтому $\|Ax_n - Ax\|_{\frac{1}{2}} \to 0$.

Теорема доказана.

**12.9. Теоремы о расщеплении*).** Пусть задана правильная тройка пространств $E^* \subset H \subset E$ (см. п. 9.2).

Теорема 12.11. *Пусть $A$ — самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $H$. Пусть множество $D = D(A) \cap E^*$ плотно в пространстве $E^*$. Пусть, наконец, оператор $A$ допускает продолжение в непрерывный оператор $\tilde{A}$, действующий из $E^*$ в $E$:*
$$\|Ax\|_E \leqslant a\|x\|_{E^*} \quad (x \in D). \tag{12.41}$$

*Тогда оператор $A^{\frac{1}{2}}$ допускает продолжение в непрерывный оператор, действующий из $H$ в $E$, причем*
$$\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|_E \leqslant \sqrt{a}\,\|x\|_H \quad (x \in D). \tag{12.42}$$

Доказательство. Пусть $x \in D$. Тогда
$$\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|_H = \sqrt{\left(A^{\frac{1}{2}}x,\ A^{\frac{1}{2}}x\right)} = \sqrt{(Ax, x)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\|Ax\|_E\,\|x\|_{E^*}} \leqslant \sqrt{a}\,\|x\|_{E^*}.$$

*) Результаты этого и следующего пунктов установлены Е. И. Пустыльником [2].

Это значит, что $A^{\frac{1}{2}}$ может быть продолжен в непрерывный оператор $B$, действующий из $E^*$ в $H$.

Сопряженный к $B$ оператор $B^*$ непрерывен как оператор из $H$ в $E^{**}$. Оказывается, что значения оператора $B^*$ принадлежат $E$. Для того чтобы установить последний факт, достаточно доказать, что $B^*y = A^{\frac{1}{2}}y$ при $y \in D$, так как $D$, по предположению, плотно в $E^*$ и, следовательно, плотно в $H$. Равенство $B^*y = A^{\frac{1}{2}}y$ $(y \in D)$ вытекает из равенств

$$\left(x,\ B^*y - A^{\frac{1}{2}}y\right) = \left(Bx - A^{\frac{1}{2}}x,\ y\right) = 0 \quad (x,\ y \in D).$$

Неравенство (12.42) теперь очевидно:

$$\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|_E = \|B^*x\|_E \leqslant \|B^*\|_{H\to E}\|x\|_H =$$
$$= \|B\|_{E^*\to H}\|x\|_H \leqslant \sqrt{a}\,\|x\|_H \quad (x \in D).$$

Теорема доказана.

Теорема 12.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 12.11. *Пусть продолжение $\tilde{A}$ оператора $A$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $E^*$ в $E$.*

*Тогда оператор $A^{\frac{1}{2}}$ допускает продолжение во вполне непрерывный оператор, действующий из $H$ в $E$.*

Доказательство. Пусть $B$ и $B^*$ — операторы, введенные при доказательстве теоремы 12.11. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что операторы $B$ и $B^*$ вполне непрерывны (первый как оператор из $E^*$ в $H$, второй — как оператор из $H$ в $E$). Достаточно *) доказать, что свойством полной непрерывности обладает оператор $B$. Для этого в свою очередь достаточно установить компактность значений оператора $B$ на пересечении множества $D$ с единичным шаром $\|x\|_{E^*} \leqslant 1$.

Пусть $x_n \in D$, $\|x_n\|_{E^*} \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу полной непрерывности оператора $\tilde{A}$ можно указать такую подпосле-

*) См. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1].

довательность $x_{n_k}$, что элементы $Ax_{n_k}$ сходятся в $E$. Но тогда

$$\lim_{k,\,l\to\infty}\|Bx_{n_k}-Bx_{n_l}\|_H=\lim_{k,\,l\to\infty}\sqrt{\left(A\left(x_{n_k}-x_{n_l}\right),\,x_{n_k}-x_{n_l}\right)}=0.$$

Теорема доказана.

Пусть оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 12.11, а $\tilde{A}$ — его непрерывное продолжение в оператор, действующий из $E^*$ в $E$. Утверждение теоремы 12.11 можно трактовать и как возможность расщепить оператор $\tilde{A}$ в суперпозицию

$$\tilde{A}=B^*B, \tag{12.43}$$

где $B$ действует из $E^*$ в $H$, а $B^*$ — из $H$ в $E$. Теорема 12.12 означает, что операторы $B$ и $B^*$ вполне непрерывны, если вполне непрерывен оператор $\tilde{A}$.

Теоремы 12.11 и 12.12 аналогичны теоремам 9.1 и 9.2. Утверждения всех этих теорем можно перенести на тройки пространств типа $E\subset H\subset E^*$.

Теоремы 12.11 и 12.12 были бы более интересными, если бы удалось предположение о плотности в $E^*$ множества $D=D(A)\cap E^*$ заменить менее ограничительным предположением о плотности в $E^*$ множества $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)\cap E^*$.

**12.10. Теоремы о дробных степенях.** Перейдем к исследованию операторов в шкале пространств $L_\alpha$. Мы будем рассматривать дробные степени $A^\tau$ неограниченных положительно определенных самосопряженных операторов $A$, действующих в $L_{\frac{1}{2}}$ и допускающих продолжения в непрерывные операторы, действующие из $L_{\frac{1}{2}}$ в некоторые пространства $L_\beta\left(\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1\right)$. Будет установлена теорема о том, что $A^\tau$ допускают продолжение в непрерывные операторы, действующие из $L_{\frac{1}{2}}$ в некоторые пространства $L_{\beta(\tau)}$; нам удобно сохранить обозначение $A^\tau$ за продолженными операторами.

Теорема 12.13. *Пусть самосопряженный положительно определенный в $L_{\frac{1}{2}}$ оператор $A$ является* *одновременно непрерывным оператором, действующим из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{\beta}\left(\frac{1}{2}<\beta\leqslant 1\right)$, *причем*

$$\|A\|_{\frac{1}{2}\to\beta}\leqslant a. \tag{12.44}$$

*Пусть при этом множество* $D=D(A^2)\cap L_{1-\beta}$ *плотно в пространстве* $L_{1-\beta}$.

*Тогда оператор* $A^\tau$ *при каждом* $\tau\in[0,1]$ *является непрерывным оператором, действующим из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$, *где*

$$\beta(\tau)=\frac{1}{2}+\tau\left(\beta-\frac{1}{2}\right), \tag{12.45}$$

*причем*

$$\|A^\tau\|_{\frac{1}{2}\to\beta(\tau)}\leqslant a^\tau, \tag{12.46}$$

*а в случае вещественных пространств*

$$\|A^\tau\|_{\frac{1}{2}\to\beta(\tau)}\leqslant 2^\tau a^\tau. \tag{12.47}$$

Доказательство. В случае, когда пространства $L_\alpha$ комплексны, доказательство почти полностью повторяет доказательство теоремы 10.1.

Перейдем к случаю вещественных пространств $L_\alpha$. Для этого распространим предварительно оператор $A$ на пространства $\tilde{L}_\alpha$ комплекснозначных функций $z=x+iy$ равенством

$$\tilde{A}(x+iy)=Ax+iAy.$$

Оператор $\tilde{A}$ также самосопряжен и положительно определен. Его дробные степени $\tilde{A}^\tau$ связаны с дробными степенями $A^\tau$ оператора $A$ равенством

$$\tilde{A}^\tau(x+iy)=A^\tau x+iA^\tau y. \tag{12.48}$$

Оператор $\tilde{A}$ удовлетворяет условиям доказываемой теоремы и поэтому

$$\|\tilde{A}^\tau\|_{\frac{1}{2}\to\beta(\tau)}\leqslant\tilde{a}^\tau, \tag{12.49}$$

где $\tilde{a}$ — норма $\tilde{A}$ как оператора из $\tilde{L}_{\frac{1}{2}}$ в $\tilde{L}_{\beta}$; очевидно, $\tilde{a} \leqslant 2a$. Неравенство (12.47) вытекает теперь из (12.49), так как

$$\| A^{\tau} \|_{\frac{1}{2} \to \beta(\tau)} = \sup_{\| x \|_{\frac{1}{2}} \leqslant 1} \| A^{\tau} x \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\| z \|_{\frac{1}{2}} \leqslant 1} \| \tilde{A}^{\tau} z \| \leqslant \| \tilde{A}^{\tau} \|_{\frac{1}{2} \to \beta(\tau)}.$$

Теорема доказана.

Если $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то утверждение теоремы 12.13 сохраняет силу без предположения о том, что множество $D(A^2) \cap L_{1-\beta}$ плотно в $L_{1-\beta}$.

Теорема 12.14. *Пусть выполнены условия теоремы 12.13. Пусть $A$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta}$ $\left(\frac{1}{2} < \beta \leqslant 1\right)$.*

*Тогда оператор $A^{\tau}$ при каждом $\tau \in (0, 1)$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где $\beta(\tau)$ определено формулой* (12.45).

Доказательство. Вследствие неограниченности оператора $A$ в $L_{\frac{1}{2}}$ доказательство теоремы 10.2 здесь неприменимо. Приводимое ниже доказательство использует другую идею.

Пусть сначала $\tau \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Тогда $2\tau - 1 = \sigma \in (0, 1)$. Следовательно, по теореме 12.13 оператор $A^{\sigma}$ действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\sigma)}$ и непрерывен. Оператор $A$ (в силу самосопряженности) действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{\frac{1}{2}}$ и вполне непрерывен. Значит, оператор $A^{2\tau} = A^{\sigma} A$ действует из $L_{1-\beta}$ в $L_{\beta(\sigma)}$ и вполне непрерывен. Оператор $A^{2\tau}$ также самосопряженный, поэтому он вполне непрерывен и как оператор из $L_{1-\beta(\sigma)}$ в $L_{\beta}$. Применяя теорему 3.10, получим, что $A^{2\tau}$ вполне непрерывен как оператор из $L_{1-\beta(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$. В силу теоремы 12.12

(о расщеплении линейного оператора) $A^\tau$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_{\beta(\tau)}$, что и требуется доказать.

Из равенства (12.7) немедленно вытекает, что теорема справедлива для всех показателей вида

$$\tau = \sigma^n \quad \left(\frac{1}{2} < \sigma < 1; \quad n = 1, 2, \ldots\right). \tag{12.50}$$

Но в виде (12.50) может быть представлено любое число $\tau$ из промежутка $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Теорема доказана.

**12.11. $L$-характеристики дробных степеней.** Настоящий пункт примыкает к п. 10.6; так же как и там, мы ограничимся изучением $L$-характеристик $L\left(A^\tau; \textit{непр.}\right)$. В отличие от п. 10.6, здесь рассматриваются случаи, когда известные точки $L$-характеристики $L$ ($A$; *непр.*) расположены над прямой $\beta = \alpha$.

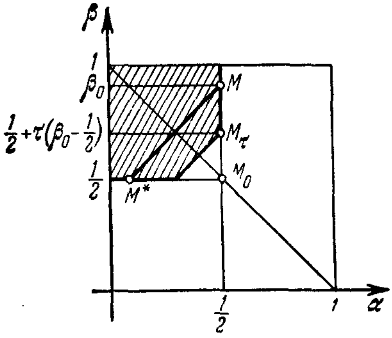


Рис. 12.1.

Пусть оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 12.13 при $\beta = \beta_0$. Тогда $L$-характеристика $L\left(A^\tau; \textit{непр.}\right)$ симметрична и содержит точку $M_\tau = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \tau\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)\right\}$, делящую в отношении $\tau$ отрезок, соединяющий точки $M = \left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\}$ и $M_0 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ (рис. 12.1). Таким образом, непосредственное применение теоремы 12.13 позволяет выделить часть $L$-характеристики $L\left(A^\tau; \textit{непр.}\right)$, заштрихованную на рис. 12.1.

Предположим теперь, что нам известны две точки $M = \left\{\frac{1}{2}, \beta_0\right\}$ и $N = \{\alpha_0, 1 - \alpha_0\}$, принадлежащие $L$-характеристике $L$($A$; *непр.*), причем $\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2}$, $\beta_0 \geqslant \frac{1}{2}$, $\alpha_0 \geqslant \frac{3}{4} - \frac{\beta_0}{2}$

рис. 12.2). Из теоремы 12.11 о расщеплении самосопряженного оператора вытекает, что $L\left(A^{\frac{1}{2}};\ \textit{непр.}\right)$ содержит точку $M_{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{1}{2},\ 1-\alpha_0\right\}$.

Предположим сначала, что $0<\tau<\frac{1}{2}$. Тогда $A^\tau=\left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{2\tau}$ и, значит, $L$-характеристика $L(A^\tau;\ \textit{непр.})$ содержит точку $M_\tau$, делящую в отношении $2\tau$ отрезок, соединяющий точки $M_{\frac{1}{2}}$ и $M_0$ (см. рис. 12.2); соответствующая часть $L$-характеристики $L(A^\tau;\ \textit{непр.})$ на рис. 12.2 заштрихована.

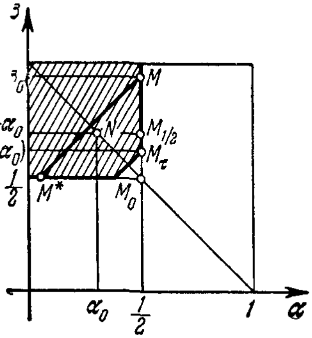


Рис. 12.2.

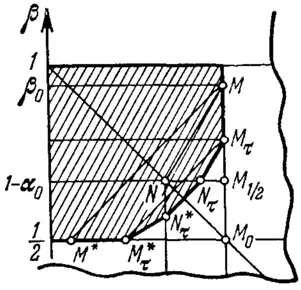


Рис. 12.3.

Перейдем теперь к случаю, когда $\tau\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$. В этом случае так же, как и в п. 10.6, удобна теорема 10.3, справедливая и для оператора $A$, удовлетворяющего условиям теоремы 12.13. Из теоремы 10.3 вытекает, что $L\ (A^\tau;\ \textit{непр.})$ содержит точку $M_\tau$, делящую в отношении $\lambda=2\tau-1$ отрезок, соединяющий точки $M_{\frac{1}{2}}=\left\{\frac{1}{2},\ 1-\alpha_0\right\}$ и $M=\left\{\frac{1}{2},\ \beta_0\right\}$ (см. рис. 12.3).

Дословно повторяя рассуждения п. 10.6, получим, что $L$-характеристика $L(A^\tau;\ \textit{непр.})$ в случае $\frac{1}{2}<\tau<1$ содержит также точку $N_\tau=\left\{\frac{1}{2}+\sigma\left(\alpha_0-\frac{1}{2}\right),\ 1-\alpha_0\right\}$, которая делит в отношении $\sigma$ отрезок $M_{\frac{1}{2}}N$. Таким образом, $L$-характеристика $L(A^{\tau};\ \textit{непр.})$ содержит многоугольник, заштрихованный на рис. 12.3.

Нам неизвестно (как и в случаях, рассмотренных в п. 10.6), можно ли использовать для получения дополнительной информации о структуре $L(A^{\tau};\ \textit{непр.})$ точки $L(A;\ \textit{непр.})$, не лежащие на прямых $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ и $\alpha+\beta=1$.

Изложенные в этом пункте соображения могут быть применены (ср. п. 10.7) как для построения $L$-характеристик дробных степеней интегральных операторов, так и для построения $L$-характеристик интегрального оператора

$$Kx(t)=\int_{\Omega} K(t,\ s)\,x(s)\,ds,$$

если известны свойства оператора с итерированным ядром. Мы не будем приводить здесь соответствующие рассуждения и формулировки. Отметим лишь, что наибольшие сложности возникают при изучении областей определения интегральных операторов, если их рассматривать как неограниченные операторы в некотором $L_{\alpha}$. Здесь может быть полезно простое замечание: если $K(t,\ s)\geqslant 0$ и $Kx_0(t)\in L_{\alpha}$ для некоторой почти везде положительной функции $x_0(t)$, то $Kx(t)\in L_{\alpha}$ для функций из некоторого плотного в $L_{\alpha}$ множества.

ГЛАВА 4

# ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ПОЗИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

## § 13. Полугруппы операторов*)

**13.1. Вектор-функции и оператор-функции.** Ниже нам понадобятся сведения из теории функций вещественного и комплексного переменных со значениями в банаховых пространствах. Некоторые из перечисляемых утверждений для случая гильбертовых пространств излагались в гл. 3.

Пусть функция $x(t)$ со значениями в банаховом пространстве $E$ определена на некотором отрезке $\{a, b\}$ (конечном или бесконечном; открытом, замкнутом или полуоткрытом). Функция $x(t)$ *непрерывна* на $\{a, b\}$, если

$$\lim_{t\to t_0} \| x(t) - x(t_0) \| = 0 \quad (t_0 \in \{a, b\}). \tag{13.1}$$

Функцию $x(t)$ называют *слабо непрерывной*, если для любого линейного непрерывного функционала $f \in E^*$ скалярная функция $f[x(t)]$ непрерывна. Отметим, что слабо непрерывная на замкнутом и ограниченном отрезке функция $x(t)$ ограничена: $\| x(t) \| \leqslant c$.

Аналогично вводятся понятия дифференцируемости и слабой дифференцируемости функции $x(t)$. Слабо дифференцируемая функция непрерывна и дифференцируема, если ее слабая производная непрерывна.

Пусть функция $x(t)$ определена на конечном отрезке $[a, b]$. Ее интегралом Римана $\int_a^b x(t)\,dt$ называется предел по норме пространства $E$ при $\lambda \to 0$ интегральных сумм

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} x(\xi_i)(t_{i+1} - t_i), \tag{13.2}$$

*) Теория полугрупп ограниченных операторов (см. Э. Хилле и Р. Филлипс [1], Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]) является одним из важных разделов функционального анализа. Она играет определяющую роль в ряде глав математической физики, теории вероятностей и др.

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, $\lambda = \max(t_{i+1} - t_i)$ и $\xi_i$ — произвольная точка из $[t_i, t_{i+1}]$. Легко видеть, что непрерывные функции интегрируемы. Интеграл Римана обладает обычными свойствами скалярного интеграла. В частности, если $x(t)$ непрерывна, то функция

$$y(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau \tag{13.3}$$

дифференцируема и $y'(t) = x(t)$.

Аналогично определяется слабый интеграл Римана, как слабый предел при $\lambda \to 0$ интегральных сумм (13.2).

Пусть $A$ — линейный непрерывный оператор, действующий в $E$. Тогда для любой интегрируемой функции $x(t)$ выполняется равенство

$$A \int_a^b x(\tau)\, d\tau = \int_a^b Ax(\tau)\, d\tau. \tag{13.4}$$

Если $x(t)$ слабо интегрируема, то равенство (13.4) имеет место, если интегралы в нем понимать в слабом смысле. Равенство (13.4) сохраняется и для некоторых классов неограниченных операторов. Отметим также неравенство

$$\left\| \int_a^b x(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant \int_a^b \| x(\tau) \|\, d\tau. \tag{13.5}$$

Пусть функция $x(t)$ определена на $[a, \infty)$ и интегрируема (слабо интегрируема) в каждом конечном отрезке $[a, b]$. Несобственный и слабый несобственный интеграл $\int_a^\infty x(\tau)\, d\tau$ определяются формулой

$$\int_a^\infty x(\tau)\, d\tau = \lim_{b \to \infty} \int_a^b x(\tau)\, d\tau, \tag{13.6}$$

где предел понимается в соответствующем смысле. Аналогично вводятся несобственные интегралы по промежуткам $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$ и несобственные интегралы от неограниченных функций. Для несобственных интегралов справедливы формулы (13.4) и (13.5).

Часто будут применяться интегралы, зависящие от параметра. Теоремы о дифференцируемости или интегрируемости под знаком интеграла по параметру формулируются так же, как и для интегралов от обычных числовых функций. Например, дифференцируемость доказана, если после дифференцирования интеграл в обычном смысле равномерно сходится; проверка сходимости или равномерной сходимости интеграла от функции $f(t, \mu)$, зависящий от параметра $\mu$, обычно сводится к проверке равномерной сходимости интеграла от числовой функции $\varphi(t, \mu) = \|f(t, \mu)\|$.

Оператор-функции $A(t)$ (т. е. функции, значениями которых являются ограниченные операторы) являются частными примерами функций со значениями в банаховом пространстве (ограниченных операторов, действующих из $E_1$ в $E_2$). Для оператор-функций мы будем встречаться с понятием непрерывности по норме операторов ($\|A(t) - A(t_0)\| \to 0$ при $t \to t_0$), сильной непрерывности ($\|A(t)x - A(t_0)x\| \to 0$ при $t \to t_0$ и при любом фиксированном $x \in E_1$) и слабой непрерывности $\left((A(t)x, l) \to (A(t_0)x, l)\right.$ при $t \to t_0$ и при фиксированных $\left.x \in E_1,\ l \in E_2^*\right)$. Аналогично различаются понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x$, $x \in E_1$) и слабой дифференцируемости.

Из известной теоремы Банаха — Штейнгауза вытекает, что нормы значений слабо непрерывной на конечном отрезке $[a, b]$ оператор-функции $A(t)$ ограничены в совокупности.

Нетрудно показать, что оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна на всем $E_1$, если нормы ее равномерно ограничены и функции $A(t)x$ непрерывны для элементов $x$ из некоторого плотного в $E_1$ множества.

Очевидно также следующее утверждение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем: *если оператор-функция $A(t)$ сильно непрерывна, а функция $x(t)$ со значениями в $E_1$ непрерывна по норме, то функция $A(t)x(t)$ непрерывна по норме.*

Для оператор-функций можно ввести понятия интеграла Римана, сильного интеграла Римана и слабого интеграла Римана. Для этих интегралов имеют место аналоги соотношений (13.4) и (13.5).

Все перечисленные определения и свойства без существенных изменений переносятся на случай функций и оператор-функций комплексного переменного (здесь, конечно, появляются криволинейные интегралы).

Новые факты содержатся в теории аналитических функций и оператор-функций. Функция $x(\lambda)$ (оператор-функция $A(\lambda)$) называется аналитической в области $\Lambda$ комплексной плоскости, если она в каждой точке $\lambda \in \Lambda$ имеет производную. Оказывается, что *из существования в области $\Lambda$ слабых производных вытекает существование производных по норме.*

Для аналитических функций (оператор-функций) справедливы основные факты теории скалярных аналитических функций. В частности, справедлива теорема Коши: *если $\Gamma$ — замкнутый спрямляемый контур, целиком лежащий в односвязной части области аналитичности $\Lambda$ функции $x(\lambda)$ ($A(\lambda)$), то*

$$\int_\Gamma x(\lambda)\,d\lambda = 0 \qquad \left(\int_\Gamma A(\lambda)\,d\lambda = 0\right). \tag{13.7}$$

Теорема Коши, как и в скалярном случае, полезна при вычислении интегралов: она позволяет, не меняя значения интеграла, заменять путь интегрирования более удобным.

Пусть, например, оператор-функция $A(\lambda)$ аналитична в полосе $\sigma_1 < \operatorname{Re}\lambda < \sigma_2$ и пусть

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{\sigma_1' \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma_2'} \| A(\lambda) \| = 0$$

для любых $\sigma_1'$, $\sigma_2'$, удовлетворяющих неравенству $\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \sigma_2$. Тогда несобственный интеграл

$$J(\sigma) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} A(\lambda)\, d\lambda$$

существует при всех $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$, если он существует при каком-нибудь $\sigma_0 \in (\sigma_1, \sigma_2)$, и его величина не зависит от $\sigma$.

Аналогично, если оператор-функция $A(\lambda)$ аналитична в секторе $\varphi_1 < \arg\lambda < \varphi_2$ и если

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{\varphi_1' \leqslant \arg\lambda \leqslant \varphi_2'} \| \lambda A(\lambda) \| = 0$$

для любых $\varphi_1'$, $\varphi_2'$, удовлетворяющих неравенству $\varphi_1 < \varphi_1' < \varphi_2' < \varphi_2$, то несобственный интеграл

$$J(\varphi) = \int_{\Gamma(\varphi)} A(\lambda)\, d\lambda \qquad (\Gamma(\varphi) = \{\lambda\colon\ \lambda = \rho e^{i\varphi},\ 0 \leqslant \rho < \infty\})$$

существует при всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$, если он существует при каком-нибудь $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и его величина не зависит от $\varphi$.

Как и для скалярных аналитических функций, для аналитических функций со значениями в банаховом пространстве справедлива формула Коши. Для оператор-функций она имеет вид

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(z)}{z - \lambda}\, dz. \tag{13.8}$$

Из этой формулы вытекают обычные оценки Коши производных аналитических в круге $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r$ функций:

$$\| A^{(n)}(\lambda_0) \| \leqslant M(r)\, r^{-n} n! \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{13.9}$$

где

$$M(r) = \max_{|\lambda - \lambda_0| = r} \| A(\lambda) \|.$$

Отметим, наконец, что для аналитических функций со значениями в банаховых пространствах справедлива теорема единственности: если некоторая аналитическая в области $\Lambda$ функция $x(\lambda)$ (оператор-функция $A(\lambda)$) равна нулю на некотором множестве, имеющем в $\Lambda$ предельную точку, то она тождественно равна нулю.

**13.2. Неограниченные операторы.** Пусть $E$ — банахово пространство и $A$ — линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве $D(A) \subset E$ и принимающий значения в $E$.

Говорят (ср. п. 11.1), что оператор $A$ *замкнут*, если из $x_n \in D(A)$, $\|x_n - x_0\| \to 0$, $\|Ax_n - y_0\| \to 0$ вытекает, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Иначе говоря, замкнутость оператора $A$ означает, что замкнут график $\Gamma(A)$ оператора $A$ (понятие графика вводится так же, как это было сделано в § 11 для операторов в гильбертовых пространствах).

Если оператор $A$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}$, определенный на всем $E$, то оператор $A$ замкнут. Более того, если при каком-либо $\lambda$ оператор $\lambda I + A$ имеет ограниченный обратный, то оператор $A$ также замкнут.

Пусть область определения оператора $A$ плотна в $E$ и оператор $A$ имеет ограниченный обратный. Тогда области определения операторов $A^n$ также плотны в $E$.

Для доказательства этого утверждения сначала покажем, что множество значений любого ограниченного оператора $B$ на плотном в $E$ множестве $D$ само плотно в $E$, если $BE$ плотно в $E$. Действительно, для каждого $x \in E$ может быть указана последовательность $x_n \in D$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такая, что $\|x_n - x\| \to 0$ и, следовательно, $\|Bx_n - Bx\| \to 0$. Это значит, что $BD$ плотно в $BE$ и, следовательно, в $E$.

Из приведенных рассуждений следует, что область значений операторов $A^{-n}$ плотна в $E$. Остается заметить, что область значений оператора $A^{-n}$ совпадает с областью определения оператора $A^n$.

Аналогично показывается, что области определения операторов $A^n$ плотны в $E$, если область определения $D(A)$ оператора $A$ плотна в $E$ и если при некотором $\lambda$ оператор $\lambda I + A$ имеет ограниченный обратный.

Пусть снова оператор $A$ непрерывно обратим. Обозначим через $A_{[n]}$ оператор, определенный на $D(A^n)$ равенством $A_{[n]}x = Ax$. Оказывается, что замыкание *) оператора $A_{[n]}$ совпадает с оператором $A$. Для доказательства достаточно для любого $x_0 \in D(A)$ указать такую последовательность элементов $x_i \in D(A^n)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что $\|x_i - x_0\| \to 0$ и $\|Ax_i - Ax_0\| \to 0$. Так как $D(A^{n-1})$ плотна в $E$, то можно построить такую последовательность $y_i \in D(A^{n-1})$, что $\|y_i - Ax_0\| \to 0$. Определим теперь последовательность $x_i$ равенствами

$$x_i = A^{-1}y_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $x_i \in D(A^n)$. При этом

$$\|x_i - x_0\| = \|A^{-1}y_i - x_0\| \leqslant \|A^{-1}\| \, \|y_i - Ax_0\| \to 0$$

и

$$\|Ax_i - Ax_0\| = \|y_i - Ax_0\| \to 0.$$

*) Замыкание $\bar{A}$ оператора $A$ в случае банаховых пространств определяется дословно так же, как и в случае гильбертовых пространств (см. § 11); график $\bar{A}$ — это замыкание графика $A$.

Наше утверждение доказано. Снова заметим, что оно остается справедливым, если при некотором $\lambda$ непрерывно обратим оператор $\lambda I + A$.

Отметим важный для дальнейшего факт. Пусть $A$ — замкнутый оператор, а $x(t)$ — интегрируемая на конечном отрезке $\{a, b\}$ функция. Пусть значения функции $x(t)$ при каждом $t \in \{a, b\}$ принадлежат $D(A)$ и функция $Ax(t)$ интегрируема на $\{a, b\}$. Тогда выполняется равенство

$$A \int_a^b x(\tau)\, d\tau = \int_a^b Ax(\tau)\, d\tau. \tag{13.10}$$

Действительно, пусть $\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n} x(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$ — последовательность интегральных сумм для функции $x(t)$, а $\bar{y}_k = A\bar{x}_k = \sum_{i=1}^{n} Ax(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$ — интегральные суммы для функции $Ax(t)$.

При $\lambda \to 0$ элементы $\bar{x}_k$ стремятся к $\int_a^b x(\tau)\, d\tau$, а элементы $\bar{y}_k$ стремятся к $\int_a^b Ax(\tau)\, d\tau$. Из замкнутости $A$ следует, что элемент $\int_a^b x(\tau)\, d\tau$ принадлежит $D(A)$ и что справедливо равенство (13.10).

**13.3. Резольвента.** Резольвентным множеством $\Lambda(A)$ оператора $A$ называется совокупность таких комплексных*) чисел $\lambda$, при которых оператор

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \tag{13.11}$$

определен на всем $E$ и непрерывен. Оператор $R(\lambda; A)$ называется резольвентой оператора $A$. Резольвента $R(\lambda; A)$, по определению, есть такой оператор, что

$$(\lambda I - A)\, R(\lambda, A)\, x \equiv x \qquad (x \in E) \tag{13.12}$$

и

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A)\, x \equiv x \qquad (x \in D(A)). \tag{13.13}$$

*) Если оператор $A$ рассматривается в вещественном пространстве $E$, то для построения резольвентного множества его предварительно распространяют на комплексное расширение $\tilde{E}$ пространства $E$. Это расширение $\tilde{E}$ состоит из элементов вида $x + iy$, где $x, y \in E$; норма в $\tilde{E}$ определяется, например, равенством $\|x + iy\| = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|$. Значения $A$ на $\tilde{E}$ задаются равенством $A(x + iy) = Ax + iAy$.

Если резольвентное множество $\Lambda(A)$ непусто, то $A$ — замкнутый оператор. Поэтому равенство (13.12) достаточно проверить лишь для элементов $x \in D(A)$.

Если оператор $A$ ограничен, то $\lambda \in \Lambda(A)$, если $|\lambda| > \|A\|$. Это следует из того, что в указанном случае для резольвенты может быть указана формула в виде сходящегося по норме операторов ряда

$$R(\lambda, A) = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} + \ldots \tag{13.14}$$

Сходимость этого ряда вытекает из того факта, что нормы членов ряда мажорируются членами убывающей геометрической прогрессии. Оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ равен ряду (13.14), так как

$$(\lambda I - A)\left(\frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} + \ldots\right) = \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} + \ldots\right)(\lambda I - A) = I.$$

Для самосопряженных операторов $A$ в гильбертовом пространстве $H$ резольвентное множество $\Lambda(A)$ содержит все невещественные $\lambda$. Резольвентное множество положительно определенных операторов содержит всю левую полуплоскость комплексной плоскости.

Резольвентное множество всегда является открытым множеством. Этот факт вытекает из следующей очевидной леммы:

Лемма 13.1. *Пусть $\lambda_0 \in \Lambda(A)$. Тогда все точки $\lambda$ круга $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ также принадлежат $\Lambda(A)$ и*

$$\|R(\lambda, A)\| \leqslant \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|^{-1} - |\lambda - \lambda_0|} \tag{13.15}$$

$$(|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}).$$

Отметим, что при $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, A)\|^{-1}$ операторы $R(\lambda; A)$ можно определить сходящимся по норме операторов рядом

$$R(\lambda, A) = R(\lambda_0, A) - (\lambda - \lambda_0) R^2(\lambda_0, A) + (\lambda - \lambda_0)^2 R^3(\lambda_0, A) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n R^{n+1}(\lambda_0, A) + \ldots \tag{13.16}$$

Отметим важное тождество, которому удовлетворяет резольвента. Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda(A)$. Так как $R(\lambda, A)x$, $R(\mu, A)x \in D(A)$ при любом $x \in E$, то

$$(\lambda I - A) R(\mu, A)x = (\mu I - A) R(\mu, A)x - (\mu - \lambda) R(\mu, A)x,$$

и в силу (13.12)

$$(\lambda I - A) R(\mu, A)x = x - (\mu - \lambda) R(\mu, A)x.$$

Отсюда в силу (13.13)

$$R(\mu, A)x = R(\lambda, A)x - (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)x,$$

т. е.

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A). \qquad (13.17)$$

Из (13.17), в частности, вытекает, что операторы $R(\lambda, A)$ и $R(\mu, A)$ коммутируют друг с другом. Нетрудно видеть, что на элементах из $D(A)$ оператор $R(\lambda, A)$ коммутирует с оператором $A$:

$$R(\lambda, A) Ax = -R(\lambda, A)(\lambda I - A)x + \lambda R(\lambda, A)x = -x + \lambda R(\lambda, A)x$$

и

$$AR(\lambda, A)x = -(\lambda I - A) R(\lambda, A)x + \lambda R(\lambda, A)x = \\ = -x + \lambda R(\lambda, A)x. \qquad (13.18)$$

Заметим, что формула (13.18) справедлива при всех $x \in E$.

Из (13.16) вытекает, что функция $R(\lambda; A)$ дифференцируема в каждой точке $\lambda_0 \in \Lambda(A)$. Поэтому $R(\lambda; A)$ аналитична в области $\Lambda(A)$. Из (13.16) следует также, что

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda_0, A) = (-1)^k k! [R(\lambda_0, A)]^{k+1}. \qquad (13.19)$$

**13.4. Определение полугруппы.** Пусть в банаховом пространстве $E$ задано семейство $T(t)$ $(t \geqslant 0)$ ограниченных операторов. Говорят, что это семейство образует *сильно непрерывную полугруппу*, если выполнены следующие условия:

1°. $T(t+s) = T(t)T(s) = T(s)T(t)$ при $t, s \geqslant 0$ и $T(0) = I$.

2°. Функция $T(t)x$ непрерывна по норме на $[0, \infty)$ при каждом фиксированном $x \in E$.

В точке $t = 0$, естественно, предполагается лишь, что $T(t)x$ непрерывна справа.

В случае одномерного пространства непрерывные полугруппы — это функции $T(t) = e^{\alpha t}$, где $\alpha$ — произвольное комплексное число.

Простейший пример сильно непрерывной полугруппы $T(t) = e^{-At}$ в банаховом пространстве $E$ дается формулой

$$T(t) = I - tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots, \qquad (13.20)$$

где $A$ — ограниченный оператор, действующий в $E$. Ряд (13.20) сходится по норме операторов при всех $t$, так как его члены очевидным образом мажорируются членами разложения в степенной ряд функции $e^{\|A\|t}$; поэтому $\|T(t)\| \leqslant e^{\|A\|t}$.

Степенные ряды можно почленно дифференцировать (это доказывается так же, как и в случае рядов с числовыми коэффициентами); поэтому

$$\frac{dT(t)}{dt} + AT(t) = 0. \tag{13.21}$$

Таким образом, формула (13.20) определяет решение дифференциального уравнения

$$\frac{dX}{dt} + AX = 0, \tag{13.22}$$

удовлетворяющее начальному условию $X(0) = I$ (уравнение (13.22) рассматривается в пространстве ограниченных операторов, действующих в $E$).

Для уравнения (13.22) справедлива теорема единственности (она доказывается как и теорема существования, например, методом последовательных приближений). Поэтому оператор-функции $T(t+s)$ и $T(t)T(s)$ совпадают, так как обе они удовлетворяют при фиксированном $s$ уравнению (13.22) и обе они обращаются в $T(s)$ при $t=0$. Таким образом, оператор-функция (13.20) удовлетворяет условию 1°.

Выполнение условия 2° очевидно, так как функция (13.20) дифференцируема.

Оператор $-A$ называют *производящим оператором полугруппы* (13.20).

Пусть $A$ и $B$ — два коммутирующих ограниченных оператора. Непосредственный подсчет показывает, что функции $e^{-(A+B)t}$ и $e^{-At}e^{-Bt}$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} + (A+B)X = 0,$$

для которого справедлива теорема единственности. Обе указанные функции при $t=0$ обращаются в единичный оператор. Поэтому

$$e^{-(A+B)t} = e^{-At}e^{-Bt} = e^{-Bt}e^{-At}.$$

В частности, для любого ограниченного оператора $A$ и любого комплексного $\alpha$

$$e^{(\alpha I - A)t} = e^{\alpha It}e^{-At} = e^{\alpha t}e^{-At}.$$

Заметим также, что оператор $B$ коммутирует с оператором $e^{-At}$, если $B$ коммутирует с $A$; это вытекает из представления (13.20) оператора $e^{-At}$.

Как было выше отмечено, $\|e^{-At}\| \leqslant e^{\|A\|t}$. Из предыдущих тождеств вытекает тогда, что

$$\|e^{(\alpha I - A)t}\| \leqslant e^{(\operatorname{Re}\alpha + \|A\|)t}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть $A$ — положительно определенный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H$, т. е. такой самосопряженный оператор, что $(Ax, x) \geqslant 0$ при $x \in D(A)$. Тогда спектральное представление оператора $A$ имеет вид

$$A = \int_0^\infty \lambda \, dP_\lambda. \tag{13.23}$$

Рассмотрим операторы

$$T(t) = e^{-At} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, dP_\lambda, \tag{13.24}$$

где $t$ — неотрицательные числа. Операторы (13.24) самосопряжены. Они ограничены, так как в силу (11.8)

$$\|e^{-At}\| \leqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} e^{-\lambda t} = 1. \tag{13.25}$$

В случае, когда оператор $A$ ограничен, операторы (13.24) и (13.20) совпадают.

Операторы (13.24) удовлетворяют условию 1° — это вытекает из формул (см. § 11), по которым вычисляются значения функций от операторов. Они удовлетворяют и условию 2°. Действительно, при каждом $x \in H$ и любых $t$, $t + \Delta t \geqslant 0$

$$\|e^{-A(t+\Delta t)}x - e^{-At}x\|^2 = \int_0^\infty [e^{-\lambda(t+\Delta t)} - e^{-\lambda t}]^2 \, d(P_\lambda x, x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty [e^{-\lambda|\Delta t|} - 1]^2 \, d(P_\lambda x, x),$$

откуда, после перехода к пределу под знаком интеграла, получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \| e^{-A(t+\Delta t)} x - e^{-At} x \| = 0.$$

Следовательно, формула (13.24) определяет сильно непрерывную полугруппу ограниченных операторов. Оператор $-A$ называют производящим оператором этой полугруппы.

Интересно отметить, что (как и в случае полугруппы (13.20)) функции $x(t) = T(t)x_0$ при $t > 0$ являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -Ax, \tag{13.26}$$

рассматриваемого в пространстве $H$. В случае, когда $x_0 \in D(A)$, функция $x(t) = T(t)x_0$ удовлетворяет уравнению (13.26) и при $t = 0$.

Лемма 13.2. *Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов.*

*Тогда*

$$\| T(t) \| \leqslant c(\omega) e^{\omega t}, \tag{13.27}$$

*где $\omega$ и $c(\omega)$ — некоторые постоянные.*

Доказательство. Положим

$$c_1 = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| T(t) \|.$$

При каждом $t \geqslant 0$ имеет место тождество

$$T(t) = T([t])\, T(t - [t]) = \{T(1)\}^{[t]}\, T(t - [t]),$$

где $[t]$ — целая часть числа $t$. Отсюда следует, что

$$\| T(t) \| \leqslant c_1 e^{\omega [t]},$$

где $\omega = \ln \| T(1) \|$. Из последнего неравенства вытекает, что

$$\| T(t) \| \leqslant c e^{\omega t} \quad (t \geqslant 0),$$

где $c = c_1$, если $\omega \geqslant 0$, и $c = c_1 e^{-\omega}$, если $\omega < 0$.

Лемма доказана.

Обозначим через $\omega_0$ infimum чисел $\omega$, при которых выполняется неравенство (13.27); это число называют порядком роста полугруппы. Можно показать (см., например, Э. Хилле, Э. Филлипс [1]), что

$$\omega_0 = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \| T(t) \|}{t}. \tag{13.28}$$

**13.5. Производящий оператор полугруппы.** Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа операторов, действующих в $E$. Обозначим через $A$ линейный оператор, определяемый как сильный предел

$$Ax = -\lim_{\Delta t \to +0} \frac{1}{\Delta t} [T(\Delta t) - I] x \tag{13.29}$$

на тех элементах $x$, для которых указанный предел существует. Оператор $-A$ называется производящим оператором полугруппы $T(t)$. Иначе говоря, значения производящего оператора определяются как значения правой производной функции $T(t)x$ в точке $t=0$. Термин «производящий оператор» мы уже применяли выше для частных случаев (полугруппы (13.20) и (13.24)).

Покажем, что производящий оператор $-A$ любой сильно непрерывной полугруппы имеет плотную в $E$ область определения $D(A)$. Для этого докажем, что этой области определения принадлежат все элементы $x_\varepsilon$ вида

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon T(\tau) x_0 \, d\tau, \tag{13.30}$$

где $\varepsilon > 0$, а $x_0$ — любой элемент из $E$. Элементы (13.30) образуют плотное в $E$ множество, так как для любого $x_0 \in E$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| x_\varepsilon - x_0 \| \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \| T(\tau) x_0 - x_0 \| \, d\tau = 0.$$

Очевидно,

$$\frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t} x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \int_0^\varepsilon [T(\tau + \Delta t) x_0 - T(\tau) x_0] \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \left\{ \int_{\Delta t}^{\varepsilon + \Delta t} T(\tau) x_0 \, d\tau - \int_0^\varepsilon T(\tau) x_0 \, d\tau \right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon \Delta t} \left\{ \int_\varepsilon^{\varepsilon + \Delta t} T(\tau) x_0 \, d\tau - \int_0^{\Delta t} T(\tau) x_0 \, d\tau \right\},$$

откуда

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t} x_\varepsilon - \frac{T(\varepsilon) - I}{\varepsilon} x_0 \right\| = 0.$$

Мы показали, что $x_\varepsilon \in D(A)$ и

$$-Ax_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}[T(\varepsilon) x_0 - x_0]. \tag{13.31}$$

При каждом $x_0 \in D(A)$ и любом $t \geqslant 0$ выполняется равенство

$$AT(t) x_0 = T(t) Ax_0, \tag{13.32}$$

которое вытекает очевидным образом из тождества

$$\frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t} T(t) x_0 = T(t) \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t} x_0. \tag{13.33}$$

Это означает, что оператор-функция $T(t)$ преобразует область определения $D(A)$ оператора $A$ в себя. Из (13.33) следует также, что

$$\frac{d}{dt}\{T(t) x_0\} = -AT(t) x_0 \quad (x_0 \in D(A)) \tag{13.34}$$

$\left(\text{при } t = 0 \text{ производная } \frac{d}{dt} \text{ понимается как правая производная}\right)$.

Докажем теперь, что *производящий оператор* $-A$ *замкнут*.

Пусть $x_n \in D(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, причем последовательности $x_n$ и $-Ax_n$ сходятся соответственно к пределам $x_0$ и $y_0$. Из (13.34) и (13.32) вытекает, что при $\Delta t > 0$

$$\frac{1}{\Delta t}[T(\Delta t) x_n - x_n] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} T'(\tau) x_n \, d\tau = -\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} T(\tau) Ax_n \, d\tau.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$ (и фиксированном $\Delta t$), получим

$$\frac{1}{\Delta t}[T(\Delta t) x_0 - x_0] = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} T(\tau) y_0 \, d\tau.$$

Устремим теперь $\Delta t$ к нулю. Предел правой части существует и равен $y_0$; поэтому $x_0 \in D(A)$ и $-Ax_0 = y_0$. Замкнутость оператора $-A$ доказана.

Изучим теперь вопрос о том, при каких $\lambda$ оператор $\lambda I + A$ имеет ограниченный обратный $R(\lambda, -A) = (\lambda I + A)^{-1}$, т. е. вопрос о том, какие $\lambda$ принадлежат резольвентному множеству $\Lambda(-A)$ производящего оператора $-A$ сильно непрерывной полугруппы $T(t)$.

Лемма 13.3. *Пусть $\omega_0$ — порядок роста полугруппы $T(t)$.*

*Тогда точки $\lambda$ полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$ принадлежат резольвентному множеству оператора $-A$. При этом*

$$R(\lambda, -A)\,x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,x\,dt. \tag{13.35}$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega > \omega_0$. Тогда при некотором $c(\omega)$ выполнено неравенство (13.27). Поэтому интеграл

$$J(\lambda)\,x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,x\,dt$$

равномерно и абсолютно сходится и определяет ограниченный оператор.

Так как оператор $A$ замкнут, то для доказательства леммы достаточно проверить, что

$$(\lambda I + A)\,J(\lambda)\,x = J(\lambda)\,(\lambda I + A)\,x = x. \qquad (x \in D(A)).$$

Пусть $\lambda$ ($\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$) фиксировано и $x \in D(A)$. Из равенства

$$(\lambda I + A)\,T(t)\,x = T(t)\,(\lambda I + A)\,x \qquad (x \in D(A)) \tag{13.36}$$

следует, что функция $e^{-\lambda t}(\lambda I + A)\,T(t)\,x$ интегрируема на $[0, \infty)$; далее, в силу замкнутости оператора $\lambda I + A$,

$$(\lambda I + A)\,J(\lambda)\,x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\lambda I + A)\,T(t)\,x\,dt =$$

$$= \lambda J(\lambda)\,x - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{dT(t)}{dt}\,x\,dt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$(\lambda I + A) J(\lambda) x = \\ = \lambda J(\lambda) x + x - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x\, dt = \\ = \lambda J(\lambda) x + x - \lambda J(\lambda) x = x.$$

Наконец, снова из (13.36) следует, что

$$J(\lambda)(\lambda I + A) x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)(\lambda I + A) x\, dt = \\ = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (\lambda I + A) T(t) x\, dt = x.$$

Лемма доказана.

Из (13.35) вытекают формулы для последовательных производных резольвенты $R(\lambda, -A)$:

$$\frac{d^k R(\lambda, -A)}{d\lambda^k} = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T(t) x\, dt \\ (\operatorname{Re}\lambda > \omega_0, \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{13.37}$$

Для обоснования этих формул остается лишь заметить, что все интегралы в (13.37) абсолютно сходятся.

Формула (13.35) дает явное выражение резольвенты $R(\lambda, -A)$ производящего оператора $-A$ через полугруппу $T(t)$. Можно, наоборот, выразить полугруппу через резольвенту ее производящего оператора. Именно, можно доказать, что при любом $\sigma > \omega_0$

$$T(t) x = \frac{1}{2\pi i} \lim_{c \to \infty} \int_{\sigma - ic}^{\sigma + ic} e^{\lambda t} R(\lambda, -A) x\, d\lambda \qquad (x \in D(A)).$$

**13.6. Теорема Хилле — Филлипса — Миадеры.** Нас в первую очередь интересует вопрос о том, какие операторы $-A$ являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп. Общий ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 13.1. *Оператор* $-A$ *является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы* $T(t)$ *тогда и только тогда, когда множество* $\Lambda(-A)$ *содержит все* $\lambda$, *для которых* $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0$, *где* $\sigma_0$ — *некоторое число, и если для этих* $\lambda$ *и любого* $i=1, 2, \ldots$ *резольвента* $R(\lambda)=R(\lambda, -A)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|[R(\lambda)]^i\| \leqslant \frac{c}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\sigma_0)^i}. \tag{13.38}$$

Непосредственная проверка условий (13.38) сложна. Поэтому представляют интерес более простые достаточные условия. Так, например, если резольвента $R(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$\|R(\lambda)\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda-\sigma_0} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \sigma_0), \tag{13.39}$$

то выполнены условия (13.38) при всех $i=2, 3 \ldots$ и $-A$ является производящим оператором некоторой полугруппы. Отметим, что условию (13.39) удовлетворяет резольвента отрицательно определенного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Доказательство теоремы 13.1. Пусть $-A$ - производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Тогда из леммы 13.3 следует, что $\lambda \in \Lambda(-A)$, если $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega_0$, где $\omega_0$ — порядок роста полугруппы $T(t)$. Из формул (13.19) и (13.37) следует, что при любом $i$

$$[R(\lambda)]^i x = \frac{1}{(i-1)!}\int_0^\infty t^{i-1}e^{-\lambda t}T(t)\,x\,dt.$$

Отсюда и из (13.27) следует, что при любом фиксированном $\omega > \omega_0$ при $\mathrm{Re}\ \lambda > \omega$ справедливо неравенство

$$\|[R(\lambda)]^i\| \leqslant \frac{c(\omega)}{(i-1)!}\int_0^\infty t^{i-1}e^{(\omega-\mathrm{Re}\,\lambda)t}\,dt = \frac{c(\omega)}{(\mathrm{Re}\,\lambda-\omega)^i}.$$

Необходимость доказана.

Переходим к доказательству достаточности. Пусть оператор $A$ удовлетворяет условиям теоремы 13.1. Построим ту полугруппу, производящим оператором которой он является.

Введем в рассмотрение операторы

$$A_n = nAR(n) = nA(nI + A)^{-1}, \tag{13.40}$$

где $n$ принимает целые значения, большие, чем $\sigma_0$. Очевидно, все операторы $A_n$ ограничены.

Покажем, что операторы $A_n$ на элементах $x \in D(A)$ сходятся к $A$:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0. \tag{13.41}$$

Для этого вначале заметим, что для любого $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| n(nI + A)^{-1} x - x \right\| = 0. \tag{13.42}$$

Это равенство очевидно для элементов $x \in D(A)$, так как в этом случае

$$n(nI + A)^{-1} x - x = -(nI + A)^{-1} Ax = -R(n) Ax$$

и в силу (13.38)

$$\left\| n(nI + A)^{-1} x - x \right\| = \frac{cn}{n - \sigma_0} \|Ax\|.$$

Справедливость равенства (13.42) для других элементов $x \in E$ вытекает из плотности $D(A)$ в $E$ и из равномерной ограниченности норм операторов $n(nI + A)^{-1}$:

$$\left\| n(nI + A)^{-1} \right\| = n\|R(n)\| \leqslant \frac{cn}{n - \sigma_0}.$$

Теперь равенство (13.41) доказывается без труда, так как при $x \in D(A)$

$$A_n x - Ax = n(nI + A)^{-1} Ax - Ax.$$

Определим операторы $e^{-A_n t}$ при помощи формулы (13.20). Так как

$$A_n = nI - n^2(nI + A)^{-1},$$

то

$$e^{-A_n t} = e^{-nt} e^{n^2 (nI + A)^{-1} t} = e^{-nt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i n^{2i}}{i!} [R(n)]^i.$$

Из оценок (13.38) вытекает, что

$$\|e^{-A_n t}\| \leqslant e^{-nt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i n^{2i}}{i!} \|[R(n)]^i\| \leqslant$$

$$\leqslant ce^{-nt} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\frac{tn^2}{n-\sigma_0}\right)^i \leqslant ce^{\left(-n+\frac{n^2}{n-\sigma_0}\right)t},$$

т. е. при достаточно больших $n$

$$\|e^{-A_n t}\| \leqslant ce^{\frac{n\sigma_0 t}{n-\sigma_0}} \leqslant ce^{(\sigma_0+\varepsilon)t} \quad (t \geqslant 0), \qquad (13.43)$$

где $\varepsilon$ — сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Покажем теперь, что последовательность ограниченных операторов $e^{-A_n t}$ сильно сходится на всем $E$ равномерно относительно $t$ из каждого конечного сегмента $[0, t_0]$. В силу (13.43) этот факт достаточно установить для элементов $x$ из всюду плотного в $E$ множества $D(A)$.

Пусть $x \in D(A)$. Тогда при достаточно больших $m$ и $n$

$$e^{-A_m t}x - e^{-A_n t}x = \int_0^t \frac{d}{ds} e^{-A_n(t-s)-A_m s} x\, ds =$$

$$= \int_0^t e^{-A_n(t-s)} e^{-A_m s} (A_n - A_m) x\, ds,$$

откуда в силу (13.43)

$$\|e^{-A_m t}x - e^{-A_n t}x\| \leqslant c^2 e^{(\sigma_0+\varepsilon)t} t \|A_n x - A_m x\| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|A_n x - A_m x\|$$

и, в силу (13.41),

$$\lim_{n,\, m \to \infty} \|e^{-A_m t}x - e^{-A_n t}x\| = 0.$$

Итак, операторы $e^{-A_n t}$ сходятся к пределу, который мы обозначим через $T(t)$.

Из (13.43) вытекает, что при каждом $x \in E$

$$\|e^{-A_n t}x\| \leqslant ce^{\frac{n\sigma_0 t}{n-\sigma_0}} \|x\|,$$

откуда, после перехода к пределу (при $n \to \infty$), получаем

$$\|T(t)x\| \leqslant ce^{\sigma_0 t}\|x\| \quad (x \in E),$$

т. е.

$$\|T(t)\| \leqslant ce^{\sigma_0 t}. \tag{13.44}$$

Так как оператор-функции $e^{-A_n t}$ сильно непрерывны и функции $e^{-A_n t}x$ сходятся к $T(t)x$ равномерно по $t$, то оператор-функция $T(t)$ также сильно непрерывна. Очевидно, $T(0)=I$. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{-A_n(t+s)}x = e^{-A_n t}e^{-A_n s},$$

получим соотношение $T(t+s)=T(t)T(s)$. Таким образом, $T(t)$ — это сильно непрерывная полугруппа ограниченных операторов.

Покажем теперь, что оператор $-A$ является производящим оператором полугруппы $T(t)$.

Пусть $x \in D(A)$. Переходя к пределу в равенстве

$$e^{-A_n t}x - x = -\int_0^t e^{-A_n s}A_n x\,ds,$$

получим соотношение

$$T(t)x - x = -\int_0^t T(s)Ax\,ds, \tag{13.45}$$

из которого вытекает, что $x$ принадлежит области определения производящего оператора $-\tilde{A}$ полугруппы $T(t)$, причем $\tilde{A}x = Ax$ при $x \in D(A)$. Множество значений оператора $\lambda I + \tilde{A}$ при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ совпадает (в силу леммы 13.3) со всем пространством $E$, т. е. с множеством значений оператора $\lambda I + A$. Отсюда вытекает, что операторы $A$ и $\tilde{A}$ совпадают.

Теорема 13.1 полностью доказана.

Полезно заметить, что доказательство достаточности опирается лишь на неравенства (13.38) при целых и достаточно больших вещественных $\lambda = n$.

**13.7. Аналитические полугруппы.** Пусть $A$ — положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H$ и

$$T(t) = e^{-At} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dP_\lambda \tag{13.46}$$

— порожденная этим оператором сильно непрерывная полугруппа (см. п. 13.3). Оказывается, что при $t > 0$ эта полугруппа аналитическая.

Действительно, рассмотрим при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ оператор-функцию

$$T(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z}\, dP_\lambda. \tag{13.47}$$

Так как функция $e^{-\lambda z}$ непрерывна по $z$ и при любом $x \in E$ интеграл

$$(T(z)\, x,\ x) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} d\,(P_\lambda x,\ x) \quad (x \in H)$$

равномерно по $z$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ сходится, то оператор-функция $T(z)$ сильно непрерывна по $z$ при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Наконец, так как функция $e^{-\lambda z}$ аналитична по $z$, то оператор-функция $T(z)$ аналитична по $z$ при $\operatorname{Re} z > 0$. Эта оператор-функция представляет собой аналитическое продолжение оператор-функции $T(t)$ в правую полуплоскость.

Перейдем к общему случаю полугрупп в банаховом пространстве. Будем говорить, что такая полугруппа $T(t)$ аналитическая, если ее можно с полуоси $0 \leqslant t < \infty$ продолжить в оператор-функцию, аналитическую в некотором секторе:

$$S_\alpha = \{z\colon\ |\arg z| < \alpha,\ 0 < |z| < \infty\},$$

где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, и сильно непрерывную на замыкании $\bar{S}_\alpha$ этого сектора. Это продолжение будет обладать полугрупповым свойством:

$$T(z_1 + z_2) = T(z_1)\, T(z_2) \quad . \quad (z_1,\ z_2,\ \in \bar{S}_\alpha). \tag{13.48}$$

Последнее вытекает из полугруппового тождества для оператор-функции $T(z)$ на вещественной полуоси $0 \leqslant t < \infty$

и аналитичности оператор-функции $T(z)$ в секторе $S_\alpha$, содержащем положительную действительную полуось.

Теорема 13.2 *). *Для того чтобы оператор* $-A$ *был производящим оператором аналитической полугруппы* $T(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы резольвентное множество* $\Lambda(-A)$ *этого оператора содержало некоторую полуплоскость* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, *и чтобы при* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ *выполнялось неравенство*

$$\|R(\lambda, -A)\| \leqslant \frac{c}{1+|\lambda|}. \tag{13.49}$$

Доказательство необходимости. Пусть $T(t)$ — аналитическая полугруппа, а $T(z)$ — ее аналитическое продолжение в некоторый сектор $S_\alpha$, сильно непрерывное на замыкании этого сектора. Из (13.48) и сильной непрерывности $T(z)$ в $\overline{S}_\alpha$ вытекает, что при некоторых $\omega$ и $C = C(\omega)$ выполняется неравенство

$$\|T(z)\| \leqslant C(\omega)\, e^{\omega|z|} \qquad (z \in \overline{S}_\alpha) \tag{13.50}$$

(это неравенство можно доказать теми же рассуждениями, которые были применены в п. 13.4 при выводе неравенства (13.27)). Очевидно, $\omega > \omega_0$, где $\omega_0$ — порядок роста полугруппы $T(t)$.

Из оценки (13.50) следует, что аналитическая оператор-функция $A(z) = e^{-\lambda z}T(z)$ при всех $z \in S_\alpha$ удовлетворяет неравенству

$$\|A(z)\| \leqslant C(\omega)\, e^{-\rho(\sigma\cos\varphi - \tau\sin\varphi - \omega)} \qquad (\lambda = \sigma + i\tau, \quad z = \rho e^{i\varphi}). \tag{13.51}$$

Пусть $\Gamma_1$ — луч $z = \rho e^{i\varphi_0}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$, где $\varphi_0$ — некоторое фиксированное число из $(0, \alpha)$. Оценка (13.51) означает, в частности, что $\max\limits_{0 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_0} \|zA(z)\| \to 0$ при $z \to \infty$, если $\sigma > \dfrac{\omega}{\cos\varphi_0}$ и $\tau < 0$. Следовательно, при этих значениях $\lambda$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt = \int_{\Gamma_1} e^{-\lambda z}T(z)\,dz.$$

*) М. З. Соломяк [1], К. Иосида [1].

С другой стороны, в силу леммы 13.3 оператор $\lambda I + A$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$ имеет ограниченный обратный $R(\lambda, -A)$ и справедлива формула (13.35). Поэтому при любом $\lambda = \sigma + i\tau$, где $\sigma > \dfrac{\omega}{\cos\varphi_0}$, $\tau < 0$,

$$R(\lambda, -A) = \int_{\Gamma_1} e^{-\lambda z} T(z)\, dz.$$

Аналогично показывается, что при любом $\lambda = \sigma + i\tau$, где $\sigma > \dfrac{\omega}{\cos\varphi_0}$ и $\tau > 0$,

$$R(\lambda, -A) = \int_{\Gamma_2} e^{-\lambda z} T(z)\, dz,$$

где $\Gamma_2$ — луч $z = \rho e^{-i\varphi_0}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$.

Из двух последних формул для $R(\lambda, -A)$ и неравенства (13.51) следует, что при $\lambda = \sigma + i\tau$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > \dfrac{\omega}{\cos\varphi_0}$ справедливо неравенство

$$\|R(\lambda, -A)\| \leqslant \frac{C(\omega)}{\sigma\cos\varphi_0 + |\tau|\sin\varphi_0 - \omega} \leqslant \frac{c}{1 + |\lambda|}. \qquad (13.52)$$

Необходимость условий теоремы доказана. Предоставляем читателю показать, что неравенство (13.49) выполняется в любой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ при $\sigma_0 > \omega_0$ ($\omega_0$ — порядок роста полугруппы $T(t)$).

Для доказательства достаточности укажем формулу, определяющую полугруппу $T(t)$. Будем считать, что $\sigma_0 > 0$.

Из неравенства (13.49) и леммы 13.1 вытекает, что резольвента $R(\lambda, -A)$ оператора $-A$ определена не только при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$, но и при всех значениях $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{i\varphi}$, где $0 \leqslant \rho < \infty$, $\left|\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{c}$. Простой подсчет показывает, что норма резольвенты $R(\lambda, -A)$ удовлетворяет неравенству

$$\|R(\lambda, -A)\| \leqslant \frac{c(\alpha)}{1 + |\lambda|} \quad (\lambda = \sigma_0 + \sigma e^{i\varphi},\ 0 \leqslant |\varphi| \leqslant \alpha), \qquad (13.53)$$

где $\alpha$ — какое угодно фиксированное число из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{c}\right)$.

Обозначим через $\Pi_1(\alpha, \sigma_0) + \Pi_2(\alpha, \sigma_0)$ ломаную, состоящую из двух лучей $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{-i\alpha}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ и $\lambda = \sigma_0 + \rho e^{i\alpha}$

$(0 \leqslant \rho < \infty)$; будем считать, что эта ломаная ориентирована, как указано на рис. 13.1.

Положим

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_0) + \Pi_2(\alpha, \sigma_0)} e^{\lambda z} R(\lambda, -A)\, d\lambda. \qquad (13.54)$$

Из оценки (13.53) вытекает, что интеграл в (13.54) сходится при значениях $z$ из сектора $S_{\alpha - \frac{\pi}{2}}$ и определяет в этом секторе аналитическую оператор-функцию.

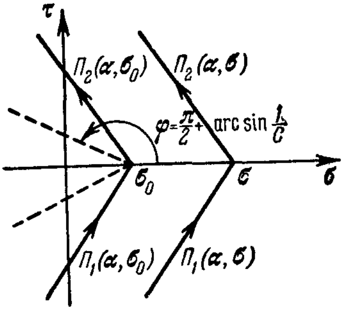


Рис. 13.1.

При определении оператор-функции $T(z)$ фиксировалось некоторое число $\alpha$. Из аналитичности резольвенты $R(\lambda, -A)$ и оценки (13.53) вытекает (детали предоставляем читателю), что значения интеграла не зависят от $\alpha$, если, конечно, $\arg z$ достаточно мал. Поэтому в дальнейшем можно считать, что оператор-функция $T(z)$ определена в открытом секторе $S_{\arcsin \frac{1}{c}}$.

Выше мы рассматривали интегральное представление оператор-функции $T(z)$, в котором контур интегрирования состоял из ломаной с вершиной в точке $\sigma_0$. Аналитичность резольвенты и оценка (13.53) позволяют перейти к новым представлениям:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma) + \Pi_2(\alpha, \sigma)} e^{\lambda z} R(\lambda, -A)\, d\lambda, \qquad (13.55)$$

где $\Pi_1(\alpha, \sigma) + \Pi_2(\alpha, \sigma)$ — контур, состоящий из лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\alpha}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{i\alpha}$ $(0 \leqslant \rho < \infty)$, где $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{c}$ (см. рис. 13.1).

Формула (13.55) позволяет получить простые оценки норм операторов $T(z)$. Для получения этих оценок при каждом фиксированном $z = |z| e^{i\theta}$ воспользуемся формулой

(13.55), в которой контур интегрирования $\Pi_1(\alpha, \sigma) + \Pi_2(\alpha, \sigma)$ выбирается так, что $\alpha - \frac{\pi}{2} > |\theta|$ и

$$\sigma = \sigma(z) = \begin{cases} \frac{1}{|z|}, & \text{если} \quad |z| < \frac{1}{\sigma_0}, \\ \sigma_0, & \text{если} \quad |z| \geqslant \frac{1}{\sigma_0}. \end{cases} \tag{13.56}$$

Тогда из (13.53) вытекает, что

$$\| T(z) \| \leqslant \frac{c(\alpha) \, |e^{\sigma(z) z}|}{2\pi} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{\rho |z| \cos(\theta - \alpha)}}{1 + |\sigma(z) + \rho e^{-i\alpha}|} d\rho + \int_0^\infty \frac{e^{\rho |z| \cos(\theta + \alpha)}}{1 + |\sigma(z) + \rho e^{i\alpha}|} d\rho \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha) \, e^{\sigma(z) \operatorname{Re} z}}{2\pi [1 + \sigma(z) \sin\alpha]} \left\{ \int_0^\infty e^{\rho |z| \cos(\theta - \alpha)} d\rho + \int_0^\infty e^{\rho |z| \cos(\theta + \alpha)} d\rho \right\} =$$

$$= \frac{c(\alpha) \, e^{\sigma(z) \operatorname{Re} z}}{2\pi |z| [1 + \sigma(z) \sin\alpha]} \left[ \frac{1}{|\cos(\theta - \alpha)|} + \frac{1}{|\cos(\theta + \alpha)|} \right],$$

откуда следует неравенство

$$\| T(z) \| \leqslant k(\alpha) \, e^{\sigma_0 \operatorname{Re} z} \qquad (z \in S_\alpha). \tag{13.57}$$

Оператор-функция $T(z)$ сильно непрерывна в замыкании $\bar{S}_{\alpha_0}$ каждого сектора $S_{\alpha_0}$ $\left(\alpha_0 < \arcsin \frac{1}{c}\right)$, если в нуле ее доопределить равенством

$$T(0) = I.$$

Так как в силу (13.57) нормы $T(z)$ при малых $z \in S_\alpha$ равномерно ограничены, то для доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{z \in S_\alpha, \, z \to 0} \| T(z) x - x \| = 0$$

для элементов $x$ из плотной в пространстве $E$ области определения $D(A)$ оператора $A$.

Пусть $x \in D(A)$. Из формулы

$$(\lambda I + A)^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x - \frac{1}{\lambda} (\lambda I + A)^{-1} A x$$

следует, что

$$T(z)x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma)+\Pi_2(\alpha,\sigma)} \left[\frac{e^{\lambda z}}{\lambda} x - \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda, -A)Ax\right] d\lambda,$$

и так как

$$\int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma)+\Pi_2(\alpha,\sigma)} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} d\lambda = 2\pi i,$$

то

$$T(z)x - x = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma)+\Pi_2(\alpha,\sigma)} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda, -A)Ax\, d\lambda.$$

Из (13.53) вытекает, что

$$\left\| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma)+\Pi_2(\alpha,\sigma)} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda, -A)Ax\, d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha)e^{\sigma \operatorname{Re} z}}{2\pi(1+\sigma \sin\alpha)\sigma \sin\alpha |z|} \left[\frac{1}{|\cos(\theta-\alpha)|} + \frac{1}{|\cos(\theta+\alpha)|}\right].$$

Снова выбирая в качестве $\sigma$ число, определенное равенством (13.56), получаем неравенство

$$\left\| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma)+\Pi_2(\alpha,\sigma)} \frac{e^{\lambda z}}{\lambda} R(\lambda, -A)Ax\, d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |z|\, k(\alpha)\, e^{\gamma_0 \operatorname{Re} z} \qquad (z \in S_\alpha),$$

из которого вытекает, что $\|T(z)x - x\| \to 0$ при $z \to 0$ и $z \in S_\alpha$.

Для завершения доказательства нам осталось показать, что $T(z)$ обладает полугрупповым свойством

$$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2) \tag{13.58}$$

и что оператор $-A$ является производящим оператором полугруппы $T(t)$.

Пусть $z_1$ и $z_2$ — фиксированные числа из сектора $S_\alpha$. Суперпозицию операторов $T(z_1)$ и $T(z_2)$ можно представить в виде

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma_1)+\Pi_2(\alpha,\sigma_1)} \int\limits_{\Pi_1(\alpha,\sigma_2)+\Pi_2(\alpha,\sigma_2)} e^{\lambda z_1} e^{\nu z_2} \times$$

$$\times R(\lambda, -A)R(\nu, -A)\, d\lambda\, d\nu,$$

Будем считать при этом, что числа $\sigma_1$, $\sigma_2$ различны и, для определенности, $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Из тождества

$$R(\lambda, -A)R(\nu, -A) = \frac{R(\lambda, -A) - R(\nu, -A)}{\nu - \lambda}$$

вытекает, что

$$T(z_1)T(z_2) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_1)+\Pi_2(\alpha, \sigma_1)} e^{\lambda z_1}\left[-\int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_2)+\Pi_2(\alpha, \sigma_2)} \frac{e^{\nu z_2}R(\nu, -A)}{\nu - \lambda}\,d\nu\right]d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_2)+\Pi_2(\alpha, \sigma_2)} e^{\nu z_2}\left[-\int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_1)+\Pi_2(\alpha, \sigma_1)} \frac{e^{\lambda z_1}R(\lambda, -A)}{\lambda - \nu}\,d\lambda\right]d\nu.$$

Внутренние интегралы в правой части легко считаются (нужно применить интегральную формулу Коши для случая неограниченных контуров); первый из них равен нулю, а второй — $2\pi i e^{\nu z_1} R(\nu, -A)$. Поэтому

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma_2)+\Pi_2(\alpha, \sigma_2)} e^{\nu(z_1+z_2)} R(\nu, -A)\,d\nu =$$
$$= T(z_1 + z_2)$$

и равенство (13.58) доказано.

Так как оператор-функция $T(z)$ аналитична, то она, в частности, дифференцируема при вещественных положительных $t$, причем

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma)+\Pi_2(\alpha, \sigma)} e^{\lambda t}\lambda R(\lambda, -A)\,d\lambda. \tag{13.59}$$

Пусть $x \in D(A)$. Тогда

$$\lambda R(\lambda, -A)x = x - R(\lambda, -A)Ax$$

и в силу (13.59)

$$T'(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma)+\Pi_2(\alpha, \sigma)} e^{\lambda t}\,d\lambda x -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Pi_1(\alpha, \sigma)+\Pi_2(\alpha, \sigma)} e^{\lambda t} R(\lambda, -A)\,d\lambda\, Ax,$$

т. е.

$$T'(t)x = -T(t)Ax \qquad (t > 0,\ x \in D(A)). \tag{13.60}$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{T(t)x-x}{t}+Ax=\frac{1}{t}\int_0^t T'(\tau)x\,d\tau+Ax=$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^t[-T(\tau)+I]Ax\,d\tau,$$

откуда

$$\left\|\frac{T(t)x-x}{t}+Ax\right\|\leqslant\sup_{0\leqslant\tau\leqslant t}\|[T(\tau)-I]Ax\|.$$

Из сильной непрерывности оператор-функции $T(z)$ вытекает соотношение

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t}=-Ax\qquad(x\in D(A)).$$

Значит, оператор $-A$ является производящим оператором полугруппы $T(t)$.

Теорема доказана.

**13.8. Оценки для операторов $A^nT(t)$.** Продолжим изучение аналитических полугрупп $T(t)$.

Будем считать, что выполнено неравенство

$$\|R(\lambda,\ -A)\|\leqslant\frac{c}{1+|\lambda|}\qquad(\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0).$$

Как было показано при доказательстве теоремы 13.2, оператор-функция $T(z)$ — аналитическое продолжение полугруппы $T(t)$ — аналитична в секторе $S_{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{c}}$.

Обозначим через $K(\alpha,\ t)$ круг в комплексной плоскости с центром в точке $t$ ($t>0$) и радиусом $R=t\sin\alpha$; каждый такой круг лежит в секторе $S_\alpha$. Если $\alpha<\arcsin\frac{1}{c}$, то из неравенств (13.50) вытекает оценка

$$\|T(z)\|\leqslant c(\alpha,\ \omega)\,e^{\omega(\alpha)(1+\sin\alpha)t}\qquad(z\in K(\alpha,\ t)).$$

Отсюда и из оценок (13.9) производных аналитических функций вытекают неравенства

$$\|T^{(n)}(t)\|\leqslant\frac{n!\,c(\alpha,\ \omega)\,e^{\omega(\alpha)(1+\sin\alpha)t}}{t^n(\sin\alpha)^n}\qquad(n=1,\ 2,\ \ldots).\qquad(13.61)$$

Пусть $x \in D(A)$. Тогда, как было показано в предыдущем пункте, функция $T(t)x$ непрерывно дифференцируема при всех $t \geqslant 0$ и

$$T'(t)x = -AT(t)x = -T(t)Ax. \tag{13.62}$$

Воспользуемся теперь тем, что при $t > 0$ оператор $T'(t)$ ограничен, и тем, что множество $D(A)$ плотно в $E$; из этих фактов вытекает, что оператор $AT(t)$ может быть продолжен по непрерывности на все пространство $E$. Так как оператор $A$ замкнут, то это продолжение совпадает с самим оператором $AT(t)$. Таким образом, справедливо равенство

$$T'(t) = -AT(t) \qquad (t > 0).$$

Аналогично доказываются равенства

$$T^{(n)}(t) = (-1)^n A^n T(t) \qquad (t > 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{13.63}$$

Последние равенства означают, в частности, что операторы $A^n T(t)$ $(t > 0)$ ограничены; из (13.61) вытекает оценка

$$\|A^n T(t)\| \leqslant \frac{n!\, c(\alpha, \omega)\, e^{\omega(\alpha)(1+\sin\alpha)t}}{t^n (\sin\alpha)^n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{13.64}$$

В следующем параграфе будут введены дробные степени оператора $A$ и для них будет установлена оценка, аналогичная (13.64).

Предположим дополнительно, что оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен. Тогда множество значений каждого оператора $A^n T(t)$ $(t > 0)$ на шаре $\|x\| \leqslant 1$ будет компактным, так как оно содержится в множестве значений оператора $A^{-1}$ на шаре $\|x\| \leqslant \|A^{n+1} T(t)\|$. Это означает, что *все операторы* $A^n T(t)$ $(t > 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *вполне непрерывны.*

## § 14. Дробные степени позитивных операторов*)

**14.1. Позитивные операторы.** Во всем параграфе через $A$ обозначается замкнутый линейный оператор, действующий

---

*) Этот параграф написан в основном в соответствии со статьей М. А. Красносельского и П. Е. Соболевского [1]. В нем использован также ряд соображений А. В. Балакришнана [1, 2]. Дробные степени различных классов операторов изучали многие авторы: М. Рисс, А. Н. Колмогоров, П. Леви, В. Феллер, Н. Данфорд, Э. Хилле, Р. Филлипс, Т. Като, С. Г. Крейн и др.

в банаховом пространстве $E$ и имеющий плотную в $E$ область определения $D(A)$. Оператор $A$ будем называть *позитивным*, если при всех $t \geqslant 0$ существуют операторы $(tI+A)^{-1}$ и если

$$\|(tI+A)^{-1}\| \leqslant \frac{c}{1+t} \qquad (t \geqslant 0). \tag{14.1}$$

Простейшим примером позитивных операторов являются положительно определенные самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. В качестве второго примера можно рассмотреть операторы $A = A_1 + \sigma_0 I$, где $-A_1$ — производящий оператор сильно непрерывной полугруппы, а $\sigma_0$ — достаточно большое положительное число.

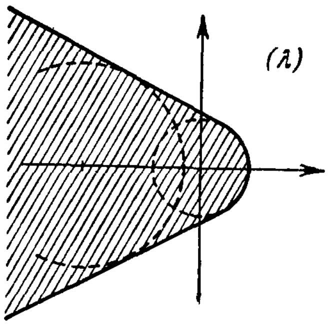


Рис. 14.1.

Из неравенства (14.1) и леммы 13.1 вытекает, что резольвентное множество $\Lambda(A)$ оператора $A$ содержит все круги $|\lambda + t| < \frac{1+t}{c}$ $(t > 0)$ (на рис. 14.1 объединение этих кругов заштриховано); в частности, $\Lambda(A)$ содержит сектор

$$|\arg \lambda - \pi| < \arcsin \frac{1}{c}.$$

Позитивные операторы, как показывают примеры, не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

**14.2. Отрицательные дробные степени.** Пусть $A$ — позитивный оператор. Определим операторы $A^{-z}$, где комплексное число $z$ удовлетворяет неравенствам $0 < \operatorname{Re} z < 1$, формулой

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty t^{-z}(tI+A)^{-1}\,dt. \tag{14.2}$$

Из (14.1) вытекает неравенство

$$\left\| \int_0^\infty t^{-z}(tI+A)^{-1}\,dt \right\| \leqslant \int_0^\infty t^{-\operatorname{Re} z} \|(tI+A)^{-1}\|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant c \int_0^\infty \frac{t^{-\operatorname{Re} z}}{1+t}\,dt = \frac{c\pi}{\sin(\pi \operatorname{Re} z)},$$

откуда вытекает ограниченность операторов $A^{-z}$ и оценка их норм

$$\|A^{-z}\| \leqslant c\,\frac{|\sin \pi z|}{\sin(\pi \operatorname{Re} z)} \qquad (0 < \operatorname{Re} z < 1). \tag{14.3}$$

В частности, при вещественных $z = \tau$

$$\|A^{-\tau}\| \leqslant c \qquad (0 < \tau < 1).$$

Для операторов $A^{-z}$ можно указать интегральные представления, отличные от (14.2). Вывод этих представлений основан на формулах

$$\frac{d^n}{dt^n}(tI+A)^{-1} = (-1)^n n!\,(tI+A)^{-n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{14.4}$$

Интегрируя правую часть формулы (14.2) по частям, получим

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi(1-z)}\, t^{1-z}(tI+A)^{-1}\Big|_0^\infty +$$
$$+ \frac{\sin \pi z}{\pi}\,\frac{1}{1-z} \int_0^\infty t^{1-z}(tI+A)^{-2}\,dt.$$

Здесь внеинтегральные члены в силу (14.1) обращаются в нуль и поэтому

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi}\,\frac{1}{1-z} \int_0^\infty t^{1-z}(tI+A)^{-2}\,dt. \tag{14.5}$$

Интеграл в (14.5) абсолютно сходится по норме операторов уже при $0 < \operatorname{Re} z < 2$; коэффициент при интеграле является целой функцией. Поэтому формула (14.5) дает аналитическое продолжение оператор-функции (14.2) в полосу $0 < \operatorname{Re} z < 2$.

Путем последовательного интегрирования по частям можно получить новые формулы для операторов $A^{-z}$:

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{n!}{(1-z)(2-z)\ldots(n-z)} \int_0^\infty t^{n-z}(tI+A)^{-n-1}\,dt. \tag{14.6}$$

Каждая из этих формул определяет аналитическое продолжение оператор-функции (14.2) в полосу $0 < \operatorname{Re} z < n+1$. Таким образом, можно считать, что операторы $A^{-z}$ определены при всех $z$ из правой полуплоскости.

Определим еще оператор $A^0$ равенством

$$A^0 = I.$$

Обозначение $A^{-k}$ применяется обычно для обозначения $k$-й степени обратного к $A$ оператора $A^{-1}$. Отметим сразу же, что такие степени обратных операторов совпадают с операторами (14.6) при $z = k$. Для доказательства достаточно заметить, что при $z = k$ правая часть формулы (14.6) (при $n > k$) просто вычисляется, если воспользоваться формулой

$$\frac{d}{dt}(tI+A)^{-n} = -n(tI+A)^{-n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Формула (14.2) в случае положительно определенного самосопряженного оператора $A$, действующего в гильбертовом пространстве (см. § 11), определяет его обычные дробные степени. Оказывается, что и в случае произвольных позитивных операторов $A$ операторы $A^{-z}$ также можно рассматривать как дробные степени. Это вытекает из следующего утверждения.

Теорема 14.1. *Пусть $A$ — позитивный оператор. Тогда справедливо полугрупповое тождество*

$$A^{-z_1}A^{-z_2} = A^{-z_1-z_2} \qquad (0 < \operatorname{Re} z_1,\ \operatorname{Re} z_2 < \infty) \tag{14.7}$$

*и полугруппа $A^{-t}$ $(t \geqslant 0)$ аналитична.*

Доказательство. Чтобы установить тождество (14.7), достаточно проверить его справедливость при вещественных $z_1$, $z_2$, удовлетворяющих неравенствам $0 < z_1,\ z_2 < \frac{1}{2}$. При таких значениях $z_1$ и $z_2$ из (14.2) вытекает равенство

$$A^{-z_1}A^{-z_2} = \\ = \frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi z_2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda^{z_1}\mu^{z_2} (\lambda I + A)^{-1} (\mu I + A)^{-1}\, d\lambda\, d\mu.$$

Двойной интеграл справа берется по квадранту $\lambda,\ \mu \geqslant 0$. Разобьем его на два интеграла, $J_1$ и $J_2$, один по области $\lambda \leqslant \mu$, а другой — по области $\mu \leqslant \lambda$, и произведем в первом из них замену $\lambda = \mu u$, а во втором замену $\mu = \lambda u$. В результате получим

$$A^{-z_1}A^{-z_2} = \\ = \frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi z_2}{\pi} \left[ \int_0^\infty \mu^{1-z_1-z_2} R(\mu, A) \int_0^1 u^{-z_1} R(\mu u, A)\, du\, d\mu + \right. \\ \left. + \int_0^\infty \lambda^{1-z_1-z_2} R(\lambda, A) \int_0^1 u^{-z_2} R(\lambda u, A)\, du\, d\lambda \right],$$

откуда вытекает, что

$$A^{-z_1}A^{-z_2} = \frac{\sin \pi z_1}{\pi} \frac{\sin \pi z_2}{\pi} \times \\ \times \int_0^\infty \lambda^{1-z_1-z_2} \left[ \int_0^1 \left(u^{-z_1} + u^{-z_2}\right) (\lambda I + A)^{-1} (\lambda u I + A)^{-1}\, du \right] d\lambda.$$

Из тождества

$$(\lambda I + A)^{-1} (\lambda u I + A)^{-1} = \frac{(\lambda u I + A)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}}{\lambda (1 - u)}$$

вытекает теперь, что

$$A^{-z_1}A^{-z_2}=\frac{\sin\pi z_1}{\pi}\frac{\sin\pi z_2}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1 \frac{u^{-z_1}+u^{-z_2}}{1-u}\left[(\lambda uI+A)^{-1}-(\lambda I+A)^{-1}\right]du\right\}d\lambda=$$

$$=\frac{\sin\pi z_1}{\pi}\frac{\sin\pi z_2}{\pi}\int_0^1 \frac{u^{-z_1}+u^{-z_2}}{1-u}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}\left[(\lambda uI+A)^{-1}-(\lambda I+A)^{-1}\right]d\lambda\right\}du,$$

а так как

$$\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}\left[(\lambda uI+A)^{-1}-(\lambda I+A)^{-1}\right]d\lambda=$$

$$=\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}\left(u^{z_1+z_2-1}-1\right)(\lambda I+A)^{-1}\,d\lambda,$$

то мы приходим к следующему представлению для оператора $A^{-z_1}A^{-z_2}$:

$$A^{-z_1}A^{-z_2}=\left\{\frac{\sin\pi z_1}{\pi}\frac{\sin\pi z_2}{\pi}\int_0^1 \frac{(u^{-z_1}+u^{-z_2})(1-u^{1-z_1-z_2})}{u^{1-z_1-z_2}}\,du\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}(\lambda I+A)^{-1}\,d\lambda. \qquad (14.8)$$

Равенство справедливо, в частности, если $A$ – оператор умножения на положительное число $a$; в этом случае $A^{-z}$ — это оператор умножения на $a^{-z}$. Поэтому для этого оператора выполняется полугрупповое тождество $a^{-z_1}a^{-z_2}=a^{-z_1-z_2}$ и, следовательно, коэффициент в фигурных скобках равен $\frac{\sin\pi(z_1+z_2)}{\pi}$. Таким образом,

$$A^{-z_1}A^{-z_2}=\frac{\sin\pi(z_1+z_2)}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-z_1-z_2}R(\lambda,A)\,d\lambda=A^{-z_1-z_2}.$$

Нам осталось проверить, что оператор-функция $A^{-z}$ сильно непрерывна в нулевой точке, если ее рассматривать в некотором секторе $S_\alpha = \{z\colon\ z = |z|\,e^{i\theta},\ |z| > 0,\ |\theta| \leqslant \alpha\}$, где $\alpha < \frac{\pi}{2}$. В каждом таком секторе нормы операторов $A^{-z}$ при малых $z$ равномерно ограничены — это вытекает из оценки (14.3). Поэтому для доказательства сильной непрерывности достаточно показать, что

$$\lim_{z \in S_\alpha,\ z \to 0} \|A^{-z}x - x\| = 0 \tag{14.9}$$

для элементов $x$ из некоторого плотного в $E$ множества. В качестве такого плотного множества мы рассмотрим область определения $D(A)$ оператора $A$.

Пусть $x \in D(A)$. Тогда $x = A^{-1}y$, где $y \in E$, и

$$A^{-z}x - x = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty t^{-z}(tI + A)^{-1} A^{-1} y\, dt -$$

$$- \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty t^{-z} \frac{dt}{1+t} A^{-1} y =$$

$$= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{-z}}{1+t} (tI + A)^{-1}\, dt \left(A^{-1}y - y\right).$$

Из (14.1) тогда вытекает оценка

$$\|A^{-z}x - x\| \leqslant \frac{|\sin \pi z|}{\pi} \int_0^\infty \frac{ct^{-\operatorname{Re} z}}{(1+t)^2}\, dt\, \|A^{-1}y - y\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\pi}\left[\frac{1}{1 - \operatorname{Re} z} + \frac{1}{2}\right] |\sin \pi z|\, \|A^{-1}y - y\|,$$

из которой следует (14.9).

Теорема доказана.

**14.3. Положительные дробные степени.** Пусть снова $A$ — позитивный оператор. Из (14.1) вытекает, в частности, существование обратного оператора к $A$. Поэтому все операторы $A^{-n}$, где $n = 1, 2, \ldots$, принимают нулевое значение лишь на нулевом элементе. Пусть $z$ — произвольное число из правой полуплоскости и $n > |\operatorname{Re} z|$. Из тождества $A^{-n} = A^{-(n-z)}A^{-z}$ вытекает тогда, что оператор $A^{-z}$ принимает нулевое значение только на нулевом элементе. Это значит, что оператор $A^{-z}$ имеет обратный, который мы обозначим через $A^z$:

$$A^z = (A^{-z})^{-1}. \tag{14.10}$$

Операторы $A^z$ при $\operatorname{Re} z > 0$ уже будут неограниченными, если неограничен сам оператор $A$. Из ограниченности операторов $A^{-z}$ вытекает, что операторы $A^z$ замкнуты.

Область определения $D(A^z)$ каждого оператора $A^z$ ($\operatorname{Re} z > 0$) совпадает с множеством значений $R(A^{-z})$ оператора $A^{-z}$. Из равенства

$$A^{-z_1} = A^{-z_2}A^{-(z_1-z_2)} \qquad (0 < \operatorname{Re} z_2 < \operatorname{Re} z_1)$$

следует, что $R(A^{-z_1}) \subset R(A^{-z_2})$; поэтому

$$D(A^{z_1}) \subset D(A^{z_2}) \qquad (\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2). \tag{14.11}$$

Из этих включений вытекает, что области определения всех операторов $A^z$ ($\operatorname{Re} z > 0$) плотны в $E$, так как в $E$ плотны области определения операторов $A^n$ при целых $n$ (см. п. 13 2).

Пусть снова $\operatorname{Re} z_1 > \operatorname{Re} z_2$. Обозначим через $B$ оператор, определенный на $D(A^{z_1})$ равенством $Bx = A^{z_2}x$. Оказывается, что замыкание оператора $B$ совпадает с оператором $A^{z_2}$. Докажем этот простой, но важный факт.

Пусть $x_0$ — любой элемент из $D(A^{z_2})$. Выберем в $D(A^{z_1-z_2})$ последовательность элементов $y_n$, сходящуюся к элементу $A^{z_2}x_0$. Положим $x_n = A^{-z_2}y_n$; тогда $x_n \in D(A^{z_1})$ и $Bx_n = y_n$. Очевидно,

$$\|x_n - x_0\| = \|A^{-z_2}y_n - A^{-z_2}A^{z_2}x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{-z_2}\| \, \|y_n - A^{z_2}x_0\| \to 0$$

и $Bx_n$ сходится к $A^{z_2}x_0$. Значит, $x_0$ принадлежит области определения замыкания $\bar{B}$ оператора $B$ и $\bar{B}x_0 = A^{z_2}x_0$. Наше утверждение доказано.

Выше было установлено тождество

$$A^{z_1}A^{z_2} = A^{z_2}A^{z_1} = A^{z_1+z_2} \tag{14.12}$$

для показателей $z_1$ и $z_2$ из правой полуплоскости. Очевидно, оно сохраняет силу для любых показателей, вещественная часть которых отлична от нуля. При этом в случае неограниченных операторов равенство (14.12) означает, что $A^{z_1}A^{z_2}x = A^{z_2}A^{z_1}x = A^{z_1+z_2}x$ для всех тех элементов $x$, для которых определены $A^{z_1}x$, $A^{z_2}x$, $A^{z_1+z_2}x$.

Без труда показывается, что операторы $A^z$ при любых показателях $z$ ($\operatorname{Re} z \neq 0$) перестановочны с резольвентой $(\lambda I - A)^{-1}$. Если $\operatorname{Re} z > 0$, то для любого $x \in D(A^z)$

$$A^z(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}A^z x. \tag{14.13}$$

Отметим еще, что операторы $A^z(tI + A)^{-n}$ ограничены равномерно по $t \geqslant 0$ при фиксированных $z$ и $n$, $0 < \operatorname{Re} z < n$:

$$\| A^z(tI + A)^{-n} \| \leqslant C(z, n) \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{14.14}$$

Доказательство вытекает из очевидных неравенств

$$\| A^z(tI + A)^{-n} \| \leqslant \| A^z A^{-n}[A(tI + A)^{-1}]^n \| \leqslant$$
$$\leqslant \| A^{z-n} \| \, \| A(tI + A)^{-1} \|^n \leqslant \| A^{z-n} \| \, \| I - t(tI + A)^{-1} \|^n \leqslant$$
$$\leqslant \| A^{z-n} \| (1 + c)^n.$$

Предположим, что $0 < \operatorname{Re} z < n$. Тогда в силу (14.6)

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{n!}{z(z-1)\ldots(z-n+1)} \int_0^\infty t^z (tI + A)^{-n-1} A^n x \, dt$$
$$(x \in D(A^n)). \tag{14.15}$$

Эту формулу можно рассматривать и как определение значений оператора $A^z$ на $D(A^n)$. Замыкание определенного правой частью оператора позволяет восстановить, как уже было показано, его значения на всей области $D(A^z)$.

Формулу (14.15) в некоторых случаях удобно заменить эквивалентной:

$$A^z x = \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^\infty \lambda^z \left[ (\lambda I + A)^{-1} x - \frac{\theta(\lambda) x}{\lambda} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{\theta(\lambda) A^{n-1} x}{\lambda^n} \right] d\lambda +$$

$$+ \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[ \frac{x}{z} - \frac{Ax}{z-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{A^{n-1} x}{z-n+1} \right] \tag{14.16}$$

$$(x \in D(A^n)),$$

где

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \\ 1, & \text{если} \quad 1 < \lambda < \infty; \end{cases} \tag{14.17}$$

при этом в (14.16) правая часть при целых вещественных $z = k$ считается равной $A^k x$. Интеграл в правой части формул (14.15) и (14.16) сходится не только для позитивных операторов $A$ — достаточно, чтобы выполнялось менее ограничительное, чем (14.1), неравенство

$$\| t(tI + A)^{-1} \| < c \qquad (t > 0). \tag{14.18}$$

Если принять формулу (14.16) за определение дробной степени, то операторы $A^z$ вначале определяются на плотных в $E$ множествах и затем доопределяются при помощи обычного замыкания. Полугрупповые тождества также сначала доказываются на некоторых плотных в $E$ множествах, а затем распространяются при помощи естественного предельного перехода.

**14.4. Неравенство моментов.** В п. 12.2 для положительно определенных самосопряженных операторов $A$ было установлено важное неравенство моментов:

$$\| A^\tau x \| \leqslant \| Ax \|^\tau \| x \|^{1-\tau} \qquad (x \in D(A)). \tag{14.19}$$

В этом пункте мы укажем его обобщение для позитивных операторов, действующих как в гильбертовом, так и банаховом пространствах.

Лемма 14.1. *Пусть $A$ — позитивный оператор:*

$$\|(tI+A)^{-1}\| \leqslant \frac{c}{1+t} \qquad (t \geqslant 0). \tag{14.20}$$

*Тогда дробные степени $A^\delta$ $(\delta > 0)$ удовлетворяют неравенству*

$$\left\| A^\delta (tI+A)^{-n} \right\| \leqslant \frac{C(n,\delta)}{(1+t)^{n-\delta}} \qquad (t \geqslant 0) \tag{14.21}$$

*при каждом $n > \delta$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, операторы $A^n(tI+A)^{-n}$ ограничены; значения оператора $(tI+A)^{-n}$ принадлежат $D(A^n)$. Следовательно, из (14.15) вытекает, что

$$A^\delta (tI+A)^{-n} = \frac{\sin \pi\delta}{\pi} \frac{n!}{\delta(\delta-1)\dots(\delta-n+1)} \times$$

$$\times \int_0^\infty s^\delta (sI+A)^{-n-1} A^n (tI+A)^{-n} ds. \tag{14.22}$$

Для оценки нормы оператора $A^\delta (tI+A)^{-n}$ разобьем интеграл в правой части равенства (14.22) на два слагаемых — на интеграл по промежутку $[0, N]$ и на интеграл по промежутку $[N, \infty)$, где $N$ — число, которое предварительно не фиксируется. Каждое из двух слагаемых оценим независимо. Получившаяся оценка будет, конечно, зависеть от числа $N$. Наконец, обычными методами дифференциального исчисления найдем такое $N$, при котором правая часть оценки принимает минимальное значение.

Итак, пусть

$$A^\delta (tI+A)^{-n} = \frac{\sin \pi\delta}{\pi} \frac{n!}{\delta(\delta-1)\dots(\delta-n+1)} [J_1 + J_2],$$

где

$$J_1 = \int_0^N s^\delta (sI+A)^{-n-1} A^n (tI+A)^{-n} ds,$$

$$J_2 = \int_N^\infty s^\delta (sI+A)^{-n-1} A^n (tI+A)^{-n} ds.$$

При оценке обоих интегралов используется очевидное неравенство

$$\|A^n (uI + A)^{-n}\| \leqslant (c+1)^n \quad (0 \leqslant u < \infty),$$

вытекающее из (14.20):

$$\|A^n (uI + A)^{-n}\| \leqslant \|A (uI + A)^{-1}\|^n = \\ = \|I - u (uI + A)^{-1}\|^n \leqslant (c+1)^n.$$

Из этого неравенства для первого интеграла $J_1$ получаем оценку

$$\|J_1\| \leqslant c (c+1)^n \int_0^N s^{\delta-1} ds \, \|(tI + A)^{-n}\| \leqslant \frac{c^{n+1} (c+1)^n}{\delta (1+t)^n} N^{\delta},$$

а для второго — оценку

$$\|J_2\| \leqslant c^{n+1} (c+1)^n \int_N^{\infty} s^{\delta-n-1} ds = \frac{c^{n+1} (c+1)^n}{n-\delta} N^{\delta-n}.$$

Таким образом,

$$\|A^{\delta} (tI + A)^{-n}\| \leqslant \frac{|\sin \pi\delta|}{\pi} \frac{n!}{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+1)} c^{n+1} (c+1)^n \times \\ \times \left[\frac{N^{\delta}}{\delta(1+t)^n} + \frac{N^{\delta-n}}{n-\delta}\right]. \qquad (14.23)$$

Правая часть принимает минимальное значение при

$$N = (1+t).$$

Подставляя это значение $N$ в правую часть формулы (14.23), получим оценку (14.21), где

$$C(n, \delta) = \frac{|\sin \pi\delta|}{\pi} \frac{n!}{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+1)} \frac{nc^{n+1} (c+1)^n}{\delta(n-\delta)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 14.2. *Пусть $A$ — позитивный оператор. Пусть вещественные числа $\alpha$ и $\beta$ имеют одинаковый знак и $0 < |\alpha| < |\beta|$.*

*Тогда справедливо неравенство моментов*

$$\|A^{\alpha} x\| \leqslant k(\alpha, \beta) \|A^{\beta} x\|^{\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \quad (x \in D(A^{\beta})). \qquad (14.24)$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда числа $\alpha$, $\beta$ отрицательны. Представим оператор $A^\alpha$ равенством (14.6):

$$A^\alpha x = -\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{n!}{(1+\alpha)\dots(n+\alpha)} \int_0^\infty t^{n+\alpha}(tI+A)^{-n-1} x\,dt,$$

где $n > |\beta|$. Интеграл в правой части снова, как при доказательстве леммы 14.1, разобьем на интегралы по промежуткам $[0, N]$ и $[N, \infty)$, оценим каждый интеграл в отдельности, а затем выберем такое $N$, при котором правая часть получающейся оценки принимает минимальное значение.

Итак, пусть

$$A^\alpha x = -\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{n!}{(1+\alpha)\dots(n+\alpha)} [J_1 + J_2],$$

где

$$J_1 = \int_0^N t^{n+\alpha}(tI+A)^{-n-1} x\,dt,$$

$$J_2 = \int_N^\infty t^{n+\alpha}(tI+A)^{-n-1} x\,dt.$$

Из леммы 14.2 вытекает, что

$$\|J_1\| \leqslant \left\| \int_0^N t^{n+\alpha} A^{-\beta}(tI+A)^{-n-1} A^\beta x\,dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C(n, \beta) \int_0^N t^{\alpha-\beta-1}\,dt\, \|A^\beta x\| = \frac{C(n, \beta)}{|\beta-\alpha|} \|A^\beta x\| N^{\alpha-\beta}.$$

Оценка второго интеграла $J_2$ вытекает из (14.20):

$$\|J_2\| = \left\| \int_N^\infty t^{n+\alpha}(tI+A)^{-n-1} x\,dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant c^{n+1} \int_N^\infty t^{\alpha-1}\,dt\, \|x\| = \frac{c^{n+1}}{\alpha} \|x\| N^\alpha$$

Из этих оценок следует, что

$$\|A^{\alpha}x\| \leqslant \frac{|\sin \pi\alpha|}{\pi} \frac{n!}{(1+\alpha)\ldots(n+\alpha)} \times \\ \times \left\{ \frac{C(n, \beta)}{\beta-\alpha} \|A^{\beta}x\| N^{\alpha-\beta} + \frac{c^{n+1}}{\alpha} \|x\| N^{\alpha} \right\}. \quad (14.25)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, принимает наименьшее значение при

$$N = \left[ \frac{c^{n+1}}{C(n, \beta)} \frac{\|x\|}{\|A^{\beta}x\|} \right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

При этом значении $N$ неравенство (14.25) имеет вид

$$\|A^{\alpha}x\| \leqslant \frac{|\sin \pi\alpha|}{\pi} \frac{n!}{(1+\alpha)\ldots(n+\alpha)} \left[ \frac{C(n, \beta)^{\frac{\alpha}{\beta}} c^{(n+1)\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)} \beta}{(\beta-\alpha)\alpha} \right] \times \\ \times \|A^{\beta}x\|^{\frac{\alpha}{\beta}} \|x\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Утверждение теоремы для отрицательных $\alpha$, $\beta$ доказано.

Пусть теперь $\alpha$, $\beta$ положительны. Из доказанной части теоремы вытекает неравенство

$$\|A^{-\beta+\alpha}y\| \leqslant k(-\beta+\alpha, -\beta) \|A^{-\beta}y\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|y\|^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (y \in E). \quad (14.26)$$

Если в этом неравенстве положить $y = A^{\beta}x$ $(x \in D(A^{\beta}))$, то оно перейдет в неравенство (14.24).

Теорема полностью доказана.

**14.5. Операторы, подчиненные дробным степеням позитивного оператора.** Понятие подчиненности оператора, введенное в п. 12.3 для операторов в гильбертовом пространстве, без изменений переносится на операторы, действующие в банаховых пространствах: оператор $B$ *подчинен* оператору $A$, если $D(A) \subset D(B)$ и

$$\|Bx\| \leqslant k_0 \|Ax\| \quad (x \in D(A)), \quad (14.27)$$

где $k_0$ некоторое положительное число.

Лемма 12.1 сохраняет силу (вместе с доказательством) при переходе к банаховым пространствам. Из нее вытекает, что подчиненность оператора $B$ замкнутому оператору $A$

вытекает уже из включения $D(A) \subset D(B)$, если $A^{-1}$ ограничен. Отметим еще, что лемма 12.2 также сохраняет силу при переходе к банаховым пространствам.

Из теоремы 14.2 вытекает

Теорема 14.3. *Пусть оператор $B$ подчинен дробной степени $A^{\tau_0}$ ($\tau_0 > 0$) позитивного оператора $A$.*

*Тогда при любом $\tau \in (0, \tau_0)$ выполняется неравенство*

$$\|Bx\| \leqslant k(\tau) \|A^{\tau_0}x\|^{\frac{\tau}{\tau_0}} \|x\|^{1-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (x \in D(A^{\tau_0})). \tag{14.28}$$

Как и в случае самосопряженных строго положительно определенных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (см. теорему 12.3), эту теорему удается «почти обратить».

Теорема 14.4. *Пусть $A$ — позитивный оператор. Пусть $B$ — замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условию (14.28) при некоторых $\tau$ и $\tau_0$, $0 < \tau < \tau_0$.*

*Тогда оператор $B$ подчинен всем операторам $A^{\tau+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно ограниченности операторов $BA^{-\tau-\varepsilon}$.

Рассмотрим интеграл

$$Jx = \int_0^\infty t^{n-\tau-\varepsilon} B(tI + A)^{-n-1} x\,dt, \tag{14.29}$$

где $n$ — целое число и $n > \tau_0$. Из неравенства (14.28) вытекает оценка

$$\|B(tI + A)^{-n-1}x\| \leqslant$$
$$\leqslant k \|A^{\tau_0}(tI + A)^{-n-1}x\|^{\frac{\tau}{\tau_0}} \|(tI + A)^{-n-1}x\|^{1-\frac{\tau}{\tau_0}},$$

откуда в силу леммы 14.1

$$\|B(tI + A)^{-n-1}x\| \leqslant \frac{k_1\|x\|}{(1+t)^{n-\tau+1}}.$$

Поэтому оператор-функция, стоящая под знаком интеграла (14.29), абсолютно интегрируема на $[0, \infty)$. Значит, формула (14.29) определяет непрерывный оператор, определенный на всем $E$.

Оператор $A^{-\tau-\varepsilon}$ можно представить (см. (14.6)) интегралом

$$A^{-\tau-\varepsilon}x = \frac{\sin\pi(\tau+\varepsilon)}{\pi}\,\frac{n!}{(1-\tau-\varepsilon)\ldots(n-\tau-\varepsilon)}\times$$
$$\times\int_0^\infty t^{n-\tau-\varepsilon}(tI+A)^{-n-1}x\,dt \quad (x\in E).$$

Из замкнутости оператора $B$ следует, что

$$BA^{-\tau-\varepsilon}x = \frac{\sin\pi(\tau+\varepsilon)}{\pi}\,\frac{n!}{(1-\tau-\varepsilon)\ldots(n-\tau-\varepsilon)}\times$$
$$\times B\int_0^\infty t^{n-\tau-\varepsilon}(tI+A)^{-n-1}x\,dt =$$
$$= \frac{\sin\pi(\tau+\varepsilon)}{\pi}\,\frac{n!}{(1-\tau-\varepsilon)\ldots(n-\tau-\varepsilon)}Jx.$$

Поэтому оператор $BA^{-\tau-\varepsilon}$ ограничен.

Теорема доказана.

Как и в случае операторов в гильбертовом пространстве (см. п. 12.4), будем называть *порядком оператора $B$ относительно позитивного оператора $A$ точную нижнюю границу таких неотрицательных чисел $\tau$, что $B$ подчинен $A^\tau$*. Из теоремы 14.4 вытекает, что порядок оператора $B$ относительно позитивного оператора $A$ не больше $\tau$, если выполнено неравенство (14.28) при некоторых $\tau$ и $\tau_0$, $0<\tau<\tau_0$.

В § 16 будет использовано следующее утверждение, которое обобщает теорему 14.4 (и доказывается дословно так же).

Теорема 14.5. *Пусть $E$ и $E_1$ — два банаховых пространства. Пусть $A$ — позитивный оператор в пространстве $E$, $B$ — замкнутый линейный оператор, действующий из $E$ в $E_1$. Пусть выполняется неравенство*

$$\|Bx\|_{E_1} \leqslant k\,\|A^{\tau_0}x\|_E^{\frac{\tau}{\tau_0}}\,\|x\|_E^{1-\frac{\tau}{\tau_0}} \qquad (x\in D(A^{\tau_0})),$$

*где $0<\tau<\tau_0$.*

*Тогда при любом $\varepsilon>0$ оператор $BA^{-\tau-\varepsilon}$ действует из $E$ в $E_1$ и непрерывен.*

Возможность и важность перехода от утверждений типа теоремы 14.4 к утверждениям типа теоремы 14.5 указал В. П. Глушко.

**14.6. Общая теорема о подчиненности.** Приведем теперь более точную теорему о подчиненности операторов дробным степеням позитивных операторов.

Теорема 14.6. *Пусть $E$ и $E_0$ — два банаховых пространства. Пусть $A$ — позитивный оператор в пространстве $E$, $B$ — замкнутый линейный оператор, действующий из $E$ в $E_0$. Пусть выполняется неравенство*

$$\|Bx\|_{E_0} \leqslant c \|A^{\tau_0}x\|_E^{\frac{\tau}{\tau_0}} \|x\|_E^{1-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (x \in D(A^{\tau_0})), \tag{14.30}$$

*где $0 < \tau < \tau_0$. Пусть, наконец, $0 < \varepsilon_1 \leqslant \tau_0 - \tau$, $0 < \varepsilon_2 \leqslant \tau$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|Bx\|_{E_0} \leqslant \frac{c_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \|A^{\tau+\varepsilon_1}x\|_E^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \|A^{\tau-\varepsilon_2}x\|_E^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \tag{14.31}$$

$$(x \in D(A^{\tau+\varepsilon_1})).$$

Доказательство. Из формулы (14.6) при $z = \tau + \varepsilon_1$ и $x \in D(A^{\tau_0})$ следуют тождества

$$x = \frac{\sin \pi(\tau+\varepsilon_1)}{\pi} \frac{m!}{(1-\tau-\varepsilon_1)\ldots(m-\tau-\varepsilon_1)} \times$$
$$\times \int_0^\infty t^{m-\tau-\varepsilon_1}(tI+A)^{-m-1}A^{\tau+\varepsilon_1}x\,dt \quad (m > \tau_0).$$

Элемент $x$, очевидно, принадлежит области определения $D(B)$ оператора $B$. Оценим $\|Bx\|_{E_0}$.

С этой целью рассмотрим интеграл

$$J_1x = \frac{\sin \pi(\tau+\varepsilon_1)}{\pi} \frac{(n+k)!}{(1-\tau-\varepsilon_1)\ldots(n+k-\tau-\varepsilon_1)} \times$$
$$\times \int_0^\infty t^{n+k-\tau-\varepsilon_1}B(tI+A)^{-n-k-1}A^{\tau+\varepsilon_1}x\,dt,$$

где $n$ и $k$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $n > \tau_0$, $k \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Из неравенства (14.30) и леммы 14.1 вытекает оценка

$$\begin{aligned}
&\| B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_{E_0} \leqslant \\
&\quad \leqslant \| B(tI+A)^{-n} \|_{E \to E_0} \| A^{\tau+\varepsilon_1-\delta} (tI+A)^{-k-1} A^{\delta} x \|_E \leqslant \\
&\quad \leqslant c \| A^{\tau_0} (tI+A)^{-n} \|_{E \to E}^{\frac{\tau}{\tau_0}} \| (tI+A)^{-n} \|_{E \to E}^{1-\frac{\tau}{\tau_0}} \times \\
&\qquad\qquad \times \| A^{\tau+\varepsilon_1-\delta} (tI+A)^{-k-1} \|_{E \to E} \| A^{\delta} x \|_E \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{c(\delta)}{t^{n+k-2\tau-\varepsilon_1+\delta+1}} \| A^{\delta} x \|_E. \qquad (14.32)
\end{aligned}$$

Здесь $\delta$ — любое число из промежутка $[\tau - \varepsilon_2, \tau + \varepsilon_1]$. Из этой оценки при $\delta = \tau + \varepsilon_1$ вытекает сходимость интеграла $J_1 x$ на бесконечности, а при $\delta = \tau - \varepsilon_2$ — сходимость этого интеграла в нуле. Поэтому

$$\begin{aligned}
Bx = \frac{\sin \pi (\tau + \varepsilon_1)}{\pi} \frac{(n+k)!}{(1-\tau-\varepsilon_1) \ldots (n+k-\tau-\varepsilon_1)} \times \\
\times \int_0^\infty t^{n+k-\tau-\varepsilon_1} B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \, dt. \qquad (14.33)
\end{aligned}$$

Из (14.33) следует неравенство

$$\begin{aligned}
\| Bx \|_{E_0} \leqslant c_2 \left\{ \int_0^N t^{n+k-\tau-\varepsilon_1} \| B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_{E_0} dt + \right. \\
\left. + \int_N^\infty t^{n+k-\tau-\varepsilon_1} \| B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_{E_0} dt \right\}.
\end{aligned}$$

В силу (14.32) при $\delta = \tau - \varepsilon_2$

$$\int_0^N t^{n+k-\tau-\varepsilon_1} \| B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_{E_0} dt \leqslant \frac{c_3}{\varepsilon_2} \| A^{\tau-\varepsilon_2} x \|_E N^{\varepsilon_2},$$

а в силу того же неравенства при $\delta = \tau + \varepsilon_1$

$$\int_N^\infty t^{n+k-\tau-\varepsilon_1} \| B(tI+A)^{-n-k-1} A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_{E_0} dt \leqslant \frac{c_4}{\varepsilon_1} \| A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_E N^{-\varepsilon_1}.$$

Поэтому

$$\| Bx \|_{E_0} \leqslant c_5 \left\{ \| A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_E \frac{N^{-\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} + \| A^{\tau-\varepsilon_2} x \|_E \frac{N^{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2} \right\}.$$

В частности, при

$$N = \left[ \frac{\| A^{\tau+\varepsilon_1} x \|_E}{\| A^{\tau-\varepsilon_2} x \|_E} \right]^{\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

получаем оценку (14.31).

Итак, неравенство (14.31) справедливо при $x \in D(A^{\tau_0})$. В силу замкнутости оператора $B$ неравенство (14.31) справедливо и для всех $x \in D(A^{\tau+\varepsilon_1})$.

Теорема доказана.

Теорема 14.6 обратима: *если при каких-либо* $\varepsilon_1 \in (0, \tau_0 - \tau]$, $\varepsilon_2 \in (0, \tau]$ *выполнено неравенство* (14.31), *то из неравенства моментов* (14.24) *вытекает неравенство* (14.30).

Неравенство (14.30), грубо говоря, означает, что оператор $B$ «составляет $\frac{\tau}{\tau_0}$ часть от оператора $A$ и $1 - \frac{\tau}{\tau_0}$ часть от единичного оператора». Из теоремы 14.6 следует, что в этом случае оператор $B$ «составляет $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ часть от оператора $A^{\tau+\varepsilon_1}$ и $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ часть от оператора $A^{\tau-\varepsilon_2}$».

**14.7. Оценки элементов $BA^{-\tau}x$.** В этом пункте устанавливаются некоторые специальные оценки элементов $BA^{-\tau}x$ ($x \in E$) в норме пространства $E_0$. Эти оценки играют основную роль при исследовании дробных степеней эллиптических операторов (см. § 16).

Пусть $B$ — замкнутый линейный оператор, действующий из банахова пространства $E$ в банахово пространство $E_0$, и пусть выполнено неравенство (14.30). Тогда в силу теоремы 14.6 при любых $\varepsilon_1 \in (0, \tau_0 - \tau]$, $\varepsilon_2 \in (0, \tau]$ справедливы неравенства

$$\| BA^{-\tau-\varepsilon_1} x \|_{E_0} \leqslant c_1 \| A^{-\varepsilon_1-\varepsilon_2} x \|_E^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \| x \|_E^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} \quad (x \in E). \qquad (14.34)$$

Поэтому оценка норм в $E_0$ элементов $BA^{-\tau-\varepsilon_1}x$ сводится к оценке норм в $E$ элементов $A^{-\varepsilon_1-\varepsilon_2}x$.

Лемма 14.2. *Пусть $A$ — позитивный в пространстве $E$ оператор и $k$ — целое число, удовлетворяющее неравенству $0<\varepsilon<k$. Пусть $0\leqslant\mu<\varepsilon<\nu\leqslant k$.*

*Тогда*

$$\left\|A^{-\varepsilon}x\right\|_E\leqslant\frac{c(\nu-\mu)}{(\nu-\varepsilon)(\varepsilon-\mu)}\left[\varphi_{k,\,k-\mu}(x)\right]^{\frac{\nu-\varepsilon}{\nu-\mu}}\left[\varphi_{k,\,k-\nu}(x)\right]^{\frac{\varepsilon-\mu}{\nu-\mu}},\tag{14.35}$$

*где*

$$\varphi_{k,\,\delta}(x)=\sup_{0<t<\infty}\left\|t^{\delta}(tI+A)^{-k}x\right\|_E.$$

Доказательство этой леммы предоставляем читателю.

Лемма 14.3. *Пусть банахово пространство $E$ непрерывно вложено в пространство $\tilde E$, а $A$ — позитивный в пространстве $\tilde E$ оператор, причем $D(A^k)\subset E$. Пусть справедливо неравенство*

$$\|x\|_E\leqslant\tilde c\,\|A^kx\|_{\tilde E}^{\delta}\,\|x\|_{\tilde E}^{1-\delta}\qquad(x\in D(A^k)).\tag{14.36}$$

*Тогда*

$$\varphi_{k,\,k(1-\delta)}(x)\leqslant l\tilde c\,\|x\|_{\tilde E},\tag{14.37}$$

*где $l$ — некоторая постоянная, зависящая лишь от оператора $A$ и числа $k$.*

Утверждение леммы вытекает из цепочки неравенств

$$\left\|(tI+A)^{-k}x\right\|_E\leqslant\tilde c\left\|A^k(tI+A)^{-k}x\right\|_{\tilde E}^{\delta}\left\|(tI+A)^{-k}x\right\|_{\tilde E}^{1-\delta}\leqslant$$

$$\leqslant\tilde c\left\|A^k(tI+A)^{-k}\right\|_{\tilde E\to\tilde E}^{\delta}\left\|(tI+A)^{-k}\right\|_{\tilde E\to\tilde E}^{1-\delta}\|x\|_{\tilde E}\leqslant$$

$$\leqslant l\tilde c\,t^{k(\delta-1)}\|x\|_{\tilde E}.$$

Теорема 14.7. *Пусть $E_0$, $E$, $E_1$, $E_2$ — банаховы пространства, причем пространство $E$ непрерывно вложено в каждое из пространств $E_1$, $E_2$. Пусть оператор $A$ позитивен в каждом из пространств $E$, $E_1$, $E_2$ и области $D_i$ $(i=1,2)$ определения $A$ как оператора в $E_i$ содержатся в $E$, причем справедливы неравенства*

$$\|x\|_E\leqslant c_1\|A^kx\|_{E_i}^{\delta_i}\|x\|_{E_i}^{1-\delta_i}\tag{14.38}$$

$$(x\in D(A^k),\qquad 0\leqslant\delta_1<\delta_2\leqslant 1).$$

*Пусть, наконец, $B$ — замкнутый линейный оператор, действующий из $E$ в $E_0$, удовлетворяющий неравенству* (14.30).

*Тогда для любых чисел $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, удовлетворяющих неравенствам $k\delta_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < k\delta_2$, справедливо неравенство*

$$\| BA^{-\tau-\varepsilon_1} x \|_{E_0} \leqslant c_0 \| x \|_{E_1}^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \frac{k\delta_2-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{k(\delta_2-\delta_1)}} \| x \|_{E_2}^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-k\delta_1}{k(\delta_2-\delta_1)}} \| x \|_{E}^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}. \tag{14.39}$$

Это утверждение очевидным образом вытекает из неравенства (14.34) и лемм 14.2 и 14.3.

Теоремы пунктов 14.6 и 14.7 получены П. Е. Соболевским [14].

**14.8. Сравнение дробных степеней двух операторов.** Пусть $A$ и $B$ — позитивные операторы, действующие в банаховом пространстве $E$.

Теорема 14.8. *Пусть оператор $A^{\tau_1}$ подчинен оператору $B^{\tau_2}$, где $\tau_1$, $\tau_2$ — положительные числа.*

*Тогда при $0 \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leqslant 1$ оператор $A^{\varepsilon_1\tau_1}$ подчинен оператору $B^{\varepsilon_2\tau_2}$.*

Доказательство. Из неравенства моментов для оператора $A$ и подчиненности оператора $A^{\tau_1}$ оператору $B^{\tau_2}$ вытекает, что

$$\| A^{\varepsilon_1\tau_1} x \| \leqslant k \| A^{\tau_1} x \|^{\varepsilon_1} \| x \|^{1-\varepsilon_1} \leqslant k_1 \| B^{\tau_2} x \|^{\varepsilon_1} \| x \|^{1-\varepsilon_1}. \tag{14.40}$$

Поэтому в силу теоремы 14.4 оператор $A^{\varepsilon_1\tau_1}$ подчинен всем операторам $B^{\tau}$ при $\tau > \varepsilon_1\tau_2$. В частности, $A^{\varepsilon_1\tau_1}$ подчинен оператору $B^{\varepsilon_2\tau_2}$.

Теорема доказана.

Теорема 14.8 является обобщением теоремы 12.5 на случай операторов в банаховых пространствах. Отметим, что для случая положительно определенных самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, операторы $A^{\varepsilon_1\tau_1}$ подчинены операторам $B^{\varepsilon_2\tau_2}$ и при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. В общем случае последний факт не имеет места. Было бы интересно найти другие широкие классы позитивных операторов, для которых из подчиненности оператора $A^{\tau_1}$ оператору $B^{\tau_2}$ вытекает подчиненность оператора $A^{\varepsilon\tau_1}$ оператору $B^{\varepsilon\tau_2}$ $(0<\varepsilon<1)$. В этом направлении важные результаты по теории диссипативных операторов получены Т. Като.

Выше использовалось понятие оператора, сопряженного ограниченному оператору $T$, действующему из одного банахова пространства в другое. Аналогичным образом вводится понятие оператора, сопряженного неограниченному оператору. Нам понадобится здесь лишь тот случай, когда и область определения $D(T)$, и множество значений $R(T)$ оператора $T$ принадлежат одному банахову пространству $E$. Приведем соответствующее определение.

Пусть $D(T)$ плотна в $E$. При каждом фиксированном $y\in E^*$ формула $m(x)=(Tx, y)$ определяет аддитивный и однородный функционал, определенный на $D(T)$. Допустим, что выполнено неравенство

$$|m(x)|=|(Tx,\ y)|\leqslant k\|x\| \qquad (x\in D(T)).$$

Тогда функционал $m(x)$ допускает продолжение по непрерывности на все $E$. За продолженным функционалом сохраним то же обозначение. Это значит, что

$$(Tx,\ y)=(x,\ m) \qquad (x\in D(T)). \tag{14.41}$$

В этом случае говорят, что $y$ принадлежит области определения $D(T^*)\subset E^*$ сопряженного $T$ оператора $T^*$, который определяется равенством $T^*y=m$. Равенство (14.41) можно переписать в виде

$$(Tx,\ y)=(x,\ T^*y)\ (x\in D(T),\ y\in D(T^*)). \tag{14.42}$$

Это равенство полностью определяет оператор $T^*$, так как множество $D(T)$ плотно в $E$.

Теорема 14.9. *Пусть позитивный оператор $A$ действует в $E$, а позитивный оператор $B$ действует в $E^*$. Пусть замкнутый оператор $C$ удовлетворяет условиям*

$$\|Cx\|\leqslant M_1\|A^{\gamma_1}x\| \qquad \left(x\in D(A^{\gamma_1})\subset D(C)\subset E\right) \tag{14.43}$$

*и*

$$\|C^*y\|\leqslant M_2\|B^{\gamma_2}y\| \qquad \left(y\in D(B^{\gamma_2})\subset D(C^*)\subset E^*\right), \tag{14.44}$$

*где числа $\gamma_1$ и $\gamma_2$ положительны.*

*Тогда*

$$|(Cx, y)| \leqslant k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \| A^{\varepsilon_1\gamma_1} x \|_E \| B^{\varepsilon_2\gamma_2} y \|_{E^*} \qquad (14.45)$$
$$\left(x \in D(A^{\gamma_1}),\quad y \in D(B^{\gamma_2})\right),$$

*где* $\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon_2$ — *произвольные числа, для которых* $0 < \varepsilon_1$, $\varepsilon_2 < 1$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 1$.

Доказательство. Нам придется при доказательстве наряду с дробными степенями операторов $A$ и $B$ применять дробные степени оператора $A^*$, действующего в пространстве $E^*$. Дробные степени оператора $A^*$ можно определить обычным способом *), изложенным в п. 14.2, так как позитивность оператора $A^*$ вытекает из позитивности оператора $A$. Предоставляем читателю проверить справедливость равенств

$$[A^\alpha]^* = [A^*]^\alpha.$$

Из теоремы 14.2 вытекает неравенство

$$\| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} y \|_E \leqslant k_1 \| [A^*]^{-\gamma_1} y \|_E^{\varepsilon_1} \| y \|_E^{1-\varepsilon_1} \qquad (y \in E^*).$$

Пусть $y = C^* z$ $(z \in D(C^*) \subset E^*)$. Тогда последнее неравенство означает, что

$$\| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^* z \| \leqslant k_1 \| [A^*]^{-\gamma_1} C^* z \|^{\varepsilon_1} \| C^* z \|^{1-\varepsilon_1},$$

а так как оператор $[A^*]^{-\gamma_1} C^*$ в силу условия (14.43) ограничен вместе с оператором $CA^{-\gamma_1}$, то

$$\| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^* z \| \leqslant k_1 M_1 \| C^* z \|^{1-\varepsilon_1} \| z \|^{\varepsilon_1} \qquad (z \in D(C^*)).$$

Отсюда в силу (14.44) вытекает неравенство

$$\| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^* z \| \leqslant k_1 M_1 M_2 \| B^{\gamma_2} z \|^{1-\varepsilon_1} \| z \|^{\varepsilon_1} \qquad \left(z \in D(B^{\gamma_2})\right).$$

Из этого неравенства и из теоремы 14.4 вытекает, что оператор $[A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^*$ подчинен всем операторам $B^\gamma$, где $\gamma > (1-\varepsilon_1)\gamma_2$. В частности, оператор $[A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^*$ подчинен оператору $B^{\varepsilon_2\gamma_2}$, т. е.

$$\| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^* z \| \leqslant k_2 \| B^{\varepsilon_2\gamma_2} z \| \qquad \left(z \in D(B^{\varepsilon_2\gamma_2})\right).$$

*) Мы не останавливаемся на дополнительных трудностях, которые возникают в случае, когда область определения оператора $A$ неплотна в $E^*$.

Теперь неравенство (14.45) почти очевидно:

$$|(Cx,\ y)| = |(x,\ C^*y)| = \left|\left(A^{\varepsilon_1\gamma_1}x,\ \left[A^{-\varepsilon_1\gamma_1}\right]^* C^*y\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \| A^{\varepsilon_1\gamma_1}x \| \, \| [A^*]^{-\varepsilon_1\gamma_1} C^*y \| \leqslant k_2 \| A^{\varepsilon_1\gamma_1}x \| \, \| B^{\varepsilon_2\gamma_2}y \|$$
$$\left(x \in D\left(A^{\gamma_1}\right),\quad y \in D\left(B^{\gamma_2}\right)\right).$$

Теорема доказана.

Эта теорема является обобщением теоремы 12.6.

**14.9. Дробные степени позитивных производящих операторов.** Пусть $T(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ — сильно непрерывная полугруппа, удовлетворяющая условию экспоненциального убывания

$$\| T(t) \| \leqslant ce^{-\sigma_0 t} \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{14.46}$$

где $\sigma_0 > 0$. Пусть — $A$ производящий оператор этой полугруппы. Из теоремы 13.1 вытекает, что

$$\| (tI + A)^{-1} \| \leqslant \frac{c}{\sigma_0 + t} \qquad (0 \leqslant t < \infty). \tag{14.47}$$

Из этого неравенства очевидным образом вытекает позитивность оператора $A$. Поэтому можно определить его дробные степени $A^z$. Естественно возникает вопрос о представлении этих дробных степеней через полугруппу $T(t)$.

Теорема 14.10. *Пусть оператор — $A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы, удовлетворяющей условию* (14.46).

*Тогда отрицательные дробные степени $A^{-\tau}$ допускают представление*

$$A^{-\tau} = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty s^{\tau-1} T(s)\, ds. \tag{14.48}$$

Доказательство. Мы установим более общее, чем **(14.48), равенство**

$$A^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty s^{-z-1} T(s)\, ds \tag{14.49}$$

для всех $z$ из правой полуплоскости.

Правая часть формулы (14.49) в силу (14.46) аналитична по $z$ в правой полуплоскости; оператор-функция $A^{-z}$ также аналитична в правой полуплоскости. Поэтому равенство (14.49) достаточно доказать для вещественных $z$ из промежутка (0, 1). Иначе говоря, достаточно доказать равенство (14.48) при $\tau\in(0, 1)$.

Для доказательства равенства (14.48) воспользуемся представлением (14.2) дробной степени $A^{-\tau}$, в котором заменим оператор $(tI+A)^{-1}$ правой частью равенства (13.46). В результате получим формулу

$$A^{-\tau}=\frac{\sin\pi\tau}{\pi}\int\limits_0^\infty t^{-\tau}\left[\int\limits_0^\infty e^{-ts}T(s)\,ds\right]dt$$

или, после перемены порядка интегрирования,

$$A^{-\tau}=\int\limits_0^\infty\left[\frac{\sin\pi\tau}{\pi}\int\limits_0^\infty t^{-\tau}e^{-ts}\,dt\right]T(s)\,ds.$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим формулу (14.48). Теорема доказана.

Оператор $A$ назовем *сильно позитивным*, если он удовлетворяет более сильному, чем условие (14.1), неравенству

$$\|(\lambda I+A)^{-1}\|\leqslant\frac{c}{1+|\lambda|}\qquad(\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0).\qquad(14.50)$$

В силу теоремы 13.2 сильно позитивный оператор является производящим оператором аналитической полугруппы $T(t)$. Эта полугруппа экспоненциально убывает. Поэтому дробные степени оператора $A$ допускают представление (14.48).

Нам понадобится еще зависимость между дробными степенями и полугруппой $T(t)$, обобщающая оценки (13.64).

Теорема 14.11. *Пусть $A$ — сильно позитивный оператор. Пусть $\tau>0$.*

*Тогда справедливы неравенства*

$$\|A^{\tau}T(t)\|\leqslant\frac{c(\tau)}{t^{\tau}}\qquad(0<t<\infty),\qquad(14.51)$$

*где $T(t)$ — полугруппа с производящим оператором $-A$*

Доказательство. Пусть $\tau$ фиксировано. Пусть целое число $n$ больше $\tau$. Из теоремы 14.2 вытекает, что

$$\|A^{\tau}T(t)\| \leqslant c(\tau, n)\|A^{n}T(t)\|^{\frac{\tau}{n}}\|T(t)\|^{1-\frac{\tau}{n}}$$

и в силу неравенств (13.64)

$$\|A^{\tau}T(t)\| \leqslant \frac{c(\tau)}{t^{\tau}}\|T(t)\|^{1-\frac{\tau}{n}} \qquad (0 < t < \infty).$$

Остается воспользоваться равномерной ограниченностью полугруппы $T(t)$.

Теорема доказана.

## 14.10. Полная непрерывность дробных степеней.

Теорема 14.12. *Пусть оператор $A$ позитивен. Пусть оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен.*

*Тогда операторы $A^{-z}$ $(\operatorname{Re} z > 0)$ вполне непрерывны.*

Доказательство. Пусть $n > \operatorname{Re} z$. Воспользуемся представлением (14.6) оператора $A^{-z}$:

$$A^{-z} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \frac{n!}{(1-z)\ldots(n-z)} \int_{0}^{\infty} t^{z-n}(tI+A)^{-n-1}\,dt,$$

в котором интеграл сходится по норме операторов. Из этого представления вытекает, что достаточно установить полную непрерывность операторов $(tI+A)^{-1}$. Остается заметить, что

$$(tI+A)^{-1} = A^{-1} - tA^{-1}(tI+A)^{-1}$$

и сослаться на полную непрерывность оператора $A^{-1}$.

Теорема доказана.

**14.11. Дополнительные замечания.** Приведем без доказательства некоторые теоремы Э. Хилле, А. Балакришнана и Т. Като о дробных степенях позитивных операторов.

Вначале отметим, что из позитивности оператора $A$ вытекает позитивность всех операторов $A^{\tau}$ при $0 < \tau < 1$. Аналогично, из сильной позитивности оператора $A$ вытекает сильная позитивность операторов $A^{\tau}$ при тех же значениях $\tau$. Более интересным и более важным является тот факт, что из позитивности оператора $A$ следует сильная позитивность операторов $A^{\tau}$ при $0 < \tau \leqslant \frac{1}{2}$.

Перечисленные утверждения совсем просто приводят к естественному равенству

$$(A^\tau)^z = A^{\tau z}, \tag{14.52}$$

которое верно, например, при $0 < \tau < 1$, $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

Наконец, отметим формулу

$$(\lambda I + A^\tau)^{-1} = \frac{\sin \pi\tau}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mu^\tau (\mu I + A)^{-1}}{\lambda^2 + 2\lambda\mu^\tau \cos \pi\tau + \mu^{2\tau}}\, d\mu \quad (0 < \tau < 1), \tag{14.53}$$

при помощи которой резольвенты дробных степеней оператора $A$ выражаются через резольвенту самого оператора $A$.

## § 15. Неравенства моментов и $L$-характеристики дробных степеней *)

**15.1. Пространства Лоренца.** В этом параграфе для исследования операторов в пространствах $L_\alpha$ мы используем «близкие к ним» пространства Лоренца $\Lambda_\alpha$.

Через $\lambda(x;\ h)$, как обычно, будем обозначать меру множества таких точек $s \in \Omega$, что $|x(s)| \geqslant h$. Через $\Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ обозначается совокупность функций $x(s)$, для которых конечна норма

$$\| x(s) \|_{\Lambda_\alpha} = \int_0^\infty \lambda^\alpha (x;\ h)\, dh. \tag{15.1}$$

Можно проверить, что $\Lambda_\alpha$ является полным нормированным пространством. В ряде случаев нам будет удобно через $\Lambda_0$ обозначать пространство $L_0$ ограниченных в существенном на $\Omega$ функций.

Простой подсчет показывает, что

$$\| \varkappa(s;\ D) \|_{\Lambda_\alpha} = (\operatorname{mes} D)^\alpha \tag{15.2}$$

для характеристических функций $\varkappa(s;\ D)$ множеств $D \in \Omega$. Для каждой функции $x(s) \in \Lambda_\alpha$ норма $\| x \|_{\Lambda_\alpha}$ совпадает с нормой ее абсолютной величины $|x(s)|$. Поэтому для вычисления нормы конечнозначной функции $x(s)$ нужно вначале

*) Параграф написан в соответствии со статьей П. П. Забрейко, М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [1].

перейти к ее абсолютной величине $|x(s)|$, которую можно записать в виде

$$|x(s)| = \sum_{i=1}^{n} c_i \varkappa(s; D_i), \tag{15.3}$$

где числа $c_i$ убывают: $c_1 > c_2 > \ldots > c_n > c_{n+1} = 0$, а множества $D_i$ попарно не пересекаются. Тогда

$$\|x(s)\|_{\Lambda_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i+1}) \left(\operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{i} D_k\right)^{\alpha}. \tag{15.4}$$

Отметим, кстати, что множество конечнозначных функций плотно в каждом пространстве $\Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Обозначим через $T_\alpha$ множество функций $x(s)$ вида

$$x(s) = (\operatorname{mes} D_1 + \operatorname{mes} D_2)^{-\alpha} [\varkappa(s; D_1) - \varkappa(s; D_2)], \tag{15.5}$$

где $D_1$ и $D_2$ — непересекающиеся подмножества $\Omega$. Из (15.2) вытекает, что норма функций (15.5) равна 1.

Лемма 15.1. *Единичный шар* $\|x\|_{\Lambda\alpha} \leqslant 1$ *является замыканием выпуклой оболочки множества* $T_\alpha$.

Доказательство. Нужно показать, что каждая функция $z(s)$ из единичного шара пространства $\Lambda_\alpha$ принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества $T_\alpha$. При этом достаточно рассмотреть такие функции $z(s)$, что $\|z\|_{\Lambda_\alpha} = 1$.

Для каждой такой функции $z(s)$ можно построить такую последовательность конечнозначных функций $x_n(s)$, что $\|x_n\|_{\Lambda_\alpha} = 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n(s) - z(s)\|_{\Lambda_\alpha} = 0.$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что каждая конечнозначная функция $x(s)$, норма которой равна 1, принадлежит выпуклой оболочке множества $T_\alpha$.

Пусть $x(s)$ — конечнозначная функция и $\|x\|_{\Lambda_\alpha} = 1$. Функцию $x(s)$ можно представить в виде

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\varkappa(s; D_i^+) - \varkappa(s; D_i^-)\right],$$

где $D_i^+$ — множества, на которых функция $x(s)$ принимает значение $c_i$, а $D_i^-$ — множества, на которых функция $x(s)$

принимает значение $-c_i$. Поэтому

$$x(s)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i(s),$$

где

$$\alpha_i=(c_i-c_{i+1})\left(\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{+}+\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{-}\right)^{\alpha},$$

а функции

$$x_i(s)=\left(\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{+}+\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{-}\right)^{-\alpha}\times$$
$$\times\left[\varkappa\left(s;\ \bigcup_{k=1}^{i}D_k^{+}\right)-\varkappa\left(s;\ \bigcup_{k=1}^{i}D_k^{-}\right)\right]$$

принадлежат $T_\alpha$. Из (15.4) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_{i+1})\left[\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{+}+\operatorname{mes}\bigcup_{k=1}^{i}D_k^{-}\right]^{\alpha}=$$
$$=\|x\|_{\Lambda_\alpha}=1.$$

Лемма доказана.

Отметим, что замыкание выпуклой оболочки множества $T_\alpha$ по норме пространства $\Lambda_\alpha$ совпадает с замыканием этой выпуклой оболочки по мере.

Пространства Лоренца $\Lambda_\alpha$ тесно связаны с введенными в пп. 2.7 и 8.3 пространствами Марцинкевича $M_\alpha$. Напомним, что $M_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ — это пространство функций, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M_\alpha}=\sup_{D\subset\Omega}\left[(\operatorname{mes}D)^{-\alpha}\int_D|x(s)|\,ds\right]. \qquad (15.6)$$

Нормы в пространствах $\Lambda_\alpha$, $L_\alpha$, $M_\alpha$ связаны неравенствами

$$\|x\|_{M_\alpha}\leqslant\|x\|_{L_\alpha}\leqslant\|x\|_{\Lambda_\alpha}\qquad (x\in\Lambda_\alpha;\ 0<\alpha<1); \qquad (15.7)$$

первое из них вытекает из неравенства Гёльдера, а второе из леммы 15.1. Легко видеть, что для характеристических функций $\varkappa(s;\ D)$ справедливы равенства

$$\|\varkappa(s;\ D)\|_{M_\alpha}=\|\varkappa(s;\ D)\|_{L_\alpha}=\|\varkappa(s;\ D)\|_{\Lambda_\alpha}.$$

Докажем теперь, что при любом $\varepsilon > 0$ пространство $\Lambda_{\alpha+\varepsilon}$ содержит пространство $M_\alpha$, причем

$$\|x\|_{\Lambda_{\alpha+\varepsilon}} \leqslant 2\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}} (\operatorname{mes}\Omega)^{\varepsilon} \|x\|_{M_\alpha}. \tag{15.8}$$

Для доказательства представим $\|x\|_{\Lambda_{\alpha+\varepsilon}}$ в виде

$$\|x\|_{\Lambda_{\alpha+\varepsilon}} = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int_0^c \lambda^{\alpha+\varepsilon}(x;\ h)\,dh, \quad J_2 = \int_c^\infty \lambda^{\alpha+\varepsilon}(x;\ h)\,dh.$$

Очевидно,

$$J_1 \leqslant c\,(\operatorname{mes}\Omega)^{\alpha+\varepsilon}.$$

Из (8.17) и (8.12) вытекает, что

$$h\lambda^{\alpha}(x;\ h) \leqslant \|x\|_{M_\alpha},$$

поэтому

$$J_2 \leqslant \frac{\alpha}{\varepsilon}\|x\|_{M_\alpha}^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha}} c^{-\frac{\varepsilon}{\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\|x\|_{\Lambda_{\alpha+\varepsilon}} \leqslant c\,(\operatorname{mes}\Omega)^{\alpha+\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}\|x\|_{M_\alpha}^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha}} c^{-\frac{\varepsilon}{\alpha}},$$

откуда вытекает (15.8), если положить

$$c = \left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\varepsilon}} (\operatorname{mes}\Omega)^{-\alpha} \|x\|_{M_\alpha}.$$

Общий вид линейного непрерывного функционала $f(x)$ на пространстве $\Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ дается формулой

$$f(x) = \int_\Omega x(s)\,y(s)\,ds \quad (x \in \Lambda_\alpha), \tag{15.9}$$

где $y(s) \in M_{1-\alpha}$. Таким образом, пространство Марцинкевича $M_{1-\alpha}$ можно считать сопряженным пространству Лоренца $\Lambda_\alpha$. Отметим еще, что пространство Лоренца $\Lambda_\alpha$ нерефлексивно — этот факт вытекает, например, из несепарабельности пространств Марцинкевича.

Ряд общих фактов теории пространств Лоренца и Марцинкевича изложен, например, в работах Г. Г. Лоренца [1], С. Г. Крейна и Е. М. Семенова [1], Е. М. Семенова [1].

**15.2. Линейные операторы.** Пусть аддитивный и однородный оператор $B$ определен на характеристических функциях $\varkappa(s;\ D)$ измеримых множеств $D\subset\Omega$ и значения его суммируемы на множестве $\Omega^*$. Тогда каждая характеристическая функция $\varkappa(t;\ D^*)$ измеримого множества $D^*\subset\Omega^*$ определяет функцию множеств

$$\mu(D)=(B\varkappa(t;D),\varkappa(t;D^*))=\int\limits_{D^*} B\varkappa(t;D)\,dt \quad (D\subset\Omega). \qquad (15.10)$$

Предположим, что функции множеств (15.10) абсолютно непрерывны относительно лебеговой меры на $\Omega$. Тогда из теоремы Радона—Никодима (см. Н. Данфорд и Дж. Т. Шварц [1]) вытекает, что меры (15.10) единственным образом представимы в виде

$$\mu(D)=\int\limits_{D} y^*(s)\,ds, \qquad (15.11)$$

где $y^*(s)$ — суммируемые на $\Omega$ функции.

Равенство (15.11) позволяет ввести в рассмотрение оператор

$$B^*y=y^*, \qquad (15.12)$$

который определен на характеристических функциях $y=\varkappa(t;\ D^*)$ и значения которого принадлежат $L_1(\Omega)$. Оператор $B^*$ можно продолжить в аддитивный однородный оператор (за которым мы сохраним то же обозначение $B^*$), определенный на всех конечнозначных функциях. Этот продолженный оператор полностью определяется равенством

$$(B\varkappa(t;\ D),\ y)=(\varkappa(s;\ D),\ B^*y) \quad (D\subset\Omega). \qquad (15.13)$$

Из этого равенства вытекает, что

$$(Bx,\ y)=(x,\ B^*y), \qquad (15.14)$$

где $x(s)$ и $y(t)$ — произвольные конечнозначные функции.

Оператор $B^*$ будем называть сопряженным оператору $B$. Подчеркнем, что введенное понятие сопряженного оператора тесно связано с обычным понятием сопряженного оператора в банаховых пространствах, но не совпадает с ним.

Допустим, что $B$ является непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in [0, 1]$. Тогда функции множеств (15.10) очевидным образом абсолютно непрерывны относительно лебеговой меры; поэтому определен оператор (15.12) — он совпадает с обычным сопряженным оператором. Для операторов $B$, действующих из $L_0$ в $L_\beta$, абсолютная непрерывность мер (15.10) является дополнительным предположением.

Аналогичные рассуждения показывают, что оператор $B^*$ действует из $\Lambda_{1-\beta}$ в $L_{1-\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta < 1)$ и непрерывен, если $B$ действует из $L_\alpha$ в $M_\beta$ и непрерывен; $B^*$ действует из $L_{1-\beta}$ в $M_{1-\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ и непрерывен, если $B$ действует из $\Lambda_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывен; $B^*$ действует из $\Lambda_{1-\beta}$ в $M_{1-\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta < 1)$ и непрерывен, если $B$ действует из $\Lambda_\alpha$ в $M_\beta$ и непрерывен.

Если оператор $B$ действует из $L_\alpha$ в $M_\beta$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 \leqslant \beta < 1)$ и непрерывен, то это значит, что для каждого измеримого множества $D^* \subset \Omega^*$ выполняется неравенство

$$\int_{D^*} |Bx(t)|\,dt \leqslant c\,\|x\|_{L_\alpha} (\operatorname{mes} D^*)^{1-\beta}, \tag{15.15}$$

где $c$ — некоторая постоянная. Такие операторы нами уже рассматривались в пп. 2.7 и 8.3; мы говорили, что они удовлетворяют условию Марцинкевича $LM(\alpha, \beta)$.

Перейдем к операторам, действующим из $\Lambda_\alpha$ в $L_\beta$ и из $\Lambda_\alpha$ в $M_\beta$. Нам понадобится общее вспомогательное утверждение.

Лемма 15.2. *Пусть линейный оператор $B$ определен на конечнозначных функциях и удовлетворяет условию*

$$\|B\varkappa(s;\ D)\|_E \leqslant k(\operatorname{mes} D)^\alpha \quad (D \subset \Omega), \tag{15.16}$$

*где $0 < \alpha \leqslant 1$, а $E$ — некоторое банахово пространство. Тогда $B$ можно продолжить в непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_\alpha$ в $E$.*

Доказательство. Пусть $x(s)$ — функция вида (15.5). Тогда в силу (15.16)

$$\|Bx(s)\|_E \leqslant \frac{1}{(\operatorname{mes} D_1 + \operatorname{mes} D_2)^\alpha}(\|B\varkappa(s;\ D_1)\|_E + \|B\varkappa(s;\ D_2)\|_E) \leqslant$$

$$\leqslant k\,\frac{(\operatorname{mes} D_1)^\alpha + (\operatorname{mes} D_2)^\alpha}{(\operatorname{mes} D_1 + \operatorname{mes} D_2)^\alpha} \leqslant 2^{1-\alpha}k.$$

Отсюда вытекает, что $B$ ограничен на выпуклой оболочке множества $T_\alpha$, которая в силу леммы 15.1 плотна в единичном шаре пространства $\Lambda_\alpha$.

Лемма доказана *).

Применительно к случаю $E = L_\beta$ лемма 15.2 означает, что $B$ допускает продолжение в непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$, если он удовлетворяет условию

$$\| B\varkappa(s;\ D)\|_{L_\beta} \leqslant c_1 (\operatorname{mes} D)^\alpha \quad (D \subset \Omega).$$

Если оператор $B$ удовлетворяет этому неравенству, то будем говорить, что он удовлетворяет условию $\Lambda L(\alpha, \beta)$.

В случае, когда $E = \mathrm{M}_\beta$, лемма 15.2 означает, что $B$ допускает продолжение в непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ в $\mathrm{M}_\beta$ $(0 \leqslant \beta < 1)$, если

$$\int_{D^*} | B\varkappa(s;\ D)|\, dt \leqslant c_2 (\operatorname{mes} D)^\alpha (\operatorname{mes} D^*)^{1-\beta} (D \subset \Omega,\ D^* \subset \Omega^*).$$

Такие операторы уже встречались в п. 8.3 — это операторы, которые удовлетворяют условию $\Lambda\mathrm{M}(\alpha, \beta)$.

Лемма 15.3. *Пусть оператор $B$ удовлетворяет условию $L\mathrm{M}(\alpha_0, \beta_0)$.*

*Тогда оператор $B$ действует из $L_{\alpha_0}$ в любое $L_\beta$, где $\beta > \beta_0$, и непрерывен.*

Лемма 15.4. *Пусть оператор $B$ удовлетворяет условию $\Lambda L(\alpha_0, \beta_0)$.*

*Тогда оператор $B$ действует из любого $L_\alpha$, где $\alpha < \alpha_0$, в $L_{\beta_0}$ и непрерывен.*

Лемма 15.5. *Пусть оператор $B$ удовлетворяет условию $\Lambda\mathrm{M}(\alpha_0, \beta_0)$.*

*Тогда оператор $B$ действует из любого $L_\alpha$, где $\alpha < \alpha_0$, в любое $L_\beta$, где $\beta > \beta_0$, и непрерывен.*

Утверждение леммы 15.3 вытекает из неравенств (15.7) и (15.8). Лемма 15.4 вытекает из леммы 15.3 переходом к сопряженному оператору. Доказательство леммы 15.5 предоставляем читателю.

---

*) С. Г. Крейн и Е. М. Семенов [1].

**15.3. Интерполяционные теоремы.** В предыдущих главах был установлен ряд теорем об интерполировании свойства непрерывности линейного оператора. Нам понадобится еще одно аналогичное утверждение.

Теорема 15.1. *Пусть линейный оператор $B$ удовлетворяет условиям $\Lambda L(\alpha_0, \beta_0)$ и $\Lambda L(\alpha_1, \beta_1)$:*

$$\|Bx\|_{L_{\beta_0}} \leqslant k_0 \|x\|_{\Lambda_{\alpha_0}} \quad (x \in \Lambda_{\alpha_0}), \tag{15.17}$$

$$\|Bx\|_{L_{\beta_1}} \leqslant k_1 \|x\|_{\Lambda_{\alpha_1}} \quad (x \in \Lambda_{\alpha_1}). \tag{15.18}$$

*Пусть выполнены неравенства*

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1 \tag{15.19}$$

*и*

$$\alpha_0 \neq \alpha_1. \tag{15.20}$$

*Тогда при любом $\tau \in (0, 1)$ оператор $B$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1,$$

*и непрерывен, причем*

$$\|B\|_{L_{\alpha(\tau)} \to L_{\beta(\tau)}} \leqslant \frac{2}{|\alpha_0 - \alpha_1|\, \tau(1-\tau)} k_0^{1-\tau} k_1^{\tau}. \tag{15.21}$$

Доказательство. В случае, когда числа $\alpha_0$ и $\alpha_1$ положительны, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2.9 переходом к сопряженному оператору.

Допустим, что $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0 = 0$. Пусть $x(s)$ — конечнозначная функция, принимающая три значения: 0, 1, —1. Из неравенства Гёльдера и из условий (15.17) и (15.18) вытекает, в силу (15.2), что при каждом $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\|Bx\|_{L_{\beta(\varepsilon)}} \leqslant \|Bx\|_{L_{\beta_0}}^{1-\varepsilon} \|Bx\|_{L_{\beta_1}}^{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant k_0^{1-\varepsilon} k_1^{\varepsilon} \|x\|_{\Lambda_{\alpha_0}}^{1-\varepsilon} \|x\|_{\Lambda_{\alpha_1}}^{\varepsilon} = k_0^{1-\varepsilon} k_1^{\varepsilon} (\operatorname{mes} D)^{\alpha(\varepsilon)},$$

где $D$ — носитель функции $x(s)$ (множество тех $s$, в которых $x(s) \neq 0$), а

$$\beta(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\beta_0 + \varepsilon\beta_1, \quad \alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 = \varepsilon\alpha_1.$$

Значит, оператор $B$ удовлетворяет условию $\Lambda L(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$, причем

$$\| Bx \|_{L_{\beta(\varepsilon)}} \leqslant k_0^{1-\varepsilon} k_1^{\varepsilon} \| x \|_{\Lambda_{\alpha(\varepsilon)}} \qquad (x \in \Lambda_{\alpha(\varepsilon)}).$$

Из доказанной части теоремы вытекает, что при каждом $\sigma \in (0, 1)$ оператор $B$ действует из $L_{\alpha(\sigma;\, \varepsilon)}$ в $L_{\beta(\sigma;\, \varepsilon)}$, где

$$\alpha(\sigma;\ \varepsilon) = (1-\sigma)\,\alpha(\varepsilon) + \sigma\alpha_1, \qquad \beta(\sigma;\ \varepsilon) = (1-\sigma)\,\beta(\varepsilon) + \sigma\beta_1,$$

причем

$$\| B \|_{L_{\alpha(\sigma;\, \varepsilon)} \to L_{\beta(\sigma;\, \varepsilon)}} \leqslant \frac{2}{|\alpha(\varepsilon) - \alpha_1|\, \sigma(1-\sigma)}\, k_0^{(1-\varepsilon)(1-\sigma)} k_1^{\varepsilon(1-\sigma)+\sigma}.$$

Пусть $\tau \in (0, 1)$ и $0 < \varepsilon < \tau$. Если положить

$$\sigma = \frac{\tau - \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

то будут выполнены равенства

$$\alpha(\sigma;\ \varepsilon) = \alpha(\tau), \qquad \beta(\sigma;\ \varepsilon) = \beta(\tau).$$

Поэтому оператор $B$ действует из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ и

$$\| B \|_{L_{\alpha(\tau)} \to L_{\beta(\tau)}} \leqslant \frac{2(1-\varepsilon)}{\alpha_1(\tau - \varepsilon)(1-\tau)}\, k_0^{1-\tau} k_1^{\tau}.$$

Отсюда вытекает неравенство (15.21), так как $\varepsilon$ может быть сколь угодно малым.

Теорема доказана.

Перейдем к вопросу об интерполировании свойства полной непрерывности. Выше были доказаны теоремы об интерполировании этого свойства (теоремы 3.10 и 3.11), соответствующие основной интерполяционной теореме М. Рисса (теорема 2.4). Здесь мы приведем утверждения об интерполировании свойства полной непрерывности, соответствующие другим интерполяционным теоремам (теоремы 2.7, 8.2 и 15.1), связанным с пространствами Лоренца и Марцинкевича.

Теорема 15.2. *Пусть $B$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$ и из $\Lambda_{\alpha_1}$ в $L_{\beta_1}$, где*

$$0 \leqslant \beta_0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1, \quad \alpha_0 \neq \alpha_1.$$

*Пусть $B$ вполне непрерывен как оператор из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$.*

*Тогда $B$ при любом $\tau \in (0, 1)$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$, где*

$$\alpha(\tau) = (1-\tau)\,\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1-\tau)\,\beta_0 + \tau\beta_1.$$

Доказательство. Пусть $P_n$ — некоторая правильная последовательность проектирующих операторов (1.12). Из (1.14) вытекает, что $\|P_n\|_{L_\beta \to L_\beta} = 1$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$. Поэтому из леммы 1.4 следует, что вполне непрерывные операторы $P_n B$ сходятся к оператору $B$ по норме операторов, действующих из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $L_{\beta_0}$:

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n B - B\|_{\Lambda_{\alpha_0} \to L_{\beta_0}} = 0. \tag{15.22}$$

В силу теоремы 15.1 действующий из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$ $(0 < \tau < 1)$ оператор $P_n B - B$ непрерывен, причем из (15.21) и (15.22) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n B - B\|_{L_{\alpha(\tau)} \to L_{\beta(\tau)}} = 0.$$

Значит, оператор $B$ с любой точностью можно аппроксимировать вполне непрерывным оператором $P_n B$.

Теорема доказана.

Приведем без доказательства еще два утверждения.

Теорема 15.3. *Пусть $B$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $L_{\alpha_0}$ в $M_{\beta_0}$ и из $L_{\alpha_1}$ в $M_{\beta_1}$, где*

$$0 < \alpha_0 < 1, \quad 0 \leqslant \beta_0 \leqslant \alpha_0, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$$

*и*

$$\beta_0 \neq \beta_1.$$

*Пусть $B$ — вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha_0}$ в $M_{\beta_0}$.*

*Тогда $B$ при каждом $\tau \in (0, 1)$ вполне непрерывен как оператор из $L_{\alpha(\tau)}$ в $L_{\beta(\tau)}$*, где

$$\alpha(\tau) = (1 - \tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1 - \tau)\beta_0 + \tau\beta_1.$$

Теорема 15.4. *Пусть $B$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $M_{\beta_0}$ и из $\Lambda_{\alpha_1}$ в $M_{\beta_1}$, где*

$$0 \leqslant \beta_0 < 1, \quad \beta_0 \leqslant \alpha_0 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$$

*и*

$$\alpha_0 \neq \alpha_1, \quad \beta_0 \neq \beta_1.$$

*Пусть $B$ вполне непрерывен как оператор из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $M_{\beta_0}$ и пусть значения $B$ на $\Lambda_{\alpha_0}$ лежат в пространстве $\overset{0}{M}_{\beta_0}$,* *где* $M^0_{\beta_0}$ — *замыкание по норме* $M_\beta$, *множества конечнозначных функций.*

*Тогда* $B$ *при каждом* $\tau \in (0, 1)$ *вполне непрерывен как оператор из* $L_{\alpha(\tau)}$ *в* $L_{\beta(\tau)}$, *где*

$$\alpha(\tau) = (1 - \tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \quad \beta(\tau) = (1 - \tau)\beta_0 + \tau\beta_1.$$

**15.4. Основные теоремы.** Через $E_1$ и $E_2$ ниже обозначаются произвольные банаховы пространства. Через $\tau$ обозначаются числа из промежутка $(0, 1]$.

Теорема 15.5. *Пусть линейный оператор* $B$ *на каждой характеристической функции* $\varkappa(s; D)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\| B\varkappa \|_{E_2} \leqslant k \| A\varkappa \|^{\tau}_{E_1} \| \varkappa \|^{1-\tau}_{L_\gamma}, \tag{15.23}$$

*где* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, *а* $A$ — *непрерывный оператор, действующий из* $\Lambda_\delta$ *в* $E_1$.

*Тогда оператор* $B$ *действует из пространства Лоренца* $\Lambda_{\alpha(\tau, \gamma, \delta)}$, *где*

$$\alpha(\tau, \gamma, \delta) = \tau\delta + (1 - \tau)\gamma, \tag{15.24}$$

*в пространство* $E_2$ *и непрерывен.*

Доказательство. Из неравенства (15.23) вытекает, что

$$\| B\varkappa(s; D) \|_{E_2} \leqslant k \| A \|^{\tau}_{\Lambda_\delta \to E_1} (\operatorname{mes} D)^{\tau\delta + (1-\tau)\gamma}.$$

Остается сослаться на лемму 15.2.

Теорема доказана.

Из леммы 15.4 вытекает, что в условиях теоремы 15.5 $B$ является непрерывным оператором, действующим в пространство $E_2$ из любого пространства $L_{\alpha(\tau, \gamma, \delta) - \varepsilon}$, где $0 < \varepsilon < \alpha(\tau, \gamma, \delta)$.

Теорема 15.6. *Пусть линейный оператор* $B$ *на всех конечнозначных функциях* $x(s)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\| Bx \|_{E_2} \leqslant k \| Ax \|^{\tau}_{E_1} \| x \|^{1-\tau}_{L_\gamma}, \tag{15.25}$$

*где* $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, *а* $A$ *вполне непрерывный оператор, действующий из* $L_\delta$ *в* $E_1$, *причем* $0 < \delta < 1$.

*Тогда оператор* **B** *вполне непрерывен как оператор из* $\Lambda_{\alpha(\tau,\ \gamma,\ \delta)}$ *в пространство* $E_2$, *где*

$$\alpha(\tau,\ \gamma,\ \delta) = \tau\delta + (1-\tau)\gamma.$$

Доказательство. Пусть $P_n$ — полная последовательность проекционных операторов. Тогда (см. п. 3.5)

$$\lim_{n\to\infty} \| A - AP_n \|_{L_\delta \to E_1} = 0. \tag{15.26}$$

Пусть $x \in T_{\alpha(\tau,\gamma,\delta)}$, где $T_\alpha$ — множество функций (15.5). Из неравенства (15.25) вытекает, что

$$\| B(I-P_n)x \|_{E_2} \leqslant k \| A(I-P_n) \|^{\tau}_{L_\delta \to E_1} \| I - P_n \|^{1-\tau}_{L_\gamma \to L_\gamma},$$

так как в силу (15.2) и (15.24)

$$\| x \|^{\tau}_{L_\delta} \| x \|^{1-\tau}_{L_\gamma} = 1.$$

Из леммы 15.1 вытекает тогда, что

$$\| B(I-P_n) \|_{\Lambda_{\alpha(\tau,\ \gamma,\ \delta)} \to E_2} \leqslant k \| A(I-P_n) \|^{\tau}_{L_\beta \to E_1}. \tag{15.27}$$

Соотношения (15.26) и (15.27) означают, что **B** по норме операторов, действующих из $\Lambda_{\alpha(\tau,\ \gamma,\ \delta)}$ в $E_2$, с любой точностью можно аппроксимировать конечномерным оператором $BP_n$. Следовательно, оператор **B** вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Предположение о полной непрерывности **A** как оператора из $L_\delta$ в $E_1$ можно в условиях теоремы 15.6 заменить менее ограничительным предположением о полной непрерывности **A** как оператора из $\Lambda_\delta$ в $E_1$, если значения оператора $A^*$ на $E_1^*$ принадлежат замыканию $M^0_{1-\delta}$ множества ограниченных функций в пространстве Марцинкевича $M_{1-\delta}$.

При исследовании конкретных операторов **B** теоремы 15.5 и 15.6 удобно применять в сочетании с интерполяционными теоремами.

Пусть выполнены условие

$$\| B\varkappa(s;\ D) \|_{L_{\beta_0}} \leqslant k_0 \| A_0 \varkappa(s;\ D) \|^{\tau_0}_{E_0} \| \varkappa(s;\ D) \|^{1-\tau_0}_{L_{\gamma_0}} \quad (D \subset \Omega) \tag{15.28}$$

и условие

$$\| B\varkappa(s;\ D)\|_{L_{\beta_1}} \leqslant k_1 \| A_1\varkappa(s;\ D)\|_{E_1}^{\tau_1} \|\varkappa(s;\ D)\|_{L_{\gamma_1}}^{1-\tau_1} \qquad (D \subset \Omega). \tag{15.29}$$

Пусть операторы $A_0$ и $A_1$ действуют соответственно из пространств $L_{\delta_0}$ и $L_{\delta_1}$ в пространства $E_0$ и $E_1$ и непрерывны. Тогда из теоремы 15.5 можно сделать вывод, что оператор $B$ одновременно удовлетворяет условию $\Lambda L[\alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0);\ \beta_0]$ и условию $\Lambda L[\alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1);\ \beta_1]$. Если выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0) \geqslant \beta_0, \quad \alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1) \geqslant \beta_1,\\ \alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0) \neq \alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1), \end{aligned}\right\} \tag{15.30}$$

то из теоремы 15.1 следует, что $L$-характеристика $L$ ($B$; *непр.*) содержит все внутренние точки отрезка, соединяющего точки $\{\alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0);\ \beta_0\}$ и $\{\alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1);\ \beta_1\}$. Если одно из соотношений (15.30) не выполнено, то теорему 15.1 применить нельзя; здесь на основании теоремы 2.4 можно лишь утверждать, что $L$ ($B$; *непр.*) содержит все точки, расположенные над указанным выше отрезком. Если $\alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0) > \beta_0$, но $\alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1) < \beta_1$ и $\alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0) \neq \alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1)$, то $L$ ($B$; *непр.*) содержит лежащую под прямой $\beta = \alpha$ часть отрезка, соединяющего точки $\{\alpha(\tau_0,\ \gamma_0,\ \delta_0);\ \beta_0\}$ и $\{\alpha(\tau_1,\ \gamma_1,\ \delta_1);\ \beta_1\}$; для доказательства можно воспользоваться, например, неравенством (2.52) и теоремой 8.2.

Допустим, что выполнены менее ограничительные, чем (15.28) и (15.29), условия

$$\| B\varkappa(s;\ D)\|_{M_{\beta_0}} \leqslant$$
$$\leqslant k_0 \| A_0\varkappa(s;\ D)\|_{E_0}^{\tau_0} \|\varkappa(s;\ D)\|_{L_{\gamma_0}}^{1-\tau_0} \quad (D \subset \Omega) \tag{15.31}$$

и

$$\| B\varkappa(s;\ D)\|_{M_{\beta_1}} \leqslant$$
$$\leqslant k_1 \| A_1\varkappa(s;\ D)\|_{E_1}^{\tau_1} \|\varkappa(s;\ D)\|_{L_{\gamma_1}}^{1-\tau_1} \quad (D \subset \Omega). \tag{15.32}$$

Пусть операторы $A_0$ и $A_1$ действуют соответственно из пространств $\Lambda_{\delta_0}$ и $\Lambda_{\delta_1}$ в пространства $E_0$ и $E_1$ и непрерывны.

Предположим, что отрезок, соединяющий точки

$$\{\alpha(\tau_0, \gamma_0, \delta_0); \beta_0\} \text{ и } \{\alpha(\tau_1, \gamma_1, \delta_1); \beta_1\},$$

расположен под прямой $\beta = \alpha$ и непараллелен осям координат. Тогда для исследования оператора $B$, который в силу теоремы 15.5 действует из $\Lambda_{\alpha(\tau_0, \gamma_0, \delta_0)}$ в $M_{\beta_0}$ и из $\Lambda_{\alpha(\tau_1, \gamma_1, \delta_1)}$ в $M_{\beta_1}$ и непрерывен, можно применить интерполяционную теорему 8.2. Из этой интерполяционной теоремы вытекает, что все внутренние точки указанного отрезка принадлежат $L$ ($B$; *непр.*).

Аналогичным образом для построения $L$-характеристики $L$($B$; *вп. непр.*) можно объединить теорему 15.6 с теоремами 3.10, 15.2—15.4 об интерполировании свойства полной непрерывности.

Могут быть случаи, когда неравенства типа (15.23) или (15.25) более просто устанавливаются для оператора $B^*$, сопряженного оператору $B$, чем для самого оператора $B$. Тогда из теорем 15.5 и 15.6 также можно получить информацию о том, из каких пространств в какие действует оператор $B$.

В частности, если $E_2 = L_\beta$ и $B^* = B$, то из теоремы 15.5 вытекает, что оператор $B$ одновременно удовлетворяет условиям $\Lambda L[\alpha(\tau, \gamma, \delta); \beta]$ и $LM[1-\beta; 1-\alpha(\tau, \gamma, \delta)]$. Пусть при этом

$$\alpha(\tau, \gamma, \delta) \geqslant \beta, \quad \alpha(\tau, \gamma, \delta) \neq 1-\beta.$$

Тогда можно применить теорему 8.2, в силу которой оператор $B$ непрерывен как оператор из каждого пространства $L_{r(\lambda)}$, где $0 < \lambda < 1$, в соответствующее пространство $L_{q(\lambda)}$, где

$$r(\lambda) = (1-\lambda)\,\alpha(\tau, \gamma, \delta) + \lambda(1-\beta)$$

и

$$q(\lambda) = (1-\lambda)\beta + \lambda[1-\alpha(\tau, \gamma, \delta)].$$

**15.5. $L$-характеристики дробных степеней.** В этом пункте мы рассмотрим операторы $B$, для которых выполнены неравенства (15.25) частного вида

$$\|Bx\|_\beta \leqslant k(\beta)\,\|Ax\|_\beta^\tau\,\|x\|_\beta^{1-\tau} \quad (x \in L_3). \tag{15.33}$$

Допустим, что неравенства (15.33) выполнены при всех значениях $\beta$ из некоторого интервала $(\beta_0, \beta_1)$. Пусть $L$-харак-

теристика $L(\boldsymbol{A};\ \textit{непр.})$ или $L$-характеристика $L(\boldsymbol{A};\ \textit{вп. непр}$
содержит кривую

$$\alpha=\eta(\beta)\quad(\beta_0<\beta<\beta_1),$$

где $\eta(\beta)$ — неубывающая функция (рис. 15.1). Из доказ...
в предыдущем пункте теорем вытекает, что соответс...

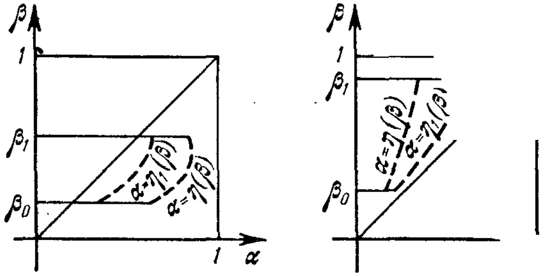


Рис. 15.1.

$L$-характеристика $L(\boldsymbol{B};\ \textit{непр.})$ или $L(\boldsymbol{B};\ \textit{вп.}$ ...
все точки $\{\alpha,\ \beta\}$, расположенные левее кривой

$$\alpha=\eta_1(\beta)\quad(\beta_0<\beta<\beta_1),$$

где

$$\eta_1(\beta)=(1-\tau)\beta+\tau\eta(\beta).$$

Если кривая $\alpha=\eta(\beta)$ $(\beta_0<\beta<\beta_1)$ является отрезком
щим под прямой $\alpha=\beta$ (рис. 15.2), то и все точки о
$\alpha=\eta_1(\beta)$ $(\beta_0<\beta<\beta_1)$ принадлежат соответствующей $L$-х
теристике оператора $\boldsymbol{B}$. Сделаем еще одно замечание:
неравенство (15.33) выполнено при $\beta=\beta_0$ и одна из $L$-ха
теристик $L(\boldsymbol{A};\ \textit{непр.})$ или $L(\boldsymbol{A};\ \textit{вп. непр.})$ содержит точ
$\alpha_0=\eta(\beta_0)$, то соответствующая $L$-характеристика опера
тора $\boldsymbol{B}$ содержит все точки прямой $\beta=\beta_0$, абсцисса которы
меньше, чем $\eta_1(\beta_0)=(1-\tau)\beta+\tau\eta(\beta_0)$.

Иногда неравенства вида (15.33) устанавливаются не дл
оператора $\boldsymbol{B}$, а для сопряженного ему оператора $\boldsymbol{B}^*$:

$$\|\boldsymbol{B}^*x\|_\beta\leqslant k_1(\beta)\,\|A_1x\|_\beta^{\tau_1}\,\|x\|_\beta^{1-\tau_1}\quad(x\in L_3).\qquad(15.35)$$

В этих случаях изложенная выше схема позволяет построит
части $L$-характеристик оператора $\boldsymbol{B}^*$. Симметричные этим

частям относительно прямой $\alpha+\beta=1$ множества будут принадлежать $L$-характеристикам оператора $B$.

Для некоторых операторов удается доказать и неравенства (15.33) и неравенства (15.35). Каждое из этих семейств неравенств позволяет выделить часть $L$-характеристик оператора $B$. После этого для дальнейшего анализа $L$-характеристик удобно применять интерполяционные теоремы.

Изложенные выше соображения находят основное применение при построении $L$-характеристик дробных степеней позитивных операторов.

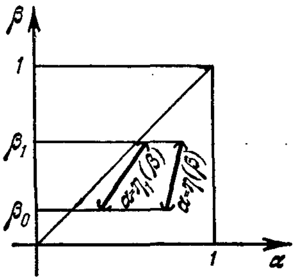

Рис. 15.2.

Пусть $C$ — некоторый оператор, который позитивен (см. § 14) в каждом из пространств $L_\beta$, $\beta_0<\beta<\beta_1$ (отметим, что из позитивности $C$ в пространствах $L_{\beta'}$ и $L_{\beta''}$ вытекает, что он позитивен и в пространствах $L_\beta$, где $\beta\in(\beta', \beta'')$). Оператор $C^{-\tau}$ $(0<\tau<1)$ в силу теоремы **14.2** удовлетворяет неравенствам

$$\| C^{-\tau}x\|_\beta \leqslant k(\beta)\| C^{-1}x\|_\beta^\tau \, \| x\|_\beta^{1-\tau} \qquad (\beta_0<\beta<\beta_1). \tag{15.36}$$

Эти неравенства можно рассматривать как неравенства (15.33). Поэтому по $L$-характеристикам оператора $C^{-1}$ могут быть построены части $L$-характеристик оператора $C^{-\tau}$.

Из позитивности оператора $C$ в пространствах $L_\beta$, где $\beta_0<\beta<\beta_1$, вытекает позитивность оператора $C^*$ в пространствах $L_{1-\beta}$. Дробные степени $(C^*)^{-\tau}$ оператора $C^*$ связаны с операторами $C^{-\tau}$ равенством

$$(C^*)^{-\tau}=(C^{-\tau})^*, \tag{15.37}$$

которое непосредственно вытекает из формулы (14.2). Значит,

$$\|(C^{-\tau})^* x\|_{1-\beta} \leqslant k_1(\beta)\|(C^{-1})^* x\|_{1-\beta}^\tau \, \| x\|_{1-\beta}^{1-\tau} \tag{15.38}$$
$$(\beta_0<\beta<\beta_1).$$

Отсюда также можно получить описание некоторых частей $L$-характеристик оператора $C^{-\tau}$. При этом в ряде случаев выделяются части $L$-характеристик, отличные от тех, которые можно получить из неравенств (15.36).

**15.6. Еще одна теорема о полной непрерывности.** Пусть непрерывный линейный оператор $B$ действует из пространства Лоренца $\Lambda_\alpha$ в некоторое банахово пространство $E$. Из леммы 15.1 вытекает, что оператор $B$ вполне непрерывен, если его значения на множестве $T_\alpha$ функций (15.5) образуют множество, компактное в $E$.

Обозначим через $T_\alpha^+$ множество неотрицательных функций из $T_\alpha$. Иначе говоря, $T_\alpha^+$ состоит из функций вида

$$x(s) = (\operatorname{mes} D)^{-\alpha} \varkappa_D(s) \quad (D \subset \Omega). \tag{15.39}$$

Легко видеть, что каждая функция $x(s)$ из $T_\alpha$ может быть записана в виде

$$x(s) = a_1 x_1(s) - a_2 x_2(s),$$

где $x_1(s)$, $x_2(s)$ – функции из $T_\alpha^+$ и $0 \leqslant a_1, a_2 \leqslant 1$. Поэтому справедлива

Лемма 15.6. *Пусть оператор $B$ преобразует $T_\alpha^+$ в компактное в $E$ множество.*

*Тогда $B$ вполне непрерывен как оператор из $\Lambda_\alpha$ в $E$.*

Допустим, что $B$ непрерывен как оператор из $\Lambda_{\alpha_0}$ в $E$ и вполне непрерывен как оператор из $\Lambda_{\alpha_1}$ в $E$. Простой подсчет показывает, что $B$ вполне непрерывен как оператор, действующий из каждого пространства $\Lambda_\alpha$, где $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$, в пространство $E$. Из этого замечания и из леммы 15.6 вытекает следующее дополнение к теореме 15.6.

Теорема 15.7. *Пусть линейный оператор $B$ на всех функциях вида*

$$\chi(s) = \frac{\varkappa(s; D_1)}{(\operatorname{mes} D_1)^\delta} - \frac{\varkappa(s; D_2)}{(\operatorname{mes} D_2)^\delta} \quad (D_1, D_2 \subset \Omega) \tag{15.40}$$

*удовлетворяет неравенству $\|B\chi\|_{E_2} \leqslant k \|A\chi\|_{E_1}^\tau \|\chi\|_{L_\gamma}^{1-\tau}$, где $0 < \tau \leqslant 1$, а $A$ – вполне непрерывный оператор, действующий из $\Lambda_\delta$ в $E_1$, причем $0 < \delta < \gamma \leqslant 1$.*

*Тогда $B$ вполне непрерывен как оператор из каждого пространства $L_\alpha$, где*

$$\delta < \alpha < \tau\delta + (1-\tau)\gamma, \tag{15.41}$$

*в пространство $E_2$.*

## § 16. Дробные степени эллиптических операторов

**16.1. Эллиптические дифференциальные выражения** *). Ниже через $D^r u$, где $r = \{r_1, \ldots, r_n\}$ — вектор с неотрицательными целочисленными компонентами, обозначается производная

$$D^r u = \frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_n} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}}; \tag{16.1}$$

порядок $r_1 + \ldots + r_n$ этой производной обозначается через $|r|$. Каждому дифференциальному выражению **)

$$\mathfrak{C} u = \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant m} c_r(x) D^r u \tag{16.2}$$

будем сопоставлять характеристические многочлены

$$\varphi(\xi; \mathfrak{C}, x) = \sum_{|r| = m} c_r(x) (i\xi)^r, \tag{16.3}$$

где $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и

$$(i\xi)^r = (i\xi_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (i\xi_n)^{r_n}. \tag{16.4}$$

Через $\Omega$ ниже обозначается ограниченная замкнутая область с достаточно гладкой границей $\Gamma$. Дифференциальное выражение

$$\mathfrak{A} u = \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant 2k} a_k(x) D^r u \quad (x \in \Omega) \tag{16.5}$$

---

*) Общей теории эллиптических операторов посвящено большое число работ. Важные результаты в этой области получены С. Н. Бернштейном, Ю. Шаудером, И. Г. Петровским, С. Л. Соболевым, И. Н. Векуа, О. А. Олейник, О. А. Ладыженской, А. И. Кошелевым, С. Агмоном, А. Дуглисом, Л. Ниренбергом, С. Г. Михлиным, Л. Н. Слободецким, Я. Б. Лопатинским, З. Я. Шапиро, Ф. Браудером, Н. Ароншайном, Л. Хермандером, М. Шехтером, В. А. Солонниковым, М. И. Вишиком, Г. И. Эскиным и многими другими авторами (достаточно полная библиография, доведенная до 1962 г., приведена у С. Агмона, А. Дуглиса и Л. Ниренберга [1]).

**) Для простоты рассматриваются только дифференциальные выражения с вещественными коэффициентами.

называется *эллиптическим в точке* $x_0 \in \Omega$, если соответствующий характеристический многочлен

$$\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n; \mathfrak{A}, x_0) = \sum_{|r|=2k} a_r(x_0)(i\xi)^r \qquad (16.6)$$

положителен при каждом ненулевом вещественном векторе $\xi$. Эллиптичность в точке $x_0$ дифференциального выражения (16.5) очевидным образом сохраняется при переходе к новым ортогональным системам координат.

Дифференциальное выражение (16.5) называется *эллиптическим в области* $\Omega$, если оно эллиптично в каждой точке $x_0 \in \Omega$.

Ниже рассматриваются эллиптические дифференциальные выражения (16.5) с гладкими на $\Omega$ коэффициентами $a_r(x)$.

Для дифференциальных выражений второго порядка

$$\mathfrak{A}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x) u \qquad (16.7)$$

условие эллиптичности эквивалентно отрицательной определенности квадратичных форм

$$P(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \quad (x \in \Omega). \qquad (16.8)$$

Дифференциальные выражения обычно рассматривают вместе с граничными условиями вида

$$\mathfrak{B}_j u(x) = \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant m_j} b_{rj}(x) D^r u = 0 \quad (x \in \Gamma), \qquad (16.9)$$

где $0 \leqslant m_j \leqslant 2k-1$, $j = 1, \ldots, k$, а коэффициенты $b_{rj}(x)$ непрерывны.

Зафиксируем точку $x_0 \in \Gamma$ и будем считать, что система координат $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ выбрана таким образом, что внешняя нормаль к $\Gamma$ в точке $x_0$ направлена по оси переменной $x_n$. Говорят, что *граничные условия* (16.9) *накрывают в точке* $x_0$ *дифференциальное выражение* (16.5), если при любом ненулевом вещественном векторе $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0\}$ система из $k$ многочленов

$$\varphi_j(z) = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, z; \mathfrak{B}_j, x_0) \quad (j = 1, \ldots, k) \qquad (16.10)$$

линейно независима по модулю многочлена $\varphi^+(z)$ степени $k$, корни которого совпадают с лежащими в верхней полуплоскости корнями многочлена $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, z; \mathfrak{A}, x_0)$.

Ниже предполагается, что граничные условия (16.9) накрывают дифференциальное выражение (16.5) в каждой точке $x_0 \in \Gamma$.

Легко проверить, что граничное условие

$$u(x) = 0 \quad (x \in \Gamma) \qquad (16.11)$$

накрывает каждое эллиптическое дифференциальное выражение второго порядка. Дифференциальное выражение второго порядка накрывается также граничным условием

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}+\sigma(x)\,u(x)=0 \quad (x\in\Gamma), \tag{16.12}$$

где $\frac{\partial}{\partial\nu}$ — конормальная производная, а $\sigma(x)$ — непрерывная положительная функция.

**16.2. Эллиптические операторы.** Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность функций $u(x)$ $(x\in\Omega)$, имеющих на $\Omega$ (в классическом смысле) производные $D^r u(x)$ всех порядков $|r|\leqslant 2k$ и удовлетворяющих на $\Gamma$ граничным условиям (16.9). На этой совокупности $\mathfrak{D}$ рассмотрим оператор $A$, определенный дифференциальным выражением (16.5):

$$Au(x)=\mathfrak{A}u(x). \tag{16.13}$$

Оператор $A$ порожден как эллиптическим дифференциальным выражением (16.5), так и граничными условиями (16.9). Будем называть его *эллиптическим оператором*.

Для исследования эллиптических операторов $A$ их удобно рассматривать как неограниченные линейные операторы, действующие в некотором функциональном пространстве $E$. Как правило, мы будем рассматривать эллиптические операторы в пространствах $L_\alpha$.

Если эллиптический оператор $A$ рассматривать в функциональном пространстве $E$, то его приходится считать определенным на таком максимальном линейном подмножестве $D(A)$ множества $\mathfrak{D}$, которое включено в $E$ и на котором значения $A$ также принадлежат $E$. Описанная конструкция приводит, к сожалению, к операторам, обладающим «плохими» свойствами. В частности, эти операторы не являются даже замкнутыми.

В связи с этим эллиптические операторы доопределяют на некоторых функциях, не принадлежащих $\mathfrak{D}$. Название «эллиптический оператор» сохраняют за доопределенным оператором.

Доопределение эллиптического оператора может быть проведено различными способами. Наиболее простой из них заключается в проведении обычной операции замыкания. Мы используем другой способ, который связан с предварительным обобщением понятия производной и последующим конструктивным описанием области определения доопределенного оператора. Этот естественный способ развит С. Л. Соболевым и его последователями.

Напомним, что носителем функции $u(x)$ называется множество точек, в которых $u(x)$ принимает ненулевые значения. Функция $u(x)$, определенная на $\Omega$, называется финитной, если ее носитель лежит в $\Omega$ и находится на положительном расстоянии от границы $\Gamma$.

Если функция $u(x)$ имеет достаточное число производных, то она удовлетворяет тождествам

$$\int\limits_\Omega u(x)\,D^r\varphi(x)\,dx=\int\limits_\Omega D^r u(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{16.14}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая финитная функция. Тождества (16.14) доказываются простым интегрированием по частям. Эти тождества указывают естественный путь обобщения понятия производной.

Допустим, что для некоторой функции $u(x)$ может быть указана такая суммируемая функция $v(x)$, что

$$\int_{\Omega} u(x) D^r \varphi(x)\, dx = (-1)^{|r|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x)\, dx, \tag{16.15}$$

где $\varphi(x)$ — любая бесконечно дифференцируемая финитная функция, $r = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Будем тогда говорить, что $u(x)$ имеет *обобщенную* (*в смысле С. Л. Соболева*) *производную* $D^r u(x)$, которая определяется равенством

$$D^r u(x) = v(x). \tag{16.16}$$

Обобщенная производная определяется однозначно (с точностью до значений на множестве меры нуль). Тождества (16.16) означают, что для гладких функций обобщенные производные совпадают с обычными. В дальнейшем при использовании обобщенных производных слово «обобщенная» часто будет опускаться.

Через $W_\alpha^l = W_\alpha^l(\Omega)$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим совокупность таких определенных на $\Omega$ функций, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u(x)\|_{W_\alpha^l} = \left\{ \int_{\Omega} \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant l} |D^r u(x)|^{\frac{1}{\alpha}}\, dx \right\}^{\alpha}. \tag{16.17}$$

Пространства $W_\alpha^l$ являются полными нормированными пространствами; пространства $W_\alpha^0$ совпадают, очевидно, с пространствами $L_\alpha$.

Кроме пространств $W_\alpha^l$, ниже будут использованы и пространства $C^l = C^l(\Omega)$ непрерывно дифференцируемых на $\Omega$ функций $u(x)$ с нормой

$$\|u(x)\|_{C^l} = \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant l} \max_{x \in \Omega} |D^r u(x)|. \tag{16.18}$$

Как уже отмечалось, обобщенные производные определяются с точностью до значений на множестве меры нуль. Отсюда, на первый взгляд, вытекает, что нельзя говорить о граничных значениях функций из пространств $W_\alpha^l$. Это не так.

Оказывается, что каждую функцию $u(x)$ из $W_\alpha^l(\Omega)$ можно (см., например, С. Л. Соболев [1], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], В. И. Смирнов [1]) представить вместе со своими обобщенными производными до порядка $l - 1$ при помощи линейных интегральных операторов, примененных к обобщенным производным функции $u(x)$ порядка $l$. Значения этих интегральных представлений нужно рассматривать как значения самой функции $u(x)$ и ее обобщенных производных до порядка $l-1$. Анализ соответствующих интегральных операторов показывает, что функция $u(x)$ и ее обобщенные производные до порядка $l-1$ определены однозначно на границе $\Gamma$ области $\Omega$ (с точностью до значений на множестве поверхностной меры нуль).

Поэтому для каждой функции $u(x)\in W_\alpha^{2k}(\Omega)$ можно говорить о значениях граничных операторов вида

$$\mathfrak{B}u(x)=\sum_{0\leqslant|r|\leqslant 2k-1} b_r(x)\,D^r u \quad (x\in\Gamma). \tag{16.19}$$

Оказывается, что функции $u(x)\in W_\alpha^{2k}(\Omega)$, удовлетворяющие граничным условиям (16.9), образуют в $W_\alpha^{2k}(\Omega)$ замкнутое подпространство, которое мы обозначим через $W_\alpha^{2k}(\Omega;\,\mathfrak{B})$.

Ниже под эллиптическим оператором $A$ в пространстве $L_\alpha$ $(0<\alpha<1)$, порожденным эллиптическим дифференциальным выражением (16.5) и граничными условиями (16.9), мы будем понимать оператор с областью определения $D(A)=W_\alpha^{2k}(\Omega;\,\mathfrak{B})$. Значения оператора $A$ вычисляются по формуле

$$Au(x)=\sum_{0\leqslant|r|\leqslant 2k} a_r(x)\,D^r u(x); \tag{16.20}$$

здесь $D^r u(x)$ — обобщенные производные. При таком определении оператор $A$ обладает рядом «хороших» свойств.

**16.3. Позитивные эллиптические операторы.** Будем предполагать, что граничные условия (16.9) в каждой точке $x_0\in\Gamma$ накрывают дифференциальное выражение (16.5) в усиленном смысле. Это значит, что многочлены (16.10) линейно независимы по модулю каждого многочлена $\varphi^+(z;\,t)$ (при $t\in[0,\infty)$) степени $k$, корни которого совпадают с лежащими в верхней полуплоскости корнями уравнения

$$\varphi(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{n-1},\,z;\,\mathfrak{A},\,x_0)+t=0.$$

Как оказывается (см. С. Агмон [1]), в этом случае оператор $A+tI$ при больших $t$ имеет непрерывный обратный в каждом пространстве $L_\alpha$ $(0<\alpha<1)$, причем при этих значениях $t$

$$\left\|(tI+A)^{-1}\right\|_{L_\alpha\to L_\alpha}\leqslant\frac{c(\alpha)}{1+t}. \tag{16.21}$$

Эллиптический оператор $A$ будет позитивным (см. § 14), если неравенство (16.21) выполнено при всех $t\geqslant 0$. Для эллиптического оператора второго порядка позитивность имеет место, если коэффициент $c(x)$ в (16.7) положителен и достаточно велик. Пусть эллиптический оператор $A_1$ определяется эллиптическим дифференциальным выражением (16.5) и граничными условиями (16.9), которые его накрывают в усиленном смысле. Тогда будет позитивным эллиптический оператор $A = A_1 + t_0 I$, где $t_0$ — достаточно большое положительное число.

Дальнейшие построения относятся к позитивным эллиптическим операторам.

Во многих вопросах приходится рассматривать оператор $A^{-1}$, обратный к позитивному эллиптическому оператору $A$. Например, формула

$$u(x) = A^{-1} f(x)$$

дает решение дифференциального уравнения

$$\sum_{0 \leqslant |r| \leqslant 2k} a_r(x) D^r u(x) = f(x), \tag{16.22}$$

удовлетворяющее граничным условиям (16.9), если эллиптический оператор $A$ определен совокупностью левой части уравнения (16.22) и граничных условий (16.9).

Нас будут интересовать свойства оператора $A^{-1}$. Этот непрерывный в $L_\alpha$ оператор допускает интегральное представление. Однако достаточно полное его исследование может быть проведено непосредственно по эллиптическому оператору.

Пусть $E_1$ и $E_2$ — два банаховых пространства, причем $E_1 \subset E_2$. Обозначим через $J$ оператор, который относит каждому элементу $u \in E_1$ тот же элемент, рассматриваемый как точка пространства $E_2$. Если оператор $J$ непрерывен, то говорят, что $E_1$ *непрерывно вложено* в $E_2$; если $J$ вполне непрерывен, то говорят, что $E_1$ *вполне непрерывно вложено* в $E_2$. Непрерывность вложения $E_1$ в $E_2$ равносильна тому, что

$$\| u(x) \|_{E_2} \leqslant M \| u(x) \|_{E_1} \qquad (u(x) \in E_1). \tag{16.23}$$

Теорема 16.1. *Пусть пространство $W_\alpha^{2k}$ $(0 < \alpha < 1)$ непрерывно вложено в пространство $E$.*

*Тогда оператор $A^{-1}$ действует из $L_\alpha$ в $E$ и непрерывен.*

Теорема 16.2. *Пусть пространство $W_\alpha^{2k}$ $(0 < \alpha < 1)$ вполне непрерывно вложено в пространство $E$.*

*Тогда оператор $A^{-1}$ действует из $L_\alpha$ в $E$ и вполне непрерывен.*

Обе эти теоремы непосредственно вытекают из так называемого *неравенства коэрцитивности*

$$\|Au(x)\|_{L_\alpha} \geqslant c_0 \|u(x)\|_{W_\alpha^{2k}} \qquad (u \in D(A)), \tag{16.24}$$

которое является одним из основных фактов теории эллиптических операторов. Неравенство коэрцитивности содержится в свойстве позитивности эллиптического оператора. Пусть, действительно, существует оператор $A^{-1}$. Тогда $A$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами полных нормированных пространств $W_\alpha^{2k}(\Omega;\ \mathfrak{B})$ и $L_\alpha$, причем он непрерывен. Из известной теоремы С. Банаха вытекает непрерывность $A^{-1}$ как оператора из $L_\alpha$ в $W_\alpha^{2k}(\Omega;\ \mathfrak{B})$; это значит, что выполнено неравенство коэрцитивности.

Для применения теорем 16.1 и 16.2 нужно знать, в какие пространства $E$ вложено пространство $W_\alpha^{2k}$.

Положим

$$\xi(\alpha) = \alpha - \frac{2k}{n} \qquad \left(\frac{2k}{n} < \alpha < 1\right), \tag{16.25}$$

где $n$ — размерность области $\Omega$. Из известных теорем вложения С. Л. Соболева — В. И. Кондрашова вытекает, что пространство $W_\alpha^{2k}$ при $0 < \alpha < \frac{2k}{n}$ вполне непрерывно вложено в пространство $C$; при $\alpha = \frac{2k}{n}$ пространство $W_\alpha^{2k}$ вполне непрерывно вложено во все пространства $L_\beta$, где $\beta > 0$; при $\frac{2k}{n} < \alpha < 1$ пространство $W_\alpha^{2k}$ непрерывно вложено в пространство $L_{\xi(\alpha)}$ и вполне непрерывно вложено во все пространства $L_\beta$, где $\beta > \xi(\alpha)$; наконец, $W_1^{2k}$ вполне непрерывно вложено во все пространства $L_\beta$, где $\beta > 1 - \frac{2k}{n}$.

Эти теоремы вложения и теоремы 16.1, 16.2 позволяют описать $L$-характеристики оператора $A^{-1}$, обратного к эллиптическому. Если $2k > n$, то $A^{-1}$ действует из любого $L_\alpha$ в $C$ и вполне непрерывен. Если $2k < n$, то $L$-характеристики $L(A^{-1};\ \textit{непр.})$ и $L(A^{-1};\ \textit{вп. непр.})$ являются многоугольниками. Эти многоугольники заштрихованы на рис. 16.1. Если $2k = n$, то $L$-характеристики $L(A^{-1};$ *вп. непр.*$)$ и $L(A^{-1};$ *непр.*$)$ содержат полуполосу $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta < \infty$.

Теоремы 16.1 и 16.2 можно применить и для построения $L$-характеристик операторов $D^r A^{-1}$, где $D^r$ — некоторая фиксированная производная порядка $|r| < 2k$. Для этого в качестве

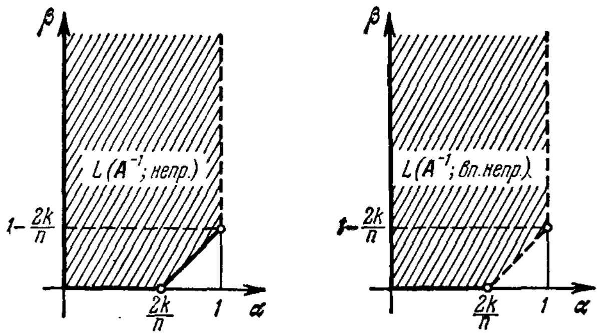


Рис. 16.1.

пространства $E$ нужно рассмотреть пространства $W_\alpha^{|r|}$. Из уже упоминавшихся теорем вложения С. Л. Соболева — В. И. Кондрашова вытекает, что пространство $W_\alpha^{2k}$ при $0 < \alpha < \frac{2k - |r|}{n}$ вполне непрерывно вложено в пространство $C^{|r|}$; при $\alpha = \frac{2k - |r|}{n}$ вполне непрерывно вложено во все пространства $W_\beta^{|r|}$, где $\beta > 0$; при $\frac{2k - |r|}{n} < \alpha < 1$ пространство $W_\alpha^{2k}$ непрерывно вложено в пространство $W_{\xi_{|r|}(\alpha)}^{|r|}$, где

$$\xi_{|r|}(\alpha) = \alpha - \frac{2k - |r|}{n} \quad \left(\frac{2k - |r|}{n} < \alpha < 1\right), \tag{16.26}$$

и вполне непрерывно вложено во все пространства $W_\beta^{|r|}$, где $\beta > \xi_{|r|}(\alpha)$; наконец, $W_1^{2k}$ вполне непрерывно вложено во все пространства $W_\beta^{|r|}$, где $\beta > 1 - \frac{2k - |r|}{n}$.

Эти теоремы позволяют описать $L$-характеристики операторов $D^rA^{-1}$: если $\frac{2k-|r|}{n}\geqslant 1$, то $L$-характеристики $L(D^rA^{-1};\ \textit{непр.})$ и $L(D^rA^{-1};\ \textit{вп. непр.})$ содержат полуполосу $0\leqslant\alpha<1$, $0\leqslant\beta<\infty$; если $\frac{2k-|r|}{n}<1$, то $L$-характеристики $L(D^rA^{-1};\ \textit{непр.})$ и $L(D^rA^{-1};\ \textit{вп. непр.})$ являются многоугольниками — $L$-характеристика $L(D^rA^{-1};\ \textit{непр.})$ содержит множество точек $\{\alpha, \beta\}$,

$$0\leqslant\alpha<1, \quad 0\leqslant\beta<\infty, \quad \beta\geqslant\xi_{|r|}(\alpha),$$

из которого исключена точка $\left\{\frac{2k-|r|}{n},\ 0\right\}$, а $L$-характеристика $L(D^rA^{-1};\ \textit{вп. непр.})$ содержит множество точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых

$$0\leqslant\alpha<1, \quad 0\leqslant\beta<\infty, \quad \beta>\xi_{|r|}(\alpha).$$

Неравенство коэрцитивности (16.24) позволяет получить более полную информацию об операторах $D^rA^{-1}$. Из него вытекает, что

$$\|D^rA^{-1}u(x)\|_{W_\alpha^{2k-|r|}}\leqslant c_1\|u(x)\|_{L_\alpha}. \tag{16.27}$$

Поэтому $D^rA^{-1}$ является непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в каждое пространство $E$, в которое непрерывно вложено пространство $W_\alpha^{2k-|r|}$. Аналогично, $D^rA^{-1}$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в каждое пространство $E$, в которое вполне непрерывно вложено пространство $W_\alpha^{2k-|r|}$.

Отметим в заключение, что примененная выше схема рассуждений позволяет изучить $A^{-1}$ и $D^rA^{-1}$ и как операторы, действующие из $L_\alpha(\Omega)$ в различные пространства $E$ функций, заданных на некотором $m$-мерном многообразии $S\subset\Omega$ (например, на $\Gamma$ или на части $\Gamma$). Для этого нужно воспользоваться известными теоремами о вложении пространств $W_\alpha^l(\Omega)$ в пространства $E$ функций, определенных на $S$.

**16.4 Мультипликативные неравенства и дробные степени эллиптического оператора*).** Продолжим изучение позитивных эллиптических операторов $A$. Нас будут интересовать в этом пункте операторы $A^{-\tau}$ и $D^r A^{-\tau}$. Выясним, в какие пространства $E$ они действуют из пространств $L_\alpha$. Результаты пункта будут получены простым объединением некоторых теорем из § 14, неравенств коэрцитивности и мультипликативных неравенств, связывающих нормы в различных пространствах.

Сформулируем вначале одну общую теорему, относящуюся к абстрактным операторам.

Теорема 16.3. *Пусть $E$ и $E_1$ — два банаховых пространства. Пусть $A$ — позитивный оператор в пространстве $E$, $B$ — замкнутый линейный оператор, действующий из $E$ в $E_1$. Пусть выполнено неравенство*

$$\| Bu \|_{E_1} \leqslant k \| Au \|_E^{\tau} \| u \|_E^{1-\tau} \quad (u \in E), \tag{16.28}$$

*где $\tau \in (0, 1)$.*

*Тогда при любом $\varepsilon > 0$ оператор $BA^{-\tau-\varepsilon}$ действует из $E$ в $E_1$ и непрерывен.*

*Если оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен в $E$, то $BA^{-\tau-\varepsilon}$ действует из $E$ в $E_1$ и вполне непрерывен.*

Доказательство. Первое утверждение является частным случаем теоремы 14.5 при $\tau_0 = 1$. Для доказательства второго утверждения представим оператор $BA^{-\tau-\varepsilon}$ в виде

$$BA^{-\tau-\varepsilon} = BA^{-\tau-\frac{\varepsilon}{2}} A^{-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{16.29}$$

Оператор $A^{-\frac{\varepsilon}{2}}$ в силу теоремы 14.10 вполне непрерывен в $E$, а оператор $BA^{-\tau-\frac{\varepsilon}{2}}$ в силу первого утверждения теоремы действует из $E$ в $E_1$ и непрерывен. Поэтому из (16.29) вытекает полная непрерывность $BA^{-\tau-\varepsilon}$ как оператора из $E$ в $E_1$.

Теорема доказана.

Пусть $E_0$ — некоторое банахово пространство функций, заданных либо на $\Omega$, либо на некотором $m$-мерном много-

*) В этом пункте изложены теоремы В. П. Глушко [1].

образии $S \subset \Omega$, и пусть выполнено мультипликативное неравенство

$$\| u(x) \|_{E_0} \leqslant M_0 \| u(x) \|^{\tau}_{W^{2k}_{\alpha}} \| u(x) \|^{1-\tau}_{L_{\alpha}}. \tag{16.30}$$

Тогда из неравенства коэрцитивности (16.24) вытекает, что

$$\| u(x) \|_{E_0} \leqslant M_1 \| Au(x) \|^{\tau}_{L_{\alpha}} \| u(x) \|^{1-\tau}_{L_{\alpha}}, \tag{16.31}$$

где $A$ — позитивный эллиптический оператор порядка $2k$. Неравенство (16.31) можно рассматривать как условие (16.28) теоремы 16.3. Из этой теоремы вытекает

Теорема 16.4. *Пусть $A$ — позитивный эллиптический оператор порядка $2k$. Пусть выполнено неравенство* (16.30).

*Тогда при любом $\varepsilon > 0$ оператор $A^{-\tau-\varepsilon}$ действует из $L_{\alpha}$ в $E_0$ и вполне непрерывен.*

Применения этой теоремы связаны с конкретными неравенствами вида (16.30). Пусть числа $\alpha$, $\beta$, $l$, $l_0$ связаны неравенствами

$$0 \leqslant l \leqslant l_0, \quad n\alpha - l_0 \leqslant n\beta - l < n\alpha, \quad \alpha < 1. \tag{16.32}$$

Тогда (Л. Ниренберг [1], В. П. Глушко и С. Г. Крейн [1], В. П. Ильин [1—3]) справедливы следующие утверждения: *если $\beta > 0$, то*

$$\| u(x) \|_{W^{l}_{\beta}} \leqslant c \left( \| u(x) \|_{W^{l_0}_{\alpha}} \right)^{\tau} \left( \| u(x) \|_{L_{\alpha}} \right)^{1-\tau}, \tag{16.33}$$

*где*

$$\tau = \frac{l}{l_0} + \frac{n}{l_0} (\alpha - \beta), \tag{16.34}$$

*а если $\beta = 0$, то*

$$\| u(x) \|_{C^{l}} \leqslant c \left( \| u(x) \|_{W^{l_0}_{\alpha}} \right)^{\tau} \left( \| u(x) \|_{L_{\alpha}} \right)^{1-\tau}, \tag{16.35}$$

*где*

$$\tau = \frac{l}{l_0} + \frac{n\alpha}{l_0}. \tag{16.36}$$

Из этих утверждений и теоремы 16.4 вытекает

Теорема 16.5. *Пусть*

$$\frac{l}{2k} < \tau < 1. \tag{16.37}$$

*Тогда оператор* $A^{-\tau}$ *при* $0 \leqslant \alpha < \frac{2k\tau - l}{n}$, $\alpha < 1$, *действует из* $L_\alpha$ *в* $C^l$ *и вполне непрерывен; при* $\frac{2k\tau - l}{n} \leqslant \alpha < 1$ *действует из* $L_\alpha$ *в любое* $W^l_\beta$, *где*

$$\beta > \alpha - \frac{2k\tau - l}{n} \tag{16.38}$$

*и вполне непрерывен.*

Теорема 16.5 позволяет описать некоторые подмножества $L$-характеристик операторов $A^{-\tau}$ и $D^r A^{-\tau}$. Из нее вытекает, что $L$-характеристике $L(D^r A^{-\tau};\ \textit{непр.})$ и даже $L$-характеристике $L(D^r A^{-\tau};\ \textit{вп. непр.})$ при

$$\frac{|r|}{2k} < \tau < 1$$

принадлежат все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых

$$0 \leqslant \alpha < 1, \quad \beta > 0,$$
$$\beta > \alpha - \frac{2k\tau - |r|}{n}.$$

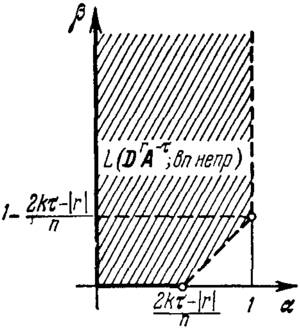

Рис. 16.2.

На рис. 16.2 множество этих точек (для случая, когда $2k\tau - |r| < n$) заштриховано.

**16.5. $L$-характеристики отрицательных дробных степеней эллиптического оператора*).** В предыдущем пункте были указаны некоторые части полуполосы $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta < \infty$, которые входят в $L$-характеристику $L(A^{-\tau};\ \textit{непр.})$ (и даже в $L$-характеристику $L(A^{-\tau};\ \textit{вп. непр.})$) дробной степени $A^{-\tau}$ позитивного эллиптического оператора $A$. В этом пункте будет указана дополнительная информация об $L$-характеристике $L(A^{-\tau};\ \textit{непр.})$. Эта информация будет получена другим методом — мы используем результаты, установленные в § 15.

*) П. П. Забрейко, М. А. Красносельский и Е. И. Пустыльник [1].

Теорема 16.6. *Пусть $A$ — позитивный эллиптический оператор порядка $2k$. Пусть $2k < n$, где $n$ — размерность области $\Omega$.*

*Тогда при каждом $\tau \in (0, 1)$ $L$-характеристика $L(A^{-\tau}$; непр.$)$ содержит все точки отрезка*

$$\beta = \alpha - \frac{2k\tau}{n} \quad \left(\frac{2k\tau}{n} < \alpha < 1\right). \tag{16.39}$$

Доказательство. Как было показано в п. 16.3, $L$-характеристика $L(A^{-1}$; *непр.*$)$ оператора $A^{-1}$ содержит отрезок

$$\beta = \alpha - \frac{2k}{n} \quad \left(\frac{2k}{n} < \alpha < 1\right). \tag{16.40}$$

Это значит, что при каждом фиксированном $\beta \in \left(0, 1 - \frac{2k}{n}\right)$ оператор $A^{-1}$ действует из $L_{\beta + \frac{2k}{n}}$ в $L_\beta$ и непрерывен. Из позитивности оператора $A$ и теоремы 14.2 вытекает, что

$$\| A^{-\tau} u \|_\beta \leqslant c(\beta) \| A^{-1} u \|_\beta^\tau \| u \|_\beta^{1-\tau}. \tag{16.41}$$

Поэтому из теоремы 15.5 вытекает, что оператор $A^{-\tau}$ действует из пространства Лоренца $\Lambda_{\beta + \frac{2k\tau}{n}}$ в пространство $L_\beta$ и непрерывен. Иначе говоря, оператор $A^{-\tau}$ действует из каждого пространства $\Lambda_\alpha$, где $\frac{2k\tau}{n} < \alpha < 1 - \frac{2k(1-\tau)}{n}$, в соответствующее пространство $L_{\alpha - \frac{2k\tau}{n}}$. Из теоремы 15.1 вытекает тогда, что оператор $A^{-\tau}$ действует из каждого пространства $L_\alpha$, где $\frac{2k\tau}{n} < \alpha < 1 - \frac{2k(1-\tau)}{n}$, в соответствующее пространство $L_{\alpha - \frac{2k\tau}{n}}$ и непрерывен.

Мы показали, что $L$-характеристика $L(A^{-\tau}$; *непр.*$)$ содержит отрезок

$$\beta = \alpha - \frac{2k\tau}{n} \quad \left(\frac{2k\tau}{n} < \alpha < 1 - \frac{2k(1-\tau)}{n}\right). \tag{16.42}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $L$-характеристика $L[(A^*)^{-\tau}$; *непр.*$]$ оператора $(A^*)^{-\tau}$, сопряженного оператору $A^{-\tau}$, также содержит отрезок (16.42). Из равенства

$$(A^*)^{-\tau} = (A^{-\tau})^* \tag{16.43}$$

тогда вытекает, что $L$-характеристика $L(A^{-\tau};$ *непр.*$)$ содержит промежуток, симметричный относительно прямой $\alpha+\beta=1$ отрезку (16.42). Иначе говоря, $L(A^{-\tau};$ *непр.*$)$ содержит отрезок

$$\beta = \alpha - \frac{2k\tau}{n} \qquad \left(\frac{2k}{n} < \alpha < 1\right). \tag{16.44}$$

Если

$$\frac{4k}{n} < 1 + \frac{2k\tau}{n},$$

то отрезки (16.42) и (16.44) покрывают отрезок (16.39) и теорема доказана. Если же

$$\frac{4k}{n} \geqslant 1 + \frac{2k\tau}{n},$$

то для завершения доказательства достаточно сослаться на интерполяционную теорему 2.4 М. Рисса.

Теорема доказана.

Отрезок (16.39) принадлежит границе той части $L$-характеристики $L(A^{-\tau};$ *непр.*$)$, которая была описана в предыдущем пункте. Можно показать, что точки отрезка (16.39) не принадлежат $L$-характеристике $L(A^{-\tau};$ *вп. непр.*$)$.

**16.6. Дальнейшие теоремы.** Теорема 16.6 содержится в следующем более общем утверждении.

Теорема 16.7. *Пусть $A$ — позитивный эллиптический оператор порядка $2k$.*

*Тогда при*

$$0 < \tau < \min\left\{1, \frac{n}{2k}\right\}$$

*$L$-характеристика $L(A^{-\tau};$ непр.$)$ содержит отрезок*

$$\beta = \alpha - \frac{2k\tau}{n} \qquad \left(\frac{2k\tau}{n} < \alpha < 1\right).$$

Перейдем к исследованию операторов $D^r A^{-\tau}$, где $A$ — эллиптический позитивный оператор порядка $2k$, $D^r$ — некоторый конкретный оператор дифференцирования порядка $|r| < 2k$.

Теорема 16.8. *Пусть*

$$\frac{|r|}{2k} < \tau < \min\left\{1, \frac{n+|r|}{2k}\right\}.$$

*Тогда L-характеристика* $L$ $(D^r A^{-\tau}$; *непр.*) *содержит отрезок*

$$\beta = \alpha - \frac{2k\tau - |r|}{n} \quad \left(\frac{2k\tau - |r|}{n} < \alpha < 1\right).$$

Приведем здесь доказательство этих теорем, принадлежащее П. Е. Соболевскому [14].

Пусть число $\tau$ удовлетворяет условиям одной из теорем 16.7 или 16.8. Мы покажем, что оператор $D^r A^{-\tau}$ действует из каждого пространства Лоренца $\Lambda_\alpha$ $\left(\frac{2k\tau - |r|}{n} < \alpha < 1\right)$ в пространство $L_\beta$, где $\beta = \alpha - \frac{2k\tau - |r|}{n}$, и что справедлива оценка

$$\|D^r A^{-\tau} \varkappa_D\|_\beta \leqslant c(\alpha)(\operatorname{mes} D)^\alpha \quad (D \subset \Omega). \tag{16.45}$$

Тогда для завершения доказательства останется сослаться на интерполяционную теорему 15.1.

Для доказательства (16.45) воспользуемся теоремой 14.7. Положим $E_0 = E = L_\beta$, $E_1 = L_{\gamma_1}$ и $E_2 = L_{\gamma_2}$, где $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\beta + \frac{2k\tau - |r|}{n} < \gamma_1 < \gamma_2 < \min\left\{1, \beta + \frac{2k}{n}\right\}.$$

Из (16.33) (при $l = 0$, $l_0 = 2k$) и из неравенства коэрцитивности (16.24) вытекают оценки

$$\|u(x)\|_{L_\beta} \leqslant c_i \|Au(x)\|_{L_{\gamma_i}}^{\delta_i} \|u(x)\|_{L_{\gamma_i}}^{1-\delta_i} \quad (u \in D(A),\ i = 1, 2),$$

где

$$\delta_i = \frac{n}{2k}(\gamma_i - \beta) \quad (i = 1, 2). \tag{16.46}$$

Пусть, далее, $B = D^r$. Тогда снова из (16.33) (при $l = |r|$, $l_0 = 2k$) и из неравенства коэрцитивности (16.24) следует оценка

$$\|D^r u(x)\|_{L_\beta} \leqslant c \|Au(x)\|_{L_\beta}^{\frac{|r|}{2k}} \|u(x)\|_{L_\beta}^{1-\frac{|r|}{2k}} \quad (u \in D(A)). \tag{16.47}$$

Неравенства (16.47) и (16.48) можно рассматривать как условия (14.38) и (14.30) теоремы 14.7. Будем считать, что числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, участвующие в формулировке этой теоремы, определены равенствами

$$\varepsilon_1 = \tau - \frac{|r|}{2k}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} - \varepsilon_1.$$

Тогда из нее вытекает неравенство (16.45):

$$\| BA^{-\tau}\varkappa_D \|_{L_\beta} \leqslant c_0 (\operatorname{mes} D)^{\gamma_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \frac{\delta_2-\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\delta_2-\delta_1}} \times$$
$$\times (\operatorname{mes} D)^{\gamma_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2-\delta_1}{\delta_2-\delta_1}} (\operatorname{mes} D)^{\beta \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}} = c_0 (\operatorname{mes} D)^\alpha \ (D \subset \Omega).$$

Если оператор $A$ позитивен не только в пространствах $L_\alpha$, но и в пространствах $W_\alpha^l$ при целых $l$, то доказательство теорем 16.7 и 16.8 можно провести по схеме, аналогичной доказательству теоремы 16.6. При этом удобно пользоваться следующим утверждением (указанным П. П. Забрейко), относящимся к абстрактным операторам.

Теорема 16.9. *Пусть позитивный в банаховом пространстве $E$ оператор $A$ удовлетворяет условиям*

$$\| (tI + A)^{-1} Ax \|_{E_1} \leqslant M_1 \| x \|_{E_2} t^{-\delta_1} \qquad (0 < t < \infty;\ x \in E_2 \subset E) \tag{16.48}$$

и

$$\| (tI + A)^{-1} x \|_{E_1} \leqslant M_2 \| x \|_E t^{-\delta_2} \quad (0 < t < \infty;\ x \in E), \tag{16.49}$$

*где $E_1$ и $E_2$ — банаховы пространства, $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$, $M_1$ и $M_2$ — постоянные.*

*Тогда при любом $\tau \in (1-\delta_2,\ 1-\delta_1)$ выполнено неравенство*

$$\| A^{-\tau} x \|_{E_1} \leqslant \frac{\sin \pi\tau}{\pi} \frac{(\delta_2 - \delta_1) M_1^q M_2^{1-q}}{(1-\tau-\delta_1)(\tau+\delta_1-1)} \| A^{-1} x \|_{E_2}^q \| x \|_E^{1-q}$$
$$(A^{-1} x \in E_2), \tag{16.50}$$

*где*

$$q = \frac{\tau + \delta_2 - 1}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Для доказательства воспользуемся формулой (14.2):

$$A^{-\tau}x = \frac{\sin \pi\tau}{\pi} \int_0^\infty t^{-\tau}(tI + A)^{-1}x\,dt \qquad (x \in E).$$

Разобьем интеграл в правой части на два слагаемых:

$$J_1 = \int_0^N t^{-\tau}(tI + A)^{-1}x\,dt,$$

$$J_2 = \int_N^\infty t^{-\tau}(tI + A)^{-1}x\,dt.$$

Из (16.48) вытекает оценка

$$\|J_1\|_{E_1} \leqslant \int_0^N t^{-\tau}\|(tI + A)^{-1}AA^{-1}x\|_{E_1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_0^N t^{-\tau-\delta_1}\,dt\,\|A^{-1}x\|_{E_2} = \frac{M_1}{1-\tau-\delta_1}N^{1-\tau-\delta_1}\|A^{-1}x\|_{E_2}.$$

Аналогично, из (16.49) вытекает, что

$$\|J_2\|_{E_1} \leqslant \int_N^\infty t^{-\tau}\|(tI + A)^{-1}x\|_{E_1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \int_N^\infty t^{-\tau-\delta_2}\,dt\,\|x\|_E = \frac{M_2}{\tau+\delta_2-1}N^{1-\tau-\delta_2}\|x\|_E.$$

Таким образом,

$$\|A^{-\tau}x\|_{E_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sin \pi\tau}{\pi}\left\{\frac{M_1\|A^{-1}x\|_{E_2}}{1-\tau-\delta}N^{1-\tau-\delta_1} + \frac{M_2\|x\|_E}{\tau+\delta_2-1}N^{1-\tau-\delta_2}\right\},$$

откуда вытекает (16.50), если положить

$$N = \left\{\frac{M_1}{M_2}\,\frac{\|x\|_E}{\|A^{-1}x\|_{E_2}}\right\}^{\frac{1}{\delta_2-\delta_1}}.$$

**16.7. Об интегральных представлениях дробных степеней эллиптического оператора.** Пусть $A$ — позитивный эллиптический оператор. Как мы уже упоминали, оператор $A^{-1}$ допускает интегральное представление

$$A^{-1}u(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{16.51}$$

Ядро $G(x, y)$ называют *функцией Грина* эллиптического оператора $A$; функция Грина определяется дифференциальным выражением (16.5) и граничными условиями (16.9).

Возникает естественный вопрос о том, можно ли операторы $A^{-\tau}$ представить в виде

$$A^{-\tau} u(x) = \int_{\Omega} G_\tau(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{16.52}$$

Ответ на этот вопрос, вообще говоря, положителен, так как каждый оператор $B$, действующий из некоторого пространства $L_\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, в пространство $L_0$, или из $L_1$ в некоторое $L_\beta$, где $0 < \beta < 1$, является интегральным оператором (см. пп. 6.3 и 6.8). Однако построение и исследование ядер $G_\tau(x, y)$ связано с преодолением существенных трудностей.

Различные схемы построения ядер $G_\tau(x, y)$ связаны с применением различных схем построения дробных степеней абстрактных операторов.

Пусть вначале $A$ является положительно определенным самосопряженным эллиптическим оператором в $L_{\frac{1}{2}}$. Обозначим через $e_1(x)$, $e_2(x)$, ... полную ортонормированную систему его собственных функций, а через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — соответствующие собственные значения. Заметим, что все собственные функции $e_1(x)$, $e_2(x)$, ... ограничены. Функция Грина $G(x, y)$ допускает, как известно, билинейное разложение

$$G(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j(x)\, e_j(y)}{\lambda_j} \quad (x, y \in \Omega), \tag{16.53}$$

не всегда сходящееся даже в среднем квадратичном.

Пусть $\tau \in (0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$H_\tau(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j(x) e_j(y)}{\lambda_j^\tau} \tag{16.54}$$

и предположим, что он сходится по норме пространства $L_1$, т. е. что

$$\int_\Omega \int_\Omega |H_\tau(x, y)| \, dx \, dy < \infty$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \int_\Omega \int_\Omega \left| H_\tau(x, y) - \sum_{j=1}^{m} \frac{e_j(x) e_j(y)}{\lambda_j^\tau} \right| dx \, dy = 0. \tag{16.55}$$

В силу теоремы 6.1 оператор

$$B_\tau u(x) = \int_\Omega H_\tau(x, y) \, u(y) \, dy$$

действует из $L_0$ в $L_1$. Из (16.55) и из равенств

$$\int_\Omega e_i(x) e_j(x) \, dx = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

вытекает, что

$$B_\tau e_j(x) = \frac{1}{\lambda_j^\tau} e_j(x) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому операторы $B_\tau$ и $A^{-\tau}$ принимают одинаковые значения на линейной оболочке множества собственных функций оператора $A$. Этот факт можно считать «доказательством» того, что ядро (16.54) совпадает с ядром интегрального оператора (16.52). Таким образом, «функцию Грина» $G_\tau(x, y)$ оператора $A^\tau$ можно искать в виде ряда (16.54). Этот ряд нужно исследовать и доказать, что операторы $B_\tau$ и $A^{-\tau}$ на соответствующих функциональных пространствах принимают одинаковые значения. После этого можно пытаться выводить из свойств функции $G_\tau(x, y)$ различные теоремы о дробных степенях $A^{-\tau}$ оператора $A$ (в том числе и утверждения, доказанные в настоящей книге).

Исследование рядов (16.54) для общих эллиптических операторов, по-видимому, не проводилось. Для операторов второго порядка эти ряды изучались в ряде интересных работ В. А. Ильина (см., например, [1, 2]).

Опишем теперь некоторые способы построения ядер $G_\tau(x, y)$, которые применимы и в тех случаях, когда оператор $A$ не является самосопряженным. Эти способы основаны на интегральных представлениях (14.2) и (14.48) операторов $A^{-\tau}$.

Пусть $A$ — позитивный эллиптический оператор и

$$(tI+A)^{-1}u(x)=\int_\Omega H(t, x, y)\,u(y)\,dy \quad (0<t<\infty). \tag{16.56}$$

Тогда из (14.2) вытекает равенство

$$A^{-\tau}u(x)=\frac{\sin\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty t^{-\tau}\left[\int_\Omega H(t, x, y)\,u(y)\,dy\right]dt.$$

Если в этом равенстве можно поменять порядок интегрирования, то мы придем к интегральному представлению (16.52) оператора $A^{-\tau}$ с ядром

$$G_\tau(x, y)=\frac{\sin\pi\tau}{\pi}\int_0^\infty t^{-\tau}H(t, x, y)\,dt. \tag{16.57}$$

Если известны свойства ядер $H(t, x, y)$, то по ним можно установить свойства ядра $G_\tau(x, y)$. После этого можно перейти к доказательству различных теорем о дробных степенях оператора $A$.

Насколько нам известно, представление (16.57) функций Грина дробных степеней эллиптических операторов не изучалось.

Рассмотрим задачу

$$\frac{du}{dt}+Au=0, \quad u(0)=u_0, \tag{16.58}$$

где $A$ — сильно позитивный (например, самосопряженный) эллиптический оператор. Решением задачи (16.58) будем называть такую непрерывную на $[0, \infty)$ и дифференцируемую на $(0, \infty)$ функцию $u(t)$ со значениями в некотором пространстве $L_\alpha$, которая удовлетворяет уравнению при $t > 0$ и начальному условию при $t = 0$. Из теоремы 13.2 вытекает, что решение задачи (16.58) дается формулой

$$u(t) = T(t)\, u_0 \qquad (0 \leqslant t < \infty), \tag{16.59}$$

где $T(t)$ — полугруппа с производящим оператором $-A$.

Задача (16.58) — это уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{0 \leqslant |r| \leqslant 2k} a_r(x)\, D^r u(t, x) = 0, \tag{16.60}$$

которое мы решаем при граничных условиях (16.9) и начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad (x \in \Omega). \tag{16.61}$$

Решение параболического уравнения часто можно искать в виде

$$u(t, x) = \int_\Omega G(t, x, y)\, u_0(y)\, dy. \tag{16.62}$$

При этом свойства функции Грина $G(t, x, y)$ удается изучить непосредственно по уравнению (16.60). Если формула (16.62) дает решение параболического уравнения (16.60) при граничных условиях (16.9) и любом начальном значении $u_0(x) \in L_\alpha$, то формула (14.48) означает, что

$$A^{-\tau} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty t^{\tau-1} \left[ \int_\Omega G(t, x, y)\, u(y)\, dy \right] dt. \tag{16.63}$$

Отсюда вытекает, что ядро $G_\tau(x, y)$ интегрального представления (14.52) дробной степени $A^{-\tau}$ оператора $A$ можно искать в виде

$$G_\tau(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int_0^\infty t^{\tau-1} G(t, x, y)\, dt. \tag{16.64}$$

Описанный путь был детально изучен П. Е. Соболевским [7, 8] для самосопряженных эллиптических операторов второго порядка. Он показал, что в этом случае функции

Грина $G_\tau(x, y)$ $(0<\tau<\infty)$ и их производные $\frac{\partial}{\partial x_l}G_\tau(x, y)$ $\left(\frac{1}{2}<\tau<\infty\right)$ являются ядрами типа потенциала. Более точно, функции $G_\tau(x, y)$ — неотрицательны, симметричны и удовлетворяют неравенствам

$$G_\tau(x, y)\leqslant\begin{cases} c|x-y|^{2\tau-n}, & \text{если } 0<\tau<\frac{n}{2},\\ c_1|\ln|x-y||+c_2, & \text{если } \tau=\frac{n}{2},\\ c \quad, & \text{если } \frac{n}{2}<\tau<\infty. \end{cases} \tag{16.65}$$

Функции $G_\tau(x, y)$ при $\tau>\frac{n}{2}$ непрерывны по совокупности переменных $x, y\in\Omega$, а при $\tau\leqslant\frac{n}{2}$ — непрерывны по $x, y\in\Omega$ при $x\neq y$. Отметим еще, что ядра $G_\tau(x, y)$ удовлетворяют неравенствам

$$|x-y|^{-\nu}|G_\tau(x, z)-G_\tau(y, z)|\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases} cr^{2\tau-\nu-n}, & \text{если } \tau-\frac{\nu}{2}<\frac{n}{2},\\ c_1|\ln r|+c_2, & \text{если } \tau-\frac{\nu}{2}=\frac{n}{2},\\ c \quad, & \text{если } \tau-\frac{\nu}{2}>\frac{n}{2}, \end{cases} \tag{16.66}$$

где $0<\nu<\min\{1, 2\tau\}$ и $r=\min\{|x-z|, |y-z|\}$. Аналогичные (16.65) и (16.66) оценки верны для функций $\frac{\partial}{\partial x_l}G_\tau(x, y)$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l}G_\tau(x, y)\right|\leqslant\begin{cases} c|x-y|^{2\tau-n-1}, & \text{если } \frac{1}{2}<\tau<\frac{n+1}{2},\\ c_1|\ln|x-y||+c_2, & \text{если } \tau=\frac{n+1}{2},\\ c \quad, & \text{если } \frac{n+1}{2}<\tau<\infty, \end{cases} \tag{16.67}$$

и

$$|x-y|^{-\nu}\left|\frac{\partial}{\partial x_l}G_\tau(x,\ z)-\frac{\partial}{\partial x_l}G_\tau(y,\ z)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases} cr^{2\tau-n-1-\nu}, & \text{если } \frac{1+\nu}{2}<\tau<\frac{n+1+\nu}{2},\\ c_1|\ln r|+c_2, & \text{если } \tau=\frac{n+1+\nu}{2},\\ c, & \text{если } \frac{n+1+\nu}{2}<\tau<\infty. \end{cases} \tag{16.68}$$

Отметим, что в работах П. Е. Соболевского [7, 8] понятие эллиптического оператора вводится специальным образом: вначале рассматривается смешанная задача для параболического уравнения, затем показывается, что обобщенные решения смешанной задачи определяют некоторую полугруппу органиченных операторов, и, наконец, производящий оператор этой полугруппы объявляется эллиптическим оператором. Такая конструкция позволяет ослабить ограничения на гладкость границы и гладкость коэффициентов в дифференциальном уравнении и в граничных условиях.

Содержащиеся в теоремах 16.5 — 16.8 утверждения об $L$-характеристиках отрицательных дробных степеней эллиптических операторов второго порядка можно, конечно, получить и как следствие оценок (16.65) и (16.67) — достаточно применить изложенную в § 8 теорию операторов типа потенциала.

В заключение отметим, что было бы интересно получить аналогичные (16.65) — (16.68) оценки для функций Грина дробных степеней эллиптических операторов высших порядков.

ГЛАВА 5

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

## § 17. Оператор суперпозиции*)

**17.1. О функциях, непрерывных по одной переменной.** В этом пункте мы изучим вещественные функции $f(s, u)$, где $s$ принадлежит множеству $\Omega$ конечной меры, а $-\infty < u < \infty$.

Если $f(s, u)$ при каждом фиксированном $u$ измерима по $s$ и почти при всех $s$ непрерывна по $u$, то говорят, что она удовлетворяет *условиям Каратеодори.*

В дальнейшем нам часто придется рассматривать суперпозиции вида $f[s, x(s)]$. Такие суперпозиции определяют простейший нелинейный оператор

$$\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)], \tag{17.1}$$

который естественно называть *оператором суперпозиции.* Нетрудно видеть, что оператор (17.1) преобразует измеримые функции в измеримые, если функция $f(s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Для доказательства достаточно заметить, что почти при всех $s \in \Omega$

$$f[s, x(s)] = \lim_{n \to \infty} f[s, x_n(s)],$$

где $x_n(s)$ — сходящаяся к $x(s)$ последовательность ступенчатых функций. Измеримость функций $f[s, x_n(s)]$ очевидна.

В этом пункте доказываются две леммы **) о функциях двух переменных, которые ниже будут часто применяться.

---

*) Оператор суперпозиции изучался К. Каратеодори, В. В. Немыцким, М. М. Вайнбергом, М. А. Красносельским, Л. А. Ладыженским, Я. Б. Рутицким и др. авторами. В основных построениях параграфа мы следуем М. А. Красносельскому [3, 7].

**) См. М. А. Красносельский и Л. А. Ладыженский [1].

Лемма 17.1. *Пусть функция $f(s, u)$ $(s \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.*

*Тогда каждому $\delta > 0$ соответствует такое множество $\Omega_\delta \subset \Omega$, что $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_\delta) < \delta$, а функция $f(s, u)$ непрерывна по совокупности переменных на $\Omega_\delta \times \times (-\infty, \infty)$.*

Доказательство. Пусть задано число $\delta > 0$, а $n_0$ — натуральное число.

Пусть последовательность чисел $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(j)}, \ldots$ плотна на сегменте $[-n_0, n_0]$. Обозначим через $\nu(s)$ $(s \in \Omega)$ точную верхнюю грань таких чисел $\nu$, что при $|u^{(j_1)} - u^{(j_2)}| < \nu$ справедливо неравенство

$$|f(s, u^{(j_1)}) - f(s, u^{(j_2)})| \leqslant \frac{1}{n_0}.$$

Функция $\nu(s)$ очевидным образом почти при всех $s \in \Omega$ положительна.

Рассмотрим функции

$$F_\beta(s) = \sup_{|u^{(j_1)} - u^{(j_2)}| \leqslant \beta} |f(s, u^{(j_1)}) - f(s, u^{(j_2)})|.$$

Эти функции измеримы, так как каждая из них является верхней гранью счетного множества измеримых функций. Поэтому измеримо множество $N(\beta)$ точек $s \in \Omega$, в которых $F_\beta(s) \leqslant \frac{1}{n_0}$. Но $N(\beta)$ совпадает с множеством точек, в которых $\nu(s) \geqslant \beta$. Следовательно, функция $\nu(s)$ измерима.

Обозначим через $G_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ множество точек $s \in \Omega$, в которых $\nu(s) \geqslant \frac{1}{k}$. Очевидно, $G_k \subset G_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\operatorname{mes} G_k \to \operatorname{mes} \Omega$ при $k \to \infty$. Поэтому существует такое число $k_0$, что

$$\operatorname{mes}(\Omega \setminus G_{k_0}) < 2^{-n_0-1}\delta. \tag{17.2}$$

При $|u_1 - u_2| < \frac{1}{k_0}$ $(|u_1|, |u_2| \leqslant n_0)$ выполняется неравенство

$$|f(s, u_1) - f(s, u_2)| \leqslant \frac{1}{n_0} \quad (s \in G_{k_0}). \tag{17.3}$$

Действительно, существуют последовательности $u^{(j_1)}$ и $u^{(j_2)}$, сходящиеся к $u_1$ и $u_2$ и удовлетворяющие неравенству

$|u^{(j_1)}-u^{(j_2)}|<\frac{1}{k_0}$. Неравенство (17.3) вытекает из неравенств

$$|f(s, u^{(j_1)})-f(s, u^{(j_2)})|\leqslant\frac{1}{n_0} \quad (s\in G_{k_0}).$$

Разобьем теперь сегмент $[-n_0, n_0]$ точками $-n_0=u_1<\ldots$ $\ldots<u_q=n_0$ на части длины меньше $\frac{1}{k_0}$. В силу теоремы Н. Н. Лузина для каждой функции $f(s, u_i)$ $(i=1, \ldots, q)$ найдется такое замкнутое множество $G_{n_0}^{(i)}$, мера которого удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}\left(G_{k_0}\setminus G_{n_0}^{(i)}\right)<\frac{\delta}{2^{n_0+1}q} \quad (i=1, \ldots, q)$$

и на котором функция $f(s, u_i)$ непрерывна.

Положим $\Omega_{n_0}=\bigcap_i G_{n_0}^{(i)}$. Очевидно,

$$\operatorname{mes}(G_{k_0}\setminus\Omega_{n_0})=\operatorname{mes}\left(G_{k_0}\setminus\bigcap_i G_{n_0}^{(i)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{q}\operatorname{mes}\left(G_{k_0}\setminus G_{n_0}^{(i)}\right)\leqslant 2^{-n_0-1}\delta$$

и так как $\operatorname{mes}(\Omega\setminus G_{k_0})<2^{-n_0-1}\delta$, то

$$\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_{n_0})<2^{-n_0}\delta.$$

Введем в рассмотрение функцию $f_{n_0}(s, u)$ $(s\in\Omega_{n_0}$, $-n_0\leqslant u\leqslant n_0)$, определив ее значения при $u=(1-\tau)u_i+$ $+\tau u_{i+1}$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$ равенством

$$f_{n_0}(s, u)=(1-\tau)f(s, u_i)+\tau f(s, u_{i+1}).$$

Функция $f_{n_0}(s, u)$ очевидным образом непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(s, u)-f_{n_0}(s, u)|<\frac{1}{n_0} \quad (s\in\Omega_{n_0}, -n_0\leqslant u\leqslant n_0).$$

Последовательность непрерывных функций $f_{n_0}(s, u)$ $(n_0=1, 2, \ldots)$ равномерно сходится к функции $f(s, u)$ при значениях $u$ из любого конечного промежутка и при $s\in\Omega_\delta$, где $\Omega_\delta = \bigcap_{n_0} \Omega_{n_0}$. Следовательно, функция $f(s, u)$ непрерывна на $\Omega_\delta \times (-\infty, \infty)$. Очевидно, $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_\delta) \leqslant \delta$.

Лемма доказана.

Справедливо и утверждение, обратное лемме 17.1.

Лемма 17.2. *Пусть функция $f(s, u)$ $(s \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $v_1(s)$ и $v_2(s)$ — измеримые функции и $v_1(s) \leqslant v_2(s)$ $(s \in \Omega)$.*

*Тогда существует такая измеримая функция $u^*(s)$, что*

$$v_1(s) \leqslant u^*(s) \leqslant v_2(s)$$

*и*

$$\sup_{v_1(s) \leqslant u \leqslant v_2(s)} f(s, u) = f[s, u^*(s)].$$

Доказательство. Положим

$$w^*(s) = \sup_{v_1(s) \leqslant u \leqslant v_2(s)} f(s, u)$$

и обозначим через $u^*(s)$ наименьшее из тех значений $u \in [v_1(s), v_2(s)]$, при которых $f(s, u)$ равна $w^*(s)$. Мы покажем, что функция $u^*(s)$ измерима.

Из леммы 17.1 вытекает измеримость функции $w^*(s)$ и измеримость всех функций

$$w_h(s) = \begin{cases} \sup\limits_{v_1(s) \leqslant u \leqslant \min\{h, v_2(s)\}} f(s, u), & \text{если } v_1(s) \leqslant h, \\ f[s, v_1(s)], & \text{если } v_1(s) \geqslant h. \end{cases}$$

Поэтому измеримы множества $N(h)$ точек, в которых $w^*(s) \geqslant w_h(s)$. Множества $N(h)$ совпадают, как нетрудно видеть, с лебеговыми множествами $M(h)$ функции $u^*(s)$, т. е. с множествами тех точек $s$, в которых $u^*(s) \geqslant h$.

Лемма доказана.

**17.2. Простейшие свойства оператора суперпозиции.** Напомним, что *носителем* функции $x(s)$ называется множество тех значений аргумента, при которых $x(s) \neq 0$. При исследовании оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$ часто используется его «частичная аддитивность», которая выражается в том, что для функций $x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s)$ с непересекающимися носителями справедливо равенство

$$\mathfrak{f}(x_1+\ldots+x_n)=\mathfrak{f}x_1+\ldots+\mathfrak{f}x_n-(n-1)\mathfrak{f}\theta, \qquad (17.4)$$

где $\theta$ — функция, тождественно равная нулю. Из этого свойства вытекают простые следствия.

Во-первых, если оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ преобразует некоторый шар пространства $L_\alpha$, где $\alpha > 0$, в пространство $L_\beta$, то он преобразует каждую функцию из $L_\alpha$ в функцию из $L_\beta$. Во-вторых, если $\mathfrak{f}$, как оператор из $L_\alpha$, $\alpha > 0$, в $L_\beta$, непрерывен во всех точках некоторого шара, то он непрерывен в каждой точке пространства $L_\alpha$. В-третьих, если ограничены нормы в $L_\beta$ значений оператора $\mathfrak{f}$ на некотором шаре пространства $L_\alpha$, $\alpha > 0$, то ограничены (конечно, другой постоянной) нормы значений на любом другом шаре. Доказательства всех этих утверждений предоставляем читателю. Отметим лишь, что сформулированные утверждения не используют условий Каратеодори.

Лемма 17.3. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, причем $\alpha$, $\beta > 0$.*

*Тогда оператор $\mathfrak{f}$ каждое множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\alpha$ переводит в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\beta$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в $L_\alpha$. Предположим, что нормы функций из $\mathfrak{f}\mathfrak{M}$ не обладают свойством равностепенной абсолютной непрерывности. Это значит, что найдутся последовательность функций $y_k(s)\in\mathfrak{M}$ и последовательность множеств $F_k\subset\Omega$ такие, что $\operatorname{mes} F_k\to 0$ и

$$\int_{F_k} |f[s, y_k(s)]|^{\frac{1}{\beta}}\,dt > a \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

При этом можно без ограничения общности считать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} F_k < \infty.$$

Введем обозначение

$$D_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} F_i \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\operatorname{mes} D_k \to 0$ при $k \to \infty$, то существует такая целочисленная функция $\eta(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что $\eta(k) > k$ и

$$\int\limits_{D_k \setminus D_{\eta(k)}} |f[s, y_k(s)]|^{\frac{1}{\beta}} ds > a \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$k_1 = 1, \ k_2 = \eta(k_1), \ \ldots, \ k_n = \eta(k_{n-1}), \ \ldots$$

Меры множеств

$$\Omega_n = D_{k_n} \setminus D_{k_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$; эти множества очевидным образом не пересекаются друг с другом.

Легко видеть, что функции

$$x_n(s) = y_{k_n}(s) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяют неравенствам

$$\int\limits_{\Omega_n} |f[s, x_n(s)]|^{\frac{1}{\beta}} ds > a \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{17.5}$$

Функции $x_n$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_n} |x_n(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds < \infty.$$

Определим функцию $u(s) \in L_\alpha$ равенством

$$u(s) = \begin{cases} x_n(s), & \text{если } s \in \Omega_n, \\ 0, & \text{если } s \bar{\in} \bigcup\limits_n \Omega_n. \end{cases}$$

Из свойства частичной аддитивности оператора суперпозиции вытекает, что *)

$$\mathfrak{f}u(s)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{\Omega_n}\mathfrak{f}x_n(s)+P_{\Omega_0}\mathfrak{f}\theta, \qquad (17.6)$$

где $\Omega_0=\Omega\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Из (17.6) и (17.5) следует, что

$$\int_{\Omega}|f[s,u(s)]|^{\frac{1}{\beta}}ds\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n}|f[s,x_n(s)]|^{\frac{1}{\beta}}ds>\sum_{n=1}^{\infty}a=\infty.$$

Таким образом, построена функция $u(s)\in L_\alpha$, для которой $\mathfrak{f}u(s)\overline{\in}L_\beta$. Это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Лемма 17.4. *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *действует из* $L_0$ *в* $L_\beta$, *причем* $\beta>0$.

*Тогда оператор* $\mathfrak{f}$ *каждое ограниченное по норме множество* $\mathfrak{M}\subset L_0$ *переводит в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в* $L_\beta$.

Это утверждение вытекает из леммы 17.2.

**17.3. Основные теоремы.** В этом и последующих пунктах будем предполагать, что $f(s,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Лемма 17.5 **). *Оператор суперпозиции* $\mathfrak{f}$ *преобразует сходящиеся по мере последовательности функций в последовательности функций, также сходящиеся по мере.*

Доказательство. Пусть $x_n(s)$ сходится к $x^*(s)$ по мере. Тогда из каждой последовательности $x_{n_k}(s)$ $(k=1,2,\ldots)$ можно выбрать подпоследовательность $x_{n_{k'}}(s)$, сходящуюся к $x^*(s)$ почти всюду. Из непрерывности $f(s,u)$ по переменной $u$ вытекает, что последовательность $\mathfrak{f}x_{n_{k'}}(s)$

*) Как обычно, через $P_D$ обозначается оператор умножения на характеристическую функцию множества $D$.

**) К. Каратеодори [1] (см. также В. В. Немыцкий [1]).

также сходится почти всюду к функции $\mathfrak{f}x^*(s)$. Это значит, что из каждой последовательности $\mathfrak{f}x_{n_k}(s)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $\mathfrak{f}x^*(s)$ почти всюду. Поэтому последовательность $\mathfrak{f}x_n(s)$ сходится к $\mathfrak{f}x^*(s)$ по мере.

Лемма доказана.

Теорема 17.1 *). *Если оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\beta > 0$, то он непрерывен.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_n(s)$ сходится в $L_\alpha$ к функции $x^*(s)$. Тогда она сходится к $x^*(s)$ и по мере. В силу леммы 17.5 последовательность $\mathfrak{f}x_n(s)$ сходится к $\mathfrak{f}x^*(s)$ по мере.

Для завершения доказательства остается заметить, что последовательность $\mathfrak{f}x_n(s)$ имеет в $L_\beta$ равностепенно абсолютно непрерывные нормы — при $\alpha > 0$ это вытекает из леммы 17.3, а при $\alpha = 0$ — из леммы 17.4.

Теорема доказана.

Из этой теоремы немедленно вытекает

Теорема 17.2. *Если оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\beta > 0$, то нормы его значений на каждом шаре ограничены.*

Перейдем к анализу операторов суперпозиции $\mathfrak{f}$, действующих из $L_\alpha$ в $L_0$. Очевидно (при $\alpha > 0$), такие операторы определяются ограниченными функциями $f(s, u)$. Если $f(s, u)$ существенно зависит от $u$, то такие операторы свойством непрерывности не обладают. Отметим еще, что оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_0$ в $L_0$ и непрерывен в том и только том случае, если функция $f(s, u)$ непрерывна по $u$ равномерно относительно почти всех $s \in \Omega$ и значений $u$ из каждого конечного промежутка.

**17.4. Примеры.** В качестве первого примера рассмотрим нелинейный оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный функцией

$$f(s, u) = a(s)\,|u|^\gamma, \tag{17.7}$$

*) Теоремы 17.1 и 17.2 доказаны М. А. Красносельским [3, 7]. Они обобщены на пространства Орлича Я. Б. Рутицким [1] и на пространства абстрактных функций М. А. Красносельским, Я. Б. Рутицким и Р. М. Султановым [1].

где $\gamma > 0$, а $a(s)$ — измеримая функция. Если $a(s) \in L_r$, то из неравенства Гёльдера вытекает, что $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$ содержит все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых

$$\beta \geqslant r + \gamma\alpha$$

(рис. 17.1). Это соображение позволяет полностью описать $L$-характеристику $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$: если $a(s) \in L_{r_0}$, но $a(s) \notin L_r$ при всех $r < r_0$, то $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$ совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, у которых $\beta \geqslant r_0 + \gamma\alpha$; если же $a(t) \notin L_{r_0}$, но принадлежит всем $L_r$ при $r > r_0$, то $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$ совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, у которых $\beta > r_0 + \gamma\alpha$.

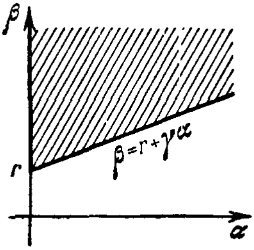


Рис. 17.1.

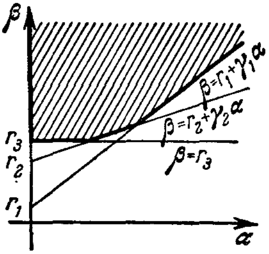


Рис. 17.2.

Предположим теперь, что оператор $\mathfrak{f}$ определен функцией вида

$$f(s, u) = a_1(s)\,|u|^{\gamma_1} + \ldots + a_n(s)\,|u|^{\gamma_n} \quad (\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n). \tag{17.8}$$

В этом случае $L$-характеристика $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$ совпадает с пересечением $L$-характеристик $L(\mathfrak{f}_i;\ \textit{непр.})$ $(i = 1, \ldots, n)$, где

$$\mathfrak{f}_i x(s) = a_i(s)\,|x(s)|^{\gamma_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Следовательно, $L$-характеристика $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$ оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$, порожденного функцией (17.8), является многоугольником (рис. 17.2). Интересно отметить, что множество точек $L$-характеристики $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$, лежащих на каждом луче, выходящем из начала координат, является бесконечным промежутком (если оно непусто). Иначе говоря, каждый луч, выходящий из начала координат, пересекает ломаную $\beta = \xi(\alpha)$, являющуюся нижней границей $L$-характеристики $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*), не более чем в одной точке. Исключение составляет лишь тот случай, когда ломаная $\beta=\xi(\alpha)$ содержит бесконечное звено на некоторой прямой $\beta=\gamma^*\alpha$ (это значит, что наибольшему показателю $\gamma^*=\gamma_n$ в правой части формулы (17.8) соответствует ограниченный коэффициент $a_n(s)$). Отметим также, что $L$-характеристика оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенного функцией (17.8), выпукла.

Из проведенных рассуждений сразу же вытекает способ построения $L$-характеристики $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*) для случая, когда функция $f(s, u)$ имеет вид

$$f(s, u)=\sum_{i=1}^{n} a_i(s)\varphi_i(u), \tag{17.9}$$

где $a_i(s)$ — измеримые, а $\varphi_i(u)$ — непрерывные функции.

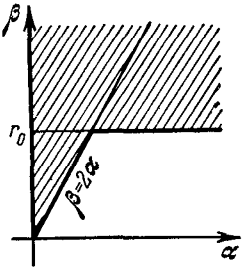


Рис. 17.3.

В качестве следующего примера рассмотрим оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный функцией

$$f(s, u)=\min\{a(s), u^2\}, \tag{17.10}$$

где $a(s)$ — положительная функция из $L_{r_0}\setminus\bigcup\limits_{r<r_0} L_r$. Легко видеть, что в этом примере $L$-характеристика не обладает свойством выпуклости — она совпадает с заштрихованным на рис. 17.3 множеством.

## 17.5. Общий вид $L$-характеристики операторов суперпозиции *).

Лемма 17.6. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\alpha>0$.*

*Тогда функция $f(s, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(s, u)|\leqslant a(s)+b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{17.11}$$

*где $a(s)\in L_\beta$.*

*) Исследование $L$-характеристик оператора суперпозиции проведено в докладе П. П. Забрейко и М. А. Красносельского [1]. Лемма 17.6 установлена М. А. Красносельским (см. Я. Б. Рутицкий [1]); приведенное доказательство указано Я. Б. Рутицким.

Доказательство. В силу теоремы 17.2 найдется такое положительное число $\tilde{b}$, что из неравенства $\|x\|_\alpha \leqslant 1$ следует неравенство

$$\|\mathfrak{f}x\|_\beta \leqslant \tilde{b}.$$

Определим функцию

$$\varphi(s, u) = \begin{cases} |f(s, u)|^{\frac{1}{\beta}} - \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} |u|^{\frac{1}{\alpha}}, & \text{если } |f(s, u)| \geqslant \tilde{b} |u|^{\frac{\beta}{\alpha}}, \\ 0, & \text{если } |f(s, u)| < \tilde{b} |u|^{\frac{\beta}{\alpha}}. \end{cases}$$

Пусть $x(s) \in L_\alpha$. Обозначим через $\hat{\Omega}$ множество тех $s \in \Omega$, в которых $\varphi[s, x(s)] > 0$. Пусть

$$\int_{\hat{\Omega}} |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds = n + \varepsilon,$$

где $n$ — целое число, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Разобьем множество $\hat{\Omega}$ на $n+1$ частей $\Omega_0, \ldots, \Omega_n$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_{\Omega_i} |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds < 1 \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\int_{\hat{\Omega}} |f[s, x(s)]|^{\frac{1}{\beta}} ds = \sum_{i=0}^{n} \int_{\Omega_i} |f[s, x(s)]|^{\frac{1}{\beta}} ds \leqslant (n+1) \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}}$$

и

$$\int_{\Omega} \varphi[s, x(s)]\, ds \leqslant \int_{\hat{\Omega}} |f[s, x(s)]|^{\frac{1}{\beta}} ds - \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} \int_{\hat{\Omega}} |x(s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds \leqslant$$
$$\leqslant (n+1) \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} - (n+\varepsilon) \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}}. \qquad (17.12)$$

Из леммы 17.2 следует, что существует последовательность таких функций $u_k(s)$, $|u_k(s)| \leqslant k$, что

$$\varphi[s, u_k(s)] = \max_{|u| \leqslant k} \varphi(s, u).$$

Положим

$$\tilde{a}(s) = \sup_{-\infty < u < \infty} \varphi(s, u) = \lim_{k \to \infty} \varphi[s, u_k(s)].$$

В силу (17.12) и теоремы Фату *)

$$\int_\Omega \tilde{a}(s)\,ds \leqslant \sup_n \int_\Omega \varphi[s, u_n(s)]\,ds \leqslant \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Поэтому $\tilde{a}(s) \in L_1$.

Так как

$$\tilde{a}(s) = \sup_{-\infty < u < \infty} \varphi(s, u) \geqslant \sup_{-\infty < u < \infty} \left\{ |f(s, u)|^{\frac{1}{\beta}} - \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} |u|^{\frac{1}{\alpha}} \right\},$$

то

$$|f(s, u)|^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \tilde{a}(s) + \tilde{b}^{\frac{1}{\beta}} |u|^{\frac{1}{\alpha}}$$

и, значит,

$$|f(s, u)| \leqslant a(s) + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}},$$

где $a(s) = 2^\beta [\tilde{a}(s)]^\beta$, $b = 2^\beta \tilde{b}$.

Лемма доказана.

Утверждение этой леммы неверно в случае, если $\alpha = 0$.

Лемма 17.7. *Пусть* $\{\alpha_0, \beta_0\} \in L(\mathfrak{f};$ *непр.*).

*Тогда все точки луча* $\alpha = \alpha_0\lambda$, $\beta = \beta_0\lambda$ *при* $\lambda \geqslant 1$ *также принадлежат* $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*).

Доказательство. В случае, когда $\alpha_0 = 0$, утверждение леммы очевидно. Пусть $\alpha_0 > 0$. В силу леммы 17.6 справедливо неравенство (17.11). Поэтому оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\beta = \frac{\beta_0}{\alpha_0}\alpha$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$. Остается сослаться на теорему 17.1.

Лемма доказана.

Будем говорить, что множество $G$, расположенное в квадранте $\alpha, \beta \geqslant 0$, обладает *свойством нуль-вогнутости*, если оно вместе с каждой ненулевой точкой $\{\alpha_0, \beta_0\}$ содержит все точки $\{\alpha_0\lambda, \beta_0\lambda\}$ при $\lambda \geqslant 1$. Нуль-вогнутыми будут, очевидно, множества $T$ всех точек $\{\alpha, \beta\}$, где $\beta \geqslant \xi(\alpha)$ (или $\beta > \xi(\alpha)$), а $\xi(\alpha)$ — вогнутая неотрицательная функция (рис. 17.4). Свойством нуль-вогнутости могут обладать и выпуклые множества; в предыдущем пункте было отмечено, что

*) См. И. П. Натансон [1].

$L$-характеристика оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенного функцией (17.8), выпукла и нуль-вогнута.

Лемма 17.7 означает, что справедлива

Теорема 17.3. *$L$-характеристика $L$ ($\mathfrak{f}$; непр.) каждого оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$ обладает свойством нуль-вогнутости.*

$L$-характеристика $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*) обладает, очевидно, свойством экстраполяционности, введенным в п. 1.6. Поэтому $L$-характеристику можно описывать при помощи функции

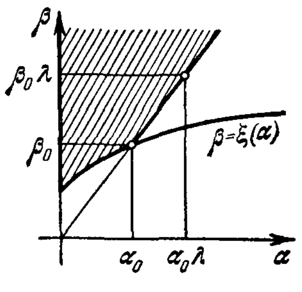


Рис. 17.4.

$$\xi(\alpha)=\inf_{\{\alpha,\,\beta\}\in L\,(\mathfrak{f};\ \text{непр.})}\beta. \qquad (17.13)$$

Эта функция не убывает. Из теоремы 17.3 следует, что функция

$$\eta(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\,\xi(\alpha) \qquad (17.14)$$

не возрастает. Отсюда вытекает, что $\xi(\alpha)$ непрерывна (из монотонности $\xi(\alpha)$ следует, что у нее могут быть разрывы лишь первого рода, а из монотонности $\eta(\alpha)$ — что таких разрывов быть не может). В дальнейшем непрерывные неубывающие и неотрицательные функции $\xi(\alpha)$ будем называть *нуль-вогнутыми*, если функция (17.14) не возрастает.

Оказывается, что *по каждой нуль-вогнутой функции $\xi_0(\alpha)$ можно построить такую функцию $f_1(s, u)$, что $L$-характеристика $L(\mathfrak{f}_1$; непр.) соответствующего оператора $\mathfrak{f}_1$ совпадает с множеством* $G_1=\{\{\alpha,\beta\}:\beta\geqslant\geqslant\xi_0(\alpha)\}$. Аналогично, *можно построить такую функцию $f_2(s, u)$, что $L$ ($\mathfrak{f}_2$; непр.) совпадает с множеством* $G_2=\{\{\alpha,\beta\}:\beta>\xi_0(\alpha)\}$.

Проведем построение функции $f_1(s, u)$.

Пусть $a_0(s)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$a_0(s)>1, \quad a_0(s)\in L_1\setminus\bigcup_{\alpha<1}L_\alpha. \qquad (17.15)$$

Положим

$$f_1(s, u)=\inf_{0<\alpha<\infty}\left\{a_0(s)^{\xi_0(\alpha)}+(2+|u|)^{\frac{\xi_0(\alpha)}{\alpha}}\right\}. \qquad (17.16)$$

Функция $f_1(s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Мы покажем, что $f_1(s, u)$ при всех $s$ непрерывна по $u$ в случае, если

$$\lim_{\alpha\to\infty} \xi_0(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\xi_0(\alpha)}{\alpha} = \infty \tag{17.17}$$

(остальные случаи рассматриваются аналогично).

Из (17.16) и (17.17) следует, что

$$f_1(s, u) = a_0(s)^{\xi_0(\bar\alpha)} + (2 + |u|)^{\frac{\xi_0(\bar\alpha)}{\bar\alpha}}, \tag{17.18}$$

где $\bar\alpha$ — некоторое число из промежутка $(0, \infty)$, зависящее от $s$ и $u$. Пусть $s$ фиксировано. Так как функции $\xi_0(\alpha)$ и $\frac{\xi_0(\alpha)}{\alpha}$ непрерывны, то для каждых $\varepsilon > 0$ и $u_0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|u - u_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$f_1(s, u) < f_1(s, u_0) + \varepsilon.$$

Это значит, что при каждом $s$ функция $f_1(s, u)$ полунепрерывна сверху. Функция $f_1(s, u)$ очевидным образом монотонна по $u$. Поэтому из полунепрерывности сверху следует, что

$$\lim_{u\to u_0+0} f_1(s, u) = f_1(s, u_0).$$

Пусть теперь $u_n \to u_0$, $u_n < u_0$ и

$$f_1(s, u_n) \leqslant m < f_1(s, u_0).$$

Обозначим через $\bar\alpha_n$ последовательность чисел, для которых

$$f_1(s, u_n) = a_0(s)^{\xi_0(\bar\alpha_n)} + (2 + |u_n|)^{\frac{\xi_0(\bar\alpha_n)}{\bar\alpha_n}}. \tag{17.19}$$

Из (17.17) следует, что числа $\bar\alpha_n$ удовлетворяют неравенствам $0 < a \leqslant \bar\alpha_n \leqslant A < \infty$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha_n \to \alpha^* \neq 0$. Переходя в равенствах (17.19) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a_0(s)^{\xi_0(\alpha^*)} + (2 + |u_0|)^{\frac{\xi_0(\alpha^*)}{\alpha^*}} < f_1(s, u_0),$$

что противоречит (17.16). Мы показали, что

$$\lim_{u \to u_0 - 0} f_1(s, u) = f_1(s, u_0).$$

Непрерывность по $u$ функции $f_1(s, u)$ доказана.

$L$-характеристика оператора суперпозиции $\mathfrak{f}_1$, определенного функцией (17.16), содержит все точки $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant \xi_0(\alpha)$. Далее, при каждом $\alpha_0$

$$\mathfrak{f}\left[a_0(s)^{\alpha_0}\right] = \inf_{\alpha}\left\{a_0(s)^{\xi_0(\alpha)} + \left[2 + a_0(s)^{\alpha_0}\right]^{\frac{\xi_0(\alpha)}{\alpha}}\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{\alpha} \max\left\{a_0(s)^{\xi_0(\alpha)},\ a_0(s)^{\alpha_0 \frac{\xi_0(\alpha)}{\alpha}}\right\} = a_0(s)^{\xi_0(\alpha_0)}$$

Из этого неравенства и из (17.15) вытекает, что $\mathfrak{f}_1$ из $L_\alpha$ не действует ни в какое $L_\beta$ при $\beta < \xi_0(\alpha_0)$.

Мы показали, что $L$-характеристика $L(\mathfrak{f}_1;$ *непр.*) совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, где $\beta \geqslant \xi_0(\alpha)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$f_2(s, u) = \ln[e + c(s)]\, f_1(s, u),$$

где $c(s)$ — такая неотрицательная суммируемая функция, что $a_0(s) \ln \ln [e + c(s)]$ несуммируема. Легко видеть, что $L$-характеристика $L$ ($\mathfrak{f}_2$; *непр.*) состоит из точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta > \xi_0(\alpha)$.

**17.6. Равномерная непрерывность оператора суперпозиции.** Простейшие примеры показывают, что оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, вообще говоря, не является равномерно непрерывным на ограниченных множествах пространства $L_\alpha$.

Положим, например,

$$f(u) = u \sin u,$$

и рассмотрим соответствующий оператор $\mathfrak{f}$. Этот оператор, очевидно, при любом $\alpha \geqslant 0$ действует из $L_\alpha$ в $L_\alpha$ и непрерывен. Покажем, что ни на одном шаре $\|x\|_\alpha \leqslant r$ он не обладает свойством равномерной непрерывности.

Пусть $\Omega_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность множеств, для которой

$$\operatorname{mes} \Omega_n = \left(\frac{r}{4\pi n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Определим функции $x_n(s)$ и $y_n(s)$ равенствами

$$x_n(s)=\begin{cases}(4n+1)\frac{\pi}{2}, & \text{если } s\in\Omega_n,\\ 0, & \text{если } s\overline{\in}\Omega_n;\end{cases}$$

$$y_n(s)=\begin{cases}(4n-1)\frac{\pi}{2}, & \text{если } s\in\Omega_n,\\ 0, & \text{если } s\overline{\in}\Omega_n.\end{cases}$$

Очевидно, $x_n(s)$, $y_n(s)\in L_\alpha$,

$$\|x_n(s)\|_\alpha,\quad \|y_n(s)\|_\alpha\leqslant r$$

и

$$\|x_n(s)-y_n(s)\|_\alpha\to 0.$$

В то же время

$$\mathfrak{f}x_n(s)-\mathfrak{f}y_n(s)=\begin{cases}4\pi n, & \text{если } s\in\Omega_n,\\ 0, & \text{если } s\overline{\in}\Omega_n,\end{cases}$$

откуда следует, что $\|\mathfrak{f}x_n-\mathfrak{f}y_n\|_\alpha=r$.

Через $L$ ($A$; *равн. непр.*) обозначим совокупность таких точек $\{\alpha,\beta\}$, что $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и равномерно непрерывен на каждом шаре $\|x\|_\alpha\leqslant R$.

Теорема 17.4. *Пусть* $\{\alpha_0,\beta_0\}\in L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*).

*Тогда все точки* $\{\alpha,\beta\}$, *где* $\alpha\leqslant\alpha_0$, $\beta\geqslant\beta_0$ *и* $\{\alpha,\beta\}\neq\{\alpha_0,\beta_0\}$, *принадлежат* $L$ ($\mathfrak{f}$; *равн. непр.*).

Доказательство. Покажем сначала, что оператор $\mathfrak{f}$ равномерно непрерывен по мере на каждом шаре любого пространства $L_\alpha$. Это значит, что для любых двух таких последовательностей $u_n(s)$, $v_n(s)$ из шара $\|x\|_\alpha\leqslant R$, для которых последовательность $w_n(s)=u_n(s)-v_n(s)$ сходится к нулю по мере, последовательность функций $\mathfrak{f}u_n(s)-\mathfrak{f}v_n(s)$ также сходится к нулю по мере.

Пусть заданы положительные числа $h$ и $\varepsilon$. В силу леммы 17.1 можно указать такое замкнутое множество $\Omega_0\subset\Omega$, что $\operatorname{mes}(\Omega\setminus\Omega_0)<\frac{\varepsilon}{4}$ и функция $f(s,u)$ непрерывна по совокупности переменных $s\in\Omega_0$, $-\infty<u<\infty$. Пусть

$$M=\left(\frac{8}{\varepsilon}\right)^\alpha R.$$

Функция $f(s,u)$ равномерно непрерывна по совокупности переменных $s\in\Omega_0$, $|u|\leqslant M$. Поэтому найдется такое $\delta>0$, что при $|u - v| < \delta$ и $|u|$, $|v| \leqslant M$ выполняется неравенство

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leqslant h.$$

Рассмотрим теперь такие последовательности $u_n(s)$ и $v_n(s)$ из шара $\|x(s)\|_\alpha \leqslant R$, что $w_n(s) = u_n(s) - v_n(s)$ образуют сходящуюся по мере к нулю последовательность. Через $\Omega_n$ будем обозначать множество тех точек $s \in \Omega_0$, в которых $|u_n(s)|$, $|v_n(s)| \leqslant M$. Очевидно, $\operatorname{mes}(\Omega_0 \setminus \Omega_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Из сходимости последовательности $w_n(s)$ к нулю по мере вытекает существование такого $N$, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\operatorname{mes} G_n < \frac{\varepsilon}{2}$, где

$$G_n = \{s : |u_n(s) - v_n(s)| \geqslant \delta\}.$$

Тогда при $s \in \Omega_n \setminus G_n$ будет выполняться неравенство $|f[s, u_n(s)] - f[s, v_n(s)]| \leqslant h$. Остается заметить, что

$$\operatorname{mes}[\Omega \setminus (\Omega_n \setminus G_n)] \leqslant \operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_n) + \operatorname{mes} G_n < \varepsilon.$$

Перейдем к доказательству утверждения теоремы. Нам нужно показать, что для любых таких последовательностей функций $u_n(s)$, $v_n(s)$ из шара $\|x\|_\alpha \leqslant R$, для которых $\|u_n(s) - v_n(s)\|_\alpha \to 0$, справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathfrak{f} u_n(s) - \mathfrak{f} v_n(s)\|_\beta = 0. \tag{17.20}$$

Так как разность $\mathfrak{f} u_n - \mathfrak{f} v_n$ по мере сходится к нулю, то достаточно показать, что эти разности имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Последнее утверждение очевидно, если $\beta > \beta_0$; оно вытекает из леммы 17.3, если $\alpha < \alpha_0$.

Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $f(s, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(s, u_1) - f(s, u_2)| \leqslant g(s, R)|u_1 - u_2|^\delta \quad (|u_1|, |u_2| \leqslant R), \tag{17.21}$$

где $g(s, u)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори, а $\delta > 0$. Пусть, далее, оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный функцией $f(s, u)$, действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\beta \geqslant \alpha\delta$, а оператор суперпозиции $\mathfrak{g}$, определенный функцией $g(s, u)$, действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha\delta}$. Тогда из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|\mathfrak{f}x_1-\mathfrak{f}x_2\|_\beta \leqslant \|g[s, \max\{|x_1(s)|, |x_2(s)|\}]|x_1(s)-x_2(s)|^\delta\|_\beta \leqslant$$
$$\leqslant \|g[s, \max\{|x_1(s)|, |x_2(s)|\}]\|_{\beta-\alpha\delta}\|x_1-x_2\|_\alpha^\delta,$$

т. е.

$$\|\mathfrak{f}x_1-\mathfrak{f}x_2\|_\beta \leqslant k(R)\|x_1-x_2\|_\alpha^\delta \quad (\|x_1\|_\alpha, \|x_2\|_\alpha \leqslant R),$$

где

$$k(R) = \sup_{\|x\|\leqslant 2R} \|\mathfrak{g}x\|_{\beta-\alpha\delta}.$$

Значит, из (17.21) при указанных ограничениях на $g(t, u)$ вытекает равномерная непрерывность $\mathfrak{f}$, как оператора из $L_\alpha$ в $L_\beta$, на каждом шаре пространства $L_\alpha$.

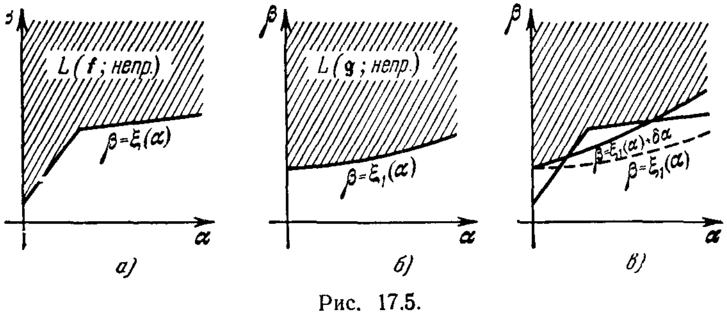


Рис. 17.5.

Допустим, что нам известны $L$-характеристики оператора $\mathfrak{f}$ и оператора $\mathfrak{g}$, определенного коэффициентом $g(s, u)$ в правой части неравенства (17.21). На рис. 17.5, *а*) изображена $L$-характеристика оператора $\mathfrak{f}$; на рис. 17.5, *б*) кривая $\beta=\xi_1(\alpha)$ ограничивает $L$-характеристику оператора $\mathfrak{g}$. Из оценки (17.21) вытекает, что заштрихованное на рис. 17.5, *в*) множество принадлежит $L$ ($\mathfrak{f}$; *равн. непр.*). Это заштрихованное множество состоит из точек $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*), лежащих не ниже кривой $\beta=\xi_1(\alpha)+\delta\alpha$. Заметим, что неравенство (17.21) позволяет устанавливать принадлежность $L$ ($\mathfrak{f}$; *равн. непр.*) некоторых точек границы $L$-характеристики $L$ ($\mathfrak{f}$; *непр.*) (чего нельзя было сделать при помощи теоремы 17.4).

Условие (17.21) можно заменить более общим неравенством

$$|f(s, u_1) - f(s, u_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} g_i(s, R)\,|u_1 - u_2|^{\delta_i} \quad (|u_1|, |u_2| \leqslant R), \qquad (17.22)$$

где функции $g_i(s, u)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, а показатели $\delta_i$ положительны. Если $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, $\beta \geqslant \delta_i\alpha$, а каждый оператор $\mathfrak{g}_i$, определенный функцией $g_i(s, u)$, действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\delta_i\alpha}$, то справедлива оценка

$$\|\mathfrak{f}x_1 - \mathfrak{f}x_2\|_\beta \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i(R)\,\|x_1 - x_2\|_\alpha^{\delta_i} \quad (\|x_1\|_\alpha, \|x_2\|_\alpha \leqslant R).$$

Интересно отметить, что в условии (17.21) число $\delta$ обязательно должно было удовлетворять неравенству $\delta \leqslant 1$ — в противном случае функция $f(s, u)$ не зависит от $u$. В условии же (17.22) некоторые из чисел $\delta_i$ могут быть больше чем 1.

**17.7. Улучшающие операторы суперпозиции** *). В приложениях были бы удобны такие операторы суперпозиции $\mathfrak{f}$, которые обладают свойством компактности. Если $f(s, u)$ существенно зависит от $u$, то, как оказывается, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$ оператор $\mathfrak{f}$ преобразует каждый шар пространства $L_\alpha$ в множество, которое некомпактно в $L_\beta$. Более того, значения такого оператора $\mathfrak{f}$ на каждом шаре пространства $L_\alpha$ образуют семейство функций, не обладающее свойством компактности по мере.

Действительно, пусть $\mathfrak{f}u_1(s) \neq \mathfrak{f}u_2(s)$ при некоторых фиксированных функциях $u_1(s)$ и $u_2(s)$ из $L_\alpha$. Это означает, что существует такое число $\gamma > 0$ и такое множество $\Omega_0 \subset \Omega$ ненулевой меры, для которых

$$|f[s, u_1(s)] - f[s, u_2(s)]| \geqslant \gamma \quad (s \in \Omega_0).$$

Построим по индукции последовательные разбиения множества $\Omega_0$ на множества $G_{a_1, a_2, \ldots, a_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где каждый индекс $a_i$ принимает значения 1 или 2. Пусть $G_1$

*) П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльник [1].

и $G_2$ — произвольные множества, удовлетворяющие условиям

$$\Omega_0 = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad \operatorname{mes} G_1 = \operatorname{mes} G_2 = \frac{\operatorname{mes} \Omega_0}{2}.$$

Если множества $G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}}$ построены, то множества $G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 1}$, $G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 2}$ выберем так, что

$$G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 1} \cup G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 2} = G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}},$$
$$G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 1} \cap G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2}, 2} = \emptyset,$$
$$\operatorname{mes} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1} = \operatorname{mes} G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 2} = \frac{\operatorname{mes} \Omega_0}{2^k}.$$

Определим теперь функции $x_k(s)$ равенствами

$$x_k(s) = \begin{cases} u_1(s), & \text{если } s \in \bigcup\limits_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}} G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 1}, \\ u_2(s), & \text{если } s \in \bigcup\limits_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}} G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 2}, \\ 0, & \text{если } s \bar{\in} \Omega_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что множество функций $x_k(s)$ лежит в некотором шаре пространства $L_\alpha$. В то же время

$$|\mathfrak{f}x_k(s) - \mathfrak{f}x_l(s)| =$$
$$= \begin{cases} |f[s, u_1(s)] - f[s, u_2(s)]|, & \text{если } s \in F_{k, l}, \\ 0, & \text{если } s \bar{\in} F_{k, l}, \end{cases}$$

где

$$F_{k, l} = \bigcup_{\alpha_k \neq \alpha_l} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_l}.$$

Так как $\operatorname{mes} F_{k, l} = \frac{1}{2} \operatorname{mes} \Omega_0$, то отсюда следует, что последовательность $\mathfrak{f}x_k(s)$ некомпактна по мере.

Будем говорить, что оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$) как *улучшающий* оператор, если он преобразует каждый шар пространства $L_\alpha$ в множество функций с равностепенно абсолютно непрерывными в $L_\beta$ нормами. Естественным образом вводится понятие $L$-характеристики $L(\mathfrak{f}$; *улучш.*). Из неравенства Гёльдера и из леммы 17.3 следует, что все внутренние точки $L$-характеристики $L(\mathfrak{f}$; *непр.*) принадлежат

$L$-характеристике $L(\mathfrak{f};$ *улучш.*). Нетрудно также видеть, что $L(\mathfrak{f};$ *улучш.*)$\subset L(\mathfrak{f};$ *равн. непр.*).

Из теоремы 17.1 и леммы 17.6 вытекает, что оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ в том и только том случае, если выполнено неравенство

$$|f(s, u)| \leqslant a_0(s) + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (s \in \Omega, \ -\infty < u < \infty), \tag{17.23}$$

где $a_0(s) \in L_\beta$. Легко проверить, что $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ как улучшающий оператор, если

$$|f(s, u)| \leqslant a_0(s) + b(s)\,|u|^{\frac{\beta-\varepsilon}{\alpha}} \quad (s \in \Omega, \ -\infty < u < \infty), \tag{17.24}$$

где $a_0(s) \in L_\beta$, $\varepsilon \in (0, \beta)$, $b(s) \in L_\varepsilon$. Неравенство (17.24) является более жестким ограничением, чем неравенство (17.23).

Теорема 17.5. *Оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($\alpha$, $\beta > 0$) как улучшающий оператор тогда и только тогда, когда существует четная и непрерывная функция $M(u)$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty \tag{17.25}$$

*и такая, что*

$$M[f(s, u)] \leqslant a_0(s) + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}} \quad (s \in \Omega, \ -\infty < u < \infty), \tag{17.26}$$

*где $a_0(s) \in L_\beta$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ как улучшающий оператор. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество его значений на шаре $\|x\|_\alpha \leqslant 1$. Множество $\mathfrak{M}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_\beta$. В силу критерия Валле-Пуссена (см. п. 1.2) существует такая непрерывная четная функция $M(u)$, удовлетворяющая условию (17.25), что функции $M[y(s)] \in L_\beta$ при $y(s) \in \mathfrak{M}$. Это значит, что оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}_1 x(s) = M\{f[s, x(s)]\}$$

действует из единичного шара пространства $L_\alpha$ в $L_\beta$. Поэтому он действует из всего $L_\alpha$ в $L_\beta$. Из леммы 17.5 вытекает оценка (17.26).

Если выполнено условие (17.26), то равностепенная абсолютная непрерывность норм в $L_\beta$ значений $\mathfrak{f}$ на каждом шаре пространства $L_\alpha$ также вытекает из критерия Валле-Пуссена. Теорема доказана.

**17.8. Дополнительные замечания.** В этом пункте рассматриваются функции $f(s, u)$, не удовлетворяющие условиям Каратеодори.

Будем говорить, что функция $f(s, u)$ *суперпозиционно-измерима*, если оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ преобразует каждую измеримую функцию в измеримую, т. е. суперпозиция $f[s, x(s)]$ измерима для каждой измеримой функции $x(s)$. Нетрудно построить функции $f(s, u)$, измеримые по совокупности переменных $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$, и при каждом фиксированном $s$, имеющие не более одной точки разрыва по переменной $u$, которые не обладают свойством суперпозиционной непрерывности. Простейший пример — почти всюду равная нулю характеристическая функция $f(s, u)$ графика функции $u = \varkappa_D(s)$, где $\varkappa_D$ — характеристическая функция некоторого неизмеримого множества на $\Omega$.

К суперпозиционно измеримым функциям относятся не только функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори. Нетрудно видеть, например, что функция $f(s, u) = f_0(u)$ суперпозиционно-измерима, если $f_0(u)$ измерима по Борелю ($B$-измерима, см. И. П. Натансон [1]). Непосредственно из определения вытекает, что функция $f(s, u)$ суперпозиционно-измерима, если почти при всех $s \in \Omega$ и всех $u$ она представима в виде

$$f(s, u) = \lim_{n \to \infty} f_n(s, u), \tag{17.27}$$

где $f_n(s, u)$ — суперпозиционно-измеримые функции.

Последнее замечание позволяет выделить классы $B(\alpha)$ суперпозиционно-измеримых функций, где $\alpha$ — трансфинитные числа счетной мощности. Класс $B(0)$ — это функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори. Функции класса $B(\alpha_0)$ — это функции, представимые равенством (17.27), где $f_n(s, u) \in B(\alpha)$, $\alpha < \alpha_0$.

Отметим еще, что для суперпозиционной измеримости функции $f(s, u)$ достаточно, чтобы оператор $\mathfrak{f}$ преобразовывал каждую непрерывную функцию в измеримую. В частности, если $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, то функция $f(s, u)$ суперпозиционно-измерима.

Лемма 17.8. *Пусть функция $f(s, u)$ суперпозиционно-измерима, а функция $x_0(s)$ измерима.*

*Тогда оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен по мере в точке $x_0(s)$ в том и только том случае, если при произвольном $h > 0$*

$$\lim_{u \to 0} \operatorname{mes} \{s: |f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)]| \geqslant h\} = 0. \tag{17.28}$$

Доказательство. Пусть последовательность $x_n(s)$ сходится по мере к функции $x_0(s)$ и $h$ — фиксированное число. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta > 0$ так, чтобы при $|u| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство

$$\operatorname{mes}\{s\colon |f[s, x_0(s)+u] - f[s, x_0(s)]| \geqslant h\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, далее, $n_0$ — такое число, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{s\colon |x_n(s) - x(s)| \geqslant \delta\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ неравенство

$$|f[t, x_n(s)] - f[t, x_0(s)]| \geqslant h$$

выполняется лишь в точках множества, мера которого меньше $\varepsilon$. Достаточность доказана. Необходимость очевидна.

Лемма доказана.

Из лемм 17.3 и 17.8 вытекает

Теорема 17.6. *Пусть оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$,* $\beta > 0$.

*Тогда оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен в точке $x_0(s) \in L_\alpha$ в том и только том случае, когда выполняется условие*

$$\lim_{u\to\infty} \operatorname{mes}\{s\colon |f[s, x_0(s)+u] - f[s, x_0(s)]| \geqslant h\} = 0,$$

*где $h$ — произвольное число.*

В приложениях наиболее важен тот случай, когда $f(s, u)$ измерима по совокупности переменных и непрерывна почти при всех $s \in \Omega$ по $u$, исключая конечное число точек $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$, причем $u_i(s)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — измеримые функции. Ясно, что такая функция суперпозиционно-измерима. Соответствующий ей оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен по мере в каждой точке $x(s)$, для которой

$$\operatorname{mes}\{s\colon x(s) = u_i(s)\} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Построения настоящего параграфа без труда переносятся на операторы суперпозиции $\mathfrak{f}$, соответствующие функциям $f(s, u)$, определенным не при всех $u$. Такие операторы уже нельзя рассматривать на содержащих внутренние точки множествах пространства $L_\alpha$ (при $\alpha > 0$). Рассмотрим наиболее важный частный случай.

Пусть $v_1(s)$ и $v_2(s)$ — измеримые (возможно, принимающие значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры) функции и $v_1(s) \leqslant v_2(s)$. Предположим, что функция $f(s, u)$ определена при $s \in \Omega$, $v_1(s) \leqslant u \leqslant v_2(s)$. В этом случае суперпозиция $f[s, x(s)]$ определена для функций $x(s)$, удовлетворяющих почти при всех $s \in \Omega$ неравенствам $v_1(s) \leqslant x(s) \leqslant v_2(s)$. Тем самым оператор $\mathfrak{f}$ можно рассматривать на функциях $x(s)$ из $L_\alpha$, удовлетворяющих дополнительным условиям $v_1(s) \leqslant x(s) \leqslant v_2(s)$. Множество таких функций удобно обозначать через $L_\alpha\langle v_1, v_2\rangle$. Сформулируем основной результат: *если функция $f(s, u)$ измерима по $s$ (при всех $u$) и почти при всех $s \in \Omega$ непрерывна по $u$ при $v_1(s) < u < v_2(s)$, то $\mathfrak{f}$ непрерывен в точках множества $L_\alpha\langle v_1, v_2\rangle$ как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($\beta > 0$), если $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha\langle v_1, v_2\rangle$ в $L_\beta$.*

## § 18. Условия непрерывности интегральных операторов*)

**18.1. Определения и простейшие свойства.** Пусть $\Omega$ и $\Omega^*$ — два множества конечной лебеговой меры в конечномерном пространстве. Пусть функция $K(t, s, u)$ определена при $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$. Нелинейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K[t, s, x(s)]\, ds \tag{18.1}$$

называют интегральным *оператором Урысона*, а функцию $K(t, s, u)$ — его ядром.

В этом параграфе изучаются вопросы, связанные с непрерывностью оператора Урысона.

Оператор Урысона с ядром $K(t, s, u)$ определен на функциях $x(s)$, для которых функция $K[t, s, x(s)]$ суммируема. Ниже предполагается, что функция $K(t, s, u)$ удовлетворяет условию Каратеодори: она при всех $u$ измерима по совокупности переменных $t, s \in \Omega^* \times \Omega$ и почти при всех $t, s \in \Omega^* \times \Omega$ непрерывна по $u$. Эти предположения (см. лемму 17.1) обеспечивают измеримость функции $K[t, s, x(s)]$, если измерима функция $x(s)$.

Оператор (18.1) нелинейный. Однако он (аналогично оператору суперпозиции; см. п. 17.2) обладает свойством частич-

---

*) Исследованию различных классов нелинейных интегральных операторов посвящены работы многих авторов (А. М. Ляпунов, Э. Шмидт, П. С. Урысон, Л. Лихтенштейн, А. Гаммерштейн, Н. Голомб, В. В. Немыцкий, А. И. Гусейнов, М. М. Вайнберг, М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, Я. Б. Рутицкий, Е. И. Пустыльник, П. П. Забрейко, Ван Шен-ван и др.).

Специальный анализ условий непрерывности общих интегральных операторов вида (18.1) провел П. П. Забрейко [1, 4]. Его результаты составляют основное содержание параграфа. Ряд важных построений взят из работ М. А. Красносельского [1, 7] и М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [1].

ной аддитивности: если функции $x_1(s), \ldots, x_n(s)$ имеют непересекающиеся носители, то

$$A(x_1 + \ldots + x_n) = Ax_1 + \ldots + Ax_n - (n-1)A0. \qquad (18.2)$$

Из свойства частичной аддитивности вытекает ряд простых утверждений об операторах Урысона.

Во-первых, каждый оператор $A$, определенный на некотором шаре $\|x - x_0\|_\alpha \leqslant r$ и принимающий значения в пространстве $L_\beta$, будет определен и на всем пространстве $L_\alpha$ если только $\alpha > 0$. Во-вторых, каждый оператор Урысона $A$, действующий из $L_\alpha (\alpha > 0)$ в $L_\beta$, непрерывный в точках некоторого шара пространства $L_\alpha$, будет непрерывным во всех точках пространства $L_\alpha$. Наконец, действующий из $L_\alpha (\alpha > 0)$ в $L_\beta$ и ограниченный на некотором шаре пространства $L_\alpha$ оператор Урысона $A$ будет оператором, ограниченным на каждом шаре пространства $L_\alpha$.

Эти утверждения, конечно, неверны для операторов, действующих из $L_0$ в $L_\beta$.

Оператор (18.1) является суперпозицией $A = J\mathfrak{K}^0$, где

$$\mathfrak{K}^0 x(s) = K[t, s, x(s)] \qquad (18.3)$$

и

$$Ju(t, s) = \int_\Omega u(t, s)\, ds. \qquad (18.4)$$

Оператор $\mathfrak{K}^0$ действует из пространств функций одной переменной в пространства функций двух переменных, а оператор $J$ — из пространств функций двух переменных в пространства функций одной переменной. Если бы оказалось, что оператор $\mathfrak{K}^0$ действует из некоторого пространства $L_\alpha(\Omega)$ в пространство $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$ $(0 \leqslant \beta \leqslant 1)$, то оператор $A = J\mathfrak{K}^0$ действовал бы из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega^*)$, ибо $J$ является линейным непрерывным оператором, действующим из $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_\beta(\Omega^*)$. Аналогично, если бы $\mathfrak{K}^0$ был непрерывен и ограничен на каждом шаре пространства $L_\alpha(\Omega)$, то оператор $A$ также был бы непрерывным и ограниченным на каждом шаре пространства $L_\alpha(\Omega)$.

Наряду с оператором (18.3) рассмотрим оператор

$$\mathfrak{K}u(t, s) = K[t, s, u(t, s)], \qquad (18.5)$$

действующий в пространствах функций двух переменных. Если этот оператор действует из $L_\alpha(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$, то он в силу теоремы 17.1 непрерывен. В этом случае будет непрерывен и $\mathfrak{K}^0$ как оператор из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$. Поэтому условия, при которых оператор (18.5) действует из $L_\alpha(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$, являются условиями непрерывности оператора Урысона как оператора из $L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta(\Omega^*)$. Это значит, что точки $\{\alpha, \beta\}$ $L$-характеристики $L(\mathfrak{K}$; *действ.*), для которых $0 < \beta \leqslant 1$, принадлежат $L$-характеристике $L$ ($A$; *непр.*).

В последующих пунктах будет показано, что проведенные рассуждения выделяют лишь часть $L$-характеристики $L(A$; *непр.*) оператора Урысона $A$.

**18.2. Условия непрерывности операторов Гаммерштейна.** Часто встречаются операторы (18.1) с ядрами, имеющими специальный вид

$$K(t, s, u) = K_0(t, s) f(s, u). \tag{18.6}$$

Интегральные операторы

$$Ax(t) = \int_\Omega K_0(t, s) f[s, x(s)]\, ds \tag{18.7}$$

с такими ядрами называют *операторами Гаммерштейна*. Каждый интегральный оператор Гаммерштейна допускает представление

$$A = K_0 \mathfrak{f}, \tag{18.8}$$

где $K_0$ — линейный интегральный оператор с ядром $K_0(t, s)$:

$$K_0 x(t) = \int_\Omega K_0(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{18.9}$$

а $\mathfrak{f}$ — нелинейный оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f} x(s) = f[s, x(s)]. \tag{18.10}$$

Поэтому изучение оператора Гаммерштейна сводится к изучению линейного оператора (18.9) и нелинейного оператора $\mathfrak{f}$ (18.10). В частности, справедливы

Теорема 18.1. *Пусть* $\mathfrak{f}$ — *оператор, действующий из* $L_\alpha$ *в* $L_\gamma$ $(\gamma > 0)$, *а* $K_0$ — *непрерывный оператор, действующий из* $L_\gamma$ *в* $L_\beta$.

*Тогда оператор Гаммерштейна* $A = K_0\mathfrak{f}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и непрерывен.*

Теорема 18.2. *Пусть* $\mathfrak{f}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$, *а* $K_0$ — *регулярный оператор, действующий из* $L_0$ *в* $L_\beta$ $(\beta > 0)$.

*Тогда оператор Гаммерштейна* $A = K_0\mathfrak{f}$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и непрерывен.*

В доказательстве нуждается только теорема 18.2. Из леммы 17.5 вытекает, что в условиях этой теоремы оператор $\mathfrak{f}$ преобразует сходящиеся в $L_\alpha$ последовательности в ограниченные последовательности, сходящиеся по мере; регулярный интегральный оператор такие последовательности функций преобразует в последовательности, сходящиеся в $L_\beta$ по норме (достаточно заметить, что $\|K_0P_D\|_{0\to\beta} \to 0$ при $\operatorname{mes} D \to 0$).

Объединяя условия непрерывности оператора $\mathfrak{f}$ (см. § 17) с условиями непрерывности линейных интегральных операторов (см. § 4—8), можно формулировать различные частные признаки непрерывности оператора Гаммерштейна.

Отметим, что теоремы 18.1 и 18.2 позволяют построить часть $L$-характеристики $L(A;\ \textit{непр.})$ оператора Гаммерштейна $A$, если известны $L$-характеристики $L(K_0;\ \textit{непр.})$ и $L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})$. Для этого удобнее всего построить вначале функции

$$\xi(\alpha;\ K_0;\ \textit{непр.}) = \inf_{\{\alpha,\ \beta\} \in L(K_0;\ \textit{непр.})} \beta,$$

$$\xi(\alpha;\ \mathfrak{f};\ \textit{непр.}) = \inf_{\{\alpha,\ \beta\} \in L(\mathfrak{f};\ \textit{непр.})} \beta,$$

а затем построить функцию

$$\xi(\alpha) = \xi[\xi(\alpha;\ K;\ \textit{непр.});\ \mathfrak{f};\ \textit{непр.}].$$

Совокупность точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta > \xi(\alpha)$, будет (см. п. 1.6) принадлежать $L$-характеристике $L(A;\ \textit{непр.})$. При помощи теоремы 18.1 можно указать и часть точек $\{\alpha, \xi(\alpha)\}$, принадлежащих $L(A;\ \textit{непр.})$. Естественно, что построенная при помощи теорем 18.1 и 18.2 часть $L$-характеристики $L(A;\ \textit{непр.})$ оператора Гаммерштейна $A$ может оказаться «малой» частью всей $L(A;\ \textit{непр.})$.

При исследовании оператора Гаммерштейна (18.7) его иногда удобно представить как суперпозицию

$$A = K_1 \mathfrak{f}_1$$

операторов

$$K_1 x(t) = \int_\Omega K(t, s)\, v_0(s)\, x(s)\, ds$$

и

$$\mathfrak{f}_1 x(s) = \frac{f[s, x(s)]}{v_0(s)},$$

где $v_0(s)$ — функция, не принимающая нулевых значений. Удачный выбор функции $v_0(s)$ позволяет найти новые точки $L$-характеристики $L(A;\ \textit{непр.})$.

Допустим, что

$$f(s, u) = f_1(s, u) + \ldots + f_n(s, u). \qquad (18.11)$$

Тогда оператор (18.7) можно представить в виде суммы операторов

$$A_i x(t) = \int_\Omega K(t, s)\, f_i[s, x(s)]\, ds \quad (i = 1, \ldots, n).$$

$L$-характеристика $L(A;\ \textit{непр.})$ будет содержать пересечение $L$-характеристик операторов $A_i$. Построенная таким образом часть $L$-характеристики $L(A;\ \textit{непр.})$ будет, вообще говоря, больше той части, которую можно получить при помощи теоремы 18.1, не расщепляя $\mathfrak{f}$ в сумму операторов.

Допустим, что функция $f(s, u)$ допускает оценку

$$|f(s, u)| \leqslant g_1(s, u) + \ldots + g_n(s, u), \qquad (18.12)$$

где все функции $g_i(s, u)$ неотрицательны и удовлетворяют условиям Каратеодори. Тогда $f(s, u)$ допускает и представление (18.11), в котором каждая функция $f_i(s, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f_i(s, u)| \leqslant g_i(s, u). \qquad (18.13)$$

Функции $f_i(s, u)$ могут быть определены, например, равенствами

$$f_1(s, u) = \min\{|f(s, u)|, g_1(s, u)\}\operatorname{sign} f(s, u),$$
$$f_2(s, u) = \min\{|f(s, u) - f_1(s, u)|, g_2(s, u)\}\times$$
$$\times \operatorname{sign}[f(s, u) - f_1(s, u)],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{n-1}(s, u) = \min\{|f(s, u) - f_1(s, u) - \dots$$
$$\dots - f_{n-2}(s, u)|, g_{n-1}(s, u)\}\times$$
$$\times \operatorname{sign}[f(s, u) - f_1(s, u) - \dots - f_{n-2}(s, u)],$$
$$f_n(s, u) = f(s, u) - f_1(s, u) - \dots - f_{n-1}(s, u).$$

Никакие общие теоремы о структуре $L$-характеристик $L(A;\ \textit{непр.})$ операторов Гаммерштейна (подобные теоремам о выпуклости $L$-характеристик линейных операторов или нуль-вогнутости $L$-характеристик операторов суперпозиции $\mathfrak{f}$) нам неизвестны.

Можно привести примеры операторов Гаммерштейна с выпуклыми $L$-характеристиками. К ним относятся операторы с простейшими степенными нелинейностями

$$f(s, u) = |u|^k \operatorname{sign} u.$$

В заключение пункта приведем пример оператора Гаммерштейна, $L$-характеристика $L(A;\ \textit{непр.})$ которого не обладает свойством выпуклости.

Рассмотрим оператор

$$A_0x(t) = \int_0^1 |t - s|^{-\delta} \min\{a_0(s), x^2(s)\}\, ds, \qquad (18.14)$$

где $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, а функция $a_0(s)$ удовлетворяет условиям

$$a_0(s) > 1, \quad a_0(s) \in L_{\frac{1}{2}} \setminus \bigcup_{\alpha < \frac{1}{2}} L_\alpha,$$

$$\int_0^1 |t - s|^{-\delta} a_0(s)\, ds \in L_{\delta - \frac{1}{2}} \setminus \bigcup_{\beta < \delta - \frac{1}{2}} L_\beta$$

доказательство существования такой функции предоставляем читателю). $L$-характеристики $L(K_0;$ *непр.*$)$ и $L(\mathfrak{f};$ *непр.*$)$ операторов

$$K_0 x(t) = \int_0^1 |t-s|^{-\delta} x(s)\, ds,$$

$$\mathfrak{f}x(s) = \min\{a_0(s),\ x^2(s)\}$$

изображены на рис. 18.1. Из теоремы 18.1 вытекает, что $L$-характеристика $L(A;$ *непр.*$)$ содержит множество точек, заштрихованное на рис. 18.2.

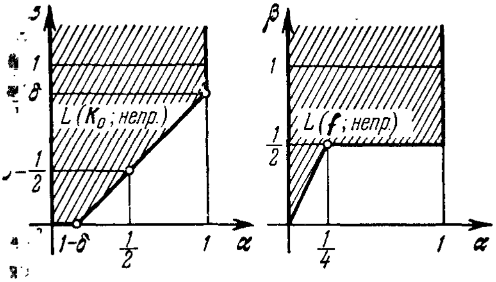


Рис. 18.1.

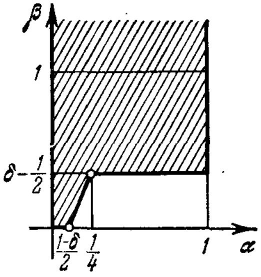


Рис. 18.2.

Рассмотрим теперь значение оператора (18.14) на функции $x_0(s) = \sqrt{a_0(s)} \in L_{\frac{1}{1}}$. Очевидно,

$$Ax_0(t) = K_0 a_0(t) \bar{\in} L_\beta \quad \left(\beta < \delta - \frac{1}{2}\right).$$

Это значит, что точки $\left\{\frac{1}{4},\ \beta\right\}$, где $\beta < \delta - \frac{1}{2}$, не принадлежат $L$-характеристике $L(A;$ *непр.*$)$. Отсюда следует, что $L(A;$ *непр.*$)$ не является выпуклым множеством.

### 18.3. Общая теорема о непрерывности оператора Урысона.

Теорема 18.3. *Пусть функции $K(t, s, u)$ и $R(t, s, u)$ удовлетворяют условиям Каратеодори. Пусть*

$$|K(t, s, u)| \leqslant R(t, s, u) \quad (t \in \Omega^*,\ s \in \Omega,\ -\infty < u < \infty), \tag{18.15}$$

*причем интегральный оператор*

$$Bx(t) = \int_{\Omega} R[t, s, x(s)]\, ds \tag{18.16}$$

*действует из* $L_{\alpha}$ *в* $L_{\beta}$, $\beta > 0$ *и непрерывен.*

*Тогда интегральный оператор* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *также действует из пространства* $L_{\alpha}$ *в пространство* $L_{\beta}$ *и непрерывен.*

Доказательство. Тот факт, что оператор $A$ действует из $L_{\alpha}$ в $L_{\beta}$, очевиден.

Пусть последовательность функций $x_n(s)$ сходится по норме пространства $L_{\alpha}$ к функции $x_0(s)$. Последовательность функций $Bx_n(t)$ сходится к $Bx_0(t)$ по норме пространства $L_{\beta}$ и, следовательно, сходится к $Bx_0(t)$ по мере. Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность $x_{n_k}(s)$, что функции

$$Bx_{n_k}(t) = \int_{\Omega} R\left[t, s, x_{n_k}(s)\right] ds \tag{18.17}$$

сходятся к $Bx_0(t)$ при всех значениях $t$ из подмножества $\Omega_0^* \subset \Omega^*$ полной меры. Функции $R[t, s, x_n(s)]$ сходятся по мере (на $\Omega^* \times \Omega$) к функции $R[t, s, x_0(s)]$. Можно считать, что последовательность индексов $n_k$ была выбрана так, что $R\left[t, s, x_{n_k}(s)\right]$ сходятся к $R[t, s, x_0(s)]$ почти всюду на $\Omega^* \times \Omega$, и, более того, при каждом $t \in \Omega_0^*$ сходятся к $R[t, s, x_0(s)]$ почти всюду на $\Omega$. Из теоремы Витали *) вытекает, что интегралы

$$Bx_{n_k}(t) = \int_{\Omega} R\left[t, s, x_{n_k}(s)\right] ds \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

при каждом $t \in \Omega_0^*$ равностепенно абсолютно непрерывны. Из неравенства (18.15) вытекает тогда, что при каждом $t \in \Omega_0^*$ интегралы

$$Ax_{n_k}(t) = \int_{\Omega} K\left[t, s, x_{n_k}(s)\right] ds \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{18.18}$$

также равностепенно абсолютно непрерывны.

*) И. П. Натансон [1].

Последовательность $K\left[t, s, x_{n_k}(s)\right]$ сходится к $K[t, s, x_0(s)]$ по мере. Можно считать, что при каждом $t \in \Omega_0^*$ она сходится почти всюду на $\Omega$. Из уже доказанной равностепенной абсолютной непрерывности интегралов (18.18) вытекает, что функции $Ax_{n_k}(t)$ почти при всех $t \in \Omega^*$ сходятся к функции $Ax_0(t)$.

Нормы в $L_\beta$ последовательности функций $Bx_n(t)$ равностепенно абсолютно непрерывны. Из неравенства (18.15) вытекает, что и нормы функций $Ax_n(t)$ также равностепенно абсолютно непрерывны. Поэтому последовательность $Ax_{n_k}(t)$ сходится в $L_\beta$ к $Ax_0(t)$ по норме.

Мы показали, что для каждой последовательности $x_n(s)$, сходящейся в $L_\alpha$ к $x_0(s)$, можно указать такую подпоследовательность $x_{n_k}(s)$, что функции $Ax_{n_k}(t)$ сходятся по норме $L_\beta$ к функции $Ax_0(t)$. Значит, $A$ непрерывен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Теорема доказана.

Теорема 18.3 означает, что $L(A$; *непр.*) содержит $L(B$; *непр.*), если выполнено неравенство (18.15). В качестве $R(t, s, u)$ обычно выбираются функции, определяющие операторы Гаммерштейна, или суммы таких операторов, причем для исследования получающихся операторов $B$ применяют теоремы 18.1 и 18.2.

**18.4. Об одном свойстве операторов Урысона.** Пусть $\beta > 0$. Обозначим через*) $M_\beta$ множество всех измеримых функций $u(t, s)$ двух переменных $t, s$, для которых

$$\int_{\Omega^*}\left[\int_{\Omega}|u(t, s)|\,ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt < \infty.$$

Очевидно, множество $M_\beta$ образует линейную систему. При $\beta \in (0, 1]$ множество $M_\beta$ является полным нормированным пространством, если норму в нем определить равенством

$$\|u(t, s)\|_{M_\beta} = \left\|\int_{\Omega}|u(t, s)|\,ds\right\|_{L_\beta}. \tag{18.19}$$

*) А. Бенедек, Р. Панзоне [1].

При $\beta > 1$ это пространство ненормируемо; однако оно является полным метрическим пространством с метрикой

$$\rho(u, v) = \int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega} |u(t, s) - v(t, s)| \, ds \right]^{\frac{1}{\beta}} dt.$$

Доказательство этих утверждений без труда проводится обычным способом.

Лемма 18.1. *Если* $u(t, s) \in M_\beta$ $(\beta > 0)$, *то*

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \left\| \int_D |u(t, s)| \, ds \right\|_\beta = 0. \tag{18.20}$$

Действительно, почти при всех $t \in \Omega^*$ функция $u(t, s)$ суммируема по $s$; поэтому интегралы $\int_{\Omega} |u(t, s)| \, ds$ почти при всех $t$ абсолютно непрерывны. Это означает, что функции $\varphi(D;\ t) = \int_D |u(t, s)| \, ds$ почти при всех $t \in \Omega^*$ при $\mathrm{mes}\, D \to 0$ сходятся к нулю. Но, с другой стороны, выполняется неравенство

$$\varphi(D;\ t) \leqslant \int_{\Omega} |u(t, s)| \, ds,$$

из которого следует, что функции $\varphi(D, t)$ в пространстве $L_\beta$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Поэтому при $\mathrm{mes}\, D \to 0$ функции $\varphi(D, t)$ сходятся к нулю и по норме пространства $L_\beta$, т. е. справедливо равенство (18.20). Лемма доказана.

Теорема 18.4. *Пусть функция* $K(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,\ s \in \Omega,\ -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть для каждой функции* $x(s) \in L_\alpha$ $(\alpha > 0)$ *функция* $K[t, s, x(s)]$ *принадлежит пространству* $M_\beta$ $(0 < \beta \leqslant 1)$:

$$\int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega} |K[t, s, x(s)]| \, ds \right]^{\frac{1}{\beta}} dt < \infty.$$

*Тогда оператор Урысона* $\mathbf{A}$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и обладает следующим свойством: для каждого множества* $\mathfrak{M}$ *функций из* $L_\alpha$ *с равно-*

*степенно абсолютно непрерывными нормами и для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* $\delta > 0$, *что из неравенства* $\operatorname{mes} D < \delta$ *вытекает неравенство*

$$\left\| \int_D |K[t, s, x(s)]| \, ds \right\|_\beta < \varepsilon \quad (x \in \mathfrak{M}). \tag{18.21}$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся такое $\varepsilon_0 > 0$, такая последовательность функций $y_k(t) \in L_\alpha$ с равностепенно абсолютно непрерывными нормами и такая последовательность множеств $F_k \subset \Omega$, что $\operatorname{mes} F_k \to 0$ при $k \to \infty$ и

$$\left\| \int_{F_k} |K[t, s, y_k(s)]| \, ds \right\|_\beta > \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes} F_k < \infty \tag{18.22}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| P_{F_k} y_k \|_\alpha < \infty. \tag{18.23}$$

Далее поступим как при доказательстве леммы 17.3. Введем обозначения

$$D_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} F_i \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из (18.22) вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} D_k = 0.$$

Поэтому из леммы 18.1 вытекает существование такой целочисленной функции $\eta(k)$, что $\eta(k) > k$ и

$$\left\| \int_{F_k \setminus D_{\eta(k)}} |K[t, s, y_k(s)]| \, ds \right\|_\beta > \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$k_1 = 1, \ k_2 = \eta(k_1), \ \ldots, \ k_n = \eta(k_{n-1}), \ \ldots$$

Меры множеств

$$\Omega_n = F_{k_n} \setminus D_{k_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$; эти множества очевидным образом не пересекаются друг с другом.

Положим

$$x_n(s) = y_{k_n}(s) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Эти функции удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| P_{\Omega_n} x_n \|_{\alpha} < \infty \tag{18.24}$$

и неравенствам

$$\left\| \int_{\Omega_n} | K[t, s, x_n(s)] | \, ds \right\|_{\beta} > \varepsilon_0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18.25}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u(s) = \begin{cases} x_n(s), & \text{если} \quad x \in \Omega_n, \\ 0, & \text{если} \quad s \bar{\in} \bigcup\limits_n \Omega_n. \end{cases}$$

Из (18.24) вытекает, что $u(s) \in L_{\alpha}$, и поэтому

$$K[t, s, u(s)] \in M_{\beta}.$$

С другой стороны, из (18.25) и из неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \leqslant \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right)^p \quad (a_i \geqslant 0, \ p \geqslant 1) \tag{18.26}$$

вытекает, что

$$\int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega} | K[t, s, u(s)] | \, ds \right]^{\frac{1}{\beta}} dt \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega^*} \left[ \int_{\Omega_n} | K[t, s, x_n(s)] | \, ds \right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty.$$

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Несущественные изменения в рассуждениях показывают, что утверждение теоремы 18.4 сохраняет силу и в том случае, когда одно из чисел $\alpha$, $\beta$ (или оба эти числа) больше 1.

**18.5. Регулярные операторы Урысона.** Введем в рассмотрение еще один класс пространств функций двух переменных.

Пусть $\alpha > 0$. Обозначим через $N_\alpha$ множество всех измеримых по совокупности переменных функций $u(t, s)$, для которых

$$\int_\Omega \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega^*} |u(t, s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds < \infty.$$

Очевидно, $N_\alpha$ — линейная система. При $\alpha \in (0, 1]$ множество $N_\alpha$ образует полное линейное нормированное пространство, если норму в нем определять равенством

$$\|u(t, s)\|_{N_\alpha} = \left\| \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega^*} |u(t, s)| \right\|_{L_\alpha}. \tag{18.27}$$

В случае $\alpha > 1$ множество $N_\alpha$ — полное метрическое пространство с метрикой

$$\rho(u, v) = \int_\Omega \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega^*} |u(t, s) - v(t, s)|^{\frac{1}{\alpha}} ds.$$

Теорема 18.5. *Пусть функция $K(t, s, u)$ ($t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$) удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть оператор*

$$\mathfrak{K}u(t, s) = K[t, s, u(t, s)] \tag{18.28}$$

*действует из пространства $N_\alpha$ в пространство $M_\beta$, причем $\alpha \geqslant 0$, $0 < \beta \leqslant 1$.*

*Тогда интегральный оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из пространства $L_\alpha$ в пространство $L_\beta$ и непрерывен.*

Доказательство. Тот факт, что оператор $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, очевиден. Покажем непрерывность оператора $A$.

Пусть последовательность функций $x_n(s)$ сходится по норме $L_\alpha$ к функции $x_0(s)$ и пусть

$$|x_n(s)| \leqslant h, \tag{18.29}$$

где $h$ — некоторое число. Покажем, что последовательность функций $Ax_n(t)$ сходится по норме $L_\beta$ к функции $Ax_0(t)$.

Из условий теоремы вытекает, что оператор

$$\mathfrak{K}u(t, s) = K[t, s, u(t, s)]$$

действует из $L_0(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_1(\Omega^* \times \Omega)$. Поэтому (см. лемму 17.4) выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} \int_{\Omega} |K[t, s, x_n(s)] - K[t, s, x_0(s)]|\, ds\, dt = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} |Ax_n(t) - Ax_0(t)|\, dt = 0$$

и, далее, что последовательность функций $Ax_n(t)$ сходится к функции $Ax_0(t)$ по мере.

Покажем теперь, что функции $Ax_n(t)$ имеют в $L_\beta$ равностепенно абсолютно непрерывные нормы. Отсюда и будет следовать, что

$$\lim \|Ax_n - Ax_0\|_\beta = 0. \tag{18.30}$$

Предположим, что нормы функций $Ax_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не обладают свойством равностепенной абсолютной непрерывности. Тогда без ограничения общности можно считать, что существуют такие множества $F_n \subset \Omega^*$, меры которых удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{mes} F_n < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

что

$$\|P_{F_n} Ax_n\|_\beta > \varepsilon_0 > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$D_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, $\operatorname{mes} D_n \to 0$, и

$$\|P_{D_n} A x_n\|_\beta > \varepsilon_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Как при доказательстве леммы 17.3 и теоремы 18.3, построим такую целочисленную функцию $\eta(n)$, что $\eta(n) > n$ и

$$\|P_{D_n \setminus D_{\eta(n)}} A x_n\|_\beta > \varepsilon_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Положим

$$n_1 = 1, \ n_2 = \eta(n_1), \ \ldots, \ n_k = \eta(n_{k-1}), \ \ldots$$

и

$$\Omega_k^* = F_{n_k} \setminus D_{n_{k+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Очевидно, множества $\Omega_k^*$ не пересекаются между собой и

$$\left\|P_{\Omega_k^*} A x_{n_k}\right\|_\beta > \varepsilon_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть теперь

$$u(t, s) = \begin{cases} x_{n_k}(s), & \text{если } t \in \Omega_k^*, \\ 0, & \text{если } t \overline{\in} \bigcup\limits_k \Omega_k^*. \end{cases}$$

Из (18.29) вытекает, что функция $u(t, s)$ ограничена и поэтому $\mathfrak{K} u(t, s) \in M_\beta$. С другой стороны, $\mathfrak{K} u(t, s) \overline{\in} M_\beta$, так как

$$\int\limits_{\Omega^*} \left[\int\limits_\Omega |K[t, s, u(t, s)]|\, ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k^*} \left[\int\limits_\Omega |K[t, s, x_{n_k}(s)]|\, ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt = \infty.$$

Мы пришли к противоречию.

Следовательно, из $\|x_n(s) - x_0(s)\|_\alpha \to 0$ при дополнительном условии (18.29) следует (18.30). Пусть теперь $x_n(s)$ — произвольная последовательность функций из $L_\alpha$, сходящаяся по норме к $x_0(s) \in L_\alpha$. Пусть $\|x_n(s)\|_\alpha \leqslant a$.

Для каждого числа $h > a$ последовательность функций

$$T_h x_n(s) = \begin{cases} x_n(s), & \text{если } |x_n(s)| \leqslant h, \\ h \operatorname{sign} x_n(s), & \text{если } |x_n(s)| > h, \end{cases}$$

сходится при $n \to \infty$ к функции $T_h x_0(s)$ по норме $L_\alpha$ и, кроме того, $|T_h x_n(s)| \leqslant h$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \| AT_h x_n(s) - AT_h x_0(s) \|_\beta = 0. \tag{18.31}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из теоремы 18.4 вытекает, что существует такое $\delta > 0$, что при $\operatorname{mes} D < \delta$ выполняется неравенство

$$\left\| \int_D |K[t, s, T_h x_n(s)]|\, ds \right\|_\beta < \frac{\varepsilon}{5} \tag{18.32}$$

$$(0 < h < \infty;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть, далее, $h_0 = a\delta^{-\frac{1}{\alpha}}$. Тогда

$$\operatorname{mes}\{s\colon |x_n(s)| \geqslant h_0\} < \delta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оценим теперь $\|Ax_n(s) - Ax_0(s)\|_\beta$. Очевидно,

$$\|Ax_n(t) - Ax_0(t)\|_\beta \leqslant \|AT_{h_0}x_n(t) - AT_{h_0}x_0(t)\|_\beta +$$
$$+ \left\| \int_{|x_n(s)| \geqslant h} [|K[t, s, x_n(s)]| + |K[t, s, T_h x_n(s)]|]\, ds \right\|_\beta +$$
$$+ \left\| \int_{|x_0(s)| \geqslant h} [|K[t, s, x_0(s)]| + |K[t, s, T_h x_0(s)]|]\, ds \right\|_\beta.$$

Из (18.31) и (18.32) вытекает, что при больших $n$ выполняется неравенство

$$\|Ax_n(t) - Ax_0(t)\|_\beta < \varepsilon.$$

Теорема полностью доказана.

Эта теорема верна и в том случае, когда $\beta > 1$.

Отметим, что доказательство теоремы 18.5 не использует в полном объеме предположение о том, что оператор (18.28) действует из $N_\alpha$ в $M_\beta$. Нам понадобились лишь значения этого оператора на ограниченных функциях $u(t, s)$ двух переменных и на функциях $u(t, s) \equiv x(s)$, где $x(s) \in L_\alpha$.

Будем говорить, что оператор Урысона, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$, *регулярен*, если оператор (18.28) действует из $N_\alpha$ в $M_\beta$. Таким образом, понятие регулярности связано с индексами $\alpha$ и $\beta$.

Нетрудно показать, что понятие регулярности оператора Урысона для линейных интегральных операторов совпадает с понятием регулярности линейных операторов, введенным в п. 2.2. Теорему 18.5 можно рассматривать как непосредственное обобщение на нелинейные интегральные операторы того факта, что линейные регулярные операторы непрерывны.

Простейший признак регулярности оператора Урысона с ядром $K(t, s, u)$ заключается в том, что оператор

$$\mathfrak{K}u(t, s) = K[t, s, u(t, s)]$$

действует из $L_\alpha(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_\beta(\Omega^* \times \Omega)$.

Достаточные признаки регулярности можно формулировать и в виде условия (18.15) теоремы 18.3. Иначе говоря, если

$$|K(t, s, u)| \leqslant R(t, s, u) \tag{18.15}$$

и оператор Урысона с ядром $R(t, s, u)$ регулярен, то регулярен и оператор Урысона с ядром $K(t, s, u)$. В частности, оператор Урысона с ядром $K(t, s, u)$ регулярен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$, если выполнено неравенство (18.15), функция $R(t, s, u)$ четна и монотонна по $u$ при $u > 0$, и оператор Урысона с ядром $R(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Очевидна регулярность оператора Гаммерштейна

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s) f[s, x(s)]\, ds$$

как оператора из $L_\alpha$ в $L_\beta$, если оператор суперпозиции $\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)]$ действует из $L_\alpha$ в $L_\gamma$, а линейный интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ действует из $L_\gamma$ в $L_\beta$ и регулярен.

**18.6. Специальные примеры.** В § 4 было показано, что для линейных интегральных операторов непрерывность автоматически вытекает из того факта, что оператор действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. В предыдущем параграфе аналогичные утверждения были доказаны для оператора суперпозиции. К сожалению, оператор Урысона (даже с неотрицательным ядром), который действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, может не обладать свойством непрерывности. Приведем соответствующий пример.

Определим неотрицательную и четную по $u$ функцию $K_1(t, s, u)$ $(t, s \in [0, 1], \ -\infty < u < \infty)$ равенством

$$K_1(t, s, u) = \begin{cases} (2 - 2^n |u|) k_n(t) + (2^n |u| - 1) k_{n-1}(t), \\ \qquad\qquad \text{если } \dfrac{1}{2^n} < |u| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, \qquad \text{если } |u| = 0 \text{ или } |u| \geqslant 1, \end{cases} \tag{18.33}$$

где

$$k_0(t) \equiv 0,$$

$$k_n(t) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{если } t < \dfrac{1}{2^n} \text{ или } t \geqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{18.34}$$

Функция $K_1(t, s, u)$ очевидным образом удовлетворяет условиям Каратеодори. Покажем, что оператор

$$A_1 x(t) = \int_0^1 K_1[t, s, x(s)]\, ds \tag{18.35}$$

преобразует каждую измеримую функцию $x(s)$ в суммируемую.

Введем в рассмотрение множества

$$D_n = \left\{ s\colon \frac{1}{2^n} < |x(s)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{18.36}$$

$$D_0 = \{s\colon x(s) = 0\}.$$

Тогда

$$A_1 x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} K_1[t, s, x(s)]\, ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} [(2 - 2^n |x(s)|) k_n(t) + (2^n |x(s)| - 1) k_{n-1}(t)]\, ds. \tag{18.37}$$

Мы получили представление для $A_1x(t)$ в виде суммы ряда с неотрицательными членами. Поэтому

$$\int_0^1 A_1x(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left\{ \int_{D_n} [(2-2^n|x(s)|)\,k_n(t) + (2^n|x(s)|-1)\,k_{n-1}(t)]\,ds \right\} dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} \left\{ \int_0^1 [(2-2^n|x(s)|)\,k_n(t) + (2^n|x(s)|-1)\,k_{n-1}(t)]\,dt \right\} ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D_n} \{2-2^n|x(s)| + 2^n|x(s)| - 1\}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mes} D_n.$$

Значит, функция $A_1x(t)$ суммируема.

В частности, $A_1$ можно рассматривать как оператор, действующий из любого $L_\alpha$ в $L_1$. Этот оператор нулевую функцию преобразует в нулевую, а каждую функцию $x(s)$, удовлетворяющую неравенствам $0 < x(s) < 1$, в такую функцию $A_1x$, что $\|A_1x\|_1 = 1$. Поэтому оператор $A_1$ разрывен в нулевой точке пространства $L_\alpha$.

Приведем пример нелинейного оператора Урысона с неотрицательным ядром, который не обладает свойством регулярности.

Определим ядро $K_2(t, s, u)$ $(t, s \in [0, 1],\ -\infty < u < \infty)$ равенством

$$K_2(t, s, u) = \begin{cases} (2-2^n|u|)\dfrac{k_n(t)}{n} + (2^n|u|-1)\dfrac{k_{n-1}(t)}{n-1}, & \\ \qquad\qquad \text{если } \dfrac{1}{2^n} < |u| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}, & \\ 0, \qquad \text{если } u = 0 \text{ или } |u| \geqslant 1, & \end{cases} \tag{18.38}$$

где $k_n(t)$ — функции (18.34). Это ядро удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant K_2(t, s, u) \leqslant K_1(t, s, u), \tag{18.39}$$

где $K_1(t, s, u)$ — ядро (18.33). Поэтому оператор

$$A_2x(t) = \int_0^1 K_2[t, s, x(s)]\,ds \tag{18.40}$$

действует из каждого $L_\alpha$ в $L_1$.

Пусть $x(s)$ — произвольная функция из $L_\alpha$, а $D_n$ — множества (18.36). Через $F_n$ будем обозначать множество точек $\{t, s\}$ квадрата

$0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, у которых вторая координата $s$ принадлежит $D_n$. Для любого множества $Q$ квадрата $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$ выполнено неравенство

$$\int_{Q \cap F_n}\int \left[(2 - 2^n |x(s)|)\frac{k_n(t)}{n} + (2^n |x(s)| - 1)\frac{k_{n-1}(t)}{n-1}\right] ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n-1}\int_{Q \cap F_n}\int [k_n(t) + k_{n-1}(t)]\, ds\,dt \leqslant \frac{2}{n-1}\operatorname{mes} D_n$$

и, следовательно, при каждом $l$

$$\int_Q\int K_2[t, s, x(s)]\, ds\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\int_{Q \cap F_n}\int K_2[t, s, x(s)]\, ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{l}\int_{Q \cap F_n}\int K_2[t, s, x(s)]\, ds\,dt + \frac{2}{l}\sum_{n=l+1}^{\infty}\operatorname{mes} D_n.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда при $l \geqslant \frac{4}{\varepsilon}$

$$\int_Q\int K_2[t, s, x(s)]\, ds\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{l}\int_Q\int [k_n(t) + k_{n-1}(t)]\, ds\,dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому существует такое $\delta > 0$, что из $\operatorname{mes} Q < \delta$ вытекает неравенство

$$\int_Q\int K_2[t, s, x(s)]\, ds\,dt < \varepsilon. \tag{18.41}$$

Подчеркнем, что $\delta$ выбирается по числу $\varepsilon$ независимо от функций $x(s)$. Иначе говоря, мы показали, что оператор

$$\mathfrak{K}_2^0[x(s)] = K_2[t, s, x(s)]$$

преобразует все пространство $L_\alpha$ в множество функций двух переменных, имеющих равностепенно абсолютно непрерывные нормы в $L_1$.

Пусть последовательность $x_n(s) \in L_\alpha$ сходится к $x_0(s)$. Последовательность $\mathfrak{K}_2^0[x_n(s)]$ сходится к $\mathfrak{K}_2^0[x_0(s)]$ по мере. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1 |K_2[t, s, x_n(s)] - K_2[t, s, x_0(s)]|\, ds\,dt = 0.$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \| A_2x_n(t) - A_2x_0(t) \|_1 = 0.$$

Таким образом, $A_2$ непрерывен как оператор из $L_\alpha$ в $L_1$. В то же время $A_2$ не обладает свойством регулярности. Это очевидно, так как

$$\int_0^1 \int_0^1 K[t, s, u_0(t, s)]\, ds\, dt = \infty,$$

где

$$u_0(t, s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

**18.7. Операторы Урысона со значениями в пространстве ограниченных функций.** Теорема 18.6. *Пусть функция* $K(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,\ s \in \Omega,\ -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть выполнены условия:*

а) *существует такое множество* $\Omega_0^* \subset \Omega^*$ *полной меры, что для каждого множества* $\mathfrak{M}$ *функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами в* $L_\alpha$ *интегралы*

$$Ax(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, ds \quad (t \in \Omega_0^*) \tag{18.42}$$

*равностепенно абсолютно непрерывны;*

б) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *и для каждого* $R$ *существует такое число* $\eta$, *что*

$$\int_\Omega \sup_{|u_1|,\ |u_2| \leqslant R,\ |u_1 - u_2| \leqslant \eta} |K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)|\, ds < \varepsilon \qquad (18.43)$$

$$(t \in \Omega_0^*).$$

*Тогда нелинейный интегральный оператор* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$ *и непрерывен.*

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, отметим, что для линейных интегральных операторов, действующих из $L_\alpha$ в $L_0$, условия теоремы являются не только достаточными, но и необходимыми. Действительно, интегральный оператор с ядром $K(t, s)$ действует из $L_\alpha$ в $L_0$ в том и только том случае (см. теорему 6.2), если

$$\varphi(t) = \|K(t, s)\|_{1-\alpha} \in L_0.$$

Поэтому для каждого множества $D \subset \Omega$ и для каждой функции $x(s) \in L_\alpha$ выполняется неравенство

$$\left| \int_D K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \leqslant \varphi(t) \| P_D x \|_\alpha,$$

из которого следует условие а). Условие б) очевидно.

Доказательство теоремы 18.6. Из условия а) вытекает, что на каждой функции $x(s) \in L_\alpha$ оператор $A$ определен и его значение принадлежит пространству $L_0$.

Пусть последовательность функций $x_n(s) \in L_\alpha$ сходится по норме к функции $x_0(s)$ и пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы при $\operatorname{mes} D < \delta$ выполнялись неравенства

$$\left\| \int_D K[t, s, x_n(s)]\, ds \right\|_0 < \varepsilon \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Выберем, далее, число $R$ так, чтобы мера каждого множества $\{s: |x_n(s)| \geqslant R\}$ не превосходила $\delta$.

Пусть $\eta$ — такое число, что при $|u_1 - u_2| \leqslant \eta$, $|u_1|$, $|u_2| \leqslant R$ выполняется неравенство (18.43). Выберем, наконец, число $n_0$ так, чтобы при $n \geqslant n_0$ выполнялись неравенства

$$\operatorname{mes} \{s: |x_n(s) - x_0(s)| \geqslant \eta\} < \delta.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ и $t \in \overset{*}{\Omega}_0$

$$|Ax(t) - Ax_0(t)| = \left| \int_\Omega \{K[t, s, x_n(s)] - K[t, s, x_0(s)]\}\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{\substack{|x_n(s) - x_0(s)| \leqslant \eta \\ |x_n(s)|,\ |x_0(s)| \leqslant R}} \{K[t, s, x_n(s)] - K(t, s, x_0(s)]\}\, ds \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{\substack{|x_n(s) - x_0(s)| > \eta, \\ |x_n(s)|,\ |x_0(s)| \leqslant R}} \{K[t, s, x_n(s)] - K[t, s, x_0(s)]\}\, ds \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{|x_n(s)| \geqslant R} K[t, s, x_n(s)]\, ds \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{|x_0(s)| \geqslant R} K[t, s, x_0(s)]\, ds \right| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n(t) - Ax_0(t)\|_0 = 0.$$

Теорема доказана.

Условие б) теоремы 18.6 означает «интегральную непрерывность» по $u$ ядра $K(t, s, u)$. Достаточные признаки выполнения условия а) можно формулировать, например, в виде неравенства

$$|K(t, s, u)| \leqslant K_0(t, s) + \sum_{i=1}^{n} K_i(t, s)|u|^{\delta_i} + b|u|^{\frac{1}{\alpha}},$$

где $K_0(t, s)$ такая функция, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0} \left\| \int_D K_0(t, s)\,ds \right\|_0 = 0,$$

показатели $\delta_i$ принадлежат интервалу $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$, а функции $K_i(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$\psi_i(t) = \int_\Omega |K_i(t, s)|^{\frac{1}{1-\delta_i\alpha}} ds \in L_0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Очевидно, оператор Урысона действует из $L_0$ в $L_0$ и непрерывен, если ядро $K(t, s, u)$ непрерывно по совокупности переменных (а множества $\Omega$ и $\Omega^*$ ограничены и замкнуты). Читатель без труда сформулирует различные более общие утверждения (легко сформулировать, например, аналог теоремы 18.6). Отметим еще, что при изучении оператора Урысона на шаре $\|x\|_0 \leqslant a$ играют роль лишь значения функции $K(t, s, u)$ при $|u| \leqslant a$.

**18.8. О равномерной непрерывности оператора Урысона.** Отметим сразу же, что непрерывные операторы Урысона в общем случае не обладают свойством равномерной непрерывности на ограниченных множествах. Соответствующие примеры читатель легко построит, используя, например, рассуждения п. 17.6.

Пусть оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \alpha, \beta < \infty$. Допустим, что $K(t, s, u)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leqslant \\ \leqslant R(t, s, u)\,|u_1 - u_2|^\delta \quad (|u_1|, |u_2| \leqslant u), \qquad (18.44)$$

где $0 < \delta \leqslant 1$, $\alpha\delta < 1$, а $R(t, s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, причем оператор

$$R^{|1-\alpha\delta|}x(t) = \int\limits_\Omega |R[t, s, x(s)]|^{\frac{1}{1-\alpha\delta}}\,ds \qquad (18.45)$$

*действует из* $L_\alpha$ *в* $L_{\frac{\beta}{1-\alpha\delta}}$ *и ограничен на каждом шаре* $\|x\|_\alpha \leqslant \rho$.

Тогда из неравенства Гёльдера вытекает, что

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| \leqslant \int\limits_\Omega |K[t, s, x_1(s)] - K[t, s, x_2(s)]|\,ds \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega R\{t, s, \max[|x_1(s)|, |x_2(s)|]\}\,|x_1(s) - x_2(s)|^\delta\,ds \leqslant \\ \leqslant \left\{\int\limits_\Omega |R\{t, s, \max[|x_1(s)|, |x_2(s)|]\}|^{\frac{1}{1-\alpha\delta}}\,ds\right\}^{1-\alpha\delta} \|x_1 - x_2\|_\alpha^\delta$$

и поэтому

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_\beta \leqslant k(\rho)\,\|x_1 - x_2\|_\alpha^\delta, \qquad (18.46)$$

где

$$k(\rho) = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 2\rho} \|R^{|1-\alpha\delta|}x\|_{\frac{\beta}{1-\alpha\delta}}.$$

Следовательно, из (18.44) вытекает, что оператор Урысона $A$ не только равномерно непрерывен на каждом шаре, но и удовлетворяет условию Гёльдера.

Условие Гёльдера (18.44) можно заменить неравенством

$$|K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leqslant v(t)\,|u_1 - u_2|^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad (18.47)$$

где $v(t) \in L_\beta$, $\alpha \geqslant 1$.

Приведем в заключение один общий признак равномерной непрерывности оператора Урысона, доказательство которого можно провести аналогично доказательству теоремы 18.5

Теорема 18.7. *Пусть $A$ — регулярный оператор Урысона, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$* $(\alpha > 0,\ 0 < \beta \leqslant 1)$. *Пусть*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left\| \int_D K[t, s, x(s)]\, ds \right\|_\beta = 0. \qquad (18.48)$$

*Тогда оператор $A$ равномерно непрерывен на каждом шаре пространства $L_\alpha$.*

Обозначим через $L(A;$ *равн. непр.*$)$ множество таких точек $\{\alpha, \beta\}$, что $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и равномерно непрерывен на каждом шаре пространства $L_\alpha$. Из теорем 18.7 и 18.3 вытекает, что $\{\alpha, \beta\} \in L(A;$ *равн. непр.*$)$, если $\beta \in (0, 1]$ и если найдется такое $\alpha_1 > \alpha$, что $\{\alpha_1, \beta\} \in L(A;$ *рег.*$)$. В частности, все внутренние точки $L$-характеристики $L(A;$ *рег.*$)$ являются точками $L$-характеристики $L(A;$ *равн. непр.*$)$.

## § 19. Условия полной непрерывности операторов Урысона*)

**19.1. Постановка задачи.** Напомним, что нелинейный оператор $A$ вполне непрерывен, если он непрерывен и если он каждое ограниченное множество преобразует в компактное. В этом параграфе будут установлены достаточные признаки полной непрерывности оператора Урысона

$$Ax(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, ds, \qquad (19.1)$$

действующего из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Предполагается, что $K(t, s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Непрерывность $A$ в основных теоремах параграфа вытекает из уже доказанных утверждений. Поэтому основное внимание уделяется признакам компактности, т. е. признакам того, что $A$ преобразует каждое ограниченное множество в компактное.

---

*) Параграф написан по статьям М. А. Красносельского и Л. А. Ладыженского [1], М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [2—4], Е. И. Пустыльника [3], П. П. Забрейко [4], П. П. Забрейко и Е. И. Пустыльника [1]. См. также М. А. Красносельский [1, 7, 9], М. М. Вайнберг [6], М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий [2, 4—6], Я. Б. Рутицкий [2].

Лемма 19.1. *Пусть оператор Урысона* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *преобразует некоторый шар* $\|x - x_0\|_\alpha \leqslant r$ *пространства* $L_\alpha$, *где* $\alpha > 0$, *в множество функций, компактное в* $L_\beta$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

*Тогда оператор* $A$ *преобразует каждый шар пространства* $L_\alpha$ *в множество функций, компактное в* $L_\beta$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный оператор

$$A_1x(t) = \int_\Omega K_1[t, s, x(s)]\, ds,$$

где

$$K_1(t, s, u) = K[t, s, x_0(s) + u] - K[t, s, x_0(s)].$$

Значения оператора $A_1$ на шаре $\|x\|_\alpha \leqslant r$ образуют компактное в $L_\beta$ множество.

Рассмотрим шар $T = \{x: \|x\|_\alpha \leqslant R\}$, где $R$ — произвольное число. Обозначим через $n$ такое целое число, что $n^\alpha \geqslant R$. Тогда для каждой функции $x(s) \in T$ можно указать такое разбиение $\Omega$ на непересекающиеся множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$, что

$$\|P_{\Omega_i}x\|_\alpha \leqslant r \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Из равенства $K_1(t, s, 0) \equiv 0$ вытекает, что

$$A_1x(t) = \sum_{i=1}^{n} A_1P_{\Omega_i}x.$$

Это значит, что все функции $\frac{1}{n}A_1x(t)$ $(x \in T)$ принадлежат выпуклой оболочке значений оператора $A_1$ на шаре $\|x\|_\alpha \leqslant r$, которая также компактна.

Лемма доказана.

Эта лемма позволяет при исследовании полной непрерывности оператора Урысона (19.1) рассматривать его лишь на единичном шаре пространства $L_\alpha$.

В большинстве доказываемых ниже утверждений компактность множества значений оператора Урысона будет устанавливаться при помощи леммы 1.1. Иначе говоря, доказательство компактности будет распадаться на установление двух независимых фактов: во-первых, доказательство равностепенной абсолютной непрерывности норм значений оператора на единичном шаре и, во-вторых, доказательство компактности оператора $A$ по мере. При этом под компактностью оператора $A$ по мере мы понимаем компактность по мере множества его значений на каждом ограниченном множестве.

**19.2. Оператор Гаммерштейна.** Рассмотрим оператор

$$Ax(t)=\int_{\Omega} K(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{19.2}$$

Через $K$ и $\mathfrak{f}$, как и в предыдущем параграфе, будем обозначать операторы, определенные равенствами

$$Kx(t)=\int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{19.3}$$

$$\mathfrak{f}x(s)=f[s, x(s)]. \tag{19.4}$$

Следующее утверждение о полной непрерывности операторов Гаммерштейна вытекают из представления этих операторов в виде суперпозиции

$$A=K\mathfrak{f}. \tag{19.5}$$

Теорема 19.1. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ в $L_\gamma$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$, а оператор $K$ действует из $L_\gamma$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \beta < \infty)$. Пусть выполнено одно из условий*:

а) $\gamma > 0$; *оператор $K$ вполне непрерывен.*

б) $\gamma > 0$, $0 < \beta < \infty$; *оператор $K$ регулярен, оператор $\mathfrak{f}$ улучшающий.*

в) $\gamma = 0$, $\beta > 0$; *оператор $K$ регулярен.*

*Тогда оператор Гаммерштейна $A = K\mathfrak{f}$ — это вполне непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$.*

Доказательство. В случае а) утверждение теоремы очевидно.

В случае б) утверждение теоремы при $\gamma = 1$ вытекает из лемм 5.2 и 1.3. Если $\gamma < 1$, то можно провести, например, следующие рассуждения. Из теоремы 2.8 следует, что нормы значений оператора $A$ на единичном шаре пространства $L_\alpha$ равностепенно абсолютно непрерывны. Поэтому нужно лишь показать, что $A$ компактен по мере — эта компактность вытекает из леммы 5.1 (при $0<\beta\leqslant 1$) или из теоремы 5.8 (при $\beta>1$).

В случае в) непрерывность оператора $A$ доказана в п. 18.2. Компактность следует из полной непрерывности линейного регулярного интегрального оператора, действующего из $L_0$ в $L_\beta$ ($\beta>0$) (см. п. 5.2).

Теорема доказана.

При применении теоремы 19.1 можно использовать установленные в гл. 2 признаки регулярности, компактности по мере, полной непрерывности линейного интегрального оператора $K$ и установленные в § 17 теоремы об операторе суперпозиции $\mathfrak{f}$. Отметим также, что при исследовании компактности конкретных операторов Гаммерштейна могут быть использованы соображения, изложенные в конце п. 18.2 при анализе признаков непрерывности этих операторов.

**19.3. Полная непрерывность регулярных операторов Урысона, действующих из $L_0$ в $L_\beta$ при $\beta\in(0, 1]$.** Изучение полной непрерывности операторов Урысона мы начинаем с исследования операторов, действующих из $L_0$ в $L_\beta$. Это оправдывается тем, что к этому частному случаю можно свести исследование вопроса о полной непрерывности операторов Урысона, действующих в $L_\beta$ из других пространств $L_\alpha$.

Теорема 19.2. *Пусть функция $K(t, s, u)$ ($t\in\Omega^*$, $s\in\Omega$, $|u|\leqslant a$) удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из шара $\|x\|_0\leqslant a$ в $L_\beta$, где $\beta\in(0, 1]$, и регулярен.*

*Тогда оператор $A$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Непрерывность вытекает из теоремы 18.5.

Для доказательства полной непрерывности покажем, что функции $Ax$ ($\|x\|_0\leqslant a$) образуют компактное в $L_\beta$ множество.

Из условий теоремы вытекает, что оператор

$$\mathfrak{K}u(t, s)=K[t, s, u(t, s)]$$

действует из $L_0(\Omega^*\times\Omega)$ в $M_\beta(\Omega^*\times\Omega)$. Поэтому (см. лемму 17.2) существует такая измеримая по совокупности переменных функция $R(t, s)$, что

$$|K(t, s, u)|\leqslant R(t, s) \quad (|u|\leqslant a), \tag{19.6}$$

причем

$$\int_{\Omega^*}\left[\int_{\Omega} R(t,\ s)\,ds\right]^{\frac{1}{\beta}} dt < \infty, \tag{19.7}$$

т. е. $R(t,\ s) \in M_\beta(\Omega^* \times \Omega)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из абсолютной непрерывности интеграла $\int\limits_{\Omega^*\times\Omega}\int R(t,\ s)\,ds\,dt$ следует существование такого $\delta > 0$, что для любого множества $E \subset \Omega^* \times \Omega$ из $\operatorname{mes} E < \delta$ вытекает неравенство

$$\int_E\int |K[t,\ s,\ x(s)]|\,ds\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\|x\|_0 \leqslant a). \tag{19.8}$$

В силу леммы 17.1 можно указать замкнутое множество $Q_0 \subset \Omega^* \times \Omega$, мера которого удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{mes}(\Omega^* \times \Omega \setminus Q_0) < \delta, \tag{19.9}$$

и такое, что функция $K(t,\ s,\ u)$ непрерывна по совокупности переменных $t,\ s,\ u$ при $\{t,\ s\} \in Q_0$, $|u| \leqslant a$.

Пусть

$$b = \max_{|u| \leqslant a,\ \{t,\ s\} \in Q_0} |K(t,\ s,\ u)|.$$

Пусть $Q_1$ — открытое подмножество множества $\Omega^* \times \Omega$, содержащее $Q_0$, и такое, что

$$\operatorname{mes}(Q_1 \setminus Q_0) < \frac{\varepsilon}{2b}. \tag{19.10}$$

Определим при $\{t, s\} \in \Omega^* \times \Omega$, $|u| \leqslant a$ непрерывную по совокупности переменных функцию $K_1(t,\ s,\ u)$, положив ее равной $K(t,\ s,\ u)$ при $\{t,\ s\} \in Q_0$, равной нулю при $\{t,\ s\} \bar{\in} Q_1$, а затем продолжив ее по непрерывности так, чтобы выполнялось равенство

$$\max_{\{t,\ s\} \in \Omega^*\times\Omega,\ |u| \leqslant a} |K_1(t,\ s,\ u)| = b. \tag{19.11}$$

Оператор Урысона $A_1$ с ядром $K_1(t,\ s,\ u)$,

$$A_1 x(t) = \int_\Omega K_1[t,\ s,\ x(s)]\,ds,$$

определен на шаре $\|x\|_0 \leqslant a$ пространства $L_0$ и действует в пространство $C$ непрерывных на $\Omega^*$ функций. Так как функция $K_1(t, s, u)$ равномерно непрерывна по совокупности переменных $t, s, u$ при $\{t, s\} \in \Omega^* \times \Omega$, $|u| \leqslant a$, то множество функций $A_1x(t)$ ($\|x\|_0 \leqslant a$) ограничено по норме пространства $C$ и его функции равностепенно непрерывны. По теореме Арцела это множество компактно в пространстве $C$ и тем более в пространстве $L_1$.

Покажем, что

$$\|Ax - A_1x\|_1 < \varepsilon \qquad (\|x\|_0 \leqslant a).$$

Отсюда будет вытекать, что множество функций $Ax(t)$ ($\|x\|_0 \leqslant a$) компактно в $L_1$, так как $\varepsilon$ произвольно.

Очевидно, что

$$\|Ax - A_1x\|_1 \leqslant \iint_{\Omega^*\times\Omega} |K[t, s, x(s)] - K_1[t, s, x(s)]|\,ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{Q_0} |K[t, s, x(s)] - K_1[t, s, x(s)]|\,ds\,dt +$$

$$+ \iint_{(\Omega^*\times\Omega)\setminus Q_0} |K[t, s, x(s)]|\,ds\,dt +$$

$$+ \iint_{(\Omega^*\times\Omega)\setminus Q_0} |K_1[t, s, x(s)]|\,ds\,dt.$$

Первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое в силу (19.8) и (19.9) удовлетворяет неравенству

$$\iint_{(\Omega^*\times\Omega)\setminus Q_0} |K[t, s, x(s)]|\,ds\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Третье слагаемое оценивается при помощи (19.10) и (19.11):

$$\iint_{(\Omega^*\times\Omega)\setminus Q_0} |K_1[t, s, x(s)]|\,ds\,dt =$$

$$= \iint_{Q_1\setminus Q_0} |K_1[t, s, x(s)]|\,ds\,dt < b\frac{\varepsilon}{2b} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из компактности множества функций $Ax(t)$ ($\|x\|_0 \leqslant a$) в $L_1$ вытекает компактность этого множества по мере. Из (19.6) следует, что

$$|Ax(t)| \leqslant \varphi(t) = \int\limits_{\Omega} R(t, s)\,ds \qquad (t \in \Omega^*).$$

Так как $\varphi(t) \in L_\beta$, то нормы в $L_\beta$ функций $Ax(t)$ равностепенно абсолютно непрерывны. Поэтому множество функций $Ax(t)$ ($\|x(t)\|_0 \leqslant a$) компактно в $L_\beta$.

Теорема доказана.

При применениях теоремы 19.2 следует иметь в виду, что предположение о регулярности действующих из $L_0$ в $L_\beta$ операторов Урысона $A$ полностью эквивалентно оценке (19.6), где $R(t, s) \in M_\beta$.

**19.4. Полная непрерывность регулярных операторов Урысона, действующих из $L_\alpha$ в $L_\beta$ при $\alpha > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$.**

Теорема 19.3. *Пусть функция $K(t, s, u)$ ($t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$) удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\alpha > 0$, $0 < \beta \leqslant 1$, и регулярен. Пусть*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left\| \int\limits_D K[t, s, x(s)]\,ds \right\|_\beta = 0. \tag{19.12}$$

*Тогда оператор Урысона $A$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Непрерывность оператора $A$ вытекает из теоремы 18.5. Покажем, что значения $Ax$ оператора $A$ на шаре $\|x\|_\alpha \leqslant 1$ лежат в компактном множестве пространства $L_\beta$.

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. В силу условий теоремы можно выбрать такое число $\delta > 0$, что при $\operatorname{mes} D < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left\| \int\limits_D K[t, s, x(s)]\,ds \right\|_\beta < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19.13}$$

Из теоремы 19.2 вытекает, что множество функций $Ax(t)$ ($\|x\|_0 \leqslant \delta^{-\alpha}$) компактно в $L_\beta$. Покажем, что для каждой функции $x$ из шара $\|x\|_\alpha \leqslant 1$ можно указать такую функцию $Tx(t)$ из шара $\|x\|_0 \leqslant \delta^{-\alpha}$, что

$$\|Ax - ATx\|_\beta < \varepsilon. \tag{19.14}$$

Отсюда и будет следовать компактность значений оператора на шаре $\|x\|_\alpha \leqslant 1$.

Пусть $\|x\|_\alpha \leqslant 1$. Определим функцию $Tx(t)$ равенством

$$Tx(s) = \min\left\{|x(s)|,\ \delta^{-\alpha}\right\} \operatorname{sign} x(s).$$

Очевидно, $\|Tx(s)\|_\alpha \leqslant 1$ и

$$\operatorname{mes}\{s : x(s) \neq Tx(s)\} \leqslant \delta.$$

Поэтому (в силу (19.13))

$$\|Ax - ATx\|_\beta = \left\| \int\limits_{x(s) \neq Tx(s)} \{K[t, s, x(s)] - \right.$$

$$\left. - K[t, s, Tx(s)]\}\, ds \right\|_\beta \leqslant \left\| \int\limits_{x(s) \neq Tx(s)} K[t, s, x(s)]\, ds \right\|_\beta +$$

$$+ \left\| \int\limits_{x(s) \neq Tx(s)} K[t, s, Tx(s)]\, ds \right\|_\beta < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что условие (19.12) можно заменить соотношением

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant a} \left\| \int\limits_D K[t, s, x(s)]\, ds \right\|_\beta = 0, \tag{19.15}$$

где $a$ — любое положительное число.

Допустим, что ядро $K(t, s, u)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$K(t, s, 0) \equiv 0 \qquad (t \in \Omega^*,\ s \in \Omega). \tag{19.16}$$

Тогда условие (19.12) можно записать в виде

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \|AP_D x\|_\beta = 0. \tag{19.17}$$

Напомним, что (19.17) всегда выполняется для вполне непрерывных линейных операторов, действующих из $L_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, в $L_\beta$, $0 < \beta \leqslant 1$ (см. теорему 3.3). Иначе говоря, достаточные условия полной непрерывности, содержащиеся в теореме 19.3, в случае линейных интегральных операторов являются необходимыми (при $\alpha < 1$).

Докажем, что в условиях теоремы 19.3 оператор Урысона $A$ обладает важным дополнительным свойством — *он преобразует каждую ограниченную по норме и сходящуюся к $x_0 \in L_\alpha$ по мере последовательность $x_n \in L_\alpha$ в последовательность $Ax_n$, сходящуюся в $L_\beta$ к $Ax_0$.*

Без ограничения общности можно считать, что $\|x_n\|_\alpha \leqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и что $K(t, s, 0) \equiv 0$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\delta$ такое положительное число, что из $\operatorname{mes} D < \delta$ вытекают неравенства

$$\sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left\| \int_D K[t, s, x(s)]\, ds \right\|_\beta < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Положим $h = \delta^{-\alpha}$. Тогда $\operatorname{mes} \Omega_n \leqslant \delta$, где

$$\Omega_n = \{s: |x_n(s)| \geqslant h\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $y_n(s) = \min\{|x_n(s)|, h\} \operatorname{sign} x_n(s)$ сходится к $y_0(s) = \min\{|x_0(s)|, h\} \operatorname{sign} x_0(s)$ по норме $L_\alpha$. Так как оператор $A$ в силу теоремы 19.3 непрерывен, то найдется такое $n_0$, что при $n \geqslant n_0$

$$\|Ay_n - Ay_0\|_\beta < \frac{\varepsilon}{5}.$$

При этих значениях $n$

$$\|Ax_n - Ax_0\|_\beta \leqslant \left\| \int_\Omega \{K[t, s, y_n(s)] - K[t, s, y_0(s)]\}\, ds \right\|_\beta +$$

$$+ \left\| \int_{\Omega_n} K[t, s, x_n(s)]\, ds \right\|_\beta + \left\| \int_{\Omega_0} K[t, s, x_0(s)]\, ds \right\|_\beta +$$

$$+ \left\| \int_{\Omega_n} K[t, s, y_n(s)]\, ds \right\|_\beta + \left\| \int_{\Omega_0} K[t, s, y_0(s)]\, ds \right\|_\beta \leqslant$$

$$\leqslant \|Ay_n - Ay_0\|_\beta + \frac{4}{5}\varepsilon \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\|Ax_n - Ax_0\|_\beta \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказанное утверждение полностью обратимо: если оператор Урысона преобразует каждую ограниченную по норме и сходящуюся по мере к $x_0 \in L_\alpha$ последовательность $x_n \in L_\alpha$ в последовательность $Ax_n$, сходящуюся в $L_\beta$ к $Ax_0$ по норме, то выполнено условие (19.12).

Доказательство проще всего провести от противного. Допустим, что существуют такая последовательность функций $x_n(s) \in L_\alpha$ и такая последовательность множеств $D_n \subset \Omega$, что $\| x_n(s) \|_\alpha \leqslant 1$, $\operatorname{mes} D_n \to 0$ и

$$\left\| \int_{D_n} K[t, s, x_n(s)]\, ds \right\|_\beta \geqslant \varepsilon_0 > 0. \tag{19.18}$$

Последовательность функций $P_{D_n} x_n$ сходится по мере к функции $\theta$, тождественно равной нулю. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \| AP_{D_n} x_n - A\theta \|_\beta = 0.$$

Из леммы 18.1 вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \| AP_{D_n} \theta \|_\beta = 0.$$

Поэтому из равенства

$$\int_{D_n} K[t, s, x_n(s)]\, ds = AP_{D_n} x_n - A\theta + AP_{D_n}\theta$$

следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \int_{D_n} K[t, s, x_n(s)]\, ds \right\|_\beta = 0,$$

а это противоречит (19.18).

**19.5. Частные признаки полной непрерывности.** Общая теорема 19.3 мало удобна для исследования конкретных операторов Урысона. Наибольшие трудности возникают при проверке регулярности и условия (19.12).

Как правило, проверка этих условий сводится к установлению оценок вида

$$|K(t, s, u)| \leqslant R(t, s, u) \qquad (t \in \Omega^*, \quad s \in \Omega, \quad -\infty < u < \infty). \tag{19.19}$$

где $R(t, s, u)$ определяет оператор Урысона

$$Bx(t) = \int_{\Omega} R[t, s, x(s)]\, ds, \tag{19.20}$$

исследование которого «более просто». Как нам уже известно (см. п. 18.15), из регулярности оператора (19.20) вытекает регулярность оператора Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$. Очевидно, условие (19.12) выполнено для оператора $A$, если оно выполнено для оператора $B$.

Нами доказана

Теорема 19.4. *Пусть выполнено неравенство* (19.19) *и пусть оператор* (19.20) *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ $(0 < \alpha < \infty)$, *регулярен и удовлетворяет условию* (19.12).

*Тогда оператор Урысона* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и вполне непрерывен.*

Из этой теоремы вытекает более частный, но более удобный признак полной непрерывности.

Теорема 19.5. *Пусть функция* $K(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,$ $s \in \Omega,$ $-\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть*

$$|K(t, s, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} R_i(t, s) f_i(s, u)$$

$$(t \in \Omega^*, \quad s \in \Omega, \quad -\infty < u < \infty), \tag{19.21}$$

*где функции* $f_i(s, u)$ *определяют операторы суперпозиции* $\mathfrak{f}_i$, *действующие из* $L_\alpha (\alpha > 0)$ *в* $L_{\gamma_i}$, *а неотрицательные ядра* $R_i(t, s)$ *определяют линейные интегральные операторы, действующие из* $L_{\gamma_i}$ *в* $L_\beta (0 < \beta \leqslant 1)$. *Пусть при каждом* $i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *выполнено одно из условий*:

а) $0 < \gamma_i \leqslant 1$; *оператор* $\mathfrak{f}_i$ *улучшающий*;

б) $0 < \gamma_i < 1$; *оператор* $R_i$ *вполне непрерывен.*

*Тогда оператор Урысона* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и вполне непрерывен.*

Для доказательства достаточно исследовать операторы Гаммерштейна, порожденные каждым слагаемым правой части неравенства (19.21). Иначе говоря, достаточно показать, что каждый оператор Гаммерштейна

$$B_i x(t) = \int_\Omega R_i(t, s) f_i[s, x(s)]\, ds \tag{19.22}$$

регулярен и удовлетворяет условию (19.12).

Регулярность операторов (19.22) в условиях теоремы 19.5 очевидна.

Для доказательства соотношения (19.12) отметим вначале очевидную оценку

$$\left\| \int_D R_i(t, s) f_i[s, x(s)]\, ds \right\|_\beta \leqslant \| R_i P_D \|_{\gamma_i \to \beta} \| P_D \mathfrak{f}_i x \|_{\gamma_i}, \tag{19.23}$$

где

$$R_i x(t) = \int_D R_i(t, s)\, x(s)\, ds,$$

$$\mathfrak{f}_i x(s) = f_i[s, x(s)].$$

Если оператор $\mathfrak{f}_i$ улучшающий, то (см. п. 17.7)

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \| P_D \mathfrak{f}_i x \|_{\gamma_i} = 0,$$

и из (19.23) следует (19.12). Если $\gamma_i < 1$, а оператор $R_i$ вполне непрерывен, то в силу теоремы 3.3

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \| R_i P_D \|_{\gamma_i \to \beta} = 0,$$

и снова из (19.23) вытекает (19.12).

Теорема доказана.

В заключение пункта приведем еще один признак полной непрерывности, носящий специальный характер.

Введем обозначение

$$h(s, u) = \int_{\Omega^*} |K(t, s, u)|\, dt \tag{19.24}$$

и обозначим через $\mathfrak{h}$ оператор суперпозиции, порожденный этой функцией:

$$\mathfrak{h} x(s) = h[s, x(s)]. \tag{19.25}$$

Теорема 19.6. *Пусть оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0<\alpha<\infty,$ $0<\beta\leqslant 1)$ и регулярен. Пусть*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{\|x\|_\alpha\leqslant 1}\|P_D A x\|_\beta = 0. \tag{19.26}$$

*Пусть, наконец, оператор суперпозиции $\mathfrak{h}$, порожденный функцией* (19.24) *и действующий из $L_\alpha$ в $L_1$, является улучшающим.*

*Тогда оператор Урысона $A$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Из леммы 1.1 вытекает, что достаточно установить полную непрерывность $A$ как оператора из $L_\alpha$ в $L_1$. Для этого воспользуемся очевидной оценкой

$$\int_{\Omega^*}\left|\int_D K[t, s, x(s)]\,ds\right|dt \leqslant \int_D\left[\int_{\Omega^*}|K[t, s, x(s)]|\,dt\right]ds,$$

из которой, так как оператор $\mathfrak{h}$ улучшающий, вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{\|x\|_\alpha\leqslant 1}\left\|\int_D K[t, s, x(s)]\,ds\right\|_1 = 0.$$

Остается сослаться на теорему 19.3.

Теорема доказана.

Напомним, что условие (19.26) автоматически выполнено, если $A$ ограничен на единичном шаре пространства $L_\alpha$ как оператор со значениями в $L_{\beta_1}$, где $\beta_1<\beta$.

**19.6. Об $L$-характеристиках операторов Урысона.** Авторам неизвестны никакие общие утверждения о структуре $L$-характеристики $L(A;$ *вп. непр.*) операторов Урысона. Здесь положение такое же, как и в вопросе об $L$-характеристиках $L(A;$ *непр.*).

Теорема 19.7. *Пусть оператор Урысона $A$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0<\alpha<\infty$, $0<\beta\leqslant 1$, и регулярен.*

*Тогда $A$ вполне непрерывен как оператор из каждого $L_{\alpha_1}$, где $\alpha_1<\alpha$ в $L_\beta$.*

Доказательство. Функции из единичного шара пространства $L_{\alpha_1}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные нормы в пространстве $L_\alpha$. Поэтому из теоремы 18.4 вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0} \sup_{\|x\|_{\alpha_1}\leqslant 1} \left\| \int_D K[t, s, x(s)]\,ds \right\|_\beta = 0.$$

Остается сослаться на теорему 19.3.

Теорема доказана.

Из этой теоремы, в частности, следует, что внутренние точки $L$-характеристики $L(A;\ рег.)$ оператора Урысона $A$ принадлежат $L$-характеристике $L(A;\ вп.\ непр.)$. Более того, теорема 19.7 означает, что точка $\{\alpha_0, \beta_0\}$ $(0<\alpha_0<\infty,\ 0<\beta_0\leqslant 1)$ принадлежит $L$-характеристике $L(A;\ вп.\ непр.)$, если $L$-характеристика $L(A;\ рег.)$ содержит хотя бы одну точку $\{\alpha, \beta_0\}$, где $\alpha_0<\alpha$.

Возникает естественный вопрос о том, не вытекает ли из $\{\alpha_0, \beta_0\}\in L(A;\ рег.)$ $(0<\alpha_0<\infty,\ 0<\beta_0\leqslant 1)$, что каждая точка $\{\alpha_0, \beta\}$ принадлежит $L(A;\ вп.\ непр.)$, если $\beta>\beta_0$. В общем случае ответ на этот вопрос отрицателен (предоставляем читателю придумать примеры). Ответ становится положительным, если $A$ компактен по мере на $L_{\alpha_0}$, например, оператор $A$ в силу теоремы 19.6 компактен по мере, если оператор (19.25) действует из $L_\alpha$ в $L_1$ и является улучшающим оператором).

**19.7. Ослабление особенностей.** Продолжим изучение оператора Урысона

$$Ax(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\,ds, \tag{19.27}$$

действующего из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0\leqslant\alpha,\ \beta<\infty)$. Представляет интерес вопрос о том, как изменятся свойства оператора (19.27), если несколько «ослабить» или «усилить» особенности его ядра.

Пусть функция $\Phi(t, s, u)$ определена при $t\in\Omega^*$, $s\in\Omega$, $-\infty<u<\infty$. Через $B$ будем обозначать интегральный оператор с ядром $K(t, s, u)\,\Phi(t, s, u)$:

$$Bx(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\,\Phi[t, s, x(s)]\,ds. \tag{19.28}$$

Лемма 19.2. *Пусть интегральный оператор Урысона с неотрицательным ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1)$ и компактен. Пусть функция $\Phi(t, s, u)$ $(t\in\Omega^*, s\in\Omega, -\infty<u<\infty)$ ограничена и равномерно непрерывна по совокупности переменных $t\in\Omega^*$, $s\in\Omega$ равномерно относительно $u$.*

*Тогда оператор* (19.28) *также действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ *и компактен.*

Доказательство. Пусть $\Phi_0(t, s, u)$ — характеристическая функция некоторого множества $\Omega_0^* \times \Omega_0 \times R$, где $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0^* \subset \Omega^*$, $R \subset (-\infty, +\infty)$. Покажем, что оператор

$$B_0 x(t) = \int\limits_\Omega K[t, s, x(s)]\,\Phi_0[t, s, x(s)]\,ds$$

компактен. Без ограничения общности можно считать, что $K(t, s, 0) \equiv 0$. Если ввести в рассмотрение операторы

$$Qv(t) = \begin{cases} v(t) & \text{при } t \in \Omega_0^*, \\ 0 & \text{при } t \,\overline{\in}\, \Omega_0^*, \end{cases}$$

$$Pu(s) = \begin{cases} u(s) & \text{при } s \in \Omega_0, \quad u(s) \in R, \\ 0 & \text{при прочих } s, \end{cases}$$

то $B_0 = QAP$. Оператор $P$ ограничен в пространстве $L_\alpha$, $A$ компактен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$, а линейный оператор $Q$ непрерывен в пространстве $L_\beta$. Следовательно, оператор $B_0$ также компактен.

Пусть функция $\Phi(t, s, u)$ удовлетворяет условиям леммы, а $\varepsilon$ — заданное положительное число. Разобьем множества $\Omega$ и $\Omega^*$ на такие непересекающиеся части

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m, \quad \Omega^* = \Omega_1^* \cup \ldots \cup \Omega_n^*,$$

что при каждых фиксированных $i$, $j$

$$|\Phi(t', s', u) - \Phi(t'', s'', u)| < \varepsilon \quad (t', t'' \in \Omega_i^*;\ s', s'' \in \Omega_j).$$

Зафиксируем в каждом из множеств $\Omega_i^*$ и в каждом из множеств $\Omega_j$ по точке $t_i$, $s_j$.

Пусть $|\Phi(t, s, u)| \leqslant b$ и $k_0 = [2b\varepsilon^{-1}] + 1$. Положим

$$\varphi_k = -b + k\varepsilon \quad (k = 0, 1, \ldots, k_0).$$

Введем в рассмотрение множества

$$R_{ijk} = \{u\colon \varphi_{k-1} \leqslant \Phi(t_i, s_j, u) < \varphi_k\} \quad (k = 1, \ldots, k_0).$$

Очевидно, при фиксированных $i$, $j$, $k$

$$|\Phi(t', s', u') - \Phi(t'', s'', u'')| < 3\varepsilon \tag{19.29}$$

$$(t', t'' \in \Omega_i^*;\ s', s'' \in \Omega_j;\ u', u'' \in R_{ijk}).$$

Положим

$$\Phi_\varepsilon(t, s, u) = \inf_{\tau \in \Omega_i^*,\ \sigma \in \Omega_j,\ v \in R_{ijk}} \Phi(\tau, \sigma, v) \quad (t \in \Omega_i^*,\ s \in \Omega_j,\ u \in R_{ijk}). \tag{19.30}$$

Из проведенных в начале доказательства рассуждений вытекает, что оператор

$$B_\varepsilon x(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, \Phi_\varepsilon[t, s, x(s)]\, ds$$

компактен. Но в силу (19.29)

$$|B_\varepsilon x(t) - Bx(t)| \leqslant 3\varepsilon |Ax(t)| \qquad (t \in \Omega^*),$$

откуда вытекает компактность оператора $B$.

Лемма доказана.

Ограниченную и равномерно непрерывную по совокупности переменных $t$, $s$ равномерно относительно $u$ функцию $\Phi(t, s, u)$ ($t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$) назовем *регуляризатором**) оператора Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$, если при каждом $\varepsilon > 0$ оператор

$$A_\varepsilon x(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, \varkappa_\varepsilon[t, s, x(s)]\, ds \tag{19.31}$$

действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и компактен; здесь через $\varkappa_\varepsilon(t, s, u)$ обозначена характеристическая функция множества точек $\{t, s, u\} \in \Omega^* \times \Omega \times (-\infty, \infty)$, в которых $|\Phi(t, s, u)| \geqslant \varepsilon$.

Теорема 19.8. *Пусть оператор Урысона $A$ с неотрицательным ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ ($0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$) и ограничен на каждом шаре.*

*Тогда при любом регуляризаторе $\Phi(t, s, u)$ оператор Урысона $B$ с ядром $K(t, s, u)\Phi(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и компактен.*

Доказательство. Пусть задано произвольное положительное $\varepsilon$. Положим

$$B_1 x(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, \Phi[t, s, x(s)]\, \varkappa_\varepsilon[t, s, x(s)]\, ds,$$

$$B_2 x(t) = \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, \Phi[t, s, x(s)]\, \{1 - \varkappa_\varepsilon[t, s, x(s)]\}\, ds.$$

Очевидно, $B = B_1 + B_2$.

В силу леммы 19.2 оператор $B_1$ компактен. Далее,

$$|B_2 x(t)| \leqslant \varepsilon \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, ds \leqslant \varepsilon Ax(t),$$

откуда следует, что

$$\| B_2 x(t) \|_\beta \leqslant \varepsilon \| Ax(t) \|_\beta.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon$ и вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

---

*) Часто удобны регуляризаторы, не зависящие от $u$.

Теорема 19.8 означает, что регуляризатор — это такая функция, умножение на которую «ослабляет» особенности ядра именно в тех точках, которые могут «помешать» компактности оператора (19.27). Данное определение регуляризатора обобщает понятие регуляризатора линейного оператора (см. п. 5.8).

**19.8. О двух признаках компактности операторов по мере.** Будем говорить, что ядро $K(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,\ s \in \Omega,\ -\infty < u < \infty)$ *квазимонотонно* по $t$, если можно указать такое семейство множеств $\Omega^*(c) \subset \Omega^*$ $(0 \leqslant c \leqslant \operatorname{mes} \Omega^*)$, что

$$\Omega^*(c_1) \subset \Omega^*(c_2) \quad \text{при} \quad c_1 < c_2, \quad \operatorname{mes} \Omega^*(c) = c \tag{19.32}$$

и при фиксированных $s$, $u$

$$K(t', s, u) \leqslant K(t'', s, u) \qquad (t' \in \Omega^*(c),\ t'' \bar{\in} \Omega^*(c)).$$

Теорема 19.9 *). *Пусть оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha,\ \beta < \infty)$ и ограничен на каждом шаре. Пусть ядро $K(t, s, u)$ квазимонотонно по $u$.*

*Тогда оператор $A$ компактен на $L_\alpha$ по мере.*

Теорема непосредственно вытекает из компактности по мере каждого ограниченного в $L_\beta$ семейства $\mathfrak{M}$ функций $y(t)$, для которого может быть указано семейство множеств $\Omega^*(c)$, удовлетворяющее условиям (19.32) и такое, что

$$y(t') \leqslant y(t'') \qquad (t' \in \Omega^*(c),\quad t'' \bar{\in} \Omega^*(c))$$

для всех функций $y(t) \in \mathfrak{M}$. Доказательство компактности по мере указанных семейств функций предоставляем читателю.

Введем обозначение

$$F_h(s, u) = \int_{\Omega^*} | K(t \mathring{+} h, s, u) - K(t, s, u) |\, dt, \tag{19.33}$$

где

$$K(t \mathring{+} h, s, u) = \begin{cases} K(t + h, s, u), & \text{если} \quad t + h \in \Omega^*, \\ 0, & \text{если} \quad t + h \bar{\in} \Omega^*. \end{cases}$$

Операторы суперпозиции, определенные функциями $F_h(s, u)$, обозначим через $\mathfrak{F}_h$.

Теорема 19.10. *Пусть оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 \leqslant \alpha < \infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ и ограничен на каждом шаре. Пусть*

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \| \mathfrak{F}_h x \|_1 = 0. \tag{19.34}$$

*Тогда оператор $A$ компактен на $L_\alpha$ по мере.*

Эта теорема вытекает из известного критерия Ф. Рисса компактности множеств в пространстве $L_1$ (см. Н. Данфорд и Дж. Шварц [1]).

---

*) Близкая теорема установлена Т. Нуркеновым [1].

**19.9. Полная непрерывность операторов Урысона со значениями в $L_0$.** Начнем с изучения операторов, действующих из $L_0$ в $L_0$.

Теорема 19.11 *). *Пусть ядро* $K(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,\ s \in \Omega,\ |u| \leqslant a)$ *удовлетворяет условиям:*

а) *почти при всех* $t \in \Omega^*$

$$\int_\Omega \sup_{|u| \leqslant a} |K(t, s, u)|\, ds < \infty; \tag{19.35}$$

б) *по каждому* $\varepsilon > 0$ *можно построить разбиение* $\Omega^*$ *на такие множества* $\Omega_1^*, \ldots, \Omega_m^*$, *что*

$$\sup_{t', t'' \in \Omega_i^*} \int_D \sup_{|u| \leqslant a} |K(t', s, u) - K(t'', s, u)|\, ds < \varepsilon \tag{19.36}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

*Тогда оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ определен на шаре $\|x\|_0 \leqslant a$ пространства $L_0$, действует в $L_0$ и вполне непрерывен.*

Доказательство. Из условий а) и б) вытекает (детали предоставляем читателю), что

$$\int_\Omega \sup_{|u| \leqslant a} |K(t, s, u)|\, ds \leqslant b < \infty.$$

Поэтому значения оператора $A$ на шаре $\|x\|_0 \leqslant a$ удовлетворяют неравенству

$$|Ax(t)| \leqslant b \qquad (t \in \Omega^*). \tag{19.37}$$

Отсюда и из условия б) вытекает, что выполнены условия леммы 1.2 для множества функций $\{Ax(t),\ \|x\|_0 \leqslant a\}$. Поэтому это множество компактно в $L_0$, т. е. оператор $A$ компактен.

Пусть последовательность $x_n(s)$ $(\|x_n(s)\|_0 \leqslant a)$ сходится в $L_0$ к функции $x_0(s)$. Из леммы 17.5 вытекает, что почти при всех $t \in \Omega^*$ функции $K[t, s, x_n(s)]$ сходятся по мере на $\Omega$ к $K[t, s, x_0(s)]$. В силу условия а) можно считать, что при этих значениях функции $|K[t, s, x_n(s)]|$ ограничены

*) Л. А. Ладыженский [1].

суммируемой функцией $\sup\limits_{|u|\leqslant a}|K(t, s, u)|$. Поэтому при таких $t$

$$\int\limits_\Omega K[t, s, x_0(s)]\,ds = \lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega K[t, s, x_n(s)]\,ds.$$

Значит, оператор $A$ преобразует сходящиеся в $L_0$ последовательности в последовательности функций, сходящиеся почти всюду. Эти последовательности сходятся и по норме $L_0$, так как оператор $A$ компактен.

Теорема доказана.

Перейдем к операторам, действующим из $L_\alpha$ $(\alpha > 0)$ в $L_0$. Приведем один признак полной непрерывности оператора Урысона, который может быть доказан примерно так же, как теорема 19.3.

Теорема 19.12. *Пусть ядро* $K(t, s, u)$ $(t\in\Omega^*,\ s\in\Omega,\ -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 19.11 *при каждом* $a > 0$. *Пусть, кроме того,*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{\|x\|_\alpha\leqslant 1}\left\|\int\limits_D K[t, s, x(s)]\,ds\right\|_0 = 0. \qquad (19.38)$$

*Тогда оператор Урысона* $A$ *с ядром* $K(t, s, u)$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_0$ *и вполне непрерывен.*

## § 20. Дифференцирование нелинейных операторов

**20.1. Производная нелинейного оператора.** Пусть нелинейный оператор $A$ действует из банахова пространства $E_1$ в банахово пространство $E_2$. Говорят, что оператор $A$ *дифференцируем* *) в точке $x_0\in E_1$, если он определен на неко-

---

*) Основные факты дифференциального исчисления в банаховых пространствах изложены у Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [1], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], Э. Хилле и Р. Филлипса [1], М. М. Вайнберга [2, 6]. Достаточные условия дифференцируемости оператора суперпозиции и нелинейных интегральных операторов устанавливались и применялись многими авторами. В параграфе в основном (пп. 20.4, 20.5, 20.7—20.10) излагаются новые результаты, установленные П. П. Забрейко и М. А. Красносельским (см. П. П. Забрейко [5]).

Во всем параграфе используется производная в смысле Фреше.

тором шаре $\|x - x_0\|_{E_1} \leqslant r$ и если существует такой линейный непрерывный оператор $B$, действующий из $E_1$ в $E_2$, что

$$\lim_{\|h\|_{E_1}\to 0} \frac{\|A(x_0+h) - Ax_0 - Bh\|_{E_2}}{\|h\|_{E_1}} = 0. \qquad (20.1)$$

Последнее равенство равносильно тому, что приращение $A(x_0+h) - Ax_0$ может быть представлено в виде

$$A(x_0+h) - Ax_0 = Bh + \omega(x_0, h) \qquad (\|h\| \leqslant r), \qquad (20.2)$$

где $\omega(x_0, h) = o(\|h\|)$, т. е.

$$\lim_{\|h\|_{E_1}\to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|_{E_2}}{\|h\|_{E_1}} = 0. \qquad (20.3)$$

Оператор $B$ называют *производной оператора* $A$ в точке $x_0$ и обозначают через $A'(x_0)$.

Предположим, что оператор $A$ дифференцируем на множестве $G \subset E_1$ (это значит, что существует производная $A'(x_0)$ при всех $x_0 \in G$). Производную $A'(x_0)$ можно рассматривать как определенный на $G$ оператор со значениями в пространстве $B(E_1 \to E_2)$ линейных непрерывных операторов, действующих из $E_1$ в $E_2$. Оператор $A$ называют *непрерывно дифференцируемым*, если $A'(x)$ непрерывен как оператор из $E_1$ в $B(E_1 \to E_2)$.

В качестве простейшего примера рассмотрим оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)]. \qquad (20.4)$$

Будем предполагать, что функция $f(s, u)$ имеет непрерывную по $u$ производную

$$g(s, u) = f'_u(s, u). \qquad (20.5)$$

Функция $g(s, u)$, как легко видеть, удовлетворяет условиям Каратеодори; она определяет оператор суперпозиции

$$\mathfrak{g}x(s) = f'_u[s, x(s)]. \qquad (20.6)$$

Если функции $f(s, u)$ и $g(s, u)$ непрерывны по совокупности переменных и если оператор $\mathfrak{f}$ рассматривать в пространстве $C$ непрерывных функций, то, очевидно, он непрерывно дифференцируем и его производная определяется равенством

$$\mathfrak{f}'(x_0)\,h(s)=\mathfrak{g}(x_0)\,h(s). \tag{20.7}$$

При переходе к пространствам $L_\alpha$ ситуация усложняется. В последующих пунктах будут указаны примеры таких непрерывно дифференцируемых функций $f(s, u)$, которыми определяются операторы суперпозиции $\mathfrak{f}$, действующие в некоторых пространствах $L_\alpha$, но дифференцируемые лишь в отдельных точках этих пространств.

Выше введено понятие производной для случая операторов, действующих в банаховых пространствах. Без изменений оно переносится на случай, когда оператор действует из $L_\alpha$ в пространство $L_\beta$ при произвольных неотрицательных $\alpha$, $\beta$.

### 20.2. Общий вид производной оператора суперпозиции.

Теорема 20.1. *Пусть оператор суперпозиции* $\mathfrak{f}$, *определенный функцией* $f(s, u)$, *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ $(\alpha > 0)$ *и имеет в точке* $x_0 \in L_\alpha$ *производную* $\mathfrak{f}'(x_0)$. *Тогда эта производная имеет вид*

$$\mathfrak{f}'(x_0)\,h(s)=g(s)\,h(s) \qquad (h(s)\in L_\alpha), \tag{20.8}$$

*где* $g(s)$ *определяется равенством* *)

$$g(s)=\operatorname*{lim\,as}_{u\to 0}\frac{f[s, x_0(s)+u]-f[s, x_0(s)]}{u}. \tag{20.9}$$

*При этом, если* $\alpha>\beta$, *то* $g(s)\equiv 0$ *и*

$$f(s, u)\equiv b(s)\in L_\beta. \tag{20.10}$$

*Если* $\alpha=\beta$, *то* $g(s)\in L_0$ *и*

$$f(s, u)=b(s)+g(s)\,u, \tag{20.11}$$

*где* $b(s)\in L_\alpha$. *Если* $\alpha<\beta$, *то* $g(s)\in L_{\beta-\alpha}$.

Доказательство. Положим в (20.2) $h=u\varkappa_0$, где $\varkappa_0(t)\equiv 1$. Тогда из (20.3) вытекает, что функция $g(s)=\mathfrak{f}'(x_0)\,\varkappa_0$ представима равенством (20.9).

Легко видеть, что $\mathfrak{f}'(x_0)\,\varkappa_D=g(s)\,\varkappa_D$ для характеристических функций $\varkappa_D$ множеств $D\subset\Omega$. Отсюда вытекает справедливость равенства (20.8) для ступенчатых функций $h(s)$.

*) Символ lim as обозначает предел по мере.

Положим $Bh(s) = g(s)h(s)$. Оператор $B$ очевидным образом замкнут. Он совпадает с непрерывным оператором $\mathfrak{f}'(x_0)$ на плотном в $L_\alpha$ множестве ступенчатых функций. Поэтому он совпадает с $\mathfrak{f}'(x_0)$ на всем $L_\alpha$. Таким образом, равенство (20.8) доказано.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega(s, u) = f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)] - g(s)u \quad (20.12)$$

и допустим, что она отлична от тождественного нуля. Тогда существует такое $u_0 \neq 0$ и такое множество $\Omega_0 \subset \Omega$ положительной меры, что

$$|\omega(s, u_0)| \geqslant c > 0 \qquad (s \in \Omega_0). \quad (20.13)$$

Обозначим через $\Omega_n$ последовательность таких подмножеств из $\Omega_0$, что $\operatorname{mes}\Omega_n \to 0$. Из (20.13) вытекает, что

$$\frac{c}{|u_0|}(\operatorname{mes}\Omega_n)^{\beta-\alpha} \leqslant \frac{\left\|\omega\left[s, u_0\varkappa_{\Omega_n}(s)\right]\right\|_\beta}{\left\|u_0\varkappa_{\Omega_n}(s)\right\|_\alpha}$$

и, в силу (20.3), $\beta > \alpha$.

Поэтому $\omega(s, u) \equiv 0$, если $\alpha \geqslant \beta$. Отсюда вытекают представления (20.10) и (20.11).

Если $\alpha < \beta$, то $g(s) \in L_{\beta-\alpha}$, ибо в противном случае оператор (20.8) не действовал бы из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Теорема доказана *).

### 20.3. Условия дифференцируемости оператора суперпозиции на всем пространстве.

Теорема 20.2. *Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный функцией $f(s, u)$, действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 < \alpha < \beta$. Пусть функция $f(s, u)$ дифференцируема по $u$ и функция $f'_u(s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.*

*Для дифференцируемости оператора $\mathfrak{f}$ в каждой точке пространства $L_\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы оператор суперпозиции $\mathfrak{g}$, определенный функцией $f'_u(s, u)$, действовал из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$.*

---

*) Ван Шен-ван [1] (см. также М. М. Вайнбер. [2, 6], М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий [2, 5, 6]).

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 20.1. Перейдем к доказательству достаточности. Пусть $x_0(s)$ — фиксированная функция из $L_\alpha$. Положим

$$\omega(s, u) = f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)] - f'_u[s, x_0(s)]\,u.$$

Очевидно, для каждой функции $h(s) \in L_\alpha$

$$\omega[s, h(s)] = \{f'_u[s, x_0(s) + \theta_h(s)\,h(s)] - f'_u[s, x_0(s)]\}\,h(s), \tag{20.14}$$

причем $\theta_h(s)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \theta_h(s) \leqslant 1$ и ее можно считать измеримой *).

Из равенства (20.14) вытекает, что

$$\frac{\|\omega[s, h(s)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha} \leqslant \|\mathfrak{g}(x_0 + \theta_h h) - \mathfrak{g}(x_0)\|_{\beta-\alpha}.$$

Оператор $\mathfrak{g}$ действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$ и в силу теоремы 17.1 непрерывен. Поэтому

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \frac{\|\omega[s, h(s)]\|_\beta}{\|h\|_\alpha} = \lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \|\mathfrak{g}(x_0 + \theta h) - \mathfrak{g}x_0\|_{\beta-\alpha} = 0.$$

Теорема доказана.

Так как в наших предположениях функция $f'_u(s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то определяемый ею оператор суперпозиции $\mathfrak{g}$ непрерывен как оператор из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$, если он действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$ (см. теорему 17.1). Непрерывность оператора $\mathfrak{g}$ означает, что оператор $\mathfrak{f}$ непрерывно дифференцируем.

Обозначим через $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ множество таких точек $\{\alpha, \beta\}$, что $\mathfrak{f}$ как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$ дифференцируем на всем $L_\alpha$. Теорема 20.2 означает, что $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ совпадает с пересечением $L$-характеристики $L(\mathfrak{f};$ *действ.*$)$ с множеством $L^*$ тех точек $\{\alpha, \beta\}$ $(0 < \alpha < \beta)$, для которых $\{\alpha, \beta-\alpha\} \in$

---

*) Чтобы $\theta_h(s)$ была измерима, достаточно определить ее значения как наименьшие $\theta$, при которых справедливо равенство

$$h(s)\,f'_u[s, x_0(s) + \theta h(s)] = f[s, x_0(s) + h(s)] - f[s, x_0(s)]. \tag{20.15}$$

Тогда $\theta_h(s)$ полунепрерывна снизу.

$\in L(\mathfrak{g};$ *действ.*$)$. На рис. 20.1 утолщенной линией показана нижняя граница $L$-характеристики $L(\mathfrak{f};$ *действ.*$)$, а пунктиром — нижняя граница $L$-характеристики $L(\mathfrak{g};$ *действ.*$)$; $L$-характеристика $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ заштрихована.

В качестве примера рассмотрим оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный многочленом

$$f(s, u) = a_0(s) + a_1(s)u + \ldots + a_n(s)u^n,$$

где $a_i(s) \in L_{\alpha_i}$. Функция $f'_u(s, u)$ также будет многочленом:

$$f'_u(s, u) = a_1(s) + 2a_2(s)u + \ldots + na_n(s)u^{n-1}.$$

Если оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0 < \alpha < \beta)$, то оператор $\mathfrak{g}$ действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$. Поэтому для оператора суперпозиции, определенного многочленом, $L$-характеристики $L(\mathfrak{f};$ *непр.*$)$ и $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ совпадают.

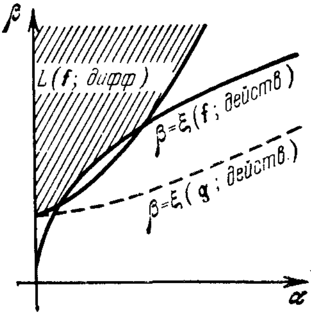


Рис. 20.1.

В качестве второго примера рассмотрим оператор

$$\mathfrak{f}x(s) = \sin x^n(s).$$

Здесь $f(s, u) = \sin u^n$, $f'_u(s, u) = nu^{n-1}\cos u^n$. Для этого оператора $L$-характеристика $L(\mathfrak{f};$ *действ.*$)$ содержит все точки $\{\alpha, \beta\}$, где $\alpha, \beta \geqslant 0$, а $L$-характеристика $L(\mathfrak{g};$ *действ.*$)$ состоит из точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant (n-1)\alpha$. Из теоремы 20.2 вытекает, что $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ состоит из точек $\{\alpha, \beta\}$, для которых $\beta \geqslant n\alpha$. Таким образом, в этом примере $L$-характеристика $L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$ является правильной частью $L$-характеристики $L(\mathfrak{f};$ *непр.*$)$.

Оператор $\mathfrak{f}$ может быть дифференцируем в отдельных точках пространства $L_\alpha$ $(\alpha < \beta)$ и в тех случаях, когда $\{\alpha, \beta\} \bar{\in} L(\mathfrak{f};$ *дифф.*$)$. Например, рассматриваемый выше оператор $\mathfrak{f}x(s) = \sin x^n(s)$ в точке $x_0(s) \equiv 0$ имеет равную нулю производную, как оператор, действующий из $L_\alpha$ в любое $L_\beta$, $\beta > \alpha$. Как будет выяснено в следующих пунктах, подобные операторы дифференцируемы в точках, образующих плотные в $L_\alpha$ множества.

**20.4. Достаточные признаки дифференцируемости оператора суперпозиции.** Рассмотрим вопрос о достаточных признаках дифференцируемости оператора суперпозиции $\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)]$ в заданной фиксированной точке *) $x_0(s) \in L_\alpha$ $(\alpha > 0)$. Будем считать, что оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $\beta > \alpha$; лишь этот случай в силу теоремы 20.1 и представляет интерес. Кроме того, будем считать, что определена функция

$$g(s) = \lim_{u \to 0} \text{as} \frac{f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)]}{u} \tag{20.16}$$

и что она принадлежит пространству $L_{\beta-\alpha}$. Эти условия необходимы (в силу теоремы 20.1) для существования производной $\mathfrak{f}'(x_0)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$a(s, u) = \begin{cases} \dfrac{f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)]}{u} - g(s), & \text{если} \quad u \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad u = 0. \end{cases} \tag{20.17}$$

Эта функция непрерывна по $u$ при $u \neq 0$. Поэтому она суперпозиционно измерима, т. е. преобразует измеримые функции $h(s)$ в измеримые.

Теорема 20.3. *Пусть оператор* $\mathfrak{a}h(s) = a[s, h(s)]$ *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_{\beta-\alpha}$.

*Тогда оператор* $\mathfrak{f}$ *дифференцируем в точке* $x_0$ *и*

$$\mathfrak{f}'(x_0)h(s) = g(s)h(s) \qquad (h(s) \in L_\alpha).$$

Доказательство. Нам нужно доказать равенство

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \frac{\|\omega[s, h(x)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha} = 0, \tag{20.18}$$

где функция $\omega(s, u)$ определена равенством (20.12).

Так как

$$\omega[s, h(s)] = a[s, h(s)]\, h(s),$$

*) Первые признаки дифференцируемости нелинейных операторов в отдельных точках функциональных пространств указаны впервые, по-видимому, М. А. Красносельским и Я. Б. Рутицким [2, 5]. Теорема 20.3 доказана Ван Шен-ваном [1].

то в силу неравенства Гёльдера

$$\frac{\|\omega[s, h(s)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha} \leqslant \|\mathfrak{a}h(s)\|_{\beta-\alpha}.$$

Правая часть последнего неравенства при $\|h\|_\alpha \to 0$ стремится к нулю, так как оператор $\mathfrak{a}$ в силу теоремы 17.6 непрерывен в нулевой точке.

Теорема доказана.

Теорема 20.3 дает лишь достаточные условия дифференцируемости оператора $\mathfrak{f}$ в отдельной точке. Рассмотрим, например, оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, определенный функцией

$$f(s, u) = \begin{cases} 0, & \text{если } |u| \leqslant 1,\ 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ \left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}} (|u| - 1), & \text{если } 1 < |u| \leqslant 2,\ 0 < s \leqslant 1, \\ \left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } |u| > 2,\ 0 < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Этот оператор действует из $L_{\frac{1}{2}}$ в $L_1$. Он дифференцируем в точке $\theta$ и его производная равна нулю. Действительно,

$$\mathfrak{f}h(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } |h(s)| \leqslant 1, \\ \left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}} (|h(s)| - 1), & \text{если } 1 < |h(s)| \leqslant 2, \\ \left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } |h(s)| > 2, \end{cases}$$

откуда вытекает, что

$$\|\mathfrak{f}h(s)\|_1 \leqslant \int\limits_{\Omega(h)} \left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}} ds,$$

где $\Omega(h)$ — множество точек $s$, в которых $|h(s)| \geqslant 1$. Из $\|h\|_{\frac{1}{2}} \leqslant \delta$ вытекает, что $\operatorname{mes} \Omega(h) \leqslant \delta^2$. Поэтому

$$\|\mathfrak{f}h(s)\|_1 \leqslant \int\limits_0^{\delta^2} \frac{ds}{\sqrt{\left|s \ln \frac{s}{2}\right|}}$$

и, значит,

$$\|\mathfrak{f}h(s)\|_1 \leqslant \delta \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\left|u \ln \frac{\delta^2 u}{2}\right|}} \leqslant \frac{\delta}{\sqrt{2\left|\ln \frac{\delta}{2}\right|}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = o(\delta).$$

С другой стороны, условия теоремы 20.3 не выполняются, так как функцию $h_0(s) \equiv 2$, которая принадлежит $L_{\frac{1}{2}}$, оператор $\mathfrak{a}$ переводит в функцию $\mathfrak{a}h_0(s) = \frac{1}{2}\left|s \ln \frac{s}{2}\right|^{-\frac{1}{2}}$, которая не принадлежит $L_{\frac{1}{2}}$.

Условие теоремы 20.3 о том, что оператор $\mathfrak{a}$ действует из $L_\alpha$ в $L_{\beta-\alpha}$, в силу леммы 17.6 равносильно неравенству

$$|\omega(s, u)| \leqslant a(s)|u| + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{20.19}$$

где $a(s) \in L_{\beta-\alpha}$. К сожалению, непосредственная проверка неравенства (20.19) часто бывает затруднительна. Значительно проще получать независимые оценки $\omega(s, u)$ при больших и при малых значениях $u$. Возникает вопрос о том, как из таких независимых оценок получить неравенство (20.19).

Лемма 20.1. *Пусть функция $\omega(s, u)$ удовлетворяет при $|u| \leqslant u_0$ неравенству*

$$|\omega(s, u)| \leqslant c(s)|u|^k \qquad (s \in \Omega), \tag{20.20}$$

*где $k > 1$, $c(s) \in L_r$, а при всех $u \in (-\infty, \infty)$ — неравенству*

$$|\omega(s, u)| \leqslant c_0(s)|u|^{\gamma_0} + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (s \in \Omega), \tag{20.21}$$

*где $0 \leqslant \gamma_0 \leqslant 1$, $c_0(s) \in L_q$. Пусть*

$$\beta - \alpha \geqslant q, \quad \beta - \alpha \geqslant \frac{k-1}{k-\gamma_0} q + \frac{1-\gamma_0}{k-\gamma_0} r. \tag{20.22}$$

*Тогда функция $\omega(s, u)$ удовлетворяет неравенству* (20.19).

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$c_1(s) = \left[c_0(s) + b\,|u_0|^{\frac{\beta}{\alpha}-\gamma_0}\right]^{\frac{k-1}{k-\gamma_0}} [c(s)]^{\frac{1-\gamma_0}{k-\gamma_0}},$$
$$c_2(s) = c_0(s)\,|u_0|^{\gamma_0-1}.$$

Обе эти функции принадлежат пространству $L_{\beta-\alpha}$. Для первой из них это вытекает из того факта, что $c_1(s) \in L_{\frac{k-1}{k-\gamma_0}q+\frac{1-\gamma_0}{k-\gamma_0}r}$ и второго неравенства (20.22), для второй — из первого неравенства (20.22). Через $a(s)$ будем обозначать сумму

$$a(s) = c_1(s) + c_2(s). \tag{20.23}$$

Эта функция также принадлежит пространству $L_{\beta-\alpha}$.

Пусть $|u| \leqslant u_0$. Тогда из неравенств (20.20) и (20.21) следует, что

$$|\omega(s, u)| \leqslant \min\left\{c(s)\,|u|^k,\ c_0(s)\,|u|^{\gamma_0} + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \left[c_0(s)\,|u|^{\gamma_0} + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{k-1}{k-\gamma_0}} [c(s)\,|u|^k]^{\frac{1-\gamma_0}{k-\gamma_0}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[c_0(s) + b\,|u_0|^{\frac{\beta}{\alpha}-\gamma_0}\right]^{\frac{k-1}{k-\gamma_0}} [c(s)]^{\frac{1-\gamma_0}{k-\gamma_0}}\,|u| = c_1(s)\,|u|.$$

Значит, неравенство (20.19) выполнено при $|u| \leqslant u_0$.

Пусть $|u| \geqslant u_0$. Тогда в силу неравенства (20.21)

$$|\omega(s, u)| \leqslant c_0(s)\,|u|^{\gamma_0} + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqslant c_2(s)\,|u| + b\,|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

и, следовательно, неравенство (20.19) выполнено и при $|u| \geqslant u_0$.

Лемма доказана.

Эта лемма позволяет пользоваться при доказательстве дифференцируемости оператора суперпозиции оценками достаточно общего вида.

Теорема 20.4. *Пусть оператор суперпозиции* $\mathfrak{f}$, *определенный функцией* $f(s, u)$, *действует из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$, *где* $0<\alpha<\beta$. *Пусть функция* $\omega(s, u)$ *удовлетворяет двум неравенствам*

$$|\omega(s, u)| < c(s)|u|^k \qquad (s\in\Omega,\ |u|\leqslant u_0) \tag{20.24}$$

*и*

$$|\omega(s, u)| \leqslant \sum_{i=0}^{k} c_i(s)|u|^{\gamma_i} + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (s\in\Omega,\ -\infty<u<\infty), \tag{20.25}$$

*где* $c(s)\in L_r$, $c_i(s)\in L_{q_i}$, $k>1$, $0\leqslant\gamma_i\leqslant 1$ *и*

$$\beta-\alpha\geqslant q,\ \beta-\alpha\geqslant\frac{k-1}{k-\gamma_i}q_i+\frac{1-\gamma_i}{k-\gamma_i}r \qquad (i=1, \ldots, k). \tag{20.26}$$

*Тогда оператор* $\mathfrak{f}$ *дифференцируем в точке* $x_0$.

Для доказательства достаточно представить $\omega(s, u)$ в виде суммы функций, каждая из которых оценивается одним из слагаемых правой части неравенства (20.25) (аналогичная конструкция была применена в п. 18.2). Каждая такая функция в силу леммы 20.1 удовлетворяет оценке вида (20.19). Поэтому и вся функция $\omega(s, u)$ удовлетворяет оценке (20.19). Остается сослаться на теорему 20.3.

**20.5. Дифференцируемость оператора суперпозиции на всюду плотных множествах.** Пусть оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ $(0<\alpha<\beta)$. Возникает естественный вопрос о том, как описать множество точек $x_0\in L_\alpha$, в которых оператор $\mathfrak{f}$ дифференцируем. Этот вопрос нерешен.

В настоящем пункте мы укажем достаточные условия, при которых $\mathfrak{f}$ как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$ дифференцируем во всех точках $x_0$ некоторого пространства $L_\gamma$, где $0\leqslant\gamma<\alpha$.

Будем предполагать, что функция $f'_u(s, u)$ существует и удовлетворяет условиям Каратеодори. Если оператор $\mathfrak{f}$ дифференцируем во всех точках $x\in L_\gamma$, то в силу теоремы 20.1 его производная имеет вид $\mathfrak{f}'(x_0)h=f'_u[s, x_0(s)]h(s)$, причем $f'_u[s, x_0(s)]\in L_{\beta-\alpha}$. Это значит, что оператор суперпозиции

$$\mathfrak{g}x(s)=f'_u[s, x(s)]$$

действует из $L_\gamma$ в $L_{\beta-\alpha}$. Мы получили необходимое условие дифференцируемости оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$ во всех точках $L_\gamma$. Нам неизвестно, достаточно ли это условие.

Предположим, что необходимое условие выполнено. Тогда для получения достаточных условий естественно воспользоваться теоремой 20.3. Иначе говоря, нужно найти такие условия, при выполнении которых функция

$$\Delta f(s, u) = f[s, x_0(s) + u] - f[s, x_0(s)],$$

построенная по любой фиксированной функции $x_0(s) \in L_\gamma$, удовлетворяет оценке

$$|\Delta f(s, u)| \leqslant a(s)|u| + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}}, \tag{20.27}$$

где $a(s) \in L_{\beta-\alpha}$.

Так как оператор $\mathfrak{g}$ действует из $L_\gamma$ в $L_{\beta-\alpha}$, то в силу леммы 17.6 справедлива оценка

$$|f'_u(s, u)| \leqslant a_0(s) + b|u|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma}},$$

где $a_0(s) \in L_{\beta-\alpha}$. Поэтому

$$|\Delta f(s, u)| \leqslant \left\{a_0(s) + b[|x_0(s)| + |u|]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma}}\right\}|u|.$$

Следовательно, при каждом фиксированном $u_0 > 0$

$$|\Delta f(s, u)| \leqslant a(s, u_0)|u| \quad (|u| \leqslant u_0),$$

где

$$a(s, u_0) = a_0(s) + b[|x_0(s)| + |u_0|]^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma}}.$$

Значит, неравенство вида (20.27) выполнено при $|u| \leqslant u_0$.

Таким образом, условия, при выполнении которых справедливы неравенства вида (20.27) для достаточно больших $u$, являются достаточными условиями дифференцируемости $\mathfrak{f}$ (как оператора из $L_\alpha$ в $L_\beta$) во всех точках $x_0(s) \in L_\gamma$.

Пусть, например,

$$|f(s, u)| \leqslant a_0(s) + b|u|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}, \tag{20.28}$$

где $a_0(s) \in L_{\beta-\alpha}$ и $\varepsilon \in \left[0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$. Тогда

$$|\Delta f(s, u)| \leqslant 2a_0(s) + c_1|x_0(s)|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon} + c_2|u|^{\frac{\beta}{\alpha}-\varepsilon}. \tag{20.29}$$

Если

$$\gamma \leqslant \alpha \frac{\beta - \alpha}{\beta - \varepsilon\alpha}, \tag{20.30}$$

то из (20.29) вытекает, что при $|u| \geqslant 1$ выполняется неравенство вида (20.27). Поэтому неравенство (20.28) является достаточным условием дифференцируемости $\mathfrak{f}$ как оператора из $L_\alpha$ в $L_\beta$ в точках множества $L_\gamma$, если $\gamma$ удовлетворяет неравенству (20.30) (и если оператор $\mathfrak{g}$ действует из $L_\gamma$ в $L_{\beta-\alpha}$).

Второе достаточное условие можно формулировать в виде неравенства

$$|f(s, u+v) - f(s, u)| \leqslant \varphi(s, u)|v| + b|v|^{\frac{\beta}{\alpha}}$$
$$(-\infty < u < \infty, \ |v| \geqslant v_0),$$

где функция $\varphi(s, u)$ определяет оператор суперпозиции, действующий из $L_\gamma$ в $L_{\beta-\alpha}$, $v_0$ — некоторое положительное число. Проверку предоставляем читателю.

**20.6. Производные операторов Гаммерштейна.** Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \tag{20.31}$$

Будем предполагать, что он действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и представим в виде суперпозиции

$$A = K\mathfrak{f} \tag{20.32}$$

действующего из $L_\alpha$ в некоторое пространство $L_\gamma$ $(\gamma > \alpha)$ оператора

$$\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)] \tag{20.33}$$

и действующего из $L_\gamma$ в $L_\beta$ линейного непрерывного интегрального оператора

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{20.34}$$

Допустим, что $\mathfrak{f}$ дифференцируем в точке $x_0 \in L_\alpha$ как оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\gamma$. Его производная является линейным оператором, также действующим из $L_\alpha$ в $L_\gamma$:

$$\mathfrak{f}'(x_0)\, h(s) = g(s)\, h(s).$$

Поэтому определен линейный оператор

$$Bh(t) = \int_{\Omega} K(t, s) g(s) h(s) ds,$$

который действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывен. Очевидно,

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \| A(x_0 + h) - Ax_0 - Bh \|_\beta \leqslant$$

$$\leqslant \|K\|_{\gamma \to \beta} \lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \| \mathfrak{f}(x_0 + h) - \mathfrak{f}x_0 - gh \|_\gamma = 0.$$

Это значит, что оператор (20.31) дифференцируем в точке $x_0$ и его производная совпадает с оператором $B$.

Таким образом, из каждого признака дифференцируемости оператора $\mathfrak{f}$, полученного в предыдущих пунктах, можно получить достаточные признаки дифференцируемости оператора Гаммерштейна.

Пусть, например, существует производная $f'_u(s, u)$, которая определяет оператор суперпозиции, действующий из $L_\alpha$ в $L_{\gamma-\alpha}$. Тогда оператор (20.31) непрерывно дифференцируем на всем пространстве $L_\alpha$ и

$$A'(x_0) h = \int_{\Omega} K(t, s) f'_u[s, x_0(s)] h(s) ds. \qquad (20.35)$$

Аналогично можно указать условия существования производной в отдельных точках или на плотных в $L_\alpha$ множествах.

**20.7. Производные операторов Урысона.** Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости оператора Урысона

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K[t, s, x(s)] ds. \qquad (20.36)$$

Ниже предполагается, что оператор (20.36) действует из $L_\alpha = L_\alpha(\Omega)$ в $L_\beta = L_\beta(\Omega^*)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1;\ 0 \leqslant \beta < \infty)$ и непрерывен (см. § 18).

Допустим, что существует производная $A'(x_0)$ оператора (20.36) в точке $x_0 \in L_\alpha$. Нам неизвестно, будет ли эта производная интегральным оператором. Более того, нам неизвестно, будет ли эта производная интегральным оператором даже в том случае, когда существует производная $K'_u(t, s, u)$ и когда линейный интегральный оператор

$$Bh(t) = \int_\Omega K'_u[t, s, x_0(s)]\, h(s)\, ds \tag{20.37}$$

действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

Ниже устанавливаются достаточные условия дифференцируемости операторов Урысона. Отметим, что при выполнении этих условий производная $A'(x_0)h$ всегда совпадает с оператором (20.37).

Рассмотрим оператор Урысона (20.36) как суперпозицию

$$A = J\mathfrak{K}^0, \tag{20.38}$$

где

$$J[u(t, s)] = \int_\Omega u(t, s)\, ds \tag{20.39}$$

и

$$\mathfrak{K}^0[x(s)] = K[t, s, x(s)]. \tag{20.40}$$

Будем считать, что оператор $\mathfrak{K}^0$ действует из пространства $L_\alpha$ в пространство*) $M_\beta$ функций двух переменных $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$.

Нетрудно видеть, что из дифференцируемости $\mathfrak{K}^0$ как оператора из $L_\alpha$ в $M_\beta$ вытекает дифференцируемость $A$ как оператора из $L_\alpha$ в $L_\beta$; при этом

$$A'(x_0)h = J[\mathfrak{K}^0]'(x_0)h = \int_\Omega [\mathfrak{K}^0]'(x_0)[h(s)]\, ds. \tag{20.41}$$

Можно показать, что производная оператора $\mathfrak{K}^0$, если она существует, всегда имеет вид

$$[\mathfrak{K}^0]'(x_0)[h(s)] = R(t, s)\, h(s);$$

функция $R(t, s)$ определяется при этом равенством

$$R(t, s) = \lim_{u \to 0} \text{as} \frac{K[t, s, x_0(s) + u] - K[t, s, x_0(s)]}{u}.$$

---

*) Напомним (см. п. 18.4), что $M_\beta$ $(0 < \beta \leqslant 1)$ — банахово пространство функций $u(t, s)$ двух переменных с нормой

$$\| u(t, s) \|_{M_\beta} = \left\| \int_\Omega | u(t, s) |\, ds \right\|_\beta .$$

В частности, если существует производная $K'_u(t, s, u)$, то функция $R(t, s)$ совпадает с функцией $K'_u[t, s, x_0(s)]$. Отсюда вытекает, что производная $A'(x_0)$ определяется формулой (20.37), если оператор $\mathfrak{K}^0$ дифференцируем в точке $x_0(s) \in L_\alpha$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ множество измеримых функций $k(t, s)$ $(t \in \Omega^*, s \in \Omega)$, для которых при $x \in L_\alpha$

$$\left\| \int_\Omega |k(t, s)| x(s)\, ds \right\|_\beta < \infty.$$

Множество $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ при $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ — банахово пространство *) с обычными операциями сложения и умножения на скаляр и с нормой

$$\| k(t, s) \|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} = \sup_{\|x\|_\alpha \leqslant 1} \left\| \int_\Omega |k(t, s)| x(s)\, ds \right\|_\beta .$$

Каждая функция $k(t, s) \in \mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ определяет регулярный интегральный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega k(t, s) x(s)\, ds,$$

действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$; при этом

$$\| k(t, s) \|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} = \| |K| \|_{\alpha \to \beta},$$

где $|K|$ — линейный интегральный оператор с ядром $|k(t, s)|$.

Введем в рассмотрение оператор суперпозиции

$$\mathfrak{H}u(t, s) = K'_u[t, s, u(t, s)]. \tag{20.42}$$

Теорема 20.5. *Пусть оператор* $\mathfrak{H}$ *действует из пространства* **) $N_\alpha$ *в пространство* $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ *и непрерывен.*

---

*) А. Цаанен [3].

**) Напомним (см. п. 18.5), что $N_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — банахово пространство функций $u(t, s)$ двух переменных $t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$ с нормой

$$\| u(t, s) \|_{N_\alpha} = \left\| \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} | u(t, s) | \right\|_\alpha .$$

*Тогда оператор Урысона* (20.36) *дифференцируем во всех точках пространства* $L_\alpha$ *и*

$$A'(x_0)h = \int\limits_\Omega K'_u[t, s, x_0(s)]\,h(s)\,ds.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого фиксированного $x_0(s) \in L_\alpha$

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \frac{1}{\|h\|_\alpha} \left\| \int\limits_\Omega \{K[t, s, x_0(s)+h(s)] - K[t, s, x_0(s)] - K'_u[t, s, x_0(s)]\,h(s)\}\,ds \right\|_\beta = 0. \quad (20.43)$$

Разность

$$\Delta = K[t, s, x_0(s)+h(s)] - K[t, s, x_0(s)] - K'_u[t, s, x_0(s)]\,h(s)$$

можно переписать в виде

$$\Delta = \{K'_u[t, s, x_0(s)+\theta_h(t, s)\,h(s)] - K'_u[t, s, x_0(s)]\}\,h(s),$$

где функция $\theta_h(t, s)$ измерима *) и удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \theta_h(t, s) \leqslant 1$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{\|h\|_\alpha} \left\| \int\limits_\Omega \{K[t, s, x_0(s)+h(s)] - K[t, s, x_0(s)] - K'_u[t, s, x_0(s)]\,h(s)\}\,ds \right\|_\beta =$$

$$= \frac{1}{\|h\|_\alpha} \left\| \int\limits_\Omega \{K'_u[t, s, x_0(s)+\theta_h(t, s)\,h(s)] - K'_u[t, s, x_0(s)]\}\,h(s)\,ds \right\|_\beta \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathfrak{H}[x_0(s)+\theta_h(t, s)\,h(s)] - \mathfrak{H}[x_0(s)] \|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)}. \quad (20.44)$$

Пусть $\|h_n\|_\alpha \to 0$. Тогда $\|\theta_{h_n} h_n\|_{N_\alpha} \to 0$ и из (20.44) и из непрерывности $\mathfrak{H}$ следует (20.43).

Теорема доказана.

*) См. сноску на стр. 409.

Приведем простые достаточные условия непрерывности оператора $\mathfrak{H}$. Предположим, что функция $K'_u(t, s, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|K'_u(t, s, u_1) - K'_u(t, s, u_2)| \leqslant \\ \leqslant R(t, s, u)\,|u_1 - u_2|^\delta\,(|u_1|, |u_2| \leqslant u), \tag{20.45}$$

где $0 < \delta \leqslant 1$, а функция $R(t, s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, причем оператор суперпозиции

$$\mathfrak{R}u(t, s) = R[t, s, u(t, s)]$$

действует из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha + \delta\alpha, \beta)$. Тогда

$$|K'_u[t, s, u_1(t, s)] - K'_u[t, s, u_2(t, s)]| \leqslant \\ \leqslant R[t, s, u(t, s)]\,|u_1(t, s) - u_2(t, s)|^\delta,$$

где $u(t, s) = \max\{|u_1(t, s)|, |u_2(t, s)|\}$. Поэтому

$$\|\mathfrak{H}u_1 - \mathfrak{H}u_2\|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} \leqslant \|\mathfrak{R}u\,|u_1 - u_2|^\delta\|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} \leqslant \\ \leqslant \|\mathfrak{R}u\|_{\mathfrak{B}(\alpha + \delta\alpha, \beta)}\,\|u_1 - u_2\|^\delta_{N_\alpha}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что при выполнении условия (20.45) $\mathfrak{H}$ непрерывен как оператор из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$.

Приведем еще один пример. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$. Предположим, что оператор $\mathfrak{H}$ действует из $L_\alpha(\Omega \times \Omega^*)$ в пространство $L_\delta(\Omega^* \times \Omega)$, где $\delta = \min\{1 - \alpha, \beta\}$. Иными словами, предположим, что выполняется неравенство

$$|K'_u(t, s, u)| \leqslant a(t, s) + b\,|u|^{\frac{\delta}{\alpha}}, \tag{20.46}$$

где $a(t, s) \in L_\delta(\Omega^* \times \Omega)$. Из теоремы 17.1 вытекает, что $\mathfrak{H}$ непрерывен как оператор из $L_\alpha(\Omega^* \times \Omega)$ в $L_\delta(\Omega^* \times \Omega)$. Тем более он будет непрерывным оператором, действующим из $N_\alpha$ в $L_\delta(\Omega^* \times \Omega)$. Из теоремы 6.1 вытекает, что $L_\delta(\Omega^* \times \Omega) \subset \mathfrak{B}(\alpha, \beta)$, причем

$$\|k(t, s)\|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} \leqslant c\,\|k(t, s)\|_{L_\delta(\Omega^* \times \Omega)}.$$

Поэтому $\mathfrak{H}$ будет непрерывным оператором, действующим из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$.

Таким образом, *неравенство* (20.46) *влечет дифференцируемость оператора* (20.36) *в каждой точке про-*

*странства* $L_\alpha$. Это утверждение допускает существенное усиление.

**20.8. Одна общая теорема.**

Теорема 20.6. *Пусть функция* $Q(t, s, u)$ $(t \in \Omega^*,$ $s \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть для любой функции* $u(t, s) \in N_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ *ядро* $|Q[t, s, u(t, s)]|$ *определяет линейный вполне непрерывный оператор, действующий из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$ $(0 < \beta < \infty)$.

*Тогда действующий из* $N_\alpha$ *в* $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ *оператор суперпозиции*

$$\mathfrak{Q}u(t, s) = Q[t, s, u(t, s)] \tag{20.47}$$

*непрерывен.*

Доказательство проведем от противного. Пусть функция $Q(t, s, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 20.6, но действующий из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ оператор суперпозиции (20.47) не обладает свойством непрерывности. Тогда найдутся функция $u_0(t, s) \in N_\alpha$ и последовательность функций $u_n(t, s) \in N_\alpha$, сходящаяся к $u_0(t, s)$ по норме пространства $N_\alpha$, такие, что

$$\| \mathfrak{Q}u_n(t, s) - \mathfrak{Q}u_0(t, s) \|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} > \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20.48}$$

Без ограничения общности можно считать, что $Q(t, s, 0) \equiv 0$, $u_0(t, s) \equiv 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n(t, s) \|_{N_\alpha} < \infty. \tag{20.49}$$

Неравенство (20.48) в этом случае имеет вид

$$\| \mathfrak{Q}u_n(t, s) \|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} > \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{20.50}$$

Функция

$$u^*(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} | u_n(t, s) | \tag{20.51}$$

в силу (20.49) принадлежит пространству $N_\alpha$. В силу леммы 17.2 функция

$$R_0(t, s) = \sup_{|u| \leqslant u^*(t, s)} | Q(t, s, u) | \tag{20.52}$$

принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$, причем линейный интегральный оператор

$$R_0 x(s) = \int\limits_{\Omega} R_0(t, s)\, x(s)\, ds$$

действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и вполне непрерывен. Из теорем 3.3 и 5.7 вытекает, что

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \| R_0 P_D \|_{\alpha \to \beta} = 0. \tag{20.53}$$

Из леммы 17.5 следует, что функции $Q[t, s, u_n(t, s)]$ при $n \to \infty$ сходятся на $\Omega^* \times \Omega$ по мере к нулю. При этом без ограничения общности (в противном случае можно перейти к подпоследовательности) можно считать, что почти при всех $t \in \Omega^*$ функции $Q[t, s, u_n(t, s)]$ сходятся по мере на $\Omega$ к нулю.

Из (20.52) вытекает, что

$$|Q[t, s, u_n(t, s)]| \leqslant R_0(t, s). \tag{20.54}$$

Почти при всех $t \in \Omega^*$ функция $R_0(t, s)$ суммируема по $s$ на $\Omega$. Поэтому почти при всех $t \in \Omega^*$ функции

$$\psi_n(t) = \int\limits_{\Omega} |Q[t, s, u_n(t, s)]|\, ds \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходятся к нулю. Более того, из

$$\varphi(t) = \int\limits_{\Omega} R_0(t, s)\, ds \in L_\beta$$

и снова из (20.54) следует, что функции $\psi_n(t)$ сходятся к нулю по норме пространства $L_\beta$.

Ниже через $\Omega(x, h)$, где $x = x(s)$ — некоторая функция из единичного шара пространства $L_\alpha$, обозначается множество точек $s \in \Omega$, в которых $|x(s)| \geqslant h$. Очевидно,

$$\mathrm{mes}\, \Omega(x;\, h) \leqslant h^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (0 < h < \infty). \tag{20.55}$$

Из неравенства

$$\int_{\Omega} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds =$$

$$= \int_{\Omega \setminus \Omega(x;\, h)} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds +$$

$$+ \int_{\Omega(x;\, h)} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant h\psi_n(t) + \int_{\Omega(x;\, h)} R_0(t, s)\, |x(s)|\, ds \qquad (\| x \|_{\alpha} \leqslant 1)$$

вытекает, что

$$\left\| \int_{\Omega} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds \right\|_{L_{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\beta} h \| \psi_n(t) \|_{L_{\beta}} + 2^{\beta} \| \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{P}_{\Omega(x;\, h)} x \|_{L_{\beta}}$$

или, в силу (20.55),

$$\left\| \int_{\Omega} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds \right\|_{L_{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\beta} h \| \psi_n(t) \|_{L_{\beta}} + \sup_{\operatorname{mes} D \leqslant h} 2^{\beta} \| \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{P}_D \|_{\alpha \to \beta}^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{20.56}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим через $h_0$ такое число, что

$$\sup_{\operatorname{mes} D \leqslant h_0} \| \boldsymbol{R}_0 \boldsymbol{P}_D \|_{\alpha \to \beta}^{-\frac{1}{\alpha}} < \frac{\varepsilon}{2^{1+\beta}}.$$

Тогда из (20.56) вытекает, что

$$\left\| \int_{\Omega} |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds \right\|_{L_{\beta}} \leqslant 2^{\beta} h_0 \| \psi_n(t) \|_{L_{\beta}} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем число $n_0$ так, чтобы при $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство

$$\| \psi_n(t) \|_{L_{\beta}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{1+\beta} h_0}.$$

Тогда при $n \geqslant n_0$ будет выполняться и неравенство

$$\left\| \int_\Omega |Q[t, s, u_n(t, s)]\, x(s)|\, ds \right\|_{L_\beta} < \varepsilon. \tag{20.57}$$

Число $n_0$ выбирается нами независимо от функции $x(s)$, $\|x(s)\|_\alpha \leqslant 1$. Поэтому (20.57) означает, что

$$\|Q[t, s, u_n(t, s)]\|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)} \leqslant \varepsilon.$$

Это неравенство при малых $\varepsilon$ противоречит неравенству (20.50).

Теорема доказана.

Пусть оператор (20.47) действует из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ и пусть $\alpha < \beta$. Тогда полная непрерывность операторов с ядрами $Q[t, s, u(t, s)]\,(u(t, s) \in N_\alpha)$ вытекает из теорем 5.5 и 5.8. Поэтому из теоремы 20.6 вытекает, что оператор (20.47) непрерывен (как оператор из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$). Аналогичное утверждение не имеет места, если $\alpha \geqslant \beta$, как показывает приводимый ниже пример оператора

$$\mathfrak{Q}_0 u(t, s) = Q_0[t, s, u(t, s)]. \tag{20.58}$$

Пусть $\alpha, \beta$ — фиксированные числа, $0 < \beta \leqslant \alpha < 1$. Положим

$$Q_0(t, s, u) = \begin{cases} (2 - 2^n |u|)\, Q_n(t, s) + (2^n |u| - 1)\, Q_{n-1}(t, s), \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant |u| < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 \qquad\qquad \text{при остальных } u, \end{cases}$$

где

$$Q_0(t, s) = 0,$$

$$Q_n(t, s) = \begin{cases} 2^{n(1-\alpha+\beta)}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t,\ s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } t, s \end{cases}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Нетрудно видеть, что функция $Q_0(t, s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Кроме того, очевидно неравенство

$$|Q_0(t, s, u)| \leqslant K_0(t, s), \tag{20.59}$$

где

$$K_0(t, s) = \begin{cases} 2^{n(1-\alpha+\beta)}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n} \leqslant t,\ s < \dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } t, s. \end{cases}$$

Ядро $K_0(t, s)$ — это ядро (7.19) при $\theta=\beta$, $r(1-\nu)=1-\alpha$. В п. 7.2 показано, что $K_0(t, s)$ определяет линейный интегральный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Поэтому из (20.59) вытекает, что оператор (20.58) действует из $N_\alpha$ в $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$. Покажем, что он не обладает свойством непрерывности.

Положим

$$u_n(t, s)=\frac{1}{2^n} \quad (t, s\in[0, 1];\ n=1, 2, \ldots).$$

Функции $u_n(t, s)$ по норме $N_\alpha$ сходятся к функции $\theta(t, s)\equiv 0$. В то же время функции

$$\mathfrak{Q}_0 u_n(t, s)=Q_n(t, s) \quad (n=1, 2, \ldots)$$

не сходятся по норме пространства $\mathfrak{B}(\alpha, \beta)$ к функции

$$\mathfrak{Q}_0\theta(t, s)\equiv 0.$$

Чтобы это заметить, рассмотрим функции

$$x_n(s)=\begin{cases} 2^{n\alpha}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n}\leqslant s<\dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } s. \end{cases}$$

Очевидно, $\|x_n\|_\alpha=1$ и

$$\int_0^1 Q_n(t, s)\, x_n(s)\, ds=\begin{cases} 2^{n\beta}, & \text{если } \dfrac{1}{2^n}\leqslant t<\dfrac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|Q_n(t, s)\|_{\mathfrak{B}(\alpha, \beta)}\geqslant\left\|\int_0^1 Q_n(t, s)\, x_n(s)\, ds\right\|_\beta=1 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Из теорем 20.5 и 20.6 непосредственно вытекает

Теорема 20.7. *Пусть функции $K(t, s, u)$ и $K'_u(t, s, u)$ ($t\in\Omega^*$, $s\in\Omega^*$, $-\infty<u<\infty$) удовлетворяют условиям Каратеодори. Пусть нелинейный оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Пусть для любой функции $u(t, s)\in N_\alpha$ ядро $|K'_u[t, s, u(t, s)]|$ определяет линейный вполне непрерывный оператор, действующий из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Пусть $0\leqslant\alpha<1$, $0<\beta<\infty$.*

*Тогда оператор $A$ непрерывно дифференцируем на всем пространстве $L_\alpha$, причем*

$$A'(x_0)h = \int_\Omega K'_u[t, s, x_0(s)]\, h(s)\, ds \qquad (x_0(s), h(s) \in L_\alpha).$$

**20.9. Частные признаки дифференцируемости операторов Урысона.** Применение теоремы 20.7 связано с доказательством полной непрерывности линейных интегральных операторов

$$B(u)h = \int_\Omega |K'_u[t, s, u(t, s)]|\, h(s)\, ds \qquad (u(t, s) \in N_\alpha). \tag{20.60}$$

Здесь естественно применяются различные признаки полной непрерывности линейных интегральных операторов, установленные в § 4—8. Приведем один пример.

Теорема 20.8. *Пусть функции $K(t, s, u)$ и $K'_u(t, s, u)$ ($t \in \Omega^*$, $s \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$) удовлетворяют условиям Каратеодори. Пусть нелинейный оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$, где $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta < \infty$. Пусть функция $K'_u(t, s, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|K'_u(t, s, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} R_i(t, s) f_i(s, u), \tag{20.61}$$

*где каждая функция $f_i(s, u)$ неотрицательна, удовлетворяет условиям Каратеодори и определяет оператор суперпозиции, действующий из $L_\alpha$ в $L_{\gamma_i}$, где $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1 - \alpha$, а каждое неотрицательное ядро $R_i(t, s)$ определяет линейный интегральный оператор, действующий из $L_{\alpha+\gamma_i}$ в $L_\beta$, причем этот линейный оператор вполне непрерывен, если $\gamma_i = 0$.*

*Тогда оператор $A$ непрерывно дифференцируем на всем пространстве $L_\alpha$, причем*

$$A'(x)h = \int_\Omega K'_u[t, s, x(s)]\, h(s)\, ds \qquad (x(s), h(s) \in L_\alpha).$$

Доказательство. В силу теоремы 20.7 достаточно показать, что каждый из операторов (20.60) является вполне непрерывным оператором, действующим из $L_\alpha$ в $L_\beta$.

В силу леммы 17.6 каждая из функций $f_i(s, u)$ $(i=1, \ldots, n)$ удовлетворяет неравенству

$$|f_i(s, u)| \leqslant a_i(s) + b|u|^{\frac{\gamma_i}{\alpha}},$$

где $a_i(s) \in L_{\gamma_i}$. Поэтому для любой фиксированной функции $u(t, s) \in N_\alpha$ выполняется неравенство

$$|f_i[s, u(t, s)]| \leqslant a_i(s) + b|v(s)|^{\frac{\gamma_i}{\alpha}} = g_i(s), \tag{20.62}$$

где $g_i(s) \in L_{\gamma_i}$ и

$$v(s) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in \Omega^*} |u(t, s)| \in L_\alpha.$$

Из неравенств (20.61) и (20.62) вытекает неравенство

$$|K'_u[t, s, u(t, s)]| \leqslant \sum_{i=1}^{n} R_i(t, s)\, g_i(s).$$

Так как $0 \leqslant \alpha < 1$, $0 < \beta < \infty$, то в силу теоремы 5.10 для доказательства полной непрерывности линейного интегрального оператора с ядром $|K'_u[t, s, u(t, s)]|$ достаточно заметить, что каждый из операторов

$$B_i h(s) = \int_\Omega R_i(t, s)\, g_i(s)\, h(s)\, ds.$$

вполне непрерывен (например, в силу теоремы 19.1).

Теорема доказана.

**20.10. Дифференцируемость оператора Урысона в отдельных точках.** Вопрос о дифференцируемости действующего из $L_\alpha$ в $L_\beta$ оператора Урысона $A$ в отдельных точках пространства $L_\alpha$ или на плотных в $L_\alpha$ множествах изучен недостаточно. Приведем здесь одну частную теорему.

Теорема 20.9. *Пусть нелинейный оператор Урысона $A$ с ядром $K(t, s, u)$ действует из пространства $L_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$ в пространство $L_\beta$. Пусть функция $K'_u(t, s, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|K'_u(t, s, u+h) - K'_u(t, s, u)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} R_i(t, s, u)\, |h|^{\delta_i}, \tag{20.63}$$

*где* $0<\delta_1, \ldots, \delta_n<\frac{1-\alpha}{\alpha}$, *функция* $R_i(t, s, u)$ *неотрицательна и такая, что ядро* $R_i[t, s, x(s)]$ *при любой фиксированной* $x(s)\in L_\gamma$, $\gamma\leqslant\alpha$, *определяет линейный интегральный оператор, действующий из* $L_{\alpha(1+\delta_i)}$ *в* $L_\beta$. *Пусть, наконец, ядро* $|K_u'(t, s, 0)|$ *определяет линейный интегральный оператор, действующий из* $L_\alpha$ *в* $L_\beta$.

*Тогда оператор* $A$ *дифференцируем в каждой точке пространства* $L_\gamma$ *и*

$$A'(x_0)h=\int_\Omega K_u'[t, s, x_0(s)]\,h(s)\,ds \qquad (x_0(s)\in L_\gamma,\ h(s)\in L_\alpha).$$

Доказательство. Из неравенства (20.63) вытекает, что

$$|K_u'[t, s, x_0(s)]|\leqslant|K_u'(t, s, 0)|+\sum_{i=1}^n R_i(t, s, 0)\,|x_0(s)|^{\delta_i}.$$

Нетрудно видеть, что в силу условий теоремы линейные интегральные операторы с ядрами $|K_u'(t, s, 0)|$, $R_1(t, s, 0)\,|x_0(s)|^{\delta_1}, \ldots, R_n[t, s, x_0(s)]\,|x_0(s)|^{\delta_n}$ $(x_0(s)\in L_\gamma)$ действуют из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Поэтому каждый интегральный оператор

$$B[x_0]h=\int_\Omega|K_u'[t, s, x_0(s)]|\,h(s)\,ds$$

действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывен.

Пусть $x_0(s)$ — фиксированная функция из $L_\gamma$, а $h(s)\in L_\alpha$. Из формулы конечных приращений и неравенства (20.63) вытекает, что

$$\begin{aligned}|A(x_0+h)-Ax_0-B[x_0]h|&\leqslant\\ &\leqslant\sum_{i=1}^n\int_\Omega R_i[t, s, x_0(s)]\,|h(s)|^{1+\delta_i}\,ds.\end{aligned} \qquad (20.64)$$

Функции $|h(s)|^{1+\delta_i}$ принадлежат соответственно пространствам $L_{\alpha(1+\delta_i)}$. Поэтому из неравенства (20.64) вытекает, что

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-B[x_0]h\|_{L_\beta}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|R_i(x_0)\|_{\alpha(1+\delta_i)\to\beta}\|h\|_{L_\alpha}^{1+\delta_i},$$

где $R_i(x_0)$ — линейный интегральный оператор с ядром $R_i[t, s, x_0(s)]$. В частности,

$$\|A(x_0+h)-Ax_0-B[x_0]h\|_{L_\beta}=o\left(\|h\|_{L_\alpha}\right).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в условиях этой теоремы производная $A'(x_0)$ удовлетворяет специальному условию Гёльдера:

$$\|A'(x_0+h)-A'(x_0)\|_{\mathfrak{B}(\alpha,\beta)}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}k_i(r)\|h(s)\|_{L_\alpha}^{\delta_i}\quad(\|x_0\|_{L_\gamma}\leqslant r).\tag{20.65}$$

**20.11. Асимптотические производные нелинейных операторов.** Нелинейный оператор $A$, действующий из пространства $E_1$ в пространство $E_2$, называют *асимптотически линейным*, если он определен на всех элементах, лежащих вне некоторого шара, и если существует такой линейный оператор $B$, что

$$\lim_{\|x\|_{E_1}\to\infty}\frac{\|Ax-Bx\|_{E_2}}{\|x\|_{E_1}}=0.\tag{20.66}$$

Оператор $B$ называют *асимптотической производной* (или *производной на бесконечности*) оператора $A$; его часто обозначают через $A'(\infty)$.

Рассмотрим вначале оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(s)=f[s, x(s)],\tag{20.67}$$

который действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Допустим, что $\beta<\alpha$; тогда из леммы 17.6 вытекает, что $\mathfrak{f}$ асимптотически линеен и его асимптотическая производная равна нулю. Если $\beta\geqslant\alpha$, то $\mathfrak{f}$ асимптотически линеен, когда, например,

$$|f(s, u)-g(s)u|\leqslant a(s)+b(s)|u|^r,$$

где $g(s) \in L_{\beta-\alpha}$, $a(s) \in L_\beta$, $0 < r < 1$, $b(s) \in L_{\beta-r\alpha}$; при этом

$$\mathfrak{f}'(\infty) h(s) = g(s) h(s).$$

Исследование асимптотической линейности оператора суперпозиции $\mathfrak{f}$ удобно проводить по следующей схеме. Вначале нужно проверить, существует ли предел отношения $\frac{f(s, u)}{u}$ при $u \to \infty$. Если этот предел $g(s)$ существует, то нужно составить разность $\omega(s, u) = f(s, u) - g(s) u$ и попытаться доказать, что

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \frac{\|\omega[s, h(s)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha} = 0.$$

Перейдем к операторам Гаммерштейна:

$$Ax(t) = \int_\Omega K(t, s) f[s, x(s)]\, ds. \qquad (20.68)$$

Предположим, что оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f} x(s) = f[s, x(s)]$$

действует из $L_\alpha$ в $L_\gamma$ и имеет асимптотическую производную

$$\mathfrak{f}'(\infty) h(s) = g(s) h(s),$$

а линейный оператор

$$Kx(t) = \int_\Omega K(t, s) h(s)\, ds$$

действует из $L_\gamma$ в $L_\beta$ и непрерывен. Тогда оператор $A$ асимптотически линеен как оператор из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и

$$A'(\infty) h(t) = \int_\Omega K(t, s) g(s) h(s)\, ds. \qquad (20.69)$$

Это утверждение вытекает из цепочки соотношений

$$\lim_{\|h\|_\alpha \to \infty} \frac{\|Ah(t) - K[g(s) h(s)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \|K\|_{\gamma\to\beta} \lim_{\|h\|_\alpha \to 0} \frac{\|\mathfrak{f}h(s) - g(s) h(s)\|_\gamma}{\|h(s)\|_\alpha} = 0.$$

Более сложен вопрос об условиях существования асимптотической производной у оператора Урысона

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K[t, s, x(s)]\, ds. \tag{20.70}$$

Ограничимся одним простым утверждением.

Предположим, что существует предел

$$K_0(t, s) = \lim_{u \to \infty} \frac{K(t, s, u)}{u}. \tag{20.71}$$

Представим функцию $K(t, s, u)$ в виде

$$K(t, s, u) = K_0(t, s)\, u + \omega(t, s, u). \tag{20.72}$$

Предположим, что оператор $A$ и линейный оператор

$$Bh(t) = \int_{\Omega} K_0(t, s)\, h(s)\, ds \tag{20.73}$$

действуют из $L_\alpha$ в $L_\beta$ и непрерывны. Далее, будем считать, что функция $\omega(t, s, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|\omega(t, s, u)| \leqslant R_0(t, s)\, f(s, u) \quad (t \in \Omega^*, s \in \Omega, -\infty < u < \infty), \tag{20.74}$$

где $R_0(t, s)$ — ядро линейного непрерывного оператора, действующего из $L_\gamma$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ в $L_\beta$, а $f(s, u)$ определяет оператор суперпозиции $\mathfrak{f}$, действующий из $L_\alpha$ в $L_\gamma$ и имеющий нулевую асимптотическую производную. Простой подсчет показывает, что в этих условиях оператор $A$ асимптотически линеен и его асимптотическая производная совпадает с оператором (20.73).

**20.12. О производных высшего порядка.** Производные высшего порядка от нелинейных операторов мы определим при помощи формулы Тейлора.

Допустим, что нелинейный оператор $A$ в некоторой окрестности $\| x - x_0 \|_{E_1} \leqslant r$ точки $x_0 \in E_1$ представим в виде

$$A(x_0 + h) = Ax_0 + B_1 h + \frac{1}{2!} B_2 h + \ldots + \frac{1}{n!} B_n h + \omega_n(h), \tag{20.75}$$

где каждый оператор $B_k$ непрерывен и обладает свойством однородности $k$-го порядка:

$$B_k(\lambda h) \equiv \lambda^k B_k h \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

а остаток $\omega_n(h)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|h\|_{E_1}\to 0} \frac{\|\omega_n(h)\|_{E_2}}{\|h\|_{E_1}^n} = 0. \tag{20.76}$$

Будем тогда говорить, что оператор $A$ имеет в точке $x_0$ производные до порядка $n$. Производная $A^{(k)}(x_0)$ порядка $k$ определяется при этом равенством

$$A^{(k)}(x_0)\,h = B_k h. \tag{20.77}$$

Рассмотрим оператор суперпозиции

$$\mathfrak{f}x(s) = f[s, x(s)]. \tag{20.78}$$

Без труда показывается, что производные $\mathfrak{f}^{(k)}(x_0)$ (если они, конечно, существуют!) имеют вид

$$\mathfrak{f}^{(k)}(x_0)\,h = a_k(s)\,[h(s)]^k, \tag{20.79}$$

где

$$\frac{1}{k!}a_k(s) = \\ = \lim_{u\to 0}\text{as}\frac{f[s, x_0(s)+u] - f[s, x_0(s)] - a_1(s)\,u - \ldots - \dfrac{a_{k-1}(s)}{(k-1)!}u^{k-1}}{u^k}. \tag{20.80}$$

Допустим, что оператор $\mathfrak{f}$ действует из $L_\alpha$ в $L_\beta$. Пусть установлено, что $\mathfrak{f}$ имеет производные до порядка *) $k_0$ и что существует предел (20.80) при $k = k_0 + 1$. Тогда можно искать производную $\mathfrak{f}^{(k_0+1)}(x_0)\,h$ в виде

$$\mathfrak{f}^{(k_0+1)}(x_0)\,h = a_{k_0+1}(s)\,[h(s)]^{k_0+1}. \tag{20.81}$$

Чтобы выяснить, верна ли формула (20.81), нужно (исходя из определения производных высших порядков) составить функцию

$$\omega_{k_0+1}(s, u) = f[s, x_0(s)+u] - f[s, x_0(s)] - a_1(s)\,u - \ldots \\ \ldots - \frac{1}{k_0!}a_{k_0}(s)\,u^{k_0}$$

и проверить, выполнено ли равенство

$$\lim_{\|h\|_\alpha\to 0}\frac{\|\omega_{k_0+1}[s, h(s)]\|_\beta}{\|h(s)\|_\alpha^{k_0+1}} = 0. \tag{20.82}$$

---

*) Если при этом $\beta \leqslant k_0\alpha$ ($\beta < k_0\alpha$), то $f(s, u)$ является многочленом по $u$ степени не выше $k_0$ (меньше $k_0$).

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\omega^0_{k_0+1}(s, u) = \omega_{k_0+1}\left(s, |u|^{\frac{1}{k_0+1}} \operatorname{sign} u\right).$$

Легко видеть, что равенство (20.82) равносильно равенству

$$\lim_{\|h\|_{\alpha(k_0+1)}\to 0} \frac{\left\| \omega^0_{k_0+1}[s, h(s)] \right\|_\beta}{\| h(s) \|_{\alpha(k_0+1)}} = 0. \qquad (20.83)$$

Условия, при которых выполнены равенства типа (20.83), были детально рассмотрены в пп. 20.1—20.5.

Читатель без труда сформулирует и докажет аналоги всех утверждений пп. 20.1—20.5 для производных старших порядков.

Аналогично исследуется вопрос о существовании старших производных у нелинейных интегральных операторов.

* * *

Изложенные в гл. 5 теоремы показывают, что шкала пространств $L_\alpha$ удобна, вообще говоря, при рассмотрении интегральных операторов со степенными нелинейностями. В случае нелинейностей типа экспоненциальных применимы, например, пространства Орлича (М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий [5, 6]).

Естественно дать аксиоматическое описание функциональных пространств, в которых можно построить содержательную теорию нелинейных интегральных операторов. Как оказалось (П. П. Забрейко), такая теория может быть построена для пространств, в которых конус неотрицательных функций нормальный в смысле М. Г. Крейна, воспроизводящий и сильно миниедральный. Аналоги теорем гл. 5 получаются, если конус неотрицательных функций в пространстве значений обладает свойством правильности. Развитая теория охватывает операторы, действующие в пространствах Орлича, Лоренца, Марцинкевича, других симметрических пространствах, пространствах Хонда и др.

ГЛАВА 6

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## § 21. Уравнения с вполне непрерывными операторами

**21.1. Линейные уравнения.** Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K(t, s)\, x(s)\, ds. \qquad (21.1)$$

Предположим, что удалось установить его полную непрерывность в некотором полном нормированном пространстве $E$ (для этого могут быть использованы результаты гл. 2). Тогда из общих теорем о линейных вполне непрерывных операторах вытекает (см., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1]), что интегральный оператор (21.1) имеет либо конечное, либо счетное число ненулевых собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, которым соответствуют собственные функции из пространства $E$. Если множество собственных значений счетно, то $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. Каждое из ненулевых собственных значений имеет конечный порядок и конечную кратность.

Напомним, что *порядком* собственного значения $\lambda$ оператора $A$ называется размерность подпространства решений уравнения $Ax = \lambda x$ или, что то же самое, максимальное число линейно независимых собственных функций (векторов) оператора $A$. *Кратностью* собственного значения $\lambda$ называется размерность подпространства всех решений всех уравнений $(\lambda I - A)^n x = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для вполне непрерывного оператора можно указать такое $n_0 = n_0(\lambda)$ ($\lambda$ — ненулевое собственное значение), что решения всех уравнений $(\lambda I - A)^n x = 0$ при $n > n_0$ являются решениями уравнения $(\lambda I - A)^{n_0} x = 0$.

Допустим, что $L$-характеристика $L$ ($A$; *непр.*) оператора (21.1) содержит некоторую окрестность отрезка $\beta = \alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Для определенности будем считать, что она содержит отрезок $\beta = \alpha - \alpha_0$ $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, где $\alpha_0 > 0$. Легко видеть, что $L$ ($A^2$; *непр.*) содержит тогда весь единичный квадрат, если $\alpha_0 \geqslant \frac{1}{2}$, и содержит отрезок $\beta = \alpha - 2\alpha_0$ $(2\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, если $\alpha_0 < \frac{1}{2}$. Аналогично, $L$ ($A^3$; *непр.*) содержит отрезок $\beta = \alpha - 3\alpha_0$ $(3\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Таким образом, при $n > \frac{1}{\alpha_0}$ оператор $A^n$ преобразует каждую функцию из любого $L_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ в ограниченную функцию. Отсюда вытекает, в частности, что все собственные функции интегрального оператора (21.1), рассматриваемого в некотором пространстве $L_\alpha$, ограничены, если они соответствуют ненулевому собственному значению. Аналогичные рассуждения показывают, что ограниченными будут и все присоединенные функции.

Если дополнительно известно, что оператор $A$ (или некоторый оператор $A^k$) действует из $L_0$ в пространство $W$ более гладких функций, то собственные и присоединенные функции, конечно, принадлежат $W$. Такая ситуация имеет место (см. § 16), если $A$ — оператор, обратный к эллиптическому дифференциальному оператору.

Как известно, не каждый линейный оператор имеет собственные функции. При доказательстве их существования у оператора (21.1) в ряде случаев полезна полная непрерывность этого оператора. Пусть, например, ядро $K(t, s)$ удовлетворяет неравенству

$$K(t, s) \geqslant a_0 > 0 \qquad (t, s \in \Omega) \tag{21.2}$$

и пусть оператор (21.1) вполне непрерывен в некотором пространстве $L_\alpha$. Тогда этот оператор $A$ оставляет инвариантным конус $\mathcal{K}$ неотрицательных функций в $L_\alpha$ и удовлетворяет неравенству

$$Ax_0(t) \geqslant a_0 \operatorname{mes} \Omega x_0(t) \qquad (t \in \Omega),$$

где $x_0(t) \equiv 1$. Поэтому из общих теорем о линейных положительных операторах (см., например, М. Г. Крейн и М. А. Рутман [1]), М. А. Красносельский [9]) вытекает, что оператор

(21.1) имеет нормированную положительную собственную функцию. Этой собственной функции соответствует положительное собственное значение $\lambda_0$, совпадающее со спектральным радиусом оператора (21.1).

Перейдем к неоднородному линейному уравнению

$$\lambda x(t) = \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds + f(t). \qquad (21.3)$$

Пусть оператор (21.1) вполне непрерывен в пространстве $E$ и пусть $f \in E$. Тогда из общей теории вполне непрерывных операторов (см., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1]) следует справедливость для уравнения (21.3) альтернатив Фредгольма.

Полная непрерывность линейного интегрального оператора (21.1) важна и в ряде других задач.

**21.2. О приближенном решении уравнений.** Рассмотрим задачу о приближенном решении интегрального уравнения

$$x(t) = \mu \int_\Omega K(t, s)\, x(s)\, ds + f(t). \qquad (21.4)$$

Будем считать, что оператор (21.1) действует и непрерывен в пространстве $E$ и $f \in E$. Тогда при достаточно малых $\mu$ спектральный радиус оператора $\mu A$ меньше чем 1 и поэтому уравнение (21.4) имеет в $E$ единственное решение $x^*$. К этому решению $x^*$ по норме пространства $E$ сходятся последовательные приближения

$$x_{n+1}(t) = \mu \int_\Omega K(t, s)\, x_n(s)\, ds + f(t) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (21.5)$$

Во многих случаях желательно установить сходимость последовательных приближений по какой-либо более сильной норме $\|x\|_{E_1}$, чем норма $\|x\|_E$ пространства $E$. Например, если $E = L_\alpha$, то часто желательно установить, что последовательные приближения сходятся равномерно. Подобные теоремы можно получить совсем просто, если некоторая степень $A^{k_0}$ оператора (21.1) действует из пространства $E$ в пространство $E_1$.

Действительно, простой подсчет показывает, что

$$x^* - x_n = \mu^{k_0} A^{k_0} (x^* - x_{n-k_0}) \quad (n = k_0,\ k_0 + 1,\ \ldots).$$

Поэтому

$$\| x^* - x_n \|_{E_1} \leqslant |\mu|^{k_0} \| A^{k_0} \|_{E \to E_1} \| x^* - x_{n-k_0} \|_E$$
$$(n = k_0,\ k_0 + 1,\ \ldots)$$

и из

$$\lim_{n \to \infty} \| x^* - x_n \|_E = 0$$

вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} \| x^* - x_n \|_{E_1} = 0.$$

Например, если $K(t, s)$ — ядро типа потенциала (см. § 8), то последовательные приближения (21.5) сходятся к решению уравнения (21.4) равномерно (несмотря на то, что само решение может быть неограниченным, если неограничена функция $f(t)$!).

Изложенное соображение указывает путь «регуляризации» итерационного процесса (21.5). При решении уравнения

$$x = \mu A x + f \tag{21.6}$$

целесообразно вначале найти функцию

$$x_{k_0} = f + \mu A f + \ldots + \mu^{k_0 - 1} A^{k_0 - 1} f, \tag{21.7}$$

а затем произвести замену

$$y = x - x_{k_0}. \tag{21.8}$$

Для определения $y$ мы получим уравнение

$$y = \mu A y + f_1 \tag{21.9}$$

с «хорошим» свободным членом

$$f_1 = \mu^{k_0} A^{k_0} f, \tag{21.10}$$

который принадлежит пространству $E_1$. Последовательные приближения

$$y_{n+1} = \mu A y_n + f_1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

будут принадлежать $E_1$ и сходиться по норме пространства $E_1$.

Отметим, что в качестве $E_1$ иногда могут быть использованы различные пространства дифференцируемых функций, В этих случаях последовательные приближения сходятся вместе со своими производными до определенного порядка.

Для приближенного решения линейных интегральных уравнений широко применяются так называемые проекционные методы (метод Галеркина, метод Г. И. Петрова, метод Ритца, метод наименьших квадратов и др.). Опишем общую схему проекционных методов (С. Г. Михлин [1, 2], Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], М. А. Красносельский [7]).

Пусть в пространстве $E$ задана последовательность линейных проекционных операторов

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots, \tag{21.11}$$

каждый из которых проектирует $E$ на соответствующее конечномерное подпространство $E_n = P_nE$. Будем считать, что нормы операторов $P_n$ равномерно ограничены и для каждого $x \in E$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| x - P_nx \|_E = 0. \tag{21.12}$$

Пусть, например, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — базис в пространстве $E$. Тогда каждый элемент $x \in E$ однозначно представим рядом

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x)\, e_i, \tag{21.13}$$

где $\xi_i(x)$ — линейные функционалы. Указанным выше условиям удовлетворяют операторы

$$P_nx = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\, e_i \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{21.14}$$

Рассмотрим уравнение

$$x = \mu Ax + f \tag{21.15}$$

с вполне непрерывным оператором $A$. Галеркинские приближенные уравнения определяются равенствами

$$x = \mu P_nAx + P_nf \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{21.16}$$

Точные решения $x_n$ этих уравнений объявляются приближенными решениями уравнения (21.15). Ясно, что решения $x_n$ нужно искать в конечномерном подпространстве $E_n$. Иначе говоря, отыскание решения $x_n$ эквивалентно решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Например, если операторы $P_n$ определены формулой (21.14), то решение $x_n$ имеет вид

$$x_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \tag{21.17}$$

причем коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются из системы

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mu\xi_1(Ae_1)\alpha_1 + \mu\xi_1(Ae_2)\alpha_2 + \ldots + \mu\xi_1(Ae_n)\alpha_n + \xi_1(f), \\ \alpha_2 &= \mu\xi_2(Ae_1)\alpha_1 + \mu\xi_2(Ae_2)\alpha_2 + \ldots + \mu\xi_2(Ae_n)\alpha_n + \xi_2(f), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= \mu\xi_n(Ae_1)\alpha_1 + \mu\xi_n(Ae_2)\alpha_2 + \ldots + \mu\xi_n(Ae_n)\alpha_n + \xi_n(f). \end{aligned} \tag{21.18}$$

Пусть уравнение (21.15) имеет единственное решение $x^* \in E$. Тогда справедливо следующее утверждение (см., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], М. А. Красносельский [7]).

Каждое галеркинское уравнение (21.16) при достаточно больших $n$ имеет единственное решение $x_n$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x^* \|_E = 0. \tag{21.19}$$

Быстрота сходимости метода Галеркина характеризуется неравенством

$$\| x_n - x^* \|_E \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| P_n x^* - x^* \|_E \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{21.20}$$

где $\varepsilon_n \to 0$.

В случае, когда проекционные операторы определены формулами (21.14), разность $P_n x^* - x^*$ совпадает с остатком $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \xi_i(x^*) e_i$ разложения в ряд Фурье (21.13) решения $x^*$ уравнения (21.15). Поэтому формула (21.20) означает, что метод Галеркина сходится в той же быстротой, с какой сходится разложение решения в ряд Фурье.

Решение уравнения (21.15) нам, конечно, неизвестно. Однако в ряде случаев вывод о быстроте сходимости разложения решения в ряд Фурье можно сделать по априорным оценкам гладкости решения. Для оценки гладкости решения удобно применять изложенные в предыдущем пункте соображения, которые мы применяли для доказательства ограниченности собственных функций интегральных операторов. При практическом применении проекционных методов целесообразно переходить, если это возможно, к таким эквивалентным уравнениям, решения которых разлагаются в «быстро сходящиеся» ряды Фурье. Для этого часто удобно от уравнения (21.6) переходить при помощи замены (21.8) к уравнению (21.9). При такой замене мы приходим к уравнению, решение $y^*$ которого равно $\mu^{k_1} A^{k_1} x^*$. Если оператор $A^{k_1}$ «существенно улучшает» функции, то ряд Фурье функции $y^*$ сходится быстрее *) ряда Фурье решения $x^*$ уравнения (21.6). Подчеркнем, что при применении метода Галеркина к решению уравнения (21.6) переход к уравнению (21.9) не связан с предположением о малости параметра $\mu$.

Проекционные методы (в частности, метод Галеркина) не являются итерационными, так как галеркинское приближение $x_n$ не может быть существенным образом использовано для построение галеркинского приближения $x_{n+1}$. Возникает естествениая мысль об объединении идеи метода Галеркина с возможностью построения сходящихся последовательных приближений.

Рассмотрим снова линейное уравнение

$$x = Ax + f, \tag{21.21}$$

где $A$ — вполне непрерывный линейный оператор (например, интегральный), действующий в пространстве $E$. Пусть $P$—оператор проектирования на некоторое конечномерное подпространство $E_0 \subset E$, а $Q = I - P$. Каждый элемент $x \in E$ представим в виде

$$x = u + v \quad (u = Px, \ v = Qx). \tag{21.22}$$

Тогда уравнение (21.21) эквивалентно системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u &= PAu + PAv + Pf, \\ v &= QAu + QAv + Qf. \end{aligned}\right\} \tag{21.23}$$

Так как пространство $E_0$ конечномерно, то первое из уравнений (21.23) в общем случае достаточно просто разрешить относительно $u$. Его решение имеет вид

$$u = (I - PA)^{-1} PAv + f_1, \tag{21.24}$$

*) Вопрос о быстроте сходимости рядов Фурье по собственным функциям самосопряженных операторов обсуждается в § 22.

где

$$f_1 = (I - PA)^{-1} Pf. \tag{21.25}$$

Подставляя найденное значение $u$ во второе из уравнений (21.23), получим

$$v = QA(I - PA)^{-1} v + f_2, \tag{21.26}$$

где

$$f_2 = QAf_1 + Qf. \tag{21.27}$$

Из полной непрерывности оператора $A$ следует, что при удачном выборе конечномерного оператора $P$ оператор $QA(I-PA)^{-1}$ будет иметь малую норму. Поэтому решение уравнения (21.6) может быть получено методом последовательных приближений

$$v_{n+1} = QA(I - PA)^{-1} v_n + f_2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{21.28}$$

Метод (21.28) эквивалентен построению последовательных приближений $v_n$, $z_n$ по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} z_n &= PAz_n + v_n, \\ v_{n+1} &= QAz_n + f_2 \end{aligned}\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Метод (21.28) можно рассматривать как обычный итерационный процесс, применяемый для решения эквивалентного (21.21) уравнения

$$x = (I - S)^{-1} (A - S) x + (I - S)^{-1} f, \tag{21.29}$$

где $S$ — такой линейный оператор, что разность $A - S$ мала, а $(I - S)^{-1}$ существует и «просто» вычисляется.

**21.3. Существование решений у нелинейных интегральных уравнений.** Многие задачи требуют решения или исследования нелинейных операторных уравнений. Часто встречаются нелинейные интегральные уравнения. К ним, в частности, сводятся многие нелинейные краевые задачи как для обыкновенных уравнений, так и уравнений с частными производными.

Мы ограничимся некоторыми простейшими утверждениями, относящимися к нелинейным интегральным уравнениям

$$x(t) = \mu \int_\Omega K[t, s, x(s)]\, ds + f(t). \tag{21.30}$$

Предположим, что удается установить полную непрерывность оператора

$$Ax(t)=\int_{\Omega} K[t,\ s,\ x(s)]\,ds \tag{21.31}$$

в некотором функциональном пространстве $E$ (для этого могут быть использованы результаты из § 19). Тогда *уравнение* (21.30) *при малых* $\mu$ *имеет по крайней мере одно решение в* $E$. Для доказательства достаточно рассмотреть оператор $\mu Ax+f$ на каком-либо шаре $\|x-f\|_E\leqslant\rho_0$ и заметить, что при малых $\mu$ он преобразует этот шар в себя. После этого остается сослаться на принцип Шаудера неподвижной точки.

Допустим, что оператор (21.31) имеет асимптотическую производную $A'(\infty)$ (см. § 20). Эта производная вместе с оператором (21.31) является вполне непрерывным оператором, собственные значения которого обозначим через

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots \tag{21.32}$$

*Если*

$$\mu\neq\frac{1}{\lambda_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots), \tag{21.33}$$

*то уравнение* (21.30) *имеет по крайней мере одно решение в* $E$. Для доказательства нужно уравнение (21.30) заменить эквивалентным

$$x=\mu\,[I-\mu A'(\infty)]^{-1}\,[Ax-A'(\infty)\,x]+[I-\mu A'(\infty)]^{-1}f \tag{21.34}$$

и заметить, что стоящий в правой части оператор вполне непрерывен и преобразует в себя каждый шар $\|x\|\leqslant\rho$ достаточно большого радиуса $\rho$. После этого остается сослаться на принцип Шаудера.

Для доказательства теорем существования решений у уравнения (21.30) с вполне непрерывным интегральным оператором (21.31) могут быть применены и различные принципы неподвижной точки, отличные от принципа Шаудера (см. М. А. Красносельский [7]), может быть применена теория положительных операторов (М. А. Красносельский [9]) и т. д. Эти методы могут быть использованы и для исследований зависимости решений от параметров, для доказательства существования решений, отличных от известных тривиальных, для оценки числа решений и др.

Приведем одно из таких простых утверждений. Допустим, что одно решение $x^*(t)$ уравнения (21.30) нам известно Пусть оператор $A$ имеет производную $A'(\infty)$ и дифференцируем в точке $x^*(t)$ (см. § 20), причем число $\frac{1}{\mu}$ не является собственным значением ни оператора $A'(\infty)$, ни оператора $A'(x^*)$. Тогда при $\mu > 0$ *для существования у уравнения* (21.30) *по крайней мере одного отличного от* $x^*$ *решения в* $E$ *достаточно, чтобы была нечетна сумма кратностей вещественных собственных значений операторов* $A'(\infty)$ *и* $A'(x^*)$, *бо́льших чем* $\frac{1}{\mu}$. Для доказательства нужно воспользоваться теорией вполне непрерывных векторных полей (см. М. А. Красносельский [7]) и заметить, что на границе области, полученной из шара $\|x\| \leqslant \rho_0$ большого радиуса $\rho_0$ вырезыванием любой малой окрестности точки $x^*$, векторное поле $x - \mu A x - f$ имеет ненулевое вращение (оно равно 2 или $-2$).

Отметим, что в ряде случаев для доказательства теорем существования удобно пользоваться следующим известным принципом неподвижной точки.

Оператор $A(x; \lambda)$ $(x \in E,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ назовем *вполне непрерывным*, если он непрерывен по совокупности переменных и если каждое множество $\{y;\ y = A(x; \lambda),\ \|x\| \leqslant \rho_0,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ компактно в $E$.

Пусть для всех решений $x(\lambda)$ всех уравнений

$$x = A(x; \lambda) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1) \tag{21.35}$$

с вполне непрерывным оператором $A(x; \lambda)$ установлена общая априорная оценка

$$\|x(\lambda)\| \leqslant R_0 \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1). \tag{21.36}$$

Пусть оператор $A(x; 1)$ удовлетворяет условию

$$\|A(x; 1)\| < R_0 \quad (\|x\| = R_0). \tag{21.37}$$

Тогда уравнение

$$x = A(x; 0) \tag{21.38}$$

имеет по крайней мере одно решение.

Для доказательства введем в рассмотрение вспомогательный оператор

$$Bx=\begin{cases} A(x;\ 0), & \text{если } \|x\|\leqslant R_0,\\ A\left(x;\ \dfrac{\|x\|}{R_0}-1\right), & \text{если } R_0\leqslant\|x\|\leqslant 2R_0,\\ \dfrac{\|x\|}{4R_0-\|x\|}\,A\left(\dfrac{4R_0-\|x\|}{\|x\|}\,x;\ 1\right), & \text{если } 2R_0\leqslant\|x\|\leqslant 3R_0,\\ 3A\left(\dfrac{R_0x}{\|x\|};\ 1\right), & \text{если } 3R_0\leqslant\|x\|<\infty. \end{cases} \tag{21.39}$$

Легко видеть, что оператор $B$ вполне непрерывен и преобразует все пространство $E$ в свою компактную часть. Из принципа Шаудера вытекает, что оператор $B$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку $x^*$. Как показывает простой подсчет, из оценок (21.36) и (21.37) вытекает неравенство $\|x^*\|\leqslant R_0$. Поэтому $x^*$ является решением уравнения (21.38).

Отметим в заключение, что для приближенного решения уравнений типа (21.30) (и более общих уравнений с вполне непрерывными операторами) применимы проекционные методы, изложенные в предыдущем пункте для линейных уравнений. Эти проекционные методы (М. А. Красносельский [7]) сходятся к решению $x^*$, если производная Фреше соответствующего оператора в точке $x^*$ существует и если 1 не является ее собственным значением. В этих случаях быстрота сходимости характеризуется, как и в случае линейных уравнений, неравенствами вида (21.20). Таким образом, при исследовании сходимости проекционных методов полезно знать, что интегральный оператор (21.31) дифференцируем во всех точках некоторого множества П, которому принадлежит неизвестное нам решение $x^*$. Теоремы о дифференцируемости интегральных операторов на некоторых плотных в $L_\alpha$ множествах установлены в § 20.

**21.4. Собственные функции нелинейных интегральных операторов.** Рассмотрим нелинейные уравнения вида

$$x=A(x;\ \mu), \tag{21.40}$$

где $\mu$ — скалярный параметр. Ставится вопрос об отыскании таких значений $\mu$, при которых уравнение (21.40) имеет ненулевые решения. Часто оператор $A(x;\ \mu)$ удовлетворяет условию

$$A(0;\ \mu) \equiv 0; \qquad (21.41)$$

иначе говоря, уравнение (21.40) при всех значениях параметра $\mu$ имеет нулевое решение.

Уравнения вида (21.40) возникают во многих задачах нелинейной механики: отыскание критических нагрузок и форм потери устойчивости упругих систем, исследование автоколебательных процессов, исследование процесса рождения волн в движущейся жидкости и т. д. В подобных задачах роль параметра $\mu$ могут играть нагрузки, частоты автоколебаний, скорости движения жидкости.

Мы ограничимся случаем, когда уравнение (21.40) имеет частный вид

$$x = \mu A x. \qquad (21.42)$$

Ненулевые решения этого уравнения по внешней аналогии с линейными задачами называют собственными функциями, а соответствующие значения параметра $\mu$ — характеристическими значениями. Конечно, характеристические значения и собственные функции в теории нелинейных операторов играют совершенно не ту роль, к которой мы привыкли в линейном анализе.

Для доказательства существования ненулевых решений уравнений (21.40) или (21.42) и для исследования их зависимости от параметра $\mu$ развиты различные методы. В частности, доказан ряд общих теорем, относящихся к уравнениям с вполне непрерывными операторами (см. М. А. Красносельский [7] и [9]). Результаты гл. 5 позволяют применять все эти теоремы к исследованию интегральных уравнений

$$x(t) = \int_{\Omega} K[t,\ s,\ x(s),\ \mu]\, ds \qquad (21.43)$$

и

$$x(t) = \mu \int_{\Omega} K[t,\ s,\ x(s)]\, ds. \qquad (21.44)$$

В качестве иллюстрации мы приведем лишь некоторые простейшие утверждения.

Предположим, что оператор

$$Ax(t) = \int_{\Omega} K[t, s, x(s)]\, ds \tag{21.45}$$

вполне непрерывен в некотором пространстве $L_\alpha$ (см. § 19). *Допустим, что ядро* $K(t, s, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$K(t, s, u) \geqslant k_0 u \quad (t, s \in \Omega,\ 0 < u < \infty), \tag{21.46}$$

*где* $k_0 > 0$. *Тогда уравнение* (21.44) *имеет континуум положительных решений*, соответствующих некоторым значениям параметра $\mu$. Среди этих решений есть функции со сколь угодно большой и сколь угодно малой нормами. Сформулированное утверждение непосредственно вытекает из общих теорем об операторах с монотонными минорантами. Если дополнительно предположить, что $K(t, s, u)$ не убывает и вогнута по переменной $u$, то положительные решения уравнения (21.44) существуют при значениях $\mu$ из некоторого интервала $(\mu_1, \mu_2)$, причем каждому $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ соответствует единственное положительное решение $x(\mu)$. Эти утверждения непосредственно вытекают из общих теорем об уравнениях с вогнутыми операторами; они являются развитием известных результатов П. С. Урысона [1].

Число $\mu_0$ называется *точкой бифуркации уравнения* (21.44), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует по крайней мере одно такое $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$, при котором уравнение (21.44) имеет ненулевое решение в шаре $\|x\| < \varepsilon$. Допустим, что оператор, определенный правой частью уравнения (21.44), нулевую функцию переводит в нулевую, вполне непрерывен в пространстве $L_\alpha$ и дифференцируем (см. § 20) в нулевой точке этого пространства. Пусть линеаризованное в нуле уравнение (21.44) имеет вид

$$x(t) = \mu \int_{\Omega} K_0(t, s)\, x(s)\, ds. \tag{21.47}$$

Из общих теорем о точках бифуркации (М. А. Красносельский [7,9]) вытекает, что каждое нечетнократное характеристическое значение $\mu_0$ линейного уравнения (21.47) является точкой бифуркации для нелинейного уравнения (21.44). Это простейшее утверждение может быть дополнено критериями, которые дают оценку числа малых решений нелинейного уравнения (21.44) при значениях $\mu$, близких к $\mu_0$. Отметим еще, что в случае четнократного характеристического значения $\mu_0$ нужно вычислить индекс $\gamma$ (М. А. Красносельский [7], В. Б. Меламед [1], М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволоцкий, П. П. Забрейко [1], П. П. Забрейко и М. А. Красносельский [1]) нулевой особой точки векторного поля $\Phi x = x - \mu_0 A x$; если $|\gamma| \neq 1$, то $\mu_0$ является точкой бифуркации нелинейного уравнения (21.44).

Близкие утверждения имеют место для уравнения (21.43).

## § 22. Сходимость метода Фурье *)

**22.1. Общие теоремы о сходимости рядов Фурье.** Пусть $A$ — строго положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H$ (см. § 11), имеющий вполне непрерывный обратный $A^{-1}$. Тогда операторы $A$ и $A^{-1}$ допускают представления

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u, e_i) e_i \quad (u \in D(A)), \tag{22.1}$$

$$A^{-1}u = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (u, e_i) e_i \quad (u \in H). \tag{22.2}$$

Здесь через $\{e_i\}$ обозначена полная ортонормированная система собственных функций, а через $\lambda_i$ — соответствующие собственные значения оператора $A$. В дальнейшем нам удобно считать, что собственные значения не убывают при возрастании их номера ($\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$). Полная непрерывность оператора $A^{-1}$ равносильна тому, что $\lambda_i \to \infty$.

Каждый элемент $u \in H$ можно разложить в ряд Фурье

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i) e_i. \tag{22.3}$$

*) Основные соображения этого параграфа были указаны в рецензии М. А. Красносельского на докторскую диссертацию В. А. Ильина. Затем они были детализированы в статье М. А. Красносельского и Е. И. Пустыльника [1].

Этот ряд сходится по норме пространства $H$. Если $H = L_{\frac{1}{2}}$, то ряд (22.3) сходится в среднем квадратичном.

Хорошо известны различные теоремы (см., например, Н. К. Бари [1], О. А. Ладыженская [1], В. А. Ильин [1, 2]) об условиях, которые гарантируют сходимость рядов Фурье не только в среднем квадратичном, но и более сильном смысле. Например, может идти речь о равномерной сходимости ряда Фурье, о его абсолютной сходимости, о сходимости рядов Фурье после формального дифференцирования и т. д. Оказывается, что ряд важных заключений о рядах Фурье может быть совсем просто получен из установленных в главах 3 и 4 общих теорем о свойствах дробных степеней оператора (22.1).

В этом пункте мы приведем две общие теоремы, относящиеся к абстрактным операторам $A$.

Теорема 22.1. *Пусть оператор* $A^{-\sigma}$ $(\sigma \geqslant 0)$ *действует из* $H$ *в некоторое банахово пространство* $E$ *и является непрерывным оператором*:

$$\left\| A^{-\sigma} u \right\|_E \leqslant a \| u \|_H \qquad (u \in H). \tag{22.4}$$

*Пусть* $u \in D\left(A^{\sigma+\tau}\right)$, *где* $\tau \geqslant 0$.

*Тогда* $u \in E$ *и ряд* (22.3) *сходится к* $u$ *по норме пространства* $E$. *При этом быстрота сходимости характеризуется оценкой*

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{n} (u,\ e_i)\, e_i \right\|_E = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right). \tag{22.5}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что из (22.4) вытекает принадлежность всех собственных функций $e_i$ пространству $E$. Поэтому частные суммы ряда Фурье (22.3) каждого элемента $u \in H$ принадлежат пространству $E$.

Так как $u \in D\left(A^{\sigma+\tau}\right)$, то найдется такой элемент $v \in H$, что

$$u = A^{-\sigma-\tau} v. \tag{22.6}$$

Из (22.4) вытекает, что $u \in E$.

Разложим в ряд Фурье элемент $A^{-\tau} v$:

$$A^{-\tau} v = \sum_{i=1}^{\infty} \left(A^{-\tau} v,\ e_i\right) e_i. \tag{22.7}$$

что разложение сходится по норме пространства $H$. Более того,

$$\left\| A^{-\tau}v - \sum_{i=1}^{n} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right\|_H = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right\|_H =$$

$$= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(v,\ A^{-\tau} e_i\right) e_i \right\|_H = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^{-\tau} (v,\ e_i) e_i \right\|_H,$$

откуда

$$\left\| A^{-\tau}v - \sum_{i=1}^{n} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right\|_H \leqslant \lambda_{n+1}^{-\tau} \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} (v,\ e_i) e_i \right\|_H,$$

т. е.

$$\left\| A^{-\tau}v - \sum_{i=1}^{n} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right\|_H = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right). \tag{22.8}$$

Из (22.6) и (22.4) вытекает неравенство

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{n} (u,\ e_i) e_i \right\|_E = \left\| A^{-\sigma} \left[ A^{-\tau}v - \sum_{i=1}^{n} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right] \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant a \left\| A^{-\tau}v - \sum_{i=1}^{n} \left(A^{-\tau}v,\ e_i\right) e_i \right\|_H,$$

которое в сочетании с (22.8) приводит к равенству (22.5).

Теорема доказана.

Ряд (22.7) сходится в пространстве $H$ при любой перестановке его членов, так как эти члены взаимно ортогональны. Отсюда вытекает, что в условиях теоремы 22.1 ряд (22.3) сходится в пространстве $E$ также при любой перестановке его членов. Если, например, $E$ — пространство $C$ непрерывных функций, то возможность переставлять члены ряда Фурье означает, что ряд (22.3) сходится абсолютно.

Теорема 22.2. *Пусть линейный оператор $B$ определен на области определения $D(A^\sigma)$ оператора $A^\sigma$, где $\sigma \geqslant 0$, и удовлетворяет неравенству*

$$\left\| BA^{-\sigma}u \right\|_E \leqslant b \left\| u \right\|_H \quad (u \in H). \tag{22.9}$$

*Пусть $u \in D\left(A^{\sigma+\tau}\right)$, где $\tau \geqslant 0$.*

*Тогда к ряду*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u,\ e_i)\, e_i \tag{22.10}$$

*можно почленно применить оператор* $\boldsymbol{B}$ *и полученный ряд*

$$Bu = \sum_{i=1}^{\infty} (u,\ e_i)\, Be_i \tag{22.11}$$

*будет сходиться по норме пространства* $E$. *При этом быстрота сходимости характеризуется оценкой*

$$\left\| Bu - \sum_{i=1}^{n} (u,\ e_i)\, Be_i \right\|_E = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right). \tag{22.12}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 22.1. Отметим, что члены ряда (22.11) можно произвольным образом переставлять.

В заключение пункта укажем, что теоремы 22.1 и 22.2 можно перенести на тот случай, когда оператор $A$ действует не в гильбертовом пространстве $H$, а в некотором банаховом пространстве $E_0$. В этом случае нужно предполагать, что собственные функции $e_i$ оператора $A$ образуют базис в $E_0$. Следует иметь в виду, что этот базис может оказаться условным (члены в разложениях по этому базису не всегда можно переставлять); тогда разложения (22.3) и (22.11) сходятся в пространстве $E$ также условно.

**22.2. Сходимость рядов Фурье по собственным функциям эллиптических операторов.** В этом пункте через $A$ обозначается самосопряженный и строго положительно определенный эллиптический оператор (см. § 16) порядка $2k$, определенный на функциях $N$ переменных. Мы будем считать, что коэффициенты дифференциального выражения (16.5) и граничных условий (16.9) достаточно гладкие. Достаточно гладкой будем считать и границу $\Gamma$ соответствующей области $\Omega$ (см. п. 16.1).

Через $D^r$, как обычно, будем обозначать оператор дифференцирования порядка $|r|$.

Лемма 22.1. *Операторы* $D^r A^{-\sigma}$ *при* $\sigma > \sigma(|r|)$, *где*

$$\sigma(|r|) = \frac{|r|}{2k} + \frac{N}{4k} \quad (|r| = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2k-1) \qquad (22.13)$$

*действуют из* $L_{\frac{1}{2}}$ *в* $C$ *и вполне непрерывны.*

Доказательство. При каждом $i = 0,\ 1,\ \ldots$ для позитивного эллиптического оператора $A$ выполняются неравенства

$$\|Au\|_{W^i_{\frac{1}{2}}} \geqslant a_i \|u\|_{W^{i+2k}_{\frac{1}{2}}} \quad \left(u \in D(A) \cap W^{i+2k}_{\frac{1}{2}}\right) \qquad (22.14)$$

(см., например, С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг [1]). Следовательно, при любом $m = 1,\ 2,\ \ldots$ выполняются неравенства

$$\|A^m u\|_{L_{\frac{1}{2}}} \geqslant c_m \|u\|_{W^{2km}_{\frac{1}{2}}} \quad \left(u \in D(A^m)\right). \qquad (22.15)$$

Неравенства (22.15), в частности, означают, что операторы $A^{-m}$ действуют из $L_{\frac{1}{2}}$ в $W^{2km}_{\frac{1}{2}}$ и непрерывны. Поэтому операторы $D^r A^{-m}$ $(|r| = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2k-1)$ действуют из $L_{\frac{1}{2}}$ в $W^{2km-|r|}_{\frac{1}{2}}$ и непрерывны.

Из теорем вложения С. Л. Соболева вытекает, что операторы $D^r A^{-m}$ при

$$m > \frac{1}{2k}\left(\frac{N}{2} + |r|\right)$$

действуют из $L_{\frac{1}{2}}$ в $C$ и вполне непрерывны.

Пусть

$$m_0 = \left[\frac{N}{4k} + \frac{|r|}{2k}\right] + 1.$$

Из мультипликативного неравенства (16.35) при $l = |r|$, $l_0 = 2km_0$ следует, что

$$\|u\|_{C^{|r|}} \leqslant M\left(\|u\|_{W^{2km_0}_{\frac{1}{2}}}\right)^{\tau_0}\left(\|u\|_{L_{\frac{1}{2}}}\right)^{1-\tau_0}, \qquad (22.16)$$

где

$$\tau_0 = \frac{|r|}{2km_0} + \frac{N}{4km_0}.$$

Из (22.16) и (22.15) вытекает неравенство

$$\|D^r u\|_C \leqslant M_1 \left(\|A^{m_0} u\|_{L_{\frac{1}{2}}}\right)^{\tau_0} \left(\|u\|_{L_{\frac{1}{2}}}\right)^{1-\tau_0}. \qquad (22.17)$$

Применим теперь к операторам $A^{m_0}$ и $D^r$ теорему 16.3. В силу этой теоремы операторы $D^r(A^{m_0})^{-\tau}$ при $\tau > \tau_0$ действуют из $L_{\frac{1}{2}}$ в $C$ и вполне непрерывны. Так как

$$(A^{m_0})^{-\tau} = A^{-m_0\tau},$$

то последнее утверждение означает, что операторы $D^r A^{-\sigma}$ при $\sigma > m_0\tau_0 = \sigma(|r|)$ действуют из $L_{\frac{1}{2}}$ в $C$ и вполне непрерывны.

Лемма доказана.

Объединяя эту лемму с теоремой 22.2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 22.3. *Пусть $u \in D(A^{\omega})$, где $\omega > \frac{N}{4k}$, и пусть $0 \leqslant |r| < 2k\omega - \frac{N}{2}$.*

*Тогда ряд Фурье (22.2) можно почленно продифференцировать $|r|$ раз и полученный ряд*

$$D^r u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, e_i) D^r e_i \qquad (22.18)$$

***будет сходиться абсолютно и равномерно. Быстрота сходимости характеризуется при этом оценкой***

$$\left\| D^r u - \sum_{i=1}^{n} (u, e_i) D^r e_i \right\|_C = o\left(\lambda_n^{-\omega + \frac{N}{4k} + \frac{|r|}{2k} + \varepsilon}\right), \qquad (22.19)$$

*где $\varepsilon$ — произвольное положительное число.*

Если функция $u$ принадлежит области определения оператора $A^{-\tau}$, где $\tau$ настолько мало, что для исследования ряда Фурье функции $u$ нельзя применить теорему 22.3, то из теоремы 22.1 можно сделать вывод о том, что ряд Фурье (22.18) сходится не только в среднем квадратичном, но и по норме некоторых пространств $L_\alpha$, где $\alpha < \frac{1}{2}$. Заметим, что теорема 16.6 позволяет в ряде случаев указать точные значения минимального индекса $\alpha$. Вычисления предоставляем читателю.

Из леммы 22.1 можно получить*) оценки собственных функций эллиптических операторов $A$ порядка $2k$, а также оценки производных этих функций. Действительно, при каждом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\max|e_i(x)| = \lambda_i^{\frac{N}{4k}+\varepsilon}\left\|A^{-\frac{N}{4k}-\varepsilon}e_i\right\|_C \leqslant a(\varepsilon)\lambda_i^{\frac{N}{4k}+\varepsilon}\|e_i\|_H,$$

т. е.

$$|e_i(x)| \leqslant a(\varepsilon)\lambda_i^{\frac{N}{4k}+\varepsilon} \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{22.20}$$

Из той же леммы вытекает, что

$$|D^r e_i(x)| \leqslant b(\varepsilon, r)\lambda_i^{\frac{N}{4k}+\frac{|r|}{2k}+\varepsilon}$$
$$(i = 1, 2, \ldots; \ |r| = 1, 2, \ldots, 2k-1). \tag{22.21}$$

Более точные оценки собственных функций и их производных получены из других соображений Ю. М. Березанским [1—3].

В связи с приведенными оценками и с оценками быстроты сходимости рядов Фурье возникает естественная задача об асимптотике собственных значений $\lambda_i$. Этому вопросу посвящена большая литература. Мы приведем здесь лишь одну грубую оценку.

Из леммы 22.1 и из теоремы 6.2 вытекает, что $A^{-\left(\frac{N}{4k}+\varepsilon\right)}$ при $\varepsilon > 0$ является интегральным оператором

$$A^{-\left(\frac{N}{4k}+\varepsilon\right)}u(x) = \int_\Omega K(x, y)\,u(y)\,dy, \tag{22.22}$$

*) Близкие соображения (основанные на применении мультипликативных неравенств) для оценок собственных функций применял С. Г. Крейн.

ядро которого суммируемо с квадратом. Из теоремы Гильберта — Шмидта вытекает, что ряд из квадратов собственных значений интегрального оператора (22.22) сходится. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-\frac{N}{2k}-2\varepsilon} < \infty. \qquad (22.23)$$

**22.3. Метод Фурье для гиперболических уравнений.** Дробные степени $A^\tau$ строго положительно определенного самосопряженного оператора $A$ могут быть использованы и при обосновании метода Фурье решения гиперболических и параболических уравнений.

Рассмотрим вначале гиперболическое уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = f(t), \qquad (22.24)$$

где $A$, как и выше, строго положительно определенный самосопряженный оператор

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (u, e_i) e_i, \qquad (22.25)$$

имеющий вполне непрерывный обратный в гильбертовом пространстве $H$, а $t$ изменяется на промежутке $[0, T]$.

Решение уравнения (22.24), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'_t(0) = v_0, \qquad (22.26)$$

может быть записано в виде

$$u(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) u_0 + A^{-\frac{1}{2}} \sin\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) v_0 + \\ + A^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \sin\left(A^{\frac{1}{2}} t - A^{\frac{1}{2}} s\right) f(s)\, ds, \qquad (22.27)$$

где

$$\cos\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \cos\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)(u, e_i) e_i,$$

$$\sin\left(A^{\frac{1}{2}} t\right) v_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \sin\left(t\sqrt{\lambda_i}\right)(u, e_i) e_i.$$

Легко видеть, что операторы $\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)$ и $\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)$ ограничены в $H$ при любом $t$ и их нормы не превосходят единицы.

Для решения уравнения (22.24) часто применяют метод Фурье. В этом методе решение (22.27) заменяется последовательностью приближенных решений

$$u_n(t)=P_n\left\{\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)u_0+A^{-\frac{1}{2}}\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)v_0+\right.$$
$$\left.+A^{-\frac{1}{2}}\int_0^t\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t-A^{\frac{1}{2}}s\right)f(s)\,ds\right\},\qquad(22.28)$$

где

$$P_n u=\sum_{i=1}^{n}(u,\ e_i)e_i\qquad(u\in H).\qquad(22.29)$$

Теорема 22.4. *Пусть оператор* $A^{-\sigma}$ $(\sigma>0)$ *действует из* $H$ *в пространство* $E$ *и непрерывен. Пусть* $u_0\in D(A^{\sigma+\tau})$, $v_0\in D\left(A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}\right)$ *и* $f(t)\in D\left(A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}\right)$ *при всех* $t\in[0,\ T]$, *причем функция*

$$\varphi(t)=A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}f(t)\qquad(22.30)$$

*непрерывна по норме пространства* $H$ *на* $[0,\ T]$. *Тогда приближения Фурье* (22.28) *сходятся к решению задачи* (22.24), (22.26) *по норме пространства* $E$ *равномерно относительно* $t\in[0,\ T]$. *Быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\|u(t)-u_n(t)\|_E=o\left(\lambda_n^{-\tau}\right).\qquad(22.31)$$

Доказательство. Введем обозначения

$$u_1=A^{\sigma+\tau}u_0,\qquad v_1=A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}v_0.$$

Тогда вектор-функции (22.27) и (22.28) можно записать в виде

$$u(t)=A^{-\sigma}u^{(1)}(t),\qquad u_n(t)=A^{-\sigma}u_n^{(1)}(t),$$

где

$$u^{(1)}(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) A^{-\tau}u_1 + \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) A^{-\tau}v_1 + \\ + \int_0^t \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t - A^{\frac{1}{2}}s\right) A^{-\tau}\varphi(s)\,ds,$$

$$u_n^{(1)}(t) = \cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) P_nA^{-\tau}u_1 + \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right) P_nA^{-\tau}v_1 + \\ + \int_0^t \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t - A^{\frac{1}{2}}s\right) P_nA^{-\tau}\varphi(s)\,ds.$$

Из непрерывности функции $\varphi(s)$ вытекает равномерная относительно $s \in [0, T]$ оценка

$$\|A^{-\tau}\varphi(s) - P_nA^{-\tau}\varphi(s)\|_H \leqslant \\ \leqslant \lambda_{n+1}^{-\tau}\|\varphi(s) - P_n\varphi(s)\|_H \leqslant \lambda_{n+1}^{-\tau}\alpha(n),$$

где $\alpha(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно,

$$\|A^{-\tau}v_1 - P_nA^{-\tau}v_1\|_H = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right), \quad \|A^{-\tau}u_1 - P_nA^{-\tau}u_1\|_H = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right).$$

Поэтому

$$\|u^{(1)}(t) - u_n^{(1)}(t)\|_H \leqslant \left\|\cos\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\left(A^{-\tau}u_1 - P_nA^{-\tau}u_1\right)\right\|_H + \\ + \left\|\sin\left(A^{\frac{1}{2}}t\right)\left(A^{-\tau}v_1 - P_nA^{-\tau}v_1\right)\right\|_H + \\ + \left\|\int_0^t \sin\left(A^{\frac{1}{2}}t - A^{\frac{1}{2}}s\right)\left[A^{-\tau}\varphi(s) - P_nA^{-\tau}\varphi(s)\right]ds\right\|_H \leqslant \\ \leqslant \|A^{-\tau}u_1 - P_nA^{-\tau}u_1\|_H + \|A^{-\tau}v_1 - P_nA^{-\tau}v_1\|_H + \\ + T\sup_{0 \leqslant s \leqslant T}\|A^{-\tau}\varphi(s) - P_nA^{-\tau}\varphi(s)\|_H = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right).$$

Следовательно,

$$\|u(t) - u_n(t)\|_E \leqslant \|A^{-\sigma}\|_{H \to E}\|u^{(1)}(t) - u_n^{(1)}(t)\|_H = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right).$$

Теорема доказана.

Если $A$ — эллиптический оператор порядка $2k$, то из доказанной теоремы вытекает, что приближения (22.28) сходятся абсолютно и равномерно к точному решению (22.27), если

$$\sigma > \frac{N}{4k}.$$

Аналогично теореме 22.4 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 22.5. *Пусть линейный оператор $B$ определен на $D(A^\sigma)$, где $\sigma > 0$, и удовлетворяет неравенству* (22.9). *Пусть $u_0 \in D(A^{\sigma+\tau})$, $v_0 \in D\left(A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}\right)$ и $f(t) \in D\left(A^{\sigma+\tau-\frac{1}{2}}\right)$ при всех $t \in [0, T]$, причем функция* (22.30) *непрерывна по норме пространства $E$.*

*Тогда к приближениям Фурье* (22.28) *можно применять оператор $B$, причем вектор-функции $Bu_n(t)$ сходятся к вектор-функции $Bu(t)$, где $u(t)$ — точное решение* (22.27), *по норме пространства $E$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Быстрота сходимости характеризуется при этом оценкой*

$$\| Bu(t) - Bu_n(t) \|_E = o\left(\lambda_n^{-\tau}\right). \qquad (22.32)$$

Если в условиях этой теоремы в качестве $B$ рассматривать операторы дифференцирования $D^r$, а в качестве пространства $E$ рассматривать пространство $C$ непрерывных функций, то мы получим теоремы о равномерной и абсолютной сходимости приближений Фурье вместе со своими производными до определенных порядков.

**22.4. Метод Фурье для параболических уравнений.** Рассуждения предыдущего пункта почти без изменений переносятся на уравнения параболического типа

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t). \qquad (22.33)$$

Здесь, как и выше, $A$ — строго положительно определенный самосопряженный оператор с собственными функциями $e_i$ и собственными значениями $\lambda_i$. Уравнение (22.33) будем решать при начальном условии

$$u(0) = u_0, \qquad (22.34)$$

где $u_0$ произвольный элемент пространства $H$.

Решением задачи (22.33) — (22.34) называют непрерывную на $[0, T]$ вектор-функцию, которая удовлетворяет уравнению (22.33) на $(0, T]$ и условию (22.34). Такое решение определяется формулой

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds \tag{22.35}$$

(представления (22.35) более детально рассматриваются в следующем параграфе).

Метод Фурье решения задачи (22.33), (22.34) заключается в построении последовательных приближений

$$u_n(t) = P_n\left\{e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\right\}, \tag{22.36}$$

где $P_n$ — оператор (22.29). Приближения Фурье (22.36) сходятся к точному решению (22.35) по норме пространства $H$. Как и в случае гиперболических уравнений, без труда формулируются условия, при которых метод Фурье для параболических уравнений сходится по более сильным нормам.

Теорема 22.6. *Пусть оператор* $A^{-\sigma}$ $(\sigma > 0)$ *действует из* $H$ *в пространство* $E$ *и непрерывен. Пусть* $u_0 \in D(A^{\sigma+\tau})$ *и* $f(t) \in D(A^{\sigma+\tau_1})$, *где* $\tau_1 > \tau - 1$, *при всех* $t \in [0, T]$, *причем функция*

$$\varphi(t) = A^{\sigma+\tau_1}f(t) \tag{22.37}$$

*непрерывна по норме пространства* $H$ *на* $[0, T]$.

*Тогда приближения Фурье* (22.36) *сходятся к решению* (22.35) *задачи* (22.33) — (22.34) *по норме пространства* $E$ *равномерно относительно* $t \in [0, T]$. *Быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\|u(t) - u_n(t)\|_E = o(\lambda_n^{-\tau}). \tag{22.38}$$

Легко сформулировать утверждения, которые находятся в таком же отношении к теореме 22.6, как теоремы 22.2 и 22.5 к теоремам 22.1 и 22.4. Легко также конкретизировать общие теоремы о сходимости метода Фурье для абстрактных параболических уравнений на случай уравнений с эллиптическими дифференциальными операторами $A$ порядка $2k$.

Оператор $e^{-At}$ обладает «улучшающими» свойствами: элементы $e^{-At}u_0$ принадлежат (см. § 11) при $t>0$ и всех $u_0\in H$ областям определения всех положительных степеней оператора $A$. Если из условий теоремы 22.6 исключить предположение о том, что $u_0\in D(A^{\sigma+\tau})$, то последнее замечание позволяет утверждать, что метод Фурье сходится по норме пространства $E$ лишь на промежутке $(0, T]$, причем эта сходимость равномерна (и справедливы оценки, аналогичные (22.38)) на каждом промежутке $[t_1, T]\subset(0, T]$.

Сделаем еще одно замечание. В теоремах 22.1, 22.4 и 22.6 в качестве $E$ можно рассматривать различные пространства дифференцируемых функций. При таком подходе из этих теорем можно получить утверждения о сходимости продифференцированных рядов Фурье, не прибегая к утверждениям типа теорем 22.2 и 22.5.

## § 23. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений *)

**23.1. Линейное уравнение.** Рассмотрим задачу

$$\frac{dv}{dt}+Av=f(t)\quad(0<t\leqslant t_0),\tag{23.1}$$

$$v(0)=v_0\tag{23.2}$$

в банаховом пространстве $E$. Здесь $v(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, определенные на отрезке $[0, t_0]$ со

---

*) Теория линейных уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах развита в настоящее время с большой полнотой. Ограничимся ссылкой на классические монографии Э. Хилле и Р. С. Филлипса [1], Н. Данфорда и Дж. Т. Шварца [1]. В этом параграфе существенно использованы результаты из работ М. А. Красносельского, С. Г. Крейна и П. Е. Соболевского [1, 2], М. З. Соломяка [1, 2], П. Е. Соболевского [7, 8].

Нелинейные уравнения с неограниченными операторами в банаховом пространстве изучались в основном воронежскими математиками (М. А. Красносельский и С. Г. Крейн [2], М. А. Красносельский, С. Г. Крейн и П. Е. Соболевский [1, 2], М. А. Красносельский [10], П. Е. Соболевский [1, 2, 4, 6, 9—13]).

Операторы сдвига и квазисдвига по траекториям дифференциальных уравнений с неограниченными операторами строились и изучались М. А. Красносельским и П. Е. Соболевским [3]. Отметим также работу Ю. С Колесова [1].

значениями в $E$; $\frac{dv}{dt}$ — производная, понимаемая как предел по норме $E$ соответствующего конечноразностного отношения; $A$ — действующий в $E$ линейный оператор; $v_0$ — элемент из $E$.

Функцию $v(t)$ назовем *решением задачи* (23.1) — (23.2), если

1°. $v(t)$ непрерывна на $[0, t_0]$;

2°. $\frac{dv(t)}{dt}$ и $Av(t)$ непрерывны на $(0, t_0]$;

3°. $v(t)$ удовлетворяет на $(0, t_0]$ уравнению (23.1);

4°. $v(t)$ удовлетворяет начальному условию (23.2).

Если оператор $A$ ограничен, а функция $f(t)$ непрерывна на $[0, t_0]$, то решение задачи (23.1) — (23.2) существует, единственно и дается формулой

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{23.3}$$

Здесь $T(t) = e^{-At}$ (см. формулу (13.20)).

Оказывается, что формула (23.3) для решения задачи (23.1) — (23.2) имеет место и в случае неограниченных операторов $A$.

Лемма 23.1. *Пусть* $v(t)$ — *решение задачи* (23.1) — (23.2) *и пусть* $-A$ — *производящий оператор сильно непрерывной полугруппы* $T(t)$.

*Тогда справедлива формула* (23.3).

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы

$$A_n = nA(nI + A)^{-1}.$$

Как было показано в п. 13.6, операторы $A_n$ определены и ограничены при достаточно больших положительных $n$. Эти операторы равномерно подчинены оператору $A$, т. е.

$$\|A_n u\| \leqslant c\|Au\| \qquad (u \in D(A)),$$

где $c$ не зависит от $n$. Операторы $A_n$ аппроксимируют (см. (13.41)) оператор $A$ на его области определения:

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n u - Au\| = 0 \quad (u \in D(A)).$$

Наконец, полугруппы $T_n(t) = e^{-A_n t}$ равномерно по $n$ ограничены и сильно сходятся к полугруппе $T(t)$ (см. п. 13.6).

Пусть $v(t)$ — решение задачи (23.1) — (23.2). Тогда при $t>0$

$$\frac{dv}{dt}+A_n v=f(t)+(A_n-A)\,v(t).$$

Так как операторы $A_n$ ограничены, то при любых $0<\tau<<t\leqslant t_0$

$$v(t)=T_n(t-\tau)\,v(\tau)+\int_\tau^t T_n(t-s)\,[f(s)+(A_n-A)\,v(s)]\,ds.$$

Пусть теперь $n\to\infty$. Первое слагаемое правой части стремится к пределу $T(t-\tau)\,v(\tau)$. Во втором слагаемом подынтегральное выражение стремится к пределу $T(t-s)\,f(s)$ и ограничено равномерно по $n$. Поэтому можно перейти к пределу под знаком интеграла. Следовательно,

$$v(t)=T(t-\tau)\,v(\tau)+\int_\tau^t T(t-s)\,f(s)\,ds.$$

Наконец, устремив $\tau$ к нулю, придем к формуле (23.3).

Лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, вытекает, что решение задачи (23.1) — (23.2), если оно существует, единственно (конечно, в предположении, что $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы).

Теорема 23.1. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен и функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\|f(t)-f(\tau)\|\leqslant c(\varepsilon)\,|t-\tau|^\delta \quad (t,\ \tau\in[\varepsilon,\ t_0];\ \varepsilon,\ \delta>0). \tag{23.4}$$

*Тогда задача* (23.1) — (23.2) *имеет решение.*

Доказательство. Как легко видеть (см. § 13), функция $v=T(t)\,v_0$ является решением однородной задачи

$$\frac{dv}{dt}+Av=0, \qquad v(0)=v_0.$$

Функция

$$Qf(t)=\int_0^t T(t-s)\,f(s)\,ds$$

непрерывна на $[0,\ t_0]$ и обращается в нуль при $t=0$.

Пусть $t \geqslant t_1 > 0$. Рассмотрим функции

$$Q_h f(t) = \int_0^{t-h} T(t-s) f(s)\, ds \quad (0 < h \leqslant t_1).$$

Так как полугруппа, порожденная сильно позитивным опер тором $A$, непрерывно дифференцируема при $t > 0$, то фун ции $Q_h f(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dQ_h f(t)}{dt} = T(h) f(t-h) - \int_0^{t-h} AT(t-s) f(s)\, ds =$$
$$= T(h) f(t-h) - AQ_h f(t). \quad (23.$$

Устремим теперь $h$ к нулю. Тогда, очевидно,

$$Q_h f(t) \to Qf(t),$$

причем сходимость равномерна относительно $t \in [t_1, t_0]$. Т как

$$\int_0^{t-h} AT(t-s) f(s)\, ds = \int_0^{t-h} AT(t-s) f(t)\, ds +$$
$$+ \int_0^{t-h} AT(t-s) [f(s) - f(t)]\, ds =$$
$$= [T(h) - T(t)] f(t) + \int_0^{t-h} AT(t-s) [f(s) - f(t)]$$

то из (23.4) и из оценки (см. (13.64))

$$\| AT(t) \| \leqslant \frac{c}{t}$$

вытекает, что при $h \to 0$

$$\int_0^{t-h} AT(t-s) f(s)\, ds \to [I - T(t)] f(t) +$$
$$+ \int_0^{t} AT(t-s) [f(s) - f(t)]$$

причем сходимость равномерна относительно $t \in [t_1, t_0]$. Отсюда и из (23.5) следует, что функция $Qf(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и

$$\frac{d}{dt} Qf(t) = T(t) f(t) - \int_0^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds.$$

Далее, из замкнутости оператора $A$ вытекает, что значения функции $Qf(t)$ принадлежат $D(A)$ при $t > 0$ и

$$AQf(t) = [I - T(t)] f(t) + \int_0^t AT(t-s)[f(s) - f(t)]\, ds.$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\frac{d}{dt} Qf(t) + AQf(t) = f(t).$$

Таким образом, $T(t) v_0 + Qf(t)$ является решением задачи (23.1) — (23.2).

Теорема доказана.

**23.2. Оператор Коши.** Для исследования нелинейных дифференциальных уравнений нам потребуется изучить свойства введенного в предыдущем пункте *оператора Коши*:

$$Qf(t) = \int_0^t T(t-s) f(s)\, ds. \qquad (23.6)$$

Лемма 23.2. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен и функция $f(t)$ непрерывна на $[0, t_0]$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|Qf(t) - Qf(\tau)\| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|t-\tau|\,(1 + |\ln|t-\tau||) \max_{0 \leqslant s \leqslant \max\{t, \tau\}} \|f(s)\|, \qquad (23.7)$$

$$\|A^\alpha Qf(t) - A^\alpha Qf(\tau)\| \leqslant$$
$$\leqslant c(\alpha)\,|t-\tau|^{1-\alpha} \max_{0 \leqslant s \leqslant \max\{t, \tau\}} \|f(s)\| \quad (0 < \alpha < 1). \qquad (23.8)$$

Доказательство. Предположим для определенности, что $\tau \leqslant t$. Пусть сначала $\tau \leqslant \frac{t}{2}$. Тогда

$$\| Qf(t) - Qf(\tau) \| \leqslant \| Qf(t) \| + \| Qf(\tau) \| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t \| T(t-s) \| \, \| f(s) \| \, ds + \int_0^\tau \| T(\tau - s) \| \, \| f(s) \| \, ds$$

Так как полугруппа $T(t)$ ограничена и $t + \tau \leqslant 3(t-\tau)$ то

$$\| Qf(t) - Qf(\tau) \| \leqslant ct \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \| + c\tau \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \| \leqslant$$
$$\leqslant 3c(t-\tau) \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \|. \tag{23.9}$$

Пусть теперь $\tau \geqslant \frac{t}{2}$. Тогда

$$Qf(t) - Qf(\tau) = \int_{2\tau - t}^{t} T(t-s) f(s) \, ds - \int_{2\tau - t}^{\tau} T(\tau - s) f(s) \, ds +$$
$$+ \int_0^{2\tau - t} [T(t-s) - T(\tau - s)] f(s) \, ds. \tag{23.10}$$

Воспользовавшись тождеством

$$T(t-s) - T(\tau - s) = \int_{\tau - s}^{t-s} AT(\xi) \, d\xi \tag{23.11}$$

и оценкой

$$\| AT(\xi) \| \leqslant \frac{c_1}{\xi} \quad (\xi > 0), \tag{23.12}$$

справедливой для сильно позитивных операторов (см. п. 13.8) получим

$$\| T(t-s) - T(\tau - s) \| \leqslant \frac{c_1 |t - \tau|}{\tau - s}. \tag{23.13}$$

Отсюда и из (23.10) следует неравенство

$$\| Qf(t) - Qf(\tau) \| \leqslant 2c(t-\tau) \max_{2\tau - t \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \| +$$
$$+ c(t-\tau) \max_{2\tau - t \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \| +$$
$$+ c_1 (t-\tau) \, |\ln \tau - \ln (t - \tau)| \max_{0 \leqslant s \leqslant 2\tau - t} \| f(s) \| \leqslant$$
$$\leqslant c_3 |t - \tau| (1 + |\ln |t - \tau||) \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \| f(s) \|. \tag{23.14}$$

Из (23.9) и (23.14) вытекает первое утверждение леммы. Докажем теперь неравенство (23.8).

Пусть сначала $\tau \leqslant \frac{t}{2}$. Тогда, воспользовавшись оценкой

$$\|A^\alpha T(\xi)\| \leqslant \frac{c(\alpha)}{\xi^\alpha} \quad (\xi > 0), \tag{23.15}$$

справедливой для сильно позитивных операторов (см. теорему 14.11), получим

$$\|A^\alpha Qf(t) - A^\alpha Qf(\tau)\| \leqslant \|A^\alpha Qf(t)\| + \|A^\alpha Qf(\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t \frac{c(\alpha)}{(t-s)^\alpha}\,ds \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\| + \int\limits_0^\tau \frac{c(\alpha)}{(\tau-s)^\alpha}\,ds \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau} \|f(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c(\alpha)}{1-\alpha}\left(t^{1-\alpha} + \tau^{1-\alpha}\right) \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6^\alpha c(\alpha)}{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\alpha} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\|. \tag{23.16}$$

Пусть теперь $\tau \geqslant \frac{t}{2}$. Воспользовавшись тождеством (23.11) и оценкой (23.15), получим

$$\|A^\alpha T(t-s) - A^\alpha T(\tau-s)\| \leqslant \frac{c(1+\alpha)}{(\tau-s)^{1+\alpha}}|t-\tau|. \tag{23.17}$$

Отсюда и из тождества (23.10) следует неравенство

$$\|A^\alpha Qf(t) - A^\alpha Qf(\tau)\| \leqslant \int\limits_{2\tau-t}^t \frac{c(\alpha)}{(t-s)^\alpha}\,ds \max_{2\tau-t \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\| +$$

$$+ \int\limits_{2\tau-t}^\tau \frac{c(\alpha)}{(\tau-s)^\alpha}\,ds \max_{2\tau-t \leqslant s \leqslant \tau} \|f(s)\| +$$

$$+ \int\limits_0^{2\tau-t} \frac{c(1+\alpha)|t-\tau|}{(\tau-s)^{1+\alpha}}\,ds \max_{0 \leqslant s \leqslant 2\tau-t} \|f(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{2^{1-\alpha}c(\alpha)}{1-\alpha}|t-\tau|^{1-\alpha} + \frac{c(\alpha)}{1-\alpha}|t-\tau|^{1-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{c(1+\alpha)|t-\tau|}{\alpha}\left[\frac{1}{|t-\tau|^\alpha} - \frac{1}{\tau^\alpha}\right]\right\} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\| \leqslant$$

$$\leqslant c_1(\alpha)|t-\tau|^{1-\alpha} \max_{0 \leqslant s \leqslant t} \|f(s)\|. \tag{23.18}$$

Из (23.16) и (23.18) следует (23.8).

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ непрерывных на отрезке $[0, t_1] \subset \subset [0, t_0]$ функций $f(t)$. Пусть это множество равномерно ограничено, т. е. существует такое число $M > 0$, что для любой функции $f(t) \in \mathfrak{M}$ справедливо неравенство

$$\|f(t)\| \leqslant M \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Тогда из леммы 23.2 следует, что при любом $\alpha \in [0, 1)$ множество функций $\{A^\alpha Q f(t)\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно (по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta$, зависящее лишь от $\varepsilon$, что

$$\|A^\alpha Q f(t) - A^\alpha Q f(\tau)\| < \varepsilon \quad (t, \tau \in [0, t_1]),$$

если $|t - \tau| < \delta$).

Пусть оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен в $E$. Тогда (см. теорему 14.12) вполне непрерывны в $E$ и все операторы $A^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Поэтому при каждом фиксированном $t$ множество элементов $A^\alpha Q f(t)$ $(f \in \mathfrak{M})$ компактно в $E$. В самом деле,

$$A^\alpha Q f(t) = A^{-\varepsilon} A^{\alpha+\varepsilon} Q f(t)$$

и при $\varepsilon \in (0, 1-\alpha)$ множество $A^{\alpha+\varepsilon} Q f(t)$ ограничено в $E$.

Таким образом, множество функций $A^\alpha Q f(t)$ равностепенно непрерывно и при каждом $t$ множество значений функций $A^\alpha Q f(t)$ компактно в $E$. Из общей теоремы Арцела следует

Лемма 23.3. *Пусть $A$ — сильно позитивный оператор и пусть $A^{-1}$ вполне непрерывен.*

*Тогда при любом $\alpha \in [0, 1)$ оператор $A^\alpha Q$ действует и вполне непрерывен в пространстве $C\{[0, t_1], E\}$ непрерывных на $[0, t_1]$ функций со значениями в $E$.*

**23.3. Нелинейное уравнение.** Рассмотрим нелинейную задачу

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v) \quad (0 < t \leqslant t_0), \tag{23.19}$$

$$v(0) = v_0. \tag{23.20}$$

Здесь $f(t, v)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — действующий в $E$ нелинейный оператор.

Функцию $v(t)$ назовем *решением задачи* (23.19)—(23.20), если функция $f[t, v(t)]$ непрерывна на $[0, t_0]$ и если функция $v(t)$ есть решение линейной задачи (23.1) — (23.2) с правой частью $f(t)$, равной $f[t, v(t)]$.

Если оператор $A$ порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, то из леммы 23.1 вытекает, что любое решение $v(t)$ задачи (23.19) — (23.20) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s) f[s, v(s)]\, ds. \tag{23.21}$$

Поэтому решение $v(t)$ интегрального уравнения (23.21), обладающее тем свойством, что функция $f[t, v(t)]$ непрерывна на $[0, t_0]$, естественно назвать *обобщенным решением* задачи (23.19) — (23.20). Обобщенное решение этой задачи будет в силу теоремы 23.1 ее настоящим решением, если функция $f[t, v(t)]$ удовлетворяет условию Гёльдера (23.4).

Теорема 23.2. *Пусть $T(t)$ сильно непрерывная полугруппа. Пусть при любом $v \in E$ функция $f(t, v)$ непрерывна по $t$ на $[0, t_0]$ и пусть*

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \leqslant c(R)\|v_1 - v_2\| \quad (\|v_1\|, \|v_2\| \leqslant R). \tag{23.22}$$

*Тогда существует единственное непрерывное решение $v(t)$ уравнения (23.21), определенное на некотором отрезке $[0, t^*] \subset [0, t_0]$. Функция $v(t)$ будет единственным обобщенным решением задачи (23.19) — (23.20) на этом отрезке.*

Доказательство существования и единственности непрерывного решения $v(t)$ уравнения (23.21) можно в силу условия (23.22) провести методом последовательных приближений. Так как оператор $f(t, v)$ непрерывен по совокупности переменных $t \in [0, t_0]$ и $v \in E$, то функция $f[t, v(t)]$ непрерывна на $[0, t^*]$. Следовательно, найденное решение уравнения (23.21) будет обобщенным решением задачи (23.19) — (23.20). Наконец, так как всякое обобщенное решение этой задачи есть непрерывное решение уравнения (23.21), то задача (23.19) — (23.20) имеет единственное обобщенное решение.

Теорема 23.3. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен и пусть оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен. Пусть оператор $f(t, v)$ непрерывен по совокупности переменных $t \in [0, t_0]$ и $v \in E$ и ограничен на каждом ограниченном в $E$ множестве, т. е. пусть*

$$\|f(t, v)\| \leqslant M(R) < \infty \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0,\ \|v\| \leqslant R). \tag{23.23}$$

*Тогда существует по крайней мере одно непрерывное решение $v(t)$ уравнения (23.21), определенное на некотором отрезке $[0, t^*] \in [0, t_0]$. Функция $v(t)$ будет обобщенным решением задачи (23.19) — (23.20) на этом отрезке.*

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$Bv(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s) f[s, v(s)]\, ds. \tag{23.24}$$

Из леммы 23.2 следует, что оператор $B$ действует и вполне непрерывен в пространстве $C\{[0, t^*], E\}$.

Обозначим через $Ш(R)$ шар пространства $C\{[0, t^*], E\}$ радиуса $R$ с центром в нуле, т. е. совокупность непрерывных на $[0, t^*]$ функций $v(t)$, удовлетворяющих условию $\|v(t)\| \leqslant R$. Из (23.23) следует, что оператор $B$ преобразует шар в себя, если

$$t^* \leqslant \frac{R - c\|v_0\|}{cM(R)}, \quad R > c\|v_0\|, \quad c = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|T(t)\|. \tag{23.25}$$

Таким образом, уравнение

$$v(t) = Bv(t)$$

удовлетворяет условиям принципа Шаудера в банаховом пространстве $C\{[0, t^*], E\}$. Поэтому существует по крайней мере одно его решение $v(t)$.

Наконец, из непрерывности $f(t, v)$ следует, что $v(t)$ — обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20).

Теорема доказана.

Как было показано, всякое решение задачи (23.19)—(23.20) будет ее обобщенным решением. Выясним, при каких условиях всякое обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20) будет ее обычным решением.

Теорема 23.4. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен. Пусть*

$$\|f(t_1, v_1) - f(t_2, v_2)\| \leqslant c(R, \varepsilon)\{|t_1 - t_2|^\delta + \|v_1 - v_2\|^\rho\}, \tag{23.26}$$

$$(0 < \varepsilon \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant t_0;\ \|v_1\|,\ \|v_2\| \leqslant R; \quad \delta,\ \rho \in (0, 1]).$$

*Тогда всякое обобщенное решение задачи* (23.19) — (23.20) *будет ее обычным решением.*

Доказательство. Пусть $v(t)$ — обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20). Из леммы 23.2 следует, что функция $v(t)$ удовлетворяет при $t > 0$ условию Гёльдера с любым показателем, меньшим чем 1. Отсюда и из (23.26) вытекает, что функция $f[t, v(t)]$ при $t > 0$ будет удовлетворять условию Гёльдера с любым показателем, меньшим чем $\min\{\rho, \delta\}$. Из замечаний, сделанных в начале этого пункта, следует, что $v(t)$ — решение задачи (23.19) — (23.20).

Теорема доказана.

Теоремы 23.2 и 23.3 локальные. Возникает вопрос о том, когда задача (23.19) — (23.20) имеет обобщенное решение, определенное на всем отрезке $[0, t_0]$.

Как при использовании метода последовательных приближений (теорема 23.2), так и при использовании принципа Шаудера (теорема 23.3) можно гарантировать существование решения на промежутке $[0, t]$ длины

$$t^* = \frac{R - c\|v_0\|}{cM(R)} \tag{23.27}$$

(см. (23.25)).

Из (23.27) вытекает, что при любом $v_0 \in M$ обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20), определенное на всем отрезке $[0, t_0]$, заведомо существует, если

$$\overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{R}{M(R)} = \infty. \tag{23.28}$$

Если же рассматривать лишь малые $v_0 \in E$, то достаточно предположить, что

$$\sup_R \frac{R}{M(R)} > t_0 c. \tag{23.29}$$

Пусть $v(t)$ — непрерывное решение уравнения (23.21) при $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Тогда $v(t)$ удовлетворяет соотношению

$$v(t) = T(t-\tau)\, v(\tau) + \int_\tau^t T(t-s)\, f[s, v(s)]\, ds, \tag{23.30}$$

которое вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} v(t) &= T(t)\, v_0 + \int_0^t T(t-s)\, f[s, v(s)]\, ds = T(t-\tau)\, T(\tau)\, v_0 + \\ &+ \int_0^\tau T(t-\tau)\, T(\tau-s)\, f[s, v(s)]\, ds + \int_\tau^t T(t-s)\, f[s, v(s)]\, ds = \\ &= T(t-\tau) \left\{ T(\tau)\, v_0 + \int_0^\tau T(\tau-s)\, f[s, v(s)]\, ds \right\} + \\ &\qquad + \int_\tau^t T(t-s)\, f[s, v(s)]\, ds = \\ &= T(t-\tau)\, v(\tau) + \int_\tau^t T(t-s)\, f[s, v(s)]\, ds. \end{aligned}$$

Тождество (23.30) позволяет решать уравнение (23.21) шагами, переходя от одного отрезка к соседнему. Этим методом доказывается

Теорема 23.5. *Пусть выполнены условия теоремы 23.2 или теоремы 23.3. Пусть для каждого возможного решения $v(t)$ уравнения* (23.21) *имеет место априорная оценка*

$$\|v(t)\| \leqslant c(v_0). \tag{23.31}$$

*Тогда решение определено на всем отрезке* $[0, t_0]$.

Априорная оценка (23.31) устанавливается обычно при помощи дифференциальных или интегральных неравенств.

**23.4. Уравнения с неограниченными нелинейностями.** В предыдущем пункте нелинейная задача (23.19) — (23.20) была исследована в предположении, что оператор $f(t, v)$ непрерывен по $v$. Для многих приложений это предположение является стеснительным. Теория дробных степеней операторов позволяет в некоторых случаях изучить задачу (23.19)—(23.20) и для неограниченных операторов $f(t, v)$.

Ниже во всем пункте $\alpha$ — фиксированное число из промежутка $[0, 1)$.

Теорема 23.6. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен. Пусть функция $f(t, A^{-\alpha}w)$ непрерывна по $t$ на* $[0, t_0]$ *при каждом фиксированном $w \in E$, и пусть*

$$\|f(t, A^{-\alpha}w_1) - f(t, A^{-\alpha}w_2)\| \leqslant$$
$$\leqslant c(R)\|w_1 - w_2\| \quad (\|w_1\|, \|w_2\| \leqslant R). \qquad (23.32)$$

*Наконец, пусть $v_0 \in D(A^\alpha)$.*

*Тогда существует единственное непрерывное решение $w(t)$ интегрального уравнения*

$$w(t) = T(t)A^\alpha v_0 + \int_0^t A^\alpha T(t-s) f[s, A^{-\alpha}w(s)]\, ds, \qquad (23.33)$$

*определенное на некотором отрезке* $[0, t^*] \subset [0, t_0]$. *Функция*

$$v(t) = A^{-\alpha}w(t) \qquad (23.34)$$

*будет обобщенным решением задачи* (23.19) — (23.20).

Доказательство существования и единственности непрерывного решения уравнения (23.33), определенного на некотором отрезке, можно провести методом последовательных приближений. Это можно сделать, так как ядро интегрального уравнения имеет в силу оценки (23.15) слабую особенность ($\alpha < 1$) и так как нелинейный оператор $f$ удовлетворяет условию Липшица (23.32).

Легко видеть, что функция $v(t)$, определенная равенством (23.34), является непрерывным решением уравнения (23.21). При этом, так как функция $f[t, A^{-\alpha}w(t)]$ непрерывна на $[0, t^*]$, $v(t)$ — обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20).

Наконец, если $v(t)$—обобщенное решение задачи (23.19)—(23.20), то $v(t) \in D(A^\alpha)$ при каждом $t \in [0, t^*]$ и функция

$$w(t) = A^\alpha v(t)$$

является непрерывным решением уравнения (23.33). Следовательно, обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20) единственно.

Теорема доказана.

Аналогом теоремы 23.3 является

Теорема 23.7. *Пусть оператор $A$ сильно позитивен. Пусть оператор $f(t, A^{-\alpha}w)$ непрерывен по совокупности переменных $t \in [0, t_0]$ и $w \in E$ и ограничен на каждом ограниченном в $E$ множестве, т. е. пусть*

$$\|f(t, A^{-\alpha}w)\| \leqslant M_\alpha(R) \quad (t \in [0, t_0],\ \|w\| \leqslant R). \tag{23.35}$$

*Пусть $A^{-1}$ вполне непрерывен. Наконец, пусть $v_0 \in D(A^\alpha)$. Тогда существует по крайней мере одно непрерывное решение $w(t)$ уравнения* (23.33), *определенное на некотором сегменте* $[0, t^*] \subset [0, t_0]$. *Формула* (23.34) *определяет обобщенное решение $v(t)$ задачи* (23.19) — (23.20).

Теоремы 23.6 и 23.7 локальные. Длина $t^*$ отрезка $[0, t^*)$, на котором существует решение, удовлетворяет неравенству

$$t^* \geqslant \left[\frac{R - d_\alpha \|A^\alpha v_0\|}{d_\alpha M_\alpha(R)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{23.36}$$

где

$$d_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \sup_{0 < t \leqslant t_0} t^\alpha \|A^\alpha T(t)\|.$$

Из формулы (23.36) вытекают следующие утверждения. Если

$$\varlimsup_{R \to \infty} \frac{R}{M_\alpha(R)} = \infty, \tag{23.37}$$

то решение $v(t)$ уравнения (23.33) существует на всем отрезке $[0, t_0]$ при любом $v_0 \in D(A^\alpha)$. Если

$$\sup_R \frac{R}{M_\alpha(R)} > d_\alpha t_0^{1-\alpha}, \tag{23.38}$$

то решение $v(t)$ уравнения (23.33) существует на всем отрезке $[0, t_0]$ при достаточно малых по норме $\|A^\alpha v_0\|$.

С помощью тождества (23.30) доказывается

Теорема 23.8. *Пусть выполнены условия теоремы 23.6 или теоремы 23.7. Пусть для каждого возмож-*

*ного решения* $v(t)$ *уравнения* (23.33) ***имеет место*** *априорная оценка*

$$\|A^{\alpha}v(t)\| \leqslant c_{\alpha}(A^{\alpha}v_0). \tag{23.39}$$

*Тогда решение определено на всем отрезке* $[0, t_0]$.

Наконец, приведем аналог теоремы 23.4.

Теорема 23.9. *Пусть оператор* $A$ *сильно позитивен. Пусть*

$$\|f(t_1, A^{-\alpha}w_1) - f(t_2, A^{-\alpha}w_2)\| \leqslant \\ \leqslant c(R, \varepsilon)\{|t_1 - t_2|^{\delta} + \|w_1 - w_2\|^{\rho}\} \tag{23.40}$$

$$(0 < \varepsilon \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant t_0;\ \|w_1\|,\ \|w_2\| \leqslant R;\ \delta,\ \rho \in (0, 1]).$$

*Тогда всякое обобщенное решение задачи* (23.19) — (23.20) *будет ее обычным решением.*

Доказательство. Пусть $v(t)$ - обобщенное решение задачи (23.19) - (23.20). Тогда из леммы 23.2 следует, что функция $A^{\alpha}v(t)$ будет удовлетворять при $t > 0$ условию Гёльдера с показателем $1 - \alpha$. Из (23.40) тогда вытекает, что функция $f[t, v(t)]$ будет удовлетворять при $t > 0$ условию Гёльдера с показателем $\min\{\delta, (1-\alpha)\rho\}$. Отсюда следует, что $v(t)$ — решение задачи (23.19) — (23.20).

Теорема доказана.

**23.5. Оператор сдвига.** Рассмотрим задачу (23.19) — (23.20). Предположим, что каждое $v_0$ из некоторого множества определяет единственное решение (или обобщенное решение) $v(t, v_0)$ этой задачи на отрезке $[0, t_0]$. Тогда при каждом $t \in [0, t_0]$ определен оператор

$$V(t)v_0 = v(t, v_0), \tag{23.41}$$

ставящий в соответствие каждому $v_0$ значение в точке $t$ решения (или обобщенного решения) задачи (23.19) — (23.20). Этот оператор называется *оператором сдвига по траекториям дифференциального уравнения* (23.19).

Теорема 23.10. *Пусть выполнены условия теоремы 23.2 и пусть оператор* $f(t, v)$ *представим в виде*

$$f(t, v) = B(t)v + \omega(t, v), \tag{23.42}$$

*где $B(t)$ — линейный ограниченный в $E$ оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, а нелинейный оператор $\omega(t, v)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{R \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0, \|v\| \leqslant R} \frac{\|\omega(t, v)\|}{\|v\|} = 0. \tag{23.43}$$

*Тогда оператор сдвига определен на некотором шаре $\|v\| \leqslant r$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$z(t) = \int_0^t T(t-s) B(s) z(s) \, ds + F(t), \tag{23.44}$$

где $F(t)$ — непрерывная на $[0, t_0]$ функция. Существует единственное непрерывное решение $z(t)$ этого уравнения; оно может быть найдено методом последовательных приближений и записано в виде

$$z(t) = F(t) + \int_0^t K(t, s) F(s) \, ds. \tag{23.45}$$

Здесь $K(t, s)$ — некоторый непрерывный по совокупности переменных $t$ и $s$ линейный оператор. Воспользовавшись представлением (23.42) и равенствами (23.44) и (23.45), получим, что всякое обобщенное решение задачи (23.19) — (23.20) удовлетворяет тождеству

$$v(t) = T(t) v_0 + \int_0^t K(t, s) T(s) v_0 \, ds +$$
$$+ \int_0^t \left[ T(t-\tau) + \int_\tau^t K(t, s) T(s-\tau) \, ds \right] \omega[\tau, v(\tau)] \, d\tau. \tag{23.46}$$

Обратно, каждое непрерывное решение уравнения (23.46) будет обобщенным решением задачи (23.19) — (23.20).

Нелинейный оператор $\omega(t, v)$ удовлетворяет (в силу (23.42) и условий теоремы 23.2) условию Липшица. Поэтому для уравнения (23.46) справедлива локальная теорема существования и единственности непрерывного решения.

Соотношение (23.43) означает, что для уравнения (23.46) выполнено условие вида (23.29). Отсюда следует, что при достаточно малых (по норме) $v_0$ для уравнения (23.46) справедлива нелокальная теорема существования.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 23.10 видно, что оператор сдвига $v(t, v_0)$ не только определен на некотором шаре $\|v_0\| \leqslant r$, но и ограничен на этом шаре, т. е.

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|v(t, v_0)\| \leqslant R(r) < \infty \qquad (\|v_0\| \leqslant r). \tag{23.47}$$

Теорема 23.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 23.10.

*Тогда оператор сдвига непрерывен на шаре* $\|v_0\| \leqslant r$.

Доказательство. Пусть $\|v_{01}\|$, $\|v_{02}\| \leqslant r$. Воспользовавшись (23.21) и (23.22), получим неравенство

$$\|v(t, v_{01}) - v(t, v_{02})\| \leqslant \|T(t)\| \, \|v_{01} - v_{02}\| + \\ + c(r) \int_0^t \|T(t-s)\| \, \|v(s, v_{01}) - v(s, v_{02})\| \, ds.$$

Отсюда следует, что

$$\|v(t, v_{01}) - v(t, v_{02})\| \leqslant k \|v_{01} - v_{02}\|,$$

т. е. оператор сдвига удовлетворяет условию Липшица.

Теорема доказана.

Теорема 23.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 23.10. *Пусть оператор* $A$ *сильно позитивен, а оператор* $A^{-1}$ *вполне непрерывен в* $E$.

*Тогда оператор сдвига при* $t > 0$ *вполне непрерывен на шаре* $\|v_0\| \leqslant r$ *как оператор в пространстве* $E$.

Доказательство. Оценки (23.15) и (23.47) позволяют установить, что при любом $0 \leqslant \alpha < 1$ и $t > 0$

$$\|A^\alpha v(t, v_0)\| \leqslant R(r, t) \qquad (\|v_0\| \leqslant r).$$

Отсюда и из полной непрерывности оператора $A^{-\alpha}$ следует компактность оператора сдвига при любом $t > 0$. Его непрерывность была доказана выше.

Теорема доказана.

**23.6. Дифференцируемость оператора сдвига.** Выше было показано, что оператор сдвига удовлетворяет условию Липшица на некотором шаре $\|v_0\| \leqslant r$.

Теорема 23.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 23.10.

*Тогда справедливо представление*

$$v(t, v_0) = B_1(t) v_0 + \omega_1(t, v_0), \tag{23.48}$$

*где* $B_1(t)$ — *линейный ограниченный в пространстве* $E$ *оператор, сильно непрерывно зависящий от* $t \in [0, t_0]$, *а* $\omega_1(t, v_0)$ — *нелинейный оператор, удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0, \|v_0\| \leqslant \rho} \frac{\|\omega_1(t, v_0)\|}{\|v_0\|} = 0. \tag{23.49}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$z(t) = T(t) v_0 + \int_0^t T(t-s) B(s) z(s)\, ds. \tag{23.50}$$

Его решение можно записать (см. (23.45)) в виде

$$z(t, v_0) = T(t) v_0 + \int_0^t K(t, s) T(s) v_0\, ds = B_1(t) v_0.$$

Легко видеть, что при каждом фиксированном $t \in [0, t_0]$ оператор $B_1(t)$ ограничен в пространстве $E$ и сильно непрерывно зависит от $t$ на $[0, t_0]$. Воспользовавшись представлением (23.42), получим тождество

$$v(t, v_0) - z(t, v_0) = \int_0^t T(t-s) B(s) [v(s, v_0) - z(s, v_0)]\, ds + \int_0^t T(t-s) \omega[s, v(s, v_0)]\, ds.$$

Отсюда и из (23.44) и (23.45) следует, что

$$\omega_1(t, v_0) = v(t, v_0) - z(t, v_0) = \int_0^t T(t-s) \omega[s, v(s, v_0)]\, ds + \int_0^t K(t, \tau) \left\{ \int_0^\tau T(\tau - s) \omega[s, v(s, v_0)]\, ds \right\} d\tau. \tag{23.51}$$

Так как $v(t, 0) = 0$ и $v(t, v_0)$ удовлетворяет условию Липшица, то $\|v(t, v_0)\| \leqslant k\|v_0\|$. Поэтому

$$\|\omega[s, v(s, v_0)]\| \leqslant \sigma(\rho) \quad (\|v_0\| \leqslant \rho \leqslant r),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\sigma(\rho)}{\rho} = 0$. Отсюда и из (23.51) вытекает, что

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0,\ \|v_0\|\leqslant\rho} \frac{\|v(t, v_0) - z(t, v_0)\|}{\|v_0\|} = 0.$$

Теорема доказана.

Дополнительные сведения о гладкости оператора $f(t, v)$ при $v = 0$ позволяют более точно оценить гладкость в нуле оператора сдвига. Например, справедлива

Теорема 23.14. *Пусть выполнены условия теоремы 23.2 и пусть оператор $f(t, v)$ представим в виде*

$$f(t, v) = B(t)v + C(t)[v, v] + D(t, v), \tag{23.52}$$

*где $B(t)$ — линейный ограниченный в $E$ оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, $C(t)[v_1, v_2]$ — билинейный* *) *ограниченный по совокупности переменных $v_1$, $v_2$ оператор, также сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, а нелинейный оператор $D(t, v)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0,\ \|v\|\leqslant\rho} \frac{\|D(t, v)\|}{\|v\|^2} = 0. \tag{23.53}$$

*Тогда оператор сдвига представим в виде*

$$v(t, v_0) = B_1(t)v_0 + C_1(t)[v_0, v_0] + D_1(t, v_0), \tag{23.54}$$

*где $B_1(t)$ — линейный ограниченный оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, $C_1(t)[v_1, v_2]$ — билинейный ограниченный по совокупности переменных $v_1, v_2$ оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$,*

*) Оператор $C[v_1, v_2]$ называется *билинейным*, если он линеен по каждому аргументу $v_1$, $v_2$. Оператор $C(t)[v_1, v_2]$ сильно непрерывно зависит от $t$ на $[0, t_0]$, если при каждых фиксированных $v_1, v_2 \in E$ и $t^* \in [0, t_0]$

$$\lim_{t\to t^*} \|C(t)[v_1, v_2] - C(t^*)[v_1, v_2]\| = 0.$$

*а нелинейный оператор* $D_1(t, v_0)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0,\ \|v_0\|\leqslant\rho} \frac{\|D_1(t, v_0)\|}{\|v_0\|^2} = 0. \qquad (23.55)$$

Доказательство. Решение уравнения

$$v(t, v_0, w_0) = \int_0^t T(t-s)\,C(s)\,[z(s, v_0), w_0]\,ds + \int_0^t T(t-s)\,B_1(s)\,v(s, v_0, w_0)\,ds, \qquad (23.56)$$

где $z(t, v_0)$ — решение уравнения (23.50), имеет вид

$$v(t, v_0, w_0) = \int_0^t T(t-s)\,C(s)\,[z(s, v_0), w_0]\,ds + \int_0^t K(t, \tau)\left\{\int_0^\tau T(\tau-s)\,C(s)\,[z(s, v_0), w_0]\,ds\right\}d\tau \equiv \tilde{C}(t)\,[v_0, w_0]. \qquad (23.57)$$

Легко видеть, что $\tilde{C}(t)\,[v_0, w_0]$ — билинейный оператор, сильно непрерывный по $t\in[0, t_0]$.

Положим $C_1(t)\,[v_0, w_0] = \tilde{C}(t)\,[v_0, B_1(t)\,w_0]$. Это также билинейный оператор, сильно непрерывный по $t\in[0, t_0]$. Воспользовавшись представлением (23.52) и соотношениями (23.50) и (23.56), получим

$$v(t, v_0) - B_1(t)\,v_0 - C_1(t)\,[v_0, v_0] = \int_0^t T(t-s)\,B(s)\,\{v(s, v_0) - B_1(s)\,v_0 - C_1(s)\,[v_0, v_0]\}\,ds + \int_0^t T(t-s)\,\{C(s)\,[v(s, v_0), v(s, v_0)] - C(s)\,[B_1(s)\,v_0, B_1(s)\,v_0] + D\,[s, v(s, v_0)]\}\,ds. \qquad (23.58)$$

Отсюда

$$D_1(t, v_0) = v(t, v_0) - B_1(t)v_0 - C_1(t)[v_0, v_0] = \\ = \chi(t) + \int_0^t K(t, \tau)\chi(\tau)\,d\tau, \qquad (23.59)$$

где $\chi(t)$ равно второму слагаемому правой части равенства (23.58). Воспользовавшись (23.48), получим

$$\chi(t) = \int_0^t T(t-s)\{C(s)[B(s)v_0, \omega_1(s, v_0)] + \\ + C(s)[\omega_1(s, v_0), B(s)v_0] + C(s)[\omega_1(s, v_0), \omega_1(s, v_0)] + \\ + D[s, v(s, v_0)]\}\,ds.$$

Отсюда, из (23.59) и из оценок (23.49) и (23.53) следует, что функция $D_1(t, v_0) = v(t, v_0) - B_1(t)v_0 - C_1(t)[v_0, v_0]$ удовлетворяет соотношению (23.55).

Теорема доказана.

Этим же путем можно получить разложение оператора сдвига в окрестности нуля до членов любого порядка малости, если имеется такое разложение для нелинейного оператора $f(t, v)$.

**23.7. Оператор квазисдвига.** В случае, когда оператор $f(t, v)$ неограничен, оператор сдвига определен, вообще говоря, лишь на всюду плотном множестве (п. 23.4). Поэтому если оператор $\varphi(t, w) = f(t, A^{-\alpha}w)$ непрерывен при некотором $\alpha < 1$, то вместо уравнения (23.21) с неограниченным нелинейным оператором рассматривают уравнение

$$w(t) = T(t)w_0 + \int_0^t A^{\alpha}T(t-s)\varphi[s, w(s)]\,ds. \qquad (23.60)$$

При этом, разумеется, предполагается, что оператор $A$ сильно позитивен.

Если каждому $w_0$ из некоторого множества можно поставить в соответствие единственное непрерывное решение $W(t)w_0 = w(t, w_0)$ уравнения (23.60), определенное на $[0, t_0]$, то будем говорить, что на этом множестве определен *оператор* $W(t)$ *квазисдвига* задачи (23.19) - (23.20).

Пусть выполнены условия теоремы 23.6. Пусть оператор $\varphi(t, w)$ допускает представление

$$\varphi(t, w) = B(t)\, w + \omega(t, w), \tag{23.61}$$

где $B(t)$ – линейный ограниченный оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, оператор $\omega(t, w)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0,\ \| w \| \leqslant \rho} \frac{\| \omega(t, w) \|}{\| w \|} = 0. \tag{23.62}$$

Тогда оператор квазисдвига $w(t, w_0)$ определен на некотором шаре $\| w \| \leqslant r$. На этом шаре $w(t, w_0)$ удовлетворяет условию Липшица (равномерно по $t$) и допускает представление

$$w(t, w_0) = B_1(t)\, w_0 + \omega_1(t, w_0), \tag{23.63}$$

где $B_1(t)$ — линейный ограниченный оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, а оператор $\omega_1(t, w_0)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0,\ \| w_0 \| \leqslant \rho} \frac{\| \omega_1(t, w_0) \|}{\| w_0 \|} = 0. \tag{23.64}$$

Если, дополнительно, оператор $A^{-1}$ вполне непрерывен в $E$, то оператор квазисдвига $w(t, w_0)$ вполне непрерывен при каждом $t \in [0, t_0]$.

Все эти утверждения доказываются так же, как и теоремы 23.10—23.13.

Пусть, наконец,

$$\varphi(t, w) = B(t)\, w + C(t)[w, w] + D(t, w), \tag{23.65}$$

где $B(t)$ – линейный ограниченный оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, $C(t)[w_1, w_2]$ — билинейный оператор, сильно непрерывно зависящий от $t \in [0, t_0]$, а нелинейный оператор $D(t, w)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0,\ \| w \| \leqslant \rho} \frac{\| D(t, w) \|}{\| w \|^2} = 0. \tag{23.66}$$

Тогда оператор квазисдвига допускает представление

$$w(t, w_0) = B_1(t)\, w_0 + C_1(t)[w_0, w_0] + D_1(t, w_0), \tag{23.67}$$

где $B_1(t)w$, $C_1(t)[w_1, w_2]$, $D_1(t, w)$ обладают такими же свойствами на шаре $\|w\| \leqslant r$, как соответственно $B(t)w$, $C(t)[w_1, w_2]$, $D(t, w)$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 23.14.

**23.8. Уравнения с переменным оператором*).** Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v = f(t, v) \quad (0 < t \leqslant t_0) \tag{23.68}$$

с переменным неограниченным оператором $A(t)$. Исследование этого уравнения может быть проведено изложенными выше методами, если удается построить решения

$$v(t) = U(t, s)v_s \quad (0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_0)$$

однородных линейных задач

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v = 0, \quad v(s) = v_s,$$

и если оператор $U(t, s)$ обладает достаточно хорошими свойствами.

Если оператор $U(t, s)$ построен, то обобщенное решение уравнения (23.68), удовлетворяющее начальному условию $v(0) = v_0$, определяется как непрерывное решение аналогичного (23.21) уравнения

$$v(t) = U(t, 0)v_0 + \int_0^t U(t, s)f[s, v(s)]\,ds. \tag{23.69}$$

Если же неограничен и оператор $f(t, v)$, то естественно решение $v(t)$ искать в виде (23.34), где $w(t)$ определяется из аналогичного (23.33) уравнения

$$w(t) = U(t, 0)A^{\alpha}(0)v_0 + \\ + \int_0^t A^{\alpha}(0)U(t, s)f\left[s, A^{-\alpha}(0)w(s)\right]ds. \tag{23.70}$$

---

*) Теория таких уравнений начата Т. Като [1, 2]. Дальнейшие результаты принадлежат П. Е. Соболевскому [2, 6] и Т. Като [6]. Полное изложение теории уравнений с переменным оператором, имеющим постоянную область определения, см. у П. Е. Соболевского [7].

Основные трудности заключены в построении и исследовании оператора $U(t, s)$. Такое построение и исследование удается провести при достаточно общих предположениях: если, например, — $A(t)$ при каждом фиксированном $t$ является производящим оператором некоторой сильно непрерывной полугруппы $T_t(\tau)$, удовлетворяющей неравенству $\|T_t(\tau)\| \leqslant e^{-\delta\tau}$, если область определения операторов $A(t)$ не зависит от $t$ и если оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема по $t$. Переход к уравнению (23.70) удается осуществить при более жестких требованиях к $A(t)$; например, достаточно, чтобы операторы — $A(t)$ были сильно позитивны и чтобы оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ удовлетворяла условию Гёльдера.

Если определены решения уравнения (23.68), то определен и оператор сдвига по траекториям этого уравнения. Свойства этого оператора аналогичны свойствам изученного в пп. 23.5—23.7 оператора сдвига по траекториям уравнения с постоянным оператором.

**23.9. Оператор сдвига и периодические решения параболических уравнений** *). Вернемся к изучению нелинейного уравнения

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v), \tag{23.71}$$

рассмотренного выше в пп. 23.3—23.6.

Будем предполагать, что правая часть уравнения (23.71) периодична по $t$:

$$f(t+\omega, v) \equiv f(t, v). \tag{23.72}$$

Легко видеть, что вопрос о существовании $\omega$-периодических по $t$ решений уравнения (23.71) равносилен вопросу о существовании неподвижных точек у оператора сдвига $V(\omega)$ по траекториям уравнения (23.71) за время $\omega$.

Допустим, что оператор сдвига вполне непрерывен (см. теорему 23.12). Кроме того, пусть выполнено условие

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant\omega,\ \|v\|\leqslant R} \frac{\|f(t, v)\|}{R} = 0. \tag{23.73}$$

*) М. А. Красносельский [10], М. А. Красносельский и П. Е. Соболевский [4].

Тогда, как нетрудно проверить, оператор сдвига удовлетворяет условиям принципа Шаудера. Поэтому оператор сдвига имеет по крайней мере одну неподвижную точку, которая определяет периодическое решение уравнения (23.71). Таким образом, условие (23.73) достаточно для существования по крайней мере одного периодического решения.

Для изучения оператора сдвига могут применяться более тонкие методы нелинейного функционального анализа: теория вполне непрерывных векторных полей, методы теории конусов, теория вогнутых операторов и т. д. Эти методы позволяют оценивать сверху и снизу число периодических решений, изучать зависимость этих решений от параметров, исследовать бифуркационные значения параметров и т. д. Более детальный анализ оператора сдвига позволяет устанавливать устойчивость или неустойчивость периодических решений и другие их свойства.

Аналогичная ситуация имеет место и в том случае, когда удается сконструировать лишь оператор $W(\omega)$ квазисдвига по траекториям уравнения (23.71) с неограниченным оператором $f(t, v)$.

Как уже говорилось в п. 23.7, оператор сдвига $V(\omega)$ определен в этом случае, вообще говоря, лишь на плотном в $E$ множестве. Это обстоятельство затрудняет исследование оператора $V(\omega)$. В то же время оператор квазисдвига $W(\omega)$ в достаточно общих условиях определен на всем пространстве. Легко видеть, что операторы $V(\omega)$ и $W(\omega)$ связаны равенством

$$W(\omega)v_0 = A^{\alpha}V(\omega)A^{-\alpha}v_0 \quad (v_0 \in E). \tag{23.74}$$

Из этого равенства вытекает, что каждая неподвижная точка оператора квазисдвига определяет начальное значение

$$v(0) = A^{-\alpha}v_0$$

$\omega$-периодического решения уравнения (23.71). Таким образом, анализ различных задач, связанных с $\omega$-периодическими решениями уравнения (23.71), может быть проведен путем исследования оператора квазисдвига.

Ясно, что все изложенные соображения полностью относятся и к уравнениям с переменным оператором $A(t)$.

Рассмотренные в этом параграфе уравнения в банаховом пространстве охватывают, как известно различные краевые задачи для уравнений с частными производными. Например, они охватывают смешанные краевые задачи для квазилинейных параболических уравнений. Поэтому изложенная методика применима для доказательства существования периодических решений у квазилинейных параболических уравнений. К сожалению, при проведении детальных доказательств возникают различные технические трудности, требуется проведение громоздких вычислений — все это выходит за рамки настоящей книги.

# ЛИТЕРАТУРА

Агмон С. (Agmon S.)
1. On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems, Comm. Pure and Appl. Math. **15**, № 2 (1962).

Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. (Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.)
1. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962.

Андо Т. (Ando T.)
1. On compactness of integral operators, Nederl. Akad. Wetensh. Proc., ser. A-65, № 2 — Indag. Math. **24**, № 2 (1962).

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.
1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

Бабич В. М.
1. К вопросу о теоремах вложения в случае предельного показателя, Вестн. ЛГУ **19** (1956).

Балакришнан А. (Balakrishnan A. V.)
1. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. (1959).
2. Fractional powers of closed operators and semi-groups generated by them, Pac. J. Math. **152**, № 6 (1961).

Банах С.
1. Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.

Бари Н. К.
1. Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1963.

Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.
1. О непрерывности линейных положительных операторов, СМЖ **3**, № 1 (1962).

Бенедек А. и Панзоне Р. (Benédek A., Panzone R.)
1. The spaces $L^p$ with mixed norm., Duke Math. J. **28**, № 3 (1961).

Березанский Ю. М.
1. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Матем. сб. **43**, № 1 (1957).
2. О разложениях по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ **11**, № 1 (1959).
3. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, «Наукова думка», 1965.

Березанский Ю. М. и Орочко Ю. Б.
1. Одно замечание относительно роста собственных функций самосопряженных операторов, УМЖ **14**, № 2 (1962).
Вайнберг М. М.
1. О непрерывности некоторых операторов специального вида, ДАН СССР **73**, № 2 (1950).
2. Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах, УМН **7**, вып. 4 (1952).
3. О структуре одного оператора, ДАН СССР **92**, № 3 (1953).
4. О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах $L_q$, ДАН СССР **100**, № 5 (1955).
5. Оператор Немыцкого, УМЖ **7**, вып. 4 (1955).
6. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.
Ван Шен-ван (Wang Sheng-wang)
1. Дифференцируемость оператора Немыцкого, ДАН СССР **150**, № 6 (1963).
2. The converse of a theorem of Ladyženski on the complete continuity of the Uryson operator. Chinese Math. **4**, № 2 (1963).
Валле-Пуссен Ш. Ж.
1. Курс анализа бесконечно малых, Гостехиздат, 1933.
Гайнц Э. (Heinz E.)
1. Beiträge zur störungen Theorie der Spektralzerlegung, Math. Ann. **123** (1951).
Гальярдо Э. (Gagliardo E.)
1. Свойства некоторых классов функций многих переменных, Математика **5**, № 4 (1961).
Гаммерштейн А. (Hammerstein A.)
1. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta Math. **54** (1929).
Гельфанд И. М.
1. Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Матем. сб. **44** (6), № 2 (1938).
Гильберт Д. и Курант Р.
1. Методы математической физики, Гостехиздат, 1952.
Глушко В. П.
1. Об операторах типа потенциала и некоторых теоремах вложения, ДАН СССР **126**, № 3 (1959).
Глушко В. П. и Крейн С. Г.
1. Дробные степени дифференциальных операторов и теоремы вложения, ДАН СССР **122**, № 6 (1958).
Голомб Н. (Golomb M.)
1. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen, Math. Zeitschr. **39** (1934).
2 Über systeme von Nichtlineare Integralgleichungen, Math. Univ. Beograde 5 (1936).
Данфорд Н. и Шварц Дж. Т. (Dunford N., Schwarz J. T.)
1. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1963.
Дэй М. (Day M.)
1 The spaces $L_p$ with $0<p<1$, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940).

Забрейко П. П.
1. О непрерывности нелинейного оператора, СМЖ **5**, вып. 4 (1964).
2. О некоторых свойствах линейных операторов, действующих в пространствах $L_p$, ДАН СССР **159**, № 5 (1964).
3. О полной непрерывности $u_0$-ограниченных линейных операторов в пространствах $L_p$, Функциональный анализ и теория функций 2, Уч. зап. КГУ **124**, № 6, Казань, 1965.
4. О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона, ДАН СССР **161**, № 5 (1965).
5. О дифференцируемости нелинейных операторов в пространствах $L_p$, ДАН СССР **166**, № 5 (1966).

Забрейко П. П. и Красносельский М. А.
1. Вычисление индекса неподвижной точки вполне непрерывного векторного поля, СМЖ **5**, вып. 3 (1964).
2. Об $L$-характеристиках операторов, УМН **19**, вып. 5 (1964).

Забрейко П. П., Красносельский М. А. и Пустыльник Е. И.
1. О дробных степенях эллиптических операторов, ДАН СССР **165**, № 5 (1965).
2. Одна задача о дробных степенях операторов, УМН **20**, вып. 6 (1965).
3. Об одном доказательстве теоремы Мерсера. Изв. АН Молд.ССР № 7 (1965).

Забрейко П. П. и Пустыльник Е. И.
1. О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах $L_p$, УМН **19**, вып. 2 (1964).
2. Об интерполировании свойства полной непрерывности, Функциональный анализ и теория функций 2, Уч. зап. КГУ **124**, № 6, Казань 1965.

Зигмунд А. (Zygmund A.)
1. On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation theorem, J. Pure and Appl. Math. **9** (1956).

Ильин В. А.
1. Ядра дробного порядка, Матем. сб. **41** (1957).
2. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа, УМН **13**, вып. 1 (1958).

Ильин В. П.
1. О теореме вложения для предельного показателя, ДАН СССР **96**, № 5 (1954).
2. Некоторые функциональные неравенства типа теорем вложения, ДАН СССР **123**, № 6 (1958).
3. К теоремам вложения, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова **53** (1959).

Иосида К. (Yosida K.)
1. Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, Proc. Japan. Acad. **36** (1960).
2. Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, Proc. Intern. Congr. Math., Amsterdam (1954).

Кальдерон А. П., Зигмунд А. (Calderon A. P., Zygmund A.)
1. A note on the interpolation of linear operators, Studia Math. **12** (1951).

2. A note on the interpolation of sublinear operators, **Amer. J. Math.** **78** (1956).

Канторович Л. В.

1. Об интегральных операторах, УМН **7**, вып. 2 (1956).

Канторович Л. В. и Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

Каратеодори К. (Caratheodory K.)

1. Vorlesungen über reele Funktionen, Leipzig und Berlin, 1918.

Като Т. (Tosio Kato)

1. Notes in some inequalities for linear operators, Math. Ann. **125** (1952).
2. Quadratic forms in Hilbert spaces and asymptotic perturbation. Series Techn. Report № 7 Contract DA-04-200-OKD 171 Task. Order 5, University of California (1955).
3. Интегрирование эволюционного уравнения в пространстве Банаха, Математика **2**, № 4 (1958).
4. Note on fractional powers of linear operators, Proc. Japan. Acad. **36** (1960).
5. Fractional powers of dissipative operators, Preprint, 1962.
6. Абстрактные эволюционные уравнения параболического типа в пространствах Банаха и Гильберта, Математика **8**, № 4 (1964).

Колесов Ю. С.

1. О некоторых признаках существования устойчивых периодических решений у квазилинейных параболических уравнений, ДАН СССР **157**, № 6.

Колмогоров А. Н.

1. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz in Mittel, Göttingen Nachr. (1931).

Коротков В. Б.

1. Об интегральных операторах с ядрами типа Карлемана, ДАН СССР **165**, № 4 (1965).

Красносельский М. А.

1. Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов, УМЖ **2**, № 3 (1950).
2. Собственные функции нелинейных операторов, асимптотически близких к линейным, ДАН СССР **74**, № 2 (1950).
3. Непрерывность оператора $fu(x)=f[x, u(x)]$, ДАН СССР **77**, № 2 (1951).
4. Расщепление операторов, действующих из пространства $L_q$ в пространство $L_p$, ДАН СССР **82**, № 3 (1952).
5. Свойства корня из линейного интегрального оператора, ДАН СССР **88**, № 5 (1953).
6. Об одной краевой задаче, Изв. АН СССР, сер. матем. **20** (1956).
7. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.

8. Об одной теореме М. Рисса, ДАН СССР **131**, № 2 (1960).
9. Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
10. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.

Красносельский М. А и Крейн С. Г.
1. Признаки непрерывности и полной непрерывности линейного оператора, выраженные в терминах свойств его квадрата, Тр семинара по функц. анализу, вып. 5, Воронеж, 1957.
2. О дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве, Тр. 3-го матем. съезда **3**, 1958.

Красносельский М. А., Крейн С. Г, Соболевский П. Е.
1. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в банаховых пространствах, ДАН СССР **111**, № 1 (1956).
2. О дифференциальных уравнениях с неограниченными операторами в гильбертовых пространствах, ДАН СССР **112**, № 6 (1957).

Красносельский М. А. и Ладыженский Л. А.
1. Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, Тр. Моск. матем. о-ва, 3, 1954.
2. Об объеме понятия $u_0$-вогнутого оператора Изв. вузов, Математика, № 5, 1959.

Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П П.
1. Векторные поля на плоскости, Физматгиз, 1963.

Красносельский М. А., Пустыльник Е. И.
1. Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов, ДАН СССР **122**, № 6 (1958).
2. О признаках полной непрерывности линейных и нелинейных интегральных операторов, ДАН СССР **142**, № 1 (1962).
3. Две теоремы об интегральных операторах. Тр. семинара по функц. анализу, вып. 7, Воронеж, 1963.
4. Об условиях полной непрерывности нелинейного интегрального оператора, Тр. семинара по функц. анализу, вып. 7, Воронеж, 1963.

Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б.
1. Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича, ДАН СССР **85**, № 1 (1952).
2. Дифференцируемость нелинейных интегральных операторов в пространствах Орлича, ДАН СССР **89**, № 4 (1953).
3. Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича, Тр. семинара по функц. анализу, вып. 2, Воронеж, 1956.
4. О некоторых нелинейных операторах в пространствах Орлича, ДАН СССР **117**, № 3 (1957).
5. Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1958.
6. Пространства Орлича и нелинейные интегральные уравнения, Тр. Моск. матем. о-ва, **7**, 1958.

Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. и Султанов Р. М.
1. Об одном нелинейном операторе, действующем в пространстве абстрактных функций, Изв. АН Аз. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, № 3 (1959).
Красносельский М. А. и Соболев В. И.
1. О расщеплении линейных операторов, УМН 12, вып. 4 (1957).
Красносельский М. А. и Соболевский П. Е.
1. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах, ДАН СССР 129, № 3 (1959).
2. Структура множества решений уравнений параболического типа, ДАН СССР 146, № 1 (1962).
3. Структура множества решений уравнений параболического типа, УМЖ 16, № 3 (1964).
4. О некоторых нелинейных задачах для уравнений с частными производными. Доклад на советско-американском симпозиуме по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.
Крейн М. Г.
1. О линейных вполне непрерывных операторах в функциональных пространствах с двумя нормами, Тр. Ин-та матем. АН УССР 9 (1947).
Крейн М. Г. и Рутман М. А.
1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, вып. 1 (1948).
Крейн С. Г. и Семенов Е. М.
1. Об одной шкале пространств, ДАН СССР 138, № 4 (1961).
Крейн С. Г. и Соболевский П. Е.
1. Дифференциальные уравнения с абстрактным эллиптическим оператором в гильбертовом пространстве, ДАН СССР 118, № 2 (1958).
Ладыженская О. А.
1. Смешанная задача для гиперболического уравнения, Гостехиздат, 1953.
Ладыженский Л. А.
1. Условия полной непрерывности интегрального оператора П. С. Урысона в пространстве непрерывных функций, ДАН СССР 97, № 5 (1954).
Лоренц Г. Г. (Lorentz G. G.)
1. Some new functional spaces, Ann. of. Math. (2), 51 (1950).
Любич Ю. И.
1. О принадлежности степеней оператора над данным вектором к некоторому линейному классу, ДАН СССР 102, № 5 (1955).
2. О неравенствах между степенями линейного оператора, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960).
Люксембург В. (Luxemburg W. A. J.)
1. Banach function spaces, Delft, 1955.
Люксембург В. и Цаанен А. (Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.)
1. Some remarks on Banach function spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., ser. A-59-Indag. Math. 18 (1956).

2. Notes on Banach function spaces, I—IV, Proc. Nederl. Akad. Wetensch., ser. A-66, № 2, 3 (1963).
Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
1. Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
Мазья В. Г. и Соболевский П. Е.
1. О производящих операторах полугрупп, УМН 17, вып. 6 (1962).
Маркушевич А. И.
1. Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
Марцинкевич Я. (Marcinkiewicz J.)
1. Sur l'interpolation d'opérateurs, C. R. Acad. Sc., Paris, 208 (1939).
Меламед В. Б.
1. О вычислении вращения вполне непрерывного векторного поля в критическом случае, СМЖ 2, № 3 (1961).
Миранда К.
1. Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.
Миадера И. (Miyadera J.)
1. On one-parameter semi-groups of operators, J. Math. Tokyo 1, 1951.
Михлин С. Г.
1. Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1949.
2. Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
Наймарк М. А.
1. Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954.
Натансон И. П.
1. Теория функций вещественного переменного, Гостехиздат, 1957.
Немыцкий В. В.
1. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 41, № 3 (1934).
2. Об одном классе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. 41, № 4 (1934).
Ниренберг Л. (Nirenberg L.)
1. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure and Appl. Math. 8 (1955).
Нурекенов Т.
1. Об одном признаке полной непрерывности интегрального оператора Урысона, Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-матем. наук 15, вып. 3 (1965).
Петровский И. Г.
1. Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.
Пустыльник Е. И.
1. Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространствах Банаха, Изв. вузов, сер. матем., № 2 (15) (1960).
2. Про дробові степені необмежених операторів, ДАН УРСР 10 (1961).
3. Об интегральных операторах, действующих в пространствах $L_p$, ДАН СССР 146, № 6 (1962).
4. Интерполяционные теоремы в пространствах $L_p$ при $p < 1$, СМЖ 4, № 2 (1963).

5. О сходимости рядов по собственным функциям вполне непрерывного оператора в банаховых пространствах, СМЖ 4, № 3 (1963).
6. Операторы типа потенциала для случая множеств с абстрактной мерой, ДАН СССР 156, № 3 (1964).
Рисс М. (Riesz M.)
1. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math. 49 (1926).
Рисс Ф (Riesz F.)
1. Untersuchungen über systeme integrierbaren Funktionen, Math. Ann 69 (1910).
2. О линейных функциональных уравнениях, УМН 1 (1936).
Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б.
1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
Рутицкий Я. Б.
1. Про один нелінійний оператор, що діє в просторах Орліча, ДАН УРСР 3 (1952).
2. Об одном свойстве вполне непрерывного линейного оператора, действующего в пространствах Орлича, УМН 11, вып. 2 (1956).
3. Об интегральных уравнениях с экспоненциальными нелинейностями, Тр. III матем. съезда, т. 4, 1959.
4. Об интегральных операторах в пространствах Орлича, ДАН СССР 145, № 5 (1962).
5. Новые признаки непрерывности и полной непрерывности интегральных операторов в пространствах Орлича, Изв. вузов, сер Математика 5 (1962).
6. Шкалы пространств Орлича и интерполяционные теоремы, ДАН СССР 149, № 1 (1963).
7. Шкалы пространств Орлича и интерполяционные теоремы, Тр. семинара по функц. анализу, вып. 7, Воронеж, 1963.
Семенов Е. М.
1. Об одной шкале пространств с интерполяционными свойствами, ДАН СССР 148, № 5 (1963).
Слободецкий М. И.
1. Пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап ЛГУ 197 (1958).
2. Оценки в $L_p$ решений эллиптических систем, ДАН СССР 123, № 3 (1958).
3. Оценки в $L_2$ решений эллиптических и параболических систем, 1, Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 7 (1960).
Смирнов В И.
1. Курс высшей математики, тт. 4 и 5, Гостехиздат, 1953.
Смолицкий Х. Л.
1. О суммируемости потенциалов, УМН 12, вып. 4 (1957).
Соболев В. И.
1. О расщеплении линейных операторов, ДАН СССР 111, № 5 (1956).
Соболев С. Л.
1. Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб. 4 (1938).

2. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ (1950).

Соболевский П. Е.

1. Об уравнениях с операторами, образующими острый угол, ДАН СССР **116**, № 5 (1957).
2. О дифференциальных уравнениях первого порядка в гильбертовом пространстве с переменным положительно определенным самосопряженным оператором, дробные степени которого имеют постоянную область определения, ДАН СССР **123**, № 6 (1958).
3. Об одном неравенстве для эллиптических операторов, Тр. семинара по функц. анализу, вып. 6, Воронеж, 1958.
4. Об уравнениях гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, ДАН СССР **128**, № 1 (1958).
5 О логарифмах нормально позитивных операторов, УМН **16**, вып. 4 (1961).
6. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве с неограниченным переменным оператором, дробная степень которого имеет постоянную область определения, ДАН СССР **148**, № 1 (1961).
7. Оценки функций Грина уравнений с частными производными второго порядка параболического типа, ДАН СССР **138**, № 2 (1961).
8. О функциях Грина любых (в частности, целых) степеней эллиптических операторов, ДАН СССР **142**, № 4 (1961).
9. О локальной и нелокальной теоремах существования для нелинейных параболических уравнений второго порядка, ДАН СССР **136**, № 2 (1961).
10. Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах, Тр. Моск. о-ва **10**, 1961.
11. Исследование уравнений в частных производных с помощью дробных степеней операторов, Тр. IV Всесоюзного матем. съезда, **3**, Ленинград, 1961.
12. Теория дробных степеней операторов в банаховом пространстве и ее применения к исследованию уравнений параболического типа, Докторская диссертация, 1962.
13. О применении дробных степеней самосопряженных операторов к исследованию уравнений Навье—Стокса, ДАН СССР **155**, № 1 (1964).
14. О дробных степенях слабо позитивных операторов, ДАН СССР **166**, № 6 (1965).

Соломяк М. З.

1. Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха, ДАН СССР **122**, № 5 (1958).

Стейн Э. (Stein E. M.)

1. Interpolation of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc. **83**, № 2 (1956).

Стейн Э. и Уэйсс Г. (Stein E. M., Weiss G.)

1. An Extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. of Math. and Mech. **8**, № 2 (1959).

Т а м а р к и н Я. (T a m a r k i n J. D.)
1. On the compactness of the space $L^p$, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932).
Т а м а р к и н Я. и З и г м у н д А. (T a m a r k i n J. D., Z y g m u n d A.)
1. Proof of a theorem of Thorin, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944).
Т о р и н Э. (T h o r i n E. O.)
1. Теоремы выпуклости, Математика 1, № 3 (1957).
У р ы с о н П. С.
1. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений, Матем. сб. **31** (1924).
У э й с с Г. (W e i s s G.)
1. An interpolation theorem of sublinear operators on $H_p$ spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957).
Х а а р А. (H a a r A.)
1. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. **69** (1910).
Х а л м о ш П. Р.
1. Теория меры, ИЛ, 1953.
Х а р д и Г., Л и т т л ь в у д Д., П о л и а Г.
1. Неравенства, ИЛ, 1948.
Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р.
1. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1963.
Ц а а н е н А. (Z a a n e n A. C.)
1. On a certain class of Banach spaces, Ann. of Math. **47**, № 4 (1946).
2. Note on a certain class of Banach spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 52-Indag. Math. **11** (1949).
3. Linear Analysis, New-York — Amsterdam, 1953.
4. Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces, Compositio, Math. **10** (1952).
Ч ж а н Ш а н - т а й (Z h a n g S h a n g - t a i)
1. Continuity and complete continuity of the Uryson operator, Chinese Math. **4**, № 2 (1963).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ