Избранные главы
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для инженеров и студентов втузов

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ, А. И. КИСЕЛЕВ, Г. И. МАКАРЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

М. Л. КРАСНОВ, А. И. КИСЕЛЕВ,
Г. И. МАКАРЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

517.2
К 78
УДК 517.948 (075.8)

Интегральные уравнения. М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.

Книга содержит 322 задачи (с ответами) по основным вопросам курса интегральных уравнений. Состоит из трех глав: интегральные уравнения Вольтерра, интегральные уравнения Фредгольма, приближенные методы. В каждом параграфе приводится сводка основных результатов и формул и даются подробно разобранные типовые *примеры; в приложении* — сводка основных методов решения интегральных уравнений. Книга предназначается для студентов втузов и инженеров.

Иллюстраций 3, библиография: 30 названий.

Михаил Леонтьевич Краснов, Александр Иванович Киселев, Григорий Иванович Макаренко

Интегральные уравнения

(Серия «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов. Задачи и упражнения»)

М., 1968 г., 192 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 15/VII 1967 г. Подписано к печати 22/II 1968 г. Бумага 84×108$^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 6. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,85.
Тираж 25000 экз. Т-00284. Цена 34 коп. Заказ № 3577.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издат. «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

2-2-3
20-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время на русском языке имеется богатая литература по интегральным уравнениям. Достаточно упомянуть прекрасные книги И. Г. Петровского, С. Г. Михлина, главы из капитального труда В. И. Смирнова «Курс высшей математики», книги У. Ловитта, Ф. Трикоми и др.

Однако, насколько нам известно, на русском языке нет книги, где были бы собраны воедино задачи и примеры, иллюстрирующие отдельные положения теории и методы решения интегральных уравнений.

Предлагаемый сборник задач, по нашему мнению, в какой-то мере восполняет этот пробел. В нем приведены некоторые методы решения интегральных уравнений, задачи на разыскание характеристических чисел, некоторые приближенные методы. Остались незатронутыми многие специальные вопросы из области интегральных уравнений, поскольку авторы преследовали чисто учебные цели — проиллюстрировать и закрепить на примерах основные положения теории.

Считаем своим приятным долгом поблагодарить доц. Л. Я. Цлафа, внимательно прочитавшего рукопись и сделавшего важные для нас указания и замечания. Мы глубоко признательны проф. М. И. Вишику за его советы и принципиальное одобрение нашей работы.

Все замечания и пожелания, связанные с задачником, будут приняты нами с благодарностью.

М. Л. Краснов
А. И. Киселев
Г. И. Макаренко

Москва — Дубна, 1966 г.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Измеримые множества. Пусть E — некоторое множество точек отрезка $S = [a, b]$. Обозначим через C_E множество, дополнительное к E относительно S, т. е., по определению, C_E состоит из точек, не принадлежащих E.

Точки множества E различными способами можно заключить в конечную или счетную систему интервалов

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

Сумму длин интервалов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ обозначим через $\Sigma\alpha$. Для любой системы интервалов, покрывающих E,

$$\sum \alpha > 0.$$

Нижняя грань $\Sigma\alpha$, зависящая только от множества E, называется *внешней мерой* E и обозначается m^*E. Из определения внешней меры следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую систему интервалов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, включающих в себя все точки множества E, что

$$m^*E \leqslant \sum \alpha < m^*E + \varepsilon.$$

Внутренней мерой m_*E множества E называется разность между длиной отрезка S и внешней мерой дополнительного множества, т. е.

$$m_*E = b - a - m^*C_E.$$

Если внешняя и внутренняя меры множества E равны, то множество E называется *измеримым по Лебегу* (или просто измеримым), а общее значение мер m^*E и m_*E называется *мерой множества E по Лебегу* (или просто мерой E) и обозначается mE или $\operatorname{mes} E$.

Мерой интервала (a, b) является его длина: $\operatorname{mes}(a, b) = b - a$. Множество ω точек интервала (a, b) называется *множеством меры нуль*, если ω можно покрыть интервалами, сумма длин которых как угодно мала.

2. Функция действительного переменного $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой*, если для любого числа A множество $\mathscr{E}(f(x) > A)$, состоящее из тех точек x, принадлежащих множеству E, для которых $f(x) > A$, измеримо по Лебегу.

Замечание. Требование об измеримости множества $\mathscr{E}(f(x) > A)$ можно заменить одним из следующих трех условий:

1) множество $\mathscr{E}(f(x) \geqslant A)$ измеримо,
2) множество $\mathscr{E}(f(x) < A)$ измеримо,
3) множество $\mathscr{E}(f(x) \leqslant A)$ измеримо.

3. Функция $f(x)$, неотрицательная на интервале (a, b), называется *суммируемой* на этом интервале, если $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ конечен *).

Функция $f(x)$ произвольного знака будет суммируемой на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда суммируема функция $|f(x)|$, т. е. когда интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ имеет конечное значение.

В дальнейшем мы будем иметь дело с основным интервалом $I = (a, b)$ (или $I_0 = (0, a)$) и основным квадратом $\Omega\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$ (или $\Omega_0\{0 \leqslant x, t \leqslant a\}$).

4. Пространство $L_2(a, b)$. Говорят, что $f(x)$ есть *функция с интегрируемым квадратом на* $[a, b]$, если интеграл

$$\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$$

существует (конечен). Совокупность всех функций с интегрируемым квадратом на $[a, b]$ обозначим $L_2(a, b)$ или коротко L_2.

Основные свойства функций из L_2

1° Произведение двух функций с интегрируемым квадратом есть интегрируемая функция.

2° Сумма двух функций из L_2 также принадлежит L_2.

3° Если $f(x) \in L_2$ и λ — произвольное действительное число, то

$$\lambda f(x) \in L_2.$$

4° Если $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$, то имеет место неравенство Буняковского — Шварца

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \int\limits_a^b g^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Скалярным произведением двух функций $f(x) \in L_2$ и $g(x) \in L_2$, по определению, называется число

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \tag{2}$$

---

*) Интеграл понимается в смысле Лебега, однако читатель, незнакомый с интегралом Лебега, может всюду понимать интегралы в смысле Римана.

Нормой функции $f(x)$ из L_2 называют неотрицательное число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

5° Для $f(x)$ и $g(x)$ из L_2 имеет место неравенство треугольника

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|. \tag{4}$$

6° Сходимость в среднем. Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ квадратично суммируемы на (a, b). Если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0,$$

то говорят, что последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *сходится в среднем* или, точнее, в среднем квадратичном к функции $f(x)$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из L_2 сходится равномерно к $f(x)$, то $f(x) \in L_2$ и $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем.

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из L_2 сходится *в среднем в себе*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2\,dx \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$ и $m > N$. Иногда сходящиеся в себе последовательности называются *фундаментальными*. Чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась в среднем к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной. Пространство L_2 полно, т. е. всякая фундаментальная последовательность функций из L_2 сходится к функции, также принадлежащей L_2.

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ из $L_2(a, b)$ называются *эквивалентными* на (a, b), если $f(x) \neq g(x)$ лишь на множестве меры нуль. В этом случае говорят, что $f(x) = g(x)$ почти всюду на (a, b).

5. Пространство $C^{(l)}(a, b)$. Элементами этого пространства являются всевозможные функции, определенные на отрезке $[a, b]$ и имеющие на этом отрезке непрерывные производные до l-й включительно. Операции сложения функций и умножения функций на число определяются обычным образом.

Норму элемента $f(x) \in C^{(l)}(a, b)$ определяем по формуле

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{l} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f^{(k)}(x)|,$$

причем $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Сходимость в $C^{(l)}(a, b)$ означает равномерную сходимость как последовательности самих функций, так и последовательностей их производных k-го порядка ($k = 1, 2, \ldots, l$).

Понятия измеримого множества, измеримой функции, суммируемой функции и т. д. переносятся на случай пространства большего числа измерений. Так, *например, функцию $F(x, t)$ будем называть суммируемой с квадратом на* Ω $(a \leqslant x, t \leqslant b)$, если интеграл

$$\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt < +\infty.$$

Норма функции $F(x, t)$ в этом случае определяется равенством

$$\| F \| = \sqrt{\int_a^b \int_a^b F^2(x, t)\, dx\, dt}\,.$$

6. Функция $f(z)$ комплексного переменного z, дифференцируемая *в каждой точке области G плоскости комплексного переменного z*, называется *аналитической* (регулярной) в этой области.

Функция $f(z)$ называется *целой*, если она аналитическая во всей плоскости (исключая бесконечно удаленную точку).

Функция $f(z)$ называется *мероморфной* (или дробной), если она *может быть представлена в виде частного двух целых функций:*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \qquad h(z) \not\equiv 0.$$

Мероморфная функция $f(z)$ в любой ограниченной области может иметь лишь конечное число полюсов.

Точка $z = a$ называется *изолированной* особой точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0 < |z - a| < \delta$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична, а в самой точке $z = a$ аналитичность функции *нарушается. Изолированная особая точка $z = a$ называется полюсом* функции $f(z)$, если

$$\lim_{x \to a} f(z) = \infty$$

(предполагается, что $f(z)$ однозначна в окрестности точки $z = a$, $z \neq a$).

Для того чтобы точка $z = a$ была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, т. е. чтобы $\varphi(a) = 0$.

Порядком полюса $z = a$ функции $f(z)$ называют порядок нуля $z = a$ *функции*

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}\,.$$

7. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z=a$ называется число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,dz,$$

где c — окружность $|z-a|=\rho$ достаточно малого радиуса.

Если точка $z=a$ есть полюс n-го порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}.$$

Для простого полюса ($n=1$)

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}.$$

Если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a)\neq 0$, а $\psi(z)$ в точке $z=a$ имеет нуль первого порядка, т. е. $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

8. **Лемма Жордана.** *Если $f(z)$ непрерывна в области $|z|\geqslant R_0$, $\operatorname{Im} z\geqslant\alpha$ (α — фиксированное действительное число) и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$, то для любого $\lambda>0$*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{c_R} e^{i\lambda z} f(z)\,dz=0,$$

где c_R — дуга окружности $|z|=R$, лежащая в рассматриваемой области.

9. Функция $f(x)$ называется *локально суммируемой*, если она суммируема на любом ограниченном множестве.

Пусть комплекснозначная функция $\varphi(t)$ действительного переменного t локально суммируема, равна нулю при $t<0$ и удовлетворяет условию $|\varphi(t)|<Me^{s_0 t}$ для всех t ($M>0$, $s_0\geqslant 0$). Такие функции $\varphi(t)$ будем называть *функциями-оригиналами*. Число s_0 называется *показателем роста* функции $\varphi(t)$.

Преобразованием Лапласа функции $\varphi(t)$ назовем функцию $\Phi(p)$ комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемую равенством

$$\Phi(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt.$$

Для всякого оригинала $\varphi(t)$ функция $\Phi(p)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} p>s_0$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией. Тот факт, что функция $\Phi(p)$ есть преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$, будем записывать так:

$$\varphi(t) \doteq \Phi(p).$$

10. Теорема обращения. *Если функция $\varphi(t)$ является оригиналом, а функция $\Phi(p)$ служит ее изображением, то*

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp, \qquad \gamma > s_0, \tag{$*$}$$

где интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} p = \gamma$, *параллельной мнимой оси, и понимается в смысле главного значения:*

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\Phi(p)\,dp = \lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{pt}\Phi(p)\,dp.$$

Формула ($*$) называется *формулой обращения* преобразования Лапласа. Если

$$\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где $M(p)$ и $N(p)$ — многочлены от p, причем степень многочлена $M(p)$ меньше степени многочлена $N(p)$, то оригиналом для $\Phi(p)$ будет

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to a_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\{(p-a_k)^{n_k}\Phi(p)e^{pt}\},$$

где a_k — полюсы $\Phi(p)$, n_k — их порядки и сумма берется по всем полюсам функции $\Phi(p)$.

В случае, когда все полюсы a_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ функции $\Phi(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ простые,

$$\frac{M(p)}{N(p)} \doteq \sum_{k=1}^{l}\frac{M(a_k)}{N'(a_k)}e^{a_k t} = \varphi(t).$$

11. Теорема умножения (теорема о свертке). ***Пусть функции*** *$f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами, и пусть*

$$f(t) \doteq F(p),$$
$$\varphi(t) \doteq \Phi(p).$$

Тогда

$$F(p)\cdot\Phi(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Интеграл в правой части (5) называется *сверткой* функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается символом $f(t) * \varphi(t)$.

Таким образом, произведение изображений является также изображением, именно изображением свертки оригиналов

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(t) * \varphi(t).$$

12. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси $-\infty < x < +\infty$. Функция

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

называется *преобразованием Фурье функции* $f(x)$.

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Чтобы придать формулам прямого и обратного преобразований Фурье бо́льшую симметричность, их часто записывают в виде

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

§ 1. Основные понятия

Уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где $f(x)$, $K(x,t)$ — известные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция, λ — числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода*. Функция $K(x,t)$ называется *ядром уравнения* Вольтерра. Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

и называется *однородным* уравнением Вольтерра 2-го рода.

Уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция, называют *интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода*. Не нарушая общности, можем считать нижний предел a равным нулю, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Решением интегрального уравнения (1), (2) или (3) называют функцию $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество (по x).

Пример. Показать, что функция $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Решение. Подставляя вместо $\varphi(x)$ в правую часть (4) функцию $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, будем иметь

$$\frac{1}{1+x^2}-\int_0^x \frac{t}{1+x^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}\,dt=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}=\varphi(x).$$

Таким образом, подстановка $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ в обе части уравнения (4) обращает последнее в тождество по x:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\equiv\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Это означает, согласно определению, что $\varphi(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ есть решение интегрального уравнения (4).

Проверить, что данные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений.

1. $\varphi(x)=\frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$;

$$\varphi(x)=\frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2}-\int_0^x \frac{3x+2x^3-t}{(1+x^2)^2}\,\varphi(t)\,dt.$$

2. $\varphi(x)=e^x(\cos e^x-e^x\sin e^x)$;

$$\varphi(x)=(1-xe^{2x})\cos 1-e^{2x}\sin 1+\int_0^x[1-(x-t)e^{2x}]\,\varphi(t)\,dt.$$

3. $\varphi(x)=xe^x$; $\quad \varphi(x)=\sin x+2\int_0^x\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

4. $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6}$; $\varphi(x)=x-\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

5. $\varphi(x)=1-x$; $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=x.$

6. $\varphi(x)=3;\quad x^3=\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt.$

7. $\varphi(x)=\frac{1}{2};\quad \int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=\sqrt{x}.$

8. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}};\quad \int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt=1.$

Замечание. Интегральные уравнения Вольтерра возникают в тех задачах физики, в которых существует предпочтительное направление изменения независимого переменного (например, времени, энергии и т. д.).

Рассмотрим пучок рентгеновских лучей, проходящий через вещество в направлении оси OX. Будем считать, что при рассеянии пучок сохраняет это направление. Рассмотрим совокупность лучей с заданной длиной волны. Проходя через слой вещества толщины dx, часть этих лучей поглощается, а часть изменяет длину волны из-за рассеяния. С другой стороны, эта совокупность пополняется за счет тех лучей, которые, обладая первоначально большей энергией (т. е. имея меньшую длину волны λ), теряют часть своей энергии из-за рассеяния. Таким образом, если функция $f(\lambda, x)\,d\lambda$ задает совокупность лучей, длина волн которых заключена в интервале от λ до $\lambda+d\lambda$, то

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x}=-\mu f(\lambda, x)+\int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\, f(\tau, x)\,d\tau,$$

где μ — коэффициент поглощения, а $P(\lambda, \tau)d\tau$ — вероятность того, что луч с длиною волны τ, проходя слой единичной толщины, приобретает длину волны, заключенную между λ и $\lambda+d\lambda$.

Мы получили так называемое интегро-дифференциальное уравнение, т. е. уравнение, в котором неизвестная функция $f(\lambda, x)$ входит под знак производной и интеграла.

Полагая

$$f(\lambda, x)=\int_0^\infty e^{-px}\psi(\lambda, p)\,dp,$$

где $\psi(\lambda, p)$ — новая неизвестная функция, найдем, что $\psi(\lambda, p)$ будет удовлетворять интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\psi(\lambda, p)=\frac{1}{\mu-p}\int_0^\lambda P(\lambda, \tau)\,\psi(\tau, p)\,d\tau.$$

§ 2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра

Решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)\,y=F(x) \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ при начальных условиях

$$y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=C_{n-1} \tag{2}$$

может быть сведено к решению некоторого интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Покажем это на примере дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)\,y=F(x), \tag{1'}$$

$$y(0)=C_0,\qquad y'(0)=C_1. \tag{2'}$$

Полагаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x). \tag{3}$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия (2'), последовательно находим:

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)\,dt+C_1,\quad y=\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)\,dt+C_1x+C_0. \tag{4}$$

При этом мы использовали формулу

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\ldots\int_{x_0}^x}_{n} f(x)\,dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x(x-z)^{n-1}f(z)\,dz.$$

Учитывая (3) и (4), дифференциальное уравнение (1) запишем так:

$$\varphi(x)+\int_0^x a_1(x)\,\varphi(t)\,dt+C_1a_1(x)+\int_0^x a_2(x)(x-t)\,\varphi(t)\,dt+$$
$$+C_1xa_2(x)+C_0a_2(x)=F(x)$$

или

$$\varphi(x)+\int_0^x [a_1(x)+a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)\,dt=$$
$$=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x). \qquad (5)$$

Полагая

$$K(x,\ t)=-[a_1(x)+a_2(x)(x-t)], \qquad (6)$$

$$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x), \qquad (7)$$

приведем (5) к виду

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt+f(x), \qquad (8)$$

т. е. придем к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Существование единственного решения уравнения (8) следует из существования и единственности решения задачи Коши (1′) — (2′) для линейного дифференциального уравнения с непрерывными коэффициентами в окрестности точки $x=0$.

Обратно, решая интегральное уравнение (8) с K и f, определенными по формулам (6) и (7), и подставляя выражение, полученное для $\varphi(x)$, в последнее из уравнений (4), мы получим единственное решение уравнения (1′), удовлетворяющее начальным условиям (2′).

Пример. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$y''+xy'+y=0 \qquad (1)$$

и начальным условиям

$$y(0)=1, \qquad y'(0)=0. \qquad (2)$$

Решение. Полагаем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x). \qquad (3)$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \varphi(t)\,dt+y'(0)=\int_0^x \varphi(t)\,dt, \qquad y=\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1. \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в данное дифференциальное уравнение, найдем

$$\varphi(x)+\int_0^x x\varphi(t)\,dt+\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt+1=0$$

или

$$\varphi(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями:

9. $y'' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

10. $y' - y = 0; \quad y(0) = 1.$

11. $y'' + y = \cos x; \quad y(0) = y'(0) = 0.$

12. $y'' - 5y' + 6y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

13. $y'' + y = \cos x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

14. $y'' - y' \sin x + e^x y = x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

15. $y'' + (1 + x^2)\, y = \cos x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

16. $y''' + xy'' + (x^2 - x)\, y = xe^x + 1;$

$y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$

17. $y''' - 2xy = 0; \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = y''(0) = 1.$

18. Показать, что линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами при любых начальных условиях сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода с ядром, зависящим лишь от разности аргументов $(x - t)$ (интегральное уравнение с замкнутым циклом или уравнение свертки).

§ 3. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1}$$

где $K(x, t)$ есть непрерывная функция при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x \leqslant a$.

Будем искать решение интегрального уравнения (1) в виде бесконечного степенного ряда по степеням λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots \tag{2}$$

Подставляя формально этот ряд в (1), получим

$$\varphi_0(x)+\lambda\varphi_1(x)+\ldots+\lambda^n\varphi_n(x)+\ldots=$$
$$=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\left[\varphi_0(t)+\lambda\varphi_1(t)+\ldots+\lambda^n\varphi_n(t)+\ldots\right]dt. \tag{3}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, найдем:

$$\varphi_0(x)=f(x),$$
$$\varphi_1(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt=\int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt, \tag{4}$$
$$\varphi_2(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi_1(t)\,dt=\int_0^x K(x,t)\int_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\,dt$$

. . . .

Соотношения (4) дают способ последовательного определения функций $\varphi_n(x)$. Можно показать, что при сделанных предположениях относительно $f(x)$ и $K(x,t)$ полученный таким образом ряд (2) сходится равномерно по x и λ при любом λ и $x\in[0,a]$ и его сумма есть единственное решение уравнения (1).

Далее, из (4) следует:

$$\varphi_1(x)=\int_0^x K(x,t)\,f(t)\,dt, \tag{5}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x K(x,t)\left[\int_0^t K(t,t_1)\,f(t_1)\,dt_1\right]dt=$$
$$=\int_0^x f(t_1)\,dt_1\int_{t_1}^x K(x,t)\,K(t,t_1)\,dt=\int_0^x K_2(x,t_1)\,f(t_1)\,dt_1, \tag{6}$$

где

$$K_2(x,t_1)=\int_{t_1}^x K(x,t)\,K(t,t_1)\,dt. \quad ? \tag{7}$$

Аналогично устанавливается, что вообще

$$\varphi_n(x)=\int_0^x K_n(x,t)\,f(t)\,dt \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{8}$$

Функции $K_n(x, t)$ называются *повторными* или *итерированными ядрами*. Они, как нетрудно показать, определяются при помощи рекуррентных формул

$$K_1(x, t) = K(x, t),$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t)\, dz \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), равенство (2) можно записать так:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \int_0^x K_\nu(x, t) f(t)\, dt. \tag{10}$$

Функция $R(x, t; \lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, t), \tag{11}$$

называется *резольвентой* (или разрешающим ядром) интегрального уравнения (1). Ряд (11) в случае непрерывного ядра $K(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно.

Повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела в интегральном уравнении.

Резольвента $R(x, t; \lambda)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$R(x, t; \lambda) = K(x, t) + \lambda \int_t^x K(x, s) R(s, t; \lambda)\, ds. \tag{12}$$

С помощью резольвенты решение интегрального уравнения (1) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t)\, dt \tag{13}$$

(см. [6], [16]).

Пример. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) \equiv 1$.

Решение. Имеем $K_1(x, t) = K(x, t) = 1$. Далее, согласно формулам (9)

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_1(z, t)\, dz = \int_t^x dz = x - t,$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x 1 \cdot (z - t)\, dz = \frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x, t) = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^2}{2}\, dz = \frac{(x-t)^3}{3!},$$

. . . .

$$K_n(x, t) = \int_t^x 1 \cdot K_{n-1}(z, t)\, dz = \int_t^x 1 \cdot \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, согласно определению резольвента

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (x-t)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами:

19. $K(x, t) = x - t$.

20. $K(x, t) = e^{x-t}$.

21. $K(x, t) = e^{x^2-t^2}$.

22. $K(x, t) = \dfrac{1+x^2}{1+t^2}$.

23. $K(x, t) = \dfrac{2+\cos x}{2+\cos t}$.

24. $K(x, t) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$.

25. $K(x, t) = a^{x-t} \quad (a > 0)$.

Предположим, что ядро $K(x, t)$ есть многочлен $(n-1)$-й степени относительно t, так что его можно представить в виде

$$K(x, t) = a_0(x) + a_1(x)(x-t) + \ldots + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \qquad (14)$$

причем коэффициенты $a_k(x)$ непрерывны в $[0, a]$. Если определить функцию $g(x, t; \lambda)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}(x)\, g\right] = 0, \qquad (15)$$

удовлетворяющее условиям

$$g\Big|_{x=t} = \frac{dg}{dx}\Big|_{x=t} = \ldots = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\Big|_{x=t} = 0; \quad \frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\Big|_{x=t} = 1, \qquad (16)$$

то резольвента $R(x, t; \lambda)$ будет определяться равенством

$$R(x, t; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(x, t; \lambda)}{dx^n}. \tag{17}$$

Аналогично в случае, когда

$$K(x, t) = b_0(t) + b_1(t)(t-x) + \ldots + \frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1}, \tag{18}$$

резольвента

$$R(x, t; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \frac{d^n g(t, x; \lambda)}{dt^n}, \tag{19}$$

где $g(x, t; \lambda)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^n g}{dt^n} + \lambda \left[b_0(t) \frac{d^{n-1} g}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}(t)\, g \right] = 0, \tag{20}$$

удовлетворяющее условиям (16) (см. [6]).

Пример. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)\, \varphi(t)\, dt.$$

Решение. В данном случае $K(x, t) = x - t$; $\lambda = 1$; следовательно, согласно (14) $a_1(x) = 1$, все остальные $a_k(x) = 0$.

Уравнение (15) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 g(x, t; 1)}{dx^2} - g(x, t; 1) = 0,$$

откуда

$$g(x, t; 1) = g(x, t) = C_1(t)\, e^x + C_2(t)\, e^{-x}.$$

Условия (16) дают

$$\begin{cases} C_1(t) e^t + C_2(t)\, e^{-t} = 0, \\ C_1(t) e^t - C_2(t)\, e^{-t} = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Решая систему (21), находим

$$C_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t}, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{2} e^t,$$

и, следовательно,

$$g(x, t) = \frac{1}{2}\left(e^{x-t} - e^{-(x-t)}\right) = \operatorname{sh}(x-t).$$

Согласно (17)

$$R(x, t; 1) = [\operatorname{sh}(x-t)]''_x = \operatorname{sh}(x-t).$$

Найти резольвенты интегральных уравнений со следующими ядрами ($\lambda = 1$):

26. $K(x, t) = 2 - (x - t)$.

27. $K(x, t) = -2 + 3(x - t)$.

28. $K(x, t) = 2x$.

29. $K(x, t) = -\dfrac{4x-2}{2x+1} + \dfrac{8(x-t)}{2x+1}$.

30. Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра, ядро которого зависит лишь от разности своих аргументов

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (\lambda = 1). \tag{22}$$

Показать, что для уравнения (22) все повторные ядра и резольвента также зависят лишь от разности $x - t$.

Пусть функции $f(x)$ и $K(x)$ в уравнении (22) есть функции-оригиналы. Применим к обеим частям (22) преобразование Лапласа и, используя теорему умножения (преобразование свертки), найдем

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\Phi(p),$$

где

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p),$$
$$f(x) \risingdotseq F(p),$$
$$K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}, \qquad \widetilde{K}(p) \neq 1. \tag{23}$$

Используя результаты задачи 30, мы можем написать решение интегрального уравнения (22) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\,dt, \tag{24}$$

где $R(x - t)$ — резольвента интегрального уравнения (22).

Применив к обеим частям уравнения (24) преобразование Лапласа, найдем

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{R}(p)F(p),$$

где

$$R(x) \risingdotseq \widetilde{R}(p).$$

Отсюда

$$\widetilde{R}(p) = \frac{\Phi(p) - F(p)}{F(p)}. \qquad (25)$$

Подставляя в (25) выражение для $\Phi(p)$ из (23), получим

$$\widetilde{R}(p) = \frac{\widetilde{K}(p)}{1 - \widetilde{K}(p)}. \qquad (26)$$

Оригинал для $\widetilde{R}(p)$ будет резольвентой интегрального уравнения (22).

Пример. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x, t) = \sin(x - t)$, $\lambda = 1$.

Решение. Имеем $\widetilde{K}(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$. Согласно равенству (26)

$$\widetilde{R}(p) = \frac{\frac{1}{p^2+1}}{1 - \frac{1}{p^2+1}} = \frac{1}{p^2} \risingdotseq x.$$

Следовательно, искомая резольвента интегрального уравнения

$$R(x, t; 1) = x - t.$$

Найти резольвенты интегральных уравнений Вольтерра с ядрами ($\lambda = 1$):

31. $K(x, t) = \operatorname{sh}(x - t)$.

32. $K(x, t) = e^{-(x-t)}$.

33. $K(x, t) = e^{-(x-t)} \sin(x - t)$.

34. $K(x, t) = \operatorname{ch}(x - t)$.

35. $K(x, t) = 2\cos(x - t)$.

Пример. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2 - t^2} \varphi(t)\, dt.$$

Решение. Резольвента ядра $K(x, t) = e^{x^2 - t^2}$ при $\lambda = 1$ есть $R(x, t; 1) = e^{x-t} e^{x^2 - t^2}$ (см. № 21). Согласно формуле (13) решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} e^{x^2-t^2} e^{t^2}\, dt = e^{x+x^2}.$$

Используя результаты предыдущих задач, найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений:

36. $\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

37. $\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

38. $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t} \varphi(t)\, dt.$

39. $\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t} \varphi(t)\, dt.$

40. $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t)\, dt.$

41. $\varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2\int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t)\, dt.$

42. $\varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t)\, dt.$

43. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t) \varphi(t)\, dt.$

44. $\varphi(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi(t)\, dt.$

45. $\varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \sin(x-t) \varphi(t)\, dt.$

Замечание. 1. Однозначная разрешимость интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

имеет место при значительно более общих предположениях относительно функции $f(x)$ и ядра $K(x, t)$, нежели их непрерывность.

Теорема. *Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода* (1), *у которого ядро $K(x, t)$ и функция $f(x)$ принадлежат соответственно пространствам $L_2(\Omega_0)$ и $L_2(0, a)$, имеет одно и только одно решение из пространства $L_2(0, a)$.*

Это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t)\,dt, \tag{2}$$

где резольвента $R(x, t; \lambda)$ определяется при помощи ряда

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu K_{\nu+1}(x, t), \tag{3}$$

составленного из итерированных ядер и сходящегося почти всюду.

Замечание 2. В вопросах единственности решения интегрального уравнения существенную роль играет класс функций, в котором ищется решение (класс суммируемых функций, квадратично суммируемых, непрерывных и т. д.).

Так, если ядро $K(x, t)$ уравнения Вольтерра ограничено, когда x меняется в некотором конечном интервале (a, b), так что

$$|K(x, t)| \leqslant M, \quad M = \text{const}, \quad x \in (a, b),$$

и свободный член $f(x)$ суммируем в интервале (a, b), то уравнение Вольтерра при любом значении λ имеет в интервале (a, b) единственное суммируемое решение $\varphi(x)$.

Однако если отказаться от требования суммируемости решения, то теорема единственности перестает быть верной в том смысле, что уравнение может иметь наряду с суммируемым решением еще и несуммируемые решения.

П. С. Урысон ([27]) построил изящные примеры интегральных уравнений (см. ниже примеры 1 и 2), которые наряду с суммируемыми имеют и несуммируемые решения даже в том случае, когда ядро $K(x, t)$ и функция $f(x)$ непрерывны.

Будем считать для простоты $f(x) \equiv 0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt, \tag{4}$$

где $K(x, t)$ — непрерывная функция.

Единственным суммируемым решением уравнения (1) будет $\varphi(x)\equiv 0$.

Пример 1. Пусть $0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1$,

$$K(x,t)=\begin{cases} te^{\frac{1}{x^2}-1}, & 0\leqslant t\leqslant xe^{1-\frac{1}{x^2}},\\ x, & xe^{1-\frac{1}{x^2}}\leqslant t\leqslant x,\\ 0, & t>x. \end{cases} \tag{2}$$

В квадрате $\Omega_0\{0\leqslant x,\ t\leqslant 1\}$ ядро $K(x,t)$ ограничено, так как $0\leqslant K(x,t)\leqslant x\leqslant 1$. Более того, оно непрерывно при $0\leqslant t\leqslant x$. Уравнение (1) в этом случае имеет очевидное суммируемое решение $\varphi(x)\equiv 0$, и в силу сказанного выше других суммируемых решений это уравнение не имеет.

С другой стороны, непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (1) имеет бесконечное множество несуммируемых в $(0,1)$ решений вида

$$\varphi(x)=\frac{C}{x}$$

(C — произвольная постоянная, $x\neq 0$).

В самом деле, учитывая выражение (2) для ядра $K(x,t)$, находим

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=\int_0^{xe^{1-\frac{1}{x^2}}} te^{\frac{1}{x^2}-1}\frac{C}{t}\,dt+$$
$$+\int_{xe^{1-\frac{1}{x^2}}}^{x} x\frac{C}{t}\,dt=Cx+Cx\ln e^{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{C}{x}.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{C}{x}\equiv\frac{C}{x}\qquad(x\neq 0).$$

Это и означает, что $\varphi(x)=\dfrac{C}{x}$ есть решение (несуммируемое) уравнения (1).

Пример 2. Пусть $0\leqslant t\leqslant x<a$ ($a>0$ — любое, в частности $a=+\infty$),

$$K(x,t)=\frac{2}{\pi}\,\frac{xt^2}{x^6+t^2}. \tag{3}$$

Функция $K(x,t)$ даже голоморфна всюду, за исключением точки $(0,0)$. Однако уравнение (1) с ядром (3) допускает несуммируемые решения. В самом деле, уравнение

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{xt^2}{x^6+t^2}\psi(t)\,dt-\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{arctg}x^2}{x^2} \tag{4}$$

имеет суммируемое решение, так как функция

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}$$

ограничена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$.

Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \psi(x) + \dfrac{1}{x^2}, & x > 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\psi(x)$ — решение уравнения (4), будет уже несуммируемым решением уравнения (1) с ядром (3).

Действительно, для $x > 0$ имеем

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{xt^2}{x^6+t^2}\psi(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{x\,dt}{x^6+t^2}. \tag{6}$$

В силу уравнения (4) первое слагаемое в правой части (6) есть

$$\psi(x) + \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2}.$$

Второе слагаемое дает

$$\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{x\,dt}{x^6+t^2} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{arctg}\frac{t}{x^3}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} = \frac{2}{\pi x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} \qquad (x > 0).$$

Таким образом,

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = \psi(x) + \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2} + \frac{2}{\pi x^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} = \\ = \psi(x) + \frac{1}{x^2} = \varphi(x),$$

а это и означает, что функция $\varphi(x)$, определяемая равенством (5), есть несуммируемое решение уравнения (1) с ядром (3).

Пример 3. Уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x t^{x-t}\varphi(t)\,dt \qquad (0 \leqslant x,\ t \leqslant 1)$$

имеет одно и только одно непрерывное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что это уравнение имеет, кроме того, бесконечное множество разрывных решений вида

$$\varphi(x) = Cx^{x-1},$$

где C — произвольная постоянная.

§ 4. Метод последовательных приближений

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $f(x)$ непрерывна в $[0, a]$, а ядро $K(x, t)$ непрерывно при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$.

Возьмем какую-либо непрерывную в $[0, a]$ функцию $\varphi_0(x)$. Подставляя в правую часть уравнения (1) вместо $\varphi(x)$ функцию $\varphi_0(x)$, получаем

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi_0(t)\,dt.$$

Определенная таким образом функция $\varphi_1(x)$ также непрерывна на отрезке $[0, a]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots,$$

где

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt.$$

При сделанных предположениях относительно $f(x)$ и $K(x, t)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к решению $\varphi(x)$ интегрального уравнения (1) (см. [14]).

Если, в частности, в качестве $\varphi_0(x)$ взять $f(x)$, то $\varphi_n(x)$ будут как раз частичными суммами ряда (2) из § 3, определяющего решение интегрального уравнения (1). Удачный выбор «нулевого» приближения $\varphi_0(x)$ может повести к быстрой сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к решению интегрального уравнения.

Пример. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=1+\int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

взяв $\varphi_0(x)\equiv 0$.

Решение. Так как $\varphi_0(x)\equiv 0$, то $\varphi_1(x)=1$. Далее,

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x 1\cdot dt=1+x,$$

$$\varphi_3(x)=1+\int_0^x (1+t)\,dt=1+x+\frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_4(x)=1+\int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)dt=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}.$$

Очевидно,

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, $\varphi_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. Отсюда следует, что $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} e^x$. Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x) = e^x$ есть решение данного интегрального уравнения.

Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения:

46. $\varphi(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) \equiv 0.$

47. $\varphi(x) = 1 - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) \equiv 0.$

48. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = 1.$

49. $\varphi(x) = x + 1 - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt,$

а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = x + 1$.

50. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt,$

а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = x$, в) $\varphi_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$.

51. $\varphi(x) = 1 + x + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = 1.$

52. $\varphi(x) = 2x + 2 - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt,$

а) $\varphi_0(x) = 1$, б) $\varphi_0(x) = 2$.

53. $\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int\limits_0^x x\varphi(t)\,dt,$

а) $\varphi_0(x) = 2,$ б) $\varphi_0(x) = 2x.$

54. $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt, \quad \varphi_0(x) = x^2.$

55. Пусть $K(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^x K^2(x,t)\,dt\,dx < +\infty.$$

Доказать, что уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = 0$$

имеет при любом λ единственное решение $\varphi(x) \equiv 0$ в классе $L_2(0, a)$.

Метод последовательных приближений может быть применен и к решению нелинейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$y(x) = y_0 + \int\limits_0^x F[t, y(t)]\,dt \tag{2}$$

или более общих

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x F(x, t, \varphi(t))\,dt \tag{3}$$

при весьма широких предположениях относительно функций $F(x, t, z)$ и $f(x)$. К уравнению вида (2) приводится задача решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \qquad y|_{x=0} = y_0.$$

Как и в случае линейных интегральных уравнений, будем искать решение уравнения (3) как предел последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, где, например, $\varphi_0(x) = f(x)$, а следующие элементы $\varphi_k(x)$ вычисляются последовательно по формуле

$$\varphi_k(x) = f(x) + \int\limits_0^x F(x, t, \varphi_{k-1}(t))\,dt \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Если $f(x)$ и $F(x, t, z)$ суммируемы с квадратом и удовлетворяют условиям

$$|F(x, t, z_2) - F(x, t, z_1)| \leqslant a(x, t)\,|z_2 - z_1|, \tag{5}$$

$$\left|\int_0^x F(x, t, f(t))\,dt\right| \leqslant n(x), \tag{6}$$

где функции $a(x, t)$ и $n(x)$ таковы, что в основной области $(0 \leqslant t \leqslant x \leqslant a)$

$$\int_0^a n^2(x)\,dx \leqslant N^2, \qquad \int_0^a dx \int_0^x a^2(x, t)\,dt \leqslant A^2, \tag{7}$$

то нелинейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (3) имеет, и притом единственное, решение $\varphi(x) \in L_2(0, a)$, которое определяется как предел $\varphi_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

где функции $\varphi_n(x)$ находятся по рекуррентным формулам (4). В качестве $\varphi_0(x)$ можно взять любую функцию из $L_2(0, a)$ (в частности, непрерывную функцию), для которой выполняется условие (6). Заметим, что удачный выбор нулевого приближения может облегчить решение интегрального уравнения.

Пример. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2}\,dt,$$

взяв в качестве нулевого приближения: 1) $\varphi_0(x) = 0$; 2) $\varphi_0(x) = x$.

Решение. 1) Пусть $\varphi_0(x) = 0$. Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} x,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1 + \operatorname{arctg}^2 t}{1 + t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1 + \left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 t\right)^2}{1 + t^2}\,dt =$$

$$= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x + \frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x + \frac{1}{7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x,$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+\frac{2}{3\cdot 5}\operatorname{arctg}^5 x+$$
$$+\frac{17}{5\cdot 7\cdot 9}\operatorname{arctg}^7 x+\frac{38}{5\cdot 7\cdot 9^2}\operatorname{arctg}^9 x+\frac{134}{9\cdot 11\cdot 21\cdot 25}\operatorname{arctg}^{11} x+$$
$$+\frac{4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}\operatorname{arctg}^{13} x+\frac{1}{7^2\cdot 9^2\cdot 15}\operatorname{arctg}^{15} x, \ldots$$

Обозначая $\operatorname{arctg} x=u$ и сравнивая выражения для $\varphi_n(x)$ с разложением

$$\operatorname{tg} u=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}u^{2\nu-1}, \qquad |u|<\frac{\pi}{2},$$

где B_ν — числа Бернулли *), замечаем, что

$$\varphi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=x.$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x)=x$ есть решение данного интегрального уравнения.

2) Пусть $\varphi_0(x)=x$. Тогда

$$\varphi_1(x)=\int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2}\,dt=x.$$

Аналогично находим $\varphi_n(x)=x$ $(n=2, 3, \ldots)$.

Таким образом, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ *есть стационарная последовательность* $\{x\}$, предел которой $\varphi(x)=x$. Решение данного интегрального уравнения получается сразу:

$$\varphi(x)=x.$$

56. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)}\,dt.$$

---

*) Числа Бернулли $B_{2\nu+1}$ с нечетным индексом все равны нулю, кроме $B_1=-\frac{1}{2}$. Число $B_0=1$, числа $B_{2\nu}$ определяются рекуррентными формулами

$$B_{2\nu}=-\frac{1}{2\nu+1}+\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{2\nu-2}\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(2\nu-2k+2)}{k!}B_k.$$

57. Методом последовательных приближений найти второе приближение $\varphi_2(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x [\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2]\, dt.$$

58. Методом последовательных приближений найти третье приближение $\varphi_3(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x [t\varphi^2(t) - 1]\, dt.$$

§ 5. Уравнения типа свертки

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две непрерывные функции, определенные при $x \geqslant 0$. *Сверткой* этих *двух функций* называется функция $\varphi_3(x)$, определяемая равенством

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \varphi_1(x-t)\, \varphi_2(t)\, dt. \tag{1}$$

Эта функция, определенная при $x \geqslant 0$, будет также непрерывной функцией. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются функциями-оригиналами для преобразования Лапласа, то

$$\mathscr{L}\varphi_3 = \mathscr{L}\varphi_1 \cdot \mathscr{L}\varphi_2, \tag{2}$$

т. е. изображение свертки равно произведению изображений свертываемых функций (теорема умножения).

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{3}$$

ядро которого зависит лишь от разности $x - t$. Будем называть уравнение (3) *интегральным уравнением типа свертки*.

Пусть $f(x)$ и $K(x)$ — достаточно гладкие функции, растущие при $x \to \infty$ не быстрее показательной функции, так что

$$|f(x)| \leqslant M_1 e^{s_1 x}, \qquad |K(x)| \leqslant M_2 e^{s_2 x}. \tag{4}$$

Применяя метод последовательных приближений, можно показать, что в этом случае и функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять оценке типа (4):

$$|\varphi(x)| \leqslant M_3 e^{s_3 x}.$$

Следовательно, может быть найдено изображение по Лапласу функций $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$ (оно будет определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > \max(s_1, s_2, s_3)$).

Пусть

$$f(x) \risingdotseq F(p), \qquad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \qquad K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (3) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, найдем

$$\Phi(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\,\Phi(p). \tag{5}$$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \widetilde{K}(p)} \qquad (\widetilde{K}(p) \neq 1).$$

Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения (3) (см. [22]).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x - t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Решение. Известно, что

$$\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \qquad \cos x \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}.$$

Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая при этом теорему умножения (изображение свертки), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\,\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p)\left[1 - \frac{2p}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1}$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq xe^x.$$

Следовательно, решение данного интегрального уравнения есть

$$\varphi(x) = xe^x.$$

Решить следующие интегральные уравнения:

59. $\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

60. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

61. $\varphi(x)=e^{2x}+\int\limits_0^x e^{t-x}\varphi(t)\,dt.$

62. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

63. $\varphi(x)=\cos x-\int\limits_0^x (x-t)\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

64. $\varphi(x)=1+x+\int\limits_0^x e^{-2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$

65. $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

66. $\varphi(x)=\sin x+\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

67. $\varphi(x)=x-\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

68. $$\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x [3-6(x-t)-\\ -4(x-t)^2]\,\varphi(t)\,dt.$$

69. $\varphi(x)=\operatorname{sh}x-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

70. $\varphi(x)=1+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

71. $\varphi(x)=e^x+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$

72. $\varphi(x)=\cos x+\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt.$

Преобразование Лапласа может быть использовано при решении систем интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \int_0^x K_{ij}(x-t)\,\varphi_j(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \quad (6)$$

где $K_{ij}(x)$, $f_i(x)$ — известные непрерывные функции, имеющие изображение по Лапласу.

Применив к обеим частям (6) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{K}_{ij}(p)\,\Phi_j(p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \quad (7)$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_j(p)$. Решая ее, найдем $\Phi_j(p)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (6).

Пример. Решить систему интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt + \int_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) &= 4x - \int_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int_0^x (x-t)\,\varphi_2(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему об изображении свертки, получим

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_1(p) &= \frac{1}{p} - \frac{2}{p-2}\Phi_1(p) + \frac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) &= \frac{4}{p^2} - \frac{1}{p}\Phi_1(p) + \frac{4}{p^2}\Phi_2(p). \end{aligned}\right.$$

Решая полученную систему относительно $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$, найдем

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ равны соответственно

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$$

Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ суть решения исходной системы интегральных уравнений (8).

Решить следующие системы интегральных уравнений.

73. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

74. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x e^{x-t}\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{t-x}\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = \cos x - 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int\limits_0^x (x-t)\,\varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

§ 6. Решение интегро-дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

Линейным интегро-дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$a_0(x)\,\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\,\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\,\varphi(x) + \sum_{m=0}^{s} \int\limits_0^x K_m(x, t)\,\varphi^{(m)}(t)\,dt = f(x). \qquad (1)$$

Здесь $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, $f(x)$, $K_m(x, t)$ $(m = 0, 1, \ldots, s)$ — известные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция.

При решении интегро-дифференциальных уравнений (1), в отличие от случая интегральных уравнений, для искомой функции $\varphi(x)$ ставятся начальные условия вида

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_0^{(n-1)}. \qquad (2)$$

Пусть в (1) коэффициенты $a_k(x) = \text{const}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, и пусть $K_m(x, t) = K_m(x - t)$ $(m = 0, 1, \ldots, s)$, т. е. все K_m зависят лишь от разности аргументов $x - t$. Не нарушая общности, можно считать

$a_0 = 1$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n\varphi(x) + \sum_{m=0}^{s}\int_0^x K_m(x-t)\,\varphi^{(m)}(t)\,dt = f(x) \quad (a_1, \ldots, a_n - \mathrm{const}). \qquad (3)$$

Пусть, далее, функции $f(x)$ и $K_m(x)$ являются функциями-оригиналами и

$$f(x) \risingdotseq F(p), \qquad K_m(x) \risingdotseq \widetilde{K}_m(p) \qquad (m = 0, 1, \ldots, s).$$

Тогда и функция $\varphi(x)$ будет иметь изображение по Лапласу

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p).$$

Применим к обеим частям (3) преобразование Лапласа. В силу теоремы об изображении производной

$$\varphi^{(k)}(x) \risingdotseq p^k\Phi(p) - p^{k-1}\varphi_0 - p^{k-2}\varphi_0' - \ldots - \varphi_0^{(k-1)} \qquad (4)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

По теореме умножения

$$\int_0^x K_m(x-t)\,\varphi^{(m)}(t)\,dt \risingdotseq$$
$$\risingdotseq \widetilde{K}_m(p)\left[p^m\Phi(p) - p^{m-1}\varphi_0 - \ldots - \varphi_0^{(m-1)}\right] \qquad (5)$$
$$(m = 0, 1, \ldots, s).$$

Поэтому уравнение (3) перейдет в следующее:

$$\Phi(p)\left[p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n + \sum_{m=0}^{s}\widetilde{K}(p)\,p^m\right] = A(p), \qquad (6)$$

где $A(p)$ — некоторая известная функция от p.

Из равенства (6) находим $\Phi(p)$ — операторное решение задачи (3) — (2). Находя оригинал для $\Phi(p)$, получим решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Пример. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = e^{2x}, \qquad (7)$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \qquad (8)$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. В силу (8)

$$\varphi'(x) \risingdotseq p\Phi(p),$$
$$\varphi''(x) \risingdotseq p^2\Phi(p).$$

Поэтому после применения преобразования Лапласа уравнение (7) примет вид

$$p^2\Phi(p)+\frac{p}{p-2}\Phi(p)=\frac{1}{p-2} \tag{9}$$

или

$$\Phi(p)\,\frac{p(p-1)^2}{p-2}=\frac{1}{p-2}\,. \tag{10}$$

Из (10) находим

$$\Phi(p)=\frac{1}{p(p-1)^2}\doteqdot xe^x-e^x+1.$$

Следовательно, решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям (8), определяется равенством

$$\varphi(x)=xe^x-e^x+1.$$

Решить следующие интегро-дифференциальные уравнения:

80. $\varphi''(x)+\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt=e^{2x};\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1.$

81. $\varphi'(x)-\varphi(x)+\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi'(t)\,dt-\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt=x;$

$$\varphi(0)=-1.$$

82. $\varphi''(x)-2\varphi'(x)+\varphi(x)+2\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi''(t)\,dt+$

$$+2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt=\cos x;\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0.$$

83. $\varphi''(x)+2\varphi'(x)+\varphi(x)-\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi''(t)\,dt-$

$$-2\int\limits_0^x \sin(x-t)\,\varphi'(t)\,dt=\cos x;\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0.$$

84. $\varphi''(x)+\varphi(x)+\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt+$

$$+\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt=\operatorname{ch} x;\ \varphi(0)=\varphi'(0)=0.$$

85. $\varphi''(x)+\varphi(x)+\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,\varphi(t)\,dt+$

$$+\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi'(t)\,dt=\operatorname{ch}x;\ \varphi(0)=-1,\ \varphi'(0)=1.$$

§ 7. Интегральные уравнения Вольтерра с пределами $(x, +\infty)$

Интегральные уравнения вида

$$\varphi(x)=f(x)+\int\limits_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

возникающие в ряде задач физики, можно также решать с помощью преобразования Лапласа. Для этого установим теорему о свертке для выражений

$$\int\limits_x^{\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Известно, что для преобразования Фурье

$$\mathcal{F}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\,\psi(t)\,dt\right\}=\sqrt{2\pi}\,G(\lambda)\,\Psi(\lambda), \tag{3}$$

где $G(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $g(x)$ и $\psi(x)$ соответственно.

Положим $g(x)=K_-(x)$, т. е.

$$g(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ K(x), & x<0\end{cases}$$

$$\psi(x)=\varphi_+(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{4}$$

Тогда (3) перепишется так:

$$\mathcal{F}\left\{\int\limits_{x}^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right\}=\sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}_-(\lambda)_{\mathcal{F}}\,\widetilde{\Phi}_+(\lambda)_{\mathcal{L}} \tag{5}$$

(здесь и в дальнейшем индексы $\mathcal{F}$ или $\mathcal{L}$ означают, что берется изображение функции соответственно по Фурье или по Лапласу)

Чтобы перейти от преобразования Фурье к преобразованию Лапласа, заметим, что

$$F_{\mathscr{L}}(p)=\sqrt{2\pi}\,[F_+(ip)]_{\mathscr{F}}. \tag{6}$$

Следовательно, из (5) и (6) находим

$$\mathscr{L}\left\{\int_x^\infty K(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right\}=\sqrt{2\pi}\,[\widetilde{K}_-(ip)]_{\mathscr{F}}\,[\Phi_+(p)]_{\mathscr{L}}. \tag{7}$$

Выразим теперь $[\sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}_-(ip)]_{\mathscr{F}}$ через преобразование Лапласа:

$$[\sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}_-(ip)]_{\mathscr{F}}=\int_{-\infty}^0 K(x)\,e^{-px}\,dx=\int_0^\infty K(-x)\,e^{px}\,dx.$$

Положив $K(-x)=\mathscr{K}(x)$, получаем

$$[\sqrt{2\pi}\,\widetilde{K}_-(ip)]_{\mathscr{F}}=\widetilde{\mathscr{K}}_{\mathscr{L}}(-p)=\int_0^\infty K(-x)\,e^{px}\,dx.$$

Итак,

$$\mathscr{L}\left\{\int_x^\infty K(x-t)\,\varphi(t)\,dt\right\}=\widetilde{\mathscr{K}}_{\mathscr{L}}(-p)\,\Phi_{\mathscr{L}}(p). \tag{8}$$

Возвращаемся к интегральному уравнению (1). Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (1), получим

$$\Phi(p)=F(p)+\widetilde{\mathscr{K}}(-p)\,\Phi(p) \tag{9}$$

(индекс $\mathscr{L}$ опущен) или

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\widetilde{\mathscr{K}}(-p)}\qquad(\widetilde{\mathscr{K}}(-p)\neq 1), \tag{10}$$

где

$$\widetilde{\mathscr{K}}(-p)=\int_0^\infty K(-x)\,e^{px}\,dx. \tag{11}$$

Функция

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(p)}{1-\widetilde{\mathscr{K}}(-p)}\,e^{px}\,dp \tag{12}$$

является частным решением интегрального уравнения (1). Подчеркнем, что для того, чтобы решение (9) или (12) имело смысл, необходимо, чтобы области аналитичности $\widetilde{\mathscr{K}}(-p)$ и $F(p)$ перекрывались (см. [18]).

П р и м е р. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=x+\int_x^\infty e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt. \tag{13}$$

Решение. В данном случае $f(x) = x$, $K(x) = e^{2x}$. Поэтому

$$F(p) = \frac{1}{p^2}, \qquad \mathscr{K}(-p) = \int_0^\infty e^{-2x} e^{px}\,dx = \frac{1}{2-p}, \qquad \operatorname{Re} p < 2.$$

Таким образом, получаем следующее операторное уравнение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\,\Phi(p),$$

так что

$$\Phi(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)}. \tag{14}$$

Отсюда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)}\,e^{px}\,dp \qquad (0<\gamma<2). \tag{15}$$

Интеграл (15) можно вычислить по интегральной формуле Коши. Подинтегральная функция имеет двукратный полюс $p = 0$ и простой полюс $p = 1$, который появляется при $\gamma > 1$, что связано с включением или невключением в решение уравнения (13) решения соответствующего однородного уравнения

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt.$$

Найдем вычеты подинтегральной функции в ее полюсах:

$$\operatorname*{res}_{p=0}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}\,e^{px}\right) = 2x+1, \qquad \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}\,e^{px}\right) = -e^x.$$

Следовательно, решение интегрального уравнения (13) есть $\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x$ (C — произвольная постоянная).

Решить интегральные уравнения:

86. $\varphi(x) = e^{-x} + \int\limits_x^\infty \varphi(t)\,dt.$

87. $\varphi(x) = e^{-x} + \int\limits_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

88. $\varphi(x) = \cos x + \int\limits_x^\infty e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$

89. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_x^\infty e^{\alpha(x-t)}\varphi(t)\,dt \quad (\alpha > 0).$

§ 8. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad f(0) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция.

Предположим, что $K(x, t)$, $\dfrac{\partial K(x, t)}{\partial x}$, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant t \leqslant x$. Дифференцируя обе части (1) по x, получим

$$K(x, x)\,\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\,\varphi(t)\,dt = f'(x). \tag{2}$$

Всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение $\varphi(x)$ уравнения (1) удовлетворяет, очевидно, и уравнению (2). Обратно, всякое непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant a$ решение уравнения (2) удовлетворяет также уравнению (1).

Если $K(x, x)$ не обращается в нуль ни в одной точке основного интервала $[0, a]$, то уравнение (2) можно переписать так:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)}\,\varphi(t)\,dt, \tag{3}$$

т. е. оно сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода, рассмотренному выше (см. [19]).

Если $K(x, x) \equiv 0$, то иногда бывает полезно еще раз продифференцировать уравнение (2) по x и т. д.

З а м е ч а н и е. *Если $K(x, x)$ обращается в нуль в некоторой точке* $x \in [0, a]$, например в точке $x = 0$, то уравнение (3) приобретает особые свойства, совершенно отличные от свойств уравнения 2-го рода. (Такие уравнения Пикар назвал уравнениями 3-го рода.) Здесь возникают осложнения, подобные тем, которые бывают связаны с обращением в нуль коэффициента при старшей производной в линейном дифференциальном уравнении.

П р и м е р. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \cos(x - t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{4}$$

Р е ш е н и е. Функции $f(x) = x$, $K(x, t) = \cos(x - t)$ удовлетворяют сформулированным выше условиям непрерывности и дифференцируемости.

Дифференцируя обе части (4) по x, получим

$$\varphi(x)\cos 0 - \int_0^x \sin(x - t)\,\varphi(t)\,dt = 1$$

или

$$\varphi(x)=1+\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{5}$$

Уравнение (5) есть интегральное уравнение 2-го рода типа свертки.

Применяя преобразование Лапласа, найдем его решение:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2+1}\,\Phi(p),$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{p^2+1}{p^3}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\doteqdot 1+\frac{x^2}{2}.$$

Функция $\varphi(x)=1+\frac{x^2}{2}$ будет решением уравнения (5), а следовательно, и исходного уравнения (4), в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой.

Решить следующие интегральные уравнения 1-го рода предварительно сведя их к интегральным уравнениям 2-го рода:

90. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt=\sin x.$

91. $\int_0^x 3^{x-t}\,\varphi(t)\,dt=x.$

92. $\int_0^x a^{x-t}\varphi(t)\,dt=f(x),\ f(0)=0.$

93. $\int_0^x (1-x^2+t^2)\,\varphi(t)\,dt=\frac{x^2}{2}.$

94. $\int_0^x (2+x^2-t^2)\,\varphi(t)\,dt=x^2.$

95. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt=e^{x^2/2}-1.$

§ 9. Эйлеровы интегралы

Гамма-функцией или эйлеровым интегралом 2-го рода называется функция $\Gamma(x)$, определяемая равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{1}$$

где x — любое комплексное число, $\operatorname{Re} x > 0$. При $x = 1$ получаем

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1. \tag{2}$$

Интегрируя по частям, из равенства (1) находим

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{3}$$

Это равенство выражает основное свойство гамма-функции:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4}$$

Используя (2), получаем:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!,$$
$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!,$$

и вообще при целом положительном значении n

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \tag{5}$$

Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Положив в этом равенстве $x = t^{1/2}$, найдем

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \sqrt{\pi}.$$

Учитывая выражение (1) для гамма-функции, последнее равенство запишем так:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда с помощью основного свойства гамма-функции, выраженного равенством (4), находим:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi} \text{ и т. д.}$$

Вообще, как нетрудно убедиться, справедливо равенство

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad (6)$$

(n — целое положительное).

Зная значение гамма-функции при каком-то значении аргумента, можно из равенства (3) вычислить значение этой функции при аргументе, уменьшенном на единицу. Например,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Поэтому

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi}. \qquad (7)$$

Действуя аналогично, найдем:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

и т. д.

Нетрудно проверить, что $\Gamma(0)=\Gamma(-1)=\ldots=\Gamma(-n)=\ldots=\infty$. Выше мы определили $\Gamma(x)$ для $\operatorname{Re} x>0$. Указанный способ вычисления $\Gamma(x)$ продолжает эту функцию в левую полуплоскость, где $\Gamma(x)$ определена всюду, кроме точек $x=-n$ (n — целое положительное и 0).

Отметим еще следующие соотношения:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}, \qquad (8)$$

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=2^{1-2x}\,\pi^{1/2}\,\Gamma(2x), \qquad (9)$$

вообще

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}-nx}\,\Gamma(nx)$$

(теорема умножения Гаусса и Лежандра).

Гамма-функция была определена Вейерштрассом посредством уравнения

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}, \tag{10}$$

где

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0{,}57721\ldots$$

— постоянная Эйлера. Из равенства (10) видно, что функция $\Gamma(z)$ аналитична всюду, за исключением точек $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ..., где она имеет простые полюсы.

Приведем еще формулу Эйлера, которая получается из (10):

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}. \tag{11}$$

Она имеет место всюду, кроме точек $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ...

96. Показать, что $\Gamma'(1)=-\gamma$.

97. Показать, что при $\operatorname{Re} z>0$

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx.$$

98. Показать, что

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2\ln 2.$$

99. Доказать, что

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\,n^{z}.$$

Введем эйлеров интеграл I-го рода $B(p,q)$, так называемую *бета-функцию*:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \qquad (\operatorname{Re} p>0,\quad \operatorname{Re} q>0). \tag{12}$$

Справедливо следующее равенство, устанавливающее связь между интегралами Эйлера 1-го и 2-го рода:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{13}$$

100. Показать, что

$$B(p, q) = B(q, p).$$

101. Показать, что

$$B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1).$$

102. Показать, что

$$B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q+1).$$

103. Показать, что

$$\int_{-1}^{1} (1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2^{p+q-1} B(p, q).$$

104. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \qquad (\operatorname{Re} m > 0, \quad \operatorname{Re} n > 0).$$

§ 10. Задача Абеля. Интегральное уравнение Абеля и его обобщения

Материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η) по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой x, достигла оси ξ за время $t = f_1(x)$, где $f_1(x)$ — заданная функция (рис. 1).

Абсолютная величина скорости движущейся точки $v = \sqrt{2g(x-\eta)}$. Обозначим через β угол наклона касательной к оси ξ. Тогда будем иметь

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)} \sin\beta.$$

Отсюда

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до x и обозначая $\frac{1}{\sin\beta}=\varphi(\eta)$, получим *уравнение Абеля*:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{x-\eta}} = -\sqrt{2g}f_1(x).$$

Обозначая $-\sqrt{2g}\ f_1(x)$ через $f(x)$, окончательно получим

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция, а $f(x)$ — заданная функция. Найдя

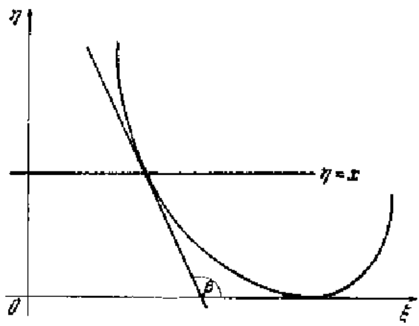

Рис. 1.

$\varphi(\eta)$, мы можем составить уравнение кривой. В самом деле,

$$\varphi(\eta)=\frac{1}{\sin\beta},$$

откуда

$$\eta=\Phi(\beta).$$

Далее,

$$d\xi=\frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta},$$

откуда

$$\xi=\int\frac{\Phi'(\beta)\,d\beta}{\operatorname{tg}\beta}=\Phi_1(\beta),$$

и, следовательно, искомая кривая определится параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\Phi_1(\beta),\\ \eta&=\Phi(\beta).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Итак, задача Абеля сводится к решению интегрального уравнения вида

$$f(x)=\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

с данным ядром $K(x,t)$, данной функцией $f(x)$ и неизвестной функцией $\varphi(x)$, т. е. к решению интегрального уравнения Вольтерра I-го рода.

Уравнением Абеля называют также несколько более общее уравнение:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt=f(x), \tag{3}$$

где α — постоянная, $0<\alpha<1$ (*обобщенное уравнение Абеля*). Функцию $f(x)$ будем считать имеющей непрерывную производную на некотором отрезке $[0,a]$. Заметим, что при $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ ядро уравнения (3) неинтегрируемо с квадратом, т. е. не является L_2-функцией. Однако уравнение (3) имеет решение, которое может быть найдено следующим образом.

Допустим, что решение уравнения (3) существует. Заменим в уравнении x на s, умножим обе части полученного равенства на $\dfrac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}$ и проинтегрируем по s от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\,dt=\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds. \tag{4}$$

Меняя слева порядок интегрирования, получим

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}=F(x), \tag{5}$$

где

$$F(x)=\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds. \tag{6}$$

Во внутреннем интеграле сделаем подстановку $s=t+y(x-t)$:

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^{\alpha}}=\int_0^1 \frac{dy}{y^{\alpha}(1-y)^{1-\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}.$$

Тогда из уравнения (5) имеем

$$\int_0^x \varphi(t)\,dt=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}F(x)$$

или

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right)'_x . \tag{7}$$

Итак, единственное решение уравнения (3) дается формулой (7), которую с помощью интегрирования по частям можно переписать еще в виде

$$\varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\, ds \right]. \tag{8}$$

Физический смысл это решение имеет только в том случае, когда оно по абсолютной величине не меньше 1 $\left(\text{так как } \varphi(x) = \frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Покажем, что в случае $f(x) \equiv C = \text{const}$ решением задачи Абеля является циклоида. (Задача о таутохроне: найти кривую, скользя вдоль которой без трения тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время независимо от ее начального положения.) В этом случае $\alpha = \frac{1}{2}$. Следовательно, согласно формуле (8)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{C}{\sqrt{x}} .$$

Поэтому

$$\sin\beta = \frac{\pi\sqrt{\eta}}{C},$$

откуда

$$\eta = \frac{C^2}{\pi^2} \sin^2\beta.$$

Далее,

$$d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{C^2}{\pi^2} \frac{2\sin\beta\cos\beta}{\operatorname{tg}\beta}\, d\beta = \frac{C^2}{\pi^2}(1+\cos 2\beta)\, d\beta,$$

$$\xi = \frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1.$$

Окончательно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{C^2}{\pi^2}\left(\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) + C_1, \\ \eta &= \frac{C^2}{2\pi^2}(1 - \cos 2\beta) \end{aligned}\right\}$$

(параметрические уравнения циклоиды).

105. Показать, что в случае $f(x) = C\sqrt{x}$ решением задачи Абеля будут прямые.

Решить следующие интегральные уравнения:

106. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = x^n \qquad (0<\alpha<1).$

107. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x.$

108. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = e^x.$

109. $\displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = x^{\frac{1}{2}}.$

110. Решить двумерное уравнение Абеля

$$\iint_D \frac{\varphi(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}} = f(x_0, y_0).$$

Здесь область D — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой на оси OX и с вершиной в точке (x_0, y_0).

Рассмотрим интегральное уравнение (см. [30])

$$\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt = x^{\lambda} \tag{9}$$

($\lambda \geqslant 0$, $\beta > -1$ — вещественное), являющееся в некотором смысле дальнейшим обобщением уравнения Абеля (3).

Умножим обе части (9) на $(z-x)^{\mu}$ $(\mu>-1)$ и проинтегрируем по x от 0 до z:

$$\int_0^z (z-x)^{\mu}\left(\int_0^x (x-t)^{\beta}\varphi(t)\,dt\right)dx = \int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx. \tag{10}$$

Полагая в интеграле в правой части (10) $x=\rho z$, получим

$$\int_0^z x^{\lambda}(z-x)^{\mu}\,dx = z^{\lambda+\mu+1}\int_0^1 \rho^{\lambda}(1-\rho)^{\mu}\,d\rho = z^{\lambda+\mu+1}B(\lambda+1, \mu+1) =$$

$$= z^{\lambda+\mu+1}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} \qquad (\lambda+\mu+1>\lambda\geqslant 0). \tag{11}$$

Меняя порядок интегрирования в левой части (10), получим

$$\int_0^z \left(\int_0^x (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta} \varphi(t)\, dt\right) dx = \int_0^z \left(\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta}\, dx\right) \varphi(t)\, dt. \tag{12}$$

Положим во внутреннем интеграле правой части (12)

$$x = t + \rho (z-t).$$

Тогда

$$\int_t^z (z-x)^{\mu} (x-t)^{\beta}\, dx = (z-t)^{\mu+\beta+1} \int_0^1 \rho^{\beta} (1-\rho)^{\mu}\, d\rho = \tag{13}$$

$$= (z-t)^{\mu+\beta+1} B(\beta+1, \mu+1) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} (z-t)^{\beta+\mu+1}.$$

Учитывая (11), (12), (13), из равенства (10) найдем

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} \int_0^z (z-t)^{\mu+\beta+1} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+2)} z^{\lambda+\mu+1}. \tag{14}$$

Выберем μ так, чтобы $\mu+\beta+1 = n$ — неотрицательному целому числу. Тогда из (14) будем иметь

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \int_0^z (z-t)^n \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}$$

или

$$\int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} \varphi(t)\, dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda+n-\beta}. \tag{15}$$

Дифференцируя обе части (15) $n+1$ раз по z, получим

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)(\lambda+n-\beta)(\lambda+n-\beta-1)\cdots(\lambda-\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda+n-\beta+1)} z^{\lambda-\beta-1} \tag{16}$$

или для $\lambda-\beta+k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots, n)$

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} z^{\lambda-\beta-1}. \tag{17}$$

Это и есть решение интегрального уравнения (9).

Отметим, что если величина $\lambda-\beta-1$ равна целому отрицательному числу, что получаем $\varphi(z)=0$. В этом случае уравнение (9) не имеет решения в классе обычных функций. Его решение — обобщенная функция (см. стр. 60).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x^2.$$

Решение. В данном случае $\beta = 1$, $\lambda = 2$. Так как $\lambda - \beta + k \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, то по формуле (17)

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\,\Gamma(1)}\, x^{2-1-1} = 2.$$

Решить интегральные уравнения:

111. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{3}}\varphi(t)\,dt = x^{\frac{4}{3}} - x^2.$

112. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt = \pi x.$

113. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{4}}\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

114. $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^3.$

115. $\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}.$

§ 11. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки

Интегральное уравнение 1-го рода

$$\int_0^x K(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

у которого ядро $K(x, t)$ зависит лишь от разности аргументов $x - t$, будем называть *интегральным уравнением 1-го рода типа свертки.*

К этому классу уравнений относится, например, обобщенное уравнение Абеля.

Рассмотрим одну задачу, приводящую к интегральному уравнению Вольтерра типа свертки.

Магазин покупает и продает различные товары. Предполагается, что:

1) покупка и продажа суть непрерывные процессы и купленные товары немедленно поступают в продажу;

2) магазин приобретает каждую новую партию любого товара в таком количестве, какое он может продать в промежуток времени T, один и тот же для всех покупок;

3) каждая новая партия товара распродается равномерно в течение времени T.

Магазин начинает продажу новой партии товара, общая стоимость которого равна единице. Требуется найти закон $\varphi(t)$, по которому он должен производить покупки, для того чтобы стоимость наличного товара оставалась постоянной.

Решение. Пусть стоимость первоначального товара, оставшегося к моменту t, равна $K(t)$, где

$$K(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{T}, & t\leqslant T,\\ 0, & t>T.\end{cases}$$

Предположим, что в промежуток времени от τ до $\tau+d\tau$ покупается товаров на сумму $\varphi(\tau)\,d\tau$. Этот запас уменьшается вследствие продажи таким образом, что стоимость остатка к моменту $t>\tau$ равна $K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$. Поэтому стоимость непроданной части товаров, приобретенных путем покупок, будет к любому моменту t равна

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$1-K(t)=\int\limits_0^t K(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Мы получили интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода типа свертки.

Пусть $f(x)$ и $K(x)$ — функции-оригиналы, и пусть

$$f(x)\fallingdotseq F(p),\qquad K(x)\fallingdotseq \widetilde{K}(p),\qquad \varphi(x)\fallingdotseq\Phi(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, будем иметь

$$\widetilde{K}(p)\cdot\Phi(p)=F(p), \tag{2}$$

откуда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{\widetilde{K}(p)}\qquad(\widetilde{K}(p)\neq 0). \tag{3}$$

Оригинал $\varphi(x)$ для функции $\Phi(p)$, определяемой равенством (3), будет решением интегрального уравнения (1).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x. \tag{4}$$

Решение. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (4), получим

$$\frac{1}{p-1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2}, \tag{5}$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{p-1}{p^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \risingdotseq 1 - x.$$

Функция $\varphi(x) = 1 - x$ есть решение уравнения (4).

Решить интегральные уравнения

116. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

117. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = \operatorname{sh} x.$

118. $\int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}}\varphi(t)\,dt = x^{\frac{5}{2}}.$

119. $\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)\,dt = \sin x.$

120. $\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt = x^2.$

121. $\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = x\sin x.$

122. $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\varphi(t)\,dt = x^3e^{-x}.$

123. $\int_0^x J_0(x-t)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

124. $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x.$

125. $\int\limits_0^x \cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt = x + x^2.$

126. $\int\limits_0^x (x^2-t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^3}{3}.$

127. $\int\limits_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = \frac{x^4}{12}.$

128. $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x^2-4xt+3t^2)\,\varphi(t)\,dt = x^2J_4(2\sqrt{x}).$

129. $\int\limits_0^x (x-2t)\,\varphi(t)\,dt = -\frac{x^3}{6}.$

З а м е ч а н и е. Если $K(x, x) = K(0) \neq 0$, то уравнение (1) заведомо имеет решение. В задаче 122 ядро $K(x, t)$ обращается тождественно в нуль при $t = x$, но тем не менее решение этого уравнения существует.

Как уже отмечалось выше, необходимое условие существования непрерывного решения интегрального уравнения вида

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{6}$$

состоит в том, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно и все ее $n-1$ первых производных обращаются в нуль при $x = 0$.

Это «модельное» уравнение (6) указывает на необходимость согласования порядков обращения в нуль ядра при $t = x$ и правой части $f(x)$ при $x = 0$ (превышение должно быть за правой частью по крайней мере на 1).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt = x. \tag{7}$$

Здесь $f(x) = x$, $n = 2$. Очевидно, $f(x)$ имеет производные всех порядков, но ее первая производная $f'(x) = 1 \neq 0$, т. е. необходимое условие не выполняется.

Применяя формально к обеим частям уравнения (7) преобразование Лапласа, получим

$$\frac{1}{p^2}\Phi(p)=\frac{1}{p^2},$$

откуда

$$\Phi(p)=1.$$

Это есть изображение δ-функции $\delta(x)$.

Напомним, что

$$\delta(x)\risingdotseq 1,$$

$$\delta^{(m)}(x)\risingdotseq p^m,$$

m — целое $\geqslant 0$.

Итак, решение интегрального уравнения (7) есть δ-функция:

$$\varphi(x)=\delta(x).$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой, если учесть, что свертка δ-функции со всякой гладкой функцией $g(x)$ определяется так:

$$g(x)*\delta(x)=g(x),$$

$$\delta^{(k)}(x)*g(x)=g^{(k)}(x)\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

В самом деле, в нашем случае $g(x)=K(x)=x$ и

$$\int_0^x K(x-t)\,\delta(t)\,dt=K(x)=x.$$

Таким образом, решение уравнения (7) существует, но уже в классе обобщенных функций (см. [5], [28]).

Решить интегральные уравнения:

130. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt=x^2+x-1.$

131. $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$

132. $\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt=x^2+x^3.$

133. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x+1.$

134. $\int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt=1-\cos x.$

Интегральные уравнения 1-го рода с логарифмическим ядром

$$\int_0^x \varphi(t)\ln(x-t)\,dt = f(x), \qquad f(0)=0, \tag{8}$$

также можно решать с помощью преобразования Лапласа.

Известно, что

$$x^{\nu} \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}} \qquad (\operatorname{Re}\nu > -1). \tag{9}$$

Продифференцируем соотношение (9) по ν:

$$x^{\nu}\ln x \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}\frac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu} + \frac{1}{p^{\nu+1}}\ln\frac{1}{p}\,\Gamma(\nu+1),$$

или

$$x^{\nu}\ln x \risingdotseq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}\left[\frac{\dfrac{d\Gamma(\nu+1)}{d\nu}}{\Gamma(\nu+1)} + \ln\frac{1}{p}\right]. \tag{10}$$

При $\nu=0$ имеем (см. стр. 49)

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma - \text{постоянная Эйлера},$$

и формула (10) принимает вид

$$\ln x \risingdotseq \frac{1}{p}(-\gamma-\ln p) = -\frac{\ln p+\gamma}{p}. \tag{11}$$

Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$, $f(x) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям (8) преобразование Лапласа и используя формулу (11), получим

$$-\Phi(p)\frac{\ln p+\gamma}{p} = F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = -\frac{pF(p)}{\ln p+\gamma}. \tag{12}$$

Запишем $\Phi(p)$ в виде

$$\Phi(p) = -\frac{p^2F(p)-f'(0)}{p(\ln p+\gamma)} - \frac{f'(0)}{p(\ln p+\gamma)}. \tag{13}$$

Так как $f(0)=0$, то

$$p^2F(p) - f'(0) \risingdotseq f''(x). \tag{14}$$

Возвратимся к формуле (9), записав ее в виде

$$\frac{x^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \risingdotseq \frac{1}{p^{\nu+1}}. \tag{9'}$$

Проинтегрируем обе части (9′) по ν в пределах от 0 до ∞. Получим

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \risingdotseq \int_0^\infty \frac{d\nu}{p^{\nu+1}} = \frac{1}{p \ln p}.$$

По теореме подобия

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu a^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \risingdotseq \frac{1}{p \ln (ap)} = \frac{1}{p(\ln p + \ln a)}.$$

Если положить $a = e^\gamma$, то

$$\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \risingdotseq \frac{1}{p(\ln p + \gamma)}. \tag{15}$$

Воспользуемся равенством (13). В силу (15)

$$\frac{f'(0)}{p(\ln p + \gamma)} \risingdotseq f'(0) \int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu.$$

Учитывая (14) и (15), первое слагаемое правой части (13) можно рассматривать как произведение изображений. Для нахождения его оригинала воспользуемся теоремой о свертке:

$$\frac{p^2F(p) - f'(0)}{p(\ln p + \gamma)} \risingdotseq \int_0^x f''(t) \left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \right) dt.$$

Таким образом, решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (8) будет иметь вид

$$\varphi(x) = -\int_0^x f''(t) \left(\int_0^\infty \frac{(x-t)^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu \right) dt - f'(0) \int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu$$

(γ — постоянная Эйлера).

В частности, при $f(x) = x$ получим

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \frac{x^\nu e^{-\gamma\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\, d\nu.$$

Теорема о свертке может быть использована также для решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \varphi(t)\, \varphi(x-t)\, dt. \tag{16}$$

Пусть

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p), \qquad f(x) \risingdotseq F(p).$$

Тогда в силу уравнения (16)

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda\Phi^2(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}.$$

Оригинал для $\Phi(p)$, если он существует, будет решением интегрального уравнения (16).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt = \frac{x^3}{6}. \tag{17}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (17) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi^2(p) = \frac{1}{p^4},$$

откуда

$$\Phi(p) = \pm\frac{1}{p^2}.$$

Функции $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$ будут решениями уравнения (17) (решение уравнения (17) не единственно).

Решить интегральные уравнения:

135. $2\varphi(x) - \int\limits_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt = \sin x.$

136. $\varphi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt - \frac{1}{2}\operatorname{sh} x.$

ГЛАВА II
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 12. Уравнения Фредгольма 2-го рода. Основные понятия

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, $K(x, t)$ и $f(x)$ — известные функции, x и t — действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a, b), λ — численный множитель.

Функция $K(x, t)$ называется *ядром интегрального уравнения* (1); предполагается, что ядро $K(x, t)$ определено в квадрате $\Omega\,\{a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b\}$ на плоскости (x, t) и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx\, dt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*; если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

и называется *однородным*.

Пределы интегрирования a и b в уравнениях (1) и (2) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Решением интегральных уравнений (1) и (2) называется любая функция $\varphi(x)$, при подстановке которой в уравнения последние обращаются в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Пример. Показать, что функция $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ является решением интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt=\frac{x}{2},$$

где ядро имеет вид

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Решение. Левую часть уравнения запишем в виде

$$\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt+\int_x^1 K(x,t)\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)\,dt+\int_x^1\frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)\,dt\right\}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{2-x}{2}\int_0^x t\varphi(t)\,dt+\frac{x}{2}\int_x^1(2-t)\varphi(t)\,dt\right\}.$$

Подставляя в полученное выражение вместо $\varphi(x)$ функцию $\sin\frac{\pi x}{2}$, будем иметь

$$\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x t\,\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt+x\int_x^1(2-t)\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}\,dt\right\}=$$

$$=\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x}+\right.$$

$$\left.+x\left[-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right]\Bigg|_{t=x}^{t=1}\right\}=\frac{x}{2}.$$

Итак, получаем $\frac{x}{2}\equiv\frac{x}{2}$, а это означает, согласно определению, что $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ есть решение данного интегрального уравнения.

Проверить, какие из данных функций являются решениями указанных интегральных уравнений.

137. $\varphi(x)=1, \quad \varphi(x)+\int\limits_0^1 x(e^{xt}-1)\varphi(t)\,dt=e^x-x.$

138. $\varphi(x)=\sin\pi x,$

$$\varphi(x)+\lambda\int\limits_0^1 \ln(1-2x\cos\pi t+x^2)\varphi(t)\,dt=0.$$

139. $\varphi(x)=1-\dfrac{2\sin x}{1-\dfrac{\pi}{2}}, \quad \varphi(x)-\int\limits_0^\pi \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=1.$

140. $\varphi(x)=\sqrt{x}, \quad \varphi(x)-\int\limits_0^\pi K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=$

$$=\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{x^9}{6},$$

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{x(2-t)}{2}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

141. $\varphi(x)=e^x, \quad \varphi(x)+\lambda\int\limits_0^1 \sin xt\,\varphi(t)\,dt=1.$

142. $\varphi(x)=\cos x, \quad \varphi(x)-\int\limits_0^\pi (x^2+t)\cos t\varphi(t)\,dt=\sin x.$

143. $\varphi(x)=xe^{-x}, \ \varphi(x)-4\int\limits_0^\infty e^{-(x+t)}\,\varphi(t)\,dt=(x-1)\,e^{-x}.$

144. $\varphi(x)=\cos 2x, \ \varphi(x)-3\int\limits_0^\pi K(x,t)\,\varphi(t)\,dt=1,$

$$K(x,t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \sin t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

145. $\varphi(x)=\frac{4C}{\pi}\sin x+xe^{-x}$, где C — произвольная постоянная,

$$\varphi(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \sin x\frac{\sin^2 t}{t}\varphi(t)\,dt=0.$$

§ 13. Метод определителей Фредгольма

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\,f(t)\,dt, \tag{2}$$

где функция $R(x,\ t;\ \lambda)$, называемая *резольвентой Фредгольма* уравнения (1), определяется равенством

$$R(x,\ t;\ \lambda)=\frac{D(x,\ t;\ \lambda)}{D(\lambda)} \tag{3}$$

при условии, что $D(\lambda)\neq 0$. Здесь $D(x,\ t;\ \lambda)$ и $D(\lambda)$ — степенные ряды по λ:

$$D(x,\ t;\ \lambda)=K(x,\ t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}B_n(x,\ t)\,\lambda^n, \tag{4}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}C_n\lambda^n, \tag{5}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$B_n(x,\ t)=\underbrace{\int_a^b\ldots\int_a^b}_{n}\begin{vmatrix} K(x,\ t) & K(x,\ t_1) & \ldots & K(x,\ t_n)\\ K(t_1,\ t) & K(t_1,\ t_1) & \ldots & K(t_1,\ t_n)\\ K(t_2,\ t) & K(t_2,\ t_1) & \ldots & K(t_2,\ t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n,\ t) & K(t_n,\ t_1) & \ldots & K(t_n,\ t_n)\end{vmatrix}dt_1\ldots dt_n, \tag{6}$$

причем

$$B_0(x,\ t) = K(x,\ t);$$

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1,\ t_1) & K(t_1,\ t_2) & \ldots & K(t_1,\ t_n) \\ K(t_2,\ t_1) & K(t_2,\ t_2) & \ldots & K(t_2,\ t_n) \\ K(t_3,\ t_1) & K(t_3,\ t_2) & \ldots & K(t_3,\ t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,\ t_1) & K(t_n,\ t_2) & \ldots & K(t_n,\ t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n. \tag{7}$$

Функция $D(x,\ t;\ \lambda)$ называется *минором Фредгольма*, а $D(\lambda)$ — *определителем Фредгольма*. В случае, когда ядро $K(x,\ t)$ ограничено или же интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,\ t)\,dx\,dt$$

имеет конечное значение, ряды (4) и (5) сходятся для всех значений λ и, значит, являются целыми аналитическими функциями от λ.

Резольвента

$$R(x,\ t;\ \lambda) = \frac{D(x,\ t;\ \lambda)}{D(\lambda)}$$

есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются нулями функции $D(\lambda)$. Последние суть полюсы резольвенты $R(x,\ t;\ \lambda)$.

Пример. С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $K(x,\ t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

Решение. Имеем $B_0(x,\ t) = xe^t$. Далее,

$$B_1(x,\ t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0,$$

$$B_2(x,\ t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\,dt_2 = 0,$$

так как определители под знаком интеграла равны нулю. Очевидно, что и все последующие $B_n(x,\ t) = 0$. Находим коэффициенты C_n:

$$C_1 = \int_0^1 K(t_1,\ t_1)\,dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}\,dt_1 = 1,$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\,dt_2 = 0.$$

Очевидно, что и все последующие $C_n = 0$.

Согласно формулам (4) и (5) в нашем случае имеем

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) = xe^t; \qquad D(\lambda) = 1 - \lambda.$$

Таким образом,

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Применим полученный результат к решению интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (\lambda \neq 1).$$

Согласно формуле (2)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)\,dt.$$

В частности, для $f(x) = e^{-x}$ получаем

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x.$$

Пользуясь определителями Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер:

146. $K(x, t) = 2x - t; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

147. $K(x, t) = x^2 t - xt^2; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

148. $K(x, t) = \sin x \cos t; \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

149. $K(x, t) = \sin x - \sin t; \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

Вычисление по формулам (6) и (7) коэффициентов $B_n(x, t)$ и C_n рядов (4) и (5) практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t)\,ds, \tag{8}$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s)\,ds. \tag{9}$$

Зная, что коэффициент $C_0 = 1$ и $B_0(x, t) = K(x, t)$, по формулам (9) и (8) найдем последовательно C_1, $B_1(x, t)$, C_2, $B_2(x, t)$, C_3 и т. д.

Пример. Пользуясь формулами (8) и (9), найти резольвенту ядра $K(x, t) = x - 2t$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Решение. Имеем $C_0 = 1$, $B_0(x, t) = x - 2t$. Пользуясь формулой (9), найдем

$$C_1 = \int_0^1 (-s)\,ds = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (8) получим

$$B_1(x, t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\,ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}.$$

Далее будем иметь

$$C_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3},$$

$$B_2(x, t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\left(-s - t + 2st + \frac{2}{3}\right) ds = 0,$$

$$C_3 = C_4 = \ldots = 0, \quad B_3(x, t) = B_4(x, t) = \ldots = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}; \qquad D(x, t; \lambda) = x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda.$$

Резольвента данного ядра будет

$$R(x, t; \lambda) = \frac{x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$$

Используя рекуррентные соотношения (8) и (9), найти резольвенты следующих ядер:

150. $K(x, t) = x + t + 1;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant t \leqslant 1.$

151. $K(x, t) = 1 + 3xt;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

152. $K(x, t) = 4xt - x^2;\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

153. $K(x, t) = e^{x-t};\quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

154. $K(x, t) = \sin(x + t);\quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$

155. $K(x, t) = x - \operatorname{sh} t;\quad -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant t \leqslant 1.$

С помощью резольвенты решить следующие интегральные уравнения:

156. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin(x+t)\varphi(t)\,dt=1.$

157. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}(2x-t)\varphi(t)\,dt=\frac{x}{6}.$

158. $\varphi(x)-\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)\,dt=\cos 2x.$

159. $\varphi(x)-\int\limits_0^{1}e^{x-t}\varphi(t)\,dt=e^x.$

160. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}(4xt-x^2)\varphi(t)\,dt=x.$

§ 14. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер

Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x). \tag{1}$$

Как и в случае уравнений Вольтерра, интегральное уравнение (1) можно решать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\lambda^n, \tag{2}$$

где $\psi_n(x)$ определяются по формулам:

$$\psi_1(x)=\int\limits_a^b K(x,t)f(t)\,dt,$$

$$\psi_2(x)=\int\limits_a^b K(x,t)\psi_1(t)\,dt=\int\limits_a^b K_2(x,t)f(t)\,dt,$$

$$\psi_3(x)=\int\limits_a^b K(x,t)\psi_2(t)\,dt=\int\limits_a^b K_3(x,t)f(t)\,dt \quad \text{и т. д.}$$

Здесь

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t)\, dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t)\, dz,$$

и вообще

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t)\, dz, \tag{3}$$

$n = 2, 3, \ldots$, причем $K_1(x, t) \equiv K(x, t)$. Функции $K_n(x, t)$, определяемые по формулам (3), называются *итерированными ядрами*. Для них справедливо соотношение

$$K_n(x, t) = \int_a^b K_m(x, s) K_{n-m}(s, t)\, ds, \tag{4}$$

где m — любое натуральное число, меньшее n.

Резольвента интегрального уравнения (1) определяется через итерированные ядра формулой

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1}, \tag{5}$$

где ряд, стоящий в правой части, называется *рядом Неймана ядра* $K(x, t)$. Он сходится для

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{6}$$

где $B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\, dx\, dt}$.

Решение уравнения Фредгольма 2-го рода (1) выражается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t)\, dt. \tag{7}$$

Граница (6) является существенной для сходимости ряда (5). Однако решение уравнения (1) может существовать и для значений $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

Рассмотрим пример:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\varphi(t)\,dt=1. \tag{8}$$

Здесь $K(x, t)\equiv 1$, и, следовательно,

$$B^2=\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 dx\,dt=1.$$

Таким образом, условие (6) дает, что ряд (5) сходится при $|\lambda|<1$.

Решая уравнение (8), как уравнение с вырожденным ядром, получим $(1-\lambda)C=1$, где $C=\int_0^1\varphi(t)\,dt$. При $\lambda=1$ это уравнение неразрешимо, а значит, при $\lambda=1$ интегральное уравнение (8) решения не имеет. Отсюда следует, что в круге радиуса, большего единицы, последовательные приближения для уравнения (8) не могут сходиться. Однако при $|\lambda|>1$ уравнение (8) разрешимо. В самом деле, если $\lambda\neq 1$, то функция $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda}$ является решением данного уравнения, что легко проверить непосредственной подстановкой.

Для некоторых уравнений Фредгольма ряд Неймана (5) для резольвенты сходится при любых значениях λ. Покажем это.

Пусть имеем два ядра: $K(x, t)$ и $L(x, t)$. Будем называть эти ядра *ортогональными*, если выполняются два условия:

$$\int_a^b K(x, z)\,L(z, t)\,dz=0, \qquad \int_a^b L(x, z)\,K(z, t)\,dz=0 \tag{9}$$

при любых допустимых значениях x и t.

Пример. Ядра $K(x, t)=xt$ и $L(x, t)=x^2t^2$ ортогональны на $[-1, 1]$.

В самом деле,

$$\int_{-1}^1 (xz)(z^2t^2)\,dz=xt^2\int_{-1}^1 z^3\,dz=0,$$

$$\int_{-1}^1 (x^2z^2)(zt)\,dz=x^2t\int_{-1}^1 z^3\,dz=0.$$

Существуют ядра, ортогональные самим себе. Для таких ядер $K_2(x, t)\equiv 0$, где $K_2(x, t)$ — второе итерированное ядро. В этом случае, очевидно, все последующие итерированные ядра также равны нулю и резольвента совпадает с ядром $K(x, t)$.

Пример. $K(x, t) = \sin(x-2t)$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Имеем

$$\int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(x+2t-3z) - \cos(x-2t-z)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z) + \sin(x-2t-z)\right]\Bigg|_{z=0}^{z=2\pi} = 0.$$

Таким образом, в этом случае резольвента ядра равна самому ядру:

$$R(x, t; \lambda) \equiv \sin(x-2t),$$

так что ряд Неймана (5) состоит из одного члена и, очевидно, сходится при любом λ.

Итерированные ядра $K_n(x, t)$ можно непосредственно выразить через данное ядро $K(x, t)$ по формуле

$$K_n(x, t) = \int_a^b\int_a^b \ldots \int_a^b K(x, s_1)K(s_1, s_2)\ldots K(s_{n-1}, t)\,ds_1\,ds_2\ldots ds_{n-1}. \tag{10}$$

Все итерированные ядра $K_n(x, t)$, начиная с $K_2(x, t)$, будут непрерывными функциями в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, если начальное ядро $K(x, t)$ квадратично суммируемо в этом квадрате.

Если данное ядро $K(x, t)$ симметрично, то все итерированные ядра $K_n(x, t)$ тоже симметричны (см. [16]).

Приведем примеры отыскания итерированных ядер.

Пример 1. Найти итерированные ядра для ядра $K(x, t) = x - t$, если $a = 0$, $b = 1$.

Решение. Пользуясь формулами (2), найдем последовательно:

$$K_1(x, t) = x - t,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds = \frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3},$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right)ds = -\frac{x-t}{12},$$

$$K_4(x, t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)(s-t)\,ds = -\frac{1}{12}K_2(x, t) =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

$$K_6(x, t) = -\frac{1}{12}\int_0^1 (x-s)\left(\frac{s+t}{2} - st - \frac{1}{3}\right) ds =$$

$$= -\frac{1}{12} K_5(x, t) = \frac{x-t}{12^2},$$

$$K_6(x, t) = \frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-s)(s-t)\, ds = \frac{K_2(x, t)}{12^2} =$$

$$= \frac{1}{12^3}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right).$$

Отсюда следует, что итерированные ядра имеют вид: 1) для $n = 2k - 1$

$$K_{2k-1}(x, t) = \frac{(-1)^k}{12^{k-1}}(x-t),$$

2) для $n = 2k$

$$K_{2k}(x, t) = \frac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\frac{x+t}{2} - xt - \frac{1}{3}\right),$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

П р и м е р 2. Найти итерированные ядра $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$, если $K(x, t) = e^{\min(x, t)}$, $a = 0$, $b = 1$.

Р е ш е н и е. По определению имеем

$$\min(x, t) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1; \end{cases}$$

поэтому данное ядро можно записать в виде

$$K(x, t) = \begin{cases} e^x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant t, \\ e^t, & \text{если } t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Это ядро, как легко проверить, является симметричным, т. е.

$$K(x, t) = K(t, x).$$

Имеем $K_1(x, t) = K(x, t)$. Находим второе итерированное ядро:

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s) K_1(s, t)\, ds = \int_0^1 K(x, s) K(s, t)\, ds.$$

Здесь

$$K(x, s) = \begin{cases} e^x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant s, \\ e^s, & \text{если } s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$K(s, t) = \begin{cases} e^s, & \text{если } 0 \leqslant s \leqslant t, \\ e^t, & \text{если } t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как данное ядро $K(x, t)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x, t)$ только при $x > t$.

Имеем (см. рис. 2)

$$K_2(x, t) = \int_0^t K(x, s)\,K(s, t)\,ds + \int_t^x K(x, s)\,K(s, t)\,ds + \int_x^1 K(x, s)\,K(s, t)\,ds.$$

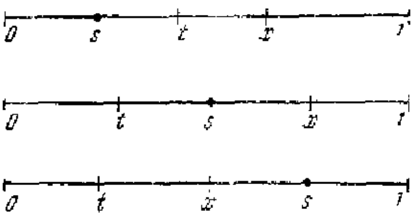

Рис. 2.

В интервале $(0, t)$ имеем $s < t < x$, поэтому

$$\int_0^t K(x, s)\,K(s, t)\,ds = \int_0^t e^s e^s\,ds = \int_0^t e^{2s}\,ds = \frac{e^{2t} - 1}{2}.$$

В интервале (t, x) имеем $t < s < x$, поэтому

$$\int_t^x K(x, s)\,K(s, t)\,ds = \int_t^x e^s e^t\,ds = e^{x+t} - e^{2t}.$$

В интервале $(x, 1)$ имеем $s > x > t$, поэтому

$$\int_x^1 K(x, s)\,K(s, t)\,ds = \int_x^1 e^x e^t\,ds = (1 - x)\,e^{x+t}.$$

Складывая найденные интегралы, получим

$$K_2(x, t) = (2 - x)\,e^{x+t} - \frac{1 + e^{2t}}{2} \qquad (x > t).$$

Выражение для $K_2(x, t)$ при $x < t$ мы найдем, если поменяем местами аргументы x и t в выражении $K_2(x, t)$ для $x > t$:

$$K_2(x, t) = (2 - t)\,e^{x+t} - \frac{1 + e^{2x}}{2} \qquad (x < t).$$

Итак, второе итерированное ядро имеет вид

$$K_2(x, t) = \begin{cases} (2-t)\,e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (2-x)\,e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2}, & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Замечание. Если ядро $K(x, t)$, задаваемое в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ разными аналитическими выражениями, не

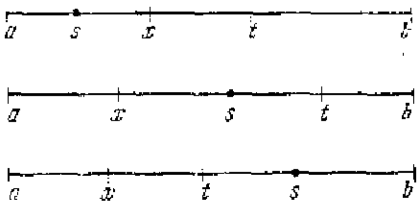

Рис. 3.

является симметричным, то следует отдельно рассмотреть случай $x<t$ При $x < t$ будем иметь (см. рис. 3)

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, s)\,K(s, t)\,ds = \int_a^x + \int_x^t + \int_t^b .$$

Пример 3. Найти итерированные ядра $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$, если $a=0$, $b=1$ и

$$K(x, t) = \begin{cases} x+t, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < t, \\ x-t, & \text{если} \quad t < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем $K_1(x, t) = K(x, t)$,

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\,K(s, t)\,ds,$$

где

$$K(x, s) = \begin{cases} x+s, & 0 \leqslant x < s, \\ x-s, & s < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad K(s, t) = \begin{cases} s+t, & 0 \leqslant s < t, \\ s-t, & t < s \leqslant 1. \end{cases}$$

Так как данное ядро $K(x, t)$ не симметрично, то при нахождении $K_2(x, t)$ рассмотрим отдельно два случая: 1) $x < t$ и 2) $x > t$.

1) Пусть $x < t$. Тогда (см. рис. 3)

$$K_2(x, t) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1=\int_0^x (x-s)(s+t)\,ds=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2t}{2},$$

$$I_2=\int_x^t (x+s)(s+t)\,ds=\frac{5t^3}{6}-\frac{5x^3}{6}+\frac{3}{2}xt^2-\frac{3}{2}x^2t,$$

$$I_3=\int_t^1 (x+s)(s-t)\,ds=\frac{t^3}{6}+\frac{xt^2}{2}-xt+\frac{x}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}.$$

Складывая эти интегралы, получим

$$K_2(x,\ t)=t^3-\frac{2}{3}x^3-x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}\qquad (x<t).$$

2) Пусть $x>t$. Тогда (см. рис. 2)

$$K_2(x,\ t)=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int_0^t (x-s)(s+t)\,ds=\frac{3}{2}xt^2-\frac{5t^3}{6},$$

$$I_2=\int_t^x (x-s)(s-t)\,ds=\frac{x^3}{6}-\frac{t^3}{6}-\frac{x^2t}{2}+\frac{xt^2}{2},$$

$$I_3=\int_x^1 (x+s)(s-t)\,ds=-\frac{5}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2t+\frac{x-t}{2}-xt+\frac{1}{3}.$$

Складывая эти интегралы, получим

$$K_2(x,\ t)=-\frac{2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\frac{x-t}{2}+\frac{1}{3}\qquad (x>t).$$

Итак, второе итерированное ядро имеет вид

$$K_2(x,\ t)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x^3+t^3-x^2t+2xt^2-xt+\dfrac{x-t}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0\leqslant x<t,\\[2mm] -\dfrac{2}{3}x^3-t^3+x^2t+2xt^2-xt+\dfrac{x-t}{2}+\dfrac{1}{3}, & t<x\leqslant 1.\end{cases}$$

Аналогично находятся и остальные итерированные ядра $K_n(x,\ t)$ $(n=3,\ 4,\ \ldots)$.

Найти итерированные ядра указанных ниже ядер при заданных a и b.

161. $K(x, t) = x - t$; $a = -1$, $b = 1$.

162. $K(x, t) = \sin(x - t)$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$ $(n = 2, 3)$.

163. $K(x, t) = (x - t)^2$; $a = -1$, $b = 1$ $(n = 2, 3)$.

164. $K(x, t) = x + \sin t$; $a = -\pi$, $b = \pi$.

165. $K(x, t) = xe^t$; $a = 0$, $b = 1$.

166. $K(x, t) = e^x \cos t$; $a = 0$, $b = \pi$.

В следующих задачах найти $K_2(x, t)$:

167. $K(x, t) = e^{|x-t|}$; $a = 0$, $b = 1$.

168. $K(x, t) = e^{|x|+t}$; $a = -1$, $b = 1$.

Приведем пример построения резольвенты интегрального уравнения с помощью итерированных ядер.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)\,dt = f(x). \tag{11}$$

Здесь $K(x, t) = xt$; $a = 0$, $b = 1$. Последовательно находим:

$$K_1(x, t) = xt,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3},$$

$$K_3(x, t) = \frac{1}{3}\int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$K_n(x, t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

Согласно формуле (5)

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)\,\lambda^{n-1} = xt\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1} = \frac{3xt}{3-\lambda},$$

где $|\lambda| < 3$.

В силу формулы (7) решение интегрального уравнения (11) запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda} f(t)\, dt.$$

В частности, при $f(x) = x$ получим

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda},$$

где $\lambda \neq 3$.

Построить резольвенты для следующих ядер:

169. $K(x, t) = e^{x+t}$; $a = 0$, $b = 1$.

170. $K(x, t) = \sin x \cos t$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

171. $K(x, t) = xe^t$; $a = -1$, $b = 1$.

172. $K(x, t) = (1 + x)(1 - t)$; $a = -1$, $b = 0$.

173. $K(x, t) = x^2t^2$; $a = -1$, $b = 1$.

174. $K(x, t) = xt$; $a = -1$, $b = 1$.

Если $M(x, t)$ и $N(x, t)$ — два ортогональных ядра, то резольвента $R(x, t; \lambda)$, соответствующая ядру $K(x, t) = M + N$, равна сумме резольвент $R_1(x, t; \lambda)$ и $R_2(x, t; \lambda)$, соответствующих каждому из этих ядер.

Пример. Найти резольвенту для ядра

$$K(x, t) = xt + x^2t^2, \qquad a = -1,\ b = 1.$$

Решение. Как было показано выше, ядра $M(x, t) = xt$ и $N(x, t) = x^2t^2$ ортогональны на $[-1, 1]$ (см. стр. 73). Поэтому резольвента ядра $K(x, t)$ равна сумме резольвент ядер $M(x, t)$ и $N(x, t)$. Используя результаты задач 173 и 174, находим

$$R_K(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3-2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},$$

где $|\lambda| < \frac{3}{2}$.

Найти резольвенты для ядер:

175. $K(x, t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$; $a = 0$, $b = 2\pi$.

176. $K(x, t) = 1 + (2x - 1)(2t - 1)$; $a = 0$, $b = 1$.

Указанное свойство можно распространить на любое конечное число ядер.

Если ядра $M^{(1)}(x, t), M^{(2)}(x, t), \ldots, M^{(n)}(x, t)$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме

$$K(x, t) = \sum_{m=1}^{n} M^{(m)}(x, t),$$

равна сумме резольвент, соответствующих каждому из слагаемых.

Назовем n-м *следом* ядра $K(x, t)$ величину

$$A_n = \int_a^b K_n(x, x)\,dx, \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $K_n(x, t)$ — n-е итерированное ядро для ядра $K(x, t)$.

Имеет место следующая формула для определителя $D(\lambda)$ Фредгольма:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^{n-1}. \tag{13}$$

Радиус сходимости степенного ряда (13) равен наименьшему из модулей характеристических чисел.

177. Показать, что для уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

определитель Фредгольма $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$ и, следовательно, резольвента для уравнения Вольтерра есть целая аналитическая функция от λ.

178. Пусть $R(x, t; \lambda)$ есть резольвента некоторого ядра $K(x, t)$.

Показать, что резольвента уравнения

$$\varphi(x) - \mu \int_a^b R(x, t; \lambda)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

равна $R(x, t; \lambda + \mu)$.

179. Пусть

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\,dx\,dt = B^2,$$

$$\int_a^b \int_a^b K_n^2(x, t)\,dx\,dt = B_n^2,$$

где $K_n(x, t)$ — n-е итерированное ядро для ядра $K(x, t)$. Доказать, что если $B_2 = B^2$, то для любого n будет $B_n = B^n$.

§ 15. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Уравнение Гаммерштейна

Ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода называется *вырожденным*, если оно является суммой конечного числа произведений функций только от x на функции только от t, т. е. если оно имеет вид

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t); \tag{1}$$

функции $a_k(x)$ и $b_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ будем считать непрерывными в основном квадрате $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ и линейно независимыми между собой. Интегральное уравнение с вырожденным ядром (1)

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = f(x) \tag{2}$$

решается следующим образом.

Перепишем (2) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\,dt \tag{3}$$

и введем обозначения

$$\int_a^b b_k(t)\, \varphi(t)\,dt = C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Тогда (3) примет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{5}$$

где C_k — неизвестные постоянные (так как функция $\varphi(x)$ неизвестна).

Таким образом, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром сводится к нахождению постоянных C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$). Подставляя выражение (5) в интегральное уравнение (2), после несложных выкладок получим

$$\sum_{m=1}^{n} \left\{ C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $a_m(x)$ ($m = 1, 2, \ldots, n$) отсюда следует, что

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right] dt = 0$$

или

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводя для краткости записи обозначения

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t)\, b_m(t)\, dt, \qquad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt,$$

получим, что

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{km} C_k = f_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned}
(1 - \lambda a_{11}) C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \cdots - \lambda a_{1n} C_n &= f_1, \\
-\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22}) C_2 - \cdots - \lambda a_{2n} C_n &= f_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - \cdots + (1 - \lambda a_{nn}) C_n &= f_n.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для нахождения неизвестных C_k имеем линейную систему из n

алгебраических уравнений с n неизвестными. Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Если $\Delta(\lambda)\neq 0$, то система (6) имеет единственное решение $C_1, C_2, \dots, C_n$, получаемое по формулам Крамера

$$C_k=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1} & f_1 & -\lambda a_{1k+1} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1} & f_2 & -\lambda a_{2k+1} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1} & f_n & -\lambda a_{nk+1} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

$(k=1,\ 2, \dots,\ n)$.

Решением интегрального уравнения (2) будет функция $\varphi(x)$, определенная равенством

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}C_k a_k(x),$$

где коэффициенты C_k $(k=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ определяются по формулам (8).

Замечание. Систему (6) можно получить, если обе части равенства (5) последовательно умножить на $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ и проинтегрировать в пределах от a до b либо же подставить выражение (5) для $\varphi(x)$ в равенство (4), заменив x на t.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t)\,\varphi(t)\,dt=x. \qquad (9)$$

Решение. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos t\,dt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)\,dt+$$
$$+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin t\,dt+x.$$

Введем обозначения:

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos t\,dt; \quad C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\varphi(t)\,dt; \quad C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin t\,dt, \tag{10}$$

где C_1, C_2, C_3 — неизвестные постоянные. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\varphi(x) = C_1\lambda x + C_2\lambda\sin x + C_3\lambda\cos x + x. \tag{11}$$

Подставляя выражение (11) в равенства (10), получим

$$C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\cos t\,dt,$$

$$C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\,t^2\,dt,$$

$$C_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (C_1\lambda t + C_2\lambda\sin t + C_3\lambda\cos t + t)\sin t\,dt$$

или

$$C_1\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt\right) - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^3\,dt + C_2\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin t\,dt\right) - C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} t^3\,dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt - C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t\,dt + C_3\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t\,dt\right) = \int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned} C_1 - \lambda\pi C_3 &= 0, \\ C_2 + 4\lambda\pi C_3 &= 0, \\ -2\lambda\pi C_1 - \lambda\pi C_2 + C_3 &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Система (12) имеет единственное решение

$$C_1 = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; \qquad C_2 = -\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; \qquad C_3 = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 в (11), получим решение данного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi\sin x + \cos x) + x.$$

Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

180. $\varphi(x) - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\varphi(t)\,dt = 2x - \pi.$

181. $\varphi(x) - \int\limits_{-1}^{1} e^{\arcsin x}\varphi(t)\,dt = \operatorname{tg} x.$

182. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t\varphi(t)\,dt = \operatorname{ctg} x.$

183. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \cos(q\ln t)\varphi(t)\,dt = 1.$

184. $\varphi(x) - \lambda\int\limits_0^1 \arccos t\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

185. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^p\varphi(t)\,dt=1\quad(p>-1).$

186. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1(x\ln t-t\ln x)\,\varphi(t)\,dt=\frac{6}{5}(1-4x).$

187. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos t\,\varphi(t)\,dt=\sin x.$

188. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}|\pi-t|\sin x\,\varphi(t)\,dt=x.$

189. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x.$

190. $\varphi(x)-$

$$-\lambda\int\limits_0^{2\pi}(\sin x\cos t-\sin 2x\cos 2t+\sin 3x\cos 3t)\,\varphi(t)\,dt=\cos x.$$

191. $\varphi(x)-$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\left[x-\frac{1}{2}(3t^2-1)+\frac{1}{2}t(3x^2-1)\right]\varphi(t)\,dt=1.$$

Многие задачи физики приводят к нелинейным интегральным уравнениям типа Гаммерштейна (см. [23], [26]).

Каноническая форма *уравнения типа Гаммерштейна*:

$$\varphi(x)=\int\limits_a^b K(x,t)\,f(t,\varphi(t))\,dt, \tag{1}$$

где $K(x,t)$, $f(t,u)$ — заданные функции, $\varphi(x)$ — искомая функция.

К уравнениям вида (1) легко приводятся уравнения

$$\varphi(x)=\int\limits_a^b K(x,t)\,f(t,\varphi(t))\,dt+\psi(x), \tag{1'}$$

где $\psi(x)$ — известная функция, так что различие между однородными и неоднородными уравнениями, важное в линейном случае, в нелинейном случае не имеет почти никакого значения. Функцию $K(x, t)$ будем называть *ядром уравнения* (1).

Пусть $K(x, t)$ — вырожденное ядро, т. е.

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) b_i(t). \tag{2}$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int_a^b b_i(t) f(t, \varphi(t))\, dt. \tag{3}$$

Положим

$$C_i = \int_a^b b_i(t) f(t, \varphi(t))\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

где C_i — пока неизвестные постоянные. Тогда в силу (3) будем иметь

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x). \tag{5}$$

Подставляя в равенства (4) выражение (5) для $\varphi(x)$, получим m уравнений (вообще, трансцендентных), содержащих m неизвестных величин $C_1, C_2, \ldots, C_m$:

$$C_i = \Psi_i(C_1, C_2, \ldots, C_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

В случае, когда $f(t, u)$ — многочлен относительно u, т. е.

$$f(t, u) = p_0(t) + p_1(t)u + \ldots + p_n(t)u^n, \tag{7}$$

где $p_0(t), \ldots, p_n(t)$ есть, например, непрерывные функции t на отрезке $[a, b]$, система (6) превращается в систему алгебраических уравнений относительно $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Если существует решение системы (6), т. е. существует m чисел

$$C_1^0, C_2^0, \ldots, C_m^0$$

таких, что подстановка их в систему (6) обращает ее уравнения в тождества, то существует решение интегрального уравнения (3), определяемое равенством (5):

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i^0 a_i(x).$$

Очевидно, что число решений (вообще, комплексных) интегрального уравнения (3) равно числу решений системы (6).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 xt\varphi^2(t)\,dt \tag{8}$$

(λ — параметр).

Решение. Положим

$$C=\int_0^1 t\varphi^2(t)\,dt. \tag{9}$$

Тогда

$$\varphi(x)=C\lambda x. \tag{10}$$

Подставляя $\varphi(x)$ в форме (10) в соотношение (9), будем иметь

$$C=\int_0^1 t\lambda^2C^2t^2\,dt,$$

откуда

$$C=\frac{\lambda^2}{4}C^2. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет два решения:

$$C_1=0,\qquad C_2=\frac{4}{\lambda^2}.$$

Следовательно, интегральное уравнение (8) также имеет два решения при любом $\lambda\neq 0$:

$$\varphi_1(x)\equiv 0,\qquad \varphi_2(x)=\frac{4}{\lambda}x.$$

Существуют простые нелинейные интегральные уравнения, которые вообще не имеют вещественных решений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x+t}{2}}(1+\varphi^2(t))\,dt. \tag{12}$$

Полагаем

$$C=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{t}{2}}(1+\varphi^2(t))\,dt. \tag{13}$$

Тогда

$$\varphi(x) = Ce^{\frac{x}{2}}. \tag{14}$$

Для определения постоянной C получаем уравнение

$$(e^{\frac{3}{2}} - 1)\, C^2 - 3C + 3\,(e^{\frac{1}{2}} - 1) = 0. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что уравнение (15) не имеет действительных корней и, следовательно, интегральное уравнение (12) не имеет действительных решений.

С другой стороны, рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^1 a(x)\, a(t)\, \varphi(t) \sin\left(\frac{\varphi(t)}{a(t)}\right) dt \tag{16}$$

$$(a(t) > 0 \text{ для всех } t \in [0, 1]).$$

Для определения постоянной C приходим к уравнению

$$1 = \int_0^1 a^2(t)\, dt \cdot \sin C. \tag{17}$$

Если $\int_0^1 a^2(t)\, dt > 1$, то уравнение (17), а следовательно, и исходное интегральное уравнение (16) имеют бесконечное число действительных решений.

Решить следующие интегральные уравнения:

192. $\varphi(x) = 2\int_0^1 xt\, \varphi^3(t)\, dt.$

193. $\varphi(x) = \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\, \varphi^2(t)\, dt.$

194. $\varphi(x) = \int_0^1 x^2t^2\varphi^3(t)\, dt.$

195. $\varphi(x) = \int_{-1}^1 \frac{xt}{1 + \varphi^2(t)}\, dt.$

196. $\varphi(x)=\int\limits_0^1 \frac{xt}{1+\varphi^2(t)}\,dt.$

197. Показать, что интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 a(x)\,a(t)\,(1+\varphi^2(t))\,dt$$

$$(a(x)>0 \quad \text{для} \quad \text{всех } x\in[0,\,1])$$

не имеет действительных решений, если $\int\limits_0^1 a^2(x)\,dx>1$.

§ 16. Характеристические числа и собственные функции

Однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,\,t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{1}$$

всегда имеет очевидное решение $\varphi(x)\equiv 0$, которое называют *нулевым* (*тривиальным*) решением.

Значения параметра λ, при которых это уравнение имеет ненулевые решения $\varphi(x)\not\equiv 0$, называются *характеристическими числами**) уравнения (1) или ядра $K(x,\,t)$, а каждое ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ.

Число $\lambda=0$ не является характеристическим числом, так как при $\lambda=0$ из (1) следует, что $\varphi(x)\equiv 0$.

Если ядро $K(x,\,t)$ непрерывно в квадрате Ω $\{a\leqslant x,\ t\leqslant b\}$ или квадратично суммируемо в Ω, причем числа a и b конечные, то каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций; число таких функций называется *рангом* характеристического числа. Разные характеристические числа могут иметь разные ранги.

---

*) Некоторые авторы вместо термина «характеристические числа» пользуются термином «собственные значения». Мы будем называть *собственным значением* величину $\sigma=\frac{1}{\lambda}$, где λ — характеристическое число.

Для уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\right] \varphi(t)\, dt = 0 \tag{2}$$

характеристические числа являются корнями алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

степень которого $p \leqslant n$. Здесь $\Delta(\lambda)$ — определитель однородной линейной системы

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n &= 0, \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1-\lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1-\lambda a_{nn})C_n &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где величины a_{mk} и C_m ($k, m = 1, 2, \dots, n$) имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе.

Если уравнение (3) имеет p корней ($1 \leqslant p \leqslant n$), то интегральное уравнение (2) имеет p характеристических чисел; каждому характеристическому числу λ_m ($m = 1, 2, \dots, p$) соответствует ненулевое решение

$$\begin{array}{llll} C_1^{(1)}, & C_2^{(1)}, & \dots; & C_n^{(1)} \to \lambda_1, \\ C_1^{(2)}, & C_2^{(2)}, & \dots, & C_n^{(2)} \to \lambda_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{(p)}, & C_2^{(p)}, & \dots, & C_n^{(p)} \to \lambda_p \end{array}$$

системы (4). Соответствующие этим решениям ненулевые решения интегрального уравнения (2), т. е. собственные функции, будут иметь вид

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(1)} a_k(x), \qquad \varphi_2(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(2)} a_k(x), \quad \dots,$$

$$\varphi_p(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(p)} a_k(x).$$

Интегральное уравнение с вырожденным ядром имеет, вообще говоря, не более n характеристических чисел и соответствующих им собственных функций.

В случае произвольного (невырожденного) ядра характеристические числа являются нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. полюсами резольвенты $R(x, t; \lambda)$. Отсюда, в частности, следует, что интегральное уравнение Вольтерра $\varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = 0$, где $K(x, t) \in L_2(\Omega_0)$, не имеет характеристических чисел (для него $D(\lambda) = e^{-A_1\lambda}$, см. задачу 177).

Замечание. Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, т. е. если $\varphi(x)$ — собственная функция, соответствующая некоторому характеристическому числу λ, то и $C\varphi(x)$, где C — произвольная постоянная, тоже является собственной функцией, соответствующей тому же характеристическому числу λ.

Пример. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} (\cos^2 x \cos 2t + \cos 3x \cos^3 t)\,\varphi(t)\,dt = 0.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x) = \lambda \cos^2 x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t\,dt + \lambda \cos 3x \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t\,dt.$$

Вводя обозначения

$$C_1 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos 2t\,dt \qquad C_2 = \int_0^{\pi} \varphi(t) \cos^3 t\,dt, \tag{1}$$

будем иметь

$$\varphi(x) = C_1\lambda \cos^2 x + C_2\lambda \cos 3x. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим линейную систему однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1\left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t\,dt\right) - C_2\lambda \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t\,dt = 0, \\ -C_1\lambda \int_0^{\pi} \cos^5 t\,dt + C_2\left(1 - \lambda \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t\,dt\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Но так как

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \cos 2t\,dt = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi} \cos 3t \cos 2t\,dt = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos^5 t\,dt = 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos^3 t \cos 3t\,dt = \frac{\pi}{8},$$

то система (3) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\left(1-\frac{\lambda\pi}{4}\right)C_1=0,\\ \left(1-\frac{\lambda\pi}{8}\right)C_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Уравнение для нахождения характеристических чисел будет

$$\begin{vmatrix}1-\frac{\lambda\pi}{4} & 0\\ 0 & 1-\frac{\lambda\pi}{8}\end{vmatrix}=0.$$

Характеристические числа $\lambda_1=\frac{4}{\pi}$, $\lambda_2=\frac{8}{\pi}$.

При $\lambda=\frac{4}{\pi}$ система (4) принимает вид

$$\begin{cases}0\cdot C_1=0,\\ \frac{1}{2}\cdot C_2=0,\end{cases}$$

откуда $C_2=0$, C_1 произвольно. Собственная функция будет $\varphi_1(x)=C_1\lambda\cos^2 x$, или, полагая $C_1\lambda=1$, получим $\varphi_1(x)=\cos^2 x$.

При $\lambda=\frac{8}{\pi}$ система (4) примет вид

$$\begin{cases}(-1)\cdot C_1=0,\\ \quad 0\cdot C_2=0,\end{cases}$$

откуда $C_1=0$, C_2 произвольно, и, значит, собственная функция будет $\varphi_2(x)=C_2\lambda\cos 3x$, или, полагая $C_2\lambda=1$, получим $\varphi_2(x)=\cos 3x$.

Итак, характеристические числа:

$$\lambda_1=\frac{4}{\pi},\qquad \lambda_2=\frac{8}{\pi};$$

соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_1(x)=\cos^2 x,\qquad \varphi_2(x)=\cos 3x.$$

Однородное интегральное уравнение Фредгольма может вообще не иметь характеристических чисел и собственных функций либо же может не иметь действительных характеристических чисел и собственных функций.

П р и м е р 1. Однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(3x-2)\,t\varphi(t)\,dt=0$$

не имеет характеристических чисел и собственных функций. В самом деле, имеем

$$\varphi(x) = \lambda(3x - 2)\int_0^1 t\varphi(t)\,dt.$$

Полагая

$$C = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

получим

$$\varphi(x) = C\lambda(3x - 2). \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\left[1 - \lambda\int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt\right]\cdot C = 0. \tag{3}$$

Но так как $\int_0^1 (3t^2 - 2t)\,dt = 0$, то уравнение (3) дает $C = 0$, и, следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$.

Итак, данное однородное уравнение при любых λ имеет только одно нулевое решение $\varphi(x) \equiv 0$, а значит, оно не имеет характеристических чисел и собственных функций.

Пример 2. Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 (\sqrt{x}\,t - \sqrt{t}\,x)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Имеем

$$\varphi(x) = C_1\lambda\sqrt{x} - C_2\lambda x, \tag{1}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 t\varphi(t)\,dt, \qquad C_2 = \int_0^1 \sqrt{t}\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), после несложных преобразований получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{5}\lambda\right)C_1 + \frac{\lambda}{3}C_2 &= 0, \\ -\frac{\lambda}{2}C_1 + \left(1 + \frac{2}{5}\lambda\right)C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{2}{5}\lambda & \frac{\lambda}{3} \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\frac{2}{5}\lambda \end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{150}.$$

При действительных λ он не обращается в нуль, так что из (3) получаем $C_1=0$ и $C_2=0$, а значит, для всех действительных λ данное уравнение имеет только одно решение, а именно нулевое: $\varphi(x)\equiv 0$. Итак, уравнение (1) не имеет действительных характеристических чисел и собственных функций.

Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром:

198. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\varphi(t)\,dt=0.$

199. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cos t\varphi(t)\,dt=0.$

200. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\sin x\sin t\varphi(t)\,dt=0.$

201. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0.$

202. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}(45x^2\ln t-9t^2\ln x)\,\varphi(t)\,dt=0.$

203. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}(2xt-4x^2)\,\varphi(t)\,dt=0.$

204. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t)\,\varphi(t)\,dt=0.$

205. $$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(5xt^3+4x^2t+3xt)\varphi(t)\,dt=0.$$

206. $$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{sh}x)\varphi(t)\,dt=0.$$

207. $$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t^2\operatorname{sh}x)\varphi(t)\,dt=0.$$

208. $$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x\operatorname{ch}t-t\operatorname{ch}x)\varphi(t)\,dt=0.$$

Если n-е повторное (итерированное) ядро $K_n(x, t)$ ядра $K(x, t)$ есть симметричное ядро, то можно утверждать, что $K(x, t)$ имеет по крайней мере одно характеристическое число (действительное или комплексное) и что n-е степени всех характеристических чисел — числа действительные. В частности, для кососимметричного ядра $K(x, t) = -K(t, x)$ все характеристические числа чисто мнимые $\lambda = \beta i$, где β — действительное (см. задачу 220).

Ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения называется *симметричным*, если выполняется условие $K(x, t) = K(t, x)$ $(a \leqslant x,\ t \leqslant b)$.

Для интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=0 \qquad (1)$$

с симметричным ядром $K(x, t)$ имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно действительное характеристическое число.*

Теорема 2. *Каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число q линейно независимых собственных функций уравнения* (1), *причем*

$$\sup q \leqslant \lambda^2 B^2,$$

где

$$B^2=\int_a^b\int_a^b K^2(x, t)\,dx\,dt.$$

Число q называется *рангом* или кратностью характеристического числа.

Теорема 3. *Каждая пара собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, соответствующих различным характеристическим числам $\lambda_1 \neq \lambda_2$,* *ортогональна, т. е.*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

Теорема 4. *В каждом конечном интервале оси λ находится конечное число характеристических чисел. Верхняя грань для числа m характеристических чисел, лежащих в интервале $-l < \lambda < l$, определяется неравенством*

$$m \leqslant l^2 B^2.$$

В том случае, когда ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (1) является *функцией Грина некоторой однородной задачи Штурма — Лиувилля*, нахождение характеристических чисел и собственных функций сводится к решению указанной задачи Штурма — Лиувилля.

Пример. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \cos x \sin t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \sin x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение представим в виде

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, t)\,\varphi(t)\,dt + \lambda \int_x^\pi K(x, t)\,\varphi(t)\,dt$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \sin x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt. \tag{1}$$

Дифференцируя обе части (1), находим

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt + \lambda \sin x \cos x\,\varphi(x) -$$
$$- \lambda \sin x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt - \lambda \sin x \cos x\,\varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x) = \lambda \cos x \int_0^x \varphi(t)\cos t\,dt - \lambda \sin x \int_x^\pi \varphi(t)\sin t\,dt. \tag{2}$$

Повторное дифференцирование дает

$$\varphi''(x) = -\lambda \sin x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \cos^2 x \varphi(x) -$$

$$- \lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t) \sin t\, dt + \lambda \sin^2 x \varphi(x) =$$

$$= \lambda \varphi(x) - \left[\lambda \sin x \int_0^x \varphi(t) \cos t\, dt + \lambda \cos x \int_x^\pi \varphi(t) \sin t\, dt\right].$$

Выражение в квадратных скобках равно $\varphi(x)$, так что

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) - \varphi(x).$$

Из равенств (1) и (2) находим, что

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Итак, данное интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\varphi''(x) - (\lambda - 1)\varphi(x) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(\pi) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь возможны три следующих случая:

1) $\lambda - 1 = 0$ или $\lambda = 1$. Уравнение (3) принимает вид $\varphi''(x) = 0$. Его общее решение будет $\varphi(x) = C_1 x + C_2$. Используя краевые условия (4), получим для нахождения неизвестных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1\pi + C_2 = 0, \\ \qquad\;\; C_1 = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а следовательно, интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$\varphi(x) \equiv 0.$$

2) $\lambda - 1 > 0$ или $\lambda > 1$. Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x,$$

откуда

$$\varphi'(x) = \sqrt{\lambda - 1}\, (C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda - 1}\, x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda - 1}\, x).$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \pi \sqrt{\lambda - 1} + C_2 \operatorname{sh} \pi \sqrt{\lambda - 1} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad C_2 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Интегральное уравнение имеет тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$. Итак, при $\lambda \geqslant 1$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит, и собственных функций.

3) $\lambda - 1 < 0$ или $\lambda < 1$. Общее решение уравнения (3) будет

$$\varphi(x) = C_1 \cos \sqrt{1-\lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{1-\lambda}\, x.$$

Отсюда находим, что

$$\varphi'(x) = \sqrt{1-\lambda}\,(-C_1 \sin \sqrt{1-\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{1-\lambda}\, x).$$

Краевые условия (4) в этом случае дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\left.\begin{aligned} C_1 \cos \pi \sqrt{1-\lambda} + C_2 \sin \pi \sqrt{1-\lambda} = 0, \\ \sqrt{1-\lambda}\, C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{1-\lambda} & \sin \pi \sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Полагая его равным нулю, получим уравнение для нахождения характеристических чисел:

$$\begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{1-\lambda} & \sin \pi \sqrt{1-\lambda} \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

или $\sqrt{1-\lambda} \cos \pi \sqrt{1-\lambda} = 0$. По предположению $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$, поэтому $\cos \pi \sqrt{1-\lambda} = 0$. Отсюда находим, что $\pi \sqrt{1-\lambda} = \pi/2 + \pi n$, где n — любое целое число. Все корни уравнения (6) даются формулой

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

При значениях $\lambda = \lambda_n$ система (5) принимает вид

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 = 0, \\ C_2 \quad = 0. \end{cases}$$

Она имеет бесконечное множество ненулевых решений

$$\begin{cases} C_1 = C, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

где C — произвольная постоянная. Значит, и исходное интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений вида

$$\varphi(x) = C \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

Итак, характеристические числа и собственные функции данного интегрального уравнения будут

$$\lambda_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \varphi_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x,$$

где n — любое целое число.

Найти характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений, если их ядра имеют следующий вид:

209. $K(x, t) = \begin{cases} t(x-1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(t-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

210. $K(x, t) = \begin{cases} t(x+1), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ x(t+1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

211. $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)(t-2), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)(x-2), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

212. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

213. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

214. $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \sin(t-1), & -\pi \leqslant x \leqslant t, \\ \sin t \sin(x-1), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

215. $K(x, t) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

216. $K(x, t) = e^{-|x-t|}, \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$

217. $K(x, t) = \begin{cases} -e^{-t} \operatorname{sh} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -e^{-x} \operatorname{sh} t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

218. Показать, что если λ_1, λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, суть характеристические числа ядра $K(x, t)$, то собственные функции уравнений

$$\varphi(x)-\lambda_1\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt=0,$$

$$\psi(x)-\lambda_2\int_a^b K(t, x)\,\psi(t)\,dt=0$$

ортогональны, т. е. $\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx=0.$

219. Показать, что если $K(x, t)$ — симметричное ядро, то второе итерированное ядро $K_2(x, t)$ имеет только положительные характеристические числа.

220. Показать, что если ядро $K(x, t)$ кососимметричное, т. е. $K(t, x)=-K(x, t)$, то все его характеристические числа чисто мнимые.

221. Если ядро $K(x, t)$ симметрично, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^m}=A_m \qquad (m=2, 3, \ldots),$$

где λ_n — характеристические числа, A_m — m-е следы ядра $K(x, t)$.

Используя результаты задач 211, 212, 216, найти суммы рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\mu_n^2)^2}$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\mu=\mu-\frac{1}{\mu}$.

Резольвента симметричного ядра есть мероморфная функция от λ, для которой характеристические числа интегрального уравнения явля-

ются простыми полюсами. Ее вычеты относительно полюсов λ_i дают соответствующие этим значениям λ_i собственные функции (при любом значении t).

Найти собственные функции интегральных уравнений, резольвенты которых определяются следующими формулами:

222. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{3-\lambda+3(1-\lambda)(2x-1)(2t-1)}{\lambda^2-4\lambda+3}$.

223. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{(15-6\lambda)xt+(15-10\lambda)x^2t^2}{4\lambda^2-16\lambda+15}$.

224. $R(x, t; \lambda) =$

$$= \frac{4(5-2\lambda)[3-2\lambda+(3-6\lambda)xt]+5(4\lambda^2-8\lambda+3)(3x^2-1)(3t^2-1)}{4(1-2\lambda)(3-2\lambda)(5-2\lambda)}.$$

Интегральные уравнения Фредгольма с ядрами, зависящими от разности аргументов.

Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где ядро $K(x)$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ есть четная функция, продолжаемая четным образом на всю ось OX, так что

$$K(x-t) = K(t-x). \tag{2}$$

Можно показать, что собственные функции уравнения (1) суть

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n^{(1)}(x) &= \cos nx \quad (n=1, 2, \ldots), \\ \varphi_n^{(2)}(x) &= \sin nx \quad (n=1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а соответствующие характеристические числа

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi a_n} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где a_n — коэффициенты Фурье функции $K(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Таким образом, каждому значению λ_n соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos nx$, $\sin nx$, так что каждое λ_n есть двукратное характеристическое число. Функция $\varphi_0(x) \equiv 1$ также является собственной функцией уравнения (1), отвечающей характеристическому числу

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi a_0}, \text{ где } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\,dx.$$

Покажем, например, что $\cos nx$ есть собственная функция интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi a_n}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{6}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(x)\cos nx\,dx.$$

Делая подстановку $x - t = z$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt\,dt = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} K(z)\cos n(x-z)\,dz =$$

$$= \cos nx\int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\cos nz\,dz + \sin nx\int_{x-\pi}^{x+\pi} K(z)\sin nz\,dz = \pi a_n\cos nx,$$

так как второй интеграл равен нулю в силу четности $K(x)$, а первый интеграл есть умноженный на π коэффициент Фурье a_n в разложении четной функции $K(x)$.

Итак,

$$\cos nx = \frac{1}{\pi a_n}\int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\cos nt\,dt,$$

а это и означает, что $\cos nx$ есть собственная функция уравнения (6).

Аналогично устанавливаем, что $\sin nx$ есть собственная функция интегрального уравнения (6), отвечающая тому же характеристическому числу $\frac{1}{\pi a_n}$.

225. Найти собственные функции и соответствующие характеристические числа уравнения

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$$

226. Показать, что симметричное ядро

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-h^2}{1-2h\cos(x-t)+h^2} \qquad (-\pi \leqslant x, t \leqslant \pi)$$

имеет при $|h| < 1$ собственные функции 1, $\sin nx$, $\cos nx$, соответствующие характеристическим числам 1, $1/h^n$, $1/h^n$.

227. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

где $K(x) = x^2$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ — периодическая функция с периодом 2π.

Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций.

Абсолютная величина двойного интеграла (интеграла Гильберта)

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(x, t)\,\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt \right|, \tag{1}$$

где $K(x, t) = K(t, x)$ — симметричное ядро некоторого интегрального уравнения, на множестве нормированных функций $\varphi(x)$, т. е. таких, что

$$(\varphi, \varphi) = \int_a^b \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

имеет максимум, равный

$$\max |(K\varphi, \varphi)| = \frac{1}{|\lambda_1|}, \tag{2}$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число ядра $K(x, t)$. Максимум достигается при $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ — собственной функции ядра, отвечающей λ_1.

Пример. Найти максимум

$$|(K\varphi, \varphi)| = \left| \int_0^\pi \int_0^\pi K(x, t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,dx\,dt \right|$$

при условии

$$(\varphi, \varphi) = \int_0^\pi \varphi^2(x)\,dx = 1,$$

если

$$K(x, t) = \cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1.$$

Решение. Решая однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1)\, \varphi(t)\, dt$$

как уравнение с вырожденным ядром, находим характеристические числа $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$ и $\lambda_{2,3} = \pm \frac{2}{\pi}$ и соответствующие им собственные функции $\varphi_1(x) = C_1$, $\varphi_2(x) = C_2(\cos x + \cos 2x)$, $\varphi_3(x) = C_3$, $(\cos x - \cos 2x)$, где C_1, C_2 и C_3 — произвольные постоянные.

Наименьшим по модулю характеристическим числом является $\lambda_1 = \frac{1}{\pi}$, ему отвечает собственная функция $\varphi_1(x) = C_1$. Из условия нормировки $(\varphi, \varphi) = 1$ находим $C_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Следовательно,

$$\max \left| \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (\cos x \cos 2t + \cos t \cos 2x + 1)\, \varphi(t)\, dt \right| = 2\pi,$$

и достигается он на функциях $\varphi(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

228. Найти максимум

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, dx\, dt \right|$$

при условии, что $\int_a^b \varphi^2(x)\, dx = 1$, если:

а) $K(x, t) = xt, \quad 0 \leqslant x, \ t \leqslant 1;$

б) $K(x, t) = xt + x^2t^2, \quad -1 \leqslant x, \ t \leqslant 1;$

в) $K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\, t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\, x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Точки бифуркации.

Пусть имеем нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t))\, dt, \tag{1}$$

и пусть $\varphi(x) \equiv 0$ есть решение этого уравнения, так что

$$K(x, t, 0) \equiv 0.$$

Ненулевые решения $\varphi(x) \not\equiv 0$ уравнения (1) по аналогии с линейными интегральными уравнениями называют *собственными функциями*, а соответствующие значения параметра λ — *характеристическими числами* этого уравнения.

Интегральные уравнения (1) при малых $|\lambda|$ обычно не имеют отличных от нуля малых решений, т. е. при малых $|\lambda|$ у уравнения (1) нет собственных функций с малой нормой. С возрастанием $|\lambda|$ малые собственные функции могут появиться. Введем следующее понятие.

Число λ_0 называется *точкой бифуркации* нелинейного уравнения (1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется характеристическое число λ уравнения (1) такое, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, причем этому характеристическому числу отвечает по крайней мере одна собственная функция $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \not\equiv 0$) с нормой, меньшей ε: $\|\varphi\| < \varepsilon$. Грубо говоря, точка бифуркации — это то значение параметра λ, в окрестности которого нулевое решение уравнения (1) ветвится, т. е. возникают малые по норме ненулевые решения уравнения (1). Для линейных задач бифуркационные значения совпадают с характеристическими числами.

В задачах техники и физики, связанных с условиями устойчивости, точки бифуркации определяют критические силы. Так, задача об изгибе прямолинейного стержня единичной длины и переменной жесткости $\rho(x)$ под воздействием силы P приводит к решению следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = P\rho(x)\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_x(x, t)\,\varphi(t)\,dt\right]^2}\,dt, \qquad (1')$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция.

При малых P уравнение (1′) имеет единственное нулевое решение в пространстве $C[0, 1]$ (в силу принципа сжатых отображений). Это означает, что при малых P стержень не изгибается. Однако при силах, больших так называемой критической силы Эйлера, возникает прогиб. Критическая сила Эйлера и является бифуркационным значением.

В качестве примера на отыскание точек бифуркации рассмотрим нелинейное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 [\varphi(t) + \varphi^3(t)]\,dt. \qquad (2)$$

Положим

$$C = \int_0^1 [\varphi(t) + \varphi^3(t)]\,dt.$$

Тогда

$$\varphi(x) = C\lambda, \qquad (3)$$

и уравнение (2) сводится к алгебраическому уравнению

$$C = \lambda C + \lambda^3 C^3. \tag{4}$$

Из (4) находим

$$C_1 = 0; \qquad C_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^3}},$$

откуда согласно (3)

$$\varphi_1 \equiv 0; \qquad \varphi_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

Таким образом, при $0 < \lambda < 1$ уравнение (2) допускает действительные ненулевые решения. При $\lambda = 1$ оно имеет только нулевое решение $\varphi \equiv 0$ (трехкратное).

Таким образом, для всякого $0 < \varepsilon < 1$ число $\lambda = 1 - \varepsilon$ есть характеристическое число уравнения (2), которому отвечают две собственные функции:

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon^{1/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2}}; \qquad \varphi_2 = -\frac{\varepsilon^{1/2}}{(1-\varepsilon)^{1/2}},$$

где $\varepsilon = 1 - \lambda$. Значит, точка $\lambda_0 = 1$ есть точка бифуркации уравнения (2). Можно также говорить о точках бифуркации ненулевых решений нелинейных интегральных уравнений.

Найти точки бифуркации нулевых решений интегральных уравнений:

229. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 xt\,(\varphi(t) + \varphi^3(t))\,dt.$

230. $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 (3x-2)\,t\,(\varphi(t) + \varphi^3(t))\,dt.$

(Подробнее о точках бифуркации см. [10], [11], [26].)

§ 17. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром

Однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = 0, \tag{1}$$

когда параметр λ не является его характеристическим числом (т. е. $\Delta(\lambda) \neq 0$), имеет единственное нулевое решение: $\varphi(x) \equiv 0$. Если же λ

есть *характеристическое число* (т. е. $\Delta(\lambda) = 0$), *кроме нулевого решения* уравнение (1) имеет и ненулевые решения, которыми являются собственные функции, соответствующие этому характеристическому числу. Общее решение однородного уравнения (1) получается как линейная комбинация этих собственных функций.

В случае, когда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ являются характеристическими числами уравнения (1), последнее будет иметь p решений, являющихся линейными комбинациями, составленными из собственных функций, соответствующих определенному характеристическому числу λ_k ($k = 1, 2, \ldots, p$).

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos^2 x \cos 2t + \cos^3 t \cos 3x)\, \varphi(t)\, dt = 0.$$

Решение. Характеристические числа данного уравнения суть $\lambda = \frac{4}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{8}{\pi}$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\varphi_1(x) = \cos^2 x, \qquad \varphi_2(x) = \cos 3x.$$

Общим решением уравнения будет

$$\varphi(x) = C\cos^2 x, \qquad \text{если } \lambda = \frac{4}{\pi};$$

$$\varphi(x) = C\cos 3x, \qquad \text{если } \lambda = \frac{8}{\pi};$$

$$\varphi(x) = 0, \qquad \text{если } \lambda \neq \frac{4}{\pi}, \quad \lambda \neq \frac{8}{\pi},$$

где C — произвольная постоянная. Последнее нулевое решение получается из общих решений при $C = 0$.

Решить следующие однородные интегральные уравнения

231. $\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x + t)\, \varphi(t)\, dt = 0.$

232. $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos x\, \varphi(t)\, dt = 0.$

233. $\varphi(x) - 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\varphi(t)}{1 + \cos 2t}\, dt = 0.$

234. $\varphi(x)-\frac{1}{4}\int\limits_{-2}^{2}|x|\varphi(t)\,dt=0.$

235. $\varphi(x)+6\int\limits_{0}^{1}(x^2-2xt)\varphi(t)\,dt=0.$

§ 18. Неоднородные симметричные уравнения

Неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

называется *симметричным*, если его ядро $K(x,\ t)$ симметрично: $K(x,\ t)\equiv K(t,\ x)$.

Если $f(x)$ непрерывна и параметр λ не совпадает с характеристическими числами λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=0, \tag{2}$$

то уравнение (1) имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n}\,\varphi_n(x), \tag{3}$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции уравнения (2),

$$a_n=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \tag{4}$$

причем ряд, стоящий в правой части формулы (3), сходится абсолютно и равномерно в квадрате $a\leqslant x,\ t\leqslant b$.

Если же параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda=\lambda_k$, ранга q (кратность числа λ_k), то уравнение (1), вообще говоря, не имеет решений. Решения существуют тогда и только тогда, когда выполняются q условий

$$(f,\ \varphi_m)=0 \qquad \text{или} \qquad \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx=0 \tag{5}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ q),$$

т. е. когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям, принадлежащим характеристическому числу λ_k. В этом случае уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, которые содержат q произвольных постоянных и даются формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) + \\ + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x), \qquad (6)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_q$ — произвольные постоянные.

В случае вырожденного ядра

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x) b_k(t)$$

формулы (3) и (6) будут содержать в правых частях вместо рядов конечные суммы.

Когда правая часть уравнения (1), т. е. функция $f(x)$, будет ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_n(x)$ уравнения (2), то решением уравнения (1) будет являться сама эта функция: $\varphi(x) = f(x)$.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = x, \qquad (1)$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} x(t-1), & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & \text{если} \quad t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа и соответствующие им собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2; \quad \varphi_n(x) = \sin \pi n x, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Если $\lambda \neq \lambda_n$, то решением уравнения (1) будет

$$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} \sin n\pi x. \qquad (2)$$

Находим коэффициенты Фурье a_n правой части уравнения:

$$a_n = \int_0^1 x \sin n\pi x\,dx = \int_0^1 x\,d\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Подставляя в (2), получим

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(\lambda + n^2\pi^2)} \sin n\pi x.$$

При $\lambda = -n^2\pi^2$ уравнение (1) не имеет решений, так как

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \neq 0.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \cos \pi x,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} (x+1)\,t, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ (t+1)\,x, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Характеристические числа:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = -n^2\pi^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Соответствующие им собственные функции:

$$\varphi_0(x) = e^x, \ \ \varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq -n^2\pi^2$, то решение данного уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = \cos \pi x - \lambda \left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2} (\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x) \right],$$

и так как

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos \pi x\,dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 \cos \pi x\,(\sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1, \end{cases}$$

то

$$\varphi(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\,\frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)} (\sin \pi x + \pi \cos \pi x) \right].$$

При $\lambda = 1$ и $\lambda = -\pi^2$ $(n = 1)$ уравнение решений не имеет, так как его правая часть, т. е. функция $\cos \pi x$, не ортогональна к соответствующим собственным функциям

$$\varphi_0(x) = e^x, \qquad \varphi_1(x) = \sin \pi x + \pi \cos \pi x.$$

Если же $\lambda = -n^2\pi^2$, где $n = 2, 3, \ldots$, то данное уравнение имеет бесконечное множество решений, которые даются формулой (6):

$$\varphi(x) = \cos\pi x + \lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\,\frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x)\right] + C(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x),$$

где C — произвольная постоянная.

В некоторых случаях неоднородное симметричное интегральное уравнение можно свести к неоднородной краевой задаче. Это возможно сделать тогда, когда ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения является функцией Грина некоторого линейного дифференциального оператора. Покажем на примере, как это делается.

Пример 3. Решить уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = e^x, \tag{1}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Решение. Данное уравнение перепишем в виде

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh} t\,\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Дифференцируя дважды, найдем

$$\varphi'(x) = e^x + \frac{\lambda\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh} t\,\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh} x\varphi(x) + \lambda\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\,\varphi(t)\,dt - \frac{\lambda\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh}(x-1)\,\varphi(x)$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x \operatorname{sh} t\,\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1 \operatorname{sh}(t-1)\,\varphi(t)\,dt + \frac{\lambda\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh} x\,\varphi(x) - \frac{\lambda\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} 1}\operatorname{sh}(x-1)\,\varphi(x)$$

или

$$\varphi''(x) = e^x + \varphi(x) + \lambda\varphi(x).$$

Полагая в (2) $x = 0$ и $x = 1$, получим, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = e$. Искомая функция $\varphi(x)$ является решением неоднородной краевой задачи

$$\varphi''(x) - (\lambda + 1)\varphi(x) = e^x, \tag{3}$$

$$\varphi(0) = 1, \qquad \varphi(1) = e. \tag{4}$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $\lambda + 1 = 0$, т. е. $\lambda = -1$. Уравнение (3) имеет вид $\varphi''(x) = e^x$. Его общее решение будет

$$\varphi(x) = C_1x + C_2 + e^x.$$

Учитывая краевые условия (4), получим для нахождения постоянных C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} \phantom{C_1 + {}} C_2 + 1 = 1, \\ C_1 + C_2 + e = e, \end{cases}$$

решение которой имеет вид $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, и, следовательно,

$$\varphi(x) = e^x.$$

2) $\lambda + 1 > 0$, т. е. $\lambda > -1$, $\lambda \neq 0$. Общее решение уравнения (3) будет

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}\,x + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}\,x - \frac{e^x}{\lambda}.$$

Краевые условия (4) дают для нахождения C_1 и C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 - \dfrac{1}{\lambda} = 1, \\ C_1 \operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda} - \dfrac{e}{\lambda} = e, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = 1 + \frac{1}{\lambda}, \qquad C_2 = \frac{e - \operatorname{ch}\sqrt{1+\lambda}}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Искомая функция $\varphi(x)$ после несложных преобразований приведется к виду

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}\,(1-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{1+\lambda}} - \frac{e^x}{\lambda}.$$

3) $\lambda + 1 < 0$, т. е. $\lambda < -1$. Обозначим $\lambda + 1 = -\mu^2$. Общее решение уравнения (3) будет

$$\varphi(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x + \frac{e^x}{1+\mu^2}.$$

Краевые условия (4) дают систему

$$\left.\begin{aligned} C_1 + \frac{1}{1+\mu^2} &= 1, \\ C_1 \cos\mu + C_2 \sin\mu &= e\frac{\mu^2}{1+\mu^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь в свою очередь возможны два случая:

а) μ не является корнем уравнения $\sin\mu = 0$.

Тогда

$$C_1 = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}, \quad C_2 = \frac{(e-\cos\mu)\,\mu^2}{(1+\mu^2)\sin\mu},$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}\left[\cos\mu x + \frac{e-\cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu x\right] + \frac{e^x}{1+\mu^2},$$

где $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

б) μ является корнем уравнения $\sin\mu = 0$, т. е. $\mu = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Система (5) несовместна, а следовательно, данное уравнение (1) не имеет решений.

В этом случае соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) + (1 + n^2\pi^2)\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0 \tag{6}$$

будет иметь бесконечное множество нетривиальных решений, т. е. числа $\lambda_n = -(1 + n^2\pi^2)$ являются характеристическими числами, а соответствующие им решения $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ — собственными функциями уравнения (6).

Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения:

236. $\varphi(x) - \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \dfrac{x}{2}$,

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(2-t)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{t(2-x)}{2}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

237. $\varphi(x)+\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = xe^x$,

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

238. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = x^3-x^2$,

$$K(x, t)=\begin{cases}x-t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ t-x, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

239. $\varphi(x)-2\int\limits_0^{\pi/2} K(x, t)\varphi(t)\,dt = \cos 2x$,

$$K(x, t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \sin t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

240. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi} K(x, t)\varphi(t)\,dt = 1$,

$$K(x, t)=\begin{cases}\sin x\cos t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \sin t\cos x, & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

241. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt = x$,

$$K(x, t)=\begin{cases}(x+1)(t-3), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ (t+1)(x-3), & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

242. $\varphi(x)-\int\limits_0^{\pi} K(x, t)\varphi(t)\,dt = (\pi-x)^2$,

$$K(x, t)=\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right), & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & t\leqslant x\leqslant \pi.\end{cases}$$

243. $\varphi(x)-\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt=\pi x+1,$

$$K(x, t)=\begin{cases}-e^{-t}\operatorname{sh} x, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ -e^{-x}\operatorname{sh} t, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

244. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt=2x-1,$

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(t+1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \dfrac{\operatorname{ch} t\operatorname{ch}(x+1)}{\operatorname{sh} 1}, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

245. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^\pi |x-t|\,\varphi(t)\,dt=1.$

§ 19. Альтернатива Фредгольма

Для интегральных уравнений Фредгольма имеют место теоремы:

Теорема 1 (альтернатива Фредгольма). *Или неоднородное линейное уравнение 2-го рода*

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (1)$$

имеет единственное решение при любой функции $f(x)$ (из некоторого достаточно широкого класса), или соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt=0 \qquad (2)$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное, т. е. не равное тождественно нулю, решение.

Теорема 2. *Если для уравнения (1) имеет место первый случай альтернативы, то он имеет место и для сопряженного уравнения*

$$\psi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(t, x)\psi(t)\,dt=g(x). \qquad (3)$$

Однородное интегральное уравнение (2) и сопряженное к нему уравнение

$$\psi(x)-\lambda\int\limits_a^b K(t, x)\psi(t)\,dt=0 \qquad (4)$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых реш

Замечание. Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются решениями однородного уравнения (2), то их линейная комбинация

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x),$$

где C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения.

Теорема 3. *Необходимым и достаточным условием существования решения $\varphi(x)$ неоднородного уравнения* (1) *во втором случае альтернативы является условие ортогональности правой части этого уравнения, т. е. функции $f(x)$, к любому решению $\psi(x)$ сопряженного к уравнению* (2) *однородного уравнения* (4):

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Замечание. При выполнении условия (5) уравнение (1) будет иметь бесконечное множество решений, так как этому уравнению будет удовлетворять любая функция вида $\varphi(x) + \tilde{\varphi}(x)$, где $\varphi(x)$ — какое-нибудь решение уравнения (1), а $\tilde{\varphi}(x)$ — любое решение соответствующего однородного уравнения (2). Кроме того, если уравнению (1) удовлетворяют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то в силу линейности уравнения их разность $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ есть решение соответствующего однородного уравнения (2).

На практике особенно важное значение имеет альтернатива Фредгольма. Вместо того чтобы доказывать, что данное интегральное уравнение (1) имеет решение, часто бывает проще доказать, что соответствующее однородное уравнение (2) или сопряженное к нему уравнение (4) имеет только тривиальные решения. Отсюда в силу альтернативы следует, что уравнение (1) действительно имеет решение.

Замечания. 1) Если ядро $K(x, t)$ интегрального уравнения (1) симметрично, т. е. $K(x, t) \equiv K(t, x)$, то однородное сопряженное уравнение (4) совпадает с однородным уравнением (2), соответствующим уравнению (1).

2) В случае неоднородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t)\right] \varphi(t)\,dt = f(x)$$

условие (5) ортогональности правой части этого уравнения дает n равенств

$$\int_a^b f(t) b_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 1.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(5x^2-3)\,t^2\varphi(t)\,dt=e^x.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x)=C\lambda(5x^2-3)+e^x, \tag{1}$$

где

$$C=\int_0^1 t^2\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$C=C\lambda\int_0^1(5t^4-3t^2)\,dt+\int_0^1 t^2e^t\,dt,$$

откуда

$$C=e-2.$$

Данное уравнение при любых λ имеет единственное решение

$$\varphi(x)=\lambda(e-2)(5x^2-3)+e^x,$$

а соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(5x^2-3)\,t^2\varphi(t)\,dt=0$$

имеет единственное нулевое решение $\varphi(x)\equiv 0$.

Пример 2.

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\sin\ln x\,\varphi(t)\,dt=2x.$$

Решение. Имеем

$$\varphi(x)=C\lambda\sin\ln x+2x,$$

где $C=\int_0^1\varphi(t)\,dt$. Подставляя выражение $\varphi(t)$ в интеграл, найдем

$$C=C\lambda\int_0^1\sin\ln t\,dt+1,$$

откуда

$$C\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1.$$

Если $\lambda \neq -2$, то данное уравнение имеет единственное решение $\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda} \sin \ln x + 2x$, соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \sin \ln x \varphi(t)\, dt = 0$$

имеет только нулевое решение $\varphi(x) = 0$.

Если же $\lambda = -2$, то данное уравнение не имеет решений, так как правая часть $f(x) = 2x$ не ортогональна к функции $\sin \ln x$; однородное уравнение имеет бесконечное множество решений, так как из уравнения для определения C: $0 \cdot C = 0$ — следует, что C — произвольная постоянная; все эти решения даются формулой

$$\varphi(x) = \widetilde{C} \sin \ln x \qquad (\widetilde{C} = -2C).$$

Пример 3.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos(x+t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi (\cos x \cos t - \sin x \sin t)\, \varphi(t)\, dt = \cos 3x.$$

Отсюда имеем

$$\varphi(x) = C_1\lambda \cos x - C_2\lambda \sin x + \cos 3x, \tag{1}$$

где

$$C_1 = \int_0^\pi \varphi(t) \cos t\, dt, \qquad C_2 = \int_0^\pi \varphi(t) \sin t\, dt. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получим

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_0^\pi (C_1\lambda \cos t - C_2\lambda \sin t + \cos 3t) \cos t\, dt, \\ C_2 = \int\limits_0^\pi (C_1\lambda \cos t - C_2\lambda \sin t + \cos 3t) \sin t\, dt, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} C_1\left(1-\lambda\int\limits_0^\pi \cos^2 t\,dt\right)+C_2\lambda\int\limits_0^\pi \sin t\cos t\,dt=\int\limits_0^\pi \cos 3t\cos t\,dt, \\ -C_1\lambda\int\limits_0^\pi \cos t\sin t\,dt+C_2\left(1+\lambda\int\limits_0^\pi \sin^2 t\,dt\right)=\int\limits_0^\pi \cos 3t\sin t\,dt \end{cases}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_1\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0, \\ C_2\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

1) Если $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}$ $(\Delta(\lambda)\neq 0)$, то система (3) имеет единственное решение $C_1=0$, $C_2=0$, а следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $\varphi(x)=\cos 3x$, а соответствующее ему однородное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^\pi \cos(x+t)\,\varphi(t)\,dt=0 \tag{4}$$

имеет только нулевое решение $\varphi(x)=0$.

2) Если $\lambda=\frac{2}{\pi}$, то система (3) принимает вид

$$\begin{cases} C_1\cdot 0=0, \\ C_2\cdot 2=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $C_2=0$, а $C_1=C$, где C — произвольная постоянная. Данное уравнение будет иметь бесконечное множество решений, которые даются формулой

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}C\cdot\cos x+\cos 3x$$

или

$$\varphi(x)=\widetilde{C}\cdot\cos x+\cos 3x \qquad \left(\widetilde{C}=\frac{2C}{\pi}\right);$$

соответствующее однородное уравнение (4) имеет бесконечное множество решений:

$$\varphi(x) = \tilde{C}\cdot\cos x.$$

3) Если $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$, то система (3) принимает вид

$$\begin{cases} 2\cdot C_1 = 0, \\ 0\cdot C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = C$, где C — произвольная постоянная.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} C\cdot\sin x + \cos 3x$$

или

$$\varphi(x) = \tilde{C}\cdot\sin x + \cos 3x \qquad \left(\tilde{C} = \frac{2C}{\pi}\right).$$

В этом примере ядро $K(x, t) = \cos(x+t)$ заданного уравнения симметрично $K(x, t) = K(t, x)$; правая часть уравнения, т. е. функция $f(x) = \cos 3x$, ортогональна к функциям $\cos x$ и $\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующие интегральные уравнения:

246. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^\pi \cos^2 x\varphi(t)\,dt = 1.$

247. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} xe^t\varphi(t)\,dt = x.$

248. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} |x-\pi|\,\varphi(t)\,dt = x.$

249. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^1 (2xt - 4x^2)\,\varphi(t)\,dt = 1 - 2x.$

250. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-1}^{1} (x^2 - 2xt)\,\varphi(t)\,dt = x^3 - x.$

251. $\varphi(x) - \lambda \int\limits_0^{2\pi} \left(\dfrac{1}{\pi}\cos x\cos t + \dfrac{1}{\pi}\sin 2x\sin 2t\right)\varphi(t)\,dt = \sin x.$

252. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt=1$, где

$$K(x, t)=\begin{cases}\operatorname{ch} x\cdot\operatorname{sh} t, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \operatorname{ch} t\cdot\operatorname{sh} x, & t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

§ 20. Построение функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть дано дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$L[y]\equiv p_0(x)\,y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=0, \tag{1}$$

где функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, $p_0(x)\neq 0$ на $[a, b]$, и краевые условия:

$$V_k(y)\equiv\alpha_k y(a)+\alpha_k^{(1)}y'(a)+\ldots+\alpha_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(a)+\beta_k y(b)+$$
$$+\beta_k^{(1)}y'(b)+\ldots+\beta_k^{(n-1)}y^{(n-1)}(b)\quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

где линейные формы $V_1, \ldots, V_n$ от $y(a)$, $y'(a)$, ..., $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, ..., $y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Предполагаем, что однородная краевая задача (1)—(2) имеет только тривиальное решение $y(x)\equiv 0$.

Определение. *Функцией Грина краевой задачи* (1) — (2) *называется функция* $G(x, \xi)$, *построенная для любой точки* ξ, $a<\xi<b$, *и имеющая следующие 4 свойства:*

1° $G(x, \xi)$ *непрерывна и имеет непрерывные производные по* x *до* $(n-2)$*-го порядка включительно при* $a\leqslant x\leqslant b$.

2° *Ее* $(n-1)$*-я производная по* x *в точке* $x=\xi$ *имеет разрыв 1-го рода, причем скачок равен* $\dfrac{1}{p_0(x)}$, *т. е.*

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial^{n-1}G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{3}$$

3° *В каждом из интервалов* $[a, \xi)$ *и* $(\xi, b]$ *функция* $G(x, \xi)$, *рассматриваемая как функция от* x, *является решением уравнения* (1):

$$L[G]=0. \tag{4}$$

4° $G(x, \xi)$ *удовлетворяет граничным условиям* (2):

$$V_k(G)=0\qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Теорема 1. *Если краевая задача* (1)—(2) *имеет лишь тривиальное решение* $y(x)\equiv 0$, *то оператор* L *имеет одну и только одну функцию Грина* $G(x, \xi)$.

Доказательство. Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $L[y]=0$. Тогда в силу свойства 3° искомая функция $G(x, \xi)$ на интервалах $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ должна иметь следующее представление:

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x) \text{ при } a \leqslant x < \xi$$

и

$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) + \ldots + b_n y_n(x) \text{ при } \xi \leqslant x < b.$$

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — некоторые функции от ξ. Непрерывность функции $G(x, \xi)$ и ее первых $n-2$ производных по x в точке $x=\xi$ дает нам соотношения:

$$\begin{gathered}
[b_1 y_1(\xi) + \ldots + b_n y_n(\xi)] - [a_1 y_1(\xi) + \ldots + a_n y_n(\xi)] = 0, \\
[b_1 y_1'(\xi) + \ldots + b_n y_n'(\xi)] - [a_1 y_1'(\xi) + \ldots + a_n y_n'(\xi)] = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0,
\end{gathered}$$

а условие (3) принимает вид

$$[b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - [a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Положим $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, тогда получим систему линейных уравнений относительно $c_k(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned}
c_1 y_1(\xi) + c_2 y_2(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) &= 0, \\
c_1 y_1'(\xi) + c_2 y_2'(\xi) + \ldots + c_n y_n'(\xi) &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) &= 0, \\
c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2 y_2^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель системы (6) равен значению вронскиана $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в точке $x=\xi$, а потому отличен от нуля. Поэтому система (6) однозначно определяет функции $c_k(\xi)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Для определения функций $a_k(\xi)$ и $b_k(\xi)$ воспользуемся краевыми условиями (2). Запишем $V_k(y)$ в виде

$$V_k(y) = A_k(y) + B_k(y), \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}
A_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \ldots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a), \\
B_k(y) = \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \ldots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b).
\end{gathered}$$

Тогда в силу условий (5) получим

$$V_k(G) = a_1A_k(y_1) + a_2A_k(y_2) + \ldots + a_nA_k(y_n) +$$
$$+ b_1B_k(y_1) + b_2B_k(y_2) + \ldots + b_nB_k(y_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Учитывая, что $a_k = b_k - c_k$, будем иметь

$$(b_1 - c_1)A_k(y_1) + (b_2 - c_2)A_k(y_2) + \ldots + (b_n - c_n)A_k(y_n) +$$
$$+ b_1B_k(y_1) + b_2B_k(y_2) + \ldots + b_nB_k(y_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда в силу (7)

$$b_1V_k(y_1) + b_2V_k(y_2) + \ldots + b_nV_k(y_n) =$$
$$= c_1A_k(y_1) + c_2A_k(y_2) + \ldots + c_nA_k(y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Заметим, что система (8) является линейной относительно величин $b_1, \ldots, b_n$. Определитель этой системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \cdots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \cdots & V_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_n(y_1) & V_n(y_2) & \cdots & V_n(y_n) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{9}$$

в силу нашего предположения о линейной независимости форм $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Следовательно, система уравнений (8) имеет единственное решение относительно $b_1(\xi), b_2(\xi), \ldots, b_n(\xi)$, а так как $a_k(\xi) = b_k(\xi) - c_k(\xi)$, то и величины $a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются однозначно. Тем самым существование и единственность функции Грина $G(x, \xi)$ доказаны и одновременно дан метод ее построения.

Замечание 1. Если краевая задача (1) — (2) самосопряженная, то функция Грина является симметричной, т. е.

$$G(x, \xi) = G(\xi, x).$$

Справедливо и обратное утверждение.

Об условиях самосопряженности краевой задачи для дифференциальных операторов 2-го и 4-го порядков см. [21], т. I, стр. 232—233.

Замечание 2. Если на одном из концов отрезка $[a, b]$ коэффициент при старшей производной обращается в нуль, например $p_0(a) = 0$, то ставится естественное граничное условие ограниченности решения при $x = a$, а на другом конце задается обычное граничное условие (см. ниже пример 2).

Важный частный случай

Рассмотрим построение функции Грина для дифференциального уравнения второго порядка вида

$$(p(x)\,y')' + q(x)\,y = 0,$$
$$p(x) \neq 0 \text{ на } [a, b],\ p(x) \in C^{(1)}[a, b] \tag{10}$$

с граничными условиями

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{11}$$

Предположим, что $y_1(x)$ есть решение уравнения (10), определяемое начальными условиями

$$y_1(a) = 0, \qquad y_1'(a) = \alpha \neq 0. \tag{12}$$

Это решение, вообще говоря, не обязано удовлетворять второму граничному условию, поэтому мы будем предполагать, что $y_1(b) \neq 0$. Но функции вида $C_1y_1(x)$, где C_1 — произвольная постоянная, очевидно, являются решениями уравнения (10) и удовлетворяют граничному условию

$$y(a) = 0.$$

Аналогично находим ненулевое решение $y_2(x)$ уравнения (10), причем такое, чтобы оно удовлетворяло второму граничному условию, т. е.

$$y_2(b) = 0. \tag{13}$$

Этому же условию будут удовлетворять все решения семейства $C_2y_2(x)$, где C_2 — произвольная постоянная.

Теперь функцию Грина для задачи (10) — (11) ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1y_1(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi, \\ C_2y_2(x) & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{14}$$

причем постоянные C_1 и C_2 выберем так, чтобы выполнялись свойства 1° и 2°, т. е. чтобы функция $G(x, \xi)$ была непрерывна по x при фиксированном ξ, в частности непрерывна в точке $x = \xi$:

$$C_1y_1(\xi) = C_2y_2(\xi),$$

и чтобы $G'_x(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ имела скачок, равный $\dfrac{1}{p(\xi)}$:

$$C_2y'_2(\xi) - C_1y'_1(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}.$$

Перепишем два последних равенства так:

$$\left.\begin{aligned} -C_1y_1(\xi) + C_2y_2(\xi) &= 0, \\ -C_1y'_1(\xi) + C_2y'_2(\xi) &= \frac{1}{p(\xi)}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Определитель системы (15) есть определитель Вронского $W[y_1(x), y_2(x)] = W(x)$, вычисленный в точке $x = \xi$, для линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (10), а значит, он отличен от нуля:

$$W(\xi) \neq 0,$$

так что величины C_1 и C_2 из системы (15) немедленно определяются:

$$C_1 = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}, \qquad C_2 = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}. \tag{16}$$

Подставляя выражения для C_1 и C_2 в (14), окончательно получим

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{p(\xi)\, W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{17}$$

З а м е ч а н и е 1. Выбранные нами решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (10) являются линейно независимыми в силу предположения, что $y_1(b) \neq 0$.

В самом деле, все линейно зависимые от $y_1(x)$ решения имеют вид $C_1 y_1(x)$ и, следовательно, при $C_1 \neq 0$ не обращаются в нуль в точке $x = b$, в которой, согласно нашему выбору, обращается в нуль решение $y_2(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Краевая задача для уравнения второго порядка вида

$$y''(x) + p_1(x)\, y'(x) + p_2(x)\, y(x) = 0 \tag{18}$$

и краевых условий

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B \tag{19}$$

сводится к рассмотренной задаче (10) — (11) так:

1) Линейное уравнение (18) приводится к виду (10) путем умножения (18) на $p(x) = e^{\int p_1(x)dx}$ (в качестве $q(x)$ надо взять $p(x)\, p_2(x)$).

2) Краевые условия (19) сводятся к нулевым условиям (11) линейной заменой переменных

$$z(x) = y(x) - \frac{B - A}{b - a}(x - a) - A.$$

При этой замене линейность уравнения (18) не нарушается, но в отличие от уравнения (10) теперь получаем уравнение с правой частью $L[z] = f(x)$, где

$$f(x) = -\left[A + \frac{B - A}{b - a}(x - a)\right] q(x) - \frac{B - A}{b - a}\, p(x).$$

Однако функцию Грина мы строим для однородной краевой задачи $L[z] = 0$, $z(a) = z(b) = 0$, которая полностью совпадает с задачей (10) — (11).

П р и м е р 1. Построить функцию Грина для однородной краевой задачи

$$y^{IV}(x) = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) = y'(0) = 0, \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Р е ш е н и е. 1. Сначала покажем, что краевая задача (1) — (2) имеет лишь тривиальное решение. В самом деле, фундаментальная система решений для уравнения (1) есть

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = x^2, \qquad y_4(x) = x^3, \tag{3}$$

так что его общее решение имеет вид

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Краевые условия (2) дают нам четыре соотношения для определения A, B, C, D:

$$y(0) = A = 0,$$

$$y'(0) = B = 0,$$

$$y(1) = A + B + C + D = 0,$$

$$y'(1) = B + 2C + 3D = 0.$$

Отсюда имеем $A = B = C = D = 0$.

Итак, задача (1) — (2) имеет только нулевое решение $y(x) \equiv 0$, а значит, для нее можно построить (и притом единственную) функцию Грина $G(x, \xi)$.

2. Теперь построим функцию Грина. Используя фундаментальную систему решений (3), представим искомую функцию Грина $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x, \xi) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \tag{4}$$

$$G(x, \xi) = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot x^2 + b_4 \cdot x^3 \quad \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 — пока что неизвестные функции от ξ. Положим $c_k(\xi) = b_k(\xi) - a_k(\xi)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и выпишем систему линейных уравнений для нахождения функций $c_k(\xi)$ (см. систему (6) на стр. 124):

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 &= 0, \\ c_2 + c_3 \cdot 2\xi + c_4 \cdot 3\xi^2 &= 0, \\ c_3 \cdot 2 + c_4 \cdot 6\xi &= 0, \\ c_4 \cdot 6 &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решая эту систему, получим

$$\left.\begin{aligned} c_1(\xi) &= -\frac{1}{6}\xi^3, & c_2(\xi) &= \frac{1}{2}\xi^2, \\ c_3(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi, & c_4(\xi) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Далее воспользуемся свойством 4° функции Грина, а именно тем, что она должна удовлетворять краевым условиям (2), т. е.

$$G(0, \xi) = 0, \qquad G'_x(0, \xi) = 0,$$

$$G(1, \xi) = 0, \qquad G'_x(1, \xi) = 0.$$

В нашем случае эти соотношения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 0, \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_2 + 2b_3 + 3b_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Используя то, что $c_k = b_k - a_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, из (7) и (8) находим:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 0;\ b_1 = -\frac{1}{6}\xi^3; && a_2 = 0;\ b_2 = \frac{1}{2}\xi^2; \\ &b_3 = \frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2; && b_4 = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3; \\ &a_3 = \frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3;\ && a_4 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Подставив значения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, b_4$ из (9) в (4) и (5), получим искомую функцию Грина

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\xi - \xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3\right)x^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3, \\ \qquad 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{2}\xi^2 x + \left(\frac{1}{2}\xi^3 - \xi^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\right)x^3 \\ \qquad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Последнее выражение легко преобразуется к виду

$$G(x, \xi) = \left(\frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)\xi^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\xi^3$$

$$\text{при } \xi \leqslant x \leqslant 1,$$

так что $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, т. е. функция Грина симметричная. Это можно было сказать и заранее, так как краевая задача (1) — (2) самосопряженная.

Читателю рекомендуем установить это самостоятельно. Кроме этого, советуем проверить, что найденная нами функция Грина удовлетворяет всем требованиям 1°, 2°, 3°, 4°, сформулированным при ее определении.

Пример 2. Построить функцию Грина для дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = 0 \qquad (1)$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} &y(x) \text{ ограничено при } x \to 0, \\ &y(1) = \alpha y'(1), \qquad \alpha \neq 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Решение. Найдем сначала общее решение уравнения (1) и убедимся, что условия (2) выполняются лишь тогда, когда

$$y(x) \equiv 0.$$

В самом деле, обозначая $y'(x) = z(x)$, получим $xz' + z = 0$, откуда $\ln z = \ln c_1 - \ln x$, $z = \frac{c_1}{x}$, а значит,

$$y(x) = c_1 \ln x + c_2. \tag{3}$$

Ясно, что $y(x)$, определяемое формулой (3), удовлетворяет условиям (2) только при $c_1 = c_2 = 0$, а значит, функцию Грина для задачи (1) — (2) можно построить.

Запишем формально $G(x, \xi)$ в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1 + a_2 \ln x & \text{при} \quad 0 < x \leqslant \xi, \\ b_1 + b_2 \ln x & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

Из непрерывности $G(x, \xi)$ при $x = \xi$ получаем

$$b_1 + b_2 \ln \xi - a_1 - a_2 \ln \xi = 0,$$

а скачок $G'_x(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ равен $\frac{1}{\xi}$, так что

$$b_2 \cdot \frac{1}{\xi} - a_2 \cdot \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}.$$

Положив

$$c_1 = b_1 - a_1, \qquad c_2 = b_2 - a_2, \tag{5}$$

будем иметь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln \xi = 0, \\ \qquad\qquad c_2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = -\ln \xi, \quad c_2 = 1. \tag{6}$$

Используем теперь условия (2). Ограниченность $G(x, \xi)$ при $x \to 0$ дает нам $a_2 = 0$, а из условия $G(x, \xi) = \alpha G'_x(x, \xi)$ получаем $b_1 = \alpha b_2$. Учитывая (5) и (6), получаем значения всех коэффициентов в (4):

$$a_1 = \alpha + \ln \xi, \; a_2 = 0, \; b_1 = \alpha, \qquad b_2 = 1.$$

Итак,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha + \ln \xi, & 0 < x \leqslant \xi, \\ \alpha + \ln x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример 3. Найти функцию Грина краевой задачи

$$y''(x) + k^2 y = 0,$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Решение. Легко убедиться в том, что решение $y_1(x) = \sin kx$ удовлетворяет краевому условию $y_1(0) = 0$, а решение $y_2(x) =$

$= \sin k(x-1)$ — условию $y_2(1) = 0$, причем они являются линейно независимыми. Найдем значение определителя Вронского для $\sin kx$ и $\sin k(x-1)$ в точке $x = \xi$:

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin k\xi & \sin k(\xi-1) \\ k\cos k\xi & k\cos k(\xi-1) \end{vmatrix} =$$
$$= k[\sin k\xi \cos k(\xi-1) - \sin k(\xi-1)\cos k\xi] = k\sin k.$$

Заметим еще, что в нашем примере $p(x) = 1$, согласно (17), получим

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin k(\xi-1)\sin kx}{k\sin k}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\sin k\xi \cdot \sin k(x-1)}{k\sin k}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

В следующих примерах установить, существует ли функция Грина для данной краевой задачи, и если существует, то построить ее.

253. $y'' = 0$; $y(0) = y'(1)$, $y'(0) = y(1)$.

254. $y'' = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

255. $y'' + y = 0$; $y(0) = y(\pi) = 0$.

256. $y^{\mathrm{IV}} = 0$; $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

257. $y''' = 0$; $y(0) = y'(1) = 0$, $y'(0) = y(1)$.

258. $y''' = 0$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) = y'(1)$.

259. $y'' = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = -y'(1)$.

260. $y'' + y' = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

261. $y'' - k^2y = 0$ $(k \neq 0)$; $y(0) = y(1) = 0$.

262. $y'' + y = 0$; $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$.

263. $y''' = 0$; $y(0) = y(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.

264. $y'' = 0$; $y'(0) = hy(0)$, $y'(1) = -Hy(1)$.

265. $x^2y'' + 2xy' = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = \alpha y'(1)$.

266. $x^3y^{\mathrm{IV}} + 6x^2y''' + 6xy'' = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = y'(1) = 0$.

267. $x^2y'' + xy' - y = 0$; $y(x)$ ограничено при $x \to 0$, $y(1) = 0$.

268. $xy'' + y' - \dfrac{1}{x}y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

269. $x^2y'' + xy' - n^2y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

270. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y(0)$ конечно, $y(1) = 0$.

271. $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] = 0$; $y(0) = 0$, $y(1)$ конечно.

272. $xy'' + y' = 0$; $y(0)$ ограничено, $y(l) = 0$.

273. $y'' - y = 0$; $y(0) = y'(0)$, $y(l) + \lambda y'(l) = 0$. (Рассмотреть случаи: $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $|\lambda| \neq 1$.)

§ 21. Применение функции Грина для решения краевых задач

Пусть дано дифференциальное уравнение с правой частью

$$L[y] \equiv p_0(x)\,y^{(n)}(x) + p_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x)\,y(x) = f(x) \quad (1)$$

и краевые условия

$$V_1(y) = 0,\ V_2(y) = 0,\ \ldots,\ V_n(y) = 0, \quad (2)$$

причем, как и в § 20, мы считаем, что линейные формы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ от $y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Теорема. *Если $G(x, \xi)$ есть функция Грина однородной краевой задачи*

$$L[y] = 0,$$
$$V_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то решение краевой задачи (1) — (2) *дается формулой*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\,f(\xi)\,d\xi \quad (3)$$

(см. [21]).

Пример 1. Используя функцию Грина, решить краевую задачу

$$y''(x) - y(x) = x, \quad (1)$$
$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2)$$

а) Выясним сначала, существует ли функция Грина для соответствующей однородной краевой задачи

$$y''(x) - y(x) = 0, \quad (1')$$
$$y(0) = y(1) = 0. \quad (2')$$

Очевидно, что $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-x}$ есть фундаментальная система решений уравнения (1′). Значит, общим решением этого уравнения будет

$$y(x)=Ae^x+Be^{-x}.$$

Краевые условия (2) удовлетворяются тогда и только тогда, когда $A=B=0$, т. е. $y(x)\equiv 0$. Итак, функция Грина существует.

б) Легко проверить, что

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(\xi-1)}{\operatorname{sh} 1}, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\[2mm] \dfrac{\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}, & \xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

является функцией Грина для краевой задачи (1′) — (2′).

в) Решение краевой задачи (1) — (2) пишем в виде

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\ \xi)\,\xi\,d\xi,\tag{4}$$

где $G(x,\ \xi)$ определена формулой (3).

Разбивая промежуток интегрирования на два и подставляя в (4) выражение для функции Грина из (3), получим

$$y(x)=\int_0^x\frac{\xi\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\,d\xi+\int_x^1\frac{\xi\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(\xi-1)}{\operatorname{sh} 1}\,d\xi=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1}\int_0^x\xi\operatorname{sh}\xi\,d\xi+\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}\int_x^1\xi\operatorname{sh}(\xi-1)\,d\xi.\tag{5}$$

Но

$$\int_0^x\xi\operatorname{sh}\xi\,d\xi=x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x,$$

$$\int_x^1\xi\operatorname{sh}(\xi-1)\,d\xi=1-x\operatorname{ch}(x-1)+\operatorname{sh}(x-1),$$

поэтому

$$y(x)=\frac{1}{\operatorname{sh} 1}\{\operatorname{sh}(x-1)\,[x\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x]+$$
$$+\operatorname{sh} x\,[1-x\operatorname{ch}(x-1)+\operatorname{sh}(x-1)]\}=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-x.$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta,$$

а также нечетностью функции $\operatorname{sh} x$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция

$$y(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}-x$$

удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2).

Пример 2. Свести к интегральному уравнению следующую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения:

$$y''=f(x,\ y(x)), \tag{1}$$

$$y(0)=y(1)=0. \tag{2}$$

Строя функцию Грина для задачи

$$y''=0, \tag{3}$$

$$y(0)=y(1)=0, \tag{2}$$

находим

$$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)\,x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (x-1)\,\xi, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Рассматривая правую часть уравнения (1) как известную функцию, получаем

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi,\ y(\xi))\,d\xi. \tag{4}$$

Таким образом, решение краевой задачи (1) — (2) сводится к решению нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна (см. § 15), ядро которого — функция Грина задачи (3) — (2). Значение интегральных уравнений Гаммерштейна и заключается в том, что решение многих краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений сводится к решению интегральных уравнений этого типа.

Используя функцию Грина, решить следующие краевые задачи:

274. $y''+y=x;\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

275. $y^{\mathrm{IV}}=1;\quad y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0.$

276. $xy''+y'=x;\quad y(1)=y(e)=0.$

277. $y''+\pi^2y=\cos\pi x;\quad y(0)=y(1),\ y'(0)=y'(1).$

278. $y''-y=2\operatorname{sh}1;\quad y(0)=y(1)=0.$

279. $y''-y=-2e^x;\quad y(0)=y'(0),\quad y(l)+y'(l)=0.$

280. $y''+y=x^2;\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

§ 22. Краевые задачи, содержащие параметр, и сведение их к интегральным уравнениям

Во многих вопросах приходится рассматривать краевую задачу вида

$$L[y] = \lambda y + h(x), \tag{1}$$

$$V_k(y) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где

$$L[y] \equiv p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_n(x) y(x),$$

$$V_k(y) \equiv \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + \cdots + \alpha_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(a) + \\ + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + \cdots + \beta_k^{(n-1)} y^{(n-1)}(b) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(линейные формы $V_1, V_2, \ldots, V_n$ являются линейно независимыми); $h(x)$ — заданная непрерывная функция от x; λ — некоторый числовой параметр.

При $h(x) \equiv 0$ получается однородная краевая задача

$$\left.\begin{aligned} &L[y] = \lambda y, \\ &V_k(y) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Те значения λ, для которых краевая задача (3) имеет нетривиальные решения $y(x)$, называются *собственными значениями краевой задачи* (3), а эти нетривиальные решения — соответствующими *собственными функциями*.

Теорема. *Если краевая задача*

$$\left.\begin{aligned} &L[y] = 0, \\ &V_k(y) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

имеет функцию Грина $G(x, \xi)$, то краевая задача (1) — (2) *эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма*

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) \, d\xi + f(x), \tag{5}$$

где

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) \, d\xi. \tag{6}$$

В частности, однородная краевая задача (3) эквивалентна однородному интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) \, d\xi. \tag{7}$$

Замечание. Так как $G(x, \xi)$ — непрерывное ядро, то к интегральному уравнению применима теория Фредгольма. Поэтому однородное интегральное уравнение (7) может иметь не более счетного числа характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, не имеющих конечной предельной точки. Для всех значений λ, отличных от характеристических, неоднородное уравнение (5) имеет решение при любой непрерывной правой части $f(x)$. Это решение задается формулой

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{8}$$

где $R(x, \xi; \lambda)$ — резольвента ядра $G(x, \xi)$. При этом для любых фиксированных значений x и ξ из $[a, b]$ функция $R(x, \xi; \lambda)$ является мероморфной функцией от λ, полюсами которой могут быть лишь характеристические числа однородного интегрального уравнения (7).

Пример. Свести следующую краевую задачу:

$$y'' + \lambda y = x, \tag{1}$$

$$y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2}$$

к интегральному уравнению.

Решение. Сначала найдем функцию Грина $G(x, \xi)$ для соответствующей однородной задачи:

$$\left.\begin{aligned} y''(x) &= 0, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Так как линейно независимыми решениями уравнения $y''(x) = 0$, удовлетворяющими условиям $y(0) = 0$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, соответственно являются функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x - \frac{\pi}{2}$, то функцию Грина ищем в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\[2mm] \dfrac{y_1(\xi)\, y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\pi}\xi-1\right)x, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ \left(\dfrac{2}{\pi}x-1\right)\xi, & \xi\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}\tag{4}$$

Далее, пользуясь функцией Грина (4) как ядром интегрального уравнения, получим для $y(x)$ следующее интегральное уравнение:

$$y(x)=f(x)-\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

где

$$f(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\,\xi\,d\xi=\int\limits_0^{x}\left(\frac{2x}{\pi}-1\right)\xi^2\,d\xi+$$
$$+\int\limits_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2\xi}{\pi}-1\right)x\xi\,d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x.$$

Итак, краевая задача (1) — (2) свелась к интегральному уравнению

$$y(x)+\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=\frac{1}{6}x^3-\frac{\pi^2}{24}x.$$

Свести к интегральным уравнениям следующие краевые задачи:

281. $y''=\lambda y+x^2;\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

282. $y''=\lambda y+e^x;\ y(0)=y(1)=0.$

283. $y''+\frac{\pi^2}{4}y=\lambda y+\cos\frac{\pi x}{2};\quad y(-1)=y(1),$
$y'(-1)=y'(1).$

284. $y''+\lambda y=2x+1;\ y(0)=y'(1),\ y'(0)=y(1).$

285. $y^{\mathrm{IV}}=\lambda y+1;\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(1)=$
$=y'''(1)=0.$

286. $y'''+\lambda y=2x;\quad y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=y'(1).$

287. $y''+\lambda y=e^x;\ y(0)=y'(0),\ y(1)=y'(1).$

§ 23. Сингулярные интегральные уравнения

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

будем называть *сингулярным*, если или интервал интегрирования (a, b) бесконечен, или ядро $K(x, t)$ неинтегрируемо (например, в смысле $L_2(\Omega)$).

Для сингулярных интегральных уравнений могут иметь место явления, не имеющие аналога в случае конечного интервала (a, b) и «хорошего» ядра $K(x, t)$ (непрерывного или из $L_2(\Omega)$).

Так, если ядро $K(x, t)$ непрерывно в Ω $\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$ и a и b конечны, то спектр интегрального уравнения, т. е. множество характеристических чисел, дискретен и каждому характеристическому числу отвечает не более чем конечное число линейно независимых собственных функций (характеристические числа имеют конечную кратность).

У сингулярных интегральных уравнений спектр может быть непрерывным, т. е. характеристические числа могут заполнять целые интервалы, и могут быть характеристические числа бесконечной кратности.

Покажем это на примерах.

Рассмотрим уравнение Лалеско — Пикара

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\,\varphi(t)\,dt. \tag{2}$$

Ядро этого уравнения $K(x, t) = e^{-|x-t|}$ обладает бесконечной нормой. В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x, t)\,dx\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|x-t|}\,dx\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dx.$$

Если функция $\varphi(x)$ дважды дифференцируема, то интегральное уравнение (2), которое можно записать в виде

$$\varphi(x) = \lambda\left[e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{t}\varphi(t)\,dt + e^{x}\int_{x}^{+\infty} e^{-t}\varphi(t)\,dt\right],$$

эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\,\varphi(x) = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{-rx} \tag{4}$$

(C_1, C_2 — произвольные постоянные), где

$$r = \sqrt{1 - 2\lambda}. \tag{5}$$

При этом для существования интеграла в правой части (2) необходимо, чтобы $|\operatorname{Re} r| < 1$, т. е. чтобы λ было больше нуля для действительных λ. Следовательно, в области действительных чисел спектр уравнения (2) заполняет бесконечный интервал $0 < \lambda < +\infty$. Каждая точка этого интервала является характеристическим числом уравнения (2) кратности 2. Однако соответствующие собственные функции не принадлежат классу $L_2(-\infty, +\infty)$.

При $\lambda > \frac{1}{2}$ собственными функциями, согласно (4), являются $\sin\sqrt{2\lambda - 1}\,x$, $\cos\sqrt{2\lambda - 1}\,x$; при $\lambda = \frac{1}{2}$ получаем $\varphi(x) = C_1 + C_2 x$. Таким образом, при $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ существуют ограниченные в $(-\infty, +\infty)$ собственные функции. Если же действительная часть $\sqrt{1-2\lambda}$ положительна и меньше единицы, то формула (4) при любом выборе постоянных C_1, C_2 $(C_1^2 + C_2^2 \neq 0)$ дает неограниченное на $(-\infty, +\infty)$ решение интегрального уравнения (2).

Из этого примера видна существенная роль класса функций, в котором ищется решение интегрального уравнения.

Так, если искать решение уравнения (2) в классе ограниченных функций, то, как мы видим, все значения $\lambda > \frac{1}{2}$ являются характеристическими.

Если же решение уравнения (2) ищется в классе функций $L_2(-\infty, +\infty)$, то при любом значении λ уравнение (2) имеет лишь тривиальное решение $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. для решений из $L_2(-\infty, +\infty)$ ни одно из значений λ не является характеристическим.

Пусть $F(x)$ — непрерывная, абсолютно интегрируемая на $[0, +\infty]$ функция, имеющая на любом конечном интервале оси OX конечное число максимумов и минимумов.

Построим косинус-преобразование Фурье этой функции:

$$F_1(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(x) \cos\lambda x\, dx.$$

Тогда

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_1(\lambda) \cos\lambda x\, d\lambda.$$

Складывая эти две формулы, получим

$$F_1(x) + F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} [F_1(t) + F(t)] \cos xt\, dt,$$

т. е. при любом выборе функции $F(x)$, удовлетворяющей указанным выше условиям, функция $\varphi(x) = F_1(x) + F(x)$ является собственной функцией интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt, \tag{6}$$

соответствующей характеристическому значению $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Так как $F(x)$ — произвольная функция, то, следовательно, при указанном значении λ уравнение (6) имеет бесконечно много линейно независимых собственных функций.

Эта особенность уравнения (6) связана с тем, что уравнение (6) сингулярное (промежуток интегрирования в (6) является бесконечным).

П р и м е р. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos xt\, dt \tag{7}$$

и возьмем

$$F(x) = e^{-ax} \qquad (a > 0).$$

Тогда

$$F_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at} \cos xt\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Далее,

$$\varphi(x) = F(x) + F_1(x) = e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2}. \tag{8}$$

Подставляя $\varphi(x)$ в уравнение (7), будем иметь

$$e^{-ax} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + x^2} = \lambda \left[\int_0^{\infty} e^{-at} \cos xt\, dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{a \cos xt}{a^2 + t^2}\, dt \right]. \tag{9}$$

Как уже отмечалось,

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos xt\, dt = \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Второй интеграл в правой части (9) можно найти, используя теорему Коши о вычетах:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}.$$

Таким образом, мы получаем из (9)

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\left[\frac{a}{a^2+x^2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ax}\right]. \tag{10}$$

Отсюда видно, что если $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, то функция

$$\varphi(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}\not\equiv 0$$

будет решением интегрального уравнения (7). Следовательно, $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ есть характеристическое число уравнения (7), а функция

$$\varphi(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2} \tag{8}$$

— соответствующая собственная функция, причем, поскольку $a>0$ — любое, характеристическому числу $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ соответствует бесконечное число линейно независимых собственных функций (8).

Аналогично можно показать, что уравнение (7) имеет характеристическое число $\lambda=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, которому соответствуют собственные функции

$$e^{-ax}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}\qquad (a>0).$$

288. Показать, что интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt$$

имеет характеристические числа $\lambda=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ бесконечной кратности, и найти соответствующие собственные функции.

289. Показать, что интегральное уравнение с ядром Ганкеля

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt$$

(где $J_\nu(z)$ — бесселева функция 1-го рода порядка ν)

имеет характеристические числа $\lambda = \pm 1$ бесконечной кратности, и найти соответствующие собственные функции.

290. Показать, что для интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} \varphi(t)\,dt$$

любое число λ, для которого одно из значений $\sqrt[n+1]{\lambda}$ имеет положительную действительную часть, является характеристическим числом.

291. Показать, что интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) \varphi(t)\,dt$$

имеет бесконечное множество характеристических чисел $\lambda = \xi + i\eta$, где точка (ξ, η) находится вне параболы $\xi + \eta^2 = 0$.

Решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с помощью теоремы Эфроса (обобщенной теоремы умножения).

Пусть

$$\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p),$$
$$u(x, \tau) \risingdotseq U(p)\, e^{-\tau q(p)},$$

где $U(p)$ и $q(p)$ — аналитические функции. Тогда

$$\Phi(q(p))\, U(p) \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\, u(x, \tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Это и есть обобщенная теорема умножения (теорема Эфроса). Если $u(x, \tau) = u(x - \tau)$, то $q(p) \equiv p$, и мы получаем обычную теорему умножения:

$$\Phi(p) \cdot U(p) \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\, u(x - \tau)\, d\tau.$$

Если $U(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, то

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\frac{\tau^2}{4x}}. \tag{2}$$

Поэтому если известно, что $\Phi(p) \fallingdotseq \varphi(x)$, то по теореме Эфроса находим оригинал для $\dfrac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-\frac{\tau^2}{4x}}\, d\tau. \tag{3}$$

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}}\, \varphi(t)\, dt = 1. \tag{4}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (4), получим, согласно формуле (3):

$$\frac{\Phi(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{p},$$

откуда

$$\frac{\Phi(p)}{p} = \frac{1}{p^2}, \quad \text{или} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq 1.$$

Следовательно, $\varphi(x) \equiv 1$ есть решение уравнения (4).

Решить следующие интегральные уравнения:

292. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = e^{-x}$.

293. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = 2x - \operatorname{sh} x$.

294. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{4x}} \varphi(t)\, dt = x^{\frac{3}{2}} + e^{4x}$.

Известно, что

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $J_n(z)$ — бесселева функция 1-го рода порядка n. В частности,

$$J_0(2\sqrt{t}) \risingdotseq \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}}$$

В силу теоремы подобия

$$J_0(2\sqrt{xt}) \risingdotseq \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{p}},$$

откуда видно, что для теоремы Эфроса следует взять в таком случае

$$q(p) \equiv \frac{1}{p}.$$

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = xe^{-x} + \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt \qquad (|\lambda| \neq 1). \tag{5}$$

Решение. Пусть $\varphi(x) \risingdotseq \Phi(p)$. Применяя к обеим частям (5) преобразование Лапласа и учитывая теорему Эфроса, найдем

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \lambda \frac{1}{p} \Phi\left(\frac{1}{p}\right). \tag{6}$$

Заменяя p на $\frac{1}{p}$, получим

$$\Phi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p \Phi(p). \tag{7}$$

Из (6) и (7) находим

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda}{p}\left[\frac{p^2}{(p+1)^2} + \lambda p \Phi(p)\right]$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{\lambda p}{(p+1)^2}\right].$$

Отсюда

$$\varphi(x) = e^{-x}\left(\frac{x}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right).$$

Решить следующие интегральные уравнения ($\lambda \neq \pm 1$):

295. $\varphi(x) = e^x + \lambda \int_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

296. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

297. $\varphi(x) = \cos x + \lambda \int\limits_0^\infty \frac{x}{t} J_2(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

298. $\varphi(x) = \sin x + \lambda \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{x}{t}}\, J_1(2\sqrt{xt})\,\varphi(t)\,dt.$

Решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с помощью преобразования Меллина.

Пусть функция $f(t)$ определена при положительных t и удовлетворяет условиям

$$\int\limits_0^1 |f(t)|\,t^{\sigma_1-1}\,dt < +\infty, \qquad \int\limits_1^\infty |f(t)|\,t^{\sigma_2-1}\,dt < +\infty \tag{1}$$

при надлежащем выборе чисел σ_1 и σ_2. *Преобразованием Меллина* функции $f(t)$ называется функция

$$F(s) = \int\limits_0^\infty f(t)\,t^{s-1}dt \qquad (s = \sigma + i\tau,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2).$$

Формула обращения преобразования Меллина имеет вид (2)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\,t^{-s}ds \qquad (t > 0, \quad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2), \tag{3}$$

где интеграл берется вдоль прямой l: $\operatorname{Re} s = \sigma$, параллельной мнимой оси плоскости s, и понимается в смысле главного значения. В случае, когда поведение функции $f(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$ известно, например из физических соображений, границы полосы (σ_1, σ_2) могут быть установлены из условий абсолютной сходимости интеграла (2). Если же поведение $f(t)$ известно лишь на одном конце интервала $(0, +\infty)$, например при $t \to 0$, то определяется только σ_1, прямая интегрирования l в (3) должна быть выбрана правее прямой $\sigma = \sigma_1$ и левее ближайшей особой точки функции $F(s)$.

Преобразование Меллина тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и многие теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем для преобразований Фурье и Лапласа путем замены переменных.

Теорема о свертке для преобразования Меллина имеет следующий вид:

$$M\left\{\int\limits_0^\infty f(t)\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\} = F(s)\cdot\Phi(s). \tag{4}$$

Отсюда можно заключить, что преобразование Меллина удобно применять при решении интегральных уравнений вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}. \tag{5}$$

В самом деле, пусть функции $\varphi(x)$, $f(x)$ и $K(x)$ допускают преобразование Меллина, и пусть $\varphi(x) \to \Phi(s)$, $f(x) \to F(s)$, $K(x) \to \widetilde{K}(s)$, причем области аналитичности $F(s)$ и $\widetilde{K}(s)$ имеют общую полосу $\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2$. Применяя к обеим частям уравнения (5) преобразование Меллина и используя теорему о свертке (4), получим

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s)\cdot\Phi(s), \tag{6}$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)} \quad (\widetilde{K}(s) \neq 1). \tag{7}$$

Это — операторное решение интегрального уравнения (5). По формуле обращения (3) находим решение $\varphi(x)$ этого уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\widetilde{K}(s)}x^{-s}\,ds. \tag{8}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t} \qquad (\alpha > 0). \tag{9}$$

Применим к обеим частям (9) преобразование Меллина. Имеем

$$M\{e^{-\alpha x}\} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{s-1}\,dx = \alpha^{-s}\int_0^\infty e^{-z}z^{s-1}\,dz = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} \equiv F(s),$$

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\} = \frac{1}{2}\Gamma(s) \equiv \widetilde{K}(s) \quad (\operatorname{Re} s > 0),$$

так что области аналитичности $F(s)$ и $\widetilde{K}(s)$ совпадают. Операторное уравнение, соответствующее уравнению (9), будет иметь вид

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s} + \frac{1}{2}\Gamma(s)\cdot\Phi(s), \tag{10}$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(s)}{\alpha^s\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(s)\right]}.$$

По формуле обращения (8) находим

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)}{1-\frac{1}{2}\Gamma(s)}\frac{ds}{(\alpha x)^s}\qquad(\sigma>0).\tag{11}$$

Интеграл (11) найдем с помощью интегральной формулы Коши.

При $\alpha x>1$ в контур интегрирования включаем полуокружность, лежащую в правой полуплоскости. В этом случае единственная особенность подинтегральной функции лежит в точке $s=3$, в которой

$$1-\frac{1}{2}\Gamma(s)=0.$$

Тогда

$$\varphi(x)=\frac{2}{(\alpha x)^3\psi(3)},\qquad \alpha x>1,$$

где $\psi(3)$ — логарифмическая производная Γ-функции в точке $s=3$:

$$\psi(3)=\frac{\Gamma'(3)}{\Gamma(3)}=\frac{3}{2}-\gamma$$

(γ — постоянная Эйлера).

При $\alpha x<1$ особенности подинтегральной функции суть отрицательные корни функции $1-\frac{1}{2}\Gamma(s)$, так что

$$\varphi(x)=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\psi(s_k)},\qquad \alpha x<1,$$

где $\psi(s_k)$ — значения логарифмической производной $\Gamma(s)$ в точках $s=s_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Итак,

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{(3-2\gamma)(\alpha x)^3}, & \alpha x>1,\\[2mm] -2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha x)^{s_k}\psi(s_k)}, & \alpha x<1.\end{cases}$$

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\infty}K(x\cdot t)\,\varphi(t)\,dt\tag{1}$$

(уравнение Фокса). Умножая обе части (1) на x^{s-1} и интегрируя по x

в пределах от 0 до ∞, получим

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, x^{s-1} dx = \int_0^\infty f(x)\, x^{s-1} dx + \int_0^\infty \varphi(t)\, dt \int_0^\infty K(x \cdot t)\, x^{s-1}\, dx.$$

Обозначая преобразование Меллина функций $\varphi(x)$, $f(x)$, $K(x)$ соответственно через $\Phi(s)$, $F(s)$, $\widetilde{K}(s)$, после несложных преобразований получим

$$\Phi(s) = F(s) + \widetilde{K}(s) \int_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s} dt. \tag{2}$$

Легко видеть, что $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\, t^{-s} dt = \Phi(1-s)$, так что (2) запишется в виде

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s)\, \widetilde{K}(s). \tag{3}$$

Заменяя в равенстве (3) s на $1-s$, получим

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s)\, \widetilde{K}(1-s). \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) находим

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s) + \Phi(s)\, \widetilde{K}(s)\, \widetilde{K}(1-s),$$

откуда

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s) \cdot \widetilde{K}(1-s)}. \tag{5}$$

Это — операторное решение уравнения (1).

По формуле обращения Меллина найдем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\, \widetilde{K}(s)}{1 - \widetilde{K}(s)\, \widetilde{K}(1-s)}\, x^{-s} ds \tag{6}$$

— решение интегрального уравнения (1).

Пример. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) \cos xt\, dt. \tag{7}$$

Решение. Имеем

$$\widetilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1} \cos x\, dx. \tag{8}$$

Для вычисления интеграла (8) воспользуемся тем, что

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx = \Gamma(z). \tag{9}$$

Поворачивая в формуле (9) луч интегрирования до мнимой оси, что в силу леммы Жордана возможно при $0 < z < 1$, приходим к формуле

$$\int_0^\infty e^{-ix} x^{z-1} dx = e^{-\frac{i\pi z}{2}} \Gamma(z).$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\int_0^\infty x^{z-1} \cos x \, dx = \cos \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z), \tag{10}$$

$$\int_0^\infty x^{z-1} \sin x \, dx = \sin \frac{\pi z}{2} \cdot \Gamma(z). \tag{11}$$

Таким образом, в силу (8) и (10)

$$\widetilde{K}(s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}. \tag{12}$$

Далее,

$$\widetilde{K}(s) \cdot \widetilde{K}(1-s) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\pi} 2 \cos \frac{\pi s}{2} \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \lambda^2,$$

так как $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$. Следовательно, если $M\{f(x)\} = F(s)$, то в силу формулы (5) (при $|\lambda| \neq 1$)

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s) \widetilde{K}(s)}{1-\lambda^2},$$

и потому

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i (1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[F(s) + F(1-s) \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \right] x^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) x^{-s} ds +$$

$$+ \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} F(1-s) x^{-s} ds. \tag{13}$$

Заменим во втором интеграле правой части (13) $F(1-s)$ на $\int_0^\infty f(t)\,t^{-s}\,dt$ и заметим, что $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\,x^{-s}\,ds = f(x)$. Тогда формула (13) перепишется так:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,(xt)^{-s}\,ds\int_0^\infty f(t)\,dt. \tag{14}$$

Согласно формуле обращения Меллина

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,(xt)^{-s}\,ds = \cos xt,$$

так что окончательно

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt.$$

Решить интегральные уравнения:

299. $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt.$

300. $\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\sin xt\,dt.$

301. $\varphi(x) = -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi(t)\cos xt\,dt.$

ГЛАВА III

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 24. Приближенные методы решения интегральных уравнений

1. Замена ядра вырожденным. Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

с произвольным ядром $K(x, t)$. Простота разыскания решения уравнения с вырожденным ядром (см. § 15), естественно, приводит к мысли о замене данного произвольного ядра $K(x, t)$ приближенно на вырожденное $L(x, t)$ и принятии решения $\widetilde{\varphi}(x)$ нового уравнения

$$\widetilde{\varphi}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b L(x, t)\,\widetilde{\varphi}(t)\,dt \tag{2}$$

в качестве приближения к решению исходного уравнения (1). В качестве вырожденного ядра $L(x, t)$, близкого к данному $K(x, t)$, можно брать отрезок ряда Тейлора для функции $K(x, t)$, отрезок ряда Фурье для $K(x, t)$ по любой полной ортонормированной в $L_2(a, b)$ системе функций $\{u_n(x)\}$ и т. д. Укажем некоторые оценки погрешностей в решении (1), возникающие от замены данного ядра на вырожденное.

Пусть даны два ядра $L(x, t)$ и $K(x, t)$ и известно, что

$$\int_a^b |K(x, t)-L(x, t)|\,dt<h$$

и что резольвента $R_L(x, t; \lambda)$ уравнения с ядром $L(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |R_L(x, t; \lambda)|\,dt<R,$$

а также что $|f(x) - f_1(x)| < \eta$. Тогда если выполнено условие

$$1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| R) > 0,$$

то уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) \, dt + f(x)$$

имеет единственное решение $\varphi(x)$ и разность между этим решением и решением $\tilde{\varphi}(x)$ уравнения

$$\tilde{\varphi}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b L(x, t) \tilde{\varphi}(t) \, dt$$

не превосходит

$$|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)| < \frac{N |\lambda| (1 + |\lambda| R)^2 h}{1 - |\lambda| h (1 + |\lambda| R)} + \eta, \tag{3}$$

где N — верхняя граница $|f(x)|$ (см. [8]).

Отметим, что для вырожденного ядра $L(x, t)$ резольвента $R_L(x, t; \lambda)$ находится просто (с точностью до вычисления интегралов), именно, если $L(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k(x) T_k(t)$, то, полагая

$$\int_a^b X_k(x) T_s(x) \, dx = a_{sk},$$

получаем

$$R_L(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{4}$$

где

$$D(x, t; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \dots & X_n(x) \\ T_1(t) & 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_n(t) & -\lambda a_{n1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Корни $D(\lambda)$ суть собственные значения ядра $L(x, t)$.

Приведем еще одну оценку ($\lambda = 1$). Пусть

$$K(x, t) = L(x, t) + \Lambda(x, t), \tag{7}$$

где $L(x, t)$ — вырожденное ядро, а $\Lambda(x, t)$ имеет малую норму в некоторой метрике. Пусть, далее, $R_K(x, t)$, $R_L(x, t)$ суть резольвенты ядер $K(x, t)$ и $L(x, t)$ соответственно и $\|\Lambda\|$, $\|R_K\|$, $\|R_L\|$ — нормы операторов с соответствующими ядрами. Тогда

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\Lambda\|(1 + \|R_K\|)(1 + \|R_L\|)\|f\|, \tag{8}$$

причем норма в формуле (8) может быть взята в любом функциональном пространстве. Для нормы резольвенты R любого ядра $K(x, t)$ справедлива оценка

$$\|R\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda| \cdot \|K\|}. \tag{9}$$

При этом в пространстве $C(0, 1)$ непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$

$$\|K\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \int_0^1 |K(x, t)|\,dt,$$

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|. \tag{10}$$

В пространстве функций, суммируемых с квадратом по $\Omega\{a \leqslant x, t \leqslant b\}$,

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)\,dx\,dt\right)^{1/2},$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Пример. Решить уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^1 (1 - x\cos xt)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

заменяя его ядро на вырожденное.

Решение. Разлагая в ряд ядро $K(x, t) = 1 - x\cos xt$, получим

$$K(x, t) = 1 - x + \frac{x^3t^2}{2} - \frac{x^5t^4}{24} + \ldots \tag{2}$$

Возьмем в качестве вырожденного ядра $L(x, t)$ первые три члена разложения (2):

$$L(x, t) = 1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}, \tag{3}$$

и будем решать новое уравнение

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3 t^2}{2}\right) \widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sin x + C_1 (1 - x) + C_2 x^3, \tag{5}$$

где

$$C_1 = \int_0^1 \widetilde{\varphi}(t)\, dt, \qquad C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^2 \widetilde{\varphi}(t)\, dt. \tag{6}$$

Подставляя (5) в (6), получим систему для определения C_1 и C_2.

Имеем:

$$C_1 = \int_0^1 [\sin t + C_1 (1 - t) + C_2 t^3]\, dt = \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{4} C_2 + 1 - \cos 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 [t^2 \sin t + C_1 (t^2 - t^3) + C_2 t^5]\, dt =$$

$$= \frac{1}{24} C_1 + \frac{1}{12} C_2 + \sin 1 - 1 + \frac{1}{2} \cos 1$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} C_1 - \frac{1}{4} C_2 &= 1 - \cos 1, \\ -\frac{1}{24} C_1 + \frac{11}{12} C_2 &= \sin 1 + \frac{1}{2} \cos 1 - 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Решая эту систему, найдем

$$C_1 = 1{,}0031, \qquad C_2 = 0{,}1674,$$

а тогда

$$\widetilde{\varphi}(x) = 1{,}0031\,(1 - x) + 0{,}1674 x^3 + \sin x.$$

Точное решение уравнения $\varphi(x) \equiv 1$.

Оценим теперь $\|\varphi - \widetilde{\varphi}\|$ по формуле

$$\|\varphi - \widetilde{\varphi}\| \leqslant \|\Lambda\| (1 + \|R_K\|)(1 + \|R_L\|) \|f\|. \tag{8}$$

В метрике пространства L_2 получим

$$\|\Lambda\| \leqslant \frac{1}{24}\left\{\int_0^1\int_0^1 x^{10}t^8\,dx\,dt\right\}^{1/2} = \frac{1}{72\sqrt{11}} < \frac{1}{238},$$

$$\|K\| \leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 (1 - x\cos xt)^2\,dx\,dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{2\cos 1 - \frac{1}{8}\cos 2 + \frac{1}{16}\sin 2 - \frac{5}{6}\right\}^{1/2} < \frac{3}{5},$$

$$\|L\| \leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^3t^2}{2}\right)^2 dx\,dt\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{5}{14}} < \frac{3}{5},$$

$$\|f\| = \left\{\int_0^1 \sin^2 x\,dx\right\}^{1/2} = \frac{\sqrt{2-\sin 2}}{2} < \frac{3}{5}.$$

Нормы резольвент R_K и R_L оценим по формулам

$$\|R_K\| \leqslant \frac{\|K\|}{1 - |\lambda|\cdot\|K\|}, \quad \|R_L\| \leqslant \frac{\|L\|}{1 - |\lambda|\cdot\|L\|},$$

где $|\lambda| = 1$. Значит, $\|R_K\| \leqslant \frac{3}{2}$, $\|R_L\| \leqslant \frac{3}{2}$, а тогда

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \frac{1}{238}\left(1 + \frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{3}{2}\right)\frac{3}{5} < 0{,}016.$$

Найти решение интегрального уравнения с помощью замены ядра вырожденным и дать оценку погрешности:

302. $\varphi(x) = e^x - x - \int_0^1 x(e^{xt} - 1)\varphi(t)\,dt.$

303. $\varphi(x) = x + \cos x + \int_0^1 x(\sin xt - 1)\varphi(t)\,dt.$

304. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + 3x - 1) + \int_0^1 (e^{-xt^2} - 1)\,x\varphi(t)\,dt.$

305. $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + \int_0^1 (1 - \cos xt^2)\,x\varphi(t)\,dt.$

2. Метод последовательных приближений. Метод последовательных приближений (метод итераций) состоит в следующем.

Имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{1}$$

Строим последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ с помощью рекуррентной формулы

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt. \tag{2}$$

Функции $\varphi_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения, причем нулевое приближение $\varphi_0(x)$ может быть выбрано произвольно.

При известных условиях

$$|\lambda|<\frac{1}{B},\quad B=\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,\ t)\,dx\,dt} \tag{3}$$

последовательность (2) сходится к решению уравнения (1). Величина погрешности $(m+1)$-го приближения определяется неравенством

$$|\varphi(x)-\varphi_{m+1}(x)|\leqslant F\cdot C_1\cdot B^{-1}\cdot\frac{|\lambda B|^{m+1}}{1-|\lambda B|}+\Phi C_1B^{-1}|\lambda B|^{m+1}, \tag{4}$$

где

$$F=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},\qquad \Phi=\sqrt{\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx},$$

$$C_1=\sqrt{\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int_a^b K^2(x,\ t)\,dt}.$$

Методом последовательных приближений решить уравнения:

306. $\varphi(x)=1+\int_0^1 xt^2\varphi(t)\,dt.$

307. $\varphi(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\,\varphi(t)\,dt.$

308. Найти третье приближение $\varphi_3(x)$ к решению интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 K(x, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t, \end{cases}$$

и оценить погрешность.

Отметим, что основная трудность применения метода последовательных приближений состоит в вычислении интегралов в формулах (2). Его, как правило, приходится производить при помощи формул приближенного интегрирования. Поэтому и здесь целесообразно заменить данное ядро вырожденным с помощью тейлоровского разложения, а затем уже ввести метод итераций.

3. Метод Бубнова — Галеркина. Приближенное решение интегрального уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{1}$$

по методу Бубнова — Галеркина ищется так. Выбираем систему функций $\{u_n(x)\}$, полную в $L_2(a, b)$ и такую, что при любом n функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$ линейно независимы, и ищем приближенное решение $\varphi_n(x)$ в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x). \tag{2}$$

Коэффициенты a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из следующей линейной системы:

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda\left(\int_a^b K(x, t)\,\varphi_n(t)\,dt,\ u_k(x)\right) \tag{3}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где (f, g) означает $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ и вместо $\varphi_n(x)$ надо подставить $\sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$. Если значение λ в (1) не является характеристическим, то при достаточно больших n система (3) однозначно разрешима и при $n \to \infty$ приближенное решение $\varphi_n(x)$ (2) стремится в метрике $L_2(a, b)$ к точному решению $\varphi(x)$ уравнения (1).

Пример. Методом Бубнова — Галеркина решить уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^{1} xt\,\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Решение. В качестве полной системы функций на $[-1, 1]$ выбираем систему полиномов Лежандра $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Приближенное решение $\varphi_n(x)$ уравнения (4) будем искать в виде

$$\varphi_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Подставляя $\varphi_3(x)$ вместо $\varphi(x)$ в уравнение (4), будем иметь

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt\left(a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2 - 1}{2}\right) dt$$

или

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2 - 1}{2} = x + x\,\frac{2}{3}\,a_2. \tag{5}$$

Умножая обе части (5) последовательно на 1, x, $\frac{3x^2 - 1}{2}$ и интегрируя по x в пределах от -1 до 1, найдем:

$$2a_1 = 0,$$
$$\frac{2}{3}\,a_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\,a_2,$$
$$\frac{2}{5}\,a_3 = 0.$$

Отсюда $a_1 = 0$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, и, значит, $\varphi_3(x) = 3x$. Нетрудно проверить, что это — точное решение уравнения (4).

Методом Бубнова — Галеркина решить следующие интегральные уравнения:

309. $\varphi(x) = 1 + \int_{-1}^{1} (xt + x^2)\,\varphi(t)\,dt.$

310. $\varphi(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \int\limits_{-1}^{1}(xt^2 - x)\varphi(t)\,dt.$

311. $\varphi(x) = 1 - x(e^x - e^{-x}) + \int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{xt}\varphi(t)\,dt.$

З а м е ч а н и е. Для вырожденных ядер метод Бубнова — Галеркина дает точное решение, а для общего случая он эквивалентен замене ядра $K(x, t)$ на вырожденное $L(x, t)$.

§ 25. Приближенные методы отыскания характеристических чисел

1. М е т о д Р и т ц а. Пусть имеем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt$$

с симметричным ядром $K(x, t) \equiv K(t, x)$.

Выберем последовательность функций $\{\psi_n(x)\}$, $\psi_n(x) \in L_2(a, b)$ такую, что система $\{\psi_n(x)\}$ полна в $L_2(a, b)$ и для любого n функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$. Полагаем

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_k(x), \tag{1}$$

причем коэффициенты a_k подчиним условию $\|\varphi_n\| = 1$ и при этом условии ищем стационарные значения квадратичной формы

$$(K\varphi_n, \varphi_n).$$

Приходим к однородной линейной системе относительно коэффициентов a_k (σ — множитель Лагранжа):

$$\sum_{k=1}^{n} \{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\}\, a_k = 0 \tag{2}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для существования ненулевого решения (2) определитель системы (2) должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & (K\psi_1, \psi_2) - \sigma(\psi_1, \psi_2) & \ldots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & (K\psi_2, \psi_2) - \sigma(\psi_2, \psi_2) & \ldots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & (K\psi_n, \psi_2) - \sigma(\psi_n, \psi_2) & \ldots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Корни уравнения (3) дают приближенные значения собственных чисел ядра $K(x, t)$. Наибольший из корней уравнения (1) дает приближенное значение наибольшего собственного числа с недостатком. Находя σ из (3) и подставляя в (2), ищем ненулевое решение a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) системы (2). Подставляя найденные значения a_k в (1), получаем приближенное выражение собственной функции, отвечающей найденному собственному значению.

Пример. Найти по методу Ритца приближенное значение наименьшего характеристического числа ядра

$$K(x, t) = xt; \quad a = 0, \quad b = 1.$$

Решение. В качестве координатной системы функций $\psi_n(x)$ выбираем систему полиномов Лежандра: $\psi_n(x) = P_n(2x-1)$. В формуле (1) ограничимся двумя слагаемыми, так что

$$\varphi_2(x) = a_1 \cdot P_0(2x-1) + a_2 \cdot P_1(2x-1).$$

Замечая, что

$$\psi_1 \equiv P_0(2x-1) = 1; \qquad \psi_2 \equiv P_1(2x-1) = 2x-1,$$

находим:

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1; \qquad (\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int_0^1 (2x-1)\, dx = 0;$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

Далее,

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x, t)\, \psi_1(t)\, dt \right) \psi_1(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^1 xt\, dx\, dt = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2x-1)\, dx\, dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xt\,(2t-1)(2x-1)\, dx\, dt = \frac{1}{36}.$$

Система (3) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\sigma^2-\sigma\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)=0.$$

Отсюда $\sigma_1=0$, $\sigma_2=\frac{1}{3}$. Наибольшее собственное значение $\sigma_2=\frac{1}{3}$, значит, наименьшее характеристическое число $\lambda=\frac{1}{\sigma_2}=3$.

По методу Ритца найти наименьшие характеристические числа ядер ($a=0$, $b=1$):

312. $K(x,t)=x^2t^2$.

313. $K(x,t)=\begin{cases} t, & x\geqslant t,\\ x, & x\leqslant t.\end{cases}$

314. $K(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x\leqslant t,\\ \frac{1}{2}t(2-x), & x\geqslant t.\end{cases}$

2. Метод следов. Назовем m-м следом ядра $K(x,t)$ число

$$A_m=\int_a^b K_m(t,t)\,dt,$$

где $K_m(x,t)$ означает m-е итерированное ядро.

Для наименьшего характеристического числа λ_1 при достаточно большом m справедлива следующая приближенная формула:

$$|\lambda_1|\approx\sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{1}$$

Формула (1) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Следы четного порядка для симметричного ядра вычисляются по формуле

$$A_{2m}=\int_a^b\int_a^b K_m^2(x,t)\,dx\,dt=2\int_a^b\int_a^x K_m^2(x,t)\,dt\,dx. \tag{2}$$

Пример. Найти по методу следов первое характеристическое число ядра

$$K(x,t)=\begin{cases} t, & x\geqslant t,\\ x, & x\leqslant t,\end{cases}\quad a=0,\qquad b=1.$$

Р е ш е н и е. Так как ядро $K(x, t)$ симметрично, то достаточно найти $K_2(x, t)$ только при $t < x$.

Имеем

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K(x, z)\,K(z, t)\,dz = \int_0^t z^2\,dz + \int_t^x zt\,dz + \int_x^1 xt\,dz = \\ = xt - \frac{x^2 t}{2} - \frac{t^3}{6}.$$

Далее, по формуле (2) для $m = 1$ и $m = 2$ соответственно находим:

$$A_2 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_1^2(x, t)\,dt = 2\int_0^1 dx \int_0^x t^2\,dt = 2\int_0^1 \frac{x^3}{3}\,dx = \frac{1}{6},$$

$$A_4 = 2\int_0^1 dx \int_0^x K_2^2(x, t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 dx \int_0^x \left(x^2t^2 + \frac{x^4t^2}{4} + \frac{t^6}{36} - x^3t^2 - \frac{xt^4}{3} + \frac{x^2t^4}{6}\right) dt =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{t^3x^2}{3} + \frac{t^3x^4}{12} + \frac{t^7}{7\cdot 36} - \frac{x^3t^3}{3} - \frac{xt^5}{15} + \frac{x^2t^5}{30}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{12} + \frac{x^7}{7\cdot 36} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^6}{15} + \frac{x^7}{30}\right) dx = \frac{17}{630}.$$

Тогда согласно формуле (1)

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{630}}} = 2{,}48.$$

Методом следов найти первое характеристическое число следующих ядер ($a = 0$, $b = 1$):

315. $K(x, t) = xt$.

316. $K(x, t) = x^2t^2$.

317. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t. \end{cases}$

318. $K(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{xt}\ln t, & x \leqslant t, \\ -\sqrt{xt}\ln x, & x \geqslant t. \end{cases}$

3. *Метод Келлога.* Пусть $K(x, t)$ — симметричное ядро, которое для определенности будем считать положительно определенным, и пусть $\omega(x)$ — произвольная функция из $L_2(a, b)$. Строим последовательность функций

$$\left.\begin{aligned} \omega_1(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega(t)\,dt, \\ \omega_2(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega_1(t)\,dt, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \omega_n(x) &= \int_a^b K(x, t)\,\omega_{n-1}(t)\,dt \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

и рассматриваем числовую последовательность

$$\left\{\frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}\right\}. \tag{2}$$

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... — ортонормированные собственные функции ядра $K(x, t)$ и $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$ — соответствующие характеристические числа. Пусть, далее, функция $\omega(x)$ ортогональна к функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{k-1}(x)$, но не ортогональна к собственной функции $\varphi_k(x)$. Тогда последовательность (2) имеет своим пределом k-е характеристическое число λ_k.

Последовательность функций $\left\{\dfrac{\omega_n(x)}{\|\omega_n(x)\|}\right\}$ *сходится* в этом случае к некоторой функции, являющейся линейной комбинацией собственных функций, отвечающей характеристическому числу λ_k. К тому же пределу, что и последовательность (2), сходится последовательность

$$\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}\right\}. \tag{3}$$

Если $(\omega, \varphi_1) \neq 0$, получаем две приближенные формулы для наименьшего характеристического числа:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\omega_{n-1}\|}{\|\omega_n\|}, \tag{4}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt[n]{\|\omega_n\|}}, \tag{5}$$

причем формула (4) дает значение λ_1 с избытком. Если ядро $K(x, t)$ не является положительно определенным, то формулы (4), (5) дают приближенное значение наименьшей абсолютной величины характеристического числа данного ядра. При удачном выборе $\omega(x)$ метод Келлога сравнительно прост для вычислений.

Недостаток метода в том, что заранее не известно, какое из характеристических чисел удалось определить.

Пример. По методу Келлога вычислить наименьшее характеристическое число ядра $K(x, t) = x^2t^2$, $0 \leqslant x, t \leqslant 1$.

Решение. Возьмем $\omega(x) = x$. Тогда

$$\omega_1(x) = \int_0^1 x^2t^2t\,dt = \frac{x^2}{4},$$

$$\omega_2(x) = \int_0^1 x^2\frac{t^4}{4}\,dt = \frac{1}{4}x^2\cdot\frac{1}{5},$$

$$\omega_3(x) = \int_0^1 \frac{1}{4\cdot 5}x^2t^4\,dt = \frac{1}{4\cdot 5^2}x^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega_n(x) = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}x^2.$$

Далее,

$$\|\omega_n(x)\| = \frac{1}{4}\,\frac{1}{5^{n-1}}\sqrt{\int_0^1 x^4\,dx} = \frac{1}{4\cdot 5^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом, согласно (4)

$$\lambda_1 \approx \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = 5.$$

По методу Келлога найти наименьшие характеристические числа следующих ядер:

319. $K(x, t) = xt;\quad 0 \leqslant x,\ t \leqslant 1.$

320. $K(x, t) = \sin x \sin t;\quad -\pi \leqslant x,\ t \leqslant \pi.$

321. $K(x, t) = \begin{cases} t, & x \geqslant t, \\ x, & x \leqslant t; \end{cases}\quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1.$

322. $K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geqslant t; \end{cases}\quad 0 \leqslant x, t \leqslant 1.$

ОТВЕТЫ

9. $\varphi(x) = -x + \int\limits_0^x (t - x)\,\varphi(t)\,dt$. 10. $\varphi(x) = 1 + \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$.

11. $\varphi(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt$.

12. $\varphi(x) = 5 - 6x + \int\limits_0^x [5 - 6(x - t)]\,\varphi(t)\,dt$.

13. $\varphi(x) = \cos x - x - \int\limits_0^x (x - t)\,\varphi(t)\,dt$.

14. $\varphi(x) = x - \sin x + e^x(x - 1) + \int\limits_0^x [\sin x - e^x(x - t)]\,\varphi(t)\,dt$.

15. $\varphi(x) = \cos x - 2x(1 + x^2) - \int\limits_0^x (1 + x^2)(x - t)\,\varphi(t)\,dt$.

16. $\varphi(x) = xe^x + 1 - x(x^2 - 1) - \int\limits_0^x \left[x + \frac{1}{2}(x^2 - x)(x - t)^2\right]\varphi(t)\,dt$.

17. $\varphi(x) = x(x + 1)^2 + \int\limits_0^x x(x - t)^2\,\varphi(t)\,dt$.

19. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{\lambda}(x - t)\ (\lambda > 0)$. 20. $e^{(1+\lambda)(x-t)}$. 21. $e^{\lambda(x-t)}\,e^{x^2-t^2}$.

22. $\frac{1 + x^2}{1 + t^2}\,e^{\lambda(x-t)}$. 23. $\frac{2 + \cos x}{2 + \cos t}\,e^{\lambda(x-t)}$. 24. $\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,t}\,e^{\lambda(x-t)}$.

25. $a^{x-t}\,e^{\lambda(x-t)}$. 26. $e^{x-t}(x - t + 2)$. 27. $\frac{1}{4}\,e^{x-t} - \frac{9}{4}\,e^{-3(x-t)}$.

28. $2xe^{x^2-t^2}$. 29. $\frac{4t^2+1}{2(2t+1)^2}\left[\frac{8}{4t^2+1}-4e^{-2(x-t)}\right]$; одно из решений соответствующего дифференциального уравнения $y_1(x)=e^{-2x}$.

31. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}(x-t)$. 32. 1. 33. $(x-t)e^{-(x-t)}$.

34. $e^{\frac{x-t}{2}}\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}(x-t)\right]$.

35. $2e^{x-t}(1+x-t)$. 36. $\varphi(x)=e^{2x}$.

37. $\varphi(x)=\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$. 38. $\varphi(x)=3^x(1-e^{-x})$.

39. $\varphi(x)=e^x\sin x+(2+\cos x)e^x\ln\frac{3}{2+\cos x}$.

40. $\varphi(x)=e^{x^2-x}-2x$. 41. $\varphi(x)=e^{x^2+2x}(1+2x)$.

42. $\varphi(x)=e^x(1+x^2)$.

43. $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

44. $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x+1)-1$. 45. $\varphi(x)=e^{-x}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$.

46. $\varphi(x)=\sin x$. 47. $\varphi(x)=\cos x$. 48. $\varphi(x)=\operatorname{ch}x$.

49. $\varphi(x)=1$ 50. $\varphi(x)=x$. 51. $\varphi(x)=e^x$. 52. $\varphi(x)=2$.

53. $\varphi(x)=2$. 54. $\varphi(x)=x^2-2x$. 56. $\varphi(x)\equiv 0$.

57. $\varphi_2(x)=1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{24}x^4+\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{18}x^6+\frac{1}{63}x^7$.

58. $\varphi_3(x)=-x+\frac{x^4}{4}-\frac{x^7}{14}+\frac{x^{10}}{160}$. 59. $\varphi(x)=1$.

60. $\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2}$. 61. $\varphi(x)=\frac{1}{2}(3e^{2x}-1)$.

62. $\varphi(x)=\sin x$. 63. $\varphi(x)=\frac{1}{3}(2\cos\sqrt{3}x+1)$.

64. $\varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2x}$. 65. $\varphi(x)=x+\frac{x^3}{6}$.

66. $\varphi(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\operatorname{sh}x$. 67. $\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6}$.

68. $\varphi(x)=x$. 69. $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

70. $\varphi(x)=1+2xe^x$. 71. $\varphi(x)=e^x(1+x)^2$.

72. $\varphi(x)=e^x+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. 73. $\varphi_1(x)=\sin x;\ \varphi_2(x)=0$.

74. $\varphi_1(x)=3e^x-2;\quad \varphi_2(x)=3e^x-2e^{2x}$.

75. $\varphi_1(x)=e^{2x};\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(1-e^{2x})$.

76. $\begin{cases}\varphi_1(x)=(x+2)\sin x+(2x+1)\cos x;\\ \varphi_2(x)=\frac{1}{2}x\cos x-x\sin x+\frac{1}{2}\sin x.\end{cases}$

77. $\varphi_1(x)=2\sin x;\quad \varphi_2(x)=2\cos x-1;\quad \varphi_3(x)=x$.

78. $\varphi_1(x)=\cos x;\quad \varphi_2(x)=\sin x;\quad \varphi_3(x)=\sin x+\cos x$.

79. $\begin{cases}\varphi_1(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos x+\frac{1}{2}\sin x;\\ \varphi_2(x)=1-x+\frac{1}{2}\sin x-\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos x;\\ \varphi_3(x)=\cos x-1+\left(1+\frac{x}{2}\right)\sin x.\end{cases}$

80. $\varphi(x)=e^x-1$. 81. $\varphi(x)=-e^x$.

82. $\varphi(x)=\frac{1}{2}x\sin x$. 83. $\varphi(x)=1-e^{-x}-xe^{-x}$.

84. $\varphi(x)=1-\cos x$. 85. $\varphi(x)=1-x+2(\sin x-\cos x)$.

86. $\varphi(x)=e^{-x}-xe^{-x}$. 87. $\varphi(x)=c+2e^{-x}$.

88. $\varphi(x)=\cos x-\sin x$. 89. $\varphi(x)=\frac{\alpha}{\alpha-1}-\frac{e^{(\alpha-1)x}}{\alpha-1}$.

90. $\varphi(x)=\cos x-\sin x$. 91. $\varphi(x)=1-x\ln 3$.

92. $\varphi(x)=f'(x)-f(x)\ln a$. 93. $\varphi(x)=xe^{x^2}$.

94. $\varphi(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$. 95. $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(x^2+2)-1$.

104. $I=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}$. 106. $\varphi(x)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$.

107. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{x-t}}\,dt$.

108. $\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\left(x^{-\frac{1}{2}}+e^x\int_0^x e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt\right)$. 109. $\varphi(x)=\frac{1}{2}$.

110. $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{2\pi^2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)$, где

$$g(x, y) = \iint\limits_{D_1} \frac{f(u, v)\,du\,dv}{\sqrt{(y-v)^2 - (x-u)^2}}$$

и D_1 — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной в точке (x, y) и гипотенузой на оси Ou плоскости UOV.

111. $\varphi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} - \dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}\,x^{2/3}$. **112.** $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

113. $\varphi(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\left[\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)x^{1/4}} - \dfrac{2}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\,x^{3/4}\right]$. **114.** $\varphi(x) = 3$.

115. $\varphi(x) = \sin x$. **116.** $\varphi(x) = 1$. **117.** $\varphi(x) = e^{-x}$.

118. $\varphi(x) = \dfrac{15}{4}\,x$. **119.** $\varphi(x) = \cos x - 2\sin x$.

120. $\varphi(x) = 2x - x^2$. **121.** $\varphi(x) = 2\sin x$.

122. $\varphi(x) = 3!\,(xe^{-x} - x^2 e^{-x})$. **123.** $\varphi(x) = J_0(x)$.

124. $\varphi(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$. **125.** $\varphi(x) = 1 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

126. Имеем $x^2 - t^2 = x^2 - 2xt + t^2 + 2xt - 2t^2 = (x-t)^2 + 2t(x-t)$. Поэтому

$$\frac{x^3}{3} = \int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt + 2\int_0^x t(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Переходя к изображениям и применяя теорему умножения и теорему дифференцирования изображения, в силу которой $t\varphi(t) \risingdotseq -\Phi'(p)$, получим

$$\frac{2}{p^4} = \frac{2}{p^3}\Phi(p) - \frac{2}{p^2}\Phi'(p)$$

или

$$\Phi'(p) = \frac{1}{p}\Phi(p) - \frac{1}{p^2}.$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\Phi(p) = C\cdot p + \frac{1}{2p}.$$

В силу того что $\Phi(p)$ есть функция-изображение, должно $\Phi(p) \to 0$ при $p \to \infty$, так что $C = 0$, и, значит, $\Phi(p) = \frac{1}{2p}$, откуда $\varphi(x) = \frac{1}{2}$.

127. $\varphi(x) = C - x$. 128. $\varphi(x) = C + J_0(2\sqrt{x})$. 129. $\varphi(x) = C + x$.
130. $\varphi(x) = 2 + \delta(x) - \delta'(x)$. 131. $\varphi(x) = \delta(x) - \sin x$.
132. $\varphi(x) = \delta(x) + 3$. 133. $\varphi(x) = 1 + x + \delta(x) + \delta'(x)$.
134. $\varphi(x) = 1$. 135. $\varphi(x) = J_1(x)$.

136. $\varphi(x) = -I_1(x)$, $I_1(x)$ — модифицированная бесселева функция I-го рода. В задачах 141, 142 указанные функции не являются решениями соответствующих интегральных уравнений, а в задачах 137—140, 143—145 указанные функции — решения.

146. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{2x - t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3}\right)\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}$.

147. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{x^2 t - xt^2 + xt\left(\frac{x+t}{4} - \frac{xt}{3} + \frac{1}{5}\right)\lambda}{1 + \frac{\lambda^2}{240}}$.

148. $R(x, t; \lambda) = \sin x \cos t$.

149. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{\sin x - \sin t - \pi(1 + 2\sin x \sin t)\lambda}{1 + 2\pi^2\lambda^2}$.

150. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{x + t + 1 + 2\left(xt + \frac{1}{3}\right)\lambda}{1 - 2\lambda - \frac{4}{3}\lambda^2}$.

151. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{1 + 3xt + \left(3\frac{x+t}{2} - 3xt - 1\right)\lambda}{1 - 2\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2}$.

152. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{4xt - x^2 - \left(2x^2t - \frac{4}{3}x^2 + x - \frac{4}{3}xt\right)\lambda}{1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{18}}$.

153. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{e^{x-t}}{1-\lambda}$.

154. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{\sin(x+t) - \pi\lambda\cos(x-t)}{1 + \pi^2\lambda^2}$.

155. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{x - \operatorname{sh} t - 2(e^{-1} + x \operatorname{sh} t)\lambda}{1 + 4e^{-1}\lambda^2}$.

156. $\varphi(x) = 1$.

157. $\varphi(x) = \frac{1}{6}\left[x + \frac{(6x-2)\lambda - \lambda^2}{\lambda^2 - 3\lambda + 6}\right]$.

158. $\varphi(x) = \cos 2x$.

159. $\varphi(x) = \frac{e^{-x} + 2\lambda \operatorname{sh} x}{1-\lambda} \qquad (\lambda \neq 1)$.

160. $\varphi(x) = \frac{3x(2\lambda - 3\lambda x + 6)}{\lambda^2 - 18\lambda + 18}$.

161. $K_{2n-1}(x, t) = \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}(x-t), \quad K_{2n}(x, t) =$
$= 2(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\left(xt + \frac{1}{3}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

162. $K_2(x, t) = \frac{\sin(x+t)}{2} - \frac{\pi}{4}\cos(x-t)$,
$$K_3(x, t) = \frac{4-\pi}{16}\sin(x-t).$$

163. $K_2(x, t) = \frac{2}{3}(x+t)^2 + 2x^2t^2 + \frac{4}{3}xt + \frac{2}{5}$,
$K_3(x, t) = \frac{56}{45}(x^2+t^2) + \frac{8}{3}x^2t^2 - 4xt + \frac{8}{15}$.

164. $K_{2n-1}(x, t) = (2\pi)^{2n-2}(x + \sin t)$,
$K_{2n}(x, t) = (2\pi)^{2n-1}(1 + x\sin t) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

165. $K_n(x, t) = xe^t$.

166. $K_n(x, t) = \left(\frac{e^2+1}{2}\right)^{n-1} e^x \cos t$.

167. $K_2(x, t) = \begin{cases} \frac{e^{x+t} + e^{2-x-t}}{2} + (t-x-1)e^{t-x}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \frac{e^{x+t} + e^{2-x-t}}{2} + (x-t-1)e^{x-t}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

168. $K_2(x, t) = \begin{cases} \frac{e^2+1}{2}e^{t-x}, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{e^2+1}{2}e^{t+x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

169. $R(x, t; \lambda) = \frac{2e^{x+t}}{2-(e^2-1)\lambda}; \quad |\lambda| < \frac{2}{e^2-1}$.

170. $R(x, t; \lambda) = \frac{2\sin x\cos t}{2-\lambda}; \quad |\lambda| < 2$.

171. $R(x, t; \lambda) = \frac{xe^{t+1}}{e-2\lambda}; \quad |\lambda| < \frac{e}{2}$.

172. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \dfrac{3}{2}$.

173. $R(x; t; \lambda) = \dfrac{5x^2t^2}{5-2\lambda}$; $|\lambda| < \dfrac{5}{2}$.

174. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{3xt}{3-2\lambda}$; $|\lambda| < \dfrac{3}{2}$.

175. $R(x, t; \lambda) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$.

176. $R(x, t; \lambda) = \dfrac{1}{1-\lambda} + \dfrac{3(2x-1)(2t-1)}{3-\lambda}$; $|\lambda| < 1$.

180. $\varphi(x) = \dfrac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x + 2x - \pi$.

181. $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

182. $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}\lambda + \operatorname{ctg} x$.

183. $\varphi(x) = \dfrac{1+q^2}{1+q^2-\lambda}$.

184. $\varphi(x) = \dfrac{\pi^2\lambda}{4(\lambda-1)} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

185. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1-\lambda\Gamma(p+1)}$.

186. $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda^2 x + \left(\dfrac{\lambda^2}{4}+\lambda\right)\ln x}{1+\dfrac{29}{48}\lambda^2} + \dfrac{6}{5}(1-4x)$.

187. $\varphi(x) = \dfrac{2}{2-\lambda}\sin x$; $\lambda \neq 2$.

188. $\varphi(x) = \lambda\pi^3 \sin x + x$. 189. $\varphi(x) = 2\,\dfrac{2\sin x - \pi\lambda\cos x}{4+\pi^2\lambda^2}$.

190. $\varphi(x) = \lambda\pi\sin x + \cos x$. 191. $\varphi(x) = \dfrac{15}{32}(x+1)^2 + \dfrac{5}{16}$.

192. $\varphi_1(x) \equiv 0$; $\varphi_{2,3}(x) = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\,x$.

193. $\varphi_1(x) \equiv 0$; $\varphi_2(x) = \dfrac{7}{2}x$; $\varphi_{3,4}(x) = \pm\dfrac{15}{4\sqrt{7}}x + \dfrac{5}{4}x^2$.

194. $\varphi_1(x) \equiv 0$; $\varphi_{2,3}(x) = \pm 3x^2$. 195. $\varphi(x) \equiv 0$.

196. Решений не имеет. 198. $\lambda_1 = \dfrac{8}{\pi-2}$, $\varphi_1(x) = \sin^2 x$.

199. Нет. 200. $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pi}$; $\varphi_1(x) = \sin x$.

201. $\lambda_1 = -\frac{2}{\pi}$, $\lambda_2 = \frac{2}{\pi}$; $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$.

202. Действительных характеристических чисел и собственых функций нет.

203. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$; $\varphi(x) = C_1 x + C_2 x^2$.

204. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $\varphi_1(x) = \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}x^2$.

205. $\lambda_1 = \frac{1}{4}$; $\varphi_1(x) = \frac{3}{2}x + x^2$.

206. $\lambda_1 = e$; $\varphi_1(x) = \operatorname{sh} x$. 207. Нет.

208. Действительных характеристических чисел и собственных функций нет.

209. $\lambda_n = -n^2\pi^2$; $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

210. $\lambda_0 = 1$; $\varphi_0(x) = e^x$; $\lambda_n = -n^2\pi^2$; $\varphi_n(x) = \sin n\pi x + n\pi \cos n\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

211. $\lambda_n = -\frac{1}{3}\mu_n^2$; $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, где μ_n — корень уравнения, $\mu - \frac{1}{\mu} = 2\operatorname{ctg}\mu$.

212. $\lambda_n = 4n^2 - 1$; $\varphi_n(x) = \sin 2nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

213. $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1$; $\varphi_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x$.

214. $\lambda_n = \frac{1 - \mu_n^2}{\sin 1}$, $\varphi_n(x) = \frac{\sin \mu_n(\pi + x)}{\cos \pi\mu_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где μ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\pi\mu = -\mu \operatorname{tg} 1$.

215. $\lambda_n = 1 - \mu_n^2$; $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\pi\mu = \mu - \frac{1}{\mu}$.

216. $\lambda_n = \frac{1 + \mu_n^2}{2}$; $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x + \mu_n \cos \mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $2\operatorname{ctg}\mu = \mu - \frac{1}{\mu}$.

217. $\lambda_n = 1 - \mu_n^2$; $\varphi_n(x) = \sin \mu_n x$, где μ_n — корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$ $(\mu > 0)$.

221. а) $\frac{\pi^2}{4} - 2$; б) $\frac{\pi^4}{96} - 1$; в) $\frac{1 + e^{-2}}{2}$.

222. $\varphi_1(x) = 1$; $\varphi_2(x) = 2x - 1$. 223. $\varphi_1(x) = x$; $\varphi_2(x) = x^2$.

224. $\varphi_1(x)=1;\quad \varphi_2(x)=x;\quad \varphi_3(x)=3x^2-1.$

225. $\lambda_0=\frac{1}{\pi},\qquad \varphi_0(x)=1;\quad \lambda_1=\frac{2}{\pi},\qquad \varphi_1^{(1)}(x)=\cos 2x,$ $\varphi_1^{(2)}(x)=\sin 2x.$

227. $\lambda_0=\frac{3}{2\pi^3},\quad \varphi_0(x)=1;\quad \lambda_n=(-1)^n\frac{n^2}{4\pi},\quad \varphi_n^{(1)}(x)=\cos nx,$

$\varphi_n^{(2)}(x)=\sin nx\quad (n=1, 2, \ldots).$

228. а) $\frac{1}{3}$; $\quad \varphi(x)=\pm\sqrt{3}x;\quad$ б) $\frac{2}{3}$; $\quad \varphi(x)=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}x;$

в) 1; $\varphi(x)=\pm\sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^x.\qquad$ 229. $\lambda=3.$

230. Точек бифуркации нет.

$$231.\ \varphi(x)=\begin{cases} C\cdot\sin x, & \lambda=-\frac{2}{\pi},\\ C\cdot\cos x, & \lambda=\frac{2}{\pi},\\ 0, & \lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}.\end{cases}$$

$$232.\ \varphi(x)=\begin{cases} C\cdot\arccos x, & \lambda=1,\\ 0, & \lambda\neq 1.\end{cases}\qquad 233.\ \varphi(x)=C.$$

234. $\varphi(x)=C|x|.\qquad$ 235. $\varphi(x)=C(x-x^2).$

236. $\varphi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}.\qquad$ 237. $\varphi(x)=x-1+e^x.$

$$238.\ \varphi(x)=\frac{2\mu\cos\frac{\mu}{2}\cos\mu\left(x-\frac{1}{2}\right)-\sin\mu x}{\mu(\mu\sin\mu-1)},$$

где $\mu=\sqrt{2\lambda},\quad \mu(\mu\sin\mu-1)\neq 0.\qquad$ 239. $\varphi(x)=2\sin 2x-\cos x.$

$$240.\ \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{\lambda+1}(\pi-x)}{\cos\pi\sqrt{\lambda+1}}, & \lambda\geqslant-1,\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-\lambda-1}(\pi-x)}{\operatorname{sh}\pi\sqrt{-\lambda-1}}, & \lambda<-1.\end{cases}$$

241. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{3(\operatorname{sh}\mu+\mu\operatorname{ch}\mu x)+\operatorname{sh}\mu(x-1)-2\mu\operatorname{ch}\mu(x-1)}{(1+2\mu^2)\operatorname{sh}\mu+3\mu\operatorname{ch}\mu}, & \lambda>0\quad(\mu=2\sqrt{\lambda}),\\[2ex] \dfrac{3(\sin\mu+\mu\cos\mu x)+\sin\mu(x-1)-2\mu\cos\mu(x-1)}{(1-2\mu^2)\sin\mu+3\mu\cos\mu}, & \lambda<0\quad(\mu=2\sqrt{-\lambda}).\end{cases}$$

242. $\varphi(x)=(\pi-x)^2$. **243.** $\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}+\pi\right)x+1$.

244. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu+2\operatorname{sh}\mu-2\mu\operatorname{ch}\mu\operatorname{cth}2}{\mu^3(\operatorname{ch}\mu-\mu\operatorname{sh}\mu\operatorname{cth}2)}\operatorname{ch}\mu x-\dfrac{2}{\mu^3}\operatorname{sh}\mu x+\\ \qquad+\dfrac{2x-1}{\mu^2},\quad \text{если } \mu=\sqrt{\lambda+1},\ \lambda>-1,\\[2ex] \dfrac{-\mu-2\sin\mu+2\mu\cos\mu\operatorname{cth}2}{\mu^3(\cos\mu+\mu\sin\mu\operatorname{cth}2}\cos\mu x+\dfrac{2}{\mu^3}\sin\mu x+\\ \qquad+\dfrac{1-2x}{\mu^2},\quad \text{если } \mu=\sqrt{-(\lambda+1)},\quad \lambda<-1,\\[2ex] \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{6},\quad \text{если } \lambda=-1.\end{cases}$$

245. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{ch}\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2}\right)}, & \text{если } \mu=2\sqrt{\lambda},\ \lambda>0,\\[3ex] \dfrac{\cos\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\mu\pi}{2}+\frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)}, & \text{если } \mu=2\sqrt{-\lambda},\ \lambda<0.\end{cases}$$

$\varphi(x)\equiv 1$, если $\lambda=0$; μ не является корнем уравнений

$$\operatorname{ch}\frac{\mu\pi}{2}-\frac{\mu\pi}{2}\operatorname{sh}\frac{\mu\pi}{2}=0,$$

$$\cos\frac{\mu\pi}{2}+\frac{\mu\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}=0.$$

246. $\varphi(x)=1+\dfrac{2\lambda}{2-\pi\lambda}\cos^2 x$, $\lambda\neq\dfrac{2}{\pi}$. При $\lambda=\dfrac{2}{\pi}$ решений нет.

247. $\varphi(x)=\dfrac{e}{e-2\lambda}x$, $\lambda\neq\dfrac{e}{2}$. При $\lambda=\dfrac{e}{2}$ решений нет.

248. $\varphi(x)=x+\frac{2\pi^2\lambda}{1-\pi^2\lambda}|x-\pi|,\qquad \lambda\neq\frac{1}{\pi^2}$. При $\lambda=\frac{1}{\pi^2}$ решений нет.

249. $\varphi(x)=\frac{3x(2\lambda^2x-2\lambda^2-5\lambda-18)+(\lambda+3)^2}{(\lambda+3)^2},\quad \lambda\neq-3$.

При $\lambda=-3$ решений нет.

250. $$\varphi(x)=\begin{cases}x^3-\frac{3}{5}\frac{4\lambda+5}{4\lambda+3}x, & \text{если } \lambda\neq\frac{3}{2},\ \lambda\neq-\frac{3}{4},\\ x^3-\frac{41}{45}x+Cx^2, & \text{если } \lambda=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

При $\lambda=-\frac{3}{4}$ решений нет.

251. $$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } \lambda\neq1,\\ C_1\cos x+C_2\sin 2x+\sin x, & \text{если } \lambda=1.\end{cases}$$

252. $\varphi(x)=1,\qquad$ если $\lambda=-1;\qquad \varphi(x)=\frac{\operatorname{ch}\mu x}{\operatorname{ch}\mu-\mu\operatorname{sh}\mu\operatorname{th}1}$, если $\lambda=\mu^2-1$, где μ не является корнем уравнения $\operatorname{ch}\mu=\mu\operatorname{sh}\mu\operatorname{th}1;\qquad \varphi(x)=\frac{\cos\mu x}{\cos\mu+\mu\sin\mu\operatorname{th}1}$, если $\lambda=-(\mu^2+1)$, где μ не является корнем уравнения $\cos\mu+\mu\sin\mu\operatorname{th}1=0$. В остальных случаях решений нет.

253. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi-1+(\xi-2)x, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ (\xi-1)x-1, & \xi\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$$

254. Очевидно, что уравнение $y''(x)=0$ при условиях $y(0)=y(1)$, $y'(0)=y'(1)$ имеет бесчисленное множество решений $y(x)=C$. Поэтому *функции Грина для этой краевой задачи не существует.*

255. Функции Грина не существует.

256. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$$

257. $$G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{x(\xi-1)}{2}(x-x\xi+2\xi), & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\ \frac{\xi}{2}[x(2-x)(\xi-2)+\xi], & \xi\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$$

$$258.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x(x-\xi)(\xi-1)}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\dfrac{\xi(\xi-x)(x-1)}{2}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

259. Функции Грина не существует. 260. Функции Грина не существует.

$$261.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} k(\xi-1)\operatorname{sh} kx}{k \operatorname{sh} k}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\operatorname{sh} k\xi \operatorname{sh} k(x-1)}{k \operatorname{sh} k}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$262.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos\left(x-\xi+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\cos\left(\xi-x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

263. Функции Грина не существует.

$$264.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(hx+1)[H(\xi-1)-1]}{h+H+hH}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{(h\xi+1)[H(x-1)-1]}{h+H+hH}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$265.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \alpha+1-\dfrac{1}{\xi}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \alpha+1-\dfrac{1}{x}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$266.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \xi-\ln\xi-1-\dfrac{x(\xi-1)^2}{2\xi}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ x-\ln x-1-\dfrac{\xi(x-1)^2}{2x}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$267.\ G(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{1}{\xi^2}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

268. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{\xi}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

269. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2n}\left[(x\xi)^n - \left(\frac{x}{\xi}\right)^n\right], & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{1}{2n}\left[(x\xi)^n - \left(\frac{\xi}{x}\right)^n\right], & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

270. $$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{x \ln \xi}{\xi^2 (\ln \xi - 1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{\ln x}{\xi (\ln \xi - 1)^3}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

271. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{1-x}{1+x}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \ln \frac{1-\xi}{1+\xi}, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

272. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \ln \frac{\xi}{l}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \ln \frac{x}{l}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

273. $$G(x, \xi) = \begin{cases} \left[\frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi-2l} - \frac{1}{2} e^{-\xi}\right] e^{x}, & 0 \leqslant x \leqslant \xi \ (|\lambda| \neq 1), \\ \frac{1-\lambda}{2(1+\lambda)} e^{\xi-2l+x} - \frac{1}{2} e^{\xi-x}, & \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

При $\lambda = 1$ $G(x, \xi) = -\frac{1}{2} e^{-|x-\xi|}$ не зависит от l. При $\lambda = -1$ функция Грина не существует.

274. $y = x - \frac{\pi}{2} \sin x$. 275. $y = \frac{x^2}{24}(x^2 - 4x + 6)$.

276. $y = \frac{1}{4}[(1 - l^2) \ln x + x^2 - 1]$. 277. $y = \frac{1}{4\pi}(2x - 1) \sin \pi x$.

278. $y = 2[\operatorname{sh} x - \operatorname{sh}(x-1) - \operatorname{sh} 1]$. 279. $y = \operatorname{sh} x + (l - x) e^{x}$.

280. $y = 2 \cos x + \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x + x^2 - 2$.

281. $$y(x)=\lambda\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x^4}{12}-\frac{\pi^3}{96}x,$$

где $$G(x,\xi)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\xi}{\pi}-1\right)x, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ \xi\left(\dfrac{2x}{\pi}-1\right), & \xi\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

282. $$y(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+e^x-ex+x-1,$$

где $$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-1)\,x, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ (x-1)\,\xi, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

283. $$y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2},$$

где $$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}(\xi-x), & -1\leqslant x\leqslant \xi,\\ \dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}(x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

284. $$y(x)=-\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-17x-5),$$

где $$G(x,\xi)=\begin{cases}(\xi-2)\,x+\xi-1, & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ (\xi-1)\,x-1, & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

285. $$y(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi+\frac{x^2}{24}(x^2-4x+6).$$

где $$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}(3\xi-x), & 0\leqslant x\leqslant \xi,\\ \dfrac{\xi^2}{6}(3x-\xi), & \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

286. $y(x) = -\lambda\int\limits_0^1 G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + \frac{1}{12} x(x-1)(x^2+x-1)$,

где $G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} x(x-\xi)(\xi-1), & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\frac{1}{2} \xi(\xi-x)(x-1), & \xi \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

287. $y(x) = e^x - \lambda\int\limits_0^1 G(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi$,

где $G(x, \xi) = \begin{cases} (1+x)\,\xi, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ (1+\xi)\,x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

292. $\varphi(x) = \cos x$. **293.** $\varphi(x) = x^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x)$.

294. $\varphi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{3!} x^4 + \operatorname{ch} 2x$.

295. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[e^x - \lambda(e^x - 1)\right]$.

296. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}(\cos x + \lambda \sin x)$.

297. $\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\cos x + \lambda(x - \sin x)\right]$.

298. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{1-\lambda}$. **299.** $\varphi(x) = \frac{2}{1+x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x}$.

300. $\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(t) \sin xt\, dt \quad (|\lambda| \neq 1)$.

301. $\varphi(x) = e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{1+x^2}$.

302. $\tilde{\varphi}(x) = e^x - x - 0{,}5010x^2 - 0{,}1671x^3 - 0{,}0422x^4$; $|\varphi - \tilde{\varphi}| < 0{,}18$; точное решение $\varphi(x) \equiv 1$. **303.** $\tilde{\varphi}(x) = x + \cos x$; $|\varphi - \tilde{\varphi}| < 0{,}03$; точное решение $\varphi(x) \equiv 1$.

304. $\widetilde{\varphi}(x)=\frac{1}{2}(3x-1+e^{-x})$; $|\varphi-\widetilde{\varphi}|<0{,}012$; точное решение $\varphi(x)=x$.

305. $\widetilde{\varphi}(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+\left(\frac{58}{9}-\frac{16}{3}\sin 1-\frac{52}{15}\cos 1\right)x^3$;

$|\varphi-\widetilde{\varphi}|<0{,}0057$; точное решение $\varphi(x)=x$.

306. $\varphi(x)=1+\frac{4}{9}x$; $\varphi_0(x)=1$.

307. $\varphi_n(x)=\left(1-\frac{5}{6^n}\right)x$; $\varphi_0(x)=0$; точное решение $\varphi(x)=x$.

308. $\varphi_3(x)=1+\frac{22}{15}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{720}x^6$; $\varphi_0(x)=1$; точное решение $\varphi(x)=\cos x+\operatorname{tg}1\cdot\sin x$. 309. $\varphi_3(x)=6x^2+1$ — точное решение. 310. $\varphi_3(x)=1$ — точное решение. 311. $\varphi_3(x)=1$ — точное решение. 312. $\lambda_1=5\frac{1}{7}$ (точное значение $\lambda_1=5$). 313. $\lambda_1=2{,}486$; $\lambda_2=32{,}181$. 314. $\lambda_1=4{,}59$. 315. $\lambda_1=3$ 316. $\lambda_1=5$. 317. $\lambda_1=4{,}19$. 318. $\lambda_1=5{,}78$. 319. $\lambda_1=3$. 320. $\lambda_1=4$. 321. $\lambda_1=2{,}475$. 322. $\lambda_1=4{,}998$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СВОДКА ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. Интегральные уравнения Вольтерра

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)\,dt. \qquad (1)$$

1. Метод резольвент. Решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t; \lambda) f(t)\,dt. \qquad (2)$$

Функция $R(x, t; \lambda)$ — резольвента интегрального уравнения (1) — определяется как сумма ряда

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t), \qquad (3)$$

где итерированные ядра $K_{n+1}(x, t)$ находятся по рекуррентной формуле

$$\left.\begin{aligned} &K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z) K_n(z, t)\,dz, \\ &K_1(x, t) = K(x, t) \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

2. Метод последовательных приближений. Решение уравнения (1) определяется как предел последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, общий член которой находится по рекуррент-

ной формуле

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_{n-1}(t)\,dt. \qquad (5)$$

Часто в качестве нулевого приближения $\varphi_0(x)$ удобно брать функцию $f(x)$.

3. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (6)$$

решаются с помощью преобразования Лапласа.

Пусть $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$ являются функциями-оригиналами, и пусть

$$f(x) \risingdotseq F(p), \quad K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p), \qquad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p).$$

Применяя к обеим частям уравнения (6) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, найдем

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}, \quad \widetilde{K}(p) \neq 1. \qquad (7)$$

Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением уравнения (6).

4. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (8)$$

где

$$K(x, x) \neq 0,$$

путем дифференцирования сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода вида

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x, t)}{K(x, x)}\varphi(t)\,dt. \qquad (9)$$

5. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода типа свертки

$$\int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x) \qquad (10)$$

решаются с помощью преобразования Лапласа. Если $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$ являются функциями-оригиналами и

$$f(x) \risingdotseq F(p), \qquad K(x) \risingdotseq \widetilde{K}(p), \qquad \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p),$$

то, применяя к обеим частям уравнения (10) преобразование Лапласа и используя теорему о свертке, получим

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{\widetilde{K}(p)}. \tag{11}$$

Оригинал $\varphi(x)$ для функции $\Phi(p)$ будет решением уравнения (10).

II. Интегральные уравнения Фредгольма

Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x). \tag{12}$$

1. **Метод определителей Фредгольма.** Решение уравнения (12) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)\, f(t)\, dt, \tag{13}$$

где функция

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad D(\lambda) \neq 0, \tag{14}$$

называется *резольвентой Фредгольма* уравнения (12). Здесь

$$D(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t)\, \lambda^n, \tag{15}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n. \tag{16}$$

Коэффициенты $B_n(x, t)$, C_n определяются соотношениями

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(x, t) & K(x, t_1) & \dots & K(x, t_n) \\ K(t_1, t) & K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t) & K(t_2, t_1) & \dots & K(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t) & K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n, \tag{17}$$

$B_0(x, t) = K(x, t)$,

$$C_n = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{n} \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \ldots & K(t_1, t_n) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) & \ldots & K(t_2, t_n) \\ K(t_3, t_1) & K(t_3, t_2) & \ldots & K(t_3, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n, t_1) & K(t_n, t_2) & \ldots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n. \qquad (18)$$

Рекуррентные соотношения:

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, s) B_{n-1}(s, t)\, ds, \qquad (19)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s, s)\, ds \quad (n=1, 2, \ldots), \qquad (20)$$

$$C_0 = 1, \; B_0(x, t) = K(x, t).$$

2. Метод последовательных приближений. Интегральное уравнение (12) можно решать методом последовательных приближений. Для этого полагаем

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \lambda^n, \qquad (21)$$

где $\psi_n(x)$ определяются по формулам:

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_1(t)\, dt = \int_a^b K_2(x, t) f(t)\, dt,$$

$$\psi_3(x) = \int_a^b K(x, t) \psi_2(t)\, dt = \int_a^b K_3(x, t) f(t)\, dt \text{ и т. д.}$$

Здесь

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K(z, t)\, dz,$$

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_2(z, t)\, dz$$

и вообще

$$K_n(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_{n-1}(z, t)\, dz, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{22}$$

причем $K_1(x, t) = K(x, t)$.

Функции $K_n(x, t)$, определяемые по формулам (12), называются *итерированными ядрами*.

3. Интегральные уравнения с вырожденным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = f(x). \tag{23}$$

Решением уравнения (23) будет

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{24}$$

где постоянные C_k находятся из линейной системы

$$\left.\begin{aligned} (1 - \lambda a_{11}) C_1 - \lambda a_{12} C_2 - \ldots - \lambda a_{1n} C_n &= f_1, \\ -\lambda a_{21} C_1 + (1 - \lambda a_{22}) C_2 - \ldots - \lambda a_{2n} C_n &= f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda a_{n1} C_1 - \lambda a_{n2} C_2 - \ldots + (1 - \lambda a_{nn}) C_n &= f_n. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Здесь

$$a_{km} = \int_a^b a_k(t) b_m(t)\, dt; \qquad f_m = \int_a^b b_m(t) f(t)\, dt \tag{26}$$

$$(k, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Если определитель системы (25) не равен нулю, то уравнение (23) имеет единственное решение (24).

4. Характеристические числа и собственные функции. Значение параметра $\lambda \neq 0$, при котором однородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t)\, dt = 0 \tag{27}$$

имеет ненулевое решение $\varphi(x) \not\equiv 0$, называется *характеристическим числом* уравнения (21) или ядра $K(x, t)$, а ненулевое решение этого уравнения называется *собственной функцией*, соответствующей характеристическому числу λ.

Если ядро $K(x, t)$ непрерывно или квадратично суммируемо в квадрате $\Omega\{a \leqslant x,\ t \leqslant b\}$, то каждому характеристическому числу λ соответствует конечное число линейно независимых собственных функций.

В случае уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n a_k(x)\, b_k(t) \right] \varphi(t)\, dt = 0 \qquad (28)$$

характеристические числа являются корнями алгебраического уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \dots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \dots & -\lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \dots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (29)$$

где $\Delta(\lambda)$ — определитель системы (25); степень этого уравнения $p \leqslant n$.

Если уравнение (29) имеет p различных корней ($1 \leqslant p \leqslant n$), то интегральное уравнение (27) имеет p характеристических чисел λ_1, λ_2, ..., λ_p, которым соответствуют собственные функции

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^n C_k^{(m)} a_k(x) \qquad (m = 1, 2, \dots, p). \qquad (30)$$

Здесь $C_k^{(m)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) — решение системы (25), соответствующее характеристическому числу λ_m ($m = 1, 2, \dots, p$). Для произвольного (невырожденного) ядра характеристические числа являются нулями определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. полюсами резольвенты $R(x, t; \lambda)$.

В случае, если ядро $K(x, t)$ является функцией Грина некоторой однородной задачи Штурма — Лиувилля, нахождение характеристических чисел и собственных функций сводится к решению указанной задачи Штурма — Лиувилля.

5. Неоднородные симметричные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \qquad (31)$$

$$K(x, t) = K(t, x).$$

Пусть λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — характеристические числа, а $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) — соответствующие им собственные функции ядра $K(x, t)$.

а) Если параметр $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то интегральное уравнение (31) имеет единственное непрерывное на $[a, b]$ решение

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x), \tag{32}$$

где

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x)\, dx. \tag{33}$$

Ряд в правой части (32) сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

б) Если параметр λ совпадает с одним из характеристических чисел, например $\lambda = \lambda_k$, ранга q (кратность характеристического числа λ_k), то уравнение (31) имеет бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям характеристического числа λ_k, т. е. когда выполнены q условий

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x)\, dx = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, q). \tag{34}$$

Все эти решения даются формулой

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} \varphi_n(x) + \\ + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_q\varphi_q(x), \tag{35}$$

где $C_1, \ldots, C_q$ — произвольные постоянные, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_q(x)$ — собственные функции ядра, соответствующие характеристическому числу λ_k.

Если хотя бы одно из q условий (34) не выполнено, то уравнение (31) решений не имеет.

Если функция $f(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям $\varphi_n(x)$ ядра $K(x, t)$, решением уравнения (31) будет сама эта функция: $\varphi(x) \equiv f(x)$.

6. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, собственными функциями которых являются классические ортогональные функции:

а)
$$\varphi(x) - \lambda \int_0^l K(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0, \tag{33}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{x(l-t)}{l}, & x \leqslant t, \\ \dfrac{t(l-x)}{l}, & t \leqslant x. \end{cases}$$

Характеристические числа:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Собственные функции:

$$\varphi_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

б) $$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-t}, & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-x}, & t \leqslant x. \end{cases}$$

Характеристические числа: $\lambda_n = n(n+1)$. Собственные функции: $\varphi_n(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, определяемые формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Так как $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$, то, пользуясь рекуррентной формулой

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x),$$

можно найти полиномы Лежандра любой степени $n = 2, 3, \ldots$

в) $$\varphi(x) - \lambda\int_0^\infty K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu}\left(\frac{x}{t}\right)^\nu, & x \leqslant t, \\ \frac{1}{2\nu}\left(\frac{t}{x}\right)^\nu, & t \leqslant x. \end{cases}$$

Характеристические числа: $\lambda_n = \alpha_n^2$, где α_n — корни трансцендентного уравнения $J_\nu(\alpha) = 0$. Собственные функции: $\varphi_n(x) = J_\nu(\alpha_n x)$, где $J_\nu(x)$ — функции Бесселя 1-го рода порядка ν. Функции Бесселя 1-го рода определяются формулой

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

г) $$\varphi(x) - \lambda \int_0^{+\infty} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} e^{\frac{x+t}{2}} \displaystyle\int_t^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau, & x \leqslant t, \\ e^{\frac{x+t}{2}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau}\,d\tau, & t \leqslant x. \end{cases}$$

Характеристические числа:

$$\lambda_n = n + 1.$$

Собственные функции:

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x),$$

где $L_n(x)$ — полиномы Чебышева — Лагерра, определяемые формулой

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Пользуясь рекуррентной формулой

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)\,L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

можно получить полиномы Чебышева — Лагерра любой степени n, зная $L_0(x) = 1$ и $L_1(x) = -x + 1$.

д) $$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+t^2}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\tau^2}\,d\tau \int_t^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau, & x \leqslant t, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{x^2+t^2}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau^2}\,d\tau \int_x^{+\infty} e^{-\tau^2}\,d\tau, & t \leqslant x. \end{cases}$$

Характеристические числа:

$$\lambda_n = 2(n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Собственные функции:

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

где $H_n(x)$ — полиномы Чебышева — Эрмита, определяемые формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} =$$

$$= (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} + \cdots$$

Зная $H_0(x) = 1$ и $H_1(x) = 2x$, можно получить полиномы Чебышева — Эрмита любой степени, пользуясь рекуррентной формулой

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Гостехиздат, 1939.
2. Анго А., Математика для электро- и радиоинженеров, «Наука», 1965.
3. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1960.
4. Виарда Г., Интегральные уравнения, ОНТИ, 1933.
5. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
6. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. II, Гостехиздат, 1934.
7. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. III, Гостехиздат, 1947.
8. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М.— Л., Гостехиздат, 1949.
9. Краснов М. Л. и Макаренко Г. И., Операционное исчисление. Устойчивость движения, «Наука», 1964.
10. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.
11. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
12. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
13. Lalesco T., Introduction a la Theorie des Equations Integrales, Paris, 1912.
14. Ловитт У., Линейные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1957.
15. Михлин С. Г., Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, Гостехиздат, 1947.
16. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
17. Михлин С. Г. и Смолицкий Х. Л., Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, «Наука», 1965.
18. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958.
19. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.

20. Привалов И. И., Интегральные уравнения, Гостехиздат, 1937.
21. Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, тт. I, II, ИЛ, 1954.
22. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, Физматгиз, 1958.
23. Смирнов Н. С., Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.
24. Соболев С. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
25. Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
26. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
27. Урысон П. С., О единственности решения линейных интегральных уравнений Вольтерра. Труды по топологии и другим областям математики, т. I, стр. 78—84, Гостехиздат, 1951.
28. Шварц Л., Математические методы для физических наук, «Мир», 1965.
29. Шелковников Ф. А., Такойшвили К. Г., Сборник упражнений по операционному исчислению, «Высшая школа», 1961.
30. Schmeidler W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig, 1955.