ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

М. Л. КРАСНОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

517.2
К78
УДК 517.94

Интегральные уравнения. (Введение в теорию), Краснов М. Л., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975.

Книга предназначена для первоначального ознакомления с основными фактами теории интегральных уравнений. Автор старался избегать громоздких доказательств и утомительных выкладок. Изложение ряда вопросов строится на основе общих предложений функционального анализа, что делает рассуждения более прозрачными. Книга преследует двоякую цель: познакомить инженеров и студентов втузов с началами функционального анализа и на их основе — с некоторыми фактами из теории интегральных уравнений. Для чтения книги достаточно знания математики в объеме первых двух курсов втуза.

Библ. — 51 назв. Илл. 17.

$К \frac{20203—081}{053(02)-75}$ 27-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Памяти друзей,
павших на полях сражений
Великой Отечественной войны

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена для первоначального ознакомления с основными фактами теории интегральных уравнений.

Она возникла на основе лекций, которые я читал в Московском энергетическом институте. Книга рассчитана на инженеров и студентов втузов. Для ее чтения достаточно знания математики в объеме первых двух курсов втуза. Все необходимые понятия, не встречающиеся во втузовском курсе математики, сообщаются более или менее подробно.

Знание интеграла Лебега не предполагается и не используется по существу. Встречающееся в двух-трех местах упоминание об интеграле в смысле Лебега вызвано тем, что без этого соответствующие определения расходились бы с общепринятыми. В рамках излагаемой в книге элементарной теории интегральных уравнений в качестве суммируемых функций достаточно брать функции непрерывные или же имеющие конечное число точек разрыва 1-го рода. Термин «почти всюду» достаточно понимать так: всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. То же относится и к обобщенным функциям. Предполагается, что читатель располагает лишь начальными сведениями о δ-функции в объеме материала, сообщаемого в § 1 гл. VI книги [16] и в первых четырех параграфах книги [47].

Ряд вопросов (разветвление решений, сингулярные уравнения и др.) затронут совсем бегло, поскольку обстоятельная трактовка их потребовала бы отдельной книги. Иногда, вместо общей постановки задачи, рассматриваются простые случаи, в которых отчетливо проступают принципиальные стороны вопроса.

Некоторые результаты излагаются на общей функциональной основе, что делает рассуждения прозрачней и чище. Как правило, изучаются действительные решения интегральных уравнений с действительными ядрами, однако зачастую условия сформулированы так, что они годятся и для комплекснозначных ядер. В книге имеется некоторое количество упражнений, которые носят, в основном, характер утверждений и дополняют основное содержание. В книге нет приложений интегральных уравнений к задачам математической физики, нет или почти нет приближенных методов решения интегральных уравнений. Это сделано сознательно, поскольку указанные вопросы предполагается включить в подготавливаемое второе издание книги «Интегральные уравнения (задачи и упражнения)», которая будет служить как бы дополнением и продолжением предлагаемого пособия. При составлении книги я широко пользовался богатой отечественной и переводной литературой по функциональному анализу и интегральным уравнениям. Это в первую очередь относится к превосходным книгам А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, С. Г. Михлина, А. Д. Мышкиса, Л. А. Люстерника и В. И. Соболева, Ф. Трикоми, капитальному двухтомнику Ф. Морса и Г. Фешбаха. Моей единственной заслугой (если это можно считать заслугой) является то, что из всех имевшихся в моем распоряжении книг и статей я постарался выбрать наиболее простые и короткие рассуждения.

Я глубоко признателен профессорам В. П. Громову, Э. Г. Позняку и С. И. Похожаеву, которые внимательно прочитали рукопись. Их ценные советы и благожелательная критика немало способствовали улучшению книги. Особую признательность я хочу выразить сотрудникам кафедры математики Московского института электронного машиностроения. Их большой труд по тщательной проверке рукописи и многочисленные замечания и пожелания были для меня чрезвычайно полезны. Буду счастлив, если эта книга окажется хоть сколько-нибудь полезной для изучения курса интегральных уравнений. Все замечания и пожелания, связанные с книгой, будут приняты мною с благодарностью.

М. Краснов

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Следуя Г. Кантору, будем называть *множеством любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое.*

Если A — произвольное множество элементов, то утверждение «элемент a принадлежит множеству A» символически записывается так: $a \in A$. Запись $a \overline{\in} A$ (или $a \notin A$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Если A, B — множества, то утверждение «A является подмножеством множества B» (символически $A \subset B$) означает, что каждый элемент x множества A принадлежит и множеству B; последнее равносильно импликации *)

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

При этом, если существует хотя бы один элемент $x_0 \in B$, $x_0 \overline{\in} A$, то говорят, что A есть *истинное* подмножество множества B.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A равно B или A совпадает с B, и пишут $A = B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается символом $\varnothing$. Любое множество A содержит $\varnothing$ в качестве подмножества. В самом деле, импликация

$$x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$$

истинна, как импликация с ложной посылкой (такого x не существует).

---

*) Отношение $\alpha \Rightarrow \beta$ (читается: «если α, то β») называется *импликацией* с посылкой α и заключением β и обозначает высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда α истинно, а β ложно. Отношение «если α, то β» не следует понимать как отношение основания и следствия. Напротив, высказывание $\alpha \Rightarrow \beta$ истинно всякий раз, когда α есть ложное высказывание. Иными словами, из неверного суждения следует любое суждение: если $2\times 2=5$, то существуют ведьмы.

Пусть A, B — произвольные множества. Их *суммой* или *объединением* $A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B.

Пересечением $A \cap B$ множеств A, B называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B.

Точка M_0 называется *верхней гранью* множества X действительных чисел, если

1) правее M_0 нет ни одной точки множества X;

2) при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы одна точка $x \in X$, которая будет правее точки $M_0 - \varepsilon$.

Если такого числа M_0 не существует, то в качестве верхней грани X принимается $+\infty$.

В обоих случаях верхняя грань множества X обозначается через $\sup X$. Например, $\sup (0, 1) = 1$ не принадлежит $(0, 1)$; множество X целых отрицательных чисел имеет верхнюю грань $\sup X = -1$, ему принадлежащую.

Аналогично определяется *нижняя грань* множества X, обозначаемая $\inf X$.

Мерой интервала (a, b) называется его длина, т. е. число $b - a$.

Множество E точек на прямой имеет меру нуль, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти конечную или счетную систему интервалов, покрывающую E и такую, что сумма длин этих интервалов меньше ε.

Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду*, если оно выполняется всюду, за исключением множества меры нуль.

В дальнейшем изложении мы будем иногда пользоваться логическими символами $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Символ $\Leftrightarrow$ обозначает логическую равносильность; он заменяет слова «тогда и только тогда»;

$\forall$ (квантор общности) заменяет слова «для каждого», «для любого», «для всякого», «для всех»;

$\exists$ (квантор существования) означает «существует», «существуют», «найдется».

ВВЕДЕНИЕ

Интегральными уравнениями принято называть *уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла.*

Это определение не совсем удачно, хотя бы потому, что оно не указывает, какие еще действия, кроме интегрирования, можно производить над неизвестной функцией. Например, «интегральное» уравнение с неизвестной функцией $x(t)$

$$x(t) = \int_0^t x'(s)\,ds + x(0)$$

есть просто тождество, справедливое для любой непрерывно дифференцируемой функции, определенной в некотором интервале $(-a,\ a)$.

Не ставя перед собой задачу дать логически безупречное определение интегрального уравнения, ограничимся приведенным выше описательным определением и перечислим наиболее важные классы интегральных уравнений, которыми мы будем по преимуществу заниматься.

§ 1. Основные классы интегральных уравнений

1. Линейные интегральные уравнения

Интегральное уравнение называется *линейным*, если в него неизвестная функция входит линейно. Так, уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,\ s)\,\varphi(s)\,ds + f(t), \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — искомая функция, $f(t)$, $K(t, s)$ — известные функции, λ — параметр, есть линейное интегральное уравнение. Функция $K(t, s)$, $a \leqslant t$, $s \leqslant b$, называется *ядром* интегрального уравнения (1), функция $f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называется *свободным членом.*

1. Уравнение Фредгольма. Это один из наиболее важных классов линейных интегральных уравнений. Различают интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода. В простейшем случае линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет вид

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(t)$ — неизвестная функция.

Пределы интегрирования a, b могут быть как конечными, так и бесконечными.

Считаем, что переменная t меняется в том же промежутке (a, b), по которому совершается интегрирование. В уравнениях Фредгольма ядро $K(t, s)$ и свободный член $f(t)$ либо непрерывны (первое — в квадрате $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$, второй — на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$), либо удовлетворяют условиям

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds < +\infty, \tag{3}$$

$$\int_a^b |f(t)|^2\,dt < +\infty. \tag{4}$$

Ядра, удовлетворяющие условию (3), будем называть *фредгольмовыми.*

Если $f(t) \equiv 0$ (точнее, если $f(t)$ обращается в нуль почти всюду в $[a, b]$), то интегральное уравнение называется *однородным*, в противном случае оно называется *неоднородным.*

Отметим, что (2) представляет собой не одно уравнение, а семейство уравнений, зависящее от числового параметра λ.

Уравнение Фредгольма 1-го рода характеризуется отсутствием члена, содержащего неизвестную функцию вне интеграла. В простейшем случае оно имеет вид

$$\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = f(t), \tag{5}$$

где ядро $K(t, s)$ и функция $f(t)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям.

Примеры. 1. Уравнение

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (t + s^2)\,\varphi(s)\,ds + \sin t$$

есть интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Здесь ядро $K(t, s) = t + s^2$ и свободный член $f(t) = \sin t$ непрерывны соответственно в квадрате $Q\,\{0 \leqslant t,\ s \leqslant 1\}$ и на отрезке $[0, 1]$.

2. Уравнение

$$\varphi(t) = \int_1^{+\infty} e^{-ts}\varphi(s)\,ds + e^{-t^2/2}$$

фредгольмово, так как

$$\int_1^{+\infty} f^2(t)\,ds = \int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < +\infty,$$

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} K^2(t, s)\,dt\,ds =$$

$$= \int_1^{+\infty} dt \int_1^{+\infty} e^{-2ts}\,ds = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,dt < +\infty.$$

3. Уравнение

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}\varphi(s)\,ds + f(t)$$

не фредгольмово. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t, s)|^2\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|}\,ds. \tag{5'}$$

Внутренний интеграл в правой части (5')

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|}\,ds = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-s)}\,ds + \int_{t}^{+\infty} e^{-2(s-t)}\,ds = 1,$$

откуда следует, что интеграл (5') расходится.

2. Уравнение Вольтерра. Линейным интегральным *уравнением Вольтерра 2-го рода* называется уравнение вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{6}$$

Здесь $\varphi(t)$ — неизвестная функция, ядро $K(t, s)$ и свободный член $f(t)$ — известные функции, λ — числовой параметр.

При $f(t) \equiv 0$ уравнение (6) принимает вид

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds$$

и называется *однородным* интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода

Уравнением Вольтерра 1-го рода называется уравнение вида

$$\int_a^t K(t, s)\,ds = f(t), \tag{7}$$

не содержащее искомую функцию вне интеграла.

Уравнение Вольтерра можно при некоторых ограничениях рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма. Ядро $K(t, s)$ в уравнении (6) по смыслу задачи определено при $a \leqslant s \leqslant t$. Доопределим его при $s > t$, положив

$$K(t, s) = 0, \quad t < s \leqslant b.$$

Тогда уравнение (6) можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма с ядром $\mathscr{K}(t, s)$, определенным следующим образом (рис. 1):

$$\mathscr{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s) & \text{для } s \leqslant t, \\ 0 & \text{для } s > t. \end{cases}$$

В заштрихованной половине квадрата ядро $\mathscr{K}(t, s)$ совпадает с ядром $K(t, s)$, а во второй половине тождественно равно нулю. При таком определении ядра $\mathscr{K}(t, s)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t)$$

тождественно с уравнением Вольтерра (6).

Это простое замечание позволяет переносить результаты, полученные для уравнений Фредгольма, на уравнения Вольтерра, как на частный случай фредгольмовых уравнений.

Однако уравнения Вольтерра обладают некоторыми свойствами, характерными именно для них.

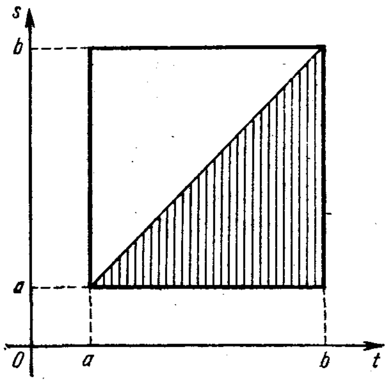

Рис. 1.

II. Нелинейные уравнения

Нелинейные интегральные уравнения настолько разнообразны, что даже их классификация затруднительна. Укажем некоторые типы таких уравнений, имеющие большое теоретическое и прикладное значение.

1°. *Уравнение Урысона*

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s, \varphi(s))\,ds. \tag{8}$$

Функция $K(t, s, \varphi)$ обычно предполагается непрерывной при $a \leqslant t,\ s \leqslant b$; $-M \leqslant \varphi \leqslant M$, где $M > 0$ — достаточно большая постоянная.

2°. Важным частным случаем уравнения Урысона является *уравнение Гаммерштейна*

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s)\,F(s, \varphi(s))\,ds, \tag{9}$$

где $K(t, s)$ — фредгольмово ядро.

3°. *Уравнение Ляпунова—Лихтенштейна*, содержащее существенно нелинейные операторы, например, уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_{[1]}(t, s)\, \varphi(s)\, ds + \\ + \mu \int_a^b \int_a^b K_{[1,\,1]}(t, s, z)\, \varphi(s)\, \varphi(z)\, ds\, dz$$

(могут также входить аналогичные члены с более высокой нелинейностью; подробнее см. [35]).

4°. *Нелинейное уравнение Вольтерра*

$$\varphi(t) = \int_a^t F(t, s, \varphi(s))\, ds, \tag{10}$$

где $F(t, s, \varphi)$, например, непрерывна по совокупности аргументов t, s, φ в области $a \leqslant t$, $s \leqslant b$, $-M \leqslant \varphi \leqslant M$.

§ 2. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям

Едва ли не первой задачей, которую можно связать с интегральными уравнениями *), была задача обращения интеграла

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} f(y)\, dy, \tag{I}$$

т. е. нахождения функции $f(y)$ по данной функции $g(x)$. Решение ее получил Фурье в 1811 г. в виде

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(x)\, dx. \tag{II}$$

Можно считать, что формула (II) дает решение интегрального уравнения (I), в котором $f(y)$ — искомая, а $g(x)$ — данная функция, и наоборот.

Формулы (I) и (II), как известно, называются *формулами обращения Фурье*.

---

*) Сам термин «интегральное уравнение» ввел в употребление Дюбуа-Реймон (1888 г.).

Рассмотрим, например, уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-its}\, ds = \sqrt{2\pi}\, e^{-|t|},$$

где $\varphi(s)$ — искомая функция. Левую часть этого уравнения можно рассматривать как преобразование Фурье функции $\varphi(s)$. Тогда по формуле обращения

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{its}\, dt = \frac{2}{1+s^2}.$$

Функция $\varphi(s) = 2/(1+s^2)$ есть решение данного интегрального уравнения.

К интегральным уравнениям вида (10) приводит задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \tag{11}$$

$$x(a) = x_0. \tag{12}$$

В самом деле, пусть $x = x(t)$ есть решение уравнения (11), удовлетворяющее начальному условию (12).

Подставляя это решение в (11), получим тождество, интегрируя которое по t от a до t будем иметь

$$x(t) = x_0 + \int_a^t F(s, x(s))\, ds, \tag{13}$$

т. е. $x(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (13). Обратно, пусть $x(t)$ есть решение уравнения (13), т. е. такая функция, что подстановка ее в уравнение (13) обращает последнее в тождество по t. Дифференцируя это тождество, найдем, что

$$\frac{dx}{dt} \equiv F(t, x(t)),$$

т. е. что $x(t)$ есть решение дифференциального уравнения (11), причем из (13) видно, что $x(a) = x_0$.

Таким образом, решение интегрального уравнения (13) эквивалентно решению задачи Коши (11)—(12).

Решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений приводит к линейным интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода. Этим еще в 1837 г. воспользовался Лиувилль в своих исследованиях в области линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Пусть, например, ищется решение уравнения

$$x''(t)+[\lambda^2-\nu(t)]\,x(t)=0 \tag{14}$$

($\lambda=\mathrm{const}$, $\nu(t)$ — известная функция)

при начальных условиях

$$x(a)=1,\quad x'(a)=0. \tag{15}$$

Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=g(t) \tag{16}$$

при тех же начальных условиях (15), где $g(t)$ — какая-то непрерывная функция.

Решение уравнения (16) при начальных условиях (15) может быть найдено методом вариации постоянных и представлено в виде

$$x(t)=\cos\lambda(t-a)+\frac{1}{\lambda}\int_a^t g(\tau)\sin\lambda(t-\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Перепишем уравнение (14) в виде

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=\nu(t)\,x(t) \tag{18}$$

и будем рассматривать правую часть как известную функцию. Тогда, воспользовавшись (17), получим

$$x(t)=\cos\lambda(t-a)+\frac{1}{\lambda}\int_a^t \nu(\tau)\sin\lambda(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

— интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Рассмотрим общую задачу сведения линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\dots+a_n(t)\,x(t)=F(t),\qquad t>a, \tag{19}$$

с начальными условиями при $t=a$

$$x(a)=C_0,\quad x'(a)=C_1,\ \dots,\ x^{(n-1)}(a)=C_{n-1} \tag{20}$$

к линейному интегральному уравнению Вольтерра. Будем предполагать, что коэффициенты $a_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$)

непрерывны в некоторой окрестности $(a-\delta;\ a+\delta)$ точки $t=a$. Для простоты ограничимся случаем $n=2$ и $a=0$, т. е. рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=F(t), \tag{19'}$$

$$x(0)=C_0,\ \ x'(0)=C_1. \tag{20'}$$

Положим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t). \tag{21}$$

Принимая во внимание начальные условия, последовательно находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds+C_1,\\ x(t)&=\int\limits_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds+C_1t+C_0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

При этом мы воспользовались формулой ([48])

$$\underbrace{\int\limits_0^t dt\int\limits_0^t dt\cdots\int\limits_0^t}_{n} f(t)\,dt=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}f(s)\,ds.$$

Учитывая (21), (22), уравнение (19′) можно записать так:

$$\varphi(t)+\int\limits_0^t [a_1(t)+a_2(t)(t-s)]\quad(s)\,ds=$$
$$=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t). \tag{23}$$

Полагая

$$K(t,\ s)=-[a_1(t)+a_2(t)(t-s)],$$

$$f(t)=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t),$$

приведем (23) к виду

$$\varphi(t)=\int_0^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds+f(t). \tag{24}$$

Это — интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода. Таким образом, задача (19′)—(20′) свелась к решению интегрального уравнения (24). Найдя это решение и подставив полученную функцию $\varphi(t)$ во второе соотношение в (22), получим решение $x(t)$ исходной задачи (19′)—(20′). Нетрудно видеть, что если коэффициенты $a_i(t)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ постоянны, то ядро соответствующего интегрального уравнения будет зависеть лишь от разности аргументов

$$K=K(t-s)$$

(*интегральное уравнение типа свертки*).

Пример. Свести задачу Коши для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(1+t^2)\,x(t)=\cos t,$$

$$x(0)=0, \quad x'(0)=2,$$

к интегральному уравнению.

Решение. Положим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t).$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^t \varphi(s)\,ds+2,$$

$$x(t)=\int_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds+2t.$$

Подставляя выражения для $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $x(t)$ в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$\varphi(t)=-\int_0^t (1+t^2)(t-s)\,\varphi(s)\,ds+\cos t-2t(1+t^2).$$

Задача Абеля. В 1823 г. Абель, занимаясь обобщением задачи о таутохроне *), пришел к уравнению

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\, d\eta,$$

где $f(x)$ — заданная функция, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Это уравнение есть частный случай линейного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода.

Уравнение Абеля интересно в том отношении, что оно является одним из интегральных уравнений, к которым непосредственно приводит постановка той или иной конкретной задачи механики или физики (минуя дифференциальные уравнения).

Исторически задача Абеля представляет первую задачу, которая привела к необходимости рассмотрения интегральных уравнений.

Задача Абеля состоит в следующем. Материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η) по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой x, достигла оси $O\xi$ за время $t = f_1(x)$, где $f_1(x)$ — заданная функция.

Абсолютная величина скорости движущейся точки

$$v = \sqrt{2g(x-\eta)}.$$

Обозначим через $\beta = \beta(\eta)$ угол наклона касательной к оси $O\xi$ (рис. 2). Тогда будем иметь

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta$$

(составляющая скорости по оси $O\eta$).

Отсюда

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}.$$

---

*) Задача о таутохроне: найти кривую, скользя вдоль которой без трения тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время, независимо от ее начального положения.

Интегрируя по η в пределах от 0 до x и полагая $\frac{1}{\sin\beta} = \varphi(\eta)$, получим уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g}\, f_1(x).$$

Обозначая $-\sqrt{2g}\, f_1(x)$ через $f(x)$, окончательно будем иметь

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}} d\eta = f(x).$$

Здесь $\varphi(x)$ — искомая функция, $f(x)$ — заданная функция.

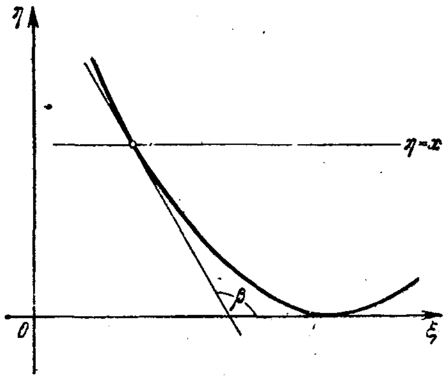

Рис. 2.

Найдя $\varphi(\eta)$, мы можем составить уравнение искомой кривой. В самом деле, $\varphi(\eta) = 1/\sin\beta$, откуда $\eta = \Phi(\beta)$.

Далее,

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\Phi'(\beta)\, d\beta}{\operatorname{tg}\beta},$$

так что

$$\xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{\operatorname{tg}\beta} d\beta = \Phi_1(\beta).$$

Таким образом, искомая кривая определится параметрическими уравнениями

$$\xi = \Phi_1(\beta), \quad \eta = \Phi(\beta).$$

В частности, при $f(x) = C = \mathrm{const}$ такой кривой является циклоида.

Рассмотрим еще задачу, приводящую к интегральным уравнениям.

Пусть имеем упругую нить длины l, которая легко, без сопротивления, изменяет свою форму, но для увеличения длины которой на Δl нужна сила $\gamma \cdot \Delta l$, где γ — некоторая постоянная (закон Гука).

Пусть концы нити закреплены в точках A и B (рис. 3). Когда нить находится в покое под действием только

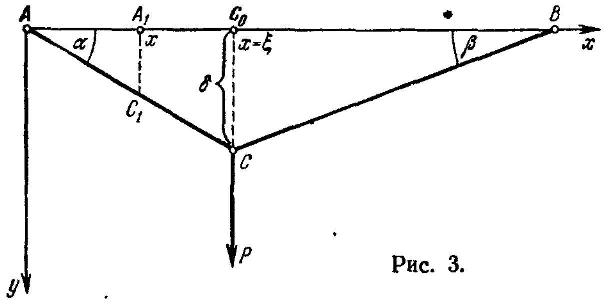

Рис. 3.

горизонтальной растягивающей силы T_0, очень большой по сравнению с другими рассматриваемыми силами, положение нити будет совпадать с отрезком AB оси Ox.

Допустим, что в точке C_0, для которой $x = \xi$, приложена к нити вертикальная сила P. Под ее влиянием нить примет форму ломаной ACB. Будем считать CC_0 очень малым по сравнению с AC_0 и C_0B (результат малости P по сравнению с T_0). Будем также считать, что натяжение нити осталось равным T_0 и под действием силы P. Проектируя на вертикаль силы натяжения нити в точке C и силу P, из условия равновесия получим

$$T_0 \sin\alpha + T_0 \sin\beta = P. \tag{25}$$

Вследствие малости величины δ имеем

$$\sin\alpha \approx \frac{\delta}{\xi}, \qquad \sin\beta \approx \frac{\delta}{l-\xi},$$

так что условие (25) можно записать в виде

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P,$$

откуда

$$\delta(\xi) = P\frac{(l-\xi)\xi}{T_0 \cdot l}.$$

Обозначая через $y(x)$ прогиб нити в точке с абсциссой x, получим

$$y(x) = PG(x, \xi),$$

где

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 \cdot l}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{(l-x)\xi}{T_0 \cdot l}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{26}$$

Действительно, пусть $x < \xi$. Из подобных треугольников AC_0C и AA_1C_1 находим

$$\frac{y(x)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi}, \quad \text{или} \quad \frac{PG(x, \xi)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi}.$$

Следовательно,

$$G(x, \xi) = \frac{x\delta(\xi)}{P\xi} = \frac{x(l-\xi)}{T_0 l}.$$

Нетрудно видеть, что $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.

Если на нить действует непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $p(\xi)$, то на участок нити между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$ действует сила, приблизительно равная $p(\xi)\Delta\xi$, которая вызывает смещение $G(x, \xi)p(\xi)\Delta\xi$. Так как смещения, обусловленные элементарными силами $p(\xi)\Delta\xi$, суммируются (принцип суперпозиции), то под действием всех нагрузок отклонение $y(x)$ будет приближенно равно

$$\sum_{(\xi)} G(x, \xi) p(\xi) \Delta\xi,$$

что при $\Delta\xi \to 0$ дает

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi. \tag{27}$$

Функция $G(x, \xi)$ носит название *функции влияния*.

Рассмотрим следующие задачи.

1°. Будем искать плотность распределения силы $p(\xi)$, под влиянием которой нить примет заданную форму $y = y(x)$. Тогда мы придем к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) \, d\xi \tag{28}$$

относительно искомой функции $p(\xi)$.

2°. Допустим, что на нить действует меняющаяся со временем t сила с плотностью в точке ξ:

$$p(\xi) \sin \omega t \quad (\omega > 0).$$

Под ее влиянием нить придет в движение. Будем предполагать, что при движении нити абсцисса каждой ее точки не меняется и что нить совершает периодические колебания, описываемые уравнением

$$y = y(x) \sin \omega t.$$

Пусть $\rho(\xi)$ — линейная плотность массы нити в точке ξ. Тогда в момент t на участок нити между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$, кроме силы $p(\xi) \sin \omega t \cdot \Delta\xi$, действует еще сила инерции

$$-\rho(\xi) \Delta\xi \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho(\xi) y(\xi) \omega^2 \sin \omega t \cdot \Delta\xi.$$

Поэтому равенство (27) примет следующий вид:

$$y(x) \sin \omega t = \int_0^l G(x, \xi) [p(\xi) \sin \omega t + \omega^2 \rho(\xi) y(\xi) \sin \omega t] \, d\xi.$$

Сокращая на $\sin \omega t$ и полагая

$$\int_0^l G(x, \xi) p(\xi) \, d\xi = f(x),$$

$$G(x, \xi) \rho(\xi) = K(x, \xi), \qquad \omega^2 = \lambda,$$

получим

$$y(x) = \lambda \int_0^l K(x, \xi) y(\xi) \, d\xi + f(x). \tag{29}$$

Считая функцию $p(\xi)$, а следовательно и $f(x)$, заданной, приходим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода для определения функции $y(x)$.

В заключение приведем так называемое *уравнение переноса*, играющее большую роль в современной физике (например, в процессах замедления нейтронов) и представляющее собой пример *интегро-дифференциального уравнения.*

Будем предполагать, что нейтроны не испытывают неупругих столкновений и что энергия нейтрона достаточно мала. Пусть Ω будет единичным вектором, определяющим направление потока нейтронов с энергией E.

Введем безразмерную величину u, определяемую соотношением

$$u = \ln \frac{E_0}{E}, \tag{30}$$

где E_0 — начальная энергия. Обозначим через $N(\boldsymbol{r}, \Omega, u, t)\, d\boldsymbol{r}\, d\Omega\, du$ число нейтронов, координаты которых лежат между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$, направления скоростей — между Ω и $\Omega + d\Omega$, а величина энергии заключена в пределах, соответствующих значениям параметра u от u до $u + du$. Все эти данные относятся к моменту времени t. Можно показать, что изменение со временем функции распределения нейтронов при движении потока нейтронов в направлении Ω равно

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (\boldsymbol{v}, \operatorname{grad} N) \quad (\boldsymbol{v} \text{ — скорость потока}). \tag{31}$$

Обозначим через $l_s(u)$ среднюю длину свободного пробега нейтрона при рассеянии, а через $l(u)$ — полную среднюю длину свободного пробега.

Число нейтронов, удаленных из потока благодаря процессам рассеяния и захвата, равно

$$\frac{vN}{l(u)}. \tag{32}$$

Отнесенное к единице времени число столкновений, которые испытывают нейтроны со скоростями, определяемыми параметрами Ω', u' в момент времени t в точке $\boldsymbol{r}$, равно

$$\frac{v'N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t)}{l_s(u')}.$$

Обозначим через $f(\mu_0, u-u')$ вероятность того, что нейтрон, имевший до столкновения скорость, характеризуемую значениями параметров $\{\boldsymbol{\Omega}', u'\}$, после столкновения будет иметь скорость, характеризуемую значениями параметров $\{\boldsymbol{\Omega}, u\}$. Здесь $\mu_0 = (\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')$ — косинус угла рассеяния нейтрона. Будем считать, что функция $f(\mu_0, u-u')$ нормирована к единице, т. е. что

$$\int d\Omega \int f(\mu_0, u-u')\,du' = 1, \tag{33}$$

точнее,

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int f(\cos\alpha, u)\,du = 1 \qquad (\mu_0 = \cos\alpha).$$

Число нейтронов, которые присоединяются к рассматриваемому потоку нейтронов в результате рассеяния, определяется выражением

$$\int_0^u du' \int \frac{v'N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t)}{l_s(u')} f(\mu_0, u-u')\,d\Omega', \tag{34}$$

где во внутреннем интеграле интегрирование ведется по всевозможным направлениям $\boldsymbol{\Omega}'$.

Наконец, обозначим через

$$S(\boldsymbol{r}, u, t) \tag{35}$$

отнесенное к единице времени и единице объема число нейтронов, порожденных в точке $\boldsymbol{r}$ в момент времени t.

Принимая во внимание уравнение непрерывности и используя выражения (31)—(35), заключаем, что функция $N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t)$ удовлетворяет следующему *уравнению переноса*:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (\boldsymbol{v}', \operatorname{grad} N) =$$

$$= \int_0^u du' \int \frac{v'N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t)}{l_s(u')} f(\mu_0, u-u')\,d\Omega' +$$

$$+ S(\boldsymbol{r}, u, t) - \frac{vN}{l(u)}. \tag{36}$$

Вводя вместо функции N функцию

$$\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t) = \frac{v}{l(u)} N(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}, u, t) \tag{37}$$

и учитывая, что $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\Omega}$, можно записать уравнение (36) в эквивалентной форме:

$$l(u)\left(\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega}, \operatorname{grad}\psi)\right) + \psi =$$
$$= \int_0^u du' \int h(u')\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}', u', t) f(\mu_0, u-u')\, d\Omega' + S(\boldsymbol{r}, u, t), \tag{38}$$

где

$$h(u) = \frac{l(u)}{l_s(u)}.$$

Функция ψ входит в уравнение (38) как под знаком производной, так и под знаком интеграла; уравнения такого вида называются *интегро-дифференциальными*.

Основная задача теории переноса заключается в решении интегро-дифференциального уравнения (38), что в общем случае сопряжено с огромными трудностями. Подробнее об уравнении переноса см. [36].

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что интегральные уравнения встречаются во многих задачах, как чисто математических, так и прикладных. При этом некоторые из последних, в частности задачи теории переноса, по существу требуют привлечения аппарата интегральных уравнений.

Один из создателей квантовой механики, В. Гейзенберг, в своей книге «Физика и философия» *) высказал предположение, что основное уравнение материи, рассматриваемое как математическое представление *всей* материи, должно иметь вид сложной системы интегральных уравнений.

---

*) Гейзенберг В., Физика и философия, ИЛ., 1963.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 3. Формулы Фредгольма

Полное исследование вопроса о разрешимости уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \tag{1}$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ и свободным членом $f(t)$ при *всевозможных* значениях параметра λ было проведено Фредгольмом в 1904 г.

Идея Фредгольма, замечательная по своей простоте и плодотворности, заключалась в следующем. Задача решения интегрального уравнения (1) рассматривалась как аналитический аналог алгебраической проблемы решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Именно, интеграл в уравнении (1) заменяется интегральной суммой, отвечающей разбиению отрезка $[a, b]$ изменения переменной s на n равных частей длины

$$\delta = \frac{b-a}{n}.$$

Точное уравнение (1) заменяется приближенным

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} K(t, s_j)\,\varphi(s_j)\,\delta + f(t), \tag{2}$$

где в качестве s_j можно взять, например, абсциссы середин интервалов разбиения (рис. 4).

Полагая в формуле (2) $t = s_1, s_2, \ldots, s_n$, получаем линейную алгебраическую систему относительно n неизвестных $\varphi(s_j)$:

$$\varphi(s_i) = \lambda \sum_{j=1}^{n} K(s_i, s_j)\,\varphi(s_j)\,\delta = f(s_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Будем считать, что $\varphi(s)$ и $f(s)$ сохраняют в i-м интервале постоянные значения, равные соответственно $\varphi(s_i)$ и $f(s_i)$, а ядро $K(t, s)$ сохраняет в каждом частичном квадрате с индексами i и j постоянное значение, равное $K(s_i, s_j)$.

Определитель системы (3)

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1, s_1)\delta & -\lambda K(s_1, s_2)\delta & \dots & -\lambda K(s_1, s_n)\delta \\ -\lambda K(s_2, s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2, s_2)\delta & \dots & -\lambda K(s_2, s_n)\delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K(s_n, s_1)\delta & -\lambda K(s_n, s_2)\delta & \dots & 1-\lambda K(s_n, s_n)\delta \end{vmatrix} \tag{4}$$

есть многочлен относительно λ.

Если λ отлично от корня многочлена $D_n(\lambda)$, то система (3) имеет единственное решение при любых правых частях, и это решение может быть найдено по известным формулам Крамера. Решая ее, мы найдем все $\varphi(s_i)$ и,

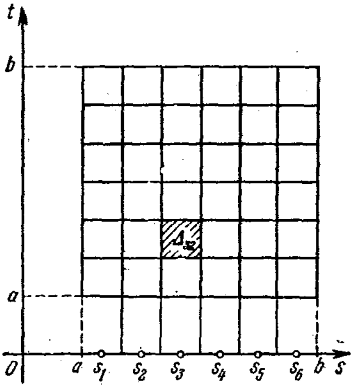

Рис. 4.

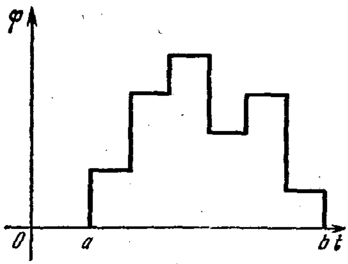

Рис. 5.

таким образом, получим приближенное выражение искомой функции $\varphi(t)$ в виде кусочно-постоянной функции $\varphi_n(t)$ (рис. 5). Метод замены интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений до сих пор широко используется в практике инженерных расчетов.

Чем больше n, тем точнее функция $\varphi_n(t)$ аппроксимирует искомую функцию.

В пределе при $n \to \infty$ линейная система (3) переходит в интегральное уравнение (1), а $\varphi_n(t)$ переходит в искомое решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (1).

Ясно, что эти соображения носят наводящий характер и нуждаются в обосновании.

Можно поступить несколько иначе. Решив систему (3) и подставив полученные значения $\varphi(s_j)$ в формулу (2), получим приближенное аналитическое представление решения уравнения (1):

$$\varphi(t) \approx f(t) + \lambda \frac{Q(t, s_1, s_2, \ldots, s_n; \lambda)}{D_n(\lambda)}. \qquad (5)$$

Можно показать, что если $K(t, s)$ и $f(t)$ непрерывны, то числитель и знаменатель второго слагаемого в (5) при $\delta = \frac{b-a}{n} \to 0$ стремятся соответственно к пределам

$$\lambda \int_a^b D(t, s; \lambda) f(s)\, ds \quad \text{и} \quad D(\lambda),$$

где $D(\lambda)$ и $D(t, s; \lambda)$ — некоторые целые функции *) от λ. Полагая

$$R(t, s; \lambda) = \frac{D(t, s; \lambda)}{D(\lambda)} \qquad \text{(резольвента Фредгольма)},$$

получим изящную формулу

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\, ds, \qquad (6)$$

определяющую решение уравнения (1) для всех значений λ, при которых $D(\lambda) \neq 0$.

Фредгольм построил функции $D(\lambda)$ и $D(t, s; \lambda)$ в виде рядов по степеням λ, полученных чисто формальным предельным переходом, и показал, что при $D(\lambda) \neq 0$ формула (6) определяет единственное решение уравнения (1).

Доказательство того, что решение системы (3) при $n \to \infty$ стремится к решению уравнения (1), было проведено позднее Гильбертом ([51]) для случая непрерывного ядра.

Найдем выражение для $D(\lambda)$, используя «правдоподобные рассуждения».

*) Функция $g(z)$ комплексного аргумента z называется *целой*, если она аналитична во всей плоскости C комплексного переменного, т. е. не имеет конечных особых точек (*полином*, e^z и т. д.).

Возьмем $n = 3$. Тогда

$$D_3(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1, s_1)\delta & -\lambda K(s_1, s_2)\delta & -\lambda K(s_1, s_3)\delta \\ -\lambda K(s_2, s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2, s_2)\delta & -\lambda K(s_2, s_3)\delta \\ -\lambda K(s_3, s_1)\delta & -\lambda K(s_3, s_2)\delta & 1-\lambda K(s_3, s_3)\delta \end{vmatrix}.$$

Полагая для сокращения записи $K(s_i, s_j) = K_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, будем иметь

$$D_3(\lambda)=(-\lambda\delta)^3\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}, \tag{7}$$

где

$$t = -1/\lambda\delta.$$

Положим

$$F(t)=\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22}+t & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Ясно, что $F(t)$ есть многочлен третьей степени относительно t. Представим $F(t)$ по формуле Тейлора по степеням t:

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\frac{F'''(0)}{3!}t^3. \tag{9}$$

Из (8) следует, что

$$F(0)=\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

По правилу дифференцирования определителя

$$F'(t)=\begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22}+t & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33}+t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11}+t & 0 & K_{13} \\ K_{21} & 1 & K_{23} \\ K_{31} & 0 & K_{33}+t \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} K_{11}+t & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+t & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

так что

$$F'(0)=\begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Таким образом, величина $F'(0)$ равна сумме определителей, получающихся из определителя (10) вычеркиванием i-го столбца и i-й строки. Нетрудно видеть, что

$$F'(0)=\frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

В самом деле, при $\alpha_1=\alpha_2$ определители в правой части (13) равны нулю, а определители, получающиеся один из другого перестановкой индексов α_1 и α_2, равны между собой. Отсюда следует справедливость формулы (13).

Аналогично, величина $F(0)$ может быть представлена в виде

$$F(0)=\frac{1}{3!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\sum_{\alpha_3=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & K\alpha_1\alpha_3 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & K\alpha_2\alpha_3 \\ K\alpha_3\alpha_1 & K\alpha_3\alpha_2 & K\alpha_3\alpha_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Дифференцируя (11) по t и полагая затем $t=0$, находим

$$F''(0)=K_{33}+K_{22}+K_{33}+K_{11}+K_{22}+K_{11},$$

т. е. $F''(0)$ равно сумме «определителей» первого порядка, получающихся из (10) вычеркиванием двух строк номеров i и j и двух столбцов с теми же номерами:

$$F''(0)=2\sum_{\alpha_1=1}^{3}K\alpha_1\alpha_1. \tag{15}$$

Наконец, $F'''(t)=6$.

Таким образом,

$$F(t)=\frac{1}{3!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\sum_{\alpha_3=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & K\alpha_1\alpha_3 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & K\alpha_2\alpha_3 \\ K\alpha_3\alpha_1 & K\alpha_3\alpha_2 & K\alpha_3\alpha_3 \end{vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix}\frac{t}{1!}+2\sum_{\alpha_1=1}^{3}K\alpha_1\alpha_1\frac{t^2}{2!}+6\cdot\frac{t^3}{3!}. \tag{16}$$

Заменяя в (16) t на $-1/\lambda\delta$, получим

$$D_3(\lambda) = (-\lambda\delta)^3 F(t) =$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{1!}\sum_{\alpha_1=1}^{3} K\alpha_1\alpha_1\delta + \frac{\lambda^2}{2!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 \end{vmatrix}\delta^2 -$$

$$-\frac{\lambda^3}{3!}\sum_{\alpha_1=1}^{3}\sum_{\alpha_2=1}^{3}\sum_{\alpha_3=1}^{3}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & K\alpha_1\alpha_3 \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & K\alpha_2\alpha_3 \\ K\alpha_3\alpha_1 & K\alpha_3\alpha_2 & K\alpha_3\alpha_3 \end{vmatrix}\delta^3$$

Совершенно аналогично получаем для любого n:

$$D_n(\lambda) = 1 +$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m\lambda^m}{m!}\sum_{\alpha_1=1}^{n}\dots\sum_{\alpha_m=1}^{n}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & \dots & K\alpha_1\alpha_m \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & \dots & K\alpha_2\alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K\alpha_m\alpha_1 & K\alpha_m\alpha_2 & \dots & K\alpha_m\alpha_m \end{vmatrix}\delta^m$$

Заметим, что сумма

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n} K\alpha_1\alpha_1\delta = \sum_{j=1}^{n} K(s_j, s_j)\,\delta$$

в пределе при $\delta \to 0$ переходит в интеграл $\int\limits_a^b K(s, s)\,ds$ так называемый *след ядра* $K(t, s)$.

Точно так же при $\delta \to 0$ сумма

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n}\dots\sum_{\alpha_m=1}^{n}\begin{vmatrix} K\alpha_1\alpha_1 & K\alpha_1\alpha_2 & \dots & K\alpha_1\alpha_m \\ K\alpha_2\alpha_1 & K\alpha_2\alpha_2 & \dots & K\alpha_2\alpha_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K\alpha_m\alpha_1 & K\alpha_m\alpha_2 & \dots & K\alpha_m\alpha_m \end{vmatrix}\delta^m$$

переходит в интеграл

$$C_m = \int\limits_a^b\dots\int\limits_a^b\begin{vmatrix} K(\alpha_1, \alpha_1) & K(\alpha_1, \alpha_2) & \dots & K(\alpha_1, \alpha_m) \\ K(\alpha_2, \alpha_1) & K(\alpha_2, \alpha_2) & \dots & K(\alpha_2, \alpha_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\alpha_m, \alpha_1) & K(\alpha_m, \alpha_2) & \dots & K(\alpha_m, \alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1\dots d\alpha_m \tag{17}$$

Обозначая через $D(\lambda)$ предел $D_n(\lambda)$ при $n \to \infty$, будем иметь

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \tag{18}$$

где C_m определяются по формулам (17), причем $C_0 = 1$.

Покажем, что ряд (18) сходится всюду, т. е. $D(\lambda)$ является целой функцией λ. Воспользуемся неравенством Адамара: если Δ — определитель n-го порядка,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то

$$|\Delta| \leqslant \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n, \tag{19}$$

где σ_i^2 есть сумма квадратов элементов i-й строки определителя

$$\sigma_i^2 = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 \qquad (i=1, 2, \dots, n).$$

В случае $n = 3$ это неравенство имеет простой геометрический смысл. В самом деле, считая a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} координатами вектора $\boldsymbol{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$), находим, что Δ есть смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, которое по абсолютной величине равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Величины σ_1, σ_2, σ_3 определяют длины этих векторов, длины ребер параллелепипеда. Неравенство (19) Адамара выражает в этом случае очевидный геометрический факт: объем параллелепипеда не может быть больше произведения длин его ребер. Неравенство обращается в равенство только в том случае, когда параллелепипед прямоугольный, т. е. когда векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ попарно ортогональны.

Доказательство неравенства Адамара можно найти, например, в [15].

Пусть $|K(t, s)| \leqslant M$ для всех t, s, $a \leqslant t$, $s \leqslant b$. Тогда для C_m получаем следующую оценку:

$$|C_m| \leqslant \int_a^b \dots \int_a^b M^m m^{m/2}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_m = M^m m^{m/2} (b-a)^m.$$

Следовательно, ряд (18) допускает мажоранту

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{m/2}}{m!}[M(b-a)]^m\lambda^m. \tag{20}$$

Радиус сходимости ряда (20)

$$R=\lim_{m\to\infty}\frac{M^m(b-a)^m m^{m/2}(m+1)!}{m!\,M^{m+1}(b-a)^{m+1}(m+1)^{m+1/2}}=$$

$$=\frac{1}{M(b-a)}\lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{\sqrt{m+1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2}}=\infty.$$

Значит, ряд (18) также сходится при всех значениях λ и определяет целую функцию $D(\lambda)$, называемую *определителем Фредгольма.*

Аналогично можно установить, что функция $D(t, s; \lambda)$ определяется рядом Фредгольма

$$D(t, s; \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}B_m(t, s), \tag{21}$$

где

$$B_m(t, s)=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K(t, s) & K(t, \alpha_1) & \ldots & K(t, \alpha_m)\\ K(\alpha_1, s) & K(\alpha_1, \alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1, \alpha_m)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(\alpha_m, s) & K(\alpha_m, \alpha_1) & \ldots & K(\alpha_m, \alpha_m)\end{vmatrix}d\alpha_1\ldots d\alpha_m, \tag{22}$$

причем $B_0(t, s)=K(t, s)$. Отметим, что

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(t, t)\,dt, \quad n>0 \quad (C_0=1).$$

Ряд (21) сходится при всех значениях λ и, следовательно, $D(t, s; \lambda)$ есть целая аналитическая функция от λ. Ее называют *минором определителя Фредгольма.*

Таким образом, *резольвента Фредгольма*

$$R(t, s; \lambda)=\frac{D(t, s; \lambda)}{D(\lambda)}$$

не зависит от $f(t)$ и представляет собой частное двух целых аналитических функций, т. е. является мероморфной функцией от λ.

В любой конечной части λ-плоскости она может иметь в качестве особых точек лишь полюсы в конечном числе.

Полюсами резольвенты могут быть только нули $D(\lambda)$. Верно и обратное предложение: нули $D(\lambda)$ суть полюсы резольвенты ([31]).

Формулы Фредгольма (18) и (21) позволяют построить разрешающее ядро $R(t, s; \lambda)$ интегрального уравнения (1).

Неудобство пользования этими формулами в том, что ряды (18), (21), как правило, сложны для численных расчетов из-за кратных интегралов, определяющих коэффициенты рядов.

Значения λ, для которых существует резольвента уравнения Фредгольма, будем называть *регулярными*, а значения λ, для которых резольвента не существует, — *характеристическими*. Характеристические числа совпадают с полюсами резольвенты или, что то же, с нулями $D(\lambda)$.

Фундаментальный результат Фредгольма мы можем теперь сформулировать так:

Если значение λ регулярное, то интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \tag{1}$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ и правой частью $f(t)$ имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\,ds.$$

Как следствие получаем: *если λ регулярное, то однородное уравнение*

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Поэтому если однородное уравнение имеет нетривиальные решения, то это возможно только тогда, когда значение λ характеристическое. Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения называются *собственными* или *фундаментальными функциями ядра $K(t, s)$, соответствующими данному характеристическому числу.*

Пример. Построить резольвенту ядра

$$K(t, s) = e^{t-s}, \qquad 0 \leqslant t, \ s \leqslant 1.$$

Решение. Имеем $C_0 = 1$, $B_0 = e^{t-s}$. Далее,

$$C_1 = \int_0^1 B_0(\alpha_1, \alpha_1)\, d\alpha_1 = 1,$$

$$B_1(t, s) = \int_0^1 \begin{vmatrix} e^t e^{-s} & e^t e^{-\alpha_1} \\ e^{\alpha_1} e^{-s} & e^{\alpha_1} e^{-\alpha_1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = e^t \int_0^1 e^{\alpha_1} \begin{vmatrix} e^{-s} & e^{-\alpha_1} \\ e^{-s} & e^{-\alpha_1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = 0,$$

$$C_2 = \int_0^1 B_1(\alpha_1, \alpha_1)\, d\alpha_1 = 0.$$

Нетрудно видеть, что все $B_k(t, s)$ и C_k $(k \geqslant 2)$ равны нулю, так что

$$D(\lambda) = 1 - \lambda, \quad D(t, s; \lambda) = e^{t-s}$$

и резольвента Фредгольма ядра $K(t, s) = e^{t-s}$ будет равна

$$R(t, s; \lambda) = \frac{e^{t-s}}{1-\lambda}.$$

Резольвента $e^{t-s}/(1-\lambda)$ аналитична во всей комплексной λ-плоскости, за исключением точки $\lambda = 1$, являющейся простым полюсом резольвенты. Поэтому для всех $\lambda \neq 1$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 e^{t-s} \varphi(s)\, ds + f(t)$$

($f(t)$ непрерывна на $[0, 1]$) имеет единственное решение

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 e^{t-s} f(s)\, ds.$$

При $\lambda = 1$ соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{t-s} \varphi(s)\, ds$$

имеет очевидное ненулевое решение $\varphi(t) = e^t$ — собственную функцию ядра $K(t, s) = e^{t-s}$. Легко видеть, что функции $\psi(t) = Ce^t$, где C — произвольная постоянная, также будут собственными функциями этого ядра.

Так как $D(\lambda)$ есть целая функция от λ, не равная тождественно нулю ($D(0) = 1$), то, как это следует из общей теории функций, множество нулей $D(\lambda)$ не может иметь предельную точку в ограниченной области плоскости λ.

Следовательно, в любом круге $|\lambda| < R$ таких нулей может быть лишь конечное число. Проведем окружности в комплексной λ-плоскости с центром в начале и радиусами 1, 2, 3, ... Эти окружности разобьют плоскость на счетное множество областей. В круге любого радиуса n содержится конечное число нулей $D(\lambda)$, и, значит, в каждом кольце $n < |\lambda| \leqslant n + 1$ их тоже содержится лишь конечное число. Поэтому множество всех нулей $D(\lambda)$ есть объединение счетного множества конечных множеств и, следовательно, не более чем счетно. Нули функции $D(\lambda)$ суть характеристические числа ядра $K(t, s)$, так что *уравнение Фредгольма* (1) *с непрерывным ядром* $K(t, s)$ *имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

§ 4. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма

Рассмотрим один частный вид интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, на примере которых отчетливо видны основные результаты фредгольмовой теории таких уравнений.

Определение. *Ядро* $K(t, s)$ *интегрального уравнения называется вырожденным, если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от* t, *а другая только от* s:

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) b_i(s). \tag{1}$$

Будем считать, что функции $a_i(t)$, так же как и функции $b_i(s)$, между собой линейно независимы (в противном случае можно было бы уменьшить число слагаемых в сумме (1)).

Предположим, что функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ изменения их аргументов; тогда ядро $K(t, s)$ будет непрерывным в прямоугольнике $Q\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром $K(t, s)$:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s)\varphi(s)\,ds + f(t), \tag{2}$$

где $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

Пусть уравнение (2) имеет решение $\varphi = \varphi(t)$. Положим

$$c_i = \int_a^b \varphi(s)\,b_i(s)\,ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Тогда из (2) получим

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t), \tag{4}$$

откуда видно, что решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к определению постоянных c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Заменим в равенстве (4) индекс суммирования i на j, умножим обе части этого равенства на $b_i(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от a до b:

$$\int_a^b \varphi(t)\,b_i(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,b_i(t)\,dt + \\ + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \int_a^b a_j(t)\,b_i(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Вводя обозначения

$$\int_a^b a_j(t)\,b_i(t)\,dt = k_{ij}, \qquad \int_a^b f(t)\,b_i(t)\,dt = f_i$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений, которой необходимо должны удовлетворять коэффициенты c_i:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Если эта система неразрешима, то, очевидно, интегральное уравнение (2) также неразрешимо.

Пусть теперь система (6) имеет решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Подставив эти значения коэффициентов в формулу (4), получим функцию $\varphi(t)$, которая является решением интегрального уравнения (2), в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Таким образом, интегральное уравнение (2) и система линейных алгебраических уравнений (6) эквивалентны в том смысле, что разрешимость системы (6) влечет за собой разрешимость уравнения (2) и наоборот.

Определитель системы (6) $D(\lambda)$ равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \ldots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \ldots & -\lambda k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \ldots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

$D(\lambda)$ есть многочлен относительно λ степени не выше n, отличный от тождественного нуля, так как

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{8}$$

Следовательно, $D(\lambda)$ имеет не более n различных корней. $D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма* для интегрального уравнения (2), а его нули, т. е. корни уравнения $D(\lambda) = 0$, называют *характеристическими числами ядра* $K(t, s)$ или уравнения (2) (см. стр. 35).

1°. Если λ не совпадает ни с одним из нулей $D(\lambda)$, т. е. $D(\lambda) \neq 0$, то система линейных уравнений (6) однозначно разрешима при любых правых частях f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Значит, *если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение* (2) *имеет единственное решение* $\varphi(t)$, *определяемое формулой* (4), *при любом свободном члене* $f(t)$.

Это — первая теорема Фредгольма.

В случае $D(\lambda) \neq 0$ соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s) \varphi(s)\, ds, \tag{9}$$

отвечающее случаю $f(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, имеет только тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$. В самом деле, если $f(t) \equiv 0$ на $[a, b]$, то все f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю и система (6) будет системой однородных линейных уравнений с определителем, отличным от нуля. Такая система имеет только нулевое решение $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Поэтому первую теорему Фредгольма иногда формулируют так:

Для того чтобы уравнение (2) *имело единственное решение при любой функции* $f(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение имело только тривиальное решение* $\varphi(t) \equiv 0$.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 (t - s) \varphi(s)\, ds.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\varphi(t) = 1 + \lambda t \int_0^1 \varphi(s)\, ds + \lambda \int_0^1 (-s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Здесь $b_1(s) \equiv 1$, $b_2(s) = -s$. Положим

$$c_1 = \int_0^1 \varphi(s)\, ds, \qquad c_2 = \int_0^1 (-s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Тогда

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c_1 t + \lambda c_2. \tag{10}$$

Умножим обе части (10) последовательно на $b_1(t)$ и $b_2(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до 1. Получим

$$\int_0^1 \varphi(t)\, dt = \int_0^1 dt + \lambda c_1 \int_0^1 t\, dt + \lambda c_2 \int_0^1 dt,$$

$$\int_0^1 (-t)\, \varphi(t)\, dt = \int_0^1 (-t)\, dt + \lambda c_1 \int_0^1 (-t^2)\, dt + \lambda c_2 \int_0^1 (-t)\, dt,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &c_1\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-\lambda c_2=1,\\ &c_1\frac{\lambda}{3}+\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)c_2=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} & 1+\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{12}$$

отличен от нуля при любых действительных λ.

По формулам Крамера находим

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ -\frac{1}{2} & 1+\frac{\lambda}{2}\end{vmatrix}}{D(\lambda)}=\frac{12}{12+\lambda^2},$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2} & 1 \\ \frac{\lambda}{3} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}}{D(\lambda)}=-\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2}.$$

В силу (10) имеем

$$\varphi(t)=1+\frac{12\lambda t}{12+\lambda^2}-\frac{6\lambda+\lambda^2}{12+\lambda^2}=\frac{6(2+2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}$$

(если $\lambda\neq\pm 2i\sqrt{3}$).

Если решать систему (5) по формулам Крамера, а затем определители, стоящие в числителях, разлагать по элементам столбца свободных членов, то получатся выражения вида

$$c_i=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{n}D_{ik}(\lambda)f_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где $D_{ik}(\lambda)$ — некоторые многочлены от λ степени не выше $n-1$.

Подставляя эти выражения для c_i в формулу (4), будем иметь

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda)\, a_i(t) \int_a^b f(s)\, b_k(s)\, ds,$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\, ds, \qquad (11)$$

где

$$R(t, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{ik}(\lambda)\, a_i(t)\, b_k(s). \qquad (12)$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ есть *резольвента* (*разрешающее ядро*) интегрального уравнения (2). При фиксированных t, s она представляет собой дробную рациональную функцию комплексной переменной λ, и при любом значении λ, отличном от характеристического, $R(t, s; \lambda)$ есть непрерывная функция t, s.

2°. Пусть теперь λ совпадает с одним из нулей определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. является характеристическим числом ядра $K(t, s)$.

Тогда определитель системы (6) будет равен нулю. Соответствующая однородная система

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = 0 \qquad (13)$$

имеет при этом некоторое число p $(1 \leqslant p < n)$ линейно независимых ненулевых вектор-решений

$$\left\{c_1^{(l)}, c_2^{(l)}, \ldots, c_n^{(l)}\right\} \quad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Функции

$$\varphi_l(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)} a_i(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14)$$

будут нетривиальными решениями соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b b_i(s)\, \varphi(s)\, ds. \qquad (15)$$

Как и в общем случае уравнения с невырожденным ядром, нетривиальные решения однородного уравнения называются *собственными* или *фундаментальными функциями* этого уравнения (или ядра $K(t, s)$), отвечающими данному характеристическому числу. Число линейно независимых функций, соответствующее данному характеристическому числу, называется его *рангом* или *кратностью*.

Нетрудно видеть, что если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — собственные функции, отвечающие одному и тому же характеристическому числу λ, то их сумма $\varphi_1(t)+\varphi_2(t)$ будет также собственной функцией, отвечающей этому же числу λ. Точно так же, если $\varphi(t)$ — собственная функция, то $\alpha\varphi(t)$, где α — любая постоянная, будет собственной функцией ядра $K(t, s)$.

Таким образом, собственные функции $\varphi_l(t)$, отвечающие данному характеристическому числу λ, образуют *линейное пространство*, размерность которого равна p.

Общим решением однородного уравнения (15), отвечающим данному характеристическому числу, будет функция

$$\varphi(t)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l\varphi_l(t), \tag{16}$$

где α_l — произвольные постоянные.

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры (см. [30]).

Пусть имеем квадратную матрицу порядка n

$$\mathfrak{A}=(\alpha_{ij})_{i=1,\,2,\,\ldots,\,n}^{j=1,\,2,\,\ldots,\,n} \tag{17}$$

(α_{ij} — действительные числа).

Матрица $\mathfrak{A}^*$, получающаяся из $\mathfrak{A}$ заменой всех ее строк соответствующими столбцами и наоборот, называется *сопряженной* к матрице $\mathfrak{A}$. Так что если $\mathfrak{A} = (\alpha_{ij})$, то $\mathfrak{A}^* = (\alpha_{ji})$.

Если дана система линейных алгебраических уравнений

$$\mathfrak{A}X=F, \tag{18}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ F_n\end{pmatrix},$$

то система

$$\mathfrak{A}^*Y = G \tag{19}$$

называется *сопряженной* с системой (18).

Минором k-го порядка матрицы $\mathfrak{A}$ называется определитель k-го порядка, составленный из элементов α_{ij} матрицы $\mathfrak{A}$, расположенных на пересечении каких-либо ее k строк и k столбцов ($k \leqslant n$).

Если у матрицы $\mathfrak{A}$ все миноры порядка $k > r$ равны нулю, а среди ее миноров порядка r имеется хоть один, отличный от нуля, то число r называется *рангом* матрицы $\mathfrak{A}$.

Теорема 1.1. *Если определитель системы равен нулю, то однородная система $\mathfrak{A}X = 0$ и сопряженная $\mathfrak{A}^*Y = 0$ имеют каждая $p = n - r$ линейно независимых решений, где r — ранг матрицы $\mathfrak{A}$.*

Введем следующие понятия. Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{20}$$

Определение. *Ядро $K^*(t, s)$, получаемое из ядра $K(t, s)$ заменой t на s и наоборот, называется сопряженным с ядром $K(t, s)$:*

$$K^*(t, s) = K(s, t). \tag{21}$$

(В случае, когда $K(t, s)$ есть комплекснозначная функция действительных аргументов t, s, полагаем по определению

$$K^*(t, s) = \overline{K(s, t)},$$

где $\overline{K(s, t)}$ означает величину, комплексно сопряженную с $K(s, t)$.)

Уравнение

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b K^*(t, s)\,\psi(s)\,ds + g(t) \tag{22}$$

называется *сопряженным* (*союзным*) с уравнением (20).

Для интегрального уравнения (2) с вырожденным ядром сопряженное с ним уравнение имеет вид

$$\psi(t)=\lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(s) b_i(t) \psi(s)\, ds+g(t). \tag{23}$$

Для него

$$\psi(t)=g(t)+\lambda \sum_{i=1}^n c_i^* b_i(t), \tag{24}$$

где

$$c_i^*=\int_a^b \psi(s) a_i(s)\, ds \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{25}$$

Если $g(t) \equiv 0$, т. е. уравнение (23) однородное, то для определения c_i^* получаем однородную систему

$$c_i^*-\lambda \sum_{j=1}^n k_{ji} c_j^*=0, \tag{26}$$

сопряженную с системой (13).

В силу теоремы 1.1 обе эти системы имеют одинаковое число p линейно независимых вектор-решений.

Если $\{c_1^{*(l)}, \ldots, c_n^{*(l)}\}$ $(l=1,2,\ldots,p)$ суть ненулевые вектор-решения системы (26), то функции

$$\psi_l(t)=\sum_{i=1}^n c_i^{*(l)} b_i(t) \qquad (l=1,2,\ldots,p)$$

будут собственными функциями однородного уравнения

$$\psi(t)=\lambda \sum_{i=1}^n b_i(t) \int_a^b a_i(s) \psi(s)\, ds, \tag{27}$$

сопряженного с уравнением (9).

Итак, *если λ есть характеристическое число ядра $K(t, s)$, то однородное интегральное уравнение* (15) *и сопряженное с ним уравнение* (27) *имеют одно и то же конечное число линейно независимых собственных функций.* Это — вторая теорема Фредгольма.

3°. Рассмотрим, наконец, неоднородное уравнение (2) в случае, когда λ — характеристическое число.

Как мы отмечали, его разрешимость эквивалентна разрешимости неоднородной системы (6) линейных алгебраических уравнений

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij} c_j = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Воспользуемся следующей теоремой ([30]).

Теорема 1.2. *Для того чтобы неоднородная система линейных алгебраических уравнений была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор свободных членов этой системы был ортогонален ко всем вектор-решениям сопряженной однородной системы.*

Согласно этой теореме, неоднородная система (6) будет разрешима тогда и только тогда, когда вектор $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ будет ортогонален каждому из векторов $\{c^{*(l)}, c_2^{*(l)}, \ldots, c_n^{*(l)}\}$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$, т. е. когда

$$\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^{*(l)} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p). \tag{28}$$

Но $f_i = \int_a^b f(t) b_i(t)\, dt$, и, следовательно, условие (28) можно записать так:

$$\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^{n} c_i^{*(l)} b_i(t)\, dt = \int_a^b f(t) \psi_l(t)\, dt = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p). \tag{29}$$

Таким образом, *неоднородное интегральное уравнение* (2) *с вырожденным ядром при характеристическом значении* λ *будет разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член* $f(t)$ *будет ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного интегрального уравнения* (27).

Это — третья теорема Фредгольма.

Подчеркнем, что вопрос о разрешимости уравнения (2) требует проверки *конечного* числа p условий

$$\int_a^b f(t) \psi_l(t)\, dt = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, p).$$

Если эти условия выполнены, то уравнение (2) имеет бесчисленное множество решений. Все они описываются формулой

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{о. о}}(t) + \varphi_{\text{н}}(t),$$

где $\varphi_{\text{н}}(t)$ — какое-либо решение неоднородного уравнения (2), а $\varphi_{\text{о. о}}(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-1}^{1} (ts^2 + st^2)\, \varphi(s)\, ds + f(t), \tag{30}$$

где $f(t)$ непрерывна на $[-1, 1]$.

Запишем уравнение в виде

$$\varphi(t) = \lambda t \int_{-1}^{1} s^2 \varphi(s)\, ds + \lambda t^2 \int_{-1}^{1} s \varphi(s)\, ds + f(t)$$

и положим

$$c_1 = \int_{-1}^{1} s^2 \varphi(s)\, ds, \qquad c_2 = \int_{-1}^{1} s \varphi(s)\, ds.$$

Тогда

$$\varphi(t) = c_1 \lambda t + c_2 \lambda t^2 + f(t). \tag{31}$$

Для определения коэффициентов c_1, c_2 получаем систему

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 &= \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\, dt, \\ -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 &= \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Определитель $D(\lambda)$ системы (32) равен $1 - \frac{4}{15}\lambda^2$. Если $\lambda \neq \pm \sqrt{15}/2$, то система (32) имеет единственное решение при любых правых частях и уравнение (3) однозначно разрешимо при любой непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(t)$.

Пусть теперь $\lambda = \sqrt{15}/2$. Тогда однородная система

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \frac{2}{5}\lambda c_2 &= 0, \\ -\frac{2}{3}\lambda c_1 + c_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

отвечающая системе (32), будет иметь ненулевое решение $\{\sqrt{3/5}, C, C\}$, где C — любое.

Следовательно, однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-1}^{1} (ts^2 + st^2)\,\varphi(s)\,ds, \tag{34}$$

отвечающее данному, при $\lambda = \sqrt{15}/2$ имеет ненулевое решение

$$\varphi(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t + t^2\right) C. \tag{35}$$

Ядро интегрального уравнения (30) симметрично:

$$K(t, s) \equiv K(s, t);$$

поэтому сопряженное однородное интегральное уравнение совпадает с уравнением (34), и, значит, решение сопряженного уравнения есть

$$\psi(t) = \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t + t^2\right) C. \tag{36}$$

Неоднородная система алгебраических уравнений (32) при $\lambda = \sqrt{15}/2$ принимает вид

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,c_2 &= \int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt, \\ c_1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\,c_2 &= \int_{-1}^{1} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right) f(t)\,dt, \end{aligned}\right\}$$

откуда сразу видно, что она будет разрешима, только если

$$\int_{-1}^{1} t^2 f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right) f(t)\,dt$$

или, что то же,

$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t + t^2\right) f(t)\,dt = 0, \tag{37}$$

т. е. когда $f(t)$ будет ортогональна любому решению $\psi(t)$ сопряженного уравнения (см. (36)).

Так, если $f(t) \equiv 1$, то условие (37) не выполнено и уравнение (30) неразрешимо.

Если $f(t) = t^3 - \frac{3}{5} t$, то уравнение (30) имеет бесчисленное множество решений

$$\varphi(t) = t^3 - \frac{3}{5} t + C\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\, t + t^2\right) \qquad (C \text{ — любое}).$$

Аналогично исследуется случай $\lambda = -\sqrt{15}/2$.

Условия (29) будут заведомо выполнены, если выполняются условия

$$\int_a^b f(t)\, b_i(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Как следствие из доказанных теорем вытекает важная

Теорема об альтернативе. *Если однородное интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром имеет только тривиальное решение, то соответствующее неоднородное уравнение всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное интегральное уравнение в зависимости от свободного члена $f(t)$ либо вовсе не имеет решения, либо имеет бесконечное число решений.*

Замечание. Результаты остаются в известном смысле справедливыми и для случая, когда $a_i(t)$, $b_i(t)$ и $f(t)$ аналитически зависят от параметра λ, т. е. для уравнений вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(t, \lambda)\, b_i(s, \lambda)\, \varphi(s)\, ds + f(t, \lambda).$$

В этом случае k_{ij} и f_i становятся аналитическими функциями от λ, а определитель $D(\lambda)$ будет уже не многочленом относительно λ, а аналитической функцией λ более общей природы. Поэтому может оказаться, что характеристических чисел вовсе не существует, поскольку неалгебраическая аналитическая функция может не иметь нулей.

Пусть теперь имеем интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t) \qquad (38)$$

с произвольным (невырожденным) непрерывным ядром $K(t, s)$ и непрерывной $f(t)$. Можно показать (см. ниже, § 14), что если построить достаточно близкое к ядру $K(t, s)$ вырожденное ядро $H(t, s)$, то, решив уравнение с вырожденным ядром $H(t, s)$, мы получим решение, близкое к решению уравнения с ядром $K(t, s)$ при той же правой части. Более того, если мы построим последовательность $\{H_n(t, s)\}$ вырожденных ядер, равномерно сходящуюся к ядру $K(t, s)$, то последовательность $\{z_n(t)\}$ решений уравнений с ядрами $H_n(t, s)$ будет равномерно сходиться к решению $\varphi(t)$ уравнения (38) с ядром $K(t, s)$.

Способы построения вырожденных ядер, близких к данному ядру $K(t, s)$, могут быть самыми различными. Например, ядро $K(t, s)$ можно приближать частичными суммами степенного или двойного тригонометрического ряда, если ядро $K(t, s)$ разлагается в равномерно сходящийся в прямоугольнике $Q\,\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$ степенной или тригонометрический ряд, или приближать его алгебраическими или тригонометрическими интерполяционными многочленами.

Пример. Найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \int_0^1 t\left(1 - e^{ts}\right)\varphi(s)\,ds + e^t - t.$$

Ядро уравнения $K(t, s) = t\left(1 - e^{ts}\right)$ аппроксимируем суммой первых трех членов разложения $K(t, s)$ в ряд Тейлора, т. е. положим

$$H(t, s) = -t^2 s - \frac{t^3 s^2}{2} - \frac{t^4 s^3}{6},$$

и вместо исходного уравнения рассмотрим интегральное уравнение

$$z(t) = -\int_0^1 \left(t^2 s + \frac{t^3 s^2}{2} + \frac{t^4 s^3}{6}\right) z(s)\,ds + e^t - t.$$

Это уже уравнение с вырожденным ядром. Решение его ищем в виде

$$z(t) = e^t - t - c_1 t^2 - c_2 t^3 - c_3 t^4,$$

где

$$c_1 = \int_0^1 s z(s)\,ds, \qquad c_2 = \int_0^1 \frac{s^2}{2} z(s)\,ds, \qquad c_3 = \int_0^1 \frac{s^3}{6} z(s)\,ds.$$

Для определения постоянных c_1, c_2, c_3 получаем систему

$$\left.\begin{aligned}
\frac{5}{4}c_1+\frac{1}{5}c_2+\frac{1}{6}c_3&=\frac{2}{3},\\
\frac{1}{5}c_1+\frac{13}{6}c_2+\frac{1}{7}c_3&=e-\frac{9}{4},\\
\frac{1}{6}c_1+\frac{1}{7}c_2+\frac{49}{8}c_3&=\frac{29}{5}-2e.
\end{aligned}\right\}$$

Решая ее, получим

$$c_1=0{,}5010,\quad c_2=0{,}1671,\quad c_3=0{,}0422,$$

так что

$$z(t)=e^t-t-0{,}5010t^2-0{,}1671t^3-0{,}0422t^4.$$

Точное решение интегрального уравнения $\varphi(t)\equiv 1$. Для найденного приближенного решения при $t=0$; $0{,}5$; $1{,}0$ имеем $z(0)=1{,}0000$, $z(0{,}5)=1{,}0000$, $z(1)=1{,}0080$, т. е. расхождение с точным решением всего 0,008.

ГЛАВА II

ПРИНЦИП СЖАТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Вполне элементарным и в то же время очень плодотворным приемом для доказательства теорем существования и единственности решения алгебраических, дифференциальных, интегральных и других функциональных уравнений является принцип, сформулированный в 1922 г. С. Банахом.

Этот принцип является функционально-геометрической обработкой идеи Пикара — метода последовательных приближений и носит название *принципа сжатых отображений*. Большое достоинство этого принципа состоит в том, что он не только гарантирует при определенных условиях однозначную разрешимость уравнения, но и может служить для получения приближенных решений.

§ 5. Метрические пространства

Определение. *Множество M называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\rho_M(x, y)$, называемое расстоянием между элементами x и y и удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам метрики):*

1) $\rho_M(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*аксиома тождества*);
2) $\rho_M(x, y) = \rho_M(y, x)$ (*аксиома симметрии*);
3) $\rho_M(x, y) + \rho_M(y, z) \geqslant \rho_M(x, z)$ (*аксиома треугольника*).

Элементы метрического пространства мы будем называть также точками этого пространства.

Примеры. 1. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

образует метрическое пространство.

Справедливость аксиом 1) и 2) очевидна. Аксиома треугольника следует из неравенства

$$|x-z|=|x-y+y-z|\leqslant|x-y|+|y-z|.$$

2. Множество упорядоченных совокупностей из n действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2} \tag{1}$$

образует метрическое пространство, которое называется *n-мерным евклидовым пространством* R^n.

Упражнение. Проверьте выполнимость аксиом метрики для этого случая.

3. Пусть M — множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Введем метрику, полагая

$$\rho(x, y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|.$$

Проверим выполнение аксиом метрики. Ясно, что $\rho(x, y)\geqslant 0$ и $\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x(t)\equiv y(t)$. Также очевидно, что $\rho(x, y)=\rho(y, x)$. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Для любого $t\in[a, b]$ имеем

$$\begin{aligned}|x(t)-z(t)|&=|[x(t)-y(t)]+[y(t)-z(t)]|\leqslant\\&\leqslant|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\leqslant\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|y(t)-z(t)|=\\&=\rho(x, y)+\rho(y, z).\end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку неравенство (2) верно для $\forall t\in[a, b]$, то и

$$\rho(x, z)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z),$$

что доказывает справедливость аксиомы треугольника.

Множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, в котором метрика введена указанным образом, называется *пространством непрерывных функций* и обозначается $C[a, b]$.

Найдем, например, расстояние $\rho(x, y)$ в $C[0, 1]$, если $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ на $[0, 1]$ (рис. 6).

По определению

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |t - t^2| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} (t - t^2).$$

Следовательно, надо найти наибольшее значение функции

$$f(t) = t - t^2 \text{ на } [0, 1].$$

На концах отрезка $[0, 1]$ значения $f(t)$ равны нулю. Находя производную $f'(t)$ и приравнивая ее нулю, получим $t = 1/2$. Это — точка максимума функции $f(t)$, причем $f(1/2) = 1/4$. Значит,

$$\rho(x, y) = \frac{1}{4}.$$

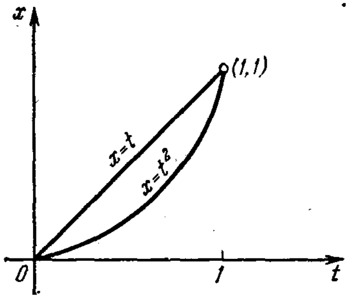

Рис. 6.

4. Рассмотрим опять совокупность всех (действительных) функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, но расстояние определим иначе, положив

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Справедливость аксиом 1) и 2) метрического пространства очевидна. Аксиома треугольника следует из интегрального неравенства Коши—Буняковского

$$\left(\int_a^b x(t) \, y(t) \, dt \right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t) \, dt \int_a^b y^2(t) \, dt, \tag{3}$$

которое получается так.

Для любого действительного λ

$$\int_a^b [x(t) + \lambda y(t)]^2 \, dt \geqslant 0,$$

или

$$\int_a^b x^2(t) \, dt + 2\lambda \int_a^b x(t) \, y(t) \, dt + \lambda^2 \int_a^b y^2(t) \, dt \geqslant 0. \tag{4}$$

Положим

$$\int_a^b y^2(t)\,dt = \alpha, \qquad \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt = \beta, \qquad \int_a^b x^2(t)\,dt = \gamma.$$

Тогда неравенство (4) примет вид

$$\alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda + \gamma \geqslant 0.$$

В левой части стоит квадратный трехчлен относительно λ. Его неотрицательность свидетельствует о том, что он не имеет различных действительных корней, т. е. что $\beta^2 - \alpha\gamma \leqslant 0$, или

$$\left(\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt\right)^2 \leqslant \int_a^b x^2(t)\,dt \cdot \int_a^b y^2(t)\,dt.$$

Это и есть неравенство Коши—Буняковского для интегралов.

Мы хотим проверить справедливость аксиомы треугольника, т. е. что

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

или

$$\left(\int_a^b [z(t) - x(t)]^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b [y(t) - x(t)]^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b [z(t) - y(t)]^2\,dt\right)^{1/2}. \quad (5)$$

Положим $y - x = u(t)$, $z - y = v(t)$; тогда неравенство (5) перепишется так:

$$\left(\int_a^b (u(t) + v(t))^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b u^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b v^2(t)\,dt\right)^{1/2}. \quad (6)$$

Используя неравенство Коши—Буняковского (4), находим

$$\int_a^b (u+v)^2\,dt = \int_a^b u^2\,dt + 2\int_a^b uv\,dt + \int_a^b v^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b u^2\,dt + 2\left(\int_a^b u^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b v^2\,dt\right)^{1/2} + \int_a^b v^2\,dt =$$

$$= \left[\left(\int_a^b u^2\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b v^2\,dt\right)^{1/2}\right]^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, получаем требуемое неравенство (6).

Так определенное метрическое пространство будем обозначать $C_2[a, b]$ и называть *пространством непрерывных функций с квадратичной метрикой.*

5. Пусть M — множество всех функций, интегрируемых с p-й степенью ($p \geqslant 1$) на $[a, b]$, т. е. таких, что

$$\int_a^b |x(t)|^p\,dt < +\infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега ([27]). Будем говорить, что такие функции принадлежат $L_p[a, b]$.

Если $x(t) \in L_p[a, b]$ и $y(t) \in L_p[a, b]$, то полагаем

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \qquad (7)$$

Аксиома симметрии очевидна. Что касается аксиомы тождества, то, как нетрудно видеть, $\rho(x, y) = 0 \not\Longrightarrow x(t) \equiv y(t)$ на $[a, b]$.

Тождественными считаем функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль.

Таким образом, элементами $L_p[a, b]$ являются, по существу, не функции, а классы функций.

Аксиома треугольника следует из неравенства Минковского для интегралов (см. [19]).

Определение. *Назовем шаром (соответственно замкнутым шаром) с центром в точке a и радиусом r*

совокупность всех точек x метрического пространства M, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_M(x, a) < r \qquad (\textit{соответственно } \rho_M(x, a) \leqslant r).$$

Будем обозначать такой шар $S(a, r)$ (соответственно $\bar{S}(a, r)$).

Примеры. 1. Пусть $M = R^3$ — трехмерное евклидово пространство. Тогда

$$S(a, r): \sqrt{\sum_{k=1}^{3}(x_k - a_k)^2} < r,$$

или

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < r^2.$$

Это — обычный шар радиуса r с центром в точке (a_1, a_2, a_3).

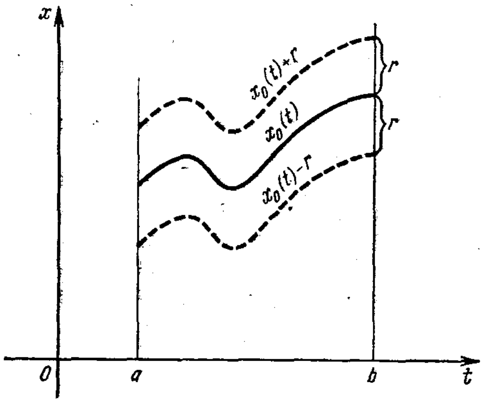

Рис. 7.

2. Пусть $M = C[a, b]$. Шар $S(x_0, r)$ — совокупность всех непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$ таких, что

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_0(t)| < r,$$

и, следовательно, таких, что

$$x_0(t) - r < x(t) < x_0(t) + r \qquad \forall t \in [a, b].$$

Геометрически это совокупность непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$, графики которых целиком лежат в полосе шириной $2r$, образованной кривыми $x = x_0(t) - r$ и $x = x_0(t) + r$ (рис. 7).

§ 6. Полные пространства

Определение. *Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется сходящейся в себе или фундаментальной последовательностью, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что*

$$\rho_X(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{при} \quad n, m > N_0(\varepsilon).$$

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу $x_0 \in X$, то она фундаментальна.

В самом деле, пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho_X(x_n, x_0) < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad n > N_0(\varepsilon).$$

Отсюда

$$\rho_X(x_n, x_m) \leqslant \rho_X(x_n, x_0) + \rho_X(x_m, x_0) < \varepsilon \quad \text{при } n, m > N_0(\varepsilon),$$

а это означает, согласно определению, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная.

Однако существуют метрические пространства, в которых имеются последовательности, сходящиеся в себе, но не сходящиеся ни к какому пределу (в этом пространстве).

Пусть, например, X — множество рациональных чисел, причем расстояние определяется по формуле

$$\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|.$$

Тогда X — метрическое пространство.

Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = 1/2^n$. Эта последовательность сходится и в себе, и к пределу $r_0 = 0 \in X$.

Возьмем теперь последовательность с общим членом

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эта последовательность сходится в себе, но не имеет предела в пространстве X, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

не является рациональным числом.

Определение. *Если в метрическом пространстве X каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство X называется полным.*

Так, пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$$

есть полное пространство.

В самом деле, пусть дана последовательность $\{x_n(t)\}$, где $x_n(t) \in C[a, b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и пусть

$$\rho(x_n, x_m) \underset{n, m \to \infty}{\longrightarrow} 0, \text{ т. е. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 = N_0(\varepsilon),$$

$$\forall n, m > N_0 \quad \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{x_n(t)\}$ выполняется критерий Коши равномерной сходимости на $[a, b]$. Пусть $x_0(t)$ — предел последовательности $\{x_n(t)\}$. Как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, эта функция $x_0(t)$ также непрерывна на $[a, b]$. Таким образом, $x_0(t) \in C[a, b]$ и $\rho(x_n, x_0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, пространство $C[a, b]$ полно.

Можно показать, что $L_p[a, b]$ (в частности, $L_2[a, b]$)— полные пространства.

Пространство Q рациональных чисел, как мы видели, не является полным пространством.

§ 7. Принцип сжатых отображений

Пусть X и Y — метрические пространства, D — некоторое множество в пространстве X.

Если каждой точке $x \in D$ по некоторому закону поставлена в соответствие определенная точка $y \in Y$, то говорят, что на множестве D задан оператор A со значениями в пространстве Y, и пишут

$$y = Ax.$$

Множество D называют *областью определения оператора A*; x называют *аргументом оператора A*. Каждую точку $y \in Y$ такую, что $y = Ax$, называют *образом* соответствующей точки $x \in D$. Относительно оператора A говорят, что он устанавливает отображение множества D в пространство Y:

$$D \xrightarrow{A} Y.$$

Если совокупность значений оператора A совпадает со всем Y, то говорят, что оператор A отображает D на пространство Y.

Примеры. 1. Пусть X — пространство $C[a, b]$ функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Каждой функции $x(t) \in C[a, b]$ поставим в соответствие функцию

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ — заданная, непрерывная в квадрате $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ функция. Этим мы определим на $C[a, b]$ интегральный оператор

$$Ax \equiv \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

который, как будет показано ниже, переводит пространство $C[a, b]$ в себя.

2. Обозначим через $C^\infty(a, b)$ совокупность функций $x(t)$, определенных в (a, b) и бесконечно дифференцируемых в этом интервале. Каждой функции $x(t) \in C^\infty(a, b)$ поставим в соответствие ее производную $x'(t)$. Этим мы определим оператор дифференцирования d/dt, действующий из $C^\infty(a, b)$ в $C^\infty(a, b)$.

Принцип сжатых отображений выражается следующей теоремой:

Теорема 2.1 (С. Банаха). *Пусть в полном метрическом пространстве X дан оператор A, переводящий элементы пространства X снова в элементы этого пространства, т. е.*

$$X \xrightarrow{A} X.$$

Пусть, кроме того, для всех x, y из X

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y), \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 1$ и не зависит от x, y.

Тогда существует одна и только одна точка x_0 такая, что

$$Ax_0 = x_0.$$

Оператор A, обладающий свойством (1), называют *оператором сжатия*, а точку x_0 такую, что $Ax_0 = x_0$, называют *неподвижной точкой* оператора A.

Вообще, оператор A может и не иметь неподвижных точек. Простейший пример — оператор сдвига в R^1 : $Ax = x + \tilde{x}$, $\tilde{x} \neq 0$. В условиях теоремы Банаха неподвижная точка существует, и притом только одна.

Доказательство. Возьмем произвольный фиксированный элемент $x \in X$ и положим

$$x_1 = Ax, \quad x_2 = Ax_1, \ \ldots, \ x_n = Ax_{n-1}, \ \ldots$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Для этого заметим, что

$$\rho(x_1, x_2) = \rho(Ax, Ax_1) \leqslant \alpha\rho(x, x_1) = \alpha\rho(x, Ax),$$
$$\rho(x_2, x_3) = \rho(Ax_1, Ax_2) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2\rho(x, Ax),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha^n\rho(x, Ax),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Далее,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \alpha^n(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{p-1})\rho(x, Ax) =$$
$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x, Ax). \tag{2}$$

Так как по условию $0 < \alpha < 1$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax),$$

откуда в свою очередь следует, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом $p > 0$.

Значит, последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе (фундаментальная). В силу полноты пространства X существует элемент $x_0 \in X$, являющийся пределом этой последовательности,

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Докажем, что $Ax_0 = x_0$.

В самом деле,

$$\rho(x_0, Ax_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) =$$
$$= \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \alpha\rho(x_{n-1}, x_0).$$

Так как $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом n

$$\rho(x_0, x_n) < \varepsilon/2, \qquad \rho(x_0, x_{n-1}) < \varepsilon/2.$$

Следовательно,

$$\rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $\rho(x_0, Ax_0) = 0$, т. е. $x_0 = Ax_0$, ч. т. д.

Докажем единственность неподвижной точки у оператора сжатия.

Предположим, что существуют два элемента $x_0, y_0 \in X$ такие, что

$$Ax_0 = x_0, \qquad Ay_0 = y_0.$$

Тогда

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leqslant \alpha\rho(x_0, y_0).$$

Если допустить, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, то из предыдущего следует, что $\alpha \geqslant 1$. Но это противоречит условию $\alpha < 1$. Значит, наше допущение, что $\rho(x_0, y_0) > 0$, неверно и $x_0 = y_0$.

Переходя в формуле (2) к пределу при $p \to \infty$, получаем оценку ошибки n-го приближения:

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x, Ax). \tag{3}$$

Одновременно (3) служит и оценкой скорости сходимости.

Замечание 1. Построение последовательных приближений $\{x_n\}$, сходящихся к неподвижной точке x_0, можно производить, исходя из любого элемента $x \in X$. Выбор элемента x будет сказываться лишь на быстроте сходимости $\{x_n\}$ к своему пределу.

Замечание 2. Условие

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

нельзя, вообще говоря, заменить на более слабое

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \rho(x, y). \tag{1'}$$

В самом деле, пусть $X = R^1$ — множество действительных чисел с естественной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ и пусть

$$Ax = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x.$$

Нетрудно видеть, что неподвижных точек у оператора A нет: уравнение $x = Ax$, определяющее неподвижные точки оператора A, в данном случае принимает вид

$$x = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$$

и решений не имеет.

Вместе с тем, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\rho(Ax, Ay) = |Ax - Ay| =$$
$$= \left|\frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} - y + \operatorname{arctg} y\right| =$$
$$= |x - y - (\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y)| =$$
$$= \left|x - y - \frac{1}{1+\xi^2}(x - y)\right| = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x - y| < \rho(x, y),$$

т. е. условие (1′) выполняется.

§ 8. Применение принципа сжатых отображений к интегральным уравнениям

1°. Применим принцип сжатых отображений для доказательства существования и единственности решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{1}$$

Предположим, что ядро $K(t, s)$ непрерывно в замкнутом квадрате $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ и, следовательно, ограничено в нем: $|K(t, s)| \leqslant M \ \forall (t, s) \in Q$. Предположим также, что $f(t) \in C[a, b]$. Будем искать решение уравнения (1) в классе $C[a, b]$ функций, непрерывных на $[a, b]$.

При этом *решением интегрального уравнения* (1) *будем называть всякую функцию* $\varphi_0(t) \in C[a, b]$, *которая, будучи подставлена в уравнение* (1), *обращает его в тождество по* t *на* $[a, b]$:

$$\varphi_0(t) \equiv \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi_0(s)\,ds + f(t). \tag{2}$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение $\varphi_0(t) \equiv f(t)$.

Покажем, что уравнение (1) однозначно разрешимо и при всех λ, достаточно малых по абсолютной величине. Будем рассматривать правую часть уравнения (1) как оператор $A\varphi$, определенный в пространстве $C[a, b]$,

$$A\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds + f(s). \tag{3}$$

Всякую функцию $\varphi(t) \in C[a, b]$ оператор A переводит в некоторую, вообще другую, функцию $\tilde{\varphi}(t)$, определенную на том же отрезке $[a, b]$. И вопрос о существовании решения $\varphi_0(t)$ интегрального уравнения (1) тем самым сводится к вопросу о наличии неподвижной точки у оператора A, т. е. такой функции $\varphi_0(t)$, которая оператором A переводится в себя: $\varphi_0 = A\varphi_0$.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\varphi(t) = 2\int_0^1 t^2 s\varphi(s)\,ds + 1. \tag{1'}$$

Оператор, отвечающий этому уравнению,

$$A\varphi \equiv 2\int_0^1 t^2 s\varphi(s)\,ds + 1.$$

Полагая $\varphi(t) \equiv 1$, имеем

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s\cdot 1\,ds + 1 = t^2 + 1,$$

т. е.

$$1 \xrightarrow{A} t^2+1.$$

Положим теперь $\varphi(t) = 2t^2+1$. Тогда

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s(2s^2+1)\,ds + 1 = 2t^2+1,$$

т. е.

$$2t^2+1 \xrightarrow{A} 2t^2+1.$$

Таким образом, «точка» $\varphi(t) = 2t^2+1$ есть неподвижная точка оператора A — решение интегрального уравнения (1').

Покажем, что оператор A, определенный формулой (3), действует из полного пространства $C[a, b]$ опять в $C[a, b]$, т. е. что если $g(t) = A\varphi(t)$, где $\varphi(t) \in C[a, b]$, то и $g(t) \in C[a, b]$.

Действительно, пусть t — произвольная точка отрезка $[a, b]$ и пусть Δt — любое, лишь бы $t+\Delta t \in [a, b]$. Имеем

$$|g(t+\Delta t)-g(t)| = \left|\lambda\int_a^b K(t+\Delta t, s)\varphi(s)\,ds + f(t+\Delta t) - \right.$$
$$\left. -\lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds - f(t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda|\int_a^b |K(t+\Delta t, s)-K(t, s)|\,|\varphi(s)|\,ds + |f(t+\Delta t)-f(t)|. \tag{4}$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По условию $f(t) \in C[a, b]$, и потому $\exists\,\delta_1 > 0$ такое, что

$$|f(t+\Delta t)-f(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{при} \quad \forall\,\Delta t\colon\ |\Delta t| < \delta_1. \tag{5}$$

Пусть, далее,

$$\Phi = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\varphi(t)|.$$

Ядро $K(t, s)$ непрерывно в замкнутом квадрате Q и, значит, равномерно непрерывно в Q. Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что

$$|K(t+\Delta t, s) - K(t, s)| < \frac{\varepsilon}{2\Phi(b-a)|\lambda|} \tag{6}$$

при $|\Delta t| \leqslant \delta_2$ и любом $s \in [a, b]$.

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $\forall \Delta t$ таких, что $|\Delta t| < \delta$, будут одновременно выполняться неравенства (5) и (6) и в силу неравенства (4) получим, что

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| < \varepsilon \quad \forall \Delta t: \ |\Delta t| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность функции $g(t)$ в любой точке t отрезка $[a, b]$.

Итак,

$$C[a, b] \xrightarrow{A} C[a, b].$$

Выясним теперь, при каких условиях оператор A будет сжимающим. Имеем

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)| =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi_1(s)\,ds - \lambda \int_a^b K(t, s)\varphi_2(s)\,ds \right| =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \lambda \int_a^b K(t, s)[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M(b-a) \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|. \tag{7}$$

Вспоминая, что $\max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| = \rho(\varphi_1, \varphi_2)$, неравенству (7) придадим следующий вид:

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant |\lambda| M(b-a)\rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

откуда видно, что при $|\lambda| < 1/M(b-a)$ оператор A будет оператором сжатия.

Из принципа сжатых отображений заключаем, что для всякого λ такого, что

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)},$$

уравнение Фредгольма (1) с непрерывным ядром $K(t, s)$ и непрерывным свободным членом $f(t)$ имеет единственное непрерывное решение.

Последовательные приближения $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ к этому решению определяются из соотношений

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi_n(s)\,ds + f(t) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

где в качестве $\varphi_0(t)$ можно взять любую непрерывную на $[a, b]$ функцию.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 ts\varphi(s)\,ds. \tag{9}$$

Решение. Ядро $K(t, s) = ts$ непрерывно в квадрате $Q\,\{0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$, причем

$$|K(t, s)| = |ts| \leqslant 1 = M.$$

Далее, $\lambda = 1/2$, $a = 0$, $b = 1$, так что $1/M(b-a) = 1$, и условие $|\lambda| \leqslant 1/M(b-a)$, обеспечивающее сжатость отображения, здесь выполнено. Поэтому интегральное уравнение (9) может быть решено методом последовательных приближений. Положим $\varphi_0(t) = 0$. Тогда, согласно (8),

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 s\varphi_0(s)\,ds = \frac{5}{6}t,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 s\,\frac{5}{6}s\,ds = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6}\right),$$

$$\varphi_3(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 s\,\frac{5}{6}s\left(1 + \frac{1}{6}\right)ds = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}\right),$$

. . . .

$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t\left(1 + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6^{n-1}}\right) = t\left(1 - \frac{1}{6^n}\right).$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} t\left(1 - \frac{1}{6^n}\right) = t. \tag{10}$$

Если взять $\varphi_0(t)=t$, то будем иметь $\varphi_1(t)=\frac{5}{6}t+\frac{t}{2}\int\limits_0^1 s^2\,ds=t$, $\varphi_2(t)=t$ и т. д.

Таким образом, мы сразу получаем решение. Это как раз подчеркивает, что удачный выбор начальной функции $\varphi_0(t)$ может значительно сократить процесс нахождения решения интегрального уравнения.

Вернемся снова к интегральному уравнению (1):

$$\varphi(t)=\lambda\int\limits_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds+f(t). \tag{1}$$

Будем по-прежнему предполагать, что ядро $K(t, s)$ и $f(t)$ непрерывны. Исходя из метрики пространства $C[a, b]$, мы показали, что уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение $\varphi(t)$, если $|\lambda|<1/M(b-a)$, где

$$M=\max_{\substack{a\leqslant t\leqslant b\\ a\leqslant s\leqslant b}}|K(t, s)|.$$

Покажем теперь, пользуясь метрикой пространства $L_2[a, b]$

$$\rho(x(t), y(t))=\left(\int\limits_a^b [y(t)-x(t)]^2\,dt\right)^{1/2},$$

что этот результат справедлив в более широком интервале значений параметра λ.

Лемма. *При любом* $x(t)\in L_2[a, b]$, *т. е. таком, что*

$$\int\limits_a^b x^2(t)\,dt<+\infty,$$

функция

$$y(t)=\int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds$$

непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем любую точку $t_0\in[a, b]$. По условию ядро $K(t, s)$ непрерывно в замкнутом квадрате $Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ и, значит, равномерно непрерывно в нем. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех t таких, что $|t - t_0| < \delta$, справедливо неравенство

$$|K(t, s) - K(t_0, s)| < \varepsilon \qquad \forall s \in [a, b].$$

Поэтому

$$|y(t) - y(t_0)| = \left| \int_a^b [K(t, s) - K(t_0, s)]\, x(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_a^b |x(s)|\, ds \leqslant \varepsilon \sqrt{b-a} \left(\int_a^b x^2(s)\, ds \right)^{1/2}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда и вытекает непрерывность функции $y(t)$ в любой точке $t \in [a, b]$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что правая часть (1) есть непрерывная функция при любой $\varphi(t) \in L_2[a, b]$. Следовательно, должна быть непрерывной и левая часть.

Таким образом, *среди всех функций, входящих в* $L_2[a, b]$, *решениями уравнения* (1) *могут быть только непрерывные функции.*

Будем рассматривать правую часть (1) как оператор $A\varphi$, заданный в пространстве $L_2[a, b]$.

В силу леммы

$$L_2[a, b] \xrightarrow{A} C[a, b] \subset L_2[a, b].$$

Положим

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds \right)^{1/2}$$

и покажем, что при $|\lambda| < 1/B$ оператор A — сжимающий. Имеем

$$A\varphi_2 - A\varphi_1 = \lambda \int_a^b K(t, s)[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\, ds.$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, отсюда получаем

$$[A\varphi_2 - A\varphi_1]^2 = \left(\lambda \int_a^b K(t, s)[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \int_a^b K^2(t, s)\,ds \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по t от a до b, найдем

$$\int_a^b [A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)]^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,ds\,dt \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds,$$

или

$$\rho^2(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant \lambda^2 \cdot B^2 \rho^2(\varphi_1, \varphi_2),$$

откуда

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant |\lambda| \cdot B\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Следовательно, при $|\lambda| \cdot B < 1$, т. е. при $|\lambda| < 1/B$, оператор A — *сжимающий*. И значит, *при* $|\lambda| < 1/B$ *интегральное уравнение* (1) *имеет единственное непрерывное решение* $\varphi(t)$.

Очевидно, что $B \leqslant M(b-a)$ (равенство возможно лишь при $|K(t, s)| \equiv M$) и интервал $|\lambda| < 1/B$, вообще, шире, чем интервал $|\lambda| < 1/M(b-a)$.

Так, в рассмотренном выше примере имеем

$$B = \left(\int_0^1 \int_0^1 t^2 s^2\,dt\,ds\right)^{1/2} = 1/3$$

и для λ получаем следующую оценку: $|\lambda| < 3$.

Однако если $1/M(b-a) < |\lambda| < 1/B$, то для последовательных приближений $\varphi_n(t)$ можно гарантировать лишь сходимость в среднем, а не равномерную сходимость, имеющую место при $|\lambda| < 1/M(b-a)$.

Замечание. Можно отказаться от непрерывности $K(t, s)$ и $f(t)$ и потребовать лишь, чтобы $f(t) \in L_2[a, b]$ и $K(t, s) \in L_2(Q)$, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds = B^2 < +\infty.$$

В этом случае естественно искать решение среди функций из $L_2[a, b]$. Можно показать, что и в этом случае при $|\lambda| < 1/B$ уравнение (1) имеет единственное решение. Но это решение уже не обязано быть непрерывной функцией, а его единственность означает единственность с точностью до функций, почти всюду равных нулю.

2°. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{11}$$

Выше отмечалось, что это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, доопределив ядро $K(t, s)$ равенством

$$K(t, s) = 0 \quad \text{при} \quad s > t.$$

Однако, в отличие от уравнений Фредгольма, к уравнениям Вольтерра принцип сжатых отображений (точнее, одно его обобщение) применим при всех значениях λ. Введем предварительно следующее понятие.

Пусть X и Y — метрические пространства. Оператор A, отображающий множество $D \subset X$ в пространство Y, называется *непрерывным в точке* $x_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in D$, удовлетворяющих условию

$$\rho_X(x, x_0) < \delta,$$

имеет место неравенство

$$\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon.$$

(Здесь ρ_X, ρ_Y — расстояния между элементами пространств X и Y соответственно.)

Оператор A называется просто *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке того множества, на котором он задан.

Пусть оператор A действует из X в X. Возьмем любой элемент $x \in X$. Тогда Ax будет опять принадлежать пространству X и к нему снова можно применить оператор A:

$$A(Ax).$$

Оператор, состоящий в последовательном применении дважды оператора A, будем обозначать символом A^2 и называть *квадратом оператора* A.

Аналогично определяются операторы A^3, A^4 и вообще любая целая положительная степень A^n оператора A.

Теорема 2.2. *Пусть A — такое непрерывное отображение полного метрического пространства X в себя, что отображение A^n при некотором n является сжатым. Тогда уравнение $Ax = x$ имеет, и притом единственное, решение.*

Обратимся к интегральному уравнению (11)

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{11}$$

Будем предполагать, что $f(t) \in C[a, b]$ и что ядро $K(t, s)$ непрерывно в замкнутом треугольнике Δ: $\begin{cases} a \leqslant t \leqslant b, \\ a \leqslant s \leqslant t. \end{cases}$

Введем оператор $A\varphi$, определив его формулой

$$A\varphi \equiv \lambda \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds + f(t). \tag{12}$$

Нетрудно установить, что

$$C[a, b] \xrightarrow{A} C[a, b].$$

Покажем, что A — непрерывный оператор.

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — любые две функции из $C[a, b]$. Тогда

$$|A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| = \left|\lambda \int_a^t K(t, s)[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|\,M(t-a) \max_{a\leqslant s\leqslant b} |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|. \tag{13}$$

Здесь

$$M = \max_{(t, s)\in\Delta} |K(t, s)|.$$

Из оценки (13) получаем, что $\forall t \in [a, b]$

$$|A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| \leqslant |\lambda|\,M(b-a)\,\rho(\varphi_1, \varphi_2),$$

так что

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant |\lambda| M(b-a)\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда при $\delta = \varepsilon/|\lambda| M(b-a)$ из условия $\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \delta$ будем иметь

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) < \varepsilon.$$

Согласно определению, это и означает, что оператор A, определенный формулой (12), есть непрерывный оператор из $C[a, b]$ в $C[a, b]$.

Далее, используя оценку (16), находим

$$|A^2\varphi_2(t) - A^2\varphi_1(t)| =$$

$$= \left|\lambda \int_a^t K(t, s)[A\varphi_2(s) - A\varphi_1(s)]\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda|^2 \frac{M^2(t-a)^2}{2!}\rho(\varphi_1, \varphi_2)$$

и, вообще,

$$|A^n\varphi_2(t) - A^n\varphi_1(t)| \leqslant |\lambda|^n \frac{M^n(t-a)^n}{n!}\rho(\varphi_1, \varphi_2) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^n M^n(b-a)^n}{n!}\rho(\varphi_1, \varphi_2). \tag{14}$$

Неравенство (14) верно для любого $t \in [a, b]$, и, значит,

$$\rho(A^n\varphi_1, A^n\varphi_2) \leqslant \frac{|\lambda|^n M^n(b-a)^n}{n!}\rho(\varphi_1, \varphi_2). \tag{15}$$

При любом значении λ число n можно выбрать настолько большим, что

$$\frac{|\lambda|^n M^n(b-a)^n}{n!} < 1.$$

Следовательно, оператор A^n будет сжимающим при достаточно большом n.

В силу теоремы 2.2 отсюда заключаем, что сам оператор A имеет единственную неподвижную точку и, значит, *уравнение Вольтерра* (11) *при любом* λ *имеет, и притом единственное, решение.*

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые строятся по схеме

$$\varphi_{n+1}(t)=\lambda\int_a^t K(t,\ s)\,\varphi_n(s)\,ds+f(t)\qquad (n=0,1,\ldots),$$

где в качестве $\varphi_0(t)$ можно взять любую функцию из $C[a,\ b]$.

Пример. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=t-\int_0^t (t-s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Решение. В данном случае $f(t)=t$ и $K(t,s)=t-s\ (s<t)$ непрерывны и, значит, уравнение имеет единственное непрерывное решение.

Будем его искать методом последовательных приближений. Положим $\varphi_0(t)=0$. Тогда получим

$$\varphi_1(t)=t.$$

Далее,

$$\varphi_2(t)=t-\int_0^t (t-s)\,s\,ds=t-\frac{t^3}{3!},$$

$$\varphi_3(t)=t-\int_0^t (t-s)\left(s-\frac{s^3}{3!}\right)ds=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(t)=t-\frac{t^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Ясно, что

$$\varphi_n(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sin t.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\varphi(t)=\sin t$ есть решение данного интегрального уравнения.

3°. Принцип сжатых отображений применим к решению некоторых видов нелинейных интегральных уравнений.

Пусть имеем уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,\ s;\ \varphi(s))\,ds+f(t), \tag{16}$$

где $f(t)$ и $K(t, s; z)$ — непрерывные функции своих аргументов для $a \leqslant t, s \leqslant b$, $-\infty < z < +\infty$.

Пусть, кроме того, $K(t, s; z)$ удовлетворяет условию Липшица по своему «функциональному» аргументу z, т. е.

$$|K(t, s; z_2) - K(t, s; z_1)| \leqslant \mathscr{L} |z_2 - z_1|,$$

где $\mathscr{L}$ — некоторая постоянная, не зависящая от выбора z_1, z_2.

Рассмотрим отображение $g = A\varphi$ полного пространства $C[a, b]$ в себя, где

$$A\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(t, s; \varphi(s))\, ds + f(t). \tag{17}$$

Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — любые две функции из $C[a, b]$. Тогда

$$|A\varphi_2 - A\varphi_1| = \left| \lambda \int_a^b [K(t, s; \varphi_2(s)) - K(t, s; \varphi_1(s))]\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \mathscr{L} (b - a) \max_{a \leqslant s \leqslant b} |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|. \tag{18}$$

Оценка (18) справедлива для любого $t \in [a, b]$. Значит, и

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)| =$$

$$= \rho(A\varphi_1, A\varphi_2) \leqslant |\lambda| \mathscr{L} (b - a) \rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Следовательно, при $|\lambda| < 1/\mathscr{L}(b - a)$ оператор A будет сжимающим и, в силу теоремы 2.1, интегральное уравнение (16) будет иметь при таких λ единственное непрерывное решение.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b K(t, s; \varphi_n(s))\, ds + f(t) \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где в качестве $\varphi_0(t)$ можно взять любую функцию из $C[a, b]$.

Замечание. Если функция $K(t, s; z)$ имеет ограниченную частную производную по z:

$$\left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| \leqslant \Lambda \qquad (a \leqslant t,\ s \leqslant b,\ -\infty < z < +\infty),$$

то такая функция удовлетворяет условию Липшица по z с константой $\mathcal{L} \leqslant \Lambda$.

В самом деле, воспользовавшись теоремой Лагранжа, будем иметь

$$K(t,\ s;\ z_2) - K(t,\ s;\ z_1) = \frac{\partial K(t,\ s;\ \xi)}{\partial z}(z_2 - z_1), \qquad (19)$$

где ξ заключено между z_1 и z_2.

Из (19) получаем

$$|K(t,\ s;\ z_2) - K(t,\ s;\ z_1)| = \left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| |z_2 - z_1| \leqslant \Lambda |z_2 - z_1|,$$

что и доказывает наше утверждение.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1 + \varphi^2(s)}\,ds + 1.$$

Решение. Функция $K(t, s; z) = \dfrac{ts}{1 + z^2}$ есть непрерывная функция своих аргументов; она имеет ограниченную производную по z

$$\left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| = \left|-\frac{2tsz}{(1 + z^2)^2}\right| \leqslant 1,$$

$$-1 \leqslant t,\ s \leqslant 1,\ -\infty < z < +\infty,$$

и, следовательно, удовлетворяет условию Липшица по z, причем в качестве постоянной Липшица мы можем взять $\mathcal{L} = 1$. Далее, $\lambda = 1/3$, $a = -1$, $b = 1$, так что условие

$$|\lambda| < \frac{1}{\mathcal{L}(b - a)},$$

обеспечивающее сжатость отображения, здесь выполнено. Применим метод последовательных приближений, взяв за нулевое приближение $\varphi_0(t) \equiv 1$. Тогда

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1 + 1^2}\,ds + 1 = 1.$$

Ясно, что $\varphi_n(t) = 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$, откуда

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 1.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\varphi(t) \equiv 1$ есть решение данного интегрального уравнения (кстати, при любом значении λ).

4°. Системы интегральных уравнений. Система интегральных уравнений Фредгольма второго рода с одной независимой переменной имеет вид

$$\varphi_i(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(t, s)\,\varphi_j(s)\,ds + f_i(t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Пусть ядра $K_{ij}(t, s)$ интегрируемы с квадратом в $Q\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$, а свободные члены $f_i(t) \in L_2[a, b]$. Будем искать решение $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ системы (20) также в классе $L_2[a, b]$. Поступим следующим образом.

Сведем систему (20) к одному интегральному уравнению типа Фредгольма, но только на интервале, в n раз большем исходного. Делается это так. Определим функции $\Phi(t)$ и $F(t)$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant a + n(b - a)$, положив

$$\Phi(t) = \varphi_i(t - (i - 1)(b - a)),$$
$$F(t) = f_i(t - (i - 1)(b - a)),$$

если

$$a + (i - 1)(b - a) \leqslant t \leqslant a + i(b - a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Точно так же зададим ядро $K(t, s)$ в квадрате

$$a \leqslant t, \ s \leqslant a + n(b - a),$$

положив

$$K(t, s) = K_{ij}(t - (i - 1)(b - a), \ s - (j - 1)(b - a)),$$

если

$$a + (i - 1)(b - a) \leqslant t < a + i(b - a),$$
$$a + (j - 1)(b - a) \leqslant s < a + j(b - a)$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда система (20) запишется в виде одного уравнения Фредгольма:

$$\Phi(t)=\lambda\int\limits_a^{a+n(b-a)} K(t,\ s)\,\Phi(s)\,ds+F(t). \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что построенное нами ядро $K(t,\ s)$ интегрируемо с квадратом

$$\text{в } Q_1\ \begin{cases} a<t<a+n(b-a), \\ a<s<a+n(b-a), \end{cases}$$

а свободный член $F(t)\in L_2\,[a,\ a+n(b-a)]$. Действительно,

$$\int\limits_a^{a+n(b-a)}|F(t)|^2\,dt=\sum_{i=1}^{n}\ \int\limits_{a+(i-1)(b-a)}^{a+i(b-a)}|F(t)|^2\,dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\ \int\limits_{a+(i-1)(b-a)}^{a+i(b-a)}|f_i(t-(i-1)(b-a))|^2\,dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_a^b|f_i(t)|^2\,dt<+\infty.$$

Точно так же

$$\int\limits_a^{a+n(b-a)}\int\limits_a^{a+n(b-a)}|K(t,\ s)|^2\,dt\,ds=$$

$$=\sum_{i,\ j=1}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K_{ij}(t,s)|^2\,dt\,ds=B_1^2<+\infty.$$

Итак, мы свели систему уравнений (1) к одному интегральному уравнению Фредгольма с ядром $K(t,\ s)\in L_2(Q_1)$ и свободным членом $F(t)\in L_2\,[a,\ a+n(b-a)]$.

Применяя к нему рассуждения п. 1°, получаем, что если $|\lambda|<1/B_1$, то уравнение (21) имеет единственное решение в классе $L_2\,[a,\ a+n(b-a)]$. Это последнее может быть найдено методом последовательных приближений.

Следовательно, и для системы (20) последовательные приближения сходятся в среднем к решению системы, коль скоро $|\lambda|<1/B_1$, где

$$B_1^2=\sum_{i,\ j=1}^{n}\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K_{ij}(t,\ s)|^2\,dt\,ds.$$

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

При рассмотрении общих свойств линейных интегральных уравнений полезно использовать некоторые результаты теории линейных операторов. Это тем более естественно, что сами интегральные уравнения послужили отправной точкой для построения общей теории линейных операторов.

§ 9. Линейные нормированные пространства

I. Линейное пространство

Определение. *Пусть E — множество элементов, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1°. *E — абелева группа относительно групповой операции сложения.* Это значит, что определена сумма $x+y$ любых двух элементов $x, y \in E$, являющаяся элементом того же множества, причем операция сложения удовлетворяет условиям:

1) $x+y=y+x$ (коммутативность);

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность);

3) существует однозначно определенный элемент θ такой, что

$$x+\theta=x \qquad \forall x \in E;$$

4) для всякого $x \in E$ существует однозначно определенный элемент $(-x) \in E$ такой, что

$$x+(-x)=\theta.$$

Элемент θ называется *нулевым* элементом или *нулем* группы. Элемент $(-x)$ называется элементом, *противоположным* x.

Естественно вводится операция, обратная к операции сложения элементов, которую называют вычитанием: под *разностью* $x - y$ *понимают* $x + (-y)$.

2°. *Определено умножение элементов* $x, y, z, \ldots$ *множества* E *на вещественные (комплексные) числа* $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, *причем* λx *снова является элементом множества* E *и выполняются условия*:

1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$ (*закон ассоциативности умножения*);

2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
3) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$ (*законы дистрибутивности*).

Множество E, *удовлетворяющее аксиомам I и II, называется линейным (векторным) пространством.*

В зависимости от того, на какие числа, вещественные или комплексные, допускается умножение элементов множества E, различают вещественное или комплексное линейное пространство.

Примеры. 1. Совокупность всех векторов плоскости с обычными операциями сложения векторов и умножения их на действительное число образует линейное пространство.

2. Совокупность элементов пространства $C[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число образует линейное пространство. Нуль этого пространства — функция $x(t) \equiv 0$ на $[a, b]$.

С другой стороны, совокупность векторов на плоскости, начала которых находятся в начале координат, а концы — в пределах 1-й четверти, линейного пространства не образует, так как в пределах этой совокупности нельзя умножать на (-1).

Аналогично, класс всех монотонных на $[a, b]$ функций не образует линейного пространства с обычной операцией сложения функций.

Так, функции $x_1(t) = \sin t + 2t$ и $x_2(t) = \sin t - 2t$ монотонны на $[-\pi, \pi]$, но их сумма $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \sin t$ не монотонна на $[-\pi, \pi]$.

Класс всех периодических функций также не образует линейного пространства. Так, каждая из функций $\sin t$ и $\sin \alpha t$ (α иррационально) периодическая, но их сумма $\sin t + \sin \alpha t$ есть функция непериодическая.

II. Линейное нормированное пространство

Определение. *Множество E называется линейным нормированным пространством, если:*

1°. *E — линейное пространство.*

2°. *Каждому элементу $x \in E$ поставлено в соответствие действительное число, которое называется нормой этого элемента, обозначается символом $\|x\|$ и удовлетворяет следующим условиям* (*аксиомы нормы*):

1) $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*аксиома треугольника*);

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (*однородность нормы*).

Эти свойства — естественное перенесение свойств нормы (длины) вектора в обычном трехмерном пространстве на элементы любой природы.

В линейном нормированном пространстве можно ввести метрику посредством равенства

$$\rho(x, y) = \|x - y\|. \tag{1}$$

Легко проверить, что так введенное расстояние удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Так как $x - \theta = x$, то из определения (1) следует, что

$$\|x\| = \|x - \theta\| = \rho(x, \theta),$$

так что норма любого элемента равна его расстоянию от нуля. Введя метрику, можно определить сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к x_0, а именно:

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n,$$

если

$$\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Определенная таким образом сходимость в линейном нормированном пространстве называется *сходимостью по норме*.

Если линейное нормированное пространство является полным в смысле сходимости по норме, то оно называется *пространством Банаха* или *пространством типа В*.

Примеры. 1. n-мерное векторное пространство с обычными операциями сложения векторов и умножения их на число и нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)^{1/2},$$
$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

есть пространство типа В.

2. $C[a, b]$ есть пространство типа B. Сложение функций и умножение функций на число определяем обычным образом. Положим

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|;$$

тогда

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|,$$

так что метрика полученного пространства совпадает с метрикой, ранее введенной в $C[a, b]$.

Как было показано, $C[a, b]$ полно в этой метрике и, следовательно, есть банахово пространство.

3. $L_p[a, b]$ есть пространство типа B. Здесь

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}.$$

4. Рассмотрим линейное пространство функций $x(t)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Его можно сделать нормированным пространством, положив

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt.$$

Будем это пространство обозначать $C_1[a, b]$. Здесь

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt. \tag{2}$$

Пространство $C_1[a, b]$ не полно. Приведем пример (см. [5]) фундаментальной последовательности из $C_1[a, b]$, не имеющей предела в C_1 $[a, b]$. Беря для простоты отрезок $[0, 1]$, рассмотрим функцию (рис. 8)

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ n+1-2nt & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1/2 + 1/2n, \\ 0 & \text{при } 1/2 + 1/2n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

В смысле метрики (2), т. е. по норме, последовательность

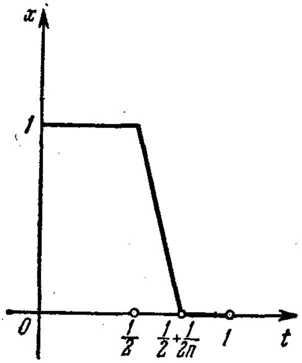

Рис. 8.

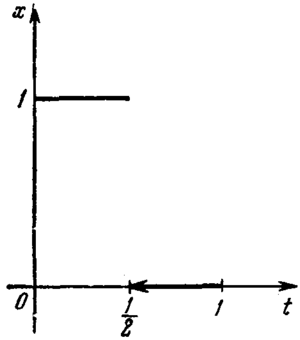

Рис. 9.

$\{x_n(t)\}$ сходится к функции (рис. 9)

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{при } 1/2 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Действительно,

$$\rho(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|\, dt =$$

$$= \int_{1/2}^{1/2+1/2n} (n+1-2nt)\, dt \leqslant 1/2n,$$

и поэтому $x_n(t) \to x(t)$.

Отсюда следует, что последовательность $x_n(t)$ фундаментальна в C_1 $[a, b]$, но предела в $C_1[a, b]$ она не имеет, так как сходится к разрывной функции.

Поэтому C_1 $[a, b]$ есть линейное нормированное пространство, не являющееся банаховым пространством.

5. Пространство $C_2\,[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$

не является B-пространством. Можно показать, что последовательность непрерывных функций

$$x_n(t) = \operatorname{arctg} nt, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

фундаментальна, но сходится в смысле среднего квадратичного уклонения к разрывной функции

$$x(t) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ \pi/2 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Для банаховых пространств справедливо все, что имеет место для полных метрических пространств (в частности, в B-пространствах работает принцип сжатых отображений).

§ 10. Линейные операторы. Норма оператора

Пусть E и $\tilde{E}$ — линейные пространства. Оператор A, действующий из E в $\tilde{E}$, называется *линейным*, если он

1) аддитивен, т. е.

$$A\,(x + y) = Ax + Ay \quad \text{для любых} \quad x, y \in E;$$

2) однороден, т. е.

$$A\,(\alpha x) = \alpha Ax \text{ для любого } x \in E \text{ и любого числа } \alpha.$$

Непосредственно из определения линейного оператора следует, что всегда $A\theta = \tilde{\theta}$, $A\,(-x) = -Ax$.

Из 1) и 2) легко получаем

$$A\,(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_k A x_k$$

для любых $x_1, \ldots, x_k$ из E и любых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Примеры. 1. Оператор O, переводящий каждый элемент x пространства E в нулевой элемент пространства $\tilde{E}$: $Ox = \tilde{\theta}$ $\forall\, x \in E$, является линейным. Он называется *нулевым* оператором.

2. Оператор I, переводящий каждый элемент пространства E в себя:

$$Ix = x,$$

линеен. Он называется *единичным* или *тождественным* оператором.

3. Оператор A, переводящий каждый элемент $x \in E$ в элемент λx (λ — фиксированное число), есть линейный оператор, называемый оператором *подобия*.

4. Пусть A — линейный оператор, отображающий n-мерное пространство R^n с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в m-мерное пространство R^m с базисом $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Если $x \in R^n$, то

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

и, в силу линейности оператора A,

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i.$$

Таким образом, оператор A будет задан, если известно, во что он переводит базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Разложим вектор $Ae_i \in R^m$ по базису $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Будем иметь

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(i)} f_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда ясно, что оператор A определяется матрицей коэффициентов $(a_j^{(i)})_{i=1, 2, \ldots, n}^{j=1, 2, \ldots, m}$, столбцами которой служат координаты векторов $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ относительно базиса $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Пусть E и $\tilde{E}$ — линейные нормированные пространства.

Определение. *Оператор $y = Ax$ с областью определения $D_A \subset E$ и со значениями в $\tilde{E}$ называется непрерывным в точке $x_0 \in D_A$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in D_A$ таких, что $\|x - x_0\|_E < \delta$, выполняется неравенство*

$$\|Ax - Ax_0\|_{\tilde{E}} < \varepsilon.$$

Здесь $\| \ \|_E$, $\| \ \|_{\tilde{E}}$ — *нормы в пространствах* E, $\tilde{E}$ *соответственно.*

Часто бывает удобно следующее (равносильное) определение непрерывности оператора.

Оператор A *непрерывен в точке* $x_0 \in D_A$, *если для любой последовательности элементов* $\{x_n\}$, $x_n \in D_A$, *сходящейся к* x_0 *по норме пространства* E, *соответствующая последовательность* $\{Ax_n\}$ *сходится к элементу* Ax_0 *по норме пространства* $\tilde{E}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0.$$

Примеры. 1. Пусть $E = \tilde{E} = C\,[a, b]$. Для произвольной функции $x(t) \in C\,[a, b]$ положим

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{1}$$

где $K(t, s)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция двух переменных в квадрате $Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$.

Используя равномерную непрерывность $K(t, s)$ в Q, получаем, что функция $y(t)$ непрерывна для любой непрерывной функции $x(t)$, так что равенство (1) определяет оператор $y = Ax$, действующий из пространства $C\,[a, b]$ в $C\,[a, b]$. Его называют *интегральным оператором Фредгольма* с (непрерывным) ядром $K(t, s)$. Линейность этого оиератора очевидна:

$$1)\ A(x_1 + x_2) = \int_a^b K(t, s)\,[x_1(s) + x_2(s)]\, ds =$$
$$= \int_a^b K(t, s)\, x_1(s)\, ds + \int_a^b K(t, s)\, x_2(s)\, ds = Ax_1 + Ax_2;$$

$$2)\ A(\alpha x) = \int_a^b K(t, s)\, \alpha x(s)\, ds =$$
$$= \alpha \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = \alpha A x \qquad (\alpha = \text{const}).$$

Непрерывность оператора A следует из того, что сходимость в пространстве $C\,[a, b]$ есть равномерная сходимость, при которой возможен предельный переход под знаком интеграла. Поэтому, если $x_n(t) \to x_0(t)$, то

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b K(t, s)\, x_n(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b K(t, s)\,(\lim_{n\to\infty} x_n(s))\, ds = \int_a^b K(t, s)\, x_0(s)\, ds = Ax_0.$$

2. Пусть теперь $E = \tilde{E} = L_2\,[a, b]$. Вновь рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$y = Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds, \tag{1}$$

но теперь будем предполагать, что ядро $K(t, s)$ интегрируемо с квадратом по области $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$:

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds = B^2 < +\infty. \tag{2}$$

Покажем, что формула (1) определяет оператор, действующий из $L_2\,[a, b]$ в $L_2\,[a, b]$.

В силу теоремы Фубини (см. [27]) из условия (2) следует, что ядро $K(t, s)$, как функция от s, принадлежит $L_2\,[a, b]$. Значит, интеграл (1) существует для любой функции $x(t) \in L_2\,[a, b]$. По той же теореме Фубини функция

$$k(t) = \left(\int_a^b K^2(t, s)\, ds\right)^{1/2}$$

принадлежит $L_2\,[a, b]$, причем

$$\int_a^b k^2(t)\, dt = \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, ds\, dt = B^2 < +\infty.$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, находим

$$\int_a^b y^2(t)\,dt = \int_a^b \left\{\int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds\right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left\{\int_a^b K^2(t, s)\,ds \int_a^b x^2(s)\,ds\right\} dt =$$

$$= \int_a^b x^2(s)\,ds \int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,ds\,dt = \| x \|^2 B^2, \qquad (3)$$

т. е. $y(t) \in L_2[a, b]$.

Неравенство (3) можно записать в виде

$$\| y \|^2 \leqslant B^2 \| x \|^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, будем иметь

$$\| y \| = \| Ax \| \leqslant B \| x \|. \qquad (4)$$

Линейность оператора A очевидна, а непрерывность его следует из неравенства (4), поскольку если $x_n \to x_0$, то

$$\| Ax_n - Ax_0 \| = \| A(x_n - x_0) \| \leqslant B \| x_n - x_0 \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

и, значит,

$$Ax_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Ax_0.$$

Упражнение. Показать, что в конечномерном пространстве всякий линейный оператор непрерывен.

Теорема 3.1 *Линейный оператор $y = Ax$, определенный на линейном нормированном пространстве E и отображающий E в линейное нормированное пространство $\tilde{E}$, непрерывный в одной точке $x_0 \in E$, непрерывен на всем пространстве E.*

Действительно, пусть x — любая точка из E и $x_n \to x$. Тогда $x_n - x + x_0 \to x_0$. Так как A непрерывен в точке x_0, то

$$\lim_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0.$$

Но в силу линейности оператора

$$A(x_n - x + x_0) = Ax_n - Ax + Ax_0.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n - Ax + Ax_0 = Ax_0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax.$$

Последнее означает, согласно определению, что оператор A непрерывен в точке $x \in E$.

Определение (I). *Линейный оператор A, действующий из E в $\tilde{E}$, называется ограниченным, если он определен на всем E и существует такая постоянная $M > 0$, что*

$$\|Ax\| \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E. \tag{5}$$

Здесь $\|Ax\|$ — норма в пространстве $\tilde{E}$, $\|x\|$ — норма в пространстве E.

Согласно этому определению, ограниченный оператор переводит каждое ограниченное множество элементов $\{x\} \subset E$ в ограниченное же множество элементов $\{Ax\} \subset \tilde{E}$.

Между ограниченностью и непрерывностью линейных операторов существует тесная связь, которая выражается следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Для того чтобы линейный оператор A был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Иногда бывает удобнее пользоваться иным, равносильным предыдущему, определением ограниченного оператора.

Определение (II). *Оператор A называется ограниченным, если он ограничен в единичном шаре $S_1 : \|x\| \leqslant 1$ пространства E,* т. е. *существует число $\mathscr{K}$ такое, что*

$$\|Ax\| \leqslant \mathscr{K} \tag{6}$$

для всех x таких, что $\|x\| \leqslant 1$.

Покажем эквивалентность определений (I) и (II).

Пусть оператор A ограничен в смысле второго определения. Положим $M_0 = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$, так что $\|Ax\| \leqslant M_0$, когда $\|x\| \leqslant 1$. Если теперь $x \neq \theta$ — любой элемент из E, то $\frac{x}{\|x\|} \in S_1$, и потому $\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M_0$, откуда $\|Ax\| \leqslant M_0\|x\|$, так что условие (5) выполняется с $M = M_0$.

Предположим, напротив, что выполняется условие (5). Тогда для $\|x\| \leqslant 1$

$$\|Ax\| \leqslant M,$$

т. е. A — ограниченный оператор в смысле второго определения.

Определение. *Число M_0, определяемое равенством*

$$M_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \tag{7}$$

называется нормой оператора A и обозначается символом $\|A\|$.

Таким образом, для любого $x \in E$

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \|x\|. \tag{8}$$

Очевидно, что $M_0 = \|A\|$ есть наименьшая из констант, участвующих в неравенстве (5).

В самом деле, если бы это было не так, то нашлось бы число $M_1 < M_0$ такое, что $\forall x \in E$

$$\|Ax\| \leqslant M_1 \|x\|.$$

Тогда для $\forall x \in S_1$ мы имели бы

$$\|Ax\| \leqslant M_1,$$

откуда

$$M_0 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant M_1 < M_0,$$

что невозможно.

Поэтому норму $\|A\|$ оператора A можно определить как нижнюю грань всех чисел M, при которых имеет место неравенство (5):

$$\|A\| = \inf M.$$

Пример. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ оператор

$$Ax = tx(t),$$

называемый оператором умножения на независимую переменную.

Очевидно,

$$C[a, b] \xrightarrow{A} C[a, b].$$

Для простоты будем считать, что $0 < a < b$.

Для любой функции $x(t) \in C[a, b]$, $\|x\| \leqslant 1$, имеем

$$\|Ax\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |tx(t)| \leqslant b \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = b\|x\| \leqslant b. \tag{9}$$

Отсюда

$$\|A\| \leqslant b.$$

Если взять функцию $x_0(t) \equiv 1$ на $[a, b]$, то для нее

$$\|Ax_0\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |tx_0(t)| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |t| = b,$$

и поэтому

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\| = b. \tag{10}$$

Из (9) и (10) вытекает, что $\|A\| = b$.

Вычисление норм конкретных операторов обычно весьма затруднительно. Однако часто бывает довольно легко оценить норму оператора сверху, что порой оказывается достаточным.

Рассмотрим, например, в пространстве $C[a, b]$ интегральный оператор Фредгольма

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds, \qquad x(t) \in C[a, b],$$

с непрерывным в $Q\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$ ядром $K(t, s)$.

Пусть $M = \max\limits_{(t, s) \in Q} |K(t, s)|$. Для $x(t) \in C[a, b]$, $\|x\| \leqslant 1$, имеем

$$\|Ax\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b |K(t, s)|\,|x(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M(b-a) \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(s)| = M(b-a)\|x\| \leqslant M(b-a).$$

Отсюда

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant M(b-a). \tag{11}$$

Оценка (11) является весьма грубой, хотя и используется во многих рассуждениях. Легко видеть, что справедлива более точная оценка

$$\| A \| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \int_a^b | K(t, s) | \, ds.$$

Можно показать ([19]), что в данном случае

$$\| A \| = \max_{a \leqslant b \leqslant b} \int_a^b | K(t, s) | \, ds.$$

В заключение приведем пример линейного, но не ограниченного оператора.

Пусть $E = \tilde{E} = C\,[a, b]$.

Рассмотрим оператор дифференцирования

$$Ax \equiv \frac{d}{dx} x(t).$$

Этот оператор линеен. Однако он определен не на всем $C\,[a, b]$, а лишь на подмножестве $C^{(1)}\,[a, b] \subset C\,[a, b]$ функций, имеющих непрерывную производную. Оператор A на $C\,[a, b]$ не является ограниченным. В самом деле, пусть $x_n(t) = \sin nt$ на $[-\pi, \pi]$. Тогда

$$\| x_n \| = \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} | \sin nt | = 1,$$

а

$$\| Ax_n \| = \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} \left| \frac{d}{dt} \sin nt \right| = n \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} | \cos nt | = n,$$

и поэтому

$$\sup_{\| x \| \leqslant 1} \| Ax \| = +\infty.$$

§ 11. Пространство операторов

Зафиксируем два линейных нормированных пространства E и $\tilde{E}$ и будем рассматривать всевозможные линейные операторы $A, B, \ldots$, действующие из E в $\tilde{E}$.

Два оператора A и B считаем *равными* и пишем $A = B$, если они совпадают на всем E, т. е.

$$Ax = Bx \qquad \forall x \in E.$$

Определим *сумму* операторов и *произведение оператора на число* следующим образом:

$$(A+B)x = Ax + Bx,$$
$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Это будут снова операторы, действующие из E в $\tilde{E}$, и по отношению к так введенным операциям множество всех таких линейных операторов в свою очередь образует линейное пространство. Нулем этого пространства будет нулевой оператор, определяемый равенством

$$Ox = \tilde{\theta} \ \forall x \in E.$$

Более того, эта совокупность операторов будет линейным *нормированным* пространством. В самом деле, для каждого оператора A определена норма этого оператора $\|A\|$ — неотрицательное число, равное $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$, и остается лишь проверить выполнение аксиом нормы.

Проверим, например, выполнимость аксиомы треугольника. Имеем

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A+B)x\| =$$
$$= \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax+Bx\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \{\|Ax\| + \|Bx\|\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|,$$

так что аксиома треугольника для норм оказывается выполненной.

Итак, совокупность всех линейных операторов, действующих из E в $\tilde{E}$, есть линейное нормированное пространство. Будем его обозначать символом $(E \to \tilde{E})$.

Можно показать ([38]), что *если $\tilde{E}$ — полное пространство, то пространство линейных операторов $(E \to \tilde{E})$ также полное.*

Именно, пусть имеем последовательность операторов

$$\{A_n\} \subset (E \to \tilde{E}) \quad \text{и} \quad \|A_{n+p} - A_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. последовательность $\{A_n\}$ операторов фундаментальна. Тогда существует оператор $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ такой, что

$$\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Эту сходимость по норме в пространстве операторов называют *равномерной сходимостью* последовательности операторов.

Пусть E — линейное пространство. Рассмотрим множество $(E \to E)$ всех линейных операторов, определенных на E с областью значений, расположенной в том же пространстве. Как мы показали, эти операторы образуют линейное пространство.

Определим произведение операторов A, B из $(E \to E)$ формулой

$$(AB)\,x = A\,(Bx).$$

Легко видеть, что AB снова линейный оператор. В самом деле,

$$(AB)(x_1 + x_2) = A\,(B\,(x_1 + x_2)) = A\,(Bx_1 + Bx_2) =$$
$$= A\,(Bx_1) + A\,(Bx_2) = (AB)\,x_1 + (AB)\,x_2,$$
$$(AB)(\lambda x) = A\,(B\,(\lambda x)) = A\,(\lambda Bx) = \lambda A\,(Bx) = \lambda\,(AB)\,x.$$

По индукции определяется произведение любого числа операторов. В частности, $AA = A^2$, $A^2A = A^3$ и т. д.

Нетрудно проверить, что

$$(AB)\,C = A\,(BC),$$
$$(A + B)\,C = AC + BC,$$
$$C\,(A + B) = CA + CB.$$

Далее, существует единичный оператор I, определяемый равенством

$$Ix = x \qquad \forall x \in E$$

и такой, что $AI = IA = A$ для любого оператора A.

Определение. *Назовем кольцом R множество элементов x, y, z, ... с двумя операциями, называемыми сложением и умножением, которые записываются соответственно как сумма и произведение, и удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *Относительно сложения R—абелева группа.*
2) *Умножение ассоциативно:* $(xy)\,z = x\,(yz)$.
3) *для любых* $x, y, z \in R$

$$\left.\begin{aligned}(x+y)\,z &= xz + yz,\\ z\,(x+y) &= zx + zy\end{aligned}\right. \quad (\text{дистрибутивность}).$$

Кольцо R называется *коммутативным*, если в нем тождественно

$$xy = yx.$$

Таким образом, *множество* $(E \to E)$ *линейных операторов образует кольцо с единицей* I. (Множество четных чисел с обычными операциями сложения и умножения образует кольцо без единицы.)

Кольцо операторов некоммутативно, так как, вообще говоря,

$$AB \neq BA,$$

что видно хотя бы на примере матричных операторов.

§ 12. Обратные операторы

Важным понятием является понятие *обратного оператора*. Согласно общему определению обратного элемента кольца с единицей, оператор B называется *левым обратным* для линейного оператора A, если

$$BA = I.$$

Точно так же оператор C называется *правым обратным* для оператора A, если

$$AC = I.$$

Если оператор A имеет левый обратный B и правый обратный C, то они равны:

$$B = B\,(AC) = (BA)\,C = C.$$

В этом случае говорят, что оператор A имеет обратный оператор A^{-1}. Таким образом, если A^{-1} существует, то

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

С понятием обратного оператора связаны вопросы о существовании и единственности решения операторных уравнений вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

где f — известный элемент пространства E, x — искомый элемент того же пространства.

К уравнениям вида (1) относятся линейные алгебраические системы, линейные дифференциальные, линейные интегральные и другие линейные уравнения.

Рассмотрим уравнение (1) и предположим, что оператор A имеет обратный A^{-1}. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что

$$x = A^{-1}f \tag{2}$$

есть решение уравнения (1). Нетрудно показать, что это решение единственно.

Рассмотрим два линейных ограниченных оператора A и B, отображающих линейное нормированное пространство E в себя. Тогда имеет смысл произведение AB операторов. Покажем, что

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|. \tag{3}$$

Действительно, для любого $x \in E$

$$\| ABx \| \leqslant \| A \| \| Bx \| \leqslant \| A \| \| B \| \| x \|. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\| AB \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| ABx \| \leqslant \| A \| \| B \|,$$

что и доказывает утверждение.

Имеет место важная для дальнейшего теорема.

Теорема 3.3. *Пусть линейный ограниченный оператор A отображает банахово пространство E в себя и $\| A \| \leqslant q < 1$. Тогда оператор $I + A$, где I — единичный оператор, имеет обратный линейный ограниченный оператор.*

Доказательство. В пространстве операторов $(E \to E)$ рассмотрим ряд

$$I - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^n A^n + \ldots \tag{5}$$

Так как $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$ и, вообще, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$, то для частичных сумм S_n ряда (5) будем иметь

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|(-1)^{n+1} A^{n+1} + (-1)^{n+2} A^{n+2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{n+p} A^{n+p}\| \leqslant \|A\|^{n+1} + \\ + \|A\|^{n+2} + \ldots + \|A\|^{n+p} \leqslant q^{n+1} + \\ + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p}. \quad (6)$$

По условию $0 < q < 1$, и, значит, величина в правой части (6) стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого $p > 0$. Поэтому последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (5) сходится в себе, а значит, в силу полноты пространства операторов, она сходится к некоторому пределу. Таким образом, ряд (5) сходится.

Пусть оператор S — сумма этого ряда. Имеем

$$S(I+A) = \lim_{n\to\infty} S_n(I+A) = \\ = \lim_{n\to\infty} [(I - A + A^2 - \ldots + (-1)^n A^n)(I+A)] = \\ = \lim_{n\to\infty} [I - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^n A^n + \\ + A - A^2 + A^3 + \ldots + (-1)^n A^{n+1}] = \\ = \lim_{n\to\infty} [I + (-1)^n A^{n+1}] = I.$$

Аналогично находим, что

$$(I+A)S = \lim_{n\to\infty} (I+A) S_n = I.$$

Следовательно, $S = (I+A)^{-1}$.

Известно, что если линейный оператор B имеет обратный B^{-1}, то оператор B^{-1} также линеен. Поэтому оператор $S = (I+A)^{-1}$ линейный, как обратный линейному. Кроме того, он ограничен, так как

$$\|S\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Итак, оператор $(I+A)^{-1}$ — линейный ограниченный оператор. При этом

$$(I+A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots \qquad (5')$$

§ 13. Приложение к линейным интегральным уравнениям

1. Уравнение Фредгольма. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t) \qquad (1)$$

с непрерывным в прямоугольнике $Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ ядром $K(t, s)$ и $f(t) \in C[a, b]$.

Положим

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi = \lambda A\varphi + f$$

или

$$(I - \lambda A)\, \varphi = f. \qquad (2)$$

Воспользовавшись теоремой 3.3, получаем, что если $\lambda \| A \| < 1$, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \cdots + \lambda^n A^n f + \cdots \qquad (3)$$

Ряд в правой части равенства (3) называют *рядом Неймана.*

Изучим подробнее это решение. Пусть $M = \max\limits_{a \leqslant t,\ s \leqslant b} |K(t, s)|$. Как известно (см. стр. 91), $\| A \| \leqslant M(b-a)$, так что условие $|\lambda|\, \| A \| < 1$ или, что то же, $|\lambda| < 1/\| A \|$ будет заведомо выполнено, если $|\lambda| < 1/M(b-a)$. Будем считать, что λ удовлетворяет этому условию. Выясним, что представляют в рассматриваемом случае степени оператора A. Имеем

$$A^2f = A(Af) = \int_a^b K(t, s)\left\{\int_a^b K(s, \tau) f(\tau)\, d\tau\right\} ds =$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) K(s, \tau)\, ds\right) f(\tau)\, d\tau.$$

Положим

$$\int_a^b K(t, s) K(s, \tau)\, ds = K_2(t, \tau).$$

Функция $K_2(t, \tau)$ называется *повторным ядром* или *второй итерацией* ядра $K(t, s)$ (считаем $K_1(t, s) \equiv K(t, s)$).

Итак,

$$A^2f = \int_a^b K_2(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

или, меняя обозначение переменной интегрирования,

$$A^2f = \int_a^b K_2(t, s) f(s)\, ds.$$

Далее,

$$A^3f = A(A^2f) = \int_a^b K(t, s)\left(\int_a^b K_2(s, \tau) f(\tau)\, d\tau\right) ds =$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) K_2(s, \tau)\, ds\right) f(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_a^b K_3(t, s) f(s)\, ds,$$

где

$$K_3(t, \tau) = \int_a^b K(t, s) K_2(s, \tau)\, ds$$

— третья итерация ядра $K(t, s)$.

Вообще,

$$A^n f = \int_a^b K_n(t, s) f(s)\, ds,$$

где $K_n(t, s)$ — n-я итерация ядра $K(t, s)$, определяемая формулой

$$K_n(t, s) = \int_a^b K(t, \tau) K_{n-1}(\tau, s)\, d\tau. \tag{4}$$

Равенство $A^{n+p} = A^n A^p = A^p A^n$, имеющее место для операторов, дает

$$K_{n+p}(t, s) = \int_a^b K_n(t, \tau) K_p(\tau, s)\, d\tau = \int_a^t K_p(t, \tau) K_n(\tau, s)\, d\tau. \tag{5}$$

Отметим, что все итерированные (повторные) ядра непрерывного ядра $K(t, s)$ непрерывны в Q.

С помощью итерированных ядер решение интегрального уравнения (1) может быть записано так:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_1(t, s) f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b K_2(t, s) f(s)\, ds + \\ + \cdots + \lambda^n \int_a^b K_n(t, s) f(s)\, ds + \cdots, \tag{6}$$

где ряд, стоящий в правой части, при $|\lambda| < 1/M(b-a)$ сходится равномерно.

Преобразуем выражение для решения интегрального уравнения. Рассмотрим ряд

$$K_1(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \cdots + \lambda^{n-1} K_n(t, s) + \cdots \tag{7}$$

Этот ряд равномерно сходится при $a \leqslant t, s \leqslant b$, если

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

В самом деле,

$$|K_2(t, s)| \leqslant \int_a^b |K(t, \tau)|\,|K(\tau, s)|\, d\tau \leqslant M^2(b-a),$$

$$|K_3(t, s)| \leqslant \int_a^b |K(t, \tau)|\,|K_2(\tau, s)|\, d\tau \leqslant M^3(b-a)^2$$

и, вообще,

$$|K_n(t, s)| \leqslant M^n (b-a)^{n-1}.$$

Отсюда

$$|\lambda^{n-1} K_n(t, s)| \leqslant |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^{n-1} = Mq^{n-1},$$

где

$$q = |\lambda| M (b-a) < 1.$$

Таким образом, члены ряда (7) по абсолютной величине не превосходят членов сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \qquad (0 < q < 1),$$

откуда и следует равномерная сходимость ряда (7). Обозначим сумму этого ряда $R(t, s; \lambda)$:

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(t, s) + \dots \quad (8)$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ есть непрерывная функция аргументов t, s и аналитическая функция λ при $|\lambda| < 1/M(b-a)$. Умножая обе части (8) на $f(s)$ и интегрируя ряд почленно, получим

$$\int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\,ds = \int_a^b K(t, s) f(s)\,ds +$$
$$+ \lambda \int_a^b K_2(t, s) f(s)\,ds + \dots + \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(t, s) f(s)\,ds + \dots$$

Сравнивая это выражение с выражением (6) для решения интегрального уравнения (1), можем написать

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\,ds. \quad (9)$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ называется *разрешающим ядром* или *резольвентой ядра* $K(t, s)$.

Формула (9) верна только для значений параметра λ, достаточно малых по абсолютной величине, так как ряд (8), вообще говоря, не сходится при любых значениях λ (последнее имеет место для уравнений Вольтерра, см. ниже стр. 111).

Существуют, однако, ядра, отличные от ядра Вольтерра, для которых формула (9) дает решение интегрального уравнения при *любом* значении λ. Таков случай ядра, *ортогонального самому себе*, т. е. такого, для которого $K_2(t, s) \equiv 0$. В этом случае все остальные повторные ядра также равны нулю и разрешающее ядро обращается в функцию $K(t, s)$. Пусть, например, $K(t, s) = \sin t \cos s$, $0 \leqslant t, s \leqslant \pi$. Тогда

$$K_2(t, s) = \int_0^\pi \sin t \cos \tau \sin \tau \cos s \, d\tau =$$

$$= \sin t \cos s \cdot \frac{\sin^2 \tau}{2} \bigg|_{\tau=0}^{\tau=\pi} = 0 \qquad \forall t, s.$$

Ясно, что все $K_p(t, s)$ $(p > 2)$ также равны нулю тождественно и, в силу (8),

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s).$$

Вообще, два ядра $K(t, s)$ и $\mathscr{L}(t, s)$ называются *ортогональными*, если они удовлетворяют двум условиям:

$$\int_a^b K(t, \tau) \mathscr{L}(\tau, s) \, d\tau = 0, \qquad \int_a^b \mathscr{L}(t, \tau) K(\tau, s) \, d\tau = 0$$

$$\forall (t, s) \in Q.$$

Ядра называются *полуортогональными*, если выполняется одно из этих условий.

Упражнения. 1°. Показать, что ядро

$$K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt \cos ns, \qquad 0 \leqslant t, s \leqslant 2\pi,$$

где ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, ортогонально самому себе.

2°. Показать, что для ядра $K(t, s) = \sum\limits_{n=1}^{p} a_n \sin nt \sin (n+1) s$ на отрезке $[0, \pi]$ резольвента $R(t, s; \lambda)$ есть многочлен относительно λ степени $p - 1$.

Примеры. 1. С помощью резольвенты решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 ts\varphi(s) ds + f(t). \qquad (1')$$

Решение. В данном случае $K(t, s) = ts$; $a = 0$; $b = 1$;

$$M = \max_{0 \leqslant t,\, s \leqslant 1} |K(t, s)| = 1.$$

Последовательно находим

$$K_1(t, s) \equiv K(t, s) = ts,$$

$$K_2(t, s) = \int_0^1 t\tau\tau s\, d\tau = \frac{ts}{3},$$

$$K_3(t, s) = \int_0^1 t\tau \cdot \frac{1}{3} \tau s\, d\tau = \frac{ts}{3^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n(t, s) = \frac{ts}{3^{n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Согласно (8)

$$R(t, s; \lambda) = ts + \frac{\lambda}{3} ts + \cdots + \frac{\lambda^n}{3^n} ts + \cdots = \frac{3ts}{3-\lambda} \quad (|\lambda| < 3).$$

В силу формулы (9)

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 \frac{3tsf(s)}{3-\lambda} ds. \tag{9'}$$

Из формулы (9′) видно, что решение уравнения (1′) существует и единственно при всех значениях $\lambda \neq 3$. Условие $|\lambda| < 3$ обеспечивает сходимость ряда (8) для резольвенты и гарантирует существование решения (1′) при $\forall \lambda$, $|\lambda| < 3$. Но решение, как мы видим, существует в гораздо большей области изменения λ.

2. В квантовомеханической теории рассеяния на потенциале $V(r)$, где $V(r) \to 0$ при $r \to \infty$, приходится искать решение уравнения Шредингера

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) - \frac{2m}{\hbar^2} V(\boldsymbol{r}) \psi(\boldsymbol{r}) + k^2 \psi(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Искомая функция $\psi(\boldsymbol{r})$ представляется в виде суперпозиции падающей плоской волны $\psi_0(\boldsymbol{r})$ с волновым вектором $\boldsymbol{k}_0$ и рассеянной волны. Здесь $k^2 = k_0^2 = 2mE/\hbar^2$, E — кинетическая энергия частиц падающего пучка, h — постоянная Планка, $\hbar = h/2\pi$, $\boldsymbol{r}\{x_1, x_2, x_3\}$ — радиус-вектор частицы.

С помощью функции Грина (см. ниже § 31) задачу рассеяния можно преобразовать к интегральному уравнению

$$\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{r})} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r}')\,d^3\boldsymbol{r}',$$

где $e^{i(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{r})}$ — падающая волна; $d^3\boldsymbol{r}' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$. Решение этого интегрального уравнения можно записать в виде ряда Неймана. При этом уже первая итерация дает очень важный результат, известный как *борновское приближение*:

$$\psi(\boldsymbol{r}) \approx e^{i(\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{r})} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}')\,e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}')}\,d^3\boldsymbol{r}'.$$

Резольвента $R(t, s; \lambda)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\,d\tau, \tag{10}$$

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda \int_a^b K(\tau, s) R(t, \tau; \lambda)\,d\tau. \tag{11}$$

Чтобы доказать, например, первое, заменим в формуле (8), определяющей резольвенту, t на τ:

$$R(\tau, s; \lambda) = \\ = K(\tau, s) + \lambda K_2(\tau, s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(\tau, s) + \ldots \tag{12}$$

Умножим обе части (12) на $K(t, \tau)$ и проинтегрируем по τ от a до b:

$$\int_a^b K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\,d\tau = \int_a^b K(t, \tau) K(\tau, s)\,d\tau + \\ + \lambda \int_a^b K(t, \tau) K_2(\tau, s)\,d\tau + \ldots + \\ + \lambda^{n-1} \int_a^b K(t, \tau) K_n(\tau, s)\,ds + \ldots \tag{13}$$

Интегралы в правой части (13) равны соответственно $K_2(t, s)$, $K_3(t, s)$, ..., $K_{n+1}(t, s)$, ..., и, значит, (13) можно переписать так:

$$\int_a^b K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\, d\tau =$$
$$= K_2(t, s) + \lambda K_3(t, s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_{n+1}(t, s) + \ldots$$

Умножая обе части последнего равенства на λ и добавляя к обеим частям $K(t, s)$, придем к равенству

$$K(t, s) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\, d\tau =$$
$$= K(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \ldots + \lambda^n K_{n+1}(t, s) + \ldots,$$

или

$$K(t, s) + \lambda \int_a^b K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\, d\tau = R(t, s; \lambda).$$

Справедливость функционального уравнения (11) устанавливается аналогично *).

Упражнение. Переставляя переменные t и s в ядре $K(t, s)$, получим вообще другое ядро $K(s, t)$, сопряженное (союзное) с ядром $K(t, s)$. Показать, что резольвента союзного ядра есть $R(s, t; \lambda)$, если резольвента исходного ядра $K(t, s)$ была $R(t, s; \lambda)$.

Приведем еще одно важное свойство резольвенты $R(t, s; \lambda)$. Будем рассматривать $R(t, s; \lambda)$ как ядро и применим к ней процесс построения итерированных ядер. Получим последовательность функций

$$R_1(t, s; \lambda) \equiv R(t, s; \lambda), \quad R_2(t, s; \lambda), \ldots, R_n(t, s; \lambda), \ldots$$

---

*) Функциональное уравнение для резольвенты выводится буквально в две строчки, если воспользоваться представлением резольвентного оператора в виде ряда по степеням оператора A. Именно, вводя, оператор

$$Rf = \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\, ds,$$

будем иметь

$$R = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + \ldots + \lambda^{n-1} A^n + \ldots =$$
$$= A + \lambda A (A + \lambda A^2 + \ldots + \lambda^{n-2} A^{n-1} + \ldots).$$

Отсюда

$$R = A + \lambda A R.$$

Эти функции определяются одна за другой из рекуррентных соотношений

$$R_n(t, s; \lambda) = \int_a^b R(t, \tau; \lambda) R_{n-1}(\tau, s; \lambda)\, d\tau. \tag{14}$$

Используя представление резольвенты

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \\ + \lambda^2 K_3(t, s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(t, s) + \ldots \tag{8}$$

и учитывая, что ряд в правой части (8) сходится абсолютно и равномерно в области $Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ для $|\lambda| < 1/M(b-a)$, получим, используя формулу (5) на стр. 100,

$$R_2(t, s; \lambda) = \int_a^b R(t, \tau; \lambda) R(\tau, s; \lambda)\, d\tau = \int_a^b K(t, \tau) K(\tau, s) d\tau + \\ + \lambda \int_a^b [K_2(t, \tau) K(\tau, s) + K(t, \tau) K_2(\tau, s)]\, d\tau + \\ + \lambda^2 \int_a^b [K_3(t, \tau) K(\tau, s) + K_2(t, \tau) K_2(\tau, s) + \\ + K(t, \tau) K_3(\tau, s)]\, d\tau + \ldots = \\ = K_2(t, s) + 2\lambda K_3(t, s) + 3\lambda^2 K_4(t, s) + \ldots$$

Сравнивая правую часть (8) с правой частью последнего равенства, имеем

$$R_2(t, s; \lambda) = \frac{\partial R(t, s; \lambda)}{\partial \lambda}.$$

Аналогично получаем, что

$$R_3(t, s; \lambda) = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2}$$

и, вообще,

$$R_n(t, s; \lambda) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} R(t, s; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}}.$$

Следовательно, разложение функции $R(t, s; \lambda+\mu)$ в ряд Тейлора по степеням λ имеет вид

$$R(t, s; \lambda+\mu)=$$
$$=R(t, s; \mu)+\lambda R_2(t, s; \mu)+\ldots+\lambda^{n-1}R_n(t, s; \mu)+\ldots \quad (15)$$

При $\mu=0$, учитывая, что $R(t, s, 0)=K(t, s)$, получаем как раз разложение (8) резольвенты $R(t, s; \lambda)$.

Таким образом, *если рассматривать $R(t, s; \mu)$ при определенном значении μ как ядро уравнения Фредгольма, то соответствующим разрешающим ядром будет $R(t, s; \lambda+\mu)$*.

Нетрудно видеть, что соотношения (10), (11) являются частными случаями общего функционального соотношения

$$R(t, s; \lambda+\mu)=$$
$$=R(t, s; \mu)+\lambda\int_a^b R(t, \tau; \mu)R(\tau, s; \lambda+\mu)\,d\tau, \quad (16)$$

которое выводится из (15) аналогично (10).

Полагая $\mu=0$, получим формулу (10); заменив μ на λ и λ на $-\lambda$, получим формулу (11).

Формулу (16) можно записать в несколько более симметричной форме, если заменить μ на λ и λ на $\lambda_1-\lambda$:

$$R(t, s; \lambda_1)-R(t, s; \lambda)=$$
$$=(\lambda_1-\lambda)\int_a^b R(t, \tau; \lambda)R(\tau, s, \lambda_1)\,d\tau. \quad (17)$$

Полагая $\lambda_1=\lambda+\Delta\lambda$, формуле (17) придадим вид

$$\frac{R(t, s; \lambda+\Delta\lambda)-R(t, s; \lambda)}{\Delta\lambda}=\int_a^b R(t, \tau; \lambda)R(\tau, s; \lambda+\Delta\lambda)\,d\tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda\to 0$, получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial R(t, s; \lambda)}{\partial\lambda}=\int_a^b R(t, \tau; \lambda)R(\tau, s; \lambda)\,d\tau, \quad (18)$$

которое вместе с условием $R(t, s; 0)=K(t, s)$ определяет резольвенту.

Формулы (1) и (9) можно рассматривать как обратные одна относительно другой. В самом деле, будем в соотношении (9) рассматривать функцию $\varphi(t)$ как данную, а $f(t)$ — как неизвестную и запишем его в несколько более общем виде:

$$f(t)=\mu\int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\,ds+\varphi(t). \tag{19}$$

Это есть уравнение Фредгольма с ядром $R(t, s; \lambda)$. Его резольвентой, как показано выше, является $R(t, s; \lambda+\mu)$, и для значения параметра $\mu=-\lambda$ она принимает значение $R(t, s; 0)=K(t, s)$. Таким образом, формула, дающая решение уравнения (9), совпадает с уравнением (1).

Резольвента $R(t, s; \lambda)$, определенная как сумма ряда (8), является аналитической функцией λ в круге $|\lambda|<1/M(b-a)$ комплексной λ-плоскости. С другой стороны, резольвента Фредгольма, построенная в § 3, является мероморфной функцией λ во всей плоскости λ. Можно показать, что обе эти резольвенты тождественно совпадают для значений параметра λ, достаточно малых по модулю.

Таким образом, *резольвента Фредгольма является мероморфным продолжением резольвенты* (8) *на всю комплексную λ-плоскость.* При этом для резольвенты Фредгольма остаются в силе функциональные уравнения (10), (11).

Имея в виду это продолжение резольвенты (8), заметим следующее.

Как уже отмечалось (см. § 3), если λ — регулярное, то однородное интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \tag{20}$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(t)\equiv 0$. Поэтому, чтобы уравнение (20) имело нетривиальное решение (фундаментальную функцию), надо, чтобы при некотором значении $\lambda=\lambda_0$ не существовало ограниченного обратного оператора $(I-\lambda A)^{-1}$, и, значит, $\lambda=\lambda_0$ должно быть полюсом резольвенты $R(t, s; \lambda)$.

Покажем, обратно, что *всякому полюсу резольвенты отвечает по крайней мере одна фундаментальная функция.*

Действительно, пусть $\lambda = \lambda_0$ есть полюс n-го порядка резольвенты $R(t, s; \lambda)$. Запишем лорановское разложение $R(t, s; \lambda)$ в окрестности $\lambda = \lambda_0$:

$$R(t, s; \lambda) = \frac{C_{-n}(t, s)}{(\lambda-\lambda_0)^n} + \frac{C_{-n+1}(t, s)}{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{C_{-1}(t, s)}{\lambda-\lambda_0} + C_0(t, s) + C_1(t, s)(\lambda-\lambda_0) + \cdots \quad (C_{-n}(t, s) \not\equiv 0) \tag{21}$$

Положим $\lambda - \lambda_0 = h$ и в обе части функционального уравнения (10) вместо резольвенты $R(t, s; \lambda)$ подставим ее разложение (21). Будем иметь

$$\frac{C_{-n}(t, s)}{h^n} + \frac{C_{-n+1}(t, s)}{h^{n-1}} + \cdots + \frac{C_{-1}(t, s)}{h} + C_0(t, s) + C_1(t, s)h + \cdots = K(t, s) + (\lambda_0 + h)\int_a^b K(t, \tau)\left[\frac{C_{-n}(\tau, s)}{h^n} + \cdots\right] d\tau.$$

Приравнивая коэффициент при h^{-n} в обеих частях последнего равенства, получим соотношение

$$C_{-n}(t, s) = \lambda_0 \int_a^b K(t, \tau) C_{-n}(\tau, s)\, d\tau, \tag{22}$$

которое означает, что $C_{-n}(t, s_1)$ есть ненулевое решение однородного уравнения (20), отвечающее характеристическому числу λ_0 при любом допустимом значении s_1 переменной s, $a \leqslant s \leqslant b$. Так, в приведенном выше примере (см. стр. 103) мы имели $R(t, s; \lambda) = 3ts/(3-\lambda)$. Здесь $\lambda = 3$ — простой полюс резольвенты ($n = 1$). Согласно доказанному предложению, функция $\varphi(t) = -3ts_1$, $s_1 = \mathrm{const}$, будет решением уравнения

$$\varphi(t) = 3\int_0^1 ts\varphi(s)\, ds,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Упражнение. Пользуясь функциональным уравнением (11), показать, что если $\lambda = \lambda_0$ есть полюс n-го порядка резольвенты $R(t, s; \lambda)$, то функция $C_{-n}(t_1, s)$, $t_1 = \mathrm{const}$, является решением союзного однородного уравнения

$$z(s) = \lambda_0 \int_a^b K(\tau, s)\, z(\tau)\, d\tau.$$

2. Уравнение Вольтерра. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t). \tag{23}$$

Его можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма с «треугольным» ядром $\mathscr{K}(t, s)$, определяемым следующим образом:

$$\mathscr{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s) & \text{при } s \leqslant t, \\ 0 & \text{при } s > t. \end{cases}$$

Поэтому к уравнению (23) приложима вся развитая выше теория. Однако, учитывая специфику ядра, мы получаем для итерированных ядер следующие выражения ($K_1(t, s) \equiv \equiv K(t, s)$):

$$K_2(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)\, K(\tau, s)\, d\tau \tag{24}$$

и, вообще,

$$K_n(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)\, K_{n-1}(\tau, s)\, d\tau. \tag{25}$$

Будем предполагать, что ядро $K(t, s)$ непрерывно в замкнутом треугольнике Δ, ограниченном прямыми $s = a$, $s = t$, $t = b$, $b > a$, и что $f(t) \in C[a, b]$.

Рассмотрим формальный ряд

$$K(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \lambda^2 K_3(t, s) + \cdots + \\ + \lambda^{n-1} K_n(t, s) + \cdots \tag{26}$$

Пусть $M = \max |K(t, s)|$ в указанном треугольнике Δ.

Тогда будем иметь

$$|K_2(t, s)| \leqslant \int_s^t |K(t, s)|\,|K(\tau, s)|\,d\tau \leqslant M^2(t-s),$$

$$|K_3(t, s)| \leqslant \int_s^t |K(t, \tau)|\,|K_2(\tau, s)|\,d\tau \leqslant \frac{M^3(t-s)^2}{2!}$$

и, вообще,

$$|K_n(t, s)| \leqslant \frac{M^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{27}$$

Отсюда видно, что ряд (26) сходится равномерно при любом значении параметра λ и сумма его есть непрерывная функция t, s.

Обозначим сумму ряда (26) через $R(t, s; \lambda)$:

$$R(t, s; \lambda) =$$
$$= K(t, s) + \lambda K_2(t, s) + \cdots + \lambda^{n-1}K_n(t, s) + \cdots \tag{28}$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ есть целая функция параметра λ. Ее также называют разрешающим ядром или резольвентой для ядра $K(t, s)$.

Как и в случае уравнения Фредгольма, получаем формулу

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t, s; \lambda) f(s)\,ds, \tag{29}$$

дающую решение уравнения (23) для любой непрерывной функции $f(t)$ и при любом значении параметра λ. Это решение $\varphi(t)$ есть непрерывная функция аргумента t.

Резольвента уравнения Вольтерра (23), как и само ядро $K(t, s)$, определена для $a \leqslant t \leqslant b$ и для $s < t$. Для общности формулы полагают обычно, что $R(t, s; \lambda) \equiv 0$ при $s > t$.

Заметим, что повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела a.

Упражнение. Покажите, что резольвента $R(t, s; \lambda)$ уравнения Вольтерра (23) удовлетворяет функциональному уравнению

$$R(t, s; \lambda) = K(t, s) + \lambda \int_s^t K(t, \tau) R(\tau, s; \lambda)\,d\tau.$$

Уравнение (23) *с непрерывным ядром* $K(t, s)$ *и правой частью* $f(t)$ *имеет единственное непрерывное решение* $\varphi(t)$.

В самом деле, если бы существовало два таких решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, то их разность $\psi_0(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ удовлетворяла бы однородному интегральному уравнению

$$\psi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\,\psi(s)\,ds, \tag{30}$$

или, короче,

$$\psi(t) = \lambda A \psi.$$

Но уравнение (30) имеет единственное решение $\psi(t) \equiv 0$. Действительно, пусть $N = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |\psi_0(t)|$. Легко видеть, что если $\psi_0(t)$ — решение уравнения (30), т. е. $\psi_0(t) \equiv \equiv \lambda A \psi_0(t)$, то функции

$$\psi_1(t) = \lambda A \psi_0, \quad \psi_2(t) = \lambda A \psi_1, \quad \ldots, \quad \psi_n(t) = \lambda A \psi_{n-1}, \quad \ldots,$$

тождественны с функцией $\psi_0(t)$. Проводя оценку, аналогичную (27), находим

$$|\psi_n(t)| \leqslant \frac{NM(t-a)^n}{n!},$$

откуда следует, что $\psi_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ для $\forall t \in [a, b]$. Так как $\psi_n(t) \equiv \psi_0(t)$ для любого n, то, следовательно, $\psi_0(t) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Пример. С помощью резольвенты решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{t-s}\varphi(s)\,ds.$$

Решение. В данном случае $K(t, s) = e^{t-s}$, $\lambda = 1$. Пользуясь формулой (25), последовательно находим

$$K_2(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}\,d\tau = e^{t-s}(t-s),$$

$$K_3(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau} e^{\tau-s}(\tau - s)\,d\tau = e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n(t, s) = \frac{e^{t-s}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Резольвента $R(t, s; 1)$ определится как сумма ряда

$$R(t, s; 1) = e^{t-s} + e^{t-s}\frac{t-s}{1!} + e^{t-s}\frac{(t-s)^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + e^{t-s}\frac{(t-s)^n}{n!} + \ldots = e^{2(t-s)}.$$

Используя формулу (29), получаем

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{2(t-s)} e^s\, ds = e^{2t}.$$

Замечание. Интегральные уравнения Вольтерра возникают в тех задачах физики, в которых существует предпочтительное направление изменения независимой переменной (например, времени, энергии и т. д.).

Оператор Вольтерра

$$A\varphi(t) = \int_a^t K(t, s)\,\varphi(s)\, ds$$

характерен тем, что значение функции $A\varphi(t)$ в любой момент t определяется значениями функции $\varphi(t)$ только при значениях $s \leqslant t$, т. е. этот оператор учитывает «предысторию» процесса.

Естественно, что и решение

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t, s; \lambda) f(s)\, ds$$

уравнения Вольтерра (23) в каждый момент времени t определяется величиной внешнего воздействия $f(t)$ только в предшествующие моменты $s \leqslant t$.

Для уравнения Вольтерра 2-го рода характерна возможность продолжения решения: можно построить решение сначала на некотором отрезке $a \leqslant t \leqslant a_1$, для $t \geqslant a_1$ записать уравнение (23) в виде

$$\varphi(t) = \lambda \int_{a_1}^t K(t, s)\,\varphi(s) ds + \left[\lambda \int_a^{a_1} K(t, s)\,\varphi(s)\, ds + f(t)\right],$$

где в квадратных скобках стоит уже известная функция, и затем решать его дальше.

Для уравнения Фредгольма

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds+f(t)$$

такое построение решения на части отрезка $[a, b]$ невозможно.

Мы установили однозначную разрешимость уравнения Вольтерра (23) в предположении, что ядро $K(t, s)$ и свободный член $f(t)$ непрерывны. Эти условия можно значительно ослабить. Именно, будем предполагать, что ядро $K(t, s)$ интегрируется с квадратом по прямоугольнику $Q\ \{a \leqslant t, s \leqslant b\}$, т. е.

$$\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds=B^2<+\infty \tag{31}$$

(такое ядро будем называть *L_2-ядром*). Предположим также, что $f(t)\in L_2[a, b]$.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. *Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода*

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds+f(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b, \tag{32}$$

*у которого ядро $K(t, s)\in L_2(Q)$, а функция $f(t)\in L_2[a, b]$, имеет единственное *) решение $\varphi(t)\in L_2[a, b]$.*

Это решение определяется формулой

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^t R(t, s; \lambda)f(s)\,ds,$$

где резольвента $R(t, s; \lambda)$ есть целая функция параметра λ и определяется, как сумма ряда, составленного из итерированных ядер:

$$R(t, s, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(t, s), \tag{33}$$

---

*) Единственность понимается в смысле метрики $L_2[a, b]$: две функции считаются *тождественными*, если они отличаются друг от друга лишь на множества меры нуль.

причем ряд в правой части (33) сходится почти всюду в Q. Таким образом, интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds + f(t)$$

с ядром $K(t, s) \in L_2(Q)$ однозначно разрешимо при любом свободном члене $f(t) \in L_2[a, b]$ *для любых значений параметра* λ.

Соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds$$

имеет при *любом* λ только тривиальное решение, так что интегральное уравнение Вольтерра с L_2-ядром *не имеет характеристических чисел.*

Существуют и другие ядра, вовсе не имеющие характеристических чисел. Это вытекает из теоремы Лалеско ([49]).

Теорема 3.5. *Пусть $K(t, s)$ — фредгольмово ядро и $K_n(t, s)$ — его итерированные ядра. Для того, чтобы ядро $K(t, s)$ не имело характеристических чисел, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_n = \int_a^b K_n(t, t)\,dt = 0 \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Совсем иначе обстоит дело, если допускать или неинтегрируемые решения, или ядра с неинтегрируемой особенностью. Например, однородное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s}\,ds$$

имеет непрерывное решение $\varphi(t) = t^\alpha$ $(\alpha > 0)$, отвечающее значению параметра $\lambda = \alpha$.

Условимся и в этом случае отличные от нуля решения $\varphi(t)$ однородного уравнения называть собственными функциями, а соответствующие значения параметра λ — характеристическими значениями.

Конечно, в случае существования при каком-нибудь λ нетривиальных решений $\varphi_\nu(t)$ однородного уравнения типа Вольтерра с неинтегрируемым ядром соответствующее неоднородное уравнение уже не может иметь только одно решение: если вообще такое решение $\varphi(t)$ существует, то, прибавляя к нему любые $c_\nu \varphi_\nu(t)$ $(c_\nu = \text{const})$, опять получим решение неоднородного уравнения.

В вопросах единственности решения интегрального уравнения существенную роль играет класс функций, в котором ищется решение (класс суммируемых функций, квадратично суммируемых, непрерывных и т. д.).

Так, если ядро $K(t, s)$ уравнения Вольтерра ограничено, когда t меняется в некотором конечном интервале (a, b):

$$|K(t, s)| \leqslant M = \text{const} \qquad \forall t \in (a, b),$$

и свободный член $f(t)$ суммируем *) в интервале (a, b), то уравнение Вольтерра при любом значении λ имеет в интервале (a, b) единственное суммируемое решение $\varphi(t)$.

Однако если отказаться от требования суммируемости решения, то теорема единственности перестает быть верной в том смысле, что уравнение может иметь, наряду с суммируемым решением, еще и несуммируемые решения.

П. С. Урысон ([42]) построил изящные примеры интегральных уравнений (см. ниже примеры 1 и 2), которые, наряду с суммируемым, имеют и несуммируемые решения даже в том случае, когда ядро $K(t, s)$ и функция $f(t)$ непрерывны.

Будем считать для простоты $f(t) \equiv 0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \int_0^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{34}$$

где $K(t, s)$ — непрерывная функция.

---

*) Функция $x(t)$, неотрицательная на интервале (a, b), называется *суммируемой* на этом интервале, если $\int_a^b x(t)\,dt$ конечен; функция $x(t)$ произвольного знака будет суммируемой на (a, b) тогда и только тогда, когда суммируема функция $|x(t)|$, т. е. когда интеграл $\int_a^b |x(t)|\,dt$ имеет конечное значение. Интегралы понимаются в смысле Лебега.

Как было показано выше, в классе непрерывных (и, следовательно, суммируемых) функций это уравнение имеет единственное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Примеры. 1. Пусть $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,

$$K(t, s) = \begin{cases} se^{1/t^2-1}, & 0 \leqslant s \leqslant te^{1-1/t^2}, \\ t, & te^{1-1/t^2} \leqslant s \leqslant t, \\ 0, & s > t. \end{cases} \tag{35}$$

В квадрате $Q\{0 \leqslant t, s \leqslant 1\}$ ядро $K(t, s)$ ограничено, так как

$$0 \leqslant K(t, s) \leqslant t \leqslant 1.$$

Более того, оно непрерывно при $0 \leqslant s \leqslant t$. Уравнение (34) в этом случае имеет очевидное суммируемое решение $\varphi(t) \equiv 0$ и, в силу сказанного выше, других суммируемых решений это уравнение не имеет.

С другой стороны, непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (34) имеет бесконечное множество несуммируемых в (0, 1) решений вида

$$\varphi(t) = \frac{C}{t}$$

C — произвольная постоянная, $t \neq 0$).

В самом деле, учитывая выражение (35) для ядра $K(t, s)$, находим

$$\int_0^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = \int_0^{te^{1-1/t^2}} se^{1/t^2-1}\frac{C}{s}\,ds + \int_{te^{1-1/t^2}}^t t\frac{C}{s}\,ds =$$

$$= Ct - Ct\ln e^{1-1/t^2} = \frac{C}{t}.$$

Таким образом, получаем $C/t \equiv C/t$ $(t \neq 0)$, т. е. $\varphi(t) = C/t$ есть решение, несуммируемое в (0, 1), уравнения (34).

2. Пусть $0 \leqslant s \leqslant t < a$ ($a > 0$ — любое, в частности, $a = +\infty$),

$$K(t, s) = \frac{2}{\pi}\frac{ts^2}{t^6 + s^2}. \tag{36}$$

Функция $K(t, s)$ даже аналитична всюду, за исключением

(0, 0). Однако уравнение (34) с ядром (36) допускает несуммируемые решения. В самом деле, уравнение

$$\psi(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{ts^2}{t^6+s^2}\psi(s)\,ds-\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2} \tag{37}$$

имеет суммируемое решение, так как функция

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2}$$

ограничена и непрерывна всюду, кроме точки $t=0$. Функция

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0, & t=0,\\ \psi(t)+\dfrac{1}{t^2}, & t>0,\end{cases} \tag{38}$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения (37), будет уже несуммируемым в $(0, a)$ решением уравнения (34) с ядром (36).

Действительно, для $t>0$ имеем

$$\int_0^t K(t, s)\varphi(s)\,ds=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{ts^2}{t^6+s^2}\psi(s)\,ds+\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{t}{t^6+s^2}\,ds. \tag{39}$$

В силу уравнения (37) первое слагаемое в правой части (39) есть

$$\psi(t)+\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2}.$$

Второе слагаемое дает

$$\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{t\,ds}{t^6+s^2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{t^2}\operatorname{arctg}\frac{s}{t^3}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=t}=$$

$$=\frac{2}{\pi t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t^2}\qquad (t>0).$$

Таким образом,

$$\int_0^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds =$$

$$= \psi(t) + \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg} t^2}{t^2} + \frac{2}{\pi t^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{t^2} =$$

$$= \psi(t) + \frac{1}{t^2}\,\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg} t^2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{t^2}\right) =$$

$$= \psi(t) + \frac{1}{t^2} = \varphi(t),$$

а это и означает, что функция $\varphi(t)$, определяемая равенством (38), есть несуммируемое решение уравнения (34) с ядром (36).

Интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t),$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — непрерывные функции на $[-b, b]$, каждая из которых по абсолютной величине меньше b, может быть рассматриваемо как особый случай уравнения Фредгольма, в котором ядро $K(t, s)$ для всех значений s вне интервала (ψ_1, ψ_2) равно нулю. Когда абсолютные значения $|\psi_1|$ и $|\psi_2|$ не превосходят $|t|$, резольвента такого уравнения представляет целую функцию от λ, как и в случае уравнения Вольтерра. Достаточно сравнить это уравнение с вспомогательным мажорирующим уравнением вида

$$\Phi(t) = N + \lambda \int_{-|t|}^{|t|} M\Phi(s)\,ds,$$

которое имеет своим решением функцию $Ne^{2\lambda M|t|}$.

§ 14. Теоремы Фредгольма для общего случая уравнения Фредгольма

Мы установили, что интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \tag{1}$$

или, короче,

$$\varphi = \lambda A\varphi + f$$

с произвольным, непрерывным в $Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ ядром $K(t, s)$ и $f(t) \in C[a, b]$ имеет единственное непрерывное решение $\varphi(t)$, определяемое формулой

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, s; \lambda) f(s)\, ds \tag{2}$$

для всех λ таких, что $|\lambda| < 1/\|A\|$. Здесь $R(t, s; \lambda)$ — резольвента ядра $K(t, s)$.

Для уравнений Фредгольма с вырожденным ядром были доказаны (см. § 4) три фундаментальные теоремы Фредгольма, касающиеся разрешимости таких уравнений. Попытаемся распространить эти теоремы на случай произвольного непрерывного ядра.

В силу теоремы Вейерштрасса всякое непрерывное в Q ядро $K(t, s)$ можно представить в виде

$$K(t, s) = K_{\text{в}}(t, s) + K_{\varepsilon}(t, s),$$

где

$$K_{\text{в}}(t, s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, b_k(s)$$

— вырожденное ядро, а ядро $K_{\varepsilon}(t, s)$ по норме C может быть сколь угодно малым. Поэтому уравнение (1) можно записать так:

$$\varphi = \lambda T\varphi + \lambda S\varphi + f, \tag{3}$$

где $T\varphi = \int_a^b K_{\text{в}}(t, s)\, \varphi(s)\, ds$, $S\varphi = \int_a^b K_{\varepsilon}(t, s)\, \varphi(s)\, ds$.

Пусть ρ — произвольное положительное число. Выберем оператор S так, чтобы $\|S\| < 1/\rho$. Тогда для всех λ таких, что $|\lambda| < \rho$, будем иметь $|\lambda|\,\|S\| < 1$ и уравнение

$$\psi(t) = \lambda S\psi + g(t)$$

будет однозначно разрешимо в $C[a, b]$ при любой функции $g(t) \in C[a, b]$, причем

$$\psi(t) = g(t) + \lambda \int_a^b R_1(t, s; \lambda)\, g(s)\, ds, \tag{4}$$

где $R_1(t, s; \lambda)$ — резольвента ядра $K_{\varepsilon}(t, s)$.

Перепишем уравнение (3) в виде

$$\varphi = \lambda S\varphi + F,$$

где

$$F(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_\text{в}(t, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Считая $F(t)$ известной, с помощью формулы (4) приходим к уравнению, эквивалентному исходному:

$$\varphi(t) = F(t) + \lambda \int_a^b R_1(t, s; \lambda)\,F(s)\,ds,$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R_1(t, s; \lambda)\,f(s)\,ds + {}$$

$$+ \lambda \int_a^b \left[K_\text{в}(t, s) + \lambda \int_a^b R_1(t, \tau; \lambda)\,K_\text{в}(\tau, s)\,d\tau\right]\varphi(s)\,ds. \tag{5}$$

Первые два слагаемых правой части (5) — известные функции. Далее,

$$\int_a^b R_1(t, \tau; \lambda)\,K_\text{в}(\tau, s)\,d\tau = \int_a^b R_1(t, \tau; \lambda) \sum_{k=1}^n a_k(\tau)\,b_k(s)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^n b_k(s) \int_a^b R_1(t, \tau; \lambda)\,a_k(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k(t, \lambda)\,b_k(\lambda),$$

так что ядро уравнения (5) — вырожденное.

Таким образом, *любое интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром может быть сведено к уравнению с вырожденным ядром*. Пользуясь этим, можно показать ([20]), что теоремы Фредгольма, установленные в свое время (см. § 4) для уравнений с вырожденным ядром, имеют место для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с произвольным непрерывным ядром, а также L_2-ядром.

Учитывая еще результаты § 3, сформулируем окончательно четыре теоремы Фредгольма.

Теорема 3.6. *Если значение λ не является характеристическим, то как данное интегральное уравнение, так и сопряженное с ним однозначно разрешимы при любом свободном члене $f(t)$. Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 3.7. *Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение, так же как и сопряженное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения.*

Теорема 3.8. *Для того чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(t)$ был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного уравнения.*

Теорема 3.9. *Уравнение Фредгольма имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая альтернатива Фредгольма:

Либо неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Первый случай альтернативы имеет место при нехарактеристическом значении λ, второй — если λ является характеристическим числом.

Приведем теорему, дающую оценку погрешности решения, которая получается при замене данного ядра на близкое к нему другое ядро, в частности на вырожденное.

Теорема 3.10. *Пусть даны два интегральных уравнения*

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{6}$$

$$\tilde{\varphi}(t)=f_1(t)+\lambda\int_a^b K_0(t, s)\,\tilde{\varphi}(s)\,ds, \tag{7}$$

и пусть $R_0(t, s; \lambda)$ — *резольвента уравнения* (7) *с ядром* $K_0(t, s)$. *Пусть, далее, имеют место неравенства*

$$\int_a^b |K(t, s) - K_0(t, s)|\, ds < \varepsilon \qquad \forall t \in [a, b], \tag{8}$$

$$|f(t) - f_1(t)| < \eta, \tag{9}$$

$$\int_a^b |R_0(t, s; \lambda)|\, ds < M. \tag{10}$$

Тогда, если выполнено условие

$$\varepsilon |\lambda| (1 + |\lambda| M) < 1, \tag{11}$$

то уравнение (6) *имеет единственное решение* $\varphi(t)$ *и разность между этим решением и решением* $\tilde{\varphi}(t)$ *уравнения* (7) *удовлетворяет оценке*

$$|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \frac{N |\lambda| (1 + |\lambda| M)^2 \varepsilon}{1 - |\lambda| (1 + |\lambda| M) \varepsilon} + \eta (1 + |\lambda| M), \tag{12}$$

где $N = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$.

Доказательство. Предполагая существование ограниченного решения уравнения (6), обозначим

$$c_0 = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t)|$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K_0(t, s) \varphi(s)\, ds + F(t),$$

где $F(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b [K(t, s) - K_0(t, s)] \varphi(s)\, ds$. Тогда в силу формулы (2)

$$\varphi(t) = F(t) + \lambda \int_a^b R_0(t, s; \lambda) F(s)\, ds.$$

Далее,

$$|F(t)| \leqslant |f(t)| + |\lambda| \int_a^b |K(t, s) - K_0(t, s)| \, |\varphi(s)| \, ds \leqslant \\ \leqslant N + |\lambda| c_0 \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$|\varphi(t)| \leqslant |F(t)| + |\lambda| \int_a^b |R_0(t, s; \lambda)| \, |F(s)| \, ds \leqslant \\ \leqslant N + |\lambda| c_0 \varepsilon + |\lambda| M (N + |\lambda| c_0 \varepsilon) \qquad (13)$$

для всех $t \in [a, b]$. Поэтому и $c_0 = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi(t)|$ не превосходит величины, стоящей справа в (13), т. е.

$$c_0 \leqslant N(1 + |\lambda| M) + |\lambda| (1 + |\lambda| M) c_0 \varepsilon,$$

откуда

$$c_0 \leqslant \frac{N(1 + |\lambda| M)}{1 - (1 + |\lambda| M) |\lambda| \varepsilon}, \qquad (14)$$

причем последний переход законен, если выполнено условие (11):

$$|\lambda| (1 + |\lambda| M) \varepsilon < 1.$$

Итак, при выполнении условия (11) все решения $\varphi(t)$ уравнения (6) ограничены для любой ограниченной $f(t)$. Это показывает, что λ *не является характеристическим числом ядра* $K(t, s)$ и уравнение (6) имеет *единственное решение*.

В самом деле, если бы λ было характеристическим числом, то, прибавляя к решению неоднородного уравнения (6) собственную функцию ядра $K(t, s)$, мы снова бы получили решение уравнения (6). Поскольку собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя, ее можно взять такой, чтобы максимум ее модуля был больше любого наперед заданного числа и, значит, для уравнения (6) можно было бы найти решение, сколь угодно большое по абсолютной величине. Это противоречит доказанной выше ограниченности всех решений уравнения (6).

Докажем теперь оценку (12). Вычитая почленно уравнение (7) из (6), получим

$$\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)=\lambda\int_a^b [K(t,\ s)-K_0(t,\ s)+K_0(t,\ s)]\,\varphi(s)\,ds-$$
$$-\lambda\int_a^b K_0(t,\ s)\,\tilde{\varphi}(s)\,ds+f(t)-f_1(t),$$

или

$$\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)=\lambda\int_a^b K_0(t,\ s)\,[\varphi(s)-\tilde{\varphi}(s)]\,ds+F(t)-f_1(t).$$

Положим

$$\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)=\psi(t),\qquad F(t)-f_1(t)=H(t).$$

Тогда последнее соотношение примет вид

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b K_0(t,\ s)\,\psi(s)\,ds+H(t),$$

откуда

$$\psi(t)=H(t)+\lambda\int_a^b R_0(t,\ s;\ \lambda)\,H(s)\,ds,$$

так что

$$|\psi(t)|\leqslant|H(t)|+|\lambda|\int_a^b|R_0(t,\ s;\ \lambda)|\,|H(s)|\,ds. \tag{15}$$

Но

$$|H(t)|=|F(t)-f_1(t)|=$$
$$=\left|\lambda\int_a^b [K(t,\ s)-K_0(t,\ s)]\,\varphi(s)\,ds+f(t)-f_1(t)\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda|\,c_0\varepsilon+\eta. \tag{16}$$

Из (15), используя оценки (16), (10) и (14), получаем

$$\begin{aligned}\psi(t)| = |\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| \leqslant\\ \leqslant |\lambda| c_0\varepsilon + \eta + |\lambda| (|\lambda| c_0\varepsilon + \eta) M =\\ = \eta(1 + |\lambda| M) + c_0\varepsilon |\lambda| (1 + |\lambda| M) \leqslant\\ \leqslant \eta(1 + |\lambda| M) + \frac{|\lambda| (1 + |\lambda| M)^2 N\varepsilon}{1 - |\lambda| (1 + |\lambda| M)\varepsilon}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

На этой теореме основан метод приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма с помощью замены ядра $K(t, s)$ близким к нему вырожденным ядром.

Опираясь на теорему 3.3, нетрудно показать, что если оператор A имеет обратный, то близкий к нему оператор также обратим.

Теорема 3.11. *Пусть оператор $A \in (E \to E)$, где E — банахово пространство, имеет обратный A^{-1}, и пусть «возмущающий» оператор $\Delta A \in (E \to E)$ таков, что*

$$\| A^{-1} \| \| \Delta A \| < 1.$$

Тогда оператор $B = A + \Delta A$ имеет обратный B^{-1}, причем

$$\| B^{-1} - A^{-1} \| \leqslant \frac{\| \Delta A \|}{1 - \| A^{-1} \| \| \Delta A \|} \| A^{-1} \|^2.$$

В самом деле,

$$A + \Delta A = A(I + A^{-1}\Delta A).$$

Так как по условию $\| A^{-1}\Delta A \| < 1$, то оператор $I + A^{-1}\Delta A$ имеет обратный

$$(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1}\Delta A)^n.$$

Легко проверить, что оператор $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}$ есть оператор, обратный оператору $A(I + A^{-1}\Delta A) = A + \Delta A = B$, т. е. оператор B имеет обратный

$$B^{-1} = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1} A^{-1}.$$

Далее,

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| = \|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}-A^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A^{-1}\| \|(I+A^{-1}\Delta A)^{-1}-I\| \leqslant \|A^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{-1}\Delta A\|^n =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\Delta A\|}{1-\|A^{-1}\Delta A\|}\|A^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A^{-1}\|^2, \tag{17}$$

что завершает доказательство теоремы.

С помощью этой теоремы при решении линейных уравнений

$$B\varphi = f \tag{18}$$

иногда удается избежать утомительных выкладок, связанных с нахождением оператора B^{-1}, если известен обратный оператор A^{-1} для «близкого» линейного оператора A. Оператор A должен быть таким, чтобы разность $\Delta A = B - A$ удовлетворяла соотношению

$$\|\Delta A\| = \|B-A\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

Наличие обратного оператора A^{-1} обеспечивает разрешимость уравнения

$$A\tilde{\varphi} = f \tag{19}$$

(а вместе с тем и разрешимость исходного уравнения (18)).

Пусть $\tilde{\varphi} = A^{-1}f$ — решение уравнения (19). Тогда для отклонения

$$\varphi - \tilde{\varphi} = (B^{-1}-A^{-1})f$$

с учетом (17) получаем

$$\|\varphi-\tilde{\varphi}\| \leqslant \|B^{-1}-A^{-1}\| \|f\| \leqslant \frac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2}{1-\|A^{-1}\| \|\Delta A\|}\|f\|. \tag{20}$$

§ 15. Интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность

1°. Весьма часто встречаются интегральные уравнения Вольтерра с ядром вида

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{(t-s)^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

где $H(t, s)$ — некоторая непрерывная функция. К числу таких уравнений относится, например, уравнение Абеля (см. введение)

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = f(t)$$

($\varphi(t)$ — искомая функция).

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с ядром вида (1):

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t \frac{H(t, s)}{(t-s)^\alpha} \varphi(s)\, ds + f(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b,\ s < t), \tag{2}$$

При $\alpha \geqslant 1/2$ квадрат такого ядра не является интегрируемым, но тем не менее уравнение (2) может быть решено. В самом деле, последовательные итерированные ядра $K_n(t, s)$, начиная с некоторого номера n, не только являются L_2-ядрами, но даже ограничены. Покажем это.

Согласно формуле (24) § 13

$$K_2(t, s) = \int_s^t \frac{H(t, \tau) H(\tau, s)}{(t-\tau)^\alpha (\tau - s)^\alpha}\, d\tau.$$

Сделаем подстановку

$$\tau = s + (t-s) z.$$

Тогда

$$K_2(t, s) =$$

$$= (t-s)^{1-2\alpha} \int_0^1 \frac{H[t, s+(t-s)z]\, H[s+(t-s)z, s]}{z^\alpha (1-z)^\alpha}\, dz \tag{3}$$

или, короче, $K_2(t, s) = (t-s)^{1-2\alpha} F_2(t, s)$, где $F_2(t, s)$ — ограниченная функция, так как интеграл в правой части (3) сходится при $\alpha < 1$.

Последовательно находим

$$\left.\begin{aligned} K_3(t, s) &= (t-s)^{2-3\alpha} F_3(t, s), \\ K_4(t, s) &= (t-s)^{3-4\alpha} F_4(t, s), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ K_n(t, s) &= (t-s)^{n-1-n\alpha} F_n(t, s), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $F_3, F_4, \ldots, F_n$ — некоторые ограниченные функции. Из формул (4) видно, что все ядра $K_n(t, s), K_{n+1}(t, s), \ldots$ ограничены, если $n(1-\alpha)-1>0$.

С другой стороны, уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds+f(t) \tag{2}$$

всегда может быть приведено к аналогичному уравнению с ядром $K_2(t, s)$ или $K_3(t, s)$, $K_4(t, s), \ldots$ путем композиции (свертывания) обеих частей уравнения с функцией $\lambda K(t, s)$:

$$\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds=$$

$$=\lambda^2\int_a^t K(t, s)\left\{\int_a^s K(s, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right\}ds+\lambda\int_a^t K(t, s)f(s)\,ds,$$

или

$$\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds=$$

$$=\lambda^2\int_a^t K_2(t, s)\varphi(s)\,ds+\lambda\int_a^t K(t, s)f(s)\,ds. \tag{5}$$

В силу уравнения (2)

$$\lambda\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds=\varphi(t)-f(t),$$

так что (5) принимает вид

$$\varphi(t)=\lambda^2\int_0^t K_2(t, s)\varphi(s)\,ds+f_2(t), \tag{6}$$

где

$$f_2(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t, s)f(s)\,ds.$$

Последовательно получаем

$$\varphi(t) = \lambda^3 \int_a^t K_3(t, s)\,\varphi(s)\,ds + f_3(t),$$

где

$$f_3(t) = f_2(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)\,f_2(s)\,ds,$$

и т. д.

В результате конечного числа шагов мы придем к уравнению Вольтерра с ограниченным ядром $K_n(t, s)$ и правой частью $f_n(t)$, решив которое, получим решение исходного уравнения (2). Аналогичное преобразование применимо также к интегральным уравнениям первого рода, в частности к интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds = f(t). \tag{7}$$

Из формулы (3), применительно к уравнению (7), сразу получаем ($H \equiv 1$, $\alpha = 1/2$)

$$K_2(t, s) = \int_0^1 [z(1-z)]^{-1/2}\,dz = \pi.$$

Поэтому композиция уравнения (7) с его ядром дает

$$\pi \int_0^t \varphi(s)\,ds = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds,$$

откуда получаем изумительно простое решение уравнения (7):

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds. \tag{8}$$

Если предположить, что функция $f(t)$ дифференцируема, то, проведя интегрирование по частям в (8), а затем продифференцировав полученное выражение, найдем

$$\varphi(t)=\frac{f(0)}{\pi\sqrt{t}}+\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds. \tag{9}$$

В частности, при $f(0)=0$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^t\frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds. \tag{10}$$

Соотношения (7) и (10) можно рассматривать как формулы обращения, аналогичные формулам обращения Фурье. И те и другие послужили источником многочисленных формул обращения для определенных интегралов. Основой всех таких формул служит то, что для интегральных уравнений 1-го рода формула решений сама имеет вид интегрального уравнения 1-го рода.

Обобщенное уравнение Абеля

$$\int_0^t\frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha}\,ds=f(t)\qquad(0<\alpha<1) \tag{11}$$

также легко решается при помощи композиции с ядром $(t-s)^{\alpha-1}$.

Упражнение. Показать, что решением уравнения (11) является функция

$$\varphi(t)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds.$$

2°. Как и в случае интегрального уравнения Вольтерра (2), вместо интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds+f(t) \tag{12}$$

можно рассматривать аналогичное уравнение с итерированным ядром

$$\varphi(t)=\lambda^n\int_a^b K_n(t,s)\,\varphi(s)\,ds+f_n(t), \tag{13}$$

где

$$f_n(t) = f_{n-1}(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f_{n-1}(s)\, ds$$

$$(n = 2, 3, \ldots; \quad f_1(t) \equiv f(t)).$$

Этот прием позволяет устранять некоторые особенности ядра, так как итерированные ядра, как правило, более гладкие, чем исходное ядро. Так, если ядро $K(t, s)$ уравнения (12) имеет вид

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{|t-s|^{\alpha}} \tag{14}$$

$$(0 < \alpha < 1, \; H \text{ — ограниченная функция}),$$

то итерированное ядро $K_n(t, s)$ имеет такую же структуру, но число α заменяется при этом числом $1 - n(1-\alpha)$, которое отрицательно при достаточно большом n, так что для таких n ядро $K_n(t, s)$ ограничено.

Действительно, пусть

$$K(t, s) = \frac{H_1(t, s)}{|t-s|^{\alpha_1}}, \qquad L(t, s) = \frac{H_2(t, s)}{|t-s|^{\alpha_2}}$$

$$(0 < \alpha_1, \; \alpha_2 < 1).$$

Тогда в результате свертывания (композиции) K с L получаем

$$\int_a^b K(t, \tau) L(\tau, s)\, d\tau = \int_a^b \frac{H_1(t, \tau) H_2(\tau, s)}{|t-\tau|^{\alpha_1} |\tau - s|^{\alpha_2}}\, d\tau,$$

откуда

$$\left| \int_a^b K(t, s) L(\tau, s)\, d\tau \right| \leqslant C \int_a^b |t-\tau|^{-\alpha_1} |\tau - s|^{-\alpha_2}\, d\tau. \tag{15}$$

Подстановка $\tau - s = (t-s) z$ преобразует интеграл в правой части (15) к виду

$$|t-s|^{1-\alpha_1-\alpha_2} \int_{\frac{a-s}{t-s}}^{\frac{b-s}{t-s}} |1-z|^{-\alpha_1} |z|^{-\alpha_2}\, dz,$$

что приводит к оценке

$$\left|\int_a^b K(t, s)\, L(\tau, s)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{C_1}{|t-s|^{\alpha_1+\alpha_2-1}}, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2-1>0, \\ C_2, & \text{если } \alpha_1+\alpha_2-1<0, \end{cases} \tag{16}$$

где C_1, C_2 — постоянные. (Для n-мерных интегралов справедлив аналогичный результат, только в оценках (16) вместо $\alpha_1+\alpha_2-1$ надо поставить $\alpha_1+\alpha_2-n$.)

Отсюда следует, что ядро $K_2(t, s)$ ($\alpha_1=\alpha_2=\alpha$) имеет особенность порядка $2\alpha-1=1-2(1-\alpha)$, если это число положительно; $K_3(t, s)$ — особенность порядка $1-3(1-\alpha)$ и т. д. и при n достаточно большом число $1-n(1-\alpha)$ будет отрицательным, так что ядро $K_n(t, s)$ будет уже ограниченной функцией.

Упражнение. Показать, что если λ_0 есть характеристическое число ядра $K(t, s)$, то λ_0^n будет характеристическим числом ядра $K_n(t, s)$.

Для интегральных уравнений Фредгольма с ядрами, имеющими слабую особенность, справедливы теоремы Фредгольма, приведенные в § 14.

§ 16. Характер решения интегрального уравнения

Как отмечалось выше (см. § 8), если искать решение уравнения

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds+f(t) \tag{1}$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ и свободным членом $f(t)$ в пространстве $L_2[a, b]$, то это решение $\varphi(t)$ будет необходимо непрерывным.

Пусть теперь ядро $K(t, s)$ может иметь линии разрыва, а функция $f(t)$ непрерывна. Тогда у решения $\varphi(t)$ могут оказаться разрывы, если линия l разрыва ядра $K(t, s)$ содержит отрезки, параллельные оси Os.

Пусть, например, линия разрыва l содержит отрезок прямой $t=t_0$ (рис. 10). В уравнении (1) интегрирование ведется по s, т. е. по вертикальным отрезкам, и при переходе от $t = t_1 < t_0$ к близкому значению $t = t_2 > t_0$ интеграл может получить конечное приращение, что означает разрыв решения.

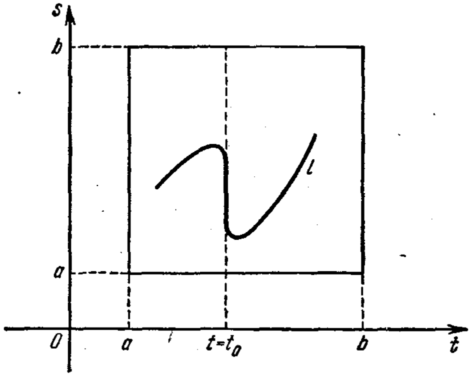

Рис. 10.

Пусть ядро $K(t, s)$ уравнения (1) не только интегрируемо с квадратом, но и удовлетворяет условию (A) (см. [20]):

$$\int_a^b K^2(t, s)\,ds \leqslant A \qquad (A > 0 - \mathrm{const}). \tag{A}$$

Тогда справедлива

Теорема 3.12. *Если свободный член $f(t)$ уравнения* (1) *ограничен, а само уравнение разрешимо, то любое его решение ограничено.*

В самом деле, если $f(t)$ — ограниченная на $[a, b]$ функция, то $f(t)$ заведомо принадлежит $L_2[a, b]$. Но тогда и решение $\varphi(t)$ уравнения (1) принадлежит $L_2[a, b]$. Для этого решения в силу (1) имеем

$$|\varphi(t)| \leqslant |f(t)| + |\lambda| \left| \int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds \right|. \tag{2}$$

Первое слагаемое правой части (2) ограничено по условию; ограниченность второго слагаемого следует из неравенства Буняковского:

$$\left|\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_a^b K^2(t, s)\,ds\right)^{1/2} \left(\int_a^b \varphi^2(s)\,ds\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{A}\,\|\varphi\|.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ — ограниченная функция.

Будем говорить, что ядро $K(t, s)$ *непрерывно в целом*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых t_1, t_2 таких, что $|t_2 - t_1| < \delta$, имеем

$$\int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)|\,ds < \varepsilon.$$

Укажем простые, но важные случаи, когда ядро $K(t, s)$ непрерывно в целом:

1) ядро $K(t, s)$ непрерывно по совокупности переменных t, s в замкнутом квадрате $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ (и, значит, равномерно непрерывно);

2) ядро $K(t, s)$, удовлетворяющее условию (A), разрывно в квадрате Q вдоль конечного числа линий $s = \psi_k(t)$, не содержащих кусков прямых, параллельных оси Os ($\psi_k(t)$ — непрерывные функции).

Допускается также наличие конечного числа изолированных точек разрыва у ядра $K(t, s)$.

Теорема 3.13. *Если свободный член $f(t)$ уравнения* (1) *непрерывен на отрезке $[a, b]$, а ядро $K(t, s)$ непрерывно в целом, то любое решение $\varphi(t)$ уравнения* (1) *непрерывно на отрезке $[a, b]$.*

В самом деле, функция $f(t)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем. В силу теоремы 3.12 решение $\varphi(t)$ уравнения (1) также ограничено:

$$|\varphi(t)| \leqslant M \qquad \forall\, t \in [a, b].$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $f(t)$ непрерывна на $[a, b]$, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $|t_2 - t_1| < \delta_1$ будем иметь

$$|f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon/2.$$

В силу непрерывности в целом ядре $K(t, s)$ для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $|t_2 - t_1| < \delta_2$

$$\int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)|\, ds < \frac{\varepsilon}{2M|\lambda|}.$$

Тогда при $|t_2 - t_1| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(t_2) - f(t_1)| + |\lambda| \int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)|\, |\varphi(s)|\, ds < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность решения $\varphi(t)$ уравнения (1).

Рассмотрим уравнение со слабой особенностью

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t), \tag{3}$$

где

$$K(t, s) = \frac{H(t, s)}{|t - s|^{\alpha}} \qquad (0 \leqslant \alpha < 1). \tag{4}$$

Можно показать, что

1) если свободный член $f(t)$ уравнения (3) ограничен, то любое решение $\varphi(t)$ этого уравнения ограничено;

2) если свободный член уравнения (3) и функция $H(t, s)$ непрерывны на $[a, b]$ и в $Q\,\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$ соответственно, то любое решение $\varphi(t)$ этого уравнения непрерывно на $[a, b]$.

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть функция $f(t)$ задана в интервале (a, b), конечном или бесконечном. *Интегральным преобразованием функции* $f(t)$ называется функция

$$F(\omega)=\int_a^b K(t, \omega) f(t)\, dt,$$

где $K(t, \omega)$ — фиксированная для данного преобразования функция, называемая *ядром преобразования*.

Метод интегральных преобразований состоит в переформулировании задачи через преобразованную функцию. При этом мы стремимся к тому, чтобы в этой новой форме задачу решить было легче. Применительно к интегральному уравнению мы получаем, вообще, интегральное уравнение для преобразованной функции. Если это уравнение оказывается более простым, чем первоначальное, то мы можем получить интегральное представление для исходной неизвестной функции. Этот метод особенно хорош, когда интегральное уравнение после интегрального преобразования сводится к алгебраическому уравнению.

§ 17. Преобразование Фурье

Известно, что если функция $f(t)$ удовлетворяет условию Дирихле на любом конечном отрезке оси t и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

то для нее справедливо равенство

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau. \qquad (1)$$

При этом во всякой точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, значение интеграла в правой части (1) будет равно $\frac{1}{2}\left[f(t_0-0)+f(t_0+0)\right]$.

Формулу (1) называют *интегральной формулой Фурье*, а стоящий в ее правой части интеграл — *интегралом Фурье*. От формулы (1) нетрудно перейти к комплексной форме интеграла Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\,d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \qquad (2)$$

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Функция

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad (3)$$

$$\left(\text{или } F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\omega t}\,dt\right)$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f(t)$ или *спектральной функцией*.

В силу формулы (2) имеем

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (4)$$

$$\left(\text{соответственно } f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\right).$$

Это так называемое *обратное преобразование Фурье*.

Важную роль в применении преобразования Фурье к решению интегральных уравнений играет **теорема о свертке**.

Пусть $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ — преобразования Фурье функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Тогда

$$F_1(\omega)F_2(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-i\omega t}\,dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\xi)e^{-i\omega(t+\xi)}\,dt\,d\xi,$$

причем двойной интеграл в правой части сходится абсолютно. Сделаем замену переменной $t+\xi=\tau$, так что $\xi=\tau-t$. Тогда будем иметь

$$F_1(\omega)F_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau-t)e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)\,dt\right\}d\tau. \quad (5)$$

(В силу теоремы Фубини перемена порядка интегрирования законна.)

Функция

$$\psi(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(\tau-t)\,dt$$

называется *сверткой* функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается $f_1 * f_2$.

Формула (5) может быть записана теперь так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau=\sqrt{2\pi}\,F_1(\omega)F_2(\omega),$$

откуда видно, что *преобразование Фурье свертки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равно умноженному на $\sqrt{2\pi}$ произведению преобразований Фурье свертываемых функций:*

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}f_1\mathcal{F}f_2,$$

где символом $\mathcal{F}g$ обозначается преобразование Фурье функции $g(t)$.

Операция свертки коммутативна: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$. В самом деле, производя замену переменной $\tau - t = z$, получаем

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(\tau - t)\,dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} f_2(z) f_1(\tau - z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z) f_1(\tau - z)\,dz = f_2 * f_1.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма на оси $(-\infty < t < +\infty)$ с ядром, зависящим от разности аргументов:

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \qquad (6)$$

(*уравнение типа свертки*). Здесь обычно применяется преобразование Фурье (в предположении, что все участвующие функции абсолютно интегрируемы на всей оси).

Формальное решение может быть получено следующим образом. Применяя к обеим частям (6) преобразование Фурье и используя теорему о свертке функций, получим

$$\Phi(\omega) = \lambda \sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(\omega)\,\Phi(\omega) + F(\omega), \qquad (7)$$

где $\Phi(\omega)$, $\mathcal{K}(\omega)$, $F(\omega)$ — преобразования Фурье функций $\varphi(t)$, $K(t)$ и $f(t)$ соответственно.

Из (7) находим

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(\omega)}$$

$$\left(1 - \lambda\sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(\omega) \neq 0 \text{ на оси } \omega\right),$$

и решение $\varphi(t)$ уравнения (6) получается в виде

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(\omega)}\,e^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (8)$$

Если $1 - \lambda\sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}(\omega)$ имеет нули при вещественном ω, то уравнение (6), вообще говоря, не имеет абсолютно интегрируемого на всей оси t решения.

Из (8) получаем

$$\varphi(t)-f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{F(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)}-F(\omega)\right]e^{i\omega t}\,d\omega=$$

$$=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)\,\mathscr{K}(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)}\,e^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (9)$$

Пусть $R(t, \lambda)$ — обратное преобразование Фурье функции

$$\frac{\mathscr{K}(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)}.$$

Тогда интеграл в правой части (9)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{2\pi}\,F(\omega)\,\frac{\mathscr{K}(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)}\,e^{i\omega t}\,d\omega$$

есть свертка функций $f(t)$ и $R(t, \lambda)$ и формула (9) может быть переписана в виде

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}R(t-s, \lambda)\,f(s)\,ds. \qquad (10)$$

Это — другое формальное решение уравнения (6).

Простейшие условия, при которых приведенные выкладки законны, даются следующей теоремой (см. [40 I]).

Теорема 4.1. *Пусть* $f(t)\in L_2(-\infty, +\infty)$, *а* $K(t)$ *абсолютно интегрируема на всей оси* t, *и пусть* $1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)\neq 0$ *для всех* ω. *Тогда формула* (8) *дает решение* $\varphi(t)\in L_2(-\infty, +\infty)$ *уравнения* (6), *и притом единственное* (в смысле L_2, так что всякое другое решение из L_2 совпадает с $\varphi(t)$ почти для всех t).

Если $K(t)\in L_2(-\infty, +\infty)$, то это же верно и для $\mathscr{K}(\omega)$ и $\mathscr{R}(\omega)$ и формула (10) эквивалентна (8).

Пример. Пусть

$$f(t)=e^{-|t|}, \qquad K(t)=\begin{cases} e^{t}, & t<0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

Тогда

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|-it\omega}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt+\int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\Bigg|_{t=-\infty}^{t=0}+\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}\right]=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Далее, $$\mathscr{K}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{t-i\omega t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{1-i\omega}.$$

Согласно формуле (8) решением $\varphi(t)\in L_2(-\infty,+\infty)$ будет

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\omega^2}}{1-\frac{\lambda}{1-i\omega}}\,e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}\,d\omega.$$

Пусть, например, $0<\lambda<1$. Для вычисления последнего интеграла при $t\geqslant 0$ рассмотрим замкнутый контур Γ (рис. 11), составленный

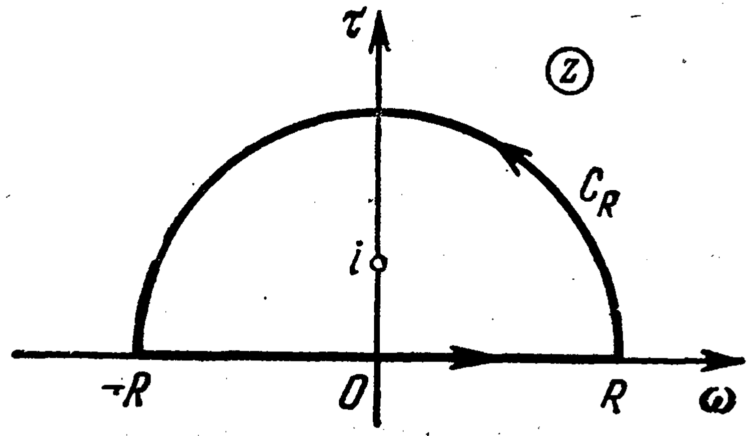

Рис. 11.

из отрезка $[-R, R]$ действительной оси ω и полуокружности C_R, опирающейся на этот отрезок и лежащей в верхней полуплоскости комплексной z-плоскости ($z=\omega+i\tau$).

При достаточно большом R внутри контура Γ лежит особая точка $z = i$ подынтегральной функции

$$g(z) = \frac{e^{itz}}{(1+iz)(1-\lambda-iz)}.$$

Используя теорему Коши о вычетах, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}\,d\omega + \frac{1}{\pi}\int\limits_{C_R} g(z)\,dz = 2i \operatorname*{res}_{z=i} g(z).$$

В силу леммы Жордана $\int\limits_{C_R} g(z)\,dz \to 0$ при $R \to \infty$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $R \to \infty$, найдем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+i\omega)(1-\lambda-i\omega)}\,d\omega = \frac{2}{2-\lambda}e^{-t}.$$

Таким образом,

$$\varphi(t) = \frac{2}{2-\lambda}e^{-t}\ (t \geqslant 0).$$

Рассматривая контур Γ^*, составленный из отрезка $[-R, R]$ оси ω и нижней полуокружности C_R^*, аналогично находим

$$\varphi(t) = \frac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)t}, \qquad t < 0.$$

Таким образом, единственное L_2-решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (6) при данном свободном члене $f(t)$ и ядре $K(t)$ определяется формулами

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-\lambda}e^{-t}, & t \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{2-\lambda}e^{(1-\lambda)t}, & t < 0. \end{cases}$$

Мы привели простейшие условия, при которых интегральное уравнение (6) имеет единственное решение в классе функций $\varphi(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Однако не исключено, что уравнение (6) может иметь и другие решения, не принадлежащие $L_2(-\infty; +\infty)$. Если существуют два решения уравнения (6), то их разность должна удовлетворять однородному уравнению

$$\varphi(t)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}K(t-s)\,\varphi(s)\,ds,\qquad -\infty<t<+\infty. \tag{11}$$

Это уравнение формально удовлетворяется функцией $\varphi(t)=e^{at}$, где a таково, что

$$\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}K(t)\,e^{-at}\,dt=1 \tag{12}$$

(если этот интеграл сходится). Можно показать, что при определенных условиях функции этого вида являются единственными решениями однородного уравнения (11). Именно, пусть $0<c<c_1$ и $e^{c_1|t|}K(t)$ абсолютно интегрируемо на всей оси t, а функция

$$e^{-c|t|}\varphi(t)\in L_2(-\infty,+\infty).$$

Тогда, если $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (11), то она имеет вид

$$\varphi(t)=\sum_{\nu}\sum_{p=1}^{q}C_{\nu,p}t^{p-1}e^{-i\omega_\nu t}, \tag{13}$$

где ω_ν пробегает все нули функции $1-\lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)$, для которых $|\operatorname{Im}\omega_\nu|<c$, $C_{\nu,p}$ — постоянные коэффициенты и q — кратность нуля ω_ν.

Рассмотрим опять интегральное уравнение

$$\varphi(t)=e^{-|t|}+\lambda e^{t}\int_{t}^{+\infty}e^{-s}\varphi(s)\,ds. \tag{14}$$

Оно легко приводится к дифференциальному уравнению. Пусть

$$\psi(t)=\int_{t}^{+\infty}e^{-s}\varphi(s)\,ds,$$

так что $\psi'(t)=-e^{-t}\varphi(t)$. Тогда для $t>0$ $-\psi'(t)=e^{-2t}+\lambda\psi(t)$, так что

$$\psi(t)=\frac{e^{-2t}}{2-\lambda}+Ce^{-\lambda t}.$$

Для $t < 0$ $\psi'(t) = 1 + \lambda\psi(t)$, так что

$$\psi(t) = -\frac{1}{\lambda} + C_1 e^{-\lambda t}.$$

Так как $\psi(t)$ в точке $t = 0$ непрерывна, то

$$C_1 = C + \frac{1}{2-\lambda} + \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому окончательно

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-\lambda} e^t + C\lambda e^{(1-\lambda)t}, & t > 0, \\ \left(\dfrac{2}{2-\lambda} + C\lambda\right) e^{(1-\lambda)t}, & t < 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение уравнения (14) содержит член с произвольной постоянной. Функция

$$\varphi_0(t) = e^{(1-\lambda)t}$$

является решением однородного уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_t^{+\infty} e^{t-s}\varphi(s)\,ds, \tag{15}$$

отвечающим нулю $\omega = -i(1-\lambda)$ функции

$$1 - \lambda\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega) = 1 - \frac{\lambda}{1-i\omega}.$$

Упражнение. Показать, что для любой функции $f(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$ уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}\varphi(s)\,ds + f(t), \qquad \lambda < 1/2,$$

имеет решение

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{-|s-t|\sqrt{1-2\lambda}}\,ds.$$

Показать, что при $\lambda > 0$ соответствующее однородное уравнение имеет решение

$$\varphi_0(t) = C_1 e^{t\sqrt{1-2\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Преобразование Фурье может быть применено и к решению интегральных уравнений 1-го рода

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds = f(t). \tag{16}$$

Здесь $f(t)$ — известная, $\varphi(t)$ — искомая функция.

Действуя формально, применим к обеим частям (16) преобразование Фурье и, используя теорему о свертке функций, получим

$$\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(\omega)\,\Phi(\omega) = F(\omega), \tag{17}$$

откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\mathscr{K}(\omega)}\,e^{i\omega t}\,d\omega. \tag{18}$$

Чтобы функция $\varphi(t)$, определяемая равенством (18), действительно была решением уравнения (16), $\mathscr{K}(\omega)$ должно удовлетворять определенным условиям.

Именно, *пусть* $f(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, *а* $K(t)$ *абсолютно интегрируема на всей оси* t. *Чтобы существовало решение* $\varphi(t)$ *уравнения* (16), *принадлежащее* $L_2(-\infty, +\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{F(\omega)}{\mathscr{K}(\omega)}$ *принадлежало* $L_2(-\infty, +\infty)$.

§ 18. Преобразование Лапласа

Функцией-оригиналом называется любая комплексно-значная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t (локально интегрируема).

2) Для всех отрицательных t $f(t) = 0$.

3) $f(t)$ с ростом t возрастает (по модулю) не быстрее показательной функции, т. е. существуют такие постоянные $M > 0$ и s, что для всех t

$$|f(t)| \leqslant Me^{st}. \tag{1}$$

Если существует число $s = s_1$, для которого выполняется неравенство (1), то оно будет выполняться и для всех бо́льших чисел $s \geqslant s_1$. Нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется неравенство (1),

$$s_0 = \inf s$$

называется *показателем роста* функции $f(t)$.

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать непрерывные функции-оригиналы.

Изображением функции $f(t)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{2}$$

То, что $F(p)$ есть изображение функции $f(t)$, будем обозначать так:

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Функция $F(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией от p.

В приложениях преобразования Лапласа к интегральным уравнениям большую роль играет теорема о свертке (теорема умножения).

Аналогично § 17, если функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ определены для всех t, $-\infty < t < +\infty$, то *сверткой* этих функций называется новая функция от t, обозначаемая символом $f * \varphi$ и определяемая равенством

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

если интеграл (3) существует.

Основные свойства свертки

1. Операция свертки коммутативна:

$$f * \varphi = \varphi * f.$$

2. Для функций-оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ операция свертки всегда выполнима и

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, \varphi(t-\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Действительно, произведение функций-оригиналов $f(\tau)\varphi(t-\tau)$, как функция от τ, является финитной функцией, т. е. обращается в нуль вне некоторого конечного интервала (в данном случае вне интервала $0 \leqslant \tau \leqslant t$). Для финитных функций операция свертки выполнима, и мы получаем формулу (4).

3. Свертка функций-оригиналов есть снова функция-оригинал.

Т е о р е м а о с в е р т к е (теорема умножения). *Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$, то свертка $f * \varphi$ имеет изображение $F(p)\cdot\Phi(p)$:*

$$f*\varphi=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot F(p)\cdot\Phi(p), \tag{5}$$

т. е. перемножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

В самом деле, свертка двух функций-оригиналов есть снова функция-оригинал.

Рассмотрим изображение интеграла $\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$:

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^{+\infty} e^{-pt}\left\{\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau\right\}dt. \tag{6}$$

Справа стоит двукратный интеграл, распространенный на сектор S плоскости (t, τ) (рис. 12). Меняя порядок интегрирования и полагая $t-\tau=z$, получим

$$\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_\tau^{+\infty} e^{-pt}\varphi(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}e^{-pz}\varphi(z)\,dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau \int_0^{+\infty} e^{-pz}\varphi(z)\,dz = F(p)\cdot\Phi(p),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода типа свертки:

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t K(t-s)\,\varphi(s)\,ds+f(t). \tag{7}$$

Предположим, что функции $K(t)$ и $f(t)$ непрерывны при $t\geqslant 0$ и являются функциями-оригиналами. Пусть

$$\begin{aligned}|K(t)|&\leqslant M_1e^{s_1t},\\ |f(t)|&\leqslant M_2e^{s_2t}.\end{aligned} \tag{8}$$

Как было доказано ранее, интегральное уравнение (7) имеет единственно непрерывное решение при любом значении λ.

Для решения $\varphi(t)$ уравнения (7) при $t\geqslant 0$ нетрудно получить оценку:

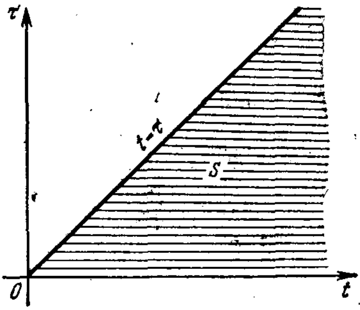

Рис. 12.

$$|\varphi(t)|\leqslant M_3e^{s_3t},\qquad \text{где } s_3>\max\{s_1,\ s_2\}.$$

Таким образом, решение $\varphi(t)$ уравнения (7) есть также функция-оригинал.

Пусть $\quad \varphi(t)\risingdotseq\Phi(p),\qquad K(t)\risingdotseq\mathscr{K}(p),\qquad f(t)\risingdotseq F(p).$

Применяя к обеим частям (7) преобразование Лапласа и пользуясь теоремой умножения, будем иметь

$$\Phi(p)=\lambda\mathscr{K}(p)\,\Phi(p)+F(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda\mathscr{K}(p)}. \tag{9}$$

Функция $\Phi(p)$ будет аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re}p=s>s_3$, так что знаменатель в (9) не может иметь корней в указанной полуплоскости. Используя формулу обращения преобразования Лапласа ([16]), находим решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (7):

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\frac{F(p)}{1-\lambda\mathscr{K}(p)}\,e^{pt}\,dp\qquad(s>s_3) \tag{10}$$

(интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_3$ и понимается в смысле главного значения).

На практике для отыскания оригинала $\varphi(t)$ по его изображению $\Phi(p)$ не всегда целесообразно использовать формулу обращения (10). Часто бывает легче найти оригинал, используя другие теоремы операционного исчисления.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = t + \int_0^t \sin(t-s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{11}$$

Решение. Пусть $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$. Как известно,

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2}, \qquad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Применяя к обеим частям (11) преобразование Лапласа, перейдем от уравнения (11) к уравнению в пространстве изображений

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1}\Phi(p).$$

Решая это последнее, найдем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.$$

Оригинал $\varphi(t)$ для $\Phi(p)$ будет решением уравнения (11):

$$\varphi(t) = t + \frac{t^3}{3!}.$$

Замечание. Выражению (9) для функции $\Phi(p)$ можно придать вид

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\frac{\mathscr{K}(p)}{1-\lambda\mathscr{K}(p)}F(p), \tag{12}$$

или

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\mathscr{R}(p,\ \lambda)F(p),$$

где

$$\mathscr{R}(p,\ \lambda) = \frac{\mathscr{K}(p)}{1-\lambda\mathscr{K}(p)}.$$

Решение (12) легко перевести назад в пространство оригиналов, после чего будем иметь

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda R(t,\ \lambda) * f(t), \tag{13}$$

или

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_0^t R(t-s;\ \lambda)f(s)\,ds,$$

где $R(t,\ \lambda)$ — резольвента уравнения (7).

Указанный метод решения уравнения (7) приложим к системам интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(t)=f_i(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^t K_{ij}(t-s)\,\varphi(s)\,ds \tag{14}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $K_{ij}(t)$, $f_i(t)$ — известные непрерывные функции-оригиналы.

Применяя к обеим частям (14) преобразование Лапласа, получим систему

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\mathscr{K}_{ij}(p)\,\Phi_j(p) \tag{15}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_i(p)$.

Пусть $\{\Phi_1(p),\ \ldots,\ \Phi_n(p)\}$ есть решение системы (15). Тогда система функций $\{\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)\}$, где $\varphi_j(t)\risingdotseq\Phi_j(p)$, будет решением системы интегральных уравнений (14).

Преобразование Лапласа может быть применено к решению нелинейных интегральных уравнений вида

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t\varphi(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau+f(t). \tag{16}$$

Пусть $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$, $f(t)\risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (16) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, получим

$$\Phi(p)=\lambda\Phi^2(p)+F(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda F(p)}}{2\lambda}$$

— операторные решения уравнения (16).

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\sin t.$$

Переходя в пространство изображений, придем к уравнению

$$\Phi(p)=\frac{1}{2}\Phi^2(p)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}\mp p\right).$$

Из условия $\Phi(p)\to 0$ при $\operatorname{Re} p\to+\infty$ выбираем

$$\Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\left(\sqrt{p^2+1}-p\right).$$

Решением интегрального уравнения будет $\varphi(t)=J_1(t)$ — бесселева функция 1-го порядка.

При решении некоторых видов интегральных уравнений оказывается полезной обобщенная теорема умножения (теорема Эфроса).

Теорема 4.2 *). *Пусть дано изображение* $F(p)\risingdotseq f(t)$ *и аналитические функции* $G(p)$ *и* $q(p)$ *такие, что*

$$G(p)\,e^{-\tau q(p)}\risingdotseq g(t,\tau); \tag{17}$$

тогда

$$F[q(p)]\cdot G(p)\risingdotseq\int_0^{+\infty} f(\tau)\,g(t,\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Действительно, изображение правой части (18)

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\,g(t,\tau)\,d\tau\risingdotseq\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left\{\int_0^{+\infty} f(\tau)\,g(t,\tau)\,d\tau\right\}dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} f(\tau)\,d\tau\int_0^{+\infty} g(t,\tau)\,e^{-pt}\,dt \tag{19}$$

---

*) Точные условия теоремы приведены в книге А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы», ДНТВУ, Харьков, 1937.

(предполагаем, что можно изменить порядок интегрирования). Внутренний интеграл в правой части (19) есть изображение $g(t, \tau)$. Следовательно, используя соотношение (17), можно написать

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\, g(t;\ \tau)\, d\tau \risingdotseq G(p) \int_0^{+\infty} f(\tau)\, e^{-q(p)\tau}\, d\tau = G(p)\, F[q(p)],$$

что и требовалось показать.

Если, в частности, принять $q(p) \equiv p$, то будем иметь

$$g(t;\ \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} G(p)$$

и по теореме запаздывания $g(t, \tau) = g(t-\tau)$. Формула (18) принимает вид

$$F(p)\, G(p) \risingdotseq \int_0^{+\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{t} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad (20)$$

(так как при $\tau > t$ $g(t-\tau) = 0$ в силу свойства функций-оригиналов), т. е. совпадает с обычной теоремой умножения.

Если $G(p) = 1/\sqrt{p}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то, как можно показать ([16]),

$$g(t;\ \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}. \qquad (21)$$

Поэтому, если известно, что $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\, d\tau. \qquad (22)$$

Если $G(p) = 1/p$, $q(p) = 1/p$, то

$$g(t;\ \tau) = J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right), \qquad (23)$$

где $J_0(z)$ — бесселева функция нулевого порядка.

Поэтому, если $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то по теореме Эфроса

$$\frac{1}{p}\, \Phi\left(\frac{1}{p}\right) \risingdotseq \int_0^{+\infty} \varphi(\tau)\, J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right) d\tau. \qquad (24)$$

Примеры. 1. Решить интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\varphi(\tau)\,d\tau = e^{-t} \qquad (t>0). \tag{25}$$

Решение. Пусть $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (25), получим, используя формулу (22):

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p+1},$$

так что

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2+1},$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t.$$

Функция $\varphi(t) = \cos t$ есть решение уравнения (25).

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = te^{-t} + 2\int_0^{+\infty} J_0\left(2\sqrt{t\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Решение. Пусть $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (26) преобразование Лапласа и учитывая теорему Эфроса, найдем

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + 2\frac{1}{p}\,\Phi\left(\frac{1}{p}\right). \tag{27}$$

Заменяя p на $1/p$, получим

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + 2p\Phi(p). \tag{28}$$

Из (27) и (28) находим

$$\Phi(p) = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{2}{3}\,\frac{p}{(p+1)^2}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(t-2).$$

Замечание. Пользуясь тем, что

$$t^{\frac{n}{2}} J_n\left(2\sqrt{t}\right) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}}e^{-1/p} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

и применяя теорему Эфроса, можно решать интегральные уравнения, ядро которых содержит бесселевы функции $J_n(z)$ 1-го рода порядка выше нулевого.

Решение интегро-дифференциальных уравнений

Линейным интегро-дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$a_0(t)\varphi^{(n)}(t)+a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t)+\cdots+a_n(t)\varphi(t)+$$
$$+\sum_{m=0}^{l}\int_0^t K_m(t,\ s)\varphi^{(m)}(s)\,ds=f(t). \quad (29)$$

Здесь $a_0(t), \ldots, a_n(t), f(t), K_m(t, s)$ $(m = 1, 2, \ldots, l)$ — известные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция.

При решении интегро-дифференциальных уравнений (29) для искомой функции $\varphi(t)$ ставятся начальные условия:

$$\varphi(0)=\varphi_0, \quad \varphi'(0)=\varphi_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}. \quad (30)$$

Пусть в (29) коэффициенты $a_k(t)$ — постоянные ($k = 1, 2, \ldots, n$), и пусть $K_m(t, s) = K_m(t-s)$ ($m = 1, 2, \ldots, l$), т. е. все K_m зависят лишь от разности аргументов $t-s$.

Не нарушая общности, можно считать $a_0 = 1$. Тогда уравнение (29) будет иметь вид

$$\varphi^{(n)}(t)+a_1\varphi^{(n-1)}(t)+\ldots+a_n\varphi(t)+$$
$$+\sum_{m=0}^{l}\int_0^t K_m(t-s)\ \varphi^m(s)\,ds=f(t). \quad (31)$$

Пусть, далее, функции $f(t)$ и $K_m(t)$ суть непрерывные функции-оригиналы, и пусть

$$f(t)\risingdotseq F(p), \qquad K_m(t)\risingdotseq \mathscr{K}_m(p) \qquad (m=1,\ 2, \ldots, l).$$

Тогда, как можно показать, функция $\varphi(t)$ будет также функцией-оригиналом. Пусть

$$\varphi(t)\risingdotseq \Phi(p).$$

Применим к обеим частям (31) преобразование Лапласа. Как известно ([16]),

$$\varphi^{(k)}(t) \doteq p^k\Phi(p) - p^{k-1}\varphi_0 - \ldots - \varphi_0^{(k-1)}.$$

По теореме умножения

$$\int_0^t K_m(t-s)\,\varphi^{(m)}(s)\,ds \doteq \mathcal{K}_m(p)\left(p^m\Phi(p) - \right.$$

$$\left. - p^{m-1}\varphi_0 - \ldots - \varphi_0^{(m-1)}\right) \quad (m = 1, 2, \ldots, l).$$

Поэтому уравнение (31) перейдет в следующее:

$$\Phi(p)\left[p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{m=0}^{l} \mathcal{K}_m(p)\,p^m\right] = A(p), \tag{32}$$

где $A(p)$ — некоторая известная функция от p.

Решая (32), находим $\Phi(p)$ — операторное решение задачи (30)—(31). Находя оригинал для $\Phi(p)$, получим решение $\varphi(t)$ интегро-дифференциального уравнения (31), удовлетворяющее начальным условиям (30).

Пример. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(t) + \varphi(t) + 2\int_0^t e^{2(t-s)}\varphi(s)\,ds = e^{2t}, \tag{33}$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Решение. Пусть $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$. Тогда, учитывая начальные условия (34), будем иметь

$$\varphi''(t) \doteq p^2\Phi(p).$$

Применяя к обеим частям (33) преобразование Лапласа, получим

$$p^2\Phi(p) + \Phi(p) + 2\,\frac{1}{p-2}\,\Phi(p) = \frac{1}{p-2},$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

Оригиналом для этой функции будет функция

$$\varphi(t) = te^t - e^t + 1.$$

Эта последняя является решением интегро-дифференциального уравнения (33), удовлетворяющим начальным условиям (34).

Замечание. Если функции $K_m(t-s)$ достаточно гладкие, то можно понизить порядок производных искомой функции, входящих под знаком интеграла, путем интегрирования по частям.

Интегральные уравнения вида

$$\varphi(t)=f(t)+\int_t^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad (t>0), \tag{35}$$

возникающие в ряде задач физики, также можно решать с помощью преобразования Лапласа. Установим предварительно теорему о свертке для выражений

$$\int_t^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{36}$$

Для преобразования Фурье

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s)\,\psi(s)\,ds\right\}=\sqrt{2\pi}\,G(\omega)\,\Psi(\omega), \tag{37}$$

где $G(\omega)$, $\Psi(\omega)$ — преобразования Фурье функций $g(t)$ и $\psi(t)$ соответственно.

Положим $g(t)=K_-(t)$, т. е.

$$g(t)=\begin{cases}0, & t>0,\\ K(t), & t<0,\end{cases}$$

$$\psi(t)=\varphi_+(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t>0,\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

Тогда (37) перепишется так:

$$\mathcal{F}\left\{\int_t^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds\right\}=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{K}_-(\omega)_{\mathcal{F}}\Phi_+(\omega)_{\mathcal{F}}. \tag{38}$$

Чтобы перейти от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа, заметим, что

$$F_{\mathcal{L}}(p)=\sqrt{2\pi}F_+(-ip)_{\mathcal{F}}.$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ означают, что берется изображение функции соответственно по Фурье или по Лапласу.

Следовательно, соотношение (38) дает

$$\mathscr{L}\left\{\int_{t}^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds\right\}=$$
$$=\sqrt{2\pi}\,\{\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}_{-}(-ip)_{\mathscr{F}}\,\Phi_{+}(-ip)_{\mathscr{F}}\}=$$
$$=\sqrt{2\pi}\mathscr{K}_{-}(-ip)_{\mathscr{F}}\,\Phi_{\mathscr{L}}(p). \quad (39)$$

Выразим теперь $\sqrt{2\pi}\mathscr{K}_{-}(-ip)_{\mathscr{F}}$ через преобразование Лапласа:

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{K}_{-}(-ip)_{\mathscr{F}}=\int_{-\infty}^{0} K(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_{0}^{+\infty} K(-t)\,e^{pt}\,dt. \quad (40)$$

Итак,

$$\mathscr{L}\left\{\int_{t}^{+\infty} K(t-s)\,\varphi(s)\,ds\right\}=\mathscr{K}(-p)\,\Phi_{\mathscr{L}}(p),$$

где

$$\mathscr{K}(-p)=\int_{0}^{+\infty} K(-t)\,e^{pt}\,dt. \quad (41)$$

Применяя теперь преобразование Лапласа к обеим частям (35), получим

$$\Phi(p)=F(p)+\mathscr{K}(-p)\,\Phi(p) \quad (42)$$

(индекс $\mathscr{L}$ опущен) или

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\mathscr{K}(-p)} \qquad (\mathscr{K}(-p)\neq 1). \quad (43)$$

Функция

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(p)}{1-\mathscr{K}(-p)}\,e^{pt}\,dp \quad (44)$$

будет частным решением уравнения (35).

Чтобы решение (42) или (44) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $\mathcal{K}(-p)$ и $F(p)$ перекрывались.

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(t)=e^{-t}+\int_{t}^{+\infty} e^{t-s}\varphi(s)\,ds. \tag{35'}$$

Здесь $f(t)=e^{-t}$, $K(t)=e^{t}$. Поэтому

$$F(p)=\frac{1}{p+1},\qquad \operatorname{Re} p>-1,$$

$$\mathcal{K}(-p)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{pt}\,dt=\frac{1}{1-p},\qquad \operatorname{Re} p<1.$$

Операторное уравнение (42) принимает в этом случае вид

$$\Phi(p)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{1-p}\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{p-1}{p(p+1)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{p-1}{p(p+1)}e^{pt}\,dp,\qquad -1<\gamma<1.$$

Применяя теорему Коши о вычетах, находим

$$\varphi(t)=\begin{cases}-1+2e^{-t}, & \gamma>0,\\ 2e^{-t}, & -1<\gamma<0.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что решением уравнения (35′) является функция

$$\varphi(t)=C+2e^{-t},$$

где $\varphi_0(t)\equiv C$ — решение соответствующего однородного уравнения

$$\varphi(t)=\int_{t}^{+\infty} e^{t-s}\varphi(s)\,ds.$$

Заметим, что уравнение (35′) сводится к дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t)=-2e^{-t},$$

откуда сразу получаем

$$\varphi(t)=2e^{-t}+C.$$

§ 19. Преобразование Меллина

Пусть функция $f(t)$ определена при положительных t и удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\, t^{\sigma-1}\, dt < +\infty$$

при надлежащем выборе числа σ.

Преобразованием Меллина функции $f(t)$ называется функция

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, t^{s-1}\, dt \qquad (s = \sigma + i\tau). \tag{1}$$

Формула обращения преобразования Меллина имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\, t^{-s}\, ds \qquad (t > 0), \tag{2}$$

где интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s, и понимается в смысле главного значения.

Идея двойственности, выражаемая формулами (1), (2), встречается уже в знаменитом мемуаре Римана о простых числах. Строго проведена она была Меллином, и формулы (1), (2) называют *формулами обращения Меллина.*

Частный случай их хорошо известен:

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt,$$

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \Gamma(s)\, t^{-s}\, ds \qquad (c > 0),$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

Преобразование Меллина тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и многие теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменных.

Пусть функция $\varphi(t)$ определена на всей оси t и интеграл

$$\Phi(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-pt}\,dt$$

сходится хотя бы на одной прямой $\operatorname{Re} p=\sigma$. Функцию $\Phi(p)$ называют *двусторонним преобразованием Лапласа* функции $\varphi(t)$.

Если обозначить через $\Phi(p)$ двустороннее преобразование Лапласа функции $\varphi(t)=f(e^{-t})$, то будем иметь

$$\Phi(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,e^{-pt}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(e^{-t})\,e^{-pt}\,dt=$$

$$=-\int\limits_{+\infty}^{0}f(u)\,u^{p}\,\frac{du}{u}=\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\,u^{p-1}\,du=F(p)$$

— преобразование Меллина функции $f(t)$.

Это соотношение позволяет выводить формулы преобразования Меллина из формул преобразования Лапласа.

Формула свертки для преобразования Меллина имеет следующий вид ([40]):

$$M\left\{\int\limits_{0}^{+\infty}f(t)\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}=F(s)\,\Phi(s). \qquad (3)$$

Отсюда видно, что преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений вида

$$\varphi(x)=f(x)+\int\limits_{0}^{+\infty}K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t}\qquad (t>0). \qquad (4)$$

В самом деле, пусть функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ допускают преобразование Меллина и пусть

$$\varphi(x)\to\Phi(s),\qquad f(x)\to F(s),\qquad K(x)\to\mathscr{K}(s),$$

причем области аналитичности $F(s)$ и $\mathscr{K}(s)$ имеют общую полосу $\sigma_1<\operatorname{Re} s=\sigma<\sigma_2$.

Применяя к обеим частям уравнения (4) преобразование Меллина и используя формулу свертки (3), получим

$$\Phi(s)=F(s)+\mathscr{K}(s)\,\Phi(s),$$

откуда

$$\Phi(s)=\frac{F(s)}{1-\mathcal{K}(s)}, \quad \mathcal{K}(s)\neq 1.$$

Это — операторное решение уравнения (4). По формуле обращения (2) получаем решение $\varphi(x)$ этого уравнения:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\mathcal{K}(s)}\,x^{-s}\,ds.$$

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x)=e^{-\alpha x}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x/t}\varphi(t)\,\frac{dt}{t} \qquad (\alpha>0). \tag{5}$$

Имеем

$$M\{e^{-\alpha x}\}=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}x^{s-1}\,dx=$$

$$=\alpha^{-s}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-z}z^{s-1}\,dz=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^{s}}\equiv F(s), \quad \operatorname{Re}s>0,$$

$$M\left\{\frac{1}{2}\,e^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\,\Gamma(s)\equiv\mathcal{K}(s), \qquad \operatorname{Re}s>0,$$

так что области аналитичности $F(s)$ и $\mathcal{K}(s)$ совпадают. Операторное уравнение, отвечающее уравнению (5), будет иметь вид

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^{s}}+\frac{1}{2}\,\Gamma(s)\,\Phi(s),$$

откуда

$$\Phi(s)=\frac{\Gamma(s)}{\alpha^{s}\left[1-\frac{1}{2}\,\Gamma(s)\right]}.$$

По формуле обращения (2) находим

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{1-\frac{1}{2}\,\Gamma(s)}\,\frac{ds}{(\alpha x)^{s}}, \quad \sigma>0. \tag{6}$$

Для вычисления интеграла (6) применим теорему Коши о вычетах. При $\alpha x>1$ в контур интегрирования включаем полуокружность, лежащую в правой полуплоскости. В этом случае единственная особенность подынтегральной функции находится в точке $s = 3$, в которой

$$1 - \frac{1}{2}\Gamma(s) = 0.$$

Тогда

$$\varphi(x) = \frac{2}{(\alpha x)^3 \psi(3)}, \qquad \alpha x > 1,$$

где $\psi(3)$ — логарифмическая производная Г-функции в точке $s = 3$:

$$\psi(3) = \frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)} = \frac{3}{2} - \gamma \quad (\gamma \text{ — постоянная Эйлера}).$$

При $\alpha x < 1$ особенности подынтегральной функции суть отрицательные корни функции $1 - \frac{1}{2}\Gamma(s)$, так что

$$\varphi(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\psi(s_k)}, \qquad \alpha x \leqslant 1,$$

где $\psi(s_k)$ — значения логарифмической производной $\Gamma(s)$ в точках $s = s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Итак,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(3-2\gamma)(\alpha x)^3}, & \alpha x > 1, \\ -2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\psi(s_k)}, & \alpha x \leqslant 1. \end{cases}$$

§ 20. Метод Винера—Хопфа

Этот метод был разработан приблизительно в 1931 г. для решения интегральных уравнений специального вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^{+\infty} K(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad -\infty < x \leqslant +\infty, \tag{1}$$

называемых *уравнениями типа Винера — Хопфа*.

Отличительная особенность этих уравнений — ядро зависит от разности аргументов, а интервал интегрирования полубесконечный. Такие уравнения возникают всякий раз, когда мы имеем дело с граничными задачами, где границы являются полубесконечными (например, задача о дифракции волн на полуплоскости).

В методе Винера—Хопфа производится аналитическое продолжение преобразований Фурье по переменной преобразования с вещественной оси в комплексную плоскость.

Рассмотрим преобразование Фурье функции $f(x)$

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{ikx}\,dx \tag{2}$$

для комплексных $k=\sigma+i\tau$.

Тогда

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-\tau x}e^{i\sigma x}\,dx. \tag{3}$$

Важным является следующее свойство преобразования Фурье.

Пусть абсолютно интегрируемо произведение $f(x)\,e^{b|x|}$, где $b>0$ — фиксированная постоянная. В этом случае преобразование Фурье $F(k)$ функции $f(x)$ является аналитической функцией в полосе $|\tau|<b$ комплексной k-плоскости. Действительно,

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-\tau x}e^{i\sigma x}\,dx \tag{3}$$

и интеграл (3), определяющий $F(k)$, сходится при $|\tau|\leqslant b$ равномерно относительно k. Следовательно, $F(k)$ аналитична во всякой внутренней точке k полосы $-b<\tau<b$.

Можно утверждать, что функция $F(k)$ при $\sigma\to\pm\infty$ стремится к нулю равномерно по τ, $|\tau|\leqslant b$.

Аналогично показывается, что если $|f(x)|<Ae^{x\tau_-}$ при $x\to+\infty$, то функция

$$F_+(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(x)\,e^{ikx}\,dx \qquad (k=\sigma+i\tau)$$

аналитична в полуплоскости $\tau > \tau_-$; если $|f(x)| < Be^{x\tau_+}$ при $x \to -\infty$, то функция

$$F_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(x)\, e^{ikx}\, dx$$

аналитична в полуплоскости $\tau < \tau_+$. (Здесь A, B, τ_-, τ_+ — действительные постоянные.)

Характерной особенностью любого решения по методу Винера — Хопфа является разложение функции комплексной переменной на сумму двух функций. Справедлива

Теорема 4.3. *Пусть $F(k)$ — аналитическая функция $k = \sigma + i\tau$ в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и такая, что $|F(\sigma + i\tau)| < C|\sigma|^{-p}$, $p > 0$, при $|\sigma| \to \infty$, причем это неравенство выполняется равномерно для всех τ в полосе $\tau_- + \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \tau_+ - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$*

$$F(k) = F_+(k) + F_-(k), \tag{4}$$

где функция $F_+(k)$ аналитична в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а функция $F_-(k)$ аналитична в полуплоскости $\tau < \tau_+$. При этом

$$\left.\begin{aligned} F_+(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{F(t)}{t-k}\, dt, \\ F_-(k) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{F(t)}{t-k}\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В основе этого представления лежит теорема об интегральном представлении функции, аналитической в некотором кольце. Функция $F(k)$, аналитическая в кольце $0 \leqslant r < |k - k_0| < R < +\infty$, представляется с помощью интегральной формулы Коши в виде суммы двух интегралов, причем контуром интегрирования служит граница кольца аналитичности $F(k)$. Один из интегралов берется по внешней окружности, другой — по внутренней (для полосы им отвечают интегралы по прямым (I) и (II)) (рис. 13, *а*, *б*).

Функция, представленная интегралом вдоль внешней окружности, аналитична внутри этой окружности, а функция, представленная интегралом по внутренней окружности, аналитична вне этой окружности. Переходя к случаю полосы и помещая центр «кольца» в точку $k = +i\infty$, получаем требуемое представление.

Рассмотрим теперь *факторизацию* произвольной функции $\Phi(k)$, т. е. представление этой функции в виде произведения

$$\Phi(k) = \Phi_+(k)\,\Phi_-(k),$$

где Φ_+ и Φ_- аналитичны и не имеют нулей в верхней и нижней полуплоскостях $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$ соответственно.

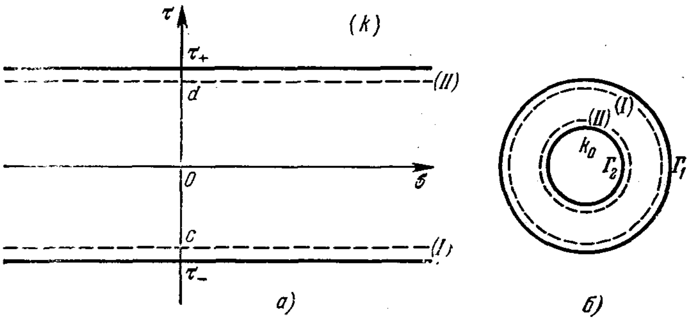

Рис. 13.

Ясно, что такое представление эквивалентно разложению функции

$$\ln\Phi(k) = \ln\Phi_+(k) + \ln\Phi_-(k)$$

на сумму двух функций, каждая из которых аналитична в соответствующей области.

Иногда такое представление удается угадать; например, если

$$\Phi(k) = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0,$$

и на плоскости k сделаны соответствующие разрезы, то можно взять

$$\Phi_+(k) = (k + \alpha)^{1/2}$$

(аналитична и не имеет нулей при $\tau > -\alpha_2$),

$$\Phi_-(k) = (k - \alpha)^{1/2}$$

(аналитична и не имеет нулей при $\tau < \alpha_2$).

Такое представление, очевидно, не единственно, так как можно одновременно умножить Φ_+ и разделить Φ_- на любую целую функцию, не имеющую нулей.

Приведем теорему, устанавливающую возможность факторизации для весьма широкого класса функций.

Теорема 4.4. *Если функция* $\ln \Phi(k)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4.3 (это означает, в частности, что функция $\Phi(k)$ аналитична и не имеет нулей в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < +\infty$) *и* $\Phi(k) \to 0$ *при* $\sigma \to \pm\infty$ *в полосе* $\tau_- < \tau < \tau_+$, *то существует представление* $\Phi(k) = \Phi_+(k)\Phi_-(k)$, *где* $\Phi_+(k)$ *и* $\Phi_-(k)$ *аналитичные, ограниченные и не имеющие нулей функции при* $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$ *соответственно.*

Для доказательства теоремы 4.4 применим теорему 4.3 к функции $F(k) = \ln \Phi(k)$. Имеем

$$\ln \Phi(k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{\ln \Phi(t)}{t-k}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{\ln \Phi(t)}{t-k}\,dt = F_+(k) + F_-(k).$$

Здесь c, d — любые числа, удовлетворяющие условиям $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$. Интеграл для $F_+(k)$ сходится для всех k в полуплоскости $\tau > c$. Так как c можно выбрать сколь угодно близким к τ_-, то $F_+(k)$ ограничена и аналитична при $\tau > \tau_-$. Аналогично, функция $F_-(k)$ аналитична и ограничена при $\tau < \tau_+$. Полагая

$$\Phi_+(k) = e^{F_+(k)}, \qquad \Phi_-(k) = e^{F_-(k)},$$

будем иметь

$$\ln \Phi_+(k) + \ln \Phi_-(k) = \ln \Phi(k),$$

или

$$\Phi(k) = \Phi_+(k)\,\Phi_-(k).$$

Из свойств $F_+(k)$ следует, что функция $\Phi_+(k)$ аналитична, ограничена и не имеет нулей при $\tau > \tau_-$. Аналогично, функция $\Phi_-(k)$ аналитична, ограничена и не имеет нулей при $\tau < \tau_+$.

Таким образом, построив функции $\Phi_+(k)$ и $\Phi_-(k)$, обладающие требуемыми свойствами, мы доказали теорему 4.4.

Отметим, что требования, накладываемые на функцию $\Phi(k)$, можно существенно ослабить.

Рассмотрим сначала однородное интегральное уравнение типа Винера — Хопфа

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{6}$$

(Полагаем для простоты $\lambda = 1$, поскольку это здесь несущественно: параметр λ можно считать входящим как множитель в ядро $K(x)$.)

Введем функции $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$, положив

$$\varphi_+(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x > 0, \\ \varphi(x) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (6) запишется так:

$$\varphi_+(x) + \varphi_-(x) = \int_0^{+\infty} K(x-y)\,\varphi_+(y)\,dy = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\,\varphi_+(y)\,dy. \tag{7}$$

Теперь можно φ_+ и φ_- выразить через $\varphi_+(x)$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_-(x) &= \int_0^{+\infty} K(x-y)\,\varphi_+(y)\,dy \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \varphi_+(x) &= \int_0^{+\infty} K(x-y)\,\varphi_+(y)\,dy \quad \text{при} \quad x > 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Пусть функция $\mathscr{K}(k)$, являющаяся преобразованием Фурье ядра $K(x)$, аналитична в полосе

$$\tau_- < \operatorname{Im} k < \tau_+.$$

Это соответствует асимптотическому поведению $K(x)$:

$$K(x) \simeq e^{x\tau_-} \quad \text{при} \quad x \to +\infty;$$

$$K(x) \simeq e^{x\tau_+} \quad \text{при} \quad x \to -\infty.$$

Мы рассматриваем решения уравнения (6), которые ведут себя, как $e^{\mu x}$ при $x \to +\infty$ (где $\mu < \tau_-$). Условие это необходимо для сходимости интеграла, входящего в интегральное уравнение. Асимптотическое поведение $\varphi_-(x)$ при $x \to -\infty$ можно установить непосредственно из уравнения (8):

$$\varphi_-(x) \simeq \int_0^{+\infty} e^{(x-y)\tau_+}\varphi_+(y)\,dy = e^{x\tau_+}\int_0^{+\infty} e^{-y\tau_+}\varphi_+(y)\,dy.$$

Отсюда видно, что необходимо $\mu < \tau_+$ и $\varphi_-(x)$ должна вести себя при $x \to -\infty$, как $e^{x\tau_+}$. Обозначая через $\Phi_+(k)$ и $\Phi_-(k)$ преобразования Фурье функций $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ соответственно, заключаем, что Φ_+ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k = \tau > \mu$, а Φ_- будет аналитична в полуплоскости $\tau < \tau_+$.

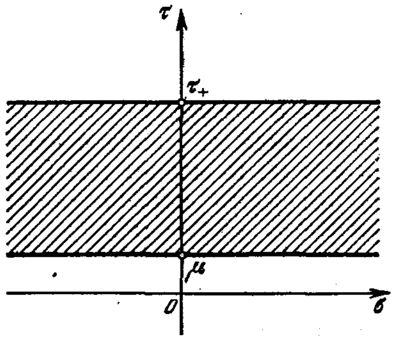

Рис. 14.

Значит, существует полоса $\mu < \tau < \tau_+$ (рис. 14), в которой аналитичны все преобразования $\mathscr{K}(k)$, Φ_+, Φ_-. Этот результат является основным в методе Винера — Хопфа.

Применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения (7) и используя теорему о свертке, получим

$$\Phi_+ + \Phi_- = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k)\,\Phi_+,$$

или

$$\Phi_+\left(1 - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k)\right) + \Phi_- = 0. \tag{9}$$

Функция $1 - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k)$ аналитична в полосе

$$\tau_- \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant \tau_+.$$

Попытаемся разложить ее на множители Γ_+ и $1/\Gamma_-$ так, чтобы

$$1-\sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k)=\frac{\Gamma_+(k)}{\Gamma_-(k)}. \qquad (10)$$

Эти множители должны быть аналитичны и отличны от нуля в полуплоскостях $\tau>\mu$ и $\tau<\tau_+$ соответственно. Обычно дополнительно требуют, чтобы Γ_+ и Γ_- имели алгебраический рост, а не экспоненциальный. Возможность такого разложения была показана Винером и Хопфом.

В каждой данной задаче это разложение на множители должно быть фактически осуществлено.

Пусть такое разложение выполнено. Тогда уравнение (9) можно переписать так:

$$\Phi_+\Gamma_+=-\Phi_-\Gamma_-. \qquad (11)$$

Левая часть этого соотношения аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} k=\tau>\mu$, в то время как правая часть аналитична в полуплоскости $\tau<\tau_+$. Поскольку они имеют общую область аналитичности $\mu<\tau<\tau_+$, в которой они равны, то можно утверждать, что $(-\Phi_-\Gamma_-)$ является аналитическим продолжением $\Phi_+\Gamma_+$ в нижнюю полуплоскость. Следовательно, функция $\Phi_+\Gamma_+$ аналитична во всей плоскости комплексной переменной k и потому является целой функцией $P(k)$:

$$\Phi_+\Gamma_+=P(k),$$

откуда

$$\Phi_+=\frac{P(k)}{\Gamma_+(k)}.$$

Чтобы найти вид $\Phi_+\Gamma_+$, надо еще учесть поведение этой функции при больших $|k|$. Условие интегрируемости $\varphi_+(x)$ в начале координат приводит к асимптотике

$$\Phi_+(k)\simeq 0 \quad \text{при} \quad |k|\to\infty.$$

Пусть $\Gamma_+(k)$ уже выбрана так, что имеет алгебраический рост, т. е. при больших k ведет себя, как полином. Тогда $P(k)$ будет представлять собой полином степени меньшей, чем порядок роста $\Gamma_+(k)$ (так как $\frac{P(k)}{\Gamma_+(k)}$ должно стремиться к нулю при $|k|\to+\infty$). Этим определяется вид $P(k)$.

Таким образом, учитывая (11), находим

$$\Phi_+(k) = \frac{P(k)}{\Gamma_+(k)}, \qquad \Phi_-(k) = -\frac{P(k)}{\Gamma_-(k)},$$

откуда по формулам обращения получаем

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Gamma_+(k)} e^{-ikx}\, dk, \qquad \mu < \tau < \tau_+,$$

$$\varphi_-(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} \frac{P(k)}{\Gamma_-(k)} e^{-ikx}\, dk, \qquad \mu < \tau < \tau_+.$$

Этим завершается решение интегрального уравнения Винера — Хопфа (6). Заметим, что $\Phi_+(k)$ и $\Phi_-(k)$ определяются с точностью до некоторых постоянных. Последние можно определить из физического смысла задачи или подстановкой решения в исходное интегральное уравнение (6).

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-|x-y|} \varphi(y)\, dy. \tag{12}$$

Здесь ядро $K(x) = e^{-|x|}$. Его преобразование Фурье

$$\mathscr{K}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+k^2)},$$

так что $\mathscr{K}(k)$ аналитично в полосе

$$-1 < \operatorname{Im} k < 1. \qquad (\tau_- = -1,\ \tau_+ = 1).$$

Выражение $1 - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k)$ в данном случае равно

$$1 - \sqrt{2\pi}\,\mathscr{K}(k) = \frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{\Gamma_+}{\Gamma_-}.$$

Представим функцию $\dfrac{k^2-1}{k^2+1}$ в виде

$$\frac{k^2-1}{k+i} \cdot \frac{1}{k-i}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_+ = \frac{k^2-1}{k+i}, \qquad \Gamma_- = k - i.$$

Функция Γ_- аналитична при $\operatorname{Im} k > -1$. Функция $\Gamma_-(k)$ аналитична и не обращается в нуль при $\operatorname{Im} k \leqslant 1$. Существует полоса $0 \leqslant \operatorname{Im} k \leqslant 1$, в которой обе функции, Γ_- и Γ_+, аналитичны и отличны от нуля. Имеем

$$\Phi_+(k) = \frac{P(k)}{\Gamma_+(k)} = \frac{P(k)(k+i)}{k^2-1}.$$

Функция $P(k)$ должна быть аналитичной во всей конечной плоскости комплексной переменной k, а $\Phi_+(k) \to 0$ при $|k| \to +\infty$. Из этого условия следует, что в данном примере $P(k)$ должна равняться постоянной C. Она не может расти так быстро, как k, ибо тогда $\Phi_+(k) \to 1$ при $|k| \to \infty$. Она не может и убывать, так как отсюда вытекало бы существование особенности у функции $P(k)$ (полюса или точки разветвления) в конечной части комплексной плоскости. Итак, $P(k) = C = \text{const}$ и

$$\Phi_+(k) = \frac{C(k+i)}{k^2-1}, \qquad \Phi_-(k) = -\frac{C}{k-i}.$$

Отсюда

$$\varphi_+(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\tau}^{+\infty+i\tau} \frac{k+i}{k^2-1} e^{-ikx}\, dk, \qquad 0<\tau<1.$$

Так как в этом выражении $x > 0$, то, замыкая контур интегрирования полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости, и используя теорему Коши о вычетах, находим

$$\varphi_+(x) = A(\cos x + \sin x), \qquad x>0. \tag{13}$$

Таким же способом находим

$$\varphi_-(x) = Ae^x, \qquad x<0.$$

Исходя непосредственно из интегрального уравнения, легко установить, что при $x > 0$ функция $\varphi = \varphi_+$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + \varphi = 0, \qquad x > 0,$$

для которого (13) является решением.

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение Винера — Хопфа

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^{+\infty} K(x-y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{1}$$

Применяя преобразование Фурье, приходим к соотношению

$$\Phi_+(k) + \Phi_-(k) = F_+(k) + F_-(k) + \sqrt{2\pi}\,\lambda \mathscr{K}(k)\,\Phi_+(k). \tag{14}$$

Представляя $1-\sqrt{2\pi}\,\lambda\,\mathcal{K}(k)$ в виде $\frac{\Gamma_+(k)}{\Gamma_-(k)}$, перепишем равенство (14) так:

$$\Phi_+\Gamma_+ + \Gamma_-(\Phi_- - F_-) - \Gamma_- F_+ = 0. \tag{15}$$

Первые два слагаемых имеют нужный вид. Третье слагаемое такого вида не имеет. Пусть существует полоса, в которой аналитичны и Γ_- и F_+. Тогда мы можем применить разложение (4):

$$\Gamma_- F_+ = G_+(k) + G_-(k). \tag{16}$$

Соотношение (15) перепишется после этого так:

$$\Phi_+\Gamma_+ - G_+ = -\Gamma_-(\Phi_- - F_-) + G_- \equiv P(k). \tag{17}$$

Левая часть аналитична в некоторой полуплоскости $\operatorname{Im} k > \tau_0$, правая — в полуплоскости $\operatorname{Im} k < \tau_1$. Существует полоса аналитичности, общая для них, так что правая часть (17) является аналитическим продолжением левой части в нижнюю полуплоскость. Функция $P(k)$ выбирается как целая функция; характер ее определяется асимптотическим поведением при $|k| \to \infty$ одного из определяющих ее выражений. Определив $P(k)$, находим

$$\Phi_+(k) = \frac{P(k) + G_+(k)}{\Gamma_+(k)}$$

и по формуле обращения получаем $\varphi_+(x)$.

ГЛАВА V

ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Понятие вполне непрерывного оператора возникло при изучении интегральных операторов, которые и в настоящее время являются наиболее важными примерами вполне непрерывных операторов. Это понятие было введено Д. Гильбертом и затем разрабатывалось его школой (Э. Шмидтом, Ф. Риссом, Г. Вейлем и др.).

Фундаментальные исследования этих математиков показали, что основные классические свойства интегральных операторов (например, теоремы Фредгольма) связаны не с интегральной природой этих операторов, а с их полной непрерывностью.

§ 21. Компактность множества. Критерий компактности

Определение. *Множество D, расположенное в метрическом пространстве X, называется компактным, если всякая последовательность элементов множества D содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Если пределы указанных последовательностей принадлежат D, то множество D называется *компактным в себе*; если же эти пределы принадлежат пространству X, не принадлежа, быть может, множеству D, то D называется *компактным в пространстве* X.

Если каждое бесконечное подмножество метрического пространства X содержит сходящуюся к некоторому элементу из X последовательность, то пространство X называется компактным или просто *компактом.* Ясно, что компакт есть полное метрическое пространство.

Примеры. 1. Пусть $D = [0, 1] \subset R^1$. В силу теоремы Больцано — Вейерштрасса ([27]) множество D — компактное в себе множество. Интервал $(0, 1)$ компактен в R^1, но не компактен в себе.

2. Пусть $X = R^1$ (числовая прямая). Пространство X некомпактно: последовательность натуральных чисел 1, 2, . . ., n, . . . не имеет предела. Однако в силу теоремы Больцано — Вейерштрасса всякое ограниченное множество в пространстве R^1 компактно.

Вообще, в n-мерном евклидовом пространстве всякое ограниченное бесконечное множество компактно.

Компактность ограниченных множеств есть характеристическое свойство конечномерных линейных нормированных пространств. Именно, для того чтобы подпространство L линейного нормированного пространства E было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное множество элементов из L было компактно.

Приведем критерии компактности множеств в некоторых функциональных пространствах.

Критерий компактности в $C\,[a,\ b]$

Определение. *Множество D функций $x(t) \in C\,[a,\ b]$ называется равномерно ограниченным, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $|x(t)| \leqslant M$ для всех $x(t) \in D$ при любом $t \in [a,\ b]$.*

Множество D функций $x(t) \in C\,[a,\ b]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, зависящее только от ε, такое, что для любых t_1 и t_2 из $[a,\ b]$, удовлетворяющих неравенству $|t_2 - t_1| < \delta$, и для любой функции из рассматриваемого множества имеет место соотношение

$$|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon.$$

Теорема (Арцела). *Для того чтобы множество D функций $x(t) \in C\,[a,\ b]$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Можно сформулировать простое достаточное условие компактности множества D функций $x(t) \in C\,[a,\ b]$.

Если для множества D функций $x(t)$, дифференцируемых на отрезке $[a,\ b]$, существуют такие постоянные M_0 и M_1, что для всех $x(t) \in D$ выполнены неравенства

$$|x(t)| \leqslant M_0, \quad |x'(t)| \leqslant M_1 \qquad \forall t \in [a,\ b],$$

то множество D компактно в $C\,[a,\ b]$.

В самом деле, семейство D равномерно ограничено по условию. Применяя формулу Лагранжа, имеем

$$|x(t_2)-x(t_1)|=|x'(\xi)|\,|t_2-t_1|\leqslant M_1|t_2-t_1|,$$

откуда следует, что семейство D равностепенно непрерывно. Из теоремы Арцела следует, что D компактно в $C[a, b]$.

Упражнение. Будет ли компактным в $C[0, 1]$ семейство функций $\{t^n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$?

Критерий компактности в $L_p[a, b]$

Пусть $x(t)\in L_p[a, b]$. Продолжим функцию $x(t)$ нулем за пределы отрезка $[a, b]$. Тогда для любого отрезка $[A, B]$ числовой оси интеграл

$$\int_A^B |x(t)|^p\,dt$$

имеет смысл.

Теорема 5.1 (М. Рисса). *Для того чтобы семейство D функций $x(t)\in L_p[a, b]$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограниченным по норме и равномерно непрерывным в среднем, т. е. чтобы*

1) $\displaystyle\int_a^b |x(t)|^p\,dt\leqslant M^p;$

2) $\displaystyle\int_a^b |x(t+h)-x(t)|^p\,dt<\varepsilon^p,$

при $0<h<\delta(\varepsilon)$ сразу для всех функций семейства.

§ 22. Вполне непрерывные операторы

Определение. *Линейный оператор A, определенный на линейном нормированном пространстве E_x, со значениями в линейном нормированном пространстве E_y, называется вполне непрерывным, если он отображает всякое ограниченное множество пространства E_x в компактное множество пространства E_y.*

Пусть, например, $E_x = E_y = C[a, b]$ и

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

где $K(t, s)$ — непрерывное в квадрате $Q\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$ ядро. Покажем, что оператор A вполне непрерывен. Пусть $\{x(t)\}$ — ограниченное множество функций из $C[a, b]$:

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \leqslant m.$$

Тогда:

1) Функции

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

равномерно ограничены. Действительно, $\forall t \in [a, b]$ $|y(t)| \leqslant Mm(b-a)$, где $M = \max\limits_{a \leqslant t,\ s \leqslant b} |K(t, s)|$.

2) Функции $y(t)$ равностепенно непрерывны. В самом деле, возьмем любое $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности ядра $K(t, s)$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|K(t_2, s) - K(t_1, s)| < \frac{\varepsilon}{m(b-a)}$$

при $|t_2 - t_1| < \delta$ и любых $s \in [a, b]$. Но тогда

$$|y(t_2) - y(t_1)| \leqslant \int_a^b |K(t_2, s) - K(t_1, s)|\, |x(s)|\, ds < \varepsilon,$$

как только $|t_2 - t_1| < \delta$ сразу для всех функций $y(t)$. Последнее означает равностепенную непрерывность семейства функций $\{y(t) = Ax(t)\}$.

В силу теоремы Арцела множество функций $\{y(t)\}$ компактно в пространстве $C[a, b]$. Значит, согласно определению, интегральный оператор

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ вполне непрерывен.

Можно показать, что оператор

$$Ax = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds,$$

где

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds = B^2 < +\infty,$$

вполне непрерывен как оператор, действующий из $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$.

Можно показать также, что *вполне непрерывным является оператор Фредгольма с ядром, имеющим слабую особенность.*

Упражнение. Показать, что всякий линейный ограниченный оператор в конечномерном пространстве вполне непрерывен.

Отметим некоторые свойства вполне непрерывных операторов.

1) Всякий вполне непрерывный оператор является ограниченным. Однако не всякий ограниченный оператор является вполне непрерывным. Простейший пример: единичный оператор I в бесконечномерном пространстве не является вполне непрерывным. Покажем это. Пусть X — множество последовательностей вещественных чисел $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < +\infty.$$

Если $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ и $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots\}$, то определим расстояние между этими элементами по формуле

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Можно показать, что так введенное расстояние удовлетворяет аксиомам метрики.

Полученное метрическое пространство называется пространством l_p. Рассмотрим, в частности, пространство l_2, являющееся линейным нормированным пространством.

Это пространство некомпактно. Более того, в нем имеются ограниченные некомпактные множества, например замкнутый единичный шар $\bar{S} = \bar{S}(\theta, 1)$. Действительно, рассмотрим последовательность точек из $\bar{S}$:

$$e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}, \quad e_2 = \{0, 1, 0, \ldots\}, \ldots$$

Очевидно, $\| e_i - e_j \| = \sqrt{2}$ при $i \neq j$, так что последовательность $\{e_i\}$ и любая ее подпоследовательность не сходятся, что и доказывает некомпактность $\bar{S}$. Так как единичный оператор I отображает единичный шар на себя, а последний некомпактен, то, следовательно, I не является вполне непрерывным в бесконечномерном пространстве.

2) Если A и B — вполне непрерывные операторы, то $\alpha A + \beta B$, где α, β — числа, также вполне непрерывный оператор.

3) Пусть A — вполне непрерывный оператор, отображающий бесконечномерное банахово пространство E в себя, и B — произвольный линейный ограниченный оператор, действующий в том же пространстве. Тогда AB и BA — вполне непрерывные операторы.

В самом деле, оператор B преобразует произвольное ограниченное множество $D \subset E$ в ограниченное множество $B(D) \subset E$, а это множество оператор A преобразует в компактное множество $A(B(D))$. Следовательно, оператор AB переводит любое ограниченное множество в компактное и потому вполне непрерывен.

Упражнение. Показать, что оператор BA вполне непрерывен.

Из того, что единичный оператор I не вполне непрерывен, получаем важное следствие.

Вполне непрерывный оператор A в бесконечномерном пространстве не может иметь ограниченного обратного оператора A^{-1}.

4) Если последовательность вполне непрерывных операторов $\{A_n\}$, отображающих пространство E_x в полное пространство E_y равномерно сходится к оператору A, т. е. $\| A - A_n \| \to 0$, то A также вполне непрерывный оператор (см. [19]).

Пусть E — бесконечномерное (вещественное) банахово пространство. Последовательность элементов $e_1, \ldots, e_n, \ldots$

из E называется *базисом* этого пространства, если любой элемент $x \in E$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i,$$

где ξ_i — вещественные числа.

Пространство E называют в этом случае *банаховым пространством с базисом*.

Рассмотрим вполне непрерывный оператор A, отображающий банахово пространство E с базисом само в себя. Оказывается, что оператор A можно разложить на сумму двух линейных операторов:

$$A = A_1 + A_2,$$

где оператор A_1 — конечномерный в том смысле, что для любого $x \in E$ элемент $A_1 x$ принадлежит конечномерному подпространству, определяемому базисными элементами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а норма второго не превосходит наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, которое можно выбрать сколь угодно малым:

$$\|A_2\| < \varepsilon.$$

Поэтому говорят, что вполне непрерывные операторы в пространстве с базисом *почти конечномерны*. Это свойство часто принимают в качестве определения вполне непрерывного оператора:

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если он может быть с любой точностью аппроксимирован конечномерным, т. е. может быть представлен в виде суммы конечномерного оператора и оператора с как угодно малой нормой.

Интегральный оператор с вырожденным непрерывным ядром

$$A_1 x = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, b_k(s)\, x(s)\, ds$$

является конечномерным (и, значит, вполне непрерывным): он отображает все пространство $C[a, b]$ на подпространство линейных комбинаций функций $a_1(t)$, $a_2(t), \ldots, a_n(t)$.

Рассмотренное в § 14 представление произвольного непрерывного ядра $K(t, s)$ в виде суммы вырожденного ядра и ядра с малой нормой эквивалентна, таким образом, представлению вполне непрерывного интегрального оператора Фредгольма в виде суммы конечномерного оператора и оператора с малой нормой.

§ 23. Уравнения Рисса—Шаудера

Уравнениями Рисса—Шаудера называют уравнения вида

$$\varphi(t) = \lambda A\varphi + f, \tag{1}$$

где A — вполне непрерывный оператор. Такие уравнения удобно изучать в гильбертовом пространстве H.

Пусть H — линейное пространство с умножением на комплексные числа, каждой паре элементов которого поставлено в соответствие комплексное число (x, y), называемое *скалярным произведением* элементов x и y и обладающее свойствами:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, в частности, (x, x) вещественно;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$ для любого комплексного числа λ;
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Если H — линейное пространство с умножением на действительные числа, то скалярное произведение предполагается действительным.

По скалярному произведению в H можно ввести норму

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

после чего H становится линейным нормированным пространством.

Если H бесконечномерно и полно по введенной норме, то оно называется гильбертовым пространством (комплексным или действительным).

Таким образом, всякое гильбертово пространство является банаховым. Для любых элементов x, y гильбертова пространства справедливо неравенство Буняковского—Шварца:

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Примеры. 1. Пространство l_2 становится гильбертовым, если положить

$$(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\overline{\eta}_k.$$

2. Пространство $L_2\ [a,\ b]$ комплекснозначных функций становится гильбертовым, если положить

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Определение. *Два элемента x и y гильбертова пространства H называются ортогональными, если*

$$(x,\ y)=0.$$

Сопряженный оператор

Пусть H — гильбертово пространство и A — ограниченный линейный оператор, определенный на H, с областью значений в том же пространстве.

Определение. *Оператор A^* такой, что*

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)\qquad \forall x,\ y\in H, \tag{2}$$

называется оператором, сопряженным с оператором A.

Для оператора Фредгольма в $L_2\ [a,\ b]$ с ядром $K\ (t,\ s)$ сопряженным оператором будет оператор Фредгольма с ядром $\overline{K\ (s,\ t)}$.

Оператор A не может иметь более одного сопряженного, причем сопряженность ограниченных операторов есть свойство взаимное, так что $A^{**}=A$.

Сопряженный оператор линеен:

$$A^*(\alpha x+\beta y)=\alpha A^*x+\beta A^*y$$

(покажите это!).

Исходя из определения сопряженного оператора, нетрудно доказать, что

$$(A_1+A_2)^*=A_1^*+A_2^*,\quad (A_1A_2)^*=A_2^*A_1^*,\qquad (\lambda A)^*=\overline{\lambda}A^*,$$

где λ — постоянная.

Можно показать, что всякий ограниченный оператор A имеет сопряженный A^*, который также ограничен и имеет ту же норму, что и данный оператор.

Докажем, например, равенство норм A и A^*. В тождестве (2) положим $x = A^*y$. Будем иметь

$$(A^*y,\ A^*y) = \| A^*y \|^2 = (AA^*y,\ y). \tag{3}$$

Оценивая правую часть (3) по неравенству Буняковского—Шварца, получим

$$\| A^*y \|^2 \leqslant \| AA^*y \| \| y \| \leqslant \| A \| \| A^*y \| \| y \|,$$

откуда

$$\| A^*y \| \leqslant \| A \| \| y \|.$$

Это неравенство показывает, что оператор A^* ограничен и что $\| A^* \| \leqslant \| A \|$.

Полагая теперь в (2) $y = Ax$, точно так же найдем, что $\| A \| \leqslant \| A^* \|$. Следовательно, $\| A \| = \| A^* \|$.

Пусть в уравнении Рисса—Шаудера (1) $f(t) \in L_2[a,\ b]$ и $\varphi(t) \in L_2[a,\ b]$. Это уравнение может быть решено тем же приемом, который в § 14 был применен к уравнению Фредгольма с невырожденным ядром. Именно, представляем оператор A в виде суммы операторов:

$$A = A_1 + A_2,$$

где

$$A_1\varphi = \sum_{k=1}^{n} (\varphi,\ b_k)\, a_k(t)$$

— вырожденный (конечномерный) оператор, $A_2\varphi$ — оператор с достаточно малой нормой. Дальнейшие рассуждения по существу не отличаются от проведенных в § 14.

Будем называть значение λ *характеристическим*, если однородное уравнение

$$\varphi = \lambda A\varphi$$

имеет нетривиальные решения, которые называют *собственными функциями* оператора A, отвечающими данному характеристическому значению λ. Для уравнений Рисса—Шаудера справедливы теоремы Фредгольма.

Теорема 5.2. *Если значение λ не является характеристическим, то как уравнение* (1), *так и сопряженное с ним уравнение*

$$\psi = \bar{\lambda} A^*\psi + g, \tag{4}$$

где A^* — оператор, сопряженный с A, разрешимо при любом свободном члене и решение каждого из этих уравнений единственно.

Теорема 5.3. *Если λ характеристическое, то однородное уравнение и сопряженное однородное*

$$\psi = \bar{\lambda} A^* \psi \tag{5}$$

имеют одно и то же число линейно независимых собственных функций.

Теорема 5.4. *Для того чтобы уравнение* (1) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член f был ортогоналeн к любому решению однородного сопряженного уравнения* (5).

Теорема 5.5. *Вполне непрерывный оператор имеет не более счетного множества характеристических чисел, которые могут сгущаться только на бесконечности.*

Для уравнений Рисса—Шаудера остается в силе альтернатива Фредгольма.

ГЛАВА VI

СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория симметричных интегральных уравнений, для которых $K(t, s) = K(s, t)$, может быть построена независимо от теории Фредгольма.

Мы начнем изложение с общих теорем, касающихся симметричных линейных операторов.

§ 24. Симметричные операторы. Теорема Гильберта—Шмидта

Определение. *Линейный оператор A, действующий из гильбертова пространства H в H, называется симметричным, если для любых $x, y \in H$*

$$(Ax, y) = (x, Ay). \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что для симметричного оператора

$$A^* y = Ay \qquad \forall y \in H,$$

т. е. симметричный оператор совпадает со своим сопряженным. Поэтому симметричный оператор называют также *самосопряженным* оператором.

В пространстве $L_2[a, b]$ рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с действительным L_2-ядром $K(t, s)$. Используя теорему Фубини, имеем

$$(Ax, y) = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds \right\} y(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt \right\} x(s)\, ds = (x, A^* y),$$

где

$$A^*y = \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt.$$

Таким образом, переход к сопряженному оператору заключается в том, что интегрирование ведется по первой переменной, тогда как в исходном операторе оно ведется по второй.

Если ядро $K(t, s)$ симметричное:

$$K(t, s) = K(s, t) \quad \forall t, s,$$

то

$$A^*y = \int_a^b K(t, s)\, y(t)\, dt = \int_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt = Ay,$$

и оператор Фредгольма в этом случае симметричный.

Комплекснозначное ядро $K(t, s)$ называется *симметричным*, если

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}.$$

Интегральное уравнение, ядро которого симметрично, будем называть симметричным интегральным уравнением.

Напомним следующие понятия, относящиеся к линейным операторам (не обязательно симметричным).

Пусть имеем уравнение

$$Ax - \lambda x = f \quad \text{или} \quad (A - \lambda I)\, x = f, \tag{I}$$

где A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, и λ — некоторый параметр.

Наряду с уравнением (I) рассмотрим уравнение

$$Ax - \lambda x = \theta, \quad \text{или} \quad (A - \lambda I)\, x = \theta, \tag{II}$$

которое называется однородным уравнением, соответствующим уравнению (I). Это уравнение всегда имеет решение $x = \theta$, которое называется тривиальным решением.

Допустим, что для некоторого λ оператор $A - \lambda I$ имеет обратный $(A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda$, называемый *резольвентным оператором* для уравнения (I). Для этого λ уравнение (I) имеет при любом $f \in X$ единственное решение

$$x = R_\lambda f.$$

Однородное уравнение (II) имеет в этом случае только тривиальное решение $x = \theta$.

Определение. *Значения λ, при которых уравнение* (I) *имеет единственное решение при любом $f \in X$, а оператор R_λ определен на всем X и ограничен, называются регулярными значениями для оператора A.*

Совокупность регулярных значений называется *резольвентным множеством* $\rho(A)$ оператора A.

Если уравнение (II) при данном λ имеет, кроме тривиального, некоторое другое решение, то такое значение λ называется *собственным значением* оператора A, а нетривиальное решение уравнения (II) называется *собственным элементом оператора A, соответствующим данному собственному значению λ.*

В пространстве R^n собственный вектор линейного оператора A есть такой вектор $\boldsymbol{x}$, который переводится оператором A в ему коллинеарный:

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Для единичного оператора I любой вектор $\boldsymbol{x}$ является собственным с собственным значением 1, так как

$$I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad \forall\boldsymbol{x}.$$

Для оператора подобия с коэффициентом подобия α любой вектор $\boldsymbol{x}$ является собственным с собственным значением α, так как по определению оператора подобия

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}.$$

Оператор поворота на угол φ, $0 < \varphi < \pi$, действующий в R^2, не имеет собственных векторов, так как, каким бы ни был вектор $\boldsymbol{x} \neq 0$, после поворота на угол φ $(0 < \varphi < \pi)$ мы никогда не получим вектор, коллинеарный исходному вектору.

Если λ — собственное значение оператора A и уравнение (I) имеет решение при некотором f, то это решение не будет единственным. В самом деле, если x_0 — решение уравнения (I)

$$Ax_0 - \lambda x_0 = f$$

и e — собственный элемент оператора A, отвечающий данному собственному значению λ, то, согласно определению собственного элемента,

$$Ae - \lambda e = \theta,$$

и, значит,

$$A(x_0+e)-\lambda(x_0+e)=Ax_0-\lambda x_0+Ae-\lambda e=f,$$

т. е. x_0+e есть также решение уравнения (I).

Определение. *Совокупность всех значений* λ, *не являющихся регулярными, называется спектром* $\sigma(A)$ *оператора* A. В частности, все собственные значения принадлежат спектру.

Примеры 1. Пусть A — линейный оператор, действующий в R^n, и пусть $\mathfrak{A}=(a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ есть матрица этого оператора.

Уравнение

$$A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}, \qquad \text{(III)}$$

где $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{f}=(f_1, \ldots, f_n)$, представляет собой систему n линейных неоднородных алгебраических уравнений с n неизвестными. Если определитель $\Delta(\lambda)$ системы отличен от нуля, т. е. если λ не есть корень уравнения $\Delta(\lambda)=0$, то система (III) имеет при любых правых частях единственное решение и, следовательно, все такие значения параметра λ регулярны. Корни уравнения $\Delta(\lambda)=0$ образуют спектр, так как при таких λ система (III) в общем случае неразрешима. При этих значениях λ однородная система

$$A\boldsymbol{x}-\lambda\boldsymbol{x}=0$$

имеет ненулевое решение и, значит, любая точка спектра есть собственное значение.

2. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ оператор умножения на независимую переменную:

$$Ax=tx(t).$$

Уравнение (I) принимает в этом случае вид

$$tx(t)-\lambda x(t)=f(t),$$

или

$$(t-\lambda)x(t)=f(t) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \qquad \text{(IV)}$$

Если $\lambda \overline{\in} [0, 1]$, то уравнение (IV) имеет при любой $f(t)\in C[0, 1]$ единственное непрерывное решение

$$x(t)=\frac{1}{t-\lambda}f(t),$$

так что все значения $\lambda \overline{\in} [0, 1]$ являются регулярными. С другой стороны, как нетрудно показать ([38]), все значения $\lambda \in [0, 1]$ являются точками спектра. При этом ни одна точка спектра не является собственным значением, так как решением однородного уравнения

$$(t-\lambda)x(t) = 0, \qquad \lambda \in [0, 1],$$

в пространстве $C[0, 1]$ является только функция $x(t) \equiv \equiv 0$. В самом деле, при любом фиксированном $\lambda_0 \in [0, 1]$ множитель $t-\lambda_0$ обращается в нуль лишь при $t = \lambda_0$; чтобы функция $(t-\lambda_0)\, x(t)$ тождественно равнялась нулю на $[0, 1]$, надо, чтобы $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t).$$

Обозначая

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds$$

и полагая $1/\lambda = \mu$, запишем уравнение в виде

$$A\varphi - \mu\varphi = -\mu f,$$

откуда видно, что *собственные значения оператора* A, если они существуют, *суть обратные величины характеристических чисел ядра* $K(t, s)$.

Установим некоторые свойства собственных элементов и собственных значений симметричных операторов в гильбертовом пространстве H, аналогичные соответствующим свойствам конечномерных симметричных операторов.

1. *Все собственные значения симметричного оператора* A *в* H *действительны.*

В самом деле, пусть $Ax = \lambda x$, $\|x\| \neq 0$. Тогда

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x),$$

откуда $\lambda = \overline{\lambda}$, что может быть лишь при действительном λ.

2. *Собственные элементы симметричного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

Действительно, если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, причем $\lambda \neq \mu$, то

$$\lambda (x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y),$$

откуда $(x, y) = 0$, что, согласно определению, означает ортогональность элементов $x, y \in H$.

Отметим еще, что для симметричного оператора A величина (Ax, x) всегда действительная. В самом деле,

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Введем следующее понятие. Последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in H$, называется *слабо сходящейся* к элементу $x_0 \in H$, $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x_0$, если для любого $y \in H$

$$(x_n, y) \to (x_0, y).$$

В отличие от слабой сходимости сходимость по норме в гильбертовом пространстве H называют *сильной сходимостью*. Из сильной сходимости следует слабая; обратное, как показывают примеры, неверно.

Как известно, сфера конечномерного пространства компактна, т. е. каждая бесконечная последовательность ее элементов содержит сходящуюся подпоследовательность (принцип Больцано—Вейерштрасса). В бесконечномерных пространствах это, как мы видели, неверно. Но в конечномерных пространствах сильная сходимость совпадает со слабой, и оказывается, что свойство слабой компактности сохраняется и при переходе к бесконечномерному случаю.

Именно, *всякое ограниченное множество гильбертова пространства слабо компактно, т. е. из любой последовательности элементов, принадлежащей такому множеству, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Докажем теорему, играющую основную роль во всех дальнейших построениях.

Теорема 6.1. *Всякий отличный от нулевого вполне непрерывный симметричный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение λ.*

Доказательство. Пусть $A \neq O$ — симметричный вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим функционал (квадратичную форму) (Ax, x) на единичной сфере $S_1 : \|x\| = 1$. Из курса анализа известно, что функция m переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ точек m-мерного пространства (т. е. на компактном множестве), достигает в $\overline{G}$ своего наибольшего и наименьшего значений.

Аналогично, поскольку сфера $S_1 \subset H$ слабо компактна в себе, а квадратичная форма (Ax, x) слабо непрерывна, то она достигает на S_1 своего наибольшего и наименьшего значений.

Пусть

$$M = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$$

(можно показать, что $M = \|A\|$).

По определению верхней грани найдется последовательность нормированных элементов $\{e_n\}$, для которой существует

$$\lim_{n\to\infty} (Ae_n, e_n),$$

равный $+M$ или $-M$. Этот отличный от нуля предел обозначим λ_1. Из ограниченной последовательности $\{e_n\}$ выделим подпоследовательность $\{e_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, для которой существует

$$\lim_{i\to\infty} Ae_{n_i} = h, \tag{2}$$

что возможно, так как оператор A вполне непрерывен.

Поскольку

$$\|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\|^2 = (Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}, Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}) =$$
$$= \|Ae_{n_i}\|^2 - 2\lambda_1 (Ae_{n_i}, e_{n_i}) + \lambda_1^2,$$

то

$$\lim_{i\to\infty} \|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\|^2 = \|h\|^2 - 2\lambda_1^2 + \lambda_1^2 = \|h\|^2 - \lambda_1^2. \tag{3}$$

Но

$$\|Ae_{n_i}\| \leqslant M \|e_{n_i}\| = M = |\lambda_1|,$$

так что $\|h\| \leqslant |\lambda_1|$.

Поскольку левая часть (3) неотрицательна, то $\|h\| = |\lambda_1|$ и, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \|Ae_{n_i} - \lambda_1 e_{n_i}\| = 0, \tag{4}$$

откуда следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} e_{n_i}$ существует и, с учетом (2), равен h/λ_1. Введя элемент $x_1 = h/\lambda_1$, норма которого равна единице, из (4) получаем

$$Ax_1 - \lambda_1 x_1 = \theta,$$

или

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1,$$

что и означает существование ненулевого собственного элемента x_1, $\|x_1\| = 1$, отвечающего ненулевому собственному значению λ_1. При этом

$$|\lambda_1| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|.$$

Из приведенных рассуждений ясно, что вполне непрерывный симметричный оператор A, не имеющий ненулевых собственных значений, есть нулевой оператор: $A = O$.

Для несимметричных операторов в n-мерном пространстве верна следующая теорема: *всякое линейное преобразование в n-мерном пространстве имеет хотя бы один собственный вектор.*

Это утверждение не переносится на общие вполне непрерывные операторы в H. Действительно, пусть оператор A задан в l_2 формулой

$$Ax = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{n-1}, \ldots\right).$$

Этот оператор вполне непрерывен, но не имеет ни одного собственного элемента.

Другой пример: интегральный оператор Вольтерра в $L_2[0, 1]$

$$Ax = \int_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds$$

с непрерывным ядром не имеет ни одного ненулевого собственного элемента.

Введем следующее

Определение. *Подпространство $L \subseteq H$ называется инвариантным подпространством оператора A, если для любого $x \in L$ имеем $Ax \in L$.*

Для симметричного оператора A вместе с L инвариантным подпространством является также $H \ominus L$ — ортогональное дополнение L в H, т. е. совокупность всех элементов $Z \in H$, ортогональных L. В самом деле, пусть $x \in H \ominus L$ и y — любой элемент L. Имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay) = 0,$$

так как $Ay \in L$ в силу инвариантности L. Таким образом, Ax ортогонален любому элементу из L, т. е. $Ax \in H \ominus L$, что и доказывает инвариантность последнего подпространства.

Вернемся к построению спектра симметричного вполне непрерывного оператора. Пусть L_1 — подпространство, порожденное элементом x_1, т. е. совокупность элементов вида $\{tx_1\}$, где t — числовой параметр. Тогда

$$Atx_1 = tAx_1 = t\lambda_1 x_1 \in L_1,$$

и, следовательно, L_1 — инвариантное подпространство оператора A. Тогда $H_1 = H \ominus L_1$ также инвариантное подпространство. Рассмотрим его как самостоятельное гильбертово пространство. Применяя к оператору A, действующему в H_1, рассуждения, аналогичные приведенным в теореме 6.1, заключаем, что существует элемент $x_2 \in H_1$, $\|x_2\| = 1$, такой, что

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2.$$

При этом элемент x_2 ортогонален x_1 и

$$|\lambda_2| = \sup_{S_1 \cap H_1} |(Ax, x)| \leqslant \sup_{S_1} |(Ax, x)| = |\lambda_1|.$$

Затем рассматриваем подпространство L_2, порожденное элементами x_1 и x_2, и т. д.

Логически возможны два случая.

1. После n-го шага имеем

$$\alpha_n = \inf_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = \beta_n = \sup_{S_1 \cap H_n} (Ax, x) = 0.$$

Тогда $(Ax, x) = 0$ на H_n, что возможно, лишь если $Ax \equiv \theta$ на H_n. В этом случае мы получаем, что

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_n$$

и

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

образуют систему всех собственных элементов и всех ненулевых собственных значений оператора A.

Тогда

$$H = L_n \oplus N.$$

Здесь L_n — подпространство, порожденное элементами x_1, x_2, ..., x_n; N — подпространство нулей оператора A (т. е. совокупность элементов, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$). Его обозначают $\operatorname{Ker} A$. Символ $\oplus$ означает сумму ортогональных подпространств.

Таким образом, любой элемент $x \in H$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + x_0, \qquad x_0 \in \operatorname{Ker} A,$$

откуда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i x_i.$$

Оператор A в этом случае конечномерный в том смысле, что он отображает гильбертово пространство H в его конечномерное подпространство.

Пример — интегральный оператор Фредгольма с вырожденным ядром.

2. Процесс построения собственных элементов оператора может быть продолжен неограниченно. В этом случае мы получаем ортонормированную систему собственных элементов

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Такая система не более чем счетна, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть A — вполне непрерывный симметричный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда этот оператор может иметь лишь конечное число собственных значений, превосходящих* *по модулю заданное число $\rho > 0$, и каждому ненулевому собственному значению может соответствовать лишь конечное число линейно независимых собственных элементов.*

Доказательство. Предположим, напротив, что оператор A имеет бесконечное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, причем $|\lambda_i| \geqslant \rho > 0$ для всех i. Каждому собственному значению λ_i соответствует по крайней мере один собственный элемент x_i, причем без ограничения общности можно считать, что $\|x_i\| = 1$. Совокупность таких элементов $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, есть ограниченное множество, и так как A вполне непрерывен, то множество $\{Ax_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, компактно. Учитывая ортогональность x_i и x_j при $i \neq j$, имеем

$$\|Ax_i - Ax_j\|^2 = \|\lambda_i x_i - \lambda_j x_j\|^2 = (\lambda_i x_i - \lambda_j x_j, \lambda_i x_i - \lambda_j x_j) = \\ = \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + \lambda_j^2 \|x_j\|^2 = \lambda_i^2 + \lambda_j^2 \geqslant 2\rho^2.$$

Из этого следует, что ни последовательность $\{Ax_i\}$, ни любая ее подпоследовательность не могут сходиться, вопреки компактности множества $\{Ax_i\}$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

Следствие. *Если вполне непрерывный симметричный оператор A имеет счетное множество собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Теперь можно занумеровать все собственные значения и собственные элементы оператора A. Именно, будем нумеровать собственные значения последовательно в порядке убывания модулей, повторяя каждое собственное значение столько раз, какова его кратность (т. е. число линейно независимых собственных элементов, отвечающих этому собственному значению). Приходим к конечным или счетным системам

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

представляющим собой полные системы собственных значений и собственных элементов оператора A.

Пусть L — подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{x_i\}$. Если $x \in L$, т. е. $x = \sum_i \xi_i x_i$, то $Ax = \sum_i \xi_i \lambda_i x_i \in L$, так что L — инвариантное подпространство оператора A. Но тогда $N = H \ominus L$ будет также инвариантным подпространством A. Ясно, что $Ax = \theta$ на N, так как в противном случае в N существовал бы нормированный (ненулевой) собственный элемент оператора A, что невозможно, так как все такие элементы принадлежат L. Полученные нами результаты составляют содержание фундаментальной теоремы Гильберта—Шмидта.

Теорема 6.3. *Для любого вполне непрерывного симметричного линейного оператора A в гильбертовом пространстве H существует ортогональная нормированная система $\{x_i\}$ собственных элементов, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$ оператора A, такая, что для любого $x \in H$ имеет место представление*

$$x = \sum_k \xi_k x_k + x_0, \qquad x_0 \in N = \operatorname{Ker} A. \tag{5}$$

При этом

$$Ax = \sum_k \lambda_k \xi_k x_k, \tag{6}$$

где $\sum_k$ означает конечную сумму или бесконечный ряд в зависимости от числа собственных элементов оператора A. Если система $\{x_i\}$ бесконечна, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Эта теорема распространяет на вполне непрерывные симметричные операторы в гильбертовом пространстве H известный факт о приведении матрицы самосопряженного линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве к диагональной форме в некотором ортонормированном базисе.

§ 25. Решение операторных уравнений

Рассмотрим операторное уравнение

$$Ax - \lambda x = f, \tag{1}$$

где A — вполне непрерывный симметричный оператор, f — известный элемент, $f \in H$.

Подставляя в (1) вместо x и Ax их выражения (5) и (6) из § 24 и заменяя f через $\sum\limits_i \eta_i x_i + f_0$, получим

$$\sum_i (\lambda_i - \lambda) \xi_i x_i - \lambda x_0 = \sum_i \eta_i x_i + f_0. \tag{2}$$

Рассмотрим два случая:

1. $\lambda \neq \lambda_i$ при любом i.

Умножая обе части равенства (2) скалярно на x_k и учитывая ортогональность x_k элементам x_i при $i \neq k$ и элементам x_0 и f_0, получим

$$(\lambda_k - \lambda) \xi_k = \eta_k, \tag{3}$$

откуда

$$\xi_k = \frac{\eta_k}{\lambda_k - \lambda}. \tag{4}$$

Подставляя в (2) вместо ξ_i их выражение из (4), найдем

$$-\lambda x_0 = f_0,$$

откуда

$$x_0 = -\frac{1}{\lambda} f_0.$$

Таким образом, в силу (5) из § 24

$$x = \sum_i \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0. \tag{5}$$

Это есть решение уравнения (1) при $\lambda \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Оно однозначно определяется при любой правой части f, откуда следует, что при $\lambda \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существует резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$.

Таким образом, любое значение параметра λ, не являющееся собственным значением, есть регулярное значение оператора A, и, значит, спектр вполне непрерывного симметричного оператора, действующего в гильбертовом пространстве, состоит лишь из собственных значений.

2. $\lambda = \lambda_m = \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{m+p-1}$,

где p — кратность собственного значения λ.

При $k \neq m, m+1, \ldots, m+p-1$ коэффициенты ξ_k, как и раньше, определяются по формуле (4). Для значений k, совпадающих с одним из чисел m, $m+1, \ldots$ $\ldots, m+p-1$, равенство (3) в общем случае не удовлетворяется, так как левая часть его обращается в нуль, а правая вообще не равна нулю. Чтобы уравнение (3) было разрешимо и для этих значений k, необходимо, чтобы $\eta_k = 0$ $(k = m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1)$, т. е. чтобы свободный член уравнения (1) был ортогонален всем собственным элементам x_m, $x_{m+1}, \ldots, x_{m+p-1}$, соответствующим собственному значению λ. Уравнение (3) сводится тогда к тождеству $0 = 0$ и удовлетворяется при любых значениях коэффициентов ξ_k $(k = m, m+1, \ldots$ $\ldots, m+p-1)$. Решение уравнения (1) имеет в этом случае вид

$$x = \sum_{i \neq m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1} \frac{\eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i + \sum_{k=m}^{m+p-1} C_k x_k - \frac{1}{\lambda} f_0, \tag{6}$$

где C_m, $C_{m+1}, \ldots, C_{m+p-1}$ произвольны.

Итак, во втором случае уравнение разрешимо не всегда, и если разрешимо, то решение его определяется неоднозначно. Преобразуем несколько формулу (5):

$$x = -\frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\eta_i (\lambda_i - \lambda - \lambda_i)}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f_0 =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} \left(\sum_i \eta_i x_i + f_0 - \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{\lambda_i \eta_i}{\lambda_i - \lambda} x_i - \frac{1}{\lambda} f. \tag{7}$$

Это так называемая *формула Шмидта*.

§ 26. Интегральные уравнения с симметричным ядром

В пространстве $L_2\,[a, b]$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,\ s)\, \varphi(s)\, ds + f(t) \tag{1}$$

с симметричным L_2-ядром $K\ (t,\ s)$, не равным тождественно нулю.

Оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds$$

есть, как мы знаем, вполне непрерывный симметричный оператор в гильбертовом пространстве $L_2\,[a, b]$.

Опираясь на результаты § 24, получаем:

1) ядро $K(t, s)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, причем все характеристические числа действительные;

2) собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны между собой;

3) каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

Упражнение. Пусть λ_0 — характеристическое число симметричного ядра $K(t, s)$, а p — количество отвечающих этому числу линейно независимых собственных функций. Показать, что

$$p < \lambda_0^2 B^2 \qquad \left(B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds\right).$$

Применяя процесс ортогонализации, линейно независимые собственные функции, отвечающие данному характеристическому числу, можно сделать попарно ортогональными.

Процесс ортогонализации. Пусть имеем конечную или счетную систему линейно независимых функций из $L_2\,[a, b]$:

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ \ldots$$

(Бесконечная система элементов линейного пространства называется линейно независимой, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима.)

Процесс ортогонализации (Сонина—Шмидта) состоит в построении ортонормированной системы функций $\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_n(t), \ldots$ по следующему правилу:

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t), \quad \omega_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\|\psi_1\|},$$

$$\psi_n(t) = \varphi_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k)\,\omega_k(t),$$

$$\omega_n(t) = \frac{\psi_n(t)}{\|\psi_n\|}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Здесь

$$\|\psi_n\| = \left(\int_a^b \psi_n^2(t)\,dt\right)^{1/2}, \quad (\varphi_n, \omega_k) = \int_a^b \varphi_n(t)\,\omega_k(t)\,dt.$$

Деля обе части уравнения (1) на $\lambda \neq 0$ и обозначая $\frac{1}{\lambda}$ через μ, а $-\frac{1}{\lambda} f(t)$ через $g(t)$, придем к уравнению вида

$$\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(t) = g(t) \tag{2}$$

или, в операторной форме,

$$A\varphi - \mu\varphi = g, \tag{3}$$

где A — вполне непрерывный симметричный оператор.

К уравнению (3) мы можем применить все выводы, полученные в § 25. Именно, спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества значений

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots,$$

и если μ не совпадает ни с одним из них, то уравнение (3) имеет единственное решение $\varphi(t)$ для любой функции $g(t) \in L_2[a, b]$. Это решение дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_j \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu}\,\varphi_j(t) - \frac{1}{\mu}\,g(t), \tag{4}$$

где $\varphi_j(t)$ — нормированные собственные функции ядра $K(t, s)$ и

$$g_j = \int_a^b g(t)\,\varphi_j(t)\,dt.$$

При этом однородное уравнение ($g(t) \equiv 0$) будет иметь лишь тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Если μ совпадает с собственным значением оператора A кратности p, т. е. $\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+p-1}$, и свободный член $g(t)$ ортогонален собственным функциям ядра $K(t, s)$, отвечающим этому собственному значению:

$$\int_a^b g(t)\,\varphi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = m, m+1, \ldots, m+p-1), \tag{5}$$

то уравнение (3) разрешимо, но неоднозначно. Это полностью согласуется с теоремой 3.8 Фредгольма, так как в данном случае однородные сопряженные интегральные уравнения совпадают.

Решение $\varphi(t)$ в этом случае дается формулой

$$\varphi(t)=\frac{1}{\mu}\sum_{i\neq m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1}\frac{\mu_i g_i}{\mu_i-\mu}\varphi_i(t)-\frac{1}{\mu}g(t)+$$

$$+C_m\varphi_m(t)+\cdots+C_{m+p-1}\varphi_{m+p-1}(t), \quad (6)$$

где $C_m, C_{m+1}, \ldots, C_{m+p-1}$ — произвольные постоянные.

Возвращаясь к исходным значениям параметра, имеем $\lambda_k = 1/\mu_k$ и $\lambda_k \to \infty$, если собственных значений бесконечное множество, так что интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным L_2-ядром всегда имеет характеристические числа, которых не более чем счетное множество.

Из формулы (4) получаем, что решение уравнения (1) для значений λ, не являющихся характеристическими, имеет вид

$$\varphi(t)=\lambda\sum_i\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(t)+f(t)\ (i=1,\ 2,\ \ldots), \quad (7)$$

где $f_i=\int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt$. Формула (6) соответственно дает

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i\neq m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1}\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(t)+f(t)+$$

$$+\sum_{k=m}^{m+p-1}C_k\varphi_k(t), \quad (8)$$

где C_k $(k=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1)$ — произвольные постоянные.

Формулы (7) и (8) называют *формулами Шмидта* для решения интегрального уравнения с симметричным ядром.

Если в правых частях формул (7), (8) стоят бесконечные ряды, то они, как можно показать, сходятся в среднем.

Если дополнительно предположить, что ядро $K(t, s)$ удовлетворяет условию (A):

$$\int_a^b K^2(t, s)\,ds \leqslant A = \text{const} \qquad \forall t \in [a, b],$$

то ряд (7) будет сходиться абсолютно и равномерно. Покажем это. Будем писать всюду бесконечные ряды, поскольку в случае конечного числа собственных функций мы получаем конечные суммы, сходимость которых доказывать не надо.

Итак, пусть $f(t) \in L_2\,[a, b]$ и пусть f_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье этой функции в ее разложении в ряд по ортонормированным собственным функциям $\varphi_i(t)$ ядра $K(t, s)$:

$$f_i = \int_a^b f(t)\,\varphi_i(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i}\,\varphi_i(t)$$

и покажем, что он сходится абсолютно и равномерно.

Составим отрезок ряда

$$\sum_{i=n}^{n+p} \frac{f_i}{\lambda_i}\,\varphi_i(t) = \sum_{i=n}^{n+p} f_i \int_a^b K(t, s)\,\varphi_i(s)\,ds$$

($p > 0$ — любое).

Применяя неравенство Коши, получим

$$\left(\sum_{i=n}^{n+p} \left|\frac{f_i}{\lambda_i}\,\varphi_i(t)\right|\right)^2 \leqslant \sum_{i=n}^{n+p} f_i^2 \sum_{i=n}^{n+p} \left(\int_a^b K(t, s)\,\varphi_i(s)\,ds\right)^2.$$

Величины $\int_a^b K(t, s)\,\varphi_i(s)\,ds$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье разложения ядра $K(t, s)$, рассматриваемого как функция только от s, в ряд по функциям $\varphi_i(s)$. Применяя к этим коэффициентам неравенство Бесселя *), будем иметь

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_a^b K(t,\ s)\varphi_i(s)\,ds\right)^2 \leqslant \int_a^b K^2(t,\ s)\,ds \leqslant A.$$

Таким образом,

$$\left(\sum_{i=n}^{n+p}\left|\frac{f_i}{\lambda_i}\varphi_i(t)\right|\right)^2 \leqslant A\sum_{i=n}^{n+p} f_i^2 \leqslant A\sum_{i=n}^{\infty} f_i^2$$

$$\forall t\in[a,\ b].$$

Поскольку $f(t)\in L_2[a,\ b]$, числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2$ сходится. Поэтому мы можем, выбирая достаточно большое n, сделать правую часть последнего неравенства, независимо от p, меньше любого наперед заданного $\varepsilon>0$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и любого $p\geqslant 0$

$$\sum_{i=n}^{n+p}\left|\frac{f_i}{\lambda_i}\varphi_i(t)\right| < \varepsilon \qquad \forall t\in[a,\ b].$$

В силу признака Коши это означает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{\lambda_i}\varphi_i(t)$ сходится абсолютно и равномерно.

Но стоящая в формуле (7) сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{\lambda_i-\lambda}\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}\,\frac{f_i}{\lambda_i}\varphi_i(t)$$

получается из этого ряда путем умножения каждого его члена на $\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}$. Так как эти множители, начиная с некоторого i, становятся положительными и стремятся к 1 при

*) Если $f(t)\in L_2[a,\ b]$ и f_i — коэффициенты Фурье в разложении $f(t)$ по некоторой ортонормированной системе функций $\{\varphi_i(t)\}$, то имеет место *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt.$$

возрастании i $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}=\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_i}}\text{ и } \lambda_i\to\infty\right)$, то и ряд, стоящий в формуле (7), сходится абсолютно и равномерно.

Формулу (7) можно переписать в виде

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\varphi_i(t)\,ds}{\lambda_i-\lambda}$$

или

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,\ s;\ \lambda)f(s)\,ds,$$

где

$$R(t,\ s;\ \lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i-\lambda}$$

является разрешающим ядром *).

Разложение

$$R(t,\ s;\ \lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i-\lambda}$$

показывает, что *резольвента симметричного L_2-ядра имеет лишь простые полюсы, отвечающие характеристическим числам этого ядра.*

Билинейное разложение симметричных ядер

Пусть имеем симметричное ядро $K(t, s)$, и пусть оно имеет лишь одно характеристическое число λ_1, которому отвечает лишь одна линейно независимая собственная

---

*) Если, например, ядро $K(t, s)$ есть L_2-ядро, удовлетворяющее условию (А), то можно переставлять знаки суммы и интеграла.

функция $\varphi_1(t)$, которую мы будем считать нормированной. Тогда

$$K(t, s) \equiv \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(t) \varphi_1(s). \tag{9}$$

В самом деле, рассмотрим симметричное ядро

$$\mathscr{K}(t, s) = K(t, s) - \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(t) \varphi_1(s) \tag{10}$$

и покажем, что у ядра $\mathscr{K}(t, s)$ нет ни одного ненулевого характеристического числа, так что $\mathscr{K}(t, s) \equiv 0$.

Будем рассуждать методом от противного. Пусть $\varphi(t) \not\equiv 0$ есть собственная функция ядра $K(t, s)$, так что

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b \mathscr{K}(t, s) \varphi(s)\, ds =$$
$$= \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(s)\, ds - \frac{\lambda}{\lambda_1} \varphi_1(t) \int_a^b \varphi(s) \varphi_1(s)\, ds. \tag{11}$$

Умножая обе части (11) на $\varphi_1(t)$ и интегрируя по t в пределах от a до b, получим

$$\int_a^b \varphi(t) \varphi_1(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \lambda \int_a^b K(t, s) \varphi(s)\, ds \right\} \varphi_1(t)\, dt -$$
$$- \frac{\lambda}{\lambda_1} \left(\int_a^b \varphi(s) \varphi_1(s)\, ds \right) \int_a^b \varphi_1^2(t)\, dt. \tag{12}$$

Но

$$\int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s) \varphi(s)\, ds \right\} \varphi_1(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s) \varphi_1(t)\, dt \right\} \varphi(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(s, t) \varphi_1(t)\, dt \right\} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b \varphi_1(s) \varphi(s)\, ds. \tag{13}$$

(Здесь мы воспользовались симметричностью ядра $K(t, s)$ и тем, что $\int_a^b K(s, t) \varphi_1(t)\, dt = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(s)$.)

Таким образом, из (12) имеем

$$\int_a^b \varphi(t)\,\varphi_1(t)\,dt = 0. \tag{14}$$

Но тогда в силу (11)

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,\ s)\,\varphi(s)\,ds,$$

так что $\varphi(t)$ должна быть собственной функцией ядра $K(t, s)$, и, следовательно, $\varphi(t)$ пропорциональна $\varphi_1(t)$, что противоречит (14). Значит, наше допущение неверно и $\mathscr{K}(t, s) \equiv 0$.

Пусть теперь для симметричного ядра $K(t, s)$ известна система его характеристических чисел

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$$

и собственных функций

$$\varphi_1(t),\quad \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t),\ \ldots$$

Будем считать, что собственные функции ортонормированы, а характеристические числа расположены в порядке возрастания абсолютных величин, так что

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \cdots$$

Составим новое ядро

$$\mathscr{K}_m(t,\ s) = K(t,\ s) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(t)\,\varphi_j(s)}{\lambda_j}.$$

Ясно, что $\mathscr{K}_m(t, s)$ — симметричное ядро. Можно показать, что последовательности

$$\lambda_{m+1},\quad \lambda_{m+2},\ \ldots,$$
$$\varphi_{m+1}(t),\quad \varphi_{m+2}(t),\ \ldots$$

образуют систему характеристических чисел и соответствующих им собственных функций ядра $\mathscr{K}_m(t, s)$.

Значит, наименьшее по модулю характеристическое число ядра $\mathscr{K}_m(t, s)$ есть λ_{m+1}, если только ядро $K(t, s)$ имеет более m характеристических чисел.

Рассмотрим частный случай, когда ядро $K(t, s)$ имеет конечное число характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Тогда ядро $\mathcal{K}_m(t, s)$ не имеет ни одного характеристического числа и, значит, $\mathcal{K}_m(t, s) \equiv 0$, так что

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(t)\,\varphi_j(s)}{\lambda_j}. \tag{15}$$

Мы рассматриваем для простоты случай действительного симметричного ядра; в общем случае вырожденного комплекснозначного ядра

$$K(t, s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(t)\overline{\varphi_j(s)}}{\lambda_j}. \tag{15'}$$

Формула (15) показывает, что ядро $K(t, s)$ вырожденное. Вспоминая, что всякое вырожденное ядро имеет только конечное число характеристических чисел, приходим к заключению:

Для того чтобы система характеристических чисел и собственных функций симметричного L_2-ядра $K(t, s)$ была конечной, необходимо и достаточно, чтобы это ядро было вырожденным.

В этом случае ядро может быть представлено в виде (15).

Рассмотрим L_2-ядро $K(t, s)$ как функцию переменной s, $a \leqslant s \leqslant b$, и параметра t. Тогда из условия

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds < +\infty$$

и теоремы Фубини следует, что $K(t, s)$, как функция s, при почти всех значениях параметра t принадлежит $L_2[a, b]$. Поэтому для $K(t, s)$ можно построить ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\varphi_i(s)\}$ собственных функций ядра $K(t, s)$, который будет сходиться в среднем к функции $K(t, s)$. Коэффициенты Фурье определятся формулами

$$c_k(t) = \int_a^b K(t, s)\,\varphi_k(s)\,ds = \frac{1}{\lambda_k}\,\varphi_k(t), \tag{16}$$

так что ряд Фурье для $K(t, s)$ будет иметь вид

$$K(t, s) = \sum_i \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i}. \tag{17}$$

Это равенство называется *билинейным разложением* ядра $K(t, s)$ по его собственным функциям.

Пределы суммирования могут быть либо конечными (в случае вырожденного ядра), либо бесконечными (в случае невырожденного). Теорема о билинейном разложении ядра для произвольных непрерывных ядер в пространстве $C[a, b]$, когда сходимость рядов должна быть равномерной, не имеет места. Однако *если ядро непрерывно в $Q\{a \leqslant t, s \leqslant b\}$, а его характеристические числа положительны, то билинейный ряд этого ядра сходится равномерно* (теорема Мерсера, [31]).

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^l K(t, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1'}$$

где

$$K(t, s) = \begin{cases} \dfrac{t(l-s)}{l}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{s(l-t)}{l}, & s \leqslant t \leqslant l. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $K(t, s) = K(s, t)$. Запишем уравнение (1′) в виде

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{l}\int_0^t s(l-t)\varphi(s)\,ds + \frac{\lambda}{l}\int_t^l t(l-s)\varphi(s)\,ds. \tag{1''}$$

Отсюда видно, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Дифференцируя обе части (1″), найдем

$$\varphi'(t) = -\frac{\lambda}{l}\int_0^t s\varphi(s)\,ds + \frac{\lambda}{l}\int_t^l (l-s)\varphi(s)\,ds.$$

Повторное дифференцирование дает $\varphi''(t) = -\lambda\varphi(t)$. Итак, интегральное уравнение (1′) сводится к краевой задаче

$$\varphi''(t) + \lambda\varphi(t) = 0, \qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(l) = 0.$$

Нетривиальные решения этой задачи:

$$\psi_n(t) = \sin\frac{n\pi t}{l}.$$

Функции $\psi_n(t)$ являются собственными функциями интегрального уравнения (1'), отвечающими характеристическим числам $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ этого уравнения. Как известно, система функций $\left\{\sin\frac{n\pi t}{l}\right\}$ ортогональна на $[0, l]$. Далее,

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^l \sin^2\frac{n\pi t}{l}\,dt = \frac{l}{2}.$$

Таким образом, система ортонормированных собственных функций ядра $K(t, s)$ и соответствующих им характеристических чисел в нашем случае такова:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi t}{l}, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi t}{l}, \ \ldots$$

$$\ldots, \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi t}{l}, \ \ldots,$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2^2\pi^2}{l^2}, \ \ldots, \ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \ \ldots$$

Билинейный ряд (17) в данном случае имеет вид

$$\frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi t}{l}\sin\frac{n\pi s}{l}}{n^2}$$

и сходится равномерно.

Разложим в ряд Фурье по синусам $(0 \leqslant t \leqslant l)$ функцию

$$g(t) = K(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{l}.$$

Используя известные формулы Эйлера — Фурье

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l K(t, s)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

находим

$$b_n = \frac{2l}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi s}{l},$$

так что действительно

$$K(t, s) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi t}{l} \sin \frac{n\pi s}{l}}{n^2}.$$

С помощью разложения (17) можно получить многочисленные полезные формулы.

Так, возводя обе части равенства (17) в квадрат, интегрируя результат по t и s в пределах от a до b и имея в виду ортонормированность собственных функций, получим

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 \, dt \, ds = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^2}. \tag{18}$$

Замечание. Если ядро несимметрично, то имеет место фундаментальное неравенство И. Шура:

$$\sum_j \frac{1}{|\lambda_j|^2} \leqslant B^2.$$

Полагая в (17) $t = s$ и интегрируя обе части по t, получим для следа непрерывного ядра $K(t, s)$ формулу

$$\int_a^b K(t, t) \, dt = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}. \tag{19}$$

Рассмотрим итерированные ядра для ядра $K(t, s)$. Используя разложение (17), в силу ортонормированности собственных функций имеем

$$K_2(t, s) = \int_a^b K(t, \tau) K(\tau, s) \, d\tau =$$

$$= \int_a^b \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) \varphi_i(\tau) \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(\tau) \varphi_j(s) \, d\tau =$$

$$= \sum_i \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i(t) \varphi_i(s). \tag{20}$$

Аналогично

$$K_m(t, s) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^m} \varphi_j(t)\varphi_j(s). \tag{21}$$

Формулы (20) и (21) дают билинейные разложения итерированных ядер.

Таким образом, если ядро $K(t, s)$ симметрично, а $\{\lambda_n\}$ и $\{\varphi_n(t)\}$ — системы его характеристических чисел и собственных функций, то при $m \geqslant 2$ числа $\{\lambda_n^m\}$ и функции $\{\varphi_n(t)\}$ образуют систему характеристических чисел и соответствующих этим числам собственных функций m-го итерированного ядра $K_m(t, s)$.

Так как для невырожденного ядра $\lambda_j \underset{j\to\infty}{\to} \infty$, то с увеличением m улучшается сходимость рядов в правой части (21). Из (21) получаем

$$\int_a^b\int_a^b K_m^2(t, s)\,dt\,ds = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^{2m}} \tag{22}$$

и

$$\int_a^b K_m(t, t)\,dt = \sum_j \frac{1}{\lambda_j^m}. \tag{23}$$

Формулы (22), (23) можно использовать для приближенных вычислений первых характеристических чисел ядра $K(t, s)$. Пусть $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots$ Тогда с ростом m в правых частях (22) и (23) становится преобладающим первое слагаемое. Отбрасывая остальные слагаемые, получаем приближенные формулы

$$|\lambda_1| \approx \left(\int_a^b\int_a^b K_m^2(t, s)\,dt\,ds\right)^{-1/2m},$$

$$|\lambda_1| \approx \left|\int_a^b K_m(t, t)\,dt\right|^{-1/m}.$$

В теории интегральных уравнений и ее приложениях большую роль играет вопрос о быстроте роста характеристических чисел интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{24}$$

Эти числа, как известно, являются нулями функции $D(\lambda)$ — определителя Фредгольма. Функция $D(\lambda)$ определяется как сумма ряда по степеням λ:

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n, \tag{25}$$

и является целой функцией от λ.

В предположении ограниченности ядра $K(t, s)$:

$$|K(t, s)| \leqslant M \qquad \forall (t, s) \in Q\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\},$$

используя неравенство Адамара, мы получили оценку (см. § 3)

$$|C_n| < [M(b-a)]^n n^{n/2}. \tag{26}$$

Из теории целых аналитических функций, в силу неравенства (26) для $|C_n|$, следует, что все корни уравнения $D(\lambda) = 0$, расположенные в порядке возрастания их модулей, обладают тем свойством, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2+\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0, \tag{27}$$

сходится для всякого $\varepsilon > 0$.

Этот результат может быть уточнен. Именно, если $K(t, s)$ — симметричное ядро, то все характеристические числа λ_n действительны и имеет место неравенство

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\, dt\, ds > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2}, \tag{28}$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2}$, если

$$\int_a^b \int_a^b K^2(t, s)\,dt\,ds = B^2 < +\infty.$$

Следует отметить, что это условие ограниченности левой части неравенства (28) неулучшаемо.

Непосредственная оценка коэффициентов C_n с помощью неравенства Адамара позволяет и в самом общем случае несимметричного ядра получить оценку быстроты роста $|\lambda_n|$ в зависимости от гладкости функции $K(t, s)$ по переменным t, s. Для случая m раз непрерывно дифференцируемого ядра $K(t, s)$ Г. Вейль получил следующую асимптотику характеристических чисел ядра при возрастании n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{m+1/2}}{\lambda_n} = 0.$$

Подробнее об этом см. [18].

§ 27. Теорема Гильберта — Шмидта для интегральных операторов

В силу общей теоремы Гильберта — Шмидта для вполне непрерывных симметричных операторов в гильбертовом пространстве H для всякого $x \in H$ имеет место формула

$$Ax = \sum_i \lambda_i c_i x_i,$$

где $c_i = (x, x_i)$ — коэффициенты Фурье элемента x по ортонормированной системе $\{x_i\}$ собственных элементов оператора A.

Эта формула показывает, что любой элемент из области значений вполне непрерывного симметричного оператора разлагается в ряд Фурье по собственным элементам этого оператора.

Рассмотрим интегральный оператор с симметричным L_2-ядром в пространстве $L_2[a, b]$:

$$Ax = \int_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds.$$

Применительно к таким операторам получаем классическую теорему Гильберта — Шмидта.

Теорема 6.4. *Пусть $K(t, s)$ — симметричное L_2-ядро, и пусть $h(t)$ — произвольная функция из $L_2\ [a, b]$. Тогда всякая функция $f(t)$, представимая через ядро (истокообразно представимая функция):*

$$f(t) = Ah = \int_a^b K(t, s)\, h(s)\, ds,$$

разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по ортонормированным собственным функциям $\{\varphi_i(t)\}$ ядра $K(t, s)$:

$$f(t) = \sum_j \frac{h_j}{\lambda_j} \varphi_j(t). \tag{1}$$

Здесь λ_j — характеристические числа ядра $K(t, s)$,

$$h_j = \int_a^b h(t)\, \varphi_j(t)\, dt$$

— коэффициенты Фурье функции $h(t)$ по системе $\{\varphi_i(t)\}$.

При дополнительном условии

$$\int_a^b K^2(t, s)\, ds \leqslant C = \text{const}$$

ряд (1) сходится абсолютно и равномерно ([30]).

Если ядро $K(t, s)$ непрерывно в $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$, то оператор Фредгольма переводит всякую функцию $h(t) \in L_2\ [a, b]$ в непрерывную функцию (см. лемму на стр. 68). В этом случае все собственные функции с ненулевыми собственными значениями также непрерывны.

Теорема Гильберта — Шмидта имеет место и в пространстве $C\ [a, b]$, т. е. для непрерывных ядер $K(t, s)$ и непрерывных функций $h(t)$, причем сходимость ряда (1) будет равномерной.

Заметим, что в теореме Гильберта — Шмидта полнота *) системы собственных функций $\{\varphi_i(t)\}$ не предполагается

*) Ортогональная система $\{\varphi_i(t)\}$ функций называется неполной, если существует отличная от тождественного нуля квадратично суммируемая функция, ортогональная ко всем функциям системы; в противном случае система $\{\varphi_i(t)\}$ называется полной.

(например, для вырожденного ядра она заведомо неполна, но может быть неполной и для невырожденных ядер).

На теореме Гильберта — Шмидта основан метод Келлога для приближенного вычисления λ_1. Пусть $K(t, s)$ — симметричное ядро и $\omega(t)$ — произвольная функция из $L_2[a, b]$.

Положим

$$\omega_1(t) = \int_a^b K(t, s)\,\omega(s)\,ds, \qquad \omega_2(t) = \int_a^b K(t, s)\,\omega_1(s)\,ds$$

и, вообще,

$$\omega_n(t) = \int_a^b K(t, s)\,\omega_{n-1}(s)\,ds.$$

Используя теорему Гильберта — Шмидта, получаем

$$\omega_1(t) = \sum_j \frac{\tilde{\omega}_j}{\lambda_j}\varphi_j(t),$$

$$\omega_2(t) = \sum_j \frac{\tilde{\omega}_j}{\lambda_j^2}\varphi_j(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_n(t) = \sum_j \frac{\tilde{\omega}_j}{\lambda_j^n}\varphi_j(t),$$

где

$$\tilde{\omega}_j = \int_a^b \omega(t)\,\varphi_j(t)\,dt.$$

Если $\omega_1 \neq 0$, то при больших n в разложении $\omega_n(t)$ преобладает первое слагаемое. Поэтому можно воспользоваться приближенными формулами

$$|\lambda_1| \approx \frac{\|\omega_n}{\|\omega_{n-1}\|}, \tag{2}$$

$$\varphi_1(t) \approx \frac{\omega_n(t)}{\|\omega_n(t)\|}. \tag{3}$$

Формула (2) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком. При достаточно больших n можно также пользоваться формулой

$$|\lambda_1| \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n(t)\|}}. \tag{4}$$

Имеет место следующий важный факт.

Пусть функция $\omega(t)$ ортогональна к ортонормированным собственным функциям $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{k-1}(t)$, но не ортогональна к собственной функции $\varphi_k(t)$. Тогда последовательность $\frac{\|\omega_n(t)\|}{\|\omega_{n-1}(t)\|}$ имеет пределом $|\lambda_k|$, где λ_k — k-е характеристическое число ядра $K(t, s)$.

§ 28. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций

Пусть функция $h(t) \in L_2[a, b]$. По теореме Гильберта — Шмидта

$$Ah = \int_a^b K(t, s)h(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(t). \tag{1}$$

(Рассматриваем общий случай невырожденного L_2-ядра.)

Умножая обе части (1) скалярно на $h(t)$, получаем

$$(Ah, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n, h \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(h, \varphi_n)|^2}{\lambda_n}. \tag{2}$$

Пусть, как обычно, числа λ_n расположены в порядке возрастания их абсолютных величин, так что наименьшим по модулю является число λ_1. Тогда из (2) следует

$$|(Ah, h)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2. \tag{3}$$

Числа (h, φ_n) суть коэффициенты Фурье функции $h(t)$ по системе $\{\varphi_n(t)\}$. Используя неравенство Бесселя ([5]), из (3) находим

$$|(Ah, h)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \|h\|^2$$

или, если $\|h\| = 1$,

$$|(Ah,\ h)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|}. \qquad (4)$$

Знак равенства в (4) достигается при $h(t) = \varphi_1(t)$, где $\varphi_1(t)$ — нормированная собственная функция ядра $K(t, s)$, отвечающая характеристическому числу λ_1. В самом деле,

$$\varphi_1(t) = \lambda_1 A \varphi_1.$$

Умножая обе части последнего равенства скалярно на $\varphi_1(t)$, получим

$$(A\varphi_1,\ \varphi_1) = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема (см. также стр. 192).

Теорема 6.5. *На множестве нормированных функций $\|h\| = 1$ величина $|(Ah,\ h)|$ имеет максимум, равный $1/|\lambda_1|$. Этот максимум достигается при $h(t) = \varphi_1(t)$.*

Рассмотрим множество нормированных функций $h(t)$, ортогональных первым $m-1$ собственным функциям. Тогда

$$Ah = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(h,\ \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(t).$$

Рассуждениями, аналогичными вышеприведенным, получаем следующий результат:

На множестве функций, нормированных и ортогональных первым $m-1$ собственным функциям ядра $K(t, s)$, величина $|(Ah,\ h)|$ имеет максимум, равный $1/|\lambda_m|$, который достигается при $h(t) = \varphi_m(t)$.

§ 29. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным

В приложениях часто встречаются уравнения вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, p(s)\, \varphi(s)\, ds + f(t), \qquad (1)$$

где $K(t, s)$ — действительное симметричное ядро и $p(t) > 0$ на $[a, b]$. Умножая обе части (1) на $\sqrt{p(t)}$ и вводя новую искомую функцию $\psi(t)=\sqrt{p(t)}\,\varphi(t)$, приходим к интегральному уравнению

$$\psi(t)=\lambda\int_a^b L(t,\ s)\,\psi(s)\,ds+\sqrt{p(t)}f(t) \tag{2}$$

с симметричным ядром

$$L(t,\ s)=K(t,\ s)\sqrt{p(s)\,p(t)}.$$

Пусть λ_k и $\psi_k(t)$ — характеристические числа и собственные функции однородного уравнения, соответствующего уравнению (2). Будем считать функции $\psi_k(t)$ ортонормированными:

$$\int_a^b \psi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Учитывая соотношение $\psi_k(t)=\varphi_k(t)\sqrt{p(t)}$, получим, что собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,\ s)\,p(s)\,\varphi(s)\,ds$$

ортонормированы с весом $p(t)$:

$$\int_a^b p(t)\,\varphi_i(t)\,\varphi_j(t)\,dt=\begin{cases}1 & \text{при } i=j,\\ 0 & \text{при } i\neq j.\end{cases}$$

Упражнение. Показать, что уравнение (1) можно привести к уравнению

$$\omega(x)=\lambda\int_0^l K_1(x,\ y)\,\omega(y)\,dy+f_1(x)$$

с симметричным ядром $K_1(x,\ y)$ путем перехода к новым переменным x и y:

$$x=\int_a^t p(\xi)\,d\xi,\qquad y=\int_a^s p(\xi)\,d\xi\qquad\left(l=\int_a^b p(\xi)\,d\xi\right).$$

§ 30. Классификация симметричных ядер

Пусть $K(t, s)$ — симметричное ядро и $p(t)$, $q(t)$ — функции из $L_2[a, b]$. Рассмотрим билинейный функционал

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s)\, p(t)\, q(s)\, dt\, ds, \tag{1}$$

аналогичный билинейной форме

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k \qquad (a_{ik} = a_{ki},\ a_{ik} \text{ — вещественные}).$$

Применяя теорему Гильберта—Шмидта, получим

$$\int_a^b K(t, s)\, p(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\lambda_k} \varphi_k(s),$$

где

$$p_k = \int_a^b p(t)\, \varphi_k(t)\, dt$$

— коэффициенты Фурье функции $p(t)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_i(t)\}$ собственных функций ядра $K(t, s)$.

Умножая обе части последнего равенства на $q(s)$, интегрируя по s и обозначая через q_k коэффициенты Фурье функции $q(s)$, получим

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s)\, p(t)\, q(s)\, dt\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k q_k}{\lambda_k}.$$

При $q(t) \equiv p(t)$ получаем аналог квадратичной формы

$$J\{p\} = \int_a^b \int_a^b K(t, s)\, p(t)\, p(s)\, dt\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2}{\lambda_k}. \tag{2}$$

Эта формула лежит в основе классификации симметричных ядер. В силу (2) необходимым и достаточным условием положительности всех характеристических чисел является неравенство

$$J\{p\} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad p(t) \in L_2[a, b].$$

В самом деле, если все $\lambda_k > 0$, то из равенства (2) видно, что $J\{p\} \geqslant 0 \ \forall p(t) \in L_2 [a, b]$. Положим теперь, что имеется хоть одно отрицательное характеристическое число, например $\lambda_1 < 0$.

Возьмем $p(t) = \varphi_1(t)$. В силу ортонормированности собственных функций получим, что $p_1 = 1$, а все остальные $p_k = 0$ $(k > 1)$.

Правая часть (2) обратится тогда в $1/\lambda_1$ и будет отрицательной, т. е. будет $J\{\varphi_1\} < 0$.

Функционал $J\{p\}$ и ядро $K(t, s)$, обладающие свойством

$$J\{p\} \geqslant 0 \qquad \forall p(t) \in L_2 [a, b],$$

называются *неотрицательно определенными*.

Если это неравенство является строгим для всех $p(t) \not\equiv 0$, функционал $J\{p\}$ и ядро $K(t, s)$ называются *положительно определенными*.

Можно показать, что *для положительной определенности ядра $K(t, s)$ необходимо и достаточно, чтобы все λ_k были положительны и система функций $\{\varphi_k(t)\}$ была полной*.

Упражнение. Показать, что вторая итерация $K_2(t, s)$ ядра $K(t, s)$ всегда неотрицательно определенная.

Аналогичным образом, функционал $J\{p\}$ и ядро $K(t, s)$ называются *неположительными*, если

$$J\{p\} \leqslant 0 \qquad \forall p(t) \in L_2 [a, b].$$

Совершенно так же, как и выше, можно показать, что условие $J\{p\} \leqslant 0$ равносильно тому, что все $\lambda_k < 0$. При этом

$$\frac{1}{\lambda_1} \leqslant J\{p\} \leqslant 0,$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютному значению характеристическое число.

§ 31. Функция Грина. Сведéние краевой задачи к интегральному уравнению

1. Функция Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lx \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + q(t)\,x(t) = h(t), \tag{1}$$

где $q(t)$ и $h(t)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции.

Пусть ищется решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее (для простоты) краевым условиям

$$x(a) = x(b) = 0. \tag{2}$$

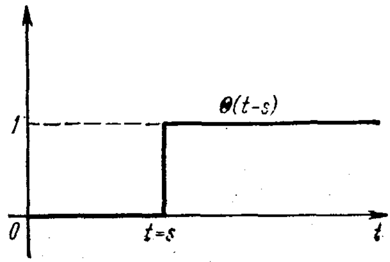

Рис. 15.

Определение. *Функцией Грина $G(t, s)$ краевой задачи (1)—(2) называется функция двух переменных, определенная в квадрате $a \leqslant t, s \leqslant b$ и такая, что*

1) $L_tG(t, s) = 0$ *при* $t < s$ *и* $t > s$, *т. е.* $G(t, s)$, *как функция* t, *удовлетворяет при указанных значениях* t *и* s *уравнению* (1).

2) *Функция* $G(t, s)$ *удовлетворяет поставленным граничным условиям*

$$G(a, s) = 0, \quad G(b, s) = 0 \quad \textit{для} \quad a < s < b.$$

3) $G(t, s)$ *непрерывна при* $t = s$:

$$G(s+0, s) = G(s-0, s).$$

4) *Производная* $\frac{\partial G}{\partial t}$ *в точке* $t = s$ *претерпевает скачок*:

$$\frac{\partial G(s+0, s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-0, s)}{\partial t} = 1.$$

Учитывая этот единичный скачок в точке $t = s$ и имея в виду правило дифференцирования единичной функции $\Theta(t - s)$ (рис. 15), заключаем, что

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t, s) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} G(t, s)\right) = \delta(t-s) + \frac{d^2G}{dt^2},$$

где $\delta(t-s)$ — δ-функция (см. [47]), $\frac{d^2G}{dt^2}$ — классическая (обычная) вторая производная функции Грина.

Поэтому условия 1) и 4) можно заменить условием

$$L_tG(t, s)=\delta(t-s). \tag{3}$$

Таким образом, функция Грина имеет простой физический смысл. Это решение задачи для единичного точечного источника:

$$h(t)=\delta(t-s).$$

Теперь можно сразу написать решение краевой задачи (1)—(2) с помощью функции Грина. Именно, решение краевой задачи (1)—(2) дается формулой

$$x(t)=\int_a^b G(t, s)\,h(s)\,ds. \tag{4}$$

В самом деле, в силу условия 2) на функцию Грина, функция $x(t)$, определяемая формулой (4), удовлетворяет граничным условиям (2).

Далее,

$$Lx(t)=L_t\left\{\int_a^b G(t, s)\,h(s)\,ds\right\}=\int_a^b L_t\,G(t, s)\,h(s)\,ds=$$
$$=\int_a^b \delta(t-s)\,h(s)\,ds=h(t),$$

так что функция $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1).

(Становясь на точку зрения «физической строгости», можно всегда дифференцировать под знаком интеграла, если рассматривать результат как обобщенную функцию.)

Пример.

$$Lx\equiv\frac{d^2x}{dt^2}-x(t)=h(t), \tag{5}$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=0. \tag{6}$$

Построим функцию Грина задачи (5)—(6). Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x(t)=0,$$

соответствующего уравнению (5), имеет вид

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

Поскольку функция $G(t, s)$ должна быть решением этого однородного уравнения при $t < s$ и при $t > s$, представим ее в виде

$$\left.\begin{aligned} G(t, s) &= a_1(s)e^t + a_2(s)e^{-t} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant s, \\ G(t, s) &= b_1(s)e^t + b_2(s)e^{-t} \quad \text{при } s \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В силу условия 2) должно быть

$$G(0, s) = 0, \qquad G(1, s) = 0,$$

что дает

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 0, \\ b_1 e + b_2 e^{-1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Условие 3) непрерывности функции Грина при $t = s$ приводит к соотношениям

$$b_1 e^s + b_2 e^{-s} = a_1 e^s + a_2 e^{-s}. \tag{9}$$

Наконец, условие 4) принимает вид

$$b_1 e^s - b_2 e^{-s} - [a_1 e^s - a_2 e^{-s}] = 1. \tag{10}$$

Из соотношений (8), (9), (10) находим величины a_1, a_2, b_1, b_2, что дает

$$G(t, s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(s-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \dfrac{\operatorname{sh} s \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что $G(t, s) = G(s, t)$, т. е. функция Грина симметрична. Это вытекает из общего предложения, утверждающего, что *если краевая задача* (1)—(2) *самосопряженная, то функция Грина этой задачи является симметричной.*

Физический смысл этого результата есть соотношение взаимности, т. е. отклик в точке t на единичное точечное возмущение в s равен отклику в s на единичное точечное возмущение в t.

Подробнее с условиями самосопряженности краевой задачи, а также существования единственной функции Грина можно познакомиться, например, в [39].

2. Сведéние краевой задачи к интегральному уравнению. Ограничимся простейшим случаем. Пусть требуется найти решение $x(t)$ уравнения

$$Lx \equiv \frac{d^2x}{dt^2} + (-1 + \lambda q(t))\, x(t) = h(t) \tag{12}$$

(λ — числовой параметр),

удовлетворяющее краевым условиям

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{13}$$

Перепишем уравнение (12) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x(t) = h(t) - \lambda q(t)\, x(t) \tag{14}$$

и будем рассматривать правую часть (14) как известную функцию.

Тогда эквивалентным этому уравнению и краевым условиям (13) будет интегральное уравнение

$$x(t) = -\lambda \int_0^1 G(t, s)\, q(s)\, x(s)\, ds + h_1(t), \tag{15}$$

где

$$h_1(t) = \int_0^1 G(t, s)\, h(s)\, ds,$$

а $G(t, s)$ — функция Грина, отвечающая уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x(t) = 0$$

и краевым условиям (13).

ГЛАВА VII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го РОДА

§ 32. Уравнение Вольтерра 1-го рода

Пусть имеем уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_a^t K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = f(t), \tag{1}$$

где $K(t, s)$, $f(t)$ — известные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция.

Для однозначной разрешимости интегральных уравнений 2-го рода достаточно было потребовать, например, непрерывности ядра $K(t, s)$ и свободного члена $f(t)$. При этом решение $\varphi(t)$ необходимо оказывается непрерывным.

При изучении уравнений (1) приходится вводить новые требования. Чтобы уяснить их необходимость, рассмотрим простейшее уравнение этого типа, получающееся при $K(t, s) \equiv 1$:

$$\int_a^t \varphi(s)\,ds = f(t). \tag{2}$$

Если предположить, что неизвестная функция $\varphi(t)$ только ограничена и интегрируема, то задача оказывается неопределенной, так как в этом случае можно, не изменяя значения интеграла, произвольно менять значение функции $\varphi(t)$ в конечном и даже бесконечном числе точек отрезка интегрирования (точнее, на множестве меры нуль, если понимать интеграл в смысле Лебега).

С другой стороны, оказывается, что функция $f(t)$ не может быть произвольной непрерывной функцией: она должна удовлетворять некоторым условиям, налагаемым на $f(t)$ и ее производные. Для определенности будем считать, что решение ищется в классе $C[a, b]$ функций, непрерывных на $[a, b]$. В таком случае, чтобы уравнение (2) имело решение $\varphi(t) \in C[a, b]$, необходимо, чтобы функция $f(t)$ обращалась в нуль при $t = a$ и допускала непрерывную производную в (a, b). Тогда искомым решением будет

$$\varphi(t) = f'(t).$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$\int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(s)\, ds = f(t). \tag{3}$$

Чтобы это уравнение имело своим решением непрерывную функцию $\varphi(t)$, необходимо, чтобы функция $f(t)$ имела непрерывные производные $f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ и чтобы сама эта функция и ее $n-1$ первых производных обращались в нуль при $t = a$.

Если эти условия выполняются, то уравнение (3) имеет своим решением непрерывную функцию $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$.

Примеры. 1. Рассмотрим интегральное уравнение вида (3):

$$\int_0^t (t-s)\varphi(s)\, ds = t^2.$$

Здесь $f(t) = t^2$, $n = 2$. Функция $f(t)$ имеет непрерывные производные всех порядков, причем $f(0) = f'(0) = 0$. Применяя преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, перейдем от данного интегрального уравнения к операторному:

$$\frac{1}{p^2}\, \Phi(p) = \frac{2}{p^3},$$

откуда $\Phi(p) = 2/p$, так что $\varphi(t) \equiv 2$ есть непрерывное решение данного уравнения.

2. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t (t-s)\varphi(s)\, ds = \sin t. \tag{4}$$

Здесь опять $n = 2$, а $f(t) = \sin t$. Функция $f(t)$ имеет непрерывные производные всех порядков, $f(0) = 0$, но $f'(0) = 1 \neq 0$. Применяя преобразование Лапласа, найдем

$$\Phi(p) = 1 - \frac{1}{p^2+1},$$

откуда

$$\varphi(t) = \delta(t) - \sin t,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция.

Таким образом, уравнение (4) имеет решение, но в классе обобщенных функций.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t) \tag{1}$$

и будем предполагать, что ядро $K(t, s)$ и все его частные производные нужного порядка суть непрерывные функции.

Для того чтобы уравнение (1) имело непрерывное решение $\varphi(t)$, необходимо выполнение условия $f(a) = 0$. Далее, если ядро $K(t, s)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial K}{\partial t}$, то левая часть (1) также имеет непрерывную производную по t, откуда следует, что и $f(t)$ должна иметь непрерывную производную $f'(t)$.

Дифференцируя обе части (1) по t, придем к уравнению

$$K(t, t)\varphi(t) + \int_a^t K'_t(t, s)\varphi(s)\,ds = f'(t), \tag{5}$$

которому удовлетворяет решение $\varphi(t)$ уравнения (1), и наоборот.

Пусть $K(t, t)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$. Деля обе части (5) на $K(t, t)$, получим

$$\varphi(t) + \int_a^t \frac{K'_t(t, s)}{K(t, t)}\varphi(s)\,ds = \frac{f'(t)}{K(t, t)}. \tag{6}$$

Это — интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода, и к нему может быть применена развитая выше теория таких уравнений.

Итак, *если функции $f(t)$ и $K(t, s)$ имеют непрерывные производные $f'(t)$ и $\frac{\partial K}{\partial t}$, $f(a) = 0$, а $K(t, t)$ не обращается в нуль на $[a, b]$, то уравнение* (1) *имеет в интервале (a, b) единственное непрерывное решение.*

Если $K(t, t)$ обращается в нуль в некоторой точке отрезка $[a, b]$, например в точке $t=a$, то уравнение (5) обладает особыми свойствами, совершенно отличными от свойств уравнений 2-го рода. Такие уравнения, следуя Пикару, называют *уравнениями* 3-*го рода*.

Если $K(t, t)$ тождественно равно нулю, то уравнение (5) есть опять уравнение 1-го рода, с которым можно поступать так же, как с первоначальным, если только $K(t, s)$ имеет непрерывную производную $\frac{\partial^2 K(t, s)}{\partial t^2}$. При этом, чтобы уравнение (5) имело непрерывное решение, необходимо, чтобы $f'(a)=0$ и $f''(t)$ была непрерывна. Дифференцируя обе части (5) по t ($K(t, t)\equiv 0$), придем к уравнению

$$K_t'(t, t)\,\varphi(t)+\int_a^t \frac{\partial^2 K(t, s)}{\partial t^2}\varphi(s)\,ds=f''(t), \tag{7}$$

которое является интегральным уравнением 2-го рода, если $K_t'(t, t)$ отлична от нуля на $[a, b]$.

Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к производной $\frac{\partial^{n-1}K(t, s)}{\partial t^{n-1}}$, которая при $t=s$ не обращается тождественно в нуль. При этом, чтобы уравнение (1) имело решение $\varphi(t)\in C[a, b]$, необходимо, чтобы $f(t)\in C^{(n-1)}[a, b]$, т. е. имела бы непрерывные производные до порядка $n-1$, причем все они должны обращаться в нуль при $t=a$.

Если производная $\frac{\partial^n K(t, s)}{\partial t^n}$ непрерывна, то непрерывной должна быть $f^{(n)}(t)$, и мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial^{n-1}K(t, t)}{\partial t^{n-1}}\varphi(t)+\int_a^t \frac{\partial^n K(t, s)}{\partial t^n}\varphi(s)\,ds=f^{(n)}(t), \tag{8}$$

которое является интегральным уравнением 2-го рода, если $\frac{\partial^{n-1}K(t, t)}{\partial t^{n-1}}$ не обращается в нуль на $[a, b]$.

В этом случае уравнение (8) имеет единственное непрерывное решение, которое удовлетворяет исходному уравнению (1).

Замечание. Уравнение

$$\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t), \tag{1}$$
$$K(t, t) \neq 0,$$

может быть сведено к уравнению 2-го рода с помощью интегрирования по частям.

Положим

$$\Phi(t) = \int_a^t \varphi(s)\,ds, \tag{9}$$

так что $\Phi(a) = 0$. Тогда

$$\int_a^t K(t, s)\varphi(s)\,ds = [K(t, s)\Phi(s)]\Big|_{s=a}^{s=t} - \int_a^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial s}\Phi(s)\,ds$$

и интегральное уравнение (1) примет вид

$$K(t, t)\Phi(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t, s)}{\partial s}\Phi(s)\,ds = f(t),$$

или

$$\Phi(t) - \int_a^t \frac{K'_s(t, s)}{K(t; t)}\Phi(s)\,ds = \frac{f(t)}{K(t, t)}. \tag{10}$$

К уравнениям (1) приводят многие важные прикладные задачи. Пусть $\varphi(t)$ — излученный радиоимпульс, $f(t)$ — сигнал, записанный на некотором расстоянии от точки излучения. Тогда

$$f(t) = \int_0^t K(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

где $K(t-\tau)$ — импульсная функция трассы распространения радиоимпульса, зависящая от свойств среды (грунта, влажности воздуха и т. д.).

С уравнением (11) можно связать целый цикл задач, например:

1) Известны $K(t-\tau)$ и $f(t)$. Восстановить излученный сигнал $\varphi(t)$.

Вообще, уравнения 1-го рода часто встречаются в задачах, где по результатам каких-то измерений требуется восстановить исходное явление.

2) По известным входу $\varphi(t)$ и выходу $f(t)$ определить $K(t-\tau)$. Тогда мы будем знать, как влияет преобразователь радиосигнала на входной сигнал.

Упражнение. Во многих областях естествознания встречается задача отыскания закона распределения размеров шаровых частиц, погруженных в непрозрачную среду, по измерениям сегментов, которые получаются при пересечении частиц случайными плоскостями.

Обозначая через $f(r)$ (r — диаметр частицы) плотность вероятности распределения диаметров частиц, получаем, что функция $f(r)$ должна определяться из интегрального уравнения типа уравнения Абеля

$$\varphi(x) = \frac{x}{r_0} \int_x^{+\infty} \frac{f(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dr, \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ может быть найдена из наблюдений, $r_0 = \text{const}$.

Показать, что решением уравнения (12) является

$$f(r) = -\frac{2rr_0}{\pi} \int_{x^2}^{\infty} (x^2 - r^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx. \tag{13}$$

Указание. Положить $f(r) = rf_1(r^2)$.

Уравнение (12) появляется также в теории «задачи глобулярного скопления» в астрономии (глобулярное скопление представляет собой собрание звезд, расположенных вокруг общего центра сферическими слоями постоянной плотности).

§ 33. Уравнение Фредгольма 1-го рода

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds = f(t), \tag{1}$$

где $K(t, s)$, $f(t)$ — известные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция, также представляет трудности для изучения, существенно отличные от тех, с которыми мы встречались в теории интегральных уравнений 2-го рода.

Пусть, например, ядро $K(t, s)$ есть многочлен относительно t и s:

$$K(t, s) = a_0(s)\, t^m + a_1(s)\, t^{m-1} + \dots + a_m(s),$$

где $a_i(s)$ — многочлены относительно s ($i = 1, 2, \dots, m$).

Тогда левая часть (1) будет иметь вид $b_0t^m + b_1t^{m-1} + \dots + b_m$ для любой $\varphi(t) \in C[a, b]$, а следовательно, такой же вид должна иметь и правая часть (1), т. е. функция $f(t)$.

Таким образом, для любой непрерывной функции $f(t)$ решение уравнения (1), вообще говоря, не существует при сколь угодно «хорошем» ядре $K(t, s)$.

Рассмотрим, например, простейшее интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_0^1 \varphi(s)\,ds = t$$

с ядром $K(t, s) \equiv 1$ и $f(t) = t$.

Очевидно, что в классе интегрируемых (в частности, непрерывных) функций это уравнение не имеет решений. Пусть ядро $K(t, s)$ уравнения (1) симметричное.

В силу теоремы Гильберта — Шмидта для существования решения уравнения (1) необходимо, чтобы функция $f(t)$ разлагалась по собственным функциям $\{\varphi_i(t)\}$ ядра $K(t, s)$:

$$f(t) = \sum_i (f, \varphi_i)\,\varphi_i(t). \qquad (2)$$

При выполнении этого условия решение $\varphi(t)$ уравнения (1) можно искать в виде

$$\varphi(t) = \sum_i c_i\varphi_i(t). \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и сравнивая с (2), получим $\frac{c_i}{\lambda_i} = (f, \varphi_i)$, откуда $c_i = \lambda_i(f, \varphi_i)$. Если мы хотим, чтобы решение $\varphi(t)$ принадлежало $L_2[a, b]$, надо наложить на $f(t)$ дополнительное требование.

Теорема 7.1 (Пикара). *Интегральное уравнение 1-го рода с замкнутым симметричным ядром* $K(t, s)$

$$\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = f(t), \qquad (1)$$

где

$$f(t) \in L_2[a, b],$$

имеет, и притом единственное, решение в классе $L_2[a, b]$ *тогда и только тогда, когда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \tag{4}$$

сходится.

Здесь λ_k — характеристические числа ядра $K(t, s)$, $f_k = (f, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ относительно собственных функций $\varphi_n(t)$ этого ядра:

$$\varphi_n(t) = \lambda_n \int_a^b K(t, s)\, \varphi_n(s)\, ds. \tag{5}$$

Симметричное ядро $K(t, s)$ называется *замкнутым* в $L_2[a, b]$, если каждая функция $\omega(t) \in L_2[a, b]$, удовлетворяющая тождеству

$$\int_a^b K(t, s)\, \omega(s)\, ds = 0,$$

равна нулю почти всюду на $[a, b]$. Замкнутое ядро характеризуется тем, что собственные функции ядра образуют полную в $L_2[a, b]$ ортогональную систему функций.

Доказательство теоремы 7.1. Предположим, что существует решение $\varphi(t) \in L_2[a, b]$ уравнения (1). Тогда будем иметь

$$f_n = \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds \right\} \varphi_n(t)\, dt =$$
$$= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(t, s)\, \varphi_n(t)\, dt \right\} \varphi(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(s)\, \varphi(s)\, ds. \tag{6}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу (1)

$$f(t) = \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

а также тем, что в силу симметричности ядра

$$\int_a^b K(t, s)\, \varphi_n(t)\, dt = \frac{1}{\lambda_n}\, \varphi_n(s).$$

Равенство (6) может быть записано в виде

$$\int_a^b \varphi(s)\,\varphi_n(s)\,ds = \lambda_n f_n, \tag{7}$$

откуда видно, что числа $\lambda_n f_n$ являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(t) \in L_2[a, b]$. Как известно, ряд (4) из квадратов этих коэффициентов необходимо должен быть сходящимся.

Предположим, обратно, что ряд (4) сходится. Тогда в силу теоремы Фишера — Рисса ([19]) существует функция $\varphi(t) \in L_2[a, b]$, и притом единственная, для которой числа $\lambda_n f_n$ являются коэффициентами Фурье по системе функций $\{\varphi_n(t)\}$, т. е. выполняются равенства (7) для всех n ($n = 1, 2, \ldots$). Эта функция $\varphi(t)$ удовлетворяет данному интегральному уравнению. Действительно, в силу самого построения $\varphi(t)$ функции $f(t)$ и $\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье относительно полной системы $\{\varphi_n(t)\}$ собственных функций ядра $K(t, s)$. Следовательно, функции $f(t)$ и $\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds$ тождественны (в метрике $L_2[a, b]$).

Если ядро $K(t, s)$ не является замкнутым, то решение уравнения (1) не единственно. Пусть $\omega_1(t), \ldots, \omega_k(t)$ — не равные нулю почти всюду функции такие, что

$$\int_a^b K(t, s)\,\omega_j(s)\,ds = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда, если $\varphi_0(t)$ — решение уравнения (1), то функция

$$\varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{k} C_j \omega_j(t),$$

где C_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) — произвольные постоянные, также будет решением этого уравнения. В случае вырожденного ядра решение уравнения (1) может содержать бесконечное число произвольных постоянных.

Требование замкнутости ядра $K(t, s)$ является существенным не только для единственности решения уравнения (1), но и вообще для разрешимости этого уравнения. Если отказаться от требования замкнутости, то среди уравнений вида

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t) + g(t),$$

где $f(t)$ — заданная непрерывная функция, не ортогональная ко всем $\varphi_n(t)$, а $g(t)$ — любая непрерывная функция, ортогональная ко всем $\varphi_n(t)$, можно найти неразрешимые уравнения.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1. \qquad (1')$$

Оно имеет очевидное решение $\varphi(t) \equiv 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что решениями уравнения (1′) будут также функции

$$\varphi(t) = 1 + \omega(t),$$

где $\omega(t) = \alpha t + \beta$ и величины α, β — любые действительные числа, удовлетворяющие условию $\alpha + 2\beta = 0$.

С другой стороны, уравнение

$$\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1 + t,$$

очевидно, неразрешимо.

Для решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода можно применять метод последовательных приближений ([43]).

Теорема 7.2. *Пусть $K(t, s)$ — симметричное положительно определенное L_2-ядро, и пусть уравнение*

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = f(t), \qquad f(t) \in L_2[a, b], \qquad (1)$$

однозначно разрешимо.

Тогда последовательность $\{\varphi_n(t)\}$, *определяемая рекуррентным соотношением*

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t) + \lambda\left[f(t) - \int_a^b K(t, s)\,\varphi_{n-1}(s)\,ds\right] \tag{8}$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\varphi_0(t) \in L_2[a, b],$$
$$0 < \lambda < 2\lambda_1 \tag{9}$$

и λ_1 — *наименьшее характеристическое число ядра* $K(t, s)$, *сходится в среднем к решению уравнения* (1).

В самом деле, полагая в равенстве (8)

$$\varphi_n(t) = \varphi(t) + u_n(t),$$

приведем его к виду

$$u_n(t) = u_{n-1}(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)\,u_{n-1}(s)\,ds. \tag{8'}$$

Умножим обе части (8′) на собственную функцию $v_i(t)$ ядра и проинтегрируем по t от a до b. Получим

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{n-1} - \lambda \int_a^b v_i(t)\,dt \int_a^b K(t, s)\,u_{n-1}(s)\,ds, \tag{10}$$

где

$$\alpha_i^n = \int_a^b u_n(t)\,v_i(t)\,dt.$$

Используя симметричность ядра $K(t, s)$ и то, что

$$v_i(t) = \lambda_i \int_a^b K(t, s)\,v_i(s)\,ds,$$

находим

$$\int_a^b v_i(t)\,dt \int_a^b K(t, s)\,u_{n-1}(s)\,ds = \frac{\alpha_i^{n-1}}{\lambda_i}.$$

Таким образом, из (10)

$$\alpha_i^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\alpha_i^{n-1} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^n \alpha_i^0.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b u_n^2(t)\,dt = \int_a^b [\varphi_n(t) - \varphi(t)]^2\,dt.$$

В силу полноты системы функций $\{v_i(t)\}$ имеем

$$\int_a^b u_n^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^n)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n}(\alpha_i^0)^2.$$

На основании неравенства (9)

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2 \leqslant 1,$$

и потому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^n)^2 < \varepsilon.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству

$$\int_a^b u_n^2(t)\,dt = \int_a^b \left[\varphi_n(t) - \varphi(t)\right]^2 dt < \varepsilon,$$

которое означает, что последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ сходится в среднем к решению $\varphi(t)$ уравнения (1).

Рассмотрим опять уравнение

$$\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = f(t), \tag{1}$$

не предполагая теперь ядро симметричным. Применим к его решению общий метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода — разложение искомой функции по некоторой полной системе функций. Он оказывается, вообще, хорошо приспособленным к решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.

Будем искать решение $\varphi(t)$ уравнения (1) в виде

$$\varphi(t)=\sum_n a_n g_n(t)\,w(t), \tag{11}$$

где функции $g_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ образуют некоторую полную систему на интервале (a, b); $w(t)$ — некоторая весовая функция, которую следует выбирать близкой к $\varphi(t)$ и тем самым улучшить сходимость ряда (11). Если о решении $\varphi(t)$ мало что известно, то можно положить $w(t)\equiv 1$.

Подставляя $\varphi(t)$ в форме (11) в уравнение (1), будем иметь

$$f(t)=\sum_n a_n \int_a^b K(t, s)\,g_n(s)\,w(s)\,ds,$$

или

$$f(t)=\sum_n a_n h_n(t), \tag{12}$$

где $h_n(t)$ — известные функции:

$$h_n(t)=\int_a^b K(t, s)\,g_n(s)\,w(s)\,ds. \tag{13}$$

Таким образом, решение интегрального уравнения сводится к нахождению коэффициентов a_n по известным функциям $f(t)$ и $h_n(t)$.

Это особенно просто делается в двух случаях:

1) Если функции $h_n(t)=c_n t^n$ $(n=0, 1, \ldots)$, то правая часть (12) оказывается степенным рядом, так что неизвестные коэффициенты a_n можно определить путем сравнения коэффициентов этого ряда с соответствующими коэффициентами в разложении $f(t)$ по степеням t.

2) Если функции $h_n(t)$ образуют ортогональное с весом $\rho(t)$ семейство на интервале (a, b):

$$\int_a^b \rho(t)\,h_n(t)\,h_m(t)\,dt=N\delta_{mn}\,^{*)},$$

*) Здесь δ_{mn} — символ Кронекера,

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0 \text{ при } m\neq n,\\ 1 \text{ при } m=n.\end{cases}$$

то коэффициенты a_n легко определяются из (12) по формулам

$$a_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(t)\rho(t)h_n(t)\,dt,$$

где

$$N_n = \int_a^b \rho(t)h_n^2(t)\,dt.$$

К сожалению, чаще функции $h_n(t)$ не являются ни степенями t, ни элементами ортогональной системы и определение коэффициентов a_n бывает сопряжено порой с большими техническими трудностями. С некоторыми методами отыскания a_n можно познакомиться в [23].

В качестве примера, иллюстрирующего изложенный метод, рассмотрим случай $h_n(t) = t^n$.

Это имеет место, когда ядро интегрального уравнения является *производящей функцией* для семейства ортогональных полиномов. Напомним, что функция $G(t, z)$ называется *производящей* для системы функций

$$g_0(z),\ g_1(z), \ldots, g_n(z), \ldots,$$

если

$$G(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(z) t^n \qquad (c_n \neq 0),$$

т. е. если функции $g_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ получаются в результате разложения $G(t, z)$ в ряд по степеням t. Как известно ([23]), производящую функцию для полиномов Эрмита $H_n(z)$ можно записать в виде

$$e^{-(t-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-z^2}H_n(z)}{n!} t^n. \tag{14}$$

Это разложение можно применить для решения интегрального уравнения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-s)^2}\varphi(s)\,ds. \tag{15}$$

Задачи такого типа возникают в вопросах о распространении тепла, когда искомым является первоначальное распределение источников, порождающее некоторое заданное распределение температуры. Положим

$$\varphi(s)=\sum_n a_n H_n(s).$$

Используя разложение (14) ядра уравнения (15) и тот факт, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(s)\,e^{-s^2}\,ds=2^n n!\sqrt{\pi},$$

приводим уравнение (15) к виду

$$f(t)=\sqrt{\pi}\sum_n a_n 2^n t^n.$$

Отсюда

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!\sqrt{\pi}}$$

и, следовательно, решение $\varphi(t)$ уравнения (15) имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{2^n n!}H_n(t).$$

§ 34. Операторные уравнения 1-го рода

Под *операторным уравнением 1-го рода* понимают уравнение

$$A\varphi=f, \tag{1}$$

где φ, f — элементы гильбертова пространства H, A — вполне непрерывный оператор.

Так, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds=f(t), \tag{1'}$$

где $K(t, s)$ — интегрируемое с квадратом в прямоугольнике $Q\,\{a\leqslant t,\ s\leqslant b\}$ ядро, а $\varphi(t)$ и $f(t)$ — функции из $L_2[a, b]$, является примером операторного уравнения 1-го рода.

Одним из существенных моментов в теории таких уравнений является то, что оператор, обратный вполне непрерывному, не ограничен. Поэтому, если f_1 и f_2 — два близких между собой элемента из H и оба уравнения

$$A\varphi = f_1, \qquad A\varphi = f_2$$

разрешимы, то соответствующие решения $\varphi_1 = A^{-1}f_1$ и $\varphi_2 = A^{-1}f_2$ могут сильно отличаться друг от друга.

Таким образом, сколь угодно малая погрешность в свободном члене уравнения (1) может привести к сколь угодно большой ошибке в решении.

Задачи, в которых малое изменение исходных данных приводит к малому изменению решения, называются *корректными*. Решение интегрального уравнения 1-го рода (в отличие от уравнения 2-го рода) в общем случае является *некорректной* задачей.

В настоящее время некорректные задачи и методы их регуляризации (т. е. сведения их к задачам, в том или ином смысле корректным) стали предметом пристального внимания большого числа математиков как в нашей стране (школа акад. А. Н. Тихонова), так и за рубежом.

Задача решения уравнения (1) называется *поставленной корректно по Тихонову*, если выполнены следующие условия:

1) априори известно, что решение φ существует для некоторого класса исходных данных и принадлежит некоторому заданному множеству M:

$$\varphi \in M;$$

2) решение единственно в классе функций $\varphi \in M$;

3) решение φ уравнения (1) непрерывно зависит от правой части f на множестве M_A, где M_A есть образ множества M при отображении $A\varphi$.

Рассмотрим уравнение

$$A\varphi = f, \tag{1}$$

где A — линейный вполне непрерывный оператор и $\|A\| \leqslant 1$.

Пусть задача решения уравнения (1) поставлена корректно по Тихонову, и пусть множество корректности M есть множество функций u, определяемых соотношением

$$u = Bv, \qquad \|v\| \leqslant 1, \tag{2}$$

где B — линейный вполне непрерывный оператор, $\|B\| \leqslant 1$.

Пусть задана функция $\omega(\tau)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\omega(\tau)$ — непрерывная неубывающая функция, и $\omega(0)=0$;

б) для любого $u \in M$, удовлетворяющего неравенству

$$\|Au\| \leqslant \tau,$$

имеет место неравенство

$$\|u\| \leqslant \omega(\tau). \tag{3}$$

Укажем один метод решения уравнения (1), ограничившись наиболее простым случаем ([17]).

Пусть A — положительно определенный симметричный оператор и операторы A и B перестановочны. Обозначим через φ_τ функцию

$$\varphi_\tau = (A+\tau I)^{-1} f, \qquad \tau \geqslant 0,$$

и оценим разность $\varphi_\tau - \varphi$. В силу (1), (2) имеем

$$\varphi_\tau - \varphi = \{(A+\tau I)^{-1} A - I\} B\psi = -\tau B (A+\tau I)^{-1} \psi, \tag{4}$$

где $\varphi = B\psi$, $\|\psi\| \leqslant 1$.

Функция $w_\tau = \tau (A+\tau I)^{-1} \psi$ удовлетворяет неравенствам

$$\|w_\tau\| \leqslant 1, \quad \|Aw_\tau\| \leqslant \tau, \quad \|ABw_\tau\| \leqslant \tau. \tag{5}$$

Действительно, в силу положительной определенности оператора A, для любой функции w

$$\left.\begin{aligned} &\|(A+\tau I) w\| \geqslant \|Aw\|, \\ &\|(A+\tau I) w\| \geqslant \tau \|w\|, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

откуда, взяв в качестве w функцию $(A+\tau I)^{-1} w$, находим

$$\left.\begin{aligned} &\|A (A+\tau I)^{-1} w\| \leqslant \|w\|, \\ &\|(A+\tau I)^{-1} w\| \leqslant \frac{1}{\tau} \|w\|. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из неравенств (7) уже следуют неравенства (5). Из неравенств (6) и из неравенства (3) получаем

$$\|Bw_\tau\| = \|\varphi_\tau - \varphi\| \leqslant \omega(\tau). \tag{8}$$

Таким образом, если функция f такова, что уравнение (1) разрешимо, то $\varphi_\tau \to \varphi$ по норме при $\tau \to 0$.

Пусть теперь правая часть f известна с точностью до ε, т. е. известна функция f_ε такая, что

$$\|f-f_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

Обозначим через $\varphi_{\tau\varepsilon}$ функцию

$$\varphi_{\tau\varepsilon}=(A+\tau I)^{-1}f_\varepsilon$$

и оценим разность $\varphi-\varphi_{\tau\varepsilon}$. В силу (7), (8) имеем

$$\|\varphi-\varphi_{\tau\varepsilon}\|\leqslant\omega(\tau)+\|(A+\tau I)^{-1}(f-f_\varepsilon)\|\leqslant\omega(\tau)+\varepsilon/\tau. \tag{9}$$

Если τ есть корень уравнения $\tau\omega(\tau)=\varepsilon$, то из неравенства (9) следует

$$\|\varphi-\varphi_{\tau\varepsilon}\|\leqslant 2\omega(\tau).$$

Очевидно, что τ, и, значит, $\omega(\tau)$, стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, функцию $\varphi_{\tau\varepsilon}$ можно считать приближенным решением уравнения (1). Заметим, что определение функции $\varphi_{\tau\varepsilon}=(A+\tau I)^{-1}f_\varepsilon$ эквивалентно решению операторного уравнения 2-го рода

$$\tau\varphi_{\tau\varepsilon}+A\varphi_{\tau\varepsilon}=f_\varepsilon.$$

Применительно к уравнению Фредгольма (1′) это означает, что мы рассматриваем вместо (1′) уравнение 2-го рода

$$\tau\varphi(t)+\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds=f_\varepsilon(t).$$

Приведем один относящийся сюда результат В. К. Иванова. Пусть имеем интегральное уравнение

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds=f(t)$$

с симметричным, замкнутым, положительно определенным ядром. Пусть решение $\varphi_0(t)$ этого уравнения существует и принадлежит $L_2[a,b]$ или $C[a,b]$. Пусть, далее, $\varphi(t;\tau,\varepsilon)$ — решение уравнения

$$\tau\varphi(t)+\int_a^b (K(t,s)\varphi(s)\,ds=f_\varepsilon(t),\qquad \tau>0,$$

где

$$\| f(t) - f_\varepsilon(t) \| < \varepsilon.$$

Исследуется асимптотика функций $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$, для которых

$$\varphi(t;\ \tau,\ \varepsilon(\tau)) \to \varphi_0(t) \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{10}$$

Оказывается, что для сильной L_2-сходимости в (10) необходимо и достаточно, чтобы $\varepsilon = o(\sqrt{\tau})$. Для равномерной сходимости в (10) в некоторых случаях достаточно, чтобы $\varepsilon = o(\tau)$. Выбор величины τ очень существен, но сопряжен с большими трудностями. Зачастую величину τ подбирают эмпирически, с помощью анализа модельных задач с известными решениями.

ГЛАВА VIII

НЕФРЕДГОЛЬМОВЫ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 35. Нефредгольмовы интегральные уравнения

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds. \tag{1}$$

Если ядро $K(t, s)$ уравнения (1) интегрируемо с квадратом по основному прямоугольнику $Q\,\{a \leqslant t,\ s \leqslant b\}$ (a, b могут быть и бесконечными):

$$\int_a^b\int_a^b |K(t, s)|^2\,dt\,ds<+\infty, \tag{2}$$

то для уравнения (1) справедливы теоремы Фредгольма.

В частности, спектр уравнения (1), т. е. множество характеристических чисел, дискретен и каждому характеристическому числу отвечает на более чем конечное число линейно независимых собственных функций (характеристические числа имеют конечную кратность).

Если условие (2) не выполнено, то у интегрального уравнения (1) спектр может быть непрерывным, т. е. характеристические числа могут заполнять целые интервалы, и могут быть характеристические числа бесконечной кратности.

Покажем это на примерах.

Рассмотрим уравнение Лалеско — Пикара

$$\varphi(t)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|}\varphi(s)\,ds \tag{3}$$

(λ — действительный параметр).

Ядро этого уравнения $K(t, s) = e^{-|t-s|}$ не удовлетворяет условию (2). В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t, s)|^2\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t-s|}ds \tag{4}$$

и, как было показано во введении (см. стр. 11), этот интеграл расходится.

Если $\varphi(t)$ дважды дифференцируема, то интегральное уравнение (3), которое можно записать в виде

$$\varphi(t) = \lambda\left[e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{s}\varphi(s)\,ds + e^{t}\int_{t}^{+\infty} e^{-s}\varphi(s)\,ds\right], \tag{5}$$

эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varphi''(t) + (2\lambda - 1)\,\varphi(t) = 0, \tag{6}$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(t) = C_1e^{rt} + C_2e^{-rt}, \tag{7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а

$$r = \sqrt{1 - 2\lambda}.$$

Для существования интеграла (3) необходимо, чтобы действительная часть r была по модулю меньше единицы, т. е. чтобы λ было больше нуля. Следовательно, спектр уравнения (3) есть бесконечный интервал $0 < \lambda < +\infty$. Каждая точка этого интервала является характеристическим числом уравнения (3) кратности два: каждому $\lambda \in (0, +\infty)$ отвечают две линейно независимые гладкие собственные функции e^{rt} и e^{-rt}. Однако, как нетрудно видеть, эти функции не принадлежат классу $L_2(-\infty, +\infty)$.

При $\lambda > 1/2$ собственными функциями, согласно (7), являются $\sin\sqrt{2\lambda - 1}\,t$, $\cos\sqrt{2\lambda - 1}\,t$; при $\lambda = 1/2$ имеем $\varphi(t) = C_1 + C_2t$.

Таким образом, при $\lambda \geqslant 1/2$ существуют ограниченные в $(-\infty, +\infty)$ собственные функции, но не принадлежащие $L_2(-\infty, +\infty)$. Из этого примера видна существенная роль класса функций, в котором ищется решение интегрального уравнения.

Так, если искать решение в классе дважды дифференцируемых функций, то все значения $\lambda \in (0, +\infty)$ являются характеристическими.

Если искать решение уравнения (3) в классе ограниченных в $(-\infty, +\infty)$ функций, то характеристическими являются все значения $\lambda > 1/2$.

Если же решение уравнения (3) ищется в классе $L_2(-\infty, +\infty)$, то при любом значении $\lambda > 0$ уравнение имеет лишь тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$, т. е. для решений из $L_2(-\infty, +\infty)$ ни одно из значений λ не является характеристическим.

Рассмотрим еще пример. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная абсолютно интегрируемая на $[0, +\infty)$ функция, имеющая на любом конечном интервале оси Ox конечное число максимумов и минимумов.

Построим косинус-преобразование Фурье этой функции

$$\varphi_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \cos \omega x \, dx.$$

Тогда

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi_1(\omega) \cos \omega x \, d\omega.$$

Складывая эти две формулы, получим

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} [\varphi(t) + \varphi_1(t)] \cos xt \, dt,$$

т. е. при любом выборе функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, функция $\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x)$ является собственной функцией интегрального уравнения

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \psi(t) \cos xt \, dt, \tag{8}$$

соответствующего характеристическому значению $\lambda = \sqrt{2/\pi}$. Так как $\varphi(x)$ — произвольная функция, то, следовательно, при указанном значении λ уравнение (8) имеет бесконечно много линейно независимых собственных функций.

Возьмем, например, $\varphi(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos xt\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Поэтому

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}. \tag{9}$$

Подставляя $\psi(x)$ в уравнение (8), будем иметь

$$e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} =$$

$$= \lambda \left[\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos xt\, dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{a \cos xt}{a^2 + t^2}\, dt \right]. \tag{10}$$

Но

$$\int_a^{+\infty} e^{-at} \cos xt\, dt = \frac{a}{a^2 + x^2},$$

а второй интеграл в правой части (10) найдем, используя теорему Коши о вычетах, что дает

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}.$$

Таким образом, из (10) получаем

$$e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} = \lambda \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} + \frac{a}{a^2 + x^2} \right],$$

откуда видно, что если $\lambda = \sqrt{2/\pi}$, то функция

$$\psi(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} \neq 0$$

будет решением интегрального уравнения (8). Следовательно, $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ есть характеристическое число уравнения (8), а функция $\psi(x)$ — соответствующая собственная функция, причем, поскольку $a > 0$ — любое действительное число, характеристическому числу $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ отвечает бесконечное множество линейно независимых собственных функций (9).

§ 36. Сингулярные интегральные уравнения. Преобразования Гильберта

Мы показали (см. § 15), что интегральное уравнение Фредгольма с ядром $K(t, s)$, имеющим слабую особенность

$$K(t, s)=\frac{H(t, s)}{|t-s|^{\alpha}} \qquad (0<\alpha<1;\ H(t, s) \text{ ограничена}),$$

может быть преобразовано в уравнение Фредгольма с ограниченным ядром. При этом весьма существенно предположение, что $\alpha < 1$.

Если ядро имеет неинтегрируемые особенности, то соответствующий интегральный оператор теряет свойство полной непрерывности и само определение интегрального оператора нуждается в уточнении.

Во многих прикладных задачах, в частности в аэродинамике, приходится иметь дело с ядрами, у которых $\alpha = 1$. В этом случае интеграл в уравнении следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Главным значением по Коши несобственного интеграла по отрезку $[a, b]$ от функции $f(x)$, не ограниченной в окрестности точки x_0, $a < x_0 < b$, называется предел (если он существует)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$
$$(0<\varepsilon\leqslant\min\{x_0-a,\ b-x_0\}).$$

Для его обозначения применяют символы

$$\mathrm{V.p.}\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int_a^{*b} f(x)\,dx.$$

Интегралы в смысле главного значения иногда называют *особыми* или *сингулярными* интегралами.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x)=\frac{1}{x-c}$, где $c\in(a, b)$. Тогда

$$\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon_2}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{I}$$

Ясно, что предел этой суммы при независимом стремлении к нулю ε_1 и ε_2 не существует, т. е. не существует несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Тогда предел выражения (I) при $\varepsilon \to 0$ существует и есть по определению главное значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$:

$$\text{V. p.} \int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}. \tag{II}$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ *условию Гёльдера*, если при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant C\,|x_2 - x_1|^{\alpha},$$

где C и α — некоторые положительные постоянные. При $\alpha = 1$ это условие совпадает с условием Липшица. Мы будем предполагать, что $0 < \alpha \leqslant 1$. Ясно, что функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке. Справедливо следующее утверждение.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Гёльдера, то для любого $\xi \in (a, b)$ интеграл $\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-\xi}\,dx$ (сингулярный интеграл Коши) существует в смысле главного значения.

Действительно,

$$\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-\xi}\,dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,dx + f(\xi)\int\limits_a^b \frac{dx}{x-\xi}. \tag{III}$$

В силу условия Гёльдера

$$\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\right| \leqslant \frac{C}{|x-\xi|^{1-\alpha}} \qquad (\alpha > 0),$$

поэтому первый интеграл в правой части (III) существует как несобственный. Второй интеграл существует в силу формулы (II). Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-\xi}\,dx$ существует в смысле главного значения, причем

$$\mathrm{V.\,p.}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{x-\xi}\,dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,dx + f(\xi)\ln\frac{b-\xi}{\xi-a}.$$

Сингулярным интегральным уравнением будем называть уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак сингулярного интеграла.

Преобразования Гильберта

Одни из первых результатов, связанных с сингулярными интегральными операторами, представляют собой две формулы взаимности, выведенные Д. Гильбертом.

Интегральная формула Фурье может быть записана в виде

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]\,dt, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos ut\,du, \\ b(t) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin ut\,du. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Интеграл в (1) формально есть предел при $y \to 0$ интеграла

$$U(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]\,e^{-yt}\,dt, \tag{3}$$

а последний представляет собой вещественную часть функции

$$\Phi(z) = \int\limits_0^{+\infty} [a(t) - ib(t)]\,e^{izt}\,dt, \tag{4}$$

где $z = x + iy$.

Мнимая часть функции $\Phi(z)$ есть

$$V(x, y) = -\int_0^{+\infty} [b(t)\cos xt - a(t)\sin xt]\, e^{-yt}\, dt. \tag{5}$$

Полагая $-V(x, 0) = g(x)$, получаем

$$g(x) = \int_0^{+\infty} [b(t)\cos xt - a(t)\sin xt]\, dt \tag{6}$$

или, подставляя вместо $b(t)$ и $a(t)$ их выражения из (2),

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin(u - x)\, t\, du. \tag{7}$$

Интеграл (7) называется *сопряженным* интегралом к интегралу Фурье. Он получается формально из (1) заменой $a(t)$ на $b(t)$ и $b(t)$ на $-a(t)$.

Повторяя этот процесс, мы возвращаемся к исходному интегралу со знаком минус, т. е.

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\sin(u - x)\, t\, du.$$

Таким образом, соотношение между $f(x)$ и $g(x)$ «*косо-взаимное*», т. е. взаимное с точностью до знака.

Далее, имеем формально

$$g(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(u - x)\, t\, f(u)\, du =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos\lambda(u - x)}{u - x} f(u)\, du =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos\lambda t}{t}\, [f(x + t) - f(x - t)]\, dt.$$

Если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то часть последнего интеграла, содержащая $\cos\lambda t$, будет при $\lambda\to\infty$ стремиться к нулю и мы будем иметь

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t}\, dt \tag{8}$$

Аналогично

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t}\,dt. \tag{9}$$

Двойственность, выражаемая формулами (8), (9), была впервые замечена Гильбертом, и две функции, связанные этими формулами, называют *парой преобразований Гильберта*. Формулы (8), (9) эквивалентны формулам

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\pi}\,\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \\ f(x) &= -\frac{1}{\pi}\,\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t-x}\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где V.p. означают главное значение интеграла при $t = x$.

Можно показать, что *если* $f(x)$ *удовлетворяет на* $(-\infty, +\infty)$ *условию Гёльдера и* $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, *то двойственные соотношения* (10) *имеют место*. При этом $g(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f(x)$.

Каждая из этих формул может рассматриваться как интегральное уравнение 1-го рода; тогда вторая формула дает решение этого уравнения.

Пусть

$$f(x) = \mathscr{H}[\varphi] \equiv \frac{1}{\pi}\,\text{V. p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy, \tag{11}$$

где $\mathscr{H}[\quad]$ — преобразование Гильберта, определяемое интегралом в (11).

Справедлива следующая теорема ([40]).

Теорема 8.1 (обращения). *Если функция* $\varphi(x) \in L_p(-\infty, +\infty)$, *где* $p > 1$, *то формула* (11) *определяет почти всюду некоторую функцию* $f(x)$, *также принадлежащую* $L_p(-\infty, +\infty)$, *преобразование Гильберта* $\mathscr{H}[f]$ *которой почти всюду совпадает с* $-\varphi(x)$, *т. е.*

$$\mathscr{H}\{\mathscr{H}[\varphi]\} = -\varphi. \tag{12}$$

С помощью преобразования Гильберта (11) легко решаются в $L_p(-\infty, +\infty)$ интегральные уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy = f(x) \tag{13}$$

или, символически,

$$\varphi(x) - \lambda\pi\mathscr{H}[\varphi] = f(x), \quad f(x) \in L_p(-\infty, +\infty). \tag{14}$$

Применяя преобразование Гильберта к обеим частям (14) и используя соотношение (12), получаем

$$\mathscr{H}[\varphi] + \lambda\pi\varphi = \mathscr{H}[f]. \tag{15}$$

Из (14) и (15) находим

$$(1 + \lambda^2\pi^2)\,\varphi(x) = f(x) + \lambda\pi\mathscr{H}[f]$$

или

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[f(x) + \lambda\,\mathrm{V.\,p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-x}\, dy\right], \tag{16}$$

$$1 + \lambda^2\pi^2 \neq 0, \quad \varphi(x) \in L_p(-\infty, +\infty).$$

Можно рассматривать и более сложные уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\, dy = f(x)$$

с ядром

$$K(x, y) = \frac{1}{y-x} + K_0(x, y),$$

где $K_0(x, y)$, например, ограниченная функция.

Преобразования Гильберта часто рассматриваются в иной форме:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2}\, dt, \\ \varphi(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{*\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t-x}{2}\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условию Гёльдера на $[-\pi, \pi]$, причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, dx = 0. \tag{18}$$

(Вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ можно брать любой фиксированный отрезок длины 2π.)

Отметим следующий важный факт. Оператор Гильберта $\mathscr{H}$ обладает тем свойством, что $\mathscr{H}^2 = -I$, где I — единичный оператор. В бесконечномерном пространстве оператор I (а значит, и $-I$) не является вполне непрерывным. Произведение двух вполне непрерывных операторов есть вполне непрерывный оператор. Поэтому из того, что $\mathscr{H}^2 = -I$, следует, что оператор $\mathscr{H}$ *ограниченный, но не вполне непрерывный оператор*.

В этом состоит глубокая причина отличия сингулярных операторов от фредгольмовых, которая влечет за собой существенно новые моменты в вопросах о разрешимости сингулярных интегральных уравнений.

Остановимся на этом несколько подробнее.

При рассмотрении уравнений Фредгольма с вырожденным ядром мы установили, что вопрос о разрешимости таких уравнений эквивалентен вопросу о разрешимости соответствующей системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Каждую такую систему можно записать в виде одного уравнения:

$$\mathfrak{A}\varphi = f, \tag{19}$$

где f — заданный вектор, φ — искомый вектор-решение, $\mathfrak{A}$ — линейный оператор в n-мерном евклидовом пространстве R^n, определяемый матрицей системы.

Напомним основные факты из линейной алгебры, относящиеся к системе (19).

1. Уравнение (19) разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ имеет только тривиальное решение $\varphi = \theta$.

2. Уравнение (19) разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда сопряженное уравнение

$$\mathfrak{A}^*\psi = h \tag{20}$$

разрешимо при любой правой части.

3. Уравнения $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ и $\mathfrak{A}^*\psi = \theta$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

4. Если однородное уравнение $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ имеет нетривиальные решения, то неоднородное уравнение (19) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть f ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения $\mathfrak{A}^*\psi = \theta$.

Утверждения 1, 3, 4 составляют как раз содержание теорем Фредгольма, справедливых и для общих интегральных уравнений Фредгольма с L_2-ядром (благодаря возможности аппроксимации последних конечномерными операторами). Таким образом, основные свойства фредгольмовых операторов аналогичны свойствам линейных операторов $\mathfrak{A}$, действующих в конечномерном пространстве R^n:

$$R^n \xrightarrow{\mathfrak{A}} R^n.$$

Рассмотрим теперь систему m линейных уравнений с n неизвестными при $m \neq n$. Здесь возникает несколько иная ситуация.

Записав такую систему опять в виде

$$\mathfrak{A}\varphi = f, \tag{19}$$

замечаем, что теперь оператор $\mathfrak{A}$ следует рассматривать как оператор из n-мерного пространства R^n в m-мерное пространство R^m:

$$R^n \xrightarrow{\mathfrak{A}} R^m.$$

В сопряженном уравнении (20):

$$R^m \xrightarrow{\mathfrak{A}^*} R^n.$$

Если, например, $n > m$, т. е. число неизвестных больше числа уравнений, то однородное уравнение $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ всегда имеет нетривиальное решение независимо от того, разрешима система (19) или нет. Таким образом, свойство 1 нарушается; нарушается также свойство 2. Вместо этих свойств имеют место следующие:

1′. Уравнение (19) разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда однородное уравнение $\mathfrak{A}^*\psi = \theta$ имеет лишь тривиальное решение.

2'. Уравнение $\mathfrak{A}^*\psi = h$ разрешимо при любой правой части тогда и только тогда, когда однородное уравнение $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ имеет лишь тривиальное решение.

Изменяется и свойство 3. Если ранг матрицы $\mathfrak{A}$ равен r, то однородная система $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ имеет $n - r$ линейно независимых решений, а сопряженная однородная система $\mathfrak{A}^*\psi = \theta$ имеет $m - r$ таких решений. Эти числа в общем случае не равны, но их разность не зависит от r (т. е. от оператора $\mathfrak{A}$) и равна $n - m$.

Таким образом, вместо свойства 3 мы имеем теперь свойство 3'.

3'. Для любого уравнения (19) разность между максимальным числом линейно независимых решений однородного уравнения $\mathfrak{A}\varphi = \theta$ и максимальным числом линейно независимых решений сопряженного ему уравнения $\mathfrak{A}^*\psi = \theta$ одна и та же и равна $n - m$.

Число

$$\varkappa = n - m$$

называется *индексом системы*. Он может быть как положительным, так и отрицательным.

Свойство 4 остается в силе.

Эта ситуация, возникающая при $n \neq m$, имеет место и в вопросах разрешимости сингулярных интегральных уравнений.

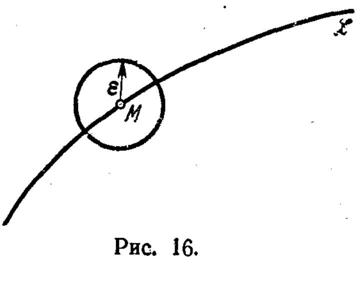

Рис. 16.

Рассмотрим этот вопрос, предварительно распространив понятие главного значения на контурные интегралы. Сингулярные интегралы играют большую роль в теории функций комплексной переменной и ее приложениях (в теории упругости, гидромеханике и т. д.). Поэтому сформулируем это понятие для интегралов от функции комплексной переменной. Пусть $\mathscr{L}$ — гладкая кривая (замкнутая или незамкнутая) и c — комплексная координата некоторой точки M на $\mathscr{L}$. Вырежем точку M окружностью радиуса ε с центром в точке M (рис. 16). Оставшуюся часть контура обозначим $\mathscr{L}_\varepsilon$. Допустим, что функция $f(z)$ интегрируема по $\mathscr{L}_\varepsilon$, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, и неограничена по модулю при $z \to c$. *Сингулярным интегралом* (*главным значением интеграла*) *функции* $f(z)$ *по* $\mathscr{L}$ называют предел (если он существует)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathscr{L}_\varepsilon} f(z)\,dz$$

и обозначают его символом $\int\limits_{\mathscr{L}} f(z)\,dz$.

Будем говорить, что функция $f(z)$ удовлетворяет на кривой $\mathscr{L}$ условию Гёльдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, если для любых точек z_1, z_2 кривой $\mathscr{L}$ выполняется неравенство

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant C\,|z_2 - z_1|^\alpha \quad (C > 0 \text{ — постоянная}).$$

Можно показать, что если $f(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathscr{L}$, то сингулярный интеграл $\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$ существует для всех точек z кривой $\mathscr{L}$, кроме, может быть, ее концов.

Рассмотрим простейшее сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши:

$$A\varphi(t) \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{21}$$

так называемое характеристическое сингулярное уравнение *). Здесь Γ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений на комплексной плоскости; коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на Γ, причем $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ (невырожденный случай).

Введем понятие *индекса функции*. Пусть Γ — гладкий замкнутый контур и $G(t)$ — заданная на нем непрерывная функция, не обращающаяся в нуль.

Определение. *Индексом* $\varkappa$ *функции* $G(t)$ *по контуру* Γ *называется разделенное на* 2π *приращение ее*

*) Теория сингулярных интегральных уравнений типа (21) начала разрабатываться почти непосредственно вслед за возникновением теории уравнений Фредгольма. Начало было положено А. Пуанкаре, разрабатывавшим общую теорию приливов, и Д. Гильбертом — в связи с граничными задачами теории аналитических функций.

аргумента при обходе кривой Г *в положительном направлении*:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_\Gamma, \tag{22}$$

где символ $[\omega]_\Gamma$ *обозначает приращение некоторой величины* ω *при обходе контура* Г.

Как известно,

$$\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t).$$

После обхода замкнутого контура Г величина $|G(t)|$ возвращается к своему начальному значению. Поэтому

$$[\arg G(t)]_\Gamma = \frac{1}{i} [\ln G(t)]_\Gamma,$$

так что

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_\Gamma.$$

Пусть $G(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда индекс функции $G(t)$ можно представить в виде интеграла:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln G(t). \tag{23}$$

В силу непрерывности $G(t)$ приращение аргумента $G(t)$ при обходе контура Г должно быть кратным 2π.

Следовательно, индекс функции, непрерывной на замкнутом контуре Г и нигде не обращающейся в нуль, есть целое число или нуль.

Из определения индекса непосредственно следует, что *индекс произведения функций равен сумме индексов сомножителей; индекс частного равен разности индексов делимого и делителя.*

Если функция $G(t)$ дифференцируема и представляет собой граничное значение аналитической внутри или вне контура Г функции $G(z)$, то

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{G'(t)}{G(t)}\, dt, \tag{24}$$

т. е. индекс функции $G(t)$ равен логарифмическому вычету функции $G(z)$.

Из принципа аргумента ([16]) вытекает следующее предложение.

Если функция $G(z)$ аналитична всюду внутри контура Γ, *за исключением конечного числа полюсов, непрерывна на* Γ *и не обращается на* Γ *в нуль, то индекс* $G(t)$ *равен разности числа нулей и числа полюсов функции* $G(z)$ *внутри контура* Γ.

При этом нули и полюсы считаются столько раз, какова их кратность.

Пример. Вычислить индекс функции $G(t) = t^n$ по любому замкнутому контуру Γ, однократно обходящему начало координат.

Решение. Функция $G(z) = z^n$ аналитична всюду внутри Γ и имеет один нуль порядка n внутри контура. Поэтому $\varkappa = n$.

Назовем *индексом* $\varkappa(A)$ *интегрального уравнения* (21) индекс функции

$$\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Пользуясь формулой (24), получаем явную формулу для индекса этого уравнения:

$$\varkappa(A) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{25}$$

Уравнение

$$A^* \psi(t) \equiv a(t)\, \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b(\tau)\, \psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = h(t), \tag{26}$$

получаемое перестановкой t и τ в ядре уравнения (21), называется *союзным* или *сопряженным* уравнению (21). Оператор A^* называется *союзным* (*сопряженным*) оператору A. Для него индекс $\varkappa^* = -\varkappa$.

Для сингулярных интегральных уравнений теоремы Фредгольма замещают теоремы Ф. Нётера ([7]).

Теорема 8.2. *Разность числа n линейно независимых решений однородного уравнения $A\varphi = 0$ и числа n' линейно независимых решений союзного уравнения $A^*\psi = 0$ равна индексу $\varkappa$ оператора A*:

$$n - n' = \varkappa(A).$$

Эта теорема выражает характернейшее свойство сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Теорема 8.3. *Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения*

$$A\varphi = f$$

является выполнение равенств

$$\int_{\Gamma} f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n'),$$

где $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n'}(t)$ — *полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения* $A^*\psi = 0$.

Если индекс оператора $\varkappa = 0$, то теорема 8.2 Нётера совпадает со второй теоремой Фредгольма. В этом случае для сингулярного уравнения оказываются справедливыми все теоремы Фредгольма. Поэтому сингулярные интегральные уравнения с нулевым индексом называют *квазифредгольмовыми*.

Мы предполагали, что $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ на контуре Γ. В исключительных случаях, когда $a^2(t) - b^2(t) = 0$, для сингулярных интегральных уравнений и теоремы Нётера оказываются, вообще говоря, несправедливыми.

Приведем некоторые примеры ([20]).

Пусть Γ — гладкий замкнутый контур, лежащий в комплексной плоскости, и пусть D — область, ограниченная этим контуром. Сингулярный интеграл

$$\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{27}$$

с ядром Коши $\dfrac{1}{\tau - t}$ существует почти всюду, если $\varphi(t)$ — суммируемая функция (это вытекает из исследований И. И. Привалова о предельных значениях интеграла типа Коши).

Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на Γ. Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

Пусть $z \to t \in \Gamma$. Предельные значения функции $\Phi(z)$, когда $z \to t$ соответственно изнутри или извне Γ, обозначим $\Phi_i(t)$ и $\Phi_e(t)$. По теореме Сохоцкого — Племеля ([16])

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$\Phi_e(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Тогда $\Phi(z) \equiv 0$ вне Γ и $\Phi_e(t) \equiv 0$, так что

$$\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \equiv 0. \tag{28}$$

Это означает, что $\lambda = 1$ есть характеристическое число сингулярного интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \tag{29}$$

и этому характеристическому числу соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций — предельных значений на Γ функций $\varphi(z)$, аналитических в D и непрерывных в $\overline{D}$.

Если $\varphi(z)$ аналитична вне Γ и $\varphi(\infty) = 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$ внутри Γ и $\Phi_i(t) \equiv 0$, так что

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \equiv 0. \tag{30}$$

Это тождество означает, что уравнение (29) имеет еще одно характеристическое число $\lambda = -1$, которому также соответствует бесконечное множество линейно независимых собственных функций. Ими являются предельные значения на Γ функций, аналитичных вне Γ, обращающихся в нуль на бесконечности и непрерывных вплоть до Γ. Таким образом, для уравнения (29) неверны теоремы Фредгольма и Нётера, по которым каждому характеристическому числу отвечает лишь конечное число линейно независимых собственных функций. Здесь налицо исключительный случай $a^2 - b^2 \equiv 0$.

Приведем еще пример. Пусть Γ — окружность радиуса единица с центром в начале координат, и пусть $|\lambda| > 1$. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \frac{\lambda}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{t}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau - \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{t}{\tau}\varphi(\tau)\,d\tau = 0. \quad (31)$$

Используя соотношения (28) и (30), убеждаемся, что уравнению (31) удовлетворяет функция

$$\varphi(t) = \frac{t}{\lambda t - 1}.$$

Это означает, что однородное уравнение (31) имеет нетривиальное решение при любом λ таком, что $|\lambda| > 1$, т. е. всякое такое λ является характеристическим числом уравнения (31).

Таким образом, совокупность характеристических чисел уравнения (31) заполняет всю внешность единичного круга $|\lambda| = 1$, т. е. является заведомо несчетным множеством.

Отметим в заключение, что сингулярное уравнение с ядром Гильберта

$$A\varphi(t) \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\varphi(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,d\tau = f(t)$$

приводится к уравнению с ядром Коши с помощью подстановки $z = e^{it}$, $\xi = e^{i\tau}$, причем контуром Γ будет окружность $|\xi| = 1$.

Детально с вопросами, относящимися к сингулярным интегральным уравнениям, можно познакомиться, например, в книге [7] или [24].

ГЛАВА IX

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основы теории нелинейных интегральных уравнений были заложены в работах А. М. Ляпунова, Л. Лихтенштейна, Э. Шмидта, П. С. Урысона, А. Гаммерштейна.

Разработана она значительно меньше, чем теория линейных интегральных уравнений.

§ 37. Уравнения Гаммерштейна

В свое время (стр. 74) мы рассмотрели нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t, s;\ \varphi(s))\,ds+f(t) \tag{1}$$

и установили, что если функция $K(t, s; z)$ удовлетворяет условию Липшица по своему функциональному аргументу z:

$$|K(t, s;\ z_2)-K(t, s;\ z_1)|\leqslant \mathscr{L}\,|z_2-z_1|$$

и

$$|\lambda|<\frac{1}{\mathscr{L}(b-a)},$$

то в силу принципа сжатых отображений уравнение (1) имеет при указанных значениях λ единственное непрерывное решение.

Рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(t)=\int_a^b K(t, s)\,\Psi(s, \varphi(s))\,ds+f(t). \tag{2}$$

Здесь $K(t, s)$, $\Psi(s, z)$, $f(t)$ — известные функции, $\varphi(t)$ — искомая функция. Функцию $K(t, s)$ называют *ядром* уравнения (2).

Пусть $K(t, s)$ — симметричное L_2-ядро и функция $f(t) \in L_2[a, b]$. Нетрудно показать (см. [25]), что для любой функции $g(t) \in L_2[a, b]$ справедлива оценка (нормы берутся в $L_2[a, b]$)

$$\left\| \int_a^b K(t, s) g(s) \, ds \right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \|g\|, \tag{3}$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число ядра $K(t, s)$.

Покажем, что *если в уравнении* (2) *функция* $\Psi(s, z)$ *такова, что*

$$|\Psi'_z(s, z)| \leqslant \alpha < |\lambda_1|,$$

то это уравнение имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Действительно, правая часть (2) определяет отображение $A\varphi$ пространства $L_2[a, b]$ в себя. Имеем

$$\begin{aligned} \|A\varphi_2 - A\varphi_1\| &= \\ &= \left\| \int_a^b K(t, s) [\Psi(s, \varphi_2(s)) - \Psi(s, \varphi_1(s))] \, ds \right\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} \|\Psi(s, \varphi_2(s)) - \Psi(s, \varphi_1(s))\| \leqslant \frac{\alpha}{|\lambda_1|} \|\varphi_2 - \varphi_1\|, \end{aligned}$$

так что отображение $A\varphi$ — сжимающее, и наше утверждение вытекает из принципа сжатых отображений.

Рассмотрим важный частный случай уравнения (2). Предположим, что ядро $K(t, s)$ уравнения Гаммерштейна (2) вырожденное, т. е.

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) b_i(s). \tag{4}$$

Уравнение (2) принимает в этом случае вид

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \int_a^b b_i(s) \Psi(s, \varphi(s)) \, ds + f(t) \tag{5}$$

и называется *вырожденным уравнением Гаммерштейна*. Положим

$$c_i = \int_a^b b_i(s)\Psi(s, \varphi(s))\,ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6}$$

где c_i — пока неизвестные постоянные. Тогда в силу (5) будем иметь

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i(t) + f(t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), приходим к системе нелинейных уравнений (вообще, трансцендентных)

$$\int_a^b b_i(s)\Psi\left(s, \sum_{i=1}^{m} c_i a_i(s) + f(s)\right) ds = c_i \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

равносильной уравнению (5).

Если существует решение системы (8), т. е. существует m чисел $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_m^0$ таких, что подстановка их в систему (8) обращает ее уравнения в тождества, то существует решение интегрального уравнения (5), определяемое равенством

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i^0 a_i(t) + f(t).$$

Таким образом, число решений (вообще, комплексных) интегрального уравнения (5) равно числу решений системы (8).

Уже на простейших примерах уравнений Гаммерштейна можно увидеть ряд новых явлений, специфических для нелинейных уравнений и не имеющих места в линейных задачах.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 t^2 s \varphi^2(s)\,ds. \tag{9}$$

Положим

$$c = \int_0^1 s\varphi^2(s)\,ds. \tag{10}$$

Тогда

$$\varphi(t)=c\lambda t^2.$$

Подставляя это выражение для $\varphi(t)$ в (10), будем иметь

$$c=\frac{c^2\lambda^2}{6}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет два решения: $c_1=0$, $c_2=6/\lambda^2$. Следовательно, исходное интегральное уравнение также имеет два решения *при любом* $\lambda \neq 0$:

$$\varphi_1(t)\equiv 0, \qquad \varphi_2(t)=\frac{6}{\lambda}t^2.$$

Заметим, что линейное однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^1 t^2 s\varphi(s)\,ds$$

с тем же ядром $K(t, s)=t^2s$ имеет ненулевое решение лишь при одном значении λ, именно $\lambda=4$, являющемся характеристическим числом ядра $K(t, s)$. Поэтому, если по аналогии с линейным случаем считать характеристическим значение λ, при котором уравнение (9) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, то здесь получаются бесконечные интервалы характеристических чисел $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$.

При решении интегрального уравнения

$$\varphi(t)=\int_0^1 a(t)\,a(s)\,\varphi(s)\sin\left(\frac{\varphi(s)}{a(s)}\right)ds \qquad (12)$$

$$(a(t)>0 \text{ для всех } t\in[0, 1])$$

для определения постоянной c приходим к уравнению

$$1=\int_0^1 a^2(s)\,ds\sin c. \qquad (13)$$

Если $\int_0^1 a^2(s)\,ds<1$, то уравнение (13), а следовательно, и (12) не имеют действительных решений.

Если $\int\limits_0^1 a^2(s)\,ds > 1$, то уравнение (13) и, следовательно, исходное уравнение (12) имеют бесконечное множество действительных решений.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int\limits_0^1 \varphi^2(s)\,ds. \tag{14}$$

Положим

$$c = \int\limits_0^1 \varphi^2(s)\,ds. \tag{15}$$

Тогда

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c. \tag{16}$$

Подставляя $\varphi(t)$ из (16) в (15), получим

$$\lambda^2 c^2 + (2\lambda - 1)c + 1 = 0,$$

откуда

$$c = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}$$

и

$$\varphi(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}. \tag{17}$$

Таким образом, уравнение (14) допускает действительные решения только при $\lambda \leqslant 1/4$. Оно имеет два решения при $\lambda < 1/4$ и одно решение $\varphi(t) = 2$ при $\lambda = 1/4$ (при $\lambda = 0$ имеется одно ограниченное решение $\varphi(t) = 1$).

Соответствующее уравнение без свободного члена

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_0^1 \varphi^2(s)\,ds$$

всегда допускает нетривиальные решения $\varphi(t) = 1/\lambda$ ($\lambda \neq 0$). Но это, как мы видим, не означает, что уравнение (14) со свободным членом имеет бесконечное множество решений. Точно так же наличие при некотором λ у нелинейного уравнения без свободного члена $f(t)$ только нулевого решения вовсе не означает, что соответствующее уравнение со свободным членом $f(t)$ имеет ровно одно решение.

Теоремы Фредгольма, касающиеся линейных интегральных уравнений, *здесь не имеют места*.

Для уравнения Гаммерштейна (2) с невырожденным ядром $K(t, s)$ можно построить уравнение с близким к $K(t, s)$ вырожденным ядром и решение этого последнего рассматривать как приближенное решение исходного уравнения (2).

В работе Гаммерштейна изучались нелинейные интегральные уравнения вида

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s) F(s, \varphi(s))\, ds \tag{18}$$

при следующих предположениях:

1) для *линейного* интегрального уравнения с ядром $K(t, s)$ справедливы теоремы Фредгольма, и итерированное ядро $K_2(t, s)$ непрерывно;

2) ядро $K(t, s)$ симметрично, т. е. $K(t, s) = K(s, t)$;

3) ядро $K(t, s)$ положительно определенное, т. е. все его характеристические числа положительны;

4) $F(s, z)$ — непрерывная функция своих аргументов, $a \leqslant s \leqslant b$, $|z| \leqslant M$, где $M > 0$ — достаточно большая постоянная.

Метод Гаммерштейна опирается на теорему Гильберта — Шмидта и заключается в приведении интегрального уравнения (18) к системе алгебраических или трансцендентных уравнений с помощью системы ортонормированных собственных функций симметричного ядра $K(t, s)$. Именно, если решение $\varphi(t)$ вообще существует, то в силу (18)

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s) g(s)\, ds,$$

где $g(s) = F(s, \varphi(s))$.

Так как $g(s) \in L_2[a, b]$, то $\varphi(t)$ оказывается истокообразно представимой функцией и, в силу теоремы Гильберта — Шмидта, может быть представлена сходящимся рядом

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(t), \tag{19}$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_m(t), \ldots$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(t, s)$, отвечающие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ldots$ соответственно, а $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ — некоторые неизвестные постоянные.

Так как

$$c_m = \int_a^b \varphi(t)\psi_m(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \psi_m(t)\,dt \int_a^b K(t, s)F[s, \varphi(s)]\,ds =$$

$$= \int_a^b F[s, \varphi(s)]\,ds \int_a^b K(t, s)\psi_m(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b F[s, \varphi(s)]\psi_m(s)\,ds,$$

то задача решения данного интегрального уравнения оказывается эквивалентной задаче решения бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных:

$$c_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b F\left[s, \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(s)\right]\psi_m(s)\,ds \qquad (20)$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим приближенное решение

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=1}^{n} c_{n,m}\psi_m(t), \qquad (21)$$

где n постоянных $c_{n,1}, c_{n,2}, \ldots, c_{n,n}$ должны удовлетворять следующей системе n уравнений с n неизвестными:

$$c_{n,m} = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b F\left[s, \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}\psi_k(s)\right]\psi_m(s)\,ds \qquad (22)$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n).$$

Гаммерштейн показал, что система (22) имеет по крайней мере одно решение, если функция $F(s, z)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$|F(s, z)| \leqslant C_1 |z| + C_2, \tag{23}$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные, причем $C_1 < \lambda_1$ — *наименьшего характеристического числа ядра* $K(t, s)$.

Оценку $C_1 < \lambda_1$, вообще говоря, улучшить нельзя, хотя само условие (23) можно несколько ослабить.

При этих предположениях мы строим последовательность функций

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \ldots, \quad \varphi_n(t), \ldots$$

Можно показать, что из последовательности $\{\varphi_n(t)\}$ всегда можно выбрать подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(t)\}$, сходящуюся к решению $\varphi(t)$ интегрального уравнения (18).

Таким образом, справедлива

Теорема 9.1 (существования). *Если ядро* $K(t, s)$ *уравнения* (18) *удовлетворяет условиям* 1), 2), 3) *и непрерывная функция* $F(s, z)$ *удовлетворяет условию* (23), *то нелинейное интегральное уравнение* (18) *имеет по крайней мере одно решение.*

Имеют место теоремы единственности решения уравнения (18).

Теорема 9.2. *Если для любого фиксированного* $s \in [a, b]$ *функция* $F(s, z)$ *является неубывающей функцией* z, *то нелинейное интегральное уравнение* (18) *имеет самое большее одно решение.*

Теорема 9.3. *Нелинейное интегральное уравнение* (18) *имеет самое большее одно решение, если функция* $F(s, z)$ *равномерно удовлетворяет условию Липшица*

$$|F(s, z_2) - F(s, z_1)| < \alpha |z_2 - z_1|, \tag{24}$$

где $0 < \alpha < \lambda_1$.

Приведем один весьма прозрачный критерий отсутствия решений уравнения Гаммерштейна с симметричным ядром $K(t, s)$ *).

*) Этот критерий мне любезно сообщил С. И. Похожаев.

Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s) F(s, \varphi(s))\, ds, \tag{25}$$

и пусть $\varphi_0(t)$ — собственная функция ядра $K(t, s)$, отвечающая наименьшему характеристическому числу λ_1:

$$\varphi_0(t) = \lambda_1 \int_a^b K(t, s)\, \varphi_0(s)\, ds. \tag{26}$$

Умножая обе части (25) на $\varphi_0(t)$ и интегрируя по t от a до b, получим

$$\int_a^b \varphi(t)\, \varphi_0(t)\, dt = \int_a^b \int_a^b K(t, s) F(s, \varphi(s))\, \varphi_0(t)\, ds\, dt. \tag{27}$$

Аналогично из (26) находим

$$\int_a^b \varphi_0(t)\, \varphi(t)\, dt = \lambda_1 \int_a^b \int_a^b K(t, s)\, \varphi_0(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt. \tag{28}$$

Из (27) и (28) вытекает

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s) F(s, \varphi(s))\, \varphi_0(t)\, ds\, dt =$$
$$= \lambda \int_a^b \int_a^b K(t, s)\, \varphi_0(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt = \lambda_1 \int_a^b \int_a^b K(t, s)\, \varphi_0(t)\, \varphi(s)\, ds\, dt.$$

Следовательно, необходимое условие существования решения уравнения (25) есть

$$\int_a^b \int_a^b K(t, s)\, [F(s, \varphi(s)) - \lambda_1 \varphi(s)]\, \varphi_0(t)\, ds\, dt = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что *если ядро* $K(t, s) \geqslant 0$ $(K(t, s) \not\equiv 0)$, $\varphi_0(t) \geqslant 0$ $(\varphi_0(t) \not\equiv 0)$, *то при условии, что*

$$F(s, \varphi(s)) > \lambda_1 \varphi(s) \qquad \forall s \in [a, b],$$

не существует ни одного решения уравнения (25).

Так, например, при

$$F(s, \varphi(s)) \geqslant A\varphi^2 + B,$$

где A и B таковы, что

$$A\varphi^2 + B > \lambda_1 \varphi \ \forall \varphi,$$

уравнение (25) *не имеет решений.*

§ 38. Интегральные уравнения с параметром. Дифференциал Фреше. Теорема существования абстрактной неявной функции

Интегральное уравнение часто содержит один или несколько параметров. Характер вхождения параметра в уравнение оказывается существенным. В теории линейных интегральных уравнений Фредгольма мы рассматривали параметр λ, входящий лишь в качестве множителя при ядре $K(t, s)$.

При рассмотрении интегральных уравнений с ядрами, которые являются аналитическими функциями параметра, возможны существенные отклонения от тех закономерностей, которые имели место в фредгольмовой теории.

В качестве примера рассмотрим однородное интегральное уравнение, в котором ядро (вырожденное) есть полином первой степени относительно λ:

$$\varphi(t) = \int_a^b [\rho(t)\rho(s) + \lambda\sigma(t)\rho(s)]\varphi(s)\,ds,$$

где $\rho(t)$, $\sigma(t)$ — некоторые непрерывные функции, причем

$$\int_a^b \rho^2(t)\,dt = 1, \quad \int_a^b \rho(t)\sigma(t)\,dt = 0.$$

Применяя обычный прием решения уравнения с вырожденным ядром, находим, что данное однородное уравнение *при всяком* λ имеет ненулевое решение

$$\varphi(t) = \rho(t) + \lambda\sigma(t).$$

Ряд результатов в этом направлении содержится в статье [6].

Обратимся к нелинейным интегральным уравнениям с параметром и постараемся выяснить зависимость решения этих уравнений от параметра.

Основные утверждения будем иллюстрировать на примере уравнения Урысона

$$\varphi(t) = \int_a^b K[t, s, \varphi(s); \lambda]\, ds \tag{1}$$

с одним параметром λ.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$F(\varphi, \lambda) = \theta, \tag{2}$$

где φ — элемент банахова пространства E_1, λ — числовой параметр (для простоты), а $F(\varphi, \lambda)$ — оператор со значениями в банаховом пространстве E_2. Предположим, что

$$F(\varphi_0, \lambda_0) = \theta, \tag{3}$$

т. е. φ_0 является решением уравнения (2) при $\lambda = \lambda_0$. Нас будут интересовать близкие к φ_0 решения $\varphi(\lambda)$ уравнения (2) при близких к λ_0 значениях параметра λ. Если такие решения существуют, то их называют *неявными функциями* (*абстрактными неявными функциями*), определяемыми уравнением (2).

Прежде чем формулировать условие существования неявной функции, введем следующие понятия.

Пусть E_x и E_y — линейные нормированные пространства и $y = f(x)$ — абстрактная функция (оператор), определенная на E_x с областью значений в E_y.

По аналогии с определением дифференциала функции в классическом анализе, введем определение дифференциала абстрактной функции.

Определение. *Пусть h — произвольный элемент пространства E_x, и пусть существует линейный по h оператор $l \in (E_x \to E_y)$ (вообще, зависящий от x) такой, что*

$$f(x+h) - f(x) = lh + \omega(x, h), \tag{4}$$

где

$$\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0. \tag{5}$$

Тогда lh называют сильным дифференциалом или дифференциалом Фреше функции $f(x)$ в данной точке $x \in E_x$, отвечающим приращению h аргумента, и обозначают символом $df(x, h)$.

Линейный оператор l, вообще зависящий от x, обозначают $f'(x)$. Тогда

$$df(x, h) = f'(x)h, \quad f'(x) \in (E_x \to E_y). \tag{6}$$

Оператор $f'(x)$ называют *первой сильной производной* или *производной Фреше* функции $f(x)$ в точке x.

Равенство (4) теперь можно записать в виде

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|), \tag{7}$$

где первое слагаемое правой части есть линейная функция от h (линейный оператор), а второе — более высокого порядка малости, чем $\|h\|$ при $\|h\| \to 0$.

Многие из свойств обычных производных переносятся на производные операторов. Например,

$$(cf(x))' = cf'(x),$$

где c — числовой множитель;

$$(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Если $f(x)$ действует из E_x в E_y, а $\varphi(y)$ действует из E_y в E_z, то при наличии производных $f'(x)$ и $\varphi'(y)$ имеет место формула

$$[\varphi(f(x))]' = \varphi'(f(x))f'(x),$$

где произведение справа понимается как произведение линейных операторов, действующих соответственно из E_y в E_z и из E_x в E_y.

Пример ([191]). Пусть

$$E_x = E_y = C[a, b]$$

и

$$f(x) = \int_a^b K(t, s)\,g(s, x(s))\,ds, \tag{8}$$

где ядро $K(t, s)$ непрерывно в квадрате $Q\ \{a \leqslant t, s \leqslant b\}$ и $g(s, x)$ — функция двух переменных, определенная и непрерывная в полосе $a \leqslant s \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$. Тогда

$f(x)$ есть абстрактная функция (оператор Гаммерштейна), определенная в $C[a, b]$ со значениями в том же пространстве.

Допустим, что функция $g(s, x)$ не только непрерывна, но и имеет частную производную $g'_x(s, x)$, равномерно непрерывную в полосе $a \leqslant s \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$. Тогда $f(x)$ будет сильно дифференцируемой функцией. Действительно, для любой функции $h(s) \in C[a, b]$ имеем

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^b K(t, s)[g(s, x(s)+h(s)) - g(s, x(s))]\, ds.$$

По теореме Лагранжа

$$g(s, x(s)+h(s)) - g(s, x(s)) = g'_x(s, x(s)+\theta(s)h(s))\, h(s),$$

где $0 < \theta(s) < 1$.

В силу непрерывности g'_x имеем

$$g'_x(s, x(s)+\theta(s)h(s)) = g'_x(s, x(s)) + \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)),$$

где при $\|h\| \to 0$, т. е. при $h(s) \to 0$ равномерно на $[a, b]$, $\alpha(s, x(s), \theta(s)h(s)) \to 0$ также равномерио на $[a, b]$ (поскольку функция, непрерывная в замкнутой ограниченной области $a \leqslant s \leqslant b$, $|x| \leqslant M_1$, $|h| \leqslant M_2$, равномерно непрерывна в этой области).

Поэтому

$$f(x+h) - f(x) = \int_a^b K(t, s)\, g'_x(s, x(s))\, h(s)\, ds +$$

$$+ \int_a^b K(t, s)\, \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))\, h(s)\, ds = lh + \omega(x, h),$$

где

$$lh = \int_a^b K(t, s)\, g'_x(s, x(s))\, h(s)\, ds,$$

$$\omega(x, h) = \int_a^b K(t, s)\, \alpha(s, x(s), \theta(s)h(s))\, h(s)\, ds.$$

Далее,

$$\|\omega(x, h)\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_a^b K(t, s)\,\alpha(s, x(s), \theta(s) h(s))\, h(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{a \leqslant t,\ s \leqslant b} |K(t, s)|\, \|\alpha(s, x(s), \theta(s) h(s))\|\, \|h\| (b-a) =$$

$$= M \|\alpha\|\, \|h\|.$$

Поэтому

$$\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|} \leqslant M \|\alpha\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Следовательно, согласно определению, функция $f(x)$ дифференцируема по Фреше в каждой точке $x(t) \in C[a, b]$ и

$$df(x, h) = \int_a^b K(t, s)\, g'_x(s, x(s))\, h(s)\, ds. \tag{9}$$

В данном случае линейный оператор l в точке x_0 есть линейный интегральный оператор с ядром $K(t, s)\, g'_x(s, x_0(s))$.

Аналогично, нелинейный оператор Урысона

$$f(x) = \int_a^b K(t, s, x(s))\, ds,$$

где $K(t, s, x)$ непрерывна в области $a \leqslant t,\ s \leqslant b$, $-\infty < x < +\infty$ и имеет в этой области непрерывную производную K'_x, дифференцируем по Фреше в каждой точке $x_0(t) \in C[a, b]$, причем

$$f'(x_0)\, h = \int_a^b K'_x(t, s, x_0(s))\, h(s)\, ds. \tag{10}$$

В отличие от случая пространства $C[a, b]$, дифференцируемость оператора Урысона в пространстве $L_p[a, b]$ не вытекает из непрерывной дифференцируемости по переменной x функции $K(t, s, x)$. Например, оператор

$$f(x) = \int_a^b \sin e^{x(s)}\, ds$$

определен и вполне непрерывен в любом L_p, однако оператор (10) может даже не быть определен на L_p, так как

в данном случае
$$K'_x = e^{x(s)} \cos e^{x(s)}$$
и эта функция может оказаться несуммируемой.

Приведем одно из условий дифференцируемости по Фреше оператора Урысона.

Пусть оператор Урысона действует в пространстве $L_2[a, b]$. *Достаточным условием его сильной дифференцируемости по Фреше в любой точке* $x_0(t) \in L_2[a, b]$ *является непрерывность по* x *производной* $K'_x(t, s, x)$ *и выполнение неравенства*
$$|K'_x(t, s, x)| \leqslant \alpha + \beta |x|$$
$$(a \leqslant t,\ s \leqslant b,\ -\infty < x < +\infty,\ \alpha,\ \beta = \text{const}).$$

При этом производная $f'(x_0)$ *определится равенством* (10).

После этих предварительных рассмотрений возвратимся к уравнению
$$F(\varphi, \lambda) = \theta. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема существования абстрактной неявной функции, аналогичная известной теореме классического анализа.

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия:*

1) *Оператор* $F(\varphi, \lambda)$ *определен в некоторой окрестности точки* $\{\varphi_0, \lambda_0\}$:
$$\|\varphi - \varphi_0\|_{E_1} < \delta_1, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta_2, \tag{11}$$
и непрерывен по совокупности аргументов вместе со своей производной Фреше $F'_\varphi(\varphi, \lambda)$ *в указанной окрестности.*

2) $F(\varphi_0, \lambda_0) = \theta$.

3) *Существует определенный на всем* E_2 *непрерывный оператор* $R = [F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)]^{-1}$.

Тогда уравнение $F(\varphi, \lambda) = \theta$ *определяет в некоторой окрестности* $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$ *точки* λ_0 *единственную непрерывную неявную функцию* $\varphi(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор
$$A(\varphi, \lambda) \equiv \varphi - [F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)]^{-1} F(\varphi, \lambda),$$
непрерывный по совокупности аргументов, и покажем, что при некоторых δ_0 и β он является равномерно (по λ) сжимающим оператором для $\|\varphi - \varphi_0\| < \beta$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$. Тогда он будет иметь единственную неподвижную точку $\tilde{\varphi}$:

$\tilde{\varphi} = A\tilde{\varphi}$, что, как нетрудно видеть, равносильно существованию единственной непрерывной неявной функции $\tilde{\varphi}(\lambda)$, определяемой уравнением (2).

По условию оператор $F(\varphi, \lambda)$ имеет непрерывную производную. Поэтому оператор $A(\varphi, \lambda)$ дифференцируем по Фреше, и его производная

$$A'_\varphi = I - [F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)]^{-1} F'_\varphi(\varphi, \lambda)$$

непрерывна по совокупности аргументов.

Так как $A'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0) = \theta$, то найдется $\beta > 0$ такое, что при $\|\varphi - \varphi_0\| < \beta$, $|\lambda - \lambda_0| < \beta$ будет выполнено неравенство

$$\|A'_\varphi(\varphi, \lambda)\| \leqslant \alpha < 1. \qquad (*)$$

Далее, так как $A(\varphi_0, \lambda_0) = \varphi_0$, то найдется такое $\delta_0 < \beta$, что $\|A(\varphi_0, \lambda) - \varphi_0\| < (1-\alpha)\beta$ при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_0$, откуда следует, что оператор $A(\varphi, \lambda)$ преобразует шар $\|\varphi - \varphi_0\| < \beta$ в себя.

Наконец, пользуясь неравенством (*) и аналогом теоремы Лагранжа, находим, что для рассматриваемых значений λ и для любых φ_1, φ_2 из шара $\|\varphi - \varphi_0\| < \beta$ справедливо неравенство

$$\|A(\varphi_2, \lambda) - A(\varphi_1, \lambda)\| \leqslant \alpha \|\varphi_2 - \varphi_1\| \quad (0 < \alpha < 1).$$

Последнее означает, что A — сжимающий оператор.

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(t) = \int_a^b K[t, s, \varphi(s); \lambda]\, ds \qquad (1)$$

в пространстве $C[a, b]$.

Будем считать, что функция $K[t, s, \varphi(s); \lambda]$ непрерывна по совокупности аргументов вместе со своей производной $K'_\varphi[t, s, \varphi; \lambda]$.

Пусть непрерывная функция $\varphi_0(t)$ является решением уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$\varphi_0(t) \equiv \int_a^b K[t, s, \varphi_0(s); \lambda_0]\, ds. \qquad (12)$$

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$F(\varphi, \lambda) \equiv \varphi(t) - \int_a^b K[t, s, \varphi(s); \lambda]\, ds = 0, \tag{13}$$

причем здесь $E_1 = E_2 = C\,[a, b]$.

Используя формулу (10), получаем

$$F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0) h = h(s) - \int_a^b K'_\varphi[t, s, \varphi_0(s); \lambda_0]\, h(s)\, ds \tag{14}$$

или

$$F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0) h = (I - \mathscr{K}) h, \tag{15}$$

где

$$\mathscr{K}\psi = \int_a^b K'_\varphi(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)\ \psi(s)\, ds$$

— линейный интегральный оператор с непрерывным ядром $K'_\varphi\ (t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)$.

Из (15) видно, что оператор $F'_\varphi\ (\varphi_0, \lambda_0)$ будет иметь обратный, если существует $(I - \mathscr{K})^{-1}$, т. е. единица не есть характеристическое число ядра $K'_\varphi\ (t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)$. В этом случае $R = [F'_\varphi\ (\varphi_0, \lambda_0)]^{-1}$ является резольвентой ядра K'_φ. Тогда все условия теоремы 9.4 будут выполнены и, следовательно, уравнение (1) будет иметь единственное непрерывное решение $\varphi(t, \lambda)$, близкое к $\varphi_0(t)$ при близких к λ_0 значениях λ. Неявная функция может быть получена как предел последовательных приближений

$$\varphi_{n+1}(\lambda) = \varphi_n(\lambda) - RF(\varphi_n(\lambda), \lambda)$$
$$(n = 0, 1, \ldots;\ \varphi_0(\lambda) = \varphi_0(t)),$$

причем последовательные приближения в окрестности точки λ_0 сходятся равномерно со скоростью геометрической прогрессии.

Можно показать, что *если выполнены условия теоремы* 9.4 *и оператор* $F(\varphi, \lambda)$ *в некоторой окрестности точки* $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ *имеет все частные производные до порядка* k, *то неявная функция* $\varphi(\lambda)$ *также имеет производные до порядка* k.

Обратимся снова к уравнению Урысона (1). Будем считать, что

$$\varphi_0(t) \equiv \int_a^b K(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)\, ds$$

и что единица не является характеристическим числом ядра $K'_\varphi(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)$. Предположим еще, что функция $K(t, s, \varphi; \lambda)$ непрерывно дифференцируема k раз по переменным φ, λ.

Будем искать решение $\varphi(t, \lambda)$ уравнения (1) для близких к λ_0 значений λ по методу малого параметра.

Запишем разложение

$$\varphi(t, \lambda) = u_0(t) + (\lambda - \lambda_0)\, u_1(t) + (\lambda - \lambda_0)^2 u_2(t) + \ldots \\ \ldots + (\lambda - \lambda_0)^k u_k(t) + o(|\lambda - \lambda_0|^k)$$

и подставим его в уравнение (1). Получим

$$u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \ldots = \\ = \int_a^b K(t, s, u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots; \lambda_0 + \varepsilon)\, ds, \qquad (16)$$

где $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$.

Разложим правую часть (16) по степеням ε:

$$\int_a^b K(t, s, u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots; \lambda_0 + \varepsilon)\, ds = \\ = \int_a^b K(t, s, u_0; \lambda_0)\, ds + \varepsilon \int_a^b K'_\varphi(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, u_1(s)\, ds + \\ + \varepsilon \int_a^b K'_\lambda(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, ds + \varepsilon^2 \int_a^b K'_\varphi(t, s, u_0(s), \lambda_0)\, u_2(s)\, ds + \\ + \varepsilon^2 \int_a^b \Phi_2(t, s, u_0(s), u_1(s); \lambda_0)\, ds + \ldots$$

Здесь Φ_2 — известная функция своих аргументов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения

$$u_0(t) = \int_a^b K(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, ds,$$

$$u_1(t) = \int_a^b K'_\varphi(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, u_1(s)\, ds + \int_a^b K'_\lambda(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, ds,$$

$$u_2(t) = \int_a^b K'_\varphi(t, s, u_0(s); \lambda_0)\, u_2(s)\, ds + \int_a^b \Phi_2(t, s, u_0(s), u_1(s); \lambda_0)\, ds,$$

. . . .

$$u_k(t) = \int_a^b K'_\varphi(t, s; u_0(s); \lambda_0)\, u_k(s)\, ds + \int_a^b \Phi_k(t, s, u_0(s), u_1(s), \ldots, u_{k-1}(s); \lambda_0)\, ds.$$

Из этих уравнений видно, что

$$u_0(t) = \varphi_0(t),$$

а для определения каждого из коэффициентов $u_k(t)$ $(k \geqslant 1)$ получается линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $K'_\varphi(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)$ и со свободным членом, который выражается через уже определенные коэффициенты $u_0(t), u_1(t), \ldots, u_{k-1}(t)$. Поскольку единица не является характеристическим числом ядра K'_φ, эти коэффициенты однозначно определяются последовательно один за другим, и мы можем построить приближенное решение $\varphi(t, \lambda)$ уравнения (1) для значений λ, близких к λ_0. Правда, практически эти вычисления довольно громоздки.

§ 39. Разветвление решений

Пусть имеем уравнение

$$F(\varphi, \lambda) = \theta, \tag{1}$$

определяющее абстрактную неявную функцию $\varphi(\lambda)$, и пусть по-прежнему

$$F(\varphi_0, \lambda_0) = \theta. \tag{2}$$

Остановимся теперь на вырожденном случае, когда оператор $F'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)$ не имеет ограниченного обратного.

Ограничимся уравнениями (1) частного вида

$$\varphi = A(\varphi; \lambda), \tag{3}$$

где оператор A вполне непрерывен в том смысле, что он непрерывен по совокупности аргументов в некоторой окрестности точки $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ и что компактно множество его значений на этой окрестности. Предполагается, что оператор A действует из E в E, $\varphi \in E$.

Определение. *Пара* (φ_0, λ_0) *называется точкой ветвления для уравнения* (3), *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* λ, *что* $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, *и уравнение* (3) *имеет по крайней мере два решения, лежащие в* ε-*окрестности точки* φ_0.

Из рассуждений § 38 следует, что пара (φ_0, λ_0) не является точкой ветвления, если в окрестности точки $\{\varphi_0, \lambda_0\}$ существует оператор $A'_\varphi(\varphi, \lambda)$, непрерывный по (φ, λ), и единица не является точкой спектра оператора $A'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)$.

Из общей теории нелинейных операторов известно, что производная $A'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)$ нелинейного вполне непрерывного оператора является линейным вполне непрерывным оператором. Вырожденный случай для уравнения (3) означает, что единица является собственным значением оператора $A'_\varphi(\varphi_0, \lambda_0)$.

Рассмотрим уравнение Урысона

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s, \varphi(s); \lambda)\, ds, \tag{4}$$

имеющее как раз вид (3), и пусть

$$\varphi_0(t) \equiv \int_a^b K(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)\, ds.$$

Пусть единица является характеристическим числом ядра $K'_\varphi(t, s, \varphi_0(s); \lambda_0)$ и пусть этому числу отвечает лишь одна собственная функция $\varphi_1(t)$ (с точностью до постоянного множителя), а следовательно, сопряженному уравнению — одна собственная функция $v_1(t)$. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\varphi(t)=\int_a^b [K(t, s, \varphi(s); \lambda)+\varphi_1(s)v_1(t)\varphi(s)]\,ds-\mu v_1(t), \tag{5}$$

где μ — дополнительный параметр.

Если принять

$$\mu=\int_a^b \varphi_1(s)\varphi(s)\,ds, \tag{6}$$

то уравнение (5) будет равносильно уравнению (4).

Смысл этого преобразования в том, что для уравнения (5) при $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0=\int\limits_a^b \varphi_1(s)\,\varphi_0(s)\,ds$, $\varphi=\varphi_0(t)$ единица не является характеристическим числом ядра $\mathscr{K}'_\varphi$, где $\mathscr{K}=K(t, s, \varphi(s); \lambda)+\varphi_1(s)\,v_1(t)\,\varphi(s)$, и, следовательно, возможно продолжение по параметрам λ, μ при малых $|\lambda-\lambda_0|$, $|\mu-\mu_0|$ решения

$$\varphi=\Psi(t; \lambda, \mu) \tag{7}$$

уравнения (5), где $\Psi(t; \lambda_0, \mu_0)=\varphi_0(t)$.

Подставив (7) в правую часть (6), получим так называемое *уравнение разветвления*

$$\mu-\int_a^b \varphi_1(s)\Psi(s; \lambda, \mu)\,ds=0,$$

или, короче,

$$\mathscr{F}(\lambda, \mu)=0, \tag{8}$$

связывающее λ и μ. Находя отсюда $\mu=\mu(\lambda)$ и подставляя результат в (7), получим решение $\varphi=\Psi(t; \lambda, \mu(\lambda))$ уравнения (4) такое, что $\varphi|_{\lambda=\lambda_0}=\varphi_0(t)$.

Нетрудно показать, что $\mathscr{F}'_\mu(\lambda_0, \mu_0)=0$, так что уравнение (8) разрешить однозначно относительно μ, вообще говоря, невозможно.

Вопросам ветвления решений нелинейных уравнений посвящена обширная литература (см., например, [4]), к которой мы и отсылаем читателя, желающего детально ознакомиться с этим кругом идей.

§ 40. Точки бифуркации

Близким к понятию точки ветвления является понятие точки бифуркации.

Пусть, для определенности, $A(\theta, \lambda) = \theta$. Тогда уравнение

$$\varphi = A(\varphi, \lambda) \tag{1}$$

имеет нулевое решение $\varphi = \theta$ при всех значениях параметра λ.

Определение. *Число λ_0 называется точкой бифуркации для уравнения* (1) (*или для оператора* $A(\varphi, \lambda)$), *если любому* $\varepsilon > 0$ *соответствует такое значение параметра λ из интервала* $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, *при котором уравнение имеет по крайней мере одно ненулевое решение* $\varphi(\lambda)$, *удовлетворяющее условию* $\|\varphi(\lambda)\| < \varepsilon$.

В отличие от определения точки ветвления, в определении точки бифуркации заранее предполагается известным решение (семейство решений), определенное при всех значениях параметра; речь идет об «ответвлении» решений от заданного.

Пусть, например, λ_0 есть характеристическое число непрерывного ядра $K(t, s)$. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds \tag{2}$$

при любом λ имеет тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

При $\lambda = \lambda_0$ это уравнение имеет еще нетривиальное решение $\varphi = \varphi_{\lambda_0}(t)$, которое определяется с точностью до постоянного множителя и потому может быть сделано по норме $C[a, b]$ меньше любого $\varepsilon > 0$:

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi_{\lambda_0}(\varepsilon)| < \varepsilon.$$

Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ (например, $\lambda = \lambda_0$), при котором уравнение (2) имеет ненулевое решение $\varphi_{\lambda_0}(t)$, удовлетворяющее условию $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |\varphi_{\lambda_0}(t)| < \varepsilon$. Согласно определению, это и означает, что характеристическое число λ_0 ядра $K(t, s)$ есть точка бифуркации уравнения (2).

Таким образом, если интервал $(\lambda_0 - \varepsilon,\ \lambda_0 + \varepsilon)$ не содержит других характеристических чисел ядра $K(t, s)$, то при изменении λ в этом интервале мы имеем сначала одно решение $\varphi(t) \equiv 0$, а при $\lambda = \lambda_0$ решений будет уже два: от нулевого решения ответвляется еще ненулевое.

Если оператор $A(\varphi, \lambda)$ непрерывно дифференцируем по Фреше, то, в силу теоремы 9.4 о неявной функции, его точками бифуркации могут быть лишь те значения λ, при которых единица является точкой спектра оператора $A'_\varphi(\theta, \lambda)$.

Пусть $A'_\varphi(\theta, \lambda) = \lambda B$, где B — вполне непрерывный линейный оператор, не зависящий от λ. В этом случае точки бифуркации являются характеристическими значениями оператора B (т. е. значениями, обратными собственным).

Пример (уравнение Гаммерштейна с вырожденным ядром).

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 ts\,[\varphi(s) + \varphi^2(s)]\,ds. \tag{3}$$

Очевидно, что при всяком значении параметра λ уравнение (3) имеет решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \int_0^1 s\varphi(s)\,ds, \\ c_2 &= \int_0^1 s\varphi^2(s)\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \lambda t\,(c_1 + c_2). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{3}(c_1 + c_2) &= c_1, \\ \frac{\lambda^2}{4}(c_1 + c_2)^2 &= c_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решая систему (6), находим одно решение $c_1 = c_2 = 0$, что дает $\varphi(t) \equiv 0$, и другое, которое дает

$$\varphi(t) = \frac{4}{3\lambda}(3 - \lambda)\,t.$$

Значение $\lambda = 3$ будет бифуркационным для уравнения (3). В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует значение $\lambda \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, например любое $\lambda \neq 3$, при котором уравнение (3) имеет ненулевое решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее условию

$$\|\varphi(t)\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \frac{4}{3\lambda}(3-\lambda)t \right| < \varepsilon.$$

Согласно определению, это и означает, что $\lambda = 3$ — точка бифуркации.

Оператор Гаммерштейна, как известно, дифференцируем по Фреше в любой точке $\varphi_0(t) \in C[0, 1]$ и его дифференциал в точке $\varphi \equiv 0$ равен

$$A'_\varphi(0, \lambda)h = \lambda \int_0^1 ts\left[\varphi + \varphi^2\right]'_\varphi \Big|_{\varphi=0} h\, ds = \lambda \int_0^1 ts\, h(s)\, ds.$$

Легко проверить, что для линейного интегрального уравнения

$$h(t) = \lambda \int_0^1 ts\, h(s)\, ds \tag{7}$$

значение $\lambda = 3$ есть характеристическое число.

Таким образом, точка бифуркации $\lambda = 3$ уравнения (3) является характеристическим числом уравнения (7).

Возникает вопрос: каждое ли характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации?

В общем случае, как показывают примеры ([12]), ответ отрицателен.

Рассмотрим, например, в плоскости XOY оператор A, определенный равенством

$$A\{x, y\} = \{x - y(x^2 + y^2),\ \ y + x(x^2 + y^2)\}.$$

Оператор B для этого случая есть оператор I тождественного преобразования, имеющий характеристическим числом единицу: $I\bar{x} = \bar{x}$.

В то же время оператор A совсем не имеет собственных векторов. Действительно, пусть при некотором λ

$$\left.\begin{aligned} x - y(x^2 + y^2) &= \lambda x, \\ y + x(x^2 + y^2) &= \lambda y. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Умножая первое из этих равенств на x, второе на y и складывая, получим $x^2 + y^2 = \lambda(x^2 + y^2)$, откуда $\lambda = 1$, так как $x^2 + y^2 \neq 0$ (собственный вектор — ненулевой). Подставляя в (8) $\lambda = 1$, получим $x = y = 0$, т. е. $\lambda = 1$ не есть собственное значение оператора A.

В задачах, связанных с условиями устойчивости, точки бифуркации определяют критические силы. Так, задача об изгибе прямолинейного стержня единичной длины и переменной жесткости $\rho(x)$ под воздействием силы P приводит к решению нелинейного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = P\rho(x) \int_0^1 K(x, t)\varphi(t) \sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_x(x, t)\varphi(t)\,dt\right]^2}\,dt, \tag{9}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция.

Это уравнение имеет нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$ при всех значениях параметра P. При малых P уравнение (9), в силу принципа сжатых отображений, имеет единственное нулевое решение в пространстве $C[0, 1]$. Это означает, что при малых P стержень не изгибается. Однако при силах, бо́льших так называемой критической силы Эйлера, возникает прогиб.

Критическая сила Эйлера P_0 и является бифуркационным значением. В механике при отыскании точек бифуркации нелинейного оператора A задачу обычно линеаризуют: вместо оператора A рассматривают линейный оператор B (производную Фреше оператора A в точке θ), находят характеристические числа оператора B, которые и считают точками бифуркации оператора A. Но, как мы видели, такая линеаризация законна не всегда.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.5 (М. А. Красносельского). *Если вполне непрерывный оператор $A(\varphi, \lambda)$ ($A(\theta, \lambda) = \theta$) имеет в точке θ производную Фреше $A'_\varphi(\theta, \lambda) = \lambda B$, то каждое нечетно-кратное (в частности, простое) характеристическое значение оператора B является точкой бифуркации оператора $A(\varphi, \lambda)$.*

Если характеристическое значение оператора B имеет четную кратность, то требуется дополнительный анализ.

Как известно, интегральные операторы Урысона и Гаммерштейна при достаточно широких предположениях имеют в нуле 0 (пространств C или L_p) дифференциал Фреше B — линейный интегральный оператор:

$$B\varphi = \int_a^b \mathcal{K}(t, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Из теоремы 9.5 следует, что *каждое характеристическое число нечетной кратности ядра $\mathcal{K}(t, s)$ является точкой бифуркации соответствующего нелинейного интегрального оператора Урысона или Гаммерштейна.*

§ 41. Метод Ньютона

Пусть $f(x)$ — действительная функция действительного аргумента. Тогда, как известно, для отыскания действительного корня уравнения

$$f(x) = 0$$

можно применить метод Ньютона (метод касательных). Он состоит в нахождении последовательности приближенных решений этого уравнения по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

В работах Л. В. Канторовича было показано, что метод Ньютона может быть перенесен на операторные уравнения вида

$$f(x) = \theta, \tag{1}$$

где $f(x)$ — абстрактная функция, определенная в некотором банаховом пространстве X со значениями, вообще говоря, в другом банаховом пространстве Y.

Пусть элемент $x^* \in X$ есть нуль абстрактной функции f, т. е.

$$f(x^*) = \theta.$$

Предположим, что в некоторой окрестности Ω точки x^* функция $f(x)$ имеет производную Фреше $f'(x)$, непрерывную в этой окрестности. Предположим еще, что существует $[f'(x)]^{-1}$ в Ω.

Возьмем произвольный элемент $x_0 \in \Omega$. В силу предположений можно заменить элемент $f(x_0) = f(x_0) - f(x^*)$

близким ему выражением $f'(x_0)(x_0-x^*)$ и считать, что решение уравнения

$$f'(x_0)(x-x_0)=-f(x_0)$$

близко к x^*. Последнее уравнение — линейное, и его решением будет

$$x_1=x_0-[f'(x_0)]^{-1}f(x_0).$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность приближенных решений по формуле

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n)\qquad (n=0,1,\ldots). \tag{2}$$

При определенных условиях последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x^* уравнения $f(x)=\theta$. Неудобство этих формул в том, что всякий раз приходится находить обратный оператор $[f'(x_n)]^{-1}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x^* и x_0 выбрано достаточно близко к x^*, то в предположении непрерывности $f'(x)$ операторы $f'(x_n)$ и $f'(x_0)$ будут мало отличаться. Поэтому вместо формул (2) вводят упрощенные:

$$x_{n+1}=x_n-[f(x_0)]^{-1}f(x_n)\qquad (n=0,1,\ldots), \tag{3}$$

где для любого n фигурирует один и тот же обратный оператор $[f'(x_0)]^{-1}$.

Формулы (3) дают, вообще говоря, худшие приближения, но значительно проще формул (2).

Этот метод построения приближенных решений называют *модифицированным методом Ньютона*.

И основной, и модифицированный методы Ньютона являются одними из наиболее употребительных на практике приемов решения нелинейных функциональных уравнений.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 9.6. *Пусть функция $f(x)$ имеет производную Фреше в некотором шаре $\Omega(x_0, r)$ с центром x_0 и радиусом r и эта производная $f'(x)$ удовлетворяет в шаре Ω условию Липшица*

$$\|f'(x_2)-f'(x_1)\|\leqslant \mathscr{L}\|x_2-x_1\|.$$

Пусть $[f'(x_0)]^{-1}$ существует и

$$M=\|[f'(x_0)]^{-1}\|,\qquad k=\|f'(x_0)^{-1}f(x_0)\|,\qquad h=Mk\mathscr{L}.$$

Тогда, если $h<1/4$, то в шаре $S(x_0, kt_0)$: $\|x-x_0\| \leqslant kt_0$, где t_0 — меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, уравнение $f(x) = \theta$ имеет единственное решение x^* и последовательность $\{x_n\}$, определяемая формулой (3), *сходится к этому решению.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X отображение

$$Ax = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x).$$

Это отображение переводит шар $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ в себя. Действительно,

$$Ax - x_0 = x - x_0 - [f'(x_0)]^{-1} f(x) =$$
$$= [f'(x_0)]^{-1} \{f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\} - [f'(x_0)]^{-1} f(x_0).$$

Поэтому

$$\|Ax - x_0\| \leqslant \|[f'(x_0)]^{-1}\| \|f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\| +$$
$$+ \|[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\| \leqslant$$
$$\leqslant M \|f'(x_0)(x - x_0) - f(x) + f(x_0)\| + k. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Имеем

$$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Если $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$, то

$$\|\varphi'(x)\| = \|f'(x) - f'(x_0)\| \leqslant \mathscr{L} \|x - x_0\| \leqslant \mathscr{L} kt_0.$$

Заметив, что $\varphi(x_0) = \theta$, по теореме о среднем (аналог теоремы Лагранжа классического анализа, [11]) получаем

$$\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leqslant \mathscr{L} kt_0 \|x - x_0\| \leqslant \mathscr{L} k^2 t_0^2. \tag{5}$$

Таким образом, если $x \in S(x_0, kt_0)$, то из (4) и (5) имеем

$$\|Ax - x_0\| \leqslant M\mathscr{L} k^2 t_0^2 + k = k(M\mathscr{L} t_0^2 k + 1) = k(ht_0^2 + 1) = kt_0.$$

Последнее означает, что отображение A переводит шар $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ в себя.

Покажем теперь, что A — сжимающее отображение в этом шаре. Для $x \in S(x_0, kt_0)$ имеем

$$A'(x) = I - [f'(x_0)]^{-1} f'(x) = [f'(x_0)]^{-1}(f'(x_0) - f'(x)),$$

откуда

$$\|A'(x)\| \leqslant M\|f'(x_0) - f'(x)\| \leqslant M\mathscr{L}\|x - x_0\| \leqslant M\mathscr{L}kt_0.$$

Так как t_0 — меньший корень уравнения $ht^2 - t + 1 = 0$, то $t_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2h}$. Поэтому

$$\|A'(x)\| \leqslant M\mathscr{L}kt_0 = ht_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4h}}{2} = q < \frac{1}{2}, \tag{6}$$

откуда

$$\|Ax_2 - Ax_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|,$$

так что A — сжимающее отображение.

Из теоремы Банаха (§ 7) следует, что отображение A имеет в шаре $\|x - x_0\| \leqslant kt_0$ единственную неподвижную точку x^*. Для этой точки

$$x^* = x^* - [f'(x_0)]^{-1} f(x^*),$$

откуда $f(x^*) = \theta$, т. е. x^* есть решение уравнения

$$f(x) = \theta.$$

В силу (3)

$$Ax_n = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n) = x_{n+1},$$

и на основании теоремы Банаха последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^*.

Из неравенства (6) нетрудно получить оценку скорости сходимости модифицированного метода Ньютона

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1 - q}\|[f'(x_0)]^{-1} f(x_0)\|. \tag{7}$$

Обычный (немодифицированный) метод Ньютона сходится быстрее: для него

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n - 1}k.$$

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(t)=\int_a^b K(t, s, x(s))\, ds, \tag{8}$$

где $K(t, s, u)$ — непрерывная функция всех своих аргументов, имеющая непрерывные производные нужного порядка. Введем абстрактную функцию

$$f(x)=x(t)-\int_a^b K(t, s, x(s))\, ds.$$

Тогда уравнение (8) запишется в виде функционального уравнения

$$f(x)=0.$$

Процесс Ньютона для этого уравнения строится следующим образом. Пусть, например, $X=C[a, b]$ и пусть $x_0(t)$ — начальное приближение. Абстрактная функция $f(x)$ преобразует пространство $C[a, b]$ в себя, сильно дифференцируема, причем

$$f'(x_0)\, h=h(t)-\int_a^b K'_u(t, s, x_0(s))\, h(s)\, ds. \tag{9}$$

Поправка $\Delta x=x_1-x_0$ определяется из уравнения

$$f'(x_0)\, \Delta x=-f(x_0),$$

которое в силу (9) будет иметь вид

$$\Delta x(t)-\int_a^b K'_u(t, s, x_0(s))\, \Delta x(s)\, ds=\varepsilon_0(t),$$

где

$$\varepsilon_0(t)=\int_a^b K(t, s, x_0(s))\, ds-x_0(t).$$

Таким образом, нахождение каждого следующего приближения сводится к решению *линейного* интегрального уравнения. Если применять модифицированный процесс (3), то ядро такого уравнения на каждом шаге будет одним и тем же.

Детально с методом Ньютона можно познакомиться в книге [10].

§ 42. Принцип неподвижной точки Ю. Шаудера

При изложении принципа сжатых отображений мы отмечали, что существование решения многих уравнений эквивалентно существованию неподвижной точки у соответственно подобранного отображения некоторого множества точек в себя.

Теорема С. Банаха о неподвижной точке у сжимающего отображения позволила нам получить ряд результатов, касающихся однозначной разрешимости различных типов интегральных уравнений.

Следует отметить, что применение принципа сжатых отображений к нелинейным интегральным уравнениям практически ограничивается случаями, когда функция $K(t, s, z)$ удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу z.

Приведем еще одну теорему ([19]), позволяющую гарантировать существование по крайней мере одного решения для весьма широкого класса уравнений.

Теорема 9.7 (Ю. Шаудера). *Если вполне непрерывный оператор A отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество S банахова пространства E на свою часть, то существует неподвижная точка этого отображения, т. е. такая точка $x \in S$, что*

$$Ax = x.$$

Напомним понятие выпуклости. Пусть $\tilde{E}$ — линейное действительное пространство и x; y — две его точки. Назовем отрезком в $\tilde{E}$, соединяющим точки x и y, совокупность всех элементов вида

$$\alpha x + \beta y, \quad \text{где } \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Определение. *Множество $M \subset \tilde{E}$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x и y содержит и соединяющий их отрезок.*

Так, круг (рис. 17, *а*) есть выпуклое множество, а фигура на рис. 17, *б* — невыпуклое.

Еще пример. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ функций $x(t)$, непрерывных на $[a, b]$, множество M функций, удовлетворяющих условию

$$|x(t)| \leqslant 1,$$

Это множество выпукло. Действительно, если

$$|x(t)| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |y(t)| \leqslant 1,$$

то при $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, имеем

$$|\alpha x(t) + \beta y(t)| \leqslant \alpha + \beta = 1,$$

т. е. функция $\alpha x(t) + \beta y(t) \in M$, что и означает, согласно определению, выпуклость указанного множества M непрерывных функций.

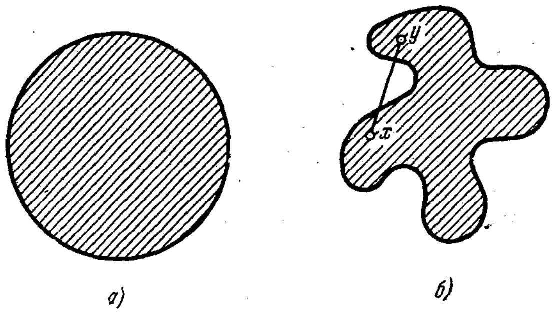

Рис. 17.

Упражнение. Показать, что в линейном нормированном пространстве всякий шар $\|x - a\| \leqslant r$ есть выпуклое множество.

В качестве примера применения принципа Шаудера рассмотрим классическую теорему Пеано о существовании решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)). \tag{1}$$

Теорема 9.8. *Пусть функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных в области $|t - t_0| \leqslant a$, $|x - x_0| \leqslant b$ и β — максимум $|f(t, x)|$ в этой области. Если $h = \min\left\{a, \frac{b}{\beta}\right\}$, то на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует по крайней мере одно решение уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Доказательство. Уравнение (1) с начальным условием (2) эквивалентно интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau. \tag{3}$$

Рассмотрим оператор A, определенный равенством

$$Ax \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau$$

в пространстве $C[t_0 - h, t_0 + h]$ на шаре S_b: $\|x - x_0\| \leqslant b$, который будет замкнутым выпуклым множеством в этом пространстве.

Оператор A вполне непрерывен на этом шаре. В самом деле, если последовательность $\{x_n(t)\}$, принадлежащая шару $\|x - x_0\| \leqslant b$, равномерно сходится к функции $x(t) \in S_b$, то в силу непрерывности функции $f(t, x)$

$$f(t, x_n(t)) \to f(t, x(t))$$

равномерно на $[t_0 - h, t_0 + h]$. При равномерной сходимости законен предельный переход под знаком интеграла, так что

$$Ax_n \to Ax,$$

т. е. оператор A непрерывен на шаре S_b.

Далее, для любого элемента $x(t) \in S_b$

$$|Ax(t)| \leqslant |x_0| + \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau\right| \leqslant |x_0| + \beta|h|, \tag{4}$$

т. е. множество значений оператора A равномерно ограничено.

Если t_1 и t_2 — любые точки отрезка $[t_0 - h, t_0 + h]$, то для любой функции $x(t) \in S_b$ будем иметь

$$|Ax(t_2) - Ax(t_1)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} f(\tau, x(\tau))\,d\tau\right| \leqslant \beta|t_2 - t_1|, \tag{5}$$

т. е. множество $Ax(t)$, $x(t) \in S_b$, равностепенно непрерывно.

В силу теоремы Арцела отсюда заключаем, что оператор A преобразует шар S_b: $\|x - x_0\| \leqslant b$ в компактное множество.

Это доказывает полную непрерывность оператора A. (Напомним, что мы называем нелинейный оператор A *вполне непрерывным* на некотором множестве, если он 1) непрерывен, 2) переводит это множество в компактное. В теории линейных операторов принято несколько отличное определение: *линейный* оператор называют *вполне непрерывным*, если он переводит любое ограниченное множество в компактное (непрерывен он по самому своему определению).

Покажем, наконец, что оператор A преобразует шар S_b: $\|x - x_0\| \leqslant b$ в себя.

Действительно,

$$|Ax(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, dt\right| \leqslant \beta h \leqslant \beta \frac{b}{\beta} = b.$$

Таким образом, оператор A удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера, и, значит, существует неподвижная точка этого оператора, т. е. такая функция $\tilde{x}(t)$, что

$$\tilde{x}(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \tilde{x}(\tau))\, d\tau.$$

Эта функция $\tilde{x}(t)$ будет решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию (2).

Теорема доказана.

Подчеркнем, что принцип Шаудера не гарантирует единственности решения (известны простые примеры дифференциальных уравнений вида (4) с непрерывной правой частью, имеющих бесконечное множество решений, удовлетворяющих заданному начальному условию). Кроме того, этот принцип не дает указаний, как построить это решение. Тем не менее он оказывается подчас единственным критерием, позволяющим судить о существовании решения уравнения.

Теорема Пеано тем же методом может быть обобщена в различных направлениях: например, можно ослабить условия на $f(t, x)$, отказавшись от ее непрерывности;

вместо одного уравнения можно рассматривать систему конечного и даже счетного числа уравнений.

Например, справедлива

Теорема 9.9 (А. Н. Тихонова). *Пусть дана счетная система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \tag{6}$$

причем функции f_i *непрерывны по всем переменным в некоторой области* $|x_i| \leqslant a$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *изменения переменных и равномерно ограничены для этих значений переменных. Тогда система* (6) *имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условиям* $x_i(0) = 0$.

В качестве еще одного примера использования теоремы Шаудера рассмотрим задачу о разрешимости уравнения Гаммерштейна

$$\varphi(t) = \int_a^b K(t, s)\Psi(s, \varphi(s))\, ds + f(t) \tag{7}$$

с непрерывным симметричным ядром. Пусть $\Psi(s, z)$ непрерывна и ограничена при $a \leqslant s \leqslant b$, $-\infty < z < +\infty$, и пусть $|\Psi(s, z)| \leqslant M_0$. Обозначая правую часть (7) через $A\varphi$, замечаем, что оператор A вполне непрерывен. Используя оценку (см. выше, стр. 264)

$$\left\| \int_a^b K(t, s) g(s)\, ds \right\| \leqslant \frac{1}{\|\lambda_1\|} \|g\|,$$

находим

$$\|A\varphi\| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|} M_0 \sqrt{b-a} + \|f\|. \tag{8}$$

(Нормы берутся в $L_2[a, b]$; λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K(t, s)$.)

Поэтому, если в качестве ограниченного замкнутого выпуклого множества S взять шар в $L_2[a, b]$ с центром в нуле и радиусом, равным правой части (8), то будут выполнены все условия теоремы Шаудера.

Следовательно, уравнение (7) при сделанных предположениях имеет по крайней мере одно решение $\varphi(t)$.

При применении принципа Шаудера к изучению конкретных уравнений прежде всего нужно выбрать пространство E, в котором оператор A вполне непрерывен.

За выпуклое множество S обычно принимают некоторый шар пространства E. При этом радиус и центр этого шара нужно подобрать так, чтобы оператор A отображал этот шар в себя.

Пусть, например, вполне непрерывный оператор A обладает свойством

$$\|Ax\| \leqslant a + b\|x\|^{\alpha} \qquad \forall x \in E$$

(a, b, α — постоянные).

Если существует число $r > 0$, удовлетворяющее условию

$$a + br^{\alpha} \leqslant r,$$

то к оператору A в шаре $S(\theta, r)$ с центром в нуле θ и радиусом r применим принцип Шаудера.

Такое число r всегда существует при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1$ и $b < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.
2. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1959.
3. Бирман М. Ш. и др., Функциональный анализ, СМБ, «Наука», 1972.
4. Вайнберг М. М., Треногин В. А., Теория ветвления решений нелинейных уравнений, «Наука», 1969.
5. Вулих Б. З., Введение в функциональный анализ, «Наука», 1967.
6. Гагаев Б. М., О существовании собственных значений интегральных уравнений, ядра которых являются целой рациональной функцией параметра, Украинский математический журнал IV, № 2, 1952.
7. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, Физматгиз, 1963.
8. Гурса Э., Курс математического анализа, т. III, ч. 2, ГТТИ, 1934.
9. Забрейко П. П. и др., Интегральные уравнения, СМБ, «Наука», 1968.
10. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, изд. 3-е, «Наука», 1972.
12. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
13. Крейн М. Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН **XIII**, вып. 5, 1958.
14. Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1971.
15. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», 1965.

17. Лаврентьев М. М., О некоторых некорректных задачах математической физики, Изд-во СО АН СССР, 1962.
18. Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1957.
19. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
20. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
21. Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, УМН III, вып. 3, 1948.
22. Морен К., Методы гильбертова пространства, «Мир», 1965.
23. Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, тт. I, II, ИЛ, 1958.
24. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
25. Мышкис А. Д., Математика для втузов. Специальные курсы, «Наука», 1971.
26. Мэтьюз Дж., Уокер Р., Математические методы физики, Атомиздат, 1972.
27. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, «Наука», 1974.
28. Немыцкий В. В., Метод неподвижных точек в анализе, УМН, вып. I, 1936.
29. Нобл Б., Метод Винера — Хопфа, ИЛ, 1962.
30. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.
31. Привалов И. И., Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1937.
32. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1964.
33. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.
34. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. I, Физматгиз, 1958.
35. Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, ОНТИ, 1936.
36. Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
37. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
38. Соболев В. И., Лекции по дополнительным главам математического анализа, «Наука», 1968.

39. Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, тт. I, II, ИЛ, 1954.
40. Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
41. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
42. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. I, Гостехиздат, 1951.
43. Фридман В. М., Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, УМН XI, вып. I, 1956.
44. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения, «Наука», 1966.
45. Шварц Л., Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.
46. Шилов Г. Е., Математический анализ. Специальный курс, Физматгиз, 1961.
47. Шилов Г. Е., Математический анализ. Второй специальный курс, «Наука», 1965.
48. Шилов Г. Е., Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных, «Наука», 1972.
49. Lalesco T., Introduction a la theorie des equations integrales, Paris, 1912.
50. Hellinger E., Toeplitz O., Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Verlag von Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.
51. Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Verlag von Teubner, Leipzig und Berlin, 1924.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ