Н. Н. КРАСОВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

12-5-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей работе рассматриваются некоторые задачи теории устойчивости решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из основных методов решения таких задач является метод функций Ляпунова. Этот метод, данный А. М. Ляпуновым в его работе «Общая задача об устойчивости движения», получил в последнее время широкое развитие в приложениях ко многим новым задачам устойчивости. Достаточно полно были решены задачи обоснования метода, выяснены вопросы существования функций Ляпунова, в ряде работ была доказана возможность приложения метода для исследования систем, описываемых аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений. Изложение этих вопросов и составляет содержание данной работы. В книге решаются главным образом общие теоретические вопросы о возможностях метода Ляпунова и о некоторых основных приемах приложения метода к исследованию конкретных задач устойчивости. В первой части (главы I—V) рассматриваются задачи устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В главе I приводятся основные теоремы метода Ляпунова и решаются задачи обращения этих теорем, т. е. задачи о существовании функций Ляпунова. В главах II—III рассматриваются возможные модификации и обобщения классических теорем Ляпунова. В главах IV—V рассматриваются некоторые приложения метода к задачам устойчивости, в частности в главе V описываются некоторые приемы построения конкретных функций Ляпунова для нелинейных систем. Во второй части (главы VI—VII) рассматривается обобщение метода Ляпунова на уравнения с запаздываниями времени, для которых рассматривается в сокращенной форме тот же круг вопросов, что и для обыкновенных уравнений в первой части работы.

В основу предлагаемой работы положены статьи автора, опубликованные в различных журналах. Формулировки и доказательства подвергнуты переработке и дополнениям по сравнению с журнальным текстом. Автор использовал также работы ряда советских и зарубежных авторов. Однако ссылки на литературу не могут претендовать на полноту, так как использованы лишь работы, имеющие прямое отношение к вопросам, рассматриваемым в книге. За все возможные ошибки и неточности, которые здесь могли возникнуть, автор заранее приносит извинения.

При изложении автор стремился к возможной точности, однако, не везде доказательства проведены педантично. Отдельные технические детали доказательств для упрощения и сокращения изложения опущены, но при внимательном чтении эти детали можно всегда восстановить. Главы можно читать почти независимо друг от друга, так как для понимания последующих глав достаточно знать лишь формулировки теорем предыдущих глав.

В заключение автор считает своим долгом отметить, что он непрерывно пользовался в работе советами и замечаниями Н. Г. Четаева, который проявлял к ней постоянный интерес. Автор пользуется случаем поблагодарить Н. Г. Четаева за проявленное внимание. Автор благодарит также Е. А. Барбашина, М. А. Айзермана, Н. П. Еругина, Я. Курцвейля, А. М. Летова, И. Г. Малкина, В. В. Немыцкого, Б. С. Разумихина, которые приняли участие в обсуждении работы.

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Постановка задачи

В предлагаемой книге рассматриваются системы, поведение которых во времени описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, и системы, описываемые уравнениями с последействием. Будем рассматривать устойчивость процессов, не обязательно связанных с механическим движением. Как известно, различные физические процессы могут быть описаны уравнениями, имеющими большую степень общности, и методы решения задач в значительной степени определяются типом уравнений. В этой книге рассматриваются задачи об устойчивости решений определенных типов уравнений. Однако термин «устойчивость движения» приобрел широкое распространение, поэтому будем применять этот термин и здесь.

Пусть состояние изучаемой физической системы описывается переменными $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям[1])

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, \ldots, y_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

и по условиям задачи эти переменные $y_1, \ldots, y_n$ должны изменяться по закону $y_i = \eta_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\eta_i(t)$ — некоторое наперед заданное частное решение системы (1.1). (Здесь и в дальнейшем t — время.) Требуется исследовать устойчивость процесса $y_i = \eta_i(t)$, который, следуя Ляпунову [7], стр. 18], будем называть *невозмущенным движением* (или *невозмущенной траекторией*). Обозначим через x_i отклонения переменных y_i от невозмущенной траектории $y_i = \eta_i(t)$, т. е.

$$x_i = y_i - \eta_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Отклонения x_i удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1.3}$$

где

$$X_i(x_1, \ldots, x_n, t) = Y_i(x_1 + \eta_1, \ldots, x_n + \eta_n, t) - \\ - Y_i(\eta_1, \ldots, \eta_n, t). \tag{1.4}$$

---

[1]) Везде в книге рассматриваются вещественные функции вещественных переменных.

Уравнения (1.3), следуя А. М. Ляпунову, будем называть *уравнениями возмущенного движения*. В дальнейшем, если не оговорено противное, переменными x_i будем обозначать отклонения от невозмущенной траектории, а рассматриваемые уравнения (1.3) будут уравнениями возмущенного движения. Таким образом, в принятой здесь постановке задачи, вопросы устойчивости траектории $y_i = \eta_i(t)$ системы (1.1) сводятся к задаче об устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений (1.3). По определению переменных x_i (1.2) и функций X_i (1.4) следует предполагать выполнение равенств

$$X_i(0, \ldots, 0, t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.5}$$

Будем предполагать также, что функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ определены и непрерывны в некоторой области G пространства $x_1, \ldots, x_n$ при всех значениях времени $t \geqslant 0$. Под областью G следует понимать открытое множество в пространстве $x_1, \ldots, x_n$, содержащее точку $x_1 = \ldots = x_n = 0$; каких-либо дополнительных ограничений на конфигурацию области налагать не будем. Следует, однако, иметь в виду, что при решении большинства конкретных задач устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением областей G весьма простой конфигурации, а именно

$$\|x\| < H \quad \text{или} \quad \|x\|_2 < H \qquad (H = \text{const или } H = \infty).$$

Здесь и в дальнейшем

$$\|x\| = \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|), \quad \|x\|_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Если не оговорено противное, будем предполагать, что в каждой ограниченной, замкнутой области $\overline{G}_\delta \subset G$ функции X_i удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_j, т. е.

$$|X_i(x_1'', \ldots, x_n'', t) - X_i(x_1', \ldots, x_n', t)| \leqslant L_\delta \sup(|x_j'' - x_j'|) \tag{1.7}$$

$$(L_\delta = \text{const}, \ i = 1, \ldots, n).$$

Примем в дальнейшем, что $x_1, \ldots, x_n$ — именно те переменные, относительно которых изучается устойчивость. Надо иметь в виду, что определение переменных, по которым следует изучать устойчивость, в каждом конкретном случае играет существенное значение для правильной постановки задачи устойчивости [см. 71, стр. 20].

Для сокращения письма вектор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ будем часто обозначать символом x. Траекторию системы (1.3) с начальными данными $x_i = x_{i0}$ при $t = t_0$ будем обозначать $x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)$ или короче $x(x_0, t_0, t)$.

Определение свойства устойчивости, принятое ниже, соответствует определению Ляпунова [71, стр. 19—20]. Ряд новых задач устойчивости требует некоторого уточнения в понимании определения устойчивости по Ляпунову. Приведем поэтому трактовку этого определения, принятую ниже. Следующее изложение опирается на комментарии Н. Г. Четаева к книге Ляпунова [71, стр. 464] (см. также [124, стр. 11, 12]).

Определение 1.1. Решение $x=0$ системы уравнений (1.3) будем называть *устойчивым*, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta>0$ такое, что выполняется неравенство

$$\|x(x_0, t_0, t)\|<\varepsilon \quad \text{при всех} \quad t\geqslant t_0, \tag{1.8}$$

если только

$$\|x_0\|<\delta.$$

В противном случае решение $x=0$ неустойчиво.

Определение 1.2. Решение $x=0$ системы уравнений (1.3) *устойчиво асимптотически* и область G_δ пространства $\{x_i\}$ лежит в области притяжения точки $x=0$, если наряду с выполнением условий определения 1.1 выполняются условия

$$\lim x(x_0, t_0, t)=0 \quad \text{при} \quad t\to\infty, \tag{1.9}$$

$$x(x_0, t_0, t)\in\Gamma \quad \text{при} \quad t\geqslant t_0 \tag{1.10}$$

для всех начальных данных $x_0\in G_\delta$. Здесь Γ — некоторая определенная конкретными условиями задачи, наперед заданная область, лежащая в области G.

Для прикладных задач имеет значение не только (и не столько) факт существования числа $\delta>0$ (по заданному $\varepsilon>0$) или области G_δ (по заданной области $\Gamma\subset G$), удовлетворяющих условиям определений 1.1 и 1.2, но и оценка этих чисел и областей и проверка пригодности оценок в конкретных условиях задачи. Поэтому в качестве основных методов решения задач устойчивости следует рассматривать те методы, которые дают возможность проведения указанных оценок. Замечание об оценке результата с точки зрения пригодности решения при определенных конкретных условиях задачи показывает, что классификация устойчивости на «локальную устойчивость», «устойчивость в большом», «устойчивость в целом» и т. д., принятая в ряде работ, имеет условный смысл. Это замечание следует иметь в виду и при исследовании задачи «устойчивости на конечном интервале времени».

Приведем соответствующие определения.

Определение 1.3. Решение $x=0$ системы уравнений (1.3) устойчиво на заданном интервале времени $T>0$ при заданной оценке $\Delta(\varepsilon)>0$, если выполняется условие (1.8) определения 1.1, где условие «при всех $t \geqslant t_0$» следует заменить условием «при $t_0 \leqslant t \leqslant T + t_0$» и добавить условие «$\delta \geqslant \Delta(\varepsilon)$».

Определение 1.4. Решение $x = 0$ системы уравнений (1.3) устойчиво асимптотически на заданном интервале времени $T > 0$ при оценках $\Delta(\varepsilon) > 0$, Γ и $\gamma(G_\delta, \theta) \geqslant 0$, если наряду с условием определения 1.3 выполняются условия

$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \gamma \quad \text{при} \quad t_0 + \theta \leqslant t \leqslant t_0 + T, \tag{1.11}$$

$$x(x_0, t_0, t) \in \Gamma \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \tag{1.12}$$

для всех начальных данных $x_0 \in G_\delta$. В противном случае решение $x = 0$ будем называть неустойчивым на заданном интервале времени T при заданных оценках.

Определения устойчивости на конечном интервале времени, не учитывающие наперед заданных оценок (таких, как Δ, Γ, γ), по-видимому, мало содержательны. Действительно, в силу свойства интегральной непрерывности [85, стр. 19—27] достаточно *малое* число $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям определения 1.3 на сколь угодно большом, *фиксированном* интервале времени $T > 0$, существует при наших предположениях всегда.

Заметим еще в заключение постановки задачи устойчивости, что в определении 1.1 число δ может зависеть, вообще говоря, не только от числа ε, но и от начального момента времени $t_0 \geqslant 0$. Свойство устойчивости в смысле определения 1.1 не является следствием условия (1.9), и поэтому условие (1.9) из определения 1.2 не включает в себя свойства определения 1.1 (см., например, [46]).

Основным методом решения задач устойчивости является применение функций Ляпунова. Этот метод был введен А. М. Ляпуновым в его книге «Общая задача об устойчивости движения» под названием «второго метода». Как известно, метод заключается в построении функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ в некоторой области, охватывающей невозмущенное движение $x = 0$ при $t > 0$. Если функция v и ее полная производная по времени вдоль траекторий системы (1.3)

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial v}{\partial t} \tag{1.13}$$

удовлетворяют определенным условиям, сформулированным в основных теоремах Ляпунова [71, теоремы I—III, стр. 82—94], то на основании этих теорем заключаем об устойчивости (или неустойчивости) невозмущенного движения. Одно из достоинств этого метода заключается в том, что он позволяет получить оценки, о которых шла речь выше при описании постановки задачи об устойчивости. Решению некоторых задач, связанных с применением метода функций Ляпунова, и посвящена эта книга.

В соответствии со сказанным выше при изложении будем обращать внимание на описание тех областей пространства $\{x_1, \ldots, x_n\}$, в которых справедливы рассматриваемые построения.

Приведем здесь для полноты изложения основные понятия и теоремы второго метода Ляпунова. Будем рассматривать, следуя Ляпунову, вещественные функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ (или в краткой записи $v(x, t)$) переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, определенные и непрерывные при $t > 0$ в области Γ пространства $\{x_i\}$. Будем предполагать, если не оговорено противное, выполнение равенства

$$v(0, \ldots, 0, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{1.14}$$

Так как в дальнейшем рассматриваются задачи устойчивости и при больших начальных возмущениях, то область Γ, вообще говоря, не обязательно является малой окрестностью точки $x = 0$.

Определение 1.5. Функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ называется *знакопостоянной* (в области Γ), если выполняется неравенство

$$v(x, t) \geqslant 0 \quad (\text{или } v(x, t) \leqslant 0) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,\ t > 0. \tag{1.15}$$

Определение 1.6. Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, не зависящая от t, называется *знакоопределенной* (определенно-положительной или определенно-отрицательной в области Γ), если всюду в Γ, кроме точки $x = 0$, выполняется неравенство

$$v(x) > 0 \quad (\text{или } v(x) < 0). \tag{1.16}$$

Функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ называется *знакоопределенной*, если существует определенно-положительная функция $w(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая неравенству

$$v(x, t) \geqslant w(x) \quad (\text{или } v(x, t) \leqslant -w(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,\ t > 0. \tag{1.17}$$

Определение 1.7. Функция $v(x, t)$ допускает (в области Γ) *высший предел, бесконечно малый в точке* $x = 0$ (или короче — *бесконечно малый высший предел*), если существует непрерывная функция $W(x)$, удовлетворяющая условиям

$$|v(x, t)| \leqslant W(x) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad t > 0, \quad W(0) = 0. \tag{1.18}$$

Сформулируем теоремы Ляпунова.

Теорема об устойчивости [71, стр. 82]. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию v, производная которой $\frac{dv}{dt}$ в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с v, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Если функция v, удовлетворяя условиям теоремы, в то же время допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее представляет знакоопределенную функцию (противоположного знака с v), то можно доказать, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически.

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости [71, теорема II, стр. 87]. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию v, которая обладала бы в силу этих уравнений знакоопределенной производной $\frac{dv}{dt}$, допускала бы при этом бесконечно малый высший предел и была бы такова, чтобы при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, численно сколь угодно малых, ее можно было сделать величиной одинакового знака с ее производной, то невозмущенное движение неустойчиво.

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости [71, теорема III, стр. 92]. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию v, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + w, \tag{1.19}$$

где λ — положительная постоянная, а w или тождественно равно нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция такова, что при всяком t, большем некоторого предела, надлежащим выбором величин x_s, сколь угодно численно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с w, то невозмущенное движение неустойчиво.

Известных доказательств этих теорем приводить не будем. Примеры приложения теорем к задачам устойчивости будут рассмотрены ниже — в главах IV—VII.

Из формулировок приведенных теорем следует, что задачу устойчивости можно разрешить, если удается построить функцию v, удовлетворяющую условиям соответствующей теоремы. Таким образом, центральной проблемой при применении второго метода Ляпунова является задача о построении функции v. В связи с этим необходимо выяснить, насколько широк тот круг задач устойчивости, решение которых возможно методом функций Ляпунова, и указать приемы эффективного построения функций Ляпунова для определенного класса систем.

Первый вопрос представляет главным образом теоретический интерес и решение его связано с доказательствами теорем существования функций Ляпунова (теорем обращения для теорем Ляпунова). Этому вопросу, исследованному достаточно полно, посвящены первые две главы нашей книги.

Второй вопрос имеет более прикладной характер. Хотя полного решения этого вопроса пока нет, однако для многих типов конкретных систем выработаны эффективные приемы построения функций Ляпунова. Описанию некоторых из этих приемов посвящены главы IV—VII.

Заметим, что отдельные главы книги можно читать почти независимо друг от друга, так как, несмотря на естественную связь, которая имеется между вопросами, рассматриваемыми в разных главах, для понимания материала последующей главы достаточно ознакомиться лишь с некоторыми основными положениями из предыдущих глав, что отмечается по ходу изложения материала этой главы. В соответствии с этим читатель, интересующийся лишь приемами приложения метода функций Ляпунова, может при чтении целиком опустить доказательства теорем существования функций Ляпунова, приведенных в первых главах книги.

ГЛАВА I

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФУНКЦИЙ $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА

§ 2. Предварительные замечания

В этой главе рассматриваются вопросы существования функций $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющих условиям классических теорем второго метода Ляпунова. Такие функции в дальнейшем будем называть *функциями Ляпунова*. В соответствии с замечаниями, изложенными выше, в формулировках будем обращать внимание на область существования функции v. Можно привести следующие мотивы необходимости постановки вопроса о существовании функций Ляпунова.

Теоремы Ляпунова I, II, III [71, стр. 82—94], приведенные выше (стр. 11—12), соответственно дают достаточные условия устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения. Если, однако, принять эти теоремы в качестве основного аппарата решения задач устойчивости, то следует выяснить принципиальные возможности метода. Теоремы существования функций Ляпунова обосновывают универсальность метода. Это дает исследователю определенную уверенность в целесообразности применения функций Ляпунова для решения соответствующих задач. Представляет интерес также математическая задача о том, можно ли по характеру траекторий, определяемому функцией Ляпунова с определенными свойствами, установить существование функции с этими свойствами. Однако значение теорем существования функций Ляпунова не исчерпывается выяснением этих вопросов.

Одним из путей решения задачи устойчивости является следующий: вместо данной системы уравнений строим упрощенную, приближенную систему, для которой устанавливаем соответственно устойчивость, асимптотическую устойчивость или неустойчивость. Затем показываем, что соответствующее свойство сохраняется при переходе к первоначальной исходной системе. При этом важно уметь строить функцию Ляпунова (или хотя бы уметь доказывать существование этой функции) для вспомогательной системы. Следовательно, теоремы существования функций Ляпунова позволяют в ряде случаев обосновать сохранение свойств системы при вариациях уравнений. Именно с этой целью и был введен Ляпуновым его второй метод.

Выяснение условий существования функций Ляпунова определяет возможность и целесообразность перенесения метода на системы, описываемые аппаратом, отличным от обыкновенных дифференциальных уравнений. При постановке задачи существования функций Ляпунова имеется в виду также перспектива получения в процессе доказательства эффективного метода построения функции v. В этом последнем вопросе, однако, до последнего времени успех не достигнут — известные методы доказательства существования функций Ляпунова в общем случае нельзя считать эффективными.

Проблема существования функций Ляпунова привлекает внимание исследователей примерно с 30-х годов нашего столетия. Основоположные работы в этом направлении принадлежат Казанской школе теории устойчивости, созданной Н. Г. Четаевым. Большое количество работ по вопросам существования функций Ляпунова появилось в последнее время (работы И. Г. Малкина [73, 74, 77, 82], К. П. Персидского [87—90], Х. Л. Массера [136—138], Е. А. Барбашина [9—11, 13], Я. Курцвейля [59—61], В. И. Зубова [37—40], И. Вркоча [19], Т. Иосикавы [135] и др.).

Основной вывод из результатов исследований о существовании функций Ляпунова можно сформулировать следующим образом:

Характер поведения траекторий возмущенного движения, определенный существованием той или иной функции v из классических теорем второго метода Ляпунова, является не только необходимым, но и достаточным условием существования такой функции.

При этом выяснилось, что свойства гладкости функции v могут быть намного выше, чем свойства гладкости правых частей соответствующей системы уравнений возмущенного движения.

Ниже принят следующий порядок изложения: в § 3 доказываются леммы о существовании функции V в некоторой окрестности отрезка возмущенной траектории, в § 4 выясняются условия существования функции v, имеющей знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в данной области, в §§ 5 и 6 как следствия общего результата § 4 получаются обращения для теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и первой теоремы о неустойчивости, в § 7 доказывается обратимость второй теоремы Ляпунова о неустойчивости и теоремы Четаева о неустойчивости.

§ 3. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим систему уравнений (1.3). Пусть G_0 — ограниченная область, содержащая точку $x = 0$ и лежащая вместе со своим замыканием $\bar{G}_0$ в области G. Предположим, что дуга $x(x_0, t_0, t)$ системы (1.3) при $0 < t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta$ $(\theta \leqslant T)$ лежит целиком в области H_0, где $\bar{H}_0 \subset G_0$.

Лемма 3.1. Для любого числа $\gamma > 0$ существует функция $V(x_1, \ldots, x_n, t)$, непрерывная вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n, t$ в области $G, (-\infty < t < \infty)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$V(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 \geqslant \gamma, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial V}{\partial t} > d \\ \text{при} \\ &\|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \alpha, \quad -\tau + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\infty < t < t_0 + \theta + \tau, \quad \|x\| < \infty,$$

$$\text{и при } \|x - x(x_0, t_0, t + \theta)\|_2 \geqslant \gamma, \; t_0 + \theta + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau, \tag{3.3}$$

$$V > d \quad \text{при} \quad \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \alpha, \quad t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta, \tag{3.4}$$

$$V = 0 \quad \text{при} \quad t < t_0 - 2\tau, \; t > t_0 + \theta + 2\tau \tag{3.5}$$

$$(\tau > 0, \; \alpha > 0, \; d > 0 - \text{const}).$$

Оценка чисел τ, α, d не зависит от выбора точки $x_0 \in H_0$, но определяется выбором областей H_0 и G_0 и числами T, γ.

Доказательство леммы. Скорость движения точки $x_i(t)$ вдоль фазовой траектории $x_i(x_0, t_0, t)$ в области G_0 равномерно ограничена, поэтому можно указать числа $\tau > 0$ и $\eta > 0$ такие, что точки $\|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \eta$ лежат в области G_0 при $-2\tau + t_0 \leqslant \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$ и точки $\|x(x_0, t_0, t) - x\|_2 < \eta$ при $t_0 + \theta \leqslant t \leqslant \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$ лежат в области $\|x - x(x_0, t_0, t_0 + \theta)\|_2 < \gamma$.

Рассмотрим многочлены $y(t) = \{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, удовлетворяющие неравенству

$$\|x(x_0, t_0, t) - y(t)\|_2 < \varepsilon, \quad \left\| \frac{dx(x_0, t_0, t)}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| < \varepsilon \tag{3.6}$$

при $-2\tau + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 2\tau + \theta$. Согласно известной теореме Вейерштрасса об апроксимации непрерывных функций [133] такие многочлены всегда существуют. Оценка положительного числа ε в неравенстве (3.6) будет указана ниже

Определим функцию $V(x, t)$ равенствами

$$V(x, t) = (t - t_0 + 2\tau)^p \exp\left([t - t_0 + 2\tau]^{-1} [t - t_0 - \theta - 2\tau]^{-1}\right) \times \\ \times \exp\left(\{[\|x - y(t)\|_2^2 \exp 2q(t_0 - t)] - \beta^2\}^{-1}\right) \tag{3.7}$$

$$\text{при } \|x - y(t)\|_2 < \beta \exp q(t - t_0), \; -2\tau + t_0 < t < t_0 + \theta + 2\tau, \tag{3.8}$$

$$V(x, t) = 0 \quad \text{при остальных } x \text{ и } t. \tag{3.9}$$

Здесь

$$q = 8n^2L_0, \quad \beta = \frac{\eta}{2}\exp(-q[T+2\tau]) \tag{3.10}$$

(L_0 — постоянная Липшица функций X_i в области G_0), p — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$p > \frac{(T+4\tau)^2}{\tau^4} + 8q\left(1+\frac{n}{\beta^2}\right)(\exp 2q(T+2\tau))^2. \tag{3.11}$$

Покажем, что функция $V(x, t)$ удовлетворяет всем условиям леммы, если только число $\varepsilon > 0$ в неравенствах (3.6) выбрано достаточно малым. Будем пока предполагать, что $\varepsilon < \eta/2$. Действительно:

1) В области $x \in G$, $-\infty < t < \infty$ функция V непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков. В самом деле, в областях (3.8) и (3.9) это требование, очевидно, выполняется, и нужно лишь проверить непрерывную дифференцируемость функций, входящих в правую часть равенства (3.7) на границе этих областей. Это проверяется раскрытием неопределенностей при $r \to a+0$ и $r \to b-0$ для функций вида $\varphi(r) = \exp\{(r-a)^{-1}(r-b)^{-1}\}$ $(a<r<b)$, из которых построено выражение (3.7).

2) Справедливость равенств (3.1) и (3.5) следует из (3.7) и (3.9) по выбору чисел η, β, ε.

3) Для проверки неравенства (3.2) вычислим производную функции $V(x, t)$ (3.7) вдоль траекторий системы (1.1).

Имеем в области (3.8):

$$\frac{dV}{dt} = V\left\{\frac{p}{t-t_0+2\tau} + \frac{\theta-2(t-t_0)}{(t-t_0+2\tau)^2(t-t_0-\theta-2\tau)^2} + \right.$$
$$+ 2\left[q\|x-y(t)\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i(t))\left(\frac{dx_i}{dt}-\frac{dy_i}{dt}\right)\right]\exp 2q(t_0-t)\times$$
$$\left.\times [\|x-y(t)\|_2^2\exp(2q[t_0-t]) - \beta^2]^{-2}\right\}. \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.11) следует, что при $\varepsilon < \frac{\beta}{4}\exp(-2q\tau)$

$$\frac{dV}{dt} > \frac{pV}{2} \quad \text{при} \quad -\tau < t-t_0 < \theta+\tau, \quad \|x-y(t)\|_2 < \frac{\beta}{2}\exp q(t-t_0).$$

Поэтому, если, кроме условия $\varepsilon < \eta/2$, предполагать выполнение неравенства $\varepsilon < (\beta/4)\exp(-2q\tau)$, то при $\alpha = (\beta/4)\exp(-2q(T+\tau))$ условия (3.2) и (3.4) будут выполнены.

4) Проверим выполнение неравенства (3.3). Рассмотрим сначала выражение

$$\psi = q\|x-y(t)\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i(t))\left(\frac{dx_i}{dt}-\frac{dy_i}{dt}\right) \tag{3.13}$$

при

$$-2\tau \leqslant t - t_0 \leqslant \theta + \tau, \quad \frac{\beta}{2} \exp q(t - t_0) < \|x - y(t)\|_2 < \\ < \beta \exp q(t - t_0). \tag{3.14}$$

Имеем оценку

$$\left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right| \leqslant \left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_i(x_0, t_0, t)}{dt}\right| + \left|\frac{dx_i(x_0, t_0, t)}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |X_i(x, t) - X_i(x(x_0, t_0, t), t)| + \varepsilon \leqslant L_0 n \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + nL_0(\|x - y(t)\|_2 + \|y(t) - x(x_0, t_0, t)\|_2) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + nL_0(\varepsilon + \beta \exp q(t - t_0)).$$

Следовательно, в области (3.14) выполняется неравенство

$$\psi \geqslant \frac{q\beta^2}{4} \exp 2q(t - t_0) - [n\beta \exp q(t - t_0)](\varepsilon + L_0\varepsilon + L_0\beta \exp q(t - t_0)). \tag{3.15}$$

Из последнего неравенства, учитывая выражение (3.10) для числа q, следует, что при $\varepsilon > 0$ достаточно малом и в области (3.14) будет выполняться условие (3.3).

Итак, мы показали, что функция V (3.7), (3.9) удовлетворяет всем условиям (3.1)—(3.5) леммы. Следует еще показать, что числа α, d и τ можно выбрать не зависящими от выбора дуги $x(x_0, t_0, t)$ в области H_0. Однако справедливость этого последнего замечания усматривается непосредственно по ходу доказательства, так как при выборе чисел η, τ, q, p, β и ε использовались лишь свойства функций X_i в области G_0 и число T. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь дугу траектории $x(x_0, t_0, t)$ системы (1.3), лежащую в области H_0 (где снова $H_0 \subset G_0$), но при значениях времени $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$ $(0 < \theta \leqslant T)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2. Для любого числа $\gamma > 0$ существует функция $V(x, t)$, непрерывная вместе со всеми своими частными производными по $x_1, \ldots, x_n, t$ в области G, $-\infty < t < \infty$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$V(x, t) = 0 \text{ при } \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 \geqslant \gamma, \quad -\infty < t < \infty, \tag{3.16}$$

$$\frac{dV}{dt} > d \text{ при } \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \alpha, \quad -\theta + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau, \tag{3.17}$$

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad -\tau - \theta + t_0 < t < \infty, \quad \|x\| < \infty$$

$$\text{и при } \|x - x(x_0, t_0, \theta)\|_2 \geqslant \gamma, \quad t_0 - \theta - 2\tau \leqslant t \leqslant t_0 - \theta - \tau, \tag{3.18}$$

$$V < -d \text{ при } \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \alpha, \quad -\theta + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau, \tag{3.19}$$

$$V = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant t_0 - \theta - 2\tau, \quad t \geqslant t_0 + 2\tau \tag{3.20}$$

$$(\tau > 0, \ \alpha > 0, \ d > 0 - \text{const}).$$

Оценка чисел τ, α и d не зависит от выбора точки $x_0 \in H_0$, но определяется выбором областей H_0, G_0 и чисел T и γ.

Справедливость леммы 3.2 следует из леммы 3.1 при замене времени t на $-t$ и V на $-V$ (в условиях леммы 3.2, естественно, предполагается, что $t_0 \geqslant \theta$, так как в противном случае траектория $x(x_0, t_0, t)$ не была бы определена при $t \in [t_0 - \theta, t_0]$).

Примечания к леммам 3.1 и 3.2.

1) Из доказательства леммы 3.1 следует, что частные производные первого порядка $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial V}{\partial t}$ равномерно ограничены некоторой постоянной N_0, т. е.

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| < N_0, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| < N_0, \tag{3.21}$$

причем оценка N_0 определяется лишь выбором областей G_0, H_0 и чисел T и γ.

2) Предположим теперь, что функции X_i равномерно непрерывны по времени t в каждой области $x \in G_h$, $0 \leqslant t < \infty$. В этом случае функции $x(x_0, t_0, t)$ и $\frac{dx_i}{dt}$ $(i = 1, \ldots, n)$ при $t_0 - 2\tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$ или при $t_0 - \theta - 2\tau \leqslant t \leqslant t_0 + 2\tau$ будут ограниченными и равностепенно непрерывными функциями времени t (здесь, как и выше, рассматриваются лишь отрезки траектории $\{x_i(x_0, t_0, t)\}$, лежащие на соответствующем интервале времени целиком в области G_0). В таком случае по любому числу $\varepsilon > 0$ можно указать *конечную* систему многочленов $\{y_i(t)\}$, такую, что для любой траектории $x(x_0, t_0, t)$ описанного выше вида можно указать многочлен из этой конечной системы $\{y_i(t)\}$, апроксимирующий выбранный отрезок траектории так, что выполняются неравенства (3.6). Действительно, семейство равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций допускает конечную *ε-сеть* из многочленов [6]. Но в таком случае, как это следует непосредственно из формулы (3.7), существует конечный набор функций $\{V\}$ таких, что для отрезка каждой траектории $x(x_0, t_0, t)$ описанного выше вида можно указать функцию из этого набора $\{V\}$, удовлетворяющую условиям леммы 3.1 (или леммы 3.2 соответственно). Но в таком случае для любого номера k можно указать постоянную N_k такую, что существует функция V, которая наряду с условиями леммы 3.1 (или леммы 3.2) удовлетворяет также неравенствам

$$\left|\frac{\partial^k V}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n} \partial t^{k_{n+1}}}\right| < N_k \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.22}$$

§ 4. Условия существования функции Ляпунова, имеющей знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$

1. Рассмотрим вопросы существования функций Ляпунова. Среди теорем второго метода Ляпунова следует прежде всего выделить теоремы, которые налагают на функцию $\frac{dv}{dt}$ требование знакоопределенности (см. выше стр. 11—12).

Напомним, что по Ляпунову функция $\frac{dv}{dt}$ называется определенно-положительной (или определенно-отрицательной) в данной области Г, если существует непрерывная функция $w(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая в области Г условиям

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant w(x_1, \ldots, x_n), \quad w(x_1, \ldots, x_n)>0 \text{ при } x\neq 0 \quad (4.1)$$

(или условиям

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial v}{\partial t}\leqslant -w(x_1, \ldots, x_n), \quad w(x_1, \ldots, x_n)>0 \text{ при } x\neq 0 \quad (4.2)$$

соответственно).

Требование знакоопределенности производной $\frac{dv}{dt}$ содержится в формулировке двух теорем Ляпунова: в теореме об асимптотической устойчивости [71, стр. 85] и в первой теореме о неустойчивости [71, стр. 87]. Следует еще отметить, что наряду со свойством знакоопределенности производной $\frac{dv}{dt}$ эти теоремы содержат требование бесконечно малого высшего предела.

По Ляпунову [71, стр. 81] функция $v(x, t)$ допускает в области Г бесконечно малый высший предел, если существует функция $W(x)$, удовлетворяющая условиям

$$W(0)=0, \quad |v(x, t)|\leqslant W(x) \quad \text{при} \quad x\in \Gamma. \qquad (4.3)$$

Эти теоремы Ляпунова приведены выше (см. стр. 11—12).

В этом параграфе будет доказана общая теорема о существовании функции Ляпунова, имеющей знакоопределенную производную в данной области. В следующих параграфах, исходя из этой общей теоремы, будут выяснены вопросы существования функций v, удовлетворяющих условиям цитированных теорем Ляпунова. Заметим, что теоремы Ляпунова требуют лишь непрерывности функции v и не требуют более жестких условий гладкости этих функций. Однако для приложений представляют интерес функции v, производная которых $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) может быть вычислена по формуле

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad (4.4)$$

и, следовательно, желательно доказать существование функции v, имеющей непрерывные частные производные первого порядка. Встречаются задачи, где важно знать о существовании и непрерывности частных производных функций v второго порядка (см., например, стр. 125—127). Поэтому в формулировках теорем существования следует обеспечить достаточную гладкость функции v.

2. Сформулируем сейчас некоторые дополнения к формулировкам Ляпунова.

В приведенное выше определение свойства асимптотической устойчивости (стр. 9, определение 1.2) была включена оценка области притяжения G_δ. Сформулируем поэтому здесь теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости в дополненном виде так, чтобы оценка области G_δ была включена в формулировку теоремы [1]).

Теорема. Пусть Γ — область, лежащая в области G и содержащая точку $x=0$. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию v определенно-положительную, допускающую бесконечно малый высший предел в области Γ и такую, что производная ее $\frac{dv}{dt}$ является функцией определенно-отрицательной в области Γ, причем выполняется неравенство

$$\sup\left[v(x_1, \ldots, x_n, t) \text{ на границе } G_\delta \text{ при } 0 \leqslant t < \infty\right] <$$
$$< \inf\left[v(x_1, \ldots, x_n, t) \text{ на границе } H_0 \text{ при } 0 < t < \infty\right], \qquad (4.5)$$

где H_0 — ограниченная область, лежащая со своим замыканием в Γ и содержащая G_δ, то невозмущенное движение $x=0$ асимптотически устойчиво и область G_δ лежит в области притяжения точки $x=0$.

И в случаях неустойчивости в прикладных задачах представляет интерес оценка той области, которую будут покидать неустойчивые возмущенные траектории с возрастанием времени. Поэтому теоремы Ляпунова о неустойчивости можно дополнить следующим образом: если в некоторой области Γ, содержащей точку $x=0$, функция v обладает свойствами, перечисленными в формулировке теорем, то возмущенные траектории $x(x_0, t_0, t)$, где $\operatorname{sign} v(x_0, t_0) = \operatorname{sign}\frac{dv}{dt}$, будут покидать с возрастанием времени любую ограниченную замкнутую область $\overline{H}_0 \subset \Gamma$.

Доказательства теорем Ляпунова приводить здесь не будем, так как они хорошо известны и изложены подробно в книге Ляпунова [71]. Справедливость же сделанных здесь дополнений к формулировкам Ляпунова вытекает с очевидностью из тех доказательств, которые приведены в книге [71] (см. сноску на этой странице).

---

[1]) Как указал Н. Г. Четаев [124, стр. 16], эта оценка была определена по существу Ляпуновым при доказательстве его теоремы.

Существование функций v, удовлетворяющих условиям приведенных выше теорем, представляет особый интерес. Такие функции со знакоопределенной производной $\frac{dv}{dt}$ позволяют доказать, что поведение возмущенных траекторий не меняется при вариациях уравнений, стесненных определенными границами, а это важно при обосновании исследования задачи устойчивости по приближенным уравнениям.

Вопросы существования функции Ляпунова v, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости, рассматривались рядом авторов. Отметим основные результаты. Первые достаточно общие результаты были получены Х. Л. Массера [136], который доказал существование непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова $v(x, t)$ в окрестности асимптотически устойчивого невозмущенного движения $x = 0$ в случае периодических по времени непрерывно дифференцируемых функций X_i в правых частях уравнений возмущенного движения (1.3). В работе Е. А. Барбашина [9], появившейся почти одновременно с работой Массера, доказано существование функции $v(x)$, имеющей непрерывные частные производные до m-го порядка включительно при условии, что в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия $x = 0$ функции $X_i(x)$ также имеют непрерывные частные производные до m-го порядка включительно ($m \geqslant 1$). В статье И. Г. Малкина [82] даны необходимые и достаточные условия существования непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова $v(x, t)$ в окрестности асимптотически устойчивого невозмущенного движения при непрерывно дифференцируемых функциях $X(x, t)$ в правых частях уравнений возмущенного движения. В статьях [11, 13] даны условия существования функции Ляпунова $v(x, t)$ во всем фазовом пространстве $-\infty < x_i < \infty$ ($i = 1, \ldots, n$) в случае устойчивости в целом (асимптотическая устойчивость решения $x = 0$, когда область притяжения G_δ совпадает со всем пространством). Интересные результаты были получены недавно Ярославом Курцвейлем [60] и Х. Л. Массера [138], которые доказали существование сколь угодно гладких функций Ляпунова v в случае асимптотической устойчивости в предположении лишь непрерывности функции X_i в уравнениях возмущенного движения. Отметим также теоремы существования функций Ляпунова в случае динамических систем в абстрактных пространствах [37, 39, 40, 44, 52].

Вопросы существования функции $v(x, t)$, удовлетворяющей условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, рассматривались автором [48, 53].

3. Методы доказательства теорем существования функций v, примененные в упомянутых выше работах, довольно разнообразны и приспособлены главным образом для случая асимптотической устойчивости. В этой главе теоремы существования функций Ляпунова доказываются единообразным приемом, исходя из лемм 3.1 и 3.2. Этот прием доказательства применим как в случаях устойчивости, так и в случаях неустойчивости.

Введем некоторые обозначения: пусть, как мы приняли выше, правые части уравнений (1.3) — функции X_i — определены в области G и удовлетворяют условиям (1.5), (1.7). Рассмотрим ограниченную область Γ, содержащую точку $x = 0$. Здесь и ниже символом $\rho(p, q)$ будем обозначать расстояние между точками $p(x_p)$ и $q(x_q)$:

$$\rho(p, q) = \|x_p - x_q\|_2,$$

символом $\rho(P, Q)$ — расстояние между множествами P и Q, символом O — точку $x = 0$. Пусть

$$h = \min \rho(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma, O).$$

Выберем последовательность монотонно убывающих чисел $h_0 = h$, h_1, h_2, ..., таких, что $\lim h_k = 0$ при $k \to \infty$. Будем еще обозначать через $R(k)$ множество точек

$$\|x\|_2 < h_k.$$

Выясним условия, при которых существует функция Ляпунова v, имеющая в данной области знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ и допускающая бесконечно малый высший предел. Мы покажем, что существование такой функции тесно связано с некоторым свойством решений уравнений возмущенного движения, которое в дальнейшем будем называть *свойством* (A).

Определение 4.1. Будем говорить, что в области Γ выполняется свойство (A), если для каждой наперед выбранной области $\overline{H}_0 \subset \Gamma$ [1]) и для любого целого числа $k > 0$ можно указать число T_k такое, что не существует отрезка траектории $x(x_0, t_0, t)$, лежащего целиком в области H_0 при $t_0 - T_k \leqslant t \leqslant t_0 + T_k$, если только $t_0 \geqslant T_k$ и $x_0 \in \Gamma \setminus R(k)$.

Покажем сначала, что условие (A) является необходимым условием существования функций v, удовлетворяющих условиям теорем Ляпунова об асимптотической устойчивости и первой теоремы о неустойчивости.

Теорема 4.1. Если в каждой ограниченной области H_0, лежащей вместе со своим замыканием в области Γ, может быть построена функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, допускающая в области H_0 бесконечно малый высший предел и имеющая в этой области знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения (1.3), то в области Γ выполняется условие (A).

Доказательство. Пусть H_0 — область из Γ, причем в этой области H_0 построена функция $v(x, t)$ со свойствами, перечисленными в формулировке теоремы. Выберем окрестность $R(m)$ точки $x = 0$, лежащую целиком вместе со своим замыканием внутри H_0. Пусть $x_0 \in H_0 \setminus R(m)$ и (для определенности) $v(x_0, t_0) \geqslant 0$. За время $\Delta t = \vartheta_m$, где ϑ_m — некоторое фиксированное положительное число, траектория $x(x_0, t_0, t)$ согласно неравенству (4.11) [2]) остается вне сферы

$$\|x\|_2 < R(m) \exp(-nL_0\vartheta_m) \tag{4.6}$$

---

[1]) В определении предполагается, что H_0 — ограниченная область.

[2]) Это неравенство будет доказано ниже при доказательстве теоремы 4.2.

(L_0 — постоянная Липшица функций X_i в области H_0). Но в области $\bar{H}_1 \subset H_0$ вне сферы (4.6) производная $\frac{dv}{dt}$ вдоль траектории (1.3) имеет положительный минимум $\delta_m > 0$, поэтому, если только отрезок траектории $x(x_0, t_0, t)$ при всех t из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta_m$ остается в области $\bar{H}_1$, имеем:

$$v(x(x_0, t_0, t_0 + \vartheta_m), t_0 + \vartheta_m) > \vartheta_m \delta_m. \tag{4.7}$$

Так как функция $v(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, то можно указать окрестность

$$\|x\|_2 \leqslant h_{N(m)}, \tag{4.8}$$

в которой выполняется неравенство

$$|v(x, t)| < \vartheta_m \delta_m, \tag{4.9}$$

и так как все время, пока траектория $x(x_0, t_0, t)$ остается в области H_0, имеем вдоль этой траектории $\frac{dv}{dt} > 0$, то в силу неравенств (4.7) и (4.9) заключаем, что траектория $x(x_0, t_0, t)$, оставаясь в области H_0, не может попасть внутрь сферы (4.8) с возрастанием времени. Но в области $\bar{H}_1$ вне сферы (4.8) имеем неравенство $\frac{dv}{dt} > \eta_m$, где η_m — положительная постоянная. Следовательно, имеем неравенство

$$v(x(x_0, t_0, t), t) > \vartheta_m \delta_m + (t - \vartheta_m)\eta_m \quad \text{при} \quad t > \vartheta_m. \tag{4.10}$$

Если $M_1 = \max|v|$ в области $\bar{H}_1$, то из (4.10) следует, что в области $\bar{H}_1$ не может лежать целиком отрезок рассматриваемой траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_m$, где $T_m = M_1/\eta_m + \vartheta_m$. Если в точке x_0 при $t = t_0$ имеем $v(x_0, t_0) < 0$, то следует аналогично предыдущему рассмотреть изменение функции $v(t) = v(x(x_0, t_0, t), t)$ с уменьшением времени t. Повторяя с соответствующей заменой t на $-t$ все приведенные выше оценки, убедимся, что при $v(x_0, t_0)$ в области $\bar{H}_1$ не может лежать целиком отрезок рассматриваемой траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $t_0 - T_m \leqslant t \leqslant t_0$, где $T_m = M_1/\eta_m + \vartheta_m$. Этим доказательство теоремы завершается, так как $\bar{H}_1$ — любая наперед заданная область из $H_0 \subset \Gamma$.

Рассмотрим еще случай, когда функции $X_i(x, t)$ в правых частях уравнений (1.3) — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ (или не зависят явно от времени t). В этом случае условия (A) имеют ясный геометрический смысл.

Лемма 4.1. Пусть функции X_i — периодические функции времени t (или не зависят явно от времени t).

Для того чтобы в области Γ выполнялось условие (A), необходимо и достаточно, чтобы ограниченные области H_0, лежащие вместе со своим замыканием в области Γ, не содержали целых траекторий $x(x_0, t_0, t)$ при $-\infty < t < \infty$ (за исключением точки $x = 0$).

Доказательство. Необходимость условий леммы очевидна. Докажем достаточность этих условий. Пусть H_0 — область из Γ, $\overline{H}_0 \subset \Gamma$ и $R(m)$ — сфера, лежащая в области H_0 вместе со своим замыканием. Предположим от противного, что существует последовательность точек $x_0^{(l)} \in \overline{H}_0 \setminus R(m)$ и моментов времени $t_0^{(l)}$ таких, что отрезки траекторий $x(x_0^{(l)}, t_0^{(l)}, t)$ лежат целиком в области H_0 при $t_0^{(l)} - T_l \leqslant t \leqslant t_0^{(l)} + T_l$, причем $T_l \to \infty$ при $l \to \infty$. Вследствие компактности множества точек $\overline{H}_0 \setminus R(m)$ можно предполагать, что последовательность точек $x_0^{(l)}$ сходится при $l \to \infty$ к некоторой предельной точке $x_0 \in \overline{H}_0$, а моменты времени $t_0^{(l)}$ — к некоторому числу $t_0 \in [0, \vartheta]$, так как вследствие периодичности функций X_i все начальные моменты времени $t_0^{(l)}$ можно предполагать выбранными из интервала $[0, \vartheta)$. Легко видеть, что $x_0 \neq 0$. Пусть $\overline{H}_1$ — замкнутая область, где $\overline{H}_1 \subset \Gamma$ и $\overline{H}_0 \subset H_1$. Так как траектория $x(x_0, t_0, t)$ не может лежать целиком в области H_1, то можно указать момент времени $t = t_1$, когда $x(x_0, t_0, t_1) \in \overline{H}_1 \setminus H_1$. Точки $x(x_0^{(l)}, t_0^{(l)}, t_1)$ с достаточно большим номером l должны вследствие интегральной непрерывности попадать в произвольно малую окрестность точки $x(x_0, t_0, t_1)$, т. е. эти точки будут лежать вне области $\overline{H}_0$. Это противоречит выбору точек $x_0^{(l)}$. Противоречие доказывает лемму.

Итак, мы показали, что свойство (A) является необходимым условием существования функции v из теорем Ляпунова, рассматриваемых в этом параграфе. Следовательно, вопрос об обращении этих теорем можно рассматривать, лишь предполагая выполнение условий (A). Покажем теперь, что условия (A) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования функции v, имеющей знакоопределенную производную и допускающей бесконечно малый высший предел.

Теорема 4.2. Если в области $\Gamma \subset G$ выполняется условие (A), то, какова бы ни была ограниченная область H_0, лежащая со своим замыканием $\overline{H}_0$ в области Γ,

1) существует функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющая в силу уравнений возмущенного движения (1.3) знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ (4.4) в области H_0 и допускающая в этой области бесконечно малый высший предел; функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет непрерывные и равномерно ограниченные в области H_0 при $0 < t < \infty$ частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ $(i = 1, \ldots, n)$;

2) если функции X_i равномерно непрерывны по времени в области Γ при $0 < t < \infty$, то функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет

непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, причем производные любого порядка $\frac{\partial^m v}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n} \partial t^{m_{n+1}}}$ равномерно ограничены в области H_0 при $0 < t < \infty$ (каждая производная ограничена своей постоянной);

3) если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ (или функции X_i не зависят явно от времени t), то при выполнении условий (A) в области H_0 существует функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, периодическая по времени t с периодом ϑ (или не зависящая явно от времени t).

Доказательство. Введем сначала ряд обозначений и выведем некоторые оценки. Обозначим через γ число, удовлетворяющее неравенству $3\gamma < \rho(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma, H_0)$, и пусть $H_0(\gamma)$, $H_0(2\gamma)$ — множества точек x, удовлетворяющих условию $\rho(x, H_0) < \gamma$ или $\rho(x, H_0) < 2\gamma$ соответственно.

Пусть h_k — первое число в определенной выше последовательности $\{h_m\}$, удовлетворяющее условию

$$h_k < \rho(\overline{H}_0/H_0, 0).$$

Обозначим $F_m = H_0 \setminus R(m)$ $(m \geqslant k)$. Покажем сначала, что для каждого номера $m \geqslant k$ можно указать номер $N(m)$ такой, что отрезок траектории $x(x_0, t_0, t)$, лежащий в области Γ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$ (или при $t^* \leqslant t \leqslant t_0$), где $|t^* - t_0| \leqslant T_m$, не имеет точек внутри области $R(N(m))$, если только $x_0 \in F_m$. Действительно, в области $\overline{H}_0$ вдоль траектории $x(x_0, t_0, t)$ выполняется неравенство

$$\left| x_i \frac{dx_i}{dt} \right| = |x_i X_i| < nL_0 \|x\|_2^2$$

(L_0 — постоянная Липшица функций X_i в области H_0). Суммируя по i, имеем:

$$d(\|x\|_2^2) \leqslant 2n^2 L_0 \|x\|_2^2 |dt| = 2Q|dt| \qquad (Q = \text{const}).$$

Интегрируя последнее неравенство, получим:

$$\|x_0\|_2 \exp(-Q|t - t_0|) \leqslant \|x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant \|x_0\|_2 \exp Q|t - t_0|. \quad (4.11)$$

Если $x_0 \in F_m$, то $\|x_0\|_2 \geqslant h_m$ и, следовательно,

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \geqslant h_m \exp(-QT_m),$$

что и доказывает наше утверждение при условии, что в качестве числа $N(m)$ выбрано наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$h_{N(m)} < h_m \exp(-QT_m).$$

Обозначим через γ_m число, удовлетворяющее неравенствам

$$\gamma_m \leqslant \frac{1}{2}(h_{N(m)} - h_{N(m)+1}), \qquad \gamma_m \leqslant \gamma.$$

Перейдем теперь к построению функции $v(x, t)$. Рассмотрим точку $x_0 \in F(m)$ $(m \geqslant k)$. По условию (A) можно указать число θ такое, что $x(x_0, t_0, t_0 + \theta) \in (\bar{H}_0(2\gamma) \setminus H_0(2\gamma))$, причем $|\theta| \leqslant T_m$ (или $t_0 < T_m$). Пусть для определенности $\theta > 0$. Тогда по лемме 3.1 существует функция $V = v(x_0, t_0, x, t)$, определенная и непрерывная в области G при всех значениях времени t. Функция $v(x_0, t_0, x, t)$ имеет непрерывные и равномерно ограниченные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ (см. примечание 1 к леммам 3.1, 3.2). Кроме того, если в лемме 3.1 положить $\gamma = \gamma_m$, то согласно выбору числа γ_m будут выполняться также условия:

$$v(x_0, t_0, x, t) = 0 \text{ в области } \|x\|_2 \leqslant h_{N(m)+1}, \tag{4.12}$$

$$\frac{dv(x_0, t_0, x(t), t)}{dt} \geqslant 0 \text{ в области } H_0, \tag{4.13}$$

$$\frac{dv(x_0, t_0, x(t), t)}{dt} > d_m \text{ в области } \|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < d_m \tag{4.14}$$

$$\text{при } t_0 - \tau_m < t < t_0 + \tau_m,$$

где числа $\alpha_m > 0$, $\tau_m > 0$, $d_m > 0$ зависят лишь от номера m, но не зависят от выбора точки $x_0 \in F_m$; символ $\frac{dv(x_0, t_0, x(t), t)}{dt}$ означает полную производную по времени от функции $v(x_0, t_0, x, t)$, $x = x(t)$ — решение уравнений (1.3). Вследствие равномерной ограниченности производных $\frac{dx_i}{dt}$ в области $H_0(2\gamma)$ можно согласно неравенству (4.14), уменьшая числа α_m и τ_m, добиться выполнения неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dv(x_0, t_0, x(t), t)}{dt} > d_m \text{ при } \|x - x_0\|_2 < \alpha_m, \\ &-\tau_m + t_0 < t < t_0 + \tau_m. \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

В дальнейшем будем предполагать, что неравенство (4.15) выполняется.

Если для точки $x_0 \in F_m$ условие (A) выполняется при $t < t_0$, то следует аналогичным образом рассмотреть функцию $v(x_0, t_0, x, t) = V$ из леммы 3.2 (в случае $t_0 < T_m$ следует также воспользоваться леммой 3.2, полагая $\theta = -t_0$).

Множество F_m компактно, поэтому можно выбрать конечное множество точек $x_0^{(l)} \in F_m$ $(l = 1, \ldots, N_m)$ таких, что система окрестностей

$$\|x - x_0^{(l)}\|_2 < \alpha_m \qquad (l = 1, \ldots, N_m)$$

покрывает F_m. Обозначим $t_0^{(s)} = \frac{s\tau_m}{2}$ $(s = 0, 1, \ldots)$. Последовательности пар $\{x_0^{(l)}, t_0^{(s)}\}$ соответствует последовательность функций $v(x_0^{(l)}, t_0^{(s)}, x, t)$, построенных по описанному выше правилу.

Рассмотрим функцию

$$v_m(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{N_m} v(x_0^{(l)}, t_0^{(s)}, x, t), \tag{4.16}$$

где суммирование производится по всем значениям $l = 1, \ldots, N_m$, $s = 0, 1, \ldots$ По изложенному выше заключаем, что функция v_m обладает следующими свойствами: функция $v_m(x, t) = 0$ в области $R(N(m) + 1)$, функция v_m имеет непрерывные и ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам во всех точках области G. Действительно, в окрестности любой точки x из G при каждом $t > 0$ отлично от нуля лишь конечное число слагаемых в правой части равенства (4.16), причем это число ограничено постоянной, не зависящей от выбора точки. В области F_m функция v_m имеет определенно-положительную производную $\frac{dv_m}{dt}$, так как любая точка x из F_m содержится по крайней мере в одной окрестности (4.15), где для соответствующего слагаемого (4.16) выполняется неравенство (4.15). Пусть теперь выполняются неравенства

$$\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right| < P_m, \quad \left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| < P_m, \quad |v_m| < P_m. \tag{4.17}$$

Функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{P_m 2^m} v_m(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{4.18}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, ряд в правой части равенства (4.18) и ряды

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{P_m 2^m} \frac{\partial v_m}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{P_m 2^m} \frac{\partial v_m}{\partial t}$$

сходятся в области G в силу неравенств (4.17) равномерно и абсолютно, что и доказывает существование и непрерывную дифференцируемость функции v. Существование бесконечного малого высшего предела и определенная положительность функции $\frac{dv}{dt}$ следуют теперь сразу из доказанных выше свойств функций v_m Этим первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ равномерно непрерывны по времени t в области G при $0 < t < \infty$, то согласно примечанию 2 к леммам 3.1, 3.2 функции $v(x_0, t_0, x, t) = V$ будут иметь непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, причем эти производные будут равномерно ограничены (именно для этого последнего свойства и требуется равномерная непрерывность функций X_i по t). Но в таком случае и функции v_m также будут иметь непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, причем будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{\partial^l v_m}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n} \partial t^{l_{n+1}}}\right| < P_m^{(l)} \left(P_m^{(l)} = \text{const},\ l = 0, 1, \ldots\right). \tag{4.19}$$

Рассмотрим снова функцию (4.18), где числа P_m определены теперь иначе, а именно

$$P_m = \max P_\mu^{(l)} \quad \text{при} \quad \mu = 1, \ldots, m; \quad l = 1, \ldots, m. \tag{4.20}$$

Функция v (4.18) определена в области G и имеет непрерывные и ограниченные частные производные любого порядка по всем аргументам. Действительно, в силу неравенств (4.19) и выбора чисел P_m (4.20) ряд в правой части (4.18) и все ряды, составленные из частных производных любого порядка, сходятся равномерно и абсолютно в области G. Тем самым второе утверждение теоремы доказано.

Докажем третье утверждение теоремы. Пусть $X_i(x, t)$ — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ. В этом случае в формуле (4.16) можно суммировать по s в пределах $-\infty < s < \infty$, причем число τ_m в формуле (4.15) можно считать делителем периода ϑ. Тогда функции $v_m(x, t)$ наряду с другими перечисленными выше свойствами будут также периодическими функциями времени t периода ϑ, т. е. и функция $v(x, t)$ (4.18) также будет периодической функцией времени периода ϑ.

Пусть теперь правые части уравнений возмущенного движения (1.3) функции X_i — не зависят явно от времени. В этом случае при построении функций v_m выберем сначала числа $\tau_m > 0$ делителями некоторого числа $\vartheta > 0$. Обозначим построенные таким образом функции v_m через $v_m^{(0)}(x_1, \ldots, x_n, t)$.

Рассмотрим теперь последовательность функций $\frac{1}{l} v_m^{(l)}(x_1, \ldots, x_n, t)$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, в которой при построении v_m сделана замена τ_m на τ_m/l. Очевидно, функции $v_m^{(l)}(x, t)$ — периодические функции времени периода ϑ/l. Кроме того, функции $v_m^{(l)}/l$ равномерно по l ограничены в области G. Равномерно по l ограничены также и функции

$$\frac{1}{l} \frac{\partial^\mu v_m^{(l)}}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n} \partial t^{\mu_{n+1}}}$$

(каждая функция ограничена своей постоянной). Действительно, если в окрестности каждой точки x из G в формуле для $v_m^{(0)}$ число слагаемых $v(x_0, t_0, x, t)$, отличных от нуля, может быть ограничено некоторой постоянной N, то число слагаемых, отличных от нуля в окрестности той же точки $x \in G$, в формуле для $v_m^{(l)}(x, t)$ может быть ограничено постоянной Nl. Так как при этом в формуле $v_m^{(l)}/l$ имеется множитель $1/l$, то утверждение о равномерной ограниченности $v_m^{(l)}/l$ и всех частных производных от $v_m^{(l)}/l$

можно считать доказанным. Каждая функция $v_m^{(l)}/l$ имеет в области F_m определенно-положительную производную $\frac{1}{l}\frac{dv_m^{(l)}}{dt}$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{1}{l}\frac{dv_m^{(l)}}{dt} > d_m \quad (d_m > 0 - \text{const}) \tag{4.21}$$

равномерно по l. Действительно, в любой точке $x \in F_m$ число слагаемых $v(x_0, t_0, x, t)$ из (4.16), в которых выполняется неравенство (4.15) в формуле для $v_m^{(l)}$, может быть оценено снизу числом l, что и доказывает справедливость неравенства (4.21). Функции $\frac{1}{l}v_m^{(l)}$, равно как и все функции

$$\frac{1}{l}\frac{\partial^{\mu} v_m^{(l)}}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_n^{\mu_n}\,\partial t^{\mu_{n+1}}},$$

образуют семейства равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Поэтому можно построить по диагональному правилу подпоследовательность $v_m^{(l_\nu)}(x, t)$ такую, что в области G будут сходиться равномерно все последовательности

$$v_m^{(l_\nu)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{\mu} v_m^{(l_\nu)}}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_n^{\mu_n}\,\partial t^{\mu_{n+1}}}$$

к некоторым функциям

$$v_m \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{\mu} v_m}{\partial x_1^{\mu_1}\ldots\partial x_n^{\mu_n}\,\partial t^{\mu_{n+1}}}.$$

Предельная функция v_m является, очевидно, стационарной, т. е. не зависит явно от времени t, и, кроме того, для этой функции v_m справедливо также неравенство (4.21), т. е. $\frac{dv_m}{dt} > d_m$ при $x \in F_m$. Функция (4.18), где числа P_m выбраны по правилу (4.20), будет, очевидно, стационарной функцией, удовлетворяющей всем условиям теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что формулировка теоремы может быть несколько усилена в том смысле, что на функции X_i можно наложить более слабые ограничения, чем условия Липшица (1.7) (см., например, [60, 138]), однако это значительно усложнило бы доказательство, и поэтому здесь этих вопросов рассматривать не будем. Можно также указать условия, при которых функция v, имеющая знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$, определена во всей области G существования правых частей уравнений (1.3) и, в частности, во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$. Эти условия для случая асимптотической устойчивости будут приведены ниже — в § 5. Рассматривать же эти условия в общем случае здесь не будем, так как в случае неустойчивости они формулируются довольно громоздко и вряд ли представляют в этом случае интерес.

Следствием теорем 4.1, 4.2 и леммы 4.1 является, очевидно, следующее утверждение.

Теорема 4.3. Пусть правые части уравнений возмущенного движения (1.3) — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ (или не зависят явно от времени). Для того чтобы в любой ограниченной области H_0, лежащей со своим замыканием в области G, можно было построить функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ периодическую по времени t с периодом ϑ (не зависящую явно от времени t), допускающую бесконечно малый высший предел и имеющую в силу уравнений (1.3) знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в области H_0, необходимо и достаточно, чтобы области H_0, описанного вида, не содержали целых траекторий $x(x_0, t_0, t)$ при $-\infty < t < \infty$ (за исключением точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$).

Отметим в заключение одно существенное обстоятельство: как следует из приведенного выше доказательства теоремы 4.1 (и лемм 3.1 и 3.2), для построения функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющей знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в области $H_0 \setminus R(m)$ при $0 < t < T^*$, где T^*, m — некоторые фиксированные, наперед заданные положительные числа, достаточно знать приближенно (с точностью до $\varepsilon > 0$ в неравенствах (3.6)) некоторое конечное число отрезков траекторий (1.3). В этой области $H_0 \setminus R(m)$ функция v представляется тогда в замкнутой форме в виде конечной суммы. Таким образом, если известно, что в области Γ выполняется условие (A), то описанная выше конструкция позволяет построить эффективно функцию v в каждой наперед заданной области $H_0 \setminus R(m)$, $0 < t < T^*$ конечным числом операций. При построении стационарной функции v в случае стационарных функций X_i можно в этом случае также ограничиться конечным числом l_0 шагов в предельном переходе $v_m^{(l)} \to v_m$ (стр. 30) и положить $v_m(x) = v_m^{(l_0)}(x, 0)$. Такое число l_0 для каждой области $H_0 \setminus R(m)$ может быть оценено по числам P_m и d_m. Следует, однако, оговориться, что едва ли можно сейчас указать такую конкретную задачу, необходимость решения которой могла бы обосновать громоздкие вычисления, которые здесь возникают.

§ 5. Теоремы существования функций $v(x, t)$, удовлетворяющих условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости

В этом параграфе на основании результатов §§ 3 и 4 исследуются вопросы существования функций Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ уравнений (1.3). Как указывалось выше, задача о существовании функций Ляпунова такого типа рассматривалась в работах [9, 11, 13, 37, 39, 40, 44, 48, 52, 53, 60, 82, 136, 138]. Здесь теорема о существовании функции v получается из результатов § 4. Кроме того, рассмотрим здесь вопрос о существовании функции v, удовлетворяющей условиям дополненной теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (см. условие (4.5), стр. 21). Последний вопрос в указанных статьях рассматривался лишь в частном случае асимптотической устойчивости относительно любых начальных возмущений из области G. В предыдущем параграфе было установлено, что функция v из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости может существовать лишь при наличии условий (A). В случае асимптотической устойчивости условие (A) переходит в свойство *равномерной* устойчивости в смысле следующего определения.

Определение 5.1 [82]. Решение $x=0$ уравнений (1.3) называется устойчивым асимптотически равномерно по времени t_0 и координатам начальных возмущений x_0 из области G_δ, если решение $x=0$ устойчиво по Ляпунову (в смысле определений 1.1 и 1.2, стр. 9) и если для любого числа $\eta > 0$ можно указать число $T(\eta)$ такое, что выполняется неравенство

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 < \eta \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 + T(\eta), \tag{5.1}$$

каковы бы ни были начальный момент времени t_0 и координаты начальных возмущений x_0 из области G_δ. В дальнейшем будем называть это свойство траекторий свойством (B).

Из доказательства теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно заключить, что при условиях этой теоремы имеет место именно равномерная в смысле определения 5.1 устойчивость. Подробное доказательство этого приведено в статье И. Г. Малкина [82], поэтому здесь доказательства приводить не будем. Таким образом, вопрос о существовании функции v из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно ставить лишь в случае равномерной асимптотической устойчивости (что, как будет показано ниже, в данном случае эквивалентно условиям (A)). Оказывается, что действительно равномерная асимптотическая устойчивость (B) является не только необходимым, но и достаточным условием существования функции Ляпунова v.

Теорема 5.1. Пусть H_0 — ограниченная область, лежащая со своим замыканием $\overline{H}_0$ в G и $0 \in H_0$. Если решение $x=0$ системы уравнений (1.3) асимптотически устойчиво равномерно по времени t_0 и координатам x_0 начальных возмущений из области H_0, то в области H_0 существует функция $v(x, t)$, имеющая в силу уравнений (1.3) определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ в области H_0. Функция v является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел в области H_0 и имеет в этой области непрерывные и равномерно ограниченные по времени $t \in (0, \infty)$ частные производные первого порядка по всем аргументам.

Если функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ непрерывны в области $H_1 \supset \overline{H}_0$ равномерно по времени $t \in (0, \infty)$, то функция $v(x, t)$ имеет частные производные любого порядка по всем переменным, причем эти производные равномерно ограничены в области H_0, $0 < t < \infty$ (каждая производная ограничена своей постоянной).

Доказательство. Покажем сначала, что можно построить ограниченную область G_δ такую, что $\overline{H}_0 \subset G_\delta$, $\overline{G}_\delta \subset G$ и решение $x = 0$ устойчиво асимптотически равномерно в смысле определения (B) и относительно начальных возмущений x_0 из области G_δ (естественно, с измененной постоянной $T(\eta)$).

Действительно, пусть η_0 — фиксированное положительное число, удовлетворяющее неравенству $\eta_0 < \frac{1}{2}\rho(\overline{H}_0/H_0, 0)$, и $t_0 > 0$ — произвольный момент времени. По определению 1.2 существует ограниченная область Γ, ($\overline{\Gamma} \subset G$) такая, что траектории $x(x_0, t_0, t) \in \Gamma$ при $t \geqslant t_0$, если только $x_0 \in H_0$. Обозначим $2\gamma = \rho(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma, \overline{G} \setminus G)$ (если $\gamma = \infty$, то в качестве γ можно выбрать любое положительное число). По определению 5.1 свойства (B) имеем:

$$\|x(x_0, t_0, t_0 + T(\eta_0))\|_2 < \eta_0$$

для всех $x_0 \in H_0$. Обозначим через $H_0(\gamma)$ множество точек, удовлетворяющих условию $\rho(x, \Gamma) < \gamma$. По выбору γ имеем $\overline{H}_0(\gamma) \subset G$. Пусть $2\delta = \min(\gamma, \eta_0)\exp(-nL_\gamma T(\eta_0))$ и G_δ — множество точек $\rho(H_0, x) < \delta$. Если $x_0' \in G_\delta$ и $x_0'' \in G_\delta$, то вдоль траекторий $x(x_0', t_0, t)$ и $x(x_0'', t_0, t)$ будет выполняться неравенство

$$\|x(x_0'', t_0, t) - x(x_0', t_0, t)\|_2 < \|x_0'' - x_0'\|_2 \exp nL_\gamma |t - t_0| \tag{5.2}$$

при всех тех значениях t, при которых отрезки $[t_0, t]$ этих траекторий еще остаются целиком в области H_γ. (Неравенство (5.2) доказано в книге [85, стр. 23]). Согласно свойствам числа δ и по построению областей $H(\gamma)$, G_δ, заключаем теперь, что при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T(\eta_0)$ траектория $x(x_0'', t_0, t)$ при $x_0'' \in G_\delta$ остается в области $H(\gamma)$ и, кроме того,

$$\|x(x_0'', t_0, t_0 + T(\eta_0))\|_2 < 2\eta_0, \quad \text{т. е.} \quad x(x_0'', t_0, t_0 + T(\eta_0)) \in H_0.$$

Действительно, для доказательства последнего утверждения достаточно в неравенстве (5.2) выбрать точку x_0' из H_0 так, чтобы $\|x_0'' - x_0'\|_2 \leqslant 2\delta$. Но поскольку при $t = t_0 + T(\eta_0)$ траектория попадает в H_0, поскольку по определению 5.1 свойства (B) имеем теперь неравенство

$$\|x(x_0, t_0, t_0 + T(\eta_0) + t)\|_2 < \eta \quad \text{при всех} \quad t > T(\eta).$$

Таким образом, действительно область G_δ удовлетворяет всем условиям определения 5.1 свойства (B), если постоянные $T_\delta(\eta)$ для начальных возмущений x_0 из области G_δ определить по правилу $T_\delta(\eta) = T(\eta_0) + T(\eta)$, где T — постоянные из определения (B) для начальных возмущений x_0 из области H_0.

Покажем теперь, что в области G_δ выполняется условие (A) (см. определение 4.1). В самом деле, пусть

$$t_0 \geqslant T_\delta(\eta) \quad \text{и} \quad x_0 \in (G_\delta \setminus R(\eta))$$

($R(\eta)$ — область $\|x\|_2 < \eta$), тогда точка $x(x_0, t_0, t_0 - T_\delta)$ не может лежать в области G_δ, так как иначе по условиям (B) мы имели бы

$$\|x(x(x_0, t_0, t_0 - T_\delta(\eta)), t_0 - T_\delta(\eta), t_0)\|_2 = \|x_0\|_2 < \eta,$$

что приводит к противоречию.

Таким образом, в области G_δ выполняется условие (A) для отрезков отрицательных полутраекторий. Теперь на основании теоремы 4.1 заключаем о существовании в области H_0 функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющей всем условиям доказываемой теоремы, за исключением, может быть, свойства определенной положительности функции v в области H_0. (Для этого в качестве v следует выбрать функцию из теоремы 4.1 с обратным знаком.) Однако определенная положительность функции v в области H_0 устанавливается сразу, если заметить, что при построении функций $v(x_0^{(l)}, t_0^{(s)}, x, t)$ из леммы 3.2 все слагаемые в формулах (4.16), (4.18) неотрицательны и в каждой точке $x_0 \in (H_0 / R(m))$ по крайней мере одно слагаемое $v(x_0^{(l)}, t_0^{(s)}, x, t)$ в формуле (4.16) удовлетворяет в силу (4.15) и по выбору чисел $t_0^{(s)}$ неравенству

$$v(x_0^{(l)}, t_0^{(s)}, x, t) < -\Delta_m < 0 \qquad (\Delta_m = \mathrm{const}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда правые части уравнений (1.3) — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ (или не зависят явно от времени). В этом случае асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ относительно начальных возмущений из ограниченной замкнутой области H_0 всегда равномерна по координатам x_0 и времени t_0 начальных возмущений [82]. Этот факт будет доказан ниже — в главе II, где будет подробно исследована связь свойств функций Ляпунова с различными видами равномерности устойчивости. Принимая пока справедливость этого утверждения без доказательства, получим как следствие из теоремы 5.1 следующее утверждение:

Следствие 5.1. Пусть $\overline{H}_0$ — ограниченная замкнутая область, лежащая в области G. Если решение $x = 0$ уравнений (1.3) асимптотически устойчиво и область $\overline{H}_0$ лежит в области притяжения точки $x=0$, то в некоторой области $H_1 \supset \overline{H}_0$ существует функция $v(x, t)$ периодическая по времени t с периодом ϑ (или функция $v(x)$, не зависящая явно от времени t), допускающая бесконечно малый высший предел, и определенно-положительная в области H_1. Функция $v(x, t)$ имеет в силу уравнений (1.3) определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ в области H_1 и непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные в области H_1 (каждая производная ограничена своей постоянной).

Итак, вопрос обращения теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости разрешен. Заметим, однако, что теоремы 5.1 и 5.2 не решают вопроса обращения дополненной теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (теорема, стр. 21). Действительно, для доказательства существования функции v, удовлетворяющей условиям упомянутой теоремы при заданной области начальных возмущений G_δ, следовало доказать существование функции v в области Γ, где наряду с другими условиями должны выполняться условия (4.5). В общем случае в такой форме теорема необратима. В этом нетрудно убедиться на следующем примере.

Пусть траектории одного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t)$$

симметричны относительно оси t (рис. 1). Здесь решение $x\left(x_0', 0, t\right)$ стремится асимптотически к числу $x = H_0$ $(H_0 > G_\delta)$ и при всех $t_0 > 0$ область $|x| < G_\delta$ лежит в области притяжения точки $x = 0$. Более того, будем

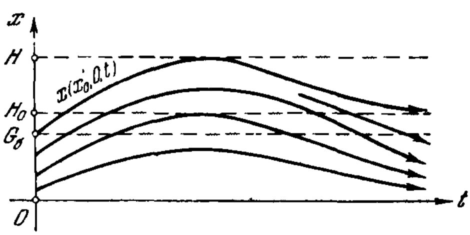

Рис. 1.

предполагать стремление траекторий $x(x_0, t_0, t)$ к нулю равномерным по x_0, t_0 в области $|x| < H_\delta < G_\delta$, $t \geqslant 0$.

Легко видеть, что здесь нельзя построить функцию $v(x, t)$ при $|x| < H$, $0 < t < \infty$, которая была бы определенно-положительной в этой области и допускала бы определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий при $0 < t < \infty$, $|x| < H$. Заметим, что в теореме (стр. 21), где речь идет об *оценках* областей G_δ и H_0, уже нельзя начинать рассмотрение задачи с произвольно большого момента времени $t_0 > 0$, но следует рассматривать функцию v именно с того момента времени (здесь $t_0 = 0$), когда произошли начальные возмущения $x_0(t_0)$.

В случае уравнений (1.3), правые части которых не зависят явно от времени, теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости в дополненной форме (с условием (4.5)) обратима всегда, как это будет видно из нижеследующего изложения.

Приведем здесь случай, когда теорема об асимптотической устойчивости обращается и в дополненной форме. Это так называемый случай устойчивости в целом в области G, когда решение $x = 0$

асимптотически устойчиво относительно возмущений из области G, причем область G такова, что $x(x_0, t_0, t) \in G$ при $t \geqslant t_0$, если только $x_0 \in G$. В частности, эта ситуация возникает, когда в качестве области G выбирается все пространство $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. Целесообразность рассмотрения такой задачи может быть обоснована в тех случаях, когда заранее трудно оценить порядок величины начальных возмущений x_0, и, чтобы охватить все возможные возмущения x_0, идеализируя задачу, допускают произвольно большие начальные возмущения. Приведем сначала теорему, которая дает достаточные условия асимптотической устойчивости в целом в области G. Для этого введем сначала одно вспомогательное определение.

Определение 5.2. Функция $v(x, t)$ допускает на границе области G *бесконечно большой низший предел* (или короче — бесконечно большой низший предел в G), если существует непрерывная функция $w(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в G и удовлетворяющая условиям

$$v(x, t) \geqslant w(x) \quad \text{всюду в } G$$

и

$$\lim w(x) = \infty \quad \text{при } \xi(x) \to \infty,$$

где

$$\xi = \max\left(\rho(0, x), \frac{1}{\rho(\bar{G} \setminus G, x)}\right).$$

Теперь достаточные условия асимптотической устойчивости в целом в области G можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.2. Решение $x = 0$ уравнений (1.3) асимптотически устойчиво в целом в области G, если можно указать функцию $v(x, t)$, определенно-положительную, допускающую бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы в области G и такую, что производная $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) является функцией определенно-отрицательной в G.

Эта теорема была доказана в работах [11—13] для случая, когда область G совпадает со всем пространством $-\infty < x_i < \infty$; позднее эта теорема была доказана и в случае произвольной области G [60, 138]. Можно показать на примере, что без требования бесконечно большого предела теорема неверна (см., например, [11]).

Доказательство теоремы проводится обычными для метода Ляпунова рассуждениями. Так как нам требуется подчеркнуть равномерный характер получающейся устойчивости, то для полноты изложения приведем здесь это доказательство.

Доказательство. Пусть $\bar{H}_0$ — ограниченная замкнутая область, лежащая в области G. Обозначим $\sup v$ в области H_0 при $0 < t < \infty$ через $M(H_0)$. Так как функция v допускает в G высший предел, то $M(H_0) < \infty$. По свойству функции v допускать бесконечно большой низший предел можно указать ограниченную область H_1 такую, что $\bar{H}_0 \subset H_1$, $\bar{H}_1 \subset G$ и $v(x, t) > M(H_0)$ при $x \in G \setminus H_1$. Рассмотрим траекторию $x(x_0, t_0, t)$, где $x_0 \in H_0$. Так как вдоль траектории $\frac{dv}{dt} < 0$, то по выбору области H_1 имеем $x(x_0, t_0, t) \in H_1$ при $t \geqslant t_0$. Все время, пока траектория $x(x_0, t_0, t)$ лежит в H_1 вне окрестности $\|x\|_2 < \eta$, вдоль этой траектории выполняется неравенство $\frac{dv}{dt} < -\alpha(\eta, H_1)$ и, следовательно,

$$v(x(x_0, t_0, t), t) < v(x_0, t_0) - \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt = v(x_0, t_0) - \alpha(t - t_0).$$

Таким образом, временная длина отрезка траектории $x(x_0, t_0, t)$, лежащего целиком вне окрестности $\|x\|_2 < \eta$, ограничена числом $T = \frac{N(H_0)}{\alpha}$. Следовательно, при $t > t_0 + T$ траектория попадает в окрестность $\|x\|_2 < \eta$, дальнейшее доказательство аналогично доказательству Ляпунова [71, стр. 85]. Тем самым доказана асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ в целом в области G. Заметим еще, что оценка области H_1 и числа T не зависит от выбора точки $x_0 \in H_0$, и определяется лишь областью H_0.

Из доказательства теоремы 5.2 следует поэтому, что при условиях этой теоремы асимптотическая устойчивость будет равномерной в смысле следующего определения:

Определение 5.3. Решение $x = 0$ будем называть равномерно асимптотически устойчивым в целом в области G (*свойство* (B) *в целом*), если, каковы бы ни были ограниченная область H_0, лежащая вместе со своим замыканием $\overline{H}_0$ в области G, и число η, можно указать ограниченную область H_1 ($\overline{H}_1 \subset G$) и число $T(H_0, \eta)$ такие, что

$$x(x_0, t_0, t) \in H_1 \quad \text{при всех } t \geqslant t_0, \tag{5.3}$$

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 < \eta \quad \text{при всех } t \geqslant t_0 + T(H_0, \eta), \tag{5.4}$$

каков бы ни был начальный момент времени t_0 и при любых начальных данных $x_0 \in H_0$.

Покажем, что равномерная устойчивость в целом в области G в свою очередь является достаточным условием существования функции $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющей в этой области всем условиям теоремы 5.2.

Теорема 5.3. Если решение $x = 0$ уравнений (1.3) асимптотически устойчиво в целом в области G, то существует функция $v(x, t)$, определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы в области G. Функция $v(x, t)$ имеет в области G определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$

в силу уравнений возмущенного движения (1.3) и непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ $(i=1, \ldots, n)$, равномерно ограниченные по времени t в каждой ограниченной области $\overline{H}_0 (\overline{H}_0 \subset G)$ при $0 < t < \infty$.

Если функции X_i в правых частях уравнений (1.3) непрерывны равномерно по времени t в каждой ограниченной области $H_0 (\overline{H}_0 \subset G)$, то функция v имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные по времени в каждой области H_0 при $0 < t < \infty$ (каждая производная ограничена своей постоянной).

Если функции X_i — периодические функции времени t периода ϑ (или не зависят явно от времени), то существует функция v, которая, помимо других свойств, перечисленных в формулировке теоремы, является периодической функцией времени периода ϑ (или не зависит явно от времени).

Доказательство. Рассмотрим некоторую область $H_0 \subset G$. Согласно доказанному выше (теоремы 4.1 и 5.1) существует функция $v_0(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная в области G и удовлетворяющая следующим условиям: вне области $H_0(2\gamma)$, т. е. вне множества точек $x \in G$, удовлетворяющих условию $\rho(H_0, x) < 2\gamma$, $3\gamma = \rho(\overline{G} \setminus G, H_0)$, функция v_0 тождественно равна нулю, в области $\overline{H}_0$ функция v_0 является определенно-положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, и производная $\frac{dv_0}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения (1.3) является функцией определенно-отрицательной в области H_0. В области $H_0(2\gamma) \setminus \overline{H}_0$ функция v_0 может иметь и положительную производную $\frac{dv_0}{dt}$, которая удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{dv_0}{dt} \right| < N_0 \qquad (N_0 = \text{const}). \tag{5.5}$$

Рассмотрим теперь последовательность областей H_m $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\overline{H}_m \subset H_{m-1}$;

2) $\bigcup\limits_m H_m = G$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_ε, начиная с которого $H_m \subset R(\varepsilon)$ при $m \geqslant N_\varepsilon$ ($R(\varepsilon)$ — окрестность $\|x\|_2 < \varepsilon$);

4) $H_{-1} = H_0(2\gamma)$.

Обозначим $F_m = H_{m-1} \setminus H_m$. Повторяя построение функций v_m, выполненное при доказательстве теоремы 4.1, можно для $m = -1$,

$-2, \ldots$ построить функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\frac{dv_m}{dt} < -d_m < 0 \text{ в области } F_m, \tag{5.6}$$

$$\frac{dv_m}{dt} \leqslant 0 \text{ в области } \overline{H}_m, \tag{5.7}$$

$$v_m = 0 \text{ в } H_{\mu(m)}, \quad v_m = 0 \text{ в области } G \setminus \overline{H}_{m-1}, \tag{5.8}$$

$$\left| \frac{dv_m}{dt} \right| < M_m \text{ в области } F_{m-1}, \tag{5.9}$$

$$v_m > Q_m > 0 \text{ в области } F_m. \tag{5.10}$$

Здесь особенно важно отметить, что существует такая область $H_{\mu(m)}$, где $v_m \equiv 0$, причем с убыванием номера m номер области $H_{\mu(m)}$ также будет неограниченно убывать. Действительно, согласно лемме 3.2 слагаемые $v(x_0, t_0, x, t)$, из которых по формуле (4.16) построена функция v_m, можно предполагать равными нулю в области $H_{\nu+1}$, если только соответствующий отрезок траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $(-\theta + t_0 \leqslant t \leqslant t_0)$, на котором построена функция $v(x_0, t_0, t, x)$, лежит вне области H_ν. Но согласно определению 5.3 свойства (B), если точка x_0 лежит вне области H_m, то весь отрезок траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $t < 0$ должен лежать вне области $H_{\nu(m)}$, причем при убывании номера m номер $\nu(m)$ также неограниченно убывает. Поэтому можно положить $\mu(m) = \nu(m) + 1$. Умножая в случае необходимости функции v_m на постоянный множитель, можно добиться выполнения условий

$$v_m > -m \text{ в области } F_m \text{ при } m = -1, -2, \ldots$$

и

$$\frac{dv_m}{dt} < -2 \sum_{k=m+1}^{0} \left| \frac{dv_k}{dt} \right| \text{ в области } F_m \text{ при } m = -1, -2, \ldots$$

Теперь нетрудно проверить, что функция

$$v(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{0} v_m(x, t)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Мы здесь на этой проверке останавливаться не будем, так как она весьма просто получается из свойств функций v_m.

Как было показано выше на примере (стр. 35, рис. 1), в общем случае дополненную теорему Ляпунова (с условием (4.5), оценивающим область притяжения H_0) обратить нельзя, если требовать, чтобы при каждом $t \in (0, \infty)$ функция $v(x, t)$ была определена в области Г, не зависящей от времени. Можно, однако, эту теорему несколько модифицировать так, чтобы формулировка теоремы допускала обращение во всех случаях и в то же время чтобы в формулировку теоремы включалось условие, аналогичное неравенству (4.5), оценивающее область притяжения G_δ. При этом приходится допустить, что область Γ, где определена функция $v(x, t)$, так же как и область H_0, на границе которой $\inf v$ больше, чем $\sup v$ в G_δ, зависит от времени t. Таким образом, теорему на стр. 21 можно модифицировать так: решение $x=0$ асимптотически устойчиво и область G_δ лежит в области притяжения точки $x=0$, если можно построить функцию $v(x, t)$, обладающую следующими свойствами: при каждом $t \in (0, \infty)$ функция $v(x, t)$ определена в некоторой области $G(t) \subset \Gamma$; в области $G(t)$ функция $v(x, t)$ является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел и имеет в силу уравнений возмущенного движения (1.3) определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$; при каждом $t \in (0, \infty)$ существует область $G_0(t)$ [1]) такая, что $\bar{G}_0(t) \subset G(t)$, причем выполняется неравенство

$$\sup[v(x, t) \text{ в области } G_\delta] < \inf[v(x, t) \text{ в точках } \bar{G}_0(t) \setminus G_0(t)]. \quad (5.11)$$

Действительно, рассмотрим траекторию $x(x_0, t_0, t)$, где $x_0 \in G_\delta$. Вследствие неравенства (5.11) траектория $x(x_0, t_0, t)$ не может покинуть область $G_0(t)$ ни при каком $t \geqslant t_0$, так как в области $G(\tau)$, содержащей область $G_0(\tau)$, при всех $\tau \leqslant t$ производная $\frac{dv}{dt}$ меньше нуля, и область $G_0(\tau)$ меняется непрерывно по τ. Таким образом, при всех $t \geqslant t_0$ точка $x(x_0, t_0, t) \in G(t) \subset \Gamma$. Но в области $G(t)$ производная $\frac{dv}{dt}$ является определенно-отрицательной, что и позволяет завершить доказательство, так же как это сделано в книге Ляпунова [71, стр. 85]. Заметим лишь, что из оценок, которые получаются при доказательстве, следует, что асимптотическая устойчивость решения $x=0$ будет равномерной в смысле определения 5.2 (B) относительно начальных возмущений x_0 из области G_δ.

Можно показать, что, обратно, в случае, если решение $x=0$ асимптотически устойчиво равномерно в смысле определения 5.2 (B) по времени t_0 и координатам x_0 из области G_δ, то существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, а именно, справедливо следующее утверждение:

Если решение $x=0$ уравнений (1.3) асимптотически устойчиво равномерно в смысле определения (B), то существует функция $v(x, t)$, определенная при каждом $t > 0$ в области $G(t)$ $(\bar{G}_\delta \subset G(t) \subset \Gamma)$,

---

[1]) Предполагается, что область $G_0(t)$ состоит из одной компоненты и меняется непрерывно с изменением времени t.

определенно-положительная в $G(t)$, допускающая бесконечно малый высший предел в $G(t)$ и такая, что производная ее $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) является функцией определенно-отрицательной в $G(t)$. При этом при каждом $t \in (0, \infty)$ существует равномерно ограниченная область $G_0(t)$ такая, что $\overline{G}_0(t) \subset G(t)$ и выполняется неравенство (5.11).

Приведем здесь доказательство этого утверждения при несколько более жестких ограничениях, наложенных на функции X_i, чем это предполагалось выше. А именно, будем предполагать, что функции $X_i(x, t)$ в правых частях уравнений возмущенного движения (1.3) имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$, равномерно ограниченные по времени в области Г, т. е.

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L \quad \text{при} \quad x \in \Gamma,\ 0 < t < \infty. \tag{5.12}$$

Доказательство. Как показано в начале доказательства теоремы 5.1, существует область H_1 такая, что $\overline{G}_\delta \subset H_1$, $\overline{H}_1 \subset \Gamma$ и решение $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно в смысле определения (*B*) также относительно начальных возмущений x_0 из области H_1. Обозначим через $G(t)$ область, заполненную точками $x(x_0, t_0, t)$, где $x_0 \in H_1$ и начальный момент t_0 меняется в пределах $0 < t_0 < t$; через $\overline{G}_3(t)$ обозначим замкнутое множество точек $x(x_0, t_0, t)$ при $0 \leqslant t_0 \leqslant t$, $x_0 \in \overline{G}_\delta$. В области $G(t)$ построим функцию $v_1(x, t)$ следующим образом. Пусть $\varphi(\tau)$ — непрерывная, монотонно убывающая до нуля при $\tau \to \infty$ функция такая, что

$$\| x(x_0, t_0, \tau)\|_2^2 \leqslant \varphi(\tau - t_0) \quad \text{при всех} \quad \tau > t_0,\ x_0 \in G(t_0). \tag{5.13}$$

Существование функции $\varphi(\tau)$ следует из свойства равномерной асимптотической устойчивости, построение $\varphi(\tau)$ по этим свойствам подробно описано, например, в книге [77, стр. 306]. Там же доказано существование монотонно возрастающей функции $V[\varphi]$, имеющей монотонно возрастающую производную, такой, что

$$\int_0^\infty V[\varphi(\tau)]\, d\tau = N_1 < \infty, \tag{5.14}$$

$$\int_0^\infty V'[\varphi(\tau)]\, e^{nL\tau}\, d\tau = N_2 < \infty. \tag{5.15}$$

Функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенная формулой

$$v_1(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) = \int_{t_0}^\infty V\left[\| x(x_0, t_0, \tau)\|_2^2\right] d\tau, \tag{5.16}$$

является непрерывно дифференцируемой в области $G(t)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n, t$ и имеет в этой области определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$; функция $v(x, t)$ является функцией определенно-положительной в $G(t)$. Справедливость всех этих утверждений проверяется по формуле (5.16) и условиям (5.14) и (5.15). Здесь этой проверки выполнять не будем (см., например, [77, стр. 300—307]). Пусть $M = \sup v(x\ t)$ при $x \in \overline{G}_\delta$, $0 < t < \infty$. Построим непрерывно дифференцируемую функцию $f(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенную в области $G(t)$ при $0 < t < \infty$ и удовлетворяющую условиям:

$$f(x, t) = \|x\|_2^2 \text{ в области } G_\beta(t), \tag{5.17}$$

$$V[f(x, t)] > Q \text{ в области } \rho(x, G_\beta(t)) > \frac{1}{4}\rho(\overline{G}(t) \setminus G(t), G_\beta(t)), \tag{5.18}$$

где

$$Q = 4MnL\frac{1}{\alpha}\max\left(\|x\|_2^2 \text{ при } x \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma\right)$$

$$(\alpha = \min[\overline{G}(t) \setminus G(t), G_\beta(t)] \text{ при } 0 < t < \infty).$$

Существование функции $f(x, t)$, обладающей приведенными свойствами (5.17) и (5.18), можно доказать приемом, обычным для доказательства теорем о распространении функций [112, Приложение]. Мы не будем здесь приводить этого доказательства, заметим лишь, что при наших условиях можно доказать существование функции $f(x, t)$, имеющей непрерывные и равномерно ограниченные по времени частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ всюду в области Γ при $0 < t < \infty$.

Функция $v(x, t)$, определенная формулой

$$v(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0) = \int_t^\infty V[f(x(x_0, t_0, \tau), \tau)]\,d\tau, \tag{5.19}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Проверим здесь лишь выполнение условия (5.11). Вследствие (5.17) имеем $v = v_1$ в области G_β, поэтому достаточно проверить выполнение неравенства

$$v(x, t) > M \text{ при } \rho(x, G_\beta(t)) > \frac{\alpha}{2}, \ x \in G(t), \tag{5.20}$$

так как тогда можно будет положить $G_0(t)$ равной множеству точек, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, G_\beta(t)) < \frac{\alpha}{2}$, и условие (5.11) будет выполнено. Пусть x_0 — точка из области (5.20). Имеем оценку

$$v(x_0, t_0) = \int_t^\infty V[f(x(x_0, t_0, \tau), \tau)]\,d\tau > \int_t^{t+\vartheta} V[f]\,d\tau,$$

где $\vartheta = \frac{\alpha}{4nLR}$, $R = \max(\|x\|_2 \text{ при } x \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma)$.

Так как за время $\vartheta = \alpha/4nLR$ траектория $x(x_0, t_0, t)$ остается в области $\rho[x, G_\beta(t)] > \frac{\alpha}{4}$, где выполняется оценка (5.18), то в рассматриваемой точке x_0 выполняется неравенство

$$v(x_0, t_0) > \vartheta Q > M,$$

что и доказывает справедливость неравенства (5.20).

Заметим еще, что построенная функция $v(x, t)$ имеет равномерно ограниченные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ в области определения $G(t)$. Действительно, можно записать при $x \in G(t)$:

$$v(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} V[f]\,d\tau = \int_{t_0}^{t_0+\theta} V[f]\,d\tau + v(x(t_0+\theta),\ t_0+\theta), \tag{5.21}$$

где $x(t_0+\theta) \in G_\delta$.

В силу равномерности асимптотической устойчивости относительно начальных данных из области H_1 (а следовательно, и из области $G(t)$) число θ в последнем равенстве равномерно ограничено.

Первое слагаемое в равенстве (5.21) есть интеграл, зависящий от координат x_{i0}, как от параметров. Поскольку функции V, f, $x_i(x_0, t_0, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ при наших предположениях являются непрерывно дифференцируемыми функциями (так как в силу теорем [185, стр. 23—30] решения $x_i(x_0, t_0, t)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}$, равномерно ограниченные при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\theta$), то интеграл $\int_{t_0}^{t+\theta} V[f(x(x_0, t_0, \tau), \tau)]\,d\tau$ также имеет непрерывные и равномерно ограниченные частные производные по x_{j0} в силу теорем о дифференцировании интеграла по параметру [68]. Второе слагаемое есть функция $v_1(x_0, t)$ при $x_0 \in G_\delta$, которая также имеет непрерывные и равномерно ограниченные частные производные $\frac{\partial v_1}{\partial x_{j0}}$ (см. выше, стр. 41). Этим и устанавливается дифференцируемость $v(x, t)$ в области $G(t)$. Таким образом, справедливость нашего утверждения можно считать установленной.

§ 6. Теоремы существования функций $v(x, t)$, удовлетворяющих условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости

1. В этом параграфе на основании полученных ранее результатов (§§ 3 и 4) рассматриваются вопросы существования функций Ляпунова $v(x, t)$, удовлетворяющих условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости. Формулировка этой теоремы [71, теорема II, стр. 87] была приведена выше (стр. 11). Рассмотрим сначала общий случай неустановившегося движения, т. е. случай, когда функции $X_i(x, t)$ в правых частях уравнений (1.3) зависят явно от времени. Функция $v(x, t)$ из рассматриваемой здесь теоремы Ляпунова имеет знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения (1.3) и допускает бесконечно малый высший предел. Согласно теореме 4.2 это возможно лишь в том случае, когда в некоторой области, охватывающей невозмущенное решение $x = 0$, выполняется условие (A) (см. определение 4.1). Таким образом, при выполнении условий теоремы II [71, стр. 85] не только имеет место неустойчивость решения $x = 0$, но и выполняется условие (A) (в некоторой окрестности точки $x = 0$). Следовательно, вопрос о существовании функции v из теоремы II Ляпунова можно ставить лишь при выполнении условий (A) (и, естественно, лишь в случае неустойчивости решения $x=0$). В такой постановке ответ на вопрос о существовании функции v решается положительно.

Теорема 6.1. Если решение $x=0$ уравнений (1.3) неустойчиво в области Γ[1]), в которой выполняется условие (A) (стр. 23), то в каждой ограниченной области H_0, лежащей вместе со своим замыканием в области Γ, существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, т. е. существует функция v, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в области H_0, и при каждом $t_0>0$ можно указать последовательность точек $x_0^{(k)}$ таких, что $\lim x_{i0}^{(k)}=0$ при $k\to\infty$ $(i=1, \ldots, n)$ и $\operatorname{sign} v\left(x_0^{(k)}, t_0\right)=\operatorname{sign}\frac{dv}{dt}$. Функция $v(x, t)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial t}$ $(i=1, \ldots, n)$, равномерно ограниченные в области $x\in H_0$, $t\in(0, \infty)$.

Если функции X_i равномерно непрерывны по времени при $x\in H_0$, $t\in(0, \infty)$, то функция v имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные при $0<t<\infty$ (каждая производная ограничена своей постоянной).

Доказательство. Согласно теореме 4.1 в области H_0 существует функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы 6.1 за исключением, может быть, свойства принимать в произвольной окрестности точки $x=0$ значения того же знака, что и знак ее производной.

Обозначим эту функцию символом $v_1(x, t)$. Пусть H_1 — ограниченная область, лежащая со своим замыканием $\bar{H}_1$ в области Γ и содержащая область $\bar{H}_0$. Обозначим через $x_0^{(k)}\in H_0$ $(k=1, 2, \ldots)$ последовательность точек, сходящуюся к точке $x=0$, такую, что траектории $x\left(x_0^{(k)}, 0, t\right)$ покидают область H_1 с возрастанием времени t (пусть впервые при $t=t_k>0$). По лемме 3.1 на каждом отрезке $x\left(x_0^{(k)}, 0, t\right)$ $(0<t<t_k)$ можно построить функцию $v^{(k)}(x, t)$, положительную в окрестности этого отрезка траектории и имеющую положительную производную в этой окрестности. Кроме того, в области H_0 будет выполняться неравенство $\frac{dv^{(k)}}{dt}\geqslant 0$. Функции $v^{(k)}$ имеют в области $x\in H_0$, $t>0$ непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам. Пусть N_k — последовательность чисел,

---

[1]) Последнее означает, что для любой ограниченной области $\bar{H}_0\subset\Gamma$ можно (при каждом заданном $t_0>0$) указать последовательность точек $x_0^{(k)}$, сходящихся к точке $x=0$, таких, что траектории $x\left(x_0^{(k)}, t_0, t\right)$ покидают область H_0 с возрастанием времени t.

удовлетворяющих неравенствам

$$|v^{(k)}| < N_k, \quad \left| \frac{\partial^{\mu} v^{(m)}}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n} \partial t^{\mu_{n+1}}} \right| < N_k \tag{6.1}$$

(при $m = 1, \ldots, k$, $0 \leqslant t < \infty$, $\mu = 1, \ldots, k$). Так как каждая функция $v^{(k)}$ может принимать значения, отличные от нуля лишь на отрезках времени $t < t_k + 2\tau_k$, ограниченных для каждой данной функции $v^{(k)}$ сверху, то существование последовательности чисел N_k, удовлетворяющих неравенствам (6.1), очевидно. Построим функцию

$$v_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k N_k} v^{(k)}(x, t). \tag{6.2}$$

Функция v_2 определена в области $x \in H_0$, $0 < t < \infty$ и имеет в этой области непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, равномерно ограниченные (каждая своей постоянной), так как ряд (6.2) и ряды, получающиеся почленным дифференцированием этого ряда, сходятся равномерно и абсолютно в области $x \in H_0$, $0 < t < \infty$. Кроме того, по выбору функций $v^{(k)}$ имеем:

$$v_2\left(x_0^{(k)}, 0\right) = \alpha_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6.3}$$

Вследствие существования равномерно ограниченных частных производных $\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial x_i}$ введенная выше в начале доказательства функция v_1 удовлетворяет неравенству

$$|v_1(x, t)| < M \|x\|_2 \quad (x \in H_0, \; M = \text{const}). \tag{6.4}$$

Пусть $f(r)$ — непрерывно дифференцируемая произвольное число раз функция, удовлетворяющая неравенству

$$f\left(M \left\| x_0^{(k)} \right\|\right) < \frac{1}{2} \alpha_k, \tag{6.5}$$

и кроме того

$$f'(r) > 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Доказательство существования функции $f(r)$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям, несложно, и мы его здесь приводить не будем.

Теперь можно показать, что функция $v = f(v_1) + v_2$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Выполнение всех этих условий следует сразу из свойств функций v_1 и v_2. Проверим здесь лишь одно из этих условий, а именно, покажем, что при каждом $t_0 > 0$ можно указать последовательность точек, где выполняется неравенство $v > 0$, причем последовательность эта должна сходиться к точке $x = 0$. Но вследствие неравенств (6.3), (6.4) и (6.5) по построению функции v

в достаточно малых окрестностях $u_k(x_0^{(k)})$ точек x_0^k при $t=0$ должны выполняться неравенства $v>0$ в u_k. Вследствие определенной положительности $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий $x(x_0, 0, t)$ при x_0 из этих окрестностей u_k будет выполняться неравенство $v>0$ при всех тех значениях $t>0$, при которых траектория остается еще в области H_0. Поэтому справедливы неравенства

$$v(x(x_0, 0, t_0), t_0)>0 \quad \text{при} \quad x_0 \in u_k, \ t_0>0$$

для всех достаточно больших номеров k. Так как вследствие непрерывной зависимости решений $x(x_0, t_0, t)$ от начальных данных имеем $\lim(x(x_0, 0, t_0))=0$ при $x_0 \to 0$, то совокупность точек $x(x_0, 0, t_0)$ при $x_0 \in u_k$ образует множество точек, имеющее начало координат $x=0$ предельной точкой, причем на этом множестве выполняется неравенство $v>0$. Тем самым доказательство теоремы можно считать завершенным, так как содержащееся в формулировке теоремы утверждение о достаточной гладкости функции $v(x, t)$ следует непосредственно из соответствующей гладкости функций v_1 и v_2 (см. примечания 2 к лемме 3.1 и теорему 4.1).

2. Рассмотрим теперь случай, когда правые части уравнений (1.3) X_i — периодические функции времени одного и того же периода ϑ (или не зависят явно от времени t). В этих случаях, как показано выше, условие (A) (лемма 4.1, стр. 24) эквивалентно требованию отсутствия целых траекторий системы (1.3), лежащих целиком в ограниченных областях H_0 ($\bar{H}_0 \subset \Gamma$) (за исключением решения $x=0$). Поэтому вопрос о существовании функции v из первой теоремы Ляпунова о неустойчивости решается здесь следующим образом.

Теорема 6.2. Пусть решение $x=0$ уравнений (1.3), где $X_i(x, t)$ — периодические функции времени t периода ϑ (или не зависят явно от времени t), неустойчиво в области Γ[1]). Если в каждой ограниченной области H_0 ($\bar{H}_0 \subset H$) не содержится целых траекторий системы (1.3) (кроме точки $x=0$), то в любой такой области H_0 существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, т. е. существует функция v, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая знакоопределенную производную $\frac{dv}{dt}$ в области H_0, причем при каждом $t>0$ можно указать последовательность точек $x_0^{(k)}$ таких, что $\lim x_0^{(k)}=0$ при $k \to \infty$ и $\operatorname{sign} v(x_0^{(k)}, t)=\operatorname{sign}\frac{dv}{dt}$. Функция v является периодической функцией времени t периода ϑ (или не зависит явно от времени t) и является непрерывно дифференцируемой (произвольное число раз) функцией всех своих аргументов при $x \in H_0$.

---

[1]) См. сноску на стр. 44.

Доказательство. Согласно теореме 4.3 в области H_0 существует периодическая по времени t функция $v(x, t)$ (или функция $v(x)$, если функции X_i не зависят явно от времени t), удовлетворяющая всем условиям доказываемой теоремы, за исключением, может быть, лишь свойства принимать положительные значения в произвольной окрестности точки $x=0$ (мы принимаем для определенности, что функция v имеет в области H_0 определенно-положительную производную $\left.\frac{dv}{dt}\right)$. Покажем, однако, что в случае неустойчивости функция v из теоремы 4.3 обладает и этим последним свойством.

Предположим от противного, что в области H_0 содержится окрестность U точки $x=0$, где функция $v(x, t)$ принимает только неположительные значения. Пусть сначала $v(x, t) < 0$ при $x \neq 0$ для всех $x \in U$. Тогда в каждой области $0 < \delta_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \delta_2$ при $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, содержащейся в окрестности U, непрерывная отрицательная функция $v(x, t)$ должна достигать отрицательного максимума. Следовательно, периодическая функция $v(x, t)$ была бы в этом случае определенно-отрицательной в некоторой окрестности точки $x=0$. Но в таком случае в этой окрестности функция v удовлетворяла бы всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, что невозможно, так как по предположению решение $x=0$ неустойчиво. Предположим теперь, что существует последовательность точек $x_0^{(k)} \neq 0$ и $t_0^{(k)} \in [0, \vartheta]$ таких, что $x_0^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$ и $v\left(x_0^{(k)}, t_0^{(k)}\right)=0$. (В случае функций $X_i(x)$ в качестве ϑ можно выбрать произвольное положительное число.) Вследствие определенной положительности $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий системы (1.3) имеем:

$$v\left(x\left(x_0^{(k)}, t_k, 2\vartheta\right), 2\vartheta\right)=\int_{t_k}^{2\vartheta}\left(\frac{dv}{dt}\right) dt > 0.$$

Так как $x\left(x_0^{(k)}, t_0^{(k)}, 2\vartheta\right) \to 0$ при $x_0^{(k)} \to 0$, то снова приходим к противоречию с предположением о том, что существует окрестность U точки $x=0$, где выполняется неравенство $v \leqslant 0$. Полученные противоречия доказывают, что точка $x=0$ является предельной точкой для множества точек, где $v>0$. Тем самым мы установили, что функция v из теоремы 4.3 удовлетворяет всем условиям теоремы 6.2, чем и завершается доказательство этой теоремы.

§ 7. Теорема существования функций $v(x, t)$, удовлетворяющих условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости и условиям теоремы Четаева о неустойчивости

1. В этом параграфе мы покажем, что во всех случаях неустойчивости можно доказать существование функции $v(x, t)$, удовлетворяющей условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости [71],

теорема III, стр. 92], а также докажем существование функции v, удовлетворяющей условиям теоремы о неустойчивости, предложенной Н. Г. Четаевым [124, стр. 34]. Таким образом, обе эти теоремы являются универсальным средством для доказательства неустойчивости невозмущенного движения $x = 0$. Рассмотрим сначала вопрос о существовании функции v из теоремы Четаева, так как требования, предъявляемые к этой функции теоремой [124, стр. 34], слабее, чем требования, предъявляемые теоремой Ляпунова [71, стр. 92].

Приведем здесь для полноты изложения формулировку теоремы Четаева о неустойчивости. Предварительно введем следующее определение [124].

Определение 7.1. Пусть в области H_1 определена функция $v(x, t)$. Функцию $\frac{dv}{dt}$ будем называть определенно-положительной в области $v > 0$ (при $x \in H_0$, $0 < t < \infty$), если для любого числа $\delta > 0$ можно указать число $\varepsilon > 0$ такое, что $\frac{dv}{dt} > \varepsilon$ при всех x из области $v(x, t) > \delta$, $x \in H_0$.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию $v(x, t)$, ограниченную в области $v > 0$, существующей при всяком $t > 0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_i $(i = 1, \ldots, n)$, производная которой $\frac{dv}{dt}$ в силу этих уравнений была бы определенно-положительной в области $v > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво [124, стр. 34].

Заметим, что в формулировке этой теоремы не предполагается существование функции v во всей окрестности точки $x = 0$. Достаточно ограничиться лишь областью $v > 0$. При этом для справедливости теоремы достаточно под областью $v > 0$ понимать некоторое открытое множество V точек x таких, что $v(x, t) > 0$ при $x \in V$ и $v(x, t) \to 0$ при $x \to \bar{V} \setminus V$.

В приведенной теореме имеется в виду, что множество точек x, t, где $v(x, t) > 0$ в $(n+1)$-мерном пространстве $x \times t$, также является открытым множеством. Область V может меняться со временем, но при этом следует предполагать, что это изменение непрерывно по t. Если иметь в виду неустойчивость в заданной наперед области Γ (см. сноску на стр. 44), то формулировку теоремы следует дополнить условием, чтобы функция $\frac{dv(x, t)}{dt}$ была определенно-положительной при $v > 0$ в области $H_0 \subset \Gamma$ (и потребовать, чтобы такую функцию v можно было указать для любой наперед заданной области H_0 $(\bar{H}_0 \subset \Gamma)$).

Теорема Четаева была обращена сначала для уравнений возмущенного движения, правые части которых не зависят явно от времени [48]. Позднее существование функции $v(x, t)$ в общем случае уравнений (1.3) было доказано в статьях И. Вркоча [18] и автора [52]. Приведем здесь доказательство теоремы существования функции v, опирающееся на лемму 3.1. Формулировка теоремы, приведенной ниже, является несколько более сильной, чем в указанных выше статьях.

Введем сначала следующее определение.

Определение 7.2. Пусть решение $x=0$ уравнений (1.3) неустойчиво в области Γ и пусть H_0 — ограниченная область, лежащая со своим замыканием $\overline{H}_0$ в области Γ. Множество точек $E(t_0)$ из H_0 назовем областью неустойчивости решения $x=0$ в области H_0 при $t=t_0$, если при $x_0 \in E(t_0)$ траектория $x(x_0, t_0, t)$ покидает область $\overline{H}_0$ с возрастанием времени t.

Пусть дана область H_0. Если в области $\overline{H}_0$ выполняются условия теоремы Четаева [1]), то точки x_0 из области $v>0$ содержатся в $E(t_0)$. Чтобы проверить это, повторим здесь доказательство теоремы Четаева [124, стр. 34—35]. Пусть $v(x_0, t_0)>0$ и $v(x_0, t_0)=\alpha$. Вследствие условия $\frac{dv}{dt}>0$ траектория $x(x_0, t_0, t)$ остается в области $v(x, t)>0$ (и больше того, в области $v(x, t)>\alpha$) все время, пока при $t \geqslant t_0$ имеем $x(x_0, t_0, t) \in \overline{H}_0$. Но пока $x(x_0, t_0, t)$ остается в области $\overline{H}_0$ по свойству определенной положительности функции $\frac{dv}{dt}$ в области $v>0$, имеем $\frac{dv}{dt}>\beta>0$ ($\beta=\mathrm{const}$). Следовательно, при всех таких значениях $t \geqslant t_0$ справедлива оценка $v(x(x_0, t_0, t), t)>$ $>\beta(t-t_0)$, из которой следует, что траектория $x(x_0, t_0, t)$ не может лежать в области $\overline{H}_0$ при всех значениях времени t из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T$, где $T=(\max|v|$ в $\overline{H}_0)/\beta$. Этим наше утверждение доказано.

Таким образом, при обращении теоремы Четаева можно поставить вопрос о существовании лишь такой функции $v(x, t)$, для которой область $v>0$ содержится в области неустойчивости $E(t)$ (см. выше определение 7.2). Ответ будет наиболее полным, если мы покажем, что существует функция $v(x, t)$, для которой область

---

[1]) Так как для вычисления $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) по формуле $\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i+\frac{\partial v}{\partial t}$ требуются существование и непрерывность производных $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ в некоторой окрестности точки, где вычисляется $\frac{dv}{dt}$, то последнее выражение следует понимать в том смысле, что область $v>0$, где определена функция v, при каждом $t>0$ охватывает окрестности точек x, где $x \in \overline{H}_0 \setminus H_0$, $v(x, t)>\varepsilon>0$.

неустойчивости совпадает с областью $E(t)$ (в H_0). Покажем, что именно такой ответ и может быть получен на самом деле.

Теорема 7.1. Пусть решение $x=0$ неустойчиво в области Γ и H_0 — ограниченная область, лежащая вместе со своим замыканием $\overline{H}_0$ в Γ, тогда существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая в области $\overline{H}_0$[1]) условиям теоремы Четаева о неустойчивости, т. е. в точках x из области $v>0$, где $x \in \overline{H}_0$, функция $\frac{dv}{dt}$ является функцией определенно-положительной (в смысле определения 7.1 на стр. 48). В области $\overline{H}_0$ функция v является ограниченной и имеет непрерывные, равномерно ограниченные по времени t частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ $(i=1, \ldots, n)$. Область неустойчивости $E(t_0)$ (в H_0) совпадает при каждом значении времени $t=t_0$ с областью $v>0$.

Доказательство. Покажем сначала, что область неустойчивости $E(t_0)$ является открытым множеством (в $\overline{H}_0$). Действительно, пусть $x_0 \in E(t_0)$. По определению $E(t_0)$ можно указать значение времени $t=t^*$, когда $x(x_0, t_0, t^*) \in (\Gamma \setminus \overline{H}_0)$. Вследствие непрерывной зависимости решения $x(x_0, t_0, t)$ от начальных данных x_0 и t_0 можно указать числа $\delta>0$ и $\tau>0$ такие, что точки $x(x_0^*, t_0^*, t^*)$ также будут лежать вне области $\overline{H}_0$, если только $\|x_0^*-x_0\|<\delta$ и $\|t_0^*-t_0\|<\tau$, т. е. точки $\|x_0^*-x_0\|<\delta$ также принадлежат множеству $E(t_0)$. Тем самым мы установили, что $E(t_0)$ — открытое множество в $\overline{H}_0$ и больше того: множество точек x_0, t_0 в $(n+1)$-мерном пространстве $x \times t$, принадлежащих $E(t_0)$ (при каждом $t_0 \in (0, \infty)$), также является открытым в этом пространстве. Совокупность таких точек x_0, t_0, где $x_0 \in E(t_0)$ при $0 \leqslant t_0 < \infty$, будем обозначать в дальнейшем через E.

Перейдем теперь к построению функции v. Пусть δ_k — последовательность монотонно убывающих положительных чисел ($k=1, 2, \ldots$ $\ldots, \delta_1<1$). Обозначим через E_k $(k=1, 2, \ldots)$ множество точек $x \in \overline{H}_0$, $t \in [0, \infty)$, определенное условиями

$$\delta_k \leqslant t \leqslant k, \qquad \rho[x, (\overline{E}(t) \setminus E(t))] \geqslant \delta_k, \qquad x \in E(t). \tag{7.1}$$

Пусть m — первый номер, такой, что множество E_m не пусто. Рассмотрим пару (точку x_0 и момент t_0), содержащуюся в области E_k при $k \geqslant m$. Так как по определению E_k точка $x_0 \in E(t_0)$, то можно указать число $t^*>t_0$ такое, что $x(x_0, t_0, t^*) \notin \overline{H}_0$. Пусть $\gamma = \min \rho\, (x(x_0, t_0, t), (H_0 \setminus \overline{E}(t)))$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$.

---

1) См. сноску на стр. 49.

Построим функцию $v(x_0, t_0, x, t)$, удовлетворяющую условиям леммы 3.1. Согласно этой лемме функцию $v(x_0, t_0, x, t)$ можно построить здесь так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l} v(x_0, t_0, x, t) = 0 \\ \text{в области } \bar{H}_0 \text{ вне множества } \bar{E}(t); \\ v > d \text{ и } \dfrac{dv}{dt} > d \quad (d > 0 - \text{const}) \\ \text{при} \\ \|x_0 - x\| < \alpha \text{ и } \|t_0 - t\| < \tau, \end{array}\right\} \tag{7.2}$$

где α и τ — достаточно малые положительные числа;

$$\frac{dv(x_0, t_0, x(t), t)}{dt} \geqslant 0$$

в области $\bar{H}_0$.

Функция $v(x_0, t_0, x, t)$ имеет непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам в области Γ. Функцию $v(x_0, t_0, x, t)$ описанного выше типа можно построить для каждой пары $(x_0, t_0) \in E_k$. Так как E_k — ограниченное замкнутое множество (в $(n+1)$-мерном пространстве $x \times t$), то можно выделить конечное число пар $(x_0, t_0) \in E_k$ таких, что система соответствующих окрестностей (7.2) покрывает E_k. Пронумеруем эту конечную систему точек числами $1, \ldots, N_k$ и обозначим соответствующие им функции через $v_l^{(k)}(x, t)$, где $l = 1, \ldots, N_k$. Рассмотрим функцию

$$v_k(x, t) = \sum_{l=1}^{N_k} v_l^{(k)}(x, t). \tag{7.3}$$

Из предыдущего изложения ясно, что функции $v_k(x, t)$ $(k = m, m+1, \ldots)$ обладают следующими свойствами:

Функции v_k определены в области $x \in \Gamma$, $0 < t < \infty$ и имеют в этой области непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам.

Функции $v_k = 0$ вне области E (в H_0); для каждого $k \geqslant m$ можно указать число T_k такое, что $v_k = 0$ при $t \geqslant T_k$ (так как каждое из слагаемых в правой части равенства (7.3) может принимать значения, отличные от нуля лишь на конечном отрезке времени t). Следовательно, функция v_k ограничена по модулю некоторой постоянной P_k.

Каждая из частных производных $\dfrac{\partial^{\mu} v_k}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n} \partial t^{\mu_{n+1}}}$ ограничена постоянной $P_k^{(\mu)}$.

Производная $\dfrac{dv_k}{dt} \geqslant \alpha > 0$ в области E_k, производная $\dfrac{dv_k}{dt} \geqslant 0$ в области $\bar{H}_0$.

Обозначим через w_k функцию, определяемую равенством

$$w_k(x,\ t) = v_k(x,\ t)\exp(t - T_k).$$

Эта функция w_k наряду со всеми свойствами, перечисленными выше для функции v_k, будет также удовлетворять неравенству $\frac{dw_k}{dt} \geqslant w_k$ в области $\bar{H}_0$, так как

$$\frac{dw_k}{dt} = w_k + \exp(t - T_k)\frac{dv_k}{dt} \tag{7.4}$$

и $\frac{dv_k}{dt} \geqslant 0$ в области H_0. Кроме того, в области $x \in H_0$, $t \in (0,\ \infty)$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial^{\mu} w_k}{\partial x_1^{\mu_1} \ldots \partial x_n^{\mu_n} \partial t^{\mu_{n+1}}} \right| < R_k^{(\mu)}.$$

Функция

$$v(x,\ t) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{R_k 2^k} w_k(x,\ t) \tag{7.5}$$

(где $R_k = \max R_l^{(\mu)}$ при значениях $l = 1,\ \ldots,\ k$, $\mu = 1,\ \ldots,\ k$) удовлетворяет всем условиям доказываемой теоремы. Действительно, функция v определена в области $x \in \bar{H}_0$, $0 < t < \infty$; $v = 0$ вне области $E(t)$ (в $\bar{H}_0$) при каждом $t > 0$, $v(x,\ t) > 0$ и $\frac{dv}{dt} > v$ в области $E(t)$, т. е. $E(t)$ совпадает с областью $v > 0$; следовательно, производная $\frac{dv}{dt}$ является определенно-положительной функцией в области $v > 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 7.1 мы доказали больше, чем требуется для обращения теоремы Четаева, а именно мы доказали одновременно и обратимость второй теоремы Ляпунова о неустойчивости. Как известно [71, стр. 92], эта теорема читается следующим образом:

Теорема III. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти ограниченную функцию v, производная которой в силу этих уравнений приводилась бы к виду

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v + w, \tag{7.6}$$

где λ — положительная постоянная, w или тождественно равно нулю, или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае найденная функция v такова, что при всяком $t > 0$, большем некоторого числа, надлежащим выбором величин x_s, сколь угодно численно малых, ее можно сделать величиной одинакового знака с w, то невозмущенное движение неустойчиво.

Примечание. Если требуется, чтобы решение $x=0$ было неустойчивым в области Γ, то достаточно дополнить формулировку теоремы требованием, чтобы функцию v, удовлетворяющую условиям этой теоремы, можно было построить в каждой ограниченной замкнутой области $\bar{H}_0 \subset \Gamma$.

Легко видеть, что функция v, построенная при доказательстве теоремы 7.1, удовлетворяет всем условиям и теоремы III Ляпунова, т. е. справедливо следующее утверждение:

Теорема 7.2. Если решение $x=0$ уравнений (7.3) неустойчиво в области Γ, то в любой ограниченной замкнутой области $\bar{H}_0$ из Γ существует функция v, удовлетворяющая в этой области условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости. Функция v имеет в области H_0, $0 < t < \infty$ непрерывные частные производные любого порядка по всем аргументам, ограниченные в этой области (каждая производная ограничена своей постоянной).

2. Рассмотрим теперь случай, когда правые части уравнений (1.3), т. е. функции X_i, являются периодическими функциями времени периода ϑ (или не зависят явно от времени). В этом случае интересно доказать существование периодической функции $v(x, t)$ (или функции $v(x)$), удовлетворяющей условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости или удовлетворяющей условиям теоремы Четаева. Доказательство существования таких функций производится так же, как это сделано выше при доказательстве аналогичных теорем в случаях асимптотической устойчивости и первой теоремы о неустойчивости (см. стр 29). Так, например, в случае, если X_i — периодические функции времени t периода ϑ, построение функции v следует дополнить следующим образом. Когда построена функция $w_k(x, t)$, введем в рассмотрение последовательность функций

$$w_{kl}(x, t) = w_k(x, t + l\vartheta) \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и рассмотрим функцию

$$W_k(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} w_{kl}(x, t). \tag{7.7}$$

Так как каждое слагаемое в формуле (7.7) может принимать значения, отличные от нулевого лишь на некотором конечном отрезке времени t, длина которого равномерно ограничена по l для каждой функции w_{kl}, то в окрестности любой точки $x \in \bar{H}_0$, $0<t<\infty$ отлично от нуля лишь конечное число слагаемых w_{kl} и это число равномерно ограничено постоянной, не зависящей от выбора точки x. Но в таком случае функции W_k обладают теми же свойствами, что и функции w_k (с измененными постоянными в оценках для соответствующих производных) и, кроме того, W_k — периодические функции времени t периода ϑ. Дальнейшее построение функции v повторяет изложенное выше с той разницей, что функции w_k следует заменить функциями W_k.

Если функции X_i не зависят явно от времени t, то для построения функции v следует рассмотреть последовательность функций $v_{l,k}(x, t)$ ($l = 1, 2, \ldots$) периода ϑ/l, подобно тому как это делалось выше в аналогичных случаях. Так как рассуждения здесь ведутся по тому же плану, как и там, приводить их здесь подробно не будем.

ГЛАВА II

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА

§ 8. Предварительные замечания

В этой главе рассматриваются некоторые модификации классических теорем второго метода Ляпунова. Смысл этих модификаций заключается в следующем. В главе I при решении вопросов обращения классических теорем Ляпунова было выяснено, что при условиях каждой из этих теорем (за исключением теоремы III) наряду с доказываемым свойством устойчивости (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) необходимо имеют место некоторые дополнительные свойства (*равномерность* асимптотической устойчивости, *условие* (A); см. главу I, стр. 23). Поэтому возникает вопрос о том, как эти дополнительные свойства связаны с тем или иным ограничением, налагаемым на соответствующую функцию Ляпунова. Выяснение этих вопросов для теорем Ляпунова можно вести в различных направлениях, причем будут получаться разнообразные модификации теорем Ляпунова. Здесь следует упомянуть исследования Н. Г. Четаева [124], К. П. Персидского [88—90], В. И. Зубова [40], Х. Л. Массера [136—138], Я. Курцвейля [59—61], А. Д. Горбунова [25] и ряда других авторов. Ограничимся рассмотрением довольно узкого круга вопросов из этой области, а именно, проследим, как свойства функции Ляпунова v в случае устойчивости связаны со свойствами равномерности этой устойчивости. В последнем параграфе этой главы приводится также одна модификация теоремы Четаева о неустойчивости. Рассмотрение этой модификации позволяет выяснить в ряде случаев вопрос о соотношении теоремы о неустойчивости, предложенной Четаевым, с критерием неустойчивости, предложенным Персидским [88—90] и опирающимся на введенное им понятие *сектора*.

Отметим одно соображение: очевидно, ту или иную модификацию теоремы Ляпунова, предложенную для выяснения связи свойств функции v со свойствами возмущенных траекторий $x(x_0, t_0, t)$, можно считать полноценной лишь тогда, когда эта модификация допускает обращение (при наличии соответствующих свойств траекторий $x(x_0, t_0, t)$). Только такие модификации и будут рассмотрены в этой главе.

§ 9. Равномерная неасимптотическая устойчивость

1. Как известно, условия устойчивости невозмущенного движения $x=0$ в смысле определения 1.1 (стр. 9) даются теоремой Ляпунова [71, стр. 82]. Приведем для полноты изложения формулировку этой теоремы.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию v, производная которой $\frac{dv}{dt}$ в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с v, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Известного доказательства теоремы приводить не будем. В работах К. П. Персидского [88—90] было доказано, что приведенная теорема Ляпунова допускает обращение, т. е. в случае устойчивости решения $x=0$ всегда существует функция v, удовлетворяющая условиям этой теоремы (при некоторых предположениях о гладкости функций X_i в правой части уравнений возмущенного движения).

Приведем здесь доказательство этой теоремы К. П. Персидского. Пусть правые части уравнений возмущенного движения (1.3) — функции $X_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ определены и непрерывны в области

$$\|x\| < H, \quad 0 \leqslant t < \infty \quad (H = \text{const}) \tag{9.1}$$

и имеют в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i=1, \ldots, n;$ $j=1, \ldots, n)$. Предположим, что решение $x=0$ устойчиво по Ляпунову в смысле определения 1.1, стр. 9. Покажем, что в области

$$\|x\| < H_0 \quad H_0 < H, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{9.2}$$

существует функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{9.3}$$

где $Y_i(x, t) = X_i(x, t)\,\varphi(x)$, причем φ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant H, \tag{9.4}$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 1 \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant H_0. \tag{9.5}$$

Решения системы уравнений (9.3) будем обозначать через $y_i(x_0, t_0, t)$. Покажем, что функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = (e^{-t}+1) \sum_{i=1}^{n} y_i^2(x_1, \ldots, x_n, t, 0) \tag{9.6}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Действительно, в области $\|x\| < H_0$ решения системы (1.3) и системы (9.3) совпадают, и так как, кроме того, при смещении $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ вдоль траекторий $y_i(x_1, \ldots, x_n, t_0, t)$ значения y_i в формуле (9.6) не изменяются (y_i в выражении (9.6) — начальные данные этой траектории при $t = 0$), то имеем равенство

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{в силу (1.3)}} = e^{-t}\left(\|y(x, t, 0)\|_2^2\right) < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$

т. е. производная $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) является функцией знакоотрицательной в области (9.2). Покажем, что функция (9.6) является определенно-положительной в области (9.2). В самом деле, пусть x_0 — точка из области

$$\varepsilon < \|x_0\| < H_0 \tag{9.7}$$

и $t > 0$ — некоторый момент времени. Вследствие свойства устойчивости при $t_0 = 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$\|x(x_0^*, 0, t)\| < \varepsilon, \text{ если только } \|x_0\| < \delta,$$

поэтому в точке x_0 из области (9.7) имеем:

$$\delta < \|y(x_0^*, t, 0)\| < H \tag{9.8}$$

(правое неравенство следует здесь из того обстоятельства, что траектории уравнений (9.3) с начальными данными $x_0 < H$ не покидают этой области при $0 \leqslant t < \infty$, так как эта область по построению функций Y_i ограничена особыми точками $\|x\| = H$ и в области $-\infty < x_i < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$ выполняются условия единственности решений системы (9.3)) Из неравенства (9.8) заключаем, что в рассматриваемой точке функция (9.6) действительно определена и удовлетворяет неравенству

$$v(x_0, t) > \frac{\delta^2}{n},$$

что и доказывает определенную положительность функции v. Вследствие существования и непрерывности производных решений $y_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)$ по начальным данным x_{i0} функция (9.6) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$

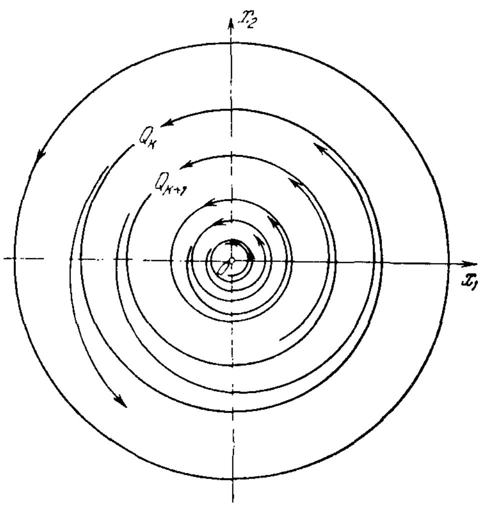

Рис. 2.

$(i = 1, \ldots, n)$. Этим и завершается доказательство существования функции v из теоремы Ляпунова об устойчивости.

Примечание. Здесь в общем случае не удается доказать существование функции $v(x, t)$, имеющей равномерно ограниченные в области (9.2) частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$. В случае периодических функций X_i (или функций X_i, не зависящих явно от времени t) нельзя также доказать существование периодической функции v (или функции v, не зависящей явно от времени t). Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно рассмотреть, например, такую топологическую картину поведения траекторий системы двух уравнений (рис. 2).

Здесь точка $x=0$ окружена счетной ($k=1, 2, \ldots$) системой траекторий — концентрических окружностей Q_k, стягивающихся в точку $x=0$ при $k\to\infty$. Траектории, расположенные в кольцевой области (Q_{k+1}, Q_k), образуют спирали, скручивающиеся с внутренней окружности Q_{k+1} и накручивающиеся на внешнюю окружность Q_k. Если предположить, что в окрестности точки $x_1=x_2=0$ можно построить непрерывную функцию $v(x_1, x_2)$, имеющую знакоотрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий, то легко видеть, что в силу $\frac{dv}{dt}\leqslant 0$ значение функции v в точке $x_1=x_2=0$ должно быть не меньше, чем значение v на любой из окружностей Q_k, т. е. функция $v(x_1, x_2)$ не может быть функцией определенно-положительной. Напомним, что в теории второго метода Ляпунова рассматриваются функции $v(x)$, удовлетворяющие условию $v(0)=0$. Итак, действительно, в рассмотренном случае не существует функции $v(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

2. Сравним свойства функции Ляпунова v из теоремы об устойчивости и свойства функции (которую в этом разделе будем обозначать прописной буквой V) из теоремы об асимптотической устойчивости. По сравнению с функцией v функция V удовлетворяет двум дополнительным требованиям:

$V1$) Функция V допускает бесконечно малый высший предел.

$V2$) Производная $\frac{dV}{dt}$ есть функция знакоопределенная (в то время как от производной $\frac{dv}{dt}$ требуется лишь свойство знакопостоянства).

Мы предполагаем здесь, что обе функции v и V определены и удовлетворяют условиям соответствующих теорем в одной и той же области:

$$\|x\|<H, \quad 0\leqslant t<\infty. \tag{9.9}$$

В соответствии с дополнительными требованиями к функции V траектории $x(x_0, t_0, t)$ в случае асимптотической устойчивости обладают следующими дополнительными свойствами (см. § 5, стр. 32):

$T1$) Число $\delta>0$ из определения 1.1 (стр. 9) в случае существования функции V можно выбрать зависящим лишь от числа ε, но не зависящим от начального момента t_0.

$T2$) Решение $x=0$ устойчиво асимптотически.

$T3$) Стремление возмущенных траекторий $x(x_0, t_0, t)$ к решению $x=0$ является равномерным по начальному моменту времени $t_0\in(0, \infty)$ и начальным возмущениям x_0 из некоторой области $\|x\|<H_0$.

Нетрудно заметить, что свойство ($T1$) траекторий $x(x_0, t_0, t)$ является следствием свойства ($V1$) функции V.

По-видимому, впервые на это обстоятельство обратил внимание К. П. Персидский [89]. Полученные им результаты для рассматриваемых здесь случаев можно сформулировать следующим образом:

Определение 9.1. Решение $x=0$ уравнений (1.3) называется устойчивым равномерно по времени t_0, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ можно указать зависящее только от ε число $\delta>0$ такое, что

$$\|x(x_0, t_0, t)\|<\varepsilon \text{ при } t\geqslant t_0 \text{ для всех } t_0>0, \tag{9.10}$$

и при начальных данных, удовлетворяющих неравенству

$$\|x_0\|<\delta. \tag{9.11}$$

В дальнейшем это свойство равномерной устойчивости будем называть *свойством* (C).

Теорема. Решение $x=0$ устойчиво равномерно по t_0 (в смысле свойства (C)), если можно указать функцию $v(x, t)$, которая была бы определенно-положительной, допускала бы бесконечно малый высший предел и производная которой в силу уравнений (1.3) была бы функцией знакоотрицательной.

Приведем для полноты изложения доказательство этой теоремы. Пусть функция v удовлетворяет условиям теоремы в области (9.9) и ε — положительное число, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon<H$. Если $\inf v(x,t)=\lambda$ при $\|x\|=\varepsilon$, $0<t<\infty$, то выберем число $\delta>0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sup v(x,t)<\lambda$ при $\|x\|\leqslant\delta$, $0<t<\infty$. Выбор числа $\delta>0$, удовлетворяющего этому условию, возможен именно потому, что функция v допускает бесконечно малый высший предел. Но теперь ясно, что при выполнении неравенства (9.11) будет выполняться неравенство (9.10), так как в области (9.9) $\dfrac{dv}{dt}\leqslant 0$. Теорема доказана.

Теперь возникает вопрос о том, можно ли при наличии равномерной в смысле свойства (C) устойчивости доказать существование функции v, которая удовлетворяла бы всем требованиям только что доказанной теоремы. Ответ на этот вопрос получается положительным, что было показано в статье автора [50]. Заметим, что существование функции v в рассматриваемом здесь случае было доказано иным методом Ярославом Курцвейлем [59] при условиях гладкости функций X_i, несколько более слабых, чем в статье [50][1]).

В этом параграфе доказывается существование функции Ляпунова v, допускающей бесконечно малый высший предел при условии, что решение $x=0$ устойчиво равномерно в смысле свойства (C). Будем предполагать, что функции X_i определены, непрерывны, огра-

---

[1]) Подробное исследование вопросов существования функции Ляпунова в случаях неасимптотической устойчивости было выполнено недавно в совместной работе Я. Курцвейля и И. Вркоча [61], где, в частности, был рассмотрен случай нарушения свойства единственности решений уравнений возмущенного движения.

ничены в области (9.9) и имеют в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ $(i=1, \ldots, n, j=1, \ldots, n)$ (от требования существования и непрерывности $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ можно было бы освободиться путем некоторого усложнения доказательства).

Теорема 9.1. Если решение $x=0$ уравнений (1.3) устойчиво равномерно по времени t_0 (в смысле свойства (C)), то в области (9.2) существует определенно-положительная функция $v(x, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел, такая, что производная ее $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (1.3) является функцией знакоотрицательной.

Функция $v(x, t)$ имеет в области (9.2) непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ $(i=1, \ldots, n)$.

Доказательство. Функции $X_i(x, t)$, согласно теоремам о распространении функций [112], можно продолжить с сохранением класса (непрерывная дифференцируемость) в область $-\theta < t \leqslant 0$ ($\theta > 0$ — const), поэтому будем предполагать, что правые части уравнений (1.3) — функции $X_i(x, t)$ определены, непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ в области

$$\|x\| < H, \quad -\theta < t < \infty \qquad (\theta > 0). \tag{9.12}$$

Построим сначала некоторую вспомогательную функцию $w(x_1, \ldots, x_n, t)$. Эту функцию $w(x, t)$ определим формулой

$$w(x_0, t) = (1 + e^{-t}) \inf [\|x(x_0, t, \tau)\|^2] \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \tag{9.13}$$

где $x(x_0, t, \tau)$ — точки траектории системы (1.3)[1]), причем $x(x_0, t, t) = x_0$. Функция $w(x, t)$ непрерывна в области $x < H$, $0 \leqslant t < \infty$. Действительно, вследствие непрерывной зависимости решений $x(x_0, t_0, t)$ от начальных данных имеем:

$$\lim_{x_0' \to 0,\ t_0' \to t_0} \left| \inf \|x(x_0, t_0, \tau)\|^2 - \inf \|x(x_0', t_0', \tau)\|^2 \right| = 0,$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t_0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t_0',$$

что и доказывает непрерывность функции $w(x, t)$. Функция w является определенно-положительной и допускает бесконечно малый высший предел. Действительно, если $\|x_0\| = \varepsilon > 0$, то по свойству равномерной устойчивости имеем $\inf(\|x(x_0, t_0, t)\|$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0) > \delta$,

[1]) И здесь мы рассматриваем систему (9.3) вместо уравнений (1.3). Однако для упрощения обозначений будем считать, что уже система (1.3) обладает нужными нам свойствами системы (9.3), т. е. точки $\|x\| = H$ суть особые точки системы (1.3).

т. е. выполняется неравенство $w(x_0, t_0) > \delta/n$, что и доказывает определенную положительность функции w. С другой стороны, очевидно, $\inf(\|x(x_0, t_0, t)\|_2$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0) \leqslant \varepsilon 2n$, т. е. $w(x_0, t_0) \leqslant \varepsilon 2n$, что и доказывает существование бесконечно малого высшего предела для функции w. Функция $w(x, t)$ убывает вдоль траектории $x = x(t)$ с возрастанием времени. Действительно, второй множитель в формуле (9.13), очевидно, не возрастает с возрастанием t, в то время как первый множитель в правой части (9.13) монотонно убывает при возрастании t. Таким образом, функция w удовлетворяет почти всем условиям доказываемой теоремы, за исключением лишь требования достаточной гладкости, а именно монотонно убывающая вдоль траектории функция $w(x(t), t)$ может не иметь в отдельных точках производной $\frac{dw}{dt}$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы следует на базе функции w построить достаточно гладкую функцию $v(x, t)$.

Итак, покажем, что функцию w можно апроксимировать гладкой функцией v с сохранением необходимых свойств функции w.

Пусть H_1 — верхняя грань чисел $\delta > 0$ таких, что $\|x(x_0, t_0, t)\|_2 < H$, если $\|x_0\|_2 < \delta$ и $t_0 \in [0, \infty)$. По свойству (C) имеем $H_1 > 0$. Обозначим через G_0 некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству $G_0 < H_1$. Очевидно, поверхность уровня $w(x, t) = G_0$ лежит в области $\|x\| < H$, так как по построению $w(x, t)$ и выбору числа H_1 имеем:

$$\overline{\lim} \inf (\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0) \geqslant H_1,$$

при $\|x_0\| \to H$.

Обозначим через δ_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) последовательность монотонно убывающих чисел, где $\delta_0 = G_0$ и $\lim \delta_k = 0$ при $k \to \infty$. Очевидно, сечение поверхности уровня $w = \delta_k$ плоскостью $t = 0$ есть сфера $\|x\|_2^2 = \delta_k^2$. Будем считать сейчас число k фиксированным и рассмотрим в $(n+1)$-мерном пространстве $x \times t$ область h_k, которую определим следующим образом:

при $t > 0$ пара (x, t) содержится в множестве h_k, если выполняется условие

$$\delta_{k+1} < w(x, t) < \delta_k;$$

при $t < 0$ пара (x, t) содержится в множестве h_k, если выполняется одно из следующих условий:

при

$$\frac{-\theta}{k+1} < t < 0 \qquad \delta_{k+1} < \|x(x, t, 0)\|_2 < \delta_k$$

или при

$$\frac{-\theta}{k+1} < t < \frac{-\theta}{k+2} \qquad \|x(x, t, 0)\|_2 < \delta_k.$$

Построенные области h_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) не пересекаются. Покажем, что каждая область h_k обладает *сечением* [85, стр. 500], т. е. в области h_k имеется поверхность S_k, которая является поверхностью уровня некоторой непрерывно дифференцируемой функции $u_k(x, t)$, и всякая *дуга* $x(x_0, t_0, t)$ из области h_k пересекает S_k один и только один раз (*дугой* $x(x_0, t_0, t)$ из области h_k будем называть максимальную связную дугу траектории (1.3), лежащую целиком в области h_k). На поверхности S_k, по определению *гладкого сечения* [10], должно, кроме того, выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial u_k}{\partial t} > 0. \qquad (9.14)$$

В работе Е. А Барбашина [10] показано, что для существования гладкого сечения S_k достаточно, чтобы система дуг, заполняющих область h_k, была *вполне неустойчивой*, т. е., какова бы ни была ограниченная замкнутая область $\bar{g}_k \subset h_k$, каждая дуга из h_k должна с возрастанием и убыванием времени навсегда покидать область $\bar{g}_k$. Очевидно, система дуг, заполняющих построенную нами область h_k, будет вполне неустойчивой; тем самым существование гладких сечений S_k установлено.

Построенные сечения S_k и послужат базой для построения гладкой функции $v(x, t)$, удовлетворяющей условиям теоремы.

Для каждого номера $k \geqslant 0$ можно указать число $\tau_k > 0$ такое, что отрезок любой траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $\{x_0, t_0\} \in S_k$ и $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_k$ не пересекается с точкой $x = 0$ при $t \geqslant 0$. Действительно, имеем $\min \rho(O, S_k) = \gamma_k > 0$ по построению сечения $S_k \subset h_k$ (здесь ρ — расстояние в пространстве $x \times t$, O — полуось $x = 0$ при $t \geqslant 0$) и, кроме того, скорость точки $x(x_0, t_0, t)$, движущейся по траектории в пространстве $x \times t$ в области $\|x\| < H$, равномерно ограничена вследствие предположения об ограниченности функций X_i в области (9.9). Пусть теперь $\varphi_k(\tau)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_k(\tau) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \leqslant \frac{\tau_k}{2}, \\ &\varphi_k(\tau) = 0 \quad \text{при} \quad \tau \geqslant \tau_k, \\ &\varphi_k'(\tau) < 0 \quad \text{при} \quad \frac{\tau_k}{2} < \tau < \tau_k. \end{aligned}\right\} \qquad (9.15)$$

Опираясь на сечение S_k и используя функции φ_k, построим слагаемые $v_k(x, t)$, из которых можно будет сконструировать функцию v. Пусть k фиксировано и точка $\|x_0\| < H$ при $t_0 \geqslant 0$. Возможны два взаимно исключающих друг друга случая:

1) Траектория $x(x_0, t_0, t)$ пересекает сечение S_k при $t = t_S \leqslant t_0$. В этом случае полагаем:

$$v_k(x_0, t_0) = \varphi_k(t_0 - t_S). \qquad (9.16)$$

2) Траектория $x(x_0, t_0, t)$ не пересекает сечения S_k при $t \leqslant t_0$. В этом случае полагаем:

$$v_k(x_0, t_0) = 1. \qquad (9.17)$$

Из предыдущих построений очевидно, что функция v_k обладает следующими свойствами: функция v_k определена во всех точках $\|x\| < H$ при $t > 0$; для каждого $k \geqslant 0$ можно указать числа $\Delta_k > 0$ и $\eta_k > 0$ такие, что при $t > 0$ выполняются равенства:

$$\left.\begin{aligned} &v_k(x, t) = 1 \quad \text{при} \quad \|x\| \geqslant \Delta_k, \\ &v_k(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant \eta_k. \end{aligned}\right\} \qquad (9.18)$$

Функция $v_k(x, t)$ не возрастает при движении точки x вдоль траектории $x = x(x_0, t_0, t)$. Действительно, пока точка $x(t)$, двигаясь по траектории, остается левее сечения S_k, имеем $v_k \equiv 1$, после перехода сечения S_k с возрастанием времени имеем: $\frac{dv_k}{dt} = \frac{d\varphi_k(t - t_S)}{dt} \leqslant 0$ вследствие (6.15).

Покажем теперь, что функции $v_k(x, t)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v_k}{\partial t}$ $(l = 1, \ldots, n)$. Достаточно, очевидно, проверить лишь дифференцируемость v_k в точках $x = x_0$, $t = t_0$, для которых $t_0 - t_S > 0$ (t_S — момент пересечения траекторией $x(x_0, t_0, t)$ сечения S_k). Для этого достаточно показать, что $t_S(x_0, t_0)$ является непрерывной и дифференцируемой функцией переменных $x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0$. Покажем это. Пусть при смещении $x_i = x_{i0} + \Delta x_{i0}$, $x_j = x_{j0}$ при $j \neq i$ величина t_S получает изменение Δt_S. Если пара (x_0, t_0) лежит в области, где траектория $x(x_0, t_0, t)$ пересекает сечение S_k при $t < t_0$, то в этой же области лежат и пары (x_0', t_0') из достаточно малой окрестности $\|x_0' - x_0\| < \alpha$, $\|t_0' - t_0\| < \beta$. Действительно, поскольку $x(x_0, t_0, t)$ пересекает S_k при $t < t_0$, то на этой траектории при некоторых значениях $t < t_0$ есть точки, лежащие в области h_k, где определена функция u_k, поверхность уровня которой $u_k = 0$ и есть сечение S_k. На траектории $x(x_0, t_0, t)$ есть точки t_1 и t_2, где $u_k(x(x_0, t_0, t_1), t_1) < 0$ и $u_k(x(x_0, t_0, t_2), t_2) > 0$. Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных и по непрерывности функции $u_k(x, t)$ заключаем, что $u_k\left(x\left(x_0', t_0', t_1\right), t_1\right) < 0$ и $u_k\left(x\left(x_0', t_0', t_2\right), t_2\right) > 0$ для всех x_0' и t_0' из достаточно малой окрестности точки $\{x_0, t_0\}$. Но это и означает, что траектории $x\left(x_0', t_0', t\right)$ пересекают сечение S_k при $t_1 < t < t_2$. Так как числа t_1 и t_2 можно выбирать сколь угодно близкими друг к другу, то мы одновременно устанавливаем и непрерывность функции $t_S(x_0, t_0)$. Обозначим $x_i^{(S)} = x_i(x_0, t_0, t_S(x_0, t_0))$. Вследствие непрерывной дифференцируемости решений по начальным данным [85] можно записать (при выбранном выше смещении Δx_{i0}):

$$\Delta x_j^{(S)} = \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_{i0}} \Delta x_{i0} + \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial t_S} \Delta t_S \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{9.19}$$

где знак $\sim$ означает, что соответствующие производные вычисляются в средних точках. С другой стороны, по теореме о среднем можно записать:

$$u_k\left(x_1^{(S)} + \Delta x_1^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)} + \Delta x_n^{(S)}, t_S + \Delta t_S\right) - u_k\left(x_1^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}, t_S\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} \Delta x_j^{(S)} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \Delta t_S = 0, \tag{9.20}$$

где производные $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$, $\frac{\partial u_k}{\partial t}$ также вычисляются в каких-то средних точках. Из уравнений (9.19) и (9.20) получим равенство

$$\frac{\Delta t_S}{\Delta x_{i0}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t} \right) = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_{i0}}. \tag{9.21}$$

Так как при $\Delta x_{i0} \to 0$ второй множитель в левой части равенства (9.21) стремится вследствие неравенства (9.14) к пределу, отличному от нуля, то из равенства (9.21) заключаем о дифференцируемости функции $t_S(x_0, t_0)$, причем

$$\frac{\partial t_S}{\partial x_{i0}} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x_{i0}}\right) : \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial t}\right); \tag{9.22}$$

отсюда заключаем, что функция t_S[1]) непрерывно дифференцируема. Итак, непрерывная дифференцируемость функции $v_k(x, t)$ в области (9.9) установлена.

Зададим монотонную последовательность неограниченно возрастающих чисел T_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Обозначим через N_k положительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{\partial v_m}{\partial x_i}\right| < N_k, \ |v_m| < N_k, \quad \left|\frac{\partial v_m}{\partial t}\right| < N_k \quad \text{при} \quad m \leqslant k, \ 0 \leqslant t \leqslant T_k, \ \|x\| < H. \tag{9.23}$$

Функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + e^{-t}) v_k(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{1}{N_k 2^k} \tag{9.24}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. В самом деле, функция v является определенно-положительной, так как при $\|x\| = \varepsilon$

$$v(x, t) \geqslant \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{N_k 2^k} = \gamma > 0,$$

где $K > 0$ — положительное число, наименьшее из чисел k, удовлетворяющих неравенству $\varepsilon > \Delta_k$. Функция v допускает бесконечно малый высший предел, так как при $\|x\| = \varepsilon$ имеем:

$$v(x, t) = \sum_{k=K_1}^{\infty} \frac{2}{N_k 2^k} = \omega < \infty,$$

где K_1 — положительное число, наибольшее из чисел k, удовлетворяющих неравенству $\varepsilon < \eta_k$. Функция v имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ ($i = 1, \ldots, n$), так как ряд (9.24) и ряды, составленные из производных, сходятся равномерно и абсолютно вследствие выбора чисел N_k. Каждое слагаемое в правой части равенства (9.24) есть монотонно убывающая по времени t функция при смещении точки $x = x(t)$ вдоль траекторий $x(x_0, t_0, t)$ в области (9.2), поэтому функция $v(x(x_0, t_0, t), t)$ имеет в этой области знакоотрицательную производную $\frac{dv}{dt}$. Теорема доказана.

Заметим, что здесь, вообще говоря, не удается доказать равномерную ограниченность частных производных $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ во всей области (9.2).

---

[1]) Дифференцируемость t_S по t_0 устанавливается совершенно аналогичным путем, и на этом останавливаться не будем.

§ 10. Обобщение теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости на случаи неравномерной устойчивости

1. Теорема, доказанная в предыдущем параграфе, занимает промежуточное место между теоремами Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости. Именно к свойству устойчивости эта теорема добавляет свойство равномерности устойчивости в смысле определения 9.1, однако асимптотической устойчивости при этом еще не возникает. Для того чтобы имела место асимптотическая устойчивость, следует к свойствам функции v из последних двух теорем предыдущего параграфа добавить некоторое ограничение, которое бы обеспечивало стремление траекторий к точке $x=0$. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости налагает здесь довольно сильное ограничение — требование знакоопределенности производной $\frac{dv}{dt}$, что вызывает не просто стремление траекторий $x(x_0, t_0, t)$ к решению $x=0$, но равномерное по t_0 и x_0 приближение этих траекторий к точке $x=0$. Для того чтобы получалось неравномерное приближение возмущенных траекторий к точке $x=0$, следует наложить на производную $\frac{dv}{dt}$ несколько более слабое ограничение. В результате получается критерий асимптотической устойчивости, составляющий следующую ступень от теоремы предыдущего параграфа к теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости. Доказательство такого критерия и его обращение составляют содержание этого параграфа.

Предварительно уточним представление о равномерности асимптотической устойчивости. Выше, в § 5, стр. 32, было дано определение асимптотической устойчивости, равномерной по времени t_0 и координатам x_0 (свойство (B)), в то же время в общем определении свойства асимптотической устойчивости, приведенном в начале книги, не предполагается равномерности ни по координатам x_0, ни по t_0. Действительно, можно показать на примере, что возможны случаи, когда выполняются все условия определения 1.2 (стр. 9) и, тем не менее, нет равномерности устойчивости ни по x_0, ни по $t_0 \geqslant 0$. Этим обосновывается введение следующего определения.

Определение 10.1. Решение $x=0$ уравнений (1.3) будем называть асимптотически устойчивым равномерно по координатам $x_0 \in H_0$, если наряду с условиями определения 1.2 выполняется следующее условие: для любых двух чисел $t_0 \geqslant 0$ и $\eta > 0$ можно указать число $T(\eta, t_0)$ такое, что

$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \eta \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 + T(\eta, t_0)$$

для всех начальных данных $x_0 \in H_0$. Это свойство будем называть *свойством* (D).

Свойства (C) и (D) не вполне независимы друг от друга: вообще говоря, при наличии свойства (D) свойство (C) может и не выполняться, однако в случае асимптотической устойчивости свойство (D) является следствием свойства (C).

Лемма 10.1. Пусть решение $x=0$ асимптотически устойчиво и замкнутая ограниченная область $\overline{H}_0$ лежит в области его притяжения. Если устойчивость равномерна по t_0 в смысле свойства (C), то асимптотическая устойчивость равномерна по координатам $x_0 \in \overline{H}_0$ (в смысле свойства (D)).

Доказательство. Пусть дано число $\eta>0$. Вследствие равномерности устойчивости (в смысле (C)) можно указать число $\delta(\eta)>0$ такое, что

$$\|x(x_0, t_1, t)\|<\eta \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_1,\ t \geqslant 0, \tag{10.1}$$

если только $\|x_0\|<\delta$. Вследствие асимптотической устойчивости при $x_0 \in \overline{H}_0$ имеем $\|x(x_0, t_0, t(x_0))\|=\frac{\delta}{2}$, где $t(x_0)$ — достаточно большое число. Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно указать число $\gamma(x_0)>0$ такое, что

$$\|x(x_0', t_0, t(x_0))\|<\delta, \quad x(x_0', t_0, t) \in H \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t(x_0),$$

если только

$$\|x_0'-x_0\|<\gamma(x_0). \tag{10.2}$$

Ограниченное замкнутое множество $\overline{H}_0$ можно покрыть конечной системой окрестностей вида (10.2) и, следовательно, можно указать такое число $T(T=\max t(x_0))$, что точка любой траектории $x(x_0, t_0, t)$ побывает в области $\|x\|<\delta$ при изменении t вдоль этой траектории на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Но по свойству числа δ, характеризуемому неравенством (10.1), последнее утверждение означает, что $\|x(x_0, t_0, t)\|<\eta$ при всех $t \geqslant T$. Лемма доказана.

В дальнейшем ограничимся лишь рассмотрением асимптотической устойчивости, равномерной по координатам (в смысле определения (D)). Следующая теорема дает достаточные условия такой асимптотической устойчивости.

Теорема 10.1. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно указать функцию $v(x, t)$, которая была бы определена в области $x \in H$, допускала бы бесконечно малый высший предел в H и была бы в этой области функцией определенно-положительной, причем выполнялись бы также условия:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant 0 \quad \text{в области } H; \tag{10.3}$$

$$\sup(v(x, t) \text{ в области } H_0 \text{ при } t \in (0, \infty)) < \\ < \inf(v(x, t) \text{ на границе } H_1 \text{ при } t \in (0, \infty)), \tag{10.4}$$

где области H_0, H_1, H связаны условиями $\overline{H}_0 \subset H_1$, $H_1 \subset H$:

$$\int^{\infty} m_{\eta}(\tau)\,d\tau = -\infty \tag{10.5}$$

для всех достаточно малых $\eta > 0$,

$$\left(m_{\eta}(\tau) = \sup\left(\frac{dv}{dt}\right) \text{ в области } \eta \leqslant \|x\|, \quad x \in H_1, \quad t = \tau\right),$$

то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по координатам x_0 (в смысле (D)), причем устойчивость равномерна также в смысле определения (C).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить лишь свойство асимптотической устойчивости, так как равномерная устойчивость решения $x = 0$ при условиях доказываемой теоремы следует из теоремы параграфа 9 (стр. 58). Пусть $\eta > 0$ и число $\delta(\eta)$ удовлетворяет условию (10.1). Обозначим $N = \max|v|$ в области $x \in H_1$, $t \in (0, \infty)$. По условию (10.5) для данного числа $t_0 \geqslant 0$ можно указать число T такое, что

$$\int_{t_0}^{t_0+T} m_{\delta}(\tau)\,d\tau < -N.$$

Пусть $x_0 \in H_0$, тогда можем записать:

$$v(x(x_0, t_0, t), t) - v(x_0, t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t} \left(\frac{dv}{dt}\right) dt \leqslant \int_{t_0}^{t} m_{\delta}(\tau)\,d\tau$$

при всех тех $t > t_0$, при которых траектория $x(x_0, t_0, t)$ остается все время вне области $\|x\| < \delta$. Если бы на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ выполнялось неравенство $\|x(x_0, t_0, t)\| > \delta$, то можно было бы записать:

$$v(x(x_0, t_0, t), t) \leqslant N + \int_{t_0}^{t_0+T} m_{\delta}(\tau)\,d\tau < 0,$$

что невозможно вследствие определенной положительности функции v. Полученное противоречие показывает, что каждая траектория $x(x_0, t_0, t)$ имеет точки в области $\|x\| < \delta$ при некоторых значениях времени t из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Но последнее по выбору числа δ означает, что при $t > t_0 + T$ справедливо неравенство $\|x(x_0, t_0, t)\| < \eta$, чем и завершается доказательство теоремы.

2. Приведенная теорема допускает обращение, подобное тому, которое допускает теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.2. Пусть решение $x=0$ асимптотически устойчиво равномерно по координатам $\|x_0\|<H_1$ ($H_1=\text{const}$) (в смысле (D)), причем устойчивость равномерна в смысле определения (C). Тогда в области $\|x\|<H_1$, $0<t<\infty$ существует функция $v(x, t)$, определенно-положительная в этой области, допускающая бесконечно малый высший предел и имеющая в силу уравнений (1.3) знакоотрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ в области $\|x\|<H_1$. Кроме того, функция $\frac{dv}{dt}$ удовлетворяет условию (10.5). Функция $v(x, t)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \quad (i=1, \ldots, n) \quad \text{при} \quad \|x\|<H_1, \ 0<t<\infty.$$

Доказательство теоремы 10.2 не является сложным, однако вследствие его громоздкости приводить этого доказательства здесь не будем.

Отметим, что теоремы 10.1 и 10.2 могут быть еще несколько модифицированы так, чтобы они охватывали и случай асимптотической устойчивости, когда устойчивость неравномерна в смысле (D). Соответствующие формулировки теорем приведены в статье автора [44].

3. Отметим в заключение этого параграфа, что в случае линейных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt}=p_{i1}(t)\,x_1+\ldots+p_{in}(t)\,x_n, \tag{10.6}$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции времени t, устойчивость всегда равномерна по координатам x_0 начальных возмущений (в смысле (D)). В этом частном, но важном случае модификация теоремы Ляпунова, рассмотренная в этом параграфе, и ее обращение формулируются следующим образом.

Теорема 10.3. Для асимптотической устойчивости решений системы (10.6) необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно-положительная функция $v(x, t)$, являющаяся квадратичной формой

$$v(x, t)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_i x_j, \tag{10.7}$$

производная которой равна

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t)\,x_i x_j, \tag{10.8}$$

где $c_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}p_{kj}+a_{jk}p_{ki}$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dv}{dt}\leqslant\lambda(t)\,v, \tag{10.9}$$

причем

$$\int^{\infty}\lambda(t)\,dt=-\infty. \tag{10.10}$$

Примечание. В формулировке этой теоремы не требуется свойства знакоотрицательности производной $\frac{dv}{dt}$, т. е. число $\lambda(t)$ в неравенстве (10.9) может принимать и положительные значения. Так как производная $\frac{dv}{dt}$ и функция $v(x, t)$ в рассматриваемом случае являются квадратичными формами, то в качестве числа $\lambda(t)$ можно выбрать наибольшее значение функции $\frac{dv}{dt}$ (10.8) на поверхности

$$v(x, t)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_i x_j=1. \tag{10.11}$$

Этот $\max\left(\frac{dv}{dt}\right)$ при $v=1$ равен, как известно из теории квадратичных форм, наибольшему корню уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\lambda a_{11} & \dots & c_{1n}-\lambda a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}-\lambda a_{n1} & \dots & c_{nn}-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}=0, \tag{10.12}$$

поэтому получаем следующий критерий асимптотической устойчивости для линейных систем, доказанный в работе Б. С. Разумихина [99]: решения системы уравнений (10.6) асимптотически устойчивы, если наибольший корень уравнения (10.12) удовлетворяет условию (10.10).

Доказательство утверждений этой теоремы можно найти в упомянутых статьях Б. С. Разумихина [99] и А. Д. Горбунова [25].

§ 11. Функции Ляпунова, удовлетворяющие оценкам, характерным для квадратичных форм

1. Во многих задачах представляет интерес доказательство существования функций Ляпунова v, которые наряду со свойствами определенной положительности, бесконечно малого высшего предела и т. д. удовлетворяли бы еще некоторым дополнительным оценкам. Здесь прежде всего выделим такие функции Ляпунова, которые удовлетворяют оценкам, характерным для функций v, являющихся квадратичными формами в случае линейных систем. Поясним это.

Рассмотрим линейную систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt}=d_{i1}x_1+\ldots+d_{in}x_n \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{11.1}$$

Как известно [71, стр. 77], для того чтобы решение $x=0$ было асимптотически устойчивым в силу системы уравнений (11.1), необходимо и достаточно, чтобы корни λ_i $(i=1, \ldots, n)$ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & \ldots & d_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \ldots & d_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{11.2}$$

соответствующего системе (11.1), имели отрицательные действительные части, т. е. чтобы выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_i<-\delta \qquad (\delta=\mathrm{const},\ \delta>0,\ i=1, \ldots, n). \tag{11.3}$$

А. М. Ляпунов доказал [71, стр. 106], что при выполнении условий (11.3) существует квадратичная форма

$$v(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ij}=a_{ji}), \tag{11.4}$$

удовлетворяющая условию

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}(d_{i1}x_1+\ldots+d_{in}x_n)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j=w(x_1, \ldots, x_n) \qquad (c_{ij}=c_{ji}), \tag{11.5}$$

где $\sum c_{ij}x_ix_j$ — любая наперед заданная квадратичная форма.

Если квадратичная форма в правой части равенства (11.5) является определенно-отрицательной, то квадратичная форма v будет определенно-положительной.

Заметим, кстати, что коэффициенты c_{ij} в равенстве (11.5) следует вычислять по формуле

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}d_{kj}+a_{jk}d_{ki}), \tag{11.6}$$

иначе говоря, матрица C коэффициентов c_{ij} квадратичной формы, определяющей функции $\frac{dv}{dt}$, является симметризованной матрицей произведения матриц A и D $(\{A\}_{ij}=a_{ij},\ \{D\}_{ij}=d_{ij})$.

В дальнейшем будем считать квадратичную форму $w(x_1, \ldots x_n)$ (11.5) определенно-отрицательной. Тогда можно указать положительные постоянные $c_1, \ldots, c_4$ такие, что

$$\left.\begin{aligned} & c_1\|x\|_2^2 \leqslant v(x) \leqslant c_2\|x\|_2^2, \\ & \frac{dv}{dt} = w(x) \leqslant -c_3\|x\|_2^2, \\ & \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant c_4\|x\|_2. \end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

Таким образом, в случае асимптотической устойчивости линейной системы (11.1) всегда существует функция Ляпунова — квадратичная форма v, удовлетворяющая условиям (11.7).

2. Этот результат можно перенести на линейные системы с переменными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)x_1 + \ldots + p_{in}(t)x_n \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.8}$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции при $0 < t < \infty$ [78, 88].

Приведем некоторые результаты этих работ.

При существовании функции v, удовлетворяющей условиям (11.7) (не обязательно, чтобы функция v была квадратичной формой и не обязательно, чтобы система уравнений была линейной), имеет место не только асимптотическая устойчивость решения $x = 0$, но и выполняется неравенство

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant B\|x_0\|_2 \exp(-\alpha(t - t_0)) \tag{11.9}$$

при $t \geqslant t_0$ (α, B — положительные постоянные).

В самом деле, из неравенств (11.7) имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{c_3}{c_2}v;$$

после интегрирования получаем:

$$v(x(x_0, t_0, t), t) \leqslant v(x_0, t_0)\exp\left(-\frac{c_3}{c_2}(t - t_0)\right).$$

Применяя снова оценки (11.7), будем иметь:

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2^2 \leqslant \frac{c_2}{c_1}\|x_0\|_2^2 \exp\left(-\frac{c_3}{c_2}(t - t_0)\right), \tag{11.10}$$

что эквивалентно условию (11.9).

Условие (11.9) выполняется всегда в случае асимптотической устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами, поэтому здесь и естественно существование функции $v(x)$, удовлетворяющей оценкам (11.7). В случае асимптотической устойчивости системы с переменными коэффициентами условие (11.7) не является, вообще говоря, следствием асимптотической устойчивости. Поэтому не во всех случаях асимптотической устойчивости существует функция Ляпунова $v(x, t)$, удовлетворяющая оценкам (11.7). Естественно, возникает вопрос такого рода: если условие (11.9) есть следствие существования функции $v(x, t)$ с оценками (11.7), то является ли условие (11.9) в свою очередь достаточным условием существования функции $v(x, t)$, удовлетворяющей оценкам (11.7) и в случае линейных систем с *переменными* коэффициентами.

Положительный ответ на этот вопрос следует из упомянутых выше работ К. П. Персидского и И. Г. Малкина: если существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая в силу системы уравнений (11.8) условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, то решение $x=0$ этой системы удовлетворяет условиям (11.9); обратно, если решения $x(x_0, t_0, t)$ системы уравнений (11.8) удовлетворяют условиям (11.9), то существует функция $v(x, t)$, являющаяся квадратичной формой (с переменными коэффициентами $a_{ij}(t)$), причем для этой функции $v(x, t)$ выполняются оценки (11.7).

3. Как было отмечено выше, условия (11.9) являются следствием существования функции $v(x, t)$, удовлетворяющей оценкам (11.7), причем здесь при доказательстве не имеет значения линейный характер уравнений. Возникает вопрос, нельзя ли доказать существование функции v, хотя и не являющейся уже квадратичной формой, но удовлетворяющей оценкам (11.7) и в случае нелинейных уравнений, если только решения этих нелинейных уравнений удовлетворяют условию (11.9). Мы покажем здесь, что и на этот вопрос следует дать положительный ответ.

В этом параграфе будем предполагать, что функции $X_i(x, t)$ в правых частях уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{11.11}$$

непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i=1, \ldots, n, \quad j=1, \ldots, n)$ в области

$$\|x\|_2<H, \quad 0<t<\infty \tag{11.12}$$

$$(H=\mathrm{const} \text{ или } H=\infty),$$

причем в этой области выполняются также неравенства

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|<L \quad (L=\mathrm{const}) \quad \begin{cases} i=1, \ldots, n; \\ j=1, \ldots, n. \end{cases} \tag{11.13}$$

Пусть заданы постоянные $B>0$, $\alpha>0$ и $H_0 \leqslant H/B$. Предположим, что траектории $x(x_0, t_0, t)$ системы уравнений (11.11) при начальных данных из области

$$\|x_0\| < H_0, \quad t_0 \geqslant 0 \tag{11.14}$$

удовлетворяют условиям (11.9), т. е.

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant B\|x_0\|_2 \exp(-\alpha(t-t_0)) \quad \text{при } t \geqslant t_0. \tag{11.15}$$

Теорема 11.1. Если решения $x(x_0, t_0, t)$ системы уравнений (11.11) удовлетворяют условиям (11.15), то в области $\|x\| < H_0$ существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая оценкам (11.7).

Доказательство. Пусть $T = \frac{1}{\alpha}\ln B\sqrt{2}$. Покажем, что функция $v(x, t)$, определенная формулой

$$v(x_0, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \|x(x_0, t_0, t)\|_2^2\,dt, \tag{11.16}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Действительно, функция $v(x, t)$ (11.16) определена в области (11.14), так как вследствие (11.15) решения $x(x_0, t_0, t)$ не выходят из области (11.12) при $t \geqslant t_0$. По условиям (11.15) имеем оценку

$$v(x_0, t_0) \leqslant \int\limits_{t}^{t_0+T} \|x_0\|_2^2 B^2 \exp(-2\alpha(t-t_0))\,dt = c_2\|x_0\|_2^2.$$

С другой стороны, согласно неравенству (4.11) можно записать оценку

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \geqslant \|x_0\|_2 e^{-nL(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0,$$

или

$$v(x_0, t_0) \geqslant \int\limits_{t}^{t+T} \|x_0\|^2 \exp(-2nL(t-t_0))\,dt = c_1\|x_0\|_2^2.$$

Таким образом, справедливость первой строки в оценках (11.7) для функции $v(x, t)$ (11.16) доказана.

Вычислим производную $\frac{dv}{dt}$ по уравнениям (11.11):

$$\frac{dv(x(x_0, t_0, t), t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{t}^{t+T} \|x(x(x_0, t_0, t), t, \tau)\|_2^2\,d\tau\right) =$$

$$= -\|x(x_0, t_0, t), t, t)\|_2^2 + \|x(x_0, t_0, t), t, t+T)\|_2^2 +$$

$$+ \int\limits_{t}^{t+T} \left(\frac{d}{dt}(\|x(x(x_0, t_0, t), t, \tau)\|_2^2)\right) d\tau. \tag{11.17}$$

Но $x(x(x_0, t_0, t+\Delta t), t+\Delta t, \tau) = x(x(x_0, t_0, t), t, \tau)$ и, следовательно, подынтегральное выражение в правой части равенства (11.17) есть нуль. По выбору числа T и по условиям (11.15) имеем:

$$\|x(x(x_0, t_0, t), t, t+T)\|_2 < Be^{-\alpha T}\|x(x_0, t_0, t)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x(x_0, t_0, t)\|_2.$$

Следовательно, для производной $\frac{dv}{dt}$ справедливо неравенство (в точке $x(x_0, t_0, t)$)

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\|x(x_0, t_0, t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|x(x_0, t_0, t)\|_2^2 \leqslant -\frac{1}{2}\|x(x_0, t_0, t)\|_2^2,$$

что и доказывает выполнение второй строки неравенств (11.7) для функции $v(x, t)$ (11.16).

Покажем, что функция v (11.16) имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие оценке (11.7). Существование и непрерывность производных $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ следует из возможности дифференцирования правой части (11.16) под знаком интеграла [113] и из существования и непрерывности частных производных $\frac{\partial x_i(x_0, t_0, t)}{\partial x_{j0}}$ решений $x(x_0, t_0, t)$ по начальным данным x_0 [91].

Таким образом, можно записать:

$$\frac{\partial v}{\partial x_{j0}} = \int_{t}^{t_0+T} \sum_{i=1}^{n} 2x_i(x_0, t_0, t)\frac{\partial x_i(x_0, t_0, t)}{\partial x_{j0}}\,dt. \tag{11.18}$$

Производные $\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}$ удовлетворяют неравенствам [85, стр. 23]

$$\left|\frac{\partial x_i(x_0, t_0, t)}{\partial x_{j0}}\right| \leqslant ne^{nL|t-t_0|} \quad (i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n), \tag{11.19}$$

поэтому из (11.18), (11.15) и (11.19) заключаем о справедливости оценки

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_{j0}}\right| \leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} 2n^2B\|x_0\|_2 e^{(nL-\alpha)(t-t_0)}\,dt = c_4\|x_0\|_2,$$

что и доказывает выполнение для $v(x, t)$ (11.16) последнего неравенства в оценках (11.7).

Покажем еще, что функция $v(x, t)$ (11.16) имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial v}{\partial t}$. Положив $t = t_0 + \Delta t$, получим:

$$\frac{1}{\Delta t}(v(x_0, t_0 + \Delta t) - v(x_0, t_0)) = \frac{1}{\Delta t}(v(x(x_0, t_0, t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) - \\ - v(x_0, t_0) - v(x(x_0, t_0, t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t) + v(x_0, t_0 + \Delta t)),$$

и вследствие существования и непрерывности производных $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ можно записать:

$$\frac{1}{\Delta t}[v(x_0, t_0 + \Delta t) - v(x_0, t_0)] = \frac{d\tilde{v}}{dt} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_{i0}} \tilde{X}_i, \qquad (11.20)$$

где символ $\sim$ означает, что соответствующие производные вычислены в некоторых средних точках. Переходя в равенстве (11.19) к пределу при $\Delta t \to 0$, убеждаемся в существовании и непрерывности производной

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} - \left(X_1 \frac{\partial v}{\partial x_{10}} + \ldots + X_n \frac{\partial v'}{\partial x_{n0}}\right).$$

Теорема доказана.

Примечание. Условие (11.15) является весьма естественным в случае линейных уравнений. Естественность этих условий для нелинейных уравнений может вызвать сомнение. Следует, однако, иметь в виду, что единственным более или менее плодотворным путем исследования нелинейных систем является пока следующий путь — данную нелинейную систему сопоставляют с некоторыми похожими линейными системами, и таким путем выводятся критерии устойчивости для данной нелинейной системы (см. ниже гл. IV). При таком подходе, естественно, и характер поведения траекторий устойчивой нелинейной системы оказывается подобным поведению траекторий вспомогательных линейных систем (примеры такого рода будут приведены ниже (см. §§ 21, 25 гл. IV, V). Поэтому условия (11.15), а следовательно, и функции Ляпунова $v(x, t)$ с оценками (11.7) играют в теории устойчивости нелинейных систем значительно большую роль, чем это может показаться с первого взгляда.

4. Представим результаты, полученные в данной главе в виде таблицы свойств функций Ляпунова $v(x, t)$ и соответствующих (необходимых и достаточных) свойств траекторий $x(x_0, t_0, t)$ возмущенного движения[1]).

---

[1]) Начиная с пункта 2, в таблице указываются лишь те свойства функции Ляпунова $v(x, t)$ или траекторий $x(x_0, t_0, t)$ соответственно, которые добавляются к свойствам, указанным в предыдущих пунктах таблицы.

Таблица

Свойства функции Ляпунова $v(x, t)$	Свойства траекторий $x(x_0, t_0, t)$ возмущенного движения
1. Теорема Ляпунова об устойчивости: функция v определенно-положительна, производная $\frac{dv}{dt}$ знакоотрицательна	1. Решение $x=0$ устойчиво по Ляпунову (в смысле определения 1.1, стр. 9)
2. Функция $v(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел	2. Решение $x=0$ устойчиво равномерно по t_0 (в смысле определения 9.1 (C), гл. II, стр. 58)
3. Производная $\frac{dv}{dt}$ удовлетворяет условию (10.5), т. е. $$\int^{\infty} m_{\eta}(\tau) = -\infty \quad \text{для} \quad \eta > 0,$$ где $$m_{\eta}(\tau) = \sup \frac{dv}{dt}$$ при $$\eta \leqslant \lVert x \rVert, \ x \in H_1, \ t = \tau$$	3. Решение $x=0$ устойчиво асимптотически, причем устойчивость равномерна по x_0 (в смысле определения 10.1 (D), гл. II, стр. 64)
4. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости; производная $\frac{dv}{dt}$ является функцией определенно-отрицательной	4. Решение $x=0$ устойчиво асимптотически, причем устойчивость равномерна по x_0, t_0 (в смысле определения 5.1 (B), гл. I, стр. 32)
5. Функция Ляпунова $v(x, t)$ удовлетворяет оценкам (11.7), характерным для функции Ляпунова, являющейся квадратичной формой, т. е. $$c_1 \lVert x \rVert_2^2 \leqslant v(x, t) \leqslant c_2 \lVert x \rVert_2^2,$$ $$\frac{dv}{dt} \leqslant -c_3 \lVert x \rVert_2^2,$$ $$\left\lvert \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rvert \leqslant c_4 \lVert x \rVert_2$$ ($c_1, \ldots, c_4$ — положительные постоянные, $i = 1, \ldots, n$)	5. Решения $x(x_0, t_0, t)$ удовлетворяют условиям (11.9), т. е. $$\lVert x(x_0, t_0, t) \rVert_2 \leqslant B \lVert x_0 \rVert_2 \exp(-\alpha(t - t_0))$$ при $t \geqslant t_0$ (α, B — положительные постоянные)

§ 12. Модификация теоремы Четаева о неустойчивости

1. В главе I, § 7 было показано, что во всех случаях неустойчивости решения $x=0$ в некоторой окрестности этого решения существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы Четаева о неустойчивости. Для ряда задач представляет, однако, интерес доказательство существования функции $v(x, t)$, которая обладает несколько более сильными свойствами, чем функция v из приведенной выше теоремы. А именно речь здесь идет о функции v, для которой область $\frac{dv}{dt}>0$ охватывает область $v\geqslant 0$ (кроме точки $x=0$), или, как будем говорить ниже, о функции v, для которой производная $\frac{dv}{dt}$ определенно-положительна в области $v>0$ в смысле следующего определения.

Определение 12.1. Будем говорить, что функция $\frac{dv}{dt}$ является определенно-положительной в области $v\geqslant 0$ (в области H_0), если для любого числа $\eta>0$ можно указать число $\gamma>0$ такое, что $\frac{dv}{dt}>\gamma$ в точках x из области $v(x, t)\geqslant 0$ при $x\in H_0$, $\|x\|>\eta$.

Очевидно, функция $\frac{dv}{dt}$ является определенно-положительной в области $v>0$ в смысле определения Н. Г. Четаева [124, стр. 32], если эта производная удовлетворяет условиям только что данного определения. Обратное заключение, вообще говоря, неверно. Рассмотрим здесь возможную модификацию теоремы Четаева.

Так как функция v из предлагаемой модификации должна удовлетворять более сильным ограничениям, чем в теореме Четаева, то получаемый критерий неустойчивости, естественно, будет более грубым и не столь универсальным в том смысле, что он будет обратим не во всех случаях неустойчивости. Однако доказываемая ниже теорема 12.1 будет обладать и одним положительным качеством; а именно: свойства функции v из теоремы 12.1 сохраняются при вариациях уравнений возмущенного движения, стесненных определенными границами.

Будем рассматривать лишь такие уравнения возмущенного движения, правые части которых X_i не зависят явно от времени:

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{12.1}$$

где функции X_i определены и непрерывны в области

$$\|x\|<H \qquad (H=\text{const}). \tag{12.2}$$

Будем предполагать также, что функции X_i имеют в области (12.2) непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, n)$.

Теорема 12.1. Если в области $\|x\| \leqslant \overline{H}_0$ функция $v(x)$ имеет определенно-положительную производную $\frac{dv}{dt}$ в области $v \geqslant 0$ (в смысле определения 12.1) и точка $x=0$ входит в замыкание области $v>0$, то решение $x=0$ неустойчиво и существует траектория $x(x_0, t)$, примыкающая к точке $x=0$ при $t \to -\infty$, т. е.

$$\lim \|x(x_0, t)\| = 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty, \tag{12.3}$$

причем $\|x_0\| = H_0$.

Примечание. В теореме не предполагается, что функция $v(x)$ определена во всей области $\|x\| \leqslant H_0$. Достаточно потребовать лишь, чтобы (непрерывная) функция $v(x)$ была определена в некоторой открытой области h, содержащей область $v \geqslant 0$ (кроме, может быть, точки $x=0$).

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $x_0^{(k)} \neq 0$, лежащих в области $\|x\| < H_0$ на поверхности $v=0$ и сходящихся к точке $x=0$ при $k \to \infty$. Вследствие того, что в области $v \geqslant 0$ производная $\frac{dv}{dt}$ удовлетворяет неравенству $\frac{dv}{dt} > 0$ при $x \neq 0$, $\|x\| \leqslant H_0$, можно утверждать, что траектория $x(x_0^{(k)}, t)$ проходит в области $v>0$ при всех значениях $t>0$, при которых эта траектория остается еще в области $x \leqslant H_0$. Но в таком случае для каждого номера $k \geqslant 1$ можно указать число $t_k > 0$ такое, что $\|x(x_0^{(k)}, t_k)\| = H_0$ и при этом $\|x(x_0^{(k)}, t)\| < H_0$ при $0 \leqslant t < t_k$. В самом деле, пусть τ — некоторое положительное число. Если при этом $\|x(x_0^{(k)}, \tau)\| < H_0$, то $v(x(x_0^{(k)}, \tau)) = \alpha_k > 0$. Функция $v(x)$ непрерывна и $v(0)=0$, поэтому можно указать положительное число δ_k, удовлетворяющее условию

$$|v(x)| < \alpha_k \quad \text{при} \quad \|x\| < \delta_k. \tag{12.4}$$

Так как вдоль $x(x_0^{(k)}, t)$ при $\|x(x_0^{(k)}, t)\| < H_0$ имеем $\frac{dv}{dt} > 0$, то $v(x(x_0^{(k)}, t)) > \alpha_k$ при $t \geqslant \tau$; отсюда следует согласно (12.4), что $\|x(x_0^{(k)}, t)\| > \delta_k$ при $t \geqslant \tau$. Но в таком случае по свойству определенной положительности $\frac{dv}{dt}$ в области $v \geqslant 0$ можно указать положительную постоянную β_k такую, что $\frac{dv}{dt} > \beta_k$ вдоль $x(x_0^{(k)}, t)$ при $t > \tau$ все время, пока $\|x(x_0^{(k)}, t)\| < H_0$. Теперь существование числа t_k очевидно, причем $v(x(x_0^{(k)}, t_k)) > 0$.

Рассмотрим последовательность точек $x(x_0^{(k)}, t_k)$. Эта ограниченная последовательность имеет предельную точку x_0. Вследствие непрерывности функции $v(x)$ имеем $v(x_0) \geqslant 0$. Кроме того, $\|x_0\| = H_0$. Покажем, что траектория $x(x_0, t)$ примыкает к точке $x=0$ при

$t \to -\infty$. Для этого покажем сначала, что точка $x(x_0, t)$ при $t < 0$ остается в области $v \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant H_0$. Предположим противное. Пусть точка $x(x_0, t^*)$ лежит вне указанной области при $t = t^* < 0$. Так как x_0 — предельная точка для точек $x(x_0^{(k)}, t_k)$, то можно указать подпоследовательность $x(x_0^{(l)}, t_l)$ $(l = k_l)$, сходящуюся к точке x_0. Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных точки $x(x_0^{(l)}, t_l + t^*)$ с достаточно большими номерами l будут лежать в произвольной окрестности точки $x(x_0, t^*)$, т. е. также будут лежать вне области $\|x\| \leqslant H_0$, $v \geqslant 0$. Однако последнее невозможно, так как по выбору чисел t_l при $0 \leqslant t < t_l$ имеем $\|x(x_0^{(l)}, t)\| < H_0$ и $v(x(x_0^{(l)}, t)) \geqslant 0$, причем $t_l \to \infty$ при $l \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $\|x(x_0, t)\| < H_0$ и $v(x(x_0, t)) \geqslant 0$ при $t < 0$. Теперь уже легко проверить, что $\|x(x_0, t)\| \to 0$ при $t \to -\infty$. Действительно, примем от противного, что это не так. Тогда можно указать монотонную последовательность моментов времени $t^{(m)} < 0$ таких, что $t^{(m)} \to -\infty$ при $m \to \infty$ и $\|x(x_0, t^{(m)})\| > \eta > 0$. Так как скорость точки $x(x_0, t)$ при движении ее вдоль траектории в фазовом пространстве $\{x_1, \ldots, x_n\}$ равномерно ограничена, то можно указать число $\vartheta > 0$ такое, что

$$\|x(x_0, t)\| > \frac{\eta}{2} \quad \text{при} \quad t^{(m)} - \vartheta \leqslant t \leqslant t^{(m)} + \vartheta. \tag{12.5}$$

Поэтому суммарное время, которое точка $x(x_0, t)$, при наших предположениях, должна оставаться вне области $\|x\| < \frac{\eta}{2}$, будет неограниченно увеличиваться с возрастанием $|t|$. Но при условиях (12.5) $\frac{dv}{dt} > \alpha > 0$ и, следовательно, при наших предположениях мы имели бы $v(x(x_0, t)) \to -\infty$ при $t \to -\infty$, что невозможно, так как $v(x(x_0, t)) \geqslant 0$ при $t < 0$. Противоречие и доказывает, что $v(x(x_0, t)) \to 0$ и $\|x(x_0, t)\| \to 0$ при $t \to -\infty$. Теорема доказана.

2. Из теоремы 12.1 следует, что необходимым условием существования функции $v(x)$, имеющей определенно-положительную производную $\frac{dv}{dt}$ в области $v \geqslant 0$, является наличие траектории $x(x_0, t)$, удовлетворяющей условию (12.3). Можно показать, что это условие является и достаточным условием существования такой функции $v(x)$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 12.2. *Если имеется траектория $x(x_0, t)$, где $\|x_0\| > H_0$ $(H_0 < H)$, удовлетворяющая условию (12.3), то существует функция $v(x)$, производная которой $\frac{dv}{dt}$ (вычисленная в силу уравнений (12.1)) является функцией определенно-положительной в области $v(x) \geqslant 0$ (в области H_0 в смысле определения 12.1). Функция $v(x)$*

определена в некоторой области h, охватывающей область $v > 0$ (кроме точки $x = 0$), и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ ($i = 1, \ldots, n$). Весьма громоздкого доказательства этой теоремы мы здесь приводить не будем.

Заметим, что поверхность уровня $v = 0$ функции $v(x)$, удовлетворяющей условиям доказанных здесь теорем, определяет *сектор* (если эти поверхности рассматривать в $(n+1)$-мерном пространстве $\{x \times t\}$) в том смысле, в каком понятие сектора определено К. П. Персидским [88]. Таким образом, мы установили, что в случае уравнений (12.1), правые части которых X_i не зависят явно от времени, условием существования такого сектора является наличие траектории $x(x_0, t)$, примыкающей к точке $x = 0$ при $t \to -\infty$.

ГЛАВА III

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА

§ 13. Предварительные замечания

В этой главе даются некоторые достаточные условия устойчивости (или неустойчивости), основанные на идеях второго метода Ляпунова. Эти критерии в известном смысле обобщают теоремы Ляпунова. Однако в отличие от модификаций теорем Ляпунова, рассмотренных в главе II, где главной целью исследования являлось выяснение принципиальной связи между свойствами функций v и поведением траекторий $x(x_0, t_0, t)$, обобщения теорем Ляпунова, приведенные в данной главе, преследуют другую цель. При решении конкретных задач не всегда удается построить функцию v, которая удовлетворяла бы всем условиям соответствующей теоремы Ляпунова. Теоремы, доказываемые ниже, и имеют своей целью обойти ту или иную трудность, которая может возникнуть при применении метода Ляпунова к конкретным задачам устойчивости. Так как эти теоремы, естественно, не имеют такого универсального смысла, как теоремы Ляпунова, то обращение этих теорем принципиального значения не имеет и здесь не рассматривается. Примеры приложения критериев устойчивости (или неустойчивости), доказанных в этой главе, к конкретным задачам устойчивости нелинейных систем будут приведены ниже — в главах IV и V.

§ 14. Критерий асимптотической устойчивости

При решении задач устойчивости иногда удается построить функцию $v(x, t)$, которая является функцией определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел, но производная этой функции $\frac{dv}{dt}$ является функцией не определенно-отрицательной, а лишь функцией знакоотрицательной (в соответствующей области). Следовательно, применить теорему Ляпунова в этом случае нельзя. Приводимая ниже теорема указывает случаи, когда для установления асимптотической устойчивости можно применять и такие функции Ляпунова. Для уравнений возмущенного движения, где правые части X_i

не зависят явно от времени, эта теорема (для случая устойчивости в целом) была доказана в статье Е. А. Барбашина и автора [11], и несколько позднее аналогичная теорема была опубликована А. П. Тузовым [111]. Здесь рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{14.1}$$

правые части которых $X_i(x, t)$ являются периодическими функциями времени t периода ϑ (или не зависят явно от времени t), определенными и непрерывными в области

$$\|x\| < H, \quad -\infty < t < \infty \qquad (H = \mathrm{const} \text{ или } H = \infty). \tag{14.2}$$

Кроме того, предполагаем, что в каждой области $\|x\| < H_\mu < H$ функции X_i удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_j, т. е.

$$|X_i(x'', t) - X_i(x', t)| < L_\mu \|x'' - x'\| \qquad (L_\mu = \mathrm{const}). \tag{14.3}$$

Теорема 14.1. Если уравнения возмущенного движения (14.1) таковы, что возможно построить функцию $v(x, t)$ (периодическую по времени t с периодом ϑ или не зависящую явно от времени), которая является определенно-положительной, допускает бесконечно малый высший предел в области (14.2) и удовлетворяет неравенству

$$\sup (v \text{ в области } \|x\| \leqslant H_0, \quad 0 \leqslant t < \vartheta) <$$
$$< \inf (v \text{ при } \|x\| = H_1) \qquad (H_0 < H_1 < H), \tag{14.4}$$

и если при этом функция v такова, что производная $\frac{dv}{dt}$ удовлетворяет условиям:

1) $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$ в области (14.2), (14.5)

2) производная $\frac{dv}{dt}$ может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целиком полутраекторий системы (14.1)

$$x(x_0, t_0, t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{14.6}$$

(за исключением решения $x = 0$), то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво и область $\|x\| \leqslant H_0$ лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Доказательство. Устойчивость решения $x = 0$ по Ляпунову, а также тот факт, что выполняется неравенство $\|x(x_0, t_0, t)\| < H_1$ для $\|x_0\| < H_0$, $t > t_0$, при условиях доказываемой теоремы отмечались выше неоднократно (см. стр. 21), поэтому здесь достаточно показать, что не существует траектории, вдоль которой

$$\|x(x_0, t_0, t)\| > \eta > 0 \text{ при всех } t \geqslant t_0,$$

если только $\|x_0\| \leqslant H_0$, т. е. при условии $\|x(x_0, t_0, t)\| < H_1$. Предположим от противного, что такая траектория имеется. Функция $v(x(x_0, t_0, t), t)$ является монотонной не возрастающей функцией времени t, так как в области (14.2) выполняется неравенство $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$. Поэтому существует предел $\lim v(x(x_0, t_0, t), t) = v_0$ при $t \to \infty$, причем, очевидно,

$$v(x(x_0, t_0, t), t) \geqslant v_0 \tag{14.7}$$

при $t_0 \leqslant t < \infty$.

Рассмотрим последовательность точек $x^{(k)} = x(x_0, t_0, t_0 + k\vartheta)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где ϑ — период функций $X_i(x, t)$ по времени t (или ϑ — любое положительное число, если функции X_i не зависят явно от времени). Ограниченная последовательность $x^{(k)}$ имеет предельную точку $x = x_0^* \neq 0$. Пусть $x_0^{(l)}$ $(l = k_l)$ — последовательность точек из $\{x^{(k)}\}$, сходящаяся к точке x_0^*. Вследствие непрерывности и периодичности функции $v(x, t)$ должно выполняться равенство $v_0 = v(x_0^*, t_0)$. Рассмотрим траекторию $x(x_0^*, t_0, t)$ при $t_0 \leqslant t < \infty$. Так как эта полутраектория не может по условиям (14.6) лежать целиком в области M, где только и может быть $\frac{dv}{dt} = 0$, то на рассматриваемой полутраектории $x(x_0^*, t_0, t)$ будут точки, где $\frac{dv\left(x\left(x_0^*, t_0, t\right), t\right)}{dt} < 0$, т. е. можно указать момент времени $t^* > t_0$, в который выполняется условие $v(x(x_0^*, t_0, t^*), t^*) = v_1 < v_0$. Так как последовательность $x_0^{(l)}$ сходится к точке x_0^*, то вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных можно записать неравенство

$$\| x(x_0^*, t_0, t^*) - x(x_0^{(l)}, t_0, t^*) \| < \gamma \tag{14.8}$$

при всех $l > N(\gamma)$, каково бы ни было наперед заданное число $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\lim_{l \to \infty} v(x(x_0^{(l)}, t_0, t^*), t^*) \leqslant v_1. \tag{14.9}$$

Учитывая периодичность функций X_i, можно записать равенство

$$x(x_0^{(l)}, t_0, t^*) = x(x_0, t_0, t^* + l\vartheta),$$

и вследствие периодичности функции $v(x, t)$ имеем равенство

$$v(x, t^*) = v(x, t^* + \vartheta l),$$

поэтому условие (14.9) можно записать таким образом:

$$\lim_{l \to \infty} v(x(x_0, t_0, l\vartheta + t^*), l\vartheta + t^*) \leqslant v_1. \tag{14.10}$$

Но неравенство (14.10) противоречит неравенству (14.7), так как $v_1 < v_0$. Противоречие доказывает теорему.

Примечание. Если множество точек M из условия (14.6) есть поверхность, определенная уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, t) = 0, \tag{14.11}$$

то для выполнения условий (14.6) достаточно, чтобы на поверхности $F(x, t) = 0$ (в области $\|x\| < H_1$) выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0. \tag{14.12}$$

Действительно, если в некоторый момент $t = t_1$ точка $x(x_0, t_0, t)$ попадает на поверхность (14.11), то сразу при $t > t_1$ она должна покинуть эту поверхность, так как

$$\left(\frac{dF(x(t), t)}{dt}\right)_{t=t_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$$

в силу условия (14.12).

§ 15. Достаточный критерий неустойчивости

В этом параграфе приводится одно обобщение первой теоремы Ляпунова о неустойчивости для уравнений возмущенного движения с периодическими функциями X_i. Это обобщение находится в том же соотношении с теоремой II Ляпунова [71, стр. 85], как и теорема **14.1** из предыдущего параграфа с теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости. Здесь тоже допускается, при определенных условиях, знакопостоянство производной $\frac{dv}{dt}$ вместо свойства знакоопределенности. Для уравнений, правые части X_i которых не зависят от времени t, теорема была опубликована в статье автора [44]. Следует отметить, что условия существования функции v, о которой пойдет речь в данном параграфе, не являются более широкими, чем условия существования функции v из теоремы II Ляпунова. В этом отношении доказываемая ниже теорема уступает универсальным теоремам о неустойчивости (теореме III Ляпунова [71, стр. 90] и теореме Четаева [124, стр. 34]), применимым во всех случаях неустойчивости. Однако в некоторых конкретных случаях теорема может оказаться полезной. Примеры приложения теоремы к некоторым задачам приведены в главе V.

Будем предполагать, что уравнения возмущенного движения удовлетворяют тем же условиям, что и в § 14.

Теорема 15.1. Пусть $H_1 < H$. Если можно указать функцию $v(x, t)$ (периодическую по времени t или не зависящую явно от времени t), которая была бы определена в области (14.2), допускала бы в этой области бесконечно малый высший предел и притом была бы такова, что производная ее $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений (14.1) удовлетворяла бы следующим условиям:

1) $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ в области (14.2); (15.1)

2) производная $\frac{dv}{dt}$ может быть равна нулю лишь в точках множества M, не содержащего целых полутраекторий

$$x(x_0, t_0, t) \quad (t_0 \leqslant t < \infty) \tag{15.2}$$

(за исключением решения $x = 0$), и если при этом при каждом $t_0 \geqslant 0$ можно указать точки, лежащие в произвольной окрестности точки $x = 0$, такие, что $v > 0$, то решение $x = 0$ неустойчиво и траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $v(x_0, t_0) > 0$ покидают область $\|x\| < H_1$ при возрастании времени t.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ и $t_0 \geqslant 0$. По условиям теоремы можно указать точку x_0, где $\|x_0\| < \delta$ и $v(x_0, t_0) > 0$. Покажем, что существует число $t_1 > t_0$, при котором $\|x(x_0, t_0, t_1)\| = H_1$.

Предположим от противного, что $\|x(x_0, t_0, t)\| < H_1$ при всех $t \in [0, \infty)$. Функция $v(x, t)$ допускает бесконечно малый высший предел, поэтому можно указать число $\eta > 0$ такое, что

$$|v(x, t)| < v(x_0, t_0) \text{ при } \|x\| < \eta, \ 0 \leqslant t < \infty. \tag{15.3}$$

Так как $\frac{dv}{dt} \geqslant 0$ в области $\|x\| < H$, то из (15.3) при нашем предположении следует неравенство $\|x(x_0, t_0, t)\| \geqslant \eta$ при $t \in [t_0, \infty)$. Теперь, используя неравенство

$$\eta \leqslant \|x(x_0, t_0, t)\| < H_1 \tag{15.4}$$

при $t \in [t_0, \infty)$, приходим к противоречию с условием (15.2) совершенно так же, как и в § 14 при доказательстве теоремы 14.1. Дословное повторение этих рассуждений здесь опустим. Противоречие и доказывает, что траектория $x(x_0, t_0, t)$ покидает область $\|x\| < H_1$. Теорема доказана.

Здесь сохраняет силу примечание в конце предыдущего параграфа, т. е. если множество M определено уравнением (14.11), то для выполнения условий 2) теоремы 15.1 достаточно выполнения неравенства (14.12).

§ 16. Критерий устойчивости при больших начальных возмущениях, основанный на устойчивости возмущенных траекторий $x(x_0, t_0, t)$ по Ляпунову

1. В этом параграфе исследуется связь асимптотической устойчивости (при больших начальных отклонениях x_{j0}) решения $x=0$ системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16.1}$$

со свойством устойчивости траекторий $x(x_0, t_0, t)$ относительно достаточно малых возмущений $z_0 = x - x(x_0, t_0, t_0)$.

Будем предполагать здесь, что уравнения (16.1) определены в области

$$-\infty < x_i < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{16.2}$$

и удовлетворяют условиям Липшица

$$|X_i(x'', t) - X_i(x', t)| \leqslant L_\nu \|x'' - x'\| \tag{16.3}$$

в каждой ограниченной области

$$\|x\| < H_\lambda. \tag{16.4}$$

Докажем сначала одно почти очевидное предложение.

Лемма 16.1. Пусть решение $x=0$ уравнений (16.1) устойчиво равномерно по времени t_0 (в смысле определения 9.1 (C), стр. 58). Для того чтобы невозмущенное движение $x=0$ было асимптотически устойчивым и чтобы область $\|x\| < H_0$ $(H_0 < H)$ лежала в области притяжения точки $x=0$, необходимо и достаточно, чтобы каждое возмущенное движение $x(x_0, t_0, t)$ при $\|x_0\| < H_0$ было асимптотически устойчивым относительно достаточно малых начальных возмущений $z_0 = x - x(x_0, t_0, t_0)$[1]).

Доказательство. Докажем достаточность условий леммы. Пусть $\bar{g}_0$ — ограниченная замкнутая область $\bar{g}_0 \subset (\|x\| < H_0)$ и $x_0 \in \bar{g}_0$. Точку x_0 можно погрузить в окрестность

$$\|x_0' - x_0\| < \beta(x_0), \quad \beta(x_0) > 0 \tag{16.5}$$

такую, что

$$\|x(x_0', t_0, t) - x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \text{ при всех } t \geqslant t_0 \tag{16.6}$$

(ε — наперед заданная положительная постоянная) и

$$\lim \|x(x_0', t_0, t) - x(x_0, t_0, t)\| = 0 \text{ при } t \to \infty \tag{16.7}$$

для всех точек $x = x_0'$ из окрестности (16.5).

---

[1]) Равномерно по координатам z_0 (в смысле определения 10.1 (D), § 10, стр. 64).

Ограниченное замкнутое множество $\bar{g}_0$ можно покрыть конечной системой окрестностей (16.5), число которых будем считать равным N. Из неравенства (16.6) заключаем, что при каждом фиксированном значении $t \geqslant t_0$ диаметр области, составленной из точек

$$\{x(x_0, t_0, t) \text{ при } x_0 \in \bar{g}_0\},$$

ограничен числом $2\varepsilon N$ и стремится к нулю при $t \to \infty$ вследствие равномерности устойчивости $x(x_0, t_0, t)$ по z_0.

Так как каждая точка $\|x_0\| < H_0$ лежит по крайней мере в одной области $\bar{g}_0$ рассмотренного вида, то асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ относительно возмущений x_0 из области $\|x\| < \bar{H}_0$ установлена, что и доказывает достаточность условий леммы.

Докажем необходимость этих условий. Пусть $\|x_0\| < H_0$ и $\bar{g}_0$ — ограниченная замкнутая область из $\|x\| < H_0$, удовлетворяющая условиям $x_0 \in \bar{g}_0$. При условиях леммы асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ равномерна по координатам x_0 из области g_0 (см. определение 10.1 и лемму 10.1, стр. 64, 65). Поэтому можно указать число $T\left(\frac{\varepsilon}{2}, t_0\right)$ такое, что

$$\|x(x_0', t_0, t)\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при всех } t \geqslant t_0 + T\left(\frac{\varepsilon}{2}, t_0\right) \tag{16.8}$$

для всех начальных данных $x_0' \in \bar{g}_0$, каково бы ни было наперед заданное положительное число ε. Вследствие непрерывной зависимости решений $x(x_0', t_0, t)$ от начальных данных x_0' можно указать окрестность (16.5), лежащую целиком в области $\|x\| < H_0$, такую, что выполняется неравенство $\|x(x_0, t_0, t) - x(x_0', t_0, t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T\left(\frac{\varepsilon}{2}, t_0\right)$, если только x_0' лежит в этой $\beta(x_0)$-окрестности (16.5). Но в таком случае неравенство (16.6) будет выполняться для всех точек x_0' из окрестности (16.5), что и доказывает устойчивость решения $x(x_0, t_0, t)$.

Докажем теперь асимптотическую устойчивость этого решения. Пусть дано положительное число η. Как и выше, убедимся в существовании числа $T\left(\frac{\eta}{2}, t_0\right)$ такого, что $\|x(x_0', t_0, t)\| < \frac{\eta}{2}$ при всех $t \geqslant t_0 + T\left(\frac{\eta}{2}, t_0\right)$ для всех $x_0' \in g_0$ и, следовательно, для всех x_0' из $\beta(x_0)$ окрестности (16.5) точки x_0. Но в таком случае, очевидно, выполняется неравенство

$$\|x(x_0', t_0, t) - x(x_0, t_0, t)\| < \eta \text{ при } t \geqslant t_0 + T\left(\frac{\eta}{2}, t_0\right),$$

что и доказывает асимптотическую устойчивость решения $x(x_0, t_0, t)$, равномерную по координатам $z_0 = x_0' - x(x_0, t_0, t)$ при $\|z_0\| < \beta(x_0)$. Лемма доказана.

Примечание. Если повторить рассуждения, проведенные при доказательстве леммы, но в предположении, что асимптотическая устойчивость равномерна по координатам $x_0 \in \bar{g}_0$ $(\bar{g}_0 \in (\|x\| < H_0))$ и времени t_0 (в смысле определения 5.1 (B), стр. 32), то убедимся, что необходимым и достаточным условием такой устойчивости является асимптотическая устойчивость решений $x(x_0, t_0, t)$ относительно достаточно малых возмущений $z_0 = x - x_0$, также равномерная по z_0 и t_0 в смысле определения (B), причем оценки чисел $T(\eta)$, фигурирующих в определении (B), при данном $\eta > 0$ должны быть равностепенными для всех траекторий $x(x_0, t_0, t)$ при $x_0 \in \bar{g}_0$.

Рассмотрим теперь случай асимптотической устойчивости решения $x = 0$ при любых начальных возмущениях $-\infty < x_{j0} < \infty$. Будем предполагать, что решение $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и $x_0 \in \bar{g}_0$ (в смысле (B)), какова бы ни была ограниченная замкнутая область $\bar{g}_0$. Следствием леммы 16.1 (с учетом примечания к ней), теоремы И. Г. Малкина [82], теорем из статей [11, 60] и теоремы 5.3 этой книги будет следующее утверждение.

Теорема 16.1. Функция $v(x, t)$, определенная во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, являющаяся определенно-положительной, допускающая бесконечно малый высший и бесконечно большой низший пределы и имеющая определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ при всех x и $t \geqslant 0$, существует тогда и только тогда, когда в окрестности

$$\|x(x_0, t_0, t) - x\| < \beta(x_0), \quad \beta(x_0) > 0$$

каждой траектории $x(x_0, t_0, t)$ может быть построена определенно-положительная (по z) функция $v(x_0, t_0, z, t)$ $(z = x - x(x_0, t_0, t))$, допускающая бесконечно малый высший предел, такая, что производная $\frac{dv(x_0, t_0, z(t), t)}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_n, t), \\ &Z_i(z, t) = X_i(x, t) - X_i(x(x_0, t_0, t), t), \\ &z_i = x_i - x_i(x_0, t_0, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

является функцией определенно-отрицательной. При этом оценки определенной положительности $v(x_0, t_0, z, t)$, бесконечно малого высшего предела $v(x_0, t_0, z, t)$ и определенной отрицательности производной $\frac{dv(x_0, t_0, z(t), t)}{dt}$ должны быть равностепенными по $x_0 \in \bar{g}_0$, $t_0 \in [0, \infty)$, иначе говоря, для каждой области $\bar{g}_0$ должны существовать три функции $w_1(z)$, $w_2(z)$, $W(z)$, удовлетворяющие условиям:

$$W(0)=0, \quad w_1(z)>0, \quad w_2(z)>0 \quad \text{при} \quad z\neq 0$$

и

$$\left.\begin{aligned} w_1(z) \leqslant v(x_0, t_0, z, t) \leqslant W(z), \\ \frac{dv}{dt} \leqslant -w_2(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad x_0 \in \bar{g}_0. \tag{16.10}$$

2. Теорема 16.1 и лемма 16.1 приводят задачу об устойчивости при больших начальных возмущениях к задачам устойчивости при малых возмущениях. Но эти последние задачи в некритических случаях часто удается линеаризовать, т. е. при решении задачи возможно ограничиться рассмотрением лишь линейных уравнений. При этом в качестве функции Ляпунова удобно использовать квадратичные формы. Поэтому представляет интерес теорема 16.1 в том частном случае, когда функции $v(x_0, t_0, z, t)$ удовлетворяют оценкам (11.7), характерным для функций Ляпунова — квадратичных форм. Доказательство критерия асимптотической устойчивости, основанного на таких функциях $v(x_0, t_0, z, t)$, и составляет основное содержание этого параграфа. Заметим еще, что в теореме 16.1, как и везде в теории устойчивости по Ляпунову, предполагается, что окрестности $\|x - x(x_0, t_0, t)\| < \delta$ возмущенных траекторий $x(x_0, t_0, t)$, в которых функции $v(x_0, t_0, z, t)$ определены и удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова, не зависят от времени t и, следовательно, в частности, не стягиваются в точку при неограниченном возрастании времени. В приложениях, однако, могут встретиться случаи, когда удается доказать существование функции Ляпунова v в окрестности каждого возмущенного движения, однако при оценке этой окрестности при доказательстве того, что с возрастанием t эта окрестность не стягивается в точку, возникают дополнительные трудности.

Докажем поэтому теорему в такой формулировке, которая в ряде случаев позволяет обойти эту трудность. Конкретные критерии асимптотической устойчивости, основанные на этой теореме, будут доказаны в главе V.

Теорема 16.2. Если в окрестности каждого возмущенного движения $x(x_0, t_0, t)$ при $x_0 \in \bar{h}_0$ ($\bar{h}_0$ — ограниченная замкнутая область)[1] можно построить функцию $v(x_0, t_0, z, t)$ $(z = x - x(x_0, t_0, t))$, которая удовлетворяет оценкам

$$c_1\|z\|_2^2 \leqslant v(x_0, t_0, z, t) \leqslant c_2\|z_2\|_2^2, \tag{16.11}$$

$$\left(\frac{dv(x_0, t_0, z(t), t)}{dt}\right)_{\text{в силу (16.9)}} \leqslant -c_3\|x\|_2^2 \tag{16.12}$$

($c_1, \ldots, c_3$ — положительные постоянные, не зависящие от точки x_0), в области

$$\|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \delta(x_0, t_0, t), \tag{16.13}$$

[1]) Область h_0, как и выше, области g_0, предполагается связной.

где $\delta(x_0, t_0, t)$ — положительная при $t \geqslant t_0$ функция, такая, что для каждого $t_1 > t_0$ можно указать число $\gamma(t_1) > 0$, удовлетворяющее условию $\delta(x_0, t_0, t) > \gamma(t_1)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x_0 \in \bar{h}_0$, то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво и область h_0 лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Примечание. Для того чтобы функция $\delta(x_0, t_0, t)$ удовлетворяла условиям теоремы, достаточно, чтобы при каждом данном $t_0 \geqslant 0$ положительная функция $\delta(x_0, t_0, t)$ была непрерывна при $t \geqslant t_0$, $x_0 \in \bar{h}_0$. В самом деле, в этом случае функция $\delta(x_0, t_0, t)$ достигает в области $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $x_0 \in \bar{h}_0$ положительного минимума, который и можно принять за число $2\gamma(t_1)$.

Доказательство теоремы. Пусть q — число из интервала $(0, 1)$ и $T = \frac{1}{c_1 c_3} \ln\left(\frac{c_2}{c_1 q^2}\right)$. Согласно условиям теоремы при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ в области $\|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant \gamma(t_0 + T)$ определена функция $v(x_0, t_0, z, t)$, удовлетворяющая в этой области оценкам (16.11), (16.12). Пусть $\eta = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}$. Тогда $v(x_0, t_0, z, t)$ при $\|z\|_2 \leqslant \eta$ меньше, чем ($\inf v$ при $\|z\|_2 = \gamma$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$). Так как в области (16.13) $\frac{dv}{dt} \leqslant 0$, то траектории $x(x_0', t_0, t)$ при $\|x_0' - x_0\|_2 < \eta$ остаются в области $\|x - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \gamma$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, а следовательно, и в области (16.13), где выполняются условия (16.11), (16.12). Поэтому неравенство (16.12) можно интегрировать на отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ при $\|x_0' - x_0\|_2 < \eta$. Интегрируя это неравенство (с учетом оценок (16.11) и по выбору числа T), получим оценку

$$\|x(x_0', t_0, t_0 + T) - x(x_0, t_0, t_0 + T)\|_2 \leqslant q\|x_0 - x_0'\|_2. \tag{16.14}$$

Из неравенства (16.14) следует, что диаметр любой сферы

$$\|x - x_0\|_2 \leqslant R^2, \tag{16.15}$$

лежащей целиком в области h_0, за время $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ уменьшится по крайней мере в q раз. Действительно, на каждом радиусе такой сферы можно указать конечное число точек, удовлетворяющих попарно условиям

$$\|x_0' - x_0\| < \eta. \tag{16.16}$$

Так как расстояние между каждыми двумя такими точками в силу неравенства (16.14) уменьшается по крайней мере в q раз, то по крайней мере в q раз уменьшается расстояние между центром сферы x_0 и любой точкой на поверхности сферы. Отметим также, что на отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\|x(x_0', t_0, t) - x(x_0, t_0, t)\|_2 < \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}} R, \tag{16.17}$$

если только точки x_0' и x_0 лежат внутри сферы (16.15). В самом деле, для любых двух точек x_0'', x_0', лежащих на радиусе сферы (16.15) и удовлетворяющих неравенству (16.16), имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \tag{16.18}$$

и

$$v(x_0', t_0, x_0'' - x_0', t_0) \leqslant c_2 \|x_0'' - x_0'\|_2^2, \tag{16.19}$$

$$v(x_0', t_0, x(x_0'', t_0, t) - x(x_0', t_0, t), t) \geqslant c_1 \|x(x_0'', t_0, t) - x(x_0', t_0, t)\|_2^2. \tag{16.20}$$

Сопоставление неравенств (16.18), (16.19), (16.20) и доказывает неравенство (16.17).

Так как при неограниченном возрастании интервала времени T число q стремится к нулю, то заключаем теперь, что каждое решение $x(x_0, t_0, t)$ асимптотически устойчиво относительно возмущений $z_0 = x - x(x_0, t_0, t_0)$ из сферы (16.15). Отсюда на основании леммы 16.1 следует асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ относительно возмущений x_0 из области h_0. Теорема доказана.

3. Предположим теперь, что область h_0, для которой выполняются условия теоремы 16.2, совпадает со всем пространством $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, а оценка чисел c_1, c_2, c_3 из условий (16.11), (16.12) равномерна по $t_0 \in [0, \infty)$. Тогда решение $x = 0$ будет асимптотически устойчивым относительно любых начальных отклонений $-\infty < x_{j0} < \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$. Больше того, в этом случае траектории $x(x_0, t_0, t)$ при всех начальных отклонениях x_0 будут удовлетворять неравенству

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant B \|x_0\|_2 \exp(-\alpha(t - t_0)), \tag{16.21}$$

где B и α — положительные постоянные. Именно из неравенства (16.17) следует, что можно положить $B = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/2}$, а из неравенства (16.14) по выбору числа T следует, что можно положить $\alpha = \frac{1}{2c_1c_3}$. Поэтому на основании теоремы 11.1 заключаем о справедливости такого утверждения[1]).

Теорема 16.3. Если в окрестности каждой траектории $x(x_0, t_0, t)$ $(\|x_0\|_2 < \infty)$ можно построить функцию $v(x_0, t_0, z, t)$, удовлетворяющую оценкам (16.11) и (16.12), то во всем пространстве $\|x\|_2 < \infty$ при $0 < t < \infty$ определена функция $v(x, t)$, удовлетворяющая оцен-

[1]) Теорема 11.1 доказана при условиях непрерывной дифференцируемости функций X_i; усложняя доказательство, можно было бы проверить справедливость этой теоремы лишь при условиях Липшица (1.7).

кам (11.7), т. е.

$$c_1'\|x\|_2^2 \leqslant v(x, t) \leqslant c_2'\|x\|_2^2 \text{ при всех } x, \tag{16.22}$$

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -c_3\|x\|_2^2 \text{ при всех } x, \tag{16.23}$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < c_4'(R)\|x\|_2 \text{ при } \|x\|_2 < R \tag{16.24}$$

$$(c_1', \ldots, c_4' > 0 \text{ — постоянные}).$$

§ 17. Некоторые замечания по методу функций Ляпунова

1. Теоремы Ляпунова предполагают следующий порядок их приложения: дана система уравнений (1.3), тогда, имея в виду применить теорему Ляпунова (I, II или III [71, стр. 82—90]), 1) строим функцию Ляпунова v, 2) проверяем, удовлетворяет ли функция v условиям соответствующей теоремы, причем производная $\frac{dv}{dt}$ должна обладать нужным свойством вдоль *всех* траекторий (1.3) в области H.

Возможно, однако, обобщить эти теоремы так, чтобы стал возможен иной порядок их приложения.

Отмечаем траекторию $x(x_0, t_0, t)$ и строим функцию v, удовлетворяющую в области H всем условиям соответствующей теоремы Ляпунова, кроме условия, наложенного на свойства производной $\frac{dv}{dt}$, которое должно выполняться *лишь* для *отмеченной* траектории $x(x_0, t_0, t)$ (в области H). Если такая функция v существует для каждой траектории $x(x_0, t_0, t)$ и если оценки необходимых свойств функций v будут равностепенными по всем траекториям в области H, то утверждение теоремы сохраняет силу. Следует, однако, заметить, что такое обобщение теорем Ляпунова имеет один недостаток — доказательства, полученные на основании этих теорем, получаются методом от противного.

Приведем здесь такое обобщение лишь для случая асимптотической устойчивости, так как, с одной стороны, только эта формулировка и используется в дальнейшем (§ 24, стр. 121—127), а с другой стороны, обобщение других теорем Ляпунова в этом смысле также не представляет труда. Будем предполагать, что уравнения возмущенного движения определены в области $\|x\| < H$.

Теорема 17.1. Пусть $H_0 < H_1 < H$. Если для любой траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $\|x_0\| < H_0$ можно указать функцию $v_{(x_0, t_0)}(x, t)$, определенную в области $\|x\| < H$, $t_0 < t < \infty$, определенно-положительную, допускающую бесконечно малый высший предел в области H равностепенно по $\{x_0, t_0\}$, т. е.

$$w(x) \leqslant v_{(x_0, t_0)}(x, t) \leqslant W(x) \text{ при } \|x\| < H \tag{17.1}$$

($w(x)$, $W(x)$ — непрерывные функции, не зависящие от x_0 и t_0 и удовлетворяющие условию $w(x) > 0$ при $x \neq 0$, $W(0) = 0$), причем

$$\sup_{\|x\| = H_1} w(x) < \inf_{\|x\| = H_1} W(x), \tag{17.2}$$

и производная $\frac{dv}{dt}$ в силу уравнений возмущенного движения является функцией определенно-отрицательной на траектории $x(x_0, t_0, t)$, т. е.

$$\frac{dv_{(x_0, t_0)}(x(x_0, t_0, t), t)}{dt} \leqslant -w_1(x_0, t_0, x), \tag{17.3}$$

в точках $\|x(x_0, t_0, t)\| < H_1$, причем

$$w_1(x_0, t_0, x) > 0 \text{ при } x \neq 0, \tag{17.4}$$

то решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво, и область $\|x\| < H_0$ лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Примечание. Если в условиях (17.4) и (17.3) функцию $w_1(x_0, t_0, x)$ можно выбрать не зависящей от x_0, t_0, то при условиях теоремы 17.1 решение $x = 0$ будет асимптотически устойчивым равномерно по t_0 и x_0 (в смысле определения 5.1 (B), стр. 32).

Доказательства теоремы 17.1 приводить не будем, так как оно получается очевидной модификацией доказательства теоремы Ляпунова [71, стр. 82—84].

2. Перейдем теперь к вопросу о применении метода функций Ляпунова при исследовании задач устойчивости в случаях, когда правые части уравнений возмущенного движения являются функциями разрывными. Такие задачи в последнее время привлекают внимание многих исследователей, так как системы уравнений с разрывными правыми частями встречаются во многих новых прикладных задачах. Примером могут служить задачи синтеза систем автоматического регулирования (см., например, [68, 70]). Особенно часто системами уравнений с разрывными функциями X_i описываются системы оптимального регулирования [116].

Метод функций Ляпунова нашел широкое применение при исследовании устойчивости систем с разрывными функциями X_i, причем были получены интересные и важные результаты. Отметим, например, работы А. И. Лурье [70], А. М. Летова [67—69], М. А. Айзермана [5] [1]). Интуитивно справедливость теорем Ляпунова и для уравнений с разрывными правыми частями очевидна. Следует, однако, иметь в виду, что строгое доказательство теорем второго метода Ляпунова выполнено как в работе самого А. М. Ляпунова [71], так и в других известных руководствах по теории устойчивости (например, [26, 77,

[1]) Очень интересное обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению для исследования периодических решений разрывных систем дали недавно М. А. Айзерман и Ф. Р. Гантмахер (ДАН СССР, т. 116, № 4, 1957).

124]) лишь в предположении непрерывности функций X_i. Имея в виду применение метода функций Ляпунова и для уравнений с разрывными функциями X_i, следует сделать по этому поводу несколько замечаний.

Нижеследующее изложение не претендует на строгость, так как строгое изложение метода для уравнений с разрывными функциями X_i в общем случае должно опираться на достаточно разработанную теорию этих уравнений. Пока эта теория далека от завершения[1]).

Возможно, что одним из подходов к строгому обоснованию метода Ляпунова в рассматриваемых случаях является изучение и определение траекторий уравнений с разрывными правыми частями предельным переходом от непрерывных функций $\tilde{X}_i$, однако обоснование таких предельных переходов выполнено пока лишь в частных случаях (см., например, работу Л. С. Понтрягина и В. Г. Болтянского [15]). Пока общая теория уравнений с разрывными правыми частями X_i находится в таком состоянии, что во многих случаях неясно, как строго определить траектории на поверхностях и линиях разрыва функций X_i (например, так называемые скользящие режимы). Довольно просто решается вопрос в тех случаях, когда поверхности разрыва функций X_i являются гладкими сечениями для траекторий рассматриваемой системы. А именно, будем говорить, что в окрестности точки $x = x_0$ (в пространстве $\{x \times t\}$) поверхность S ($(x_0, t_0) \in S$) разрыва функций X_i является *гладким сечением* траекторий, если эта поверхность определена в $(n+1)$-мерном пространстве $\{x \times t\}$ уравнением

$$F(x_1, \ldots, x_n, t) = 0, \tag{17.5}$$

где функция $F(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет в окрестности точки x_0, t_0 непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, причем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial F}{\partial t} > 0 \tag{17.6}$$

во всех точках этой окрестности (или хотя бы в точках этой окрестности, не лежащих на S).

Условие (17.6) означает, что в области $F < 0$ и в области $F > 0$ выполняется неравенство $\frac{dF(x(t), t)}{dt} > 0$ вдоль траекторий системы, т. е. в области $F < 0$ траектории подходят к поверхности $F = 0$, а в области $F > 0$ траектории отходят от поверхности $F = 0$ при возрастании времени. Поэтому здесь траектория, весьма естественно, продолжается по непрерывности через поверхность $S(F = 0)$, причем в точке x_0, t_0 можно принять, что функции $x_i(x_0, t_0, t)$ имеют правую

[1]) Примечание в корректуре. Существенное развитие эта теория получила в работе А. Ф. Филиппова (см. УМН, т. 13, вып. 4, 1958).

производную $\frac{dx_i}{dt}$, равную $\lim X_i(x(x_0, t_0, t), t)$ при $t \to t_0+0$. В соответствии с этим при вычислении производной $\frac{dv}{dt}$ в точке $\{t_0, x_0\} \in S$ можно принять, что функция v (рассматриваемая как функция времени) имеет правую производную $\frac{dv}{dt}$ (при $dt = +0$), причем

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{dt=+0} = \lim_{x \to x_0,\ t \to t_0} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i(x, t) + \frac{\partial v}{\partial t}\right],$$

где пары $\{x, t\}$ лежат в области $F > 0$.

Особенно простым частным случаем сечения S являются поверхности разрыва $t = \tau = \text{const}$, где в качестве функции F можно, очевидно, выбрать функцию $F = (t - \tau)$, и следовательно, в случаях, когда функции X_i могут быть разрывными лишь по времени t, особых затруднений при применении метода функций Ляпунова не возникает.

Действительно, в формулировках всех теорем Ляпунова (а также в формулировках модификаций и обобщений этих теорем) условия, налагаемые на производную $\frac{dv}{dt}$ функции $v(x(t), t)$ вдоль траектории $x(t)$, можно заменить аналогичным требованием, наложенным на величину

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{v(x(t+\Delta t), t+\Delta t) - v(x, t)}{\Delta t}\right), \tag{17.7}$$

что проверяется без труда, и на этом останавливаться здесь не будем.

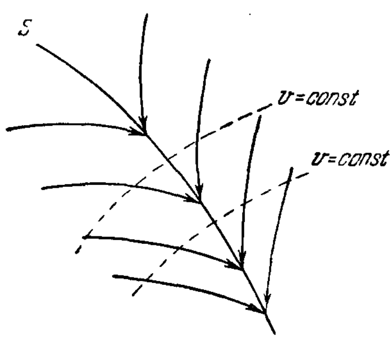

Рис. 3.

Таким образом, во всех случаях, когда траектория $x(t)$ может быть естественно определена из системы уравнений и когда может быть вдоль этой траектории вычислена величина (17.7), метод функций Ляпунова допускает строгое обоснование без дополнительных соображений.

Сложнее обстоит дело в том случае, когда возникает затруднение с определением траектории $x(x_0, t_0, t)$ на поверхностях S разрыва функций X_i. Пусть, например (рис. 3), в некоторой окрестности поверхности S функция $v(x, t)$ имеет определенно-отрицательную производную

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{17.8}$$

причем траектории $x(t)$ подходят к поверхности S с обеих сторон. В этом случае на поверхности S траектории $x(t)$ данной системой уравнений не определяются.

Примем здесь следующую гипотезу. Так как реальная система описывается уравнениями лишь приближенно и имеются некоторые неучтенные силы и отклонения, то можно предполагать, что точка $x(t)$ траектории в фазовом пространстве системы не может оставаться произвольно долго на поверхностях разрыва функций S, размерность которых, по предположению, меньше размерности пространства, так как эта точка сбивается с поверхности S в область непрерывности функций X_i случайными силами и смещениями. (Если эти случайные величины имеют достаточно большую интенсивность, то время нахождения точки $x(t)$ на поверхности S составляет ничтожную долю всего времени движения точки $x(t)$ по траектории.) Но в области непрерывности функций X_i производная $\frac{dv}{dt}$ определенно-отрицательна. В соответствии с этим будем принимать, что теоремы второго метода Ляпунова сохраняют свою силу[1]), если функции X_i терпят разрывы на некоторых поверхностях разрыва S (на $(n, n-1, \ldots)$-мерных поверхностях простой конфигурации) и если всюду вне точек этих поверхностей выполняются условия соответствующих теорем.

Рассмотрим еще случаи, когда наряду с обычными непрерывными функциями X_i в правых частях уравнений допускаются импульсные функции типа $\delta(t)$ — функций времени. Вопросов существования траекторий $x(x_0, t_0, t)$ таких уравнений здесь рассматривать не будем. Рассмотрим лишь случаи, когда существуют функции $x(x_0, t_0, t)$, определенные при $t \geqslant t_0$ и являющиеся в определенном смысле решениями этих уравнений. Заметим, что для довольно широкого класса систем такого вида определения, теоремы существования и единственности решений даны недавно Я. Курцвейлем [62]. Если известную функцию $x(t)$ (решение уравнений) подставить в функцию Ляпунова $v(x(t), t)$, то получим некоторую известную функцию времени $V(t) = v(x(t), t)$. И здесь для справедливости теорем Ляпунова достаточно в формулировке соответствующей теоремы условие, наложенное на функцию $\frac{dv}{dt}$, заменить таким же условием, но наложенным на величину (17.7), причем можно не требовать непрерывности функции $v(t)$. Доказательств и формулировок соответствующих теорем, получающихся такой модификацией теорем Ляпунова, приводить здесь не будем.

---

[1]) Введением некоторых определений этим замечаниям можно было бы придать строгий смысл, однако это выходит за пределы данной книги (см. сноску на стр. 93).

ГЛАВА IV

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К НЕКОТОРЫМ ОБЩИМ ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 18. Предварительные замечания

В этой главе рассматривается один из известных возможных способов приложения метода функций Ляпунова, который заключается в следующем. Сначала рассматривается некоторая упрощенная приближенная система уравнений, для которой может быть построена функция Ляпунова (или хотя бы может быть доказано существование функции Ляпунова v с определенными свойствами), а затем та же самая функция v применяется для исследования заданных полных уравнений возмущенного движения. Таким именно путем Ляпунов в работе [71, стр. 134—137] обосновал впервые законность исследования задачи устойчивости в окрестности невозмущенного движения в случаях, названных им *некритическими*. При этом, как известно, Ляпунов опирался на теорему [71, стр. 106—109] о существовании в некритических случаях функции v в виде квадратичной формы.

В такой постановке задача может быть сформулирована следующим образом: дана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{18.1}$$

причем известно, что траектории приближенной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{18.2}$$

обладают некоторым свойством и при этом для системы (18.2) может быть построена функция Ляпунова v с соответствующими свойствами. Требуется определить те вариации R_i правых частей уравнений возмущенного движения, при которых функция v продолжает сохранять свои свойства и в силу полной системы уравнений (18.1), т. е. определить вариации R_i, при которых и траектории системы (18.1) сохраняют соответствующее свойство.

Решение этой задачи включает в себя выяснение двух вопросов.

1) Требуется показать, что в рассматриваемом случае существует некоторая граница $R(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ при $x \neq 0$ такая, что при $|R_i| \leqslant R$ изучаемые свойства сохраняются.

2) Требуется оценить по возможности более точно величину допустимых функций R_i (или по крайней мере оценить порядок величин R_i).

Первая из этих задач имеет главным образом принципиальный характер, так как положительное решение этой задачи показывает, что данное свойство в свою очередь проявляет определенную устойчивость относительно вариаций $R_i (i = 1, \ldots, n)$ уравнений возмущенного движения. Такие системы, обладающие устойчивыми относительно произвольных, достаточно малых вариаций $R_i \neq 0$ при $x \neq 0$ свойствами, будем в дальнейшем называть *грубыми системами*. Заметим, что для решения этого первого вопроса обычно оказывается не столь существенным, какая конкретно выбрана функция v из числа всего множества функций, которые могут быть построены для системы (18.2). Вторая задача носит более прикладной характер, и здесь более или менее успешное решение задачи в значительной степени определяется тем, насколько удачно подобраны приближенная система (18.2) и соответствующая ей функция Ляпунова v.

В этой главе рассмотрим несколько характерных задач описанного выше типа. Заметим еще, что, несмотря на довольно широкое развитие этого метода использования функций Ляпунова, возможности его в смысле наилучшей оценки допустимых вариаций R_i в значительной степени ограничены двумя обстоятельствами: 1) здесь возможно главным образом применение лишь теорем Ляпунова, в которых допускается знакоопределенная производная $\frac{dv}{dt}$ (ограничение, связанное, естественно, с грубостью соответствующих свойств); 2) при оценке допустимых вариаций R_i, как правило, не учитывается структура этих вариаций.

§ 19. Исследование грубости свойств устойчивости и неустойчивости

1. Из большого числа вопросов, которые возникают в задачах, названных в заглавии параграфа, рассмотрим здесь два вопроса: а) покажем, что свойство траекторий (A) (см. определение 4.1, стр. 23) является грубым и, в частности, свойство равномерной асимптотической устойчивости является грубым, так же как и свойство неустойчивости, если только неустойчивость сопровождается свойством (A); б) покажем, что свойство неустойчивости в общем случае грубым не является[1]).

---

[1]) Тот факт, что неасимптотическая устойчивость не является, вообще говоря, грубым свойством, очевиден, как показывает пример $\frac{dx}{dt} = 0$. Решение $x = 0$ этого уравнения устойчиво, решение $x = 0$ уравнения $\frac{dx}{dt} = R(x)$ неустойчиво, сколь бы мала ни была функция $R(x)$ при $x \neq 0$, если только эта функция удовлетворяет неравенству $R(x)\, x > 0$ при $x \neq 0$.

Уточним здесь, в каком смысле в дальнейшем понимается термин *грубость данного свойства.*

Определение 19.1. Будем говорить, что некоторое свойство (обозначим это свойство буквой (ξ)) является грубым в окрестности точки $x=0$ (в области H), если, какова бы ни была наперед заданная система (18.2), траектории которой обладают свойством (ξ) в некоторой окрестности точки $x=0$, существует непрерывная функция $\eta(x_1, \ldots, x_n)>0$ при $x\neq 0$ такая, что свойством (ξ) обладают также и траектории системы (18.1) (в некоторой окрестности точки $x=0$) при условии, что выполняются неравенства

$$|R_i(x, t)| \leqslant \eta(x) \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{19.1}$$

Если можно указать по крайней мере одну систему (18.2), которая обладала бы свойством (ξ), и притом такую, что для любой непрерывной функции $\eta(x_1, \ldots, x_n)$ при $x\neq 0$ можно указать функции $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, удовлетворяющие неравенству (19.1), такие, что соответствующая система (18.1) свойством (ξ) не обладает, то свойство (ξ) не является грубым.

Грубость асимптотической устойчивости для стационарных уравнений возмущенного движения в предположении непрерывной дифференцируемости функций $X_i(x)$ была доказана Е. А. Барбашиным [9, 10]. Грубость асимптотической устойчивости в случае периодических по времени t дифференцируемых функций $X_i(x, t)$ была показана в работах [136, 137], а для общего случая функций X_i грубость равномерной по $\{x_0, t_0\}$ асимптотической устойчивости показана в работе С. И. Горшина [21, 22] и И. Г. Малкина [82]. Заметим еще, что из последних результатов Я. Курцвейля [60] и Х. Л. Массера [138] следует грубость асимптотической устойчивости в предположении лишь непрерывности *периодических* функций $X_i(x, t)$.

2. Докажем предварительно одно простое вспомогательное предложение.

Лемма 19.1. Если в ограниченной замкнутой области $\bar{h}_0$ (не обязательно содержащей точку $x=0$) функция $v(x, t)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ $(i=1, \ldots, n)$, равномерно ограниченные при $0<t<\infty$, а производная $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_{(18.2)}$ в силу уравнений (18.2) является функцией знакоопределенной в $\bar{h}_0$, то существует непрерывная функция $\eta(x_1, \ldots, x_n)>0$ при $x\neq 0$ такая, что производная $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_{(18.1)}$ в силу уравнений (18.1) также будет функцией знакоопределенной в области $\bar{h}_0$, если только выполняются неравенства (19.1).

Действительно, из свойства знакоопределенности (пусть, например, из свойства определенной отрицательности) $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_{(18.2)}$ следует существование непрерывной функции $w(x_1, \ldots, x_n)>0$ при $x\neq 0$, удовлетворяющей неравенству

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.2)} \leqslant -w(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{h}_0, \quad t \in [0, \infty). \tag{19.2}$$

Пусть $N = \sup\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right)$ при $x \in \overline{h}_0$, $t \in [0, \infty)$, тогда при $\eta = (1-q)\frac{w(x)}{nN}$ из неравенств (19.1), (19.2) получим:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(X_i + R_i) + \frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.2)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i \leqslant$$
$$\leqslant -w(x) + \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i} R_i\right| \leqslant -qw(x) \qquad (0 < q < 1),$$

что и доказывает определенную отрицательность $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.1)}$ в области $\overline{h}_0$. Лемма доказана. Отметим еще для дальнейшего оценку

$$\eta(x) = \frac{(1-q)\,w(x)}{nN} \qquad (0 < q < 1). \tag{19.3}$$

Будем теперь предполагать, что функции X_i удовлетворяют условиям, указанным в § 1. Тогда следствием теорем 4.1, 5.1, 6.1, 6.2 и леммы 19.1 является следующее утверждение.

Теорема 19.1. Свойство траекторий, названное в § 4 (стр. 23) свойством (A) (определение 4.1), является грубым свойством. Если решение $x = 0$ асимптотически устойчиво (или неустойчиво) и при этом выполняется свойство (A) [1]), то эта устойчивость (неустойчивость) является грубым свойством.

Если правые части уравнений возмущенного движения — периодические функции X_i времени t периода ϑ (или не зависят явно от времени t), то свойство системы не иметь целых траекторий в некоторой окрестности точки $x = 0$ является грубым свойством. В этом случае асимптотическая устойчивость всегда является грубым свойством.

Доказательства этой теоремы приводить не будем, так как оно получается очевидным сопоставлением перечисленных выше теорем 4.1, 5.1, 6.1, 6.2 и леммы 19.1.

Заметим еще, что теорема на стр. 40 о существовании функции Ляпунова $v(x, t)$ в случае асимптотической устойчивости относительно возмущений из ограниченной области G_δ, а также теорема 5.3 о существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости при любых

[1]) Свойство (A) в случае асимптотической устойчивости эквивалентно равномерности устойчивости по t_0 и x_0.

начальных возмущениях, равно как и теоремы о неустойчивости 6.1, позволяют также доказать, что при достаточно малых вариациях R_i сохраняются те области, в которых траектории обладают соответствующими свойствами: в случае асимптотической устойчивости ограниченная область G_δ, лежавшая в области притяжения точки $x=0$, остается в этой же области; сохраняется свойство равномерной асимптотической устойчивости при любых начальных возмущениях; в случае неустойчивости сохраняется свойство неустойчивости решения $x=0$ в данной области. В самом деле, из леммы 19.1 следует, что все необходимые для доказательства этих утверждений свойства функций Ляпунова из теорем 5.3, 6.1 сохраняются в соответствующих областях. Этим замечанием о сохранении свойств в соответствующих областях, в частности, уточняются приведенные выше результаты [9, 10, 21, 22, 60, 82, 136—138], где, как правило, этот вопрос не рассматривался.

3. Покажем теперь на примере, что неустойчивость не является грубым свойством уже в случае аналитических функций X_i, причем даже в случае, когда положение равновесия $x=0$ является изолированной особой точкой системы (18.2).

Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^3 + z^2 x, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3 + z^2 y, \\ \frac{dz}{dt} &= -z^3. \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

Решение $x=y=z=0$ системы уравнений (19.4) неустойчиво. Действительно, для функции $v=x^4+y^4$ имеем в силу уравнений (19.4):

$$\frac{dv}{dt} = 4(x^4+y^4)z^2 = 4z^2 v; \tag{19.5}$$

после интегрирования неравенства (19.5) с учетом уравнений (19.4) получаем:

$$v(x(t), y(t)) = v(x(0), y(0))\, z(0)^4 z^{-4}(t). \tag{19.6}$$

Так как при $t\to\infty$ из третьего уравнения (19.4) следует $z(t)\to 0$, то из равенства (19.6) заключаем, что $\lim v=\infty$ при $t\to\infty$, а это и доказывает неустойчивость решения $x=y=z=0$ системы (19.4).

Покажем теперь, что, какова бы ни была непрерывная функция $\eta(x, y, z) > 0$ при $x^2+y^2+z^2 \neq 0$, можно указать функции $R_i(x, y, z)$, удовлетворяющие в окрестности точки $x=y=z=0$ неравенству

$$|R_i(x, y, z)| \leqslant \eta(x, y, z) \qquad (i=1, 2, 3),$$

и такие, что решение $x=y=z=0$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + z^2 x + R_1(x, y, z), \qquad \frac{dy}{dt} = -x^3 + z^2 y + R_2(x, y, z),$$
$$\frac{dz}{dt} = -z^3 + R_3(x, y, z) \tag{19.7}$$

устойчиво (и даже асимптотически устойчиво).

Действительно, пусть дана такая функция $\eta(x, y, z)$. Зададим положительное число ε. Рассмотрим поверхность, образованную куском поверхности

$v = x^4 + y^4 = c$, лежащим внутри сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 < \varepsilon^2 \tag{19.8}$$

$\left(c\right.$ — достаточно малое положительное число $\left.c \ll \frac{1}{4},\ c < \varepsilon\right)$. На выделенном куске поверхности $v = c$ функция $\eta(x, y, z)$ достигает положительного минимума, который обозначим через $\psi(c)$. Определим теперь в окрестности точки $x = y = z = 0$ непрерывную функцию $f(x, y, z)$, удовлетворяющую неравенству

$$\frac{1}{2}\psi(c) \leqslant f(x, y, z) \leqslant \psi(c) \text{ на поверхности } v = c \tag{19.9}$$

(существование такой функции $f(x, y, z)$ очевидно). Функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет неравенству

$$f(x, y, z) \leqslant \eta(x, y, z)$$

в некоторой окрестности точки $x = y = z = 0$.

Определим функции $R_i(x, y, z)$ равенствами

$$R_1 = -fx, \quad R_2 = -fy, \quad R_3 = 0. \tag{19.10}$$

При таком выборе функций R_i решение $x = y = z = 0$ системы (19.7) устойчиво. Действительно, для функции $v = x^4 + y^4$ в силу системы уравнений (19.7) при условиях (19.10) имеем:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(19.7)} = 4vz^2 - 4f(x^4 + y^4), \tag{19.11}$$

и на каждой поверхности $v = c$ при $z^2 \leqslant \frac{1}{4}\psi(c)$ вследствие (19.9) справедливо неравенство

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(19.7)} \leqslant -c\psi(c) < 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0. \tag{19.12}$$

Так как в силу третьего уравнения (19.7) имеем $\frac{d(z^2)}{dt} < 0$ при $z \neq 0$, то заключаем, что поверхности $v = c$, $z^2 = \frac{\psi(c)}{4}$ образуют замкнутые оболочки, которые пересекаются траекториями системы (19.7) строго внутрь. Иначе говоря, эти замкнутые оболочки образуют поверхности уровня некоторой функции Ляпунова V, верхняя правая производная которой $\overline{\lim} \frac{\Delta V}{\Delta t}$ при $\Delta t \to +0$ является функцией определенно-отрицательной, т. е. решение $x = y = z = 0$ системы (19.7) при условиях (19.10) асимптотически устойчиво, а это и доказывает, что неустойчивость этого решения является негрубым свойством.

Из приведенного примера следует также, что возможны случаи, когда при непрерывном изменении параметров системы (в данном случае — полагая $f(\mu, x, y, z) = \mu f(x, y, z)$ при $\mu \to 0$) можно перейти от состояния асимптотической устойчивости к неустойчивости, минуя состояние устойчивости. Отметим еще, что вследствие теоремы 19.1 *негрубость* неустойчивости возможна лишь в тех случаях, когда не выполняется условие (A), т. е. в данном стационарном случае лишь при наличии в произвольно малой окрестности точки $x = y = z = 0$ целых траекторий системы (отличных от точки $x = y = z = 0$). В рассмотренном выше примере (19.4) такими траекториями являлись замкнутые кривые $x^4 + y^4 = \text{const}$, $z = 0$.

4. Теоремы 12.1 и 12.2 позволяют в случае, когда функции X_i не зависят явно от времени, указать еще одно достаточное условие грубости свойства неустойчивости. Будем предполагать, что правые части $X_i(x)$ системы уравнений (19.13) имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ в некоторой окрестности точки $x=0$.

Теорема 19.2. Если существует траектория $x(x_0, t)$ системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, \ldots, n), \tag{19.13}$$

примыкающая к точке $x=0$ при $t \to -\infty$, то неустойчивость решения $x=0$ системы уравнений (19.13) является грубым свойством; более того, само свойство системы иметь траекторию, примыкающую к точке $x=0$ при $t \to -\infty$, является грубым свойством.

Доказательство теоремы 19.2 получается очевидным образом при сопоставлении теорем 12.1, 12.2 и леммы 19.1, поэтому здесь этого доказательства приводить не будем.

На этом закончим рассмотрение общих вопросов грубости свойств устойчивости и неустойчивости. В следующих параграфах этой главы рассмотрим грубые системы, для которых возможна оценка порядка допустимых вариаций $R_i(x, t)$ $(i=1, \ldots, n)$.

§ 20. Критерии асимптотической устойчивости квазилинейных систем

1. В этом параграфе будем предполагать, что правые части X_i имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, удовлетворяющие неравенству $\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| \leqslant L$ при всех $\|x\|<\infty$.

Предположим, что решения $x(x_0, t_0, t)$ приближенной системы уравнений (18.2) удовлетворяют неравенствам

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2 \leqslant B\|x_0\|_2 \exp(-\alpha(t-t_0)) \qquad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{20.1}$$

при всех начальных условиях x_0, t_0. Согласно теореме 11.1 условие 20.1 равносильно существованию функции $v(x, t)$, удовлетворяющей в силу системы уравнений (18.2) следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} c_1\|x\|_2^2 \leqslant v(x, t) \leqslant c_2\|x\|_2^2, \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.2)} \leqslant -c_3\|x\|_2^2, \\ \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leqslant c_4\|x\|_2 \end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

($c_1, \ldots, c_4$ — положительные постоянные). По лемме 19.1 с учетом оценки (19.3) заключаем, что функция $v(x, t)$ сохранит свои свойства и для системы (18.1), если только функции $R_i(x, t)$ ($i = 1, \ldots, n$) удовлетворяют неравенству

$$|R_i(x, t)| < \frac{(1-q)\, c_3 \|x\|_2}{n c_4}, \tag{20.3}$$

при этом, конечно, в оценках (20.2) второе неравенство следует писать иначе, а именно

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(18.1)} \leqslant -q c_3 \|x\|_2^2. \tag{20.4}$$

Таким образом, на основании результатов § 11 и леммы 19.1 мы можем высказать следующее утверждение.

Теорема 20.1. Если решения системы уравнений (18.2) удовлетворяют условиям (20.1) или (что то же самое) существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая оценкам (20.2), то аналогичным условиям (с измененными постоянными) будут удовлетворять и решения системы (18.1), где функции R_i удовлетворяют неравенству (20.3).

Примечание. Если неравенство (20.3) (или оценки (20.2)) выполняются лишь в области

$$\|x\|_2 \leqslant R, \tag{20.5}$$

то условия (20.1) для решений системы (18.1) будут выполняться при начальных данных $t_0 \in (0, \infty)$ и x_0 из области

$$v(x_0, t_0) < \inf (v(x, t) \quad \text{при} \quad \|x\|_2 = R) = c_1 R^2 \tag{20.6}$$

и, следовательно, во всяком случае при начальных значениях x_0 из области

$$\|x_0\|_2^2 < \frac{c_1}{c_2} R^2. \tag{20.7}$$

Действительно, траектории $x(x_0, t_0, t)$ системы (18.1) при условиях (20.3) и x_0 из области (20.7) не могут с возрастанием времени покинуть область (20.5), так как в силу леммы в этой области выполняется оценка (20.4) и $v(x, t)$ на границе области (20.5) больше чем $v(x_0, t_0)$. Следовательно, при $t \geqslant t_0$ можно интегрировать неравенство (20.4) (с учетом первой строки неравенства (20.2)), что и приводит к условиям (20.1). Этим утверждение доказано (естественно, что постоянные в условиях (20.1) для решений систем (18.2) и (18.1) могут не совпадать).

Теорема включает в себя критерии асимптотической устойчивости по первому приближению Ляпунова [71, стр. 134] и К. П. Персидского [88], и, как следует из этой теоремы, асимптотическая устойчивость квазилинейных систем в этих критериях не столько связана с линейностью приближенной системы (18.2), сколько с тем фактом, что решения этой приближенной системы удовлетворяют условиям (20.1). Отметим, что устойчивость нелинейных систем при условиях (20.1) была рассмотрена в заметке Е. А. Барбашина и М. А. Скалкиной [14] иным методом. Методом функций Ляпунова эта задача была рассмотрена в статье автора [51].

2. Оценка (19.3) получена при весьма общих предположениях. При решении конкретных задач, естественно, стремятся получить по возможности лучшие оценки, что определяется тем, насколько удачно выбрана функция $v(x)$. Самым простым путем при этом является выбор в качестве приближенной системы уравнений (18.2) некоторой линейной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = d_{i1}x_1 + \ldots + d_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{20.8}$$

для которой строится функция Ляпунова $v(x)$ — квадратичная форма переменных $x_1, \ldots, x_n$. (Конечно, для того чтобы можно было для некоторой данной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20.9}$$

указать приближенную линейную систему (20.8), нужно, чтобы эта система (20.9) в какой-то степени походила на линейную.) Этот путь является одним из наиболее употребительных способов строгого исследования устойчивости нелинейных задач. Он применялся, например, в работах [1, 2, 4, 5, 36, 77, 80, 81, 103, 108—110, 111, 130, 134].

Мы приведем здесь лишь три приема построения функций $v(x, t)$. Эти приемы восходят к работам Н. Г. Четаева [124].

Пусть система уравнений (20.9) имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)\,x_1 + \ldots + p_{in}(t)\,x_n + \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{20.10}$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывные (кусочно-непрерывные) ограниченные функции времени.

Случай 1. Существуют пределы

$$\lim p_{ij}(t) = d_{ij} \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{20.11}$$

причем корни характеристического уравнения

$$\left| d_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right|_1^n = 0 \tag{20.12}$$

имеют отрицательные действительные части. В качестве вспомогательной системы выбирается система уравнений (20.8) с постоянными коэффициентами d_{ij}, где числа d_{ij} определены формулами (20.11).

Случай 2. Функции $p_{ij}(t)$ — периодические функции времени t одного и того же периода ϑ; в качестве вспомогательной системы уравнений также выбираем систему (20.8), где коэффициенты d_{ij} определены формулами

$$d_{ij} = \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} p_{ij}(\xi)\, d\xi. \tag{20.13}$$

Случай 3. Фиксируем некоторый момент времени $t = t_0 \geqslant 0$ и в качестве вспомогательной системы уравнений выбираем систему (20.8), где коэффициенты d_{ij} определены формулами

$$d_{ij} = p_{ij}(t_0). \tag{20.14}$$

В случаях 1, 2 и 3 предполагается, что корни λ_i уравнения (20.12) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i < -\delta \qquad (\delta > 0). \tag{20.15}$$

Когда вспомогательная система (20.8) выбрана, исследование производится следующим образом. Задаем определенно-отрицательную форму

$$w(x) = \sum_{j,\, i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \qquad (c_{ij} = c_{ji}) \tag{20.16}$$

и строим функцию $v(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, удовлетворяющую условиям

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.8)} = w(x) \tag{20.17}$$

(см. стр. 69). Вычисляя $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)}$ вдоль траекторий полной системы (20.10), получим:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)} = w(x) + \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} (a_{ij}[p_{jk} - d_{jk}] + \\ + a_{kj}[p_{ji} - d_{ji}])\, x_i x_k + \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_j \varphi_i(x, t). \tag{20.18}$$

Очевидно, каждую функцию φ_i можно представить в виде [1])

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{k=1}^{n} h_{ik}(x, t)\, x_k, \tag{20.19}$$

[1]) Написание функции φ_i в виде разложения (20.19) и последующий анализ условий устойчивости зависят от выбора основных переменных x_i; и эти задачи могут быть часто весьма упрощены удачным преобразованием

поэтому производную $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)}$ можно записать в виде

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)} = \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} (c_{ik} + a_{ij}(p_{jk} - d_{jk}) + a_{kj}(p_{ji} - d_{ji}) + \\ + a_{ij}h_{jk} + a_{kj}h_{ji})\, x_i x_k. \tag{20.20}$$

Для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (20.10) достаточно, чтобы форма переменных $\{x_i\}$ в правой части равенства (20.20) была определенно-отрицательной.

Как известно [124], условия определенной положительности квадратичной формы $\sum_{i,\,k=1}^{n} e_{ik}\, x_i\, x_k = -\frac{dv}{dt}$ даются неравенствами Сильвестра

$$\Delta_n > 0,\ \Delta_{n-1} > 0,\ \ldots,\ \Delta_1 > 0, \tag{20.21}$$

где Δ_k — главные диагональные миноры матрицы $\|e_{ik}\|_1^n$.

Так как в нашем случае коэффициенты e_{ik} являются переменными, то для *определенной отрицательности* $\frac{dv}{dt}$, вообще говоря, недостаточно условий (20.21). Неравенства Сильвестра должны выполняться равномерно по x, t, т. е. следует потребовать выполнения неравенств

$$\Delta_n > \gamma,\ \ldots,\ \Delta_1 > \gamma \quad (\gamma > 0 - \mathrm{const}), \tag{20.22}$$

оценивающих значения ограниченных параметров h_{ij} и $(p_{ij} - d_{ij})$, при которых решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ устойчиво в силу системы уравнений (20.10).

В частности, нижнюю границу для значений модуля параметров h_{ij} и $(p_{ij} - d_{ij})$, при которых еще сохраняется *устойчивость* решения $x = 0$ системы (20.10), можно получить следующим образом. Пусть

$$p_{ij} - d_{ij} = \mu q_{ij}, \quad h_{ij} = \mu g_{ij}; \tag{20.23}$$

тогда производная $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)}$ примет вид

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)} = \sum_{i,\,j,\,k=1}^{n} (c_{ik} + \mu\,[a_{ij}(q_{jk} + g_{jk}) + a_{kj}(q_{ji} + g_{ji})])\, x_i x_k \tag{20.24}$$

По выбору коэффициентов c_{ij} при $\mu = 0$ квадратичная форма (20.24) является определенно-отрицательной, и поэтому нижняя граница для $p_{ij} - d_{ij}$, h_{ij}, при которых еще сохраняется устойчивость, определяется ближайшим к нулю значением $\mu = \mu_0$, при котором нару-

---

переменных x_j и, в частности, линейной заменой $y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$ (см., например, статью В. В. Румянцева [103]).

шается знакоотрицательность функции (20.24). Известно [124, стр. 81], что при непрерывном изменении параметров квадратичной формы, удовлетворяющей условиям Сильвестра (20.21), прежде всего нарушается первое из неравенств (20.21), поэтому в качестве границы μ_0 можно выбрать наименьший по модулю корень уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11}+2\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{1j}(q_{j1}+g_{j1})] \ldots & c_{1n}+\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{1j}(q_{jn}+g_{jn})+a_{nj}(q_{j1}+g_{j1})] \\ \cdots & \cdots \\ c_{n1}+\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{nj}(q_{j1}+g_{j1})+a_{1j}(q_{jn}+g_{jn})] & \ldots c_{nn}+2\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{nj}(q_{jn}+g_{jn})] \end{vmatrix}=0.$$

Для того чтобы обеспечить *асимптотическую* устойчивость, следует сохранить свойство *определенной отрицательности* $\frac{dv}{dt}$ (20.24). Записывая эту производную в виде

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(20.10)}=\sum_{i,\,j,\,k=1}^{n}(c_{ik}+\varepsilon\delta_{ik}+\mu[a_{ij}(q_{jk}+g_{jk})+a_{kj}(q_{ji}+g_{ji})])\,x_i x_k-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad (\varepsilon>0),$$

аналогичным образом убедимся, что для сохранения асимптотической устойчивости решения $x=0$ системы (20.10) достаточно, чтобы число μ в равенстве (20.23) удовлетворяло неравенству

$$|\mu|<|\mu_0|,$$

где μ_0 — наименьший по модулю корень уравнения

$$\begin{vmatrix} c_{11}+\varepsilon+2\mu\sum_{j=1}^{n}a_{1j}(q_{j1}+g_{j1})] \ldots & c_{1n}+\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{1j}(q_{jn}+g_{jn})+a_{nj}(q_{j1}+g_{j1})] \\ \cdots & \cdots \\ c_{n1}+\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{nj}(q_{j1}+g_{j1})+a_{1j}(q_{jn}+g_{jn})] & \ldots c_{nn}+\varepsilon+2\mu\sum_{j=1}^{n}[a_{nj}(q_{jn}+g_{jn})] \end{vmatrix}=0.$$

При этом, для того чтобы область

$$\|x\|_2<R_0$$

лежала в области притяжения точки $x=0$, достаточно, чтобы неравенства (20.22) выполнялись в области

$$\|x\|_2\leqslant R,$$

где

$$\sup(v(x) \text{ при } \|x\| < R_0) < \inf(v(x) \text{ при } \|x\|_2 = R). \quad (20.25)$$

Оценим число R_0 по числу R. Функция $v(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\min}\|x\|_2^2 \leqslant v(x) \leqslant \rho_{\max}\|x\|_2^2, \quad (20.26)$$

где $\rho_{\min}$ — наименьший и $\rho_{\max}$ — наибольший корни уравнения

$$|a_{ij} - \delta_{ij}\rho|_1^n = 0.$$

Таким образом, из (20.25) и (20.26) имеем оценку для числа R_0:

$$R_0 = R\sqrt{\frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}}}.$$

Заметим, что неравенства (20.22), дающие достаточные условия асимптотической устойчивости решения $x = 0$, в значительной степени определяются тем, какой была выбрана функция $v(x)$ или (что то же самое) какими были выбраны форма $w(x)$ и вспомогательная система (20.8). Варьируя эти формы, можно получать более или менее широкие достаточные условия асимптотической устойчивости, а также более или менее приемлемые оценки области притяжения $\|x\|_2 < R_0$. С этой точки зрения В. М. Старжинским [108—110] были подвергнуты детальному исследованию некоторые линейные системы с переменными коэффициентами второго, третьего и четвертого порядков.

§ 21. Достаточные условия асимптотической устойчивости для нелинейной системы дифференциальных уравнений

Приведем здесь критерий асимптотической устойчивости решения $x = 0$ нелинейной системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \quad (21.1)$$

где функции X_i определены и непрерывны при всех $\|x\| < \infty$ и $0 \leqslant t < \infty$ и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L_R \quad (i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n) \quad (21.2)$$

в каждой ограниченной области $\|x\|_2 < R$.

В отличие от неравенств (20.22) предыдущего параграфа, где условия устойчивости налагают ограничения на функции, стоящие в правых частях уравнений возмущенного движения, критерий, доказываемый в этом параграфе, налагает ограничения на частные производные этих функций. Этот критерий основан на теореме 16.2, причем в качестве функций $v(x_0, t_0, z, t)$ выбираются квадратичные формы

$$v(x_0, t_0, z, t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j. \tag{21.3}$$

Иначе говоря, асимптотическая устойчивость возмущенных траекторий $x(x_0, t_0, t)$ исследуется методом, описанным в предыдущем параграфе. Приводимый ниже критерий был опубликован в статьях [54, 57] и для одного частного случая — в статье [36].

Теорема 21.1. *Если можно указать постоянную симметричную матрицу $\|a_{ij}\|_1^n$, имеющую положительные собственные числа $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ и такую, что симметризованная матрица $\|c_{ik}\|_1^n$*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} + a_{kj} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \tag{21.4}$$

имеет отрицательные собственные числа $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, удовлетворяющие в каждой точке $\|x\| < \infty$, $0 < t < \infty$ неравенству

$$\lambda_i < -\gamma \quad (\gamma > 0 - \text{const}, \ i = 1, \ldots, n), \tag{21.5}$$

то решение $x = 0$ уравнений (21.1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Примечание. В случае линейной системы уравнений (21.1), т. е. в случае, если эта система имеет вид (20.8), условия теоремы являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости. Действительно, если эти условия выполняются, то система допускает функцию Ляпунова $v(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, производная которой

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k,j=1}^{n} (a_{ij} d_{jk} + a_{kj} d_{ji}) x_i x_k \tag{21.6}$$

в силу условий (21.5) является функцией определенно-отрицательной. Иначе говоря, в этом случае выполняются условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, и поэтому решения системы $x = 0$ асимптотически устойчивы. Если, напротив, решения системы (20.8) асимптотически устойчивы, то согласно теореме Ляпунова [71, стр. 106] существует функция $v(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, являющаяся определенно-положительной, такая, что производная $\frac{dv}{dt}$ в силу системы уравнений (20.8) является функцией определенно-отрицательной, т. е. выполняются условия нашей теоремы.

Заметим еще, что в качестве матрицы $\|a_{ij}\|_1^n$ можно выбрать единичную матрицу $\|\delta_{ij}\|_1^n$, где $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Тогда матрица $\|c_{ik}\|_1^n$ сведется к симметризованной матрице

$$c_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} + \frac{\partial X_k}{\partial x_i}, \tag{21.7}$$

и следовательно, согласно утверждению теоремы для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ при любых начальных возмущениях x_0 достаточно, чтобы собственные числа симметризованной матрицы (21.7) удовлетворяли неравенству (21.5).

Доказательство теоремы. Рассмотрим квадратичную форму (21.3). Если мы покажем, что функция $v(x_0, t_0, z, t)$ (21.3). удовлетворяет условиям теоремы 16.2, то теорема 21.1 будет доказана.

Итак, рассмотрим траекторию $x(x_0, t_0, t)$ системы (21.1). Составим уравнения возмущенного движения, принимая эту траекторию за невозмущенное движение. Иначе говоря, составим уравнения, которым удовлетворяют величины $z(t) = x(t) - x(x_0, t_0, t)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} = Z_i(z_1, \ldots, z_n, t) = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) - \\ - X_i(x_1(x_0, t_0, t), \ldots, x_n(x_0, t_0, t), t) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) z_j + R_i(z_1, \ldots, z_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{21.8}$$

где производные $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$ вычисляются в точках траектории $x(x_0, t_0, t)$. Вследствие непрерывности функций $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ и, следовательно, равномерной непрерывности этих функций в каждой ограниченной замкнутой области $\|x\| \leqslant H$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, для любого наперед заданного числа $\beta > 0$ можно указать число $\delta(\beta, t_0, T, H)$ такое, что в области

$$\|z\|_2 < \delta(\beta, t_0, T, H) \tag{21.9}$$

будет выполняться неравенство

$$|R_i(z, t)| < \beta \|z\|_2, \tag{21.10}$$

какова бы ни была точка траектории $\|x(x_0, t_0, t)\| \leqslant H$.

Вычислим производную $\frac{dv}{dt}$ функции $v(x_0, t_0, z(t), t)$ вдоль траекторий системы (21.8):

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i, k=1}^{n} \left(a_{ij} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} + a_{kj} \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) z_i z_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial z_j} R_j.$$

В области (21.9) в силу неравенств (21.5) и (21.9) получим оценку

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\gamma \|z\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial z_j} R_j \right| \leqslant -\gamma \|z\|_2^2 + n\beta \|z\|_2 \sup \left| \frac{\partial v}{\partial z_i} \right|.$$

Так как производная $\left| \frac{\partial v}{\partial z_i} \right|$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{\partial v}{\partial z_i} \right| \leqslant n \|z\|_2 \max |a_{ij}| = Nn \|z\|_2,$$

то имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant [-\gamma + n^2 N\beta] \|x\|_2^2 \quad (N = \max |a_{ij}|). \tag{21.11}$$

Если задать число $\beta = \frac{\gamma}{2n^2 N}$, то в области (21.9) будет выполняться неравенство

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -\frac{\gamma}{2} \|z\|_2^2. \tag{21.12}$$

Следовательно, функция v (21.3) действительно удовлетворяет всем условиям теоремы 16.2. Теорема доказана.

Примечание. Анализ доказательств теоремы 16.2 и теоремы 21.1 показал бы, что для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы уравнений (21.1) относительно начальных возмущений $\|x_0\| < H_0$ достаточно, чтобы неравенства (21.5) выполнялись в области $\|x_0\| < H_0$, где $H = H_0 \sqrt{\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}}$ ($\rho_{\max}$, $\rho_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы $\|a_{ij}\|_1^n$).

Как указано выше, вопросы существования определенно-положительных квадратичных форм $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, удовлетворяющих условиям теорем Ляпунова об устойчивости и об асимптотической устойчивости для линейных систем уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j, \tag{21.13}$$

были изучены в статьях В. М. Старжинского [108—110] для систем второго, третьего и четвертого порядков, причем были выведены неравенства для коэффициентов $p_{ij}(t)$, при выполнении которых такие функции Ляпунова, являющиеся квадратичными формами, существуют. Так как задача о существовании функции

$$v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{21.14}$$

из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости для линейной системы (21.13) эквивалентна задаче о существовании определенно-положительной матрицы $\|a_{ij}\|_1^n$ такой, что матрица $\|a_{ij}p_{jk}+a_{kj}p_{ji}\|_1^n$ имеет отрицательные собственные числа, то, выписывая неравенства из работ [109, 110], где $p_{ij}(t)$ заменены на $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, получим согласно теореме 21.1 условия асимптотической устойчивости для нелинейной системы (21.1).

§ 22. Теорема об устойчивости по приближению *m*-го порядка

1. В этом параграфе рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=X_i^{(m)}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)+R_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\quad (i=1,\ \ldots,\ n,\ m\geqslant 1),\tag{22.1}$$

где $X_i^{(m)}(x,t)$ при каждом значении $t\geqslant 0$ — однородные функции переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$ степени m, удовлетворяющие условиям Липшица

$$X_i^{(m)}(x'',t)-X_i^{(m)}(x',t)\,\big|\leqslant L\|x''-x'\|\quad \text{при}\quad \|x'\|\leqslant 1,\quad \|x''\|\leqslant 1,$$

или (что вследствие однородности функций $X^{(m)}$ — то же самое) условиям

$$X_i^{(m)}(x'',t)-X_i^{(m)}(x',t)\,\big|\leqslant Lr^{m-1}\|x''-x'\|\quad \text{при}\ \|x''\|<r,\ \|x'\|<r.\tag{22.2}$$

Относительно функций $R_i(x,t)$ будем предполагать, что это — непрерывные функции, удовлетворяющие в некоторой окрестности

$$\|x\|_2<H,\quad \text{при}\ t>0\tag{22.3}$$

неравенствам

$$|R_i(x,t)|\leqslant\gamma\|x\|_2^m\qquad (i=1,\ \ldots,\ n).\tag{22.4}$$

Если предполагать число $\gamma>0$ достаточно малым, то можно сказать, что в окрестности (22.3) порядок функций R_i превышает m, т. е. превышает порядок функций $X_i^{(m)}$.

Рассмотрим приближенную систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i^{(m)}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t)\qquad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{22.5}$$

которая, вообще говоря, нелинейна.

При каких условиях асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) решения $x=0$ уравнений (22.5) обеспечивает устойчивость (или неустойчивость) полной системы (22.1)?

Из результатов § 19 следует, что если в области (22.3) для системы (22.5) выполняются условия определения 4.1 (A), то можно указать положительную при $x \neq 0$ границу изменения для функций $|R_i|$, при соблюдении которой соответствующее свойство (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) сохранится и для системы (22.1)[1]). Здесь, однако, ставится вопрос об уточнении этой границы в смысле неравенства (22.4). Для решения этого вопроса следует уточнить оценки для функции $v(x, t)$, которая существует при выполнении условий (A) для системы (22.5).

Рассмотрим сначала случай, когда функции X_i не зависят явно от времени t. Приведем здесь без доказательства теорему, уточняющую теорему 4.2 в случае, когда правые части X_i — однородные функции степени $m \geqslant 1$. Эта теорема доказана в статье автора [51].

Теорема 22.1. Если не существует решений $x(x_0, t)$ системы (22.5), ограниченных при $-\infty < t < \infty$ (за исключением тривиального решения $x = 0$), то существует непрерывно дифференцируемая функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} |v(x)| &\leqslant c_2 \|x\|_2^A, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{(22.5)} &\leqslant -c_3 \|x\|_2^{A+m-1}, \\ \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| &\leqslant c_4 \|x\|_2^{A-1}. \end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

В случае неустойчивости решения $x = 0$ в произвольной окрестности точки $x = 0$ можно указать точки $x_0 \neq 0$, где $v(x_0) < 0$; в случае асимптотической устойчивости решения $x = 0$ функция $v(x)$ наряду с оценками (22.6) удовлетворяет также неравенству

$$c_1 \|x\|_2^A \leqslant v(x) \tag{22.7}$$

(где $A, c_1, \ldots, c_4$ — положительные постоянные). Теперь нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 22.1. Если не существует решений $x(x_0, t)$ системы (22.5), ограниченных при $-\infty < t < \infty$ (за исключением тривиального решения $x = 0$), то можно указать число $\gamma > 0$ такое, что поведение траекторий (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) в силу уравнений возмущенного движения (22.1) будет совпадать с поведением решений системы (22.5), если только будут выполняться неравенства (22.4).

---

[1]) Из примера (19.7), приведенного выше (стр. 100), следует, что при невыполнении условий (A) неустойчивость решения $x = 0$ системы (22.5) не является грубым свойством.

Доказательство. По лемме 19.1 (с учетом оценки (19.3)) можно утверждать, что при $\gamma = \frac{(1-q)\,c_3}{nc_4}$ функция $v(x)$ из теоремы 22.1 будет удовлетворять и в силу системы (22.1) оценкам (22.6) с тем изменением, что вместо второй строчки неравенств (22.6) будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(22.1)} \leqslant -qc_3\|x\|_2^{A+m-1} \qquad (0<q<1). \tag{22.8}$$

Если решение $x=0$ системы (22.5) неустойчиво, то в произвольной окрестности точки $x=0$ в силу теоремы 22.1 можно указать точки $x_0 \neq 0$, где $v(x_0)<0$. Следовательно, в этом случае функция v будет удовлетворять всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости и для системы (22.1), т. е. решение $x=0$ этой системы неустойчиво.

Если решение $x=0$ системы (22.5) асимптотически устойчиво, то функция v является определенно-положительной. Следовательно, в этом случае функция v будет удовлетворять всем условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и для системы (22.1), т. е. решение $x=0$ этой системы асимптотически устойчиво. Следствие доказано.

Примечание. Если правые части уравнений возмущенного движения являются голоморфными функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются с членов m-го порядка, то следствие 22.1 дает в этом случае достаточные условия, при выполнении которых исследование устойчивости (или неустойчивости) можно ограничивать рассмотрением лишь членов разложения низшего, m-го порядка.

Теорема о сохранении асимптотической устойчивости в случае, когда $X_i^{(m)}(x)$ суть формы степени $m \geqslant 1$, а функции $R_i(x, t)$ удовлетворяют условиям (22.4), была доказана впервые И. Г. Малкиным [77, 78].

Отметим еще, что в случае асимптотической устойчивости решения $x=0$ в силу системы (22.5) решения $x(x_0, t)$ этой системы удовлетворяют при $m>1$ неравенству

$$\|x(x_0, t)\|_2^{m-1} \leqslant [B\|x_0\|_2^{1-m} + \alpha(t-t_0)]^{-1}, \tag{22.9}$$

где $t \geqslant t_0$, α, B — положительные постоянные. В случае $m=1$ неравенство (22.9) заменяется условием (11.9), рассмотренным выше.

Докажем выполнение неравенства (22.9). Из неравенств (22.6) и (22.7) имеем:

$$\frac{dv}{dt} \leqslant -c_3\left(\frac{v}{c_2}\right)^{\frac{A+m-1}{A}};$$

после интегрирования получим:

$$-v(x(x_0, t))^{\frac{1-m}{A}} + v(x_0)^{\frac{1-m}{A}} \leqslant -\beta(t-t_0) \qquad (\beta>0 - \text{const}).$$

Из неравенств (22.6) и (22.7) имеем теперь:

$$c_1^{\frac{1-m}{A}}\|x(x_0, t)\|_2^{1-m} \geqslant c_2^{\frac{1}{A}}\|x_0\|_2^{1-m} + \beta(t-t_0),$$

или

$$\|x(x_0, t)\|_2^{m-1} \leqslant \left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1-m}{A}} \|x_0\|^{1-m} + \frac{\beta}{\frac{1-m}{c_1 A}}(t-t_0)\right]^{-1},$$

что и доказывает оценку (22.9).

2. Рассмотрим общий случай уравнений (22.1). Ограничимся рассмотрением асимптотической устойчивости решения $x = 0$. Уже для линейных уравнений, т. е. при $m = 1$, возможны случаи, когда асимптотическая устойчивость системы (22.5) может нарушаться добавочными функциями R_i сколь угодно высокого порядка малости, как об этом говорилось выше (см. стр. 71, 103). В то же время в случае линейных уравнений с переменными коэффициентами асимптотическая устойчивость не нарушается добавочными функциями R_i, порядок малости которых выше порядка $\|x\|_2$, если при возрастании времени t возмущенные траектории приближаются к невозмущенному движению $x = 0$ со скоростью, характерной для стационарного случая, т. е. если выполняется неравенство (11.9) (см. §§ 11, 20, стр. 71, 103).

Возникает вопрос, справедливо ли аналогичное заключение и в случае $m > 1$, т. е. сохраняется ли асимптотическая устойчивость системы (22.5) и для системы (22.1), если траектории $x(x_0, t_0, t)$ системы (22.5) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0, t_0, t)\|_2^{m-1} \leqslant \left[B\|x_0\|_2^{1-m} + \alpha(t-t_0)\right]^{-1}, \qquad (22.10)$$

характерному, как показано выше, для асимптотической устойчивости систем рассматриваемого здесь вида в стационарном случае (при условии, что функции R_i удовлетворяют неравенству (22.4) с достаточно малой постоянной $\gamma > 0$).

Ответ на этот вопрос получаем положительный, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 22.2. Пусть решение $x = 0$ системы уравнений (22.5) удовлетворяет неравенству (22.10). Можно указать положительное число $\gamma > 0$ такое, что решение $x = 0$ системы (22.1) будет также асимптотически устойчивым, если только выполняются условия (22.4).

Доказательство. Отметим сначала, что при условиях (22.10) существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая оценкам (22.6) и являющаяся при этом определенно-положительной; более того, функция $v(x, t)$ удовлетворяет неравенству (22.7).

Доказательство существования такой функции является довольно громоздким и мы его здесь опустим. Доказательство для случая, когда функции $X_i^{(m)}(x, t)$ имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$, дано в статье автора [51]. Рассмотрением этого случая мы здесь и ограничимся, хотя, усложняя доказательство из [51], можно было бы доказать существование непрерывно дифференцируемой функции $v(x, t)$, удовлетворяющей оценкам (22.6) и (22.7), в предположении, что функции $X_i^{(m)}(x, t)$ удовлетворяют лишь условиям Липшица (22.2).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. В силу леммы 19.1 и оценки (19.3) функция $v(x, t)$, удовлетворяющая неравенствам (22.6) и (22.7), будет иметь определенно-отрицательную производную $\frac{dv}{dt}$ в силу системы уравнений (22.1), если только функции R_i удовлетворяют условиям (22.4), где $\gamma > 0$ — достаточно малая постоянная, т. е. при этих условиях функция $v(x, t)$ будет функцией Ляпунова и для полной системы (22.1), что и доказывает асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ этой системы.

ГЛАВА V

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛЯПУНОВА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

§ 23. Предварительные замечания

Наиболее простой и прямолинейный метод построения функций Ляпунова для конкретных систем был описан в предыдущей главе. Там же были указаны и недостатки этого метода, а именно: функция $\frac{dv}{dt}$ сохраняет нужное свойство в силу полной системы уравнений лишь при условии, что вариации R_i ограничены по модулю некоторыми, как правило, довольно узкими границами. Это и естественно в принятой в главе IV постановке задачи, так как там структура вариаций R_i при построении функции Ляпунова не учитывается. Между тем в каждой реальной системе, как правило, возможны лишь вариации R_i определенной структуры. Поэтому более широкие (более близкие к необходимым) достаточные критерии устойчивости или неустойчивости можно получить, если при решении задачи учитывать структуру функций R_i. Применяя метод функций Ляпунова, следует, очевидно, в этом последнем случае как-то варьировать функции Ляпунова в соответствии с характером вариаций R_i. Поясним это подробнее.

Пусть дана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t, \beta_1, \ldots, \beta_k, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, \varphi_r(x_1, \ldots, x_n, t)), \tag{23.1}$$

правые части которой суть известные функции переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, параметров $\beta_1, \ldots, \beta_k$ и функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Предполагается, что параметры β_j изменяются в пределах некоторой области B в k-мерном пространстве $\{\beta_j\}$, функции φ_r могут быть выбраны из некоторого семейства функций $\{\varphi_j\}$. В качестве приближенной системы для уравнений (23.1) будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t, \beta_1^0, \ldots, \beta_k^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_r^0), \tag{23.2}$$

получающуюся из системы (23.1) при некоторых фиксированных элементах $\{\beta_j^0\}$ и $\{\varphi_j^0\}$, и будем рассматривать эту систему при «параметрических возмущениях»

$$R_i = X_i(x, t, \beta, \varphi) - X_i(x, t, \beta^0, \varphi^0), \tag{23.3}$$

структура которых определяется характером зависимости функции X_i от β и φ, а также семейством функций φ и допустимой областью изменения параметров β [1]).

В соответствии с таким определением параметрических возмущений является естественным и следующий путь применения к этим задачам метода функций Ляпунова. Следует попытаться построить функцию Ляпунова v таким образом, чтобы ее структура учитывала зависимость от φ и β. Если при каждом наборе φ и β (из допустимой области их изменения) функция $v(x, t, \beta, \varphi)$ будет обладать в силу соответствующей системы уравнений (23.1) нужными свойствами, то задача устойчивости будет решена. Этот метод приложения функций Ляпунова является более гибким для исследования задач устойчивости, нежели прием, описанный в главе IV, где вся совокупность систем (23.1) обслуживалась по существу одной функцией Ляпунова. К сожалению, в настоящее время нет достаточно общего эффективного правила, которое позволило бы решать описанную выше задачу построения функции $v(x, t, \beta, \varphi)$ в достаточно общем случае. Однако некоторые частные приемы построения таких функций известны, причем эти частные приемы охватывают ряд интересных для практики случаев, что позволяет получить ряд эффективных достаточных критериев устойчивости. Таким образом, метод варьирования функции Ляпунова, учитывающий структуру уравнений, позволяет охватить довольно широкий класс нелинейных систем.

Весьма плодотворными приемами построения функций Ляпунова, учитывающими характер уравнений возмущенного движения, являются методы построения этих функций, основанные на использовании известных физических закономерностей, присущих изучаемым системам. Достаточно полно эти методы обоснованы и развиты Н. Г. Четаевым и его учениками [118, 120—124] для механических систем. Метод построения функций Ляпунова для механических систем заключается в следующем: опираясь на известные интегралы движения, составляют связку этих интегралов. Если удается сконструировать из интегралов определенно-положительную функцию, то эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости, так как производная $\frac{dv}{dt}$ такой функции v, построенной из интегралов уравнений возмущенного движения, равна нулю. Этот метод позволил

[1]) Подробную постановку задачи об устойчивости при параметрических возмущениях, в основных чертах совпадающую с описанной здесь, можно найти в статье П. А. Кузьмина [63] (см. также заметку М. Ш. Аминова [7]).

решить ряд важных задач устойчивости механических систем (см., например, работы В. В. Румянцева [101, 102, 104] по устойчивости движения твердого тела с неподвижной точкой).

Отметим еще, что именно при применении параметрического метода построения функций v приобретают значение обобщения классических теорем второго метода Ляпунова, так как при подгонке функции $v(x, t, \beta, \varphi)$ к данной совокупности систем (23.1) редко удается построить эту функцию так, чтобы при всех β и φ сохранялись все свойства, нужные для применения соответствующей теоремы Ляпунова. Такие обобщения рассматривались в главе III.

В этой главе приводятся некоторые примеры, иллюстрирующие метод построения функций $v(x, t, \beta, \varphi)$. Заметим еще раз, что вследствие отсутствия общего приема построения таких функций приводимые ниже результаты следует рассматривать главным образом именно как иллюстрацию метода, так как построение такой функции v в каждом конкретном случае требует индивидуального подхода. Следует также иметь в виду, что, являясь одним из основных методов исследования устойчивости, метод функций Ляпунова, конечно, не является единственным таким методом. Другие качественные методы теории дифференциальных уравнений (например, методы, связанные с оценкой контурных интегралов, с рассмотрением некоторых характерных кривых и гиперплоскостей и т. д.) также играют большую роль при решении задач устойчивости. Очевидно, что наилучшего результата можно достигнуть разумным комбинированием метода функций Ляпунова с другими качественными методами. Метод общего качественного исследования траекторий в задачах устойчивости нелинейных систем был развит в работах Н. П. Еругина [28—32], его учеников: В. И. Зубова [38, 40], В. А. Плисса [92, 93, 94], А. П. Тузова [111], Б. А. Скачкова [106] — и в работах других авторов. Конкретным исследованиям устойчивости нелинейных систем посвящена большая литература, поэтому ниже приводятся ссылки лишь на отдельные работы, имеющие прямое отношение к рассматриваемым здесь вопросам.

§ 24. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем

1. Весьма полезным приемом варьирования функций $v(x, t)$ при подгонке их к данной системе уравнений является умножение v на некоторую функцию $\psi(x, t)$ (и, в частности, на функцию $\psi(t)$). Этот прием, предложенный Н. Г. Четаевым [124], был применен в ряде работ (см., например, статьи Б. С. Разумихина [96], А. А. Лебедева [65], посвященные изучению линейных систем $\frac{dx}{dt} = P(t)x$). Рассмотрим здесь приложение этого приема к задаче об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях. Задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях рассматривалась многими авторами: Н. А. Артемьевым [8], С. И. Горшиным [21, 22], Г. Н. Дубошиным [26], Н. П. Еругиным [33], И. Г. Малкиным [75, 77], Х. Л. Массера [137], Н. Г. Четаевым [124].

Приведем здесь для полноты изложения формулировку задачи устойчивости при постоянно действующих возмущениях, приведенную в книге И. Г. Малкина [77]. Рассмотрим две системы уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{24.1}$$

и

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{24.2}$$

Функции R_i будем рассматривать в этом параграфе как величины, характеризующие случайные постоянно действующие возмущения. Точное значение этих функций R_i не известно, и эти функции, вообще говоря, не обращаются в нуль в точке $x = 0$.

Невозмущенное движение $x = 0$ (решение $x = 0$ уравнений (24.1)) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_2(\varepsilon)$ таких, что всякое решение уравнений (24.2) с начальными значениями x_{i0}, t_0, удовлетворяющими неравенствам

$$|x_{i0}| < \eta_1(\varepsilon), \qquad t_0 \geqslant 0$$

при произвольных R_i, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $|x_1| < \varepsilon, \ldots$ $\ldots, |x_n| < \varepsilon$ неравенствам

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| \leqslant \eta_2(\varepsilon),$$

удовлетворяет при всех $t > t_0$ неравенствам

$$|x_i| < \varepsilon.$$

Из результатов С. И. Горшина [21, 22] и И. Г. Малкина [82] следует, что в случае асимптотической устойчивости решения $x = 0$, равномерной по x_0, t_0, решение $x = 0$ устойчиво и при постоянно действующих возмущениях $\left(\text{в предположении, что функции } X_i \text{ имеют ограниченные производные } \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)$, а из новых результатов Я. Курцвейля [60] и Х. Л. Массера [138] следует, что для периодических функций $X_i(x, t)$ это утверждение сохраняет свою силу и в том случае, если предполагать функции X_i лишь непрерывными.

В определении и результатах, приведенных выше, имеется одно ограничение, которое можно оправдать не во всех случаях, а именно, предполагается, что постоянно действующие возмущения (и соответствующие им функции R_i) малы при всех значениях времени t. В то же время интересны случаи, когда при $t > t_0$ возможны случайные возмущения, такие, что величина соответствующих им функций R_i в отдельные моменты времени t будет не мала, но величина тех интервалов времени, в течение которых функции R_i принимают довольно большие значения, достаточно мала. Иначе говоря, речь идет о возмущениях, достаточно малых в среднем. Интуитивно можно предполагать, что и такие возмущения не должны расшатывать достаточно сильную устойчивость. Строгому обоснованию этого утверждения и посвящено нижеследующее изложение.

Примененный здесь способ построения функции $v(x, t)$ был изложен в статье В. Е. Гермайдзе [19] для задачи устойчивости по первому приближению. Ниже излагается модификация этого метода в случае постоянно действующих возмущений, что соответствует материалу из работы [20].

2. Приведем определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем.

Определение 24.1. Решение $x = 0$ системы уравнений (24.1) будем называть устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ можно указать два таких числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что при выполнении неравенства

$$\int_t^{t+T} \varphi(\xi)\, d\xi < \eta, \tag{24.3}$$

где $\varphi(t)$ — какая-нибудь непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$|R_i(x, t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{при} \quad \|x\|_2 < \varepsilon, \tag{24.4}$$

каждое решение $x(x_0, t_0, t)$ уравнений (24.2) с начальными данными $\|x\|_2 < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Это определение обобщает цитированное выше определение [77, стр. 129] в том смысле, что решение, устойчивое при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, очевидно, тем более устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в каждый данный момент (число η из определения 24.1 связано с числом η_2 из определения, приведенного в труде [77], соотношением $\eta_2 T = \eta$).

Относительно функций X_i будем предполагать, что эти функции определены и непрерывны при $\|x\| < H$ и удовлетворяют в этой области условиям Липшица по x, т. е. условиям (1.7) с постоянной $L = L_H$. Относительно гладкости и непрерывности функций R_i никаких особенных предположений делать не будем. Примем лишь, что при каждом $t_0 \geqslant 0$ для каждой точки $\|x_0\| < H$ может быть определена траектория $x(x_0, t_0, t)$ при $t > t_0$, продолжимая при всех значениях $t > t_0$, при которых значения функции $x(x_0, t_0, t)$ остаются в области $\|x\| < H$. При этом функция $x(x_0, t_0, t)$ должна быть решением уравнения (24.2), может быть, и в некотором обобщенном смысле, но во всяком случае так, что

$$\left(\frac{dx(x_0, t_0, t)}{dt}\right)_{dt=+0} = X_i + R_i.$$

Теорема 24.1. Если решение $x=0$ асимптотически устойчиво равномерно по t_0 и x_0 (в смысле определения 5.1, стр. 32), то имеет место устойчивость при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Примечание. Так как равномерность устойчивости имеет место во всех случаях асимптотической устойчивости при периодических по времени t функциях $X_i(x, t)$ (или функциях $X_i(x)$, не зависящих явно от времени t), то из теоремы 24.1 следует также, что в этом случае из асимптотической устойчивости всегда следует устойчивость при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Доказательство. При условиях теоремы 24.1 согласно теореме 5.1 в окрестности точки $x=0$ существует функция $v(x, t)$, удовлетворяющая оценкам:

$$w(x) \leqslant v(x, t) \leqslant W(x), \tag{24.5}$$

где $w(x) > 0$ при $\|x\| \neq 0$, $W(0)=0$;

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(24.1)} \leqslant -w_1(x), \quad w_1(x) > 0, \quad \|x\| \neq 0; \tag{24.6}$$

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < N \quad (i=1, \ldots, n) \tag{24.7}$$

при

$$\|x\| < H_1 \quad (H_1 = \mathrm{const}). \tag{24.8}$$

Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Очевидно, можно предполагать, что $\varepsilon < H_1$. Вследствие определенной положительности функции $v(x, t)$ (левое неравенство (24.5)) имеем:

$$\inf (v(x, t) \text{ при } \|x\| = \varepsilon) \geqslant \min (w(x) \text{ при } \|x\| = \varepsilon) = 2\alpha > 0, \tag{24.9}$$

а вследствие (24.7) можно написать неравенство

$$\sup \left(v(x, t) \text{ при } \|x\| \leqslant \delta = \frac{\alpha}{nNe^2}\right) \leqslant \frac{\alpha}{e^2}. \tag{24.10}$$

Если обозначить $c = \inf\left(\frac{w(x)}{\|x\|}\right)$, $c_3 = \inf\left(\frac{w_1}{\|x\|}\right)$ при $\delta \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$, то в области

$$\delta \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon \tag{24.11}$$

будет выполняться неравенство

$$c\|x\| \leqslant v(x, t) \leqslant nN\|x\|, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)_{(24.1)} \leqslant -c_3\|x\|. \tag{24.12}$$

Функция $V(x, t) = \frac{v(x, t)}{c_3}$ удовлетворяет в области (24.11) следующим неравенствам:

$$c_2\|x\| \leqslant V(x, t) \leqslant c_1\|x\|, \tag{24.13}$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(21.1)} \leqslant -\|x\|, \tag{24.14}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| < \frac{c_1}{n} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{24.15}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные. Функции R_i в силу условия (24.4) удовлетворяют неравенству

$$|R_i(x, t)| \leqslant \frac{\varphi(t)}{\delta}\|x\| \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{24.16}$$

в области (24.11). Построим теперь функцию $f(x, t) = e^{\beta(t)}V$ и постараемся подобрать функцию $\beta(t)$ так, чтобы функция f могла служить для доказательства устойчивости решения $x = 0$ при постоянно действующих возмущениях, удовлетворяющих оценке (24.3). Вычислим изменение функции $f(x, t)$ вдоль траекторий системы (24.2). Имеем:

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \frac{\Delta f(x(t), t)}{\Delta t}\right) = f(x(t), t)\left(\beta'(t) + \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(24.1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}R_i\right) \leqslant f(x(t), t)\left(\beta'(t) - \frac{1}{c_1} + \frac{c_1\varphi(t)}{c_2\delta}\right). \tag{24.17}$$

Пусть q — число из интервала (0,1). Определим функцию $\psi(t)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{kT}^{(k+1)T}\psi(t)\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T}\left[\frac{(1-q)}{c_1} - \frac{c_1\varphi(t)}{c_2\delta}\right]dt \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24.18}$$

Если выбрать число η в условии (24.3) из равенства

$$\eta = \frac{T(1-q)\,c_2\delta}{c_1^2}, \tag{24.19}$$

то интеграл в левой части равенства (24.18) будет неотрицательным, и, следовательно, существует неотрицательная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая условиям (24.18). Будем в дальнейшем предполагать, что выполняется равенство (24.18) и $\psi(t) \geqslant 0$. Определим теперь функцию $\beta(t)$ равенством

$$\beta(t) = \int_0^t\left(-\psi(\xi) - \frac{c_1\varphi(\xi)}{c_2\delta} + \frac{(1-q)}{c_1}\right)d\xi. \tag{24.20}$$

Из неравенства (24.17) по определению функции $\beta(t)$ получим неравенство

$$\left(\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\Delta f}{\Delta t}\right)_{(24.2)}\leqslant f(x,\,t)\left(-\psi(\xi)-\frac{q}{c_1}\right)\leqslant-\frac{q}{c_1}f. \tag{24.21}$$

С другой стороны, из условий (24.18) и (24.20) имеем:

$$\beta(kT)=0\quad(k=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

и, следовательно,

$$|\beta(t)|\leqslant 3(1-q)\frac{T}{c_1}.$$

Если положим теперь q удовлетворяющим условию

$$\frac{(1-q)\,T}{c_1}<\frac{1}{3},$$

то функция f будет удовлетворять неравенству

$$Ve^{-1}\leqslant f\leqslant Ve \tag{24.22}$$

в области (24.11). Таким образом, мы построили функцию f, удовлетворяющую условиям (24.21) и в силу неравенств (24.9), (24.10), (24.22) — неравенствам

$$\sup(f(x,\,t)\ \text{при}\ \|x\|\leqslant\delta)<\inf(f(x,\,t)\ \text{при}\ \|x\|=\varepsilon). \tag{24.23}$$

Рассмотрим теперь траекторию $x(x_0,\,t_0,\,t)$ системы (24.1) при $\|x_0\|\leqslant\delta$. Вследствие неравенств (24.21) и (24.23) траектория $x(x_0,\,t_0,\,t)$ остается в области $\|x\|<\varepsilon$, что и доказывает справедливость теоремы.

Примечание. Описанный выше способ построения функции $f(x,\,t)$ можно несколько усложнить и доказать при этом несколько более сильное утверждение. А именно, пусть наряду с числом $\varepsilon>0$ задано число $\gamma>0$ $(\gamma<\varepsilon)$. Выберем числа c и c_8 из условий $c=\inf\left(\frac{w(x)}{\|x\|}\right)$, $c_8=\inf\left(\frac{w_1(x)}{\|x\|}\right)$ при $\|x\|>\gamma_1$, где γ_1 — такое число, что $W(\gamma_1)<w(\gamma)$ (вместо $\|x\|\geqslant\delta$, как это было сделано выше), тогда, после очевидных изменений в приведенных выше оценках, мы можем построить функцию f, которая наряду с неравенством (24.23) будет удовлетворять неравенству (24.21), но последнее неравенство будет выполняться (естественно, с измененными постоянными) уже в области

$$\gamma_1\leqslant\|x\|\leqslant\varepsilon.$$

Следовательно, при помощи такой функции $f(x,\,t)$ можно будет показать, что траектория $x(x_0,\,t_0,\,t)$ системы (24.1) не только остается в области $\|x\|<\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$, но и выполняется условие

$$\overline{\lim}\,\|x(x_0,\,t_0,\,t)\|\leqslant\gamma\quad\text{при}\quad t\to\infty,$$

если только средние значения постоянно действующих возмущений ограничены достаточно малой постоянной $\eta>0$.

Заметим также, что описанная здесь конструкция функции f в случае конкретной системы (24.1) (и конкретных функций $V(x, t)$ и $\varphi(t)$) не только позволяет доказать устойчивость при постоянно действующих возмущениях, но и вычислить конкретные оценки, которые будут тем лучше, чем удачнее выбрана функция $v(x, t)$.

3. Применим способ построения функции $f(x, t)$ к решению еще одной задачи. При исследовании устойчивости решений периодических систем часто пренебрегают членами, содержащими гармоники высокого порядка. Следующая теорема имеет целью дать обоснование этого приема.

Рассмотрим снова систему (24.1), где функции X_i удовлетворяют тем же условиям, что и выше, причем будем еще предполагать функции X_i равномерно непрерывными по t, а функции $R_i(x, t)$ будем предполагать ограниченными и удовлетворяющими условиям Липшица по x_j, т. е.

$$|R_i(x, t)| \leqslant K, \tag{24.24}$$

$$|R_i(x'', t) - R_i(x', t)| \leqslant L\|x'' - x'\|. \tag{24.25}$$

Кроме того, будем предполагать, что функции $R_i(x, t)$ — периодические функции времени t периода $\tau > 0$, разложение которых в ряд Фурье не содержит постоянных членов (эти постоянные будем включать в функции X_i). Иначе говоря, будем предполагать, что функции R_i удовлетворяют равенствам

$$\int_t^{t+\tau} R_i(\tilde{x}, \xi)\, d\xi = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{24.26}$$

при каждом фиксированном значении $x = \tilde{x}$[1]).

Теорема 24.2. Если решение $x = 0$ системы уравнений (24.1) асимптотически устойчиво, равномерно по x_0 и t_0, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\delta > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что решения $x(x_0, t_0, t)$ уравнений (24.2) с начальными данными, удовлетворяющими неравенству $\|x_0\| < \delta$, будут при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворять неравенству $\|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon$, коль скоро условие (24.26) выполняется хотя бы для одного значения $\tau \leqslant \tau_0$.

Примечание. Смысл теоремы 24.2, очевидно, состоит в том, что при наложении на равномерно асимптотически устойчивую систему достаточно быстрых колебаний, хотя бы и не малой амплитуды, такие колебания не могут сильно расшатать эту устойчивость. Отметим еще, что для теоремы 24.2 сохраняют свой смысл (с соответствующими изменениями) оба примечания к теореме 24.1. Особенно интересно отметить, что для периодических

---

[1]) Заметим, что в дальнейших рассуждениях периодичность функций R_i, помимо условия (24.26), никак не используется, поэтому можно в дальнейшем считать R_i любыми функциями, удовлетворяющими условиям (24.24), (24.25) и (24.26).

по времени t функций $X_i(x, t)$ теоремы 24.1 и 24.2 сохраняют свою силу в предположении лишь непрерывности функций X_i. Действительно, согласно результатам, полученным недавно Я. Курцвейлем [60] и Х. Л. Массера [138], функции $v(x, t)$, используемые в доказательстве теорем 24.1 и 24.2 при построении функции $f(x, t)$ существуют в предположении лишь непрерывности функций X_i.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 24.1, рассмотрим функцию Ляпунова $f(x, t) = V(x, t)\exp(\beta(t))$, где функция $V(x, t)$ удовлетворяет оценкам (24.13), (24.14) и (24.15). Докажем теорему от противного, а именно, предположим, что какое бы малое число τ_0 ни взять, можно указать систему (24.2), удовлетворяющую условиям доказываемой теоремы и обладающую траекторией $x(x_0, t_0, t)$, которая начинается при $t_0 \geqslant 0$ на поверхности $\|x_0\| = \delta$, лежит при $t_0 \leqslant t < t_1$ целиком в области (24.11) и пересекает поверхность $\|x\| = \varepsilon$ при $t = t_1 > t_0$. Вычислим правую производную $\frac{df}{dt}$ вдоль траекторий системы (24.2):

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta t}\right)_{(24.2)} = e^{\beta(t)} \left(V\beta'(t) + \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(24.1)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right).$$

В силу оценок (24.13), (24.14), (24.15) справедливо неравенство

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{(24.2)\ \text{при}\ dt=+0} \leqslant f(x, t) \left(\beta'(t) - \frac{1}{c_1} + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} R_i \right).$$

Функцию f будем теперь подбирать именно для рассматриваемой траектории $x(x_0, t_0, t)$ в соответствии с теоремой 17.1. Наша задача — определить функцию $\beta(t)$ таким образом, чтобы функция $f(x, t)$, оставаясь функцией определенно-положительной и допускающей бесконечно малый высший предел, имела бы определенно-отрицательную производную $\left(\frac{df}{dt}\right)_{dt=+0}$ в области (24.11) вдоль рассматриваемой траектории $x(x_0, t_0, t)$.

Подберем функции $\omega(t)$ и $\beta(t)$ таким образом, чтобы эти функции удовлетворяли условиям

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \omega(\xi)\, d\xi = \frac{1-q}{c_1}\tau - \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{1}{V} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(x_0, t_0, t)t)}{\partial x_i} R_i(x(x_0, t_0, t), t) \right) dt, \tag{24.27}$$

$$\beta(t) = \frac{1-q}{c_1}(t - t_0) - \int_{t}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(x_0, t_0, \xi)\xi)}{\partial x_i} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{V} R_i(x(x_0, t_0, \xi), \xi) \right) d\xi - \int_{t_0}^{t} \omega(\xi)\, d\xi, \tag{24.28}$$

где $\theta_k = t_0 + k\tau$, $k = 0, 1, \ldots, t \geqslant t_0$, $0 < q < 1$. Оценим величину интеграла в правой части равенства (24.27). Вследствие условия (24.26) можно записать равенство

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{1}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(x_0, t_0, t), t)}{\partial x_i} R_i(x(x_0, t_0, t), t)\right) dt =$$

$$= \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial V(x(x_0, t_0, t), t)}{\partial x_i} \frac{R_i(x(x_0, t_0, t), t)}{V(x(x_0, t_0, t), t)} - \frac{\partial V(x_k, \theta_k)}{\partial x_i} \frac{R_i(x_k, t)}{V(x_k, \vartheta_k)}\right]\right) dt, \tag{24.29}$$

где $x_k = x(x_0, t_0, \theta_k)$.

Если к интегралу в правой части равенства (24.29) применить теорему о среднем, то интеграл слева будет оценен числом $\tau N n$, где

$$N = \sup\left|\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x_i} \frac{R_i(x(t), t)}{V(x(t), t)} - \frac{\partial V(x_k, \theta_k)}{\partial x_i} \frac{R_i(x_k, t)}{V(x_k, \theta_k)}\right| \text{ при } \theta_k \leqslant t \leqslant \theta_{k+1}, \tag{24.30}$$

и теперь, учитывая, что функция V имеет непрерывные и ограниченные производные любого порядка по всем переменным (теорема 5.1), а также учитывая оценки (24.24) и (24.25), можно вывести оценку

$$N \leqslant Q\tau \quad (Q = \text{const}). \tag{24.31}$$

На выводе оценки (24.31) останавливаться не будем, так как это не может вызвать затруднений. Итак, имеем оценку

$$\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{1}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x_i} R_i(x(t), t)\right) dt \leqslant P\tau^2 \quad (P = \text{const}). \tag{24.32}$$

Предположим теперь, что число $\tau > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\tau < \frac{(1-q)}{c_1 P}. \tag{24.33}$$

При таком выборе τ правая часть равенства (24.27) будет положительной. Поэтому при условии (24.33) функцию $\omega(t)$ можно выбрать неотрицательной. Будем предполагать, что $\omega(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant t_0$. Так как по определению функции $\beta(t)$ (24.28) выполняется равенство $\beta(\theta_k) = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то можно вывести также оценку

$$|\beta(t)| < P_1\tau \quad (P_1 = \text{const}).$$

Если теперь ограничить число $\tau > 0$ также условием $\tau < \frac{1}{P_1}$, то будем иметь $|\beta(t)| < 1$, и следовательно, функция $f(x, t)$ при таком ограничении $\tau > 0$ будет удовлетворять оценкам (24.21) и (24.23). Но эти оценки противоречат предположению о том, что траектория $x(x_0, t_0, t)$ с ростом $t \geqslant t_0$ попадает на поверхность $\|x\| = \varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает теорему, так как оценки чисел P и Q, ограничивающие величину τ, зависят лишь от свойств функций X_i и от постоянных K и L из условий (24.24), (24.25) и не зависят от вида функций $R_i(x, t)$.

Теорема доказана.

4. Рассмотрим описанный здесь способ построения функции Ляпунова $f(x, t)$ в частном случае линейной системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{24.34}$$

Дальнейшее изложение соответствует результатам Б. С. Разумихина [96] и А. А. Лебедева [65]. Предположим, что корни характеристического уравнения

$$|\, p_{ij}(t) - \lambda\delta_{ij} \,|_1^n = 0 \tag{24.35}$$

при каждом фиксированном значении t удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_i < -\gamma \qquad (\gamma > 0 - \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, n). \tag{24.36}$$

Тогда согласно теореме Ляпунова существует определенно-положительная функция

$$v(x, t) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_i x_j, \tag{24.37}$$

удовлетворяющая условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\, x_j\right) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{24.38}$$

Будем предполагать коэффициенты $p_{ij}(t)$ дифференцируемыми и ограниченными функциями времени t, тогда коэффициенты $a_{ij}(t)$ также будут дифференцируемыми функциями времени t. Как и выше, выберем функцию Ляпунова $f(x, t)$ в виде

$$f(x, t) = e^{\beta(t)} v(x, t).$$

Вычисляя производную $\frac{df}{dt}$ вдоль траекторий системы (24.34) и учитывая условия (24.38), получим:

$$\frac{d}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i,\, j=1}^{n} \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt} + \frac{d\beta(t)}{dt}\, a_{ij}(t)\right) x_i x_j.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$w(x, t) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i,\, j=1}^{n} \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt} + \frac{d\beta(t)}{dt}\, a_{ij}(t)\right) x_i x_j.$$

Из теории квадратичных форм следует [124], что эта форма удовлетворяет неравенству

$$w(x, t) \leqslant \rho_{\max} \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

где $\rho_{\max}$ — наибольший корень уравнения

$$|c_{ij}(t) - \rho\delta_{ij}|_1^n = 0 \tag{24.39}$$

$$(c_{ij}(t) = -\delta_{ij} + a'_{ij}(t) + \beta'(t)\, a_{ij}(t)).$$

Таким образом, для того чтобы функция $w(x, t)$ была определенно-отрицательной, достаточно выбрать $\beta(t)$ таким образом, чтобы корни уравнения (24.39) удовлетворяли неравенству

$$\rho_{\max} < -\alpha \qquad (\alpha > 0 - \text{const}). \tag{24.40}$$

Условие (24.40) задает верхнюю границу для функции $\beta'(t)$, так как форма $v(x, t)$ является по выбору функции v (24.38) определенно-положительной. Обозначим эту границу через $\overline{\beta}(t)$. С другой стороны, для того чтобы функция f была определенно-положительной, а функция $\frac{df}{dt}$ определенно-отрицательной, следует также потребовать выполнения условия

$$\beta(t) > N > -\infty \qquad (N = \text{const}). \tag{24.41}$$

Для выполнения неравенства (24.41) достаточно выполнения условия

$$\int_0^t \overline{\beta}(t)\, dt = N_1 \geqslant -\infty. \tag{24.42}$$

Таким образом, приходим к следующему критерию устойчивости решений системы уравнений (24.34).

Для асимптотической устойчивости решений системы уравнений (24.34) достаточно, чтобы верхняя граница $\overline{\beta}(t)$, при которой корни уравнения (24.39) удовлетворяют неравенству (24.40), удовлетворяла условию (24.42). Для эффективного вычисления оценки $\overline{\beta}(t)$ можно воспользоваться следующим рассуждением.

Пусть $b_{ij}(t) = c_{ij}(t) - \beta'(t)\, a_{ij}(t)$.

Для того чтобы форма $\sum_{i, j=1}^{n} c_{ij}(t)\, x_i x_j$ была определенно-отрицательной, достаточно, чтобы корни уравнения

$$|c_{ij}(t) - \lambda a_{ij}(t)|_1^n = 0 \tag{24.43}$$

удовлетворяли условию $\lambda_{max} \leqslant -\alpha$ ($\lambda_{max} = \max(\lambda_i)$), и следовательно, для асимптотической устойчивости решений системы (24.34) достаточно, чтобы наибольший корень ρ_{max} уравнения

$$|b_{ij}(t) - \rho a_{ij}|_1^n = 0 \tag{24.44}$$

удовлетворял условию

$$\int_0^\infty (\rho_{max} + \alpha)\, dt < M < \infty, \tag{24.45}$$

так как в этом случае можно положить $\bar{\beta}(t) = -\rho_{max}(t) - \alpha$. Таким образом окончательно заключаем, что в качестве функции $\bar{\beta}(t)$ можно выбрать наибольший корень уравнения

$$\left| \frac{da_{ij}}{dt} - (1-\alpha)\rho a_{ij} - \delta_{ij} \right|_1^n = 0,$$

взятый с обратным знаком.

§ 25. Критерии асимптотической устойчивости в целом для некоторых нелинейных систем

1. В этом и следующем параграфах мы рассмотрим метод построения функций Ляпунова $v(x, t, \beta, \varphi)$, предложенный впервые в работе А. И. Лурье и В. Н. Постникова [69] и нашедший позднее широкое применение во многих работах (см., например, [12, 27, 30, 34, 46, 47, 49, 54, 66—68, 70, 79, 80, 133]).

При исследовании систем автоматического регулирования часто ставится задача о поведении решений систем дифференциальных уравнений следующего вида [5, 70]:

$$\frac{dx_i}{dt} = d_{i1}x_1 + \ldots + d_{in}x_n + \beta_{i1}\varphi_{i1}(x_1) + \ldots + \beta_{in}\varphi_{in}(x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{25.1}$$

где d_{ij}, β_{ij} — постоянные, $\varphi_{ij}(x_j)$ — нелинейные функции [1]).

В задачах устойчивости для систем (25.1), описывающих регулируемые системы, приходится учитывать возможность достаточно больших начальных возмущений $\{x_{j0}\}$, т. е. уравнения (25.1) приходится рассматривать в достаточно большой области пространства $\{x_j\}$.

---

[1]) Обычно функции φ_i зависят от линейных комбинаций $\sigma_i = \xi_{i1}x_1 + \ldots + \xi_{in}x_n$ ($\xi_{ij} = \text{const}$), однако во многих случаях линейной заменой переменных системы приводятся к виду (25.1), рассмотрением которого мы здесь и ограничимся.

Поэтому задачу не удается, как правило, свести к исследованию линеаризованной системы (25.1), так как не удается построить линейную систему, правые части которой отличались бы от правых частей системы (25.1) на достаточно малую (во всей области возможных отклонений $\{x_{j0}\}$) величину.

Поэтому при решении таких задач приходится при построении функций Ляпунова v учитывать нелинейный характер функций φ_{ij}. В соответствии с планом построения функции $v(x, t, \beta, \varphi)$ эту функцию для системы (25.1) следует искать в виде функционала от $\varphi_{ij}(x_j)$. Указанный в начале параграфа прием построения функции Ляпунова $v(x, t, \beta, \varphi)$ для системы вида (25.1) состоит в том, что эту функциональную зависимость выбирают в виде интегралов $\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi$, а саму функцию v строят в виде квадратичной формы переменных $x_1, \ldots, x_n$ плюс линейная комбинация указанных интегралов, т. е.

$$v(x, t, \beta, \varphi) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i, j=1}^{n} \alpha_{ij}\int\limits_0^{x_j} \varphi_{ij}(\xi)\,d\xi. \tag{25.2}$$

Вычисляя производную $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий (25.1) и записывая условия знакоопределенности (или знакопостоянства) этой производной $\frac{dv}{dt}$, а также условия знакоопределенности (или знакопеременности $v(x, t, \beta, \varphi)$), будем получать критерии устойчивости (или неустойчивости) системы (25.1). Эти критерии устойчивости существенно определяются тем, по какому правилу подбирались форма $\sum\limits_{i, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ и коэффициенты $\alpha_{ij}(\beta)$ для функции v (25.2). Некоторые из этих правил (и соответствующие критерии устойчивости) приведены в упомянутых выше работах (см. стр. 130). Для лучшего обзора таких критериев устойчивости представляет интерес классификация условий по небольшому числу инвариантных признаков. Описанный прием построения функции $v(x, t, \beta, \varphi)$ проиллюстрируем на задаче Айзермана. Изучая системы автоматического регулирования, М. А. Айзерман [3] пришел к весьма естественной и интересной постановке задачи о признаке устойчивости для системы вида (25.1). Сформулируем эту задачу [1]).

[1]) В статье [3] задача сформулирована для случая, когда система (25.1) содержит одну нелинейную функцию $\varphi_{ij}(x_j)$ (и притом лишь в одной строке, т. е. при одном i). Приводимая здесь формулировка является естественным обобщением задачи на случай системы (25.1), содержащей несколько нелинейных функций $\varphi_{ij}(x_j)$.

Рассмотрим систему (25.1) и линейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = d_{i1}x_1 + \ldots + d_{in}x_n + \beta_{i1}h_{i1}x_1 + \ldots + \beta_{in}h_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25.3}$$

Предположим, что при изменении параметров h_{ij} системы в области

а) $$\underline{h}_{ij} < h_{ij} < \overline{h}_{ij} \qquad (\underline{h}_{ij},\ \overline{h}_{ij} \text{ — const}) \tag{25.4}$$

или в области

б) $$\underline{h}_{ij} \leqslant h_{ij} \leqslant \overline{h}_{ij} \qquad (\underline{h}_{ij},\ \overline{h}_{ij} \text{ — const}), \tag{25.5}$$

решения системы линейных уравнений (25.3) асимптотически устойчивы. Спрашивается, будет ли асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях решение $x = 0$ нелинейной системы (25.1), если нелинейные функции $\varphi_{ij}(x_j)$ будут удовлетворять (соответственно для а) или б)) неравенству

$$\underline{h}_{ij} < \frac{\varphi_{ij}(x_j)}{x_j} < \overline{h}_{ij} \quad \text{при} \quad x_j \neq 0 \tag{25.6}$$

или неравенству

$$\underline{h}_{ij} \leqslant \frac{\varphi_{ij}(x_j)}{x_j} \leqslant \overline{h}_{ij} \quad \text{при} \quad x_j \neq 0. \tag{25.7}$$

Нелинейные непрерывные функции φ_{ij}, удовлетворяющие условиям а) (25.6), отнесем к классу а), функции φ_{ij}, удовлетворяющие условиям б) (25.7), отнесем к классу б). Тогда, в соответствии с постановкой задачи, данной в начале этой главы, сформулированные выше задачи можно записать так: требуется выяснить устойчивость системы (25.1) при параметрических возмущениях, определенных функциями φ_{ij} класса а) [или класса б) соответственно]. Задаче М. А. Айзермана посвящено большое число работ (см. стр. 130). Пока окончательное решение для задачи получено лишь в случае $n = 2$. При $n \geqslant 3$ указаны лишь некоторые соотношения между коэффициентом d_{ij} (т. е. указаны некоторые частные случаи), при которых задача имеет положительное решение (см., например, статьи [12, 94, 111, 125, 133][1]). Ограничимся здесь рассмотрением случая $n = 2$.

Задача М. А. Айзермана для системы двух уравнений с одной нелинейной функцией, т. е. для систем вида

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + f(x), \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy \tag{25.8}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{dy}{dt} = cx + dy + f(x), \tag{25.9}$$

[1]) Задача М. А. Айзермана при $n = 3$ была подробно изучена В. А. Плиссом.

была подробно изучена Н. П. Еругиным [28—30], причем для системы (25.8) были указаны многие случаи, когда задачи а) и б) имеют положительное решение. Для системы (25.9) было доказано, что задача М. А. Айзермана а) [а следовательно, тем более и задача б)] имеет положительное решение [29]. Весьма изящным приемом построения функции Ляпунова v для систем (25.8) и (25.9) И. Г. Малкин [80] показал, что для систем (25.8) и (25.9) задача б) имеет положительное решение. Позднее было показано, что задача а) для системы (25.8) имеет отрицательное решение [45], чем, в частности, и была обоснована необходимость различать задачи а) и б).

Рассмотрим здесь возможные типы систем двух уравнений с двумя нелинейными функциями. Такие системы были изучены в статьях [45, 46]. Рассмотрим для этих систем лишь задачу б), так как уже в случае системы (25.8) с одной нелинейной функцией, как говорилось выше, ответ на задачу а) получается отрицательным.

2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by, \tag{25.10}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные функции, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, a, b — постоянные.

Система линейных уравнений (25.3), соответствующая нелинейной системе (25.9), имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = h_1 x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = h_2 x + by, \tag{25.11}$$

Для того чтобы система (25.11) была асимптотически устойчивой, как известно, необходимо и достаточно, чтобы корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} h_1 - \lambda & a \\ h_2 & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{25.12}$$

удовлетворяли неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda_i < -\delta \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{25.13}$$

При условиях (25.13) будут во всяком случае выполняться неравенства

$$h_1 + b < -\gamma, \quad h_1 b - h_2 a > \gamma \qquad (\gamma > 0 - \mathrm{const}), \tag{25.14}$$

соответствующие неравенствам Рауза — Гурвица. Таким образом, для того чтобы показать, что для системы (25.10) задача б) решается положительно, достаточно установить асимптотическую устойчивость решения $x = y = 0$ этой системы при условиях

$$\frac{f_1(x)}{x} + b < -\gamma, \quad \frac{f_1(x)}{x} b - \frac{f_2(x)}{x} a > \gamma \quad \text{при} \quad x \neq 0$$
$$(\gamma > 0 - \mathrm{const}). \tag{25.15}$$

Теорема 25.1. При условиях (25.15) решение $x=y=0$ системы уравнений (25.10) асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях.

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $a \neq 0$, так как в случае $a=0$ задача решается непосредственным интегрированием системы (25.10).

Рассмотрим функцию

$$v(x, y)=(bx-ay)^2+2\int_0^x (f_1(\xi)b-f_2(\xi)a)\,d\xi. \tag{25.16}$$

Функция $v(x, y)$ является определенно-положительной и допускает бесконечно малый высший предел, так как в силу (25.15) справедливо неравенство

$$v(x, y) \geqslant (bx-ay)^2+\gamma x^2. \tag{25.17}$$

Из неравенства (25.17) при нашем предположении $a \neq 0$ следует также, что $v(x, y) \to \infty$ при $x^2+y^2 \to \infty$, т. е. функция $v(x, y)$ допускает бесконечно большой низший предел при $x^2+y^2 \to \infty$ (в смысле определения 5.2, стр. 36).

Вычислим производную $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий системы (25.10):

$$\frac{dv}{dt}=(f_1(x)+b)(f_1(x)b-f_2(x)a) \leqslant -\gamma^2x^2, \tag{25.18}$$

т. е. производная $\frac{dv}{dt}$ является функцией знакоотрицательной, причем обращаться в нуль функция $\frac{dv}{dt}$ может лишь на прямой $x=0$, которая в силу $\frac{dx}{dt} \neq 0$ при $y \neq 0$ удовлетворяет условиям (13.12). Таким образом, функция $v(x, y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 13.1, что и доказывает теорему 25.1.

Примечание. Теорема 13.1, на которую опирается доказательство теоремы 25.1, была доказана в § 13 лишь в предположении, что функции X_i (т. е. здесь f_1 и f_2) удовлетворяют условиям Липшица, т. е., строго говоря, и теорема 25.1 доказана здесь лишь для этого случая. Однако можно доказать, что теорема 13.1 остается справедливой и в общем случае непрерывных функций X_i и даже без предположения единственности решений системы (1.3). Это лишь несколько усложнило бы доказательство теоремы 13.1 (см., например, такие доказательства в статьях Е. А. Барбашина [12], С. Н. Шиманова [125], где рассмотрены частные случаи приложения функции v из теоремы 13.1). Более того, если принять во внимание рассуждения из § 17, стр. 95, то можно считать установленным факт асимптотической устойчивости решения $x=y=0$ при любых начальных отклонениях x_0, y_0 в системе (25.10) и в случае кусочно-разрывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если только эти функции удовлетворяют условиям (25.15).

3. Рассмотрим теперь остальные возможные случаи расположения двух нелинейных функций в системах двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = bx + f_2(y); \tag{25.19}$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + f_2(y), \qquad \frac{dy}{dt} = ax + by; \tag{25.20}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + f_1(y), \qquad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by. \tag{25.21}$$

Аналогичными приемами для этих систем были доказаны следующие результаты [45, 46], которые мы приведем здесь без доказательства.

Решение $x = y = 0$ системы (25.19), где $f_1(x)$ или $f_2(x)$ нелинейны, асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях, если

$$\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(y)}{y} < 0, \qquad \frac{f_1(x)}{x}\frac{f_2(y)}{y} - ab > 0, \tag{25.22}$$

т. е. если выполняются формально условия Рауза — Гурвица [задача а) имеет положительное решение].

Решение $x = y = 0$ системы (25.21) асимптотически устойчиво при любых начальных отклонениях, если

$$a + b < 0, \qquad ab - \frac{f_1(x)}{x}\frac{f_2(y)}{y} > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \ y \neq 0 \tag{25.23}$$

[задача а) имеет положительное решение].

Для системы (25.20) неравенства

$$\frac{f_1(x)}{x} + b < -\gamma, \qquad \frac{f_1(x)}{x} b - \frac{f_2(y)}{y} a > \gamma, \tag{25.24}$$

аналогичные условиям Рауза — Гурвица для линейной системы, уже не являются достаточными условиями асимптотической устойчивости, как это было показано на примере [46] [задача б) имеет отрицательное решение]. В качестве дополнительного ограничения, которое в совокупности с условиями (25.24) обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом решения $x = y = 0$ системы (25.20), можно выбрать условие

$$\left.\begin{array}{c}\text{функция } f_1(x) + bx \text{ является монотонно убывающей}\\ \text{функцией } x \text{ или, в частности, } f'(x) + b < 0.\end{array}\right\} \tag{25.25}$$

В этом случае асимптотическая устойчивость в целом для системы (25.20) устанавливается при помощи функции Ляпунова

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(ax + by)^2 - a\int_0^y \left(f_1\left(-\frac{b}{a}\xi\right) - f_2(\xi)\right) d\xi,$$

однако здесь на подробном доказательстве этого утверждения останавливаться не будем.

4. Рассмотрим нелинейную систему двух уравнений общего вида:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \tag{25.26}$$

где функции X, Y непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ при всех x и y, и при этом пусть функции X, Y дифференцируемы при $x=y=0$. Кроме того, как обычно, предполагается выполнение равенств $X(0, 0)=Y(0, 0)=0$.

Теорема 25.2. Решение $x=y=0$ системы уравнений (25.26) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если выполняются условия

$$l(x^2+y^2) \leqslant X^2(x, y)+Y^2(x, y) \quad \text{при всех} \quad x \text{ и } y, \tag{25.27}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y} < -\beta \quad \text{при всех} \quad x \text{ и } y, \tag{25.28}$$

где l, β — положительные постоянные.

Доказательство. Покажем сначала, что выполняется условие

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} > 0, \tag{25.29}$$

где

$$a_{11}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \qquad a_{22}=\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0, \qquad a_{12}=\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0, \qquad a_{21}=\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0,$$

причем все частные производные вычислены в точке $x=y=0$.

Действительно, вследствие предположения о дифференцируемости функций X, Y в точке $x=y=0$ можно записать:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y) &= a_{11}x+a_{12}y+R_1(x, y),\\ Y(x, y) &= a_{21}x+a_{22}y+R_2(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{25.30}$$

где функции R_1 и R_2 имеют порядок малости выше первого в точке $x=0$ $y=0$. Если предположить от противного, что

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0, \tag{25.31}$$

то можно записать:

$$X^2+Y^2=(cx+dy)^2+Q(x, y) \qquad (c,\ d - \text{const}), \tag{25.32}$$

так как вследствие (25.31) дискриминант квадратичной формы $(a_{11}x+a_{12}y)^2+(a_{21}x+a_{22}y)^2$ равен нулю.

В равенстве (25.32) функция $Q(x, y)$ имеет в точке $x=y=0$ порядок малости выше первого и, следовательно, при приближении точки $\{x, y\}$ к точке $x=y=0$ вдоль прямой $cx+dy=0$ не может выполняться неравенство (25.27). Полученное противоречие доказывает неравенство (25.29).

Таким образом, система первого приближения

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y, \qquad \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y, \tag{25.33}$$

составленная для уравнений (25.26) в точке $x=y=0$, удовлетворяет условиям Рауза — Гурвица

$$a_{11}+a_{22} < -\gamma, \qquad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} > \gamma,$$

т. е. решение $x=y=0$ системы (25.33) асимптотически устойчиво.

На основании теоремы Ляпунова [71, стр. 127] заключаем теперь, что решение $x=y=0$ системы (25.26) асимптотически устойчиво относительно возмущений x_0, y_0 из некоторой (может быть, достаточно малой) окрестности точки $x=0$, $y=0$.

Покажем теперь, что область притяжения точки $x=0$, $y=0$ охватывает всю плоскость $\{x, y\}$. Предположим от противного, что область притяжения точки $x=0$, $y=0$ не охватывает всей плоскости $\{x, y\}$. Согласно теореме Н. П. Еругина [28] граница области притяжения асимптотически устойчивой точки $x=0$, $y=0$ состоит из целых траекторий системы (25.26).

Часть этой границы, лежащая в круге достаточно большого радиуса, является компактным множеством, так как каждая из траекторий, составляющих границу, и совокупность этих траекторий являются замкнутым множеством, поэтому при нашем предположении можно указать точку x_0, y_0, лежащую на границе области притяжения и ближайшую к началу координат.

Рассмотрим траекторию $x(x_0, y_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$. Вследствие (25.27) точка x_0, y_0 не является особой точкой системы (25.26) (вообще, вследствие этого неравенства система (25.26) не имеет особых точек, отличных от начала координат $x=0, y=0$). Кроме того, x_0, y_0 — ближайшая точка траектории $x(x_0, y_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$ от начала координат, поэтому направление этой траектории (вектор $X(x_0, y_0)$, $Y(x_0, y_0)$) перпендикулярно к радиусу-вектору точки x_0, y_0.

Покажем, что траектория $x(x_0, y_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$ не может при всех значениях времени $t \geqslant 0$ оставаться в ограниченной части плоскости $\{x, y\}$. Действительно, ограниченная полутраектория $x(x_0, y_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$, $0 \leqslant t < \infty$ должна была бы иметь ограниченное, непустое *ω-предельное множество* (ω-предельным множеством, как известно, называется множество предельных точек для всевозможных последовательностей вида $x(x_0, y_0, t_k)$, $y(x_0, y_0, t_k)$ $(k=1, 2, \ldots$ $\ldots, t_k \to \infty)$). Известно [85, стр. 30], что ω-предельное множество данной траектории $x(t)$, $y(t)$ состоит из целых траекторий; более того, согласно результатам, приведенным в книге [85, стр. 230], среди траекторий, составляющих ограниченное ω-предельное множество на плоскости, должны быть либо особые точки системы, либо замкнутые траектории. Особых точек, отличных от точки $x=0$, $y=0$, система (25.26) не имеет. Не может иметь эта система и замкнутых траекторий, так как иначе вдоль такой замкнутой траектории O мы имели бы по формуле Грина:

$$\oint\limits_{O} (X\,dy - Y\,dx) = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

((D) — область, ограниченная контуром O), что противоречит неравенству (25.28). Противоречия показывают, что граничная траектория не может быть ограничена при всех значениях времени $t \geqslant 0$.

Предположим теперь, что на траектории $x(x_0, y_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$ имеются точки, сколь угодно удаленные от начала координат $x=0$, $y=0$. Пусть R — некоторое наперед заданное положительное число.

Согласно предположению можно указать точку $x(x_0, y_0, t_1)$, $y(x_0, y_0, t_1)$, лежащую вне круга

$$x^2+y^2\leqslant R. \tag{25.34}$$

Вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных существует точка x_1, y_1, лежащая на прямой $x=\xi x_0$, $y=\xi y_0$, такая, что на траектории $x(x_1, y_1, t)$, $y(x_1, y_1, t)$ также имеется точка $\{x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1)\}$, лежащая вне круга (25.34); точке x_1, y_1 соответствует значение $\xi=\xi\in(0, 1)$. При этом $x(x_1, y_1, t)\to 0$, $y(x_1, y_1, t)\to 0$ при $t\to\infty$, так как точка x_1, y_1 лежит ближе к началу координат $x=0$, $y=0$, чем точка x_0, y_0, и, следовательно, точка x_1, y_1 лежит в области притяжения решения $x=0$, $y=0$.

Рассмотрим траекторию

$$x^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t),\quad y^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t)$$

вспомогательной системы уравнений

$$\frac{dx^*}{dt}=-Y(x^*, y^*),\qquad \frac{dy^*}{dt}=X(x^*, y^*). \tag{25.35}$$

Траектория системы уравнений (25.35), очевидно, ортогональна к траекториям системы (25.26). Рассмотрим ту полутраекторию

$$x^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t),\quad y^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t),$$

которая лежит в области, ограниченной радиусом-вектором $x=\xi x_0$, $y=\xi y_0\,(0\leqslant\xi\leqslant\xi_1)$ точки (x_1, y_1) и полутраекторией $x(x_1, y_1, t)$, $y(x_1, y_1, t)$ при $0\leqslant t<\infty$. Рассматриваемая полутраектория системы (25.35) не может выйти из этой области при

$$x^2+y^2\geqslant x_0^2+y_0^2=r_0^2,$$

так как при этом она должна была бы пересечь второй раз траекторию $x(x_1, y_1, t)$, $y(x_1, y_1, t)$ при $t>0$, что, очевидно, невозможно, так как каждую траекторию системы (25.26) пересекают траектории системы (25.35) в одном и том же направлении. Рассматриваемая полутраектория

$$x^*(t),\quad y^*(t)$$

не может оставаться целиком в этой области при $x^2+y^2\geqslant r_0^2$, так как в этой области нет особых точек системы и замкнуты траектории системы (25.35). Особых точек в указанной области система (25.35) иметь не может вследствие условия (25.27). Если же предположить, что в области $x^2+y^2\geqslant r_0^2>0$ имеется замкнутая траектория системы (25.35), то, так как все траектории системы (25.26) пересекают эту траекторию в одном направлении, *индекс Пуанкаре* [85, стр. 133—139] области, ограниченной этой траекторией, должен быть отличен от нуля. Следовательно, внутри такой замкнутой траектории должны быть особые точки системы (25.26), что невозможно [85]. Итак, на ортогональной траектории $x^*(t)$, $y^*(t)$ есть точка x_2, y_2, удовлетворяющая условию

$$x_2^2+y_2^2=r_0^2$$

(рис. 4).

Рассмотрим область (заштрихованную на рисунке), ограниченную отрезком траектории $x(x_1, y_1, t)$, $y(x_1, y_1, t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, отрезком ортогональной траектории

$$x^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t), \quad y^*(x(x_1, y_1, t_1), y(x_1, y_1, t_1), t),$$

отрезком траектории системы (25.26) $x(x_2, y_2, t)$, $y(x_2, y_2, t)$ при $t_3 \leqslant t < 0$ (где число t_3 определяется равенством $x_3 = x(x_2, y_2, t_3)$,

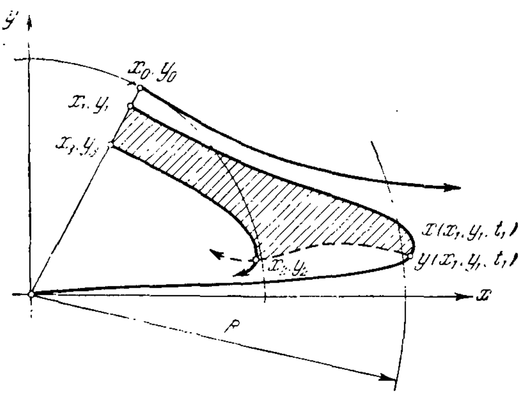

Рис. 4.

$y_3 = y(x_2, y_2, t_3)$) и отрезком прямой $x=\xi x_0$, $y=\xi y_0$. Обозначим через O контур, ограничивающий эту область. Вычислим интеграл

$$\oint\limits_{O} X\,dy - Y\,dx \tag{25.36}$$

по этому контуру. По формуле Грина

$$\oint\limits_{O} X\,dy - Y\,dx = \int\limits_{(D)}\int \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx\,dy$$

вследствие условия (25.28) заключаем, что вычисленный интеграл есть величина отрицательная. С другой стороны, вычислим интеграл (25.36) непосредственно. Вдоль отрезков траекторий системы (25.26) интеграл равен нулю. Интеграл вдоль отрезка (x_1, y_1) — — (x_3, y_3) прямой $x = \xi x_0$, $y = \xi y_0$ удовлетворяет неравенству

$$\left| \int (Y\,dx - X\,dy) \right| < r_0 \max\left[\sqrt{X^2+Y^2}\right]_{\text{при } r_0} = N. \tag{25.37}$$

Интеграл вдоль дуги ортогональной траектории $x^*(t)$, $y^*(t)$ удовлетворяет (вследствие условия (25.27)) оценке

$$\int\limits_{\cup x^* y^*} X\,dy - Y\,dx \geqslant \int\limits_{r_0}^{R} lr\,dr > \frac{l}{2}(R^2 - r_0^2). \tag{25.38}$$

Сопоставляя все полученные оценки, приходим к выводу, что интеграл (25.36) должен удовлетворять оценке

$$\oint\limits_{O} X\,dy - Y\,dx \geqslant \frac{l}{2}(R^2 - r_0^2) - N. \tag{25.39}$$

Таким образом, учитывая, что интеграл слева, по доказанному выше, должен быть отрицательным, приходим к выводу, что величина R должна удовлетворять неравенству

$$R \leqslant \sqrt{r_0^2 + \frac{2N}{l}}, \tag{25.40}$$

что противоречит предположению о возможности выбирать в качестве R любое наперед заданное положительное число. Противоречие и доказывает теорему.

Заметим еще, что неравенство (25.40) оценивает также и максимальные возможные отклонения

$$(x^2(t) + y^2(t))^{\frac{1}{2}}$$

вдоль траектории $x(x_0, t_0, t)$, $y(x_0, y_0, t)$ при $t \geqslant 0$, если только начальные данные удовлетворяют неравенству $x_0^2 + y_0^2 \leqslant r_0^2$. При этом, для того чтобы решение $x = y = 0$ системы (25.27) было асимптотически устойчивым относительно начальных возмущений x_0, y_0 из области $x_0^2 + y_0^2 \leqslant r_0^2$, достаточно, чтобы условия теоремы (25.27) и (25.28) выполнялись в области $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, где число R удовлетворяет неравенству (25.40).

Вернемся теперь к системе (25.21). Нетрудно видеть, что первое условие (25.23) есть просто неравенство (25.28). Покажем, что условие (25.27) есть следствие второго условия (25.23), если дополнительно предполагать h_1, h_2 ограниченными. Действительно, запишем систему уравнений

$$\xi = ax + h_1 y, \quad \eta = h_2 x + by.$$

Решая эту систему, получим:

$$x=\frac{\xi b-h_2\eta}{ab-h_1h_2},\qquad y=\frac{a\eta-\xi h_2}{ab-h_1h_2},$$

т. е. при условиях (25.23) имеем:

$$(x^2+y^2)\gamma^2=\alpha_1\xi_1^2+\alpha_2\xi\eta+\alpha_3\eta^2\leqslant P(\xi^2+\eta^2)=P(X^2+Y^2),$$

что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Следствие 25.2. Решение $x=y=0$ системы уравнений (25.21) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если выполняются следующие условия:

1) $a+b<0,\quad ab-\frac{f_1(x)}{x}\frac{f_2(y)}{y}>0;$

2) функции $h_1=\frac{f_1(y)}{y},\quad h_2(x)=\frac{f_2(x)}{x}$ ограничены при всех $x\neq 0$ и $y\neq 0$;

3) существуют пределы $h_1(0)=f_1'(0),\ h_2(0)=f_2'(0)$ [1].

5. Задача устойчивости систем регулирования в постановке, несколько отличной от формулировки задачи М. А. Айзермана, была изучена А. И. Лурье [70], И. Г. Малкиным [79], А. М. Летовым [66—68], Р. А. Спасским [107] и рядом других авторов. При изучении этой задачи и был впервые применен описанный здесь прием построения функции Ляпунова v в виде суммы определенно-положительной квадратичной формы и интеграла $\int\limits_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma$.

Приведем здесь для иллюстрации этого метода способ построения функции Ляпунова описанного вида, предложенный в статье И. Г. Малкина для задачи А. И. Лурье. Заметим еще, что возможности построения функции v описанного вида для задачи Лурье были изучены с весьма общей точки зрения в опубликованных позднее статьях В. А. Якубовича [128, 129], где были указаны некоторые инвариантные признаки возможности построения таких функций Ляпунова и дан единообразный прием их построения. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\eta_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\eta_j+h_if(\sigma),\quad \sigma=\beta_1\eta_1+\ldots+\beta_n\eta_n\quad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{25.41}$$

[1]) Следствие 25.2 несколько слабее, чем достаточные условия устойчивости (25.23), приведенные для системы (25.21) без доказательства на стр. 135.

где a_{ij}, h_i, β_i — постоянные, $f(\sigma)$ — непрерывная функция[1]), удовлетворяющая условию

$$\sigma f(\sigma) > 0 \text{ при } \sigma \neq 0. \qquad (25.42)$$

Задача, сформулированная А. И. Лурье [70], заключается в определении условий, при которых решение $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$ устойчиво при любых начальных отклонениях и при любом выборе функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (25.42). Для решения этой задачи А. И. Лурье применил специальное преобразование уравнений и указал метод построения функции Ляпунова. Здесь приводится метод, который, следуя идеям А. И. Лурье, применил И. Г. Малкин в статье [79].

Обозначим

$$r = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j h_j \qquad (25.43)$$

и будем предполагать выполнение неравенства

$$r > 0.$$

Предположим, что корни уравнения

$$|a_{ik} - \rho\delta_{ik}|_1^n = 0 \qquad (25.44)$$

имеют отрицательные действительные части[2]). Зададимся определенно-отрицательной квадратичной формой

$$w(\eta_1, \ldots, \eta_n) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\eta_i\eta_j =$$
$$= \alpha_{11}\eta_1^2 + (\alpha_{21}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2)^2 + \ldots + (\alpha_{n1}\eta_1 + \ldots + \alpha_{nn}\eta_n)^2 \qquad (25.45)$$

и выберем определенно-положительную функцию

$$F(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}x_i x_j, \qquad (25.46)$$

удовлетворяющую условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \eta_i}(a_{i1}\eta_1 + \ldots + a_{in}\eta_n) = w(\eta_1, \ldots, \eta_n). \qquad (25.47)$$

---

[1]) В подобных задачах функцию $f(\sigma)$ предполагают также часто кусочно-разрывной (см., например, [68]. Приводимые рассуждения сохраняют силу и в этом случае с учетом замечаний из § 17, стр. 93—95).

[2]) В статье [79] рассмотрены также случаи, когда уравнение (25.44) имеет один или два нулевых корня.

Рассмотрим функцию

$$v(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \int_0^{\sigma} f(\sigma)\,d\sigma + F(\eta_1, \ldots, \eta_n) \tag{25.48}$$

и вычислим $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий системы (25.38):

$$\frac{dv}{dt} = w(\eta_1, \ldots, \eta_n) + rf^2(\sigma) - f(\sigma)\sum_{i=1}^{n}\left(h_i \frac{\partial F}{\partial \eta_i} + \beta_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j\right). \tag{25.49}$$

Для выполнения условий теоремы 5.2 во всем пространстве $-\infty < \eta_i < \infty$ ($i = 1, \ldots, n$) достаточно, чтобы квадратичная форма переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n, f(\sigma)$ в правой части (25.49) была определенно-отрицательной. Для этого достаточно выполнения условий Сильвестра [124], которые в данном случае имеют вид;

$$D_1 = A_{11} > 0,\quad D_2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \ldots,\ D_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} > 0, \tag{25.50}$$

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} & P_1 \\ A_{21} & \ldots & A_{2n} & P_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} & P_n \\ P_1 & \ldots & P_n & r \end{vmatrix} > 0, \tag{25.51}$$

где

$$P_i = -\sum_{j=1}^{n}(\beta_j a_{ji} + h_j B_{ji}) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{25.52}$$

Неравенства (25.50) выполняются автоматически по выбору w как определенно-отрицательной формы. Поэтому достаточным условием асимптотической устойчивости решения $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$ системы (25.41) при любых возмущениях и при любом выборе $f(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (25.42), является неравенство (25.51). Условие (25.51) через B_{ij} содержит произвольные постоянные α_{jk}, которыми можно распорядиться так, чтобы область допустимых значений параметров регулируемой системы получилась возможно более широкой.

Приведем здесь некоторые результаты, полученные В. А. Якубовичем. При изложении их весьма целесообразно пользоваться матричной записью уравнений. Прописными латинскими буквами будем обозначать матрицы, жирными строчными — векторы, греческими буквами — скалярные величины. Исключениями будут: t — время, n — порядок векторов и матриц, V — функция Ляпунова, $\frac{dV}{dt} = -W$ — ее полная производная. Звездочка * будет означать транспонирование элемента, произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ — скалярное произведение и символ (Hx, x) — квадратичную форму переменных $x_1, \ldots, x_n$. В этих обозначениях изучаемую систему уравнений можно записать в виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \boldsymbol{a}\varphi(\sigma), \qquad \frac{d\sigma}{dt} = (\boldsymbol{b}, x) - \rho\varphi(\sigma),$$

где $\rho > 0$; $\varphi(\sigma)$ — характеристика сервомотора, как и выше, предполагается непрерывной и удовлетворяющей условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\sigma)\sigma > 0 \text{ при } \sigma \neq 0.$$

Как и выше, предполагаем, что в характеристическом уравнении «разомкнутой системы»

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

все корни будут с отрицательными действительными частями. Требуется в соответствии с приведенной выше формулировкой задачи А. И. Лурье определить условия, при которых тривиальное решение $x = 0$, $\sigma = 0$ устойчиво в целом. Здесь, по существу, повторяется в матричной записи прием построения функции Ляпунова V, описанный выше. Однако матричная запись позволяет сформулировать критерий существования такой функции в весьма компактной, инвариантной форме. Итак, будем записывать функцию Ляпунова V в виде

$$V = (Hx, x) + \int_0^\sigma \varphi(\sigma)\,d\sigma \quad (H^* = H).$$

Дифференцирование вдоль траекторий системы уравнений дает:

$$\frac{dV}{dt} = -W = -(x^*Gx + 2\boldsymbol{g}^*x + \gamma),$$

$$\text{где} \quad -G = A^*H + HA, \quad -\boldsymbol{g} = \left(H\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\varphi, \quad \gamma = \rho\varphi^2.$$

Заметим, что, хотя в данном случае речь идет об устойчивости в целом, т. е. об устойчивости при любых начальных возмущениях, для обеспечения этой устойчивости достаточно выполнения лишь условий $V > 0$, $W > 0$ при $|\sigma| + \|x\| \neq 0$ без дополнительного требования к функции V допускать бесконечно большой низший предел (см. теорему 5.2). На проверке справедливости этого утверждения мы здесь останавливаться не будем, отсылая читателя к статьям В. А. Якубовича [128—129]. Итак, для вывода условий устойчивости следует выяснить лишь условия, при которых выполняются неравенства $V > 0$, $W > 0$ при $\|x\| + |\sigma| \neq 0$. Более того, в силу теоремы Ляпунова [71] легко видеть, что неравенство $V > 0$ есть следствие неравенства $W > 0$. Но для того, чтобы выполнялось неравенство $W > 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma G - gg^* = \frac{1}{4}\rho\varphi^2 G > 0. \tag{25.53}$$

(Следуя В. А. Якубовичу, мы пишем $G > 0$, если $(Gz, z) > 0$ при $z \neq 0$.) Выписывая явно неравенство (25.53), мы приходим к квадратному неравенству для матрицы H:

$$-\rho(A^*H + HA) - \left(Ha + \frac{1}{2}b\right)\left(Ha + \frac{1}{2}b\right)^* \equiv \frac{1}{2}\rho G > 0. \tag{25.54}$$

Итак, для устойчивости в целом достаточно, чтобы уравнение (25.54) с какой-либо матрицей $G > 0$ допускало в качестве решения симметричную матрицу H. Для того чтобы сформулировать эти условия, введем линейный оператор $Y = R(X)$, определенный формулой

$$A^*Y + YA = -X,$$

и положим:

$$-u = Ha + \frac{1}{2}b.$$

Тогда мы получим:

$$\rho H = R(u, u^*) + \frac{1}{2}\rho R(G), \tag{25.55}$$

$$R(u, u^*)\, a + \rho u + \frac{1}{2}\rho(b + c) = 0, \tag{25.56}$$

где $c = R(G)a$. Если квадратное векторное уравнение (25.56) имеет вещественное решение, то из формулы (25.55) найдем матрицу $H > 0$, удовлетворяющую неравенству (25.54). Уравнение (25.56) можно еще записать в виде:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{а}) & A^*U + UA = -uu^*, \\ (\text{б}) & Ua + \rho u + \frac{1}{2}\rho(b + c) = 0, \end{array}\right\} \tag{25.57}$$

где вектор c определяется из уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{а}) & A^*T + TA = -G < 0, \\ (\text{б}) & c = Ta. \end{array}\right\} \tag{25.58}$$

Таким образом, имеем следующий окончательный вывод [128]: Если для некоторого вектора c, определяемого формулами (25.58) (где $G > 0$ — какая-либо положительно-определенная симметрическая матрица), «разрешающее уравнение» (25.56) (или уравнение (25.57) (б)) имеет вещественное решение u, то тривиальное решение $x = \sigma = 0$ исследуемой системы устойчиво в целом.

Здесь важно отметить следующее обстоятельство: все выкладки, связанные с проверкой указанных условий устойчивости, можно провести конечным числом шагов. В частности, можно использовать такой прием для получения достаточных критериев устойчивости: положим в уравнениях (25.56) и (25.57) $c=0$ и проверим разрешимость этих уравнений не только для заданного вектора b, но и для всех векторов b, достаточно близких к данному. Это соответствует выбору $G=\varepsilon E$, где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Расписывая уравнения (25.56) и (25.57), мы получаем системы алгебраических уравнений, разрешимость которых в вещественных числах и дает условия асимптотической устойчивости в целом. Если, в частности, предположить, что матрица A приводится к диагональному виду, то получаются разрешающие уравнения, выведенные впервые А. И. Лурье [70].

§ 26. Критический случай

Применим указанный в предыдущем параграфе прием построения функции Ляпунова V для вывода условий устойчивости в одном критическом случае. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) \quad (i=1, \ldots, n+1), \tag{26.1}$$
$$X_i(0, \ldots, 0)=0,$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой окрестности точки $x_1=\ldots=x_{n+1}=0$. Как известно, случай называется критическим по Ляпунову [71, стр. 137], если характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1\,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1\,1} & \ldots & a_{n+1\,n+1}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{26.2}$$

системы первого приближения

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+\ldots+a_{i\,n+1}x_{n+1} \tag{26.3}$$
$$\left(a_{ij}=\left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]_{x=0},\ i=1, \ldots, n+1,\ j=1, \ldots, n+1\right)$$

имеет корни λ_i с нулевой действительной частью и не имеет корней λ_j с положительной действительной частью.

Известно также, что об устойчивости или неустойчивости решения $x=0$ системы (26.1) в критическом случае нельзя судить, рассматривая лишь поведение траекторий системы первого приближения (26.3). Исследование критических случаев имеет, следовательно, некоторые общие черты с исследованием задачи устойчивости для нелинейных систем при больших начальных возмущениях, так как в обоих этих случаях не удается, как правило, сопоставить данной нелинейной системе уравнений одну определенную линейную систему первого приближения, исследования которой достаточно для суждения об устойчивости решения $x=0$ полной системы.

Приведем здесь один критерий асимптотической устойчивости (неустойчивости) в критическом случае одного нулевого корня. Этот критерий является более грубым, чем классические критерии Ляпунова [71, стр. 137], а также критерии И. Г. Малкина [76, 77], Г. В. Каменкова [41] и других авторов, полученные в предположении голоморфности правых частей уравнений возмущенного движения. Однако эти критерии годятся и в случаях неаналитических функций $X_i\ (x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Итак, рассмотрим систему (26.1). Пусть характеристическое уравнение системы первого приближения (26.2) имеет один нулевой корень и n корней с отрицательной действительной частью. Задача об устойчивости положения равновесия $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ в случае голоморфных функций X_i решена А. М. Ляпуновым [71]. В. С. Ведроз [16] обобщил результаты Ляпунова для случая, когда предполагается лишь дифференцируемость функций X_i в окрестности начала координат $x=0$. Ниже будет приведена теорема, показывающая, что об устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ в случае одного нулевого корня можно судить по поведению собственных чисел $\lambda_i(x_1, \ldots, x_{n+1})$ матрицы Якоби

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial X_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial X_1}{\partial x_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial X_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{matrix} \right\|.$$

Теорема 26.1. Если в некоторой окрестности точки $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ (за исключением самой этой точки) уравнение

$$\left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \lambda \delta_{ij} \right|_1^{n+1} = 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \neq 0 \tag{26.4}$$

имеет все корни $\lambda_i(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с отрицательными вещественными частями, а уравнение (26.2) имеет один нулевой корень, то решение $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ системы уравнений (26.1) асимптотически устойчиво. Если, напротив, в каждой точке некоторой окрестности начала координат уравнение (26.4) имеет корень с положительной вещественной частью, то решение $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ неустойчиво.

Эта теорема была доказана в статье автора [49]. Для случая системы двух уравнений аналогичные теоремы в более общих критических случаях были доказаны независимо Р. Э. Виноградом [17] и автором [47].

Здесь мы не будем приводить полностью доказательства теоремы 26.1, но остановимся подробно лишь на центральном пункте доказательства — построении функции Ляпунова v — с тем, чтобы еще раз продемонстрировать параметрический метод построения этой функции в соответствии с тем планом, который был изложен в начале этой главы.

В статье автора [49] показано, что преобразованием координат система уравнений (26.1) может быть приведена к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x) + p_1(x, z_1, \ldots, z_n) z_1 + \ldots + \\ &\quad + p_n(x, z_1, \ldots, z_n) z_n, \\ \frac{dz_i}{dt} &= [p_{i1} + q_{i1}(x, z_1, \ldots, z_n)] z_1 + \ldots + \\ &\quad + [p_{in} + q_{in}(x, z_1, \ldots, z_n)] z_n + \\ &\quad + q_i(x, z_1, \ldots, z_n)\varphi(x) \\ &\qquad (p_{ij} - \text{const},\ i = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{26.5}$$

причем функции q_{ij}, p_i и q_i стремятся к нулю при приближении к началу координат. При этом корни уравнения

$$|p_{ij} - \lambda\delta_{ij}|_1^n = 0 \tag{26.6}$$

имеют отрицательные действительные части. В случае, если корни уравнения (26.4) имеют отрицательные действительные части, выполняется неравенство

$$\varphi(x)x < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,\ |x| < \delta. \tag{26.7}$$

Если среди корней уравнения (26.4) содержится корень с положительной действительной частью, то

$$\varphi(x)x > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,\ |x| < \delta \tag{26.8}$$

($\delta > 0$ — достаточно малая постоянная).

Согласно теореме Ляпунова [71, стр. 106—107] существует определенно-положительная квадратичная форма

$$w(z) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} z_i z_j$$

переменных $z_1, \ldots, z_n$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji} z_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} z_i^2. \tag{26.9}$$

Рассмотрим функцию

$$v(x, z) = -\int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi + w(z). \tag{26.10}$$

Производная $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий системы (26.1) (или, что то же самое, вдоль траекторий системы (26.5)) имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = -\varphi^2(x) - \sum_{i=1}^{n} p_i z_i \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} z_j \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial z_i} q_i \varphi(x).$$

В достаточно малой окрестности точки $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$ функции p_i, q_i и q_{ij} малы, поэтому вследствие (26.9) производная $\frac{dv}{dt}$ будет функцией определенно-отрицательной. В случае (26.7) сама функция $v(x, z)$ будет функцией определенно-положительной, т. е. в этом случае будут выполняться условия теоремы Ляпунова [71] об асимптотической устойчивости. В случае (26.8) функция $v(x, z)$ будет удовлетворять условиям теоремы Четаева [124, стр. 34] о неустойчивости. Этим доказательство теоремы завершается.

Приведем одно следствие из теоремы 26.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = X\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \tag{26.11}$$

Пусть характеристическое уравнение первого приближения для этого уравнения имеет один нулевой корень и n корней с отрицательной действительной частью.

Для того чтобы решение $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$ $\left(y_k = \frac{d^k x}{dt^k}\right)$ этого уравнения было асимптотически устойчивым, достаточно выполнения в окрестности точки $x = y_1 = \ldots = y_n = 0$ неравенства

$$\frac{\partial X}{\partial x} < 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{26.12}$$

к которому в этом случае сводится условие теоремы 26.1. Это можно проверить, выписав неравенства Рауза — Гурвица [124] для коэффициентов уравнения (26.4) в частном случае (26.11).

ГЛАВА VI

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ВТОРОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ВРЕМЕНИ

§ 27. Предварительные замечания

Во второй части книги будем рассматривать задачи устойчивости для дифференциальных уравнений с запаздываниями времени t. Интерес к этим уравнениям связан с задачами автоматического регулирования. Мы рассмотрим здесь уравнения с запаздываниями в довольно общей форме. Следуя А. Д. Мышкину [83], рассматриваемые уравнения будем называть *уравнениями с последействием*. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{27.1}$$

где правые части $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$ — функционалы, определенные на кусочно-непрерывных функциях $x_i(\vartheta)$ аргумента ϑ, который меняется в пределах $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$ $(h>0 - \mathrm{const})$.

Уравнения (27.1) суть уравнения с последействием. В этих уравнениях скорость изменения переменных $x_i(t)$, описывающих состояние системы в каждый данный момент времени t, определяется значениями ($\equiv$ поведением) этих переменных в некоторые предшествующие моменты времени (при $t+\vartheta$, $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$). В этом разделе везде, если не оговорено противное, будем предполагать, что функции аргумента ϑ следует рассматривать при значениях $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Для того чтобы определить производные $\frac{dx_i}{dt}$ в данный момент времени t, следует известные функции $x_i(t+\vartheta)$ $(i=1, \ldots, n)$, описывающие поведение системы в предшествующие моменты времени, подставить в функционалы X_i; тогда числовые значения этих функционалов и определят производные $\frac{dx_i}{dt}$ в момент t. Частными случаями уравнений (27.1) являются уравнения с запаздываниями времени

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1(t-h(t)), \ldots, x_n(t-h(t)), t) \quad (i=1, \ldots, n), \tag{27.2}$$

где производные $\frac{dx_i}{dt}$ определяются значениями функций $x_i(t)$ в предшествующий момент времени $t - h(t)$. (Здесь X_i — функции числового вектора-аргумента $x_1, \ldots, x_n$.) Возможны случаи, когда каждая функция x_j входит в X_i со своим запаздыванием $h_j(t)$ или даже с несколькими запаздываниями. Распространенной формой уравнений (27.1) являются также уравнения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(\theta_1, \ldots, \theta_k, t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{27.3}$$

где X_i — функции числового вектора $\{\theta_1, \ldots, \theta_k\}$, а $\theta_1, \ldots, \theta_k$ — выражения вида

$$\theta_j = \int_{t-h}^{t} f_j(x_j(\vartheta))\, d\psi_j(\vartheta) \tag{27.4}$$

и т. д. При $h = 0$ уравнения (27.1) переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения.

В дальнейшем будем часто рассматривать функциональное пространство $\{x_i(\vartheta)\}$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, n)$, поэтому введем некоторые обозначения. Не будем связывать себя заранее рассмотрением какого-либо одного стандартного пространства (C, L, L_2 и т. д.), а будем выбирать по мере изложения ту метрику, которая будет удобной для каждой рассматриваемой задачи.

Обозначим:

$$\|x\|^{(h)} = \sup(|x_i(\vartheta)| \text{ при } -h \leqslant \vartheta \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, n), \tag{27.5}$$

$$\|x\|_2^{(h)} = \left[\int_{-h}^{0} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\vartheta)\right) d\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{27.6}$$

сохраняя символы $\|x\|$ и $\|x\|_2$ без индекса (h) для обозначения тех же норм числового вектора $\{x_i\}$, которые были введены в начале книги (стр. 8). Определения будем давать, как правило, для метрики, определенной нормой (27.5). Будем предполагать, что функционалы X_i определены при

$$\|x\|^{(h)} < H, \quad t \geqslant 0, \tag{27.7}$$

где H — фиксированная постоянная или, может быть, $H = \infty$, и удовлетворяют следующим условиям[1]):

1) Функционалы $X_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$ кусочно-непрерывны в области (27.7) в следующем смысле: существует последовательность чисел t_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ таких, что в каждой

---

[1]) Как обычно, предполагаем, что $X_i(x(\vartheta), t) = 0$ при $x_j(\vartheta) \equiv 0$ $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n,\ -h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$.

области

$$\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1} \tag{27.8}$$

функционалы X_i непрерывны по t и могут быть доопределены (с сохранением непрерывности) во всей области $\|x\|^h < H$, $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$ так, что для каждого $t^* \in [t_k, t_{k+1}]$ и для каждой непрерывной функции $x_i^*(\vartheta)$ $(i = 1, \ldots, n)$ для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left|X_i(x_1^*(\vartheta), \ldots, x_n^*(\vartheta), t^*) - X_i(x_1^*(\vartheta), \ldots, x_n^*(\vartheta), t)\right| < \varepsilon$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

если только $|t^* - t| < \delta$ и $t \in [t_k, t_{k+1}]$; так как функционалы X_i могут терпеть разрывы в отдельные моменты времени t_k, и по ряду других причин, которые рассмотрим в дальнейшем (стр. 155, 172), будем в уравнениях (27.1) везде под $\frac{dx_i}{dt}$ понимать лишь *правую производную от* $x_i(t)$ по времени t.

2) Функционалы X_i удовлетворяют условиям Липшица по $x_j(\vartheta)$, т. е.

$$\left|X_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta), t) - X_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta), t)\right| <$$
$$< L\|x'' - x'\|^{(h)} \quad (L = \mathrm{const},\ i = 1, \ldots, n). \tag{27.9}$$

Остановимся коротко на вопросе о существовании решений системы уравнений с последействием (27.1). Пусть даны момент времени $t = t_0 \geqslant 0$ и некоторая кусочно-непрерывная функция[1])

$$x_0(\vartheta_0) \equiv \{x_{i0}(\vartheta_0)\} \quad (i = 1, \ldots, n, \ -h \leqslant \vartheta_0 \leqslant 0);$$

будем называть *решением* и обозначать через $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ непрерывную при $t \geqslant t_0$ функцию $x(t) \equiv \{x_i(t)\}$ такую, что

$$\lim_{\Delta t \to +0}\left(\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}\right) = X_i(x_1(t + \vartheta), \ldots, x_n(t + \vartheta), t), \tag{27.10}$$

причем при $t + \vartheta \leqslant t_0$ полагаем $x_i(t + \vartheta) = x_{i0}(\vartheta_0)$ $(\vartheta_0 = t + \vartheta - t_0)$.

При условиях, которые были наложены выше на функционалы X_i, можно доказать существование решений (в определенном выше смысле) для каждой кусочно-непрерывной начальной кривой $x_0(\vartheta_0)$ при $t \geqslant t_0$, причем эти решения, как и в случае обыкновенных уравнений, продолжимы на все те значения $t \geqslant t_0$, при которых кривая $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ остается еще в области (27.7).

Доказательства этого утверждения приводить здесь не будем, так как оно проводится обычным методом последовательных приближений. Доказа-

---

[1]) Тот факт, что в качестве начальных кривых мы допускаем кусочно-непрерывные кривые, доставит некоторые неудобства, однако в приложениях приходится рассматривать и такие начальные кривые. Во всяком случае в дальнейшем под *кусочно-непрерывной кривой* следует разуметь разрывную кривую самой простой природы — функция $x_i(\vartheta)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода.

тельство таких теорем существования в весьма общих случаях описано, например, в работах [84, 127]. Приведем здесь доказательство лишь одного вспомогательного неравенства, которое часто будем использовать в дальнейшем.

Лемма 27.1. Пусть даны момент времени $t = t_0 \geqslant 0$ и начальные кривые $\{x_{i0}(\vartheta_0)\}$, $\{x_{i0}^*(\vartheta_0)\}$, удовлетворяющие условиям

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} < H, \quad \|x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} < H.$$

При всех тех значениях времени $t \geqslant t_0$, при которых отрезки траекторий $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$, $x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t)$ остаются целиком в области (27.7), выполняется неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t)\| \leqslant \\ \leqslant \|x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} \exp L(t - t_0) \quad (27.11)$$

и, следовательно, выполняется также неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\|^{(h)} \leqslant \\ \leqslant \|x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} \exp L(t - t_0). \quad (27.12)$$

Доказательство. Неравенство (27.11) выполняется при $t = t_0$. Предположим от противного, что лемма неверна, и пусть $t = t_1$ — момент времени, ограничивающий сверху отрезок $[t_0, t_1]$, на котором неравенство (27.11) еще справедливо, но при $t > t_1$ неравенство (27.11) уже нарушается, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать число t_ε такое, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_\varepsilon) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t_\varepsilon)\| > \\ > \|x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} \exp L(t_\varepsilon - t_0), \quad (27.13)$$

причем

$$|t_\varepsilon - t_1| < \varepsilon.$$

Из неравенства (27.13), учитывая, что при $t \leqslant t_1$ неравенство (27.11) еще справедливо, получим:

$$\limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{1}{\Delta t}\left[\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_1 + \Delta t) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t_1 + \Delta t)\| - \right.\right. \\ \left.\left. - \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_1) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t_1)\|\right]\right) \geqslant \\ \geqslant \limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{1}{\Delta t}\left[\|x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} \{\exp L(t_1 + \Delta t - t_0) - \right.\right. \\ \left.\left. - \exp Lt_1\}\right]\right) = \|x_0(\vartheta_0) - x_0^*(\vartheta_0)\|^{(h)} L \exp L(t_1 - t_0) = \\ = L\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_1) - x(x_0^*(\vartheta_0), t_0, t_1)\|. \quad (27.14)$$

С другой стороны, по уравнениям (27.1) с учетом условий (27.9) можно записать:

$$\sup_{(i=1,\ldots,n)}\left(\left|\frac{dx_i}{dt}-\frac{dx_i^*}{dt}\right|\right)=\sup\left(\left|X_i(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1),\ t_1)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-X_i(x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1),\ t_1)\right|\right)<L\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)-$$
$$-x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)\|^{(h)}. \qquad (27.15)$$

Так как мы предположили, что неравенство (27.11) нарушается именно при $t>t_1$, то

$$\sup(\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)\|$$
$$\text{при}\ -h\leqslant\vartheta\leqslant 0)=\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|,$$

т. е.

$$\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\vartheta)\|^{(h)}=$$
$$=\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|. \qquad (27.16)$$

Согласно равенствам (27.15) и (27.16) для любого числа $\gamma>0$ можно указать число $\eta>0$ такое, что

$$|[x_i(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)-x_i(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)]-$$
$$-[x_i(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x_i(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)]|<$$
$$<(L\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|+\gamma)\Delta t$$

при всех $i=1,\ \ldots,\ n,\quad 0\leqslant\Delta t\leqslant\eta$, или

$$|(|x_i(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)-x_i(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)|)-$$
$$-(|x_i(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x_i(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)|)|<$$
$$<(L\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|+\gamma)\Delta t$$
$$(i=1,\ \ldots,\ n,\quad 0\leqslant\Delta t\leqslant\eta). \qquad (27.17)$$

Так как при $\Delta t\to+0$ $\eta\to 0$, т. е. $\gamma\to 0$, то из неравенств (27.17) следует:

$$\limsup_{\Delta t\to+0}\left(\frac{1}{\Delta t}(\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)-x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1+\Delta t)\|-\right.$$
$$\left.-\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|)\right)<$$
$$<L\|x(x_0^*(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)-x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_1)\|,$$

что противоречит неравенству (27.14). Противоречие доказывает лемму.

Полагая, в частности, в условии (27.11) $x^*(\vartheta_0) \equiv 0$, получим неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\| \leqslant \|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \exp L(t - t_0) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{27.18}$$

Заметим, еще, что решения уравнений с последействием вследствие

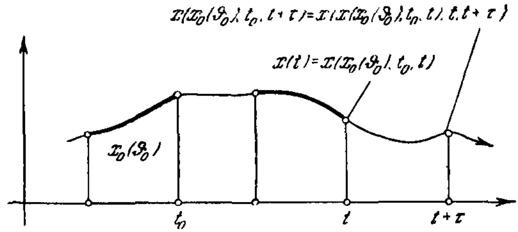

Рис 5.

теорем существования и единственности решений (при $t \geqslant t_0$) удовлетворяют также условию:

при $t \geqslant t_0$, $\tau \geqslant 0$

$$x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t+\tau) = x(x_0^*(\vartheta_0),\ t,\ t+\tau), \tag{27.19}$$

где

$$x_0^*(\vartheta) = x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t+\vartheta) \tag{27.20}$$

(рис. 5).

При $t < t_0$, $\tau < 0$ соотношения (27.19), (27.20) могут и не выполняться, так как на значения времени $t < t_0$ решения могут быть не продолжимы.

§ 28. Постановка задачи устойчивости для уравнений с последействием

1. Сформулируем постановку задачи устойчивости для уравнений с последействием.

Определение 28.1. а) Решение $x = 0$ уравнений (27.1) будем называть устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \tag{28.1}$$

если только выполняется неравенство

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant \delta. \tag{28.2}$$

б) Если при выполнении условий а) выполняются также условия

$$\lim \|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\| = 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{28.3}$$

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\| < H_1 \quad \text{при всех} \quad t \geqslant t_0 \tag{28.4}$$
$$(H_1 = \text{const})$$

для всех начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0, \tag{28.5}$$

то решение $x = 0$ уравнений (27.1) устойчиво асимптотически и область (28.5) лежит в области притяжения невозмущенного движения [1]).

С формальной точки зрения определения а) и б) являются наиболее естественным перенесением определений устойчивости по Ляпунову на уравнения с последействием, и такие определения приняты в большинстве работ по системам с запаздываниями времени (см., например, [24, 98, 126, 127, 131, 132, 139, 140, 141]). Следует, однако, оговорить, что такая постановка задачи встречает возражения, а именно: в определении 28.1 требуется выполнение условий (28.1) (или (28.3), (28.4)) для траекторий, определенных на весьма широком классе (28.2) или (28.5) начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, т. е. на всех кусочно-непрерывных начальных кривых, между тем как в реальных системах вследствие специальной их структуры часто наблюдаются лишь начальные возмущения, определяющие узкое семейство начальных кривых. Поэтому условия, обеспечивающие устойчивость при всевозможных начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, могут в конкретных случаях оказаться непомерно узкими.

Таким образом, постановка задачи устойчивости для уравнений с последействием включает в себя также вопрос об изучении начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, *допустимых* для данной конкретной задачи. Во всяком случае корректными будут такие критерии устойчивости, которые гарантируют устойчивость относительно класса начальных кривых, заведомо включающих все начальные кривые, соответствующие начальным возмущениям, возможным в изучаемой системе. Заметим еще, что практический интерес представляет, очевидно, лишь такая постановка задачи устойчивости, при которой достаточные условия устойчивости сохраняют свою силу при малых вариациях уравнений и начальных кривых, допустимых структурой системы.

Излагаемый ниже материал можно было бы перевести на язык лишь допустимых начальных кривых, однако, поскольку не указаны обоснованные критерии выбора таких кривых, это изложение

---

[1]) В определениях 28.1 а) и б) в условиях (28.1), (28.3), (28.4) можно писать везде норму $\|x\|^{(h)}$, что, очевидно, эквивалентно (28.1), (28.3), (28.4) (с измененными оценками чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$).

имело бы чисто формальный смысл. Поэтому и принята постановка задачи устойчивости, описанная определениями а) и б).

Достаточные условия устойчивости, которые будут доказаны для определений а) и б), будут, очевидно, достаточными условиями устойчивости и в тех случаях, когда реально возможен лишь более узкий класс начальных кривых. Правда, в таких случаях эти достаточные условия могут оказаться далекими от необходимых условий устойчивости. Отчасти по этой причине в дальнейшем ограничимся лишь случаями устойчивости. Вывод критериев неустойчивости ниже не рассматривается.

2. При той постановке задачи устойчивости, которая описывается определениями а) и б), весьма удобно в качестве элемента траектории $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ принимать не вектор $\{x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\}$, а вектор-отрезок этой траектории $\{x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\}$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$ (рис. 6).

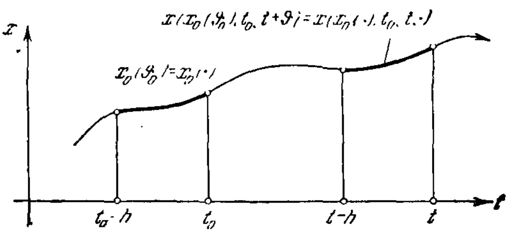

Рис. 6.

Это позволяет, в частности, установить для линейных систем связь задач устойчивости для уравнений с последействием с некоторыми результатами теории полугрупп. Для того чтобы в дальнейшем избежать путаницы, будем обозначать такие отрезки траекторий следующим образом: вектор-функцию $x_i(\vartheta)$ $(i=1, \ldots, n,$ $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ будем обозначать $x(\cdot)$, соответственно начальную кривую $x_0(\vartheta_0)$ будем обозначать $x_0(\cdot)$, траекторию $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)$ обозначим символом $x(x_0(\cdot), t_0, t, \cdot)$.

Отметим еще следующее обстоятельство. Пусть при $t=t_0 \geqslant 0$ дана начальная, кусочно-непрерывная кривая $x_0(\vartheta_0)$. Если на отрезке $[t_0, \tau]$, где $\tau > t_0+h$, траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$, остается в области (27.7), то при $t=\tau$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{dx_i}{dt}\right| = |X_i| < LH = L_1 \qquad (i=1, \ldots, n),$$

т. е. при всех тех $t > t_0+h$, при которых траектория $x(x_0, t_0, t)$ еще остается в области (27.7), функции $x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ будут удовлетворять условиям Липшица по t с постоянной L_1:

$$|x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t') - x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t'')| < L_1 |t'' - t'|. \tag{28.6}$$

Из этого замечания вследствие неравенств (27.11) и (27.12) заключаем, что в ряде случаев при решении задачи устойчивости можно ограничиться лишь рассмотрением начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$, удовлетворяющих условиям Липшица, т. е. рассмотрением начальных кривых, удовлетворяющих неравенству

$$|x_{i0}(\vartheta_0'')-x_{i0}(\vartheta_0')|<L_1|\vartheta_0''-\vartheta_0'| \quad (\vartheta_0'',\ \vartheta_0'\in[-h,\ 0]). \tag{28.7}$$

В самом деле, допустим, что при данном t_0 мы установили, что требования определений (28.1) а) или б) выполнены для траекторий, начальные кривые которых удовлетворяют условиям (28.7) и для которых начальный момент времени t_0' определен равенством $t_0'=t_0+h$, причем мы получили оценки чисел $\delta(\varepsilon,\ t_0+h)$, $H_0(t_0+h)$ (δ, H_0 — числа из определений 28.1 а) и б)). Тогда мы можем утверждать, что требование определения а или б (28.1) выполняется и для любых кусочно непрерывных начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$ с начальным моментом $t=t_0$, но уже с оценками $\delta(\varepsilon,\ t_0)=\delta(\varepsilon,\ t_0+h)\exp(-hL)$, $H_0(t_0)=H_0(t_0+h)\exp(-hL)$. Действительно, при условиях (28.2) и (28.3) имеем в силу неравенства (27.12)

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_0+h)\|^{(h)}<\delta(\varepsilon,\ t_0+h),$$
$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t_0+h)\|^{(h)}<H(t_0+h),$$

и при этом функции $x(x_0(\vartheta),\ t_0,\ t_0+\vartheta_0+h)$ при $-h\leqslant\vartheta_0\leqslant 0$ входят в класс функций (28.7), для которых доказано выполнение условий а) или б). Тем самым наше утверждение доказано. Это замечание будем часто использовать в дальнейшем.

Переходим к рассмотрению задач устойчивости. В § 29 мы рассмотрим с излагаемой здесь точки зрения задачи устойчивости для линейных систем уравнений с последействием и установим связь этих задач с некоторыми результатами теории полугрупп. В последующих параграфах рассматривается развитие метода Ляпунова для уравнений с последействием.

§ 29. Устойчивость линейных систем уравнений с последействием

Рассмотрим линейную систему уравнений с последействием

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1(t+\vartheta),\ \ldots,\ x_n(t+\vartheta)) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n); \tag{29.1}$$

где $f_i(x_1(\vartheta),\ \ldots,\ x_n(\vartheta))$ — *линейные функционалы* [115, стр. 28—30] на функциях $\{x_i(\vartheta)\}$ $(-h\leqslant\vartheta\leqslant 0)$, т. е. при любом выборе функций $\{x_i''(\vartheta)\}$ и $\{x_i'(\vartheta)\}$ и при любых постоянных c_1, c_2 выполняется равенство

$$c_1 f_i(x_1'(\vartheta), \ldots, x_n'(\vartheta)) + c_2 f_i(x_1''(\vartheta), \ldots, x_n''(\vartheta)) =$$
$$= f_i(c_1 x_1'(\vartheta) + c_2 x_1''(\vartheta), \ldots, c_1 x_n'(\vartheta) + c_2 x_n''(\vartheta)) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{29.2}$$

Согласно замечанию в конце § 28 можно ограничиться рассмотрением лишь пространства C *непрерывных* функций $\{x_i(\vartheta)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, где норму вектор-функции $\{x_i(\vartheta)\}$ будем определять формулой

$$\|x(\vartheta)\|^{(h)} = \sup(|x_1(\vartheta)|, \ldots, |x_n(\vartheta)|, \ i = 1, \ldots, n, \ -h \leqslant \vartheta \leqslant 0), \tag{29.3}$$

а пространство таких вектор-функций с нормой (29.3) будем обозначать через C.

Будем предполагать линейный функционал f_i ограниченным, т. е. удовлетворяющим неравенству [1])

$$|f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta))| \leqslant L_i \|x(\vartheta)\|^{(h)} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{29.4}$$

причем величина

$$L_i = \sup\left(\frac{f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta))}{\|x(\vartheta)\|^{(h)}}\right)$$

называется, как известно, *нормой* функционала [100]. В пространстве непрерывных вектор-функций $\{x_i(\vartheta)\}$ с нормой (29.3) общий вид линейного функционала согласно теореме Рисса [100] будет таков:

$$f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} \int_{-h}^{0} x_j(\vartheta)\, d\eta_{ij}(\vartheta), \tag{29.5}$$

где интеграл справа понимается в смысле Стилтьеса [100]. Если, в частности, мера Стилтьеса выбрана по условию $d\eta_{ij} = 0$ при $\vartheta \neq h_{ij}$, $d\eta_{ij} = a_{ij}$ при $\vartheta = h_{ij}$, то равенство (29.5) запишется следующим образом:

$$f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t - h_{ij}),$$

и система уравнений (29.1) сведется в этом случае к системе линейных уравнений с постоянными запаздываниями h_{ij}:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j(t - h_{ij}) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{29.6}$$

---

[1]) Для дальнейшего удобно требование **ограниченности** не включать в определение **линейности** функционала.

Линейные уравнения с последействием подробно изучены в книге А. Д. Мышкиса [83]. Рассмотрим здесь траектории системы (29.1) с точки зрения теории полугрупп линейных преобразований.

Рассмотрим траекторию $x(x_0(\vartheta_0), t)$ системы (29.1), которую будем обозначать символом $x(x_0(\cdot), t, \cdot)$, введенным в конце предыдущего параграфа. Можно (при фиксированном $t \geqslant 0$) рассматривать элемент $x(\cdot) = x(x_0(\cdot), t, \cdot)$ как образ элемента $x_0(\cdot) \in C$ при некотором отображении $x(\cdot) = T(t)\,x_0(\cdot)$, причем это отображение является линейным, т. е.

$$T(t)\,(x'(\cdot)\,c_1 + x''(\cdot)\,c_2) = c_1 T(t)\,x'(\cdot) + c_2 T(t)\,x''(\cdot). \qquad (29.7)$$

Последнее утверждение следует из линейного характера системы (29.1). В самом деле, по определению преобразования $T(t)$ вследствие линейности функционалов f_i имеем:

$$T(t)\,(x'(\cdot)\,c_1 + x''(\cdot)\,c_2) = x([c_1x'(\cdot) + c_2x''(\cdot)], t, \cdot) =$$
$$= c_1 x(x'(\cdot), t, \cdot) + c_2 x(x''(\cdot), t, \cdot) = c_1 T(t)\,x'(\cdot) + c_2 T(t)\,x''(\cdot),$$

что проверяется просто подстановкой этого выражения в уравнения (29.1).

Кроме того, согласно равенству (27.19) имеем:

$$T(t+\tau)\,x_0(\cdot) = x(x_0(\cdot), t+\tau) =$$
$$= x(x(x_0(\cdot), t, \cdot), \tau, \cdot) = T(\tau)\,T(t)\,x_0(\cdot),$$

откуда

$$T(t+\tau)\,x_0(\cdot) = T(\tau)\,T(t)\,x_0(\cdot) \quad \text{при} \quad t > 0, \ \tau > 0. \qquad (29.8)$$

Итак, преобразование отрезков $x_0(\vartheta_0) \equiv x_0(\cdot)$ в отрезки $x(x_0(\vartheta_0), t + \vartheta) \equiv x(x_0(\cdot), t, \cdot)$ вдоль траекторий системы (29.1) при каждом фиксированном значении $t \geqslant 0$ образует линейное преобразование $x(\cdot) = T(t)\,x_0(\cdot)$ пространства C в себя, причем зависимость этого преобразования от t удовлетворяет свойству (29.8), которое, следуя общепринятой терминологии, будем называть *полугрупповым свойством*.

Отметим некоторые свойства преобразования $T(t)\,x(\cdot)$.

1) Выполняется неравенство

$$\|x(\cdot)\|^{(h)} = \|T(t)\,x_0(\cdot)\|^{(h)} \leqslant \|x(\cdot)\|^{(h)} e^{Lt} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \qquad (29.9)$$

которое следует из определения операции $T(t)$ и из неравенства (27.12).

2) Выполняется условие

$$\lim T(t) = J \quad \text{при} \quad t \to +0;$$

в сильной топологии [115], т. е. при любом фиксированном $x_0(\cdot)$, имеем:

$$\lim_{t\to+0}\|T(t)\,x_0(\cdot)-x_0(\cdot)\|^{(h)}=0. \tag{29.10}$$

Здесь символом J обозначен тождественный оператор

$$Jx(\cdot)=x(\cdot).$$

В самом деле, по определению преобразования $T(t)$ и нормы (29.3) имеем:

$$\|T(t)\,x_0(\cdot)-x_0(\cdot)\|^{(h)}=\sup(|x_i(x_0(\vartheta_0),\ t,\ \vartheta)-x_{i0}(\vartheta)|) \tag{29.11}$$
$$(i=1,\ \ldots,\ n,\quad -h\leqslant\vartheta\leqslant 0).$$

Зададим число $\varepsilon>0$. Непрерывная функция $x_i(x_0(\vartheta_0),\ t+\vartheta)$ равномерно непрерывна на конечном отрезке времени $-h\leqslant\vartheta\leqslant\gamma$ $(\gamma>0)$, и следовательно, по данному $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta>0$ такое, что

$$|x_i(x_0(\vartheta_0),\ t+\vartheta_1)-x_i(x_0(\vartheta_0),\ t+\vartheta_2)|<\varepsilon$$
$$\text{при } |\vartheta_1-\vartheta_2|<\delta. \tag{29.12}$$

Неравенство (29.12) означает, что

$$|x_i(x_0(\vartheta_0),\ t,\ \vartheta)-x_{i0}(\vartheta)|<\varepsilon,$$

если только $t<\delta$, а это в силу (29.1) и доказывает справедливость условия (29.10).

Введем теперь оператор $Ax_0(\cdot)$, который определяется предельным соотношением

$$Ax_0(\cdot)=\lim_{\xi\to+0}\left[\frac{1}{\xi}(T(t+\xi)\,x(\cdot)-T(t)\,x(\cdot))\right]. \tag{29.13}$$

Это определение страдает одним формальным недостатком: мы не можем утверждать, что в результате предельного перехода справа действительно получится некоторый элемент пространства C, т. е. мы не можем уже утверждать, что оператор A, который, следуя общепринятой терминологии, будем называть *бесконечно малым производящим оператором*, определен на всех $x(\cdot)$ из C и дает отображение $x_0(\cdot)$ из C в $x(\cdot)$ из C. Кроме того, оператор A не является уже ограниченным в C. Все эти неудобства не помешают, однако, использовать в дальнейшем оператор A. Прежде всего найдем явное выражение оператора A через функционалы f_i, стоящие в правой части системы (29.1).

По определению операторов A и $T(t)$ можно записать:

$$Ax_0(\cdot)=\lim_{\xi\to+0}\left(\frac{1}{\xi}\,[x(x_0(\cdot),\ \xi,\ \cdot)-x_0(\cdot)]\right).$$

Иначе говоря, оператор $Ax_0(\cdot)$, примененный к функции

$$x_0(\cdot) \equiv \{x_{i0}(\vartheta)\} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

превращает эту функцию в каждой точке ϑ в ее правую производную (если эта производная существует). Итак, во всяком случае на дифференцируемых функциях $x_0(\vartheta)$ оператор A определен и сводится к правой производной. Но правая производная решения $x(x_0(\vartheta), t)$ при $t = 0$ равна в силу системы уравнений (29.1) величине f_i, поэтому на дифференцируемых функциях $\{x_i(\vartheta)\}$ оператор A определен (хотя среди его значений могут оказаться и разрывные функции), и в явном виде этот оператор можно расписать следующим образом.

Применение оператора A к дифференцируемой вектор-функции $\{x_i(\vartheta)\}$ дает (разрывную) вектор-функцию $\{y_i(\vartheta)\}$, равную

$$\left.\begin{aligned} &y_i(\vartheta) = \frac{dx_i(\vartheta)}{d\vartheta} \quad \text{при} \quad -h \leqslant \vartheta < 0, \\ &y_i(0) = f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)), \\ &y(\cdot) = Ax(\cdot). \end{aligned}\right\} \tag{29.14}$$

В соответствии с замечанием на стр. 158 мы можем ограничиться рассмотрением лишь дифференцируемых начальных кривых $x_0(\vartheta)$ и, следовательно, можем заменить уравнение (29.1) эквивалентным ему «обыкновенным дифференциальным уравнением»

$$\frac{dx(t, \cdot)}{dt} = Ax(t, \cdot),$$

определенным в пространстве дифференцируемых функций $x(\vartheta)$. Задачи устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений с операторной правой частью рассматривались М. Г. Крейном [58]. Здесь, однако, результаты М. Г. Крейна непосредственно неприменимы, так как в работе [58] оператор A предполагался ограниченным. Однако установленные выше свойства оператора $T(t)$ позволят нам здесь обойти затруднения, связанные с неограниченностью оператора A. При этом будем опираться на результаты теории полугрупп линейных преобразований, приведенные в книге Э. Хилла [115]. Докажем критерий асимптотической устойчивости для линейной системы (29.1).

Теорема 29.1. Если спектр λ_σ оператора A (29.14) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\lambda_\sigma \leqslant -\gamma \quad (\gamma = \text{const}, \ \gamma > 0), \tag{29.15}$$

то решения $x(x_0(\cdot), t, \cdot)$ системы уравнений (29.1) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0(\cdot), t, \cdot)\| \leqslant Be^{-\alpha t}\|x_0(\cdot)\| \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{29.16}$$

где B, α — положительные постоянные, причем можно считать $\alpha = q\gamma$, где q — любое наперед заданное число $0 < q < 1$ [1]).

Примечание. Напомним, что *спектром оператора A* называется множество всех тех комплексных чисел, при которых оператор $\lambda J - A$ не имеет единственного ограниченного обратного преобразования в пространстве C [115]. Определим спектр преобразования A, исходя из явной записи оператора A (29.14). Запишем в явном виде оператор $\lambda J - A$:

$$\left.\begin{aligned} &y(\cdot) = (\lambda J - A)\,x(\cdot),\\ &y_i(\vartheta) = -\frac{dx_i}{d\vartheta} + \lambda x_i(\vartheta) \quad \text{при} \quad \vartheta \in [-h, 0),\\ &y_i(0) = \lambda x_i(0) - f_i(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)). \end{aligned}\right\} \tag{29.17}$$

По определению спектра $\{\lambda_\sigma\}$ в него входят те значения λ, при которых система равенств (29.17) не может быть разрешена единственным образом относительно функции $\{x_i(\vartheta)\}$ при заданной непрерывной функции $\{y_i(\vartheta)\}$. Первое равенство (29.17) может быть разрешено лишь в форме

$$x_i(\vartheta) = x_i^* e^{\lambda\vartheta} - \int_0^\vartheta e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_i(\tau)\,d\tau \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{29.18}$$

Подставляя это равенство во второе условие (29.17), получим уравнение

$$y_i(0) = \lambda x_i^* - f_i\left(x_1^* e^{\lambda\vartheta} - \int_0^\vartheta e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_1(\tau)\,d\tau, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, x_n^* e^{\lambda\vartheta} - \int_0^\vartheta e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_n(\tau)\,d\tau\right) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

или, учитывая линейный характер f_i и перенося в левую сторону члены с x_j^* и в правую сторону — члены с $y_i(0)$, получим систему линейных уравнений для величин чисел x_j^*:

$$\sum_{j=1}^n f_i(0, \ldots, \underset{j}{e^{\lambda\vartheta}}, \ldots, 0)\,x_j^* - \lambda x_i^* =$$
$$= + f_i\left(\int_0^\vartheta e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_1(\tau)\,d\tau, \ldots, \int_0^\vartheta e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_n(\tau)\,d\tau\right) - y_i(0). \tag{29.19}$$

---

[1]) В этом параграфе символ $\|x(\cdot)\|$ везде означает норму в пространстве C, и поэтому в знаке нормы $\|x\|^{(h)}$ будем опускать индекс (h).

Система (29.19) разрешима относительно величин x_j^* единственным образом в том и только в том случае, когда определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & \ldots & f_{n1} \\ f_{21} & \ldots & f_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \neq 0,$$

где

$$f_{ij}=f_i[0, \ldots, \underset{j}{e^{\lambda\theta}}, \ldots, 0]. \tag{29.20}$$

Таким образом, спектр λ_σ оператора A определяется корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & \ldots & f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & \ldots & f_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{29.21}$$

Если функционал f_i записать в явном виде (29.4), то уравнение (29.21) примет вид

$$\begin{vmatrix} \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta_{11}(\vartheta)-\lambda & \ldots & \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta_{1n}(\vartheta) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta_{n1}(\vartheta) & \ldots & \int\limits_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}\, d\eta_{nn}(\vartheta)-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{29.22}$$

и, наконец, в частном случае системы (29.5) с запаздываниями уравнение (29.21) принимает вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}e^{-\lambda h_{11}}-\lambda & \ldots & a_{1n}e^{-\lambda h_{1n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}e^{-\lambda h_{n1}} & \ldots & a_{nn}e^{-\lambda h_{nn}}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{29.23}$$

Критерий асимптотической устойчивости для систем с запаздыванием (29.5) был обоснован в работах Р. Беллмана [131, 132] и Е. Райта [140, 141]. Общий подход, описанный выше, позволяет, как мы видели, прийти к этому критерию весьма естественным путем, так как и в случае обыкновенных уравнений $\frac{dx}{dt}=Ax$ решение $x=0$ асимптотически устойчиво, если спектр λ_σ оператора A удовлетворяет неравенству (29.15).

Рассмотрение траекторий систем с последействием с точки зрения теории полугрупп обладает также и тем преимуществом, что все рассуждения сохраняют свою силу и для систем более общего вида, чем уравнения (29.1), а именно, можно рассмотреть уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X[x(t+\vartheta)], \tag{29.24}$$

где x — элемент некоторого банахова пространства B, а $X[x(\vartheta)]$ — линейный (ограниченный) функционал (со значением в B) в пространстве непрерывных функций $x(\vartheta)$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, с нормой $\|x(\vartheta)\|^h = \sup \|x(\vartheta)\|$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$. И здесь уравнению (29.24) можно сопоставить эквивалентное «обыкновенное дифференциальное уравнение»

$$\frac{dx(t, \cdot)}{dt} = Ax(t, \cdot), \tag{29.25}$$

где линейный неограниченный оператор A определяется соотношениями

$$y(\cdot) = Ax(\cdot),$$

или в подробной записи

$$\left.\begin{aligned} &y(\vartheta) = \frac{dx(\vartheta)}{d\vartheta} \quad \text{при} \quad -h < \vartheta < 0, \\ &y(0) = X[x(\vartheta)]. \end{aligned}\right\} \tag{29.26}$$

Теорема 29.1 в случае уравнения (29.24) сохраняет свою силу и читается следующим образом.

Если спектр λ_σ оператора A (29.26) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\lambda_\sigma \leqslant -\gamma \quad (\gamma > 0), \tag{29.27}$$

то решения $x(x_0(\cdot), t, \cdot)$ уравнения (29.24) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0(\cdot), t, \cdot)\| \leqslant \|x_0(\cdot)\| Be^{-\alpha t}, \tag{29.28}$$

где B, α — положительные постоянные, причем можно считать $\alpha = q\gamma$, $q \in (0, 1)$.

Доказательства этого утверждения мы здесь приводить не будем, так как оно проводится совершенно аналогично приводимому ниже доказательству теоремы 29.1. Действительно, теоремы из функционального анализа, на которые мы будем ссылаться при доказательстве теоремы 29.1, сохраняют свою силу и в общем случае банахова пространства B (именно в такой общей форме эти теоремы сформулированы и доказаны в книге [115], на которую мы будем ссылаться).

Заметим еще, что аналогично тому, как это было сделано выше для оператора A (29.14), можно убедиться, что спектр λ_σ оператора A (29.26) содержится во множестве тех комплексных чисел λ, при которых линейный оператор

$$\Delta(\lambda)x = X[e^{\lambda\vartheta}x] - \lambda Jx \quad \text{при} \quad x \in B$$

не имеет ограниченного обратного преобразования.

Доказательство теоремы 29.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz_i}{dt} = \varphi_i(z_1(t+\vartheta), \ldots, z_n(t+\vartheta)) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{29.29}$$

где

$$\varphi_i(z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)) = f_i(e^{-\gamma\vartheta}z_1(\vartheta), \ldots, e^{-\gamma\vartheta}z_n(\vartheta)) + \gamma z_i(0). \tag{29.30}$$

Очевидно, решения $x(x_0(\cdot),\ t)$ и $z(z_0(\cdot),\ t)$ уравнений (29.1) и (29.28) связаны соотношением

$$x(x_0(\cdot),\ t) = z(z_0(\cdot),\ t)\,e^{-\gamma t} \tag{29.31}$$

при условии, что начальные кривые $x_0(\cdot)$ и $z_0(\cdot)$ связаны соотношением

$$x_0(\vartheta) = z_0(\vartheta)\,e^{-\gamma\vartheta} \quad \text{при} \quad -h \leqslant \vartheta \leqslant 0. \tag{29.32}$$

Рассмотрим оператор

$$\Delta_0(\lambda)\,z,$$

определенный на векторе $z = \{z_1,\ \ldots,\ z_n\}$ следующим образом:

$$\{\Delta_0(\lambda)\,z\}_i = \sum_{j=1}^{n} f_i\left(0,\ \ldots,\ e_j^{(\lambda-\gamma)\vartheta},\ \ldots,\ 0\right) z_j - (\lambda - \gamma)\,z_j. \tag{29.33}$$

По условиям теоремы множество значений λ, при которых оператор, стоящий в левой части равенства (29.19), не имеет ограниченного обратного оператора $\Delta^{-1}(\lambda)$, удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\gamma$, и поэтому множество тех значений λ, при которых оператор (29.33) не имеет ограниченного обратного преобразования $\Delta_0^{-1}(\lambda)$, удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0.$$

Обозначим через A_0 оператор, определенный соотношением

$$A_0 x(\cdot) = y(\cdot) = \begin{cases} y_i(\vartheta) = \dfrac{dx_i(\vartheta)}{dt} & \text{при} \quad -h \leqslant \vartheta < 0, \\ y_i(0) = \varphi_i(x_1(\vartheta),\ \ldots,\ x_n(\vartheta)). \end{cases} \tag{29.34}$$

Оператор A_0 является бесконечно малым производящим оператором для полугруппового оператора $T_0(t)\,z_0(\cdot)$, определяющего траектории системы уравнений (29.29), т. е.

$$z(z_0(\cdot),\ t,\ \cdot) = T_0(t)\,z_0(\cdot)$$

и

$$\frac{dz(z_0(\cdot),\ t,\ \cdot)}{dt} = A_0 z(z_0(\cdot),\ t,\ \cdot). \tag{29.35}$$

Вследствие равенства (29.29) и по условиям (29.4) линейные функционалы φ_i удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_i(z_1(\vartheta),\ \ldots,\ z_n(\vartheta))| \leqslant L_0 \|z(\vartheta)\|^{(h)}, \tag{29.36}$$

где $L_0 \leqslant \max(L_i + \gamma)\,e^{\gamma h}$.

Следовательно, по лемме 27.1 решения системы уравнений (29.29) удовлетворяют неравенству

$$\|z(z_0(\cdot),\ t,\ \cdot)\| \leqslant \|z_0(\cdot)\|\,e^{L_0 t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{29.37}$$

и следовательно, полугрупповой оператор $T_0(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|T_0(t)\| \leqslant e^{L_0 t}, \tag{29.38}$$

где под нормой оператора $T_0(t)$ понимают, как известно,

$$\|T_0(t)\| = \sup(\|T_0(t) z_0(\cdot)\| / \|z_0(\cdot)\|).$$

Согласно теоремам 11.7.1 и 12.2.2, приведенным в книге Э. Хилла [115], оператор $T_0(t)$, удовлетворяющий условию (29.38), может быть определен по формуле

$$T_0(\xi) z(\cdot) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda\xi} R(\lambda, A_0) z(\cdot)\, d\lambda, \tag{29.39}$$

где $\gamma_1 > L_0$ и $z(\cdot)$ — дифференцируемая вектор-функция $\{z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)\}$, $R(\lambda, A_0)$ — резольвента оператора A_0 [1]).

Как известно, резольвентой оператора A_0 называется оператор $x(\cdot) = R(\lambda, A_0) y(\cdot)$, разрешающий уравнение

$$y(\cdot) = (\lambda J - A_0) x(\cdot).$$

Выше (стр. 163) была вычислена резольвента оператора A (см. формулу (29.18)). Резольвента оператора A_0 будет иметь тот же самый вид (29.18) с той разницей, что величину вектора x^* следует теперь вычислять не из системы уравнений (29.19), а из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_i \Big[0, \ldots, \underset{j}{e^{\lambda\vartheta}}, \ldots, 0\Big] x_j^* - \lambda x_j^* = y_i(0) -$$
$$- \varphi_i \left(\int_0^{\vartheta} e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_1(\tau)\, d\tau, \ldots, \int_0^{\vartheta} e^{\lambda(\vartheta-\tau)} y_n(\tau)\, d\tau \right). \tag{29.40}$$

Так как спектр оператора A_0 удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, то при $\lambda > 0$ определитель системы (29.40) отличен от нуля, и поэтому для каждого числа $\gamma_1 > 0$ можно указать число $P(\gamma_1)$ такое, что

$$\|R(\lambda, A_0)\| \leqslant P(\gamma_1) \quad \text{при} \quad \gamma_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant L_0 + 1. \tag{29.41}$$

---

[1]) Интеграл в правой части формулы (29.39) имеет, конечно, смысл абстрактного интеграла, так как значениями подынтегральной функции являются не числа, а вектор-функции. Мы не будем останавливаться здесь на определениях понятия такого интеграла, которые можно найти, например, в книге Э. Хилла [115, стр. 53]. Для нас здесь важна лишь возможность получения некоторых оценок этого интеграла, подобных общеизвестным оценкам обычных интегралов.

Кроме того, согласно результатам, приведенным в книге Э. Хилла [115], резольвента $R(\lambda, A_0)$ может быть записана в следующем виде:

$$R(\lambda, A_0)\, z(\cdot) = \frac{z(\cdot)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} A_0 z(\cdot) + \frac{1}{\lambda^2} R(\lambda, A_0)\, A_0^2 z(\cdot) \tag{29.42}$$

для всех тех непрерывных вектор-функций $z(\cdot) \equiv \{z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)\}$, на которых можно два раза применить оператор A_0 и в результате такого применения получить снова непрерывную вектор-функцию

$$y(\cdot) = A_0[A_0 z(\cdot)]. \tag{29.43}$$

Множество таких вектор-функций $z(\cdot)$ будем называть областью существования A_0^2 и обозначать $D[A_0^2]$.

Из выражений (29.41) и (29.42) заключаем, что на вектор-функциях $z_0(\cdot) \in D[A_0^2]$ полугрупповой оператор $T_0(\xi)$ можно вычислять по формуле (29.39) не только при $\gamma_1 > L_0$, но и при любом $\gamma_1 > 0$. Подставляя в формулу (29.39) разложение (29.42), можно, следовательно, записать:

$$T_0(\xi)\, z(\cdot) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda\xi}\frac{z(\cdot)}{\lambda}\, d\lambda + \int\limits_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda\xi}\frac{A_0 z(\cdot)}{\lambda^2}\, d\lambda + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\gamma_1 - i\omega}^{\gamma_1 + i\omega} e^{\lambda\xi}\frac{R(\lambda, A_0)\, A_0^2 z(\cdot)}{\lambda^2}\, d\lambda\right]. \tag{29.44}$$

Из формулы (29.44) вследствие неравенства (29.41) имеем оценку (мы здесь используем свойства абстрактного интеграла, подобные свойствам обычных интегралов (см. [115]):

$$\|T_0(\xi)\, z(\cdot)\| \leqslant \left(\|z(\cdot)\| + P_1\|A_0 z(\cdot)\| + P_2\|A_0^2 z(\cdot)\|\right) e^{(\gamma_1+\beta)\xi} \tag{29.45}$$

(β — достаточно малое положительное число) при $\xi > 0$ для любой вектор-функции $z(\cdot) = \{z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)\} \in D[A_0^2]$.

Рассмотрим решения $z(z_0(\cdot), t, \cdot)$ системы уравнений (29.29), где $z_0(\cdot)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. Покажем, что при $t = 3h$ функция $z(\cdot) = z(z_0(\cdot), t, \cdot) \equiv \{z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)\}$ лежит в области $D[A_0^2]$, причем существуют положительные постоянные N_1 и N_2, удовлетворяющие неравенствам:

$$\|A_0 z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\| \leqslant N_1\|z_0\|, \tag{29.46}$$

$$\|A_0^2 z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\| \leqslant N_2\|z_0\|. \tag{29.47}$$

В самом деле, решение $z(z_0(\cdot), t)$ системы (29.29) при $t > 0$ является непрерывной функцией времени, следовательно, из уравнений (29.29) заключаем, что при $t > h$ производные $\frac{dz_i}{dt}$ также являются непрерывными функциями времени. Известно [100], что для линейного функционала $\varphi_i(z(t+\vartheta))$ справедливо равенство

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \varphi_i\left(\frac{dz(t+\vartheta)}{dt}\right). \tag{29.48}$$

Поэтому при $t > 2h$ функции $\frac{dz_i}{dt} = \varphi_i(z(t+\vartheta))$ являются непрерывно дифференцируемыми, т. е. при $t > 2h$ функции $z(z_0(\cdot), t)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями времени t, причем

$$\frac{dz_i}{dt} = \varphi_i(z(t+\vartheta)), \tag{29.49}$$

$$\frac{d^2z_i}{dt^2} = \varphi_i\left(\frac{dz(t+\vartheta)}{dt}\right). \tag{29.50}$$

Следовательно, функции $z(\vartheta) = z(z_0(\cdot), 3h+\vartheta)$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Вектор-функции $z(\vartheta)$ дважды непрерывно дифференцируемы,

2) $$\left(\frac{dz_i(\vartheta)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \varphi_i(z_1(\vartheta), \ldots, z_n(\vartheta)),$$

3) $$\left(\frac{d^2z_i(\vartheta)}{d\vartheta^2}\right)_{\vartheta=0} = \varphi_i\left(\frac{dz_i(\vartheta)}{d\vartheta}, \ldots, \frac{dz_n(\vartheta)}{d\vartheta}\right).$$

Но эти три условия и означают не что иное, как то, что к функциям $\{z_i(z_0(\cdot), 3h+\vartheta)\}$ дважды применим оператор A_0. Остается доказать существование чисел N_1 и N_2, удовлетворяющих неравенствам (29.46) и (29.47). Вследствие неравенства (27.12) имеем:

$$\|z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\| \leqslant \|z_0(\cdot)\| \exp(L_0 3h),$$

а вследствие неравенства (29.36) из (29.50) заключаем теперь о справедливости неравенств

$$\left\|\frac{dz(z_0(\cdot), 3h+\vartheta)}{d\vartheta}\right\| \leqslant \|z_0(\cdot)\| \exp(3L_0 h) = N_1\|z_0(\cdot)\|,$$

что и доказывает первое неравенство (29.46). Точно так же из (29.46) и из (29.49) имеем:

$$\left\|\frac{d^2z(z_0(\cdot), 3h+\vartheta)}{d\vartheta^2}\right\| \leqslant \|z_0(\cdot)\| N_1 L_0 = N_2\|z_0(\cdot)\|,$$

что и доказывает неравенство (29.47). Итак, наше утверждение о том, что функции $z(z_0(\cdot), 3h, \cdot) \in D[A_0^2]$ и удовлетворяют условиям (29.46) и (29.47), полностью доказано. Но теперь из оценок

(29.45), (29.46), (29.47) получаем оценку

$$\|z(z_0(\cdot), t, \cdot)\| = \|T_0(t) z_0(\cdot)\| \leqslant (\|z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\| + \\ + P_1N_1\|z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\| + P_2N_2\|z(z_0(\cdot), 3h, \cdot)\|) \times \\ \times \exp[(\gamma_1 + \beta)(t - 3h)]$$

при $t > 3h$ или, окончательно,

$$\|z(z_0(\cdot), t, \cdot)\| \leqslant Qe^{(\gamma_1+\beta)t}\|z_0(\cdot)\| \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

где $Q = \text{const}$, $z_0(\cdot)$ — любая кусочно-непрерывная начальная кривая. Из соотношений (29.31), (29.32) между решениями систем (29.1) и (29.39) заключаем теперь, что решения системы (29.1) удовлетворяют оценке

$$\|x(x_0(\cdot), t, \cdot)\| \leqslant Qe^{\gamma h}\|x_0(\cdot)\| e^{(\gamma_1+\beta-\gamma)t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0,$$

и так как числа $\gamma_1 > 0$ и $\beta > 0$ можно выбирать сколь угодно малыми, то оценка (29.51) совпадает с оценкой (29.16). Теорема доказана.

§ 30. Основные определения и теоремы второго метода Ляпунова для уравнений с последействием

1. Согласно общей установке, принятой в этой работе, в качестве элементов траектории $x(x_0(\cdot), t_0, t)$ системы уравнений с последействием

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \quad (30.1)$$

будем рассматривать отрезки этих траекторий $x(x_0(\cdot), t_0, t+\vartheta)$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$. Теоремы второго метода Ляпунова можно перенести непосредственно без всяких изменений на уравнения с последействием. Такое перенесение этих теорем на уравнения с запаздываниями времени t было выполнено в статье Л. Э. Эльсгольца [126]. Однако, как это и указывает Л. Э. Эльсгольц [126], такое формальное перенесение теорем Ляпунова на уравнения с запаздываниями имеет ограниченное значение, так как в большинстве случаев теоремы Ляпунова оказываются здесь необратимыми, и следовательно, метод теряет свойство универсальности, которым он обладает в случае обыкновенных уравнений.

Приведем здесь один из возможных способов обобщения метода функций Ляпунова для уравнений с последействием, основанный на той точке зрения, что в качестве элементов траекторий принимают вектор-функции $\{x_i(x_0(\cdot), t_0, t+\vartheta)\}$ при $-h \leqslant \vartheta \leqslant 0$. При таком подходе оказывается естественным заменить функцию Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенную на векторе $\{x_1, \ldots, x_n\}$ функционалом $V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$, определенным на вектор-функции

$\{x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)\}$. Основные теоремы и определения второго метода Ляпунова весьма естественно переносятся тогда на функционалы V, причем теоремы оказываются обратимыми. В соответствии с замечаниями, сделанными выше в § 28 (стр. 156—157), ограничимся лишь рассмотрением случаев устойчивости. Будем предполагать везде в этом параграфе, что функционалы X_i в правых частях уравнений (30.1) удовлетворяют условиям, сформулированным в § 27, стр. 152.

Введем ряд определений.

Определение 30.1. Функционал $V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$, определенный на вектор-функции $\{x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)\}$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ при

$$\|x(\vartheta)\| < H, \quad t \geqslant 0, \tag{30.2}$$

будем называть определенно-положительным в области (30.2), если можно указать непрерывную функцию $w(r)$, удовлетворяющую условиям

$$V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t) \geqslant w\left(\|x(\vartheta)\|^{(h)}\right), \tag{30.3}$$
$$w(r) > 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0.$$

Будем говорить, что функционал $V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$ допускает в области (30.2) бесконечно малый высший предел, если можно указать непрерывную функцию $W(r)$, удовлетворяющую условиям

$$V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t) \leqslant W\left(\|x(\vartheta)\|^{(h)}\right), \quad W(0) = 0. \tag{30.4}$$

Подставим в функционал $V(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t) = V(x(\vartheta), t)$ вектор-функцию $\{x_i(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta)\}$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$, определяющую элемент траектории, соответствующий моменту времени $t \geqslant t_0$. Тогда получим функцию времени $v(t)$:

$$v(t) = V(x_1(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta), \ldots, x_n(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta), t). \tag{30.5}$$

Для дальнейшего будет представлять интерес величина правого верхнего производного числа для функции $v(t)$, т. е. величина

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to +0} \sup ([V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t + {}$$
$$+ \Delta t + \vartheta), t + \Delta t) - V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta), t)]/\Delta t).$$

Эту величину будем обозначать через $\left(\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup \dfrac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(30.1)}$, где индекс (30.1) обозначает номер системы, вдоль траекторий которой вычисляется предел $\Delta V/\Delta t$. Величину этого предела будем называть определенно-отрицательной в области (30.2), если можно указать непрерывную функцию $w_1(r)$, удовлетворяющую условиям

$$\left.\begin{aligned} &\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(30.1)} \leqslant -w_1(\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta)\|^{(h)}), \\ &w_1(r) > 0 \text{ при } r \neq 0 \text{ и при } \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta)\|^{(h)} < H, \ t \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{30.6}$$

Теперь можно сформулировать теорему, соответствующую теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Теорема 30.1. Если дифференциальные уравнения с последействием (30.1) таковы, что возможно указать функционал $V(x(\vartheta), t)$, определенно-положительный[1]) в области (30.2), допускающий бесконечно малый высший предел, такой, что величина

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(30.1)} \tag{30.7}$$

является определенно-отрицательной в силу уравнений (30.1) (в области (30.2)), то решение $x = 0$ уравнений (30.1) асимптотически устойчиво. Если при этом выполняется условие

$$\inf\left(V \text{ при } \|x(\vartheta)\|^{(h)} = H_1\right) > \sup\left(V \text{ при } \|x(\vartheta)\|^{(h)} = H_0\right) \tag{30.8}$$
$$(H_0 < H_1 < H),$$

то область начальных кривых

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} < H_0 \tag{30.9}$$

лежит в области притяжения точки $x = 0$.

Примечание. В формулировке теоремы 30.1 роль производной dv/dt в силу уравнений возмущенного движения играет величина $\lim\sup(\Delta V/\Delta t)$ при $\Delta t \to +0$. То, что предел рассматривается здесь лишь при $\Delta t \to +0$, объясняется, в частности, тем, что траектории системы с последействием не всегда продолжимы в сторону убывания времени t, т. е. не на каждой кривой $\{x_i(\vartheta)\}$ можно вычислять ΔV при $\Delta t < 0$. Тот факт, что и справа мы ограничиваемся лишь верхним пределом, объясняется следующим. С одной стороны, для суждения об устойчивости достаточно ограничиться лишь рассмотрением верхнего правого предела $\Delta V/\Delta t$, как это будет следовать из доказательства теоремы. С другой стороны, для производной dV/dt в силу уравнений с последействием нет такой простой формулы, как для производной dv/dt (1.5) в случае обыкновенных уравнений. Поэтому проверка существования производной dV/dt создавала бы дополнительные трудности при исследовании конкретных уравнений и сужала бы класс тех уравнений, которые можно исследовать, опираясь на теорему 30.1.

Доказательство теоремы. Пусть дано число $\varepsilon > 0$. В качестве числа $\delta > 0$ выберем число, удовлетворяющее условию $w(\varepsilon) > W(\delta)$, тогда вследствие неравенств (30.3) и (30.4) будет выполняться неравенство

$$\sup\left(V \text{ при } \|x(\vartheta)\|^{(h)} = \delta\right) < \inf\left(V \text{ при } \|x(\vartheta)\|^{(h)} = \varepsilon\right). \tag{30.10}$$

Пусть $\|x_0(\vartheta)\|^{(h)} < \delta$. Вследствие определенной отрицательности величины (30.7) функция $v(t)$ (30.5) является монотонно убывающей функцией времени t, т. е. $v(t) < v(t_0)$. Следовательно, траектория

[1]) Как и в методе функций Ляпунова, мы здесь предполагаем, что функционал V зависит непрерывно от $x(\vartheta)$ и t.

$x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ при всех $t \geqslant t_0$ остается в области $\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\| < \varepsilon$, так как иначе нарушилось бы неравенство (30.10). Итак, устойчивость решения $x=0$ в смысле определения 28.1 а) доказана.

Пусть теперь $x_0(\vartheta_0)$ — начальная вектор-функция из области (30.9). Рассмотрим снова монотонно убывающую функцию $v(t)$ (30.5). Так как $v(t) < v(t_0)$ при $t > t_0$, то траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ остается в области $\|x\| < H_1$, иначе нарушилось бы неравенство (30.8). Зададим теперь $\varepsilon > 0$ и по нему подберем число $\delta > 0$ так, как это сделано в начале настоящего доказательства. В области $\delta \leqslant \|x\| \leqslant H_1$ выполняется неравенство

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(30.1)} < -\alpha \quad (\alpha > 0 - \mathrm{const}), \qquad (30.11)$$

поэтому функция $v(t)$ (30.5) должна удовлетворять неравенству

$$v(t) - v(t_0) \leqslant -\alpha(t - t_0) \qquad (30.12)$$

при всех тех значениях $t \geqslant t_0$, при которых отрезок траектории $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ остается в области

$$\delta \leqslant \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\|^{(h)} \leqslant H_1. \qquad (30.13)$$

Действительно, если предположить, что неравенство (30.12) нарушается (впервые при $t > t_1 \geqslant t_0$), то выполнялось бы неравенство

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}\right)_{\text{при } t=t_1} > -\alpha,$$

что противоречит неравенству (30.11). Но из неравенства (30.12) следует, что траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ не может оставаться в области (30.13) при всех $t \geqslant t_0$ из отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{v(t_0)}{\alpha}$. Так как по (30.3) и (30.4) $\frac{v(t_0)}{\alpha} \leqslant \frac{W(H_1)}{\alpha}$, то заключаем, что при некотором $t^* \in [t_0, t_0 + W(H_1)/\alpha]$ выполняется неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t^*+\vartheta)\|^{(h)} < \delta,$$

и следовательно, при всех $t > t^*$ (а тем более при $t > t_0 + W(H_1)/\alpha$) по доказанному выше выполняется неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\|^{(h)} < \varepsilon,$$

что вследствие произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и доказывает теорему.

Примечание. Так как оценка чисел δ по ε и числа $T = W(H_1)/\alpha$ и α не зависит от момента $t_0 \geqslant 0$ и от выбора начальной кривой $x_0(\vartheta_0)$ из области (30.9), то заключаем, что при условиях теоремы 30.1 имеет место не просто асимптотическая устойчивость решения $x=0$, но асимптотическая устойчивость, равномерная по координатам $x_0(\vartheta_0)$ из области (30.9) и времени $t_0 \geqslant 0$ в смысле следующего определения.

Определение 30.2 (B'). Решение $x = 0$ системы уравнений (30.1) с последействием будем называть асимптотически устойчивым равномерно по времени $t_0 \geqslant 0$ и по начальным кривым $x_0(\vartheta_0)$ из области (30.9), если наряду с выполнением условий определения 28.1 б) выполняются следующие условия: 1) число $\delta > 0$ из определения 28.1 а) можно выбрать не зависящим от $t_0 \geqslant 0$, 2) для любого числа $\eta > 0$ можно указать число $T(\eta)$ такое, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t+\vartheta)\|^{(h)} < \eta \tag{30.14}$$

при всех $t \geqslant t_0 + T(\eta)$, какова бы ни была кусочно-непрерывная начальная кривая $x_0(\vartheta_0)$ из области (30.9).

Это определение соответствует определению 5.1 (стр. 32) в случае обыкновенных уравнений.

2. Рассмотрим вопрос об обращении теоремы 30.1. Из примечания к доказательству теоремы 30.1 следует, что вопрос об обращении этой теоремы можно ставить лишь в случае устойчивости, равномерной по $x_0(\vartheta_0)$ и t_0. Покажем, что в этом случае теорема 30.1 действительно обратима, т. е. в случае уравнений с последействием теорема 30.1 имеет столь же общий характер, как и теорема об асимптотической устойчивости [71, стр. 82] в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 30.2. Если решение $x = 0$ системы уравнений (30.1) асимптотически устойчиво относительно начальных данных $x_0(\vartheta_0)$ и t_0 из области (30.9) равномерно в смысле определения 30.2 (B'), то существует функционал $V(x(\vartheta),\ t)$, определенный на кривых $\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H_0$ при $t \geqslant 0$, определенно-положительный, допускающий бесконечно малый высший предел в этой области и такой, что существует правая производная $dV/dt = \lim(\Delta V/\Delta t)$ при $\Delta t \to +0$ вдоль траекторий системы (30.1). Производная dV/dt является определенно-отрицательным функционалом в некоторой области $\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H_0$, а функционал $V(x(\vartheta),\ t)$ удовлетворяет условиям Липшица по $x(\vartheta)$, т. е.

$$|V(x''(\vartheta),\ t) - V(x'(\vartheta),\ t)| \leqslant K_0\, \|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|^{(h)}. \tag{30.15}$$

Доказательство. Для доказательства этой теоремы применим конструкцию функции Ляпунова, аналогичную той, которая была применена Х. Л. Массера [136] для случая обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $\varphi(t)$ — монотонно убывающая непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t+\vartheta)\|^{(h)} \leqslant \varphi(t-t_0) \quad \text{при } t \geqslant t_0 \tag{30.16}$$

для любой начальной кривой $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} < H_0$, такая, что $\lim \varphi(t) = 0$

при $t \to \infty$. Существование такой функции $\varphi(\tau)$ следует из свойства равномерности асимптотической устойчивости в смысле определения 30.2 (B) (достаточно в качестве $\varphi(\tau)$ выбрать любую непрерывную, монотонно убывающую функцию, удовлетворяющую неравенству $\varphi(\tau) > \varepsilon$ при $\tau \in [T(\varepsilon), T(\varepsilon/2)]$).

В книге И. Г. Малкина [77] приведено подробное построение функции $\varphi(\tau)$, а также дано доказательство существования функции $G(\varphi)$, которая является монотонно возрастающей и непрерывно дифференцируемой функцией, причем

$$G(\varphi) > 0 \quad \text{при} \quad \varphi > 0, \tag{30.17}$$

$$\int_0^\infty G(\varphi(\tau))\, d\tau = N < \infty, \tag{30.18}$$

$$\int_0^\infty G'(\varphi(\tau))\, e^{L\tau}\, d\tau = N_1 < \infty, \tag{30.19}$$

$$G'[\varphi(\tau)]\, e^{L\tau} < N_2 \quad \text{при всех } \tau \geqslant 0. \tag{30.20}$$

Покажем, что функционал

$$V[x(\vartheta), t] = \int_t^\infty G\left(\|x(x(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)}\right) d\tau + \\ + \sup\left(G(\|x(x(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)} \text{ при } t \leqslant \tau < \infty\right) \tag{30.21}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

Так как интеграл (30.18) сходится, то из неравенства (30.16) можно сделать заключение о сходимости интеграла (30.21) при всех $\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H_0$, т. е. функционал V определен в области

$$\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H_0. \tag{30.22}$$

Вследствие положительности функции $G(\varphi)$ при $\varphi > 0$ первое слагаемое в правой части равенства положительно (при $\|x(\vartheta)\|^{(h)} \neq 0$), а второе не меньше, чем $G(\|x(\vartheta)\|^{(h)})$, т. е. функционал V удовлетворяет неравенству

$$V(x(\vartheta), t) \geqslant G\left(\|x(\vartheta)\|^{(h)}\right),$$

что и доказывает определенную положительность функционала $V(x(\vartheta), t)$.

Покажем, что функционал $V(x(\vartheta), t)$ допускает бесконечно малый высший предел. Прежде всего заметим, что по определению асимптотической устойчивости в области $\|x\| < H_0$ имеем

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)\|^{(h)} < H_1 \text{ при } t \geqslant t_0 \text{ для всех } \|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0,$$

поэтому

$$V(x(\vartheta), t) < \int_0^{\infty} G[\varphi(\tau)]\, d\tau + G(\varphi(0)) = N + G(\varphi(0)) = Q = \text{const}$$

при всех $\|x(\vartheta)\|^{(h)} \leqslant H_0$, т. е. в области (30.22) функционал $V(x(\vartheta), t)$ равномерно ограничен. Теперь для доказательства существования бесконечно малого высшего предела достаточно показать, что $V \to 0$ равномерно при $\|x(\vartheta)\|^{(h)} \to 0$. Однако для этого предварительно докажем, что функционал V удовлетворяет условиям Липшица (30.15). Имеем:

$$|V(x''(\vartheta), t) - V(x'(\vartheta), t)| = \Big| \int_t^{\infty} [G(\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)}) -$$

$$- G(\|x(x'(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)})]\, d\tau + [\sup(\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)}) -$$

$$- \sup(\|x(x'(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|)] \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^{\infty} G'_{\varphi}(\sup(\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)}, \|x(x'(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)})) \times$$

$$\times (\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta) - x(x'(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)})\, d\tau +$$

$$+ \sup |(G(\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|)^{(h)} - G(\|x(x''(\vartheta), t, \tau+\vartheta)\|^{(h)}))|.$$

Учитывая теперь неравенство (27.12) и применяя ко второму слагаемому теорему о среднем, можем получить неравенство

$$|V(x''(\vartheta), t) - V(x'(\vartheta), t)| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_t^{\infty} G'(\varphi(\tau - t))\, e^{L(\tau-t)} d\tau + \sup\left(G'_{\varphi}(\varphi(\tau-t))\, e^{L(\tau-t)} \text{ при } t < \tau \leqslant \infty\right) \right] \times$$

$$\times \|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|^{(h)} = (N_1 + N_2)\|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|^{(h)},$$

что и доказывает выполнение условия (30.15), а тем самым и существование бесконечно малого высшего предела, так как, полагая $x''(\vartheta) = x(\vartheta)$ и $x'(\vartheta) \equiv 0$, будем иметь:

$$V(x(\vartheta), t) \leqslant K \|x(\vartheta)\|^{(h)}.$$

Теперь проверим, что функционал $V(x(\vartheta), t)$ зависит непрерывно от $x(\vartheta)$ и t. Вследствие доказанного неравенства (30.15) достаточно лишь показать, что функционал $V(x(\vartheta), t)$ зависит непрерывно от t при фиксированной вектор-функции $x(\vartheta)$.

Мы покажем это, доказав предварительно, что функционал $V(x(\vartheta), t)$ имеет правую верхнюю и нижнюю равномерно ограниченные производные $\frac{dV}{dt}$ в силу системы уравнений (30.1). Имеем (при $t=t_0$):

$$\left(\lim_{\Delta t\to+0}\sup\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\text{при } t=t_0}=\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\infty}G\left(\|x(x(x_0(\vartheta),t_0,t),t,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\right)d\tau\right)_{t=t}+$$
$$+\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\sup\left(G\left(\|x(x_0(\vartheta),t_0+\Delta t,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\text{ при } t_0+\Delta t\leqslant\tau<\infty\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\sup\left(G\left(\|x(x_0(\vartheta),t_0,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\text{ при } t_0\leqslant\tau<\infty\right)\right).\quad(30.23)$$

Второе слагаемое в правой части последнего равенства неположительно, поэтому

$$\left(\lim_{\Delta t\to+0}\sup\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{t=t_0}\leqslant-G\left(\|x(\vartheta),t_0,t_0+\vartheta)\|^{(h)}\right)=-G\left(\|x(\vartheta)\|^{(h)}\right)\quad(30.24)$$

Мы воспользовались здесь также соотношением

$$x(x(x_0(\vartheta),t_0,t),t,\tau+\vartheta)=x(x_0(\vartheta),t_0,\tau+\vartheta)\text{ при } t\geqslant t_0,\ \tau\geqslant t,$$

благодаря которому дифференцирование первого слагаемого в правой части равенства (30.23) сводится просто к правой производной интеграла по переменному верхнему пределу t.

Из равенства (30.24) следует, что величина

$$\left(\lim_{\Delta t\to+0}\sup\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{t=t_0}$$

действительно является определенно-отрицательным функционалом. Вычислим теперь нижнюю правую производную $\lim\inf\frac{\Delta V}{\Delta t}$ при $\Delta t\to+0$. Имеем аналогично предыдущему (при $t=t_0$):

$$\left(\lim_{\Delta t\to+0}\inf\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{t=t_0}=-G\left(\|x_0(\vartheta)\|^{(h)}\right)+\lim\inf\left(\sup\left(G\left(\|x(x(x(\vartheta),\right.\right.\right.$$
$$t_0,t),t,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\big)\text{ при } t\leqslant\tau<\infty)-\sup\left(G\left(\|x(x_0(\vartheta),t_0,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\right)\right.$$
$$\text{при } t_0\leqslant\tau<\infty)\big)\geqslant-G\left(\|x_0(\vartheta)\|^{(h)}\right)-G'_{\varphi}\left(\|x_0(x(\vartheta),t_0,\tau+\vartheta)\|^{(h)}\right)\times$$
$$\times\sup(|X_i(x_0(\vartheta),t_0)|,\qquad i=1,\ldots,n)\geqslant-Q=\text{const}.$$

Таким образом, мы показали, что вдоль траектории $x(x(\vartheta),t_0,t)$ функционал $V(x(\vartheta),t)$ имеет равномерно ограниченную правую верхнюю и нижнюю производную в области $\|x(\vartheta)\|^h<H_0$. Вычислим разность (при $t>t_0$ на фиксированной кривой $x_0(\vartheta)$)

$$|V(x_0(\vartheta),t_0)-V(x_0(\vartheta),t)|\leqslant|V(x_0(\vartheta),t_0)-V(x(x_0(\vartheta),t_0,t),t)|+$$
$$+|V(x_0(\vartheta),t)-V(x(x_0(\vartheta),t_0,t),t)|\leqslant$$
$$\leqslant Q_1\Delta t+\sup(|X_i(x(\vartheta),t)|\text{ при }\|x(\vartheta)\|^{(h)}<H,\ i=1,\ldots,n)K\Delta t,$$

т. е.

$$|V(x_0(\vartheta),\ t_0)-V(x_0(\vartheta),\ t)|\leqslant Q_2\Delta t \qquad (Q_2=\mathrm{const}). \qquad (30.25)$$

Из неравенств (30.15) и (30.25) заключаем о непрерывной зависимости функционала $V(x(\vartheta),\ t)$ от $x(\vartheta)$ и t в том смысле, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ такое, что

$$|V(x_0(\vartheta),\ t_0)-V(x(\vartheta),\ t)|<\varepsilon,$$

если только

$$|t-t_0|<\delta,\quad \|x(\vartheta)-x_0(\vartheta)\|^{(h)}<\delta.$$

Итак, мы показали, что функционал V удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана.

3. Таким образом, как и в случае обыкновенных уравнений, необходимыми и достаточными условиями существования функционала V из теоремы 30.2 является равномерность асимптотической устойчивости по начальным данным $x_0(\vartheta)$ и начальному моменту времени $t_0\geqslant 0$. Если правые части уравнений (30.1) являются периодическими функциями времени t периода θ (или не зависят явно от времени t), то асимптотическая устойчивость решения $x=0$ будет всегда равномерной в этом смысле (определение 30.2 (B') стр. 174).

Покажем это. Пусть решение $x=0$ асимптотически устойчиво в силу уравнений (30.1), правые части которых суть периодические функции времени периода θ и начальные кривые

$$\|x_0(\vartheta)\|^{(h)}\leqslant H_0 \qquad (30.26)$$

лежат в области притяжения точки $x=0$. Покажем сначала, что для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta>0$ такое, что $\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\|<\varepsilon$ при всех $t\geqslant t_0$, если только $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}\leqslant\delta$. Вследствие периодичности X_i утверждение достаточно доказать для значений t_0 из интервала $[0,\ \theta)$. По определению устойчивости для данного $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta(\varepsilon,\ \theta)>0$ такое, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ \theta,\ t+\vartheta)\|^{(h)}<\varepsilon \quad \text{при всех } t\geqslant\theta,$$

если только

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}\leqslant\delta(\varepsilon,\ \theta).$$

С другой стороны, из неравенства (27.12) имеем:

$$\|x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ \theta+\vartheta)\|^{(h)}\leqslant\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}\exp L\theta$$

при всех $t_0\in[0,\ \theta)$.

Таким образом, для того чтобы убедиться в справедливости нашего утверждения, достаточно выбрать $\delta=\delta(\varepsilon,\ \theta)\exp(-L\theta)$.

Теперь перейдем к доказательству равномерности устойчивости в смысле определения 30.2 (B'). Предположим от противного, что существует последовательность начальных кривых $x_0^{(\nu)}(\vartheta)$ и начальных моментов времени $t_0^{(\nu)}\in[0,\ \theta)$ ($\nu=1,\ 2,\ \ldots$) таких, что каждая из траекторий $x\left(x_0^{(\nu)}(\vartheta_0),\ t_0^{(\nu)},\ t\right)$ имеет точки, удовлетворяющие неравенству

$$\left\| x\left(x_0^{(\nu)}(\vartheta_0), t_0^{(\nu)}, t_\nu + \vartheta\right)\right\|^{(h)} > \varepsilon,$$

причем $|t^{(\nu)} - t_\nu| \to \infty$ при $\nu \to \infty$ и

$$\left\| x_0^{(\nu)}(\vartheta_0)\right\|^{(h)} < H_0 \exp(-2L\theta). \tag{30.27}$$

Числа $t_0^{(\nu)}$ вследствие периодичности X_i можно предполагать лежащими в интервале $[0, \theta)$. Из последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций $x\left(x_0^{(\nu)}, t_0^{(\nu)}, 2\theta + \vartheta\right)$ (аргумента ϑ) можно выбрать равномерно сходящуюся последовательность.

Предположим, чтобы не менять нумерации, что таким свойством обладает первоначально выбранная последовательность, и пусть $x_0(\vartheta)$ — предельная функция для последовательности $x\left(x_0^{(\nu)}(\vartheta_0), t_0^{(\nu)}, 2\theta + \vartheta\right)$. Рассмотрим траекторию $x(x_0(\vartheta_0), 2\theta, t)$. Вследствие асимптотической устойчивости решения $x = 0$ относительно начальных кривых (30.26) и по выбору начальных кривых (30.27) можно утверждать, что кривая $x_0(\vartheta_0)$ лежит в области притяжения точки $x = 0$. Следовательно, по числу $\delta > 0$ можно указать число T такое, что

$$\| x(x_0(\vartheta_0), 2\theta, T + \vartheta)\|^{(h)} < \frac{\delta}{2},$$

и вследствие неравенства (27.12) можно указать число N такое, что

$$\left\| x\left(x_0^{(\nu)}(\vartheta_0), t_0^{(\nu)}, -t_0^{(\nu)} + 2\theta + T + \vartheta\right)\right\|^{(h)} < \delta$$

при всех $\nu > N$. Но в таком случае, по доказанному выше,

$$\left\| x\left(x_0^{(\nu)}(\vartheta_0), t_0^{(\nu)}, -t_0^{(\nu)} + 2\theta + t + \vartheta\right)\right\|^{(h)} < \varepsilon$$

при всех $t > T$, что противоречит выбору последовательности $x_0^{(\nu)}(\vartheta_0)$ и $t_0^{(\nu)}$. Противоречие и доказывает, что решение $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по начальным кривым (30.27).

Таким образом, в случае периодических X_i для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности решения $x = 0$ существовал функционал $V(x(\vartheta), t)$, удовлетворяющий условиям теоремы 30.1.

§ 31. Некоторые достаточные условия асимптотической устойчивости для уравнений с последействием

1. Доказанная в предыдущем параграфе теорема 30.1 дает достаточные (и при определенных ограничениях необходимые) условия асимптотической устойчивости для уравнений с последействием. Однако при решении конкретных задач редко удается построить функционал, удовлетворяющий всем условиям этой теоремы. В этом параграфе приведем некоторые обобщения теоремы 30.1, которые позволяют при определенных условиях ослабить требования к функционалу V.

Теорема 31.1. Если можно указать функционал $V(x(\vartheta), t)$, определенный на кривых $\{x_i(\vartheta)\}$ $(-h \leqslant \vartheta \leqslant 0,\ i=1, \ldots, n)$, допускающий бесконечно малый высший предел и удовлетворяющий условиям:

1. $$V(x(\vartheta), t) \geqslant f(\|x(\tau)\|_{(-h_1 \leqslant \tau \leqslant 0)}), \tag{31.1}$$

где $f(r)$ — функция непрерывная и положительная при $r \neq 0$;

$$\|x(\tau)\|_{(-h_1 \leqslant \tau \leqslant 0)} = \sup(|x_i(\tau)| \quad \text{при} \quad -h_1 \leqslant \tau \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, n),$$
$$h_1 \leqslant h, \ x_i(\tau) = x_i(\vartheta) \ \text{при} \ \tau = \vartheta; \tag{31.2}$$

2. $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup\left(\dfrac{\Delta V}{\Delta t}\right) \leqslant -\varphi(\|x(\tau)\|_{(-h_3 \leqslant \tau \leqslant -h_2)})$ в силу уравнений (30.1), где $\varphi(r)$ — непрерывная, положительная при $r \neq 0$ функция;

$$\|x(\tau)\|_{(-h_3 \leqslant \tau \leqslant -h_2)} = \sup(|x_i(\tau)| \ \text{при} \ -h_3 \leqslant \tau \leqslant -h_2, \ i=1, \ldots, n),$$
$$h \leqslant h_3 \leqslant h_2 \leqslant 0,$$

— то решение $x=0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Если выбрать число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup(V(x_0(\vartheta_0), t_0) \ \text{при} \|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant \delta) <$$
$$< \inf(V(x(\vartheta), t) \quad \text{при} \|x(\vartheta)\|_{(-h_1 \leqslant \vartheta \leqslant 0)}),$$

то траектории $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ вследствие невозрастания функционала V вдоль траекторий при возрастании времени при всех $t \geqslant t_0$ будут оставаться в области $\|x(\vartheta)\|_{(-h_1 \leqslant \vartheta \leqslant 0)} < \varepsilon$, т. е. устойчивость решения $x=0$ доказана.

Докажем асимптотическую устойчивость решения $x=0$. Предположим от противного, что существует траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ такая, что начальная кривая этой траектории удовлетворяет неравенству

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} < \delta,$$

и, тем не менее, существует число $\eta > 0$ такое, что $\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\|^{(h)} > \eta$ при всех $t \geqslant t_0$. Иначе говоря, предположим, что существует последовательность неограниченно возрастающих чисел t_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ таких, что выполняются неравенства

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_\nu)\| > \eta > 0. \tag{31.3}$$

Траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ при $t \geqslant t_0$ по доказанному выше лежит в области $\|x(\vartheta)\| < \varepsilon$, где скорость точки $\{x_i(t)\}$ в фазовом пространстве $\{x_i\}$ равномерно ограничена некоторой постоянной P. Следовательно, можно указать постоянное число $\beta > 0$ такое, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\| > \frac{\eta}{2} \text{ при } t_\nu - \beta \leqslant t \leqslant t_\nu + \beta.$$

Поэтому по условию (31.2) доказываемой теоремы на интервалах времени $\Delta t_\nu = (-h_3 - \beta + t_\nu \leqslant t \leqslant t_\nu + \beta + h_2)$ будет выполняться неравенство

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) < -\varphi\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

Так как отрезки Δt_ν можно предполагать не пересекающимися друг с другом, то вдоль траектории выполняется неравенство

$$V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) - V(x_0(\vartheta_0), t_0) \leqslant -\varphi\left(\frac{\eta}{2}\right)\sum_{\nu=1}^{N} \Delta t_\nu,$$

где суммирование распространено на все отрезки Δt_ν, лежащие целиком в интервале $[t_0, t]$. Так как при $t \to \infty$ сумма длин таких отрезков Δt_ν должна неограниченно возрастать ($N \to \infty$), то при нашем предположении мы имели бы $\lim V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) = -\infty$ при $t \to \infty$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Примечание. В частном случае, когда $h_1 = 0$ или $h_2 = h_3$ оценки для функционалов превращаются в оценки для обычных функций и, в частности, при $h_1 = 0$ функционал V может быть просто функцией $v(x, t)$.

2. Рассмотрим случай, когда правые части X_i являются периодическими функциями времени одного и того же периода θ (или не зависят явно от времени). В этом случае условие (31.2) можно еще несколько ослабить.

Теорема 31.2. Если можно указать функционал V, периодический по времени t (или не зависящий явно от времени t), допускающий бесконечно малый высший предел и удовлетворяющий условию (31.1), такой, что $\lim \sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)$ при $\Delta t \to +0$ является величиной неположительной вдоль траекторий, причем не существует траектории (в некоторой окрестности точки $x = 0$, за исключением самой этой точки), вдоль которой

$$\lim \sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) = 0 \text{ при всех } t \geqslant t_0,$$

то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Учитывая доказательство теоремы 31.1, достаточно показать, что устойчивость решения $x = 0$ является асимптотической. Предположим от противного, как и при доказательстве теоремы 31.1, что существует траектория $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ при $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} < \delta$, не примыкающая к точке $x = 0$ при возрастании времени t, т. е. предположим, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + \nu\theta + \vartheta)\|^{(h)} > \eta \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Равномерно ограниченная последовательность равностепенно непрерывных функций

$$x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + \nu\theta + \vartheta) = y_\nu(\vartheta)$$

имеет по крайней мере один предельный элемент $y_0(\vartheta)$. С другой стороны, невозрастающая функция

$$V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) = v(t)$$

имеет предел при $t \to \infty$, равный $v_\infty \neq 0$, причем вследствие непрерывности функционала V должно выполняться равенство

$$V(y_0(\vartheta), t_0) = v_\infty.$$

Рассмотрим траекторию $x(y_0(\vartheta_0), t_0, t)$. Так как по условиям теоремы функция $V(x(y_0(\vartheta_0), t_0, t))$ не остается тождественно постоянной при $t \geqslant t_0$, то существуют значения $t = t_0 + k\theta$, где

$$V(x(y_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + k\theta), t_0) < V(y_0(\vartheta), t_0) = v_\infty.$$

Так как, с другой стороны, $y_0(\vartheta)$ — предельный элемент для последовательности $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + \nu\theta)$, то для некоторых достаточно больших значений ν должны выполняться неравенства

$$V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + \nu\theta + k\theta), t_0 + \nu\theta + k\theta) < v_\infty,$$

что невозможно по определению числа v_∞. Полученное противоречие доказывает теорему.

Примечание. Теорема 31.2, доказанная здесь для уравнений с последействием, соответствует теореме 14.1, доказанной выше для обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Иногда при построении конкретных функционалов бывает удобно пользоваться нормой, определенной формулой (27.6)

$$\|x(\vartheta)\|_2^{(h)} = \left(\int_{-h}^{0} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2(\vartheta) \right) d\vartheta \right)^{\frac{1}{2}} \tag{31.4}$$

Так как определение устойчивости было дано выше в терминах метрики, определенной нормой (27.5), то следует обосновать возможность использования и метрики, определенной нормой (31.4).

Приведем здесь такое обоснование для уравнений с запаздываниями времени t. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t - h_{i1}), \ldots, x_n(t - h_{in}); \; x_1(t), \ldots, x_n(t), t) \tag{31.5}$$

$$(i = 1, \ldots, n; \quad 0 \leqslant h_{ij}(t) \leqslant h),$$

где правые части $X_i(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции своих аргументов, определенные при

$$|x_i| < H, \quad |y_i| < H \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{31.6}$$

и удовлетворяющие в области (31.6) условиям Липшица по x_j, y_j:

$$\left|X_i(y_1'', \ldots, y_n''; x_1'', \ldots, x_n'', t) - X_i(y_1', \ldots, y_n'; x_1', \ldots, x_n', t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant L\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j'' - x_j'| + \sum_{j=1}^{n} |y_j'' - y_j'|\right).$$

Теорема 31.3. Если можно указать функционал $V(x(\vartheta), t)$, удовлетворяющий следующим оценкам:

$$|V(x(\vartheta), t)| \leqslant W_1(\|x(0)\|) + W_2(\|x(\vartheta)\|_2^{(h)});\tag{31.7}$$

$$V(x(\vartheta), t) \geqslant w(\|x(0)\|),\tag{31.8}$$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) \leqslant -\varphi(\|x(0)\|),\tag{31.9}$$

где $W_1(r)$, $W_2(r)$ — непрерывные монотонные при $r \geqslant 0$ функции, удовлетворяющие условиям $W_1(0) = W_2(0) = 0$; $w(r)$ — непрерывная, положительная при $r \neq 0$ функция; $\varphi(r)$ — непрерывная, положительная при $r \neq 0$ функция, то решение $x \equiv 0$ уравнений (31.5) асимптотически устойчиво.

Примечание. Если X_i и $h_{ij}(t)$ — периодические функции времени t периода θ (или X_i и h_{ij} не зависят явно от времени t), то условие (31.9) можно заменить следующим более слабым условием: достаточно, чтобы величина

$$\lim \sup(\Delta V/\Delta t) \text{ при } \Delta t \to +0$$

была неположительной вдоль траекторий, причем равенство

$$\lim \sup(\Delta V/\Delta t) = 0 \text{ при } \Delta t \to +0$$

при всех $t \geqslant t_0$ возможно лишь вдоль траектории $x = 0$.

Доказательство теоремы. Здесь достаточно доказать лишь устойчивость решения $x = 0$, так как при доказанной устойчивости асимптотическая устойчивость доказывается дословно так же, как и в теоремах 31.1 и 31.2. Итак, пусть дано число $\varepsilon > 0$. Выберем число $\delta > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$W_1(\delta) + W_2(\delta n h) < w(\varepsilon).$$

Тогда согласно неравенствам (31.7) и (31.8) будем иметь неравенство

$$V(x_0(\vartheta), t_0) < w(\varepsilon) \text{ при } \|x_0(\vartheta)\|^{(h)} < \delta.\tag{31.10}$$

Так как вдоль траекторий (31.5) функция

$$V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)) = v(t)$$

по условиям теоремы не возрастает, то из неравенства (31.10) заключаем, что

$$V(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t + \vartheta), t) < w(\varepsilon) \text{ при всех } t \geqslant t_0,$$

но это в силу неравенства (31.8) означает, что

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\| < \varepsilon. \tag{31.11}$$

Неравенство (31.11) доказывает устойчивость решения $x=0$, а вместе с тем и теорему.

4. Приведем еще одно достаточное условие асимптотической устойчивости решения $x=0$ уравнений с последействием.

Введем предварительно одно вспомогательное обозначение. Обозначим через $N(H_0, t_0, t)$ $(t \geqslant t_0)$ некоторое семейство кривых $\{x_i(\vartheta)\}$ $(i=1, \ldots, n, -h \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ такое, что решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t+\vartheta)$ (как функции аргумента ϑ), соответствующие всевозможным кусочно-непрерывным начальным кривым при $t_0 \geqslant 0$, $x_0(\vartheta_0)$ из области

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0 \quad (H_0 = \mathrm{const}), \tag{31.12}$$

содержатся в семействе кривых $N(H_0, t_0, t)$.

Лемма 31.4. Пусть решения уравнений (30.1) при всех начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$ из области (31.12) продолжимы в области

$$\|x(\vartheta)\| < H \tag{31.13}$$

на интервал времени $t_0 \leqslant t < \infty$. Если можно указать функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$, определенную при всех $t \geqslant 0$, равномерно ограниченную при $|x_i| < H$, $t \geqslant 0$, такую, что для каждого $\gamma > \gamma_0$ можно указать числа $\alpha(\gamma) > 0$, $T(\gamma) > 0$, удовлетворяющие условию

$$\left(\lim_{\Delta t \to +0} \sup \frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{(30.1)} < -\alpha(\gamma) \text{ при } t \geqslant t_0 + T(\gamma) \tag{31.14}$$

на кривых $x(\vartheta) \in N(H_0, t_0, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$v(x_1(0), \ldots, x_n(0), t) \geqslant \gamma, \tag{31.15}$$

то вдоль траекторий (30.1)

$$\lim \sup v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) \leqslant \gamma_0 \text{ при } t \to \infty \tag{31.16}$$

равномерно относительно начальных кривых из области (31.12).

Доказательство. Пусть число $t_0 \geqslant 0$ фиксировано. Если вдоль некоторой траектории $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ выполняется неравенство $v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t^*), t^*) \leqslant \gamma$ при $t^* \geqslant t_0 + T(\gamma)$, то это неравенство должно сохраниться при всех $t \geqslant t^*$. Действительно, если бы это неравенство могло нарушиться при $t^{**} > t^*$, то в момент $t = t^{**}$ мы имели бы, с одной стороны, $v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) > \gamma$ при $t \in [t^{**}, t^{**}+\tau]$ ($\tau > 0$ — достаточно малая постоянная), а, с другой стороны, по условию (31.14), (31.15) должно выполняться неравенство

$$v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) < \gamma \text{ при } t \in (t^{**}, t^{**}+\tau).$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть теперь γ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $\gamma > \gamma_0$. Рассмотрим некоторую траекторию

$x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$, которая удовлетворяет неравенству (31.15) при $t > t_0 + T(\gamma)$. Функция $v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t)$ при $t > t_0 + T(\gamma)$ согласно условиям теоремы остается монотонно убывающей все время, пока выполняется неравенство (31.15), и больше того, вследствие неравенства (31.15) имеем:

$$v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t), t) - v(x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 + T(\gamma)), t_0 + T(\gamma)) \leqslant \\ \leqslant -\alpha(\gamma)(t - t_0 - T(\gamma)),$$

и следовательно, при $t > t_0 + T(\gamma) + 2\overline{V}/\alpha(\gamma)$ $(\overline{V} = \sup v)$ все такие траектории должны попасть в область $v \leqslant \gamma$. Так как число $\gamma > \gamma_0$ можно выбирать произвольно близким к числу γ_0, то лемму можно считать доказанной.

Теперь сформулируем теорему [56], которая обосновывает применение функций Ляпунова для уравнений с последействием. Заметим, что аналогичная теорема была доказана Б. С. Разумихиным [98].

Теорема 31.4. Если можно указать функцию $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ определенно-положительную, допускающую бесконечно малый высший предел, удовлетворяющую неравенству

$$\inf(v(x, t) \text{ при } \|x\| = H_1) > \sup(v(x, t) \text{ при } \|x\| \leqslant H_0) \quad (31.17)$$
$$(H_0 < H_1 < H),$$

и если при этом правая производная вдоль траекторий системы (30.1) удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{dt=+0} < -\varphi(\|x(t)\|)$$

на непрерывных кривых $x(\vartheta)$,

$$v(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi), \xi) < f(v(x_1(t), \ldots, x_n(t), t)) \text{ при } t - h \leqslant \xi < t, \quad (31.18)$$

где $f(r)$ — какая-нибудь непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$f(r) > r \quad \text{при} \quad r \neq 0, \ f(r'') - f(r') > 0 \quad \text{при} \quad r'' > r',$$

то решение $x = 0$ уравнений (30.1) асимптотически устойчиво и начальные кривые (31.12) лежат в области притяжения точки $x = 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что вдоль траекторий $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ с начальными данными $x_0(\vartheta_0)$ из области (31.12) выполняется неравенство

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0, t)\| \leqslant H_1 \quad (31.19)$$

при всех значениях времени $t \geqslant t_0$. В самом деле, если предположить, что это неравенство может быть нарушено при $t \geqslant t_0$, то в некоторый момент $t^* > t_0$ должно было бы впервые нарушиться неравенство

$$v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) \leqslant v_1,$$

где $v_1 = \inf\ (v(x,\ t)$ при $\|x\| = H_1)$.

Но в момент $t = t^*$ по условиям теоремы было бы $\frac{dv}{dt} < 0$ (так как $v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) < v_1$ при $t < t^*$), что приводит к противоречию. Итак, неравенство (31.19) нарушиться не может. Иначе говоря, мы показали, что при условиях теоремы траектории $x(x_0(\vartheta_0), t_0,\ t)$ продолжимы в области $\|x\| < H$ при всех $t \geqslant t_0$, если $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0$.

Теперь для доказательства теоремы, опираясь на лемму 31.4, достаточно показать, что для каждого $\gamma > 0$ существует число $T(\gamma) > 0$ такое, что при $t > t_0 + T(\gamma)$ семейство кривых $\{x_i(\vartheta)\}$, удовлетворяющих условию (31.18), включает в себя все интегральные кривые $\{x_i(t)\} = \{x_i(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)\}$, которые удовлетворяют неравенству $v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) \geqslant \gamma$. Это утверждение справедливо для $\gamma^* = v_1 + 1$, так как, по доказанному выше, интегральных кривых $x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t)$ при $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0$, удовлетворяющих неравенству $v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) \geqslant v_1 + 1$, вообще нет. Пусть $\gamma_0 > 0$ — нижняя грань тех значений γ, для которых наше утверждение справедливо. Тогда по свойствам функции $f(r)$ можно указать число $\eta > 0$ такое, что

$$f(r) - r > 2\eta \quad \text{при} \quad \gamma_0 - \eta \leqslant r \leqslant \gamma_0 + \eta \quad (\eta < \gamma_0).$$

По лемме 31.4 существует число τ такое, что выполняется неравенство

$$v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) < \gamma_0 + \eta$$

при всех $t > t_0 + \tau$, для всех начальных кривых $\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant H_0$.

Следовательно, интегральные кривые, удовлетворяющие неравенству

$$v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) \geqslant \gamma_0 - \eta \quad \text{при} \quad t > t_0 + \tau + h,$$

удовлетворяют неравенству

$$v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ \xi),\ \xi) < \gamma_0 + \eta < f(v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t))$$
$$(\xi \in [t - h,\ t]),$$

т. е. число $\tau + h$ таково, что на кривых

$$v(x(x_0(\vartheta_0),\ t_0,\ t),\ t) \geqslant \gamma_0 - \eta \quad \text{при} \quad t > t_0 + \tau + h$$

выполняется условие (31.14) леммы. Это противоречит выбору числа $\gamma_0 > 0$ как нижней грани чисел γ, для которых это условие леммы выполняется. Противоречие доказывает теорему.

ГЛАВА VII

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В этой главе рассматривается приложение теорем, доказанных в предыдущей главе, к некоторым задачам устойчивости для уравнений с последействием. В § 32 рассматривается задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, в § 33 рассматриваются задачи устойчивости по первому приближению, в § 34 приводятся примеры построения конкретных функционалов для некоторых типов систем с последействием.

§ 32. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

1. Доказанные в предыдущих параграфах общие теоремы позволяют развить для уравнений с последействием теорию, во многом аналогичную теории второго метода Ляпунова для обыкновенных уравнений. В этом параграфе мы рассмотрим, в частности, задачу об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для уравнений с запаздываниями аргумента t. Дадим сначала определение, соответствующее определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях для обыкновенных уравнений (§ 24, стр. 120).

Рассмотрим уравнения с запаздываниями времени

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t);\ x_1(t-h_{i1}(t)), \ldots, x_n(t-h_{in}(t)), t)$$
$$(0 \leqslant h_{ij}(t) \leqslant h,\quad i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, n), \qquad (32.1)$$

где непрерывные функции $X_i(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n, t)$ определены при $|x_j| < H$, $|y_j| < H$ и удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_j, y_j, т. е.

$$|X_i(x_1'', \ldots, x_n'';\ y_1'', \ldots, y_n'', t) - X_i(x_1', \ldots, x_n';\ y_1', \ldots, y_n', t)| \leqslant$$
$$\leqslant L\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j''-x_j'| + \sum_{j=1}^{n}|y_j''-y_j'|\right) \qquad (i=1, \ldots, n). \qquad (32.2)$$

Кроме того, как обычно, предполагаем $X_i(0, \ldots, 0; 0, \ldots, 0, t) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Наряду с системой (32.1) будем рассматривать «возмущенную» систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\left(x_1(t), \ldots, x_n(t); x_1\left(t - \overset{*}{h}_{i1}(t)\right), \ldots, x_n\left(t - \overset{*}{h}_{in}(t)\right), t\right) + \\ + R_i\left(x_1(t), \ldots, x_n(t); x_1(t - g_{ij}(t)), \ldots, x_n(t - g_{ij}(t)), t\right)$$

$$(i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n, \; 0 \leqslant \overset{*}{h}_{ij}(t) \leqslant h, \; 0 \leqslant g_{ij}(t) \leqslant h), \qquad (32.3)$$

где непрерывные функции R_i уже не обязательно должны обращаться в нуль при $x_j = y_j = 0$.

Определение 32.1. Решение $x = 0$ системы уравнений (32.1) будем называть устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать положительные числа $\delta_0 > 0$, $\eta > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ системы уравнений (32.3) удовлетворяют неравенству

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\| < \varepsilon \qquad (32.4)$$

при всех $t \geqslant t_0$, $t_0 \geqslant 0$, если только начальные кривые $x_0(\vartheta_0)$ удовлетворяют неравенству

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \leqslant \delta_0 \qquad (32.5)$$

и «возмущения» запаздываний h_{ij} и функции R_i удовлетворяют неравенствам

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n, t)| < \eta$$

$$\text{при } \|x\| < \varepsilon, \; \|y\| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad (32.6)$$

$$|h_{ij}(t) - \overset{*}{h}_{ij}(t)| < \Delta \quad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n). \qquad (32.7)$$

Как указывалось выше (§ 24, стр. 120), в случае обыкновенных уравнений достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях является равномерность асимптотической устойчивости по координатам и времени начальных возмущений, и доказательство этого факта опирается на теорему существования функции Ляпунова. Опираясь на теорему существования функционала V (теорема 30.2), покажем, что аналогичное положение имеет место и в случае уравнений с запаздываниями времени t (32.1).

Теорема 32.1. Если решение $x = 0$ уравнений (32.1) асимптотически устойчиво равномерно по времени t_0 и по начальным данным $x_0(\vartheta_0)$ (в смысле определения 30.2, стр. 174), то это решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Примечание. Если X_i и $h_{ij}(t)$ — периодические функции времени t периода θ (или не зависят явно от времени t), то асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ всегда равномерна по $x_0(\vartheta_0)$ и t_0 (см. стр. 178), и поэтому из теоремы 32.1 следует, что в этом случае устойчивость при постоянно действующих возмущениях есть следствие асимптотической устойчивости решения $x = 0$.

Доказательство теоремы. Согласно теореме 30.2 при условиях теоремы 31.1 существует функционал V, удовлетворяющий условиям теоремы 30.1 и притом удовлетворяющий условиям Липшица по $x(\vartheta)$ (30.15). Пусть дано положительное число $\varepsilon > 0$. Так как функционал $V(x(\vartheta), t)$ является определенно-положительным, то существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$v(x(\vartheta), t) > \beta \quad \text{при} \quad \|x(\vartheta)\|^{(h)} = \varepsilon,\ t \geqslant 0. \tag{32.8}$$

По свойству бесконечно малого высшего предела для V можно указать число $\delta > 0$ такое, что

$$V(x(\vartheta), t) < \beta \quad \text{при} \quad \|x(\vartheta)\|^{(h)} = \delta,\ t \geqslant 0. \tag{32.9}$$

В области

$$\delta \leqslant \|x(\vartheta)\|^{(h)} \leqslant \varepsilon \tag{32.10}$$

величина $\lim\sup(\Delta V/\Delta t)_{(32.1)}$ при $\Delta t \to +0$ удовлетворяет неравенству

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.1)} \leqslant -\alpha \qquad (\alpha > 0 - \text{const}) \tag{32.11}$$

по свойству определенной отрицательности этой величины. Вычислим и оценим величину

$$\lim\sup \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.3)} \quad \text{при} \quad \Delta t \to +0 \tag{32.12}$$

вдоль траекторий системы (32.3). При оценке этой величины получим:

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.3)} \leqslant \lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.1)} +$$
$$+ \lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{1}{\Delta t}[V(x^{(1)}(t + \Delta t + \vartheta), t + \Delta t) - \right.$$
$$\left. - V(x^{(3)}(t + \Delta t + \vartheta), t + \Delta t)]\right),$$

где для краткости символами $x^{(1)}(t)$ и $x^{(3)}(t)$ обозначены траектории систем (32.1) и (32.3) соответственно. По условиям (30.15) имеем неравенство

$$|V(x^{(1)}(t + \Delta t + \vartheta), t + \Delta t) - V(x^{(3)}(t + \Delta t + \vartheta), t + \Delta t)| <$$
$$< K\|x^{(1)}(t + \Delta t + \vartheta) - x^{(3)}(t + \Delta t + \vartheta)\|^{(h)}.$$

С другой стороны, из уравнений (32.1) и (32.3) (учитывая неравенство (32.2)) заключаем, что

$$\lim_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{1}{\Delta t}[\|x^{(1)}(t + \Delta t + \vartheta) - x^{(3)}(t + \Delta t + \vartheta)\|^{(h)}]\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sup |R_i| + L\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j(t - h_{ij}^*) - x_j(t - h_{ij})|\right).$$

Оценим величины $|x_j(t-h_{ij}^*)-x_j(t-h_{ij})|$. Если мы рассмотрим момент времени $t>2h$ и будем предполагать, что при $\tau<t$ траектория $x^{(3)}(\tau)$ лежит в области $\|x(\vartheta)\|^{(h)}<\varepsilon$, то функции $x_j^{(3)}(\tau)$ будут удовлетворять по τ условиям Липшица с некоторой постоянной L_1 § 28 (стр. 158), т. е. в этом случае мы можем записать неравенство

$$|x_j(t-h_{ij})-x_j(t-h_{ij}^*)|\leqslant|h_{ij}-h_{ij}^*|L_1.$$

Учитывая выведенные выше оценки, можно записать неравенство

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.3)}\leqslant-\alpha+K\left(\sup|R_i|+n^2LL_1\sup|h_{ij}-h_{ij}^*|\right),$$

которое будет выполняться вдоль всякой интегральной кривой (32.3) в области (32.10) при $t>t_0+2h$, если только при $\tau<t$ эта траектория $x_i(\tau)$ (32.3) лежит в области $\|x\|<\varepsilon$. Если функции R_i и h_{ij}^* удовлетворяют неравенствам (32.6) и (32.7), где $\eta<\frac{\alpha}{4K}$ и $\Delta<\frac{\alpha}{4n^2LL_1}$, то в области (32.10) будем иметь оценку

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(32.3)}<-\frac{\alpha}{2}\tag{32.13}$$

вдоль всех интегральных кривых (32.3) описанного выше типа. Из условий (32.8), (32.9) и (32.13) заключаем теперь, что при дальнейшем возрастании времени t рассматриваемая траектория не сможет покинуть область $\|x\|<\varepsilon$. Но при $t=t_0+2h$ любая траектория (32.3) будет удовлетворять перечисленным выше условиям, если $\|x_0(\vartheta_0)\|<\delta e^{-2Lh}$, как это следует из неравенства (27.12). Итак, мы показали, что при выполнении неравенства (32.6) и (32.7), где η и Δ — достаточно малые положительные постоянные, выполняется неравенство $\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\|<\varepsilon$, если только

$$\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}<\delta\exp(-2hL),$$

а это и доказывает теорему, если положить

$$\delta_0=\delta\exp(-2hL).$$

Теорема доказана[1]).

Примечание. Доказанный результат можно обобщить на случай постоянно действующих возмущений, ограниченных в среднем так же, как это было сделано выше в случае обыкновенных уравнений § 24 (стр. 122), с той разницей, что вместо функции $f=e^{\beta(t)}v(x,t)$ здесь следует рассмотреть функционал $F=e^{\beta(t)}V(x(\vartheta),t)$. Не приводя доказательства, сформулируем лишь окончательный результат, установленный В. Е. Гермайдзе.

---

[1]) Следует отметить, что задача об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, как и задачи устойчивости по первому приближению для уравнений с запаздываниями, были решены иным путем Ю. М. Репиным.

Пусть функции R_i и $h^*_{ij}(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left.\begin{array}{l} |R_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n, t)| < \psi_1(t) \\ \qquad \text{при} \quad |x_i| < \varepsilon, \quad |y_i| < \varepsilon, \\ \qquad \sup\left|h_{ij}(t) - h^*_{ij}(t)\right| < \psi_2(t), \end{array}\right\} \tag{32.14}$$

причем

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_t^{t_0+T} \psi_1(\xi)\,d\xi < \eta, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \psi_2(\xi)\,d\xi < \Delta \end{array}\right\} \tag{32.15}$$

(T — фиксированное положительное число).

Если решение $x=0$ уравнений (32.1) асимптотически устойчиво равномерно по $x_0(\vartheta_0)$ и t_0, то для любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать числа $\eta > 0$, $\delta_0 > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ системы уравнений (32.3) будут удовлетворять неравенству

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\| < \varepsilon$$

при всех $t \geqslant t_0$, $t_0 \geqslant 0$, если только выполняются условия (32.14), (32.15) и начальные данные $x_0(\vartheta_0)$ удовлетворяют неравенству (32.5).

§ 33. Устойчивость по первому приближению для уравнений с последействием

1. Теория устойчивости по первому приближению для обыкновенных уравнений может быть полностью перенесена на уравнения с последействием. Мы ограничимся здесь приведением лишь некоторых основных фактов.

Прежде всего докажем теорему о существовании функционала $V(x(\vartheta), t)$, аналогичную теореме 11.1 о существовании функции $v(x, t)$. Рассмотрим систему уравнений с последействием

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x(t+\vartheta), \ldots, x_n(t+\vartheta), t), \tag{33.1}$$

где функционалы X_i удовлетворяют тем же условиям, что и выше (§ 27, стр. 152).

Лемма 33.1. Если решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ системы (33.1) удовлетворяют условию

$$\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)\|^{(h)} \leqslant B\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} \exp(-\alpha(t-t_0)) \quad \text{при } t \geqslant t_0, \tag{33.2}$$

$$\|x_0(\vartheta_0)\|_h < H_0 = \frac{H}{B}, \tag{33.3}$$

то в области (33.3) можно построить функционал $V(x(\vartheta), t)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$c_1\|x(\vartheta)\|^{(h)} \leqslant V(x(\vartheta), t) \leqslant c_2\|x(\vartheta)\|^{(h)}, \tag{33.4}$$

$$\lim_{\Delta t\to+0} \sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(33.1)} \leqslant -c_3\|x(\vartheta)\|^{(h)}, \tag{33.5}$$

$$|V(x''(\vartheta), t) - V(x'(\vartheta), t)| \leqslant c_4\|x''(\vartheta) - x'(\vartheta)\|^{(h)} \tag{33.6}$$

($c_1, \ldots, c_4$ — положительные постоянные).

Доказательство. Покажем, что функционал

$$V(x_0(\vartheta_0), t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, \xi+\vartheta)\|^{(h)}\,d\xi +$$

$$+\sup(\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, \xi+\vartheta)\|^{(h)} \text{ при } t_0 \leqslant \xi \leqslant t_0+T)$$

$$\left(T = \frac{1}{\alpha}\ln 2B\right) \tag{33.7}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. В самом деле, при начальных кривых $x_0(\vartheta_0)$ из области (33.3) вследствие условия (33.2) решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ при $t \geqslant t_0$ лежат в области

$$\|x(\vartheta)\|^{(h)} < H,$$

где определены правые части системы (33.1), и следовательно, эти решения $x(x_0(\vartheta_0), t_0, t)$ продолжимы при всех $t \geqslant t_0$, т. е. функционал (33.7) определен в области (33.3). Левое неравенство (33.4) (при $c_1 = 1$) следует сразу из очевидного соотношения

$$\sup(\|x(x_0(\vartheta_0), t_0, \xi+\vartheta)\|^{(h)} \text{ при } t_0 \leqslant \xi \leqslant t_0+T) \geqslant \|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}.$$

Правое неравенство (33.4) следует по условиям (33.2) из соотношений

$$V(x_0(\vartheta_0), t_0) \leqslant \int\limits_{t}^{t+T} B\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}\exp[-\alpha(t-t_0)]\,dt + \|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}B =$$

$$= B\left(1+\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{1}{2B}\right)\right)\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)}.$$

Вследствие условия (33.2) второе слагаемое в правой части равенства (33.7) не возрастает с ростом t_0 при движении вдоль траектории системы (33.1), поэтому

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\substack{\text{при } t=t_0\\ \text{в силу (33.1)}}} \leqslant \lim_{\Delta t\to+0}\left(\int\limits_{t_0+\Delta t}^{t_0+T+\Delta t} \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, \xi+\vartheta)\|^{(h)}\,d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, \xi+\vartheta)\|^{(h)}\,d\xi\right) = -\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)} + \|x(x_0(\vartheta_0), t_0, t_0 +$$

$$+ T + \vartheta)\|^{(h)},$$

и теперь по условиям (33.2) и по выбору числа T получим:

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{\substack{\text{при } t=t_0\\ \text{в силу (33.1)}}}\leqslant-\frac{1}{2}\|x_0(\vartheta_0)\|^{(h)},$$

что и доказывает неравенство (33.5) $\left(\text{при } c_3=\frac{1}{2}\right)$.

Проверим выполнение неравенства (33.6). Оценивая интеграл и используя неравенства (33.2), получим:

$$|V(x_0''(\vartheta_0),t_0)-V(x_0'(\vartheta_0),t_0)|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_0+T}\|x(x_0''(\vartheta_0),t_0,\xi+\vartheta)-x(x_0'(\vartheta_0),t_0,\xi+\vartheta)\|d\xi+$$

$$+\sup(\|x(x_0''(\vartheta_0),t_0,\xi+\vartheta)-x(x_0'(\vartheta_0),t_0,\xi+\vartheta)\|^{(h)}$$

$$\text{при } t_0\leqslant\xi\leqslant t_0+T)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t_0+T}(\|x_0''(\vartheta_0)-x_0'(\vartheta_0)\|^{(h)}\exp nL\xi)\,d\xi+$$

$$+\|x_0''(\vartheta_0)+x_0'(\vartheta_0)\|^{(h)}\exp nLT=c_4\|x_0'(\vartheta_0)-x_0''(\vartheta_0)\|^{(h)},$$

что и доказывает неравенство (33.6). Теорема доказана.

Следствием теоремы 29.1 и леммы 33.1 является следующее утверждение.

Теорема 33.1. Пусть $X_i(x_1(\vartheta),\ldots,x_n(\vartheta))$ — линейные функционалы. Если корни λ «характеристического» уравнения

$$\begin{vmatrix} X_{11}-\lambda & \ldots & X_{1n}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\\ X_{n1} & \ldots & X_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{33.8}$$

$$(X_{ij}=X_i(0,\ \ldots,\ \underset{j}{e^{\lambda\vartheta}},\ \ldots,\ 0))$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda<-\gamma\qquad(\gamma>0-\text{const}), \tag{33.9}$$

то существует функционал $V(x(\vartheta),t)$, удовлетворяющий условиям (33.4), (33.5), (33.6).

Примечание. Как мы видели при доказательстве леммы 33.1, существование функционала $V(x(\vartheta),t)$, удовлетворяющего оценкам (33.4), (33.5), (33.6), связано не столько с фактом линейности функционалов X_i, сколько определяется характером (33.2) приближения траекторий $x(x_0(\vartheta_0),t_0,t)$ к точке $x=0$ с возрастанием времени t. Следует, впрочем, отметить, что неравенство (33.2) характерно как раз для линейных систем, правые части которых не зависят явно от времени t.

2. Теорема 33.1 позволяет доказать для уравнений с последействием теоремы об устойчивости по первому приближению. Докажем здесь одну теорему такого рода.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i\left(x_1(\vartheta),\ \ldots,\ x_n(\vartheta)\right)+R_i\left(x_1(\vartheta),\ \ldots,\ x_n(\vartheta),\ t\right), \qquad (33.10)$$

где X_i — линейные функционалы, R_i — некоторые непрерывные функционалы. Предположим, что функционалы R_i удовлетворяют неравенству

$$\left|R_i\left(x_1(\vartheta),\ \ldots,\ x_n(\vartheta),\ t\right)\right|\leqslant\beta\|x(\vartheta)\|^{(h)}. \qquad (33.11)$$

Теорема 33.2. Если корни λ уравнения (33.8) удовлетворяют неравенству (33.9), то можно указать постоянную $\beta>0$ такую, что решение $x=0$ системы (33.10) будет асимптотически устойчивым при любом выборе непрерывных функционалов R_i, удовлетворяющих условиям (33.11).

Доказательство. При условиях теоремы 33.2 согласно теореме 33.1 существует функционал $V(x(\vartheta),\ t)$, удовлетворяющий условиям (33.4), (33.5), (33.6). Вычислим $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(33.10)}$ вдоль траекторий системы (33.10):

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(33.10)}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{1}{\Delta t}\left[V\left(x^{(10)}(t+\Delta t+\vartheta),t+\Delta t\right)-V\left(x^{(10)}(t+\vartheta),t\right)\right]\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{1}{\Delta t}\left[V\left(x^{(1)}(t+\Delta t+\vartheta),\ t+\Delta t\right)-V\left(x^{(1)}(t+\vartheta),t\right)\right]\right)+$$

$$+\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{1}{\Delta t}\left[V\left(x^{(10)}(t+\Delta t+\vartheta),t+\Delta t\right)-V\left(x^{(1)}(t+\Delta t+\vartheta),\ t+\Delta t\right)\right]\right)\leqslant$$

$$\leqslant-c_3\|x(t+\vartheta)\|^{(h)}+c_4\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{1}{\Delta t}\left[\|x^{(10)}(t+\Delta t+\vartheta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-x^{(1)}(t+\Delta t+\vartheta)\|^{(h)}\right]\right).$$

Здесь для краткости приняты обозначения: $x^{(10)}(t)$ — траектория системы (33.10), и $x^{(1)}(t)$ — траектория системы (33.1). Из уравнений (33.10), учитывая неравенство (33.11), получим теперь окончательную оценку

$$\lim_{\Delta t\to+0}\sup\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(33.10)}\leqslant(-c_3+c_4\beta)\|x(t+\vartheta)\|^{(h)}. \qquad (33.12)$$

Если число $\beta > 0$ удовлетворяет условию

$$\beta > \frac{c_3}{c_4}, \tag{33.13}$$

то величина $\lim\limits_{\Delta t \to +0} \sup \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(33.10)}$ будет определенно-отрицательным функционалом, т. е. функционал $V(x(\vartheta), t)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 30.1 вдоль траекторий системы (33.10), откуда и следует асимптотическая устойчивость решения $x=0$. Теорема доказана.

3. В частном случае уравнений с запаздываниями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) + b_{ij}x_j(t-h_{ij}) +$$
$$+ R_i\left(x_1, \ldots, x_n, x_1(t-h_{ij}^*(t)), \ldots, x_n(t-h_{ij}^*(t)), t\right)$$
$$\left(h_{ij} - \mathrm{const}, \quad 0 \leqslant h_{ij} \leqslant h, \quad 0 \leqslant h_{ij}^*(t) \leqslant h\right) \tag{33.14}$$

теорема 33.2 читается следующим образом.

Если корни λ «характеристического» уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}e^{-\lambda h_{11}} - \lambda & \ldots & a_{1n}e^{-\lambda h_{1n}} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ a_{n1}e^{-\lambda h_{n1}} & \ldots & a_{nn}e^{-\lambda h_{nn}} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{33.15}$$

удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,\lambda < -\gamma \qquad (\gamma > 0 - \mathrm{const}), \tag{33.16}$$

то можно указать постоянную $\beta > 0$ такую, что решение $x = 0$ системы (33.14) будет асимптотически устойчивым, каковы бы ни были непрерывные функции $R_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t)$ и запаздывания $h_{ij}^*(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, t)| \leqslant \beta(\|x\| + \|y\|). \tag{33.17}$$

Примечание. Приведенные выше теоремы включают в себя некоторые результаты Р. Беллмана [131, 132] и Е. Райта [140, 141] об устойчивости по первому приближению для уравнений с запаздываниями времени t. Заметим еще, что приведенные выше результаты можно обобщить на случай, когда ограничения типа (33.11) наложены лишь на средние значения величин R_i на некотором отрезке времени T. Метод доказательства этого утверждения аналогичен тому, который приведен выше для обыкновенных уравнений (стр. 122—125), с той разницей, что вместо функции $v(x, t)$ используется при доказательстве функционал $V(x(\vartheta), t)$.

Сформулируем здесь один такой результат[1]).

[1]) Сформулированная ниже теорема доказана В. Е. Германдзе.

Если корни λ уравнения (33.8) удовлетворяют неравенству (33.9), то можно указать постоянную $\beta > 0$ такую, что решение $x = 0$ системы (33.10) будет асимптотически устойчивым при любом выборе непрерывных функционалов $R_i(x(\vartheta), t)$, удовлетворяющих иеравенствам

$$|R_i(x(\vartheta), t)| \leqslant \psi(t) \| x(\vartheta) \|^h,$$

где

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \psi(\xi)\, d\xi < \beta. \tag{33.18}$$

В частном случае уравнений с запаздываниями h_{ij} времени t это утверждение читается следующим образом.

Если корни λ уравнения (33.15) удовлетворяют неравенству (33.16), то можно указать постоянную $\beta > 0$ такую, что решение $x = 0$ системы (33.14) будет асимптотически устойчивым при любом выборе запаздываний $h^*_{ij}(t)$ и непрерывных функций $R_i(x, y, t)$, удовлетворяющих неравенству

$$R_i |(x, y, t)| \leqslant \psi(t) (\| x \| + \| y \|),$$

где функция $\psi(t)$ удовлетворяет неравенству (33.18).

§ 34. Примеры конкретиого построеиия фуикциоиалов

1. В этом параграфе рассмотрим несколько примеров построения функционалов. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений с запаздываниями времени

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1} x_1(t) + \ldots + a_{in} x_n(t) + \\ + \varphi_i\big(x_1(t), \ldots, x_n(t);\;\; x_1(t - h_{i1}), \ldots, x_n(t - h_{in}), t\big) \\ (i = 1, \ldots, n). \tag{34.1}$$

$a_{ij} = \text{const}$, $h_{ij} = \text{const}$, где функции φ_i удовлетворяют условию

$$|\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\;\; y_1, \ldots, y_n, \;\; t)| \leqslant \beta (\| x \| + \| y \|). \tag{34.2}$$

Предположим, что корни λ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{34.3}$$

имеют отрицательные действительные части. В этом случае согласно теореме Ляпунова [71, стр. 106—108) существует квадратичная форма

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i, j = 1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \tag{34.4}$$

удовлетворяющая условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \tag{34.5}$$

или, иначе говоря, условиям

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}a_{jk}+b_{kj}a_{ji})=-\delta_{ik}\begin{cases}\delta_{ii}=1\\ \delta_{ik}=0 \quad \text{при} \quad i\neq j.\end{cases} \tag{34.6}$$

В этом случае функционал $V(x(\vartheta), t)$ можно записать в следующем виде:

$$V(x(\vartheta))=v(x_1, \ldots, x_n)+\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\int_{-h_{ij}}^{0}x_j^2(\vartheta)\,d\vartheta. \tag{34.7}$$

Вычисляя $\frac{dV}{dt}$ вдоль траекторий системы (34.1), получим:

$$\lim_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(34.1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi_i(x_1, \ldots, x_n;\ x_1(t-h_{i1}), \ldots, x_n(t-h_{in}), t)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}x_j^2-\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}x_j^2(t-h_{ij}). \tag{34.8}$$

В правой части равенства (34.8) — функция переменных $x_i=x_i(t)$ и $y_{ij}=x_i(t-h_{ij})$. Если можно подобрать постоянные $\varepsilon_{ij}\geqslant 0$ таким образом, что в правой части равенства окажется определенно-отрицательная функция этих переменных, то решение $x=0$ системы уравнений (34.1) асимптотически устойчиво. Действительно, в этом случае будут выполняться все условия теоремы 31.3, так как согласно теореме Ляпунова форма $v(x_1, \ldots, x_n)$ является определенно-положительной, т. е. существует постоянная $\gamma>0$, удовлетворяющая неравенству

$$V(x(\vartheta), t)\geqslant v(x_1, \ldots, x_n)\geqslant\gamma\|x\|^2 \quad (\gamma>0).$$

Заметим, что при $\beta>0$ достаточно малом подбор чисел $\varepsilon_{ij}>0$, при которых правая часть равенства (34.8) есть определенно-отрицательная функция, всегда возможен, так как, полагая $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2n^2}$, имеем оценку

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(34.1)} \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1, j=1}^{n} x_i^2(t-h_{ij}) + \left| \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \beta \sum_{i, j=1}^{n} |x_i(t-h_{ij})| \right| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2n^2} x_i^2(t-h_{ij}) + \beta N \sum_{i,j=1}^{n} \left(x_i^2 + x_i^2(t-h_{ij})\right)$$

$$(N = \text{const}).$$

Рассмотрим, например, уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b(t)\, x(t-h) \qquad (a > 0 - \text{const}). \tag{34.9}$$

Согласно общему приему ищем функционал $V(x(\vartheta))$ в виде

$$V(x(\vartheta)) = \frac{1}{2a} x^2 + \mu \int_{-h}^{0} x^2(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Вычисляя производную от V вдоль траектории системы (34.9), будем иметь:

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right) = -x^2(t) + \frac{b(t)}{a} x(t)\, x(t-h) + \mu x^2(t) - \mu x^2(t-h). \tag{34.10}$$

Для того чтобы функция в правой части равенства (34.10) была определенно-отрицательной функцией переменных $x(t)$ и $x(t-h)$, достаточно, как известно, выполнения неравенства

$$4(1-\mu)\mu > \frac{b^2(t)}{a^2}. \tag{34.11}$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости решения $x=0$ уравнения (34.9) достаточно, чтобы существовала постоянная $\mu > 0$, удовлетворяющая неравенству (34.11). В частности, при $\mu = \frac{1}{2}$, когда правая часть неравенства (34.11) достигает максимума, неравенство (34.11) сводится к неравенству

$$b^2(t) < a^2 \quad \text{или} \quad |b(t)| < a.$$

Примечание. Описанный здесь прием построения функционала $V(x(\vartheta))$ можно применять также и в случае переменных $h_{ij}(t)$. В этом случае при вычислении производной функционала V вдоль траекторий системы (34.1) члены $\varepsilon_{ij} x_i^2(t-h_{ij})$ приобретают, естественно, множитель

$(1-h'_{ij}(t))$, что следует учитывать при оценке определенной отрицательности $\frac{dV}{dt}$.

Описанный прием построения функционала V можно применять также и в случае переменных $a_{ij}(t)$, причем иногда может оказаться целесообразным также варьирование функционала V путем умножения его на некоторую функцию $\psi(t)$ (или путем умножения на $\psi(t)$ лишь некоторой части этого функционала). Например, для уравнения

$$\frac{dx}{dt}=-a(t)+b(t)\,x(t-h(t)),$$

выбирая функционал

$$V(x(\vartheta),\ t)=\psi(t)\,x^2+\mu\int\limits_{-h(t)}^{0}x^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

$$(\lambda_1\leqslant\psi(t)\leqslant\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2>0-\text{const}),\tag{34.12}$$

придем к выводу, что для асимптотической устойчивости решения $x=0$ этого уравнения достаточно, чтобы функция

$$\lim_{\Delta t\to+0}\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)=-2a\psi(t)\,x^2(t)+2\psi(t)\,b(t)\,x(t)\,x(t-h(t))+$$
$$+\psi'(t)\,x^2(t)+\mu x^2(t)-\mu(1-h'(t))\,x^2(t-h(t))$$

была определенно-положительной функцией переменных $x(t)$, $x(t-h(t))$. Это условие сводится к неравенству

$$(2a(t)\,\psi(t)-\mu-\psi'(t))(1-h'(t))\,\mu>b^2(t)\,\psi^2(t).$$

2. Рассмотрим теперь пример построения функции $v(x,\ t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 31.4. Пусть снова дана система 34.1, где h_{ij} можно считать произвольными функциями времени t и корни уравнения (34.3) снова имеют отрицательные действительные части. В качестве функции $v(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ здесь можно просто выбрать форму v, удовлетворяющую условиям (34.5). Производная $\frac{dv}{dt}$ вдоль траекторий системы (34.1) будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\varphi_i(x_1,\ \ldots,\ x_n;\ x_1(t-h_{ij}),\ \ldots,\ x_n(t-h_{ij}),\ t).\tag{34.13}$$

Для выполнения условий теоремы 31.4 достаточно, чтобы производная $\frac{dv}{dt}$ была определенно-отрицательной функцией на кривых $x_i(\xi)\,(\xi<0)$, удовлетворяющих условию

$$v(x_1(0), \ldots, x_n(0)) > qv(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi))$$
$$\text{при} \quad \xi < 0, \; 0 < q < 1, \; q = \text{const}. \tag{34.14}$$

Кривые $x_i(\xi)$, удовлетворяющие неравенству (34.14), во всяком случае содержатся в семействе кривых $x_i(\xi)$, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(0) \geqslant q \frac{\rho_{\min}}{\rho_{\max}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\xi), \tag{34.15}$$

где $\rho_{\min}$ — наименьший по модулю, а $\rho_{\max}$ — наибольший по модулю корни уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы уравнений (34.1) достаточно, чтобы правая часть равенства (34.13) была определенно-отрицательной функцией на кривых $x_i(\xi)$, удовлетворяющих неравенству (34.15). В частности, для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + b(t)\,x(t - h(t)),$$

выбирая функцию $v = x^2/2a$, получим:

$$\frac{dv}{dt} = -x^2(t) + \frac{b(t)}{a}\,x(t)\,x(t - h(t)).$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ достаточно, чтобы производная $\frac{dv}{dt}$ была функцией определенно-отрицательной на кривых $x^2(0) \geqslant qx^2(\xi)$, и для асимптотической устойчивости решения достаточно выполнения неравенства

$$|b(t)| < qa \quad (0 < q < 1).$$

3. Рассмотрим еще несколько примеров исследования простых нелинейных систем методом Ляпунова.

Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}, t\right) + f(x(t - h(t))) = 0, \tag{34.16}$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{f(x)}{x} > a > 0, \quad |f'(x)| < L \qquad \text{при } x \neq 0, \tag{34.17}$$

$\varphi(y, t)$, $h(t)$ — непрерывные, периодические функции времени t, удовлетворяющие неравенствам:

$$\frac{\varphi(y, t)}{y} > b > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0, \tag{34.18}$$

$$h(t) \geqslant 0, \quad h(t) \leqslant h \quad (h = \text{const}). \tag{34.19}$$

При $t > h$ (считая, что начальное возмущение имело место при $t \leqslant 0$) уравнение (34.16) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\varphi(y(t), t) - f(x(t)) + \int_{-h(t)}^{0} f'(x(t+\vartheta))\, y(t+\vartheta)\, d\vartheta. \tag{34.20}$$

Рассмотрим функционал

$$V(x(\vartheta), y(\vartheta)) = 2\int_0^x f(\xi)\, d\xi + y^2 + \nu^2 \int_{-h}^{0} \left(\int_{\vartheta_1}^{0} y^2(\vartheta)\, d\vartheta \right) d\vartheta_1 \tag{34.21}$$

и вычислим $\lim \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)$ при $\Delta t \to +0$ вдоль траекторий уравнения (34.16). Имеем:

$$\lim_{\Delta t \to +1} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(34.16)} = -2y\varphi(y, t) + 2\int_{-h(t)}^{0} f'(x(t+\vartheta))\, y(t+\vartheta)\, y(t)\, d\vartheta + \\ + \nu^2 \int_{-h}^{0} (y^2(t) - y^2(t+\vartheta))\, d\vartheta. \tag{34.22}$$

При $\nu = a/h$ из условий (34.17), (34.18) получим теперь оценку

$$\lim_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{(34.16)} < -\int_{-h}^{0} \left(\frac{a}{h} y^2 - 2L\, |y(t)\, y(t+\vartheta)| + \frac{a}{h}\, y^2(t+\vartheta)\right) d\vartheta. \tag{34.23}$$

Для того чтобы функционал V удовлетворял условиям теоремы 31.3, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$h < \frac{a}{L}. \tag{34.24}$$

так как при этих условиях форма переменных $y(t)$, $y(t+\vartheta)$, стоящая под знаком интеграла в правой части равенства (34.23), будет определенно-положительной. Следовательно, при условиях (34.23) правая производная $\lim\limits_{\Delta t\to+0}\frac{\Delta V}{\Delta t}$ вдоль траекторий системы (34.20) не положительна и равенство $\frac{\Delta V}{\Delta t}=0$ при всех $t\geqslant h$ может выполняться лишь при $y(t)=0$. Но в силу второго уравнения (34.20) тождество $y(t)\equiv 0$ при $t\geqslant h$ может выполняться лишь при $x(t)\equiv 0$ для значений $t>t_0>0$. Итак, действительно, при условиях (34.24) функционал V удовлетворяет условиям теоремы 31.3, откуда и следует асимптотическая устойчивость решения $x=0$, $y=0$ уравнения (34.16).

4. Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=f(x(t-h(t)),\ t)\quad (0\leqslant h(t)\leqslant h), \tag{34.25}$$

где $f(x,\ t)$ — непрерывная функция своих аргументов. Предположим, что функция $f(x,\ t)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$, которая удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<L\quad (L=\text{const}). \tag{34.26}$$

При $t>2h$ можно применить следующие преобразования уравнения (34.25):

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t)+(f(x(t-h(t)),\ t)-f(x,\ t)),$$

откуда

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t)-\int\limits_{t-h(t)}^{t}f'_x(x(\xi),\ t)f(x(\xi-h(\xi)),\xi)\,d\xi. \tag{34.27}$$

Рассмотрим функцию $v(x)=x^2$. Вычислим производную $\frac{dv}{dt}$ этой функции вдоль траекторий системы (34.27):

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(34.27)}=2x(t)f(x(t),\ t)-2\int\limits_{t-h(t)}^{t}x(t)f'_x(x(\vartheta),\ t)f(x(\vartheta-h(\vartheta)),\vartheta)\,d\vartheta.$$

Из неравенства (34.26) имеем теперь оценку

$$\frac{dv}{dt}\leqslant 2x(t)f(x(t),\ t)+L^2h(t)|x(t)x(t-\xi)|\quad \text{при}\quad 0<\xi<2h. \tag{34.28}$$

Для выполнения условий теоремы 31.4 достаточно, чтобы правая часть неравенства (34.28) была определенно-отрицательной функцией на кривых

$$qx^2(t-\xi) \leqslant x^2(t),$$

где q — некоторое фиксированное число из интервала $0 < q < 1$. Это будет выполнено, если функции $f(x, t)$ и $h(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, t)}{x} + L^2 h(t) < -\gamma \quad \text{при} \quad \gamma > 0, \ x \neq 0, \tag{34.29}$$

где γ — сколь угодно малое положительное число. Итак, неравенство (34.29) дает достаточное условие асимптотической устойчивости решения $x = 0$ уравнения (34.25).

5. Рассмотрим нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X(x(t), y(t)) + \varphi(y(t-h), t) \quad \left(y = \frac{dx}{dt}, \ h > 0 \quad \text{const}\right), \tag{34.30}$$

где функции X и φ удовлетворяют условиям

$$\frac{X(x, y) - X(x, 0)}{y} < -a, \qquad \frac{X(x, 0)}{x} < -b$$
$$\text{при} \quad x \neq 0, \ y \neq 0, \tag{34.31}$$

где a и b — положительные постоянные,

$$|\varphi(y, t)| \leqslant L|y|. \tag{34.32}$$

Запишем уравнение (34.30) в виде эквивалентной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= X(x, 0) + (X(x, y) - X(x, 0)) + \varphi(y(t-h), t). \end{aligned}\right\} \tag{34.33}$$

Рассмотрим функционал

$$V(x(\vartheta), y(\vartheta)) = -\int_0^x X(\xi, 0)\, d\xi + \frac{y^2}{2} + \frac{a}{2}\int_{-h}^{0} y^2(\xi)\, d\xi. \tag{34.34}$$

Вычислим производную $\frac{dV}{dt}$ вдоль траекторий системы (34.33):

$$\frac{dV}{dt} = (X(x, y) - X(x, 0))\, y + y\varphi(y(t-h), t) +$$
$$+ \frac{a}{2} y^2 - \frac{ay^2(t-h)}{2}.$$

Вследствие условий (34.31) и (34.32) имеем теперь оценку

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{a}{2} y^2(t) + L\,|\,y(t)\,y(t-h(t))\,| - \frac{a}{2} y^2(t-h). \quad (34.35)$$

Для того чтобы функционал V удовлетворял условиям теоремы 31.3, достаточно, чтобы в правой части неравенства (34.35) стояла определенно-отрицательная функция переменных $y(t)$ и $y(t-h)$ (§ 31, стр. 183) или, иначе говоря, чтобы выполнялось неравенство

$$a > L. \quad (34.36)$$

Неравенство (34.36) и дает (в совокупности с условиями (34.33), (34.34)) достаточные условия асимптотической устойчивости решения $x = y = 0$ уравнения (34.30).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., О сходимости процесса регулирования после больших начальных отклонений, Автоматика и телемеханика, т. 7, вып. 2—3, 1946.
2. Айзерман М. А., Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости систем автоматического регулирования, Автоматика и телемеханика, т. 8, вып. 1, 1947.
3. Айзерман М. А., Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем, УМН, т. IV, вып. 4, 1947.
4. Айзерман М. А., Достаточные условия устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами, ПММ, т. 15, вып. 3, 1951.
5. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, Гостехиздат, 1952.
6. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948, стр. 206.
7. Аминов М. Ш., Об одном методе получения достаточных условий устойчивости неустановившегося движения, ПММ, т. 19, вып. 5, 1955.
8. Артемьев Н. А., Осуществимые движения, Известия АН СССР, серия математическая, вып. 3, 1939.
9. Барбашин Е. А., О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными, ДАН СССР, т. V XXII, № 3, 1950.
10. Барбашин Е. А., Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб., т. 29, вып. 2, 1951.
11. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в целом, ДАН, т. 86, вып. 3, 1952.
12. Барбашин Е. А., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ, т. 16, вып. 5, 1952.
13. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н., О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом, ПММ, т. 18, вып. 3, 1954.
14. Барбашин Е. А., Скалкина М. А., К вопросу об устойчивости по первому приближению, ПММ, т. 19, вып. 5, 1955.
15. Болтянский В. Г., Понтрягин Л. С., Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Труды Третьего математического съезда, т. 1, стр. 217 1956.

16. Ведров В. С., Об устойчивости движения, Труды ЦАГИ, вып. 327, 1937.
17. Виноград Р. Э., Замечание о критическом случае устойчивости особой точки на плоскости, ДАН СССР, т. 101, вып. 2, 1955.
18. Вркоч И., Обращение теоремы Четаева, Чехослов. матем. журнал, т. 5 (80), 1955.
19. Гермаидзе В. Е., Об асимптотической устойчивости по первому приближению, ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
20. Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 6, 1957.
21. Горшин С. И., Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями, Известия АН Казахской ССР, № 56, 1948.
22. Горшин С. И., Об устойчивости решения счетной системы дифференциальных уравнений с постоянно действующими возмущениями, Известия АН Казахской ССР, т. 60, вып. 3, 1949.
23. Горшин С. И., Ко второму методу Ляпунова, Известия АН Казахской ССР, т. 97, вып. 4, 1950.
24. Горелик Г. С., К теории запаздывающей обратной связи, Журн. техн. физики, т. 50, 1939.
25. Горбунов А. Д., Об условиях асимптотической устойчивости нулевого решения системы обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений, Вестн. Моск. ун-та, № 9, 1953, стр. 49—55.
26. Дубошин Г. Н., К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений, Труды Астрономического института им. Штернберга, т. 14, вып. 1, 1940.
27. Дувакин А. П., Летов А. М., Об устойчивости регулируемых систем с двумя органами управления, ПММ, т. 18, вып. 2, 1954.
28. Еругин Н. П., О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений, ПММ, т. 14, вып. 5, 1950.
29. Еругин Н. П., Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений, ПММ, т. 14, вып. 6, 1950.
30. Еругин Н. П., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, т. 16, вып. 5, 1952.
31. Еругин Н. П., Качественные методы в теории устойчивости, ПММ, т. 19, вып. 5, 1955.
32. Еругин Н. П., Методы решения вопросов устойчивости в большом. Труды 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 1, М. — Л., Изд-во АН СССР, 1955.
33. Еругин Н. П., О периодических решениях дифференциальных уравнений, ПММ, т. 20, вып. 1, 1956.
34. Ершов Б. А., Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования, ПММ, т. 17. вып. 1, 1953.
35. Ершов Б. А., Одна теорема об устойчивости движения в целом, ПММ, т. 18, вып. 3, 1954.

36. Зубов В. И., Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, ПММ, т. 17, вып. 4, 1953.
37. Зубов В. И., К теории второго метода А. М. Ляпунова, ДАН СССР, т. 99, вып. 3, 1954.
38. Зубов В. И., Вопросы теории второго метода Ляпунова, построение общего решения в области асимптотической устойчивости, ПММ, т. 19, вып. 6, 1955.
39. Зубов В. И., К теории второго метода А. М. Ляпунова, ДАН СССР, т. 100, вып. 5, 1955.
40. Зубов В. И., Методы А. М. Ляпунова и их применение, ЛГУ, 1957.
41. Каменков Г. В., Об устойчивости движения. Сборн. трудов Казанского авиац. института, № 9, 1939.
42. Каменков Г. В., Об устойчивости движения на конечном интервале времени, ПММ, т. 17, вып. 5, 1953.
43. Каменков Г. В., Лебедев А. А., Замечания к статье об устойчивости на конечном интервале времени, ПММ, т. 18, вып. 4, 1954.
44. Красовский Н. Н., К теории второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения, ДАН СССР, т. 109, вып. 3, 1956.
45. Красовский Н. Н., Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений, ПММ, т. 16, вып. 5, 1952.
46. Красовский Н. Н., Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений, ПММ, т. 17, вып. 6, 1953.
47. Красовский Н. Н., Об устойчивости решений системы второго порядка в критических случаях, ДАН СССР, т. 93, вып. 6, 1953.
48. Красовский Н. Н., Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева для стационарных систем дифференциальных уравнений, ПММ, т. 18, вып. 5, 1954.
49. Красовский Н. Н., Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня, Матем. сб., т. 37, вып. 1, 1955.
50. Красовский Н. Н., Об обращении теоремы К. П. Персидского о равномерной устойчивости, ПММ, т. 19, вып. 3, 1955.
51. Красовский Н. Н., Об устойчивости по первому приближению, ПММ, т 19, вып. 5, 1955.
52. Красовский Н. Н., Обращение теорем второго метода А. М. Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению, ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.
53. Красовский Н. Н., К теории второго метода А. М. Ляпунова для исследования устойчивости, Матем. сб., т. 40, вып. 1, 1956.
54. Красовский Н. Н., Достаточные условия устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 98, вып. 6, 1954.
55. Красовский Н. Н., О применении метода функций Ляпунова для уравнений с запаздыванием, ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.
56. Красовский Н. Н., Об асимптотической устойчивости систем с последействием, ПММ, т. 20, вып. 3, 1956.

57. Красовский Н. Н., Об устойчивости при больших начальных возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 3, 1957.
58. Крейн М. Г., О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости, УМН, № 1, вып. 3, 1948.
59. Курцвейль Я., К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехослов. матем. журнал, т. 5 (80), стр. 382—398, 1955.
60. Курцвейль Я., Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения, Чехослов. матем. журнал, т. 6 (81), № 2, стр. 217—259, № 4, стр. 455—484, 1956.
61. Курцвейль Я. и Вркоч И., Об обращении теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости, Чехослов. матем. журнал, т. 7 (82), № 2, стр. 254—272, 1957.
62 Курцвейль Я., Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. Чехослов. матем. журн., т. 7 (82), стр. 418—499, 1957.
63. Кузьмин П. А., Устойчивость при параметрических возмущениях, ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
64. Лебедев А. А., К задаче об устойчивости движеиия на конечном интервале времени, ПММ, т. 18, вып. 1, 1954.
65. Лебедев А. А., Об одном методе построения функций Ляпунова, ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
66. Летов А. М., Устойчивость регулируемых систем с двумя исполнительными органами, ПММ, т. 17, вып. 4, 1953.
67. Летов А. М., Устойчивость неустановившихся движений регулируемых систем, ПММ, т. 19, вып. 3, 1955.
68. Летов А. М., Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.
69. Лурье А. И., Постников В. Н., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, т. 8, вып. 3, 1944.
70. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, 1951.
71. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
72. Лященко Н. Я., К вопросу об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 104, вып. 2, 1955.
73. Малкин И. Г., Проблема существования функций Ляпунова, Изв. Казанского физ.-мат. об-ва, т. V, 1931.
74. Малкин И. Г., Об устойчивости по первому приближению, Сборник научных трудов Казанского авиац. ин-та, № 3, 1935.
75. Малкин И. Г., Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ПММ, т. 8, вып. 3, 1944.
76. Малкин И. Г., Некоторые основные теоремы теории устойчивости движения в критических случаях, ПММ, т. 6, вып. 6, 1942.
77. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, М. — Л., 1952.

78. Малкин И. Г., Теорема об устойчивости по первому приближению, ДАН СССР, т. 86, вып. 6, 1951.
79. Малкин И. Г., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, т. 15, вып. 1, 1951.
80. Малкин И. Г., Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, т. 16, вып. 3, 1952.
81. Малкин И. Г., Об устойчивости систем автоматического регулирования, ПММ, т. 16, вып. 4, 1952.
82. Малкин И. Г., К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, ПММ, т. 18, вып. 2, 1954.
83. Мышкис А. Д., Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, Гостехиздат, 1951.
84. Немыцкий В. В., Метод неподвижных точек в анализе, УМН, т. 1, 1936.
85. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Изд. 2-е, Гостехиздат, М. — Л., 1949.
86. Немыцкий В. В., Оценка области асимптотической устойчивости нелинейных систем. ДАН СССР, т. 101, вып. 5, 1955.
87. Персидский К. П., Об одной теореме Ляпунова, ДАН СССР, т. 14, № 9, 1937.
88. Персидский К. П., К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений, Изв. Физ.-мат. об-ва при Казанском гос. ун-те, т. VIII, 1936—1937
89. Персидский К. П., К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений, Диссертация, 1946.
90. Персидский К. П., Об устойчивости решений дифференциальных уравнений, Известия АН Казахской ССР, т. 97, вып. 4, 1950.
91. Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1947.
92. Плисс В. А., Качественная картина интегральных кривых в целом и построение с любой точностью области устойчивости одной системы двух дифференциальных уравнений, ПММ, т. 17, вып. 5, 1953.
93. Плисс В. А., Необходимые и достаточные условия устойчивости для системы n дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 103, вып. 1, 1955.
94. Плисс В. А., Исследование одной нелинейной системы трех дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 117, вып. 2, 1957.
95. Разумихин Б. С., Об устойчивости тривиального решения второго порядка, ПММ, т. 19, вып. 3, 1955.
96. Разумихин Б. С., Об устойчивости неустановившихся движений, ПММ, т. 20, вып. 2, 1956.
97. Разумихин Б. С., Об устойчивости систем автоматического регулирования с одним регулирующим органом, Автоматика и телемеханика, т. 17, вып. 11, 1956.
98. Разумихин Б. С., Об устойчивости систем с запаздываниями, ПММ т. 20, вып. 3, 1956.

99. Разумихин Б. С., Оценка решений системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
100. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
101. Румянцев В. В., Об устойчивости винтового движения твердого тела в жидкости при условиях С. А. Чаплыгина, ПММ, т. 19, 1955.
102. Румянцев В. В., Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела, ПММ, т. 20, вып. 1, 1956.
103. Румянцев В. В., К теории устойчивости регулируемых систем, ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.
104. Румянцев В. В., К устойчивости перманентных движений твердого тела около неподвижной точки, ПММ, т. 21, вып. 3, 1957.
105. Скалкина М. А., О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным, ДАН СССР, т. 104, вып. 4, 1955.
106. Скачков Б. Н., Об устойчивости в целом одного класса нелинейных систем автоматического регулирования, Вестник Ленингр. ун-та № 1 и № 13, 1957.
107. Спасский Р. А., Об одном классе регулируемых систем, ПММ, т. 18, вып. 3, 1954.
108. Старжинский В. М., Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы, ПММ, т. 16, вып. 3, 1952.
109. Старжинский В. М., Об устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы, ПММ, т. 17, вып. 1, 1953.
110. Старжинский В. М., Об устойчивости неустановившихся движений в одном специальном случае, ПММ, т. 19, вып. 4, 1955.
111. Тузов А. П., Вопросы устойчивости для одной системы регулирования Вестник Ленингр. ун-та, вып. 2, 1955.
112. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Гостехиздат, 1948.
113. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1949.
114. Харасахал В., Об устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений по первому приближению, Известия АН Казахской ССР, т. 60, вып. 3, 1949.
115. Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.
116. Цянь Сюэ-Сень, Техническая кибернетика, ИЛ, 1956.
117. Четаев Н. Г., О наименьшем характеристичном числе, ПММ, т. 9, вып. 3, 1945.
118. Четаев Н. Г., Об одной задаче Коши, ПММ, т. 9, вып. 5, 1945.
119. Четаев Н. Г., О выборе параметров устойчивой механической системы, ПММ, т. 15, вып. 2, 1951.
120. Четаев Н. Г., О неустойчивости равновесия в некоторых случаях, когда функция сил не есть максимум, ПММ, т. 16, вып. 1, 1952.

121. Четаев Н. Г., Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа, ПММ, т. 18, вып. 1, 1954.
122. Четаев Н. Г., Об одном свойстве уравнений Пуанкаре, ПММ, т 19, вып. 5, 1955.
123. Четаев Н. Г., О некоторых задачах устойчивости движения в механике, ПММ, т. 20, вып. 3, 1956.
124. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Изд. 2-е, Гостехиздат, 1956.
125. Шиманов С. Н., Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка, ПММ, т. 17, вып. 3, 1953.
126. Эльсгольц Л. Э., Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений, УМН, т. 9, вып. 4, 1954.
127. Эльсгольц Л. Э., Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, 1955.
128. Якубович В. А., Об одном классе нелинейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 117, вып. 1, 1957.
129. Якубович В. А., Об устойчивости в целом невозмущенного движения для уравнений непрямого автоматического регулирования. Вестник Ленингр. ун-та, № 19, вып. 4, 1957.
130. Antosiewicz H. A., Stable systems of differential equations with integrable perturbations terms, J. London Math. Soc., 1956, 31, № 122, стр. 208—212.
131. Bellman R., On the existence and boundedness of solutions of nonlinear differential-difference equations, Ann. of Math., т. 50, вып. 2, 1949.
132. Bellman R., A Surwey of the Theory of the Boundedness, Stability and Asymptotic Behavior of Solutions of Linear and Nonlinear Differential and Difference Equations, Office of Naval Research, Washington, D. C., 1949.
133. Cartwright M., Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton, т. 1, 1950.
134. Hahn W., Über stabilität bei nichtlinearen systemen, Zeitschr. angew. Math. und Mech., т. 35, вып. 12, 1955.
135. JoshizawaT., On the stability of solutions of a system of the differential equations, Memoirs of the College of science Univ. of Kyoto, XXIX, № 1, серия A, math., стр. 27—33, 1955.
136. Massera J. L., On Liapounoffs condition of stability, Annals of Mathematics, т. 50, № 3, 1949.
137. Massera J. L., Estabilidad total y vibraciones aproximadamente periodicas, Publs. Inst. mat. y estadist, Fac. ingr., т. 2, № 7, 1954.
138. Massera J. L., Contributions to stability theory, Annals of Mathematics, т. 64, вып. 1, стр. 182—206, 1956.
139. Minorsky N., Control problems, Journ. of the Franklin. Inst., т. 232, № 6, 1941.
140. Wright E. M., The linear difference-differential equations with assymptotically constant coeficients, Amer. Journ. Math., т. 70, 1948.
141. Wright E. M., The stability of solutions of non-linear difference-differential equations, Proc. Roy. Soc., Edinburgh, т. 63, вып. 1, 1950.