TRANSZENDENTE FUNKTIONEN

von

Prof. Dr. ADOLF KRATZER
Münster (Westf.)

und

Prof. Dr. WALTER FRANZ
Hamburg

LEIPZIG 1960

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT

А. Кратцер и В. Франц

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Перевод с немецкого
Н. Я. Виленкина

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

АННОТАЦИЯ

Эта книга посвящена теории часто встречающихся в приложениях специальных функций — гипергеометрической, вырожденной гипергеометрической, сферических и цилиндрических функций. При сравнительно небольшом объеме она содержит очень богатый материал, охватывая почти все формулы, необходимые для практической работы с этими функциями. Изучение всех указанных функций ведется в комплексной области с использованием аналитической теории дифференциальных уравнений.

Книга будет полезна всем, встречающимся в практической деятельности со специальными функциями: физикам, инженерам, специалистам по прикладной математике. Она интересна также студентам и аспирантам университетов и технических вузов с повышенным курсом математики.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучаемые в этой книге трансцендентные функции являются решениями гипергеометрического и вырожденного гипергеометрического уравнений. Однако они важны не только непосредственно как решения этих уравнений; разложения по этим функциям используются при решении многих других дифференциальных уравнений. Важнейшие формы интересующего физиков и инженеров волнового уравнения являются частными случаями гипергеометрического или вырожденного гипергеометрического уравнения. Поэтому мы поставили перед собой задачу развить теорию важных для приложений специальных функций, исходя из дифференциального уравнения Римана. Соответственно этому основная часть книги посвящена теории гипергеометрической функции, сферических функций, вырожденной гипергеометрической функции и цилиндрических функций. Нашей целью было получить свойства этих функций, исходя из их интегральных представлений и поведения на римановой поверхности.

Разумеется, в одной книге не слишком большого объема нельзя было полностью изложить все свойства этих функций и связи между ними; каждой из этих групп функций посвящены обширные монографии. Мы хотели указать здесь по крайней мере вывод тех соотношений, которые имеются в распространенных справочниках, чтобы дать возможность читателю не только понимать эти формулы и осмысленно применять их, но и получать самостоятельно соотношения, которые он не сможет найти в справочниках. Поскольку в последние годы в связи с развитием теоретико-функциональных методов решения краевых задач стало необходимым знание геометрических мест нулей используемых функций, мы посвятили много места этому вопросу для особенно важных в приложениях цилиндрических функций.

А. Кратцер, В. Франц

Мюнстер и Гамбург, ноябрь 1960

§ 1

B- И Г-ФУНКЦИИ

1.1. Правила вычисления с факториалами. В этой книге нам часто будут встречаться произведения вида

$$a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+\mu-1),$$

где a — любое комплексное число и μ — положительное целое число. Такие выражения называются *факториалами*. Следуя Ватсону [1]), введем сокращенное обозначение

$$(a)_\mu \equiv a(a+1)(a+2)\ldots(a+\mu-2)(a+\mu-1), \quad (a)_0 \equiv 1 \tag{1}$$

(a — комплексное, $\mu \geqslant 0$ — целое).

Для факториалов имеют место следующие формулы, непосредственно вытекающие из их определения:

$$(a)_\mu = (-1)^\mu (1-a-\mu)_\mu \tag{2}$$

и

$$(a)_\mu = (a)_\nu (a+\nu)_{\mu-\nu}, \tag{3}$$

а также

$$(2a)_{2\mu} = 2^{2\mu}(a)_\mu \left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\mu! = (1)_\mu, \tag{5}$$

а также, что биномиальные коэффициенты можно записать в следующем виде:

$$\binom{a}{\mu} = \frac{(a-\mu+1)_\mu}{(1)_\mu} = (-1)^\mu \frac{(-a)_\mu}{(1)_\mu}. \tag{6}$$

Далее имеют место следующие формулы, аналогичные формуле бинома Ньютона:

$$(a+b)_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} (a+\lambda)_{\nu-\lambda}(b+1-\lambda)_\lambda = (a)_\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} \binom{\nu}{\lambda} \frac{(b+1-\lambda)_\lambda}{(a)_\lambda} \tag{7a}$$

[1]) Ватсон, стр. 113. Аппель использует символ (a, μ) (см. список литературы в конце книги).

и

$$(a-b)_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} (a+\lambda)_{\nu-\lambda} (b)_\lambda = (a)_\nu \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} \frac{(b)_\lambda}{(a)_\lambda}. \quad (7б)$$

Достаточно доказать одну из этих двух формул, поскольку, в силу равенства (2), они вытекают одна из другой. Проведем доказательство с помощью метода математической индукции. Равенство (7б) справедливо при $\nu = 1$. Предположим, что оно уже доказано для индекса ν. Тогда

$$(a-b)_{\nu+1} = (a-b)_\nu (a-b+\nu) = (a-b)_\nu (a+\nu) - b(a-b)_\nu.$$

Так как теорема справедлива для ν, то

$$(a-b)_\nu (a+\nu) = (a)_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} \frac{(b)_\lambda}{(a)_\lambda}$$

и

$$(a-b)_\nu b = (a+1-(b+1))_\nu b =$$

$$= (a+1)_\nu a \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} \frac{(b+1)_\lambda}{(a+1)_\lambda} \frac{b}{a} = (a)_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} \frac{(b)_{\lambda+1}}{(a)_{\lambda+1}}.$$

Заменим здесь индекс суммирования λ на $\lambda' = \lambda + 1$; мы получим

$$(a-b)_\nu b = -(a)_{\nu+1} \sum_{\lambda'=0}^{\nu+1} (-1)^{\lambda'} \binom{\nu}{\lambda'-1} \frac{(b)_{\lambda'}}{(a)_{\lambda'}}.$$

(Суммирование можно формально начинать с $\lambda' = 0$, так как соответствующий член равен нулю.) Отсюда вытекает, что

$$(a-b)_{\nu+1} = (a)_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} (-1)^\lambda \frac{(b)_\lambda}{(a)_\lambda} \left[\binom{\nu}{\lambda} + \binom{\nu}{\lambda-1} \right].$$

(В первой сумме мы суммируем не до ν, а до $\nu+1$, поскольку при этом прибавляется лишь член, равный нулю.) В силу того что $\binom{\nu}{\lambda} + \binom{\nu}{\lambda-1} = \binom{\nu+1}{\lambda}$, получаем

$$(a-b)_{\nu+1} = (a)_{\nu+1} \sum_{\lambda=0}^{\nu+1} (-1)^\lambda \binom{\nu+1}{\lambda} \frac{(b)_\lambda}{(a)_\lambda}.$$

Но это и есть равенство (7б) для индекса $\nu+1$. Тем самым это равенство доказано для всех положительных целочисленных индексов.

1.2. Регуляризация определенных интегралов. Гипергеометрические функции можно представить в виде интегралов вида

$$I(a_1, a_2) = \int_{z_1}^{z_2} (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz, \tag{8}$$

где множитель $f(z)$ в подинтегральной функции регулярен в точках z_1 и z_2. Этот интеграл имеет смысл, если путь интегрирования не проходит через особые точки подинтегральной функции и $\mathrm{Re}(a_1+1)>0$ и $\mathrm{Re}(a_2+1)>0$. При фиксированных z_1 и z_2 равенство (8) определяет $I(a_1, a_2)$ как аналитическую функцию от a_1 и a_2 в области $\mathrm{Re}(a_1+1)>0$, $\mathrm{Re}(a_2+1)>0$. Чтобы определить ее значения при любых a_1 и a_2, аналитически продолжим $I(a_1, a_2)$ по a_1 и a_2. Мы покажем сейчас, что это аналитическое продолжение задается формулой

$$I(a_1, a_2) = \oint_{(z_1)}^{(z_2)} (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz \equiv$$

$$\equiv \frac{\oint^{(z_2+,\ z_1+,\ z_2-,\ z_1-)} (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz}{(1 - e^{2i\pi a_1})(1 - e^{2i\pi a_2})}. \tag{9}$$

Мы окружаем, таким образом, точки z_1 и z_2 двойной петлей, причем требуем, чтобы эта петля не охватывала других особых точек

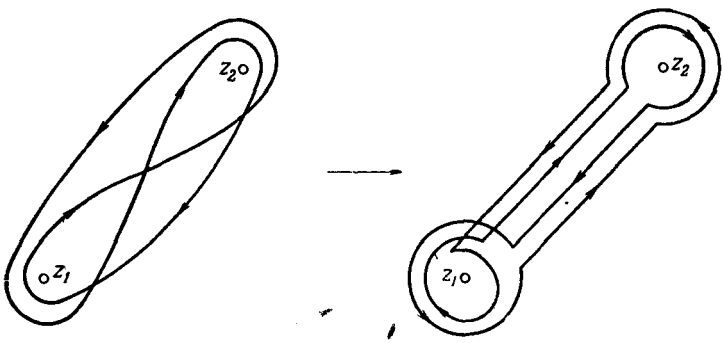


Рис. 1. Разложение двойной петли.

подинтегральной функции, кроме точек z_1 и z_2, и чтобы ее можно было стянуть в путь, вдоль которого берется интеграл (8). Как видно из рис. 1, интеграл, взятый по двойной петле, может быть разложен

следующим образом:

$$\oint^{(z_2+,\ z_1+,\ z_2-,\ z_1-)} = (1 - e^{2i\pi a_2} + e^{2i\pi(a_2+a_1)} - e^{2i\pi a_1}) \int_{z_1+\delta}^{z_2-\varepsilon} + $$

$$+ (1 - e^{2i\pi a_1}) \oint_{z_2-\varepsilon}^{(z_2+)} - (1 - e^{2i\pi a_2}) \oint_{z_1+\delta}^{(z_1+)}.$$

Чтобы устранить многозначность подинтегральной функции, условимся считать, что значения функции выбраны таким образом, что на первом отрезке двойной петли они совпадают со значениями в точках пути, идущего из $z_1+\delta$ в $z_2-\varepsilon$. Тогда мы получим

$$I(a_1,\ a_2) = \int_{z_1+\delta}^{z_2-\varepsilon} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz + $$

$$+ \frac{\oint_{z_2-\varepsilon}^{(z_2+)} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz}{1-e^{2i\pi a_2}} - \frac{\oint_{z_1+\delta}^{(z_1+)} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz}{1-e^{2i\pi a_1}}.$$

Положим $z - z_1 = \delta e^{i\varphi}$ и разложим подинтегральную функцию в последнем интеграле по степеням $z - z_1$:

$$\oint_{z_1+\delta}^{(z_1+)} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz =$$

$$= \delta^{a_1+1} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(a_1+1)}\, i\,d\varphi \left((z_1-z_2)^{a_2} f(z_1) + R\right) =$$

$$= \frac{\delta^{a_1+1}}{a_1+1}\left[(e^{2i\pi(a_1+1)} - 1)(z_1-z_2)^{a_2} f(z_1) + R'\right].$$

Остаточный член R' является степенным рядом по возрастающим степеням δ, не содержащим члена нулевого порядка; поэтому он стремится к нулю, когда $\delta \to 0$. Выполняя соответствующие преобразования во втором интеграле, получаем

$$I(a_1,\ a_2) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_{z_1+\delta}^{z_2-\varepsilon} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^{a_2+1} e^{-i\pi a_2}}{a_2+1}(z_2-z_1)^{a_1} f(z_2) + \frac{\delta^{a_1+1}}{a_1+1}(z_1-z_2)^{a_2} f(z_1) \right\}.$$

Если $\operatorname{Re}(a_1+1)>0$ и $\operatorname{Re}(a_2+1)>0$, то интегралы по путям, окружающим особые точки, стремятся к нулю, когда δ и ε стремятся к нулю, в то время как первое слагаемое переходит в $\int_{z_1}^{z_2}$. Поскольку подинтегральная функция в равенстве (9) аналитически зависит от a_1 и a_2, то выражение, определяемое формулой (9), является аналитической функцией от a_1 и a_2. Поэтому равенство (9) дает искомое аналитическое продолжение интеграла (8) для любых комплексных значений аргументов a_1 и a_2.

Рис. 2. Путь интегрирования для равенства (9а).

При $\operatorname{Re}(a_1+1)>0$ формулу (9) можно упростить, поскольку интеграл по пути, охватывающему точку z_1, обращается в нуль. Поэтому имеет место следующее утверждение (см. рис. 2).

Если $\operatorname{Re}(a_1+1)>0$, то аналитическое продолжение интеграла (8) для любых значений переменного a_2 дается формулой

$$\int_{z_1}^{(z_2)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2}f(z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{1-e^{2i\pi a_2}}\oint_{z_1}^{(z_2+)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2}f(z)\,dz. \qquad (9а)$$

При вычислении интеграла следует иметь в виду, что в равенстве (9а) путь интегрирования не замкнут на римановой поверхности. Подинтегральная функция принимает различные значения в начале и в конце пути. Представление в виде равенства (9а) применимо также и в случае, когда в точке z_1 нет особенности: если функция $g(z)$ регулярна на пути интегрирования, соединяющем точки z_1 и z_2, то равенство

$$\int_{z_1}^{(z_2)}(z-z_2)^{a}g(z)\,dz=\frac{\oint_{z_1}^{(z_2+)}(z-z_2)^{a}g(z)\,dz}{1-e^{2i\pi a}} \qquad (10)$$

определяет аналитическое продолжение по a функции

$$\int_{z_1}^{z_2}(z-z_2)^{a}g(z)\,dz \qquad (\operatorname{Re}(a+1)>0).$$

Из равенства (9), определяющего аналитическое продолжение, непосредственно вытекает, что

$$\oint\limits_{(z_2)}^{(z_1)} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz = -\oint\limits_{(z_1)}^{(z_2)} (z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{a_2} f(z)\,dz. \tag{11}$$

Так как соответствующее равенство должно быть справедливо также и при использовании определения (10), то мы должны положить

$$\oint\limits_{(z_2)}^{z_1} (z-z_2)^{a} g(z)\,dz = -\oint\limits_{z_1}^{(z_2)} (z-z_2)^{a} g(z)\,dz = \frac{\int\limits_{z_1}^{(z_2+)} (z-z_2)^{a} g(z)\,dz}{e^{2i\pi a}-1}. \tag{12}$$

В равенстве (10) значение подинтегральной функции выбрано так, что она в начале пути интегрирования принимает те же значения, что и на пути от z_1 к z_2 в обычном интеграле. Поэтому в равенстве (12) подинтегральная функция в начале петли должна иметь тот же аргумент, что и в интеграле, стоящем слева при $\operatorname{Re}(a+1)>0$.

Путь интегрирования может быть упрощен для некоторых специальных значений a_1 и a_2.

1.2.1. $a_1+a_2=\nu$ — целое число. В этом случае путь интегрирования замкнут на римановой поверхности и при простом обходе вокруг обеих точек разветвления. Двойная петля распадается на два

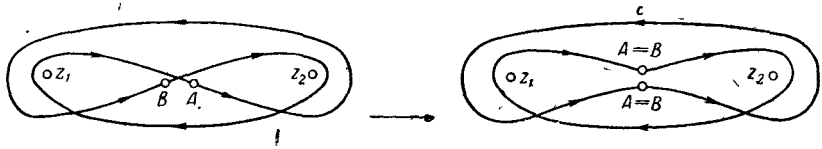


Рис. 3. Путь интегрирования для целочисленного значения a_1+a_2.

простых обхода (см. рис. 3), поскольку точки A и B совпадают на римановой поверхности, если совпадают соответствующие им точки плоскости z. Мы имеем

$$\oint\limits_{A}^{(z_2+,\,z_1+,\,z_2-,\,z_1-)} = \oint\limits_{A}^{(z_2+,\,z_1+)} + \oint\limits_{A}^{(z_2-,\,z_1-)} = \oint\limits_{A}^{(z_2+,\,z_1+)} - \oint\limits_{A}^{(z_1+,\,z_2+)}.$$

Но значение функции в точке $A=B$ равно ее значению в точке C, умноженному на $e^{2i\pi a_1}$. Поэтому (положительный обход вокруг z_1)

$$\oint\limits_{A}^{(z_1+,\,z_2+)} = e^{2i\pi a_1}\oint\limits_{C}^{(z_1+,\,z_2+)} = e^{2i\pi a_1}\oint\limits_{A}^{(z_2+,\,z_1+)},$$

так что

$$I(a_1,\ \nu-a_1)=\oint\limits_{(z_1)}^{(z_2)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{\nu-a_1}f(z)\,dz=$$

$$=\frac{\oint\limits^{(z_2+,\,z_1+)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{\nu-a_1}f(z)\,dz}{1-e^{-2i\pi a_1}}\qquad(\nu\text{ — целое}).\quad(13)$$

1.2.2. $a_1-a_2=\nu$ **— целое число.** В этом случае двойную петлю можно разложить на две петли, имеющие форму восьмерки. Точки B

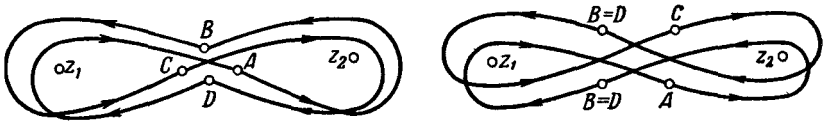


Рис. 4. Путь интегрирования для целочисленного значения a_1-a_2.

и D совпадают на римановой поверхности, если совпадают соответствующие им точки на плоскости z (см. рис. 4). Поэтому

$$\oint\limits^{(z_2+,\,z_1+,\,z_2-,\,z_1-)}=\int\limits_A^B+\int\limits_B^C+\int\limits_C^D+\int\limits_D^A=$$

$$=\int\limits_A^B+\int\limits_{D=B}^{A}-\left(\int\limits_D^C+\int\limits_C^{B=D}\right)=\oint\limits_A^{(z_2+,\,z_1-)}-\oint\limits_D^{(z_2+,\,z_1-)}.$$

Поскольку значение подинтегральной функции в точке D равно ее значению в точке A, умноженному на $e^{2\pi i a_1}$ (мы переходим из A в D, обходя точку z_1 в положительном направлении), то

$$\oint\limits^{(z_2+,\,z_1+,\,z_2-,\,z_1-)}=(1-e^{2i\pi a_1})\oint\limits^{(z_2+,\,z_1-)}$$

и потому

$$I(a_1,\ \nu+a_1)=\oint\limits_{(z_1)}^{(z_2)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{\nu+a_1}f(z)\,dz=$$

$$=\frac{\oint\limits^{(z_2+,\,z_1-)}(z-z_1)^{a_1}(z-z_2)^{\nu+a_1}f(z)\,dz}{1-e^{2i\pi a_1}}\qquad(\nu\text{ — целое число}).\quad(14)$$

Это соотношение справедливо для всех целых значений ν, в частности и при $\nu=0$, т. е. при $a_1=a_2$.

1.2.3. $a_1 = \nu$ **— целое число.** Если один из показателей является целым, то мы выберем путь интегрирования так, как это изображено на рис. 4 слева. Тогда для любых a_1 и a_2 имеем

$$\oint^{(z_2+,\, z_1+,\, z_2-,\, z_1-)} = \int_A^B - \int_D^C - \left(\int_A^D - \int_B^C \right) = (1 - e^{2i\pi a_1}) \int_A^B - (1 - e^{2i\pi a_2}) \int_A^D .$$

Если при этом $a_1 = \nu > -1$, то второй интеграл, вычисленный по пути, обходящем точку разветвления z_1, равен нулю. Поэтому, как и в равенстве (9а), имеем

$$I(\nu,\, a_2) = \oint_{z_1}^{(z_2)} (z - z_1)^{\nu} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz = \frac{\oint_{z_1}^{(z_2+)} (z - z_1)^{\nu} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz}{1 - e^{2i\pi a_2}}$$

($\nu \geqslant 0$ — целое число). (15)

Если же $\nu \leqslant -1$, то при обходе вокруг точки z_1 получается вычет и вследствие наличия знаменателя $1 - e^{2i\pi\nu}$ функция $I(\nu, a_2)$ обращается в бесконечность:

$$\oint_{(z_1)}^{(z_2)} (z - z_1)^{-\nu} (z - z_2)^{a_2} f(z)\, dz = \infty \qquad (\nu > 0 \text{ — целое}). \quad (15а)$$

Применяя равенство (15), надо иметь в виду, что, вообще говоря, путь интегрирования *не* является замкнутым на римановой поверхности.

1.3. B-функция. Простейшим примером интегралов рассмотренного выше вида является *интеграл Эйлера первого рода*:

$$\mathrm{B}(p,\, q) \equiv \oint_{(0)}^{(1)} t^{p-1} (1 - t)^{q-1}\, dt. \quad (16)$$

Он определяет B-*функцию*. Значения функций в подинтегральном выражении выбраны так, чтобы в обычном интеграле, которым можно заменить выражение (16), при $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$, t и $1 - t$ были положительны и вещественны на пути интегрирования вдоль вещественной оси, т. е. чтобы аргументы этих чисел равнялись нулю. Применяя результаты п. 1.2, имеем при $\mathrm{Re}\, p > 0$ и $\mathrm{Re}\, q > 0$

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1}\, dt \qquad (\mathrm{Re}\, p > 0,\ \mathrm{Re}\, q > 0). \quad (16а)$$

Подстановка $t = \frac{u}{1+u}$ преобразует интеграл (16а) в интеграл

$$\mathrm{B}(p,\, q) = \oint_{(0)}^{(\infty)} \frac{u^{p-1}\, du}{(1+u)^{p+q}}. \quad (17)$$

Так как подинтегральная функция в равенстве (16) аналитически зависит от p и q, то $B(p, q)$ является аналитической функцией от p и q. Так как, далее, подинтегральная функция конечна при всех значениях p и q, а путь интегрирования также конечен, то эта функция может иметь полюс лишь в случае, когда знаменатель в равенстве (9) обращается в нуль. Но это может иметь место лишь при целых значениях p и q. При этом, как было показано в п. 1.1.3, лишь при отрицательных целых значениях $p=-1$ или $q=-1$ обращение знаменателя в нуль влечет за собой обращение функции в бесконечность. Мы доказали, таким образом, следующее утверждение: *функция* $B(p, q)$ *для всех значений* p *и* q *конечна и непрерывна, за исключением точек* $p=-\nu$ *или* $q=-\nu$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$. Эти значения требуют дополнительного исследования.

1.3.1. Свойства B-функции. Заменим в равенствах (16) и (16а), определяющих B-функцию, переменную интегрирования t на $1-t$; тогда, меняя направление пути интегрирования (заменяя dt на $-dt$), получим

$$\oint^{(1+,0+,1-,0-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = -\oint^{(0+,1+,0-,1-)} (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt = \oint^{(1+,0+,1-,0-)} (1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt,$$

и потому

$$B(p, q)=B(q, p). \tag{18}$$

Таким образом, B-*функция симметрична относительно своих аргументов.*

Из равенства $1=t+(1-t)$ следует

$$\oint^{(1+,0+,1-,0-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \oint^{(1+,0+,1-,0-)} t^{p}(1-t)^{q-1}\,dt + \oint^{(1+,0+,1-,0-)} t^{p-1}(1-t)^{q}\,dt.$$

Поскольку прибавление целого числа к p или q не меняет значений $e^{2\pi ip}$ и $e^{2\pi iq}$, то это равенство можно переписать в виде

$$B(p, q)=B(p+1, q)+B(p, q+1). \tag{19}$$

Далее имеем

$$p\int t^{p-1}(1-t)^{q}\,dt = \int \frac{d}{dt}[t^{p}(1-t)^{q}]\,dt + q\int t^{p}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

Выберем слева в качестве пути интегрирования двойную петлю. Тогда первый интеграл справа обращается в нуль, поскольку зна-

чение функции $t^p(1-t)^q$ не меняется при обходе по замкнутому пути на римановой поверхности. Отсюда следует, что

$$pB(p, q+1)=qB(p+1, q). \tag{20}$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $pB(p+1, q)$; мы получим тогда, используя равенство (19), часто применяемую формулу

$$B(p+1, q)=\frac{p}{p+q}B(p, q). \tag{21}$$

Повторно применяя это равенство и пользуясь сокращенным обозначением, определенным равенством (1), получаем

$$B(p+\nu, q)=\frac{(p)_\nu}{(p+q)_\nu}B(p, q)$$

($\nu \geqslant 0$ — целое число). (22)

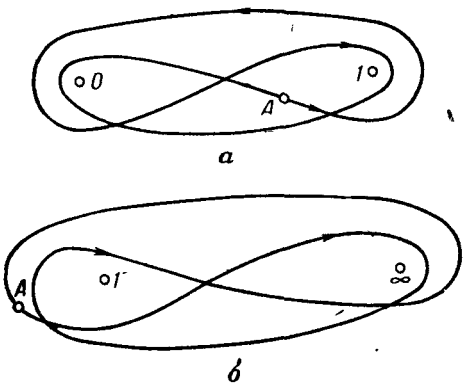


Рис. 5. Преобразование двойной петли.

Частным случаем этого равенства является равенство

$$B(p, \nu)=\frac{(1)_{\nu-1}}{(p+1)_{\nu-1}}B(p, 1). \tag{22a}$$

Поскольку подинтегральная функция имеет особенности лишь в точках 0, 1, ∞, то на числовой сфере можно стянуть двойную петлю, окружающую точки 0, 1, в двойную петлю, окружающую точки 1, ∞. Точке A на рис. 5, *а* соответствует при этом точка A на рис. 5, *б*. По *теореме Коши* имеем тогда

$$\oint_A^{(1+, 0+, 1-, 0-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\oint_A^{(\infty-, 1-, \infty+, 1+)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$

Подстановка $t=1/s$ $1-t=(s-1)/s$ переводит бесконечно удаленную точку в нуль. Мы получим (см. рис. 6)

$$\oint_A^{(\infty-, 1-, \infty+, 1+)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt=-\oint_{A'}^{(0-, 1-, 0+, 1+)} s^{-(p+q)}(s-1)^{q-1}\,ds=$$

$$=\oint_{A'}^{(1-, 0-, 1+, 0+)} s^{-(p+q)}(s-1)^{q-1}\,ds.$$

Чтобы привести этот интеграл в соответствие с B-интегралом, надо заменить $s-1$ на $1-s$. Для этого заметим, что в точке A вели-

чины t и $1-t$, а соответственно в точке A' величины s и $s-1$ имеют нулевой аргумент. В точке B аргумент $s-1$ равен $-\pi$ (половина отрицательного обхода вокруг $s=1$). Поскольку в этой точке должно выполняться равенство $\arg(1-s)=0$, то надо положить $s-1=(1-s)e^{-i\pi}$. Очевидно, $\arg(s_B)=-2\pi$, поскольку переход из точки A' в точку B выполняется при помощи обхода вокруг точки $s=0$ в отрицательном направлении. Так как показатель при s равен $-(p+q)$, то значение подинтегрального выражения получается из значения, соответствующего выбору $\arg(s_B)=0$, умножением на $e^{2i\pi(p+q)}$. Отсюда следует

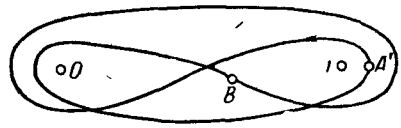


Рис. 6. Путь интегрирования после инверсии.

$$\oint_A^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \oint_{A'}^{(1-,\,0-,\,1+,\,0+)} s^{-(p+q)}(s-1)^{q-1}\,ds =$$

$$= e^{2i\pi(p+q)}e^{-i\pi(q-1)} \oint_B^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} s^{-(p+q)}(1-s)^{q-1}\,ds.$$

Из равенства (16), определяющего B-функцию, имеем

$$(1-e^{2i\pi p})(1-e^{2i\pi q})\,\mathrm{B}(p,\,q) =$$

$$= -e^{i\pi q}e^{2i\pi p}(1-e^{-2i\pi(q+p)})(1-e^{2i\pi q})\,\mathrm{B}(1-p-q,\,q).$$

Принимая во внимание, что $e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=2i\sin\varphi$, получаем отсюда

$$\sin p\pi\,\mathrm{B}(p,\,q)=\sin(p+q)\,\pi\,\mathrm{B}(1-p-q,\,q). \qquad (23)$$

Применяя это равенство при $q=1$, убеждаемся, что для любого $p\neq 0$

$$\mathrm{B}(-p,\,1)=-\mathrm{B}(p,\,1). \qquad (24)$$

1.3.2. B-функция для специальных значений переменных. В случае когда между аргументами B-функции выполняются некоторые соотношения целочисленности, мы можем воспользоваться результатами пунктов 1.2.2 и 1.2.3.

1.3.2.1. $p+q=\nu$ — целое число. Если сумма аргументов функции $\mathrm{B}(p,\,q)$ — целое число, то из равенства (13) имеем

$$\mathrm{B}(p,\,\nu-p)=\frac{1}{1-e^{-2i\pi p}}\oint^{(1+,\,0+)} t^{p-1}(1-t)^{\nu-p-1}\,dt.$$

Так как, кроме точек $t=0$ и $t=1$, лишь точка $t=\infty$ является особой, мы можем деформировать положительный обход вокруг точек 1 и 0 в отрицательный обход вокруг бесконечно удаленной

точки (см. рис. 7). Поскольку в точке A должно выполняться равенство $\arg(t_A - 1) = 0$, а с другой стороны, $\arg(1 - t_A) = \pi$, то мы должны положить $1 - t = e^{i\pi}(t - 1)$. С помощью подстановки $t = 1/s$ и $t - 1 = (1 - s)/s$ мы получаем поэтому

$$\oint\limits^{(1+,\,0+)} t^{p-1}(1-t)^{\nu-p-1}\,dt = e^{i\pi(\nu-p-1)} \oint\limits_A^{(\infty-)} t^{p-1}(t-1)^{\nu-p-1}\,dt =$$

$$= -e^{i\pi(\nu-p-1)} \oint\limits^{(0-)} s^{-\nu}(1-s)^{\nu-p-1}\,ds.$$

Разложим функцию $(1 - s)^{\nu-p-1}$ по формуле бинома и изменим порядок суммирования и интегрирования; это допустимо, поскольку

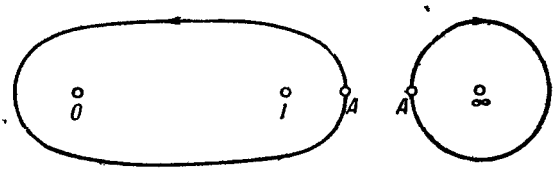


Рис. 7. Путь интегрирования для B-функции в случае, когда сумма независимых переменных — целое число.

биномиальное разложение равномерно сходится. Таким образом

$$\oint\limits^{(1+,\,0+)} t^{p-1}(1-t)^{\nu-p-1}\,dt = -e^{i\pi(\nu-p)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \binom{\nu-p-1}{\varkappa} \oint\limits^{(0+)} s^{-\nu+\varkappa}\,ds.$$

Если $\nu > 0$, то при $\varkappa = \nu - 1$ мы имеем вычет, а потому

$$B(p,\ \nu-p) = \frac{-e^{i\pi\nu}e^{-i\pi p}(-1)^{\nu-1}}{1-e^{-2i\pi p}}\, 2i\pi \binom{\nu-p-1}{\nu-1}.$$

В силу формулы (6), мы можем переписать это равенство в следующем виде:

$$B(p,\ \nu-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{(1-p)_{\nu-1}}{(\nu-1)!} \qquad (25а)$$

$$(\nu > 0 \text{ — целое}).$$

Поскольку при $\nu \leqslant 0$ вычет равен нулю, то имеем[1])

$$B(p,\ \nu-p) = 0 \qquad (\nu \leqslant 0 \text{ — целое},\ p \text{ — нецелое}). \qquad (25б)$$

[1]) Если p — целое, то мы получаем выражение вида 0/0 (см. 1.3.2.3).

Как частный случай отметим

$$B(p,\ 1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{26а}$$

Полагая здесь $p=1/2$, получаем

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\pi. \tag{26б}$$

1.3.2.2. $p-q=\nu$ — целое число. Если разность значений аргументов B-функции — целое число, то из равенства (22) следует, что

$$B(p,\ p+\nu)=\frac{(p)_\nu}{(2p)_\nu}B(p,\ p). \tag{27}$$

Далее, из равенства (14) имеем

$$B(p,\ p)=\frac{1}{1-e^{2ip\pi}}\oint^{(1+,\,0-)} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt.$$

Подстановка $t=s+1/2$ преобразует путь интегрирования в кривую,

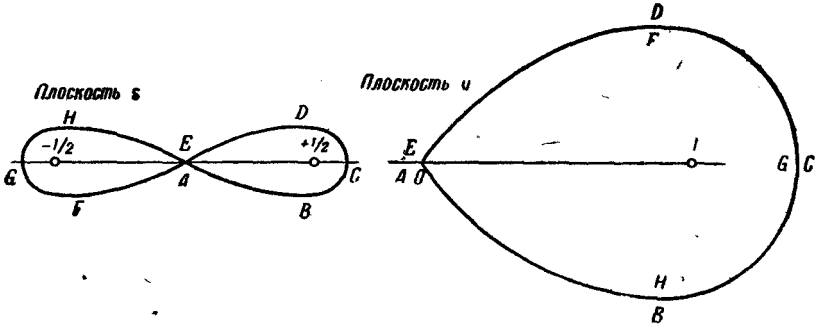


Рис. 8. Путь интегрирования для B-функции в случае, когда сумма независимых переменных — целое число.

симметричную относительно начала координат:

$$\oint^{(1+,\,0-)} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt=\oint^{\left(\frac{1}{2}+,\,-\frac{1}{2}-\right)}\left(\frac{1}{2}+s\right)^{p-1}\left(\frac{1}{2}-s\right)^{p-1}ds=$$

$$=\oint^{\left(\frac{1}{2}+,\,-\frac{1}{2}-\right)}\left(\frac{1-4s^2}{4}\right)^{p-1}ds.$$

Подинтегральная функция упрощается с помощью подстановки $u=4s^2$; при этом оба обхода на плоскости s переходят в обходы вокруг точки $u=1$ на плоскости u (см. рис. 8). До этой подстановки

разложим интеграл следующим образом:

$$\oint^{(\frac{1}{2}+,\,-\frac{1}{2}-)} = \oint_0^{(\frac{1}{2}+)} - \oint_0^{(-\frac{1}{2}+)},$$

и заметим, что при подстановке в первом интеграле надо положить $2s=+\sqrt{u}$, а во втором $2s=-\sqrt{u}$. Мы получим, что оба обхода дают одинаковый вклад в интеграл

$$\oint^{(1+,\,0-)} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt = 2\oint_0^{(1+)} \frac{(1-u)^{p-1}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du}{2^{2p}}.$$

В силу равенств (9a) и (16), отсюда вытекает

$$\mathrm{B}(p,\,p)=\frac{1}{2^{2p-1}}\mathrm{B}\left(p,\,\frac{1}{2}\right). \tag{28}$$

1.3.2.3. Целочисленные значения параметра. Если $q=-\nu$, ν — целое число, а p не является целым числом, то по равенству (15а) имеем

$$\mathrm{B}(p,\,-\nu)=\infty \qquad (\nu\geqslant 0 \text{ — целое, } p \text{ — нецелое}). \tag{29}$$

Исследуем более точно поведение функции $\mathrm{B}(p,\,q)$ при $p=-\nu$. Для этого запишем, согласно равенству (23),

$$\lim_{q\to-\nu}\sin q\pi\,\mathrm{B}(p,\,q)=\sin(p-\nu)\pi\,\mathrm{B}(\nu+1-p,\,p)$$

и применим к правой части этого равенства соотношение (25а). Мы получаем тогда, что

$$\lim_{q\to-\nu}\sin q\pi\,\mathrm{B}(p,\,q)=\pi\binom{p-1}{\nu} \quad (\nu\geqslant 0 \text{ — целое число, } p \text{ — любое}). \tag{29а}$$

В частности, отсюда следует

$$\lim_{q\to 0}\sin q\pi\,\mathrm{B}(p,\,q)=\pi. \tag{29б}$$

В силу равенства (22а), для нахождения значения $\mathrm{B}(p,\,\nu)$, где $\nu>0$ — целое число, достаточно вычислить функцию $\mathrm{B}(p,\,1)$. По равенству (12) для любого p имеем

$$\mathrm{B}(p,\,1)=\oint_{(0)}^{(1)} t^{p-1}\,dt=\frac{\oint_1^{(0+)} t^{p-1}\,dt}{-1+e^{2i\pi p}}.$$

Неопределенный интеграл равен здесь t^p/p. По условию, сделанному в п. 1.2, в начале пути интегрирования мы должны принять $t=1$,

а в конце пути $t = e^{2i\pi}$. Поэтому

$$B(p, 1) = \frac{1}{p}. \tag{30}$$

Это совпадает со значением интеграла, которое получается при $\operatorname{Re} p > 0$ из равенства (16а). Из равенств (22а) и (30) следует, что

$$B(p, \nu) = \frac{(\nu-1)!}{(p)_\nu} \qquad (\nu > 0 \text{ — целое}). \tag{31}$$

Если *оба параметра p и q — целые* неотрицательные числа, то из равенства (31) вытекает

$$B(\mu, \nu) = \frac{(\nu-1)!}{(\mu)_\nu} \quad (\nu > 0 \text{ — целое}, \ \mu \text{ — целое}). \tag{32}$$

Эта функция конечна, если $\mu > 0$ или если $-\mu \geqslant \nu > 0$, так как тогда знаменатель не обращается в нуль; если же $\nu > -\mu \geqslant 0$, то эта функция обращается в бесконечность.

Если оба параметра целочисленны и отрицательны, то из равенства (29а) вытекает, что функция обращается в бесконечность

$$B(-\mu, -\nu) = \infty, \qquad (\mu \geqslant 0, \ \nu \geqslant 0). \tag{33}$$

Сведем результаты, полученные в п. 1.3.2 в следующую таблицу:

p	q	Условия	$B(p, q)$
p	$\nu - p$	$\nu > 0$	$\frac{\pi}{\sin p\pi} \frac{(1-p)_{\nu-1}}{(\nu-1)!}$
		$\nu < 0$, p нецелое	0
p	$\nu + p$		$\frac{(p)_\nu \, B\left(p, \frac{1}{2}\right)}{(2p)_\nu \, 2^{2p-1}}$
p	ν	$\nu > 0$	$\frac{(\nu-1)!}{(p)_\nu}$
		$\nu < 0$	$\frac{\pi}{\sin \nu\pi} \binom{p-1}{-\nu} = \infty$
μ	ν	$\mu > 0$, $\nu > 0$	$\frac{(\nu-1)!}{(\mu)_\nu} = \frac{(\mu-1)!}{(\nu)_\mu} = \frac{(\mu-1)!\,(\nu-1)!}{(\mu+\nu-1)!}$
μ	$-\nu$	$\nu > \mu > 0$	$\frac{(\mu-1)!}{(-\nu)_\mu}$
		$\mu > \nu > 0$	∞
$-\mu$	$-\nu$	$\mu > 0$, $\nu > 0$	∞

1.4. Определение Г-функции. Заменим в равенстве (16), определяющем B-функцию, переменную интегрирования t на t/m, где m — любое положительное вещественное число. Тогда мы получим, в силу равенства (12),

$$m^p \mathrm{B}(p, m+1) = \oint_{(0)}^{m} t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt = \frac{\oint_{m}^{(0+)} t^{p-1}\left(1-\frac{t}{m}\right)^m dt}{e^{2i\pi p}-1}.$$

Здесь путь интегрирования выходит из точки m положительной вещественной оси, обходит в положительном направлении начало координат и вновь возвращается в точку m; аргумент t равен нулю в начале пути. Перейдем к пределу при $m \to \infty$. Предполагая законным изменение порядка интегрирования и перехода к пределу [1]), мы получим

$$\lim_{m\to\infty} m^p \mathrm{B}(p, m+1) = \frac{1}{e^{2i\pi p}-1} \oint_{\infty}^{(0+)} t^{p-1}e^{-t}\,dt = \oint_{(0)}^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt.$$

Поскольку, в силу равенства (21), для B-функции мы имеем $(m+p)\mathrm{B}(p, m+1) = m\,\mathrm{B}(p, m)$, то левую часть этого равенства можно переписать в виде [2])

$$\lim_{m\to\infty} m^p \mathrm{B}(p, m+1) = \lim_{m\to\infty} m^p \mathrm{B}(p, m).$$

После перехода к пределу наше выражение является функцией, зависящей только от p. Мы обозначим ее через $\Gamma(p)$. Иными словами, мы полагаем по определению

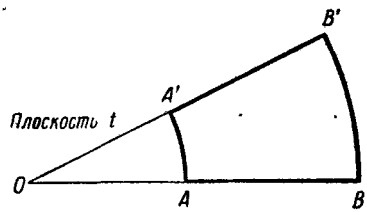


Рис. 9. К разложению пути интегрирования в равенстве (34).

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{m\to\infty} m^z \mathrm{B}(z, m) = \oint_{(0)}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{34}$$

Здесь z, которое мы пишем вместо p, является любым комплексным числом. Функция $\Gamma(z)$ аналитически зависит от z. Если $\mathrm{Re}(z) > 0$, то можно заменить интеграл в равенстве (34) обычным интегралом, взятым вдоль вещественной оси. Мы получаем тогда *интеграл Эйлера второго рода*:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0) \tag{34a}$$

[1]) Законность этого изменения будет доказана в следующем пункте.

[2]) Этот переход несуществен; мы делаем его, поскольку вторая форма часто встречается в литературе.

Заменим в равенстве (34), определяющем $\Gamma(z)$, t на $e^{-i\pi}t$. Мы получим тогда

$$\Gamma(z) = -e^{i\pi z}\int\limits_{-\infty}^{(0)} t^{z-1}e^{t}\,dt, \tag{34б}$$

где в начале пути интегрирования $\arg(t) = -\pi$, а потому на положительной вещественной оси t — положительное число ($\arg(t) = 0$). Представление Г-функции в виде криволинейного интеграла было дано Ганкелем [1]).

В интеграле (34) путь интегрирования может быть изменен следующим образом. В качестве начальной и конечной точек петли можно взять любую точку плоскости t, имеющую положительную бесконечную вещественную часть. Для доказательства рассмотрим интеграл вдоль замкнутого пути $ABB'A'A$, изображенного на рис. 9. Поскольку внутри пути интегрирования нет ни одной особой точки, то этот интеграл, в силу теоремы Коши, равен нулю. Таким образом,

$$\int\limits_{B}^{A} t^{-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_{B}^{B'} t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int\limits_{B'}^{A'} t^{z-1}\,dt + \int\limits_{A'}^{A} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Пусть BB' является дугой окружности с центром в начале координат и радиусом R. Делая подстановку $t = Re^{i\theta}$, $dt = it\,d\theta$, мы получаем

$$\int\limits_{B}^{B'} t^{z-1}e^{-t}\,dt = \int\limits_{\theta=0}^{\theta_0} t^{z}e^{-t}i\,d\theta = R^{z}\int\limits_{0}^{\theta_0} e^{iz\theta}e^{-t}i\,d\theta.$$

Здесь $|e^{-t}| = e^{-R\cos\theta}$ и так как при $0 \leqslant |\theta| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ всегда $\cos\theta \geqslant \sin\delta$, то при $z = x + iy$

$$\left|\int\limits_{0}^{\theta_0} e^{iz\theta}e^{-t}i\,d\theta\right| \leqslant \int\limits_{0}^{|\theta_0|} e^{-R\sin\delta}e^{|y\theta|}|d\theta \leqslant e^{-R\sin\delta + |y|\frac{\pi}{2}|\theta_0|}$$

для всех значений $|\theta_0| < \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int\limits_{B}^{B'} t^{z-1}e^{-t}\,dt\right| \leqslant \lim_{R\to\infty} R^{x}e^{-R\sin\delta + |y|\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, если $|\theta_0| < \frac{\pi}{2}$, то мы можем заменить путь интегрирования BA путем интегрирования $B'A$, где B' удаляется в бесконечность в направлении θ_0.

[1]) Hankel H., *Z. S. Math. u. Phys.*, 9, 7 (1864).

1.4.0. Доказательство допустимости перестановки перехода к пределу и интегрирования. Теорема Таннери [1]) гласит: пусть на некотором отрезке последовательность функций $f(t, n)$ равномерно сходится при $n \to \infty$ к $g(t)$; далее, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ и существует положительная функция $M(t)$, такая, что на любом отрезке $[a, \lambda_m]$ имеет $|f(t, n)| \leqslant M(t)$ при всех n, причем $\int\limits_a^\infty M(t)\,dt$ сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{\lambda_n} f(t, n)\,dt = \int_a^\infty g(t)\,dt.$$

Нам надо, таким образом, доказать следующие утверждения:

1. На каждом конечном отрезке функции $(1 - t/n)^n t^{z-1}$ равномерно сходятся к $e^{-t}t^{z-1}$.

2. $\left|(1 - t/n)^n t^{z-1}\right| < e^{-t}t^{a-1}$ при $0 \leqslant t \leqslant n$, $a = \operatorname{Re} z$.

3. $\int\limits_1^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt$ сходится (доказательство тривиально).

Доказательство утверждения 1. Мы имеем

$$\int_0^t e^u \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n du = e^u \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \Big|_0^t + \int_0^t e^u \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-1} du.$$

Отсюда

$$1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = -\int_0^t e^u \left[\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-1}\right] du =$$

$$= \int_0^t e^u \left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-1} \frac{u}{n}\,du.$$

Так как при $0 \leqslant t \leqslant n$ на всем пути интегрирования имеем $e^u/e^t \leqslant 1$ и $(1 - u/n)^{n-1} < 1$, то

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \int_0^t \frac{u\,du}{n} = \frac{t^2}{2n},$$

и если $\operatorname{Re} z = a$, то

$$\left|e^{-t}t^{z-1} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\right| < \frac{t^{a+1}}{2n}.$$

[1]) См. Bromwich, S., 485.

Таким образом, на каждом отрезке $t_0 < t < t_1$ для всех $n > \frac{t_1^{a+1}}{2\varepsilon}$ выражение, стоящее слева, не превосходит ε. Тем самым доказано, что последовательность $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ равномерно сходится на каждом конечном отрезке к $e^{-t}t^{z-1}$.

Доказательство утверждения 2. Как доказано выше, для любого t на отрезке $0 \leqslant t \leqslant n$

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n < e^{-t} \quad \text{и} \quad |t^{z-1}| = t^{a-1},$$

а потому

$$\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\right| < e^{-t}t^{a-1}.$$

На пути интегрирования от 1 до ∞ выполнены, таким образом, условия теоремы Таннери. Разложим весь путь интегрирования на путь от ∞ до 1, обход по единичной окружности и путь от 1 до ∞. В силу теоремы Таннери, изменение порядка предельного перехода и интегрирования допустимо на обоих путях, ведущих в бесконечность, на единичной же окружности оно допустимо в силу равномерной сходимости. Тем самым наше утверждение доказано.

1.4.1. Функциональное уравнение для Г-функции. Из равенства (34), определяющего Г-функцию, и равенства (31) непосредственно следует, что при целочисленных m

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} m^z \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}{z(z+1)\ldots(z+m-1)}. \tag{35}$$

Положим здесь $z=1$. Мы получим

$$\Gamma(1) = 1. \tag{35а}$$

Далее из равенства (34) и (21) имеем

$$\Gamma(z+1) = \lim_{m\to\infty} m^{z+1}\mathrm{B}(z+1, m) = \lim_{m\to\infty} m^{z+1}\frac{z}{z+m}\mathrm{B}(z, m) =$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\frac{m}{m+z}m^z\mathrm{B}(z, m).$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{m+z}=1$, а $\lim\limits_{m\to\infty} m^z\mathrm{B}(z, m)=\Gamma(z)$, то мы получаем *функциональное уравнение для Г-функции*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{36}$$

Последовательно применяя это равенство, имеем

$$\Gamma(z+\nu) = (z)_\nu\Gamma(z). \tag{36а}$$

Полагая здесь $z=1$ и принимая во внимание, что $\Gamma(1)=1$, убеждаемся, что

$$\Gamma(\nu+1)=\nu!. \tag{36б}$$

Тем самым доказано, что Г-функцию можно рассматривать как результат интерполирования функции $\nu!$, определенной лишь для положительных целых чисел.

Равенство (36) явилось для Гаусса исходной точкой теории Г-функций. Он обозначал ее П-функцией и формировал так, что

$$\Gamma(z+1)=\Pi(z). \tag{37}$$

В частности, для целочисленных значений аргумента имеет место равенство

$$\Pi(\nu)=\nu!.$$

1.4.2. Связь между B- и Г-фуикциями. Заменим в равенстве (34) переменную интегрирования t на mt; тогда мы получим часто встречающийся интеграл

$$m^{-z}\Gamma(z)=\int_{(0)}^{\infty} t^{z-1}e^{-mt}\,dt \quad (\operatorname{Re} m>0). \tag{38}$$

Положим в этом равенстве $m=u+1$, $z=p+q$ и умножим обе части на u^{p-1}. Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{Re} p>0$ и $\operatorname{Re} q>0$. Интегрируя обе части полученного равенства по u от 0 до ∞, мы получим

$$\int_0^{\infty}\frac{u^{p-1}\,du}{(u+1)^{p+q}}\Gamma(p+q)=\int_0^{\infty}u^{p-1}\,du\int_0^{\infty}e^{-(u+1)t}t^{p+q-1}\,dt.$$

Предполагая, что в этом равенстве допустимо изменение порядка интегрирования и принимая во внимание равенство (17), получаем

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{p+q-1}\,dt\int_0^{\infty}u^{p-1}e^{-ut}\,du.$$

Внутренний интеграл, в силу (38), равен $t^{-p}\Gamma(p)$; поэтому, в силу равенства (34а), имеем

$$\mathrm{B}(p,\,q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{39}$$

Мы доказали эту формулу при $\operatorname{Re} p>0$ и $\operatorname{Re} q>0$. Но поскольку все входящие в это равенство функции аналитичны, то она имеет место для всех значений p и q, для которых эти функции имеют смысл; таким образом, равенство (39) справедливо для всех комплексных p и q.

1.4.2.0. Доказательство допустимости изменения порядка интегрирования. Если интеграл $\int_{t_0}^{\infty} f(t, u)\,dt$ равномерно сходится, то в интеграле $\int_{u_0}^{x} du \int_{t_0}^{\infty} f(t, u)\,dt$ можно изменить порядок интегрирования. Равномерная сходимость имеет место, если при всех u, $u_0 \leqslant u \leqslant x$, выполняется неравенство $|f(t, u)| < \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — интегрируемая функция.

В нашем случае $f(t, u) = e^{-t}e^{-ut}t^{p+q-1}u^{p-1}$, и поскольку функция $e^{-u}u^{a-1}$ ограничена на полуоси $0 \leqslant u \leqslant \infty$, то для всех $t \geqslant 1$ и $u \geqslant 0$ имеем $|e^{-ut}u^{p-1}| \leqslant e^{-ut}u^{a-1} < e^{-u}u^{a-1} \leqslant M$. Отсюда следует

$$|f(t, u)| < e^{-t}t^{a+b-1}M \qquad (\operatorname{Re} p = a,\ \operatorname{Re} q = b).$$

Так как при $a+b>0$ функция $e^{-t}t^{a+b-1}$ интегрируема на полуоси, то равенство

$$\int_0^x u^{p-1}\,du \int_0^{\infty} e^{-(u+1)t}t^{p+q-1}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{p+q-1}\,dt \int_0^x u^{p-1}e^{-ut}\,du$$

доказано. С помощью подстановки $s = ut$ получаем для интеграла по u

$$\int_0^x u^{p-1}e^{-ut}\,du = t^{-p}\int_0^{tx} s^{p-1}e^{-s}\,ds.$$

Так как неравенство $\left|\int_0^{tx} s^{p-1}e^{-s}\,ds - \Gamma(p)\right| < \varepsilon$ имеет место при x достаточно больших для всех t, то

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{p+q-1}\,dt \int_0^x u^{p-1}e^{-ut}\,du = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{q-1}\,dt \lim_{x\to\infty}\int_0^{tx} s^{p-1}e^{-s}\,ds.$$

Тем самым доказательство равенства (39) завершено.

1.4.3. Свойства Г-функции. Применим равенство (39) к равенству (26а). Принимая во внимание, что $\Gamma(1) = 1$, мы получим следующую формулу:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}. \tag{40}$$

Из этой формулы и равенства (36) вытекает, что значения Г-функции достаточно вычислить лишь на интервале $0 < z \leqslant 1/2$. Для всех

остальных значений аргумента эта функция определяется с помощью формул (36) и (40).

Заменяя в равенстве (40) z на $z+1/2$, мы получаем равенство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos z\pi}. \tag{40а}$$

Эта формула связывает значения Г-функции в точках, симметричных относительно точки $1/2$. Полагая здесь $z=0$, получаем $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Положительность значения $\Gamma(1/2)$ вытекает непосредственно из равенства (34а). Равенство (36а) позволяет теперь вычислить значения Г-функции для всех полуцелых значений аргумента. Мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\ \ldots,$$
$$\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\frac{2k-1}{2}\,\frac{2k-3}{2}\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\quad (k\text{ — натуральное}) \tag{41а}$$

и

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{3}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{2^3}{1\cdot3\cdot5}\sqrt{\pi},\ \ldots. \tag{41б}$$

Подставляя равенство (39) в обе части равенства (28), получаем формулу удвоения для Г-функции:

$$\Gamma(2p)=\frac{2^{2p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right). \tag{42}$$

Из соотношения (40) вытекает интегральное представление Ганкеля для Г-функции. Перейдем от z к $-z$ и подставим для $\Gamma(-z)$ интеграл из равенства (34). Принимая во внимание равенство (12), получаем

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=-\frac{\sin z\pi}{\pi}\int_{(0)}^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t^{z+1}}=-\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i\pi\left(e^{-2i\pi z}-1\right)}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{e^{-t}\,dt}{t^{z+1}}$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=-\frac{e^{i\pi z}}{2i\pi}\int_{\infty}^{(0+)}t^{-z}e^{-t}\,dt. \tag{43}$$

Здесь в начале пути интегрирования $\arg(t)=0$. Внося множитель $e^{i\pi z}$ под знак интеграла, получаем с помощью подстановки $e^{i\pi}t=s$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{(0+)}s^{-z}e^{s}\,ds. \tag{43а}$$

Здесь на положительной вещественной оси $\arg(s)=0$.

С помощью интегральных представлений (34) и (43) легко изучить поведение Г-функции в особых точках. Из свойств B-функции следует, что такими точками могут быть лишь целочисленные значения аргумента. В самом деле, пусть функция $\Gamma(z)$ равна нулю в некоторой точке z_0, не являющейся целым числом. Как было показано в п. 1.3.2.3, если p и z_0-p не являются целыми числами, то $B(p, z_0-p)$ имеет конечное значение. Поэтому, в силу формулы (39), если $\Gamma(z_0)=0$, а p и z_0-p не являются целыми числами, то либо $\Gamma(p)=0$, либо $\Gamma(z_0-p)=0$. Итак, из обращения Г-функции в нуль в некоторой точке $z_0\neq\nu$ вытекает обращение ее в нуль в каждой точке $p\neq\mu$. Но это противоречит равенству (40), а потому предположение $\Gamma(z_0)=0$ недопустимо. Точно также при $z_0\neq\nu$ не может иметь место равенство $\Gamma(z_0)=\infty$, так как тогда, в силу равенства (40), должно было бы выполняться $\Gamma(1-z_0)=0$. Таким образом, Г-функция может иметь нули и полюсы лишь при целочисленных значениях аргумента.

Разложим в равенстве (43) показательную функцию в степенной ряд. Мы получим после изменения порядка суммирования и интегрирования (допустимо в силу равномерной сходимости):

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)}=\frac{e^{i\pi z}}{2i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\oint_{\infty}^{(0+)}t^{k-z-1}\,dt.$$

При целочисленных z нулевая точка не является точкой ветвления; поэтому оба интеграла вдоль вещественной оси взаимно уничтожаются и остается лишь интеграл по пути, охватывающему нулевую точку. Но такой интеграл от любой целой степени t с показателем, отличным от -1, равен нулю. Поэтому мы должны оставить лишь слагаемое с $k=z$. В результате получаем

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}=(-1)^{\nu}(-1)^{\nu}\frac{1}{\nu!}\quad\text{или}\quad\Gamma(\nu+1)=\nu!\quad(\nu\geqslant 0-\text{целое})\qquad(44)$$

и

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu)}=0\quad\text{или}\quad\Gamma(-\nu)=\infty\quad(\nu\geqslant 0-\text{целое}).\qquad(44)$$

Чтобы определить поведение $\Gamma(z)$ при $z=-\nu$, мы в соответствии с равенством (40) найдем

$$\lim_{z\to-\nu}(z+\nu)\Gamma(z)=\lim_{z\to-\nu}\frac{(z+\nu)\pi}{\Gamma(1-z)\sin z\pi}=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\lim_{z\to-\nu}\frac{(z+\nu)\pi}{\sin z\pi}.$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{z\to-\nu}(z+\nu)\Gamma(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\cos\nu\pi}=\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}.\qquad(44a)$$

Мы доказали, таким образом, что *Г-функция имеет полюсы в точках* $-\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) *и только в этих точках, причем эти полюсы являются простыми и функция имеет в точке* $-\nu$ *вычет* $(-1)^\nu/\nu!$ Поскольку $1/\Gamma(\nu)$ не имеет полюсов, то *Г-функция во всей плоскости не обращается в нуль.*

Заметим без доказательства, что *Г-функция не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами* [1]).

Применим равенство (35), определяющее Г-функцию, к $\Gamma(\nu z)$ и заменим переменную m на $\nu\mu$:

$$\Gamma(\nu z) = \lim_{\mu\to\infty} \frac{(\nu\mu)^{\nu z}(\nu\mu-1)!}{\nu z(\nu z+1)\ldots(\nu z+\nu\mu-1)}.$$

Вынося за скобки ν во всех сомножителях знаменателя, получаем, что знаменатель равен

$$\nu^{\nu\mu} z\left(z+\frac{1}{\nu}\right)\ldots\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)(z+1)\left(z+1+\frac{1}{\nu}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(z+1+\frac{\nu-1}{\nu}\right)\ldots\left(z+\mu-1+\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

или же, переставляя сомножители,

$$\nu^{\nu\mu}\underbrace{z(z+1)\ldots(z+\mu-1)}\underbrace{\left(z+\frac{1}{\nu}\right)\left(z+\frac{1}{\nu}+1\right)\ldots\left(z+\frac{1}{\nu}+\mu-1\right)}\ldots$$
$$\ldots\underbrace{\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}+1\right)\ldots\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}+\mu-1\right)}.$$

Заметим, что выражения, стоящие над фигурными скобками, являются знаменателями в представлении функций $\Gamma(z), \Gamma\left(z+\frac{1}{\nu}\right), \ldots, \Gamma\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)$ по уравнению (35). Поэтому

$$\frac{\Gamma(\nu z)}{\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{\nu}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)} =$$
$$= \lim_{\mu\to\infty} \frac{(\nu\mu)^{\nu z}(\nu\mu-1)!}{\nu^{\nu\mu}((\mu-1)!)^\nu\,\mu^z\mu^{z+\frac{1}{\nu}}\ldots\mu^{z+\frac{\nu-1}{\nu}}} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{\nu^{\nu z}(\nu\mu-1)!}{\nu^{\nu\mu}\,\mu^{\frac{\nu-1}{2}}((\mu-1)!)^\nu}.$$

Отсюда вытекает, что выражение

$$\frac{\nu^{\nu z}\,\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{\nu}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)}{\nu\,\Gamma(\nu z)} = K_\nu$$

[1]) Hölder O., *Math. Ann.*, 28 (1887), 1—13.

не зависит от z. Для вычисления этого выражения можно применить различные способы, например использовать формулу Валлиса [1]). Мы положим, следуя Лежандру, $z=1/\nu$ и получим

$$K_\nu=\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$K_\nu^2=\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

и потому, в силу равенства (40),

$$K_\nu^2=\frac{\pi^{\nu-1}}{\sin\frac{\pi}{\nu}\sin\frac{2\pi}{\nu}\ldots\sin\frac{\nu-1}{\nu}\pi}.$$

Для вычисления произведения синусов запишем, следуя Дирихле,

$$\sin\frac{\varkappa\pi}{\nu}=\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi\frac{\varkappa}{\nu}}-e^{-i\pi\frac{\varkappa}{\nu}}\right)=-\frac{e^{-i\pi\frac{\varkappa}{\nu}}}{2i}\left(1-e^{2i\pi\frac{\varkappa}{\nu}}\right).$$

Здесь $e^{2i\pi\frac{\varkappa}{\nu}}=\varepsilon_\varkappa$ является корнем из 1, т. е. одним из ν решений уравнения $x^\nu-1=0$. Отщепляя решение $x=1$, сведем это уравнение к уравнению

$$x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\ldots+x^2+x+1=0,$$

которое совпадает с уравнением

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{\nu-1})=0.$$

Это означает, что для *всех* значений x выполняется равенство

$$x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\ldots(x-\varepsilon_{\nu-1}).$$

Полагая здесь $x=1$, получаем для левой части значение ν, а для правой с точностью до множителя произведение синусов:

$$\nu=(-2i)^{\nu-1}e^{i\pi\frac{\nu(\nu-1)}{2\nu}}\sin\frac{\pi}{\nu}\sin\frac{2\pi}{\nu}\ldots\sin\frac{\nu-1}{\nu}\pi.$$

Так как $-i=e^{-\frac{i\pi}{2}}$, то

$$\sin\frac{\pi}{\nu}\sin\frac{2\pi}{\nu}\sin\frac{3\pi}{\nu}\ldots\sin\frac{\nu-1}{\nu}\pi=\frac{\nu}{2^{\nu-1}}.$$

Таким образом,

$$K_\nu^2=\frac{(2\pi)^{\nu-1}}{\nu}.$$

[1]) Фихтенгольц Г. М., т. II, гл. IX, § 4, п. 305.

Мы доказали теорему умножения для Γ-функций

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{\nu}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{\nu}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{\nu-1}{\nu}\right)=$$
$$=(2\pi)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^{-\nu z+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu z). \quad (45)$$

Частным случаем этой теоремы является известная уже нам формула удвоения (42).

1.5. Разложение Γ-функции в бесконечное произведение. Логарифмическая производная Γ-функции. Ряд Стирлинга. Мы рассмотрим здесь некоторые утверждения, связанные с разложением Γ-функции в бесконечное произведение.

1.5.1. Бесконечные произведения Эйлера и Вейерштрасса. Добавляя к равенству (35) одинаковые множители в числитель и знаменатель, получим, что

$$\Gamma(z)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu^z\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots(\nu-1)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+\nu-1)}=$$
$$=\frac{1}{z}\lim_{\nu\to\infty}\frac{2^z}{1^z}\frac{1}{z+1}\frac{3^z}{2^z}\frac{2}{z+2}\dots\frac{\nu^z}{(\nu-1)^z}\frac{\nu-1}{z+\nu-1}.$$

Эта формула часто записывается в виде бесконечного произведения

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\lim_{\nu\to\infty}\prod_{\varkappa=1}^{\nu-1}\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa}\right)^z\frac{\varkappa}{z+\varkappa}=\frac{1}{z}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^z\left(1+\frac{z}{\nu}\right)^{-1}. \quad (46)$$

Это представление мы будем называть *эйлеровским разложением* Γ-*функции* в бесконечное произведение.

Исходя из той же самой формулы (35), получаем

$$\frac{1}{z\Gamma(z)}=\lim_{\nu\to\infty}\nu^{-z}\prod_{\varkappa=1}^{\nu-1}\left(1+\frac{z}{\varkappa}\right).$$

Примем во внимание тождество $\nu^{-z}=e^{-z\ln\nu}$, умножим под знаком произведения на $e^{z/\varkappa}e^{-z/\varkappa}=1$ и вынесем первый множитель; мы получим

$$\frac{1}{z\Gamma(z)}=\lim_{\nu\to\infty}e^{\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{\nu-1}-\ln\nu\right)z}\prod_{\varkappa=1}^{\nu-1}\left(1+\frac{z}{\varkappa}\right)e^{-\frac{z}{\varkappa}}.$$

Предполагая сходимость соответствующей последовательности, введем обозначение

$$C\equiv\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu-1}-\ln\nu\right). \quad (47)$$

Мы получим *формулу Вейерштрасса* для разложения Г-функции в бесконечное произведение

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{\nu}}\left(1+\frac{z}{\nu}\right). \tag{48}$$

1.5.1.0. Постоянная Эйлера — Маскерони. Величина C, определяемая равенством (47), называется постоянной Эйлера — Маскерони. Чтобы доказать сходимость последовательности, будем исходить из равенства

$$\int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\mu(\mu+\tau)} = \int_0^1 \frac{d\tau}{\mu} - \int_0^1 \frac{d\tau}{\mu+\tau} = \frac{1}{\mu} - \ln\frac{\mu+1}{\mu}.$$

Очевидно, что ν-я частичная сумма ряда Эйлера — Маскерони совпадает с

$$S_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\mu(\mu+\tau)} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}-\ln\nu.$$

Но при $\tau \leqslant 1$ мы имеем $\tau/(\mu+\tau) < 1/\mu$ и потому

$$0 < \int_0^1 \frac{\tau\, d\tau}{\mu(\mu+\tau)} < \int_0^1 \frac{d\tau}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

Таким образом, ряд $\sum 1/\mu^2$ является мажорантой для ряда Эйлера, откуда вытекает, что ряд Эйлера сходится. Десятичное разложение постоянной Эйлера — Маскерони имеет вид [1])

$$C = 0{,}5772156649\ldots = \ln 1{,}781070\ldots. \tag{49}$$

Разложение в бесконечное произведение функции $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ непосредственно получается из равенства (35):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu^z(\nu-1)!}{z(z+1)\ldots(z+\nu-1)}\,\frac{\nu^{1-z}(\nu-1)!}{(1-z)(2-z)\ldots(\nu-z)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \lim_{\nu\to\infty}\frac{z+\nu}{\nu z}\,\frac{\nu!^2}{(1-z^2)(2^2-z^2)\ldots(\nu^2-z^2)} = \frac{1}{z\prod_1^\infty\left(1-\frac{z^2}{\nu^2}\right)}. \tag{50}$$

[1]) Постоянная вычислена Адамсом с 260 знаками [*Proc. Roy. Soc.*, 27 (1878)]. Эйлер указал значения с 16 десятичными знаками.

Применяя равенство (40), мы получаем отсюда вейерштрассовское разложение синуса в бесконечное произведение

$$\sin z\pi = \pi z \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right). \tag{51}$$

Отсюда при $z = {}^1/_2$ получаем формулу *Валлиса* для π.

1.5.2.1. Логарифмическая производная Г-функции (Вейерштрасс). Образуем производную логарифма Г-функции, используя формулу *Вейерштрасса* (48). Мы получим

$$\frac{d\ln\Gamma(z+1)}{dz} = -C + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu}\right). \tag{52}$$

Приводя дроби к одному знаменателю, получаем указанное Вейерштрассом соотношение

$$\Psi(z) \equiv \frac{d\ln\Gamma(z+1)}{dz} = -C + z\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(z+\nu)}. \tag{53}$$

Здесь мы, следуя Гауссу, использовали обозначение $\Psi(z)$ [1]). Отсюда легко вытекает, что для целочисленных значений аргумента

$$\Psi(0) = -C \quad \text{и} \quad \Psi(\nu) = -C + \sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{\varkappa}. \tag{53a}$$

Дифференцируя снова по z равенство (52), получаем

$$\frac{d^2\ln\Gamma(z+1)}{dz^2} = \Psi'(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(z+\nu)^2} \tag{54}$$

или

$$\frac{d^2\ln\Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(z+\nu)^2}. \tag{54a}$$

Эти ряды и ряды, получаемые из них повторным дифференцированием по z, равномерно сходятся. Поэтому, дифференцируя несколько раз по z, получаем

$$\frac{1}{\mu!}\frac{d^\mu\ln\Gamma(z+1)}{dz^\mu} = \frac{(-1)^\mu}{\mu}\sum\frac{1}{(z+\nu)^\mu} \quad (\mu \geqslant 2 \text{ — целое}). \tag{55}$$

[1]) Уиттекер — Ватсон, Янке — Эмде — Леш и Магнус — Оберхеттингер применяют обозначение $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$.

Отметим частные случаи равенств (52), (53) и (54)

$$\Psi(z+\nu)=\Psi(z)+\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{z+\varkappa}, \tag{56а}$$

$$\Psi'(z+\nu)=\Psi'(z)-\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(z+\varkappa)^2}, \tag{56б}$$

$$\Psi'(\nu)=\Psi'(0)-\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{\varkappa^2}. \tag{56в}$$

Согласно равенству (54), $\Psi'(0)$ является суммой обратных квадратов чисел натурального ряда. Но это выражение, как известно, равно $\pi^2/6$ [1]), и потому

$$\Psi'(0)=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\varkappa^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{56г}$$

Аналогично получаем, что

$$\Psi'\left(-\frac{1}{2}\right)=4\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\varkappa-1)^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

и

$$\Psi'\left(\nu-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}-4\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{1}{(2\varkappa-1)^2}. \tag{56д}$$

Путем логарифмического дифференцирования равенства

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin z\pi}$$

получаем еще, что

$$\Psi(z-1)=\Psi(-z)-\pi\operatorname{ctg}z\pi \tag{57а}$$

и

$$\Psi\left(z-\frac{1}{2}\right)=\Psi\left(-z-\frac{1}{2}\right)+\pi\operatorname{tg}z\pi. \tag{57б}$$

Далее, в силу $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, имеем

$$\Psi(z)-\Psi(-z)=\frac{1}{z}-\pi\operatorname{ctg}z\pi. \tag{57в}$$

Используя равенство (52), получаем замечательное соотношение

$$2z\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-z^2}=\frac{1}{z}-\pi\operatorname{ctg}z\pi. \tag{58а}$$

[1]) Фихтенгольц Г. М., т. II, гл. XII, § 4, стр. 420.

Если положить в этом соотношении $2i\pi z = \tau$ и перейти к гиперболическим функциям, получим

$$\tau \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2\nu^2 + (\tau/2)^2} = -\frac{2}{\tau} + \operatorname{cth}\frac{\tau}{2} \tag{58б}$$

или же

$$\frac{\tau}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2\nu^2 + (\tau/2)^2} = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\tau} - 1}. \tag{58в}$$

Поскольку исходное равенство справедливо для всех z, за исключением целых отрицательных значений, то равенства (58б) и (58в) выполняются для всех вещественных значений τ. Мы получаем, таким образом, разложение гиперболического котангенса на элементарные дроби.

1.5.2.2. Логарифмическая производная Г-функции (Гаусс). Из равенства

$$\frac{1}{z+\nu} = \int_0^{\infty} e^{-(z+\nu)\tau}\, d\tau$$

вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+z}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau}(1 - e^{-z\tau})\, d\tau.$$

Поскольку при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ подинтегральная функция равномерно интегрируема, то можно изменить порядок суммирования и интегрирования; суммируя геометрический ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu\tau}$, получаем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z}{\nu(\nu+z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+z}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-z\tau}}{e^{\tau} - 1}\, d\tau. \tag{59}$$

Для постоянной Эйлера — Маскерони мы имели выражение

$$C = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\mu=1}^{\nu} \int_0^1 \frac{\sigma\, d\sigma}{\mu(\mu+\sigma)} = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 d\sigma \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\sigma}{\mu(\mu+\sigma)}.$$

В силу равномерной сходимости можно поменять местами интегрирование и переход к пределу. Мы получаем, используя равенство (59),

$$C = \int_0^1 d\sigma \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\sigma}{\mu(\mu+\sigma)} = \int_0^1 d\sigma \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\sigma\tau}}{e^{\tau} - 1}\, d\tau.$$

Для всех положительных значений σ подинтегральная функция равномерно интегрируема; следовательно, можно изменить порядок интегрирования, что приводит к следующему выражению для C:

$$C=\int_0^\infty \frac{d\tau}{e^\tau-1}\int_0^1 (1-e^{-\sigma\tau})\,d\sigma=$$

$$=\int_0^\infty \frac{d\tau}{e^\tau-1}\left(1-\frac{1-e^{-\tau}}{\tau}\right)=\int_0^\infty \frac{d\tau}{e^\tau-1}-\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}\,d\tau}{\tau}.$$

Подставляя это выражение и выражение (59) в равенство (53), получаем

$$\Psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z+1)}{dz}=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\tau}}{\tau}-\frac{e^{-z\tau}}{e^\tau-1}\right)d\tau \qquad (\mathrm{Re}\,z\geqslant 0). \quad (60)$$

Эта формула называется *гауссовским представлением* для логарифмической производной Г-функции.

1.5.3. Формула Стирлинга. Нашей ближайшей целью является установление формулы, удобной для вычисления $\ln\Gamma(z)$. Для этого можно использовать две возможности: можно попробовать упростить выражение для $\Psi(z)$, даваемое равенством (60) с помощью интегрирования по τ, и образовать затем искомое представление для $\ln\Gamma(z)$ путем интегрирования по τ; либо интегрировать сначала по z и вычислить потом интеграл по τ. Оба пути приводят к цели. Мы выберем первый путь.

В интеграле (60) некоторые слагаемые обращаются в бесконечность при $\tau=0$. Поэтому их удобно соответствующим образом сгруппировать. Так как

$$\frac{1}{e^\tau-1}=\frac{1}{\tau+\tau^2/2+\ldots}=\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{\tau}{2}+\ldots\right),$$

то функция

$$\frac{1}{e^\tau-1}-\frac{1}{\tau}+{}^1/_2$$

ограниченна во всей плоскости τ, включая бесконечно удаленную точку положительной вещественной оси. Поэтому целесообразно сделать следующее разложение:

$$\Psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\tau}}{\tau}-\frac{e^{-z\tau}}{e^\tau-1}\right)d\tau=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{\tau}+\frac{1}{2}e^{-z\tau}\right)d\tau+\int_0^\infty e^{-z\tau}\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^\tau-1}\right)d\tau.$$

В силу сказанного выше, второй интеграл имеет при $x = \operatorname{Re} z > 0$ порядок $1/x$, а поэтому стремится к нулю при возрастании z. Как будет показано ниже, имеет место равенство

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau} - e^{-z\tau}}{\tau}\, d\tau = \ln z, \tag{61}$$

а потому

$$\Psi(z) = \ln z + \frac{1}{2z} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\tau - 1}\right) e^{-z\tau}\, d\tau, \tag{62}$$

где интеграл, стоящий справа, имеет порядок $1/z$.

Интегрируя последнее равенство от $1/2$ до z, получаем

$$\ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \ln 2 + \frac{1}{2} + \ln \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) -$$

$$- \int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\tau - 1}\right) \frac{e^{-z\tau}\, d\tau}{\tau} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\tau - 1}\right) \frac{e^{-\tau/2}}{\tau}\, d\tau.$$

Как мы покажем ниже, последний интеграл равен $-1/2(1 - \ln 2)$. Принимая во внимание, что $\ln \Gamma(3/2) = 1/2 \ln \pi - \ln 2$, получаем [1])

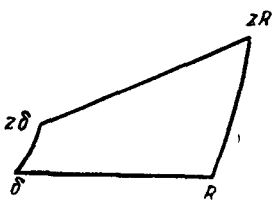


Рис. 10. Путь интегрирования при доказательстве равенства (61).

$$\ln \Gamma(z+1) = \left(z + \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} + \frac{1}{e^\tau - 1}\right) \frac{e^{-z\tau}}{\tau}\, d\tau \quad (\operatorname{Re} z > 0). \tag{63}$$

Поскольку интеграл в этой формуле имеет порядок $1/x$ ($x = \operatorname{Re} z > 0$), то выражение, стоящее вне знака интеграла, дает хорошее приближение для $\ln \Gamma(z+1)$ при больших значениях z. Эту приближенную формулу часто записывают в виде

$$\Gamma(z+1) \approx z^{z+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{-z}, \tag{64}$$

называемом *формулой Стирлинга*. Формула (64) означает, что при возрастании $\operatorname{Re} z$ отношение левой и правой частей стремится к 1.

1.5.3.0. Вычисление второго интеграла. Для доказательства равенства (61) заменим $z\tau$ на u. Если в первом слагаемом обозначим

[1]) Равенство (63) принадлежит Бине, см. Binet J. P. M., *Journal l'École Polytechnique*, XVI (1839), 123—143.

переменную интегрирования через u, то получим равенство

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}-e^{z\tau}}{\tau}\,d\tau = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}} \left\{ \int_\delta^R \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{z\delta}^{zR} \frac{e^{-u}}{u}\,du \right\}.$$

Интеграл по замкнутому контуру на рис. 10 равен нулю. Поэтому

$$\int_\delta^R - \int_{z\delta}^{zR} = \int_\delta^{z\delta} - \int_R^{zR}.$$

Поскольку при $\operatorname{Re} z > 0$ последний интеграл обращается в нуль, если R стремится к бесконечности, то

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{z\delta} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{z\delta} \frac{du}{u} + \lim_{\delta\to 0} \int_\delta^{z\delta} \frac{e^{-u}-1}{u}\,du.$$

Как видно из разложения в степенной ряд показательной функции, последний интеграл обращается в нуль при $\delta = 0$; первый же интеграл равен

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\tau}-e^{-z\tau}}{\tau}\,d\tau = \lim_{\delta\to\infty} \ln\frac{z\delta}{\delta} = \ln z.$$

Для вычисления интеграла

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\tau - 1}\right) \frac{e^{-\tau/2}}{\tau}\,d\tau$$

применим предложенный Прингсеймом[1]) искусственный прием. Поскольку интегралы в нижеследующем равенстве сходятся, причем второй получается из первого заменой переменной интегрирования τ на $\tau/2$, то

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^\tau - 1}\right) \frac{e^{-\tau}\,d\tau}{\tau} - \int_0^\infty \left(\frac{2}{\tau} - \frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\tau/2}-1}\right) \frac{e^{-\frac{\tau}{2}}\,d\tau}{\tau} = 0.$$

Прибавляя это выражение к искомому интегралу J, получаем

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\tau}-e^{-\tau/2}}{\tau} + \frac{e^{-\tau}}{2}\right)\frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{d}{d\tau}\,\frac{e^{-\tau/2}-e^{-\tau}}{\tau} - \frac{2e^{-\tau}-e^{-\tau/2}}{2\tau} + \frac{e^{-\tau}}{2\tau} \right\} d\tau,$$

[1]) Pringsheim A., *Math. Ann.*, 31 (1888), 473.

откуда путем интегрирования находим

$$J=\frac{e^{-\tau/2}-e^{-\tau}}{\tau}\Bigg|_0^\infty-\frac{1}{2}\int_0^\infty(e^{-\tau}-e^{-\tau/2})\frac{d\tau}{\tau}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

Последний результат вытекает из правила Лопиталя и равенства (61).

1.5.4. Ряд Стирлинга. Оценим теперь интеграл, входящий в равенство (63). Мы уже знаем, что множитель $e^{-z\tau}$ можно разложить по степеням τ в окрестности точки $\tau=0$. Поэтому интеграл может быть представлен в виде $\int_0^\infty\sum a_\nu\tau^\nu e^{-\nu\tau}d\tau$. Переставляя здесь суммирование и интегрирование, получаем интегралы вида (34а), значения которых равны $a_\nu\nu!/z^{\nu+1}$. Нам осталось поэтому выполнить разложение подинтегральной функции в степенной ряд и доказать сходимость этого разложения. Первая задача легко решается, если ограничиться рассмотрением первых членов. Для выяснения вопроса о сходимости необходимо, однако, знание общего члена ряда. Для его вычисления используем равенство (58в). Мы получаем

$$J(z)\equiv\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{e^\tau-1}\right)e^{-z\tau}\frac{d\tau}{\tau}=2\int_0^\infty e^{-z\tau}d\tau\sum_{\nu=1}^\infty\frac{1}{4\pi^2\nu^2+\tau^2}.$$

Интегрирование по τ в этом равенстве ведется от 0 до ∞. Поэтому мы можем пользоваться лишь разложениями, равномерно сходящимися на всей полуоси. Биномиальное разложение функций $(1+\tau^2/4\pi^2\nu^2)^{-1}$ не удовлетворяет этому условию. Поэтому ограничимся рассмотрением конечных сумм, получаемых путем использования биномиального разложения с остаточным членом. Воспользуемся для этого очевидным равенством

$$1/(1+x)=1-x+x^2-\ldots+(-1)^\mu x^\mu+(-1)^{\mu+1}x^{\mu+1}/(1+x).$$

Поскольку для положительных вещественных x знаменатель $1+x$ больше, чем x и чем 1, то мы имеем

$$(1+x)^{-1}=\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}(-1)^\varkappa x^\varkappa+\Theta_1x^\mu\qquad(-1<\Theta_1<1)$$

и

$$(1+x)^{-1}=\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}(-1)^\varkappa x^\varkappa+\Theta_2x^{\mu-1}\qquad(-1<\Theta_2<1).$$

Используя эти соотношения и суммируя сначала по $\varkappa$, а потом по ν, получаем

$$J(z)=2\int_0^\infty e^{-z\tau}\,d\tau\left[\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\frac{(-1)^\varkappa}{(4\pi^2)^{\varkappa+1}}\tau^{2\varkappa}\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2\varkappa+2}}\right]+$$

$$+2\int_0^\infty e^{-z\tau}\,d\tau\,\frac{\Theta\tau^{2\mu}}{(4\pi^2)^{\mu+1}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2\mu+2}}.$$

Положим для краткости

$$B_{2\mu}\equiv\frac{(2\mu)!}{2^{2\mu-1}\pi^{2\mu}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2\mu}}. \tag{65}$$

Мы получим

$$J(z)=\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\left\{(-1)^\varkappa B_{2\varkappa+2}\int_0^\infty\frac{\tau^{2\varkappa}e^{-z\tau}\,d\tau}{(2\varkappa+2)!}\right\}+\Theta B_{2\mu+2}\int_0^\infty\frac{\tau^{2\mu}e^{-z\tau}\,d\tau}{(2\mu+2)!}$$

и, используя равенство (34а), запишем

$$J(z)=\frac{B_2}{1\cdot2}\frac{1}{z}-\frac{B_4}{3\cdot4}\frac{1}{z^3}+\frac{B_6}{5\cdot6}\frac{1}{z^5}-\ldots$$

$$\ldots+\frac{(-1)^{\mu-1}B_{2\mu}}{(2\mu-1)\,2\mu}\frac{1}{z^{2\mu-1}}+\Theta\,\frac{B_{2\mu+2}}{(2\mu+1)(2\mu+2)}\frac{1}{z^{2\mu+1}}.$$

Коэффициенты, определяемые равенством (65), называются *числами Бернулли*[1]). Нахождение этих чисел весьма просто. Они являются рациональными числами и убывают вплоть до индекса 6, после чего начинают быстро возрастать. Нам нужны следующие значения:

$$B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66}. \tag{65а}$$

Подставляя полученные результаты в равенство (63), мы получаем *ряд Стирлинга*

$$\ln\Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln2\pi+\frac{1}{12z}-$$

$$-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\frac{1}{1188z^9}+\ldots,\qquad(\mathrm{Re}\,z>0). \tag{66}$$

Так как числа Бернулли быстро возрастают с возрастанием индекса, то этот ряд *расходится*. Из полученной нами формулы вытекает,

[1]) Bernoulli Jak., *Ars conjectandi*, erschienen 1713. Относительно их вычисления см. Фихтенгольц Г. М., т. II, гл. XXII, § 4, п. 422.

однако, что ошибка будет всегда меньше, чем последний отброшенный член, а также меньше, чем последний учтенный член. Поскольку этот ряд является знакочередующимся, то при вещественном значении аргумента истинное значение всегда лежит между двумя соседними частичными суммами. Переходя от логарифма к самой Г-функции и принимая во внимание разложение в степенной ряд показательной функции, получаем

$$\Gamma(z+1)\sim$$
$$\sim e^{-z}z^{z+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51\,840z^3}-\frac{571}{2\,488\,320z^4}+\ldots\right\}$$
$$(\operatorname{Re}z>0) \quad (67а)$$

или, поскольку $\Gamma(z+1)=z\,\Gamma(z)$,

$$\Gamma(z)\sim e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\ldots\right\} \quad (\operatorname{Re}z>0). \quad (67б)$$

Заметим, что при увеличении $|z|$ правая часть равенства (66) все лучше представляет $\ln\Gamma(z+1)$ в том смысле, что разность между левой и правой частями при фиксированном числе членов ряда становится сколь угодно малой. В равенстве же (67) лишь отношение обеих частей стремится к 1, в то время как разность при возрастании z не стремится к нулю.

Вычислим для дальнейших применений дробь $\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+m+1)}$. Из равенства (66) вытекает

$$\ln\Gamma(z+1)-\ln\Gamma(z+m+1)\sim -m\ln z-\frac{m^2+m}{2z}+\ldots$$
$$(|z|>|m|),$$

и потому

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+m+1)}\sim z^{-m}e^{-\frac{m^2+m}{2z}}+\ldots\sim z^{-m}\left(1-\frac{m(m+1)}{2z}+\ldots\right) \quad (68)$$
$$(|z|>|m|).$$

1.5.4.0. Оценка Г-функции при больших значениях $|\operatorname{Im}z|$. В то время как при большой вещественной части аргумента или вещественном z непосредственно применимы равенства (66) и (67), для оценки Г-функции при большом значении $|\operatorname{Im}z|$ целесообразно следующее преобразование [1]. Из равенства $\ln z=\ln(\sigma\pm i\tau)=$

[1]) См. также Mellin H., *Math. Ann.*, 68 (1910), 307 и *Acta Math.*, **15** (1890).

$= \ln(\pm i\tau) + \ln(1 \pm \sigma/i\tau)$ вытекает, что если $\tau \gg \sigma > 0$, то

$$\ln z \sim \ln\tau \pm i\,\frac{\pi}{2} \pm \frac{\sigma}{i\tau} + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{\tau^2} + \ldots.$$

Подставляя это выражение в формулу Стирлинга (63), мы получаем

$$\ln\Gamma(\sigma \pm i\tau) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\ln\tau - \frac{\pi}{2}\tau \pm i\left[\tau\ln\tau - \tau + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \ldots$$

$$(\tau > \sigma > 0),$$

и потому

$$\Gamma(\sigma \pm i\tau) \approx \tau^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\tau\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi}\, e^{\pm i\left(\tau\ln\tau - \tau + \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)} \qquad (69)$$

$$(\tau > \sigma > 0).$$

Поскольку при $\tau > 0$ обе части равенства (69) непрерывно зависят от τ в окрестности точки $\sigma = 0$, то это равенство остается справедливым и при $\sigma = 0$, т. е. для больших чисто мнимых значений аргумента.

Легко получить оценку для $|\Gamma(i\tau)|$, не используя формулы Стирлинга. Мы имеем

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\,\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

Откуда следует при $z = i\tau$

$$\Gamma(i\tau)\Gamma(-i\tau) = |\Gamma(i\tau)|^2 = -\frac{\pi}{i\tau\sin i\tau\pi} = \frac{\pi}{\tau\,\mathrm{sh}\,\tau\pi}$$

и потому

$$|\Gamma(i\tau)| = \sqrt{\frac{\pi}{\tau\,\mathrm{sh}\,\tau\pi}} = |\tau|^{-\frac{1}{2}} e^{-|\tau|\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\pi}(1+\varepsilon) \qquad (69a)$$

в соответствии с равенством (69).

1.6. Применения B- и Γ-функций. B- и Γ-функции часто применяются для вычисления определенных интегралов, значения которых не могут быть выражены иначе, как с помощью этих функций. Мы покажем сейчас некоторые любопытные примеры.

1.6.1. Вычисление $u_{1,2} = \int_0^\infty e^{-a\tau}\tau^{p-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\tau\, d\tau$. Вместо u_1 и u_2 удобнее вычислить функции

$$J_+ \equiv u_1 + iu_2 = \int_0^\infty \tau^{p-1} e^{-(a-ik)\tau}\, d\tau \qquad (70a)$$

и

$$J_- \equiv u_1 - iu_2 = \int_0^\infty \tau^{p-1} e^{-(a+ik)\tau}\, d\tau. \tag{70а}$$

Полагая здесь $t = (a \mp ik)\tau$, мы получаем

$$J_\pm = \frac{1}{(a \mp ik)^p} \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1}\, dt.$$

Путь интегрирования на плоскости t идет вдоль луча, выходящего из нулевой точки и проходящего через точку $(a \mp ik)$. Интеграл сходится в силу п. 1.4 и равен $\Gamma(p)$, если $\operatorname{Re}(a \mp ik) > 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$:

$$J_+ = \frac{\Gamma(p)}{(a-ik)^p}, \quad J_- = \frac{\Gamma(p)}{(a+ik)^p}. \tag{70б}$$

$$(\operatorname{Re}(a \mp ik) > 0, \ \operatorname{Re} p > 0).$$

Отсюда вытекает

$$u_1 = \int_0^\infty e^{-a\tau} \tau^{p-1} \cos k\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\Gamma(p)\left\{\frac{1}{(a-ik)^p} + \frac{1}{(a+ik)^p}\right\}, \tag{70в}$$

$$u_2 = \int_0^\infty e^{-a\tau} \tau^{p-1} \sin k\tau\, d\tau = \frac{1}{2i}\Gamma(p)\left\{\frac{1}{(a-ik)^p} - \frac{1}{(a+ik)^p}\right\}. \tag{70г}$$

Правая часть теряет смысл, если p равно нулю или отрицательному целому числу или если $a = \pm ik$. Из аналитичности обеих частей равенства следует: если интегралы существуют, то они представляются стоящими справа выражениями.

1.6.1.1. Частный случай: вещественные постоянные. Если величины a и k вещественны, то решение можно упростить. Мы полагаем

$$\varphi_0 \equiv \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{a}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{k}{\rho},$$

$$\rho^2 \equiv a^2 + k^2, \quad \cos\varphi_0 = \frac{a}{\rho}.$$

Тогда

$$(a \mp ik)^{-p} = \rho^{-p} e^{\pm ip\varphi_n}$$

и

$$u_1 = \int_0^\infty e^{-a\tau}\tau^{p-1}\cos k\tau\, d\tau = \Gamma(p)\frac{\cos p\varphi_0}{\rho^p} =$$

$$= \Gamma(p)\frac{\cos p\varphi_0 \sin^p \varphi_0}{k^p} = \Gamma(p)\frac{\cos p\varphi_0 \cos^p \varphi_0}{a^p}, \quad (71а)$$

$$u_2 = \int_0^\infty e^{-a\tau}\tau^{p-1}\sin k\tau\, d\tau = \Gamma(p)\frac{\sin p\varphi_0}{\rho^p} =$$

$$= \Gamma(p)\frac{\sin p\varphi_0 \sin^p \varphi_0}{k^p} = \Gamma(p)\frac{\sin p\varphi_0 \cos^p \varphi_0}{a^p}. \quad (71б)$$

1.6.1.2. Частный случай $a = 0$. Положим в предыдущих формулах $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда мы получим, если оба интеграла существуют, то

$$u_1' \equiv \int_0^\infty \tau^{p-1}\cos k\tau\, d\tau = \Gamma(p)\frac{\cos\frac{p\pi}{2}}{k^p}, \quad (72а)$$

$$u_2' \equiv \int_0^\infty \tau^{p-1}\sin k\tau\, d\tau = \Gamma(p)\frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{k^p} \quad (72б)$$

$$(0 < p < 1).$$

Для доказательства сходимости рассмотрим первый интеграл и положим $\sigma = k\tau$; тогда получим

$$k^p u_1' = \int_0^\infty \sigma^{p-1}\cos\sigma\, d\sigma =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{\sigma^{1-p}}\, d\sigma + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{\sigma^{1-p}}\, d\sigma + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{\sigma^{1-p}}\, d\sigma + \ldots.$$

Это выражение можно преобразовать путем введения новых переменных интегрирования к следующему виду:

$$k^p u_1' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{\sigma^{1-p}}\, d\sigma - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{(\sigma+\pi)^{1-p}}\, d\sigma + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{(\sigma+2\pi)^{1-p}}\, d\sigma + \ldots.$$

Но при вещественных значениях p имеем

$$0 < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma\, d\sigma}{(\sigma+\nu\pi)^{1-p}} < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{(\sigma+\nu\pi)^{1-p}} = \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^p - \left(\nu-\frac{1}{2}\right)^p}{p}\,\pi^p.$$

Наш ряд является, таким образом, знакочередующимся, и если $0 < p < 1$, то члены ряда стремятся к нулю при возрастании ν. Поэтому ряд сходится, а тогда сходится и интеграл (поскольку первый интеграл в ряде тоже сходится в интервале от 0 до $\pi/2$). Для интеграла u_2' доказательство сходимости проводится аналогично.

1.6.2. Вычисление интегралов $v_{1,2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\varphi\, d\varphi$.

Заменим снова v_1 и v_2 интегралами

$$w_\pm = v_1 \pm iv_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi\, e^{\pm ip\varphi}\, d\varphi$$

и сделаем подстановку

$$u = e^{\pm i\varphi}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right),$$

$$du = \pm iu\, d\varphi, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\pm 2i}\left(u - \frac{1}{u}\right) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}\,\frac{1-u^2}{2u}.$$

Тогда мы получим

$$w_\pm = -\frac{e^{\pm iq\frac{\pi}{2}}}{2^{p-1}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} (1-u^2)^{q-1}(1+u^2)^{p-q-1}\, 2u\, du.$$

Положим $1-u^2 = 2t$, тогда $u^2+1 = 2(1-t)$ и $t = (1-e^{\pm 2i\varphi})/2$. Поэтому наш интеграл принимает вид

$$w_\pm = e^{\pm iq\frac{\pi}{2}} \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q-1}\, dt = e^{\pm iq\frac{\pi}{2}} B(p-q,\, q). \quad (72)$$

Для интеграла w_+ путь интегрирования идет из точки $t = 0$ через точку $1/2 - i/2$ ($\varphi = \pi/4$) в $t = 1$. Поскольку единственными особыми точками подинтегральной функции являются 0 и 1, то интегрирование можно вести по отрезку $[0, 1]$ вещественной оси. Покажем, что знаки в показателях выбраны верно; для малых значений φ имеем $e^{\pm 2i\varphi} = 1 \pm 2i\varphi + \ldots$, а потому $t = \mp i\varphi + \ldots$, $1-t = 1 + \ldots$,

$e^{\pm ip\varphi} = 1 + \ldots$. Но при малых φ в равенстве, определяющем w_{+1} аргумент подинтегральной функции близок к нулю. С другой стороны, в равенстве (72), $\arg(\mp i\varphi)^q = \mp q\pi/2$, что вместе с множителем $e^{\pm iq\frac{\pi}{2}}$ дает нулевое значение аргумента для всего интеграла. Из формулы (72) следует, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{q-1}\varphi \cos^{p-q-1}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \cos q\frac{\pi}{2}\, B(p-q, q), \qquad (73а)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{q-1}\varphi \cos^{p-q-1}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = \sin q\frac{\pi}{2}\, B(p-q, q) \qquad (73б)$$

$$(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q > 0).$$

При $q = 1$ получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = B(p-1, 1) = \frac{1}{p-1} \quad (\operatorname{Re} p > 1). \qquad (73в)$$

При $q = p - 1$ получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \cos p\varphi\, d\varphi = \frac{\sin p\frac{\pi}{2}}{p-1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-2}\varphi \sin p\varphi\, d\varphi = -\frac{\cos p\frac{\pi}{2}}{p-1} \quad (\operatorname{Re} p > 1). \qquad (74)$$

Если $\operatorname{Re} p > 1$, то как левая, так и правая части равенства (73б) существуют при $q = 0$. Мы получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-1}\varphi \sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \lim_{q\to 0} \sin q\frac{\pi}{2} B(p, q) = \lim_{q\to 0} \frac{\sin q\pi}{2\cos q\frac{\pi}{2}} B(p, q),$$

и, принимая во внимание равенство (29б),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{p-1}\varphi \sin p\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (\operatorname{Re} p > 1). \qquad (75)$$

1.6.3. Вычисление $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi$ и связанных с ним интегралов. В интегралах (73) и (74) показатели при $\cos\varphi$ зависят от коэффициента p при φ в $\cos p\pi$. Однако в интеграле

$$u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi$$

показатель не зависит от коэффициента. Для вычисления этого интеграла заметим, что

$$2u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i(p-q)\varphi} \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i(p-q)\varphi} \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi.$$

Заменим во втором суммировании φ на $-\varphi$ и переставим пределы интегрирования. Полагая $t = e^{i\varphi}$, получаем

$$2u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i(p-q)\varphi} \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{-i}{2^{p+q-2}} \int_{-i}^{+i} t^{-2q}(1+t^2)^{p+q-2}\, t\, dt.$$

Интегрирование ведется здесь по единичной окружности от точки $t = -i$ ($\varphi = -\pi/2$) через точку $t = 1$ ($\varphi = 0$) до точки $t = +i$.

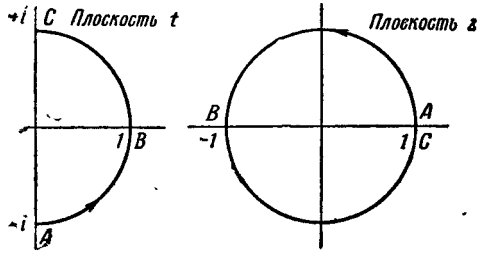


Рис. 11. Преобразование пути интегрирования.

Подставим, далее, $t^2 = e^{-i\pi}z$. Тогда точка $t = -i = e^{-i\pi/2}$ перейдет в $z = e^{i\pi}e^{-i\pi} = 1$, а точка $t = +i = e^{+\frac{i\pi}{2}}$ — в $z = e^{2i\pi}$ (см. рис. 11). Поэтому мы получаем

$$u = \frac{ie^{i\pi q}}{2^{p+q}} \oint_1^{(0+)} z^{-q}(1-z)^{p+q-2}\, dz.$$

Принимая во внимание равенство (12), а также равенство (16), определяющее B-функцию, имеем

$$u = \frac{ie^{i\pi q}(e^{-2i\pi q}-1)}{2^{p+q}} B(1-q,\ p+q-1) \qquad (\mathrm{Re}\,(p+q)>1).$$

Простое преобразование с помощью равенств (39), (40) и (36) показывает, что

$$u \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+q-1}(p+q-1)B(p,\ q)} \qquad (76)$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q)>1)$$

и

$$2u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{\pm i(p-q)\varphi} \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+q-2}(p+q-1)B(p,\ q)} \qquad (76а)$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q)>1).$$

Допустимость двойных знаков в показателе вытекает из симметрии правой части по p и q. Складывая оба выражения, получаем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{p+q-2}(p+q-1)B(p,\ q)} \qquad (76б)$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q)>1),$$

а вычитая их, получаем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = 0 \qquad (76в)$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q)>1).$$

Чтобы перейти к интегралам, содержащим степени $\sin\varphi$, заменим в равенстве (76а) переменную φ на $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Мы получим тогда

$$\int_0^{\pi} e^{i(p-q)\varphi} \sin^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{e^{i(p-q)\frac{\pi}{2}}\pi}{2^{p+q-2}(p+q-1)B(p,\ q)} \qquad (77)$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q)>1).$$

Переставляя здесь снова p и q и складывая полученные равенства, имеем

$$\int_0^{\pi} \cos(p-q)\varphi \sin^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi \cos(p-q)\frac{\pi}{2}}{2^{p+q-2}(p+q-1)\,\mathrm{B}(p,\,q)} \qquad (77\text{а})$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q) > 1),$$

а вычитая их, —

$$\int_0^{\pi} \sin(p-q)\varphi \sin^{p+q-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi \sin(p-q)\frac{\pi}{2}}{2^{p+q-2}(p+q-1)\,\mathrm{B}(p,\,q)} \qquad (77\text{б})$$

$$(\mathrm{Re}\,(p+q) > 1).$$

Полагая $p-q=l$, $p+q-2=k$ и используя равенства (39) и (36), получаем

$$\int_0^{\pi} \sin^k\varphi \cos l\varphi\, d\varphi = \frac{\pi \cos\frac{l\pi}{2}\,\Gamma(k+1)}{2^k\,\Gamma\left(1+\frac{k+l}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-l}{2}\right)} \qquad (77\text{в})$$

$$(\mathrm{Re}\,(k+l) > 0)$$

и

$$\int_0^{\pi} \sin^k\varphi \sin l\varphi\, d\varphi = \frac{\pi \sin\frac{l\pi}{2}\,\Gamma(k+1)}{2^k\,\Gamma\left(1+\frac{k+l}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{k-l}{2}\right)} \qquad (77\text{г})$$

$$(\mathrm{Re}\,(k+l) > 0).$$

1.6.4. Различные интегралы. С помощью подстановки $x=\tau^m$ получаем

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt[n]{1-\tau^m}} = \frac{1}{m}\int_0^1 x^{\frac{1}{m}-1}(1-x)^{-\frac{1}{n}}\,dx = \frac{1}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{m},\ 1-\frac{1}{n}\right)$$

и, в силу равенств (39) и (36),

$$\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt[n]{1-\tau^m}} = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}. \qquad (78)$$

С помощью подстановки $\tau=e^{-\sigma}$ получаем, принимая во внимание равенства (59) и (53),

$$\int_0^1 \frac{1-\tau^z}{1-\tau}\,d\tau = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-z\sigma}}{e^{\sigma}-1}\,d\sigma = \psi(z)+C. \qquad (79)$$

Заменяя $\sin^2 x$ на u, получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1} x \sin^{q-1} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{q}{2}-1}(1-u)^{\frac{p}{2}-1}\, du = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right). \quad (80)$$

1.6.5. Интеграл Дирихле. Если ограничивающая поверхность приведена к главным осям, то для вычисления объемов, моментов и аналогичных выражений в пространствах произвольной размерности особенно удобна одна восходящая к Дирихле интегральная формула [1]). Однако поскольку эта задача относится к области вещественного анализа, ее рассмотрение выходит за рамки нашей книги.

[1]) Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., т. II, п. 12.5.

§ 2

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка

2.1.0. Особые точки и точки определенности. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$\frac{d^n u}{dz^n} + f_1(z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \ldots + f_{n-1}(z)\frac{du}{dz} + f_n(z)\,u = 0. \qquad (1)$$

Его записывают сокращенно в виде

$$Du \equiv \sum_{m=0}^{n} f_m(z)\,u^{(n-m)} = 0; \quad f_0(z) \not\equiv 0. \qquad (1a)$$

Предположим, что коэффициенты $f_m(z)$ мероморфны в окрестности любой точки z_0, т. е. имеют в этой окрестности лишь конечное число полюсов и регулярны во всех остальных точках. Точки полюсов мы будем обозначать

$$z = a_\nu; \qquad \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ s.$$

Умножая уравнение на достаточно большую степень $(z - a_\nu)^\rho$, можно добиться, чтобы оно приняло вид

$$\sum_{m=0}^{n} q_m(z - a_\nu)^{n-m}\,u^{(n-m)} = 0; \quad q_m(z) = \sum_h B_{mh}^{(\nu)}(z - a_\nu)^h, \qquad (2)$$

где по крайней мере одно $B_{m0} \neq 0$, а потому $q_m(a_\nu) \neq 0$.

Уравнение (2) мы будем называть *нормальной формой* дифференциального уравнения для рассматриваемой точки $z = a_\nu$. Очевидно, что

$$q_m = f_m(z - a_\nu)^{\rho+m-n} \quad \text{и} \quad q_0 = (z - a_\nu)^{\rho-n}. \qquad (2a)$$

Будем искать решение в виде

$$u = (z - a_\nu)^{\alpha_\nu} \sum_l A_l^{(\nu)}(z - a_\nu)^l; \quad A_0^{(\nu)} \neq 0. \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение и располагая по степеням $z - a_\nu$, получаем, используя сокращенное обозначение (1.1),

$$(z-a_\nu)^{\alpha_\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(z-a_\nu)^k\sum_{l=0}^{k}A_l^{(\nu)}\sum_{m=0}^{n}(\alpha_\nu+l+1-n+m)_{n-m}B_{m,\,k-l}^{(\nu)}=0.$$

Поскольку все коэффициенты этого степенного ряда должны обращаться в нуль, то мы получаем равенства

$$\sum_{l=0}^{k}A_l^{(\nu)}F_{k-l}(\alpha_\nu+l)=0; \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

где

$$F_h(\alpha)\equiv\sum_{m=0}^{n}(\alpha+1-m)_m\,B_{n-m,\,h}. \tag{4a}$$

Равенство, соответствующее значению $k=0$, называется *определяющим (характеристическим) уравнением* для соответствующего показателя α_ν. Остальные равенства дают *рекуррентные соотношения*, которые позволяют последовательно выразить коэффициенты $A_1^{(\nu)}$, $A_2^{(\nu)}$, ... через коэффициент $A_0^{(\nu)}$ (это коэффициент можно выбирать произвольно).

Степень определяющего уравнения

$$F_0(\alpha_\nu)=\sum_{m=0}^{n}(\alpha_\nu+1-m)_m\,B_{n-m,\,0}^{(\nu)}=0 \tag{5}$$

равна n в случае, когда $B_{0,\,0}^{(\nu)}\neq 0$. Ввиду (2а) отсюда вытекает, что $\rho=n$ и

$$f_m=(z-a_\nu)^{-m}\,q_m=(z-a_\nu)^{-m+\varkappa_m}\sum_{h=0}^{\infty}B_{m,\,h+\varkappa_m}^{(\nu)}(z-a_\nu)^h$$
$$\left(\varkappa_m\geqslant 0;\ B_{m,\,\varkappa_m}^{(\nu)}\neq 0\right). \tag{6}$$

Поэтому в точке a_ν коэффициенты f_m не могут иметь полюсы порядка большего, чем m. Такие точки мы будем называть *регулярными особыми точками*. Точка a называется *точкой определенности*, если она либо является регулярной особой точкой, либо в этой точке все коэффициенты $f_m(z)$ не имеют полюсов (т. е. если при всех m в уравнении (6) $\varkappa_m\geqslant m$). Если при всех m имеем $\varkappa_m\geqslant m$, то уравнение (5) сводится к последнему члену, и корнями являются

$$\alpha_\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{7}$$

Если степень уравнения (5) меньше, чем n, т. е. если $B_{0,0}^{(\nu)} = 0$, то по крайней мере для одного m

$$f_m = (z-a_\nu)^{-m-\varkappa_m} q_m = (z-a_\nu)^{-m-\varkappa_m} \sum_{h=0}^{\infty} B_{m,\,h-\varkappa_m}^{(\nu)} (z-a_\nu)^h \qquad (8)$$

$$(\varkappa_m > 0; \quad B_{m,\,-\varkappa_m}^{(\nu)} \neq 0).$$

В этом случае говорят о *нерегулярной особой точке*, или о *точке определенности*.

В каждой точке определенности мы имеем n значений α_ν, которым, вообще говоря, соответствуют n независимых решений (3) дифференциального уравнения. Если, однако, два или более корней характеристического уравнения $\alpha^{(1)} \geqslant \alpha^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant \alpha^{(m)}$ отличаются на целые числа, то рекуррентные формулы могут потерять силу для всех $\alpha^{(i)}$, кроме $\alpha^{(1)}$. В этом случае можно прийти к цели следующим путем, указанным Фробениусом. Положим

$$A_0(\alpha) = F_0(\alpha+1)\, F_0(\alpha+2) \ldots F_0(\alpha+N). \qquad (9)$$

Пусть тогда $N = \alpha^{(1)} - \alpha^{(m)}$. Мы можем определить из рекуррентной системы (4) старшие коэффициенты $A_n(\alpha)$ как функции индекса α; поскольку $F_0(\alpha+l)$ не обращается тождественно в нуль, то эти функции однозначно определены. Образуем с помощью этих функций по уравнению (3) ряды

$$u(\alpha, z) = (z-a_\nu)^\alpha \sum_l A_l(\alpha)(z-a_\nu)^l. \qquad (10)$$

Эти ряды тождественно по α и z удовлетворяют рекуррентным формулам (4) при $k = 1, 2, 3, \ldots$, но не удовлетворяют характеристическому уравнению ($k = 0$). Отсюда следует

$$Du(\alpha, z) = F_0(\alpha) A_0(\alpha). \qquad (11)$$

В силу (9), ни один из коэффициентов $A_l(\alpha)$ не может обратиться в бесконечность при $\alpha \to \alpha^{(i)}$; в этом легко убедиться с помощью рекуррентной системы (4). Выберем в качестве α одно из характеристических значений $\alpha^{(i)}$. Мы получим в правой части равенства (11) i обращающихся в нуль множителей, а потому

$$D \frac{u(\alpha, z)}{[\alpha-\alpha^{(i)}]^{i-1}} = O(\alpha-\alpha^{(i)}); \qquad (12)$$

разлагая в левой части $u(\alpha, z)$ в ряд Тейлора по степеням $\alpha - \alpha^{(i)}$, получаем

$$D \frac{\partial^\nu u(\alpha, z)}{\partial \alpha^\nu}\Bigg|_{\alpha=\alpha^{(i)}} = 0; \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, i-1. \qquad (13)$$

Отсюда следует, что не только сама функция $u(\alpha, z)$, но и производные до $(l-1)$-й включительно удовлетворяют при $\alpha=\alpha^{(l)}$ дифференциальному уравнению. Поскольку, в силу равенства (9), начальный коэффициент $A_0(\alpha)$ имеет нуль $(l-1)$-го порядка, то функция $u(\alpha, z)$ и ее первые $l-2$ производные по α обращаются в нуль при $\alpha=\alpha^{(l)}$. Но $(l-1)$-я производная, вообще говоря, отлична от нуля. Мы получаем, таким образом, систему m независимых решений

$$u_l(z)=\frac{\partial^{l-1}}{(\partial\alpha^{(l)})^{l-1}}u(\alpha^{(l)}, z). \tag{14}$$

Подставляя сюда ряд (10), мы получаем ответ в явном виде:

$$u_l(z)=(z-a_\nu)^{\alpha^{(l)}}\sum_{\lambda=0}^{l-1}\binom{l-1}{\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}(z-a_\nu)^l(\ln[z-a_\nu])^{\alpha^{(l)}-\lambda-1}\frac{\partial^\lambda A_l(\alpha^{(l)})}{(\partial\alpha^{(l)})^\lambda}. \tag{15}$$

То, что функции $u_l(z)$ линейно независимы друг от друга, проще всего доказать, рассматривая члены с низшими степенями z. Они получаются из члена разложения (10), соответствующего индексу $l=0$; и поскольку, в силу равенства (9), производные функции $A_0(\alpha)$ от нулевой до $(l-2)$-й обращаются в нуль, а $(l-1)$-я производная не равна нулю, эти члены равны

$$(z-a_\nu)^{\alpha^{(l)}}\frac{\partial A_0(\alpha^{(l)})}{(\partial\alpha^{(l)})^{l-1}}.$$

Мы требовали до сих пор, чтобы дифференциальное уравнение имело в любой конечной области не более чем конечное число регулярных особых точек и не имело нерегулярных особых точек. Если бесконечно удаленная точка является точкой определенности (смысл этого требования будет уточнен ниже), то дифференциальное уравнение называется уравнением *типа Фукса*. Такими уравнениями и уравнениями, получаемыми из них слиянием особых точек (см. 2.2.7), мы и будем заниматься в дальнейшем.

2.1.1. Определитель Вронского. Так как в общее решение дифференциального уравнения n-го порядка входят n постоянных интегрирования или, иначе говоря, такое решение однозначно определяется n начальными значениями функции u и ее производных $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(n-1)}$, то это уравнение имеет не более чем n линейно независимых решений. Для того чтобы установить, что заданные n решений $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_n(z)$ линейно независимы, можно использовать *определитель Вронского*. Если решения линейно зависимы, то имеет место равенство

$$c_1u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n=0.$$

Поскольку функции являются решениями дифференциального уравнения, то должны существовать их производные $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, ..., $u_k^{(n)}$, причем имеют место равенства

$$\begin{aligned}
c_1u_1^{(1)} &+ c_2u_2^{(1)} + \ldots + c_nu_n^{(1)} = 0;\\
c_1u_1^{(2)} &+ c_2u_2^{(2)} + \ldots + c_nu_n^{(2)} = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_1u_1^{(n-1)} &+ c_2u_2^{(n-1)} + \ldots + c_nu_n^{(n-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Рассматриваемые как условия, наложенные на коэффициенты c_k, эти равенства образуют однородную линейную систему уравнений, которая может иметь нетривиальные решения лишь в случае, если

$$W(z) \equiv \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) & \ldots & u_n(z)\\ u_1^{(1)}(z) & u_2^{(1)}(z) & \ldots & u_n^{(1)}(z)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ u_1^{(n-1)}(z) & u_2^{(n-1)}(z) & \ldots & u_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

Обращение в нуль этого определителя Вронского является, таким образом, необходимым условием линейной зависимости решений; необращение в нуль — достаточным условием линейной независимости решений.

Поскольку производная определителя равна сумме определителей, получающихся путем дифференцирования элементов какой-либо строки, то

$$\frac{dW}{dz} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n\\ u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots & u_n^{(1)}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)}\\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \ldots & u_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Остальные слагаемые тождественно равны нулю, так как они имеют две совпадающие строки. Прибавим теперь к последней строке остальные, умноженные соответственно на $f_n(z)$, $f_{n-1}(z)$, ..., $f_2(z)$. В силу дифференциального уравнения (1), элементы последней строки принимают при этом следующий вид:

$$u_k^{(n)} + \sum_{m=0}^{n-2} f_{n-m}u_k^{(m)} = -f_1u_k^{(n-1)}.$$

Вынося множитель f_1 за знак определителя, получаем

$$\frac{dW}{dz} = -f_1 W.$$

Отсюда находим

$$W(z) = Ce^{-\int^z f_1(t)\,dt} = W(\zeta)\,e^{-\int_\zeta^z f_1(t)\,dt}. \qquad (17)$$

Таким образом, определитель Вронского однозначно определяется коэффициентом при $u^{(n-1)}$ и своим начальным значением.

2.1.2. Преобразования полюсов и показателей. Для изучения уравнения в бесконечно удаленной точке применим *дробно-линейное преобразование*

$$z = \frac{A\hat{z} + B}{C\hat{z} + D}; \quad \hat{z} = \frac{-Dz + B}{Cz - A}; \quad (AD - BC \neq 0). \qquad (18)$$

При этом преобразовании полюсы a_ν переходят в точки

$$\hat{a}_\nu = \frac{-Da_\nu + B}{Ca_\nu - A}. \qquad (18а)$$

Дробно-линейное преобразование сохраняет двойное отношение любых четырех чисел (точек):

$$\frac{a_i - a_l}{a_k - a_l} : \frac{a_i - a_m}{a_k - a_m} = \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_l}{\hat{a}_k - \hat{a}_l} : \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_m}{\hat{a}_k - \hat{a}_m}. \qquad (18б)$$

Поэтому двойные отношения полюсов являются инвариантами дифференциальных уравнений типа Фукса.

Другое преобразование дифференциального уравнения типа Фукса производится с помощью представления искомой функции в виде

$$u = (z - a_1)^{k_1}(z - a_2)^{k_2} \ldots (z - a_\nu)^{k_\nu}\,\hat{u}. \qquad (19)$$

При этом показатели в каждом полюсе изменяются на некоторую величину, постоянную для этого полюса. В результате этого преобразования все n решений определяющего уравнения изменяются на одну и ту же величину. Чтобы выяснить, как преобразуется дифференциальное уравнение при подстановке (19), заметим, что

$$\frac{du}{dz} = \prod_\nu (z - a_\nu)^{k_\nu}\left(\sum_\mu \frac{k_\mu}{z - a_\mu} + \frac{d}{dz}\right)\hat{u}.$$

Отсюда следует, что при этой подстановке надо заменить в дифференциальном уравнении оператор d/dz на

$$\frac{d}{dz} \to \sum_\mu \frac{k_\mu}{z - a_\mu} + \frac{d}{dz}. \qquad (20)$$

После этого вследствие однородности уравнения можно сократить его на произведение $\prod_{\nu}(z-a_\nu)^{k_\nu}$.

Преобразование показателей дает возможность превратить регулярные точки в особые. В этом случае говорят о кажущейся особенности. Необходимым, но не достаточным условием того, чтобы особенность была кажущейся, является то, что после вычитания некоторой определенной величины α^* показатели принимают значения $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2.1.3. Поведение в бесконечно удаленной точке. С помощью преобразования (18) можно отобразить точку ∞ в любую точку $\hat{z}=-D/C$ в конечной области. Если эта точка регулярна или является точкой определенности, то и точка $z=\infty$ называется регулярной (соответственно точкой определенности). Итак, точка $z=\infty$ тогда и только тогда называется регулярной или регулярной особой точкой, если при дробно-линейном преобразовании она переходит в регулярную или регулярную особую точку. Если дифференциальное уравнение (с учетом бесконечно удаленной точки) не имеет ни одной нерегулярной особой точки и имеет лишь конечное число регулярных особых точек, то это свойство сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Иными словами, уравнение типа Фукса переходит при дробно-линейных преобразованиях в уравнение того же типа.

Если бесконечно удаленная точка является точкой определенности, то решение дифференциального уравнения может быть при больших значениях $|z|$ представлено в виде

$$u=z^{-\alpha_\infty}\sum_{l=0}^{\infty}A_l^{(\infty)}z^{-l}. \tag{21}$$

Для того чтобы степень определяющего уравнения равнялась n, функции $f_m(z)$ должны убывать на бесконечности не медленнее, чем z^{-m}. Положим, по аналогии с равенством (2),

$$q_m(z)=\sum_{h=0}^{\infty}B_{m,h}^{\infty}z^{-h}=z^{\rho+m-n}f_m(z). \tag{22}$$

Подставляя разложения (21) и (22) в дифференциальное уравнение, мы получаем рекуррентные соотношения

$$\sum_{l=0}^{k}A_l^{\infty}F_{k-l}^{\infty}(-\alpha_\infty-l)=0;\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \tag{23}$$

и при $k=0$ — определяющее уравнение

$$F_0(-\alpha_\infty)=\sum_{m=0}^{n}B_{n-m,0}^{\infty}(-\alpha_\infty-m+1)_m. \tag{23а}$$

Степень этого уравнения равна n лишь в случае, если $B^{\infty}_{0,0} \neq 0$. Так как $f_0(z) = 1$ в силу равенства (21), то отсюда вытекает, что $\rho = n$ и

$$f_m(z) = z^{-m} \sum_{h=0}^{\infty} B^{\infty}_{m,h} z^{-h} \tag{24}$$

в соответствии с нашим утверждением.

В силу равенства (6), функции $f_m(z)$ являются мероморфными функциями с полюсами не выше чем m-го порядка и без существенной особенности в бесконечности [равенство (24)]. Следовательно, они могут быть разложены на элементарные дроби вида

$$f_m(z) = \sum_{\nu} \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta^{(\nu)}_{ml}}{(z - a_\nu)^l}. \tag{25}$$

При больших z это разложение дает

$$f_m(z) = \sum_{l} \bar{B}_{m,l} z^{-l} = z^{-m} \sum_{h} B^{\infty}_{m,h} z^{-h}, \tag{26}$$

где

$$\bar{B}_{m,l} = \sum_{\nu} \sum_{k=1}^{l} \beta^{(\nu)}_{mk} \binom{-k}{l-k} (-a_\nu)^{l-k} = B^{\infty}_{m,l-m}. \tag{26a}$$

Для того чтобы выполнялось равенство (24), коэффициенты $\beta^{(\nu)}_{ml}$ должны быть такими, что $\bar{B}_{ml} = 0$ при $l = 1, 2, \ldots, m-1$. Подставим разложение (25) в дифференциальное уравнение (1). Принимая во внимание указанное $m-1$ условие для коэффициентов, мы получим, что уравнение преобразуется к виду

$$\sum_{m} P^m Q_m u^{(m)} = 0,$$

где

$$P = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_\nu),$$

а Q_m является многочленом степени $\leqslant (\nu - 1)(n - m)$. Наименьшее возможное значение ν равно 1. В этом случае мы имеем одну особую точку на конечном расстоянии, а точка $z = \infty$ является регулярной особой точкой, поскольку уравнение имеет вид

$$\sum a_m (z - a)^m u^{(m)} = 0,$$

и, следовательно, его коэффициенты равны

$$f_m = \frac{a_{n-m}}{a_n} (z - a)^{-m}.$$

Таким образом, *уравнение типа Фукса имеет по крайней мере два полюса.*

Из определяющего уравнения (5) вытекает важное замечание относительно суммы показателей. Эта сумма равна коэффициенту

при α_ν^{n-1}, взятому с обратным знаком. Из равенства

$$\alpha_\nu(\alpha_\nu-1)\dots(\alpha_\nu-n+1)+$$
$$+B_{1,0}^{(\nu)}\alpha_\nu(\alpha_\nu-1)\dots(\alpha_\nu-n+2)+\dots+B_{n,0}^{(\nu)}=0$$

вытекает, с учетом равенств (2) и (25), что

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_\nu^{(k)}=\alpha_\nu^{(1)}+\alpha_\nu^{(2)}+\dots+\alpha_\nu^{(n)}=$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}-B_{1,0}^{(\nu)}=\frac{n(n-1)}{2}-\beta_{1,1}^{(\nu)}. \qquad (27)$$

Для показателей полюса в бесконечно удаленной точке имеем, в силу равенств (23а), (26) и (26а), соотношение

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_\infty^{(k)}=\alpha_\infty^{(1)}+\alpha_\infty^{(2)}+\dots+\alpha_\infty^{(n)}=$$
$$=-\frac{n(n-1)}{2}+B_{1,0}^{\infty}=-\frac{n(n-1)}{2}+\sum_\nu\beta_{1,1}^{(\nu)}. \qquad (28)$$

Суммируя равенства (27) и (28) по всем полюсам, включая точку $z=\infty$, имеем

$$\sum_\nu\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_\nu^{(k)}=n(n-1). \qquad (29)$$

Эта сумма не изменится, если включить в нее и некоторые регулярные точки, так как для этих точек сумма показателей равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

2.2. Дифференциальные уравнения типа Фукса второго порядка.

2.2.1. Преобразование показателей. Уравнение типа Фукса второго порядка может быть записано в виде

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{z-a_\nu}\frac{d}{dz}+\sum_\nu\frac{\alpha_\nu\alpha_\nu'}{(z-a_\nu)^2}+\sum_\nu\frac{\overline{\beta}_\nu}{z-a_\nu}\right\}u=0, \qquad (30)$$

где α_ν, α_ν' являются корнями определяющего уравнения (5)

$$(\alpha-\alpha_\nu)(\alpha-\alpha_\nu')=0$$

для полюса a_ν. Поскольку бесконечно удаленная точка не является существенно особой, то из равенства (24а) имеем

$$\sum_\nu\overline{\beta}_\nu=0. \qquad (31)$$

Применим теперь к дифференциальному уравнению преобразование показателей. Тогда мы получим по равенству (20)

$$\left\{\left(\frac{d}{dz}+\sum_\nu \frac{k_\nu+1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)\left(\frac{d}{dz}+\sum_\nu \frac{k_\nu}{z-a_\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_\nu \frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu}{(z-a_\nu)^2}+\sum_\nu \frac{\overline{\beta}_\nu}{z-a_\nu}\right\} u=0,$$

или же, полагая

$$\widehat{\alpha}_\nu=\alpha_\nu-k_\nu; \qquad \widehat{\alpha}'_\nu=\alpha'_\nu-k_\nu;$$

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\sum_\nu \frac{1-\widehat{\alpha}_\nu-\widehat{\alpha}'_\nu}{z-a_\nu}\frac{d}{dz}+\sum_\nu \frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu-k_\nu}{(z-a_\nu)^2}+\left(\sum_\nu \frac{k_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\sum_\nu \frac{k_\nu}{z-a_\nu}\sum_\mu \frac{1-\alpha_\mu-\alpha'_\mu}{z-a_\mu}+\sum_\nu \frac{\overline{\beta}_\nu}{z-a_\nu}\right\}\widehat{u}=0. \quad (32)$$

Из равенства (32) вытекают тождества

$$\left(\sum_\nu \frac{k_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+\sum_\nu \frac{k_\nu}{z-a_\nu}\sum_\mu \frac{1-\alpha_\mu-\alpha'_\mu}{z-a_\mu}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sum \frac{1-\widehat{\alpha}_\nu-\widehat{\alpha}'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum \frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2 \quad (33а)$$

и

$$\alpha_\nu\alpha'_\nu-k_\nu=\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}'_\nu-\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2+\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2. \quad (33б)$$

Далее можно положить

$$\sum_\nu \frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}=\sum_\nu \frac{\overline{\beta}_\nu}{z-a_\nu}+\frac{1}{4}\sum_\nu\left(\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum_\nu \frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2. \quad (34)$$

В правой части этого равенства элементарные дроби второго порядка взаимно уничтожаются. Поэтому подстановка приводит лишь к изменению коэффициентов элементарных дробей первого порядка. Таким образом, преобразованное уравнение имеет вид

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\sum_\nu \frac{1-\widehat{\alpha}_\nu-\widehat{\alpha}'_\nu}{z-a_\nu}\frac{d}{dz}+\sum_\nu \frac{\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}'_\nu-\frac{1}{4}(1-\widehat{\alpha}_\nu-\widehat{\alpha}'_\nu)^2}{(z-a_\nu)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\left(\sum \frac{1-\widehat{\alpha}_\nu-\widehat{\alpha}'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+\sum_\nu \frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}\right\}\widehat{u}=0, \quad (35)$$

в то время как исходное уравнение (30) при подстановке (34) переходит в

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\sum_\nu \frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\frac{d}{dz}+\sum_\nu \frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu-\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2}{(z-a_\nu)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left(\sum_\nu \frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+\sum_\nu \frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}\right\}u=0. \quad (36)$$

Оба уравнения имеют одинаковый вид, причем коэффициенты β_ν в них совпадают. Таким образом, эти коэффициенты инвариантны при преобразованиях показателей. Решения обоих уравнений связаны при этом друг с другом равенством (19). Таким образом, из каждого решения уравнения (35) получается решение уравнения (36), если преобразовать параметры α_ν, α'_ν по формуле (32) и принять во внимание равенство (19). Для того чтобы отчетливо выразить зависимость решения от параметров, мы будем обозначать решение через $P(a_j;\ \alpha_j;\ \beta_j;\ z)$. Из равенства (36) видно, что

$$\prod_\mu (z-a_\mu)^{k_\mu} P\begin{Bmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_m \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \ldots, & \alpha'_m \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_m \end{Bmatrix} z \Bigg\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow P\begin{Bmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, a_m \\ \alpha_1+k_1, & \alpha_2+k_2, & \ldots, \alpha_m+k_m \\ \alpha_1+k'_1, & \alpha'_2+k_2, & \ldots, \alpha'_m+k_m \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, \beta_m \end{Bmatrix} z \Bigg\}. \quad (37)$$

Это равенство и аналогичные равенства, которые встретятся нам позже, понимаются в том смысле, что они выражают связь между решениями дифференциальных уравнений. Выбор произвольных постоянных и фундаментальных решений может быть различным слева и справа.

Если уравнение (36) имеет кажущиеся особенности, то для них по равенству (7)

$$(\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2=1$$

и $\beta_\nu=0$. Для полюса на бесконечности должно выполняться добавочное условие, которое будет указано в п. 2.2.2.

2.2.2. Связь между показателями. Из равенства (29) вытекает при $n=2$, что

$$\sum_{\nu}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)=2, \tag{38}$$

где сумма распространена на все показатели, включая полюс в бесконечности. Для показателя в бесконечно удаленной точке из определяющего уравнения (23а) следует, что

$$(\alpha-\alpha_\infty)(\alpha-\alpha'_\infty)=\alpha(\alpha+1)-\alpha B^{\infty}_{1,0}+B^{\infty}_{2,0}=0.$$

Коэффициенты $B^{\infty}_{m,0}$ по равенству (23) являются коэффициентами при z^{-m} в разложении $f_m(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Из уравнения (36) непосредственно следует, что

$$B^{\infty}_{1,0}=\overset{*}{\sum_{\nu}}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu); \tag{39а}$$

$$B^{\infty}_{2,0}=\overset{*}{\sum_{\nu}}\beta_\nu a_\nu+\overset{*}{\sum_{\nu}}\left[\alpha_\nu\alpha'_\nu-\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2\right]+\frac{1}{4}\left(\overset{*}{\sum_{\nu}}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)\right)^2. \tag{39б}$$

Звездочка * в знаке суммирования означает здесь и далее, что суммирование распространяется лишь на полюсы, лежащие на конечном расстоянии. Отсюда следует, что в соответствии с равенством (38)

$$\alpha_\infty+\alpha'_\infty=\overset{*}{\sum_{\nu}}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)-1 \tag{38а}$$

и

$$4\alpha_\infty\alpha'_\infty=\overset{*}{\sum_{\nu}}4\beta_\nu a_\nu+\overset{*}{\sum_{\nu}}\left[4\alpha_\nu\alpha'_\nu-(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2\right]+\left(\overset{*}{\sum_{\nu}}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)\right)^2.$$

Возводя первое равенство в квадрат и вычитая его из второго, получаем

$$1-(\alpha_\infty-\alpha'_\infty)^2=\overset{*}{\sum_{\nu}}\left[1-(\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2+4\beta_\nu a_\nu\right]. \tag{40}$$

Если принять во внимание и точку ∞, то мы получаем

$$\sum_{\nu}\left[1-(\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2+4\beta_\nu a_\nu\right]=0, \tag{40а}$$

где

$$\beta_\infty=0, \quad (\beta a)_\infty=-\frac{1}{2}\left[1-(\alpha_\infty-\alpha'_\infty)^2\right]. \tag{40б}$$

Поскольку в регулярных точках и несобственных полюсах $(\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2=1$, то можно распространить суммирование и на некоторые такие точки. Значения (40б) получаются путем преобразования какого-либо полюса в бесконечно удаленную точку с помощью дробно-линейного преобразования.

2.2.3. Преобразование полюсов. Запишем произвольное дробно-линейное преобразование переменной z, а тем самым и полюсов a_ν в следующем виде:

$$z-a_f=(a_\infty-a_f)\frac{\hat z-a_f}{\hat z-\hat a_\infty};\qquad \hat z-a_f=(\hat a_\infty-a_f)\frac{z-a_f}{z-a_\infty};$$
$$a_\nu-a_f=(a_\infty-a_f)\frac{\hat a_\nu-a_f}{\hat a_\nu-\hat a_\infty};\qquad \hat a_\nu-a_f=(\hat a_\infty-a_f)\frac{a_\nu-a_f}{a_\nu-a_\infty}. \tag{41}$$

При этом точки $z=a_\infty$ и $\hat z=\hat a_\infty$ сопоставляются точкам $\hat z=\infty$ (соответственно $z=\infty$), а точка a_f является неподвижной точкой преобразования. Мы будем всегда считать эти точки полюсами; в случае когда одна из этих точек регулярна, ей приписывают значения $\alpha=0$, $\alpha'=1$, $\beta=0$. Из сказанного выше ясно, что при дробно-линейном преобразовании точки a_ν переходят в $\hat a_\nu$, все показатели остаются неизменными и лишь только $\hat\beta_\nu$ меняются еще неизвестным нам образом:

$$P\begin{Bmatrix} a_\nu & & \\ \alpha_\nu & z & \\ \alpha'_\nu & & \\ \beta_\nu & & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} \hat a_\nu & & \\ \alpha_\nu & \hat z & \\ \alpha'_\nu & & \\ \hat\beta_\nu & & \end{Bmatrix}. \tag{42}$$

Для того чтобы вычислить $\hat\beta_\nu$, сравним преобразованный коэффициент $f_2(z)$ с коэффициентом $f_2(z)$ уравнения (36), в котором все величины заменены преобразованными. Эти выражения имеют вид

$$\left(\frac{dz}{d\hat z}\right)^2\left\{\sum_\nu\frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu-\frac14(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2}{(z-a_\nu)^2}+\frac14\left(\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+\sum_\nu\frac{\beta_\nu}{z-a_\nu}\right\}; \tag{43а}$$

$$\sum_\nu\frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu-\frac14(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2}{(\hat z-\hat a_\nu)^2}+\frac14\left(\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{\hat z-\hat a_\nu}\right)^2+\sum_\nu\frac{\hat\beta_\nu}{\hat z-\hat a_\nu}. \tag{43б}$$

Мы уже знаем, что элементарные дроби второго порядка совпадают. Поэтому нам надо сравнить лишь элементарные дроби первого порядка. Из (41) следует

$$\frac{dz}{d\hat z}=\frac{(a_\infty-a_f)(a_f-\hat a_\infty)}{(\hat z-\hat a_\infty)^2};\qquad \frac{dz}{d\hat z}\frac{1}{z-a_\nu}=\frac{\hat a_\nu-\hat a_\infty}{\hat z-\hat a_\infty}\frac{1}{\hat z-\hat a_\nu}. \tag{44}$$

Вычтем первое слагаемое формулы (43б) из первого слагаемого (43а); члены первого порядка в полученной разности имеют вид

$$-\frac{2}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}\sum_\nu{}^{*}\frac{\alpha_\nu\alpha_\nu'-\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha_\nu')^2}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}. \tag{45а}$$

Прежде чем образовать разность вторых слагаемых из (43), вычислим еще

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{d\hat{z}}\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{z-a_\nu}=\frac{1}{2}\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}\frac{\hat{a}_\nu-\hat{a}_\infty}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}.$$

Разлагая это выражение на элементарные дроби, получим, в силу (38),

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{d\hat{z}}\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{z-a_\nu}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_\nu{}^{*}(1-\alpha_\nu-\alpha_\nu')\left(\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}-\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}\right)=\frac{1}{2}\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}-\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\infty},$$

При вычислении разности безразлично, будем ли мы учитывать полюс $\hat{a}_\nu$ или нет. В последней сумме мы опустили звездочку, т. е. учли также полюс $z=\infty$, $\hat{z}=\hat{a}_\infty$. Теперь мы можем выписать элементарные дроби первого порядка, входящие в разность вторых слагаемых формул (43а) и (43б); они равны

$$-\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}\sum_\nu{}^{*}\frac{1-\alpha_\nu-\alpha_\nu'}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}. \tag{45б}$$

Наконец, заметим, что третье слагаемое в формуле (43а) имеет вид

$$\frac{(a_\infty-a_f)(a_f-\hat{a}_\infty)}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}\sum_\nu{}^{*}\frac{\beta_\nu}{(\hat{z}-\hat{a}_\nu)(\hat{a}_\infty-\hat{a}_\nu)}. \tag{45в}$$

Сумма трех равенств (45) должна быть равна последнему члену в (43б)

$$\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\infty}\sum_\nu{}^{*}\frac{1}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}\left\{\frac{1}{2}[(\alpha_\nu-\alpha_\nu')^2-1]+\frac{(a_\infty-a_f)(a_f-\hat{a}_\infty)}{\hat{a}_\infty-\hat{a}_\nu}\beta_\nu\right\}=\sum_\nu\frac{\hat{\beta}_\nu}{\hat{z}-\hat{a}_\nu}. \tag{46}$$

При $\hat{a}_\nu\neq\hat{a}_\infty$ это дает

$$\hat{\beta}_\nu=\frac{(a_f-a_\infty)(a_f-\hat{a}_\infty)}{(\hat{a}_\nu-\hat{a}_\infty)^2}\beta_\nu+\frac{1}{2}\frac{(\alpha_\nu-\alpha_\nu')^2-1}{\hat{a}_\nu-\hat{a}_\infty}. \tag{47}$$

Так как левая часть равенства (46) при $\hat{z} \to \infty$ стремится к нулю, как $1/\hat{z}^2$, то сумма всех β_ν равна нулю. Поэтому для полюса $\hat{a}_\infty$ вместо равенства (47) получаем

$$\hat{\beta}_\infty = -\sum_\nu{}^{*} \hat{\beta}_\nu. \tag{48}$$

Если полюс $\hat{a}_\nu$ стремится к бесконечно удаленной точке, то в пределе из (47) получаем оба соотношения (40б). Уравнение (47) показывает, что для любой кажущейся особенности, т. е. такой точки, что $(\alpha_\nu - \alpha'_\nu)^2 = 1$, $\beta_\nu = 0$, после преобразования полюсов снова имеем $\hat{\beta}_\nu = 0$. Таким образом, при этом преобразовании кажущаяся особенность переходит в кажущуюся особенность, как это и должно быть. Этот критерий недостаточен еще для того, чтобы выяснить, является ли бесконечно удаленная точка регулярной. Мы должны еще особо изучить эту точку.

2.2.4. Регулярное поведение в бесконечно удаленной точке. Устремим полюс $\hat{a}_\lambda$ в бесконечность. Тогда из равенства (47) имеем $\hat{\beta}_\lambda \to 0$ и $\hat{a}_\lambda \beta_\lambda \to (1 - (\alpha_\lambda - \alpha'_\lambda)^2)/2$. Если и это выражение обращается в нуль, то $\hat{a}_\lambda^2 \hat{\beta}_\lambda$ имеет конечный предел. Мы имеем регулярную точку тогда и только тогда, когда этот предел равен нулю, так как в этом случае β_ν уже до преобразования равняется нулю.

Предположим теперь, что $z = a_\infty$ — регулярная точка. Тогда и $\hat{z} = \infty$ является регулярной точкой; в сумме (со звездочкой или без звездочки) учет этой точки ничего не меняет. Согласно (40а), отсюда следует

$$\sum_\nu{}^{*} [1 - (\alpha_\nu - \alpha'_\nu)^2] + 4 \sum_\nu{}^{*} \hat{\beta}_\nu \hat{a}_\nu = 0 \tag{49}$$

в силу (47) с использованием (49) и (48),

$$2 \sum_\nu{}^{*} \hat{a}_\nu^2 \hat{\beta}_\nu = \sum_\nu{}^{*} \hat{a}_\nu [(\alpha_\nu - \alpha'_\nu)^2 - 1]. \tag{50}$$

Далее, показатели в уравнении (38) связаны соотношением

$$\sum_\nu{}^{*} (1 - \alpha_\nu - \alpha'_\nu) = 2. \tag{51}$$

Равенства (48), (49) и (50) являются условиями того, что функция $f_2(\hat{z})$ стремится к нулю, как $1/\hat{z}^4$. Вместе с равенством (51) они дают необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $\hat{z} = \infty$ была регулярной.

2.2.5. Три полюса. Дифференциальное уравнение Римана. Пусть уравнение типа Фукса имеет ровно три регулярные особые точки. Тогда условия (48), (49) и (50) однозначно определяют три коэффициента β_ν как функции от a_ν, α_ν, α'_ν. Уравнение можно записать в виде

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\frac{d}{dz}+\left(\frac{\alpha_1\alpha'_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)}{z-a_1}+\right.\right.$$
$$+\frac{\alpha_2\alpha'_2(a_2-a_3)(a_2-a_1)}{z-a_2}+\left.\left.\frac{\alpha_3\alpha'_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)}{z-a_3}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\right]P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & z\\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3\end{matrix}\right\}=0. \qquad (52)$$

Так как $f_2(z)$ ведет себя на бесконечности, как $1/z^4$, очевидно что β_ν, которое можно вычислить с помощью разложения на элементарные дроби, действительно однозначно определено. Поэтому бесконечно удаленная точка является регулярной, если, кроме того, выполнено условие

$$\alpha_1+\alpha'_1+\alpha_2+\alpha'_2+\alpha_3+\alpha'_3=1, \qquad (52a)$$

соответствующее равенству (51). Уравнение (52) называется *дифференциальным уравнением Римана*. Формулы преобразования решений этого уравнения имеют, согласно равенствам (37) и (42), вид

$$(z-a_1)^{k_1}(z-a_2)^{k_2}(z-a_3)^{k_3}P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & z\\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3\end{matrix}\right\}\longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3\\ \alpha_1+k_1, & \alpha_2+k_2, & \alpha_3+k_3 & z\\ \alpha'_1+k_1, & \alpha'_2+k_2, & \alpha'_3+k_3\end{matrix}\right\}; \qquad (53)$$

$$P\left\{\begin{matrix}\hat{a}_1, & \hat{a}_2, & \hat{a}_3\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & \hat{z}\\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3\end{matrix}\right\}\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & z\\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3\end{matrix}\right\}. \qquad (54)$$

Дифференциальное уравнение, имеющее лишь два полюса, является частным случаем уравнения (52); оно имеет вид

$$\left[\frac{d}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a_1}+\frac{1+\alpha+\alpha'}{z-a_2}\right)\frac{d}{dz}+\alpha\alpha'\frac{(a_1-a_2)^2}{(z-a_1)^2(z-a_2)^2}\right]P=0. \qquad (55)$$

Это уравнение решается в элементарных функциях

$$P=\left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\alpha};\quad \left(\frac{z-a_1}{z-a_2}\right)^{\alpha'}. \tag{55a}$$

Одна из регулярных особых точек может лежать в бесконечности; тогда в уравнении (52) или (55) надо положить $a_\nu=\infty$.

Поскольку три полюса можно перевести с помощью дробно-линейного преобразования в другие три точки, то можно любые три P-функции с одинаковыми разностями показателей $\alpha_\nu-\alpha'_\nu$ перевести одна в другую. Поэтому их можно привести к нормальной форме, зависящей лишь от трех параметров; при этом мы получаем так называемое *гипергеометрическое дифференциальное уравнение.*

2.2.6. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение. Переведем три полюса в точки 0, 1, ∞; тогда дифференциальный оператор уравнения (52) примет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha'_1}{z}+\frac{1-\alpha_2-\alpha'_2}{z-1}\right)\frac{d}{dz}+$$
$$+\left(\frac{-\alpha_1\alpha'_1}{z}+\frac{\alpha_2\alpha'_2}{z-1}+\alpha_3\alpha'_3\right)\frac{1}{z(z-1)}.$$

В силу (51), существует лишь два независимых преобразования показателей; наибольшая возможная степень упрощения состоит в том, что можно заменить α_1 и α_2 нулями. Остающиеся параметры обозначим следующим образом:

$$\alpha_3=a,\quad \alpha'_3=b,\quad 1-\alpha'_1=c; \tag{56}$$

α'_2 определяется тогда равенством (52), а именно:

$$\alpha'_2=c-a-b. \tag{56a}$$

Дифференциальное уравнение принимает при этом следующий вид:

$$\left\{z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+[c-(1+a+b)z]\frac{d}{dz}-ab\right\}u(a,\ b;\ c;\ z)=0. \tag{57}$$

Решения $u(a,\ b;\ c;\ z)$ гипергеометрического уравнения являются, таким образом, частными случаями P-функций Римана

$$u(a,\ b;\ c;\ z)=P\begin{Bmatrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & a & z \\ 1-c, & c-a-b, & b & \end{Bmatrix}. \tag{58}$$

Обратно, можно любую функцию Римана перевести с помощью преобразований (53) и (54) в решение гипергеометрического уравнения:

$$P\left\{\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3 & \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & z \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3' & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \hat{z}^{\alpha_1}(1-\hat{z})^{\alpha_3} u(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3'+\alpha_1+\alpha_2;\ 1+\alpha_1-\alpha_1';\ \hat{z}), \quad (59)$$

где

$$\hat{z} = \frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\,\frac{z-a_1}{z-a_3}. \quad (59a)$$

Сведение уравнения Римана к гипергеометрическому не является однозначным, так как полюсы a_1, a_2, a_3 можно сопоставить точкам 0, 1, ∞ и в ином порядке. Соответственно этому можно преобразовать гипергеометрическое уравнение в другие уравнения того же вида, переставляя между собой точки 0, 1, ∞ и преобразуя соответственным образом показатели. Существует шесть преобразований (включая тождественное), которые сохраняют три точки 0, 1, ∞, а именно:

$$\hat{z} = z;\quad \frac{1}{z};\quad 1-z;\quad \frac{1}{1-z};\quad \frac{z}{z-1};\quad \frac{z-1}{z}. \quad (60)$$

Из равенства (54) вытекает, что при этих преобразованиях имеют место соотношения

$$P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & a & z \\ 1-c, & c-a-b, & b & \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ a, & 0, & 0 & \frac{1}{z} \\ b, & c-a-b, & 1-c & \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & 0, & a & 1-z \\ c-a-b, & 1-c, & b & \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ a, & 0, & 0 & \frac{1}{1-z} \\ b, & 1-c, & c-a-b & \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & a, & 0 & \frac{z}{z-1} \\ 1-c, & b, & c-a-b & \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow P\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & \infty & \\ 0, & a, & 0 & \frac{z-1}{z} \\ c-a-b, & b, & 1-c & \end{matrix}\right\}.$$

Все эти функции также сводятся к решениям гипергеометрического уравнения; для этого нужно лишь преобразовать первые показатели при 0 и 1 согласно равенству (53) так, чтобы они обратились в нуль, и заметить, что тогда, в силу (51), $k_\infty = -k_0 - k_1$. Мы получаем, таким образом,

$$u(a, b; c; z) = z^{-a} u\left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{z}\right) =$$

$$= u(a, b; 1+a+b-c; 1-z) =$$

$$= (1-z)^{-a} u\left(a, c-b; 1+a-b; \frac{1}{1-z}\right) =$$

$$= (1-z)^{-a} u\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) =$$

$$= z^{-a} u\left(a, 1+a-c; 1+a+b-c; \frac{z-1}{z}\right). \quad (61)$$

Другие соотношения вытекают из того, что коэффициенты α и α' можно для всех трех полюсов переставлять между собой. Это приводит к равенствам

$$u(a, b; c; z) = u(b, a; c; z) = z^{1-c} u(1+a-c; 1+b-c; 2-c; z) =$$

$$= (1-z)^{c-a-b} u(c-b, c-a, c; z). \quad (61a)$$

2.2.7. Слияние полюсов. Можно получить нерегулярную особенность путем слияния двух полюсов при условии, что соответственно преобразуются и показатели. Это приводит к так называемому вырожденному дифференциальному уравнению. Мы хотим рассмотреть лишь случай, когда нерегулярная особенность возникает в бесконечности. Возьмем в уравнении (36) одну из регулярных особых точек a, которую мы пишем без индекса, в то время как остальные точки обозначаются через a_ν. Сделаем следующий предельный переход:

$$a \to \infty; \quad \frac{\alpha}{a} \to A; \quad \frac{\alpha'}{a} \to A'. \quad (62)$$

Здесь A и A' должны быть конечными числами (которые могут равняться и нулю). Коэффициент β при полюсе a должен при предельном переходе сохранять постоянное значение, так как, в силу (31), должно выполняться равенство $\beta + \sum \beta_\nu = 0$. После указанного предельного перехода уравнение (36) переходит в *вырожденное диф-*

ференциальное уравнение типа Фукса

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(A+A'+\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)\frac{d}{dz}+\sum_\nu\frac{\alpha_\nu\alpha'_\nu-\frac{1}{4}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)^2}{(z-a_\nu)^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\left(\sum_\nu\frac{1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu}{z-a_\nu}\right)^2+AA'+$$

$$\left.+\sum_\nu\left(\beta_\nu+\frac{A+A'}{2}(1-\alpha_\nu-\alpha'_\nu)\right)\frac{1}{z-a_\nu}\right]P=0. \qquad (63)$$

Коэффициент β при этом исчезает и потому для вырожденного уравнения уже не выполняется равенство (31). Из этого обстоятельства вытекает, что в бесконечно удаленной точке имеется нерегулярная особенность. Кроме того, функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ содержат постоянные слагаемые $A+A'$ (соответственно AA'), от которых в первую очередь зависит наличие нерегулярной особенности в бесконечно удаленной точке.

Величины A и A' могут быть изменены, если сделать до предельного перехода соответствующее преобразование показателей

$$P(A+K;\ A'+K)=\lim_{a\to\infty}(a-z)^{aK}P(A;\ A')$$

(мы опускаем здесь все аргументы P, кроме A и A'). Но

$$(a-z)^{aK}=a^{aK}e^{-Kz}\left[1+o\left(\frac{z}{a}\right)\right].$$

Поскольку нас не интересуют постоянные множители [см. замечание к равенству (37)], то мы имеем отсюда

$$P(A+K;\ A'+K)=e^{-Kz}P(A;\ A'). \qquad (64)$$

Таким образом, преобразование показателей приводит для вырожденных функций к отщеплению показательного множителя.

Рассмотрим теперь специально дифференциальное уравнение Римана (52). Заменим в нем a_3 на ∞ и устремим a_2 к ∞. При конечных значениях a_2 мы имеем

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha_1-\alpha'_1}{z-a_1}+\frac{1-\alpha_2-\alpha'_2}{z-a_2}\right)\frac{d}{dz}+\left(\alpha_3\alpha'_3+\left(\frac{\alpha_2\alpha'_2}{z-a_2}-\frac{\alpha_1\alpha'_1}{z-a_1}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(a_2-a_1)\right)\frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)}\right]P\begin{Bmatrix}a_1, & a_2, & \infty\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3\end{Bmatrix}z=0. \qquad (65)$$

При предельном переходе отношение показателей в a_2 остается постоянным

$$a_2 \to \infty; \quad \frac{\alpha_2}{a_2} = A; \quad \frac{\alpha_2'}{a_2} = A'. \tag{66}$$

Для того чтобы все коэффициенты (65) стремились к конечным предельным значениям, выражение $(\alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3')/a_2$ должно оставаться постоянным. По аналогии с уравнением (63) полагаем

$$\frac{\alpha_2\alpha_2' - \alpha_3\alpha_3'}{a_2} = \beta_1 + \frac{A + A'}{2}(1 - \alpha_1 - \alpha_1'). \tag{67}$$

Поскольку, в силу равенства (52а), для показателей имеет место соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_1' + \alpha_2 + \alpha_2' + \alpha_3 + \alpha_3' = 1,$$

то можно выразить α_3 и α_3' через остальные показатели и через β_1. При $A \neq A'$ это приводит после опускания членов, обращающихся в нуль при $a_2 \to \infty$, к равенству

$$\left.\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_1'}{2} - a_2 A - \frac{\beta_1}{A - A'}, \\ \alpha_3' &= \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_1'}{2} - a_2 A' + \frac{\beta_1}{A - A'}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

После предельного перехода мы получаем из уравнения (65) *вырожденное дифференциальное уравнение Римана*:

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \left(A + A' + \frac{1 - \alpha_1 - \alpha_1'}{z - a_1}\right)\frac{d}{dz} + AA' + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{A + A'}{2}(1 - \alpha_1 - \alpha_1') + \beta_1\right)\frac{1}{z - a_1} + \frac{\alpha_1\alpha_1'}{(z - a_1)^2}\right] P = 0. \tag{69}$$

Решение (при $A \neq A'$!) может быть записано в виде

$$P = \lim_{a_2 \to \infty} \begin{Bmatrix} a_1, & a_2, & \infty \\ \alpha_1, & a_2 A, & \dfrac{1 - \alpha_1 - \alpha_1'}{2} - a_2 A - \dfrac{\beta_1}{A - A'} \\ \alpha_1', & a_2 A', & \dfrac{1 - \alpha_1 - \alpha_1'}{2} - a_2 A' + \dfrac{\beta_1}{A - A'} \end{Bmatrix} z. \tag{70}$$

Вырожденное уравнение Римана имеет нормальную форму, которую мы будем называть *вырожденным гипергеометрическим уравнением*. Именно, положим

$$a_1 = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad A = 0; \quad A' = -1; \quad 1 - \alpha_1' = c; \quad \frac{1 - \alpha_1'}{2} - \beta_1 = a. \tag{71}$$

Уравнение (называемое также *дифференциальным уравнением Куммера*) примет вид

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2}+(c-z)\frac{d}{dz}-a\right]u(a;\ c;\ z)=0. \tag{72}$$

Решение этого уравнения связано с P-функцией Римана следующим образом:

$$u(a;\ c;\ z)=\lim_{a_2\to\infty}P\left\{\begin{matrix}0, & a_2, & \infty\\ 0, & 0, & a\\ 1-c, & -a_2, & c-a+a_2\end{matrix}\ ,\ z\right\}. \tag{73}$$

С помощью преобразования полюсов и показателей можно выразить общую вырожденную функцию Римана через вырожденную гипергеометрическую функцию. Преобразование показателей дает

$$P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & \infty\\ \alpha_1, & a_2A, & \dfrac{1-\alpha_1-\alpha_1'}{2}-a_2A-\dfrac{\beta_1}{A-A'} & z\\ \alpha_1', & a_2A, & \dfrac{1-\alpha_1-\alpha_1'}{2}-a_2A'+\dfrac{\beta_1}{A-A'}\end{matrix}\right\}=$$

$$=(a_2-z)^{a_2A}(a_1-z)^{\alpha_1}\times$$

$$\times P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & \infty\\ 0, & 0, & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2}-\dfrac{\beta_1}{A-A'} & z\\ \alpha_1'-\alpha_1, & a_2(A'-A), & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2}+\dfrac{\beta_1}{A-A'}+a_2(A-A')\end{matrix}\right\}.$$

Примем $(A'-A)(a_1-z)$ за новую переменную. Мы получим

$$(a_2-z)^{a_2A}(a_1-z)^{\alpha_1}\times$$

$$\times P\left\{\begin{matrix}0, & (a_1-a_2)(A'-A), & \infty\\ 0, & 0, & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2}-\dfrac{\beta_1}{A-A'} & (A'-A)(a_1-z)\\ \alpha_1'-\alpha_1, & a_2(A'-A), & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2}-\dfrac{\beta_1}{A-A'}+a_2(A-A')\end{matrix}\right\}.$$

Полагая для краткости $C = a_2(A' - A)$, получаем для вырожденной функции Римана выражение

$$P = \lim_{C\to\infty} (a_1 - z)^{\alpha_1}\left(\frac{C}{A} - z\right)^{C} \times$$

$$\times P\left\{\begin{array}{lll} 0, & C, & \infty \\ 0, & 0, & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2} - \dfrac{\beta_1}{A-A'} \\ \alpha_1' - \alpha_1, & -C, & \dfrac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2} + \dfrac{\beta_1}{A-A'} + C \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ (A'-A)(a_1-z) \end{array}\Bigg\}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (73), приходим, наконец, к формуле

$$P = (a_1 - z)^{\alpha_1} e^{-Az} \times$$

$$\times u\left(\frac{1+\alpha_1-\alpha_1'}{2} - \frac{\beta_1}{A-A'};\ 1+\alpha_1-\alpha_1';\ (A'-A)(a_1-z)\right). \quad (74)$$

Поскольку это равенство не имеет места при $A = A'$, рассмотрим для уравнения (69) этот случай особо. Сначала отщепим множитель $(1 - z/a_2)^{a_2}$ и преобразуем уравнение так, чтобы A обратилось в нуль

$$P = \lim_{a_2\to\infty}\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)^{a_2 A} v = e^{-Az} v.$$

Для v отсюда получаем уравнение

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1-\alpha_1-\alpha_1'}{z-a_1}\frac{d}{dz} + \frac{\beta_1}{z-a_1} + \frac{\alpha_1\alpha_1'}{(z-a_1)^2}\right\} v = 0.$$

Введем теперь новое переменное с помощью соотношения $z = a_1 + t^2$; тогда получаем

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1-2\alpha_1-2\alpha_1'}{t}\frac{d}{dt} + 4\beta_1 + \frac{4\alpha_1\alpha_1'}{t^2}\right\} v = 0.$$

Это снова вырожденное уравнение Римана вида (69) с удвоенными показателями α_1, α_1'; $a_1 = 0$, $A = 2\sqrt{-\beta_1}$, $A' = -2\sqrt{-\beta_1}$ и $\beta = 0$. С помощью равенства (74) можно выразить v через вырожденную гипергеометрическую функцию. Таким образом, решение уравнения (69) при $A = A'$ имеет вид

$$P = (a_1 - z)^{\alpha_1} e^{-Az - 2\sqrt{\beta_1(a_1-z)}} \times$$

$$\times u\left(\frac{1+2\alpha_1-2\alpha_1'}{2};\ 1+2\alpha_1-2\alpha_1';\ 4\sqrt{\beta_1(a_1-z)}\right). \quad (74a)$$

§ 3

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

3.0. Волновое уравнение и уравнение Лапласа. Важнейшие дифференциальные уравнения второго порядка возникают при разделении переменных в *волновом уравнении* в различных координатных системах. Это уравнение имеет вид

$$(\Delta + k^2)\, u = 0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{2}$$

Этот оператор выписан здесь в явном виде в декартовых координатах; k называется волновым числом. Если $k = 0$, то мы называем это уравнение уравнением Лапласа. Оно встречается в *теории потенциала*.

Волновое уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных с тремя независимыми переменными, в качестве которых можно выбрать или декартовы координаты x_1, x_2, x_3 или какие-нибудь криволинейные координаты q_1, q_2, q_3. Для того чтобы решить дифференциальное уравнение, постараемся выразить функцию u через функции, каждая из которых зависит лишь от одной из трех координат q_l. Проще всего попробовать выразить u в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты:

$$u(q_1, q_2, q_3) = u_1(q_1)\, u_2(q_2)\, u_3(q_3). \tag{3}$$

Такое *разделение переменных* возможно для волнового уравнения тогда и только тогда, когда координатные поверхности трех семейств являются конфокальными поверхностями второго порядка [1]). Эти координатные системы являются специальными случаями общей эллиптической координатной системы и будут выведены в дальнейшем из этой системы. Рассмотрим сначала простейший случай

[1]) См. Морс — Фешбах, т. I, стр. 482 и далее.

декартовой системы координат. Здесь, подставляя в уравнение (1) выражение (3) и деля потом это уравнение на u, получаем

$$\frac{u_1''}{u_1}+\frac{u_2''}{u_2}+\frac{u_3''}{u_3}+k^2=0.$$

Так как первое слагаемое зависит только от x_1, а второе и третье только от x_2 и x_3, то все они должны быть постоянными и потому

$$u_j''+k_j^2u_j=0;\quad k_1^2+k_2^2+k_3^2=0. \tag{4}$$

Все три уравнения решаются элементарно и имеют решения вида $\exp(ik_jx_j)$.

3.1. Эллиптические координаты.

3.1.1. Определение эллиптических координат. Семейство конфокальных поверхностей второго порядка может быть представлено с помощью уравнения

$$\frac{x_1^2}{z-a_1}+\frac{x_2^2}{z-a_2}+\frac{x_3^2}{z-a_3}=1;\quad a_1\leqslant a_2\leqslant a_3. \tag{5}$$

Параметры a_1, a_2, a_3 должны быть расположены в порядке возрастания. Значения параметра z разбиваются на три области, каждой из которых соответствует определенный тип поверхностей. Будем обозначать этот параметр через z_1, z_2, z_3 в зависимости от того, какой из этих областей он принадлежит. Мы получаем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{эллипсоиды} & \text{при } z_3\geqslant a_3,\\ \text{однополостные гиперболоиды} & \text{при } a_3\geqslant z_2\geqslant a_2,\\ \text{двуполостные гиперболоиды} & \text{при } a_2\geqslant z_1\geqslant a_1. \end{array}\right\} \tag{6}$$

При $z<a_1$ поверхность не имеет вещественных точек. Если в (6) имеет место один из знаков равенства, то соответствующая поверхность вырождается в дважды взятую часть плоскости, а именно: эллипсоид — во внутренность эллипса, однополостный гиперболоид при $z=a_3$ — во внешность этого эллипса, при $z=a_2$ — в поверхность между двумя ветвями гиперболы, двуполостный гиперболоид при $z=a_2$ переходит в область, ограниченную двумя ветвями этой гиперболы, при $z=a_1$ — во всю плоскость x_2, x_3. Каждое из трех семейств поверхностей покрывает в точности один раз все пространство, так что каждой точке x_1, x_2, x_3 можно сопоставить три значения координат z_1, z_2, z_3 эллиптической координатной системы. Однако точка пространства не определяется однозначно заданием чисел z_1, z_2, z_3. В уравнение (5) входят лишь квадраты декартовых координат, поэтому числами z_1, z_2, z_3 однозначно определяются лишь

абсолютные величины координат, но не их знаки; лишь в октантах соответствие между декартовыми и эллиптическими координатами взаимно однозначно.

Если числа x_1, x_2, x_3 заданы, то равенство (5) является относительно z уравнением третьей степени, которое имеет три решения z_1, z_2, z_3. Из проведенных ранее геометрических рассуждений ясно, что все эти три решения являются вещественными. Относительно x_i уравнение (5) может быть решено в конечном виде. Из (5) вытекают тождества

$$(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)-x_1^2(z-a_2)(z-a_3)-x_2^2(z-a_3)(z-a_1)-$$
$$-x_3^2(z-a_1)(z-a_2)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3).$$

Подставляя сюда вместо z значение a_i, легко получаем, что

$$x_1^2=\frac{(z_1-a_1)(z_2-a_1)(z_3-a_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)},$$
$$x_2^2=\frac{(z_1-a_2)(z_2-a_2)(z_3-a_2)}{(a_1-a_2)(a_3-a_2)}, \qquad (7)$$
$$x_3^2=\frac{(z_1-a_3)(z_2-a_3)(z_3-a_3)}{(a_1-a_3)(a_2-a_3)}.$$

Поверхности эллиптических координатных систем не изменятся, если прибавить ко всем a_i одно и то же слагаемое; поэтому, не теряя общности, можно считать, что $a_1=0$. Однако для дальнейших предельных переходов удобнее сохранить симметрическую форму равенств (5) и (6).

3.1.2. Частные случаи и случаи вырождения. Координатная система определяется равенствами (5) и (7) лишь в случае, когда числа a_1, a_2, a_3 различны и конечны. Во всех остальных случаях надо провести соответствующий предельный переход. Если два из чисел a_i совпадают, то один из интервалов стягивается в точку; если же одно из чисел a_i стремится к бесконечности, то один из интервалов также бесконечно увеличивается. Для того чтобы охватить еще и параболические координаты, надо допустить, что и начало координат может удаляться в бесконечность. Для этого равенство (5) надо заменить равенством

$$\frac{(x_1-\xi_1)^2}{z-a_1}+\frac{(x_2-\xi_2)^2}{z-a_2}+\frac{(x_3-\xi_3)^2}{z-a_3}=1, \qquad (8)$$

а равенства (7) — равенствами

$$(x_1-\xi_1)^2=\frac{(z_1-a_1)(z_2-a_1)(z_3-a_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)} \quad \text{и т. д.} \qquad (8a)$$

3.1.2.1. Осевая симметрия. Если $a_2=a_1$, то система координат инвариантна при вращениях вокруг оси x_3. Откажемся от сделанного

в уравнении (5) предположения, что $a_3 \geqslant a_2$; тогда в зависимости от того, какое из неравенств $a_3 > a_2$ или $a_3 < a_2$ имеет место, координатными поверхностями $z_3 = \text{const}$ являются сжатые или вытянутые эллипсоиды вращения (сфероиды). Устремим в уравнении (5) a_2 к a_1 и введем в области изменения переменной z_1 новую переменную η, положив

$$z_1 - a_1 \equiv \eta(a_2 - a_1); \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{9}$$

После предельного перехода декартовы координаты выразятся следующим образом:

$$x_1^2 = \eta \frac{(z_2 - a_1)(z_3 - a_1)}{a_3 - a_1}; \quad x_2^2 = (1 - \eta) \frac{(z_2 - a_1)(z_3 - a_1)}{a_3 - a_1};$$

$$x_3^2 = \frac{(a_3 - z_2)(z_3 - a_3)}{a_3 - a_1}. \tag{10}$$

Здесь η равно отношению $x_1 : x_2$. Обозначим через φ угол между вектором (x_1, x_2) и осью x_1. Тогда

$$\eta = \cos^2\varphi, \quad 1 - \eta = \sin^2\varphi. \tag{11}$$

Таким образом, после предельного перехода мы получаем угловую координату φ и эллиптические координаты z_2, z_3; из уравнений (5) и (10) следует при этом, что

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{z - a_1} + \frac{x_3^2}{z - a_3} = 1; \tag{12}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{(z_2 - a_1)(z_3 - a_1)}{a_3 - a_1}; \quad x_3^2 = \frac{(a_3 - z_2)(z_3 - a_3)}{a_3 - a_1}. \tag{13}$$

3.1.2.2. Сферические координаты. Пусть теперь a_3 стремится к $a_2 = a_1$. Тогда и область изменения переменной z_2 стягивается в одну точку. Введем новую переменную ζ, положив

$$z_2 - a_1 = (a_3 - a_1)\zeta; \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1. \tag{14}$$

Из уравнения (13) имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = \zeta(z_3 - a_1); \quad x_3^2 = (1 - \zeta)(z_3 - a_1). \tag{15}$$

Введем теперь в качестве переменной вместо ζ полярный угол θ между вектором (x_1, x_2, x_3) и осью x_3, положив

$$\zeta = \sin^2\theta. \tag{16}$$

Тогда оставшаяся эллиптическая координата z_3 определяет расстояние r точки (x_1, x_2, x_3) от начала координат

$$(z_3 - a_1) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2. \tag{17}$$

Числа r, φ, θ называются сферическими координатами. Уравнения (9), (11), (14), (16) и (17) определяют, таким образом, переход от эллиптической координатной системы к сферической.

3.1.2.3. Конические координаты. Чтобы получить коническую координатную систему, надо совершить предельные переходы $a_2 \to a_1$ и $a_3 \to a_2$ не один после другого, а одновременно, причем, отношение разностей $a_2 - a_1$ и $a_3 - a_2$ должно оставаться постоянным. Положим

$$a_i = \varepsilon A_i; \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Так как при предельном переходе $\varepsilon \to 0$ области изменения переменных z_1 и z_2 стягиваются в точку 0, введем новые переменные t_1 и t_2, положив

$$z_1 = \varepsilon t_1; \quad z_2 = \varepsilon t_2. \tag{19}$$

Область изменения z_3 при этом превращается в полуось $(0, \infty)$. Если z_3 принадлежит этой области, то в уравнении (5) величины a_1, a_2, a_3 бесконечно малы по сравнению с z_3. Поэтому после предельного перехода поверхности $z_3 = \text{const}$ превращаются в сферы, радиус которых задается формулой

$$r^2 = z_3. \tag{20}$$

В областях же изменения переменных z_1 и z_2 умножим уравнение (5) на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда оно примет вид

$$\frac{x_1^2}{t - A_1} + \frac{x_2^2}{t - A_2} + \frac{x_3^2}{t - A_3} = 0. \tag{21}$$

Это уравнение эллиптического конуса; для поверхностей $t_2 = \text{const}$ осью конуса является ось x_3, а для поверхностей $t_1 = \text{const}$ — ось x_1. Сферические координаты можно получить из системы координат t_1, t_2, t_3, переходя к пределу при $A_2 \to A_1$. При этом надо ввести новую переменную η с помощью равенства, аналогичного равенству (9), а потом ввести угол φ с помощью равенства (11). A_3 надо положить равным 1, а t_2 отождествить с переменной ζ в равенстве (14).

Поскольку координатными поверхностями в рассматриваемой здесь системе являются сферы и конусы, эту систему называют *сфероконической*.

3.1.2.4. Цилиндрические координаты. Система, в которой координатными поверхностями являются цилиндры, получается, если совершить предельный переход $a_3 \to \infty$ или $a_1 \to -\infty$; результат в обоих случаях будет один и тот же. В качестве координатных поверхностей получаются семейства параллельных плоскостей и семейства ортогональных к ним эллиптических и гиперболических цилиндров. Направление образующих этих цилиндров мы примем за направление оси x_3. Тогда координата x_3 определяется равенством $x_3^2 = z_3 - a_3$. В плоскости же x_1, x_2 сохраним плоские эллиптические

координаты z_1 и z_2:

$$\frac{x_1^2}{z-a_1}+\frac{x_2^2}{z-a_2}=1, \tag{22}$$

$$x_1^2=\frac{(z_1-a_1)(z_2-a_1)}{a_2-a_1}; \quad x_2^2=\frac{(z_1-a_2)(z_2-a_2)}{a_1-a_2}. \tag{23}$$

Если одновременно $a_3\to\infty$ и $a_1\to-\infty$, то равенства (23) переходят в

$$x_1^2=z_1-a_1; \quad x_2^2=z_2-a_2; \quad x_3^2=z_3-a_3. \tag{24}$$

Координатными поверхностями являются здесь плоскости $x_1=\text{const}$, $x_2=\text{const}$, $x_3=\text{const}$. Мы получили, таким образом, декартову систему координат как специальный случай эллиптической.

3.1.2.5. Параболические координаты. Как мы видели, если разности между величинами a_i становятся бесконечно большими, эллиптическая система координат переходит в декартову. Этот предельный переход можно совершить иначе, взяв уравнения координатных поверхностей в виде (8) и совершив предельный переход

$$-a_1=\xi_1^2\to\infty; \quad \xi_2=\xi_3=0. \tag{25}$$

Если ξ_1 большая, но конечная величина, то уравнение (8) принимает вид

$$\frac{-2x_1\xi_1-z}{z+\xi_1^2}+\frac{x_2^2}{z-a_2}+\frac{x_3^2}{z-a_3}\approx 0. \tag{26}$$

Для того чтобы получить в пределе невырожденные параболоиды, устремим также a_2 и a_3 к ∞ и введем новую переменную t по формулам

$$a_2=A_2\xi_1; \quad a_3=A_3\xi_1; \quad z=t\xi_1, \tag{27}$$

где A_2 и A_3 — постоянные. Если $\xi_1\to\infty$, то равенства (26) и (8а) переходят в

$$2x_1+t=\frac{x_2^2}{t-A_2}+\frac{x_3^2}{t-A_3}; \tag{28}$$

$$x_1=\frac{A_2+A_3-t_1-t_2-t_3}{2}; \quad x_2^2=\frac{(t_1-A_2)(t_2-A_2)(t_3-A_2)}{A_2-A_3}; \tag{28а}$$

$$x_3^2=\frac{(t_1-A_3)(t_2-A_3)(t_3-A_3)}{A_3-A_2}.$$

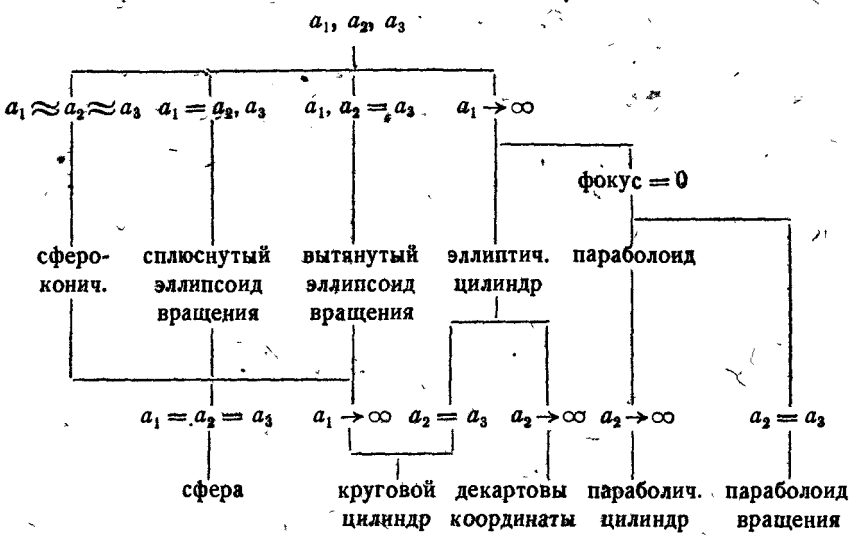
Для параболической координаты $t_3\geqslant A_3$ в качестве координатных поверхностей получаем эллиптические параболоиды, обращенные отверстием в сторону положительного направления оси x_1. Для t_2 (между A_2 и A_3) получаем гиперболические параболоиды с осью x_1.

Наконец, для $t_1 \leqslant A_2$ получаем эллиптические параболоиды, обращенные отверстием в сторону отрицательного направления оси x_1.

С помощью предельного перехода $A_2 \to A_3$ можно перейти от общей параболической системы координат к системе координат, координатными поверхностями которой являются параболоиды вращения. При этом, аналогично 3.1.2.1, после предельного перехода надо заменить t_2 углом φ. Наконец, при предельном переходе $A_3 \to \infty$ или $A_2 \to -\infty$ мы переходим к системе координат, связанной с параболическими цилиндрами.

3.1.2.6. Связь между случаями вырождения общих эллиптических координат. Связь между различными частными случаями эллиптических координатных систем может быть представлена в виде следующей схемы.

Случаи вырождения эллиптических координат



3.2. Разделение переменных в волновом уравнении в эллиптических координатах

3.2.1. Оператор Лапласа в эллиптических координатах.

3.2.1.1. Вычисление дифференциала длины дуги. Из равенств (7) путем логарифмического дифференцирования получаем, что

$$2\frac{dx_l}{x_l} = \sum_k \frac{dz_k}{z_k - a_l}. \qquad (29$$

Отсюда следует, что квадрат дифференциала дуги ds равен

$$4ds^2 = \sum_i \frac{(z_1 - a_i)(z_2 - a_i)(z_3 - a_i)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)}(a_{i-1} - a_{i+1}) \sum_k \sum_l \frac{dz_k\, dz_l}{(z_k - a_i)(z_l - a_i)}. \tag{30}$$

Индексы $l-1$ и $l+1$ здесь надо понимать по модулю 3, причем a_0 должно быть заменено на a_3, a_4 — на a_1. Следовательно, коэффициенты первой квадратичной формы

$$ds^2 = \sum_k \sum_l g_{kl}\, dz_k\, dz_l \tag{31}$$

имеют вид

$$4g_{kl} = \frac{1}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)} \sum_i \frac{(z_1 - a_i)(z_2 - a_i)(z_3 - a_i)}{(z_k - a_i)(z_l - a_i)}(a_{i-1} - a_{i+1}). \tag{32}$$

Отсюда легко вывести, что координатная система z_j ортогональна, т. е. что $g_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Положим, например, $k = 1$, $l = 2$. Тогда мы получаем в (32) сумму $\sum_i (z_3 - a_i)(a_{i-1} - a_{i+1})$, которая, очевидно, равна нулю. Таким образом, $g_{12} = 0$, равно как и g_{23} и g_{31}. Вычислим диагональные элементы, например g_{11}. Запишем g_{11} в виде

$$4g_{11} = \frac{\sum_i (z_2 - a_i)(z_3 - a_i)(z_1 - a_{i+1})(z_1 - a_{i-1})(a_{i-1} - a_{i+1})}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(z_1 - a_1)(z_1 - a_2)(z_1 - a_3)}.$$

Сумму, стоящую в числителе, можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_i (z_2 z_3 - a_i(z_2 + z_3) + a_i^2)\left[z_1^2(a_{i-1} - a_{i+1}) + \right.$$

$$\left. + z_1(a_{i+1}^2 - a_{i-1}^2) + (a_{i+1}a_{i-1}^2 - a_{i-1}a_{i+1}^2)\right]$$

Здесь отличны от нуля лишь следующие члены:

$$\sum_i z_2 z_3 (a_{i+1}a_{i-1}^2 - a_{i-1}a_{i+1}^2) - \sum_i z_1(z_2 + z_3)\, a_i (a_{i+1}^2 - a_{i-1}^2) +$$

$$+ \sum_i z_i^2 a_i^2 (a_{i-1} - a_{i+1}) = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1).$$

Отсюда вытекает, что для g_{kl} имеет место формула

$$g_{kl}=\frac{(z_k-z_{l+1})(z_k-z_{l-1})}{f(z_k)}, \tag{33}$$

где для краткости положено

$$f(z)=4(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3). \tag{34}$$

3.2.1.2. Выражение оператора Лапласа через коэффициенты первой квадратичной формы. Для того чтобы выразить оператор Лапласа через коэффициенты g_{kl} первой квадратичной формы, проще всего рассмотреть функцию u, которая дважды дифференцируема в некоторой области и обращается в нуль на границе этой области. Мы выразим сейчас квадрат градиента этой функции как в декартовой системе координат, так и в системе координат z_j. Поскольку обе эти системы ортогональны, то по теореме Пифагора квадрат градиента равен сумме квадратов производных по длинам дуг координатных линий. Но, в силу (31), дифференциал длины дуги каждой координатной линии дается формулой $ds_k=\sqrt{g_{kk}}\,dz_k$. Отсюда мы получаем для квадрата градиента два выражения

$$(\operatorname{grad} u)^2=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2=\sum_k\frac{1}{g_{kk}}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)^2. \tag{35}$$

Проинтегрируем теперь это равенство в рассматриваемой области пространства. Поскольку элемент объема в обеих координатных системах равен произведению трех дифференциалов длин, т. е.

$$d\tau=dx_1\,dx_2\,dx_3=\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,dz_1\,dz_2\,dz_3, \tag{36}$$

то мы получаем

$$\iiint\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3=$$

$$=\iiint\sum_k\frac{1}{g_{kk}}\left(\frac{\partial u}{\partial z_k}\right)^2\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}\,dz_1\,dz_2\,dz_3. \tag{37}$$

Выполним в обеих частях интегрирование по частям; возникающие при этом поверхностные интегралы равны нулю; так как, по предположению, функция u обращается в нуль на границе. Отсюда получаем

$$\iiint u\sum_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=$$

$$=\iiint u\sum_k\frac{\partial}{\partial z_k}\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{g_{kk}}\frac{\partial u}{\partial z_k}\,dz_1\,dz_2\,dz_3. \tag{38}$$

Функция u является при этом, исключая предположение о дифференцируемости, произвольной внутри области. Отсюда вытекает, что подинтегральные функции должны совпадать, а потому

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}} \sum_k \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}{g_{kk}} \frac{\partial u}{\partial z_k}. \tag{39}$$

Тем самым вычисление Δ сводится к вычислению первой квадратичной формы.

3.2.1.3. Вычисление операторов Лапласа в эллиптических координатах. Запишем равенство (39) в операторной форме, опустив функцию u:

$$\Delta = \sum_k \frac{1}{g_{kk}} \sqrt{\frac{g_{kk}^2}{g_{11}g_{22}g_{33}}} \frac{\partial}{\partial z_k} \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}g_{33}}{g_{kk}^2}} \frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{40}$$

Не зависящие от z_k сомножители в подкоренных выражениях попарно сокращаются. После этого, в силу равенства (33), под корнем остается лишь множитель $f(z_k)$. Из (40) вытекает

$$\Delta = \sum_k \frac{\sqrt{f(z_k)}}{(z_k - z_{k+1})(z_k - z_{k-1})} \frac{\partial}{\partial z_k} \sqrt{f(z_k)} \frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{41}$$

Поэтому волновое уравнение (1) записывается в эллиптических координатах следующим образом:

$$(z_3 - z_2)\sqrt{f(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}\sqrt{f(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1} + (z_1 - z_3)\sqrt{f(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\sqrt{f(z_2)}\frac{\partial u}{\partial z_2} + \\ + (z_2 - z_1)\sqrt{f(z_3)}\frac{\partial}{\partial z_3}\sqrt{f(z_3)}\frac{\partial u}{\partial z_3} + k^2(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)u = 0. \tag{42}$$

3.2.2. Уравнение Ламе

3.2.2.1. Разделение переменных в волновом уравнении. Попробуем решить уравнение (42), разыскивая его решение в виде

$$u = L_1(z_1)L_2(z_2)L_3(z_3). \tag{43}$$

Подставив это выражение в уравнение (42), после деления на u получаем уравнение

$$\frac{z_3 - z_2}{L_1(z_1)}\sqrt{f(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}\sqrt{f(z_1)}\frac{\partial L_1(z_1)}{\partial z_1} + \\ + \frac{z_1 - z_3}{L_2(z_2)}\sqrt{f(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\sqrt{f(z_2)}\frac{\partial L_2(z_2)}{\partial z_2} + \\ + \frac{z_2 - z_1}{L_3(z_3)}\sqrt{f(z_3)}\frac{\partial}{\partial z_3}\sqrt{f(z_3)}\frac{\partial L_3(z_3)}{\partial z_3} + k^2(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0. \tag{44}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$(z_3-z_2)F_1(z_1)+(z_1-z_3)F_2(z_2)+(z_2-z_1)F_3(z_3)+$$
$$+k^2(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)=0. \quad (45)$$

Дифференцируя это уравнение по z_1, мы получаем, что функция $F_1'+2k^2z_1$ равна функции, зависящей только от z_2 и z_3, а потому должна быть постоянной

$$F_1'+2k^2z_1=g_1=\text{const}. \quad (46)$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$F_1(z_1)=g_1z_1-k^2z_1^2-H_1, \quad (47)$$

где H_1 — новая постоянная интегрирования. Таким же образом находим функции $F_2(z_2)$ и $F_3(z_3)$ с новыми постоянными интегрирования g_2, H_2 и g_3, H_3. Подставляя полученные результаты в уравнение (45), мы убеждаемся, что постоянные в функциях F_1, F_2, F_3 должны быть одинаковыми:

$$H_1=H_2=H_3;\quad g_1=g_2=g_3.$$

Вспоминая значение функций F_1, F_2, F_3 (ср. равенство (44) с равенством (45)!), мы получаем, что после разделения переменных для каждой из координат z_j получается *волновое уравнение Ламе*

$$\left\{\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz}\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz}+H-gz+k^2z^2\right\}L(z)=0. \quad (48)$$

Обычно его пишут в несколько иной форме, вводя следующие обозначения:

$$H=p(a_1+a_2+a_3);\ a_1=0,\ a_2=h^2,\ a_3=K^2;$$
$$g=n(n+1);\ z=t^2. \quad (49)$$

Если снова заменить t на z, волновое *уравнение Ламе* принимает вид

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{z}{z^2-h^2}+\frac{z}{z^2-K^2}\right)\frac{d}{dz}+\frac{(h^2+K^2)p-n(n+1)z^2+k^2z^4}{(z^2-h^2)(z^2-K^2)}\right\}L=0. \quad (50)$$

В дальнейшем, однако, мы хотим сохранить математически более простую форму волнового уравнения (48), заменив лишь постоянные H и g на p и n.

3.2.2.2. Особые точки уравнения Ламе. Уравнение (48) можно записать в явном виде, подставив выражение (34) для $f(z)$ и переименовав параметры соответственно равенству (49):

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}+\frac{1}{z-a_3}\right)\frac{d}{dz}+\right.$$
$$\left.+\frac{p(a_1+a_2+a_3)-n(n+1)z+k^2z^2}{4(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}\right\}L(z)=0. \quad (51)$$

Это уравнение имеет три регулярные особые точки a_1, a_2, a_3; определяющее уравнение для всех трех полюсов имеет вид

$$\alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)=0. \tag{52}$$

В бесконечно удаленной точке мы имеем нерегулярную особенность, так как последний член в (51) стремится к нулю лишь как $1/z$. Мы получили вырожденное уравнение типа Фукса (2.63), которое получается путем слияния особых точек в уравнении с пятью регулярными особыми точками. Лишь в случае $k=0$, т. е. в случае уравнения Лапласа, бесконечно удаленная точка также является регулярной особой точкой. Тогда мы говорим об *уравнении Ламе*. Определяющее уравнение для бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\left(\alpha_\infty+\frac{n}{2}\right)\left(\alpha_\infty-\frac{n+1}{2}\right)=0. \tag{53}$$

Лежащие в конечной области полюсы a_1, a_2, a_3 являются истинными (а не кажущимися), так как разность показателей, в силу (52), равна $1/2$. Напротив, возможно, что в бесконечно удаленной точке мы имеем лишь кажущуюся особенность. Это может случиться, если $n=1/2$ и (или $-3/2$). В самом деле, в этом случае, в силу (53), разность показателей равна 1. Однако, кроме того, должно быть еще выполнено условие (2.50). Коэффициенты β_j мы получаем путем сравнения с (2.36):

$$\beta_j=\frac{\left(\frac{1}{2}+p\right)(a_1+a_2+a_3)-\left[n(n+1)+\frac{3}{2}\right]a_j}{4(a_j-a_{j+1})(a_j-a_{j-1})}. \tag{54}$$

Подставим их в равенство (2.50); после простых преобразований получим $p=1/4$. Таким образом, если все числа a_1, a_2, a_3 различны, уравнение Ламе можно свести к уравнению Римана, а тем самым к гипергеометрическому уравнению, лишь в том случае, когда $n=1/2$. Однако рассмотренные в 3.1.2 случаи вырождения часто приводят к гипергеометрическому дифференциальному уравнению.

3.2.2.3. Потенциальные функции Ламе для внутренней области эллипсоида. Найдем регулярные внутри эллипсоида $z_3=C$ решения уравнения Ламе, из которых можно построить решение u по формуле (43). Эти решения должны разлагаться в окрестности точек $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ в степенные ряды по декартовым координатам, а потому, согласно равенству (7), могут содержать лишь целые или полуцелые степени величин z_l-a_k. С точностью до множителя вида $(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}(z-a_3)^{\alpha_3}$ функции Ламе должны поэтому выражаться степенными рядами по z. Так как, кроме того, бесконечно удаленная точка должна быть регулярно особой [с пока-

зателями $-n/2$ или $(n+1)/2$, согласно равенству (53)], эти степенные ряды должны обрываться, т. е. быть многочленами. Характеристические показатели в бесконечности являются при этом отрицательными целыми или полуцелыми числами. Это означает, что

$$\alpha_\infty = -n/2, \quad n \text{ — целое.} \tag{55}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $n \geqslant 0$. В зависимости от выбора α_1, α_2, α_3 для потенциальных функций Ламе получаем восемь различных типов:

n — четное

$$K(z) = \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}} a_\nu z^\nu;$$

$$M_i(z) = \sqrt{\frac{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)}{z-a_j}} \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-1} c_\nu^{(i)} z^\nu; \tag{56а}$$

n — нечетное

$$L_i(z) = \sqrt{z-a_i} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}} b_\nu^{(i)} z^\nu;$$

$$N(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} d_\nu z^\nu. \tag{56б}$$

Для коэффициентов многочленов мы получаем рекуррентные формулы с помощью подстановки в уравнение (51). Эти формулы дают однородную линейную систему уравнений, число которых равно числу неизвестных. Такая система имеет нетривиальные решения лишь в случае, когда ее определитель равен нулю. Отсюда можно найти собственные значения для p. Мы покажем в следующем пункте, что все собственные значения p являются вещественными и простыми. Каждому такому значению соответствует одна и только одна функция. Число различных собственных функций равно порядку определителя, т. е. равно числу коэффициентов многочлена. При четном n мы получаем, таким образом, $n/2+1$ функций K и $n/2$ функций M_1, M_2, M_3; всего $2n+1$ решений. При нечетном n мы получаем $(n+1)/2$ функцию L_1, L_2, L_3 и $(n-1)/2$ функций N, всего также $2n+1$ различных решений.

3.2.2.4. Собственные значения уравнения Ламе вещественны и просты. Запишем, согласно равенствам (48) и (49), уравнение Ламе в виде

$$\left[\frac{d}{dz}\sqrt{f(z)}\frac{d}{dz} + \frac{p(a_1+a_2+a_3) - n(n+1)z}{\sqrt{f(z)}}\right] L(z) = 0.$$

Мы получим, что если два решения соответствуют одному и тому же собственному значению p, то имеет место следующее соотношение (* означает переход к комплексно-сопряженным величинам):

$$\frac{d}{dz}\sqrt{f(z)}\left(L_1^*(z)\frac{dL_2(z)}{dz}-L_2(z)\frac{dL_1^*(z)}{dz}\right)+$$
$$+\frac{p_2-p_1^*}{\sqrt{f(z)}}(a_1+a_2+a_3)L_1^*(z)L_2(z)=0. \quad (57)$$

Полагая здесь $L_2=L_1$, получаем, что $p-p^*=0$, т. е. что *собственное значение p вещественно.*

Предположим теперь, что собственное значение p имеет кратность два; тогда мы получили бы два различных решения вида (56а) и (56б), в зависимости от того, является ли n четным или нечетным числом. Из уравнения (57) вытекает, в силу вещественности p, что

$$L_1(z)\frac{dL_2(z)}{dz}-L_2(z)\frac{dL_1(z)}{dz}=\frac{\text{const}}{\sqrt{f(z)}}. \quad (58)$$

По крайней мере при одном $z=a_i$ левая часть этого равенства ведет себя как целая степень $z-a_i$, а правая часть — как $(z-a_i)^{-1/2}$; поэтому постоянная в правой части должна равняться нулю. Но тогда логарифмические производные функций L_1 и L_2 равны между собой. Следовательно, вопреки предположению, L_2 пропорционально L_1. Полученное противоречие показывает, что собственное значение p является простым. Точнее говоря, при заданном n есть $2n+1$ попарно различных собственных значений p; каждому из них соответствует одна функция вида (56).

3.2.2.5. Потенциальные функции Ламе для внешней области эллипсоида. Так как собственные значения n и p являются одними и теми же для всех трех уравнений, получающихся при разделении переменных, то решения для внутренней области эллипсоида должны иметь один и тот же вид, выражаемый формулами (56), для всех трех координат. Мы обозначим их P_{np}. Решение трехмерного потенциального уравнения имеет поэтому вид

$$u=P_{np}(z_1)P_{np}(z_2)P_{np}(z_3). \quad (59)$$

Три множителя отличаются друг от друга лишь областями задания, а именно:

$$a_1\leqslant z_1\leqslant a_2;\quad a_2\leqslant z_2\leqslant a_3;\quad a_3\leqslant z_3\leqslant z_0. \quad (59а)$$

Обозначим через z_0 координату z_3 эллипсоида, который ограничивает рассматриваемую область пространства. Если перейти к внешней области эллипсоида

$$z_0\leqslant z_3\leqslant\infty, \quad (59б)$$

то области изменения z_1 и z_2 останутся неизменными; при этом зависимость от z_1 и z_2 останется такой же, как и внутри эллипсоида, и изменится лишь зависимость от z_3. Нам надо теперь найти функцию, которая обращается в нуль на бесконечности, а в точке $z_3 = a_3$ она может вести себя как угодно, поскольку эта точка лежит вне области определения. Обозначим эту функцию через $Q_{np}(z_3)$. Мы нашли, таким образом, следующее решение трехмерного потенциального уравнения:

$$v = P_{np}(z_1) P_{np}(z_2) Q_{np}(z_3). \tag{60}$$

Но если известно какое-либо решение дифференциального уравнения второго порядка, можно найти его общее решение с помощью квадратур. Для уравнения Ламе это проще всего сделать с помощью равенства (58). После простых преобразований получаем из него следующее соотношение:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{L_2(z)}{L_1(z)}\right) = \frac{C}{L_1^2(z)\sqrt{f(z)}}.$$

Предположим теперь, что L_1 известно. Тогда выражение общего решения L_2 с помощью квадратур имеет вид

$$L_2(z) = C_1 L_1(z) + C_2 L_1(z) \int_z^\infty \frac{dt}{L_1^2(t)\sqrt{f(t)}}. \tag{61}$$

Выберем в качестве L_1 функцию P_{np}. Мы получим, что общее решение является линейной комбинацией P_{np} и линейно независимого от P_{np} решения вида

$$Q_{np} = P_{np}(z) \int_z^\infty \frac{dt}{P_{np}^2(t)\sqrt{f(t)}}. \tag{62}$$

Так как при $t \to \infty$ функция $f(t)$ имеет порядок t^3, а $P_{np}(t)$ — порядок $t^{n/2}$, то интеграл в формуле (62) при $z \to \infty$ стремится к нулю как $z^{-n-1/2}$, а Q_{np} — как $z^{-(n+1)/2}$. Поэтому решение Q_{np} пригодно для внешней области эллипсоида.

3.2.3. Случаи вырождения волнового уравнения Ламе.

3.2.3.1. Азимутальное уравнение. Пусть $a_2 = a_1$. Тогда область изменения z_1 вырождается в одну точку. Поэтому надо соответственно равенству (9) ввести новое переменное. Мы положим $a_1 = 0$ и устремим после этого a_2 к нулю. Получаем

$$z_1 = a_2\eta; \quad \frac{d}{dz_1} = \frac{1}{a_2}\frac{d}{d\eta}. \tag{63}$$

Если мы умножим волновое уравнение Ламе (51) относительно z_1 на a_2^2 и перейдем к пределу при $a_2 \to 0$, то получим

$$\left[\eta(1-\eta)\frac{d^2}{d\eta^2}+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\frac{d}{d\eta}+\frac{p}{4}\right]L=0. \tag{64}$$

Это уравнение имеет лишь три регулярные особые точки и не имеет нерегулярных особенностей. Кроме того, полюсы лежат в точках 0, 1 и ∞ и сравнение с уравнением (2.57) показывает, что наше уравнение является уравнением гипергеометрического типа. Мы можем записать его решение в виде

$$L=u\left(\frac{1}{2}\sqrt{p},\ -\frac{1}{2}\sqrt{p};\ \frac{1}{2};\ \eta\right). \tag{65}$$

Введем далее, согласно равенству (11), азимутальный угол φ посредством равенств

$$\eta=\cos^2\varphi;\quad \frac{d}{d\eta}=\frac{-1}{2\sin\varphi\cos\varphi}\frac{d}{d\varphi}. \tag{66}$$

При этой подстановке уравнение (64) преобразуется в простое дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}+p\right]L=0, \tag{67}$$

которое решается элементарно. Его решения имеют вид

$$L=\cos m\varphi;\quad \sin m\varphi, \tag{68}$$

где

$$m^2=p. \tag{69}$$

Так как решения должны быть однозначными функциями пространственных координат, т. е. иметь по φ период 2π, то m должно быть целым числом. Тем самым, в силу (69), определяются собственные значения для p. Сравнивая с (65), получаем соотношение

$$\cos m\varphi;\ \sin m\varphi \leftrightarrow u\left(\frac{m}{2},-\frac{m}{2};\ \frac{1}{2};\ \cos^2\varphi\right), \tag{70}$$

которое показывает, что $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ являются гипергеометрическими функциями от $\cos^2\varphi$.

3.2.3.2. Волновое уравнение для сфероида. Если имеет место симметрия вращения, то уравнения для z_2 и z_3, по существу, сохраняют вид (51); надо лишь положить в уравнении (51) $a_1=a_2=0$, после чего оно принимает вид

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2(z-a_3)}\right)\frac{d}{dz}+\frac{m^2a_3-n(n+1)z+k^2z^2}{4z^2(z-a_3)}\right]L=0. \tag{71}$$

Волновое уравнение имеет лишь три особые точки, из которых, вообще говоря, бесконечно удаленная точка является нерегулярной

особой точкой. Мы опять получаем вырожденное уравнение типа Фукса (2.63).

Потенциальное уравнение для сфероида ($k=0$) имеет, напротив, римановский тип. Определяющее уравнение имеет вид

$$\alpha_0^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2=0,\quad \alpha_3\left(\alpha_3-\frac{1}{2}\right)=0,\quad \left(\alpha_\infty+\frac{n}{2}\right)\left(\alpha_\infty-\frac{n+1}{2}\right)=0. \tag{72}$$

Поэтому мы можем записать решение в виде

$$L=P\left\{\begin{matrix} 0, & a_3, & \infty \\ \frac{m}{2}, & 0, & -\frac{n}{2} \\ -\frac{m}{2}, & \frac{1}{2}, & \frac{n+1}{2} \end{matrix}\; z\right\}. \tag{73}$$

Согласно равенству (2.59), решение можно выразить через гипергеометрическую функцию

$$L=z^{\frac{m}{2}}u\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ 1+m;\ \frac{z}{a_3}\right). \tag{74}$$

3.2.3.3. Волновое уравнение для полярного угла. Перейдем теперь к случаю сферической симметрии, т. е. устремим еще и a_3 к нулю. Тогда область изменения переменного z_2 также вырождается в точку и мы должны, согласно равенству (14), ввести новое переменное

$$z_2=a_3\zeta;\quad \frac{d}{dz_2}=\frac{1}{a_3}\frac{d}{d\zeta}. \tag{75}$$

Подставим это выражение в (71), умножим на a_3^2 и перейдем к пределу, когда $a_3\to 0$. Мы получим

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2}+\left(\frac{1}{\zeta}+\frac{1}{2(\zeta-1)}\right)\frac{d}{d\zeta}+\frac{m^2-n(n+1)\zeta}{4\zeta^2(\zeta-1)}\right]L=0. \tag{76}$$

Как и ранее, в случае азимутального уравнения (64), волновое число k не входит в полученное уравнение. Поэтому дифференциальное уравнение (76) сохраняет силу как для волнового, так и для потенциального уравнения; в обоих случаях n должно быть целым числом, если мы хотим, чтобы решение было однозначно определено в трехмерном пространстве. Уравнение (76) является дифференциальным уравнением типа Римана с полюсами 0, 1, ∞; с помощью преобразования показателей его можно перевести в гипергеометрическое уравнение. Мы получаем, как и в уравнении (71),

$$L=\zeta^{\frac{m}{2}}u\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ 1+m;\ \zeta\right). \tag{77}$$

Введем, наконец, согласно равенству (16), полярный угол θ

$$\zeta = \sin^2\theta; \quad \frac{d}{d\zeta} = \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\frac{d}{d\theta}. \tag{78}$$

Тогда мы получим дифференциальное уравнение для так называемых *присоединенных сферических функций* $P_n^m(\cos\theta)$

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{d}{d\theta} + n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P_n^m(\cos\theta) = 0, \tag{79}$$

которое будет подробно изучено в § 5. Из уравнения (77) вытекает связь этих функций с гипергеометрической функцией

$$P_n^m(\cos\theta) = (\sin\theta)^m u\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{m-n}{2}; 1+m; \sin^2\theta\right). \tag{80}$$

Можно выразить через функции P_n^m также и потенциальную функцию (74) сфероида.

3.2.3.4. Радиальное уравнение. Область изменения z_3 при сферической симметрии вытягивается (точнее, она простирается от 0 до ∞). Уравнение (71) переходит в уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{3}{2z}\frac{d}{dz} - \frac{n(n+1)}{4z^2} + \frac{k^2}{4z}\right] L = 0. \tag{81}$$

По равенству (17) z ($= z_3$) является не чем иным, как квадратом расстояния r точки от начала координат. Введем поэтому вместо z полярную координату r:

$$z = r^2; \quad \frac{d}{dz} = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}. \tag{82}$$

Тогда уравнение (81) примет вид

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} + k^2\right] L = 0. \tag{83}$$

Если $k = 0$ (потенциальное уравнение), то уравнение (83) решается элементарно; два линейно независимых решения имеют вид r^n и r^{-n-1}. Волновое уравнение является вырожденным уравнением Римана (2.69) со значениями параметров

$$a_1 = 0; \quad A = ik; \quad A' = -ik; \quad \alpha_1 = n; \quad \alpha_1' = -n-1; \quad \beta_1 = 0.$$

По равенству (2.74) мы можем поэтому записать волновые функции в виде

$$L = z^n e^{-ikz} u(n+1; 2n+2; 2ikz). \tag{84}$$

Мы изучим позже (в § 7) связь этого решения с цилиндрическими функциями.

3.2.3.5. Волновое уравнение для эллиптического цилиндра. Согласно (3.14), переход к цилиндрическим координатам получается, если устремить a_3 к бесконечности и ввести вместо $z_3 - a_3$ квадрат декартовой координаты, т. е. x_3^2. При этом из (51) мы получаем для z_3 при больших, но конечных значениях a_3 приближенное равенство

$$\left[\frac{d^2}{dz_3^2}+\frac{1}{2(z_3-a_3)}\frac{d}{dz_3}+\frac{pa_3-n(n+1)z_3+k^2z_3^2}{4z_3^2(z_3-a_3)}\right]L=0.$$

Для координат же z_1 и z_2 мы имеем, как и ранее, уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}\right)\frac{d}{dz}+\frac{-pa_3+n(n+1)z}{4a_3(z-a_1)(z-a_2)}\right]L=0.$$

Для того чтобы коэффициенты этого уравнения оставались конечными, когда $a_3\to\infty$, p должно быть конечным, а n должно стремится к бесконечности как $a_3^{\frac{1}{2}}$. Положим

$$n(n+1)=a_3\gamma^2. \tag{85}$$

Тогда дифференциальные уравнения примут вид

$$\left[\frac{d^2}{dz_3^2}+\frac{1}{2(z_3-a_3)}\frac{d}{dz_3}+\frac{k^2-\gamma^2}{4(z_3-a_3)}\right]L=0, \tag{86}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}\right)\frac{d}{dz}+\frac{\gamma^2z-p}{4(z-a_1)(z-a_2)}\right]L=0. \tag{87}$$

Сделаем в уравнении (86) подстановку

$$z_3-a_3=x_3^2;\quad \frac{d}{dz_3}=\frac{1}{2x_3}\frac{d}{dx_3}. \tag{88}$$

Мы получим тогда

$$\left[\frac{d^2}{dx_3^2}+k^2-\gamma^2\right]L=0. \tag{89}$$

Решениями этого уравнения являются $\cos k_3x_3$ и $\sin k_3x_3$, где $k_3^2=k^2-\gamma^2$.

Уравнения для z_1 и z_2 являются уравнениями вырожденного типа с двумя полюсами в точках a_1 и a_2 и нерегулярной особой точкой на бесконечности. Поэтому решение этого уравнения не сводится к гипергеометрической функции. Это имеет место не только для волнового уравнения ($k\neq 0$), но и для потенциального уравнения. Лишь при $\gamma=0$ уравнение (87) является дифференциальным уравнением Римана, и только тогда L может быть сведено к гипергеометрической функции.

Подстановка

$$\cos t = \frac{2z - a_1 - a_2}{a_2 - a_1}; \quad \sin^2 t = 4\frac{(a_2 - z)(z - a_1)}{(a_2 - a_1)^2} \tag{90}$$

преобразует уравнение (87) в так называемое *дифференциальное уравнение Матье*

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + A^2 + B^2\cos t\right) u = 0. \tag{91}$$

Здесь

$$A^2 = \frac{2p - (a_1 + a_2)\gamma^2}{8}; \quad B^2 = \frac{a_1 - a_2}{8}\gamma^2. \tag{92}$$

3.2.3.6. Волновое уравнение для кругового цилиндра. При переходе к круговому цилиндру мы имеем $a_2 = a_1$, а для z_1 мы получаем азимутальное уравнение, соответствующее 3.2.3.1, где надо положить $p = m^2$. Для координаты z_2 остается уравнение (87), где надо положить $a_1 = 0$, т. е. уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} + \frac{1}{4z}\left(\gamma^2 - \frac{m}{z}\right)\right] L = 0. \tag{93}$$

Переходя в равенстве (13) к пределу при $z_3 \to a_3 \to \infty$, мы убеждаемся, что z_2 является не чем иным, как квадратом расстояния точки ρ от оси x_3. Введем соответственно этому

$$z = \rho^2; \quad \frac{d}{dz} = \frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho} \tag{94}$$

и получим, наконец,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right] L = 0. \tag{95}$$

Это снова вырожденное дифференциальное уравнение Римана вида (2.69) со значениями параметров

$$a_1 = 0; \quad \alpha_1 = m; \quad \alpha_1' = -m; \quad A = i\gamma; \quad A' = -i\gamma; \quad \beta_1 = 0.$$

По равенству (2.74) решение уравнения имеет вид

$$L = \rho^m e^{-i\gamma\rho} u\left(m + \frac{1}{2};\ 2m + 1;\ 2i\gamma\rho\right). \tag{96}$$

Эти функции являются не чем иным, как цилиндрическими функциями, которые будут подробно изучены в § 7.

3.2.3.7. Волновое уравнение в конических координатах. Переход к коническим координатам мы проведем согласно равенствам (18) и (19), положив

$$a_i = \varepsilon A_i; \quad z_1 = \varepsilon t_1; \quad z_2 = \varepsilon t_2; \quad \varepsilon \to 0. \tag{97}$$

Область изменения z_3 остается конечной; здесь имеет место радиальное уравнение (83). Для того чтобы в уравнении (51) можно было произвести предельный переход $\varepsilon \to 0$, собственное значение p должно быть конечным. Подставим теперь выражения (97) в волновое уравнение Ламе (51), умножим на ε^2 и положим $\varepsilon = 0$. Мы получим тогда

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-A_1} + \frac{1}{t-A_2} + \frac{1}{t-A_3}\right)\frac{d}{dt} + \right.$$
$$\left. + \frac{p(A_1+A_2+A_3) - n(n+1)t}{4(t-A_1)(t-A_2)(t-A_3)}\right] L = 0. \quad (98)$$

В это уравнение не входит волновое число k, а потому уравнение (98) годится как для волнового, так и для потенциального уравнения и является в точности потенциальным уравнением Ламе. Различие с уравнением (51) состоит, помимо изменения обозначений, лишь в том, что надо рассматривать только области изменения переменных $0 \leqslant t_1 \leqslant A_1$, $A_1 \leqslant t_2 \leqslant A_2$, а входившее ранее в потенциальное уравнение Ламе переменное z_3 не имеет теперь никакого аналога. На функции от t_1 и t_2 переносится теория, изложенная в 3.2.2.3 и 3.2.2.4.

3.2.3.8. Волновое уравнение в параболических координатах. Перейдем теперь, согласно 3.1.2.5, к параболическим координатам. Мы должны тогда сделать в дифференциальном уравнении Ламе подстановку

$$a_1 = -\xi_1^2; \quad a_2 = A_2\xi_1; \quad a_3 = A_3\xi_1; \quad z = v\xi_1 \quad (99)$$

и выполнить предельный переход $\xi_1 \to \infty$. Собственное значение n должно быть таким, чтобы $n(n+1)$ имело тот же порядок, что и ξ_1. Мы полагаем поэтому

$$n(n+1) = G\xi_1 \quad (99а)$$

и считаем, что G остается постоянным при предельном переходе. Из уравнения (51) возникает при этом следующее *волновое уравнение в параболических координатах*:

$$\left[\frac{d^2}{dv^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-A_2} + \frac{1}{v-A_3}\right)\frac{d}{dv} + \frac{-p - Gv + k^2v^2}{4(v-A_2)(v-A_3)}\right] L = 0. \quad (100)$$

Это уравнение отличается от уравнения эллиптического цилиндра лишь членом, содержащим k^2, и является, как и уравнение эллиптического цилиндра, вырожденным уравнением типа Фукса. Применяя здесь преобразование (90) в виде

$$\cos t = \frac{2v - A_2 - A_3}{A_3 - A_2}; \quad \sin^2 t = 4\frac{(A_3 - v)(v - A_2)}{(A_3 - A_2)^2}, \quad (101)$$

мы получаем

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+A^2+B^2\cos t-C^2\cos^2 t\right]L=0, \tag{102}$$

где

$$A^2=\frac{p}{4}-\frac{A_2+A_3}{2}\frac{G}{4}-\frac{k^2}{16}(A_2+A_3)^2;$$

$$B^2=\frac{A_3-A_2}{8}G-\frac{k^2}{8}(A_3^2-A_2^2);\quad C=\frac{k}{4}(A_3-A_2). \tag{103}$$

В случае когда $C=0$ (т. е. для потенциального уравнения), это уравнение является уравнением Матье, а потому его можно рассматривать как обобщение уравнения Матье.

3.2.3.9. Волновое уравнение для параболоида вращения. Если $A_3\to A_2$, то координатная система приобретает симметрию вращения относительно оси x_1. Координатные поверхности состоят из двух семейств параболоидов вращения и ортогональных к ним плоскостей, проходящих через ось вращения. Эти плоскости путем предельного перехода, аналогичного 3.2.3.1, задаются с помощью полярного угла φ. В полярных координатах v_2 и v_3 уравнение (100) принимает вид (мы полагаем $A_2=0$)

$$\left[\frac{d^2}{dv^2}+\frac{1}{v}\frac{d}{dv}-\frac{m^2}{4v^2}-\frac{G}{4v}+\frac{k^2}{4}\right]L=0. \tag{104}$$

Это вырожденное уравнение Римана вида (2.69), где

$$a_1=0;\quad \alpha_1=\frac{m}{2};\quad \alpha_1'=-\frac{m}{2};\quad A=\frac{ik}{2};\quad A'=\frac{-ik}{2};\quad \beta_1=-\frac{G}{4}. \tag{105}$$

Согласно (2.74), решение этого уравнения имеет вид

$$L=v^{\frac{m}{2}}e^{-i\frac{k}{2}v}u\left(\frac{m+1}{2}-i\frac{G}{4k};\ m+1;\ ikv\right). \tag{106}$$

3.2.3.10. Волновое уравнение для параболического цилиндра. Пусть в уравнениях (28) и (28а) $A_3\to\infty$. Тогда для координат x_1 и x_2, ортогональных оси цилиндра, и для соответствующих параболических координат v_1 и v_2 мы получаем

$$2x_1+v=\frac{x_2^2}{v};\quad x_1=-\frac{v_1+v_2}{2};\quad x_2^2=-v_1v_2, \tag{107}$$

в то время как для направления, параллельного оси цилиндра, имеем

$$x_3^2=A_3(v_3-A_3);\quad \frac{d}{dv_3}=\frac{A_3}{2x_3}\frac{d}{dx_3}. \tag{108}$$

Входящие в уравнение (100) параметры должны оставаться конечными при $v=v_1$ и $v=v_2$, поэтому p и G должны иметь тот же порядок, что и A_3. Мы полагаем поэтому

$$p=PA_3; \quad G=\gamma^2 A_3 \tag{109}$$

и считаем, что P и γ остаются постоянными при предельном переходе. Подставляя эти выражения в уравнение для v_3 и совершая предельный переход, получаем то же уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx_3^2}+k^2-\gamma^2\right] L=0, \tag{110}$$

что и для эллиптического цилиндра [уравнение (89)]. Для v_1 и v_2 при $A_2=0$ получаем

$$\left[\frac{d^2}{dv^2}+\frac{1}{2v}\frac{d}{dv}+\frac{P}{4v}+\frac{\gamma^2}{4}\right] L=0. \tag{111}$$

Это снова вырожденное уравнение Римана со значениями параметров [см. (2.69)]

$$a_1=0; \quad \alpha_1=0; \quad \alpha_1'=\frac{1}{2}; \quad A=\frac{i\gamma}{2}; \quad A'=-\frac{i\gamma}{2}; \quad \beta_1=\frac{P}{4}. \tag{112}$$

Поэтому, в силу равенства (2.74), решение этого уравнения имеет вид

$$L=e^{-i\frac{\gamma}{2}v} u\left(\frac{1+\frac{iP}{\gamma}}{4}; \frac{1}{2}; i\gamma v\right). \tag{113}$$

§ 4

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССА

В предшествующем параграфе мы изучали решения дифференциальных уравнений, связанных с уравнением (2.3). Как правило, эти решения рассматривались в окрестности некоторой особой точки. Возможность аналитического продолжения решений и связь между поведением решений, соответствующих различным особым точкам, пока еще не изучалась. Эти вопросы и будут рассмотрены в настоящем параграфе. Так как особые точки, вообще говоря, являются точками ветвления решений, то для изучения решений мы будем использовать интегралы по кривым на римановых поверхностях.

B-функция была определена с помощью весьма простого интеграла по двойной петле. Для того чтобы такой интеграл был отличен от нуля, необходимо, чтобы имелись по меньшей мере три особые точки. Для B-функции таковыми являлись точки 0, 1, ∞ на плоскости интегрирования. Выбор других точек не дает существенно новых параметров, поскольку их можно перевести с помощью дробно-линейного преобразования в точки 0, 1, ∞. Иначе обстоит дело при наличии четырех точек ветвления или полюсов. Простейшая функция, которую можно представить в виде интеграла по двойной петле, имеет вид

$$u_{\lambda,\varkappa} = \int_{c_\lambda}^{c_\varkappa} (t-c_1)^{l_1}(t-c_2)^{l_2}(t-c_3)^{l_3}(t-c_4)^{l_4}\,dt$$

$$(\lambda,\ \varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Здесь показатели в точках ветвления должны быть связаны дополнительным условием $l_1+l_2+l_3+l_4+2=0$, так как иначе бесконечно удаленная точка была бы особой. Первое возникающее здесь осложнение состоит в том, что мы имеем $\binom{4}{2}=6$ существенно различных путей интегрирования, а потому при заданных параметрах c_1, c_2, c_3, c_4, l_1, l_2, l_3, l_4 возможны шесть различных

функций. Здесь также можно три особые точки перевести в точки 0, 1, ∞, оставив положение четвертой особой точки произвольным. Тогда интеграл примет вид

$$u_{01} = \int_{(0)}^{(1)} t^{b-c}(t-1)^{c-a-1}(t-z)^{-b}\,dt.$$

Обозначим через z координату четвертой особой точки после преобразования. Тогда интеграл является функцией $F(a, b; c; z)$ трех независимых показателей ветвления a, b, c и величины z, определяющей положение четвертой особой точки.

Интеграл u обладает, кроме того, тем свойством, что он удовлетворяет простому дифференциальному уравнению, в котором независимой переменной является z. Так как для многих приложений исходным является это дифференциальное уравнение, то мы хотим установить теперь связь между дифференциальным уравнением и интегралом по двойной петле.

4.1. Дифференциальное уравнение Гаусса. Дифференциальное уравнение

$$(a_2 + b_2 z' + z'^2)\frac{d^2u}{dz'^2} + (a_1 + b_1 z')\frac{du}{dz'} + a_0 u = 0 \qquad (1)$$

может быть с помощью линейной подстановки преобразовано в нормальную форму Гаусса

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{du}{dz} - abu = 0. \qquad (2)$$

Для этого найдем корни z_1' и z_2' уравнения $a_2 + b_2 z' + z'^2 = 0$. При линейной подстановке первые члены дифференциального уравнения (1) переходят (с точностью до знака) в первый член дифференциального уравнения (2), в то время как вид второго члена и коэффициентов b_1 и a_0 не меняется. Замечая еще, что система уравнений $a + b + 1 = b_1$ и $a \cdot b = a_0$ всегда разрешима и дает две равноправные пары значений $(a, b) = (b, a)$, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

4.1.1. Решение дифференциального уравнения Гаусса. Дифференциальное уравнение Гаусса имеет три особые точки $z = 0$, 1, ∞ (см. 2.2.6), которые являются регулярными особыми точками.

Для решения этого уравнения применим преобразование Эйлера [1])

$$u = \int_C w(t)(t-z)^k\,dt. \tag{3}$$

Здесь $w(t)$ является функцией комплексного переменного t, которую нам надо найти, а k — соответственно выбранным параметром. Интегрирование ведется в комплексной области t по пути C, который нам предстоит еще определить. Разлагая коэффициенты дифференциального уравнения (2) по степеням $t-z$ и делая подстановку (3), получаем

$$\int_C w\big[k(k-1)t(1-t)(t-z)^{k-2} + \big((k-1)(2t-1) - c + \\ + (a+b+1)t\big)k(t-z)^{k-1} - \big(k(k-1) + \\ + (a+b+1)k + ab\big)(t-z)^k\big]\,dt = 0.$$

Положим для краткости

$$v = (t-z)^k, \quad v' = \frac{dv}{dt}, \quad v'' = \frac{d^2v}{dt^2}.$$

Тогда мы получим

$$\int_C \big[t(1-t)v'' + \big((k-1)(2t-1) - c + (a+b+1)t\big)v' - \\ - \big(k(k-1) + (a+b+1)k + ab\big)v\big]\,w\,dt = 0.$$

Подинтегральная функция является дифференциальным выражением вида $wD_t(v)$. Будем, следуя Лагранжу, искать сопряженное дифференциальное выражение $vD_t^*(w)$, т. е. такое выражение, что

$$wD_t(v) - vD_t^*(w) = \frac{d}{dt}\Delta(v, w). \tag{4}$$

Если $vD_t^*(w)$ — искомое выражение, то из одновременного выполнения равенств

$$\int_C d\Delta(v, w) = 0 \quad \text{и} \quad D_t^*(w) = 0 \tag{4a}$$

следует выполнение равенства

$$\int_C wD_t(v)\,dt = 0,$$

[1]) Euler L., Institutiones calculi integralis, II, 1769, Cap. XI, Opera, ser. I, 12, S. 246. Указание относительно дальнейшего интегрирования см., например, Schlesinger L., Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Berlin und Leipzig, 3 Aufl. 1922.

а тогда u является решением уравнения (2). Таким образом, осуществление этого способа решения зависит от того, удастся ли нам найти сопряженное выражение с требуемыми свойствами.

Дифференциальное выражение $D_t(v)$ имеет вид

$$D_t(v) = pv'' + qv' + rv.$$

Отсюда легко следует, что

$$wD_t(v) = \frac{d}{dt}(wpv' + wqv) - v'\frac{d}{dt}(wp) - v\frac{d}{dt}(wq) + vwr.$$

Перепишем это равенство так, чтобы получить дифференциальное выражение, умноженное на v.

$$wD_t(v) = \frac{d}{dt}(wpv' + wqv - vw'p - vwp') + \\ + v\left(\frac{d^2}{dt^2}(wp) - \frac{d}{dt}(wq) + wr\right).$$

Это равенство имеет вид (4), где

$$\Delta(v, w) = p(wv' - vw') + vw(q - p')$$

и

$$D_t^*(w) = \frac{d^2}{dt^2}(wp) - \frac{d}{dt}(wq) + wr.$$

Подберем теперь функцию w так, чтобы выполнялось условие $D_t^*(w) = 0$. Уравнение $D_t^*(w) = 0$ снова является дифференциальным уравнением второго порядка. Мы покажем, что с помощью соответствующего подбора параметра k легко понизить его порядок. Для этого необходимо, чтобы либо наивысший, либо наинизший члены этого уравнения обратились в нуль. Так как параметр k входит в коэффициент r, то можно добиться, чтобы $r = 0$. Для этого надо потребовать, чтобы

$$k(k-1) + (a+b+1)k + ab = 0,$$

откуда

$$k = \begin{cases} -a, \\ -b. \end{cases} \tag{5}$$

Как мы уже знаем из вида уравнения (2), параметры a и b равноправны; мы выбираем b и получаем

$$D_t^*(w) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(t(1-t)w) - (b+1-c+(a-b-1)t)w\right] = 0.$$

Полагая постоянную интегрирования равной нулю, получаем из этого уравнения

$$t(1-t)w' - (b-c+(a-b+1)t)w = 0.$$

Разделяя переменные и разлагая на элементарные дроби, находим

$$\frac{d\ln w}{dt} = \frac{b-c+(a-b+1)t}{t(1-t)} = \frac{b-c}{t} + \frac{c-a-1}{t-1}.$$

Интегрируя это уравнение, находим с точностью до несущественного множителя

$$w = t^{b-c}(t-1)^{c-a-1}. \tag{6}$$

Для билинейного выражения $\Delta(v, w)$ получаем

$$\Delta(v, w) = bt^{b-c+1}(t-1)^{c-a}(t-z)^{-b-1}. \tag{7}$$

Согласно равенству (4а), путь интегрирования надо выбрать так, чтобы $\Delta(v, w)$ имело одинаковое значение в начале и в конце пути. В случае, когда показатели в выражении (7) имеют положительные вещественные части, это выражение обращается в нуль в точках ветвления 0, 1, z или ∞. Тогда в качестве пути интегрирования можно взять любую линию, соединяющую две точки ветвления. От предположения о положительности вещественных частей можно избавиться, если выбрать замкнутый путь на римановой поверхности, т. е. взять двойную петлю. При этом по равенствам (3) и (6) мы получаем в качестве решения дифференциального уравнения Гаусса выражение

$$u = \int_C t^{b-c}(t-1)^{c-a-1}(t-z)^{-b}\,dt, \tag{8}$$

где путь интегрирования C является двойной петлей, обходящей две из точек ветвления 0, 1, ∞, z. От выражения (8) мы можем с помощью преобразования $t = 1/s$ перейти к выражению

$$u = \int_C s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds. \tag{9}$$

Точками ветвления являются теперь точки 0, 1, ∞, $1/z$. Так как путь интегрирования всегда, даже в том случае, когда двойная петля охватывает точку ∞, лежит в конечной части плоскости и так как подинтегральное выражение нигде на пути интегрирования не обращается в бесконечность, то эти интегралы существуют во всей плоскости z, исключая особые точки.

4.1.2. Связь между решениями дифференциального уравнения Гаусса. Четыре точки ветвления можно разбить на пары шестью различными способами. Поэтому мы имеем шесть существенно различных двойных петель, и тем самым шесть частных решений дифференциального уравнения Гаусса. Так как это уравнение линейно и однородно, то любая линейная комбинация частных решений снова является решением. Кроме того, общее решение содержит две про-

извольные постоянные. Поэтому любая линейная комбинация двух линейно независимых частных решений дает нам общее решение и, обратно, каждое из шести найденных решений должно выражаться в виде линейной комбинации любых двух других.

Как было показано в п. 1.2, интеграл по двойной петле связан с обычным криволинейным интегралом следующим образом:

$$J_{\iota\varkappa} = \int\limits_{(c_\iota)}^{(c_\varkappa)} (t-c_1)^{l_1}(t-c_2)^{l_2}(t-c_3)^{l_3}(t-c_4)^{l_4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(1-e^{2i\pi l})(1-e^{2i\pi l_\varkappa})} \oint\limits_{(c_\varkappa+,\ c_\iota+,\ c_\varkappa-,\ c_\iota-)} (t-c_1)^{l_1}(t-c_2)^{l_2}(t-c_3)^{l_3}(t-c_4)^{l_4}\,dt$$

$$(\iota,\ \varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Это равенство имеет следующий смысл: если существует обычный интеграл ($\mathrm{Re}\,(l_\iota+1)>0$, $\mathrm{Re}\,(l_\varkappa+1)>0$), то этот интеграл равен $J_{\iota\varkappa}$, если же этот интеграл не существует, то тогда интеграл по двойной петле определяет аналитическое продолжение $J_{\iota\varkappa}$.

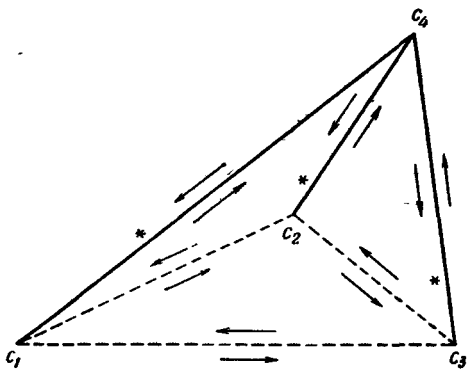


Рис. 12. Разрезы на числовой сфере.

При установлении связи между отдельными интегралами следует позаботиться, чтобы значения подинтегральных выражений во всех интегралах были установлены единым образом. С этой целью проведем на числовой сфере разрезы (см. рис. 12), которые выходят из одной и той же точки ветвления c_4. Тогда значение подинтегрального выражения будет однозначно определено во всей области. Условимся считать, что символ $J_{\iota\varkappa}$ дает значение интеграла, которое получается, если брать значение подинтегральной функции на сторонах разреза, где нет знака *.

На разрезанной римановой поверхности есть лишь $\binom{4}{3} = 4$ существенно различных замкнутых пути интегрирования, не охватывающих особых точек. По теореме Коши соответствующие криволинейные интегралы обращаются в нуль. Принимая во внимание значения функций на сторонах разрезов, мы получаем

$$J_{12} + J_{23} - J_{13} = 0 \quad \text{(путь 1231)},$$
$$J_{14} - e^{-2i\pi l_2} J_{24} - J_{12} = 0 \quad \text{(путь 1421)},$$
$$J_{24} - e^{-2i\pi l_3} J_{34} - J_{23} = 0 \quad \text{(путь 2432)},$$
$$J_{34} - e^{-2i\pi l_1} J_{14} + J_{13} = 0 \quad \text{(путь 3413, внешняя область)}.$$

Из этой системы равенств следует, например, что

$$J_{12}(1-e^{-2i\pi(l_1+l_3)})=J_{13}(1-e^{-2i\pi l_3})-J_{24}(1-e^{-2i\pi(l_1+l_2+l_3)}), \quad (10а)$$

$$J_{12}(1-e^{2i\pi(l_2+l_3)})=J_{14}e^{-2i\pi l_1}(1-e^{2i\pi(l_1+l_2+l_3)})-J_{23}(1-e^{2i\pi l_3}). \quad (10б)$$

Для того чтобы использовать полученные соотношения, целесообразно предварительно подробнее изучить поведение интегралов.

4.2. Определение гипергеометрической функции Гаусса. Среди частных решений дифференциального уравнения Гаусса отметим особо интеграл вида (9) по двойной петле, охватывающей точки 0, 1. Значения подинтегральной функции однозначно определяются следующими условиями: для точек вещественной оси $0<s<1$ в начале пути интегрирования мы полагаем $\arg s=0$, $\arg(1-s)=0$, $\lim\limits_{s\to 0}\arg(1-zs)=0$. Для любого значения z подинтегральная функция в интеграле

$$u_{01}=\oint^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds$$

конечна на всем пути интегрирования, а путь интегрирования также конечен. Поэтому при всех значениях a, b, c интеграл, рассматриваемый как функция от z, определен на всей плоскости за одним исключением. Лишь в случае, когда $z\to 1$, особая точка $1/z$ приближается к точке 1. При этом путь интегрирования проходит через особую точку 1. Так как поведение подинтегральной функции в точке 1 в этом случае ($z=1$) определяется выражением $(1-s)^{c-a-b-1}$, то мы имеем полюс, если $\operatorname{Re}(c-a-b)\leqslant 0$, и нуль в противном случае. Аналогичные обстоятельства возникают при $z=\infty$. Здесь путь интегрирования проходит через особую точку 0: $s=1/z\to 0$; поведение подинтегральной функции в этой точке определяется в данном случае выражением $z^{-b}s^{a-b-1}$. Отсюда вытекает, что при $\operatorname{Re}(a-b)>0$ интеграл сходится, однако из-за наличия множителя z^{-b} его значение может иметь разрыв при $z=0$. Если же $\operatorname{Re}(a-b)\leqslant 0$, то поведение функции определяется выражением $z^{b-a}z^{-b}=z^{-a}$, а потому наличие разрыва зависит от знака $\operatorname{Re}a$. Таким образом, мы получаем: если провести разрез от точки $z=+1$ вдоль отрицательного луча вещественной оси, то функция регулярна в конечной части разрезанной плоскости, за исключением точки $z=1$. При $z=1$ мы имеем точку ветвления, причем, если $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, то значение функции конечно; если же $\operatorname{Re}(c-a-b)\leqslant 0$, то в точке $z=1$ функция имеет полюс.

При $z=0$ интеграл переходит в интеграл по двойной петле, определяющий B-функцию. Мы полагаем поэтому

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) \equiv \frac{\oint\limits^{(1+,\ 0+,\ 1-,\ 0-)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds}{\oint\limits^{(1+,\ 0+,\ 1-,\ 0-)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds}. \qquad (11) $$

При такой нормировке функция ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ равна 1 в нулевой точке. ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ называется *гипергеометрической функцией Гаусса*. Применяя даваемое равенством (1.9) сокращенное обозначение

$$ J_{01} = \oint\limits_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zc)^{-b}\,ds, \qquad (11а) $$

мы можем записать равенство, определяющее гипергеометрическую функцию Гаусса, в виде

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = \frac{J_{01}}{\mathrm{B}(a,\ c-a)}. \qquad (11б) $$

4.2.1. Гипергеометрический ряд. Для того чтобы исследовать поведение функции Гаусса в окрестности точки $z=0$, предположим сначала, что $|z|<1$. Тогда можно выбрать путь интегрирования так, чтобы вдоль этого пути выполнялось неравенство $|zs|<1$. Тогда разложение $(1-zs)^{-b}$ в степенной ряд равномерно сходится на всем пути интегрирования. Подставляя это разложение в равенство (11а) и переставляя суммирование и интегрирование, получаем

$$ J_{01} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} z^{\varkappa} \binom{-b}{\varkappa} \oint\limits_{(0)}^{(1)} s^{a+\varkappa-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds. $$

Принимая во внимание равенство (1.16), определяющее B-функцию, выводим отсюда, что

$$ J_{01} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \binom{-b}{\varkappa} \mathrm{B}(a+\varkappa,\ c-a) z^{\varkappa}. $$

Используя, далее, равенства (1.22) и (1.6), мы получаем следующее разложение, справедливое при $|z|<1$:

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = 1 + \frac{ab}{1\cdot c} z + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{1\cdot 2c\cdot(c+1)} z^2 + \ldots = $$

$$ = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(a)_{\varkappa}(b)_{\varkappa}}{(1)_{\varkappa}(c)_{\varkappa}} z^{\varkappa}. \qquad (12) $$

Этот ряд можно рассматривать как обобщение геометрической прогрессии, а потому его называют *гипергеометрическим рядом*; от него и получила свое название функция Гаусса, являющаяся аналитическим продолжением степенного ряда (12).

Из разложения (12) вытекает, что параметры a и b можно переставить, т. е.

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = {}_2F_1(b,\ a;\ c;\ z). \tag{13}$$

Это утверждение согласуется с тем, что в дифференциальное уравнение (2) параметры a и b входят симметричным образом.

Имея в виду дальнейшие обобщения, мы пользуемся, следуя Похгаммеру и Бернсу, символом ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$. Здесь подчеркнуто, что в разложении (12) два первых параметра a и b входят в числитель, а параметр c — в знаменатель.

4.2.1.1. Поведение гипергеометрического ряда на границе круга сходимости. Запишем степенной ряд (12) в виде $\sum a_\varkappa z^\varkappa$. Тогда мы имеем

$$\lim_{\varkappa\to\infty}\left|\frac{a_{\varkappa+1}z^{\varkappa+1}}{a_\varkappa z^\varkappa}\right| = \lim_{\varkappa\to\infty}\left|\frac{(a+\varkappa)(b+\varkappa)}{(1+\varkappa)(c+\varkappa)}z\right| = |z|.$$

Следовательно, по признаку Даламбера этот ряд сходится для $|z|<1$ и расходится при $|z|>1$. Далее, принимая во внимание выражение коэффициентов, имеем

$$\frac{a_\varkappa}{a_{\varkappa+1}} = \frac{(1+\varkappa)(c+\varkappa)}{(a+\varkappa)(b+\varkappa)} = \frac{\left(1+\frac{1}{\varkappa}\right)\left(1+\frac{c}{\varkappa}\right)}{\left(1+\frac{a}{\varkappa}\right)\left(1+\frac{b}{\varkappa}\right)},$$

или, разлагая знаменатель по формуле бинома,

$$\frac{a_\varkappa}{a_{\varkappa+1}} = 1 + \frac{1+c-a-b}{\varkappa} + O\left(\frac{1}{\varkappa^2}\right).$$

Отсюда получаем по Вейерштрассу[1]) следующее утверждение о поведении ряда на границе круга сходимости: если $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, то ряд ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ абсолютно и равномерно сходится на всей окружности сходимости. В соответствии с замечаниями пункта 4.2.0 он сходится и в точке $z=1$. Если $-1<\operatorname{Re}(c-a-b)\leqslant 0$, то ряд ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ равномерно сходится на части единичной окружности, лежащей вне области $|1-z|<\delta$ (δ — сколь угодно малое положительное число). В точке $z=1$ этот ряд расходится; если $\operatorname{Re}(c-a-b)\leqslant -1$, то ряд расходится на окружности сходимости.

4.2.2. Выражение решений дифференциального уравнения Гаусса через гипергеометрическую функцию. Остальные пять реше-

1) Weierstraß K., Ges. Werke, B. I, S. 185.

ний дифференциального уравнения Гаусса точно так же можно свести к гипергеометрической функции. Чтобы эти решения были однозначно определены, надо произвести соответствующие разрезы на плоскости интегрирования (см. рис. 12). При этом целесообразно различать два случая: $\operatorname{Im}(z) > 0$ и $\operatorname{Im}(z) < 0$. Условимся считать, что если не оговорено прямо противоположное, то абсолютные значения аргументов z, $z-1$, $1-z$ и $-z$ не превосходят π. Во всех дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться при определении аргументов рис. 13, *а* и 13, *б*.

Наша цель — выразить различные решения через гипергеометрическую функцию. Поскольку функция Гаусса определена интегралом

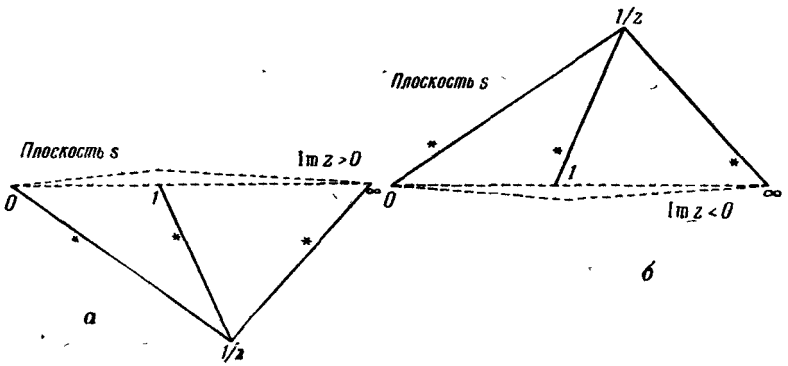


Рис. 13. Разрезы для представления функций Гаусса.

по пути (01), то нам надо отобразить остальные пути интегрирования на путь (01). Мы начнем с интеграла

$$J_{1\infty} = \int_{(1)}^{(\infty)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds.$$

Очевидно, что преобразование $t = 1/s$ дает требуемое отображение пути интегрирования. При этом мы должны положить

$$1 - s = e^{\mp i\pi}(s-1) = e^{\mp i\pi}(1-t)/t \qquad (\operatorname{Im} z \gtrless 0).$$

Верхний или нижний знак в показателе выбирается в зависимости от того, имеем ли мы $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$. В первом случае переход от точек $0 < s < 1$, для которых $\arg(1-s) = 0$, к точкам $s > 1$, для которых $\arg(s-1) = 0$, совершается с помощью поворота на угол $-\pi$ вокруг точки $s = 1$, в то время как во втором случае угол равен $+\pi$. Соответственно этому имеем

$$1 - zs = e^{\mp i\pi}(zs-1) = e^{\mp i\pi} z\,(1 - t/z)/t.$$

Для контроля заметим, что при $s=t=1$ полученное равенство переходит в равенство $1-z=e^{\mp i\pi}(z-1)$. Подставляя преобразованные выражения в интеграл $J_{1\infty}$, мы получаем

$$J_{1\infty}=e^{\mp i\pi(c-a-b-1)}z^{-b}\int\limits_{(0)}^{(1)}t^{b-c}(1-t)^{c-a-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-b}dt$$

и отсюда, в силу равенства (11б),

$$J_{1\infty}=e^{\mp i\pi(c-a-1)}(e^{\mp i\pi}z)^{-b}\,\mathrm{B}(b-c+1,\ c-a)\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(b-c+1,\ b;\ b-a+1;\ \frac{1}{z}\right)\qquad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(14)$$

При вычислении интеграла

$$J_{0\infty}=\int\limits_{(0)}^{(\infty)}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds$$

мы будем считать, что путь интегрирования на сфере Римана деформирован так, чтобы он шел по отрицательной полуоси из точки 0 в бесконечно удаленную точку. Преобразование $1-s=1/(1-t)$ преобразует теперь отрицательную полуось на плоскости s в отрезок $[0,\ 1]$ вещественной оси на плоскости t. Мы получаем тогда $s=e^{\mp i\pi}t/(1-t)$; аргумент выбран так, что при $\operatorname{Im}z>0$ (см. рис. 13, *а*) аргументы точек отрицательной полуоси равны π, в то время как при $\operatorname{Im}z<0$ их аргументы равны $-\pi$. Далее, имеем $1-zs=$ $=(1-(1-z)t)/(1-t)$. Отсюда получаем

$$J_{0\infty}=e^{\pm i\pi a}\int\limits_{(0)}^{(1)}t^{a-1}(1-t)^{b-c}(1-(1-z)t)^{-b}\,dt$$

и, используя равенство (11б),

$$J_{0\infty}=e^{\pm i\pi a}\,\mathrm{B}(a,\ b-c+1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ 1+a+b-c;\ 1-z)$$
$$(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(15)$$

Подинтегральную функцию в интеграле

$$J_{0\,\frac{1}{z}}=\int\limits_{0}^{\left(\frac{1}{z}\right)}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds$$

мы преобразуем с помощью подстановки $s=t/z$, $1-s=1-t/z$, $1-zs=1-t$ и получаем

$$J_{0\,\frac{1}{z}}=z^{-a}\,\mathrm{B}(a,\ 1-b)\,{}_2F_1\left(a,\ 1+a-c;\ 1+a-b;\ \frac{1}{z}\right).\qquad(16)$$

Для $J_{1\,\frac{1}{z}}$ мы полагаем $t=(1-zs)/(1-z)$, и потому $s=(1-(1-z)t)/z$. Отсюда следует $1-zs=(1-z)t$ и $1-s=e^{\mp i\pi}(s-1)=e^{\mp i\pi}(1-z)(1-t)/z$. Вычисляя интеграл, находим

$$J_{1\,\frac{1}{z}}=e^{\mp i\pi(c-a-1)}z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}\mathrm{B}(1-b,\ c-a)\times$$
$$\times\,{}_2F_1(1-b,\ 1-a;\ 1+c-a-b;\ 1-z)\qquad(\mathrm{Im}\,z\gtrless 0).\quad(17)$$

Мы вычислим еще $J^*_{\infty\,\frac{1}{z}}$. Полагая здесь $s=1/zt$,

$$1-s=e^{\mp i\pi}(s-1)=e^{\mp i\pi}(1-zt)/zt$$

и

$$1-zs=e^{\mp i\pi}(zs-1)=e^{\mp i\pi}(1-t)/t,$$

получаем

$$J^*_{\infty\,\frac{1}{z}}=e^{\mp i\pi(c-a-b)}z^{1-c}\mathrm{B}(1+b-c,\ 1-b)\times$$
$$\times\,{}_2F_1(1+b-c,\ 1+a-c;\ 2-c;\ z)\qquad(\mathrm{Im}\,z\gtrless 0).\quad(18)$$

Таким образом, все частные решения дифференциального уравнения Гаусса сводятся к гипергеометрической функции.

4.2.3. Вывод дальнейших решений уравнений Гаусса. До сих пор целью наших преобразований было деформировать путь интегрирования, отличный от (0 1), в путь (0 1). Поставим теперь вопрос, возможно ли нетривиальным образом так отобразить путь (0 1) на себя, чтобы при этом бесконечно удаленная точка осталась точкой ветвления? Поскольку дробно-линейное преобразование однозначно определено соответствием трех пар точек, то остаются лишь две возможности, а именно соответствия $0,\ 1,\ 1/z\leftrightarrow 1,\ 0,\ \infty$ и $0,\ 1,\ \infty\leftrightarrow 1,\ 0,\ \infty$ (отображение $0,\ 1,\ 1/z\to 0,\ 1,\ \infty$ сводится к последовательному применению этих отображений).

Соответствие $0,\ 1,\ \infty\leftrightarrow 1,\ 0,\ \infty$ осуществляется с помощью преобразования $s=1-t$, $1-s=t$, $1-zs=(1-z)(1-zt/(z-1))$. При этом имеем

$$\int_{(0)}^{(1)'}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds=$$
$$=(1-z)^{-b}\int_{(0)}^{(1)}t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}\left(1-\frac{z}{z-1}t\right)^{-b}dt$$

или, принимая во внимание равенство (11б) и симметрию B-функции [равенство (1.18)],

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)=(1-z)^{-b}\,{}_2F_1\left(c-a,\ b;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right).\qquad(19)$$

Подставляя здесь $1-z$ вместо z, мы получаем полезную во многих вычислениях вторую форму равенства

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ 1-z)=z^{-b}\,{}_2F_1\left(c-a,\ b;\ c;\ \frac{z-1}{z}\right). \qquad (19a) $$

Отображение $0,\ 1,\ 1/z \leftrightarrow 1,\ 0,\ \infty$ осуществляется с помощью преобразования

$$ s=\frac{1-t}{1-zt},\quad 1-s=\frac{(1-z)\,t}{1-zt},\quad 1-zs=\frac{1-t}{1-zt},\quad ds=-\frac{1-z}{(1-zt)^2}\,dt. $$

Оно приводит к равенству

$$ \oint_{0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds= $$

$$ =(1-z)^{c-a-b}\oint_{(0)}^{(1)} t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}(1-zt)^{b-c}\,dt, $$

откуда следует

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)=(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,\ c-b;\ c;\ z). \qquad (20) $$

В предыдущем пункте 4.2.2 мы выразили шесть основных решений дифференциального уравнения Гаусса через гипергеометрическую функцию. Равенство (20) сопоставляет каждому из этих решений еще одно решение той же формы. Поэтому мы получаем из первоначальных шести решений двенадцать. Преобразуя еще переменные, согласно равенству (19), мы получаем всего 24 различных гипергеометрических ряда, являющихся решениями уравнения Гаусса [1]). Эти решения выражаются в виде степенных рядов по z, $1/z$, $1-z$, $z/(z-1)$, $1/(z-1)$, $(z-1)/z$, радиус сходимости которых равен 1.

4.2.4. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда. Равенство (12), задающее гипергеометрический ряд, дает нам возможность вычислить функцию Гаусса ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ для всех значений аргумента, таких, что $|z|<1$. Как мы видели в п. 4.2, эта функция определена во всей плоскости z. Мы найдем здесь степенные ряды, пригодные и при $|z|>1$. Используем для этого соотношения (10). Сравнив рис. 12 и 13, *б*, идентифицируем особые точки c_1, c_2, c_3, c_4 с точками $0,\ 1,\ \infty,\ 1/z$. Тогда мы получим для показателей значения $l_1=a-1$, $l_2=c-a-1$, $l_3=b-c$, $l_4=-b$. Равенство (10a) принимает при этом вид

$$ J_{01}(1-e^{2i\pi(c-a-b)})=J_{0\infty}(1-e^{2i\pi(c-b)})-J_{1\,\frac{1}{z}}(1-e^{-2i\pi b}) $$

$$ (\operatorname{Im} z<0). $$

[1]) Первоначально найдены Куммером, *Journal f. Math.*, XV (1836), 39—83, 127—172.

Поскольку рис. 13, *а* получается из рис. 13, *б* с помощью отражения, при котором направление обхода меняется на обратное, то соответствующее уравнение для $\operatorname{Im} z > 0$ получается путем изменения знаков в показателях. Это дает

$$J_{01}(1 - e^{\mp 2i\pi(c-a-b)}) = J_{0\infty}(1 - e^{\mp 2i\pi(c-b)}) - J_{1\,\frac{1}{z}}(1 - e^{\pm 2i\pi b})$$

$$(\operatorname{Im} z \gtrless 0).$$

Подставим сюда значения интегралов в соответствии с равенствами (11б), (15) и (17). Принимая во внимание равенства (1.39) и (1.40), получим

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) =$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ 1+a+b-c;\ 1-z) +$$

$$+ z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}\Gamma(a+b-c)\times$$

$$\times\,{}_2F_1(1-a,\ 1-b;\ 1-a-b+c;\ 1-z). \quad (21)$$

Применяя равенство (20), найдем

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1(a,\ b;\ 1+a+b-c;\ 1-z) +$$

$$+ (1-z)^{c-a-b}\Gamma(a+b-c)\,{}_2F_1(c-a,\ c-b;\ 1-a-b+c;\ 1-z). \quad (21а)$$

Аналогичным образом равенство (10б) приводит к

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) =$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)}(e^{\mp i\pi}z)^{-a}\,{}_2F_1(a,\ a-c+1;\ a-b+1;\ 1/z) +$$

$$+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)}(e^{\mp i\pi}z)^{-b}\,{}_2F_1(b-c+1,\ b;\ b-a+1;\ 1/z)$$

$$(\operatorname{Im} z \gtrless 0). \quad (22)$$

Эти соотношения дают возможность представить функцию Гаусса на всей плоскости z с помощью степенных рядов. При $|z| < 1$ мы используем гипергеометрический ряд, т. е. равенство (12). При $|z| > 1$ используем равенство (22). Поскольку теперь $|1/z| < 1$, то степенные ряды для стоящих справа функций сходятся. В окрестности точки $z = 1$ удобное представление дается равенством (21а). Из него следует в соответствии с рассмотрениями п. 2.2.0, что функция Гаусса имеет в точке $z = 1$ полюс порядка $c - a - b$, если $\operatorname{Re}(c - a - b) \leqslant 0$. В противном случае, т. е. если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$,

эта функция регулярна на всей разрезанной плоскости z. В частности, тогда

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ 1)=\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad (\mathrm{Re}(c-a-b)>0). \quad (23) $$

Отметим еще разложение, даваемое равенством (19). Для этого разложения окружностью сходимости $|z/(z-1)|=1$ является прямая $|z|=|1-z|$. Таким образом, каждая точка комплексной области (включая и бесконечно удаленную точку) принадлежит одному из кругов сходимости (ср. рис. 14). При этом точка $z=\left(1\pm i\sqrt{3}\right)/2$ принадлежит всем трем кругам сходимости. По крайней мере одно из трех разложений сходится в этих точках.

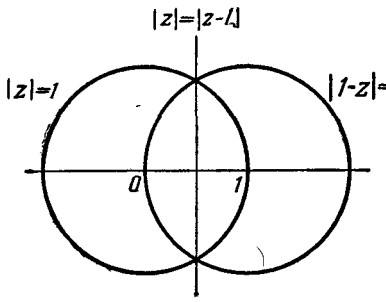


Рис. 14. Круги сходимости для разложений функции Гаусса в степенные ряды.

4.2.4.0. Разложение для весьма больших значений аргумента. Равенство (22) приводит непосредственно к разложению по степеням $1/z$, пригодному для z с большими абсолютными значениями. В частности, мы получаем асимптотические формулы (при $|z|\to\infty$)

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)\sim\begin{cases}\dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-a)}(-z)^{-a} & (\mathrm{Re}\,a<\mathrm{Re}\,b),\\[2ex] \dfrac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-b)}(-z)^{-b} & (\mathrm{Re}\,b<\mathrm{Re}\,a).\end{cases} \quad (24) $$

Если $\mathrm{Re}\,a>0$ и $\mathrm{Re}\,b>0$, то гипергеометрическая функция обращается в нуль при $z=\infty$, если же хотя бы одна из двух вещественных частей отрицательна, она обращается при $z=\infty$ в ∞ (при этом точка $z=\infty$ является точкой ветвления).

4.2.5. Соотношения обхода. Функция Гаусса имеет разветвление в точках $z=1$ и $z=\infty$. В разрезанной плоскости z она регулярна и разложима в степенной ряд повсюду, за исключением точек $z=1$ и $z=\infty$. Ввиду этого возникает вопрос: как изменяется значение функции при обходе вокруг одной из точек ветвления?

Если z — вещественное число, большее 1, то, применяя равенство (11), мы не можем интегрировать вдоль отрезка [0 1] вещественной оси, поскольку на этом отрезке лежит особая точка $1/z$ плоскости s. При рассмотрении интеграла J_{01} мы должны обойти особую точку $1/z$ либо в верхней, либо в нижней полуплоскости

(см. рис. 15, *а*). Поскольку между этими путями интегрирования лежит особая точка, значения интеграла по ним являются различными. Мы получаем, таким образом, для ${}_2F_1(a, b; c; x)$ $(x > 1)$ различные значения в зависимости от того, считаем ли точку x принадлежащей верхней или нижней полуплоскости. Такой же результат получается из равенства (22), в котором $-x$ можно считать равным либо $e^{-i\pi}x$, либо $e^{i\pi}x$, т. е. считать точку x вещественной оси принадлежащей либо верхней, либо нижней полуплоскости. Для точек отрицательной вещественной оси эти осложнения не возникают, поскольку в этом случае в равенстве (22) $-x$ имеет всегда нулевой аргумент, а в интеграле особая точка $1/x$ не попадает на отрезок 0 1. Изменим теперь рис. 15,*а* так, чтобы точка $1/z$ лежала в нижней полуплоскости (см. рис. 15,*б*). Тогда мы можем один из двух путей интегрирования расположить на вещественной оси, а другой должен лежать в нижней полуплоскости. Мы получаем, таким образом, два интеграла J_{01} и J_{01}^*, каждый из которых является решением дифференциального уравнения Гаусса и дает значение гипергеометрической функции. Второе значение J_{01}^* может быть получено из главного значения J_{01} следующим образом: переменная z обходит против часовой стрелки точку ветвления 1 и тем самым по часовой стрелке точку $z = \infty$; при этом точка $1/z$ обходит точку 1 в положительном направлении, или, что то же самое, точку $z = 0$ в отрицательном направлении.

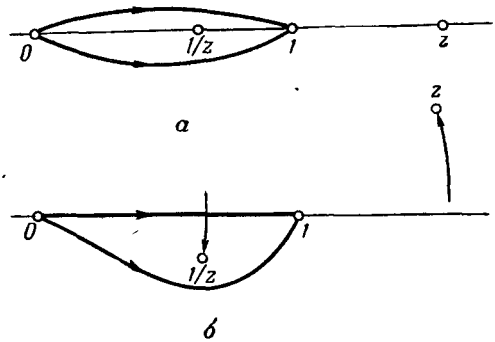


Рис. 15. Отклонение пути интегрирования.

Поскольку J_{01}^* является решением дифференциального уравнения Гаусса, оно должно линейно выражаться через J_{01} и некоторое второе решение. Связь может быть представлена с помощью рис. 16, *а* и 16, *б*, отражающих ситуацию соответственно при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. Из них вытекает, что

$$J_{01}^* = J_{01} + (1 - e^{\mp 2i\pi b}) J_{1\,\frac{1}{z}} \cdot e^{\mp 2i\pi(c-a)}.$$

Экспоненциальный множитель при $J_{1\,\frac{1}{z}}$ возникает из-за того, что мы берем значение интеграла на обозначенной на рис. 13 с помощью * стороне сечения. Равенство (17) после простых преобразований при-

водит нас к

$$J_{01}^{*} - J_{01} = \mp \frac{2i\pi\,\Gamma(c-a)\,e^{\pm i\pi(c-a-b)}}{\Gamma(b)\,\Gamma(1+c-a-b)}\, z^{1-c}(1-z)^{c-a-b} \times$$
$$\times\, {}_2F_1(1-a,\ 1-b;\ 1+c-a-b,\ 1-z) \qquad (25a)$$

или

$${}_2F_1^{*}(a,\ b;\ c;\ z) - {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) = \mp \frac{2i\pi\,\Gamma(c)\,e^{\pm i\pi(c-a-b)}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(1+c-a-b)} \times$$
$$\times\, z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}\, {}_2F_1(1-a,\ 1-b;\ 1+c-a-b;\ 1-z).$$

Используя равенство (20), получаем

$${}_2F_1^{*}(a,\ b;\ c;\ z) - {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) =$$
$$= \mp \frac{2i\pi\,\Gamma(c)\,e^{\pm i\pi(c-a-b)}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(1+c-a-b)}\,(1-z)^{c-a-b} \times$$
$$\times\, {}_2F_1(c-a,\ c-b;\ 1+c-a-b;\ 1-z).$$

Значение для F^{*} можно записать в явном виде, если явно записать обход точки 1 с помощью равенства $z^{*} = 1 + (z-1)\,e^{\pm 2i\pi}$. Мы получаем тогда

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ 1+(z-1)e^{\pm 2i\pi}) -$$
$$- {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) =$$
$$= \mp \frac{2i\pi\,\Gamma(c)\,e^{\pm i\pi(c-a-b)}}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(1+c-b-a)} \times$$
$$\times\,(1-z)^{c-a-b} \times \qquad (25)$$
$$\times\, {}_2F_1(c-a,\ c-b;\ 1+c-a-b;\ 1-z).$$

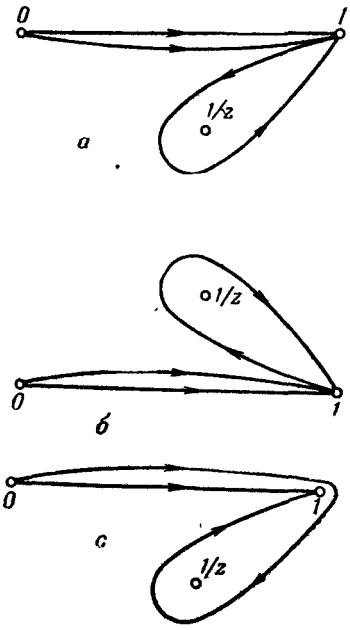


Рис. 16. К выводу соотношений обхода (25).

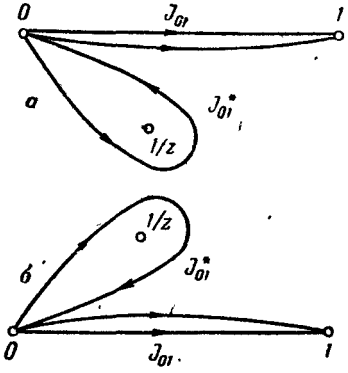


Рис. 17. К выводу соотношений обхода (26).

Из рис. 16, *в* вытекает, что выведенное соотношение не зависит от знака $\operatorname{Im} z$. Другое равенство получается, если разложить путь инте-

грирования, согласно рис. 17*а, б*:

$$J_{10}^{*} = (1 - e^{\mp 2i\pi b}) J_{0\,\frac{1}{z}} + e^{\mp 2i\pi b} J_{01}.$$

Используя равенство (16), получаем отсюда

$$e^{\pm i\pi b}{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ 1+(z-1)e^{\pm 2i\pi}) + e^{\mp i\pi b}{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z) =$$

$$= \pm \frac{2i\pi\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)\Gamma(1+a-b)} z^{-a}{}_2F_1\left(a,\ 1+a-c;\ 1+a-b;\ \frac{1}{z}\right). \quad (26)$$

Равенство (25) применимо для всех точек z, в которых допустимо разложение по степеням $1-z$; равенство же (26) удобно при $|z|>1$.

4.3. Функция Гаусса как функция параметров. В предшествующих рассмотрениях мы изучали функцию ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$ как функцию от z. С точки зрения чистой математики по меньшей мере столь же интересно изучить зависимость этой функции от a, b и c. Поскольку мы интересуемся здесь в первую очередь соотношениями, которые важны для приложений, мы ограничимся лишь некоторыми вопросами из этого круга задач [1]).

Начнем со связи между смежными функциями.

4.3.1. Связи между смежными функциями (relationes inter contiguas). В своей основной работе о гипергеометрическом ряде Гаусс определил смежные функции (functiones contiguas). Он назвал функцию ${}_2F_1(a',\ b';\ c';\ z)$ смежной с функцией ${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)$, если один из параметров a', b', c' отличается от соответствующего параметра a, b, c на ± 1, в то время как остальные параметры совпадают. Таким образом, каждая гипергеометрическая функция имеет шесть смежных в смысле Гаусса. Гаусс показал, что между исходной функцией и любыми двумя смежными с ней функциями имеет место линейная зависимость, коэффициенты которой являются многочленами от z, a, b, c. Поскольку шесть функций можно разбить на $\binom{6}{2} = 15$ пар, то имеют место 15 таких равенств. Как сам Гаусс, так и позже Риман обобщили понятие смежности функций, назвав так функции, параметры которых отличаются от параметров a, b, c на ± 1 или 0. Таким путем получают 26 функций, смежных с данной. Между исходной функцией и любыми двумя смежными с ней функциями имеют место $\binom{26}{2} = 325$ линейных соотношений [2]). Мы ограничимся тем, что выведем 15 первых равенств Гаусса.

[1]) Дальнейшее изучение этой темы читатель найдет у Ф. Клейна.

[2]) Если исходить из риманова представления с помощью P-функции, то получают 30 смежных функций и 435 равенств.

Так как $1=s+(1-s)$, то

$$\oint_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-2}(1-zs)^{-b}\,ds=$$

$$=\oint_{(0)}^{(1)} s^{a}(1-s)^{c-a-2}(1-zs)^{-b}\,ds+\oint_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds.$$

С помощью равенств (11) и (1.21) получаем отсюда, что

$$(c-a-1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)+a\,{}_2F_1(a+1,\ b;\ c;\ z)-$$
$$-(c-1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c-1;\ z)=0. \quad (27а)$$

Переставляя a и b, получаем

$$(c-b-1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)+b\,{}_2F_1(a,\ b+1;\ c;\ z)-$$
$$-(c-1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c-1;\ z)=0. \quad (27б)$$

Вычитая эти равенства друг из друга, приходим к соотношению

$$(a-b)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)-a\,{}_2F_1(a+1,\ b;\ c;\ z)+b\,{}_2F_1(a,\ b+1;\ c;\ z)=0. \quad (27в)$$

Новая группа равенств получается с помощью разложения $1-zs=$ $=(1-s)+(1-z)s$, приводящего к тождеству

$$\oint_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-2}(1-zs)^{-b+1}ds=\oint_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}ds+$$
$$+(1-z)\oint_{(0)}^{(1)} s^{a}(1-s)^{c-a-2}(1-zs)^{-b}ds.$$

Вновь применяя равенства (11) и (1.21), получаем

$$-(c-a-1)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)+(c-1)\,{}_2F_1(a,\ b-1;\ c-1;\ z)-$$
$$-a(1-z)\,{}_2F_1(a+1,\ b;\ c;\ z)=0.$$

Заменим в равенстве (27б) b на $b-1$ и прибавим полученное таким образом равенство к только что найденному. Мы получаем

$$(a+b-c)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)+(c-b)\,{}_2F_1(a,\ b-1;\ c;\ z)-$$
$$-a(1-z)\,{}_2F_1(a+1,\ b;\ c;\ z)=0. \quad (28а)$$

Переставляя a и b, найдем

$$(a+b-c)\,{}_2F_1(a,\ b;\ c;\ z)+(c-a)\,{}_2F_1(a-1,\ b;\ c;\ z)-$$
$$-b(1-z)\,{}_2F_1(a,\ b+1;\ c;\ z)=0. \quad (28б)$$

Умножим равенство (27б) на $1-z$ и прибавим к равенству (28б). Мы исключим тогда ${}_2F_1(a, b+1; c; z)$ и получим

$$(a-1+(b-c+1)z)\,{}_2F_1(a, b; c; z)-(a-c)\,{}_2F_1(a-1, b; c; z)-$$
$$-(c-1)(1-z)\,{}_2F_1(a, b; c-1; z)=0; \quad (29а)$$

отсюда, переставляя a и b, найдем

$$(b-1+(a-c+1)z)\,{}_2F_1(a, b; c; z)-(b-c)\,{}_2F_1(a, b-1; c; z)-$$
$$-(c-1)(1-z)\,{}_2F_1(a, b; c-1; z)=0. \quad (29б)$$

Вычитая полученные равенства одно из другого, имеем

$$(a-b)(1-z)\,{}_2F_1(a, b; c; z)-(a-c)\,{}_2F_1(a-1, b; c; z)+$$
$$+(b-c)\,{}_2F_1(a, b-1; c; z)=0. \quad (29в)$$

Умножим равенство (27в) на $1-z$ и прибавим к равенству (28б), мы получим тогда

$$((a-b)z+c-2a)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+a(1-z)\,{}_2F_1(a+1, b; c; z)+$$
$$+(a-c)\,{}_2F_1(a-1, b; c; z)=0 \quad (30а)$$

и, переставляя a и b,

$$((b-a)z+c-2b)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+b(1-z)\,{}_2F_1(a, b+1; c; z)+$$
$$+(b-c)\,{}_2F_1(a, b-1; c; z)=0. \quad (30б)$$

Заменим в равенстве (27а) a на $a-1$, вычтем отсюда равенство (29а) и заменим в результате c на $c+1$; мы получим тогда

$$c(z-1)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+c\,{}_2F_1(a-1, b; c; z)+$$
$$+(b-c)z\,{}_2F_1(a, b; c+1; z)=0. \quad (31а)$$

Перестановка a и b приводит к

$$c(z-1)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+c\,{}_2F_1(a, b-1; c; z)+$$
$$+(a-c)z\,{}_2F_1(a, b; c+1; z)=0. \quad (31б)$$

Исключая из равенств (30а) и (31а) величину ${}_2F_1(a-1, b; c; z)$, найдем

$$c((c-b)z-a)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+ac(1-z)\,{}_2F_1(a+1, b; c; z)-$$
$$-(a-c)(b-c)z\,{}_2F_1(a, b; c+1; z)=0 \quad (32а)$$

и, переставляя a и b,

$$c((c-a)z-b)\,{}_2F_1(a, b; c; z)+bc(1-z)\,{}_2F_1(a, b+1; c; z)-$$
$$-(a-c)(b-c)z\,{}_2F_1(a, b; c+1; z)=0. \quad (32б)$$

Наконец, исключая ${}_2F_1(a-1, b; c; z)$ из равенств (29а) и (31а) получим

$$c[c-1+(1+a+b-2c)z]\,{}_2F_1(a, b; c; z)- \\ -c(c-1)(1-z)\,{}_2F_1(a, b; c-1; z)+ \\ +(a-c)(b-c)z\,{}_2F_1(a, b; c+1; z)=0. \quad (33)$$

Мы нашли, таким образом, соотношения, соответствующие всевозможным комбинациям функции ${}_2F_1(a, b; c; z)$ с любыми двумя смежными с ней функциями. Продолжая эту операцию, мы можем найти соотношения, связывающие любые три функции, параметры которых отличаются на целые числа. Например, двукратным комбинированием равенств (27в) и (29в) мы получаем после простого вычисления соотношение

$$(b-a)[((a-b)^2-1)z+2ab-(a+b-1)c]\,{}_2F_1(a, b; c; z)+ \\ +a(b-c)(a-b-1)\,{}_2F_1(a+1, b-1; c; z)+ \\ +b(a-c)(a+1-b)\,{}_2F_1(a-1, b+1; c; z)=0. \quad (34)$$

4.3.1.0. Связи между производными и смежными функциями. В заключение выведем еще аналогичные соотношения, связывающие смежные функции с производной заданной функции. Из равенства

$$\frac{d}{dz}\int_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds = b\int_{(0)}^{(1)} s^{a}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-(b+1)}\,ds$$

вытекает

$$\frac{d}{dz}\,{}_2F_1(a, b; c; z)=\frac{ab}{c}\,{}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z). \quad (35)$$

Применяя это соотношение несколько раз, найдем

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\,{}_2F_1(a, b; c; z)=\frac{(a)_\nu (b)_\nu}{(c)_\nu}\,{}_2F_1(a+\nu, b+\nu; c+\nu; z). \quad (35а)$$

Аналогично равенству (28а) получаем с помощью аддитивного разложения $1-zs$, что

$$c\,{}_2F_1(a, b; c; z)-c\,{}_2F_1(a, b+1; c; z)+ \\ +az\,{}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z)=0. \quad (36)$$

Отсюда следует

$$z\frac{d\,{}_2F_1(a, b; c; z)}{dz}=b\,{}_2F_1(a, b+1; c; z)-b\,{}_2F_1(a, b; c; z)= \\ =a\,{}_2F_1(a+1, b; c; z)-a\,{}_2F_1(a, b; c; z). \quad (37)$$

4.3.2. Целочисленные значения параметра. Из равенства (11), определяющего гипергеометрическую функцию, вытекает, что на всей плоскости z, исключая точки $z=1$ и $z=\infty$, интеграл J_{01} остается конечным для любых нецелых значений a, b, c. Поскольку B-функция при нецелых значениях a и c конечна и отлична от нуля, то функция ${}_2F_1(a, b; c; z)$ при нецелых значениях параметра будет конечной во всей плоскости z, за исключением, быть может, точек $z=1$ и $z=\infty$. Случаи, в которых параметры или их суммы и разности являются целыми, требуют дополнительного рассмотрения.

4.3.2.1. Параметр a целочисленный. Поскольку функция симметрична относительно первых двух параметров, следующие утверждения остаются справедливыми и при целых значениях b. Если $a=\mu>0$ — целое число, то, как легко усмотреть из разложения (12), функция не имеет никаких особенностей. Если $a=-\mu\leqslant 0$ — целое число, то ряд обрывается, и при всех значениях z мы имеем

$$ {}_2F_1(-\mu, b; c; z)=\sum_{x=0}^{\mu}\frac{(-\mu)_x\,(b)_x}{(1)_x\,(c)_x}\,z^x \qquad (\mu\geqslant 0 \text{ — целое}) \tag{38}$$

и

$$ {}_2F_1(0, b; c; z)=1. \tag{38a}$$

Случай, когда a и b — целые числа, не дает никаких дополнительных особенностей. Однако теперь равенство (22) теряет силу.

4.3.2.2. Параметр c целочисленный. Если $c=\nu$ — целое положительное число, то, как легко следует из разложения (12), функция

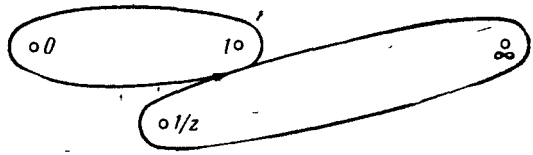


Рис. 18. Деформация пути интегрирования при целочисленном c.

не имеет особенностей. Для того чтобы сделать вывод о поведении функции при отрицательных целых значениях c, вычислим, пользуясь равенствами (11) и (1.13), функцию

$$ {}_2F_1(a, b; \nu; z)=\frac{\oint^{(1+,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}(1-sz)^{-b}\,ds}{\oint^{(1+,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}\,ds}. $$

В интеграле, стоящем в числителе, можно деформировать путь интегрирования на числовой сфере так, чтобы он обходил в отрицательном направлении особые точки ∞ и $1/z$, а в интеграле в знаменателе — так, чтобы он обходил в отрицательном направлении точку $s=\infty$ (см. рис. 18). Отсюда вытекает, что $1-s=e^{i\pi}(s-1)$ и $1-zs=e^{-i\pi}(zs-1)$. Сделаем замену переменной $t=1/s$. Мы получим

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}\,ds=\oint^{(\infty-)} s^{a-1}e^{i\pi(\nu-a-1)}(s-1)^{\nu-a-1}\,ds=$$

$$=e^{i\pi(\nu-a-1)}\oint^{(0+)} t^{-\nu}(1-t)^{\nu-a-1}\,dt$$

Разлагая по формуле бинома и меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем отсюда

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}\,ds=e^{i\pi(\nu-a-1)}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}\binom{\nu-a-1}{\varkappa}\oint^{(0+)} t^{-\nu+\varkappa}\,dt=$$

$$=\begin{cases} e^{i\pi(\nu-a-1)}(-1)^{\nu-1}\binom{\nu-a-1}{\nu-1}2i\pi & (\nu>0),\\ 0 & (\nu\leqslant 0)\end{cases}$$

Для интеграла, стоящего в числителе, получаем при указанном изменении пути интегрирования

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds=$$

$$=e^{i\pi(\nu-a+b-1)}\oint^{(\infty-,\,\frac{1}{z}-)} s^{a-1}(s-1)^{\nu-a-1}(zs-1)^{-b}\,ds.$$

Подстановка $t=1/zs$ дает

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds=$$

$$=e^{i\pi(\nu-a+b-1)}z^{1-\nu}\oint^{(1+,\,0+)} t^{b-\nu}(1-t)^{-b}(1-zt)^{\nu-a-1}\,dt.$$

Отсюда вытекает, в силу соотношений (1.13) и (11),

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{\nu-a-1}(1-zs)^{-b}\,ds=e^{i\pi(\nu-a-1)}2i\sin b\pi\times$$

$$\times z^{1-\nu}B(b-\nu+1,\ 1-b)\,{}_2F_1(b+1-\nu,\ a+1-\nu;\ 2-\nu;\ z).$$

Подставим вычисленные значения интегралов в формулу для ${}_2F_1(a, b; \nu; z)$. Мы получим, что при $\nu > 0$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(\nu)} z^{\frac{\nu}{2}} {}_2F_1(a, b; \nu; z) =$$

$$= \frac{\Gamma(a+1-\nu)\Gamma(b+1-\nu)}{\Gamma(2-\nu)} z^{\frac{2-\nu}{2}} {}_2F_1(a+1-\nu, b+1-\nu; 2-\nu; z)$$

(ν — целое). (39)

Заменим здесь ν на $2-\nu'$, где $\nu' \leqslant 1$, и положим $a' = a+1-\nu$, $b' = b+1-\nu$; тогда равенство примет по ν' такую же форму; оно справедливо, таким образом, для всех целочисленных значений ν. Если теперь $\nu \leqslant 0$, то правая часть имеет конечное значение, поскольку ${}_2F_1(a, b; \nu, z)/\Gamma(\nu)$ конечно при всех целочисленных значениях ν. Если же $\nu \leqslant 0$ — целое число, то ${}_2F_1(a, b; \nu; z)$ обращается в бесконечность.

4.3.2.3. Параметры a и c — целые. Если μ и ν — целые положительные числа, то это не влечет за собой никаких особых свойств функции ${}_2F_1(\mu, b; \nu; z)$. Если же μ — отрицательное, а ν — положительное целое число, то ряд (12) обрывается, и мы получаем многочлен, который задает функцию для всех значений z. Если $\nu \leqslant 1$ и $\mu > \nu - 1$, то все множители, стоящие в правой части равенства (39), конечны, а потому и все это выражение конечно. Левая часть равенства имеет вид

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(b)}{\Gamma(\nu)} {}_2F_1(\mu, b; \nu; z) = \nu(\nu+1)\ldots(\mu-1)\Gamma(b) {}_2F_1(\mu, b; \nu; z).$$

Поскольку при условии $\mu \leqslant 0$ все стоящие справа множители отличны от нуля, то функция ${}_2F_1(\mu, b; \nu; z)$ конечна. Итак:

${}_2F_1(\mu, b; \nu; z)$ конечно, если $\nu \leqslant \mu \leqslant 0$.

Если же $\mu > 0$, то один из множителей равен нулю, и потому функция ${}_2F_1(\mu, b; \nu; z)$ обращается в бесконечность. Итак

${}_2F_1(\mu, b; \nu; z)/\Gamma(\nu)$ конечно, если $\nu \leqslant 0$, $\mu > 0$.

Аналогично получаем: если $\mu < \nu \leqslant 0$, то функция ${}_2F_1(\mu, b; \nu, z)$ обращается в бесконечность, причем ${}_2F_1(\mu, b; c; z)/\Gamma(c)$ стремится к многочлену от z, когда $c \to \nu$.

4.3.2.4. Сумма или разность параметров целочисленна. Случай, когда разность $c - a$ — целое число, с помощью равенства (19) непосредственно сводится к случаю, когда целым является первый параметр (см. 4.3.2.1). В частности, из равенств (19) и (38а) вытекает

$${}_2F_1(a, b; a; z) = (1-z)^{-b}. \quad (40)$$

Отметим, что если $c-a=0$ или является целым отрицательным числом, то в равенствах (21) и (22) одно из слагаемых обращается в нуль. Целочисленность суммы $a+c$ не приводит ни к каким упрощениям. Целочисленность разности $a-b$ приводит к тому, что равенство (22) теряет силу.

4.3.3. Линейные связи между параметрами a, b и c. Если показатели ветвления в интеграле (11), определяющем гипергеометрическую функцию, равны между собой или противоположны по знаку, то можно ожидать наличия тех или иных особенностей. Простейшим является случай, когда $a-1=c-a-1$, т. е. $c=2a$. Мы имеем

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=\frac{1}{C}\oint^{(1+,\,0-)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}(1-zs)^{-b}\,ds. $$

Постоянную C проще всего определить из того, что при $z=0$ функция должна принимать значение 1. Выберем, согласно 1.2.2, путь интегрирования, имеющий форму восьмерки. Так как точки 0 и 1 равноправны, переведем с помощью преобразования $s=(1+t)/2$, $1-s=(1-t)/2$ точку $t=0$ в точку $s=1/2$. Мы получим

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=\frac{1}{C\cdot 2^{2a-1}}\left(\frac{2}{2-z}\right)^{b}\oint^{(1+,\,-1-)}(1-t^2)^{a-1}\left(1-\frac{z}{2-z}\,t\right)^{-b}dt. $$

Подстановка $u=t^2$ переводит путь интегрирования, изображенный на рис. 19, *а*, в дважды пробегаемый путь, изображенный на рис. 19, *б*.

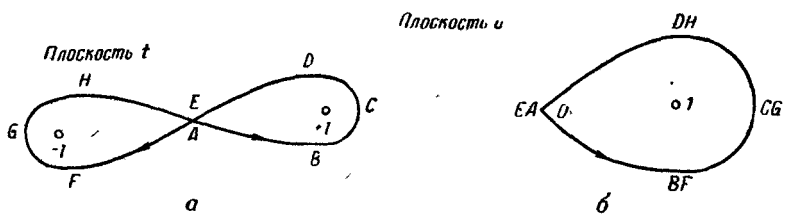


Рис. 19. Преобразование пути интегрирования при выводе равенства (41).

При этом на дуге $ABCDE$ следует, очевидно, положить $t=+\sqrt{u}$, а на дуге $EFGHA$ положить $t=-\sqrt{u}$. Таким образом, мы получаем

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=\frac{1}{C\cdot 2^{2a-1}}\left(\frac{2}{2-z}\right)^{b}\times $$

$$ \times\oint^{(1+)}(1-u)^{a-1}\frac{du}{2\sqrt{u}}\left[\left(1+\frac{z}{2-z}\sqrt{u}\right)^{-b}+\left(1-\frac{z}{2-z}\sqrt{u}\right)^{-b}\right]. $$

Если $|z/(2-z)|<1$, то можно применить биномиальное разложение. При этом члены с нечетными показателями обращаются в нуль и мы получаем, меняя порядок суммирования и интегрирования:

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=\frac{1}{C\cdot 2^{2a-1}}\left(\frac{2}{2-z}\right)^b\times$$

$$\times\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2-z}\right)^{2\varkappa}\binom{-b}{2\varkappa}\oint_0^{(1+)}(1-u)^{a-1}u^{\varkappa-1/2}du.$$

Стоящий справа интеграл равен, с точностью до независящего от индекса суммирования $\varkappa$ множителя, функции $\mathrm{B}(a,\ \varkappa+1/2)$, а по равенству (1.22)

$$\mathrm{B}\left(a,\ \varkappa+\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\varkappa}\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{2}\right).$$

Поэтому, заменяя постоянный множитель на C', получаем

$${}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=C'\left(\frac{2}{2-z}\right)^b\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\binom{-b}{2\varkappa}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\varkappa}\left(\frac{z}{2-z}\right)^{2\varkappa}.$$

Согласно формулам (1.6) и (1.4), мы имеем

$$\binom{-b}{2\varkappa}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\varkappa}=\frac{(b)_{2\varkappa}\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{(1)_{2\varkappa}\left(a+\frac{1}{2}\right)_\varkappa}=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)_\varkappa\left(\frac{b+1}{2}\right)_\varkappa\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa(1)_\varkappa\left(a+\frac{1}{2}\right)_\varkappa}.$$

Но это выражение является коэффициентом при $z'^{\varkappa}$ в разложении в степенной ряд функции ${}_2F_1(b/2,\ (b+1)/2;\ a+1/2;\ z')$. Итак, мы доказали, что

$${}_2F_1(a,\ b;\ 2a;\ z)=\left(\frac{2}{2-z}\right)^b{}_2F_1\left(\frac{b}{2},\ \frac{b+1}{2};\ a+\frac{1}{2};\ \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right). \quad (41)$$

Постоянная определена таким образом, что $F=1$ при $z=0$. Из наших рассуждений вытекает равенство левой и правой частей лишь в области $|z/(2-z)|<1$. В силу принципа аналитического продолжения, это равенство фактически имеет место всегда. При этом лишь следует иметь в виду, что если $|\arg(z/(2-z))|>\pi/2$, то следует использовать аналитическое продолжение F (см. п. 4.2.5).

Мы получим другую формулу, если учтем иным способом взносы обеих половин восьмерки, изображенной на рис. 19, *а*. Чтобы представить результат в обозримой форме, будем исходить из равенства

$${}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right)=\frac{1}{C}\oint_{(1+,\,0-)}s^{a-1}(1-s)^{a-1}\left(1-\frac{4zs}{(1+z)^2}\right)^{-b}ds.$$

Преобразование $s=(1+t)/2$ дает

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right)=\frac{(1+z)^{2b}}{C\cdot 2^{2a-1}}\oint^{(1+,-1-)}(1-t^2)^{a-1}(1+z^2-2zt)^{-b}\,dt $$

и, поскольку $t=\pm\sqrt{u}$,

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right)=\frac{(1+z)^{2b}}{C\cdot 2^{2a-1}}\oint_0^{(1+)}(1-u)^{a-1}\frac{du}{2\sqrt{u}}\times $$

$$ \times\left[\left(1+z^2-2z\sqrt{u}\right)^{-b}+\left(1+z^2+2z\sqrt{u}\right)^{-b}\right]. $$

При достаточно малых абсолютных значениях z сходится разложение

$$ \left(1+z^2-2z\sqrt{u}\right)^{-b}+\left(1+z^2+2z\sqrt{u}\right)^{-b}= $$

$$ =\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\binom{-b}{\varkappa}\left[\left(z^2-2z\sqrt{u}\right)^{\varkappa}+\left(z^2+2z\sqrt{u}\right)^{\varkappa}\right]= $$

$$ =2\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\binom{-b}{\varkappa}z^{\varkappa}\sum_{\mu=0}^{\leqslant\varkappa/2}\binom{\varkappa}{2\mu}z^{\varkappa-2\mu}(4u)^{\mu}. $$

Располагая это разложение по степеням z, получаем при $\varkappa=\lambda+\mu$

$$ \left(1+z^2-2z\sqrt{u}\right)^{-b}+\left(1+z^2+2z\sqrt{u}\right)^{-b}= $$

$$ =2\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{-b}{\lambda+\mu}\binom{\lambda+\mu}{2\mu}2^{2\mu}u^{\mu}. $$

Переставим суммирование и интегрирование:

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right)= $$

$$ =\frac{(1+z)^{2b}}{C\cdot 2^{2a-1}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}2^{2\mu}\binom{-b}{\lambda+\mu}\binom{\lambda+\mu}{2\mu}\oint_0^{(1+)}(1-u)^{a-1}u^{\mu-\frac{1}{2}}du. $$

Интеграл в правой части снова с точностью до независящего от μ множителя равен $B(\mu+1/2,\ a)$. Поэтому, учитывая равенство (1.22) и заменяя постоянный множитель, имеем

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right)= $$

$$ =C'(1+z)^{2b}\sum_{\lambda=0}^{\infty}z^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{2^{2\mu}\left(\frac{1}{2}\right)_{\mu}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_{\mu}}\binom{-b}{\lambda+\mu}\binom{\lambda+\mu}{2\mu}. $$

Множитель при $z^{2\lambda}$ может быть, согласно формулам (1.6), (1.4) и (1.5), преобразован следующим образом:

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{2^{2\mu}\left(\frac{1}{2}\right)_\mu (b)_{\lambda+\mu}(-1)^{\lambda+\mu}(1)_{\lambda+\mu}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu (1)_{\lambda+\mu}(1)_{2\mu}(1)_{\lambda-\mu}} = \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda+\mu}(b)_{\lambda+\mu}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu (1)_\mu (1)_{\lambda-\mu}}.$$

Принимая во внимание равенства (1.3), (1.7) и (1.2), получаем

$$\frac{(-1)^\lambda (b)_\lambda}{(1)_\lambda}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu}\frac{(b+\lambda)_\mu}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu}(-1)^\mu =$$

$$= \frac{(-1)^\lambda (b)_\lambda \left(a+\frac{1}{2}-b-\lambda\right)_\lambda}{(1)_\lambda \left(a+\frac{1}{2}\right)_\lambda} = \frac{(b)_\lambda \left(b-a+\frac{1}{2}\right)_\lambda}{(1)_\lambda \left(a+\frac{1}{2}\right)_\lambda}.$$

Таким образом, согласно равенству (12),

$${}_2F_1\left(a, b; 2a; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2b}\,{}_2F_1\left(b, b-a+\frac{1}{2}; a+\frac{1}{2}; z^2\right). \quad (42)$$

В силу принципа аналитического продолжения, это равенство сохраняет силу для всех значений z. Заменим в равенстве (41) z на $4z/(1+z)^2$, сравним правые части и заменим z^2 на z. Мы получим, что

$${}_2F_1\left(\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}; a+\frac{1}{2}; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) =$$

$$= (1+z)^b\,{}_2F_1\left(b, b-a+\frac{1}{2}; a+\frac{1}{2}; z\right). \quad (43)$$

Эти равенства были выведены Гауссом [1]) и независимо от него Куммером [2]).

Из полученных формул, в силу равенств (19) и (20), вытекают дальнейшие соотношения. Заменим, например, в равенстве (42) b на a и a на $a-b+1/2$. Мы получим

$${}_2F_1\left(a, a-b+\frac{1}{2}; 2a-2b+1, \frac{4z}{(1+z)^2}\right) =$$

$$= (1+z)^{2a}\,{}_2F_1(a, b; a-b+1; z^2). \quad (42a)$$

[1]) Gauß C. F., Werke III, S. 207—230, Göttingen, 1866; Nachlaß, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis.

[2]) Kummer E. E., *Crelles Journal f. Mathematik*, 15 (1836), 64 и далее. В равенстве (43), которое соответствует нашему равенству (42), есть опечатка.

Равенство (43) можно записать так:

$$ {}_2F_1\left(\frac{a}{2},\ \frac{a+1}{2};\ c;\ \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = $$

$$ = (1+z)^a\, {}_2F_1(a,\ a+1-c;\ c;\ z). \qquad (43a) $$

Применим к левой части этого соотношения равенство (19); мы получаем

$$ {}_2F_1\left(c-\frac{a+1}{2},\ \frac{a}{2};\ c;\ \frac{-4z}{(1-z)^2}\right) = $$

$$ = (1-z)^a\, {}_2F_1(a,\ a+1-c;\ c;\ z). \qquad (44) $$

Если и правую часть преобразовать по равенству (19), то имеем

$$ {}_2F_1\left(c-\frac{a+1}{2},\ \frac{a}{2};\ c;\ \frac{-4z}{(1-z)^2}\right) = {}_2F_1\left(2c-a-1,\ a;\ c;\ \frac{z}{z-1}\right). $$

Заменим в этом равенстве $2c-a-1$ на b и $z/(z-1)$ на z. Тогда оно примет следующий вид:

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ \frac{a+b+1}{2};\ z\right) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2};\ \frac{a+b+1}{2};\ 4z(1-z)\right). \qquad (45) $$

Преобразуя, наконец, левую часть, согласно равенству (20), мы получаем после некоторого изменения обозначений

$$ {}_2F_1(a,\ 1-a;\ c;\ z) = (1-z)^{c-1}\, {}_2F_1\left(\frac{c-a}{2},\ \frac{a+a-1}{2};\ c;\ 4z(1-z)\right). \qquad (46) $$

В наших рассмотрениях мы исходили из того, что следует ожидать простых соотношений, когда в точках ветвления подинтегрального выражения мы имеем равные показатели. Мы положили сначала $c=2a$ и тем самым сделали равными показатели в точках 0 и 1. Сделанные здесь преобразования позволяют охватить и остальные случаи. В равенствах (42а) и (44) в правых частях равны показатели в точках 1 и $1/z$, в то время как в левой части равенства (46) совпадают показатели в точках 0 и $1/z$.

4.3.3.0. Частные случаи. Уже Гаусс [1]) указал на то, что разложения многих элементарных функций являются частными случаями гипергеометрического ряда. Вспомним, например, равенство (40). Далее, из интеграла, определяющего гипергеометрическую функцию, непосредственно вытекает, что

$$ {}_2F_2(1,\ 1;\ 2;\ z) = \frac{1}{z}\ln\frac{1}{1-z}. \qquad (47) $$

[1]) Gauß C. F., Werke III, S. 207—230, Gottingen, 1866.

Из равенства (41) следует замечательная формула для ${}_2F_1(-\nu,\ a;\ 2a;\ 2)$. В силу этого равенства,

$${}_2F_1(-\nu,\ a;\ 2a;\ z)=\left(\frac{2-z}{2}\right)^{\nu}{}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu-1}{2};\ a+\frac{1}{2};\ \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right).$$

Если ν — положительное целое число, то ряд, в который разлагается правая часть, обрывается на индексе суммирования $\varkappa=\nu/2$ при четном значении ν и на индексе $\varkappa=(\nu-1)/2$ при нечетном значении ν. Во втором случае наинизший показатель при $2-z$ равен $\nu-(\nu-1)=1$, а потому сумма обращается в нуль при $z=2$. Если же $\nu=2\mu$ — четное число, то наинизший показатель равен нулю; в этом случае ему соответствует выражение

$$\left(\frac{2-z}{2}\right)^{2\mu}\frac{(-\mu)_\mu\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)_\mu}{(1)_\mu\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu}\left(\frac{2-z}{z}\right)^{-2\mu}=\left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\mu}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu}.$$

Отсюда следует

$${}_2F_1(-2\mu,\ a;\ 2a;\ 2)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\mu}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_\mu},$$

$${}_2F_1(-2\mu-1,\ a;\ 2a;\ 2)=0 \quad (\mu\text{ — положительное целое}). \tag{48}$$

4.3.4. Неполная B-функция. Частным случаем функции Гаусса является неполная B-функция. Она определяется равенством

$$\mathrm{B}_x(p,\ q)\equiv\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (0<x<1).$$

Не составляет труда обобщить определение этой функции на любое комплексное значение x и любые значения p и q:

$$\mathrm{B}_z(p,\ q)\equiv\oint_{(0)}^{(z)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt. \tag{49}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{B}_z(p,\ q)+\mathrm{B}_{1-z}(q,\ p)=\mathrm{B}(p,\ q). \tag{49а}$$

С помощью подстановки $t=zs$ получаем из равенства (49)

$$\mathrm{B}_z(p,\ q)=z^p\oint_{(0)}^{(1)} s^{p-1}(1-zs)^{q-1}\,ds.$$

Отсюда, используя равенство (11), определяющее B-функцию, и равенство (1.30), имеем

$$B_z(p, q) = \frac{z^p}{p} {}_2F_1(p, 1-q; p+1; z). \qquad (50)$$

Неполная B-функция находит применение в статистике. Без доказательства [1]) заметим, что сумма s_μ первых μ членов бинома $(a+b)^\nu$ может быть представлена в виде

$$s_\mu = (a+b)^\nu \frac{B_{\frac{a}{a+b}}(\nu+1-\mu, \mu)}{B(\nu+1-\mu, \mu)}.$$

Эта функция была табулирована Пирсоном [2]).

4.3.5. Асимптотические представления при больших значениях параметра. В приложениях часто необходимо иметь представления гипергеометрической функции, которые применимы при больших значениях параметров a, b и c. Ватсон [3]) указал такие разложения для всех функций вида ${}_2F_1(a+\delta_1 l, b+\delta_2 l; c+\delta_3 l; z)$, где величины δ_1, δ_2, δ_3 принимают одно из значений 0, $+1$, -1 и $|l|$ имеет достаточно большое значение. Очевидно, что, исключая случай $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, мы имеем $3^3 - 1$ случаев; однако случаи, получающиеся друг из друга перестановкой первых двух параметров, несущественно отличаются друг от друга, а потому остается лишь 17 существенно различных случаев. Они могут быть сведены с помощью равенств пункта 4.2.3 к четырем типам. Мы рассмотрим здесь детально два из этих случаев. Исходным пунктом явится для нас интеграл Похгаммера, к которому мы применим восходящий к Риману *метод перевала*, впервые примененный Дебаем для аналогичной проблемы, касающейся цилиндрических функций [4]).

4.3.5.1. Метод перевала. Для вычисления интеграла

$$\int_{s_1}^{s_2} e^{-lf(s)} \Phi(s)\, ds$$

от аналитической функции, где l — параметр, принимающий большие значения, а пределы интегрирования фиксированы, используют асимп-

[1]) Pearson K., Biometrika, 16, 202 (1924).

[2]) Pearson K., Tables of the incomplete Beta-Funktion, Biometrika, Cambridge, 1934, 59 страниц текста и 494 стр. таблиц.

[3]) Watson G. N., Asymptotic expansions of hypergeometric functions, *Cambridge Phil. Trans.*, XXII (1918), 277—308.

[4]) Riemann B., Werke (1892), S. 424—430. P. Debye, *Math. Ann.*, 67 (1908), 535—568, *Münchener Sitzungsberichte* (1910). В английской и американской литературе этот метод называется также методом наискорейшего спуска.

тотическое разложение. Чтобы получить такое разложение, проведем путь интегрирования через некоторую точку s_0, в которой $f'(s_0)=0$, причем значение $\mathrm{Re}(f(s))$ в точке s_0 больше, чем в точках s_1 и s_2. Если при этом $f''(s_0)$ не обращается в нуль, то s_0 является точкой перевала обеих поверхностей, изображающих соответственно функции $\mathrm{Re}(lf(s))$ и $\mathrm{Im}(lf(s))$ на комплексной плоскости s. В самом деле, разложим $f(s)$ в окрестности точки s_0 в ряд Тейлора. Мы получим

$$f(s)-f(s_0)=\frac{1}{2}(s-s_0)^2 f''(s_0)+\ldots.$$

При обходе точки s_0 аргумент $(s-s_0)^2$ изменяется вдвое быстрее, чем аргумент $s-s_0$, и мы получаем поэтому в окрестности точки s_0 четыре квадранта, в которых последовательно $\mathrm{Re}(lf(s))$ больше или меньше, чем $\mathrm{Re}(lf(s_0))$. Мы получаем, таким образом, в двух взаимно противоположных направлениях «горы», а в перпендикулярных направлениях «долины»; s_0 является, таким образом, точкой перевала (седловиной), через которую проходит перевал, ведущий из одной долины в другую. То же самое остается справедливым после поворота на 45° для $\mathrm{Im}(lf(s))$. Вдоль ведущего через перевал пути для вещественной части мнимая часть постоянна и обратно.

Выберем одну из ветвей кривой $\mathrm{Im}(f(s))=\mathrm{Im}(f(s_0))$ в качестве пути интегрирования и введем в качестве переменной интегрирования

$$\tau=f(s)-f(s_0).$$

Поскольку вдоль пути интегрирования мнимая часть функции f постоянна, то τ вещественно. Итак, интеграл распадается на интеграл от s_1 до s_0 и на интеграл от s_0 до s_2. Соответствующими значениями переменной интегрирования τ являются τ_1, 0, τ_2. Мы получаем, таким образом, интегралы вида

$$\int_{s_0}^{s_1} e^{-lf(s)}\Phi(s)\,ds=e^{-lf(s_0)}\int_0^{\tau_1} e^{-l\tau}F(\tau)\,d\tau, \tag{51}$$

где введено обозначение

$$F(\tau)\equiv\Phi(s)\frac{ds}{d\tau}.$$

Для того чтобы интеграл сходился для положительных вещественных значений l, должно, очевидно, выполняться неравенство $\mathrm{Re}\,\tau_1>0$; в точке перевала путь интегрирования должен давать минимум для $\mathrm{Re}(f(s))$. Дальнейшие оценки сильно упрощаются, если $\tau_{1,2}$ — вещественные числа, т. е. пределы интегрирования лежат на одной из двух ветвей кривой $\mathrm{Im}(f(s))=\mathrm{Im}(f(s_0))$.

Если $\tau_1=\infty$, а функция $F(\tau)$ удовлетворяет некоторым условиям, то, по Ватсону [1]), можно вычислить интеграл следующим образом: пусть 1) для $|\tau|\leqslant a+\delta$, где $a>0$ и $\delta>0$, функция $F(\tau)$ аналитична и при $|\tau|\leqslant a$ представима в виде степенного ряда $F(\tau)=\sum_{\varkappa=1}^{\infty}a_\varkappa\tau^{\varkappa/\sigma-1}$, $\sigma>0$; 2) при $|\tau|\geqslant a$ пусть $|F(\tau)|<Ke^{b\tau}$, где K и b — независимые от τ положительные постоянные. Тогда имеет место асимптотическое разложение в смысле Пуанкаре

$$\int_0^{\infty}e^{-l\tau}F(\tau)\,d\tau\sim\sum_{\varkappa=0}^{\infty}a_\varkappa\Gamma\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right)l^{-\frac{\varkappa}{\sigma}}, \tag{52}$$

где $|l|$ — достаточно большое число и $|\arg(l)|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta$ (Δ — любое положительное число).

Доказательство этого утверждения весьма просто. Из предположений 1 и 2 вытекает, что для любого фиксированного положительного целого числа M найдется такое постоянное число K_1, что при всех $\tau\geqslant 0$ имеем

$$\left|F(\tau)-\sum_{\varkappa=1}^{M-1}a_\varkappa\tau^{\varkappa/\sigma-1}\right|\leqslant K_1\tau^{M/\sigma-1}e^{b\tau}.$$

Тогда, принимая во внимание равенство (1.34а), получаем

$$\int_0^{\infty}e^{-l\tau}F(\tau)\,d\tau=\sum_{\varkappa=1}^{M-1}a_\varkappa\int_0^{\infty}e^{-l\tau}\tau^{\varkappa/\sigma-1}\,d\tau+R_M=\sum_{\varkappa=1}^{M-1}a_\varkappa\Gamma\left(\frac{\varkappa}{\sigma}\right)l^{-\frac{\varkappa}{\sigma}}+R_M.$$

Для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_M|\leqslant\int_0^{\infty}|e^{-l\tau}|K_1\tau^{M/\sigma-1}e^{b\tau}\,d\tau=K_1\int_0^{\infty}\tau^{M/\sigma-1}e^{-(\operatorname{Re}l-b)\tau}\,d\tau.$$

Вновь используя равенство (1.34а), находим, что при $\operatorname{Re}l>b$ имеет место оценка

$$|R_M|\leqslant K_1\Gamma\left(\frac{M}{\sigma}\right)(\operatorname{Re}l-b)^{-\frac{M}{\sigma}}=O\left(e^{-\frac{M}{\sigma}}\right).$$

Условие $\operatorname{Re}l>b$ равносильно условию $|\arg l|\leqslant\frac{\pi}{2}-\Delta$ и $|l|>b\sin\Delta$.

Если функция $F(\tau)$ имеет в точке $\tau=0$ полюс, то можно, очевидно, заменить в формулах путь интегрирования путем, начинающимся и кончающимся в бесконечно удаленной точке и обходящим точку

[1]) Watson G. N., *Proc. London Math. Soc.* (2), XVII (1918), стр. 133. См. также Ватсон, стр. 262.

$=0$. Поэтому вместо равенства (52) мы получаем соотношение

$$\int_{(0)}^{\infty} F(\tau)\, e^{-l\tau}\, dt \sim \sum_{\varkappa=1}^{\infty} d_{\varkappa} \frac{\Gamma\left(a+\frac{\varkappa}{\sigma}\right)}{l^{a+\frac{\varkappa}{\sigma}}}, \tag{52a}$$

где

$$F(\tau) = \tau^{a-1} \sum_{\varkappa=1}^{\infty} d_{\varkappa} \tau^{\varkappa/\sigma}.$$

4.3.5.2. Асимптотическое разложение для ${}_2F_1(a, b; c+l; z)$. Предшествующие рассмотрения можно непосредственно применить к функции ${}_2F_1(a, b; c+l; z)$. Поскольку, однако, вычисление коэффициентов $a_{\varkappa}$ в разложении (52), как мы вскоре увидим, довольно утомительно, мы применим более простой способ, для которого, к сожалению, труднее установить границы применимости. При $|z|<1$ мы имеем

$${}_2F_1(a, b; c+l; z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(a)_{\varkappa}(b)_{\varkappa}}{(c+l)_{\varkappa}\varkappa!} z^{\varkappa} \qquad (|z|<1). \tag{53}$$

Этот ряд уже дает желаемое разложение, которое при достаточно большом $|l|$ можно оборвать после нескольких членов. Если $\mathrm{Re}(c+l-a-b)>0$, то ряд (53) сходится также и при $|z|=1$. Чтобы получить разложение, пригодное и при $|z|>1$, вернемся к интегральному представлению. Мы имеем

$${}_2F_1(a, b; c+l; z) = \frac{1}{B(a, c+l-a)} \int_{(0)}^{1} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1+l}(1-zs)^{-b}\, ds$$

$$(\mathrm{Re}(c-a+l)>0).$$

Этот интеграл имеет вид (51), где

$$\Phi(s) = s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}(1-zs)^{-b} \quad \text{и} \quad f(s) = -\ln(1-s).$$

При $s_0=0$ и

$$t = f(s) - f(s_0) = -\ln(1-s)$$

получаем [1]), в силу равенства (51),

$$\int_{(0)}^{1} s^{a-1}(1-s)^{c-a-1+l}(1-zs)^{-b}\, ds = \int_{(0)}^{\infty} F(t)\, e^{-lt}\, dt,$$

где положено $1-s=e^{-t}$ и

$$F(t) = (1-e^{-t})^{a-1} e^{-t(c-a)}(1-z+ze^{-t})^{-b}.$$

[1]) Следует заметить, что s_0 здесь не является точкой перевала. Однако оценка ведется точно так же, как и в методе перевала.

Функция $F(t)$ при достаточно малых значениях $|t|$ представима в виде степенного ряда

$$F(t)=t^{a-1}\sum_{0}^{\infty}d_{\varkappa}t^{\varkappa}\qquad(d_0=1).$$

Очевидно, что, за исключением частного случая, когда z положительно и больше 1, эта функция удовлетворяет предположениям теоремы Ватсона, и потому, согласно (52а), имеем

$${}_2F_1(a,\ b;\ c+l;\ z)\sim\frac{\Gamma(c+l)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c+l-a)}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d_{\varkappa}\frac{\Gamma(a+\varkappa)}{l^{a+\varkappa}}.$$

Вынося за скобки постоянный множитель и имея в виду, что $d_0=1$, получаем

$${}_2F_1(a,\ b;\ c+l;\ z)\sim\frac{\Gamma(c+l)}{\Gamma(c+l-a)\,l^a}\left(1+\sum_{\varkappa=1}^{\infty}\frac{d_{\varkappa}(a)_{\varkappa}}{l^{\varkappa}}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left|1-\dfrac{1}{z}\right|>1\to|\arg l|<\pi,\\[2ex]\left|1-\dfrac{1}{z}\right|<1\to\dfrac{\pi}{2}-\arg\ln\dfrac{z}{z-1}\leqslant\arg l<\dfrac{\pi}{2}-\arg\left[\ln\dfrac{z}{z-1}-2\pi i\right],\\[2ex]\qquad\qquad 0\leqslant\operatorname{Im}\ln\dfrac{z}{z-1}\leqslant 2\pi;\end{array}\right.\tag{54}$$

Равенство (54) выведено нами в предположении, что $\operatorname{Re}(s-a+l)>0$. При $|l|\to\infty$ это условие совпадает с $\operatorname{Re}l>0$. При этом путь интегрирования был проведен в плоскости t вдоль положительного луча в бесконечность. Если $\operatorname{Re}(lt)>0$, то при изображенной на рис. 20 деформации пути интегрирования часть этого пути, лежащая на дуге окружности бесконечно большого радиуса, не дает никакого взноса в интеграл. Поэтому при $\operatorname{Re}(lt)>0$ можно изменить путь интегрирования в плоскости t так, чтобы он в конечной части плоскости не проходил ни через одну особую точку подинтегральной функции. Поэтому интеграл непрерывно зависит от l (при условии $\operatorname{Re}(lt)>0$). Так как левая часть является аналитической функцией от l, то интеграл должен, как и ранее, представлять гипергеометрическую функцию. Но особыми точками функции $F(t)$ при конечных значениях $t\neq 0$ являются лишь точки, где $1-z+ze^{-t}=0$, т. е. точки t_0, для которых $e^{-t_0}=1-1/z$ или, иначе, $t_0=\ln\dfrac{z}{z-1}+2\pi i\mu$ (μ — целое число) (см. рис. 20). Вещественная часть t_0 положительна, если $|1-1/z|<1$, и отрицательна, если $|1-1/z|>1$. В этом случае путь интегрирования на плоскости t может быть направлен по любому лучу, исходящему из начала координат и идущему

в правой полуплоскости. Если $|\arg l| < \pi$, то необходимое для сходимости интеграла условие $\operatorname{Re} lt > 0$ всегда выполнено. В противном случае нужны еще условия, указанные в равенстве (54). Если $z > 1$ — вещественное число, то особая точка $1/z$ на плоскости s лежит на отрезке вещественной оси между 0 и 1. Соответственно этому особая точка на плоскости t лежит на положительном луче. Чтобы эта точка не лежала на пути интегрирования, выберем в качестве этого пути луч, образующий угол $\pm\varepsilon$ с вещественной осью.

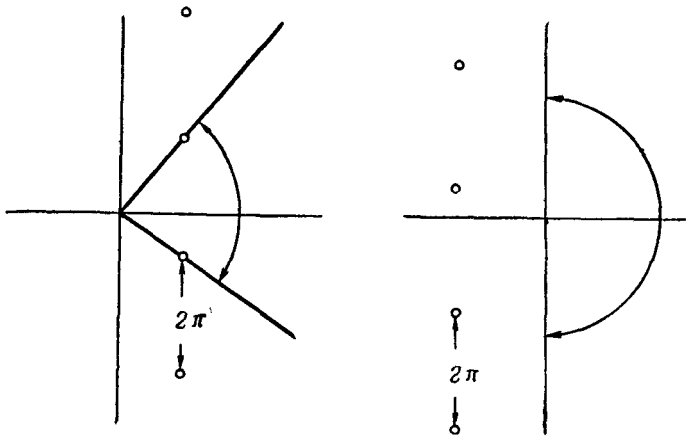


Рис. 20. Деформация пути интегрирования.

Мы получаем, таким образом, две ветви функции, если в равенстве (54) выбрать для $\operatorname{Im} \ln \frac{z}{z-1}$ соответственно значения 0 или 2π.

Мы доказали, таким образом, существование асимптотического разложения по степеням l^{-1}, коэффициенты которого при условии $\operatorname{Re} l > 0$ вычисляются для всех z одинаковым образом. С другой стороны, при $|z| < 1$ имеет место разложение (53); отсюда следует, что эта формула дает для всех z асимптотическое представление ${}_2F_1(a, b; c+l; z)$. Это означает, что в отличие от степенного ряда при фиксированном z и фиксированном числе членов всегда можно найти настолько большое l, что разность между левой и правой частью становится сколь угодно малой.

4.3.5.3. Асимптотическое разложение для ${}_2F_1(a+l, b-l; c; z)$. Будем исходить из равенства (26)

$$
{}_2F_1(b-l, a+l; c; z) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(l+1-b)\,\Gamma(c)}{2i\pi\,\Gamma(c-b+l)}\, z^{-a-l}\left[\pm e^{\mp i\pi(a-c+l)} J^{*}_{01}\left(\frac{1}{z}\right) \mp e^{\pm i\pi(a-c+l)} J_{01}\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{55}
$$

Здесь

$$J_{01}\left(\frac{1}{z}\right)=\int_0^1 s^{a-c+l}(1-s)^{c-b+l-1}\left(1-\frac{s}{z}\right)^{-a-l}ds$$

$$(\operatorname{Re} l>0),$$

а $J^*_{01}\left(\frac{1}{z}\right)$ является аналогичным интегралом, взятым вдоль пути, охватывающего особую точку z. Этот интеграл имеет вид (51), где

$$\Phi(s)=s^{a-c}(1-s)^{c-b-1}\left(1-\frac{s}{z}\right)^{-a},\quad f(s)=\ln\frac{1-\frac{s}{z}}{s(1-s)}.$$

Приравнивая нулю производную функции $f(s)$, мы получаем уравнение, из которого находим точку перевала s_0:

$$s_0^2-2zs_0+z=0 \quad \text{или} \quad s_0=z\pm\sqrt{z(z-1)}. \tag{56}$$

Чтобы различать друг от друга оба решения, договоримся считать, что $\arg z$, $\arg(z-1)$ и $\arg\sqrt{z(z-1)}$ всегда должны иметь одинаковые знаки. Это приводит к следующему. Если $\arg z>0$, то $\arg\sqrt{z(z-1)}>\arg z$ и $\arg\left(z+\sqrt{z(z-1)}\right)>\arg z$. Но произведение обоих решений равно z. Отсюда вытекает, что если $\arg z>0$, то $\arg\left(z-\sqrt{z(z-1)}\right)<0$ и $\arg\left(z+\sqrt{z(z-1)}\right)>\arg z>0$. Соответственно, если $\arg z<0$, то $\arg\left(z+\sqrt{z(z-1)}\right)<0$ и $\arg\left(z-\sqrt{z(z-1)}\right)>0$. Оба значения лежат, во всяком случае, по разные стороны вещественной оси.

Выберем путь интегрирования, определяемый равенством

$$\operatorname{Im}\left\{\ln\frac{z-s}{s(1-s)}-\ln\frac{z-s_0}{s_0(1-s_0)}\right\}=0. \tag{57}$$

В качестве переменной интегрирования возьмем

$$\tau=\ln t=\ln\frac{1-\frac{s}{z}}{s(1-s)}\,\frac{s_0(1-s_0)}{1-\frac{s_0}{z}}=\ln\left(1+\frac{(s-s_0)^2}{s(1-s)}\right). \tag{58}$$

Решая это уравнение относительно s, получаем

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{t}\left[s_0-\frac{1}{2}\pm\sqrt{(1-t)\left(\left(s_0-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{t}{4}\right)}\right]. \tag{58а}$$

В точке s_0 обе ветви кривой (57) должны пересекаться под прямым углом, так что на одном из путей τ принимает максимальное, а на другом — минимальное значение. Имеют место следующие соответ-

ствия ($s_0 = a + ib$):

$s = s_0$	0	1	z	∞	a	$\frac{1}{2} + ib$
$t = 1$	∞	∞	0	0	$1 + \frac{b^2}{a(a-1)}$	$1 + \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4} + b^2}$
$\tau = 0$	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$		

Отсюда вытекает, что точки $s = 0$ и $s = 1$ должны лежать на ветви, где τ минимально в точке s_0, а точки $s = z$ и $s = \infty$ — на ветви, где τ максимально в точке s_0. Из двух кривых, соответствующих обоим решениям s_0 (они изображены в случае $\operatorname{Im} z > 0$ на рис. 21), для нас представляет интерес лишь ветвь $0\ s_0\ 1$. Мы видим, что кривая, соответствующая выбору $s_0 = z + \sqrt{z(z-1)}$, является подходящим путем интегрирования для $J_{01}^*(1/z)$, в то время как кривая, соответствующая точке $s_0 = z - \sqrt{z(z-1)}$, отвечает интегралу $J_{01}(1/z)$. Из равенства (58а) вытекает, что асимптотическое направление совпадает с направлением луча, выходящего из нулевой точки и проходящего через точку $s_0 = -1/2$. Отсюда следует, что особым значением параметра является $s_0 = 1/2 + ib$, поскольку в этом случае асимптотическое направление параллельно мнимой оси. При этом значении s_0 равенство (57) задает кривую, распадающуюся на прямую $\bar{s} + s = 1$ (идентичную с $\operatorname{Re} s = 1/2$) и окружность $(\bar{s} - s)(b^2 - 1/4) - ib(s + \bar{s} - 2s\bar{s}) = 0$, которая проходит через точки $s = 0,\ 1,\ 1/2 + ib$ и имеет центр в точке $s = z$. Второе решение для s_0 приводит к аналогичной кривой. Оба пути интегрирования являются дугами окружностей, на которые разлагается окружность точками 0 и 1; это не имеет значения для решения. Другой особый случай возникает, если s_0 вещественно ($z > 1$ или $z < 1$). Кривая распадается на вещественную ось $s = \bar{s}$ и окружность $s\bar{s} - a^2 - 2as\bar{s} + a^2(s + \bar{s}) = 0$ с центром в точке z. Выбор пути интегрирования здесь несколько сложнее, однако и здесь возникают искомые формулы, если выбрать с помощью предельного перехода правильный путь интегрирования.

Для разложения функции $F(\tau) = \Phi(s)\frac{ds}{d\tau}$ по степеням τ сделаем в равенстве (58а) подстановку $t = e^{\tau}$ и разложим правую часть равенства при малых значениях τ в степенной ряд. Мы получим разложение вида

$$s = s_0 + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_\varkappa \tau^{\varkappa+1} \pm \sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa \tau^{\varkappa+\frac{1}{2}}.$$

Здесь, очевидно, $b_0 = \sqrt{s_0(1-s_0)}$. Знаки выбираются так, чтобы $|\arg s_0| \leqslant \pi$ и $|\arg(1-s_0)| \leqslant \pi$. Отсюда вытекает, что при $s_0 = 1/2 \pm ib$ корень положителен, причем его знак не меняется, если только

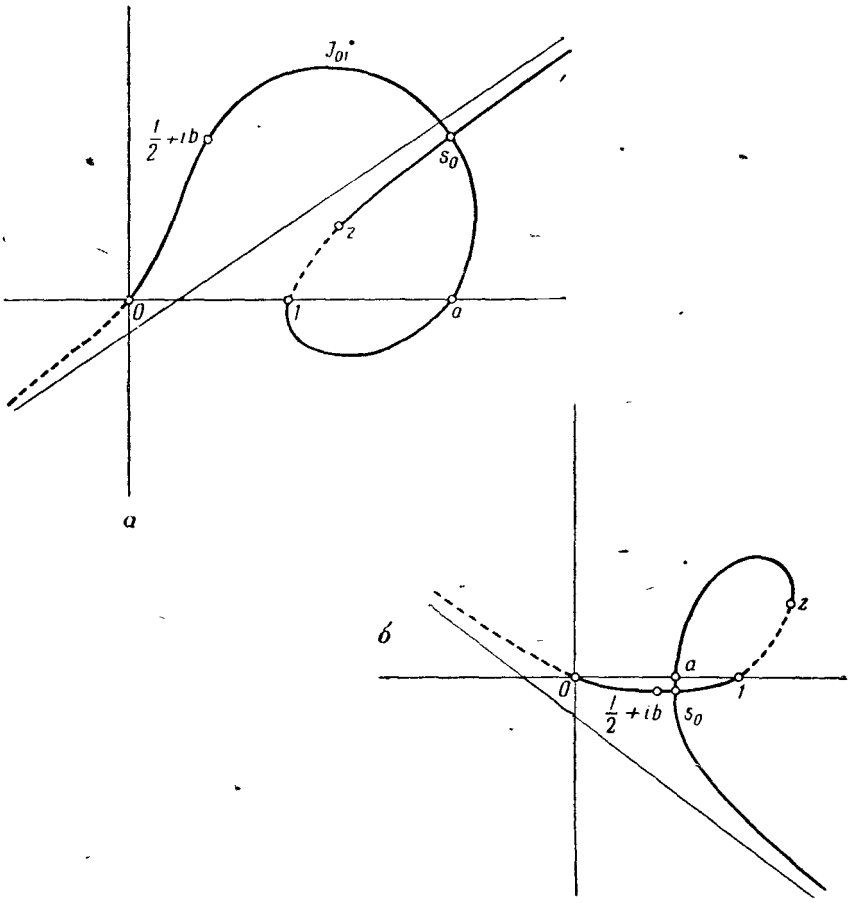


Рис. 21. Пути через перевал для асимптотического представления.

точка s_0 не пересекает вещественной оси. При этих предположениях из равенств (58) мы получаем при $\tau = \infty$ для s значение $+1$ при выборе в s_0 знака $+$ и значение 0 при выборе знака $-$. Из равенства, определяющего функцию $\Phi(s)$, получаем, что

$$F(\tau) = s^{a-c}(1-s)^{c-b-1}\left(\frac{z-s}{z}\right)^{-a}\frac{ds}{d\tau} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa \tau^\varkappa + C\sum_{\varkappa=0}^{\infty} d_\varkappa \tau^{\varkappa-1/2}.$$

Вынося за скобки множитель C, можно сделать коэффициент d_0 равным 1. Для этого надо, как это вытекает из равенства (56), положить

$$C=\frac{1}{2}s_0^{a-c+\frac{1}{2}}(1-s_0)^{c-b-\frac{1}{2}}\left(\frac{z-s_0}{z}\right)^{-a}=\frac{1}{2}s_0^{2a-c+\frac{1}{2}}(1-s_0)^{c-a-b-\frac{1}{2}}. \tag{59}$$

Пути интегрирования $0\ s_0\ 1$ на плоскости s соответствует на плоскости τ путь ∞, 0, ∞ вдоль положительного луча со следующим выбором знаков:

$$\int_0^1 \Phi(s)\,e^{-lf(s)}\,ds = e^{-lf(s_0)}\left\{\int_\infty^0 e^{-l\tau}\left[\sum_{x=0}^{\infty}c_x\tau^x - C\sum_{x=0}^{\infty}d_x\tau^{x-1/2}\right]d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty e^{-l\tau}\left[\sum_{x=0}^{\infty}c_x\tau^x + C\sum_{x=0}^{\infty}d_x\tau^{x-1/2}\right]d\tau\right\}.$$

Отсюда вытекает

$$\int_0^1 \Phi(s)\,e^{-lf(s)}\,ds = e^{-lf(s_0)}\,2C\int_0^\infty\sum_{x=0}^{\infty}d_x\tau^{x-1/2}e^{-l\tau}\,d\tau. \tag{60}$$

Для вычисления коэффициентов d_x используем тот факт, что Cd_x равно коэффициенту при τ^{-1} для функции $F(\tau)\tau^{-\gamma-\frac{1}{2}}$, т. е. равно вычету этой функции. Так как эта функция разлагается по степеням $\tau^{1/2}$, то, чтобы получить замкнутый путь на римановой поверхности, нужно дважды обойти точку ветвления $\tau=0$. Мы имеем

$$Cd_x=\frac{z^a}{4i\pi}\oint^{(0+,0+)} s^{a-c}(1-s)^{c-b-1}(z-s)^{-a}\frac{ds}{d\tau}\tau^{-x-1/2}\,d\tau.$$

Перейдем к переменной интегрирования s; тогда, в силу

$$s-s_0=\pm b_0\tau^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

мы получаем один обход вокруг точки s_0

$$Cd_x=\frac{z^a}{4i\pi}\oint^{(s_0+)} s^{a-c}(1-s)^{c-b-1}(z-s)^{-a}\tau^{-x-\frac{1}{2}}\,ds$$

Таким образом, $2Cd_xz^{-a}$ является коэффициентом при $(s-s_0)^{-1}$ в разложении подинтегральной функции по степеням $s-s_0$, или, что то же

самое, коэффициентом при $(s-s_0)^{2\varkappa}$ в разложении $\left\{s^{a-c}(1-s)^{c-b-1}\times\right.$ $\left.\times(z-s)^{-a}(s-s_0)^{2\varkappa+1}\tau^{-\varkappa-\frac{1}{2}}\right\}$. Введем для краткости обозначение $S\equiv s-s_0$. После простых преобразований получаем, что $d_\varkappa$ равно коэффициенту при $S^{2\varkappa}$ в разложении

$$\left(1+\frac{S}{s_0}\right)^{a-c}\left(1-\frac{S}{1-s_0}\right)^{c-b-1}\left(1-\frac{S}{z-s_0}\right)^{-a}\times$$

$$\times\left[\frac{s_0(1-s_0)}{S^2}\ln\left(1+\frac{S^2}{s_0(1-s_0)\left(1+\frac{S}{s_0}\right)\left(1-\frac{S}{1-s_0}\right)}\right)\right]^{-\varkappa-\frac{1}{2}},$$

умноженному на $s_0^{\varkappa}(1-s_0)^{\varkappa}$. Вычисление показывает, как и должно быть, что $d_0=1$ и

$$d_1=\frac{L+Ms_0+Ns_0^2}{2s_0(1-s_0)}, \tag{61а}$$

где

$$L=\left(c-\frac{1}{2}\right)\left(c-\frac{3}{2}\right),$$

$$M=-2(a+b-1)\left(c-\frac{3}{2}\right)-2a+\frac{3}{2}, \tag{61б}$$

$$N=(a+b-1)^2+a-b-\frac{1}{2}.$$

Функция $F(\tau)$ удовлетворяет предположениям теоремы Ватсона. Поэтому, замечая, что $f(s_0)\doteq\ln s_0^{-2}$, и полагая

$$s_0=z+\sqrt{z(z-1)}\quad\text{и}\quad s_0'=z-\sqrt{z(z-1)}, \tag{62}$$

мы получаем, что

$$J_{01}^*\left(\frac{1}{z}\right)\sim s_0^{2l}2C\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d_\varkappa\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{l^{\varkappa+\frac{1}{2}}}$$

и

$$J_{01}\left(\frac{1}{z}\right)\sim s_0'^{2l}2C'\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d_\varkappa'\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{l^{\varkappa+\frac{1}{2}}}.$$

Из равенства (59) и $s_0^2=z(2s_0-1)$, $s_0'^2=z(2s_0'-1)$ получаем

$$J_{01}^*\left(\frac{1}{z}\right)\sim z^{a+l}(2s_0-1)^{a+l}s_0^{\frac{1}{2}-c}(1-s_0)^{c-a-b-\frac{1}{2}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d_\varkappa\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{l^{\varkappa+\frac{1}{2}}}.$$

Принимая во внимание, что $(2s_0-1)(2s_0'-1)=1$, имеем

$$J_{01}\left(\frac{1}{z}\right)\sim z^{a+l}(2s_0-1)^{b-l}s_0^{\frac{1}{2}-c}(s_0-1)^{c-a-b-\frac{1}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}d_x'\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{l^{x+\frac{1}{2}}}.$$

Подставим полученный результат в равенство (55). Тогда, имея в виду, что $s_0-1=e^{\pm i\pi}(1-s_0)$ и $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, находим

$${}_2F_1(b-l,\ a+l;\ c;\ z)\approx\frac{\Gamma(1+l-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b+l)2\sqrt{\pi l}}s_0^{\frac{1}{2}-c}(1-s_0)^{c-a-b-1/2}\times$$

$$\times\left\{e^{\pm i\pi\left(c-\frac{1}{2}\right)}(1-2s_0)^{a+l}\sum_{x=0}^{\infty}d_x\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x}+(1-2s_0)^{b-l}\sum_{x=0}^{\infty}d_x'\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x}\right\}$$

$$(\operatorname{Re}l>0,\ \operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(63)$$

Входящие в это равенство коэффициенты определяются условиями (61) и (62). Равенство для $J_{01}(1/z)$ имеет самостоятельное значение, так как $J_{01}(1/z)$ также является гипергеометрической функцией. Это равенство означает, что

$${}_2F_1\left(a-c+l+1,\ a+l;\ a-b+2l+1;\ \frac{1}{z}\right)\sim\frac{\Gamma(a-b+1+2l)\sqrt{\frac{\pi}{l}}}{\Gamma(a-c+1+l)\Gamma(c-b+l)}\times$$

$$\times z^{a+l}(2s_0-1)^{b-l}s_0^{\frac{1}{2}-c}(s_0-1)^{c-b-a-\frac{1}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}d_x'\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x}$$

$$(\operatorname{Re}l>0).\qquad(64)$$

Относительно справедливости разложений следует заметить, что интеграл только тогда может рассматриваться как собственный интеграл, взятый от 0 до 1, когда $\operatorname{Re}l>0$. Условие $\operatorname{Re}l>0$ не является ограничением для возможности асимптотического представления функции ${}_2F_1(a+l,\ b-l;\ c;\ z)$, поскольку его выполнения всегда можно добиться, переставляя в утверждении a и b. Иначе обстоит дело для равенства (64); здесь рассмотрения, аналогичные проведенным в п. 4.3.5.2, показывают, что соответствующее ограничение может быть заменено следующим:

$$|\arg l|\leqslant\frac{\pi}{2}+\arg\ln\left(1-\frac{1}{z^2}\right).$$

Небольшое осложнение возникает, если z — вещественное положительное число. В этом случае особая точка $s=1/z$, соответственно $s=z$, лежит на пути интегрирования и ее надо обойти либо в верхней, либо в нижней полуплоскости. Иными словами, надо добавить

к z либо $i\varepsilon$, либо $-i\varepsilon$, где $\varepsilon \to +0$. При этом следует различать три случая.

1. $z < 0$. В этом случае s_0 при переходе через вещественную ось имеет разрыв, делая скачок от $|s_0| e^{i\pi}$ до $|s_0| e^{-i\pi}$. Поскольку в этом случае $|s_0| = -s_0$, то равенство (63) принимает вид

$$
{}_2F_1(a+l,\ b-l;\ c;\ z) \sim \frac{\Gamma(1+l-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-b+l)\,2\sqrt{\pi l}}(-s_0)^{\frac{1}{2}-c}(1-s_0)^{c-a-b-\frac{1}{2}} \times
$$

$$
\times \left\{ (1-2s_0)^{a+l} \sum_{x=0}^{\infty} d_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x} + e^{\mp i\pi\left(c-\frac{1}{2}\right)} (1-2s_0)^{b-l} \sum_{x=0}^{\infty} d'_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x} \right\}. \tag{63а}
$$

Так как $1-2s_0 > 1$ и $\operatorname{Re} l > 0$, то, в силу наличия множителя $(1-2s_0)^{b-l}$, второй член будет исчезающе мал по сравнению с первым. На оси мы получаем для функции одно и то же значение, независимо от того, подходим ли мы к ней из верхней или нижней полуплоскости.

2. $z > 1$. В этом случае s_0 меняется непрерывно, но $(1-s_0)$ имеет разрыв; мы пишем поэтому $1-s_0 = e^{\mp i\pi}(s_0-1)$ и $1-2s_0 = e^{\mp i\pi}(2s_0-1)$ и получаем

$$
{}_2F_1(a+l,\ b-l;\ c;\ z) \sim \frac{\Gamma(1+l-b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c-b+l)\,2\sqrt{\pi l}}\, s_0^{\frac{1}{2}-c}\,(s_0-1)^{c-a-b-\frac{1}{2}} \times
$$

$$
\times \left\{ e^{\mp i\pi(b-l)} (2s_0-1)^{a+l} \sum_{x=0}^{\infty} d_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x} + \right.
$$

$$
\left. + e^{\mp i\pi\left(c-a-l-\frac{1}{2}\right)} (2s_0-1)^{b-l} \sum_{x=0}^{\infty} d_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x} \right\}. \tag{63б}
$$

Здесь также можно отбросить второе слагаемое, однако первое слагаемое будет разрывным при переходе через вещественную ось, ввиду наличия множителя $e^{\pm i\pi(b-l)}$. Поэтому луч $1 \leqslant z < \infty$ является разрезом для гипергеометрической функции.

3. Если $0 < z < 1$, то s_0, $1-s_0$ и $1-2s_0$ разрывны. В этом случае необходимо провести разрез, как и в случае 2.

Заменим в наших разложениях аргумент z на $(1-z)/2$. Тогда имеем $s_0 = \dfrac{1-z-\sqrt{z^2-1}}{2}$. Положим

$$
t_0 = z + \sqrt{z^2-1}. \tag{65а}
$$

Тогда

$$
s_0 = \frac{1-t_0}{2}, \quad 1-s_0 = \frac{1+t_0}{2}, \quad 1-2s_0 = t_0,
$$

и потому равенство (63) принимает вид

$$
{}_2F_1\left(a+l, b-l; c; \frac{1-z}{2}\right) \sim \frac{\Gamma(1+l-b)\,\Gamma(c)\,2^{a+b}}{\Gamma(c-b+l)\,2\sqrt{\pi l}}(1-t_0)^{\frac{1}{2}-c}(1+t_0)^{c-a-b-\frac{1}{2}} \times
$$

$$
\times\left\{e^{\mp i\pi\left(c-\frac{1}{2}\right)} t_0^{a+l}\sum_{x=0}^{\infty} d_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x} + t_0^{b-l}\sum_{x=0}^{\infty} d'_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x}\right\}
$$

$$
(\operatorname{Re} l > 0,\ \operatorname{Im} z \gtrless 0). \tag{65б}
$$

Соответственно имеем

$$
{}_2F_1\left(a+l,\ a-c+l+1;\ a-b+2l+1;\ \frac{2}{1-z}\right) \sim
$$

$$
\sim\left(\frac{z-1}{2}\right)^{a+l} 2^{a+b}\,\frac{\Gamma(a-b+2l+1)\sqrt{\pi/l}}{\Gamma(a-c+l+1)\,\Gamma(c-b+l)} \times
$$

$$
\times t_0^{b-l}(t_0-1)^{\frac{1}{2}-c}(t_0+1)^{c-a-b-\frac{1}{2}}\sum_{x=0}^{\infty} d'_x \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{l^x}
$$

$$
(\operatorname{Re} l > 0). \tag{65в}
$$

Введем величину t_0 и в равенства (61а) и (61б). Мы получим тогда

$$
d_0 = 1 \quad d_1 = \frac{L^* + M^* t_0 + N^* t_0^2}{2\left(1-t_0^2\right)},
$$

$$
L^* = (a+b-2c+1)^2 - a + b - \frac{1}{2},
$$

$$
M^* = -2(a+b-1)(a+b-2c+1),
$$

$$
N^* = (a+b-1)^2 + a - b - \frac{1}{2}. \tag{65г}
$$

Так как $t'_0 = z - \sqrt{z^2-1} = 1/t_0$, то отсюда следует

$$
d'_1 = \frac{L^* t_0^2 + M^* t_0 + N^*}{2\left(t_0^2-1\right)}. \tag{65д}
$$

Наконец, отметим соотношения

$$
\frac{t_0-1}{t_0+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad t_0^2 - 1 = 2t_0\sqrt{z^2-1}, \tag{65е}
$$

которые позволяют упростить выполнение подстановки.

С помощью выражений (54) и (63) и равенства (19) можно дать асимптотические разложения девяти из семнадцати существенно различных случаев. С помощью двух следующих интегралов можно получить разложения и для остальных восьми функций.

4.4. Ортогонализация гипергеометрической функции. Пусть $u_\nu(x)$ — зависящее от целого параметра ν семейство функций, заданных в области $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Оно называется ортогональной системой функций, относительно веса $\rho(x)$, если интеграл $\int_{x_1}^{x_2} u_\nu(x)\, u_\mu(x)\, \rho(x)\, dx$, распространенный по отрезку $[x_1, x_2]$, равен нулю при $\nu \neq \mu$ [1]). Сейчас мы рассмотрим ортогональные системы, которые могут быть получены с помощью гипергеометрической функции.

4.4.1. Многочлены Якоби. Дифференциальное уравнение Гаусса (2) допускает простое преобразование. Пусть a и b — два любых комплексных числа. Тогда для любой функции $u(z)$ мы имеем

$$\frac{d}{dz}\left(z^{a+1}(1-z)^{b+1}u'(z)\right) =$$

$$= z^a(1-z)^b[z(1-z)u''(z) + (a+1-(a+b+2)z)u'(z)].$$

Сравнивая это выражение с дифференциальным уравнением Гаусса (2), получаем следующий результат: если

$$u_k(z) = {}_2F_1(k,\ a+b+1-k;\ a+1;\ z) \tag{66}$$

и

$$C_k = k(a+b+1-k),$$

то

$$\frac{d}{dz}\left(z^{a+1}(1-z)^{b+1}u_k'\right) = C_k z^a (1-z)^b u_k. \tag{66a}$$

Здесь при фиксированных a и b величина k может быть выбрана произвольным образом. Интегрируя

$$\int_0^1 \left[u_{k_1} \frac{d}{dz}\left(z^{a+1}(1-z)^{b+1}u_{k_2}'\right) - u_{k_2}\frac{d}{dz}\left(z^{a+1}(1-z)^{b+1}u_{k_1}'\right)\right] dz,$$

мы получаем

$$(C_{k_2} - C_{k_1}) \int_0^1 z^a (1-z)^b u_{k_1} u_{k_2}\, dz = z^{a+1}(1-z)^{b+1}\left(u_{k_1}u_{k_2}' - u_{k_2}u_{k_1}'\right)\Big|_0^1.$$

Из равенств (21а) и (12) вытекает, что правая часть рассматриваемого равенства при произвольном k обращается в нуль лишь если $\operatorname{Re}(a+1) > 0$ и $1 > \operatorname{Re}(b+1) > 0$. Если же k — отрицательное целое число, то гипергеометрический ряд, через который выражается $u_{-\nu}(z)$, обры-

[1]) См., например, Курант—Гильберт, т. I, гл. II, § 1, п. 1, или Натансон И. П., ч. II, гл. II, § 1.

вается, $u_{-\nu}(1)$ принимает конечное значение и правая часть обращается в нуль при $\operatorname{Re}(a+1)>0$ и $\operatorname{Re}(b+1)>0$. Таким образом,

$$\int_0^1 z^a(1-z)^b u_{-\nu}u_{-\mu}\,dz=0 \tag{67}$$

($\nu\neq\mu$ — положительное целое, $\operatorname{Re}(a+1)>0$, $\operatorname{Re}(b+1)>0$). Итак, мы *ортогонализовали гипергеометрическую функцию на отрезке* $[0, 1]$ *с помощью веса* $z^a(1-z)^b$. Таким образом, для любых фиксированных a и b, вещественная часть которых больше -1, мы получили семейство ортогональных гипергеометрических функций $u_{-\nu}$, зависящих от одного целого неотрицательного параметра. Они называются *многочленами Якоби*. Определим их равенством $Q_\nu(a, b; z)\equiv {}_2F_1(-\nu, \nu+a+b+1; a+1; z)$ ($\nu>0$ — целое) или, заменяя a на $c-1$, b на $a-c$, равенством

$$\mathfrak{F}_\nu(a, c; z)={}_2F_1(-\nu, a+\nu; c; z)\ (\nu\text{ — целое}). \tag{68}$$

Имеет место следующее соотношение ортогональности

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\mu\mathfrak{F}_\nu\,dz=0, \tag{68a}$$

$$(\mu\neq\nu,\ \operatorname{Re}c>0,\ \operatorname{Re}(a-c+1)>0).$$

Для вычисления нормы ($\mu=\nu$) заметим, что если значение $C_{-\nu}$ выбрано согласно равенству (66), то соотношение (66а) принимает вид

$$\frac{d}{dz}\left[z^c(1-z)^{a-c+1}\mathfrak{F}'_\nu(a, c; z)\right]=$$

$$=-\nu(a+\nu)z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu(a, c; z). \tag{69}$$

Далее, из равенств (35) и (68) непосредственно следует, что

$$\frac{d\mathfrak{F}_\nu(a, c; z)}{dz}=-\frac{\nu(a+\nu)}{c}\mathfrak{F}_{\nu-1}(a+2, c+1; z). \tag{70}$$

Отсюда, в силу равенства (69), вытекает

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu^2(a, c; z)\,dz=$$

$$=-\frac{1}{\nu(a+\nu)}\int_0^1 \mathfrak{F}_\nu(a, c; z)\frac{d}{dz}\left[z^c(1-z)^{a-c+1}\mathfrak{F}'_\nu(a, c; z)\,dz\right].$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\,\mathfrak{F}_\nu^2(a,\ c;\ z)\,dz =$$

$$= -\frac{z^c(1-z)^{a-c+1}}{\nu(a+\nu)}\,\mathfrak{F}_\nu(a,\ c;\ z)\,\mathfrak{F}_\nu'(a, c; z)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{\nu(a+\nu)}\int_0^1 z^c(1-z)^{a-c+1}\mathfrak{F}_\nu'^2(a,\ c;\ z)\,dz.$$

Если $\operatorname{Re} c > 0$ и $\operatorname{Re}(a-c+1) > 0$, то проинтегрированный член обращается в нуль. Поэтому, принимая во внимание равенство (70), мы приходим к рекуррентной формуле

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu^2(a,\ c;\ z)\,dz =$$

$$= \frac{\nu(a+\nu)}{c^2}\int_0^1 z^c(1-z)^{a-c+1}\mathfrak{F}_{\nu-1}^2(a+2,\ c+1; z)\,dz.$$

Так как

$$\mathfrak{F}_0(a,\ c;\ z) = 1,$$

то мы получаем

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu^2(a,\ c;\ z)\,dz =$$

$$= \frac{\nu(a+\nu)(\nu-1)(a+\nu+1)\ldots 1\cdot(a+\nu+\nu-1)}{c^2(c+1)^2\ldots(c+\nu-1)^2}\int_0^1 z^{c+\nu-1}(1-z)^{a-c+\nu}dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, выражается через B-функцию. Поэтому, в силу равенств (1.16) и (1.39), имеем

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu^2(a,\ c;\ z)\,dz =$$

$$= \frac{\nu!\,(a+\nu)_\nu}{(c)_\nu(c)_\nu}\,B(c+\nu,\ a-c+\nu+1) =$$

$$= \frac{\nu!\,(a+\nu)_\nu\,\Gamma(c+\nu)\,\Gamma(a-c+\nu+1)}{(c)_\nu(c)_\nu\,\Gamma(a+2\nu+1)}. \qquad (71)$$

Простое вычисление с помощью равенства (1.36а) приводит к выводу, что [1])

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu^2(a,\ c;\ z)\,dz = \frac{\nu!\,\Gamma(c)\,\Gamma(a-c+\nu+1)}{(a+2\nu)\,(c)_\nu\,\Gamma(a+\nu)}$$

$$(\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re}(a-c+1) > 0). \qquad (72)$$

Подставим в равенство (69) вместо $\mathfrak{F}_\nu'(a,\ c;\ z)$ выражение, вытекающее из равенства (70). Мы получим тогда рекуррентную формулу

$$z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu(a,\ c;\ z) = \\ = \frac{1}{c}\frac{d}{dz}\left[z^c(1-z)^{a-c+1}\mathfrak{F}_{\nu-1}(a+2,\ c+1;\ z)\right], \qquad (73а)$$

откуда ν-кратным применением этой формулы находим

$$z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu(a,\ c;\ z) = \frac{1}{(c)_\nu}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left[z^{c+\nu-1}(1-z)^{a-c+\nu}\right]. \qquad (73б)$$

Это равенство можно использовать для определения многочленов Якоби.

4.4.1.0. Нули многочлена Якоби. Относительно нулей многочленов Якоби легко доказать следующие утверждения.

1. *Все нули являются простыми.* Если бы z_0 было кратным нулем, то должно было бы обращаться в нуль не только $\mathfrak{F}_\nu(z_0)$, но и $\mathfrak{F}_\nu'(z_0)$. Из дифференциального уравнения Гаусса вытекало бы тогда обращение в нуль $\mathfrak{F}_\nu''(z_0)$. После этого с помощью дифференцирования уравнения Гаусса мы убедились бы, что и *все* производные высшего порядка обращаются в нуль в точке z_0. Из формулы Тейлора тогда следовало бы, что $\mathfrak{F}_\nu(z) \equiv 0$.

2. *Если параметры a и c вещественны, то все ν нулей функции $\mathfrak{F}_\nu(a,\ c;\ z)$ вещественны и лежат между* 0 *и* 1. Для доказательства заметим сначала следующее: в силу равенства (69) и теоремы Ролля, между двумя нулями функции $z^c(1-z)^{a-1-c}\mathfrak{F}_\nu'(z)$ лежит по крайней мере один нуль функции $z^{c-1}(1-z)^{a-c}\mathfrak{F}_\nu(z)$. Поэтому между точками 0 или 1 и одним из нулей функции $\mathfrak{F}_\nu'(z)$, между двумя нулями функции $\mathfrak{F}_\nu'(z)$ и между 0 и 1 лежит по крайней мере по одному нулю функции $\mathfrak{F}_\nu(z)$. Так как, с другой стороны, согласно

[1]) Jacobi C. G. J., Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, *Journal f. reine u. angew. Mathematik*, 56 (1859), 149—175.

теореме Ролля, между двумя нулями функции $\mathfrak{F}_\nu(z)$ лежит по крайней мере один нуль функции $\mathfrak{F}'_\nu(z)$, то между двумя соседними нулями функции $\mathfrak{F}_\nu(z)$ лежит в точности один нуль $\mathfrak{F}'_\nu(z)$. То же самое имеет место для точек 0 и 1 и ближайшего нуля функции $\mathfrak{F}'_\nu(z)$. Так как, в силу равенства (70), функция $\mathfrak{F}'_1(a, c; z) = -\frac{a+1}{c}\mathfrak{F}_0(a+2, c+1; z) = -\frac{a+1}{c}$ не имеет нулей, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{F}_1(z)$ имеет в точности один нуль между 0 и 1. Снова, применяя равенство (70), мы убеждаемся, что $\mathfrak{F}'_2(z)$ имеет в точности один нуль между 0 и 1 и, в силу доказанного выше, $\mathfrak{F}_2(z)$ имеет два нуля между 0 и 1, лежащие соответственно между нулем $\mathfrak{F}'_2(z)$ и точками 0 и 1. С помощью метода математической индукции мы легко доказываем наше утверждение.

Многочлены Якоби встречаются в разложении гипергеометрической функции Гаусса в непрерывную дробь [1]).

4.4.2. Многочлены Лежандра. Преобразуем основную область в отрезок $[-1, +1]$ вещественной оси с помощью подстановки $x = (1 - x')/2$, $1 - x = (1 + x')/2$. Далее, сделаем точки $x' = 1$ $x' = -1$ равноправными, положив $a = b = m$, т. е. выбрав вес $(1 - x'^2)^m$. Тогда равенство (67) примет вид

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^m u_{-\nu'} u_{-\nu''} dx = 0.$$

В силу равенства (66), имеем

$$u_{-\nu'}(x) = {}_2F_1\left(-\nu', \nu' + 1 + 2m; m + 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Подставляя, в частности, $m = 0$, получаем *многочлены Лежандра*

$$P_\nu(x) \equiv {}_2F_1\left(-\nu, -\nu + 1; 1; \frac{1-x}{2}\right) \quad (\nu\text{— целое}). \tag{74}$$

Они являются многочленами степени ν, удовлетворяющими соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(x) P_\lambda(x) dx = 0 \qquad (\nu \neq \lambda\text{ — целое}). \tag{75}$$

---

[1]) Jacobi C. G. J., Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe, *Journal f. reine u. angew. Mathematik*, 56 (1859), 149—175.

Из равенства (74) следует, что

$$P_\nu(1)=1. \tag{75а}$$

Введем $\nu=\nu'+m$. Тогда мы получим, что при целочисленном $m=\mu\geqslant 0$ многочлены степени $\nu-\mu$

$$p_{\nu,\mu}(x)=c_{\nu,\mu 2}F_1\left(\mu-\nu,\ \nu+\mu+1;\ \mu+1;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (\nu\geqslant\mu)$$

удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^\mu\, p_{\nu,\mu}(x)\, p_{\lambda,\mu}(x)\, dx=0 \qquad (\nu\neq\lambda).$$

Присоединяя вес к функции, мы получаем *присоединенные многочлены Лежандра*, определяемые равенством

$$P_\nu^\mu(x)\equiv(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\, p_{\nu,\mu}=$$

$$=(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\, c_{\nu,\mu 2}F_1\left(\mu-\nu,\ \nu+\mu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (\nu\geqslant\mu) \tag{76}$$

и обладающие свойством ортогональности

$$\int_{-1}^{+1}P_\nu^\mu P_\lambda^\mu\, dx=0 \qquad (\nu\neq\lambda). \tag{76а}$$

В силу равенства (35), имеем

$$\frac{dp_{\nu,\mu}(x)}{dx}=\frac{(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)}{2(\mu+1)}\,\frac{c_{\nu,\mu}}{c_{\nu,\mu+1}}\,p_{\nu,\mu+1}(x).$$

Полагая

$$c_{\nu,\mu}=\frac{(\nu+1)_\mu(\nu-\mu+1)_\mu}{2^\mu\mu!}, \tag{76б}$$

приведем это равенство к простому виду:

$$\frac{dp_{\nu,\mu}(x)}{dx}=p_{\nu,\mu}(x).$$

Кроме того, мы получаем, что

$$p_{\nu,\mu}(x)=\frac{d^\mu}{dx^\mu}P_\nu(x), \tag{77а}$$

а потому

$$P_\nu^\mu(x)=(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}\,\frac{d^\mu}{dx^\mu}P_\nu(x). \tag{77б}$$

Многочлены Лежандра, как *сферические функции*, играют важную роль в приложениях. Мы изучим их подробно в следующем параграфе.

4.5. Обобщенные гипергеометрические функции

4.5.1. Обобщение на случай одного переменного. Гипергеометрическая функция Гаусса может быть обобщена различными способами. Простейший из них заключается в том, что мы исходим из ряда (12) и полагаем

$$ {}_{\nu}F_{\mu}(a_1, a_2, \ldots, a_{\nu}; c_1, c_2, \ldots, c_{\mu}; z) = $$

$$ = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\varkappa}(a_2)_{\varkappa}\ldots(a_{\nu})_{\varkappa}}{(1)_{\varkappa}(c_1)_{\varkappa}(c_2)_{\varkappa}\ldots(c_{\mu})_{\varkappa}} z^{\varkappa}. \qquad (78) $$

Если одно из чисел c_{λ} является целым отрицательным или нулем, то, начиная с некоторого места, знаменатель обращается в нуль и ряд расходится. Если же одно из чисел a_{λ} является целым отрицательным или нулем, то ряд обрывается. Исключая эти особые случаи, мы имеем следующий результат.

Если $\mu = \nu - 1$, то ряд абсолютно сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Если, кроме того, $\operatorname{Re}\left(\sum_{\lambda=1}^{\nu} a_{\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_{\lambda}\right) < 0$, то ряд сходится и при $|z| = 1$.

Если $\mu < \nu - 1$, то ряд расходится для всех z.

Если $\mu > \nu - 1$, то ряд мажорируется рядом для показательной функции и потому сходится для всех z.

Простым примером является ряд вида

$$ {}_0F_1(p; z) = 1 + \frac{z}{1!p} + \frac{z^2}{2!p(p+1)} + \ldots = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p)z^{\varkappa}}{\varkappa!\Gamma(p+\varkappa)}. \qquad (79a) $$

На основании представления Ганкеля для Г-функции [равенство (1.43а)]

$$ \frac{1}{\Gamma(p+\varkappa)} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{-\infty}^{(0+)} t^{-(p+\varkappa)} e^t \, dt, $$

мы имеем

$$ \frac{1}{\Gamma(p)} {}_0F_1(p; z) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa!} \frac{1}{2i\pi} \oint_{-\infty}^{(0+)} t^{-(p+\varkappa)} e^t \, dt = $$

$$ = \frac{1}{2i\pi} \oint_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-p} \, dt \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa! t^{\varkappa}}. $$

Заменяя $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{z^x}{x!\, t^x}$ на $e^{z/t}$, получаем отсюда

$$ {}_0F_1(p;\ z) = \frac{\Gamma(p)}{2i\pi} \oint_{-\infty}^{(0+)} t^{-p} e^{t+\frac{z}{t}}\, dt. \qquad (79б) $$

4.5.2. Обобщение Аппеля для двух переменных. Аппель обобщил понятие гипергеометрического ряда на случай двух переменных с помощью равенств

$$ F_1(a;\ b,\ b';\ c;\ x,\ y) \equiv \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\mu+\nu}\,(b)_\mu\,(b')_\nu}{(c)_{\mu+\nu}\,(1)_\mu\,(1)_\nu}\, x^\mu y^\nu, $$

$$ F_2(a;\ b,\ b';\ c,\ c';\ x,\ y) \equiv \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\mu+\nu}\,(b)_\mu\,(b')_\nu}{(c)_\mu\,(c')_\nu\,(1)_\mu\,(1)_\nu}\, x^\mu y^\nu, $$

$$ F_3(a,\ a';\ b,\ b';\ c;\ x,\ y) \equiv \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_\mu\,(a')_\nu\,(b)_\mu\,(b')_\nu}{(c)_{\mu+\nu}\,(1)_\mu\,(1)_\nu}\, x^\mu y^\nu, $$

$$ F_4(a;\ b;\ c,\ c';\ x,\ y) \equiv \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{\mu+\nu}\,(b)_{\mu+\nu}}{(c)_\mu\,(c')_\nu\,(1)_\mu\,(1)_\nu}\, x^\mu y^\nu. $$

Эти ряды допускают аналитическое продолжение, например имеем

$$ \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b')\,\Gamma(c-b-b')}{\Gamma(c)} F_1(a;\ b,\ b';\ c;\ x,\ y) = $$

$$ = \int_0^1 \int_0^1 u^{b-1} v^{b'-1} (1-u-v)^{c-b-b'-1} (1-ux-vy)^{-a}\, du\, dv. \qquad (80а) $$

Э. Пикар показал, что

$$ \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F_1(a;\ b,\ b';\ x,\ y) = $$

$$ = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-a-1} (1-ux)^{-b} (1-uy)^{-b'}\, du. \qquad (80б) $$

Каждая из этих четырех функций удовлетворяет системе двух дифференциальных уравнений в частных производных. Приведем уравнение для функции F_1:

$$ x(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + $$

$$ + (c-(a+b+1)x)\frac{\partial u}{\partial x} - by\frac{\partial u}{\partial y} - abu = 0, $$

$$ y(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x(1-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + $$

$$ + (c-(a+b'+1)y)\frac{\partial u}{\partial y} - b'x\frac{\partial u}{\partial x} - ab'u = 0. $$

Относительно дальнейших свойств этих функций мы отсылаем читателя к подробной книге Аппеля и Кампе де Ферье, указанной в списке литературы.

4.5.3. Обобщение Лауричеллы для n переменных. Лауричелла [1]) обобщил функции Аппеля на случай n переменных. Например, имеет место равенство

$$F_D(a;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\nu;\ c;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu) \equiv$$
$$\equiv \sum \frac{(a)_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu}\,(b_1)_{\mu_1}\,(b_2)_{\mu_2}\ldots(b_\nu)_{\mu_\nu}}{(c)_{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_\nu}\,(1)_{\mu_1}\,(1)_{\mu_2}\,(1)_{\mu_\nu}}\, x_1^{\mu_1}\ldots x_\nu^{\mu_\nu}$$

с аналитическим продолжением

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b_1)\,\Gamma(b_2)\ldots\Gamma(b_\nu)\,\Gamma(c-b_1-b_2-\ldots-b_\nu)} \times$$
$$\times \int_0^1 \ldots \int_0^1 u_1^{b_1-1}\ldots u_\nu^{b_\nu-1}\,(1-u_1-\ldots-u_\nu)^{c-b_1-\ldots-b_\nu-1} \times$$
$$\times (1-u_1x_1-\ldots-u_\nu x_\nu)^{-a}\,du_1\ldots du_\nu$$

или

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-ux_1)^{-b_1}\ldots(1-ux_\nu)^{-b_\nu}\,du.$$

И здесь относительно подробностей мы отсылаем читателя либо к книге Аппеля и Кампе де Ферье, либо к работе Лауричеллы.

---

[1]) Lauricella G., Sulle funzioni ipergeometriche à piu variabili, *Rendiconti Circ. math. Palermo*, 7 (1893), 111—158.

§ 5

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1. Уравнение Лежандра. Гипергеометрические функции Гаусса можно ортогонализовать на отрезке $[-1, +1]$. Это приводит к функциям

$$P_\nu^\mu(x) = (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} p_{\nu,\mu}(x) =$$
$$= (1-x^2)^{\frac{\mu}{2}} c_{\nu,\mu} 2F_1\left(\mu-\nu,\ 1+\mu+\nu;\ 1+\mu;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

где μ и ν — целочисленные параметры. Функции $p_{n,m}(z)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению, которое получается из дифференциального уравнения Гаусса (4.2), если в нем заменить z на $(1-z)/2$ и положить $a = m-n$, $b = 1+m+n$, $c = 1+m$. Мы получаем тогда

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2(m+1)z\frac{du}{dz} + (n-m)(m+n+1)u = 0. \quad (1)$$

Назовем это уравнение *уравнением Лежандра первого вида*. Функции $P_n^m(z)$ удовлетворяют и другому уравнению. Оно получается, если положить в уравнении (1) $u = (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} v(z)$:

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2} - 2z\frac{dv}{dz} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]v = 0. \quad (2)$$

Мы будем называть его *уравнением Лежандра второго вида*. Это уравнение встречалось нам уже в п. 3.2.3.3, где оно было выведено из волнового уравнения. При этом вместо z было введено переменное $\cos\theta$, где θ — полярный угол. В дальнейшем мы рассмотрим и изучим решения обоих уравнений при любых комплексных значениях параметра m и n и комплексных значениях аргумента z. Эти решения мы будем называть *функциями Лежандра*.

Поскольку уравнение (1) является дифференциальным уравнением Гаусса, то его решение можно представить, согласно 4.1.1, в виде

(несобственного) интеграла

$$\int_{(s_1)}^{(s_2)} s^{m-n-1}(1-s)^n\left(1-\frac{1-z}{2}s\right)^{-n-m-1} ds$$

с пределами интегрирования 0, 1, ∞, $2/(1-z)$. Подинтегральная функция принимает особенно простой вид, если сделать преобразование $s=2/(1-t)$, $1-s=(t+1)/(t-1)$, $1-(1-z)s/2=(t-z)/(t-1)$. С точностью до несущественного постоянного множителя интеграл переходит при этом в

$$u=\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}} \tag{3}$$

с пределами интегрирования $-\infty$, -1, 1, z. Для того чтобы сделать этот интеграл однозначным, мы условимся выбирать путь интегрирования так, чтобы его можно было стянуть в отрезок прямой,

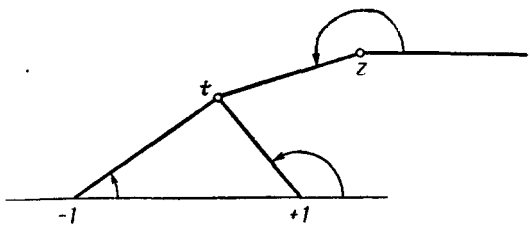


Рис. 22. Разрезы в плоскости t и связи между аргументами для интегрального представления функций Лежандра.

соединяющий пределы интегрирования на плоскости t. Подинтегральная функция при этом определяется условием, что если интегралы являются собственными (см. 4.2), то при всех значениях z имеем

$$-\pi<\arg(t\pm 1)\leqslant\pi, \tag{4а}$$

$$-\pi<\arg(z-t)\leqslant\pi, \tag{4б}$$

$$t-z=e^{i\pi}(z-t),\ \text{где}\ 0<\arg(t-z)\leqslant 2\pi. \tag{4в}$$

Это означает, что плоскость t должна быть разрезана, согласно рис. 22. Плоскость z мы предполагаем разрезанной вдоль отрицательного луча вещественной оси до точки $z=+1$, так что

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi, \tag{5а}$$

$$-\pi<\arg(z\pm 1)\leqslant\pi. \tag{5б}$$

Далее полагаем

$$1-z=e^{\mp i\pi}(z-1)\qquad(\operatorname{Im} z\gtrless 0). \tag{5в}$$

Отсюда вытекает, что если z принимает вещественные значения, меньшие 1, то $\arg(1-z)=0$, причем этот аргумент меняется непрерывным образом, когда z пересекает вещественную ось в области $z<1$.

5.1.1. Функции Лежандра первого рода. Рассмотрим теперь интеграл (3) с границами 1 и z

$$u_1=\int\limits_{(1)}^{(z)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}.$$

Для того чтобы выразить его через гипергеометрическую функцию, преобразуем путь интегрирования в отрезок [0, 1] вещественной оси. Это делается с помощью подстановки $t-1=(z-1)s$. Отсюда вытекает $t+1=2(1-(1-z)s/2)$ и, в силу равенства (4в), $t-z=e^{i\pi}(z-t)=e^{i\pi}(z-1)(1-s)$. Поэтому интеграл принимает вид

$$u_1=e^{-i\pi(n+m+1)}(z-1)^{-m}\int\limits_{(0)}^{(1)}s^n(1-s)^{-n-m-1}\left(1-\frac{1-z}{2}s\right)^n ds.$$

Принимая во внимание равенство (4.11), определяющее гипергеометрическую функцию, получаем отсюда

$$u_1=\int\limits_{(1)}^{(z)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}=$$

$$=e^{-i\pi(n+m+1)}\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n-m)}{\Gamma(1-m)}(z-1)^{-m}\,{}_2F_1\left(-n,\,n+1;\,1-m;\,\frac{1-z}{2}\right). \tag{6}$$

Определим теперь функцию $\mathfrak{P}_{n,m}(z)$ с помощью нормирующего множителя $a_{n,m}$ равенством

$$\mathfrak{P}_{n,m}(z)=a_{n,m}\int\limits_{(1)}^{(z)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}.$$

Тогда, дифференцируя под знаком интеграла, получаем, что при $\operatorname{Re}(n+m)<0$

$$\frac{d\mathfrak{P}_{n,m}(z)}{dz}=(n+m+1)\,a_{n,m}\int\limits_{(1)}^{(z)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+2}}=$$

$$=(n+m+1)\frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}}\mathfrak{P}_{n,m+1}(z).$$

Это соотношение обобщается на все значения n и m с помощью принципа аналитического продолжения. Нормируем $\mathfrak{p}_{n,m}(z)$ так, чтобы имело место равенство

$$\frac{d\mathfrak{p}_{n,m}(z)}{dz} = \mathfrak{p}_{n,m+1}(z). \tag{7}$$

Для этого должно выполняться соотношение $a_{n,m+1} = (n+m+1)\,a_{n,m}$. Равенство (6) дает при $m=0$ и любом n

$$\mathfrak{p}_{n,0}(z) = a_{n,0}e^{-i\pi(n+1)}\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n)\,{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Для того чтобы выполнялось равенство

$$\mathfrak{p}_{n,0}(z) = \mathfrak{P}_n(z) = {}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right), \tag{7а}$$

положим

$$a_{n,0} = \frac{e^{i\pi(n+1)}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n)} = -\frac{1-e^{2i\pi n}}{2i\pi}$$

[см. равенство (1.40)]. Если положить теперь

$$a_{n,m} = \frac{e^{i\pi(n+m+1)}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n-m)} = -\frac{1-e^{2i\pi(n+m)}}{2i\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)},$$

то будем иметь $a_{n,m+1} = (n+m+1)\,a_{n,m}$, а потому выполняется равенство (7). Отсюда, учитывая равенство (6), находим, что нормированное, согласно равенству (7), решение первого уравнения Лагранжа имеет вид

$$\mathfrak{p}_{n,m}(z) = -\frac{1-e^{2i\pi(n+m)}}{2i\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}\int\limits_{(1)}^{(z)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}} =$$

$$= \frac{(z-1)^{-m}}{\Gamma(1-m)}\,{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{7б}$$

Положим, далее,

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,\mathfrak{p}_{n,m}(z). \tag{8}$$

Мы получаем следующие равенства, определяющие $\mathfrak{P}_n^m(z)$ для всех m, n и z:

$$\mathfrak{P}_n^m(z) \equiv \frac{1-e^{2i\pi(n+m)}}{2i\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}\,(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int\limits_{(z)}^{(1)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}} \tag{9}$$

и

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{9а}$$

Функция $\mathfrak{P}_n^0(z) = \mathfrak{p}_{n,0}(z) = \mathfrak{P}_n(z)$ называется *функцией Лежандра первого рода*. Функция $\mathfrak{P}_n^m(z)$—*присоединенной функцией Лежандра* степени n и порядка m. Поскольку условие на $a_{n,m}$ не определяет однозначно эти коэффициенты, то можно различными способами перейти от $\mathfrak{P}_n$ к $\mathfrak{P}_n^m$ так, чтобы выполнялось равенство (7) и результаты совпадали при целочисленных значениях m. Мы выбрали здесь определение Гобсона [1]).

Несобственный интеграл в равенстве (9) можно, вообще говоря, преобразовать в интеграл, взятый по двойной петле, принимая во внимание условие (4) для начала пути интегрирования. В равенстве (9а), которое равносильно равенству (9), знак F является символом для гипергеометрической *функции* в самом общем смысле, т. е. функции, определяемой равенством (4.11). Если же подставить вместо F гипергеометрический ряд, то равенство (9а) теряет смысл при положительных целых значениях m, поскольку оно принимает вид ∞/∞. Из равенства (4.39) вытекает, однако, что

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{(n-\mu+1)_{2\mu}}{2^{\mu}\Gamma(1+\mu)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,{}_2F_1\left(\mu-n,\ \mu+n+1;\ 1+\mu;\ \frac{1-z}{2}\right)$$

(μ — целое). (10а)

При вычислении интегралов для $\mathfrak{P}_n(z)$ и $\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)$ можно выбрать в качестве пути интегрирования простой обход вокруг точек $t=1$ и $t=z$, поскольку сумма показателей ветвления n и $-n-\mu-1$ является целым числом, а потому путь на римановой поверхности замкнут. Мы получаем

$$\int_{(z)}^{(1)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+\mu+1}} = \frac{1}{1-e^{2i\pi n}} \oint^{(1+,\,z+)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+\mu+1}},$$

и потому

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{1}{2i\pi}\,\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}} \oint^{(1+,\,z+)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+\mu+1}}$$

(μ — целое). (10б)

В частности, при $\mu=0$

$$\mathfrak{P}_n^0(z) = \mathfrak{P}_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint^{(1+,\,z+)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+1}}. \qquad (10в)$$

---

[1]) Гобсон Е. В., стр. 177. Гобсон применяет обозначение $P_n^m(z)$ в двух смыслах. Мы, следуя Янке — Эмде — Лешу, используем определяемую равенством (9) функцию $\mathfrak{P}_n^m(z)$ и отличаем ее от $P_n^m(x)$.

Если сумма обоих параметров $n+m$ целая, то мы получаем из равенства (9)

$$\mathfrak{P}_n^{\lambda-n}(z)=\frac{1-e^{2i\pi\lambda}}{2i\pi}\,\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+1)}(z^2-1)^{\frac{\lambda-n}{2}}\int\limits_{(z)}^{(1)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{\lambda+1}}$$

и отсюда при $\lambda\geqslant 0$, в силу равенства (1.10),

$$\mathfrak{P}_n^{\lambda-n}(z)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{(z^2-1)^{\frac{\lambda-n}{2}}}{2i\pi}\oint\limits_{1}^{(z+)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{\lambda+1}}$$

$$(\lambda\geqslant 0\text{ — целое}). \tag{10г}$$

Разлагая подинтегральную функцию по формуле бинома, мы получаем, очевидно, многочлен, содержащий $\lambda+1$ слагаемое [относительно этого см. равенство (37а)].

Из равенства, определяющего функции Лежандра, непосредственно вытекают некоторые утверждения о поведении этих функций. Если $n=\nu$ — целое положительное число, то гипергеометрический ряд, в силу равенства (9), обрывается, а потому функции $\mathfrak{p}_{\nu,m}(z)$ являются многочленами степени ν от z. Если $m=\mu$ — целое положительное число, то функция $\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)$ может быть, в силу равенства (7), представлена в виде производной порядка μ от $\mathfrak{P}_n(z)$. Если $n=\nu$ и $m=\mu$ являются положительными целыми числами, то мы получаем: $\mathfrak{P}_\nu(z)$ является многочленом степени ν, $\mathfrak{p}_{\nu,\mu}(z)$ — многочленом степени $\nu-\mu$, если $\nu-\mu\geqslant 0$, и $\mathfrak{p}_{\nu,\mu}(z)=0$, если $\mu>\nu$. Последнее утверждение вытекает из равенства (10а), поскольку в этом случае множитель $(\nu-\mu+1)_{2\mu}$ обращается в нуль.

Если $z=x$ — вещественное число и $-1\leqslant x\leqslant 1$, то целесообразно в равенстве (9а) перейти к переменной $1-x$. Если считать, что точка на вещественной оси принадлежит верхней полуплоскости, то $z-1$ получит аргумент π. Поскольку $1-z$ должно обозначать вещественное число с аргументом 0, то полагаем, в соответствии с равенством (5в), $z-1=e^{i\pi}(1-x)$ и получаем из равенства (9а)

$$\mathfrak{P}_n^m(x+i0)=e^{-i\frac{\pi}{2}m}\,\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{11а}$$

При $x=x-i0$ имеем $x-1=-(1-x)=e^{-i\pi}(1-x)$ и

$$\mathfrak{P}_n^m(x-i0)=e^{i\frac{\pi}{2}m}\,\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

$$(-1<x<1). \tag{11б}$$

При вещественных значениях n и m множитель при показательной функции однозначно определен и принимает вещественные значения. Целесообразно рассматривать этот множитель как новую функцию, положив

$$P_n^m(x) \equiv e^{im\pi/2}\mathfrak{P}_n^m(x+i0) = e^{-im\pi/2}\mathfrak{P}_n^m(x-i0) \quad (-1<x<1). \tag{12}$$

Если $z=x$ — вещественное число и $x<-1$, то $x+1$ и $x-1$ ведут себя одинаковым образом при переходе через разрез, а потому их отношение не меняется; отсюда следует

$$\mathfrak{P}_n^m(x+i0) = \mathfrak{P}_n^m(x-i0) \quad (x<-1). \tag{12a}$$

Итак, в разрезанной плоскости функция $\mathfrak{P}_n^m(z)$ однозначно определена всюду, за исключением точек разреза $-1<z<+1$. Точки $z=\pm 1$, вообще говоря, являются особыми.

Поскольку гипергеометрическая функция симметрична относительно первых двух параметров, из равенства (9а), определяющего функцию $\mathfrak{P}_n^m(z)$, непосредственно следует

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \mathfrak{P}_{-n-1}^m(z). \tag{13}$$

Применяя равенство (4.20) к равенству (9а), мы получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{2^m}{\Gamma(1-m)}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,{}_2F_1\left(-n-m,\ 1+n-m;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right) \tag{14}$$

и, переходя к $-m$,

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(z) = \frac{1}{\Gamma(1+m)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{2^m}\,{}_2F_1\left(-n+m,\ 1+n+m;\ 1+m;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{14a}$$

Для целочисленных значений $m=\mu$ отсюда после сравнения с равенством (10а) вытекает

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z) \quad (\mu\text{—целое}). \tag{15}$$

Раньше чем исследовать дальнейшие свойства функции $\mathfrak{P}_n^m$, найдем сначала второе решение уравнения Лежандра, линейно независимое от найденного выше.

5.1.2. Функции Лежандра второго рода. Выберем в решении (3) уравнения Лежандра пределы интегрирования -1 и $+1$. Мы получим тогда функцию

$$q_{n,m}(z) = b_{n,m}u_2 = b_{n,m}\oint_{(1)}^{(-1)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}. \tag{16}$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$\frac{dq_{n,m}(z)}{dz} = (n+m+1)\frac{b_{n,m}}{b_{n,m+1}} q_{n,m+1}(z);$$

здесь можно нормировать функции так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dq_{n,m}(z)}{dz} = q_{n,m+1}(z). \tag{17}$$

Для этого *достаточно* положить $b_{n,m} = \varkappa\Gamma(n+m+1)e^{2i\pi m}$. При $m=0$ отсюда вытекает

$$\mathfrak{Q}_n(z) \equiv q_{n,0}(z) = \varkappa\Gamma(n+1)\oint_{(1)}^{(-1)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+1}}.$$

Обычно нормируют *лежандровские функции второго рода* $\mathfrak{Q}_n(z)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\mathfrak{Q}_n(z) \equiv \frac{1}{2}\oint_{(1)}^{(-1)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+1}}. \tag{18}$$

Отсюда вытекает $\varkappa\Gamma(n+1) = 1/2$ и потому

$$q_{n,m}(z) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{e^{2i\pi m}}{2}\oint_{(1)}^{(-1)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}. \tag{19}$$

Определим по аналогии с равенством (8) *присоединенные функции Лежандра второго рода* формулой

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) \equiv (z^2-1)^{\frac{m}{2}} q_{n,m}(z), \tag{20}$$

откуда следует

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) \equiv \frac{\Gamma(n+m+1)}{2\Gamma(n+1)} e^{2i\pi m}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\oint_{(1)}^{(-1)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}. \tag{20а}$$

Поскольку показатели в обеих точках ветвления $t = \pm 1$ подинтегральной функции равны между собой, можно перейти здесь к криволинейному интегралу, взятому по кривой, имеющей форму восьмерки. Мы получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = \frac{\Gamma(n+m+1)}{2\Gamma(n+1)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,e^{2i\pi m}}{1-e^{2i\pi n}}\oint^{(-1+,\,1-)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}. \tag{20б}$$

Как уже указывалось ранее, сделанный нами выбор нормирующих множителей является лишь достаточным, но не необходимым для выполнения равенства (17). Можно использовать и другие определения, которые дают тот же самый результат при целых значениях m.

Мы и здесь использовали определение Гобсона [1]). Отличное от этого определение принадлежит Бернсу.

Равенство (20) определяет функцию для всех значений z, за исключением точек разреза $-1 \leqslant z \leqslant +1$, для которых не выполнено предположение о возможности стянуть путь интегрирования в прямолинейный отрезок, соединяющий пределы интегрирования. В самом деле, при $-1 \leqslant z \leqslant +1$ особая точка $t = z$ лежит на этом отрезке. Мы можем обойти особую точку слева или справа или, что то же самое, рассматривать точку z либо как точку верхней полуплоскости, либо как точку нижней полуплоскости. Поскольку значения функции в этих двух случаях различны, мы возьмем их среднее значение

$$e^{i\pi m} Q_n^m(x) \equiv \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{im\pi}{2}} \mathfrak{Q}_n^m(x+i0) + e^{\frac{im\pi}{2}} \mathfrak{Q}_n^m(x-i0)\right) \quad (21)$$
$$(-1 \leqslant x \leqslant +1).$$

Уравнение Лежандра линейно и однородно. Поэтому сумма двух решений снова является решением, а потому функция $Q_n^m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению. Поскольку, далее, дифференциальное уравнение второго порядка имеет лишь два линейно независимых решения, то между функциями Q_n^m, $\mathfrak{Q}_n^m$, $\mathfrak{P}_n^m$ и P_n^m имеет место линейная зависимость.

Для того чтобы выразить решение уравнения (22) через гипергеометрическую функцию, преобразуем с помощью подстановки $t+1 = 2s$ отрезок $-1 \leqslant t \leqslant +1$ в отрезок $0 \leqslant s \leqslant 1$. При этом имеем $t-1 = 2(s-1)$, поскольку по условию (4a) вдоль пути интегрирования аргумент $t-1$ равен π, в то время как в гипергеометрическом интеграле аргумент $1-s$ должен равняться нулю. Поэтому надо положить $t-1 = e^{i\pi} 2(1-s)$. Соответственно имеем $t-z = e^{i\pi}(z+1)(1-2s/(z+1))$. При этом интеграл переходит в

$$u_2 = 2^{n+1} \frac{e^{-i\pi m}}{(z+1)^{n+m+1}} \oint_{(0)}^{(1)} s^n (1-s)^n \left(1 - \frac{2s}{z+1}\right)^{-n-m-1} ds.$$

Принимая во внимание равенства (1.39) и (1.42) для B-функции, получаем отсюда

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z+1)^{n+m+1}} \times$$
$$\times {}_2F_1\left(n+1,\ n+m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1+z}\right). \quad (22a)$$

[1]) См. Гобсон, стр. 186. На том же основании, что и для $\mathfrak{P}_n^m(z)$, мы придерживаемся обозначений Янке — Эмде — Леша. Гобсон в обоих случаях пишет $\mathfrak{Q}_n^m$.

Применяя к входящей в (22а) гипергеометрической функции равенство (4.19), мы получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z-1)^{n+m+1}}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(n+1,\ n+m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1-z}\right). \quad (22б)$$

Далее, применяя равенство (4.41) к обоим равенствам (22), находим, что

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{n+m}{2}+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right). \quad (23а)$$

Отсюда, в силу равенства (4.20), имеем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}}{z^{n-m+1}}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{n-m+1}{2},\ \frac{n-m}{2}+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right). \quad (23б)$$

Сравнивая оба эти равенства и заменяя m на $-m$, мы находим, что

$$e^{i\pi m}\Gamma(n+m+1)\,\mathfrak{Q}_n^{-m}(z) = e^{-i\pi m}\Gamma(n-m+1)\,\mathfrak{Q}_n^m(z). \quad (24)$$

Это соотношение имеет место для любого m, в то время как соответствующее равенство (15) справедливо лишь для целочисленных значений m.

Равенства (22) и (23) теряют силу при полуцелых отрицательных $n \leqslant -\frac{3}{2}$; если $n+m$ — целое отрицательное число, то ряды (22) и (23) обрываются, но $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ из-за наличия нормирующего множителя становится бесконечно большим. В этом случае следует нормировать решение уравнения Лежандра другим способом.

5.1.3. Связь между функциями Лежандра первого и второго рода. Поскольку уравнение Лежандра имеет только два независимых решения, то интеграл

$$u_3 = \oint_{(-1)}^{(z)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}$$

должен выражаться через $\mathfrak{P}_n^m(z)$ и $\mathfrak{Q}_n^m(z)$. При его вычислении следует различать случаи $\arg z \geqslant 0$ и $\arg z \leqslant 0$. В обоих случаях подстановка $t+1=s(z+1)$ преобразует путь интегрирования в отрезок $0 \leqslant s \leqslant 1$. При этом $t-1=-2\left(1-\frac{1+z}{2}s\right)$. Но при $\operatorname{Im} z > 0$, в силу условия (4а), в окрестности $t=-1$ на пути интегрирования должно выполняться равенство $\arg(t-1)=+\pi$, в то время как при $\operatorname{Im} z < 0$ соответственно должно выполняться равенство $\arg(t-1)=-\pi$. Таким образом, $t-1=e^{\pm i\pi}2(1-(1+z)s/2)$, где верхний знак берется при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, а нижний — при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. В обоих случаях мы имеем, далее, по равенству (4в) $t-z=e^{i\pi}(z+1)(1-s)$. Отсюда следует

$$u_3 = e^{\pm i\pi n} e^{-i\pi(n+m+1)}(z+1)^{-m}\int_{(0)}^{(1)} s^n(1-s)^{-n-m-1}\left(1-\frac{z+1}{2}s\right)^n ds$$

или

$$u_3 = e^{\pm i\pi n}e^{-i\pi(n+m+1)}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-n-m)}{\Gamma(1-m)}(z+1)^{-m}\times$$

$$\times {}_2F_1\left(n+1,\ -n;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right)\quad (\operatorname{Im} z \gtrless 0). \qquad (25)$$

Поскольку внутри треугольника -1, $+1$, z нет ни одной особой точки, то по теореме Коши

$$u_2 = u_1 - u_3 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{и} \quad e^{-2i\pi n}u_2 = u_1 - u_3 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

Подставим сюда значения из равенств (6), (16), (20), (20а) и (25). Тогда, принимая во внимание, что

$$\Gamma(1+m+n)\Gamma(-m-n) = -\pi/\sin(m+n)\pi,$$

имеем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = \frac{\pi e^{i\pi m}}{2\sin(n+m)\pi\Gamma(1-m)}\times$$

$$\times\left\{e^{\mp i\pi n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right)\right\}\quad (\operatorname{Im} z \gtrless 0). \qquad (26а)$$

Заменяя в этом равенстве m на $-m$ и снова выражая $\mathfrak{Q}_n^{-m}(z)$ с помощью равенства (24) через $\mathfrak{Q}_n^m(z)$, мы получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=\frac{e^{i\pi m}\pi\Gamma(n+m+1)}{2\sin(n-m)\pi\,\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(1+m)}\times$$

$$\times\left\{e^{\mp i\pi n}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1-z}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+z}{2}\right)\right\}\quad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(26б)$$

При $m=0$ из этих уравнений следует, что

$$\mathfrak{Q}_n(z)=\frac{\pi}{2\sin n\pi}\left\{e^{\mp i\pi n}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+z}{2}\right)\right\}\quad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(26в)$$

Если $n+m$ — целое положительное число, то в равенстве (26а) знаменатель обращается в нуль; но, согласно (4.21), обращается в нуль и числитель, а потому $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ остается, как это и должно быть ввиду (22), конечным. Значение $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ можно тогда вычислить посредством (26б).

Из равенства (26а) вытекает

$$\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)=\frac{\pi\,e^{i\pi m}}{2\sin(n-m)\,\pi\,\Gamma(1-m)}\times$$

$$\times\left\{-e^{\pm i\pi n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right)-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times{}_2F_1(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2})\right\}\quad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\qquad(26г)$$

Исключим теперь функцию ${}_2F_1(-n,\ n+1;\ 1-m;\ (1+z)/2)$ из равенств (26а) и (26г). Мы получим тогда

$$\sin(n+m)\,\pi\,\mathfrak{Q}_n^m(z)-\sin(n-m)\,\pi\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)=$$

$$=\frac{e^{i\pi m}\pi}{2\Gamma(1-m)}(e^{\mp i\pi n}+e^{\pm i\pi n})\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}).$$

Поскольку правая часть по равенству (9а) может быть представлена в виде

$$e^{i\pi m}\pi\cos n\pi\,\mathfrak{P}_n^m(z),$$

то мы получаем, что

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{e^{-i\pi m}}{\pi\cos n\pi}\left\{\sin(n+m)\pi\,\mathfrak{Q}_n^m(z)-\sin(n-m)\pi\,\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)\right\}. \quad (27)$$

Заменяя в этом равенстве m на $-m$ и принимая во внимание равенство (24) и соотношение

$$\Gamma(1+n\pm m)\Gamma(-n\mp m)\sin(n\pm m)\pi=-\pi,$$

мы получаем

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(z)=e^{-i\pi m}\frac{\sin(n-m)\pi}{\pi\cos n\pi}\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\left(\mathfrak{Q}_n^m(z)-\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)\right). \quad (27а)$$

При $m=0$ отсюда следует

$$P_n(z)=\frac{\operatorname{tg} n\pi}{\pi}\left(\mathfrak{Q}_n(z)-\mathfrak{Q}_{-n-1}(z)\right). \quad (27б)$$

Исключая из равенств (27) и (27а) функцию $\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)$, мы получаем

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(z)=\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\left(\mathfrak{P}_n^m(z)-\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,e^{-i\pi m}\,\mathfrak{Q}_n^m(z)\right). \quad (28)$$

Это равенство является обобщением равенства (15) на все значения m. Мы часто будем пользоваться получаемым из этого равенства выражением для $\mathfrak{Q}_n^m(z)$

$$\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,e^{-i\pi m}\,\mathfrak{Q}_n^m(z)=\mathfrak{P}_n^m(z)-\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\mathfrak{P}_n^{-m}(z). \quad (28а)$$

Запишем равенство (28) сначала при $z=x+i0$, а потом при $z=x-i0$ и перейдем, согласно (12), к $P_n^m(x)$, умножив обе части равенства на $e^{\mp im\pi/2}$. Мы получим тогда, складывая оба равенства и принимая во внимание определяющее равенство (21), что

$$P_n^{-m}(x)=\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)}\left(\cos m\pi\,P_n^m(x)-\frac{2}{\pi}\sin m\pi\,Q_n^m(x)\right)$$
$$(-1<x<+1). \quad (29)$$

Для целочисленных значений $m=\mu$ имеем

$$P_n^{-\mu}(x)=(-1)^\mu\frac{\Gamma(n+1-\mu)}{\Gamma(n+1+\mu)}P_n^\mu(x) \quad (29а)$$
$$(-1<x<+1,\ \mu\text{ — целое})$$

[ср. равенство (15)].

5.1.3.0. Частные случаи: $n=\nu-1/2$—целое число, $n\pm m=\lambda$ — целое число. Равенства (27) и (27а) теряют силу, если n — полуцелое число, поскольку в этом случае знаменатель $\cos n\pi$ обращается в нуль. Так как левая часть в этом случае остается конечной,

то в правой части и числитель должен обращаться в нуль. Поэтому из равенства (27а) вытекает

$$\mathfrak{Q}^m_{\nu-\frac{1}{2}}(z)=\mathfrak{Q}^m_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) \qquad (\nu\text{ — целое}). \tag{30}$$

Если $m+n\geqslant 0$ или $m-n>0$ — целые числа, т. е. $m\pm n=\lambda$ — целое, то $\sin(m\pm n)\pi=0$ и $\sin(m\mp n)\pi=\sin(2m-\lambda)\pi$. Поскольку $\cos n\pi=\cos(m-\lambda)\pi$, то мы получаем

$$\frac{\sin(m\mp n)\pi}{\cos n\pi}=\frac{\sin(2m-\lambda)\pi}{\cos(m-\lambda)\pi}=\frac{\sin 2m\pi}{\cos m\pi}=2\sin m\pi$$

$$((m\pm n)=\lambda\text{ — целое}).$$

Поэтому из равенства (27) вытекает

$$\mathfrak{P}^m_{m-\lambda}(z)=\frac{2}{\pi}e^{-i\pi m}\sin m\pi\,\mathfrak{Q}^m_{m-\lambda}(z)=\mathfrak{P}^m_{\lambda-m-1}(z) \tag{31}$$

$$(\lambda>0\text{ — целое}).$$

Условие $\lambda>0$ возникает из-за того, что функция $\mathfrak{Q}^m_n(z)$ обращается в бесконечность, если $n+m\leqslant 0$ — целое число; в этом случае мы не можем отбросить второе слагаемое в (27). Поскольку $\mathfrak{P}^m_{m-\lambda}(z)$ и $\mathfrak{Q}^m_{m-\lambda}(z)$ линейно зависят друг от друга, эти две функции необразуют фундаментальной системы решений уравнения Лежандра.

Входящие в равенство (31) функции допускают весьма простое представление. Из равенства (9а) следует, что при всех значениях λ

$$\mathfrak{P}^m_{m-\lambda}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-m+\lambda,\ 1+m-\lambda;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Преобразуем теперь функцию Гаусса с помощью равенств (4.19) или (4.20). Мы получим, что при всех значениях λ

$$\mathfrak{P}^m_{\lambda-m-1}(z)=\mathfrak{P}^m_{m-\lambda}(z)=$$

$$=\frac{2^{m+1-\lambda}}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{\lambda-1}}{(z^2-1)^{m/2}}{}_2F_1\left(1-\lambda,\ m+1-\lambda;\ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right) \tag{31а}$$

или

$$\mathfrak{P}^m_{\lambda-m-1}(z)=\mathfrak{P}^m_{m-\lambda}(z)=$$

$$=\frac{2^m}{\Gamma(1-m)}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(1-\lambda,\ \lambda-2m;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right). \tag{31б}$$

Если $\lambda>0$ — целое число, то обе функции Гаусса являются многочленами степени $\lambda-1$ и представляют, кроме того, согласно равенству (31), функцию $\mathfrak{Q}^m_{m-\lambda}(z)(1-e^{-2i\pi m})/i\pi$.

Равенство (31) можно непосредственно вывести из интеграла. Положим

$$u_4 = \oint^{(z+,\ -1+,\ 1+)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n\,(t-z)^{2n+\lambda+1}}.$$

Поскольку сумма показателей ветвления $-\lambda$ является целым числом, то путь интегрирования замкнут на римановой поверхности. Следо-

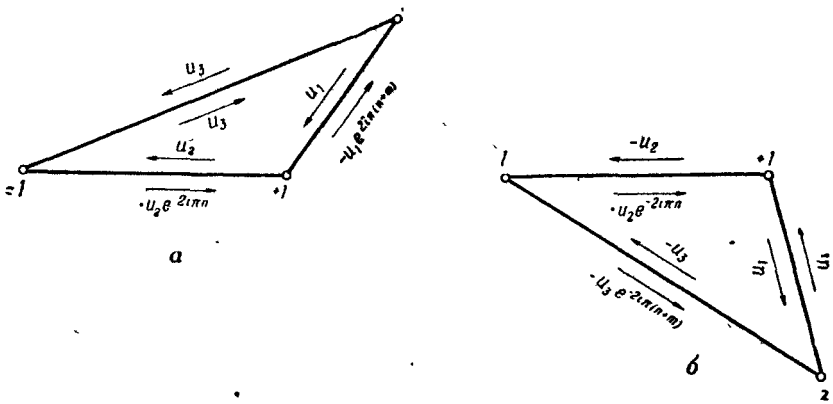


Рис. 23. Определение аргументов на плоскости t.

вательно, учитывая принятое нами условие, наложенное на аргументы (см. рис. 23а), мы имеем

$$u_4 = u_1 e^{2i\pi(2n+\lambda)} - u_3 - u_2 e^{2i\pi n}$$

и, поскольку $u_3 = u_1 - u_2$,

$$u_4 = u_1 (e^{2i\pi(2n+\lambda)} - 1) - u_2 (e^{2i\pi n} - 1).$$

Подставим сюда значения u_1 и u_2 из равенств (9) и (20а). Мы получим

$$\frac{(z^2-1)^{\frac{n+\lambda}{2}}}{2i\pi} \oint^{(z+,\ -1+,\ 1+)} \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n\,(t-z)^{2n+\lambda+1}} =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+\lambda+1)} \left\{ \mathfrak{P}_n^{n+\lambda}(z) - \frac{2}{\pi} e^{-i\pi n} \sin \pi\pi \mathfrak{Q}_n^{n+\lambda}(z) \right\}$$

(λ — целое). (32)

Такой же результат получается при $\operatorname{Im}(z) < 0$ из рис. 23, *б*. Интегралы можно непосредственно вычислить, преобразовав путь интегрирования на числовой сфере в путь, обходящий в отрицательном

направлении точку $t=\infty$. Подстановка $t=1/s$ дает

$$\frac{1}{2i\pi}\oint^{(\infty-)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{2n+\lambda+1}}=\frac{1}{2^n}\frac{1}{2i\pi}\int^{(0+)}\frac{(1-s^2)^n(1-zs)^{-2n-\lambda-1}\,ds}{s^{1-\lambda}}.$$

Разложим подинтегральную функцию по биному Ньютона и изменим порядок суммирования и интегрирования. Если $\lambda>0$, то вычета нет, интеграл обращается в нуль и имеет место равенство (31). Если же $\lambda\leqslant 0$, то имеем

$$\frac{1}{2i\pi}\oint^{(z+,\,-1+,\,1+)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{2n+\lambda+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}(-z)^{\lambda}\sum_{\iota=0}^{-(\lambda+1)/2-\lambda/2}(-1)^{\iota}\binom{n}{\iota}\binom{-\lambda-2n-1}{-\lambda-2\iota}\frac{1}{z^{2\iota}}$$

$$(\lambda\leqslant 0\text{ — целое}). \qquad (32a)$$

Верхней границей суммирования служит то из написанных чисел, которое является целым. Интеграл будет в этом случае многочленом степени $-\lambda$, содержащим лишь четные или нечетные степени в зависимости от того, четно или нечетно λ.

5.1.4. Соотношения обхода. На основе равенств (5) мы имеем

$$e^{\mp i\pi}z+1=e^{\mp i\pi}(z-1)\quad\text{и}\quad e^{\mp i\pi}z-1=e^{\mp i\pi}(z+1)$$
$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0).$$

Отсюда следует, что всегда имеет место равенство

$$\frac{e^{\mp i\pi}z+1}{e^{\mp i\pi}z-1}=\frac{z-1}{z+1}.$$

Поэтому из равенства (26а) вытекает

$$\mathfrak{Q}_n^m(e^{\mp i\pi}z)=\frac{e^{i\pi m}\pi}{2\sin(n+m)\pi\,\Gamma(1-m)}\times$$

$$\times\left\{e^{\pm i\pi n}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right)\right\}\quad(\operatorname{Im} z\gtrless 0).$$

Вынесем справа за скобки множитель $-e^{\pm i\pi n}$; тогда в скобках останется правая часть равенства (26а). Отсюда следует

$$\mathfrak{Q}_n^m(e^{\mp i\pi}z)=-e^{\pm i\pi n}\mathfrak{Q}_n^m(z)\qquad(\operatorname{Im}(z)\gtrless 0). \qquad (33)$$

Подставим это равенство в (27). Мы получим

$$\mathfrak{P}_n^m\left(e^{\mp i\pi}z\right)=\frac{e^{-i\pi m}}{\pi\cos n\pi}\left\{-\sin(n+m)\,\pi e^{\pm i\pi n}\mathfrak{Q}_n^m(z)-\right.$$
$$\left.-\sin(n-m)\,\pi\,e^{\mp i\pi n}\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)\right\}.$$

Правая часть этого равенства совпадает с

$$\frac{e^{-i\pi m}e^{\mp i\pi n}}{\pi\cos n\pi}\left\{\sin(n+m)\,\pi\,\mathfrak{Q}_n^m(z)-\sin(n-m)\,\pi\,\mathfrak{Q}_{-n-1}^m(z)\right\}-$$
$$-\frac{e^{-i\pi m}\sin(n+m)\,\pi}{\pi\cos n\pi}\mathfrak{Q}_n^m(z)\left(e^{\mp i\pi n}+e^{\pm i\pi n}\right).$$

Применив снова равенство (27), мы получим

$$\mathfrak{P}_n^m\left(e^{\mp i\pi}z\right)=e^{\mp i\pi n}\mathfrak{P}_n^m(z)-\frac{2\sin(n+m)\,\pi}{\pi}e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m(z)$$
$$(\operatorname{Im}z\gtrless 0). \tag{34}$$

Если $n+m$ — целое отрицательное число, то из равенств (24) и (1.40) следует

$$-\frac{2\sin(n+m)\,\pi}{\pi}e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m(z)=-\frac{2\sin(n+m)\,\pi}{\pi}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\times$$
$$\times e^{i\pi m}\mathfrak{Q}_n^{-m}(z)=\frac{2e^{i\pi m}\mathfrak{Q}_n^{-m}(z)}{\Gamma(-n-m)\,\Gamma(n-m+1)},$$

а потому

$$\mathfrak{P}_n^m\left(e^{\mp i\pi}z\right)=e^{\mp i\pi n}\mathfrak{P}_n^m(z)+\frac{2e^{i\pi m}\mathfrak{Q}_n^{-m}(z)}{\Gamma(-n-m)\,\Gamma(n-m+1)}\qquad(\operatorname{Im}z\gtrless 0). \tag{34а}$$

При $m=0$ из равенства (34) вытекает

$$P_n\left(e^{\mp i\pi}z\right)=e^{\mp i\pi n}P_n(z)-\frac{2\sin n\pi}{\pi}\mathfrak{Q}_n(z)\qquad(\operatorname{Im}z\gtrless 0). \tag{34б}$$

Применим равенство (34) к точке $z=x\pm i0$. Мы получим, принимая во внимание равенство (12), что при $-1<x<+1$

$$P_n^m(-x)=e^{\mp i\pi(n+m)}P_n^m(x)-\frac{2\sin(n+m)\,\pi}{\pi}e^{-i\pi m}e^{\mp\frac{im\pi}{2}}Q_n^m(x\pm i0).$$

Складывая оба равенства с равенством (21), получаем

$$P_n^m(-x)=\cos(n+m)\,\pi\,P_n^m(x)-\frac{2}{\pi}\sin(n+m)\,\pi\,Q_n^m(x)$$
$$(-1<x<+1). \tag{34в}$$

Отсюда при $m=0$ имеем в дополнение к равенству (34б)

$$P_n(-x)=\cos n\pi\, P_n(x)-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q_n(x) \qquad (-1<x<+1). \quad (34г)$$

Заменяя в равенстве (34в) x на $-x$, получаем

$$P_n^m(x)=\cos(n+m)\pi\, P_n^m(-x)-\frac{2}{\pi}\sin(n+m)\pi\, Q_n^m(-x)$$
$$(-1<x<+1),$$

откуда, исключая $P_n^m(-x)$, находим

$$Q_n^m(-x)=-\cos(n+m)\pi\, Q_n^m(x)-\frac{\pi}{2}\sin(n+m)\pi\, P_n^m(x)$$
$$(-1<x<+1). \quad (34д)$$

Полученные равенства позволяют связать значения функций для точек, аргументы которых отличаются на $\pm\pi$. Не составляет труда написать соответствующие формулы для полного обхода на плоскости, разрезанной от -1 до $+1$. Так, например, поскольку при $-1<x<+1$ для $x=x+i0$ имеет место соотношение $x-1=(1-x)e^{i\pi}$, а для $x=x-i0$ имеем $x-1=(1-x)e^{-i\pi}$, то из (26а) следует

$$\mathfrak{Q}_n^m(x+i0)=\frac{e^{i\pi m}\pi}{2\sin(n+m)\pi\,\Gamma(1+m)}\times$$
$$\times\left\{e^{-i\pi\left(n+\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{i\frac{\pi}{2}m}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+x}{2}\right)\right\}$$

и

$$\mathfrak{Q}_n^m(x-i0)=\frac{e^{i\pi m}\pi}{2\sin(n+m)\pi\,\Gamma(1-m)}\times$$
$$\times\left\{e^{i\pi\left(n+\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-e^{-i\frac{\pi}{2}m}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+x}{2}\right)\right\}.$$

Исключая отсюда одну из двух гипергеометрических функций, получаем

$$e^{-i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x+i0)-e^{i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x-i0)=$$
$$=-\frac{i\pi e^{i\pi m}}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

или, принимая во внимание равенства (11) и (12),

$$e^{-i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x+i0)-e^{i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x-i0)=-i\pi e^{i\pi m}P_n^m(x)$$
$$(-1<x<+1). \qquad (35)$$

Используя функцию $Q_n^m(x)$, определенную равенством (21), получаем

$$e^{\mp i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{Q}_n^m(x\pm i0)=e^{i\pi m}\left(Q_n^m(x)\mp\frac{i\pi}{2}P_n^m(x)\right) \qquad (-1<x<+1). \qquad (35a)$$

Это равенство позволяет вычислить *скачок функции* $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ *при переходе через разрез* и выразить через $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ и $\mathfrak{P}_n^m(z)$ значения функции при аналитическом продолжении.

5.2. Представления функций Лежандра. Во всех выведенных до сих пор формулах мы сводили функции Лежандра к гипергеометрическим функциям. Эти гипергеометрические функции можно разлагать в степенные ряды, которые сходятся в области, где абсолютные значения соответствующих переменных меньше 1. Тем самым получаются многочисленные разложения для функций Лежандра. Мы выпишем ниже эти разложения, соответствующие различным областям сходимости, и дополним их с помощью ранее выведенных формул, касающихся гипергеометрических функций.

5.2.1. Представления в окрестности точки $z=+1$. Ряды (4.12) для гипергеометрических функций из формул (9а) и (14) сходятся внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z=1$. Поэтому для $\mathfrak{P}_n^m(z)$ годятся оба равенства, или же, при целочисленных m, равенство (10а).

Для того чтобы получить представление $\mathfrak{Q}_n^m(z)$, подставим в равенство (28а) значения функций по формуле (9а)

$$e^{-i\pi m}\frac{2}{\pi}\sin m\pi\mathfrak{Q}_n^m(z)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right)-$$
$$-\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(1+m)\Gamma(n-m+1)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1-z}{2}\right). \qquad (36)$$

Это равенство приводит к разложению по степеням $1-z$, которое сходится в круге радиуса 2 с центром в точке $z=1$. Из равенства (4.12) вытекает, в силу соотношения $\Gamma(1-m)\cdot(1-m)_k=$

$= \Gamma(\varkappa + 1 - m)$, что

$$e^{-i\pi m}\frac{2}{\pi}\sin m\pi\, \mathfrak{Q}_n^m(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(1-m+\varkappa)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa -$$

$$- \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(1+m+\varkappa)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa. \qquad (36a)$$

Эта формула теряет силу, *если* m *— целое число*, поскольку в левой части равенства $\sin m\pi$ обращается в нуль, в то время как в знаменателе при $\varkappa \leqslant |m|$ Г-функция принимает бесконечно большие значения.

Применим правило Лопиталя. Предположим для определенности, что $m \geqslant 0$ и преобразуем полюсы знаменателя в нули числителя с помощью соотношения

$$\Gamma(1-m+\varkappa)\,\Gamma(m-\varkappa) = \pi/\sin(m-\varkappa)\pi = (-1)^\varkappa \pi/\sin m\pi.$$

Обозначим через σ наибольшее целое число, не превышающее m; мы получим тогда

$$2e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\sigma-1} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa\, \Gamma(m-\varkappa)}{\varkappa!} (-1)^\varkappa \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa +$$

$$+ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\pi}{\sin m\pi} \sum_{\varkappa=\sigma}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(1-m+\varkappa)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa -$$

$$- \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\pi}{\sin m\pi} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(1+m+\varkappa)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa.$$

Здесь первое слагаемое в правой части уже определено при целочисленных m. В знаменателях же двух других слагаемых стоит выражение $\sin m\pi$, обращающееся в нуль при целых значениях m. Поскольку, согласно равенствам (19) и (20), $\mathfrak{Q}_n^m$ остается конечным при целых m, множитель при $\dfrac{1}{\sin m\pi}$ должен для целых m обращаться в нуль. Так как отдельные слагаемые при этом в нуль не обращаются, нам придется дифференцировать по m все выражения, в том числе и те, которые не равны нулю при целых значениях m. Полагая после дифференцирования, что $m = \mu$ — целое

число, мы получаем для этих двух слагаемых

$$\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}\frac{1}{\cos\mu\pi}\left\{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\mu}(-n)_{\mu}(n+1)_{\mu}\times\right.$$

$$\times\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_x(n+1+\mu)_x}{\Gamma(\mu+1+x)\Gamma(x+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)}\times$$

$$\left.\times\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-n)_x(n+1)_x}{\Gamma(\mu+1+x)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x\right\}+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\mu}\times$$

$$\times\frac{(-n)_{\mu}(n+1)_{\mu}}{\cos\mu\pi}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_x(n+1+\mu)_x}{\Gamma(\mu+x+1)\Gamma(x+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\times$$

$$\times\frac{1}{\cos\mu\pi}\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-n_x)(n+1)_x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\mu+x+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x\frac{\Gamma'(x+\mu+1)}{\Gamma(x+\mu+1)}-$$

$$-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{1}{\cos\mu\pi}\left\{\frac{\Gamma'(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma'(n-\mu+1)}{(\Gamma(n-\mu+1))^2}\right\}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(-n)_x(n+1)_x}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+\mu+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x.$$

Здесь сумма $\sum_{x=\sigma}^{\infty}$ преобразована в сумму от 0 до ∞ тем, что первый член вынесен за скобку. Но

$$\cos\mu\pi(-n)_{\mu}(n+1)_{\mu}=(n-\mu+1)_{2\mu}=\Gamma(n+\mu+1)/\Gamma(n-\mu+1)$$

и

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_x(n+1+\mu)_x}{\Gamma(x+1)(\mu+1)_x\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\mu)}{}_2F_1\left(\mu-n,\ n+\mu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Поэтому, в силу равенства (10а),

$$\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\mu}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{(-n)_{\mu}(n+1)_{\mu}}{\cos\mu\pi}\times$$

$$\times\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_x(n+1+\mu)_x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\mu+1+x)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^x=e^{i\pi\mu}\mathfrak{P}_n^{\mu}(z).$$

Далее, согласно равенству (9а),

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(\mu+\varkappa+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa = \\ = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)} \mathfrak{P}_n^{-\mu}(z) = \mathfrak{P}_n^{\mu}(z);$$

последнее равенство в этой формуле следует из равенства (15).

Для логарифмической производной Г-функции имеем, согласно равенству (1.53а),

$$\frac{\Gamma'(\varkappa+\mu+1)}{\Gamma(\varkappa+\mu+1)} = \Psi(\varkappa+\mu) = -C + \sum_{\tau=1}^{\varkappa+\mu} \frac{1}{\tau}$$

и

$$\frac{\Gamma'(\varkappa+1)}{\Gamma(\varkappa+1)} = \Psi(\varkappa) = -C + \sum_{\tau=1}^{\varkappa} \frac{1}{\tau}.$$

Наконец, в силу равенств (9а) и (15),

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\cos \mu\pi} \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)} \left\{ \frac{\Gamma'(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma'(n-\mu+1)}{\Gamma(n-\mu+1)} \right\} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(\mu+\varkappa+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa = \\ = e^{-i\pi\mu} \mathfrak{P}_n^{\mu}(z) \{\Psi(n+\mu) + \Psi(n-\mu)\}.$$

Используя полученные выражения, находим

$$s_\varkappa = \sum_{\tau=1}^{\varkappa} \frac{1}{\tau}, \tag{36б}$$

$$2\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z) = \mathfrak{P}_n^{\mu}(z) \left(\ln \frac{z+1}{z-1} + 2\Psi(0) - \Psi(n+\mu) - \Psi(n-\mu)\right) + \\ + e^{i\pi\mu} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \frac{(n+1-\varkappa)_\varkappa (n+1)_\varkappa \Gamma(\mu-\varkappa)}{\varkappa!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa + \\ + (n-\mu+1)_{2\mu} \left\{ \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(\mu+\varkappa+1)} s_{\varkappa+\mu} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa + \right. \\ \left. + \frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(\mu-n)_\varkappa (n+\mu+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\Gamma(\mu+\varkappa+1)} s_\varkappa \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa \right\} \tag{36в}$$

(μ — положительное целое).

Присоединенные функции Лежандра второго рода имеют, таким образом, в точках $z = \pm 1$ логарифмические особенности. Для функций Лежандра $\mathfrak{Q}_n(z)$ мы получаем при $\mu = 0$

$$\mathfrak{Q}_n(z) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - \Psi(n) + \Psi(0)\right)\mathfrak{P}_n(z) + \\ + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-n)_\varkappa (n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\varkappa!} s_\varkappa \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa. \qquad (36г)$$

Если, кроме того, $n = \nu$—положительное целое число, то $\Psi(\nu) = \Psi(0) + s_\nu$ и сумма обрывается при $\varkappa = n$ из-за множителя $(-n)_\varkappa$; таким образом,

$$\mathfrak{Q}_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} - s_\nu\right)P_\nu(z) + \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{(-\nu)_\varkappa (\nu+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\varkappa!} s_\nu \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa \qquad (36д)$$

(ν — целое).

В силу равенства (7а), это соотношение можно записать также в форме

$$\mathfrak{Q}_\nu(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} P_\nu(z) - \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} (s_\nu - s_\varkappa) \frac{(-\nu)_\varkappa (\nu+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\varkappa!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^\varkappa \qquad (36е)$$

(ν — целое).

Сумма в этой формуле часто обозначается через $W_{\nu-1}(z)$. Поскольку $W_{\nu-1}(z)$ является многочленом степени $\nu - 1$ от z, его можно записать в виде $\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} a_k P_k(z)$, где ν постоянных a_k однозначно определяются ν коэффициентами равенства (36е). Мы получаем при этом формулу Кристоффеля.

5.2.1.0. Разложение $\mathfrak{P}_n^m(z)$ по степеням $\frac{z-1}{z+1}$. Из равенства (4.19) следует

$${}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right) = \\ = \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-n-1} {}_2F_1\left(1+n-m,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right)$$

или, в силу симметрии гипергеометрической функции,

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -m-n;\ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right).$$

Используя равенство (9а), определяющее функцию $\mathfrak{P}_n^m(z)$, получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -m-n;\ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right) \tag{37а}$$

или

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{-n-1}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(n+1,\ n+1-m;\ \ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right). \tag{37б}$$

Если $m\pm n$ — целое положительное число, то по крайней мере один из этих двух рядов обрывается.

Для целых положительных m оба равенства теряют силу; однако ввиду (4.19) из равенства (10а) или же с помощью равенства (15) непосредственно из обоих полученных равенств имеем

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{(n-\mu+1)_{2\mu}}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ \mu-n;\ 1+\mu;\ \frac{z-1}{z+1}\right)$$
$$(\mu\text{ — целое}) \tag{37в}$$

или

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{(n-\mu+1)_{2\mu}}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{-n-1}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(n+1,\ n+1+\mu;\ \ 1+\mu;\ \frac{z-1}{z+1}\right)$$
$$(\mu\text{ — целое}). \tag{37г}$$

Эти равенства справедливы, если $|(z-1)/(z+1)|<1$. Поскольку это условие равносильно условию $\operatorname{Re} z>0$, то оба условия (37) выполняются для всех z с положительной вещественной частью.

5.2.2. Представления в окрестности $z=-1$. Применяя равенство (4.21) к равенству (9а), получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1+n-m)\,\Gamma(-m-n)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1+m;\ \frac{1+z}{2}\right)+$$
$$+\,e^{\mp i\pi m}\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(-n)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right) \tag{38}$$
$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0)$$

или, поскольку $\Gamma(-n)\Gamma(1+n) = -\pi/\sin \pi n$,

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1+n-m)\Gamma(-m-n)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n, n+1; 1+m; \frac{1+z}{2}\right) -$$

$$- e^{\mp i\pi m}\frac{\sin n\pi}{\pi}\Gamma(m)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1+z}{2}\right)$$

$$(\operatorname{Im} z \gtrless 0). \qquad (38а)$$

Два знака возникают в этой формуле из-за того, что надо положить $1-z = e^{\mp i\pi}(z-1)$, в зависимости от того, имеем ли мы $\operatorname{Im} z > 0$ или $\operatorname{Im} z < 0$. Поскольку входящие в равенство (38) гипергеометрические ряды являются степенными рядами по $1+z$, то функция представима этими равенствами в круге радиуса 2 с центром в точке -1. Если $n = \nu$ — положительное или отрицательное число, то правая часть равенства (38а) обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1+\nu-m)\Gamma(-m-\nu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1+m; \frac{1+z}{2}\right)$$

(ν — целое). (38б)

Соответствующее соотношение имеет место и для $\mathfrak{Q}_n^m(z)$; оно получается из равенства (28а), если заменить в нем $\mathfrak{P}_n^m(z)$ и $\mathfrak{P}_n^{-m}(z)$ согласно равенству (38а). Простое преобразование показывает, что

$$2e^{-i\pi(m\mp n)}\mathfrak{Q}_n^m(z) = -\Gamma(m)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n, n+1; 1-m; \frac{1+z}{2}\right) -$$

$$- \frac{\Gamma(1+n+m)}{\Gamma(1+n-m)}\Gamma(-m)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} {}_2F_1\left(-n, n+1; 1+m; \frac{1+z}{2}\right)$$

$$\operatorname{Im} z \gtrless 0. \qquad (39)$$

Для целочисленных значений m это равенство, как и равенство (38), неприменимо. Проще всего в этом случае использовать соотношения обхода (33) и (34). Мы получаем из них

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = e^{\pm i\pi n}\mathfrak{P}_n^m\left(e^{\mp i\pi}z\right) - \frac{2\sin(n+m)\pi}{\pi}e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m\left(e^{\mp i\pi}z\right)$$

$$(\operatorname{Im} z \gtrless 0).$$

Принимая теперь во внимание соотношения $e^{\mp i\pi}z - 1 = e^{\mp i\pi}(z+1)$, $e^{\mp i\pi}z + 1 = e^{\mp i\pi}(z-1)$ и $e^{-i\pi\mu}\sin(n+\mu)\pi = \sin n\pi$, получаем, в силу

равенства (36в),

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\mathfrak{P}_n^{\mu}\left(e^{\mp i\pi}z\right)\times$$
$$\times\left[e^{\pm i\pi n}-\frac{\sin n\pi}{\pi}\left(\ln\frac{z-1}{z+1}+2\Psi(0)-\Psi(n+\mu)-\Psi(n-\mu)\right)\right]-$$
$$-\frac{\sin n\pi}{\pi}\left\{e^{i\pi\mu}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\frac{(n+1-\varkappa)_{\varkappa}(n+1)_{\varkappa}}{\varkappa!}\Gamma(\mu-\varkappa)\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\varkappa}+\right.$$
$$+(n-\mu+1)_{2\mu}\left[\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-n)_{\varkappa}(n+1)_{\varkappa}}{\varkappa!\,\Gamma(\varkappa+\mu+1)}S_{\varkappa+\mu}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\varkappa}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{e^{\mp i\pi\mu}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\mu}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_{\varkappa}(n+\mu+1)_{\varkappa}}{\varkappa!\,\Gamma(\varkappa+\mu+1)}S_{\varkappa}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\varkappa}\right]\right\}\quad(\mu-\text{целое}).$$

Множитель $\mathfrak{P}_n^{\mu}\left(e^{\mp i\pi}z\right)$ можно заменить по равенству (10а)

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}\left(e^{\mp i\pi}z\right)=e^{\mp i\pi\mu}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\frac{(n-\mu+1)_{2\mu}}{2^{\mu}\,\Gamma(1+\mu)}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(\mu-n,\ \mu+n+1;\ 1+\mu;\ \frac{1+z}{2}\right)\quad(\mu-\text{целое}).$$

Преобразуем логарифмическое выражение, учитывая его многозначность:

$$\ln\frac{z+1}{z-1}=\ln\frac{1+z}{1-z}\mp i\pi\qquad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).\tag{40}$$

Здесь для $\ln(1-z)$ берется главное значение. Далее, по равенству (1.57а)

$$\Psi(n-\mu)=\Psi(\mu-n-1)-\pi\operatorname{ctg}n\pi.$$

Поэтому множитель при $\mathfrak{P}_n^{\mu}\left(e^{\mp i\pi}z\right)$ принимает вид

$$\frac{\sin n\pi}{\pi}\left(\ln\frac{z+1}{z-1}+\Psi(\mu+n)+\Psi(\mu-n-1)-2\Psi(0)\right).$$

Из полученных выражений мы получаем, применяя равенство (1.57а),

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}e^{-i\pi\mu}\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=(n-\mu+1)_{2\mu}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\mu}\,\Gamma(1+\mu)}\left\{\left(\ln\frac{1+z}{1-z}+\Psi(\mu+n)+\right.\right.$$
$$\left.+\Psi(\mu-n-1)-2\Psi(0)\right){}_2F_1\left(\mu-n,\ \mu+n+1;\ 1+\mu;\ \frac{1+z}{2}\right)-$$

$$-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(\mu-n)_\varkappa\,(n+1+\mu)_\varkappa}{\varkappa!\,(1+\mu)_\varkappa}\,s_\varkappa\left(\frac{1+z}{2}\right)^\varkappa\Bigg\}-$$

$$-e^{-i\pi\mu}\,\frac{(n-\mu+1)_{2\mu}}{\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-n)_\varkappa\,(n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,(1+\mu)_\varkappa}\,s_{\varkappa+\mu}\left(\frac{1+z}{2}\right)^\varkappa-$$

$$-\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1}\frac{(n+1-\varkappa)_\varkappa\,(n+1)_\varkappa}{\varkappa!}\,\Gamma(\mu-\varkappa)\left(\frac{1+z}{2}\right)^\varkappa$$

(μ — целое). (41)

При $\mu=0$ отсюда вытекает

$$\frac{\pi}{\sin n\pi}\,P_n(z)=\left(\ln\frac{1+z}{1-z}+\Psi(n)+\Psi(-n-1)-2\Psi(0)\right)\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1+z}{2}\right)-2\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-n)_\varkappa\,(n+1)_\varkappa}{\varkappa!\,\varkappa!}\,s_\varkappa\left(\frac{1+z}{2}\right)^\varkappa. \tag{41а}$$

С помощью равенств (7) и (8) мы можем получить отсюда соответствующее равенство для $\mathfrak{P}_n^\mu(z)$ путем μ-кратного дифференцирования[1]).

Если и m и n — целые числа, то, учитывая соотношение

$$\Gamma(-\mu)/\Gamma(-\mu-\nu)=(-1)^\nu(\mu+1)_\nu,$$

получаем из равенства (38б)

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)=(-1)^\nu\,\frac{(\mu+1)_\nu}{\Gamma(1+\nu-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1+\mu;\ \frac{1+z}{2}\right)$$

(μ, ν — целые). (41б)

Из поведения Γ-функции вытекает, что при положительных μ и ν функции $\mathfrak{P}_n^\mu(z)$ отличны от нуля лишь при $\mu\leqslant\nu$. При $\mu=0$ получаем

$$P_\nu(z)=(-1)^\nu\,{}_2F_1\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \frac{1+z}{2}\right)\quad(\nu\text{ — целое}). \tag{41в}$$

Формулу для $\mathfrak{Q}_n^\mu(z)$, соответствующую равенству (39), можно получить с помощью (33) непосредственно из (36в), принимая во внимание равенство (39).

[1]) Разложение $P_n(z)$ по степеням $(1+z)/2$, при котором разлагается также и член $\ln(1-z)$, получил другим образом Hille E., *Arkiv för Mat.*, 13, № 17 (1918), стр. 7; см. также Гобсон, стр. 217.

5.2.3. Разложение по степеням $1-z^2$. Равенство (37б) дает представление для $\mathfrak{P}_n^m(z)$ через ${}_2F_1\left(n+1-m, n+1; 1-m; \frac{z-1}{z+1}\right)$. Но, согласно равенству (4.44),

$$
{}_2F_1\left(n+1-m,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{z-1}{z+1}\right)=
$$
$$
=\left(\frac{z+1}{2}\right)^{1+n-m}{}_2F_1\left(\frac{1+n-m}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ 1-m;\ 1-z^2\right).
$$

Подставляя это выражение в формулу (37б), получаем

$$
\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\,2^m(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1+n-m}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ 1-m;\ 1-z^2\right). \tag{42}
$$

И здесь не составляет труда получить формулу, пригодную и для случая, когда $m=\mu$ — положительное целое число. Применяя формулу (4.44) к (37г), получаем

$$
\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(1+\mu)}(n-\mu+1)_{2\mu}\frac{(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^{\mu}}\times
$$
$$
\times\,{}_2F_1\left(\frac{1+n+\mu}{2},\ \frac{\mu-n}{2};\ 1+\mu;\ 1-z^2\right) \tag{42а}
$$
$$
(\mu \text{ — положительное целое}).
$$

Применяя к равенству (42) формулу (4.19), получаем

$$
\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\,2^m(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\,z^{m+n}\times
$$
$$
\times\,{}_2F_1\left(\frac{1-m-n}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ 1-m;\ 1-\frac{1}{z^2}\right). \tag{43}
$$

Это соотношение пригодно при больших значениях z.

5.2.4. Разложение в окрестности точки $z=0$. Из равенства (42) вытекает, в силу формулы (4.21а),

$$
\mathfrak{P}_n^m(z)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^m(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\times
$$
$$
\times\left[\frac{{}_2F_1\left(\frac{1+n-m}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m-n}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{m-n}{2}\right)}-\right.
$$
$$
\left.-2z\,\frac{{}_2F_1\left(\frac{1-n-m}{2},\ 1-\frac{m-n}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-m}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{m+n}{2}\right)}\right]. \tag{44}
$$

Это равенство справедливо при $|z|<1$. Если $m+n$ — положительное целое число, то одно из двух слагаемых в равенстве (44) обращается в нуль. В самом деле, при $m+n=2\varkappa$ ($\varkappa$ — положительное целое или нуль) функция $\Gamma(-(m+n)/2)=\Gamma(-\varkappa)$ бесконечно велика, а потому второе слагаемое обращается в нуль. Если же $m+n=2\varkappa+1$, то $\Gamma((1-m-n)/2)=\Gamma(-\varkappa)=\infty$, и первое слагаемое равно нулю.

Для вычисления $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ можно подставить в равенство (28а) выражение, даваемое равенством (44), применить формулу удвоения (1.42) для Г-функции и преобразовать полученное выражение, согласно равенству (4.21а). Проще, однако, исходить из равенства (23а) и применить к нему формулу (4.22). Принимая во внимание формулу удвоения для Г-функции, непосредственно получаем, что

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}(n+|m|)}\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^m(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\times$$

$$\times\left\{\mp\frac{i}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1+n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n-m}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1+n+m}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ z^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(1+\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-m}{2}\right)}z\,{}_2F_1\left(1+\frac{n+m}{2},\ \frac{1-n+m}{2};\ \frac{3}{2};\ z^2\right)\right\}$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0). \qquad (45)$$

Это равенство также применимо при $|z|<1$.

5.2.5. Разложения при больших значениях $|z|$. Равенства (22а, 22б) непосредственно приводят к разложениям $\mathfrak{Q}_n^m(z)$, которые справедливы, если $(1+z)/2$ или $(1-z)/2$ по абсолютной величине больше 1.

При $|z|>1$ равенство (23) дает разложение по степеням $1/z^2$. Применяя к равенству (23а)

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{z^{m+n+1}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ 1+\frac{n+m}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

формулу (4.19), получаем разложение по степеням $1/(1-z^2)$:

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{-\frac{n+1}{2}}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{1+n-m}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right). \quad (46)$$

Поскольку равенство (22) неприменимо при полуцелых отрицательных значениях n, преобразуем его по формуле (4.39) и применим формулу удвоения для Г-функции; мы получим

$$\mathfrak{Q}^m_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{e^{i\pi m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}(z+1)^{-\nu-m-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2},\ m+\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{2}{1+z}\right)$$
(ν — целое). (47а)

Отсюда, в силу (4.19), имеем

$$\mathfrak{Q}^m_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{e^{i\pi m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}(z-1)^{-\nu-m-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\nu+\frac{1}{2},\ m+\nu+\frac{1}{2};\ 2\nu+1;\ \frac{2}{1-z}\right)$$
(ν — целое). (47б)

Для того чтобы получить формулу, аналогичную (23а) и справедливую также при полуцелых отрицательных n, преобразуем равенство (23а) с помощью формулы (4.39), либо, что проще, одно из равенств (47) с помощью формулы (4.41). В результате имеем

$$\mathfrak{Q}^m_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) = \frac{e^{i\pi m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\nu+\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}z^{-\nu-m-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times {}_2F_1\left(\frac{m+\nu+\frac{1}{2}}{2},\ \frac{m+\nu+\frac{3}{2}}{2};\ \nu+1;\ \frac{1}{z^2}\right)$$
(ν — целое). (48а)

Из равенств (27) и (23а) мы непосредственно получаем представление

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{1}{\cos n\pi}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sin(n+m)\pi\,\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)z^{m+n-1}}\,{}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ 1+\frac{n+m}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(n-m)\pi\,2^n\Gamma(m-n)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)z^{m-n}}\,{}_2F_1\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{z^2}\right)\right\}. \tag{48б}$$

Соответствующая формула может быть получена также и из равенства (46).

Если n — полуцелое число, то равенство (48б) теряет силу, поскольку теряет силу уже равенство (27), принимающее вид 0/0. Предельное значение можно получить с помощью дифференцирования числителя и знаменателя по n [1]). Часто используют равенство (43), которое справедливо для всех n, если $|1-1/z^2|<1$.

Применяя формулу (4.22) к равенству (42), получаем, наконец, что

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = 2^m\left\{\frac{\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{-\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n-m}{2}\right)}\times\right.$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1+n-m}{2},\ \frac{1+n+m}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(z^2-1)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+n-m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-m}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{m-n}{2},\ -\frac{m+n}{2};\ \frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{1-z^2}\right)\right\}. \tag{49}$$

Это равенство аналогично равенству (46).

Возникающие соотношения позволяют получить степенное разложение функций Лежандра для любого значения z. Для некоторых целей, однако, удобно указанное ниже разложение по степеням $u = z - \sqrt{z^2-1}$.

[1]) При целочисленных $m=\mu$ вычисление проведено у Гобсона, стр. 203.

5.2.6. Разложение по степеням $z-\sqrt{z^2-1}$. Равенства (22а) и (22б) представляют функцию Лежандра второго рода через гипергеометрическую функцию, причем третий параметр равен удвоенному первому параметру. Это позволяет, в силу 4.3.3, применить либо преобразование, определяемое формулой (4.41), либо преобразование, определяемое формулой (4.42). Первая возможность уже использована нами. Она приводит к равенству (23), которое было получено в 5.2.5. Применим теперь равенство (4.42)

$$ {}_2F_1\left(a,\ b;\ 2a;\ \frac{4u}{(u+1)^2}\right)=(u+1)^{2b}\,{}_2F_1\left(b,\ b-a+\frac{1}{2};\ a+\frac{1}{2};\ u^2\right). $$

Введем переменное z, положив $2/(1+z)=4u/(1+u)^2$. Выбирая перед корнем отрицательный знак, имеем

$$ u=z-\sqrt{z^2-1};\quad 1/u=z+\sqrt{z^2-1}. \tag{50} $$

Поскольку аргументы чисел $z+1$ и $z-1$ уже зафиксированы, то и значение $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ также однозначно определено, причем

$$ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi\to 0\leqslant\arg(z+1)\leqslant\arg\sqrt{z^2-1}\leqslant\arg(z-1)\leqslant\pi, $$

$$ 0\geqslant\arg z\geqslant-\pi\to 0\geqslant\arg(z+1)\geqslant\arg\sqrt{z^2-1}\geqslant\arg(z-1)\geqslant-\pi. $$

Отсюда вытекает, что z, $\sqrt{z^2-1}$ и $z+\sqrt{z^2-1}$ лежат в одном и том же квадранте гауссовской комплексной плоскости, причем $|z+\sqrt{z^2-1}|\geqslant|z-\sqrt{z^2-1}|$. В силу этого, $|u|\leqslant 1$ для всех значений z. Знак равенства имеет место лишь в случае, если $-1\leqslant z\leqslant+1$. Из равенств (50) следует

$$ 2z=\frac{1}{u}+u,\quad 2\sqrt{z^2-1}=\frac{1}{u}-u,\quad z\pm 1=\frac{(1\pm u)^2}{2u}. \tag{50а} $$

Положим еще

$$ z+\sqrt{z^2-1}=\rho e^{i\Phi_0}=e^{\alpha+i\Phi_0}=e^{w_0}\qquad(\alpha\geqslant 0), \tag{50б} $$

получим

$$ u=e^{-w_0},\quad z=\operatorname{ch} w_0,\quad \sqrt{z^2-1}=\operatorname{sh} w_0. \tag{50в} $$

Далее, из равенства (22а) следует

$$ \mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\,2^m\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,u^{n+m+1}\times $$

$$ \times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m,\ n+m+1;\ n+\frac{3}{2};\ u^2\right). \tag{51} $$

Подставляя полученные выражения в равенство (27) и принимая во внимание, что $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\pi/\sin p\pi$, получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{2^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\left\{\frac{\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-n-m)}u^{n+m+1}\times\right.$$

$$\times{}_2F_1\left(m+\frac{1}{2},\ m+n+1;\ n+\frac{3}{2};\ u^2\right)+\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+n-m)}u^{m-n}\times$$

$$\left.\times{}_2F_1\left(m+\frac{1}{2},\ m-n;\ -n+\frac{1}{2};\ u^2\right)\right\}. \quad (52)$$

Поскольку для всех значений z, исключая значения, лежащие на отрезке $-1\leqslant z\leqslant+1$, абсолютное значение u меньше 1, гипергеометрические ряды в этом равенстве при всех n и m сходятся во всей плоскости z, исключая разрез $-1\leqslant z\leqslant+1$.

Равенство (52) можно представить в более компактной форме. Используем для этого соотношение (37а): При $a=1/2-m$, $b=-m-n$, функция ${}_2F_1(-m-n,\ -n;\ 1-m;\ (z-1)/(z+1))$ принимает тот же вид: ${}_2F_1(b,\ b-a+1/2;\ a+1/2;\ v^2)$, что и правая часть равенства (4.42). Стоящее в левой части выражение $4v/(v+1)^2$ равно $1-u^2$, где u задается формулой (50). Принимая во внимание равенства (50б) и (50в), имеем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{2^m}{\Gamma(1-m)}u^{-n-m}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-m,\ -n-m;\ 1-2m;\ 1-u^2\right). \quad (52а)$$

Применяя равенства (4.21) и (4.20), мы вновь получаем соотношение (52).

Из формул (51) и (37б) вытекает замечательная связь между функциями $\mathfrak{P}_n^m$ и $\mathfrak{Q}_{-m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$, открытая Уипплом[1]). Легко видеть, что обе функции имеют вид ${}_2F_1(a,\ a+c-1;\ c;\ z)$. Соответствие $(z-1)/(z+1)=u^2=\left(z'-\sqrt{z'^2-1}\right)^2$ приводит к равенству Уиппла:

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{(z^2-1)^{\frac{1}{4}}\Gamma(n-m+1)}\mathfrak{Q}_{-m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right). \quad (53)$$

[1]) Whipple F. J. W., *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), XVI (1917), p. 301.

5.2.6.0. Поведение на разрезе. Если $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, то гипергеометрический ряд ${}_2F_1(a, b; c; z)$ абсолютно и равномерно сходится во всем круге сходимости (см. 4.2.1.0); если же $\operatorname{Re}(c-a-b)>-1$, то он равномерно сходится в области, получаемой удалением из круга сходимости области $|z-1|<\varepsilon$, где ε — любое положительное число. Применим это замечание к разложению (51). По равенствам (50б) и (50в) круг сходимости ограничен линией $u^2=e^{-2i\Phi_0}$. Если $\operatorname{Re} m<0$, то это разложение сходится во всем круге сходимости, т. е. для всех z. Если $0\leqslant\operatorname{Re} m<1/2$, то ряд сходится лишь при $0<\Phi_0<\pi$, или, что то же самое, при $-1<z<+1$. Он расходится на всей единичной окружности, если $\operatorname{Re} m\geqslant 1/2$. Поэтому при $\operatorname{Re} m\geqslant 0$ равенство (51) неприменимо в окрестностях точек -1 и $+1$. Преобразовывая его по равенству (24), получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{u^{n-m+1}}{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ u^2\right). \qquad (54)$$

Здесь при $\operatorname{Re} m>0$ гипергеометрический ряд сходится в круге $|u|\leqslant 1$, т. е. во всей плоскости z.

Положим в равенствах (50б) и (50в) $w_0=\alpha\pm i\theta$. Тогда

$$z=\operatorname{ch} i(\theta\mp i\alpha)=\cos(\theta\mp i\alpha)=\cos\theta\operatorname{ch}\alpha\pm i\sin\theta\operatorname{sh}\alpha.$$

Если $\alpha\to 0$, то имеем $z=\cos\theta\pm i0$. Соответственно этому получим $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}=\pm i\sin\theta$. Для $\mathfrak{Q}_n^m(\cos\theta+i0)$, заменяя в равенстве (54) u на $e^{-i\theta}$, получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(\cos\theta+i0)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sin^m\theta}e^{-i\theta(n-m+1)}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{-2i\theta}\right).$$

Аналогично, полагая $u=e^{+i\theta}$, находим

$$\mathfrak{Q}_n^m(\cos\theta-i0)=\frac{e^{3i\frac{\pi}{2}m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sin^m\theta}e^{+i\theta(n-m+1)}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}-m,\ n-m+1;\ n+\frac{3}{2};\ e^{2i\theta}\right).$$

Записывая ${}_2F_1$ в виде ряда с помощью равенства (21), определяющего $Q_n^m(\cos\theta)$, получаем

$$2Q_n^m(\cos\theta) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\sin^m\theta}\left\{e^{i\,(m\pi+(n-m+1)\,\theta}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-m\right)_x(n-m+1)_x}{x!\left(n+\frac{3}{2}\right)_x}e^{2ix\theta}+\right.$$

$$\left.+\,e^{-i\,(m\pi+(n-m+1)\,\theta)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-m\right)_x(n-m+1)_x}{x!\left(n+\frac{3}{2}\right)_x}e^{-2ix\theta}\right\}.$$

Внесем показательные функции под знак суммы и примем во внимание, что $e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi$; получим

$$Q_n^m(\cos\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^m\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\sin^{-m}\theta\times$$

$$\times\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-m\right)_x(n-m+1)_x}{x!\left(n+\frac{3}{2}\right)_x}\cos(m\pi+(n-m+1+2x)\,\theta)$$

$$(\operatorname{Re} m>0). \qquad (55)$$

Если $\operatorname{Re} m>0$, то этот ряд сходится при всех θ. Если $\operatorname{Re} m=0$, то ряд сходится для всех θ, за исключением точек $\theta=0$ и $\theta=\pi$. Для положительных целых $m=\mu$ имеем

$$Q_n^{\mu}(\cos\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+\mu+1)}{2^{\mu}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\sin^{-\mu}\theta\,(-1)^{\mu}\times$$

$$\times\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)_x(n-\mu+1)_x}{x!\left(n+\frac{3}{2}\right)_x}\cos(n+1-\mu+2x)\,\theta$$

(μ — положительное целое число). (55а)

При $\mu=0$

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x(n+1)_x}{x!\left(n+\frac{3}{2}\right)_x}\cos(n+1+2x)\,\theta. \qquad (55б)$$

Последний ряд расходится при $\cos\theta = \pm 1$. Разложение, пригодное и в случае, когда вещественная часть m отрицательна, получается из равенства (51):

$$Q_n^m(\cos\theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} 2^m \sin^m\theta \times$$

$$\times \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)_\varkappa (n+m+1)_\varkappa}{\varkappa!\left(n+\frac{3}{2}\right)_\varkappa} \cos(n+m+1+2\varkappa)\theta$$

$$(\operatorname{Re} m < 0). \qquad (55в)$$

Условия сходимости, которые мы вывели для равенства (55), сохраняют силу, при соответствующих изменениях, и для равенства (55в).

5.3. Интегральные представления

5.3.1. Гипергеометрический интеграл. Из равенств (51) и (52а) предыдущего параграфа легко получить простые интегральные представления для функций Лежандра. Во-первых, равенство (4.11), определяющее гипергеометрическую функцию, в силу равенства (51), дает

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m} \frac{2^m\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} u^{n+m+1}(z^2-1)^{\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \int_{(0)}^{(1)} s^{n+m}(1-s)^{-m-\frac{1}{2}}(1-u^2s)^{-m-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Сделаем здесь замену переменных $t = us$ и $\left(u = z - \sqrt{z^2-1}\right)$. Примем во внимание, что $(1-s)(1-u^2s) = (1-t/u)(1-tu) = 1 + t^2 - 2zt$. Мы получим

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m} \frac{2^m\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} (z^2-1)^{\frac{m}{2}} \int_{(0)}^{(u)} \frac{t^{n+m}\,dt}{(1+t^2-2zt)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$(u = z - \sqrt{z^2-1}). \qquad (56)$$

При $m = 0$ отсюда следует

$$\mathfrak{Q}_n(z) = \int_{(0)}^{(u)} \frac{t^n\,dt}{\sqrt{1+t^2-2zt}}. \qquad (56а)$$

Для однозначного определения интеграла надо еще зафиксировать значение аргумента подинтегральной функции. В гипергеометри-

ческом интеграле мы условились, что аргумент подинтегральной функции должен стремиться к нулю, если $s \to 0$. Поскольку при нашем преобразовании точке $s = 0$ соответствует точка $t = 0$, то мы должны потребовать, чтобы аргумент $1 + t^2 - 2zt = (u + t)(1/u - t)$ обращался в нуль при $t = 0$. Этого можно достигнуть, если положить (см. рис. 24)

$$\arg(1 + t^2 - 2zt) = \arg((u - t)(1/u - t)) = \alpha + \beta$$

и считать, что для всех точек положительной полуоси t мы имеем $|\alpha| \leqslant \pi$ и $|\beta| \leqslant \pi$. Поскольку в этом случае α и β имеют различные знаки, то $|\alpha + \beta| < \pi$. Отсюда вытекает следующее правило

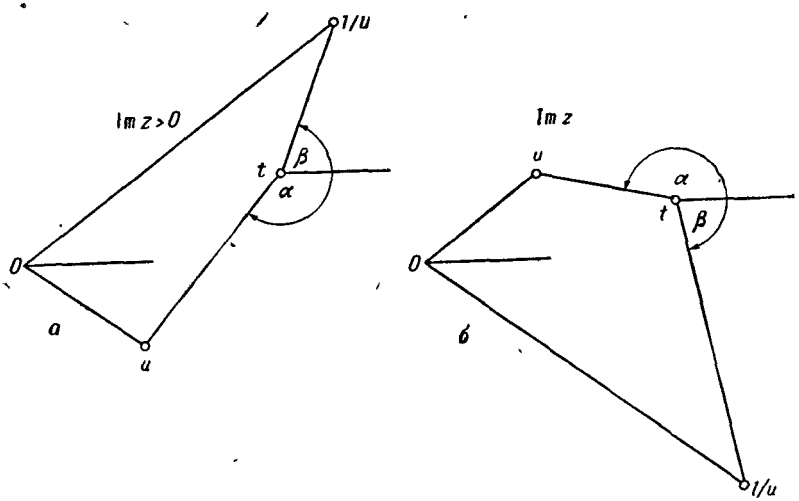


Рис. 24. Определение аргументов на плоскости t.

для определения аргумента: для всех точек положительной полуоси имеем $|\arg(1 + t^2 - 2tz)| < \pi$.

Заменяя в равенстве (56) переменную интегрирования ее обратной величиной, получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m} \frac{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right)} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \int_{\left(\frac{1}{u}\right)}^{(\infty)} \frac{t^{-n+m-1}\, dt}{(1 + t^2 - 2zt)^{m+\frac{1}{2}}} \qquad (57)$$

$$\mathfrak{Q}_n(z) = \int_{\left(\frac{1}{u}\right)}^{(\infty)} \frac{t^{-n-1}\, dt}{\sqrt{1 + t^2 - 2zt}} \quad \left(\frac{1}{u} = z + \sqrt{z^2 - 1}\right). \qquad (57а)$$

Аргументы выбраны здесь так, что при $t = +\infty$ выполняется соотношение $\arg(1+t^2-2zt) = 2\arg t$. Это равенство имеет место при том же условии, что и равенство (56).

Аналогичным образом можно получить интегральное представление для $\mathfrak{P}_n^m$ из равенства (52а). Предположим сначала, что $\operatorname{Re} z > 0$. Для входящих в это равенство гипергеометрических функций имеем

$$B\left(\frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}-m\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2}-m,\ -n-m;\ 1-2m;\ 1-u^2\right) = \int_{(0)}^{(1)} s^{-m-\frac{1}{2}}(1-s)^{-m-\frac{1}{2}}(1-(1-u^2)s)^{n+m}\,ds.$$

Сделаем подстановку $r = 1-(1-u^2)s$ и положим еще для простоты $t = r/u$. Мы получим

$$1-(1-u^2)s = ut,\quad s = \frac{\left(\frac{1}{u}-t\right)u}{1-u^2},\quad 1-s = \frac{(t-u)u}{1-u^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{0)}^{(1)} s^{-m-\frac{1}{2}}(1-s)^{-m-\frac{1}{2}}(1-(1-u^2)s)^{n+m}\,ds = u^{n+m}\left(\frac{1}{u}-u\right)^{2m}\int_{(u)}^{\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{t^{n+m}\,dt}{\left[(t-u)\left(\frac{1}{u}-t\right)\right]^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Подставим это выражение в равенство (52а); тогда, принимая во внимание равенство (1.39), мы получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{2^m(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\int_{(u)}^{\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{t^{n+m}\,dt}{(2zt-1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}} \qquad (58)$$

$$\left(u = z-\sqrt{z^2-1}\right).$$

Поскольку $s(1-s) = \dfrac{\left(\frac{1}{u}-t\right)(t-u)}{\left(\frac{1}{u}-u\right)^2}$, то на прямой линии, соединяющей точки u и $1/u$ и соответствующей отрезку $0 \leqslant s \leqslant 1$, должно выполняться равенство

$$\arg\left(\frac{1}{u}-t\right)(t-u) = 2\arg\left(\frac{1}{u}-u\right).$$

Но $|1/u| \geqslant |u|$ и $\arg(1/u) = -\arg u$, а потому $|\arg(1/u - u)| \leqslant \pi/2$; отсюда вытекает, что аргумент определяется следующим условием: на положительной полуоси $|\arg(2zt - 1 - t^2)| \leqslant \pi$.

Чтобы установить связь между представлениями (56) и (58), заметим, что в точке A вещественной оси (рис. 25) знак $\arg(2zt_A - 1 - t_A^2) = 2\arg(1/u - u)$ совпадает со знаком u, а тем самым со

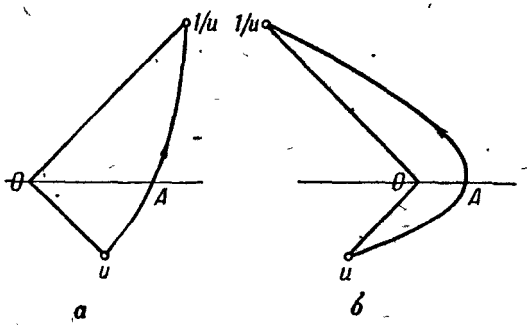


Рис. 25. Деформация пути интегрирования при аналитическом продолжении.

знаком z. Поскольку абсолютное значение аргумента $1 + t^2 - 2zt$ не может превосходить π, мы должны положить

$$2zt - 1 - t^2 = e^{\pm i\pi}(1 + t^2 - 2zt) \quad (\operatorname{Im} z \gtrless 0).$$

Поэтому равенство (58) можно переписать так:

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{2^m (z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} e^{\mp i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_{(u)}^{\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{t^{n+m}dt}{(1+t^2-2zt)^{m+\frac{1}{2}}} \quad (58a)$$

$$\left(\operatorname{Im} z \gtrless 0, \quad u = z - \sqrt{z^2-1}\right).$$

В интегралах (58) и (58а) путь интегрирования является отрезком, соединяющим нули знаменателя. По теореме Коши этот путь можно заменить любым путем, соединяющим эти точки и получающимся из него деформацией, при которой путь не пересекает особой точки, т. е. точки $t = 0$. Это дает возможность применить равенства (58) и (58а) также и при $\operatorname{Re} z < 0$, поскольку интеграл, взятый по пути, изображенному на рисунке 25, *б*, является, очевидно, аналитическим продолжением интеграла, взятого по пути, соответствующему рисунку 25, *а*.

Если интегралы в равенствах (58) и (58а) не могут быть заменены собственными интегралами, то поскольку

$$\int\limits_{(u)}^{\left(\frac{1}{u}\right)} \frac{t^{n+m}\,dt}{(2zt-1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1-e^{-2i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}} \oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u-\right)} \frac{t^{n+m}dt}{(2zt-1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}}$$

и $\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi=\pi$, мы получаем, что

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{2^m\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,e^{i\pi m}\oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u-\right)}\frac{t^{n+m}\,dt}{(2zt-1-t^2)^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{58б}$$

Здесь в начале пути интегрирования на положительной полуоси имеем $|\arg(2zt-1-t^2)|<\pi$.

Если $m=\mu$ — целое число, то сумма показателей ветвления в интеграле (58а) — целое число. В этом случае можно взять в качестве пути интегрирования замкнутую линию, обходящую в одном и том же направлении обе точки ветвления. Мы получаем из равенства (58а)

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{2^{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}{\pm 2i\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u+\right)}\frac{t^{n+\mu}\,dt}{(1+t^2-2zt)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0,\ \mu\text{ — целое}) \tag{58в}$$

или непосредственно из равенства (58б)

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{2^{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\,e^{i\pi\mu}\oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u+\right)}\frac{t^{n+\mu}\,dt}{(-1-t^2+2zt)^{\mu+\frac{1}{2}}} \tag{58г}$$

(μ — целое).

При $\mu=0$ отсюда вытекает

$$\mathfrak{P}_n(z)=\frac{1}{2\pi}\oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u+\right)}\frac{t^n\,dt}{\sqrt{2zt-1-t^2}}=\frac{1}{\pm 2i\pi}\oint^{\left(\frac{1}{u}+,\,u+\right)}\frac{t^n\,dt}{\sqrt{1+t^2-2zt}}$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0). \tag{58д}$$

5.3.2. Интегралы для функций Лежандра от переменных $\operatorname{ch} w$ и $\cos\theta$. Интегральное представление (58) допускает простое преобразование. Вынесем в выражении $2zt-1-t^2$ множитель t за

скобки и положим по равенству (51) $u = e^{-w_0}$, $z = \operatorname{ch} w_0$, $t = e^w$. Мы получим тогда $2zt - 1 - t^2 = t\,(2\operatorname{ch} w_0 - 2\operatorname{ch} w)$, поэтому из равенства (58) имеем

$$\mathfrak{P}_n^m(\operatorname{ch} w_0) = \frac{\operatorname{sh}^m w_0}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \int_{(-w_0)}^{(+w_0)} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (59)$$

Поскольку особая точка $t = 0$ теперь преобразована в бесконечно удаленную точку плоскости w, то за путь интегрирования можно взять любой путь, стягиваемый в прямолинейный отрезок, соединяющий точки $-w_0$ и $+w_0$. Точка $+w_0$ лежит в правой

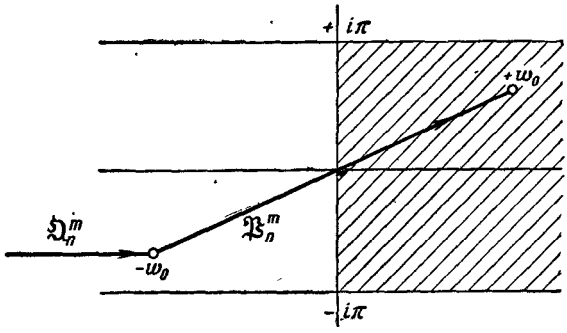


Рис. 26. Путь интегрирования в плоскости w.

полуплоскости в полосе $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ (рис. 26). Если интеграл в равенстве (59) является собственным, то, принимая во внимание, что $\operatorname{ch}(-w) = \operatorname{ch} w$, его можно преобразовать так:

$$\int_{-w_0}^{+w_0} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}} = \int_0^{w_0} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \int_0^{w_0} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}} = 2\int_0^{w_0} \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому мы получаем из равенства (59)

$$\mathfrak{P}_n^m(\operatorname{ch} w_0) = \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{sh}^m w_0}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \int_0^{w_0} \frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{(\operatorname{ch} w_0 - \operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\operatorname{Re} m < \frac{1}{2}\right) \qquad (59a)$$

и соответственно из равенства (58а)

$$\mathfrak{P}_n^m(\operatorname{ch} w_0)=\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}^m w_0}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}e^{\mp i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{w_0}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{(\operatorname{ch} w_0-\operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0,\quad \operatorname{Re} m<1/2).. \tag{59б}$$

Поскольку $\oint\limits_0^{(w_0+,\,-w_0-)}=\oint\limits_0^{(w_0+)}-\oint\limits_0^{(-w_0+)}$, то для интеграла по петле мы получаем, заменяя во втором интеграле w на $-w$, что

$$\oint\limits_0^{(w_0+,\,-w_0-)}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w_0-\operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}=2\oint\limits_0^{(w_0+)}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{(\operatorname{ch} w_0-\operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому из равенства (58б) следует, что

$$\mathfrak{P}_n^m(\operatorname{ch} w_0)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}{\sqrt{2}\,\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}e^{i\pi m}\operatorname{sh}^m w_0\oint\limits_0^{(w_0+)}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{(\operatorname{ch} w_0-\operatorname{ch} w)^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{59в}$$

Аргумент определен тем, что в начале пути $|\arg(\operatorname{ch} w_0-1)|<\pi$. При $m=0$ из равенства (59а) вытекает

$$\mathfrak{P}_n(\operatorname{ch} w_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{w_0}\frac{\operatorname{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)w\,dw}{\sqrt{2\operatorname{ch} w_0-2\operatorname{ch} w}}. \tag{59г}$$

Это равенство допускает многочисленные специализации. Заметим, прежде всего, что равенства (59а) и (59г) сохраняют свою силу, если $w_0\to$ вещественное число, т. е. если z — вещественно и больше 1.

Если w_0 — чисто мнимое, т. е. равно $i\theta$, то $\operatorname{ch} w_0=\cos\theta$ и потому $-1\leqslant z\leqslant+1$. Поскольку в этом случае следует различать, находится ли точка z на верхнем или нижнем берегу разреза, то мы полагаем $w_0=\alpha\pm i\theta$ и, поскольку $\operatorname{ch}(\alpha\pm i\theta)=\operatorname{ch}\alpha\cos\theta\pm i\operatorname{sh}\alpha\sin\theta$, $\operatorname{sh}(\alpha\pm i\theta)=\operatorname{sh}\alpha\cos\theta\pm i\operatorname{ch}\alpha\sin\theta$, получаем при $\alpha\to 0$

$$\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{ch}(\alpha\pm i\theta)=\cos\theta\pm i0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\operatorname{sh}(\alpha\pm i\theta)=\pm i\sin\theta.$$

Но, в силу равенства (12),

$$P_n^m(\cos\theta)=e^{i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{P}_n^m(\cos\theta+i0)=e^{-i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{P}_n^m(\cos\theta-i0).$$

Поэтому при $w = i\varphi$ из равенства (59б) вытекает

$$P_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^m\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}$$
$$\left(\operatorname{Re} m < {}^1/_2\right). \qquad (60)$$

Для любых значений m получаем из интеграла по петле (59в)

$$P_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\pi m}}{2\cos m\pi}\,\frac{\sin^m\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}\int_0^{(\theta+)}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (60а)$$

При $m = 0$ получаем из равенства (60) формулу Мелера

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2\cos\varphi-2\cos\theta}}. \qquad (60б)$$

Заменяя в равенстве (60) m на $-m$, имеем

$$P_n^{-m}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^{-m}\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-m+\frac{1}{2}}}$$
$$\left(\operatorname{Re} m > -\frac{1}{2}\right). \qquad (60в)$$

Отсюда, в силу равенства (29а), имеем для целочисленных $m = \mu$

$$(-1)^{\mu}(n-\mu+1)_{2\mu}\,P_n^{\mu}(\cos\theta) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin^{-\mu}\theta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)}\int_0^{\theta}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{-\mu+\frac{1}{2}}}$$
(μ — положительное целое). (60г)

Эти равенства принимают другой вид[1]), если заменить φ на $\pi-\varphi$ и θ на $\pi-\theta$. Например, при $m = 0$ и целочисленном $n = \nu$ из равенства (60б) получаем, принимая во внимание (34г), что

$$P_\nu(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2\cos\theta-2\cos\varphi}} \quad (\nu\text{ — целое}). \qquad (60д)$$

[1]) Гобсон дает на стр. 255—269 целый ряд аналогичных формул. Проще всего их получить из интеграла (59), рассматривая некоторые замкнутые пути интегрирования. В равенстве (137) Гобсон допустил ошибку: это равенство справедливо лишь при целых значениях n.

Соответствующие формулы для $\mathfrak{Q}_n^m(\operatorname{ch} w_0)$ мы вычислим до конца лишь в одном случае. Применяя преобразование $t = e^w$ к равенству (56), получаем

$$\mathfrak{Q}_n^m(\operatorname{ch} w_0) = \frac{e^{i\pi m}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \operatorname{sh}^m w_0 \int\limits_{(-\infty)}^{(-w_0)} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w - \operatorname{ch} w_0)^{m+\frac{1}{2}}}. \quad (61)$$

Если z — вещественное число, большее 1, то w_0 вещественно, а потому в качестве пути интегрирования можно взять отрицательную полуось.

Заменяя в равенстве (61) переменную интегрирования на $-w$, получаем равенство вида

$$\mathfrak{Q}_n^m(\operatorname{ch} w_0) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \operatorname{sh}^m w_0 \int\limits_{(w_0)}^{(\infty)} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{(\operatorname{ch} w - \operatorname{ch} w_0)^{m+\frac{1}{2}}}. \quad (61а)$$

Если $\operatorname{Re}(n+m+1) > 0$ и $\operatorname{Re}(m) > 1/2$, то интеграл по петле можно заменить обычным интегралом. В частности, если индекс $n = \nu - 1/2$ полуцелый, то, в силу равенства (30), имеем $\mathfrak{Q}^m_{\nu-\frac{1}{2}}(z) = \mathfrak{Q}^m_{-\nu-\frac{1}{2}}(z)$, и потому

$$\mathfrak{Q}^m_{\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} w_0) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)} \operatorname{sh}^m w_0 \int\limits_{(w_0)}^{(\infty)} \frac{e^{\nu w}\,dw}{(\operatorname{ch} w - \operatorname{ch} w_0)^{m+\frac{1}{2}}}$$
$$(\nu \text{ — целое}). \quad (61б)$$

Если, кроме того, $\operatorname{Re}(\nu - m) < 0$ и $\operatorname{Re} m < 1/2$, то это выражение можно заменить собственным интегралом.

При $m = 0$ равенство (61а) принимает вид

$$\mathfrak{Q}_n(\operatorname{ch} w_0) = \int\limits_{w_0}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)w}\,dw}{\sqrt{2(\operatorname{ch} w - \operatorname{ch} w_0)}} \quad (\operatorname{Re}(n+1) > 0). \quad (61в)$$

Для полуцелых отрицательных индексов из равенства (61б) получаем

$$\mathfrak{Q}_{-\nu-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} w_0) = \int\limits_{w_0}^{\infty} \frac{e^{-\nu w}\,dw}{\sqrt{2(\operatorname{ch} w - \operatorname{ch} w_0)}} \quad (\nu \geqslant 0 \text{ — целое}). \quad (61г)$$

5.3.3. Интеграл Лапласа. Новое интегральное представление получается из равенств (57) и (58), если положить

$$1 - 2zt + t^2 = (t-z)^2 - (z^2-1) = (z^2-1)\left[\left(\frac{t-z}{\sqrt{z^2-1}}\right)^2 - 1\right]$$

и сделать подстановку

$$\frac{t-z}{\sqrt{z^2-1}}=\operatorname{ch} v.$$

Мы получим тогда

$$1-2zt+t^2=(z^2-1)\operatorname{sh}^2 v \quad \text{и} \quad t=z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v.$$

Поэтому из формулы (57) вытекает

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{2^m\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}(z^2-1)^{-\frac{m}{2}}\int_{(0)}^{(\infty)}\frac{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v)^{m-n-1}}{\operatorname{sh}^{2m} v}\,dv. \quad (62)$$

Поскольку в окрестности нижнего предела интегрирования $\operatorname{sh} v$ ведет себя, как v, то при $\operatorname{Re} m<{}^1/_2$ этот интеграл можно рассматривать как обычный. Так как, далее, $\operatorname{ch} v$ и $\operatorname{sh} v$ при больших значениях v ведут себя, как e^v, то для сходимости вблизи верхнего предела интегрирования мы должны иметь $\operatorname{Re}(n+m+1)>0$. Если эти условия не выполнены, то воспользуемся равенством (24) и получим

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{2i\pi m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\mathfrak{Q}_n^{-m}(z)=$$

$$=e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^m\Gamma(n-m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^{2m} v\,dv}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v)^{n+m+1}}$$

$$(\operatorname{Re}(m)>-{}^1/_2,\ \operatorname{Re}(n+1-m)>0). \quad (62a)$$

При $m=0$ отсюда следует

$$\mathfrak{Q}_n(z)=\int_0^\infty\frac{dv}{(z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v)^{n+1}} \qquad (\operatorname{Re}(n+1)>0). \quad (62б)$$

Аналогичное представление можно получить для $\mathfrak{P}_n^\mu(z)$. Будем исходить из обобщенного интеграла Шлефли (см. равенства (9) и (10б)). Мы имеем

$$\mathfrak{P}_n^\mu(z)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{2i\pi\,\Gamma(n+1)}(z^2-1)^{\frac{\mu}{2}}\oint^{(1+z+)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+\mu+1}} \quad (\mu\text{ — целое}). \quad (63)$$

В качестве пути интегрирования можно взять любую замкнутую кривую, лежащую целиком в конечной области и охватывающую точки $t=z$ и $t=1$, но не охватывающую точку $t=-1$. В качестве такой кривой при $\operatorname{Re} z>0$ можно, например, взять окружность с центром в точке $t=z$, одна из точек пересечения которой с вещественной осью лежит между $t=-1$ и $t=+1$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы радиус ρ этой окружности удовлетворял условиям

$|z-1|<\rho<|z+1|$. Поскольку $|z-1|^2<|z-1||z+1|<|z+1|^2$, то $\rho=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\alpha}$ удовлетворяет этим условиям, если α вещественно, причем $|2\alpha|<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$. Поэтому в качестве пути интегрирования можно взять окружность, задаваемую равенством $t-z=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi+\alpha}$. Введем в интеграле (63) в качестве переменной

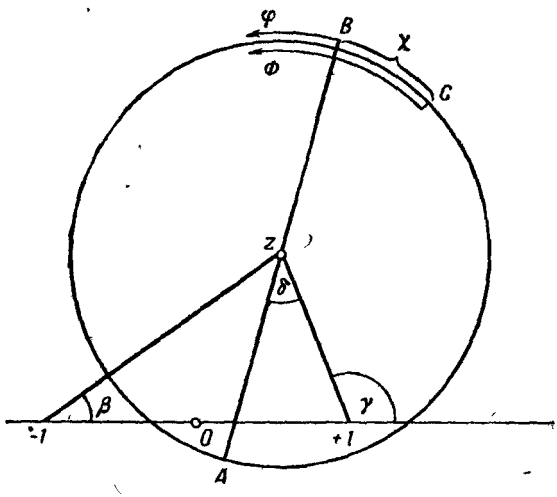


Рис. 27. Определение аргументов в интеграле Лапласа для $\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)$.

интегрирования вместо t центральный угол φ и выберем направление отсчета для φ так, чтобы совпадали аргументы: $\arg(t-z)=\arg\left\{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\alpha+i\varphi}\right\}=\varphi+\arg(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$. Тогда (см. рис. 27) $\arg(z-1)=\gamma$, $\arg(z+1)=\beta$, а потому $\arg(z^2-1)^{1/2}=(\gamma+\beta)/2=\eta$. Здесь η является углом между вещественной осью и биссектрисой $\overrightarrow{AB}$ угла $(-1, z, +1)$. Из равенства $\arg(t-z)=\eta+\varphi$ вытекает, что угол φ надо отсчитывать от точки B. Если Φ отсчитывается от некоторой величины нашего угла для любой точки C на окружности, то $\Phi=\varphi+\chi$, где χ имеет значение, показанное на рис. 27.

Так как

$$t=z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\Phi-\chi-i\alpha)} \qquad \left(0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\right), \quad (63a)$$

то из равенства (63) следует

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{2\pi\,\Gamma(n+1)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{-i\mu(\Phi-\chi-i\alpha)}\,d\Phi$$

$$(\operatorname{Re} z>0). \tag{64}$$

Нам понадобится в дальнейшем следующий очевидный факт: Если α удовлетворяет условию, указанному в (63а), то выражение $z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)=\frac{t^2-1}{2(t-z)}$ не обращается в нуль ни для одного вещественного значения Φ.

Заменяя в равенстве (15) μ на $-\mu$, получаем

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{2\pi\,\Gamma(n+1)}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{i\mu(\Phi-\chi-i\alpha)}\,d\Phi$$

$$(\operatorname{Re} z>0). \tag{64а}$$

Вынесем из под знака интеграла постоянный множитель $e^{\pm i\mu(\chi+i\alpha)}$ и перенесем его на другую сторону равенства. Складывая равенства, соответствующие разным знакам в показателе, получаем

$$\cos\mu(\chi+i\alpha)\,\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=$$

$$=\frac{(n+1)_{\mu}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n\cos\mu\Phi\,d\Phi$$

$$(\operatorname{Re} z>0), \tag{65а}$$

а вычитая эти равенства —

$$\sin\mu(\chi+i\alpha)\,\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=$$

$$=\frac{(n+1)_{\mu}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n\sin\mu\Phi\,d\Phi$$

$$(\operatorname{Re} z>0). \tag{65б}$$

Поскольку, согласно равенству (13), $\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=\mathfrak{P}_{-n-1}^{\mu}(z)$, мы имеем также

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu(\chi+i\alpha)\,\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)=$$

$$=\frac{(-n)_{\mu}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^{-n-1}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\Phi\,d\Phi$$

$$(\operatorname{Re} z>0). \tag{66}$$

Полагая $\chi = 0$ и $\alpha = 0$, получаем из этих соотношений

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{(n+1)_{\mu}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^n \cos\mu\Phi\, d\Phi \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (66а)$$

и

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{(-n)_{\mu}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^{-n-1} \cos\mu\Phi\, d\Phi \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (66б)$$

Поскольку косинус является четной функцией, то $\int_{-\pi}^{+\pi} = 2\int_0^{\pi}$ и потому

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{(n+1)_{\mu}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^n \cos\mu\Phi\, d\Phi \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (67а)$$

и

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \frac{(-n)_{\mu}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^{-n-1} \cos\mu\Phi\, d\Phi \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (67б)$$

В зависимости от того, имеем ли мы $\operatorname{Re}(n+1) > 0$ или $\operatorname{Re} n < 0$, либо равенство (67а), либо равенство (67б) сохраняет силу и при $\operatorname{Re} z = 0$. Если $\operatorname{Re} z < 0$, то полученные равенства нельзя уже применять непосредственно; в этом случае мы переходим с помощью равенства (34) от z к $-z$. Из равенства (67а) вытекает тогда

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(e^{\mp i\pi}z) = \frac{(n+1)_{\mu}}{\pi} e^{\mp i\pi n} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^n \cos\mu\Phi\, d\Phi.$$

Согласно равенству (34), имеем

$$\mathfrak{P}_n^{\mu}(e^{\mp i\pi}z) = e^{\mp i\pi n}\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) - \frac{2}{\pi}\sin(n+\mu)\pi e^{-i\pi\mu}\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{(n+1)_{\mu}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^n \cos\mu\Phi\, d\Phi =$$

$$= \mathfrak{P}_n^{\mu}(z) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, e^{\pm i\pi n}\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z \gtrless 0). \quad (68а)$$

Аналогично из равенства (67б) получаем

$$\frac{(-n)_{\mu}}{\pi} \int_0^{\pi} \left(z + \sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^{-n-1} \cos\mu\Phi\, d\Phi =$$

$$= -e^{\mp 2i\pi n}\mathfrak{P}_n^{\mu}(z) + \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, e^{\pm i\pi n}\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z) \quad (\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z \gtrless 0). \quad (68б)$$

При $\mu = 0$ отсюда следует

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^n d\Phi = \mathfrak{P}_n(z) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, e^{\pm i\pi n}\,\mathfrak{Q}_n(z) \quad (68в)$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos\Phi\right)^{-n-1} d\Phi =$$

$$= -e^{\mp 2i\pi n}\mathfrak{P}_n(z) + \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, e^{\mp i\pi n}\,\mathfrak{Q}_n(z) \quad (\operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z \gtrless 0). \quad (68г)$$

Аналогом для равенства (63) является формула (20а):

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{2i\pi m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{2\Gamma(n+1)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\int_{(1)}^{(-1)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+m+1}}.$$

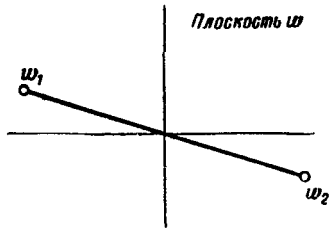


Рис. 28. Путь интегрирования в равенстве (69б).

Применим снова подстановку (63а), записав ее в виде

$$t = z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{\alpha+i(\Phi+\pi)} = z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{w} \quad (w = \alpha + i\Phi). \quad (69а)$$

Мы имеем

$$t - z = e^{i\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{w}, \quad dt = e^{i\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{w}\,dw$$

и

$$t^2 - 1 = 2e^{i\pi}e^{w}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\left(z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} w\right),$$

а потому (см. рис. 28)

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{2\Gamma(n+1)}\int_{(w_1)}^{(w_2)}\left(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w\right)^n e^{-mw}\,dw. \quad (69б)$$

Поскольку мы выбрали в равенстве (63а) угол χ равным $-\pi$, то угол Φ на рис. 27 отсчитывается от точки A, а потому в точке

$t=1$ принимает значение δ. Для пределов интегрирования мы получаем тогда

$$w_1=-w_2=\ln\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}=i\delta+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|.$$

Поскольку $\operatorname{ch} w$ — четная функция, то

$$\int_{w_1}^{0}\left(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w\right)^n e^{-mw}\,dw=\int_{0}^{w_2}\left(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w\right)^n e^{mw}\,dw.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+1)}\int_0^{(w_2)}\left(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w\right)^n\operatorname{ch} mw\,dw. \qquad (69в)$$

В несобственном интеграле ($\operatorname{Re} n\leqslant -1$) лишь верхний предел является точкой ветвления, а потому

$$\int_0^{(w_2)}=\frac{1}{1-e^{2i\pi n}}\oint_0^{(w_2+)}.$$

Соответствующий интеграл с другими пределами получается, если исходить из равенства (20а), эквивалентного равенству (22а),

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z+1)^{n+m+1}}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(n+1,\ n+m+\ ;\ 2n+2;\ \frac{2}{1+z}\right).$$

Входящая сюда гипергеометрическая функция после перестановки первого и второго параметров записывается в виде

$$\mathrm{B}(n+m+1,\ n-m+1)\,{}_2F_1(n+m+1,\ n+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1+z})=$$

$$=\int_{(0)}^{(1)}s^{n+m}(1-s)^{n-m}\left(1-\frac{2s}{1+z}\right)^{-n-1}ds.$$

Сделаем в интеграле, стоящем в правой части этого равенства, подстановку (ср. п. 4.2.3)

$$s=\frac{z+1}{2r},\quad 1-s=\frac{(z+1)\left(\frac{2r}{z+1}-1\right)}{2r},\quad 1-\frac{2s}{1+z}=\frac{r-1}{r}.$$

При этом получится интеграл по пути, идущему из $(z+1)/2$ до ∞:

$$\int_{(0)}^{(1)} s^{n+m}(1-s)^{n-m}\left(1-\frac{2s}{1+z}\right)^{-n-1} ds =$$

$$= \frac{(z+1)^{2n+1}}{2^{2n+1}} \int_{\left(\frac{z+1}{2}\right)}^{(\infty)} r^{-n-1}(r-1)^{-n-1}\left(\frac{2r}{r+1}-1\right)^{n-m} dr.$$

Сделаем еще подстановку $2r = t+1$. Мы получим тогда, что правая часть имеет вид

$$(z+1)^{n+m+1} \int_{(z)}^{(\infty)} (t^2-1)^{-n-1}(t-z)^{n-m}\, dt.$$

Принимая во внимание формулу удвоения Г-функции (1.42), мы имеем

$$B(n+m+1,\ n-m+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+m+1)\Gamma(n-m+1)}{2^{2n+1}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

а потому

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{2^n\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}(z^2-1)^{\frac{m}{2}} \int_{(z)}^{(\infty)} (t^2-1)^{-n-1}(t-z)^{n-m}\, dt. \quad (70)$$

Поскольку при сделанных подстановках $s = \frac{z+1}{t+1}$ и $1-s = \frac{t-z}{t+1}$, то верхний предел интегрирования определяется равенством $t = \lim\limits_{s\to 0}\frac{z+1}{s} - 1$. Таким образом, путь интегрирования идет из точки $t=z$ до ∞ в направлении от 0 к $z+1$ (см. рис. 29). Значения аргументов определяются так: поскольку в гипергеометрическом интеграле вдоль пути интегрирования $\arg s = 0$, то должно быть $\arg s = \arg(z+1) - \arg(t+1) = 0$, то есть $\arg(z+1) = \arg(t+1)$. Поскольку, далее, $\arg(1-s) = 0$, то вдоль пути интегрирования должно выполняться равенство $\arg(t-z) = \arg(t+1) = \arg(z+1)$.

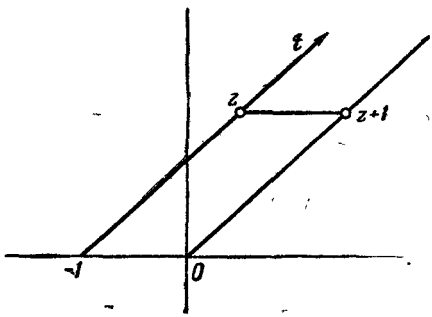


Рис. 29. Путь интегрирования в равенстве (70).

Если $\mathrm{Re}(n+m+1) > 0$, то вычет интеграла (70) на бесконечности равен нулю; если, кроме того, $\mathrm{Re}(n-m+1) > 0$, то и

в точке $t=z$ нет полюса, а потому (70) превращается в обычный интеграл. В этом случае интеграл по дуге бесконечно большого круга обращается в нуль, и можно выбрать путь интегрирования так, чтобы $\arg(t-z)=\arg\sqrt{z^2-1}$. Сделав подстановку $t=z+\sqrt{z^2-1}\,e^{\psi}$, мы получим, что при изменении t от z до ∞, e^{ψ} вещественно и изменяется от 0 до ∞; при этом параметр ψ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, поскольку

$$t^2-1=2e^{\psi}\sqrt{z^2-1}\,(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch}\psi),$$

то из равенства (70) следует, что

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\,\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-m\psi}\,d\psi}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch}\psi)^{n+1}} \tag{71}$$

$$(\operatorname{Re}(n+m+1)>0,\quad \operatorname{Re}(n-m+1)>0).$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{ch}(-\psi)=\operatorname{ch}\psi$, получаем точно так же, как и для (67а),

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} m\psi\,d\psi}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch}\psi)^{n+1}} \tag{71а}$$

$$(\operatorname{Re}(n+m+1)>0,\quad \operatorname{Re}(n-m+1)>0).$$

Это соотношение аналогично равенству (67б) и дополняет равенство (69в).

Имея в виду дальнейшие применения, изменим в равенстве (71) путь интегрирования и рассмотрим интеграл

$$I=\frac{e^{i\pi m}\,\Gamma(n+1)}{2\,\Gamma(n-m+1)}\int\limits_{-\infty+i\lambda}^{+\infty+i\lambda}\frac{e^{-mq}\,dq}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch}q)^{n+1}}\qquad(\operatorname{Re}(n\pm m+1)>0).$$

Очевидно, что значение I отличается от $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ лишь в случае, когда между новым путем интегрирования и вещественной осью имеется особая точка подинтегральной функции. Такими точками могут быть лишь нули знаменателя подинтегральной функции. Поскольку $\operatorname{ch}q=\operatorname{ch}(-q)=\operatorname{ch}(q+2i\pi\varkappa)$, то в полосе между вещественной осью и $i\pi$ лежит в точности один нуль знаменателя. Решая уравнение $z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch}q_0=0$ и полагая $u=e^q$, мы получаем для нуля выражение $u_0=-\sqrt{\dfrac{z\pm1}{z\mp1}}$, а полагая $q=\xi+i\pi$, $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\eta_0\leqslant\pi$, находим $\eta_0=\pi-\dfrac{1}{2}\arg\dfrac{z\pm1}{z\mp1}$. Таким образом, интеграл отличается от $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ лишь в случае, когда $|\lambda|\geqslant\eta_0$, причем

если $\eta_0 < \lambda < 2\pi - \eta_0$, то он равен

$$I_n = \frac{e^{i\pi m}\,\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n-m+1)} \int\limits_{-\infty+i\pi}^{+\infty+i\pi} \frac{e^{-mq}\,dq}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch} q)^{n+1}}.$$

Для вычисления этого интеграла проведем использованные выше преобразования в обратном порядке. Полагая

$$s = \frac{z+1}{z+1+\sqrt{z^2-1}\,e^q} = \frac{1}{1+e^q\sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}} \quad \text{или} \quad e^q = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\,\frac{1-s}{s},$$

получаем

$$\int\limits_{-\infty+i\pi}^{+\infty+i\pi} \frac{e^{-mq}\,dq}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch} q)^{n+1}} =$$

$$= \frac{2^{n+1}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z+1)^{n+m+1}} \int\limits_{0\,(C)}^{1} s^{n+m}(1-s)^{n-m}\left(1-\frac{2s}{z+1}\right)^{-n-1} ds. \quad (72)$$

Путь интегрирования C на плоскости s расположен так, что, замыкая его отрезком $[0, 1]$ вещественной оси, мы получаем путь, обходящий точку $(z+1)/2$ (см. рис. 30). Проще всего убедиться в этом следующим образом: если z постоянно, а ξ пробегает вещественную ось, то точка $z+\sqrt{z^2-1}\,e^{\xi+i\pi}$ пробегает прямую (см. рис. 27), которая пересекает вещественную ось между точками 0 и ± 1 в зависимости от того, имеем ли мы $\operatorname{Re} z > 0$ или $\operatorname{Re} z < 0$ (см. рис. 27). Поэтому, прямая $z+1+\sqrt{z^2-1}\,e^{\xi+i\pi}$, $-\infty < \xi < \infty$, пересекает вещественную ось между точками 0 и 2. Обозначим через ξ_0 значение ξ, соответствующее точке пересечения, и положим $q_0 = \xi_0 + i\pi$. Очевидно, что только при $q = q_0$ точка контура C лежит на луче, проходящем через $\dfrac{z+1}{2}$, причем расстояние этой точки контура от точки 0 больше, чем $\left|\dfrac{z+1}{2}\right|$. Поскольку при комплексном z ни для одного конечного значения q число s не является вещественным, путь интегрирования должен иметь вид, изображенный на рис. 30. Потребуем, чтобы вдоль пути интегрирования выполнялось условие $|\arg(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch} q)| < \pi$. Тогда при $s = 0$ должно иметь место равенство $\arg 1 - \dfrac{2s}{z+1} = 0$. Таким образом, и подинтегральная функция принимает главное значение в точке $s = 0$. Интеграл в правой части равенства (72) совпадает

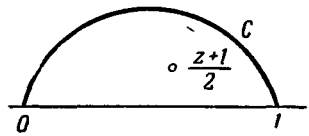


Рис. 30. Путь интегрирования в равенстве (72).

с интегралом J_{01}^{*} равенства (4.11), где положено $a=n+m+1$, $b=n+1$, $c=2n+2$, $z'=\frac{2}{z+1}$. Из равенства (4.26) мы получаем

$$J_{01}^{*}\,e^{\mp i\pi(n+m)}-J_{01}\,e^{\pm i\pi(n+m)}=$$

$$=\pm 2i\pi\,\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-m)}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{n+1}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right)$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0).$$

Поскольку, согласно равенству (22а),

$$J_{01}=\frac{e^{-i\pi m}}{2^n}\,\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+1)}\,\frac{(z+1)^{n+m+1}}{(z^2-1)^{m/2}}\,\mathfrak{Q}_n^m(z),$$

в то время как, в силу равенств (26а) и (9а),

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(n+1,\ -n;\ 1-m;\ \frac{1+z}{2}\right)=$$

$$=e^{\mp i\pi n}\,\mathfrak{P}_n^m(z)-\frac{2}{\pi}\sin(n+m)\,\pi\,e^{-i\pi m}\,\mathfrak{Q}_n^m(z)\quad(\operatorname{Im} z\gtrless 0),$$

то мы имеем

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\Gamma(n-m+1)}\int\limits_{-\infty+i\lambda}^{+\infty+i\lambda}\frac{e^{-mq}\,dq}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\operatorname{ch} q)^{n+1}}=$$

$$=e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m(z)\pm i\pi\,e^{\pm i\pi m}\,\mathfrak{P}_n^m(z)\qquad(73)$$

$$(\operatorname{Im} z\gtrless 0).$$

Используя это равенство, следует учитывать сделанные выше предположения относительно аргумента $z+\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} q$.

5.4. Асимптотические представления при больших значениях z, n, m

5.4.1. Асимптотические разложения при $|z|\gg 1$. Из равенства (23а) непосредственно следует, что при $|z|\gg 1$

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)\sim e^{i\pi m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\,(2z)^{-n-1}+\ldots.\qquad(74)$$

Если, кроме того, $n=\nu$ — целое число, то

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)_{\nu+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu+1)}{2^{\nu+1}}=\frac{(2\nu+2)!}{(\nu+1)!}\frac{1}{2^{2\nu+2}},$$

и потому

$$\mathfrak{Q}_\nu^m(z)\sim e^{i\pi m}\frac{(\nu+1)!\,\Gamma(\nu+m+1)}{(2\nu+2)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu+1}+\ldots$$

(ν — целое). (74а)

Соответственно из равенства (48б) получаем при $\operatorname{Re} n>0$

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\sim\frac{\sin(m-n)\pi\,\Gamma(m-n)}{\cos n\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}(2z)^n+\ldots\ (\operatorname{Re} n>0). \quad (75)$$

Если $n=\nu-\frac{1}{2}$ — полуцелое число, то можно преобразовать это соотношение, используя равенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{\pi}{\cos n\pi}$$

и

$$\Gamma(1+n-m)\,\Gamma(m-n)=\frac{\pi}{\sin(m-n)\pi}.$$

Мы получаем для любого n

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\sim\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1+n-m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(2z)^n+\ldots \quad (75а)$$

и, в частности,

$$\mathfrak{P}_{\nu-\frac{1}{2}}^m(z)\sim\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}(2z)^{\nu-\frac{1}{2}}+\ldots. \quad (75б)$$

При целочисленных $n=\nu$ имеем

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z)\sim\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\nu-1)}{\Gamma(\nu+1-m)}z^\nu+\ldots \quad (75в)$$

(ν — целое).

5.4.2. Асимптотические разложения для больших значений индекса. Для того чтобы получить асимптотические представления при больших значениях индексов n и m, будем исходить из результатов пункта 4.3.5 [1]). Рассмотрим сначала случай $|n|\gg 1$.

[1]) См. относительно этого Ватсон, *Cambridge Phil. Trans.*, XXII (1918), 290, и Гобсон, стр. 283—299.

5.4.2.1. $|n| \gg 1$. Из равенства (22б) имеем

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{(z-1)^{n+m+1}} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(n+1,\ n+m+1;\ 2n+2;\ \frac{2}{1-z}\right).$$

При $a=1$, $b=0$, $c=1-m$, $l=n$ из равенства (4.65в) и формулы удвоения для Г-функции следует, что

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) \sim e^{i\pi m} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{n}}}{t_0^n \sqrt{t_0^2-1}} \left(1 + \sum_{x=1}^{\infty} d_x' \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{n^x}\right)$$

$$(\operatorname{Re} n > 0), \tag{76}$$

где

$$t_0 = z + \sqrt{z^2-1}, \quad d_1' = \frac{(8m^2-3)\,t_0^2+1}{4(t_0^2-1)}.$$

Если z вещественно и по абсолютной величине меньше 1, так что можно положить $z=\cos\theta$, то мы получаем для $Q_n^m(\cos\theta)$ из равенства (21)

$$2e^{i\pi m} Q_n^m(\cos\theta) = e^{-i\frac{\pi}{2}m} \mathfrak{Q}_n^m(\cos\theta + i0) + e^{i\frac{\pi}{2}m} \mathfrak{Q}_n^m(\cos\theta - i0).$$

Заметим, что при положительной мнимой части мы имеем $t_0^+ = e^{i\theta}$, $t_0^{+2} - 1 = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2\sin\theta$, в то время как для отрицательной мнимой части имеем $t_0^- = e^{-i\theta}$, $t_0^{-2} - 1 = e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2\sin\theta$. Поэтому

$$Q_n^m(\cos\theta) \sim \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)} \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}} \times$$

$$\times \left\{ \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right)\left[1 + \frac{m^2-\frac{1}{2}}{2n} + \ldots\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n} \operatorname{ctg}\theta \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + (2m+1)\frac{\pi}{4}\right) + \ldots \right\}$$

$$(|n| \gg 1,\ \operatorname{Re} n > 0), \tag{77}$$

где d_1' имеет указанное выше значение.

Принимая во внимание формулу сложения для синуса, получаем отсюда

$$Q_n^m(\cos\theta)\sim\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)}\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\times$$
$$\times\left\{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\left[1+\frac{8m^2-3}{8n}+\ldots\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{4m^2-1}{8n\sin\theta}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\left(m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\quad \operatorname{Re} n>0). \tag{77а}$$

Поскольку по формуле Стирлинга

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)}=n^m\left(1-\frac{m(m-1)}{2n}+\ldots\right),$$

то мы можем переписать это асимптотическое разложение в виде

$$Q_n^m(\cos\theta)\sim n^m\sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\times$$
$$\times\left\{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\left[1+\frac{(2m-1)(2m+3)}{8n}+\ldots\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n\sin\theta}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\left(m+\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\quad \operatorname{Re} n>0). \tag{77б}$$

Для получения разложения функции $\mathfrak{P}_n^m(z)$ будем исходить из равенства (9а)

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

При $a=1$, $b=0$, $c=1-m$, $l=n$ из формулы (4.65б) получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\sim\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)}\frac{1}{\sqrt{n\pi(t_0^2-1)}}\times$$
$$\times\left\{t_0^{n+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d_\varkappa\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{n^\varkappa}+e^{\mp i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}t_0^{-n}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}d'_\varkappa\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_\varkappa}{n^\varkappa}\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\ \operatorname{Re} n>0,\ \operatorname{Im} z\gtrless 0). \tag{78}$$

Если z — вещественное число, то следует различать случаи $z=\operatorname{ch}\xi>1$, когда $t_0=e^\xi$ вещественно и больше 1, и $z=\cos\theta$, когда $t_0=e^{i\theta}$.

В первом случае имеем

$$\mathfrak{P}_n^m(\operatorname{ch}\xi)\sim\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi}}{\sqrt{2n\pi\operatorname{sh}\xi}}\sum_{x=0}^{\infty}d_x\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x}{n^x}$$
$$(|n|\gg 1,\ \operatorname{Re}n>0), \tag{78a}$$

где $d_0=1$, $d_1=m^2-\frac{1}{2}-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\operatorname{cth}\xi$. Если же $-1<z<+1$, то мы вычислим $P_n^m(\cos\theta)=e^{i\frac{\pi}{2}m}\mathfrak{P}_n^m(\cos\theta+i0)$ и получим

$$P_n^m(\cos\theta)\sim\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\times$$
$$\times\left\{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{m^2-\frac{1}{2}}{2n}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\quad \operatorname{Re}n>0). \tag{79a}$$

Преобразуя это выражение, находим

$$P_n^m(\cos\theta)\sim\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\times$$
$$\times\left\{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\left(1+\frac{8m^2-3}{8n}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{4m^2-1}{8n\sin\theta}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\ \operatorname{Re}n>0), \tag{79б}$$

откуда, учитывая формулу Стирлинга,

$$P_n^m(\cos\theta)=n^m\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\times$$
$$\times\left\{\left(1+\frac{(2m-1)(2m+3)}{8n}\right)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2n\sin\theta}\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta+\left(m-\frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\ldots\right\}$$
$$(|n|\gg 1,\ \operatorname{Re}n>0). \tag{79в}$$

5.4.2.2. $|m|\gg 1$. Аналогично получаются разложения, пригодные при $|m|\gg 1$. Мы исходим из равенства (42), которое запишем

в виде

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(z)=\frac{2^{-m}(z^2-1)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(1+m)}\,{}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{m-n}{2};\ 1+m;\ 1-z^2\right).$$

Используем равенство (4.64), в котором положим

$$a=b=\frac{n+1}{2},\quad c=n+\frac{3}{2},\quad l=\frac{m}{2}.$$

Если положить $s_0=\frac{1}{1-z}$, $s_0'=\frac{1}{1+z}$, то из этого равенства следует, что

$$\mathfrak{P}_n^{-m}(z)\sim\frac{1}{2^m\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m}{2}+1\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{m}}\left(1+\sum_{x=1}^{\infty}d_x'\frac{2^x\left(\frac{1}{2}\right)_x}{m^x}\right)$$

$$(|m|\gg 1,\ \operatorname{Re}m>0,\ \operatorname{Re}z>0). \tag{80}$$

При этом из равенств (4.61а) и (4.61б) следует, что

$$2d_1=-n(n+1)z+n+\frac{1}{2}. \tag{80а}$$

Поскольку переходу к s_0' соответствует изменение знака при z, то

$$2d_1'=n(n+1)z+n+\frac{1}{2}. \tag{80б}$$

Если $\operatorname{Re}z<0$, то надо положить $s_0=\frac{1}{1+z}$, иными словами, в равенстве (80) надо *всюду* заменить z на $-z$. При $z=\cos\theta$ получаем, учитывая формулу Стирлинга, что

$$P_n^{-m}(\cos\theta)\sim\frac{e^m}{m^m\sqrt{2\pi m}}\operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{1}{12m}\right)\left\{1-\frac{n(n+1)}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}+\ldots\right\}. \tag{80в}$$

Для вычисления $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ применим равенство (46)

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)=e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}(z^2-1)^{-\frac{n+1}{2}}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{1+n-m}{2};\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{1-z^2}\right).$$

Применяя то же соответствие $a=b=\frac{n+1}{2}$, $c=n+\frac{3}{2}$, $l=\frac{m}{2}$, которое было использовано выше, получаем из равенства (4.63)

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)\sim e^{i\pi m}2^{m-1}\Gamma\left(\frac{1+m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\times$$

$$\times\left\{e^{\mp i\pi(n+1)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{-\frac{m}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}d'_x\frac{2^x\left(\frac{1}{2}\right)_x}{m^x}+\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}d_x\frac{2^x\left(\frac{1}{2}\right)_x}{m^x}\right\}$$

$$(|m|\gg 1,\ \operatorname{Im}z\gtrless 0,\ \operatorname{Re}m>0). \qquad (81)$$

Здесь d_1 и d'_1 задаются равенствами (80а) и (80б).

Представление для $\mathfrak{P}_n^m(z)$ получается из равенства (28)

$$\mathfrak{P}_n^m(z)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\mathfrak{P}_n^{-m}(z)+\frac{2}{\pi}\sin m\pi\, e^{-i\pi m}\mathfrak{Q}_n^m(z).$$

Подставляя сюда выражения из равенств (80) и (81), получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\sim\frac{2^m\Gamma\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n+m}{2}\right)}{\pi\sqrt{2m\pi}}\times$$

$$\times\left\{(\sin m\pi)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\sum_{x=1}^{\infty}d_x\frac{2^x\left(\frac{1}{2}\right)_x}{m^x}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{\mp i\pi m}(\sin n\pi)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1+\sum_{x=1}^{\infty}d'_x\frac{2^x\left(\frac{1}{2}\right)_x}{m^x}\right)\right\}$$

$$(|m|\gg 1,\ \operatorname{Re}m>0,\ \operatorname{Im}z\gtrless 0). \qquad (82)$$

Равенства (81) и (82) справедливы при $\operatorname{Re}z>0$. Используя равенство (4.64) или непосредственно используя соглашения относительно аргументов, легко установить, что оба равенства сохраняют силу и при $\operatorname{Re}z<0$. Для вещественных z при $|z|<1$ мы получаем

$$P_n^m(\cos\theta)\sim\frac{2^m\Gamma\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n+m}{2}\right)}{\pi\sqrt{2m\pi}}\times$$

$$\times\left\{\sin m\pi\operatorname{ctg}^m\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{n+\frac{1}{2}-n(n+1)\cos\theta}{2m}+\ldots\right)-\right.$$

$$\left.-\sin n\pi\operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2}\left(1+\frac{n+\frac{1}{2}+n(n+1)\cos\theta}{2m}+\ldots\right)\right\}$$

$$(|m|\gg 1,\ \operatorname{Re}m>0). \qquad (82а)$$

Если m или n целые, то одно из слагаемых обращается в нуль.

5.5. Рекуррентные формулы

5.5.1. Рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра. Функции Лежандра были нормированы таким образом, чтобы как для функций первого, так и для функций второго рода выполнялись рекуррентные соотношения

$$\frac{dp_{n,m}}{dz} = p_{n,m+1} \quad \text{и} \quad \frac{dq_{n,m}}{dz} = q_{n,m+1}.$$

Для того чтобы в дальнейшем не писать все формулы дважды, условимся обозначать через k_n^m обе указанные функции. В дальнейшем K_n^m означает как $\mathfrak{P}_n^m(z)$, так и $\mathfrak{Q}_n^m(z)$. Тогда мы имеем

$$\frac{dk_n^m}{dz} = k_n^{m+1}. \tag{83}$$

Согласно равенствам (6а) и (16),

$$k_n^m = c_{n,m} \int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{(t^2-1)^n dt}{2^n (t-z)^{n+m+1}}. \tag{84}$$

Но из равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+m+1}} = 2(n+1)t\frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m+1}} - (n+m+1)\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+m+2}},$$

интегрируя по замкнутому пути, получаем

$$0 = \int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+m+1}} dt = 2(n+1)\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m}} dt +$$

$$+ 2(n+1)z\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m+1}} dt - (n+m+1)\int_{(t_1)}^{(t_2)} \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+m+2}} dt.$$

Отсюда, в силу равенства (84), имеем

$$\frac{(n+1)z}{c_{n,m}} k_n^m + \frac{n+1}{c_{n,m-1}} k_n^{m-1} - \frac{n+m+1}{c_{n+1,m}} k_{n+1}^m = 0.$$

Но, согласно равенствам (7б) и (19),

$$\frac{a_{n,m}}{a_{n,m-1}} = \frac{b_{n,m}}{b_{n,m-1}} = n+m \quad \text{и} \quad \frac{a_{n,m}}{a_{n+1,m}} = \frac{b_{n,m}}{b_{n+1,m}} = \frac{n+1}{n+m+1},$$

что приводит к соотношению

$$z k_n^m + (n+m) k_n^{m-1} - k_{n+1}^m = 0. \tag{85а}$$

Аналог этой важной формулы можно получить, исходя из функции $\frac{d}{dt}\frac{t(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+m}}$ и проводя соответствующие вычисления. Мы получаем тогда

$$z\,k_n^m-(n-m+1)\,k_n^{m-1}-k_{n-1}^m=0. \tag{85б}$$

Вычитая равенство (85б) из (85а), получаем

$$(2n+1)\,k_n^{m-1}-k_{n+1}^m+k_{n-1}^m=0. \tag{85в}$$

Исключая же из них k_n^{m-1}, убеждаемся, что

$$(n-m+1)\,k_{n+1}^m+(n+m)\,k_{n-1}^m-(2n+1)\,z\,k_n^m=0. \tag{85г}$$

Принимая во внимание равенство (83), можно представить формулу (85в) в виде

$$(2n+1)\,k_n^m=\frac{d}{dz}\,k_{n+1}^m-\frac{d}{dz}\,k_{n-1}^m. \tag{86}$$

Перейдем теперь к функциям K_n^m. Заметим, что эти функции получаются из k_n^m умножением на множитель, зависящий лишь от m и z. Поэтому все формулы для k_n^m, в которые не входят производные и в которых совпадают значения верхнего индекса m, сохраняют силу и для K_n^m. Следовательно, из равенства (85г) имеем

$$(n-m+1)\,K_{n+1}^m+(n+m)\,K_{n-1}^m-(2n+1)\,z\,K_n^m=0, \tag{87}$$

а из равенства (86) при $m=0$:

$$(2n+1)\,K_n=\frac{d}{dz}\,K_{n+1}-\frac{d}{dz}\,K_{n-1}. \tag{88}$$

Чтобы ввести в наши формулы $\frac{d}{dz}\,K_n^m$, заметим, что в силу $K_n^m=(z^2-1)^{\frac{m}{2}}\,k_n^m$ из равенства (83) вытекает

$$(z^2-1)\,\frac{d}{dz}\,K_n^m=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,K_n^{m+1}+mz\,K_n^m. \tag{89а}$$

Другая формула того же типа получается путем перехода от m к $-m$ и использования равенства (24) или соответственно равенства (28):

$$(z^2-1)\,\frac{d}{dz}\,K_n^m=(z^2-1)^{\frac{1}{2}}(n-m+1)(n+m)\,K_n^{m-1}-mz\,K_n^m. \tag{89б}$$

Складывая равенства (89б) и (89а), получаем

$$2\,(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\,\frac{d}{dz}\,K_n^m=K_n^{m+1}+(n-m+1)(n+m)\,K_n^{m-1}. \tag{89в}$$

Вычитая равенства (89а) и (89б), находим, что

$$2m\frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}K_n^m=(n-m+1)(n+m)K_n^{m-1}-K_n^{m+1}. \quad (89г)$$

Умножим теперь равенство (85г) на z и из полученного равенства исключим величины $z\,k_{n-1}^{m+1}$ и $z\,k_{n+1}^{m+1}$ с помощью равенств (85а) и (85б). Мы получим тогда

$$(2n+1)(z^2-1)\,k_n^{m+1}=$$
$$=(n-m)(n-m+1)\,k_{n+1}^m-(n+m)(n+m+1)\,k_{n-1}^m.$$

Переходя к K_n^m с помощью умножения на $(z^2-1)^{\frac{m}{2}}$, получаем

$$(2n+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}K_n^{m+1}=$$
$$=(n-m)(n-m+1)K_{n+1}^m-(n+m)(n+m+1)K_{n-1}^m. \quad (90а)$$

Заменяя здесь m на $-m$ и преобразуя полученные выражения с помощью равенств (24) (соотв. (28)) в функции, зависящие от верхнего индекса $m-1$ (соответственно m), мы получаем следующую важную рекуррентную формулу

$$(2n+1)(z^2-1)^{\frac{1}{2}}K_n^{m-1}=K_{n+1}^m-K_{n-1}^m. \quad (90б)$$

Заменим в (90а) $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}K_n^{m+1}$, согласно равенству (89а), производной. Мы получим тогда

$$(2n+1)(z^2-1)\frac{d}{dz}K_n^m=(2n+1)\,mz\,K_n^m+$$
$$+(n-m)(n-m+1)K_{n+1}^m-(n+m)(n+m+1)K_{n-1}^m.$$

Равенство (87) позволяет исключить одну из трех входящих сюда величин. Мы получаем соответственно

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}K_n^m=nz\,K_n^m-(n+m)\,K_{n-1}^m, \quad (91а)$$

или

$$(z^2-1)\frac{d}{dz}K_n^m=-(n+1)\,z\,K_n^m+(n-m+1)\,K_{n+1}^m, \quad (91б)$$

или

$$(2n+1)(z^2-1)\frac{d}{dz}K_n^m=n(n-m+1)K_{n+1}^m-(n+1)(n+m)K_{n-1}^m. \quad (91в)$$

Поскольку функции $P_n^m(x)$ и $Q_n^m(x)$ линейно и однородно выражаются через функции $\mathfrak{P}_n^m$ и $\mathfrak{Q}_n^m$ с коэффициентами, зависящими

лишь от m (см. равенства (12) и (21)), то те из полученных соотношений, в которых верхний параметр постоянен, справедливы также для $Q_n^m(x)$ и $P_n^m(x)$. Отсюда следует: равенства (87), (88), (91а), (91б), (91в) справедливы для $\mathfrak{P}_n^m(z)$, $P_n^m(x)$, $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ и $Q_n^m(x)$.

Равенства (89в), (89г) и (90а), (90б) приводят, в силу (12) и условия

$$[(x+i0)^2-1]^{\frac{1}{2}}=i(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad -1\leqslant x\leqslant +1,$$

к равенствам

$$2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_n^m(x)=(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1}(x)-P_n^{m+1}, \quad (89'в)$$

$$2m\frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}P_n^m(x)=-(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1}(x)-P_n^{m+1}(x) \quad (89'г)$$

и

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^{m+1}(x)=$$
$$=(n-m)(n-m+1)P_{n+1}^m(x)-(n+m)(n+m+1)P_{n-1}^m(x), \quad (90'а)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P_n^{m-1}(x)=P_{n-1}^m(x)-P_{n+1}^m(x). \quad (90'б)$$

Те же рекуррентные формулы справедливы для $e^{l\pi m}Q_n^m$; иными словами,

$$2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}Q_n^m=Q_n^{m+1}-(n-m+1)(n+m)Q_n^{m-1}, \quad (89''в)$$

$$2m\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}Q_n^m=(n-m+1)(n+m)Q_n^{m-1}+Q_n^{m+1}, \quad (89''г)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}Q_n^{m+1}=(n+m)(n+m+1)Q_{n-1}^m-$$
$$-(n-m)(n-m+1)Q_{n+1}^m, \quad (90''а)$$

$$(2n+1)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}Q_n^{m-1}=Q_{n+1}^m-Q_{n-1}^m. \quad (90''б)$$

Введем для вещественных значений аргумента переменную $x=\cos\theta$. Поскольку $(x^2-1)\frac{d}{dx}=\sin\theta\frac{d}{d\theta}$, то равенства (91а, 91б) принимают вид

$$\frac{dK_n^m}{d\theta}=n\operatorname{ctg}\theta K_n^m-\frac{n+m}{\sin\theta}K_{n-1}^m \quad (92а)$$

и

$$\frac{dK_n^m}{d\theta} = -(n+1)\operatorname{ctg}\theta\, K_n^m + \frac{n+1-m}{\sin\theta} K_{n+1}^m. \qquad (92б)$$

Если K_n^m и ${}^*K_n^m$ — два различных решения дифференциального уравнения Лежандра (2), то, согласно известной теореме из теории дифференциальных уравнений [1]) (см. п. 2.1), *определитель Вронского* $\left(K' \equiv \frac{dK}{dz}\right)$

$$K_n^m {}^*K_n^{m'} - {}^*K_n^m K_n^{m'}$$

тогда и только тогда отличен от нуля, когда эти решения линейно независимы. Найдем значение этого определителя в рассматриваемом случае. Так как K_n^m и ${}^*K_n^m$ являются решениями дифференциального уравнения, то

$$\frac{d}{dz}\left((z^2-1)K_n^{m'}\right) = \left(n(n+1) + \frac{m^2}{z^2-1}\right) K_n^m$$

и

$$\frac{d}{dz}\left((z^2-1){}^*K_n^{m'}\right) = \left(n(n+1) + \frac{m^2}{z^2-1}\right) {}^*K_n^m$$

(мы переписали уравнение в самосопряженной форме). Умножим первое равенство на ${}^*K_n^m$, второе — на K_n^m и вычтем одно из другого. Мы получим тогда

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\left({}^*K_n^m K_n^{m'} - K_n^m {}^*K_n^{m'}\right)\right] = 0,$$

и отсюда с помощью интегрирования

$$(z^2-1)\left(K_n^m {}^*K_n^{m'} - {}^*K_n^m K_n^{m'}\right) = C. \qquad (93)$$

Заменим здесь производные по равенству (91а). Мы получим

$$-(n+m)\left(K_n^m {}^*K_{n-1}^m - {}^*K_n^m K_{n-1}^m\right) = C,$$

или

$$K_n^m {}^*K_{n-1}^m - {}^*K_n^m K_{n-1}^m = C' = \frac{-C}{n+m}. \qquad (94)$$

Поскольку мы рассматриваем линейно независимые решения уравнения Лежандра, то достаточно взять $K_n^m = \mathfrak{P}_n^m(z)$ и ${}^*K_n^m = \mathfrak{Q}_n^m(z)$. Для нахождения постоянной C' используем равенства (74) и (75а).

[1]) См. В. В. Степанов.

Из них следует при весьма больших значениях $|z|$

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(2z)^n}{\Gamma(1+n-m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \ldots$$

и

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1+m)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)(2z)^{n+1}} + \ldots.$$

Подставляя эти результаты в равенство (94), получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(z) - \mathfrak{P}_{n-1}^m(z)\,\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(1+n-m)}\left[1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right].$$

Поскольку правая часть этого равенства должна быть независима от z, члены высшего порядка обращаются в нуль, и мы получаем

$$\mathfrak{P}_n^m(z)\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(z) - \mathfrak{P}_{n-1}^m(z)\,\mathfrak{Q}_n^m(z) = e^{i\pi m}\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(1+n-m)}. \quad (94a)$$

Из связи между постоянными C и C' следует, далее, что

$$\mathfrak{Q}_n^m(z)\frac{d}{dz}\mathfrak{P}_n^m(z) - \mathfrak{P}_n^m(z)\frac{d}{dz}\mathfrak{Q}_n^m(z) = \frac{e^{i\pi m}}{z^2-1}\frac{\Gamma(1+n+m)}{\Gamma(1+n-m)}. \quad (95)$$

Для вычисления $P_n^m Q_{n-1}^m - P_{n-1}^m Q_n^m$ напишем, согласно равенству (21),

$$P_n^m(x)\,Q_{n-1}^m(x) - P_{n-1}^m(x)\,Q_n^m(x) =$$

$$= \frac{e^{-i\pi m}}{2}\left[\left(P_n^m(x)\,e^{-\frac{i\pi m}{2}}\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(x+i0) - P_{n-1}^m(x)\,e^{-\frac{i\pi m}{2}}\,\mathfrak{Q}_n^m(x+i0)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(P_n^m(x)\,e^{\frac{i\pi m}{2}}\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(x-i0) - P_{n-1}^m(x)\,e^{\frac{i\pi m}{2}}\,\mathfrak{Q}_n^m(x-i0)\right)\right].$$

Тогда, принимая во внимание формулу (12), находим

$$P_n^m(x)\,Q_{n-1}^m(x) - P_{n-1}^m(x)\,Q_n^m(x) =$$

$$= \frac{e^{-i\pi m}}{2}\left[\left(\mathfrak{P}_n^m(x+i0)\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(x+i0) - \mathfrak{P}_{n-1}^m(x+i0)\,\mathfrak{Q}_n^m(x+i0)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\mathfrak{P}_n^m(x-i0)\,\mathfrak{Q}_{n-1}^m(x-i0) - \mathfrak{P}_{n-1}^m(x-i0)\,\mathfrak{Q}_n^m(x-i0)\right)\right].$$

Применяя равенство (94a), получаем соотношение

$$P_n^m(x)\,Q_{n-1}^m(x) - P_{n-1}^m(x)\,Q_n^m(x) = \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(1+n-m)}, \quad (96a)$$

и, в силу связи между постоянными в равенстве (94),

$$Q_n^m(x)\frac{d}{dx}P_n^m(x)-P_n^m(x)\frac{d}{dx}Q_n^m(x)=\frac{1}{x^2-1}\frac{\Gamma(1+n+m)}{\Gamma(1+n-m)}. \quad (96б)$$

При $m=0$ из равенства (96а) получаем

$$P_n(x)Q_{n-1}(x)-P_{n-1}(x)Q_n(x)=\frac{1}{n}, \quad (96в)$$

а из равенства (96б) —

$$(1-x^2)\left(P_n(x)\frac{d}{dx}Q_n(x)-Q_n(x)\frac{d}{dx}P_n(x)\right)=1. \quad (96г)$$

Решая уравнения (96в) относительно Q_n/P_n, находим

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}=\frac{-1}{nP_n(x)P_{n-1}(x)}+\frac{Q_{n-1}(x)}{P_{n-1}(x)};$$

повторное применение полученного равенства дает

$$\frac{Q_n}{P_n}=-\left\{\frac{1}{nP_nP_{n-1}}+\frac{1}{(n-1)P_{n-1}P_{n-2}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(n-k)P_{n-k}P_{n-k-1}}+\frac{Q_{n-k-1}}{P_{n-k-1}}\right\}.$$

Если $n=\nu$ — целое положительное число, то в правой части этого равенства будет член с индексом 0 и, поскольку $P_0=1$ [см. формулу (7а)], мы получим

$$\frac{Q_\nu}{P_\nu}=-\left\{\frac{1}{\nu P_\nu P_{\nu-1}}+\frac{1}{(\nu-1)P_{\nu-1}P_{\nu-2}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2P_2P_1}+\frac{1}{P_1P_0}\right\}+Q_0. \quad (97)$$

Следующую формулу найдем, выразив в равенстве (94) K_n^m и ${}^*K_n^m$ с помощью равенства (87) через K_{n-1}^m и K_{n+1}^m:

$$K_{n+1}^m\,{}^*K_{n-1}^m-{}^*K_{n+1}^m K_{n-1}^m=\frac{z(2n+1)}{n-m+1}C'.$$

Подставляя значение C' из равенства (94а) [так же как и в равенстве (96а)], находим

$$\mathfrak{P}_{n+1}^m(z)\mathfrak{Q}_{n-1}^m(z)-\mathfrak{P}_{n-1}^m(z)\mathfrak{Q}_{n+1}^m(z)=e^{i\pi m}(2n+1)\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n-m+2)}z \quad (96'а)$$

и

$$P_{n+1}^m(x)Q_{n-1}^m(x)-P_{n-1}^m(x)Q_{n+1}^m(x)=(2n+1)\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n-m+2)}x. \quad (96'б)$$

5.5.2. Рекуррентные формулы для сферических функций. Из присоединенных функций Лежандра следующим образом строятся решения уравнения Лапласа (см. п. 3.2.3. 1 — 3.2.3. 4):

$$\Delta\left(r^n e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta)\right) = 0.$$

Множитель

$$Y_n^m(\mathfrak{e}) \equiv e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta),$$

зависящий лишь от угловых переменных, называют сферической функцией. Здесь $\mathfrak{e}$ — орт (единичный вектор)

$$\mathfrak{e} \equiv \frac{\mathfrak{r}}{r} = (\mathfrak{i}\cos\varphi + \mathfrak{j}\sin\varphi)\sin\theta + \mathfrak{k}\cos\theta,$$

$\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ — орты направлений x_1, x_2, x_3. Заменяя $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ их выражениями через показательную функцию, получаем

$$\mathfrak{e} = \left(\frac{\mathfrak{i} - i\mathfrak{j}}{2} e^{i\varphi} + \frac{\mathfrak{i} + i\mathfrak{j}}{2} e^{-i\varphi}\right)\sin\theta + \mathfrak{k}\cos\theta.$$

С помощью рекуррентных формул (90′б), (90′а), (87) можно линейно выразить произведение $\mathfrak{e}$ и $Y_n^m(\mathfrak{e})$ через сферические функции. Это приводит к соотношениям

$$(2n+1)\,\mathfrak{e}\,Y_n^m(\mathfrak{e}) = \frac{\mathfrak{i} - i\mathfrak{j}}{2}\left[Y_{n-1}^{m+1} - Y_{n+1}^{m+1}\right] +$$

$$+ \frac{\mathfrak{i} + i\mathfrak{j}}{2}\left[(n-m+1)(n-m+2)\,Y_{n+1}^{m-1} -\right.$$

$$\left. -(n+m-1)(n+m)\,Y_{n-1}^{m-1}\right] + \mathfrak{k}\left[(n-m+1)\,Y_{n+1}^m + (n+m)\,Y_{n-1}^m\right]. \tag{98a}$$

Рассмотрим теперь азимутальную производную функции Y_n^m (см. Лагалли—Франц, стр. 205); эта производная получается путем применения дифференциального оператора

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{r} \times \frac{d}{d\mathfrak{r}}.$$

Мы имеем

$$\frac{d}{d\mathfrak{r}} = \mathfrak{e}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\mathfrak{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\mathfrak{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

где $\mathfrak{e}_\theta$ и $\mathfrak{e}_\varphi$ являются ортами координатных направлений θ и φ. Отсюда следует

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\mathfrak{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Орты задаются равенствами

$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{j}\cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi = i\frac{\mathbf{i}-i\mathbf{j}}{2}e^{i\varphi} - i\frac{\mathbf{i}+i\mathbf{j}}{2}e^{-i\varphi};$$

$$\mathbf{e}_\theta = (\mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi)\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{i}-i\mathbf{j}}{2}e^{i\varphi} + \frac{\mathbf{i}+i\mathbf{j}}{2}e^{-i\varphi}\right)\cos\theta - \mathbf{k}\sin\theta.$$

Поэтому

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathbf{i}-i\mathbf{j}}{2}e^{i\varphi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] -$$

$$-\frac{\mathbf{i}+i\mathbf{j}}{2}e^{-i\varphi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Применяя этот оператор к Y_n^m, получаем с помощью равенств (89′в) и (89′г)

$$\mathfrak{m}Y_n^m(\mathfrak{e}) = i\frac{\mathbf{i}-i\mathbf{j}}{2}Y_n^{m+1} + i\frac{\mathbf{i}+i\mathbf{j}}{2}(n-m+1)(n+m)Y_n^{m-1} + i\mathbf{k}\,mY_n^m. \tag{98б}$$

Наконец, часто приходится иметь дело с градиентами произведений функций Y_n^m и некоторых функций от r. Для вычисления этих градиентов преобразуем дифференциальный оператор $\frac{d}{d\mathfrak{r}}Y_n^m$ так, чтобы его легко было применять к функциям, зависящим от r. Поскольку

$$\frac{d}{d\mathfrak{r}} = \mathfrak{e}\frac{\partial}{\partial r} - \mathfrak{e}\times\mathfrak{m}\frac{1}{r},$$

то для этого можно воспользоваться формулами (98а) и (98б). Элементарный подсчет показывает, что

$$(2n+1)\frac{d}{d\mathfrak{r}}Y_n^m = \frac{\mathbf{i}-i\mathbf{j}}{2}\left[Y_{n-1}^{m+1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{n+1}{r}\right) - Y_{n+1}^{m+1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{n}{r}\right)\right] +$$

$$+\frac{\mathbf{i}+i\mathbf{j}}{2}\left[-(n+m-1)(n+m)Y_{n-1}^{m-1}\left(\frac{d}{dr} + \frac{n+1}{r}\right) +\right.$$

$$\left.+(n-m+1)(n-m+2)Y_{n+1}^{m-1}\left(\frac{d}{dr} - \frac{n}{r}\right)\right] +$$

$$+\mathbf{k}\left[(n+m)Y_{n-1}^m\left(\frac{d}{dr} + \frac{n+1}{r}\right) + (n-m+1)Y_{n+1}^m\left(\frac{d}{dr} - \frac{n}{r}\right)\right]. \tag{98в}$$

5.6. Ряды Фурье и разложения по функциям Лежандра. Равенства (64) — (68) в пункте 5.3.3 напоминают формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье. Пусть $F(x)$ — кусочно непрерывная функция на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant +\pi$. Тогда, как известно,

ее можно представить в виде ряда $F(x)=\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} a_\mu e^{i\mu x}$, коэффициенты которого вычисляются по формуле $a_\mu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} F(\xi)e^{-i\mu\xi}d\xi$. Но если предположить, что $\operatorname{Re} z>0$ и α удовлетворяет условию (63а), то выражение $z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)$ не обращается в нуль ни при одном вещественном значении Φ. Поэтому, если $0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$, то функция $\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi+i\alpha)\right)^n$ для любого значения n непрерывна на отрезке $-\pi\leqslant\Phi\leqslant+\pi$; следовательно, эту функцию можно разложить в ряд Фурье. Коэффициентами Фурье в этом случае являются

$$a_\mu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n e^{-i\mu\Phi}d\Phi,$$

так что имеет место равенство

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=$$
$$=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{i\mu\Phi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi'-\chi\pm i\alpha)\right)^n e^{-i\mu\Phi'}d\Phi'.$$

Интегралы в правой части этого равенства выражаются, согласно формуле (64), через функции Лежандра $\mathfrak{P}_n^\mu(z)$. Поэтому

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\mathfrak{P}_n^\mu(z)\,e^{i\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)}$$
$$\left(\operatorname{Re} z>0,\quad 0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\right). \tag{99}$$

Заменяя Φ на $\Phi+\pi$, n на $-(n+1)$ и принимая во внимание равенства (13) и (15), получаем

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^{-(n+1)}=$$
$$=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+1+\mu)}{\Gamma(n+1)}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z)\,e^{i\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)}$$
$$\left(\operatorname{Re} z>0,\quad 0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\right). \tag{99а}$$

Применим к равенству (99) равенство (15): $\mathfrak{P}_n^\mu\Gamma(n-\mu+1)=\mathfrak{P}_n^{-\mu}\Gamma(n+\mu+1)$ и объединим члены с одним и тем же абсо-

лютным значением μ. Мы получим

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=$$

$$=\mathfrak{P}_n(z)+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)_\mu}\mathfrak{P}_n^\mu(z)\cos\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)$$

$$\left(\operatorname{Re}z>0,\ 0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\right). \qquad (99б)$$

Заменим здесь снова Φ на $\Phi+\pi$

$$\left(z-\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=$$

$$=\mathfrak{P}_n(z)+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{(n+1)_\mu}\mathfrak{P}_n^\mu(z)\cos\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)$$

$$\left(\operatorname{Re}z>0,\quad 0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\right). \qquad (99в)$$

Поскольку эти ряды являются рядами Фурье, то при $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$ они равномерно сходятся для всех вещественных значений Φ и χ и для всех n.

Если $\operatorname{Re}z<0$, то введем $z'=-z$ и используем полученные выше соотношения. Точнее говоря, надо положить $z=e^{\pm i\pi}z'$ в зависимости от того, имеем ли мы $\operatorname{Im}z>0$ или $\operatorname{Im}z<0$. Поэтому

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=$$

$$=e^{\pm i\pi n}\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n\quad(\operatorname{Im}z\gtrless 0).$$

Для стоящего в правой части выражения имеет место равенство (99б), если $0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$. Это ограничение дает для z условие $0\leqslant 2\alpha<\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$. Переходя с помощью соотношений (34) от функций $\mathfrak{P}_n^\mu(z')$ к функциям от z, получаем

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n=$$

$$=\mathfrak{P}_n(z)+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_n^\mu(z)}{(n+1)_\mu}\cos\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)-$$

$$-e^{\pm i\pi n}\frac{2}{\pi}\sin n\pi\left\{\mathfrak{Q}_n(z)+\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{Q}_n^\mu(z)}{(n+1)_\mu}\cos\mu(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right\}$$

$$\left(\operatorname{Re}z<0,\ \operatorname{Im}z\gtrless 0,\quad 0<2\alpha<\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right). \qquad (99г)$$

Если при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеем $2\alpha > \ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$ или при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ имеем $2\alpha > \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$, то целесообразно исходить из равенства

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{-in\Phi} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu e^{-i\mu\Phi}.$$

Мы покажем ниже, что если α удовлетворяет указанным выше ограничениям, то левая часть этого равенства непрерывна для всех вещественных значений Φ и χ и всех n. Поэтому стоящий справа ряд Фурье сходится, а его коэффициенты A_μ определяются выражениями

$$A_\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{-in\Phi}e^{i\mu\Phi}\,d\Phi.$$

Для вычисления A_μ используем тот же прием, что в пункте 5.3.3. Заменим переменную Φ на переменную t, связанную с ней формулой

$$t = z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i(\Phi-\chi-i\alpha)}$$

(ср. равенство (63а)). Тогда

$$e^{i\Phi} = \frac{t-z}{\sqrt{z^2-1}}e^{i(\chi+i\alpha)}$$

и

$$z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha) = \frac{t^2-1}{2(t-z)}.$$

Вещественным значениям Φ соответствует в плоскости t окружность с центром в точке $t=z$ и радиусом $\rho = e^{\alpha}|z^2-1|^{\frac{1}{2}}$. По предположению, при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеем $\rho > \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^{\frac{1}{2}}|z^2-1|^{\frac{1}{2}} = |z+1| > |z-1|$, а при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ имеем $\rho > |z-1| > |z+1|$. Отсюда следует, что в любом случае точки $t=1$, $t=-1$ и $t=z$ лежат внутри окружности, а потому выражение $z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении Φ. Переходя к переменной t, имеем

$$A_\mu = e^{-i(n-\mu)(\chi+i\alpha)}\frac{(z^2-1)^{\frac{n-\mu}{2}}}{2i\pi}\oint_{(z+,\,-1+,\,1+)}\frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{2n-\mu+1}}.$$

Полученный интеграл совпадает с выражением, указанным в равенстве (32). Поэтому при $\mu < 0$ мы имеем

$$A_\mu = 0,$$

а при $\mu \geqslant 0$

$$A_\mu = e^{-i(n-\mu)(\chi+i\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n-\mu+1)} \left(\mathfrak{P}_n^{n-\mu}(z) - e^{-i\pi n} \frac{2}{\pi} \sin n\pi\, \mathfrak{Q}_n^{n-\mu}(z)\right).$$

Тем самым доказано, что

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1-\mu)} \left(\mathfrak{P}_n^{n-\mu}(z) - \frac{2}{\pi} \sin n\pi\, e^{-i\pi n} \mathfrak{Q}_n^{n-\mu}(z)\right) e^{i(n-\mu)(\Phi-\chi-i\alpha)}$$

$$\left(\operatorname{Re} z \geqq 0, \quad 2\alpha > \ln\left|\frac{z\pm 1}{z\mp 1}\right| \geqslant \ln\left|\frac{z\mp 1}{z\pm 1}\right|\right). \qquad (100а)$$

Если 2α меньше, чем каждое из выражений $\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|$ и $\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|$, то мы получаем такие же соотношения, как и выше, меняя знак при α; таким образом,

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi+i\alpha)\right)^n =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1-\mu)} \left(\mathfrak{P}_n^{n-\mu}(z) - \frac{2}{\pi} \sin n\pi\, e^{-i\pi n} \mathfrak{Q}_n^{n-\mu}(z)\right) e^{i(n-\mu)(\Phi-\chi+i\alpha)}$$

$$\left(\operatorname{Re} z \geqq 0, \quad 2\alpha < \ln\left|\frac{z\mp 1}{z\pm 1}\right| \leqslant \ln\left|\frac{z\pm 1}{z\mp 1}\right|\right). \qquad (100б)$$

Иначе обстоят дела для $\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\Big)^n$, если 2α меньше, чем оба указанных выражения. Мы полагаем

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{in\Phi} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} A_\mu e^{i\mu\Phi},$$

где

$$A_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n e^{i(n-\mu)\Phi}\, d\Phi,$$

и получаем

$$A_\mu = e^{i(n-\mu)(\chi+i\alpha)} \frac{(z^2-1)^{\frac{\mu-n}{2}}}{2i\pi} \oint \frac{(t^2-1)^n\, dt}{2^n (t-z)^{\mu+1}}.$$

Путь интегрирования является замкнутой кривой на римановой поверхности, которая охватывает лишь особую точку $t=z$, так как, по предположению, при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ имеем

$$\rho = e^{\alpha}|z^2-1|^{\frac{1}{2}} < \left|\frac{z-1}{z+1}\right|^{\frac{1}{2}} |z^2-1|^{\frac{1}{2}} = |z-1|,$$

а при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ имеем $\rho < |z+1|$. Таким образом, в обоих случаях окружность не охватывает ни одну из точек $t = \pm 1$. При $\mu < 0$ вычет, очевидно, равен нулю

$$A_\mu = 0 \qquad (\mu < 0).$$

При $\mu \geqslant 0$, согласно равенству (10г), имеем

$$A_\mu = e^{i(n-\mu)(\chi+i\alpha)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu+1)} \mathfrak{P}_n^{\mu-n}(z) \qquad (\mu \geqslant 0).$$

Таким образом,

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi-i\alpha)\right)^n = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\mu!} \mathfrak{P}_n^{\mu-n}(z)\, e^{i(\mu-n)(\Phi-\chi-i\alpha)}$$

$$\left(\operatorname{Re} z \gtrless 0,\ 2\alpha < \ln\left|\frac{z\mp 1}{z\pm 1}\right| \leqslant \ln\left|\frac{z\pm 1}{z\mp 1}\right|\right). \qquad (100в)$$

Это равенство можно записать также в виде

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi+i\alpha)\right)^n = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\mu!} \mathfrak{P}_n^{\mu-n}(z)\, e^{i(\mu-n)(\Phi-\chi+i\alpha)}$$

$$\left(\operatorname{Re} z \gtrless 0,\ 2\alpha > \ln\left|\frac{z\mp 1}{z\pm 1}\right| \geqslant \ln\left|\frac{z\pm 1}{z\mp 1}\right|\right). \qquad (100г)$$

Итак, во всех случаях (за одним лишь исключением) функция $\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)\right)^n$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье, коэффициентами которого являются функции Лежандра. Лишь если $2\alpha = \ln\left|\frac{z\pm 1}{z\mp 1}\right|$, наши равенства неприменимы. В этом случае кривая $z+\sqrt{z^2-1}\cos(\Phi-\chi\pm i\alpha)$, $-\infty < \Phi < \infty$, проходит через нуль, а потому необходимое для применимости ряда Фурье условие непрерывности выполнено лишь в случае, когда $\operatorname{Re} n \geqslant 0$.

5.7. Теоремы сложения для функций Лежандра

5.7.1. Теорема сложения для $P_n(z)$. Формула Парсеваля[1]) для рядов Фурье утверждает следующее: если

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \cos \mu x \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} d_\mu \cos \mu x,$$

[1]) См. Франк — Мизес, I, стр. 299, или Курант — Гильберт, т. I, гл. II, § 1, p. 3.

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,g(x)\,dx = c_0 d_0 + \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\infty} c_\varkappa d_\varkappa.$$

Но, согласно равенству (99б),

$$\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)\right)^n = \mathfrak{P}_n(z) + 2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)_\mu}\mathfrak{P}_n^\mu(z)\cos\mu(\psi-\varphi)$$

$$(\operatorname{Re} z > 0)$$

и

$$\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right)^{-n-1} = \mathfrak{P}_n(z') + 2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)_\mu}\mathfrak{P}_n^\mu(z')\cos\mu\psi$$

$$(\operatorname{Re} z' > 0).$$

Поэтому из формулы Парсеваля следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)\right)^n}{\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi\right)^{n+1}}\,d\psi =$$

$$= \mathfrak{P}_n(z)\,\mathfrak{P}_n(z') + 2\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\,\mathfrak{P}_n^\mu(z)\,\mathfrak{P}_n^\mu(z')}{(n-\mu+1)_{2\mu}}\cos\mu\varphi. \qquad (101)$$

В этом равенстве левая часть допускает замечательное преобразование. Заметим сначала, что по теореме Коши $2i\pi f(z) = \oint f(t)\,dt/(t-z)$, и потому

$$\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi}\right)^n = \frac{1}{2i\pi}\oint^{(t_0+)}\frac{t^n\,dt}{t-\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi}}.$$

Следовательно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\left(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)\right)^n}{\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi\right)^{n+1}}\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi}\oint^{(t_0+)}\frac{t^n\,dt}{t-\dfrac{z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi}}.$$

Последнее выражение при изменении порядка интегрирования записывается так:

$$\frac{1}{4i\pi^2}\oint^{(t_0+)} t^n\,dt\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{\left(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi\right)t - z - \sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}.$$

Внутренний интеграл имеет вид

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} A = z't - z, \\ B = t\sqrt{z'^2 - 1} - \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi, \\ C = -\sqrt{z^2 - 1}\sin\varphi. \end{cases}$$

Но, в силу результатов Якоби [1]), в нашем случае

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\psi}{A + B\cos\psi + C\sin\psi} = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 - B^2 - C^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 + 1 - 2tZ}},$$

где

$$Z = zz' - \sqrt{z^2 - 1}\sqrt{z'^2 - 1}\cos\varphi.$$

(Вопрос об условиях применимости этого равенства мы оставим пока в стороне.) Принимая во внимание равенство (58д), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1}\cos(\psi - \varphi))^n}{(z' + \sqrt{z'^2 - 1}\cos\psi)^{n+1}}\, d\psi = \frac{1}{2i\pi}\oint^{(t_0+)} \frac{t^n\, dt}{\sqrt{t^2 + 1 - 2Zt}} = P_n(Z). \tag{102}$$

Тем самым установлена *теорема сложения*

$$\mathfrak{P}_n(Z) = \mathfrak{P}_n(z)\,\mathfrak{P}_n(z') + 2\sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\mu\, \mathfrak{P}_n^\mu(z)\,\mathfrak{P}_n^\mu(z')\cos\mu\varphi}{(n-\mu+1)_{2\mu}}$$

$$\left(Z = zz' - \sqrt{z^2 - 1}\sqrt{z'^2 - 1}\cos\varphi, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} z' > 0\right). \tag{103}$$

Стоящий справа ряд при любом n равномерно сходится для всех значений φ [2]).

Если, в частности, $z = \cos\theta$, $z' = \cos\theta'$, то

$$Z = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi = \cos\Theta.$$

Согласно теореме косинусов сферической тригонометрии, Θ является длиной дуги единичного шара, которая соединяет концы дуг, имеющих длины θ и θ' и образующих между собой угол φ. При подстановке $z = \cos\theta + i0$, $z' = \cos\theta' + i0$ равенство (103) принимает, в силу равенства (12), следующий вид:

$$P_n(\cos\Theta) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') + 2\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{P_n^\mu(\cos\theta)\,P_n^\mu(\cos\theta')}{(n-\mu+1)_{2\mu}}\cos\mu\varphi$$

$$(\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\varphi). \tag{103a}$$

---

[1]) *Journal für Math.*, 32 (1846), 8—13.

[2]) В данной здесь общей форме теорема доказана Гобсоном (Hobson E. W., *Proc. London Math. Soc.* (2), 29 (1928), 355).

Если $n=\nu$ — целое число, то, в силу того, что $\mathfrak{P}_\nu^{\nu+\varkappa}(z)=0$ ($\varkappa=1, 2, 3, \ldots$), ряд (103) обрывается на члене с номером ν, и мы получаем

$$\mathfrak{P}_\nu(Z)=\mathfrak{P}_\nu(z)\,\mathfrak{P}_\nu(z')+2\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{(-1)^\mu\,\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)\,\mathfrak{P}_\nu^\mu(z')\cos\mu\varphi}{(\nu-\mu+1)_{2\mu}}$$

$$(\operatorname{Re} z>0,\quad \operatorname{Re} z'>0). \tag{103б}$$

5.7.1.0. Доказательство интегральной формулы Якоби. Для вычисления интеграла Якоби положим $w=e^{i\psi}$ и получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=\frac{1}{2i\pi}\oint\frac{dw}{Aw+(B-iC)\dfrac{w^2}{2}+(B+iC)\dfrac{1}{2}},$$

где интегрирование ведется по единичной окружности. Вводя сокращенные обозначения $2\beta=B-iC$, $2\gamma=B+iC$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{\beta}\oint\frac{dw}{w^2+\dfrac{A}{\beta}w+\dfrac{\gamma}{\beta}}=$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{\beta(w_1-w_2)}\left(\oint\frac{dw}{w-w_1}-\oint\frac{dw}{w-w_2}\right).$$

Здесь w_1 и w_2 являются нулями знаменателя, т. е.

$$w_{1,2}=-\frac{A}{2\beta}\pm\sqrt{\frac{A^2-4\beta\gamma}{4\beta^2}},$$

$$w_1-w_2=+\frac{1}{\beta}\sqrt{A^2-4\beta\gamma}=\frac{1}{\beta}\sqrt{A^2-B^2-C^2}.$$

В силу теоремы Коши разность интегралов равна $2i\pi$, если путь интегрирования охватывает одну и только одну из точек w_1, w_2, и равна нулю в противном случае. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } |w_1|<1 \text{ и } |w_2|<1 \text{ или } |w_1|>1 \text{ и } |w_2|>1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}, & \text{если } |w_1|<1 \text{ и } |w_2|>1.\end{cases}$$

Покажем, что в нашем случае условия $|w_1|<1$ и $|w_2|>1$ всегда выполнены. В самом деле, из тождества $z+\sqrt{z^2-1}=\dfrac{1}{z-\sqrt{z^2-1}}$ вытекает, что $\operatorname{Re}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$ и $\operatorname{Re}\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)$ имеют всегда

одинаковый знак, а именно знак $\operatorname{Re} z$. Следовательно, линия, соединяющая точки $z+\sqrt{z^2-1}$ и $z-\sqrt{z^2-1}$, не может пересекаться с мнимой осью, если $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Re} z'>0$, а потому $\left|\frac{\arg(z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi}\right|<\pi$.

Полагая

$$t_0=\frac{z+\sqrt{z^2-1}\cos(\psi-\varphi)}{z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi},$$

получаем, что аргумент t_0 ни для каких вещественных значений φ и ψ не принимает значений $\pm\pi$; таким образом, t_0 никогда не может лежать на отрицательной полуоси. С другой стороны, знаменатель для t_0 ни для одного значения ψ не обращается в нуль. Поэтому, когда ψ меняется от $-\pi$ до $+\pi$, t_0 описывает замкнутую кривую, которая целиком лежит в конечной области и может пересекаться с вещественной осью лишь на положительной полуоси. Таким образом, в качестве пути интегрирования может быть выбрана любая кривая, которая содержит $t=t_0(\psi)$, но не содержит начала координат. Рассмотрим теперь уравнение

$$A+B\cos\psi+C\sin\psi=(z'+\sqrt{z'^2-1}\cos\psi)(t-t_0)=0,$$

считая в нем искомой величиной $w=e^{i\psi}$. Оба корня w_1 и w_2 этого уравнения являются непрерывными функциями от параметра t. При очень больших значениях параметра t они приближенно равны корням множителя при t, т. е. корням уравнения $2z'+\sqrt{z'^2-1}\left(w+\frac{1}{w}\right)=0$.

Это дает нам $w_1=-\sqrt{\frac{z'-1}{z'+1}}$ и $w_2=-\sqrt{\frac{z'+1}{z'-1}}$. Поскольку произведение этих чисел равно 1, то заведомо одно из них по абсолютной величине больше 1, а другое меньше 1. Но при $t=t_0$ $|w_1|$ или $|w_2|$ равен 1. Поскольку w_1 и w_2 непрерывно зависят от t, то $|w_1|$ и $|w_2|$ не могут принимать значение 1, если t не пересекает кривую $t_0(\psi)$. Отсюда следует, что во всех точках пути интегрирования $|w_1|<1$ и $|w_2|>1$. Поскольку путь интегрирования подчинен единственному условию, чтобы он не охватывал начало координат, то он удовлетворяет условиям, при которых справедливо равенство (58д). Аргумент в интеграле (102) однозначно определен требованием $|w_1|<|w_2|$. Оно дает

$$\left|\frac{-A+\sqrt{t^2+1-2tZ}}{-A-\sqrt{t^2+1-2tZ}}\right|<1.$$

Подставляя сюда $A=z't-z$, получаем для больших t

$$\left|\frac{-z't+\sqrt{t^2}}{-z't-\sqrt{t^2}}\right|<1.$$

При условии $\operatorname{Re} z' > 1$ это равенство выполнено, если $\lim\limits_{t\to\infty} \arg\left(\sqrt{t^2+1} - 2tZ\right) = \arg t$. Поэтому интеграл в равенстве (102) совпадает и по аргументу с интегралом, входящим в равенство (58д).

5.7.2. Теорема сложения для $\mathfrak{Q}_n(z)$. Положим в равенстве (99а) $\chi = 0$ и заметим, что $\cos iw = \operatorname{ch} w$. Мы получим тогда, что если $\operatorname{Re} z' > 0$ и $\operatorname{Re} w < \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$, то

$$\left(z' - \sqrt{z'^2-1}\operatorname{ch}(w - i\varphi)\right)^{-n-1} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+1+\mu)}{\Gamma(n+1)} \mathfrak{P}_n^{-\mu}(z') e^{i\mu(\varphi+iw)}.$$

Переставляя суммирование и интегрирование, получаем

$$\int_{-w_0}^{+w_0} \frac{(z - \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w)^n\, dw}{\left(z' - \sqrt{z'^2-1}\operatorname{ch}(w-i\varphi)\right)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+1+\mu)}{\Gamma(n+1)} \mathfrak{P}_n^{-\mu}(z') e^{i\mu\varphi} \int_{-w_0}^{+w} (z - \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w)^n e^{-\mu w}\, dw.$$

Предел интегрирования w_0 должен быть нулем подинтегральной функции, и потому $2w_0 = \ln\frac{z+1}{z-1}$. Предположим, далее, что $\operatorname{Re} z > 0$ и $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$. Тогда для всех значений φ ряд равномерно сходится. Допустимость перестановки интегрирования и суммирования легко вытекает из оценки остаточного члена ряда при добавочном предположении $\operatorname{Re}(n+1) > 0$. С помощью равенства (69б) получаем

$$\frac{1}{2}\int_{-w_1}^{+w} \frac{(z - \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w)^n\, dw}{\left(z' - \sqrt{z'^2-1}\operatorname{ch}(w-i\varphi)\right)^{n+1}} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu \mathfrak{P}_n^{-\mu}(z') \mathfrak{Q}_n^\mu(z) e^{i\mu\varphi}$$

$$\left(\operatorname{Re}(n+1) > 0,\quad \operatorname{Re} z > 0,\quad \operatorname{Re} z' > 0,\quad \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|\right). \quad (104)$$

Для вычисления интеграла сделаем подстановку

$$z - \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w = \frac{1}{z + \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v}. \qquad (*)$$

Тогда

$$\operatorname{sh} w = \frac{\operatorname{sh} v}{z + \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v} \quad \text{и} \quad dw = \frac{dv}{z + \sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} v}.$$

Подставляя, получаем равенство

$$\frac{(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w)^n\,dw}{\left(z'-\sqrt{z'^2-1}\operatorname{ch}(w-i\varphi)\right)^{n+1}}=\frac{dv}{(Z+B\operatorname{ch} v+C\operatorname{sh} v)^{n+1}},$$

где для краткости введены обозначения

$$Z=zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi,$$
$$B=z'\sqrt{z^2-1}-z\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi,$$
$$C=i\sqrt{z'^2-1}\sin\varphi.$$

Положим для упрощения

$$B\operatorname{ch} v+C\operatorname{sh} v=\sqrt{B^2-C^2}(\operatorname{ch} v\operatorname{ch} ip+\operatorname{sh} v\operatorname{sh} ip)=$$
$$=\sqrt{B^2-C^2}\operatorname{ch}(v+ip),$$

где

$$\operatorname{ch} ip=\frac{B}{\sqrt{B^2-C^2}},\quad \operatorname{sh} ip=\frac{C}{\sqrt{B^2-C^2}},\quad \operatorname{th} ip=\frac{C}{B}.$$

Простое вычисление показывает, что $B^2-C^2=Z^2-1$, а потому, полагая в интеграле $q=v+ip$, имеем

$$\frac{1}{2}\int_{-w}^{+w_0}\frac{(z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w)^n\,dw}{\left(z'-\sqrt{z'^2-1}\operatorname{ch}(w-i\varphi)\right)^{n+1}}=\frac{1}{2}\int_{-\infty+ip}^{+\infty+ip}\frac{dq}{(Z+\sqrt{Z^2-1}\operatorname{ch} q)^{n+1}}. \tag{105}$$

Найдем пределы интегрирования по v. Из формулы (*) следует, что значению $w_0-\varepsilon$ соответствует значение v^*, которое в силу $z-\sqrt{z^2-1}\operatorname{ch} w_0=0$ и $\sqrt{z^2-1}\operatorname{sh} w_0=1$ определяется соотношением

$$\operatorname{ch} v^*=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{z^2-1}}.$$

Отсюда вытекает, что верхний предел интегрирования по v равен

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v^*=\infty-i\arg\sqrt{z^2-1}.$$

Аналогично для нижнего предела имеем $-\infty+i\arg\sqrt{z^2-1}$. Поскольку отрезок пути интегрирования, для которого (положительная или отрицательная) вещественная часть переменной интегрирования бесконечно велика, не дает никакого вклада в интеграл, мы можем в качестве пути интегрирования выбрать вещественную ось плоскости v. Тогда мы и получаем указанные в формуле (105) пределы интегрирования.

При определении p следует иметь в виду, что, как всегда, $\arg\sqrt{z^2-1}$ должен быть выбран так, чтобы $\operatorname{Im}(Z)$ и $\operatorname{Im}\sqrt{Z^2-1}$ имели одинаковые знаки. Очевидно, p зависит от φ. Мы вычислим значение p при $\varphi=\pi$ и $\varphi=0$. При любом φ имеем

$$\cos p=\frac{B}{\sqrt{Z^2-1}},\quad \sin p=\frac{\sqrt{z'^2-1}\sin\varphi}{\sqrt{Z^2-1}},\quad \operatorname{tg} p=\frac{\sqrt{z'^2-1}\sin\varphi}{B}.$$

Положим

$$z=\operatorname{ch}\zeta=\operatorname{ch}(\xi+i\eta),\quad z'=\operatorname{ch}\zeta'=\operatorname{ch}(\xi'+i\eta')$$

с добавочным условием $\xi\geqslant 0$, $\xi'\geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{z^2-1}=\operatorname{sh}\zeta,\quad \sqrt{z'^2-1}=\operatorname{sh}\zeta'$$

и мы получаем

$$Z_\varphi=\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\zeta'-\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta'\cos\varphi.$$

Отсюда вытекает, что если φ пробегает вещественную ось, то точка Z_φ пробегает *прямолинейный* отрезок на комплексной плоскости, соединяющий точки

$$Z_0=\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\zeta'-\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta'=\operatorname{ch}(\zeta-\zeta')$$

и

$$Z_\pi=\operatorname{ch}\zeta\operatorname{ch}\zeta'+\operatorname{sh}\zeta\operatorname{sh}\zeta'=\operatorname{ch}(\zeta+\zeta').$$

Из условия для аргумента $\sqrt{Z^2-1}$ вытекает, что

$$\sqrt{Z_\pi^2-1}=\operatorname{sh}(\zeta'+\zeta)=B_\pi.$$

При $\varphi=0$ надо еще различать, является ли разность $\xi-\xi'$ положительным или отрицательным числом. Мы имеем

$$\sqrt{Z^2-1}=\pm\operatorname{sh}(\zeta-\zeta')=\pm B_0\qquad(\xi\gtrless\xi').$$

Отсюда следует

$$p_\pi=0,\quad p_0=\begin{cases}0 & \text{при } \xi>\xi',\\ \pi & \text{при } \xi<\xi'.\end{cases}$$

Таким образом, значение интеграла (105) при $\varphi=\pi$ дается равенством (73), а при $\varphi=0$ — либо этим равенством, либо одним из равенств (71).

Прежде чем вычислять значение этого интеграла при остальных значениях φ, рассмотрим взаимное положение прямолинейного отрезка, соединяющего точки Z_0 и Z_π, и вещественной оси комплексной плоскости Z. Для этого заметим, что условие $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|<\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$ эквивалентно условию

$$\operatorname{ch}\xi\cos\eta'>\operatorname{ch}\xi'\cos\eta,\qquad(106)$$

из которого следует

$$\xi \leqslant \xi' \to |\eta| > |\eta'| \quad \text{и} \quad |\eta| \leqslant |\eta'| \to \xi > \xi'. \tag{106а}$$

Кроме того, из $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z' > 0$ следует $|\eta| < \frac{\pi}{2}$ и $|\eta'| < \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\operatorname{Im}(Z_0) = \operatorname{sh}(\xi - \xi')\sin(\eta - \eta')$, $\operatorname{Im}(Z_\pi) = \operatorname{sh}(\xi + \xi')\sin(\eta + \eta')$, то точки Z_0 и Z_π лежат по одну и ту же сторону вещественной оси, если либо $\xi > \xi'$, и $\eta - \eta'$, и $\eta + \eta'$ имеют разные знаки, либо $\xi \leqslant \xi'$, и $\eta - \eta'$, и $\eta + \eta'$ имеют одинаковые знаки. Если обе точки лежат по разные стороны вещественной оси, то соединяющая их линия пересекает вещественную ось в точке $(X, 0)$; для координаты этой точки по элементарным формулам аналитической геометрии получаем

$$X = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh} 2\xi \sin 2\eta' + \operatorname{sh} 2\xi' \sin 2\eta}{\operatorname{sh}(\xi + \xi')\sin(\eta + \eta') + \operatorname{sh}(\xi' - \xi)\sin(\eta - \eta')} =$$

$$= \frac{\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi \sin\eta' \cos\eta' + \operatorname{sh}\xi' \operatorname{ch}\xi' \sin\eta \cos\eta}{\operatorname{sh}\xi' \operatorname{ch}\xi \sin\eta \cos\eta' + \operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi' \sin\eta' \cos\eta}, \tag{107а}$$

а потому

$$1 - X = \frac{(\operatorname{ch}\xi \cos\eta' - \operatorname{ch}\xi' \cos\eta)(\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta')}{\operatorname{sh}\xi' \operatorname{ch}\xi \sin\eta \cos\eta' + \operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi' \sin\eta' \cos\eta}. \tag{107б}$$

Итак, возможны следующие случаи.

Случай 1. $\xi > \xi' > 0$, $|\eta| < \frac{\pi}{2}$, $|\eta'| < \frac{\pi}{2}$.

а) $\eta > 0$, $\eta' > 0$.

α) Если $\eta > \eta' > 0$, то точки Z_0 и Z_π лежат по одну и ту же сторону вещественной оси (в верхней полуплоскости).

β) $\eta' > \eta > 0$. В равенстве (107б) знаменатель будет положителен, а в числителе первый множитель положителен в силу равенства (106). Далее, по сделанному предположению

$$\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' < \operatorname{sh}\xi \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' < 0.$$

Следовательно, $1 - X < 0$ и потому $X > 1$.

б) $\eta > 0$, $\eta' < 0$.

α) $|\eta| > |\eta'| \to \eta + \eta' > 0$, $\eta - \eta' > 0$, Z_0 и Z_π лежат в верхней полуплоскости.

β) $|\eta| < |\eta'| \to \eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' > 0$. Из вида знаменателя в первой формуле равенства (107а) вытекает, что этот знаменатель отрицателен. Поскольку числитель в равенстве (107б) положителен, мы снова получаем $X > 1$.

в) $\eta < 0$, $\eta' > 0$.

α) $|\eta| > |\eta'| \to \eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' < 0$. Z_0 и Z_π лежат в нижней полуплоскости.

β) $|\eta| < |\eta'| \to \eta + \eta' > 0$, $\eta - \eta' < 0$. Знаменатель в равенстве (107) положителен, числитель отрицателен, а потому снова $X > 1$.

г) $\eta < 0$, $\eta' < 0$.

α) $|\eta| > |\eta'| \to \eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' < 0$. Z_0 и Z_π лежат в нижней полуплоскости.

β) $|\eta| < |\eta'| \to \eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' > 0$. Из вида знаменателя в первой формуле равенства (107а) следует, что этот знаменатель отрицателен. В числителе имеем

$$\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' > \operatorname{sh}\xi' \sin(-\eta') - \operatorname{sh}\xi' \sin(-\eta) > 0,$$

поэтому числитель также положителен и, следовательно, $X > 1$.

Случай 2. $\xi' \geqslant \xi > 0$, $|\eta| < \frac{\pi}{2}$, $|\eta'| < \frac{\pi}{2}$. Из соотношений (106а) следует, что всегда должно иметь место $|\eta| > |\eta'|$.

а) $\eta > 0$, $\eta' > 0 \to \eta > \eta' > 0$, $\eta + \eta' > 0$, $\eta - \eta' > 0$. Знаменатели в равенствах (107а) и (107б) положительны. Поскольку числитель в равенстве (107а) положителен, то $X > 0$. В числителе равенства (107б) имеем

$$\operatorname{sh}\xi' \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' > \operatorname{sh}\xi \sin\eta - \operatorname{sh}\xi \sin\eta' > 0,$$

а потому $1 - X > 0$ и

$$0 < X < 1.$$

б) $\eta > 0$, $\eta' < 0 \to \eta > -\eta' > 0$, $\eta + \eta' > 0$, $\eta - \eta' > 0$. Знаменатель в равенстве (107) положителен. Числитель в равенстве (107б) положителен, а потому $1 - X > 0$. Для числителя в равенстве (107а) имеем

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sh}\xi \sin 2\eta' + \operatorname{sh} 2\xi' \sin 2\eta) > \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\xi (\sin 2\eta' + \sin 2\eta) =$$
$$= \operatorname{sh} 2\xi \sin(\eta + \eta') \cos(\eta - \eta') > 0.$$

Следовательно, $X > 0$ и

$$0 < X < 1.$$

в) $\eta < 0$, $\eta' > 0 \to -\eta > \eta' > 0$, $\eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' < 0$. Знаменатель в равенстве (107) отрицателен. Числитель в равенстве (107б) отрицателен, а потому $1 - X > 0$. Для числителя в равенстве (107а) имеем

$$\frac{1}{2}(\operatorname{sh} 2\xi \sin 2\eta' + \operatorname{sh} 2\xi' \sin 2\eta) < \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2\xi' (\sin 2\eta' + \sin 2\eta) =$$
$$= \operatorname{sh} 2\xi' \sin(\eta + \eta') \cos(\eta - \eta') < 0.$$

Следовательно, $X > 0$ и

$$0 < X < 1.$$

г) $\eta > 0$, $\eta' < 0 \to \eta < \eta' < 0$, $\eta + \eta' < 0$, $\eta - \eta' < 0$. Знаменатель в равенстве (107) отрицателен. Числитель в равенстве (107а) отрицателен, а потому $X > 0$. Для числителя равенства (107б) имеем

$$\operatorname{sh}\xi \sin\eta' < \operatorname{sh}\xi' (\sin(-\eta') - \sin(-\eta)) < 0,$$

поэтому снова

$$0 < X < 1.$$

Проведенные рассуждения показывают: если $\xi > \xi'$, то либо обе точки Z_0 и Z_π лежат по одну и ту же сторону вещественной оси, либо соединяющий их отрезок пересекает вещественную ось в точке $X > 1$; если $\xi \leqslant \xi'$, то точки Z_0 и Z_π лежат по разные стороны вещественной оси и соединяющий их отрезок пересекает вещественную ось в такой точке, что $0 < X < 1$.

Применим полученные результаты к интегралу (105) при $\xi > \xi'$. Поскольку при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$ имеем $p = 0$; то, согласно равенству (71), этот интеграл равен $\mathfrak{Q}_n(Z)$. Когда φ меняется от $-\pi$ до π, правая часть равенства (104) меняется непрерывно, а в левой части величина p непрерывно зависит от φ. Поэтому, если $|\operatorname{Im}(p_\varphi)| < |\operatorname{Im}(p^*)|$, где p^* — решение уравнения $Z_\varphi + \sqrt{Z_\varphi^2 - 1}\operatorname{ch} p^* = 0$, то интеграл в левой части равенства (104) равен $\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi)$. Эта функция непрерывно зависит от φ, так как Z_φ не пересекает разреза для функции $\mathfrak{Q}_n(z)$ $(z < 1)$. С другой стороны, $|\operatorname{Im}(p_\varphi)|$ не может превзойти $|\operatorname{Im}(p^*)|$, так как в противном случае левая часть равенства (104) изменилась бы скачкообразно, и правая часть не могла бы непрерывно зависеть от φ. Мы получаем отсюда, что если

$$Z_\varphi = zz' - \sqrt{z^2 - 1}\sqrt{z'^2 - 1}\cos\varphi$$

$$\left(\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Re} z' > 0,\ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|\right)$$

и отрезок, соединяющий точки Z_0 и Z_π, не пересекает разреза между 0 и 1, то

$$\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu \mathfrak{P}_n^{-\mu}(z') \mathfrak{Q}_n^\mu(z)\, e^{i\mu\varphi}. \qquad (108)$$

В равенстве (108) мы считаем, что z и z' вещественны и больше 1, причем $z > z' > 1$.

Если $\xi < \xi'$, то при изменении φ от $\mp\pi$ до 0 p меняется от 0 до π; путь интегрирования в этом случае обязательно проходит через нуль знаменателя подинтегральной функции (105). При этом отрезок,

соединяющий точки Z_0 и Z_π, пересекает вещественную ось между точками 0 и 1. Отсюда вытекает: если Z_φ лежит по ту же сторону от вещественной оси, что и Z_π, то имеет место равенство (108). Если же Z_φ лежит с той же стороны, что и Z_0, то ряд в правой части равенства (104) равномерно сходится к непрерывной функции от φ. Но эта функция уже отлична от $\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi)$, поскольку $\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi)$ при переходе через разрез претерпевает разрыв. Поэтому сумма ряда (104) получается из равенства (73) при $m=0$ с помощью аналитического продолжения от Z_0 к Z_φ. Из равенства (105) вытекает, что выполнены условия применимости равенства (73), поскольку $|\arg(Z_0-\sqrt{Z_0^2-1})|<\pi$. В самом деле, $Z_0-\sqrt{Z_0^2-1}=(z'-\sqrt{z'^2-1})/(z-\sqrt{z^2-1})=e^{\xi'-\xi}e^{-i(\eta'-\eta)}$, а так как $|\eta|<\frac{\pi}{2}$, $|\eta'|<\frac{\pi}{2}$, то $|\eta'-\eta|<\pi$. На рис. 31 изображены различные возможные положения точек Z_0 и Z_π для случаев 2а, б, в, г. Рассматривая его, убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

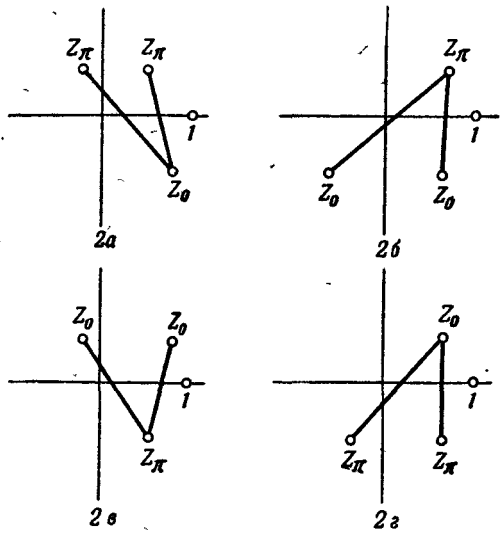


Рис. 31. Возможные положения Z_0 и Z_π.

Если $Z_\varphi=zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi$ ($\operatorname{Re}z>0$, $\operatorname{Re}z'>0$) и отрезок, соединяющий Z_0 и Z_π, пересекает вещественную ось между 0 и 1, причем Z_φ и Z_π лежат по одну сторону от вещественной оси, то

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\mu\,\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z)\,\mathfrak{Q}_n^\mu(z)\,e^{i\mu\varphi}=\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi), \tag{108а}$$

когда Z_φ и Z_0 лежат по одну сторону от вещественной оси, то

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\mu\,\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\,\mathfrak{Q}_n^\mu(z)\,e^{i\mu\varphi}=\mathfrak{Q}_n(Z_\varphi)\pm i\pi\,\mathfrak{P}_n(Z_\varphi), \tag{108б}$$

при этом берется знак $+$, при $\operatorname{Im}(Z_\varphi)>0$ (случаи 2в, г), и знак $-$, при $\operatorname{Im}(Z_\varphi)<0$ (случаи 2а, б).

Эти утверждения доказаны лишь при условии, что $\operatorname{Re}(n+1)>0$. Заметим, однако, что из равенства (27) для целочисленных значений $m=\mu$ следует соотношение

$$\pi \operatorname{ctg} n\pi\, \mathfrak{P}_n^{\mu}(z) = \mathfrak{Q}_n^{\mu}(z) - \mathfrak{Q}_{-n-1}^{\mu}(z).$$

Поэтому с помощью равенства (13) получаем из равенства (108), что если $\operatorname{Re} n > -1$, то

$$\mathfrak{Q}_{-n-1}(Z_\varphi) + \pi \operatorname{ctg} n\pi\, \mathfrak{P}_{-n-1}(Z_\varphi) =$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu}\, \mathfrak{P}_{-n-1}^{-\mu}(z') \left(\mathfrak{Q}_{-n-1}^{\mu}(z) + \pi \operatorname{ctg} n\pi\, \mathfrak{P}_{-n-1}^{\mu}(z)\right) e^{i\mu\varphi}.$$

Отсюда, в силу равенства (103), вытекает справедливость равенства (108) для *всех* значений n, за исключением целых отрицательных.

Случай, когда z и z' лежат на разрезе между -1 и $+1$, нуждается в дополнительном исследовании. Примем сначала, что обе величины положительны и вещественны. Положим

$$z = x + i\varepsilon \quad = \cos(\eta - i\varepsilon) \quad = \operatorname{ch}(\varepsilon + i\eta),$$
$$z' = x' + i\varepsilon' = \cos(\eta' - i\varepsilon') = \operatorname{ch}(\varepsilon' + i\eta'),$$

и далее

$$z = x - i\varepsilon \quad = \cos(\eta + i\varepsilon) \quad = \operatorname{ch}(\varepsilon - i\eta),$$
$$z' = x' - i\varepsilon' = \cos(\eta' + i\varepsilon') = \operatorname{ch}(\varepsilon' - i\eta').$$

В обоих случаях должно быть $0 < \eta' < \eta < \frac{\pi}{2}$ и $0 \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Но тогда, согласно равенству (108), имеем

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \mathfrak{P}_n^{-\mu}(x' + i\varepsilon') e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \mathfrak{Q}_n^{\mu}(x + i\varepsilon) e^{i\mu\varphi} = \mathfrak{Q}_n(x_\varphi + i\varepsilon'')$$

и

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu} e^{i\frac{\pi}{2}\mu} \mathfrak{P}_n^{-\mu}(x' - i\varepsilon') e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \mathfrak{Q}_n^{\mu}(x - i\varepsilon) e^{i\mu\varphi} = \mathfrak{Q}_n(x_\varphi - i\varepsilon'').$$

Принимая во внимание формулы (12) и (21), складывая полученные равенства и переходя к пределу при $\varepsilon' = \varepsilon = 0$, получаем

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\mu} P_n^{-\mu}(x') \mathfrak{Q}_n^{\mu}(x) e^{i\mu\varphi} = Q_n(x_\varphi), \tag{109}$$

где

$$x_\varphi = xx' + \sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-x'^2}\cos\varphi.$$

Это равенство может быть обобщено на случай, когда одна из двух переменных отрицательна. Пусть $\frac{\pi}{2} < \eta < \pi$. Положим

тогда $\bar{\eta} = \pi - \eta$, $\bar{x} = \cos\bar{\eta}$, $\bar{x}_\psi = \cos\bar{\eta}\cos\eta' + \sin\bar{\eta}\sin\eta'\cos\psi$. Согласно равенству (109) и соответственно равенству (103а), получаем, что если $\eta' < \bar{\eta}$ и потому $\eta + \eta' < \pi$, то

$$Q_n(\bar{x}_\psi) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu P_n^{-\mu}(x') Q_n^\mu(\bar{x}) e^{i\mu\psi},$$

$$P_n(\bar{x}_\psi) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu P_n^{-\mu}(x') P_n^\mu(\bar{x}) e^{i\mu\psi}.$$

Принимая во внимание равенство (34г), получаем отсюда

$$P_n(-\bar{x}_\psi) = \cos n\pi\, P_n(\bar{x}_\psi) - \frac{2}{\pi}\sin n\pi\, Q(\bar{x}_\psi) =$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} P_n^{-\mu}(x')\left[\cos(n+\mu)\pi\, P_n^\mu(\bar{x}) - \frac{2}{\pi}\sin(n+\mu)\pi\, Q_n^\mu(\bar{x})\right] e^{i\mu\psi}.$$

Следовательно, согласно равенству (34в),

$$P_n(-\bar{x}_\psi) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu P_n^{-\mu}(x') P_n^\mu(x) e^{i\mu(\psi-\pi)}.$$

Так как

$$-\bar{x}_\psi = \cos\eta\cos\eta' - \sin\eta\sin\eta'\cos\psi =$$
$$= \cos\eta\cos\eta' + \sin\eta\sin\eta'\cos(\psi - \pi),$$

то мы получаем при $\varphi = \psi - \pi$

$$P_n(\cos\eta\cos\eta' + \sin\eta\sin\eta'\cos\varphi) =$$
$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu P_n^{-\mu}(\cos\eta') P_n^\mu(\cos\eta) e^{i\mu\varphi} \quad (110)$$

$$\left(0 < \eta' < \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2} < \eta < \pi,\quad \eta + \eta' < \pi \quad \text{или} \quad 0 < \eta' < \eta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Совершенно так же на основании равенства (34е)

$$-Q_n(-\bar{x}_\psi) = \cos n\pi Q_n(\bar{x}_\psi) + \frac{\pi}{2}\sin n\pi\, P_n(\bar{x}_\psi)$$

получается соотношение

$$Q_n(\cos\eta\cos\eta' + \sin\eta\sin\eta'\cos\varphi) =$$
$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\mu P_n^{-\mu}(\cos\eta') Q_n^\mu(\cos\eta) e^{i\mu\varphi} \quad (111)$$

$$\left(0 < \eta' < \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2} < \eta < \pi,\quad \eta + \eta' < \pi \quad \text{или} \quad 0 < \eta' < \eta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Мы доказали, таким образом, что если $\eta+\eta'<\pi$, то для

$P_n(\cos\eta\cos\eta'+\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi)$ и $Q_n(\cos\eta\cos\eta'+\sin\eta\sin\eta'\cos\varphi)$

всегда выполняется теорема сложения; соотношения могут быть выбраны так, чтобы было применимо равенство (110) или соответственно равенство (111).

5.7.3. Обобщение теоремы сложения на случай $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Re} z'>0$. Пусть $\operatorname{Re} z<0$. Заменим z на $-z$ в теореме сложения (108) для $\mathfrak{Q}_n$. Мы получим, что при условии $\left|\frac{-z+1}{z+1}\right|<\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$ имеет место равенство

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\mathfrak{Q}_n^{\mu}(-z)e^{i\mu\varphi}=$$
$$=\mathfrak{Q}_n\left(-zz'+\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right).$$

Здесь в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Im} z\gtrless 0$, имеем

$$-z=e^{\mp i\pi}z,\quad \sqrt{(-z)^2-1}=e^{\mp i\pi}\sqrt{z^2-1},$$

$$-zz'+\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi=e^{\mp i\pi}\left(zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right).$$

Таким образом, принимая во внимание равенство (33), получаем следующий результат.

Если $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Re} z'>0$, $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|<\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$, а отрезок, соединяющий точки $zz'+\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}$ и $zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}$, не пересекает вещественной оси между точками -1 и $+1$, то имеет место формула

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z)e^{i\mu\varphi}=\mathfrak{Q}_n\left(zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right),\tag{112}$$

причем ряд равномерно сходится для всех вещественных значений φ.

Чтобы получить соответствующее утверждение для функции Лежандра первого рода, образуем, согласно равенству (103),

$$\mathfrak{P}_n\left(-zz'+\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right)=$$
$$=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\mathfrak{P}_n^{\mu}(-z)e^{i\mu\varphi}$$

и применим равенство (34):

$$e^{\mp i\pi n}\mathfrak{P}_n\left(zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right)-$$
$$-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\,\mathfrak{Q}_n\left(zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right)=$$
$$=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\left[e^{\mp i\pi n}\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)-\frac{2}{\pi}\sin n\pi\,\mathfrak{Q}_n^{\mu}(z)\right]e^{i\mu\varphi}.$$

Принимая во внимание равенство (112), получаем: если $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Re} z'>0$, $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|<\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|$ и отрезок, соединяющий точки $zz'+\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}$ и $zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}$, не пересекает вещественной оси между точками -1 и $+1$, то имеет место формула

$$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\mu}\mathfrak{P}_n^{-\mu}(z')\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)e^{i\mu\varphi}=\mathfrak{P}_n\left(zz'-\sqrt{z^2-1}\sqrt{z'^2-1}\cos\varphi\right),\tag{113}$$

причем ряд равномерно сходится для всех вещественных значений φ.

Легко показать, что если отрезок пересекает разрез, то равенства (112) и (113) сохраняют силу для значений φ, таких, что соответствующая точка Z_{φ} лежит по ту же сторону от вещественной оси, что и точка Z_{π}.

5.8. Функции Гегенбауэра. Мы рассмотрим здесь обобщение сферических функций, связанное с рассмотрением уравнения Лапласа в n-мерном пространстве.

5.8.1. Уравнение Лапласа в n-мерном евклидовом пространстве. Оператор Лапласа

$$\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

легко обобщается на пространство большего числа измерений. Он принимает вид [1])

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^{\nu}}\left(\sqrt{g}\,g^{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}\right).\tag{114}$$

Здесь через $g_{\mu\nu}$ обозначены коэффициенты основной метрической формы, а через g — ее определитель. Для ортогональных систем

[1]) См., например, Лагалли—Франц, стр. 442, уравнение (60).

координат лишь диагональные члены отличны от нуля, а $g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}}$. Оператор Лапласа принимает тогда вид

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\mu\mu}} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}} \right). \tag{115}$$

Введем в n-мерном евклидовом пространстве полярные координаты R, $\theta_1 \equiv \theta$, θ_2, θ_3, ..., θ_{n-2}, φ, определяемые равенствами

$$x_1 = R\cos\theta; \quad x_2 = R\sin\theta\cos\theta_2; \quad x_3 = R\sin\theta\sin\theta_2\cos\theta_3; \ \ldots$$

$$x_n = R\prod \sin\theta_x \cos\varphi.$$

Тогда квадрат дифференциала длины дуги примет вид

$$ds^2 = dR^2 + R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\theta_2 + \sin^2\theta\sin^2\theta_2 d\theta_3 + \ldots$$
$$\ldots + \sin^2\theta\sin^2\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{n-2}\, d\varphi^2). \tag{116}$$

Отсюда следует

$$\sqrt{g} = R^{n-1}\sin^{n-2}\theta\sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}. \tag{116a}$$

Сокращая в равенстве (115) множители, не подвергающиеся дифференцированию, имеем

$$\Delta u = \frac{1}{R^{n-1}} \frac{\partial}{\partial R}\left(R^{n-1}\frac{\partial u}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin^{n-2}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^{n-2}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{R^2\sin^2\theta\sin^{n-3}\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin^{n-3}\theta_2\frac{\partial u}{\partial\theta_2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{R^2\sin^2\theta\sin^2\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}. \tag{117}$$

Предположим, что функция u не зависит от некоторых координат. Мы получаем тогда более простые частные случаи. Если, например, u зависит только от R, θ и φ, то

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{n-1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} +$$
$$+ \frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + (n-2)\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta\sin^2\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{n-2}}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{117a}$$

Если же u зависит лишь от R, то уравнение Лапласа принимает вид

$$\Delta u = \frac{1}{R^{n-1}}\frac{d}{dR}\left(R^{n-1}\frac{\partial u}{\partial R}\right) = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$u = \frac{1}{R^{n-2}} \qquad (n \neq 2).$$

В трехмерном пространстве это приводит к ньютонову потенциалу. Если положить $2p = n - 2$, то имеем

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2p+1}{r}\frac{du}{dr} = 0; \quad u = \frac{1}{r^{2p}}. \tag{118}$$

Уравнение (117а) можно рассматривать, отвлекаясь от первоначального смысла координат R, θ, φ. Например, можно рассматривать их и как сферические координаты в пространстве меньшего числа измерений. При этом следует лишь иметь в виду, что тогда уравнение (117а) не связано с оператором Лапласа в этом пространстве.

5.8.2. Определение функций Гегенбауэра. В равенстве (118) мы можем геометрически истолковать $R = r$ как расстояние точки P от фиксированной точки Q. При этом безразлично, является ли точка Q началом системы координат или нет (рис. 32). Выбирая произвольно начало координат, можно положить

$$R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta = \begin{cases} r_0^2(1 - 2t\cos\theta + t^2); & t = \dfrac{r}{r_0} < 1, \\ r^2(1 - 2t\cos\theta + t^2); & t = \dfrac{r_0}{r} < 1, \end{cases} \tag{119}$$

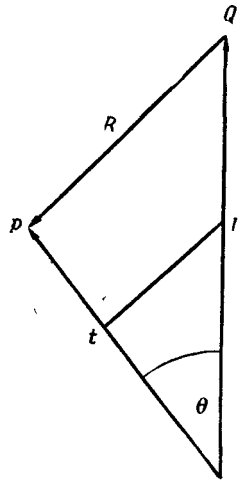


Рис. 32. К геометрическому введению функций Гегенбауэра.

и, в зависимости от того, будет ли $r < r_0$ или $r > r_0$, выбрать в качестве переменных отношение $t = \frac{r}{r_0}$ или $t = \frac{r_0}{r}$ и θ. Подстановка показывает, что выражение $(R/r_0)^{-2p} = (1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-p}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое получится из уравнения (117 а), если R заменить на t, а u рассматривать как функцию лишь от t и θ. Это ясно и без вычислений, поскольку изображенный на рис. 32 угол θ, как и θ в выражении (116) для элемента длины дуги, можно рассматривать как полярный угол. Мы имеем, таким образом,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2p+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{t^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2p}{t^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \tag{120}$$

где $u = (1 - 2t\cos\theta + t^2)^{-p}$. Введем в качестве переменной $\cos\theta = z$. Тогда мы получим из уравнения (117) уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2p+1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{t^2}(1 - z^2)^{-p+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left((1 - z^2)^{p+\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0. \tag{121}$$

В решении u этого уравнения мы имеем $|t^2-2tz|<1$. Поэтому полученное решение можно разложить по формуле бинома. Разложим его по степеням t и положим

$$(1-2tz+t^2)^{-p}=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu^p(z)\,t^\nu. \tag{122}$$

Коэффициенты при t являются функциями от z и зависят, кроме индекса суммирования ν, также и от показателя p.

Эти функции были введены раньше при условии, что $p=\frac{n}{2}-1$, где n — целое число, поскольку это число измерений пространства; однако в дифференциальном уравнении (118) и в биномиальном разложении значение p не подвергается никаким ограничениям. Коэффициенты разложения $C_\nu^p(z)$ мы будем называть *функциями Гегенбауэра* [1]).

Они могут быть непосредственно вычислены из определяющего уравнения (122). Мы имеем

$$(1-2zt+t^2)^{-p}=\left[1-2t\left(z-\frac{t}{2}\right)\right]^{-p}=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\leqslant\left[\frac{\nu}{2}\right]}\binom{-p}{\nu-\mu}(-2t)^{\nu-\mu}\binom{\nu-\mu}{\mu}\left(-\frac{t}{2}\right)^{\mu}z^{\nu-2\mu}.$$

Заменяя здесь биномиальные коэффициенты через Г-функции, получаем, что коэффициент при t^ν равен

$$C_\nu^p(z)=\sum_{\mu=0}^{\leqslant\left[\frac{\nu}{2}\right]}\frac{(-1)^\mu\,2^{\nu-2\mu}\,\Gamma(p+\nu-\mu)}{\Gamma(p)\,\mu!\,(\nu-2\mu)!}z^{\nu-2\mu}. \tag{123}$$

Очевидно, что

$$C_0^p=1. \tag{123a}$$

Легко также найти C_ν^1. Принимая во внимание, что $2z=e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ и $1-2zt+t^2=(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta})$, мы получаем

$$-\ln(1-2zt+t^2)=-\ln(1-te^{i\theta})-\ln(1-te^{-i\theta})=2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu\cos\nu\theta}{\nu}.$$

---

[1]) Gegenbauer L., *S.—B. Akad. Wien, Math. nat. Kl.* IIa, 75, (1877), 891.

Отсюда следует

$$-\frac{d}{dz}\ln(1-2zt+t^2)=\frac{2t}{1-2zt+t^2}=$$

$$=2\sum_{\nu}C_{\nu}^{1}t^{\nu+1}=\frac{2}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sum_{\nu}\frac{t^{\nu}\cos\nu\theta}{\nu}$$

и, поскольку в силу равномерной сходимости можно почленно дифференцировать ряд, то

$$C_{\nu}^{1}(\cos\theta)=\frac{\sin(\nu+1)\theta}{\sin\theta}. \qquad (123б)$$

5.8.3. Дифференциальное уравнение для функций Гегенбауэра. Подставим выражение (122) в дифференциальное уравнение (121). Поскольку биномиальное разложение равномерно сходится, можно переставить суммирование и дифференцирование и получить

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}t^{\nu-2}\left\{[\nu(\nu-1)+(2p+1)\nu]C_{\nu}^{p}+\right.$$

$$\left.+(1-z^2)^{-p+\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}\frac{dC_{\nu}^{p}}{dz}\right)\right\}=0.$$

Так как степенной ряд обращается в нуль лишь в случае, если его коэффициенты равны нулю, то должны выполняться равенства

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}\frac{dC_{\nu}^{p}}{dz}\right)+\nu(2p+\nu)(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_{\nu}^{p}=0. \qquad (124)$$

Мы получили, таким образом, дифференциальное уравнение для функций Гегенбауэра в самосопряженной форме. Выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{d^2C_{\nu}^{p}}{dz^2}-\frac{(2p+1)z}{1-z^2}\frac{dC_{\nu}^{p}}{dz}+\frac{\nu(2p+\nu)}{1-z^2}C_{\nu}^{p}=0. \qquad (125)$$

Перейдя снова к переменному θ, где $z=\cos\theta$, получим уравнение

$$\frac{d^2C_{\nu}^{p}}{d\theta^2}-2p\operatorname{ctg}\theta\frac{dC_{\nu}^{p}}{d\theta}+\nu(2p+\nu)C_{\nu}^{p}=0. \qquad (125а)$$

Подстановка $t=(1-z)/2$ переводит уравнение (125) в гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+(1-2t)\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dt}+\nu(2p+\nu)y=0. \qquad (126)$$

Его решением, согласно формулам (4.11) (см. уравнение (4.2) и равенство (4.12)!), является

$$C_\nu^p(z)=\frac{\Gamma(\nu+2p)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(2p)}\,{}_2F_1\left(\nu+2p,\ -\nu;\ p+\frac{1}{2};\ \frac{1-z}{2}\right). \quad (127)$$

5.8.4. Рекуррентные формулы. Дифференцируя равенство (122) по z, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{dC_\nu^p}{dz}\,t^\nu=\frac{2pt}{(1-2zt+t^2)^{p+1}}=2p\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{\nu-1}^{p+1}t^\nu,$$

а потому

$$\frac{dC_\nu^p}{dz}=2p\,C_{\nu-1}^{p+1}. \quad (128)$$

Повторное применение этого равенства дает нам

$$\frac{d^\mu C_\nu^p}{dz^\mu}=2^\mu\,\frac{\Gamma(p+\mu)}{\Gamma(p)}\,C_{\nu-\mu}^{p+\mu}. \quad (128а)$$

Учитывая равенство (123а), получаем отсюда

$$\frac{d^\nu C_\nu^p}{dz^\nu}=2^\nu\,\frac{\Gamma(p+\nu)}{\Gamma(p)}. \quad (128б)$$

Дифференцируя равенство (122) по t, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,C_{\nu+1}^p t^\nu=\frac{2p(z-t)}{(1-2zt+t^2)^{p+1}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}t^\nu 2p\left(zC_\nu^{p+1}-C_{\nu-1}^{p+1}\right),$$

откуда следует

$$(\nu+1)\,C_{\nu+1}^p=2p\left(z\,C_\nu^{p+1}-C_{\nu-1}^{p+1}\right). \quad (129)$$

Но из равенства (122) следует также

$$\sum C_{\nu+1}^p t^{\nu+1}=\frac{1-2zt+t^2}{(1-2zt+t^2)^{p+1}}=\sum t^{\nu+1}\left(C_{\nu+1}^{p+1}-2z\,C_\nu^{p+1}+C_{\nu-1}^{p+1}\right),$$

а потому

$$C_{\nu+1}^p=C_{\nu+1}^{p+1}-2z\,C_\nu^{p+1}+C_{\nu-1}^{p+1}. \quad (130)$$

Заменяя здесь $C_{\nu+1}^p$, согласно равенству (129), и уменьшая верхние индексы на 1, получаем

$$(\nu+1)\,C_{\nu+1}^p=2z(p+\nu)\,C_\nu^p-(2p+\nu-1)\,C_{\nu-1}^p. \quad (131)$$

Умножая равенство (130) на $2p$ и складывая результат с равенством (129), получаем

$$(2p+\nu+1)C_{\nu+1}^{p}=2p\left(C_{\nu+1}^{p+1}-zC_{\nu}^{p+1}\right). \tag{132}$$

Снова складывая с равенством (129), имеем

$$(p+\nu+1)C_{\nu+1}^{p}=p\left(C_{\nu+1}^{p+1}-C_{\nu-1}^{p+1}\right). \tag{133}$$

Исключим из равенства (129) и из равенства (132), в котором нижние индексы уменьшены на 1, член, содержащий $C_{\nu-1}^{p+1}$. Мы получим

$$\nu z C_{\nu}^{p}=(2p+\nu-1)C_{\nu-1}^{p}-2p\left(1-z^2\right)C_{\nu-1}^{p+1}. \tag{134}$$

Если исключить C_{ν}^{p+1}, то получим

$$\nu C_{\nu}^{p}=(2p+\nu-1)zC_{\nu-1}^{p}-2p\left(1-z^2\right)C_{\nu-2}^{p+1}. \tag{135}$$

Подставим в дифференциальное уравнение (124) выражение (128) для производной. Мы получим тогда

$$\left(1-z^2\right)^{p-\frac{1}{2}}C_{\nu}^{p}=-\frac{2p}{\nu(\nu+2p)}\frac{d}{dz}\left(1-z^2\right)^{p+\frac{1}{2}}C_{\nu-1}^{p+1}. \tag{136}$$

Выполняя здесь дифференцирование, можно записать это уравнение в виде

$$2p(2p+1)zC_{\nu-1}^{p+1}-\nu(2p+\nu)C_{\nu}^{p}=2p\left(1-z^2\right)\frac{dC_{\nu-1}^{p+1}}{dz}. \tag{136а}$$

Увеличим в равенстве (135) нижние индексы на 1 и примем во внимание равенство (128). Мы получим

$$(\nu+1)C_{\nu+1}^{p}=(2p+\nu)zC_{\nu}^{p}-\left(1-z^2\right)\frac{dC_{\nu}^{p}}{dz}, \tag{136б}$$

или

$$\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{p+\frac{\nu}{2}}C_{\nu}^{p}\right)=-(\nu+1)\left(1-z^2\right)^{p+\frac{\nu}{2}-1}C_{\nu+1}^{p}.$$

Точно так же равенства (134) и (128) дают нам

$$\frac{d}{dz}\left(\left(1-z^2\right)^{-\frac{\nu}{2}}C_{\nu}^{p}\right)=(2p+\nu-1)\left(1-z^2\right)^{-\frac{\nu}{2}-1}C_{\nu-1}^{p}; \tag{136в}$$

ν-кратное применение равенства (136) показывает, что

$$\left(1-z^2\right)^{p-\frac{1}{2}}C_{\nu}^{p}=\frac{(-2)^{\nu}(p)_{\nu}}{\nu!(\nu+2p)_{\nu}}\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}\left(1-z^2\right)^{p+\nu-\frac{1}{2}},$$

поскольку $C_0^{p+\nu}=1$. Используя формулу удвоения для Г-функции, можно представить коэффициент также в виде

$$C_\nu^p=\frac{(-1)^\nu\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+\nu)}{2^{2p+\nu-1}\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)}(1-z^2)^{-p+\frac{1}{2}}\frac{d^\nu(1-z^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}}{dz^\nu}. \quad (137)$$

5.8.5. Соотношения ортогональности и нормировки. Как уже отмечалось выше, дифференциальное уравнение для функции Гегенбауэра в форме (124) самосопряжено. Это дает возможность легко установить соотношения ортогональности для этих функций. Умножим дифференциальное уравнение для C_ν^p на C_μ^p, а уравнение для C_μ^p на C_ν^p и вычтем друг из друга получающиеся равенства. Мы имеем

$$C_\mu^p\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}\frac{dC_\nu^p}{dz}\right)-C_\nu^p\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}\frac{dC_\mu^p}{dz}\right)=$$

$$=(\mu(2p+\mu)-\nu(2p+\nu))(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^pC_\mu^p. \quad (138)$$

Левую часть можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}\left(C_\mu^p\frac{dC_\nu^p}{dz}-C_\nu^p\frac{dC_\mu^p}{dz}\right)\right)=\frac{dS_{\mu,\nu}}{dz}.$$

В точках $z=\pm1$ функция $S_{\mu,\nu}$ обращается в нуль, поскольку она содержит множитель $(1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}$, а $\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}$. Интегрируя равенство (138) от -1 до $+1$, видим, что левая часть обращается в нуль, а потому

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\mu^pC_\nu^p\,dz=0\quad\left(\nu\neq\mu;\quad\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}\right). \quad (139)$$

Если подставить сюда снова $z=\cos\theta$, то полученное равенство примет вид

$$\int_0^\pi\sin^{2p}\theta\,C_\mu^p(\cos\theta)\,C_\nu^p(\cos\theta)\,d\theta=0\quad\left(\nu\neq\mu;\quad\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}\right). \quad (139a)$$

Таким образом, многочлены C_μ^p и C_ν^p попарно ортогональны с весом $\sin^{2p}\theta$ или $(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}$.

При $\nu=\mu$ получаем *норму*

$$N=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p C_\nu^p\,dz. \tag{140}$$

Для вычисления этих интегралов рассмотрим более общее выражение

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p F(z)\,dz,$$

где $F(z)$ является ν раз дифференцируемой функцией на отрезке $[-1, +1]$. В силу дифференциального уравнения (124) и равенства (128), имеем

$$\int(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p F(z)\,dz=-\frac{2p}{\nu(2p+\nu)}\int F(z)\frac{d}{dz}\left((1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}C_{\nu-1}^{p+1}\right)dz.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что, в силу наличия множителя $(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}$, проинтегрированные члены обращаются в нуль в точках -1 и $+1$, получаем

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p F(z)\,dz=\frac{2p}{\nu(2p+\nu)}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p+\frac{1}{2}}C_{\nu-1}^{p+1}\frac{dF}{dz}\,dz.$$

Повторение этого процесса ν раз дает нам, в силу $C_0^{p+\nu}=1$,

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p F(z)\,dz=\frac{2^\nu(p)_\nu}{\nu!\,(2p+\nu)_\nu}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}\frac{d^\nu F}{dz^\nu}\,dz. \tag{141}$$

Используя формулу удвоения для Γ-функции, мы можем преобразовать стоящий здесь коэффициент; имеем

$$\frac{2^\nu(p)_\nu}{\nu!\,(2p+\nu)_\nu}=\frac{2^\nu\Gamma(p+\nu)\,\Gamma(2p+\nu)}{\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma(2p+2\nu)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+\nu)}{2^{2p+\nu-1}\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)},$$

а потому

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p F(z)\,dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+\nu)}{2^{2p+\nu-1}\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}\frac{d^\nu F}{dz^\nu}\,dz. \tag{141a}$$

С помощью этой формулы можно вычислить норму (140), заменяя здесь $F(z)$ на C_ν^p. Принимая во внимание равенство (128б), получаем

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p C_\nu^p\,dz=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p+\nu)\,\Gamma(p+\nu)}{2^{2p-1}\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}\,dz.$$

Интеграл в правой части легко вычисляется с помощью подстановки $x=z^2$; он равен $\mathrm{B}\left(p+\nu+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; окончательно получаем

$$\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p C_\nu^p\,dz=\frac{\pi\Gamma(2p+\nu)}{2^{2p-1}(p+\nu)\,\nu!\,\Gamma(p)\,\Gamma(p)}. \qquad (142)$$

5.8.6. Многочлены Лежандра как частный случай функций Гегенбауэра. Если искать решение уравнения Лапласа в трехмерном пространстве, то, согласно п. 5.8.1, надо положить $p=\frac{1}{2}$. Дифференциальное уравнение (124) переходит при этом в уравнение

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_\nu}{dz}\right)+\nu(\nu+1)P_\nu=0,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

которое совпадает с уравнением (5.2) для многочленов Лежандра при $m=0$. Эти многочлены являются коэффициентами в разложении ньютоновского потенциала

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_0\sqrt{1-2zt+t^2}}=\frac{1}{r_0}\sum P_\nu(z)\,t^\nu \qquad (143)$$

и совпадают с $C_\nu^{\frac{1}{2}}$

$$P_\nu(z)=C_\nu^{\frac{1}{2}}(z). \qquad (144)$$

Для многочленов P_ν имеет место, согласно Коши, равенство Лапласа

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{0+}\frac{t^{-\nu-1}\,dt}{\sqrt{1-2zt+t^2}}. \qquad (145)$$

Интегрирование ведется по пути, охватывающему начало координат и проходящему достаточно близко к нему. Из равенства (137)

следует

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2^\nu\,\nu!}\,\frac{d^\nu(z^2-1)^\nu}{dz^\nu}. \tag{146}$$

Далее из рекуррентных формул, приведенных в п. 5.8.4, вытекают найденные ранее равенства. Из соотношений ортогональности (139), (139а) следует

$$\int_{-1}^{+1} P_\mu(x)P_\nu(x)\,dx=\int_0^\pi P_\mu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=0;\quad \mu\neq\nu, \tag{147}$$

а для нормы, в силу равенства (142),

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(x)P_\nu(x)\,dx=\frac{2}{2\nu+1}. \tag{148}$$

Если допустить зависимость и от третьей координаты φ, то уравнение (117а) переходит в уравнение Лапласа в трехмерном пространстве

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

Чтобы исключить зависимость от φ, сделаем подстановку

$$u=e^{i\mu\varphi}v.$$

Для того чтобы решение было однозначной функцией точки, μ должно быть целым числом. Вместо уравнения (124) при $p=\frac{1}{2}$ мы получаем уравнение

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dv}{dz}\right)+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right)v=0,$$

которое было уже использовано в качестве отправной точки при изучении сферических функций (см. уравнение (5.2)). Это дифференциальное уравнение имеет особенности в точках $z=\pm 1$. Из определяющего уравнения (2.5) находим показатели $\pm\frac{\mu}{2}$. Сделаем поэтому подстановку

$$v=(1-z^2)^{\frac{\mu}{2}}y;\quad \mu\geqslant 0.$$

Мы получим для y дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2(\mu+1)z\frac{dy}{dz}+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)y=0.$$

Оно имеет тот же вид, что и уравнения (125), и его решениями являются функции Гегенбауэра $C_{\nu-\mu}^{\mu+\frac{1}{2}}$. В равенстве (5.7) мы норми-

ровали сферические функции P_ν^μ так, чтобы выполнялось соотношение $dy_{\nu,\mu}/dz = y_{\nu,\mu+1}$. В силу равенства (128), мы должны поэтому положить

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{2^\mu \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (1-z^2)^{\frac{\mu}{2}} C_{\nu-\mu}^{\mu+\frac{1}{2}}. \tag{149}$$

Соотношения ортогональности для функций Гегенбауэра также переносятся на многочлены Лежандра. Из равенства (139) непосредственно следует

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^\mu P_\nu^{\mu'} dz = 0; \quad \mu' \neq \mu. \tag{150}$$

Для нормы из равенства (149) имеем

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^\mu P_\nu^\mu dz = \frac{2^{2\mu}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^\mu C_{\nu-\mu}^{\mu+\frac{1}{2}} C_{\nu-\mu}^{\mu+\frac{1}{2}} dz,$$

и, в силу равенства (142),

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^\mu P_\nu^\mu dz = \frac{(\nu+\mu)!}{(\nu-\mu)!} \frac{2}{2\nu+1}. \tag{151}$$

Рекуррентные формулы для функций Гегенбауэра вновь приводят к уже найденным в п. 5.5 рекуррентным формулам для присоединенных функций Лежандра.

§ 6

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

6.1. Связь между вырожденной и гауссовской гипергеометрическими функциями. Гипергеометрическая функция Гаусса с точностью до несущественного постоянного множителя была определена с помощью интеграла по двойной петле

$$u = \oint^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt,$$

где подинтегральная функция имеет особые точки $0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{z}$. Устремим подвижную особую точку $1/z$ к неподвижной особой точке, например $t=\infty$, так, чтобы получилась функция, зависящая от трех параметров. Новая функция называется, в силу своего определения, вырожденной гипергеометрической функцией. Удобнее всего положить

$$z = \frac{x}{b};\quad \lim b = -\infty.$$

Мы получаем

$$v = \lim_{\substack{b\to-\infty \\ bz=x}} u = \lim_{b\to-\infty} \oint^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\left(1-\frac{xt}{b}\right)^{-b} dt.$$

Переставляя здесь интегрирование и переход к пределу (мы не доказываем сейчас допустимость этой перестановки), получаем

$$v(a;\ c;\ x) = \oint^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \lim_{b\to-\infty}\left(1+\frac{xt}{-b}\right)^{-b} dt =$$

$$= \oint^{(1+,\,0+,\,1-,\,0-)} e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt.$$

Прежде чем изучать свойства этой функции, рассмотрим сначала соответствующее дифференциальное уравнение.

6.2. Дифференциальное уравнение Лапласа. Согласно пункту 2.27, перейдем от дифференциального уравнения Римана к вырожденному уравнению Римана. С помощью преобразования показателей (которое переводит α_1 в нуль) преобразуем уравнение (2.69) в уравнение Лапласа

$$z' \frac{d^2y}{dz'^2} + (a_1 + b_1 z') \frac{dy}{dz'} + (a_0 + b_0 z') y = 0, \tag{1}$$

имеющее особые точки 0 и ∞. Определяющее уравнение для $z' = 0$ $\left(\text{подстановка } y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z'^{\alpha+\nu}\right)$ имеет вид

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha a_1 = 0.$$

Его решениями являются $\alpha = 0$ и $\alpha = 1 - a_1$. Таким образом, уравнение (1) имеет два фундаментальных решения y_1 и $z'^{(1-a_1)} y_2$, где y_1 и y_2 регулярны при $z = 0$. Подстановка $y = z'^{(1-a_1)} y_2$ в дифференциальное уравнение (1) приводит к уравнению

$$z' \frac{d^2y_2}{dz'^2} + (2 - a_1 + b_1 z') \frac{dy_2}{dz'} + (a_0 + b_1(1 - a_1) + b_0 z') y_2 = 0, \tag{2}$$

имеющему тот же вид, что и исходное уравнение (1). Поэтому достаточно найти лишь решение y_1.

6.2.1. Интегрирование уравнения Лапласа. С помощью преобразования Лапласа

$$y(z') = \int_L e^{tz'} Y(t)\, dt \tag{3}$$

введем новую неизвестную функцию $Y(t)$. Интегрирование ведется здесь по соответствующим образом выбранному пути в комплексной области. Поскольку

$$\frac{dy}{dz'} = \int_L t e^{tz'} Y\, dt \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \int_L t^2 e^{tz'} Y\, dt,$$

то из дифференциального уравнения (1) следует

$$\int_L e^{tz'} Y \left[(t^2 + b_1 t + b_0) z' + a_1 t + a_0\right] dt = 0.$$

Примем во внимание, что $z' e^{z't} = \frac{d}{dt} e^{z't}$; имеем

$$\int_L Y (t^2 + b_1 t + b_0) \frac{d}{dt} e^{z't}\, dt + \int_L (a_1 t + a_0) Y e^{z't}\, dt = 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_L \frac{d}{dt}\left[e^{z't}Y(t^2+b_1t+b_0)\right]dt + \\ + \int e^{z't}\left[a_1t+a_0)\,Y - \frac{d}{dt}\left((t^2+b_1t+b_0)\,Y\right)\right]dt = 0.$$

Для того чтобы это равенство выполнялось, достаточно, чтобы 1. Путь интегрирования был выбран так, что выполняется равенство

$$\int_L \frac{d}{dt}\left[e^{z't}(t^2+b_1t+b_0)\,Y\right]dt = 0; \tag{4а}$$

2. Y было решением дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2+b_1t+b_0)\,Y\right] - (a_1t+a_0)\,Y = 0. \tag{4б}$$

В этом случае функция y, задаваемая формулой (3), является решением уравнения (1).

Дифференциальное уравнение (4б) можно переписать в виде

$$\frac{dY}{Y} = \frac{(a_1-2)t+a_0-b_1}{t^2+b_1t+b_0} = \frac{l_1}{t-c_1} + \frac{l_2}{t-c_2}, \tag{5}$$

где c_1 и c_2 — корни уравнения

$$Q(t) = t^2+b_1t+b_0 = 0. \tag{5а}$$

Частным решением дифференциального уравнения (5) является

$$Y = (t-c_1)^{l_1}(t-c_2)^{l_2}.$$

Отсюда следует, что одно из решений уравнения (1) имеет вид

$$y_1 = \int_L e^{tz'}\,(t-c_1)^{l_1}(t-c_2)^{l_2}\,dt, \tag{6}$$

где путь интегрирования L выбран так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_L \frac{d}{dt}\left[e^{tz'}\,(t-c_1)^{l_1+1}(t-c_2)^{l_2+1}\right]dt = 0. \tag{6а}$$

Это условие для пути интегрирования L выполняется, если он либо замкнут на римановой поверхности, либо начинается и заканчивается в нулях функции $e^{tz'}\,(t-c_1)^{l_1+1}(t-c_2)^{l_2+1}$.

Прежде, чем точнее определить путь интегрирования, найдем значения c_1, c_2, l_1, l_2. Из квадратного уравнения (5а) получаем

$$2c_1 = -b_1 + \sqrt{b_1^2-4b_0}, \quad 2c_2 = -b_1 - \sqrt{b_1^2-4b_0}. \tag{7}$$

Из равенства (5) следует, что

$$l_1+l_2=a_1-2 \quad \text{и} \quad l_1c_2+l_2c_1=-a_0+b_1, \tag{7а}$$

и потому

$$l_1=\frac{a_1c_1+a_0}{c_1-c_2}-1, \quad l_2=\frac{a_1c_2+a_0}{c_2-c_1}-1. \tag{7б}$$

Сравнивая коэффициенты равенств (1) и (2), получаем

$$y_2=\int_L e^{tz'}(t-c_1)^{l_1'}(t-c_2)^{l_2'}\,dt. \tag{8}$$

Особые точки подинтегральной функции будут такими же, как и в равенстве (6); для показателей имеем

$$l_1'=-l_2-1, \quad l_2'=-l_1-1. \tag{8а}$$

Выражение

$$y=Ay_1+Bz'^{(1-a_1)}y_2 \tag{9}$$

содержит две произвольные постоянные и удовлетворяет дифференциальному уравнению (1); оно является, таким образом, *общим решением дифференциального уравнения Лапласа.*

Поскольку из равенств (7а) и (8а) вытекает, что

$$l_1+l_2+1=-(l_1'+l_2'+1)=a_1-1=2m,$$
$$l_2-l_1=l_2'-l_1'=2k,$$

то вместо четырех величин l можно ввести две величины m и k, а именно положить

$$\left.\begin{aligned} l_1&=-\frac{1}{2}+m-k, & l_1'&=-\frac{1}{2}-m-k,\\ l_2&=-\frac{1}{2}+m+k, & l_2'&=-\frac{1}{2}-m+k. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда общее решение (9) принимает вид

$$y=Ay_{k,m}(z)+Bz^{-2m}y_{k,-m}(z), \tag{11}$$

где $2m=a_1-1$ и $k=(-a_0+a_1b_1/2)/\sqrt{b_1^2-4b_0}$. Мы используем ниже эту симметричную запись обоих фундаментальных решений.

6.2.2. Нормальная форма вырожденной гипергеометрической функции. Точно так же, как и для гипергеометрической функции Гаусса, приведем решение (6) к нормальному виду, в котором особыми точками подинтегральной функции являются 0, 1 и ∞. С этой целью положим

$$s=\frac{t-c_1}{c_2-c_1}, \quad \text{тогда} \quad t-c_1=(c_2-c_1)s, \quad t-c_2=(c_1-c_2)(1-s).$$

Отсюда следует, что

$$y_1 = (c_1 - c_2)^{l_1+l_2+1} (-1)^{l_1+1} e^{c_1 z'} \int_L e^{(c_2-c_1)z's} s^{l_1} (1-s)^{l_2} ds.$$

Сделаем подстановку $z = (c_2 - c_1) z'$ и положим

$$l_1 = a - 1, \quad l_2 = c - a - 1, \quad l_1 + l_2 + 1 = c - 1.$$

Мы получим, что

$$y_1 = C_1 e^{c_1 z'} \int_L e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds \equiv C_1 e^{c_1 z'} w(a; c; z).$$

Точно так же, принимая во внимание равенство (8а), получаем

$$y_2 = C_2 e^{c_1 z'} z'^{(1-a_1)} w(a - c + 1; 2 - c; z).$$

Мы доказали, таким образом, следующее утверждение: общее решение дифференциального уравнения Лапласа

$$z' \frac{d^2y}{dz'^2} + (a_1 + b_1 z') \frac{dy}{dz'} + (a_0 + b_0 z') y = 0$$

имеет вид

$$y = (A_1 w(a; c; z) + A_2 z^{1-c} w(a - c + 1; 2 - c; z)) e^{c_1 z'}.$$

Здесь c_1 является корнем уравнения $t^2 + b_1 t + b_0 = 0$, т. е. $2c_1 = -b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}$, далее $a = (a_1 c_1 + a_0)/\sqrt{b_1^2 - 4b_0}$, $c = a_1$, $z = -\sqrt{b_1^2 - 4b_0} z'$ и

$$w(a; c; z) = \int_L e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds. \tag{12}$$

Дифференциальным уравнением, соответствующим функции $w(a; c; z)$ является

$$z \frac{d^2y}{dz^2} + (c - z) \frac{dy}{dz} - ay = 0, \tag{13}$$

т. е. *уравнение Куммера* (см. 2.72).

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = A_1 w(a; c; z) + A_2 z^{1-c} w(a + 1 - c; 2 - c; z) \tag{14а}$$

или

$$y = A_1 w\left(\frac{1}{2} + m - k; 2m + 1; z\right) + A_2 z^{-2m} w\left(\frac{1}{2} - m - k; 1 - 2m; z\right). \tag{14б}$$

Мы будем записывать это решение кратко, в виде

$$y = A_1 w_{k,m}(z) + A_2 z^{-2m} w_{k,-m}(z). \tag{14в}$$

Поскольку в равенстве (12) пути интегрирования можно выбирать различным образом, то равенство (14) можно представить в разных видах, которые приводятся друг к другу с помощью соотношений, имеющих место между интегралами (12).

6.2.3. Соотношения между решениями уравнения Лапласа. Особыми точками подинтегральной функции в равенстве (12) являются точки $s=0$, $s=1$ и $s=\infty$; при этом точка $s=\infty$ является существенно особой. Поэтому лишь один путь интегрирования целиком лежит в конечной области. Положим

$$v(a;\ c;\ z)\equiv\int\limits_{(0)}^{(1)} e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds. \tag{15}$$

Интеграл понимается здесь в смысле пункта 1.2, т. е. в зависимости от значения показателей или как обычный определенный интеграл от 0 до 1, или как нормированный интеграл по двойной петле. Для интегралов, в которых путь интегрирования проходит через бесконечно удаленную точку, следует иметь в виду, что при $s\to\infty$ должно быть $\lim \operatorname{Re}(zs)=-\infty$. Принимая во внимание это условие,

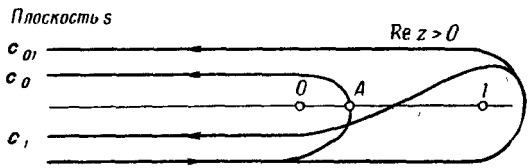


Рис. 33. Путь интегрирования на плоскости s.

предположим сначала, что $\operatorname{Re} z>0$. Тогда можно рассматривать три пути интегрирования, изображенные на рис. 33. Мы положим

$$w_{\varkappa}(a;\ c;\ z)=\frac{1}{1-e^{2i\pi\alpha_{\varkappa}}}\int\limits_{C_{\varkappa}} e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds, \tag{16}$$

где $\alpha_0=a$, $\alpha_1=c-a$, $\alpha_{01}=c$. Аргументы подинтегральной функции выбраны так, чтобы она имела в точке A главное значение, т. е. чтобы $\arg(s_A)=\arg(1-s_A)=0$; кроме того, должно быть $s-1=e^{-i\pi}(1-s)$. Поскольку интеграл по бесконечно большой дуге, лежащей целиком в левой полуплоскости, равен нулю, то можно считать, что пути интегрирования $C_{\varkappa}$ начинаются и заканчиваются в бесконечно удаленной точке, приближаясь к ней в левой полуплоскости.

Для того чтобы сделать равенство (16) применимым во всей плоскости z, положим $t = zs$; мы получим

$$w_\varkappa(a;\ c;\ z) = \frac{z^{-a}}{1 - e^{2i\pi a_\varkappa}} \int\limits_{C^*} e^t t^{a-1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{c-a-1} dt, \qquad (17)$$

где пути интегрирования на плоскости t изображены на рис. 34. При этом на основании принятого условия (см. рис. 33 на плоскости s)

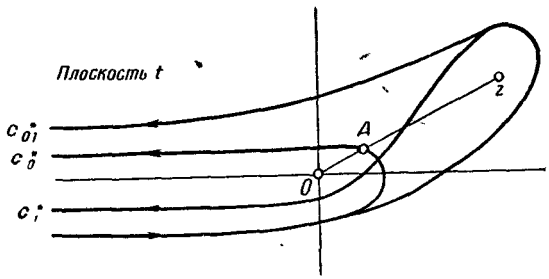


Рис. 34. Пути интегрирования на плоскости t.

имеем для аргументов $\arg(t_A) = \arg z$ и $\arg\left(1 - \frac{t}{z}\right)_A = 0$. Поскольку интеграл в равенстве (17) сходится для любого значения z, если только путь интегрирования на плоскости t начинается и кончается

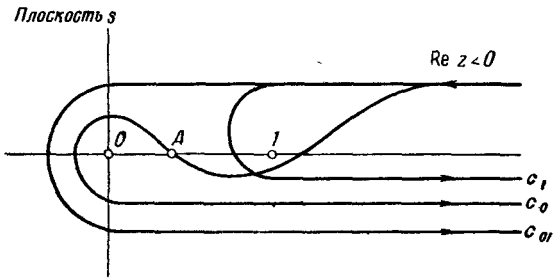


Рис. 35. Пути интегрирования на плоскости s.

в точке с бесконечно большой отрицательной вещественной частью, то равенство (17) определяет $w_\varkappa$ на всей плоскости z. Для того чтобы это определение было однозначным, условимся считать, что

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Пути интегрирования получаются при этом из путей, изображенных на рис. 34, с помощью непрерывной деформации, при которой они не проходят через особые точки 0 и z, а начальные и конечные точки остаются неподвижными. При переходе на плоскость s мы получаем при $\operatorname{Re} z < 0$ в качестве допустимых пути, изображенные на рис. 35. Здесь в точке A снова $\arg(s_A) = \arg(1 - s_A) = 0$. Поскольку и при $\operatorname{Re} z < 0$ функции $w_k(a; c; z)$ являются аналитическими продолжениями функций, определенных равенством (16), то соотношения, выведенные при $\operatorname{Re} z > 0$, остаются справедливыми при всех z. Из равенства (16) следует при $\operatorname{Re} z > 0$

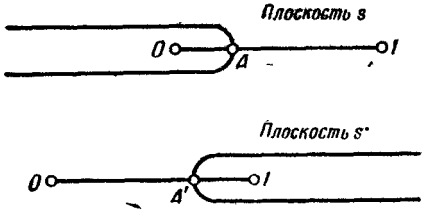


Рис. 36. К выводу равенства (21).

$$w_0(a; c; z) = \int_{(-\infty)}^{(0)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds \qquad (18а)$$

$$(\operatorname{Re} z > 0)$$

и

$$w_1(a; c; z) = \int_{(-\infty)}^{(1)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} ds \qquad (18б)$$

$$(\operatorname{Re} z > 0).$$

Аналогично из равенства (17) имеем

$$w_0(a; c; z) = z^{-a} \int_{(-\infty)}^{(0)} e^t t^{a-1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{c-a-1} dt, \qquad (19а)$$

$$w_1(a; c; z) = z^{-a} \int_{(-\infty)}^{(z)} e^t t^{a-1} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^{c-a-1} dt. \qquad (19б)$$

Заменим здесь t на $u = e^{i\pi} t$; мы получим

$$w_0(a; c; z) = e^{-i\pi(a-1)} z^{-a} \int_{(0)}^{(\infty)} e^{-u} u^{a-1} \left(1 + \frac{u}{z}\right)^{c-a-1} du. \qquad (19в)$$

Из равенств (15), (18а) и (18б) вытекает формула

$$v(a; c; z) = w_1(a; c; z) - w_0(a; c; z), \qquad (20)$$

имеющая место при всех значениях z. Из рис. 34 или 36 получаем далее

$$(1-e^{2i\pi c})\,w_{01}(a;\ c;\ z)=$$
$$=(1-e^{2i\pi(c-a)})\,w_1(a;\ c;\ z)+e^{2i\pi(c-a)}(1-e^{2i\pi a})\,w_0(a;\ c;\ z). \quad (21)$$

Исключая w_1 из последних двух уравнений, находим

$$w_{01}(a;\ c;\ z)=w_0(a;\ c;\ z)+\frac{1-e^{2i\pi(c-a)}}{1-e^{2i\pi c}}\,v(a;\ c;\ z). \quad (22)$$

6.3. Соотношения обхода. Подставим в равенство (15) $1-s=s'$. Тогда, принимая во внимание, что $zs=z+z(s-1)=z+ze^{-i\pi}s'$, имеем

$$\int\limits_{(0)}^{(1)} e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds=-e^z\int\limits_{(1)}^{(0)} e^{ze^{-i\pi}s'}s'^{c-a-1}(1-s')^{a-1}\,ds',$$

а потому

$$v(a;\ c;\ z)=e^z v(c-a;\ c;\ e^{-i\pi}z).$$

Применяя еще раз это равенство, получаем

$$v(c-a;\ c;\ e^{i\pi}z)=e^{-z}v(a;\ c;\ z).$$

Из этих двух равенств вытекает равенство *Куммера*

$$v(a;\ c;\ z)=e^z v(c-a;\ c;\ e^{\pm i\pi}z). \quad (23)$$

Аналогично имеем

$$w_0(a;\ c;\ z)=\int\limits_{(-\infty)}^{(0)} e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds=$$
$$=-e^z\int\limits_{(\infty)}^{(1)} e^{ze^{-i\pi}s'}s'^{c-a-1}(1-s')^{a-1}\,ds'.$$

Поскольку при преобразовании точка A плоскости s (см. рис. 36) переходит в точку A' плоскости s', то в этой точке аргумент подинтегральной функции обращается в нуль. В то же время по определению функции w_1 и по рис. 36 в точке A' этот аргумент должен иметь значение $2\pi(a-1)$. Поэтому наш интеграл равен $e^{-2i\pi a}w_1$. Отсюда следует

$$w_0(a;\ c;\ z)=-e^z e^{-2i\pi a}w_1(c-a;\ c;\ e^{-i\pi}z). \quad (24)$$

Точно так же получаем, что

$$w_{01}(a;\ c;\ z)=-e^z e^{-2i\pi a}w_{01}(c-a;\ c;\ e^{-i\pi}z). \quad (25$$

Соответствующее равенство для w_1 получаем из равенств (23) и (24), используя равенство (20),

$$w_1(a;\ c;\ z) = -e^z e^{-2i\pi a} w_1(c-a;\ c;\ e^{-i\pi} z) + e^z v(c-a;\ c;\ e^{-i\pi} z). \quad (26а)$$

Вновь применяя равенство (20), получаем

$$w_1(a;\ c;\ z) = -e^z e^{-2i\pi a} w_0(c-a;\ c;\ e^{-i\pi} z) + \\ + e^z (1 - e^{-2i\pi a}) v(c-a;\ c;\ e^{-i\pi} z). \quad (26б)$$

Далее, заменяя в равенстве (25) a на $c-a$ и $e^{-i\pi}$ на $e^{i\pi}$, имеем

$$w_{01}(a;\ c;\ z) = -e^z e^{2i\pi(c-a)} w_{01}(c-a;\ c;\ e^{i\pi} z). \quad (27)$$

Точно так же из равенства (24) следует

$$w_1(a;\ c;\ z) = -e^z e^{2i\pi(c-a)} w_0(c-a;\ c;\ e^{i\pi} z). \quad (28)$$

Равенства (26б) и (24) показывают, что

$$w_0(a;\ c;\ z) = e^z e^{2i\pi(c-a)} v(c-a;\ c;\ e^{i\pi} z) - \\ - e^z e^{2i\pi(c-a)} w_1(c-a;\ c;\ e^{i\pi} z). \quad (29)$$

Для полного обхода в плоскости z получаем с помощью двукратного использования этих равенств

$$v(a;\ c;\ e^{\pm 2i\pi} z) = v(a;\ c;\ z), \quad (30)$$

$$w_{01}(a;\ c;\ e^{2i\pi} z) = e^{-2i\pi c} w_{01}(a;\ c;\ z), \quad (31)$$

$$w_0(a;\ c;\ e^{2i\pi} z) = e^{-2i\pi c} w_0(a;\ c;\ z) + (e^{-2i\pi c} - e^{-2i\pi a}) v(a;\ c;\ z), \quad (32)$$

$$w_1(a;\ c;\ e^{2i\pi} z) = e^{-2i\pi c} w_1(a;\ c;\ z) + (1 - e^{-2i\pi a}) v(a;\ c;\ z). \quad (33)$$

Из двух последних равенств легко вывести, что

$$w_0(a;\ c;\ e^{-2i\pi} z) = e^{2i\pi c} w_0(a;\ c;\ z) - (1 - e^{2i\pi(c-a)}) v(a;\ c;\ z) \quad (32а)$$

и

$$w_1(a;\ c;\ e^{-2i\pi} z) = e^{2i\pi c} w_1(a;\ c;\ z) - (e^{2i\pi c} - e^{2i\pi(c-a)}) v(a;\ c;\ z). \quad (33а)$$

Эти равенства показывают, что функция $v(a;\ c;\ z)$ однозначна, а остальные функции, рассматриваемые как функции от z, бесконечно многозначны, а потому в каждой точке плоскости z существует бесконечно много ветвей этой функции. Условие $-\frac{3\pi}{2} < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$ выделяет одну из ветвей.

6.4. Представления вырожденной гипергеометрической функции

6.4.1. Разложение по степеням z. Функция

$$v(a;\ c;\ z) = \int_{(0)}^{(1)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds$$

конечна для любого конечного значения z и для любых нецелых значений a и c; она является, таким образом, при любых нецелых a и c *целой трансцендентной функцией от* z. Поскольку функция e^{zs} во всей плоскости s разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд, то, переставляя интегрирование и суммирование, получаем

$$\int_{(0)}^{(1)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{z^\varkappa}{\varkappa!} \int_{(0)}^{(1)} s^{a+\varkappa-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds.$$

Принимая во внимание определение B-функции (1.16) и равенство (1.22), можно переписать это соотношение в виде

$$\int_{(0)}^{(1)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \mathrm{B}(a+\varkappa, c-a) \frac{z^\varkappa}{\varkappa!} =$$

$$= \mathrm{B}(a, c-a) \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(a)_\varkappa z^\varkappa}{(c)_\varkappa \varkappa!}.$$

Нормируем теперь это равенство так, чтобы при $z=0$ функция принимала значение 1. Мы получим тогда *функцию Куммера* [1])

$${}_1F_1(a;\ c;\ z) \equiv \frac{v(a;\ c;\ z)}{\mathrm{B}(a,\ c-a)} = \frac{\int_{(0)}^{(1)} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds}{\int_{(0)}^{(1)} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds} = \sum_{0=\varkappa}^{\infty} \frac{(a)_\varkappa z^\varkappa}{(c)_\varkappa \varkappa!}. \tag{34}$$

Мы получили представление этой функции через вырожденный гипергеометрический ряд. Этот ряд сходится во всей плоскости z, за исключением случая, когда c является целым отрицательным числом; если c — целое отрицательное число, то функция конечна, если a также целое отрицательное число и $0 \geqslant a > c$.

Сделаем в интеграле

$$(1 - e^{2i\pi c})\, w_{01}(a;\ c;\ z) = \int_{C_{01}} e^{zs} s^{a-1} (1-s)^{c-a-1}\, ds$$

подстановку $zs = t$. Принимая во внимание, что $1-s = e^{i\pi}(s-1)$, получаем

$$(1 - e^{2i\pi c})\, w_{01}(a;\ c;\ z) = e^{i\pi(c-a-1)} z^{1-c} \int_{C_{0z}^*} e^t t^{c-2} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{c-a-1} dt.$$

[1]) Янке — Эмде — Леш используют для этой функции обозначение $M(a;\ c;\ z)$.

Как следует из рис. 34, при фиксированном z можно выбрать путь интегрирования так, чтобы выполнялось неравенство $|z/t| < 1$. Поэтому можно использовать разложение в биномиальный ряд и переставить суммирование и интегрирование. В результате получаем

$$(1 - e^{2i\pi c}) w_{01}(a;\ c;\ z) =$$
$$= e^{i\pi(c-a-1)} z^{1-c} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{\varkappa} (-1)^{\varkappa} z^{\varkappa} \int\limits_{C^*_{0z}} e^t t^{c-\varkappa-2}\, dt.$$

Но по интегральному представлению Ганкеля для Г-функции (см. равенство (1.34б)) и по равенству (1.36а) имеем

$$\frac{\int\limits_{C^*_{0z}} e^t t^{c-\varkappa-1}\, dt}{1 - e^{2i\pi c}} = e^{-i\pi(c-\varkappa)} \Gamma(c-\varkappa-1) = e^{-i\pi c} \Gamma(c-1) \frac{1}{(2-c)_{\varkappa}}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенство (1.6), имеем

$$w_{01}(a;\ c;\ z) = -e^{-i\pi a} \Gamma(c-1) z^{1-c} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(a-c+1)_{\varkappa}}{(2-c)_{\varkappa}} \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa!}, \qquad (35)$$

а потому

$$w_{01}(a;\ c;\ z) = -e^{-i\pi a} \Gamma(c-1) z^{1-c} {}_1F_1(a-c+1;\ 2-c;\ z). \qquad (35а)$$

Таким образом, мы доказали, что $w_{01}(a;\ c;\ z)$ совпадает со вторым фундаментальным решением уравнения Лапласа в выражении (14а). Принимая во внимание равенство (34) и формулу (1.40), можно записать (35а) также в виде

$$w_{01}(a;\ c;\ z) = e^{-i\pi a} \frac{\pi}{\sin c\pi\, \Gamma(1-a)\, \Gamma(a-c+1)} z^{1-c} v(a-c+1;\ 2-c;\ z). \qquad (35б)$$

Разложение в степенной ряд для $w_0(a;\ c;\ z)$ непосредственно получается из равенства (22). Именно, принимая во внимание последнее равенство, имеем

$$w_0(a;\ c;\ z) =$$
$$= \frac{1 - e^{2i\pi(c-a)}}{1 - e^{2i\pi c}} \left\{ \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(1-a)} z^{1-c} v(a-c+1;\ 2-c;\ z) - v(a;\ c;\ z) \right\} \qquad (36)$$

или, преобразуя по равенству (34),

$$w_0(a;\ c;\ z) = -e^{-i\pi a} \left\{ \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-c)}{\Gamma(1+a-c)} {}_1F_1(a;\ c;\ z) + \right.$$
$$\left. + \Gamma(c-1) z^{1-c} {}_1F_1(a-c+1;\ 2-c;\ z) \right\}. \qquad (36а)$$

Решение $w_1(a;\ c;\ z)$ проще всего определить с помощью соотношения (20), согласно которому

$$w_1(a;\ c;\ z)=w_0(a;\ c;\ z)+v(a;\ c;\ z).$$

Отсюда следует, что

$$w_1(a;\ c;\ z)=e^{-i\pi a}\frac{\sin a\pi}{\sin c\pi}\left\{\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a-c)}z^{1-c}v(a-c+1;\ 2-c;\ z)+\right.$$
$$\left.+e^{i\pi c}v(a;\ c;\ z)\right\} \qquad (37)$$

или

$$w_1(a;\ c;\ z)=e^{-i\pi a}\left\{e^{i\pi c}\frac{\Gamma(1-c)\Gamma(c-a)}{\Gamma(1-a)}{}_1F_1(a;\ c;\ z)-\right.$$
$$\left.-\Gamma(c-1)z^{1-c}{}_1F_1(a-c+1;\ 2-c;\ z)\right\}. \qquad (37а)$$

Таким образом функции $w_{01}(a;\ c;\ z)$, $w_0(a;\ c;\ z)$ и $w_1(a;\ c;\ z)$ регулярны во всей плоскости z, за исключением точки $z=0$, являющейся точкой ветвления. При $\operatorname{Re} c>1$ они принимают в этой точке бесконечно большие значения.

Заменим в равенстве (36а) параметр a на $a-c+1$ и c на $2-c$. Тогда правая часть с точностью до постоянного множителя останется неизменной. Отсюда вытекает интересное соотношение

$$\frac{(e^{i\pi}z)^{\frac{c-1}{2}}}{\Gamma(a)}w_0(a;\ c;\ z)=\frac{(e^{i\pi}z)^{\frac{1-c}{2}}}{\Gamma(a-c+1)}w_0(a-c+1;\ 2-c;\ z). \qquad (38)$$

Точно так же из равенства (37а) можно вывести формулу

$$\Gamma(1-a)z^{\frac{c-1}{2}}w_1(a;\ c;\ z)=\Gamma(c-a)z^{\frac{1-c}{2}}w_1(a-c+1;\ 2-c;\ z). \qquad (39)$$

Равенства (35б), (38) и (39) устанавливают тесную связь между параметрами a и c, с одной стороны, и параметрами $a-c+1$ и $2-c$ — с другой.

6.4.2. Асимптотические представления при больших значениях $|z|$. Из интеграла (18а) получаем с помощью преобразования $s=t/z$, что

$$w_0(a;\ c;\ z)=z^{-a}\int\limits_{(-\infty)}^{(0)}e^t t^{a-1}\left(1-\frac{t}{z}\right)^{c-a-1}dt.$$

Поскольку путь интегрирования (см. рис. 34) не может проходить через особую точку $t=z$, то в отличие от случая w_{01} нельзя достигнуть того, чтобы $|z/t|<1$. Наоборот, наибольший вклад в интеграл дает окрестность точки $t=0$, в которой $|t/z|<1$. Мы восполь-

зуемся этим и разложим $\left(1-\frac{t}{z}\right)^{c-a-1}$ по формуле бинома с остаточным членом. Остаточный член принимает большие значения лишь при больших значениях t; но при этих значениях из-за множителя e^t значение подинтегральной функции мало, что позволяет пренебречь остаточным членом. Итак, подставим

$$\left(1-\frac{t}{z}\right)^{c-a-1}=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}(-1)^{\varkappa}\binom{c-a+1}{\varkappa}\left(\frac{t}{z}\right)^{\varkappa}+R_{\nu}\left(\frac{t}{z}\right) \tag{40}$$

и, переставляя интегрирование и суммирование, что возможно в силу конечности числа слагаемых, получаем

$$w_0(a;\ c;\ z)=$$
$$=z^{-a}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}(-1)^{\varkappa}\binom{c-a+1}{\varkappa}\frac{1}{z^{\varkappa}}\int_{(-\infty)}^{(0)}e^t t^{a+\varkappa-1}dt+z^{-a}\int_{(-\infty)}^{(0)}R_{\nu}e^t t^{a-1}dt.$$

С помощью равенств (1.34б) и (1.36а) отсюда вытекает

$$w_0(a;\ c,\ z)\sim-(e^{i\pi}z)^{-a}\Gamma(a)\times$$
$$\times\left(1+\frac{a(c-a-1)}{1!z}+\frac{a(a+1)(c-a-1)(c-a-2)}{2!z^2}+\ldots\right)$$
$$\left(|z|>1,\ \frac{\pi}{2}\geqslant\arg z>-\frac{3\pi}{2}\right). \tag{41}$$

Мы покажем ниже, что это асимптотическое представление применимо при $|z|>1$, и что оно изображает функцию с точностью до члена, имеющего тот же порядок, что и первый отброшенный член.

Точно так же поступим с решением $w_1(a;\ c;\ z)$, определяемым интегралом (18в). Преобразование $t=z(s-1)=z(1-s)e^{-i\pi}$ дает

$$w_1(a;\ c;z)=-e^z e^{i\pi(c-a)}z^{a-c}\int_{(-\infty)}^{(0)}e^t t^{c-a-1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{a-1}dt.$$

Положим снова

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{a-1}=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{a-1}{\varkappa}\left(\frac{t}{z}\right)^{\varkappa}+R_{\nu}\left(\frac{t}{z}\right) \tag{42}$$

и получим

$$w_1(a;\ c;\ z)\sim\Gamma(c-a)e^z z^{a-c}\times$$
$$\times\left(1+\frac{(c-a)(1-a)}{1!z}+\frac{(c-a)(c-a+1)(1-a)(2-a)}{2!z^2}+\ldots\right)$$
$$\left(|z|>1,\ \frac{\pi}{2}>\arg z\geqslant-\frac{3\pi}{2}\right). \tag{43}$$

Формулы (41) и (43) являются асимптотическими разложениями функций w_0 и w_1 в том смысле, что при $|z| > 1$ и фиксированном числе ν использованных членов разность между левой и правой частью ведет себя как $C_\nu z^{-\nu-1}$; при этом множитель C_ν зависит еще от $\arg z$. Этот ряд *расходится*, однако при больших значениях $|z|$ он дает хорошее приближение для разлагаемых функций.

Для того чтобы получить возможность быстро вычислить функции v и w_{01} при больших значениях $|z|$, вернемся к равенству (20). Принимая во внимание равенства (41) и (43), получаем

$$v(a;\ c;\ z) \sim \Gamma(a)(e^{i\pi}z)^{-a} \times$$
$$\times\left(1 + \frac{a(c-a-1)}{1!\,z} + \frac{a(a+1)(c-a-1)(c-a-2)}{2!\,z^2} + \ldots\right) +$$
$$+ \Gamma(c-a)\,e^z z^{a-c}\left(1 + \frac{(1-a)(c-a)}{1!\,z} + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!\,z^2} + \ldots\right) \qquad (|z| > 1). \qquad (44)$$

Отсюда получается представление функции Куммера через

$${}_1F_1(a;\ c;\ z) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(e^{i\pi}z)^{-a}\sum_{\varkappa=0}\frac{(a)_\varkappa (c-a-\varkappa)_\varkappa}{\varkappa!\,z^\varkappa} +$$
$$+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^z z^{a-c}\sum_{\varkappa=0}\frac{(1-a)_\varkappa (c-a)_\varkappa}{\varkappa!\,z^\varkappa} \qquad (|z| > 1). \qquad (45)$$

Поведение функции $w_{01}(a;\ c;\ z)$ выясняется из равенств (35а) и (45).

Эти формулы показывают, что функция w_1 ведет себя на бесконечности как показательная функция; функция $w_0(a;\ c;\ z)$ регулярна на бесконечности с точностью до полюса. Поскольку v и w_{01} являются суммами w_0 и w_1, то для поведения этих функций на бесконечности при $\operatorname{Re} z > 0$ существенным является слагаемое, содержащее w_1, а при $\operatorname{Re} z < 0$ — слагаемое, содержащее w_0.

6.4.2.0. Оценка остаточного члена. Вычислим теперь остаточный член в разложении

$$(1 \pm x)^l = \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{l}{\varkappa}(\pm x)^\varkappa + R_\nu. \qquad (*)$$

Как показал Якоби [1]),

$$R_\nu = \frac{(l-\nu)_{\nu+1}}{\nu!}(1 \pm x)^l \int_0^{\pm x} u^\nu (1+u)^{-l-1}\,du.$$

[1]) Jacobi C. G., Dissertation, Berlin, 1825, Ges. Werke, III, Leipzig, 1884. стр. 1—44.

Для доказательства заметим, что по равенству (*)

$$(1+u)^{-l}R_\nu(u)=1-(1+u)^{-l}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{l}{\varkappa}u^\varkappa.$$

Дифференцируя, получаем отсюда

$$\frac{d}{du}\left((1+u)^{-l}R_\nu(u)\right)=l(1+u)^{-l-1}\left[\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{l}{\varkappa}u^\varkappa-(1+u)\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\frac{\varkappa}{l}\binom{l}{\varkappa}u^{\varkappa-1}\right],$$

и, преобразуя правую часть, имеем

$$\frac{d}{du}\left((1+u)^{-l}R_\nu(u)\right)=(1+u)^{-l-1}\binom{l}{\nu}(l-\nu)u^\nu.$$

Решая это дифференциальное уравнение и принимая во внимание что $R_\nu(0)=0$, мы и получаем формулу Якоби.

Остаточные члены в равенствах (41) и (43) могут быть представлены в виде

$$R_\nu\left(\pm\frac{t}{z}\right)=\frac{(l-\nu)_{\nu+1}}{\nu!}\left(1\pm\frac{t}{z}\right)^l\int_0^{\pm\frac{t}{z}}u^\nu(1+u)^{-l-1}du,$$

где соответственно $l=c-a-1$ и $l=a-1$. Для вычисления интеграла

$$\int_{(-\infty)}^{(0)}R_\nu\left(\frac{t}{z}\right)t^{c-a-1}e^t\,dt, \qquad \text{соответственно} \qquad \int_{(-\infty)}^{(0)}R_\nu\left(-\frac{t}{z}\right)t^{a-1}e^t\,dt,$$

выберем в качестве пути интегрирования соответствующий луч в левой полуплоскости. В силу наличия множителя e^t, это всегда возможно, если $\operatorname{Re}(\nu+c-a)>0$ и соответственно $\operatorname{Re}(\nu-a)>0$, так как тогда вычет в нулевой точке равен нулю. Мы полагаем, таким образом, при вещественном τ и фиксированном φ,

$$t=\tau e^{i\varphi},\quad 0\leqslant\tau\leqslant\infty,\quad -\frac{\pi}{2}>\varphi>-\frac{3\pi}{2}.$$

Дальнейшие рассмотрения проведем так, чтобы они были применимы как для w_0, так и для w_1. Полагая $z=|z|e^{i\theta}$, $|z|\geqslant 1$, получаем $|t/z|\leqslant\tau$. Далее, если g — любое комплексное число, $g=re^{i\gamma}$, то $|1\pm g|\leqslant 1+r$, если $|1\pm g|>1$ и $|1\pm g|\geqslant|\sin\gamma|$, если $|1\pm g|<1$. Далее, при $l=\lambda_1+i\lambda_2$ имеем $|g^l|\leqslant q^{|\lambda_1|e^{|\gamma\lambda_2|}}$, если $q\geqslant|g|\geqslant 1$, и $|g^l|\leqslant q^{-|\lambda_1|e^{|\gamma\lambda_2|}}$, если $1\geqslant|g|\geqslant q$. Таким образом, во всех слу-

чаях имеем

$$|(1+g)^l| \leqslant (1+r)^{|\lambda_1|} \sin\gamma^{-|\lambda_1|} e^{|\gamma\lambda_2|}.$$

Применим теперь это неравенство к функциям $\left(1 \pm \frac{t}{z}\right)^l$ и $(1+u)^{-l-1}$. Мы получим тогда для остаточного члена оценку

$$\left|R_\nu\left(\pm\frac{t}{z}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(l-\nu)_{\nu+1}}{\nu!}\right| \cdot \left|\frac{1+\tau}{\sin(\varphi-\theta)}\right|^{|\lambda_1|} e^{|\lambda_2(\varphi-)\theta|} \times$$

$$\times \int_0^{\left|\frac{t}{z}\right|} u^\nu \left|\frac{1+u}{\sin(\varphi-\theta)}\right|^{|\lambda_1|} e^{|\lambda_2(\varphi-\theta)|}\, du.$$

Заменяя в интеграле $1+u$ на $1+\tau$, получаем

$$\left|R_\nu\left(\pm\frac{t}{z}\right)\right| \leqslant \left|\frac{(l-\nu)_{\nu+1}}{(\nu+1)!}\right| \cdot \left|\frac{1+\tau}{\sin(\varphi-\theta)}\right|^{|2\lambda_1|} e^{|2\lambda_2(\varphi-\theta)|} \left|\frac{\tau}{z}\right|^{\nu+1}.$$

Таким образом, остаточный член в разложении (41) имеет порядок

$$|z|^{-(\nu+1)} |\sin(\varphi-\theta)|^{-|2\lambda_1|} \int_0^\infty e^{-\tau_\tau a+\nu} (1+\tau)^{|2\lambda_1|} d\tau,$$

а потому ведет себя, как $C_\nu z^{-(\nu+1)}$. Для разложения (43) получаем такое же выражение, с той лишь разницей, что показатель при τ имеет значение $c-a+\nu$.

Коэффициент C_ν не зависит от $|z|$, однако он зависит от $\arg\theta$. Поскольку путь интегрирования не должен проходить через особые точки, то, согласно рис. 34, для функции w_0 мы должны всегда иметь $\varphi < \theta$, а для функции w_1 должно быть $\varphi > \theta - \pi$. Поскольку, с другой стороны, $-\pi/2 > \varphi > -3\pi/2$, то при $\arg z = -3\pi/2$ путь для w_0 должен идти между z и положительным направлением мнимой оси ($\varphi = -3\pi/2$). Разность аргументов $\varphi - \theta$ в этом случае проходит через нуль, и оценка теряет смысл из-за знаменателя $\sin(\varphi-\theta)$. Поэтому равенство (41) применимо для w_0 в области $|z| > 1$, $\frac{\pi}{2} \geqslant \arg z > -\frac{3\pi}{2}$. Соответственно равенство (43) применимо при $\frac{\pi}{2} > \arg z \geqslant -\frac{3\pi}{2}$.

6.5. Соотношения между смежными функциями. Рекуррентные формулы. Применяя тождество $1 \equiv s + (1-s)$, получаем из интегрального представления соотношение

$$w(a;\ c;\ z) = w(a+1;\ c+1;\ z) + w(a;\ c+1;\ z) \qquad (46)$$

для каждого допустимого пути интегрирования. Далее, интегрируя по частям, находим

$$a\int_C e^{zs}s^{a-1}(1-s)^{c-a-1}\,ds=\int_C \frac{d}{ds}\left(e^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a-1}\right)ds-$$

$$-z\int_C e^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a-1}\,ds+(c-a-1)\int_C e^{zs}s^{a}(1-s)^{c-a-2}\,ds,$$

а потому

$$z\,w(a+1;\,c+1;\,z)=(c-a-1)\,w(a+1;\,c;\,z)-aw(a;\,c;\,z). \quad (47)$$

Дифференцируя под знаком интеграла по z, получаем

$$\frac{dw(a;\,c;\,z)}{dz}=w(a+1;\,c+1;\,z). \quad (48)$$

Выведенное равенство выполняется для функций v, w_0, w_1, w_{01}. При переходе от v к функции Куммера ${}_1F_1$ возникают еще множители, зависящие от параметров a и c. Принимая во внимание, что $\Gamma(a+1)=a\,\Gamma(a)$, мы получаем из (46)

$$a\,{}_1F_1(a+1;\,c+1;\,z)=c\,{}_1F_1(a;\,c;\,z)+(a-c)\,{}_1F_1(a;\,c+1;\,z). \quad (49)$$

Точно так же из равенства (47) следует

$$z\,{}_1F_1(a+1;\,c+1;\,z)=c\,{}_1F_1(a+1;\,c;\,z)-c\,{}_1F_1(a;\,c;\,z), \quad (50)$$

а из равенства (48)

$$c\frac{d\,{}_1F_1(a;\,c;\,z)}{dz}=a\,{}_1F_1(a+1;\,c+1;\,z). \quad (51)$$

Многократное применение этого равенства дает нам

$$\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}\,{}_1F_1(a;\,c;\,z)=\frac{(a)_{\nu}}{(c)_{\nu}}\,{}_1F_1(a+\nu;\,c+\nu;\,z). \quad (51a)$$

Равенства (49) и (50) можно также использовать, чтобы получить рекуррентную формулу, в которой изменяется лишь один параметр. Для этого сложим равенства (49) и (50):

$$(a+z)\,{}_1F_1(a+1;\,c+1;\,z)=$$

$$=c\,{}_1F_1(a+1;\,c;\,z)+(a-c)\,{}_1F_1(a;\,c+1;\,z).$$

Исключая ${}_1F_1(a+1;\,c+1;\,z)$ из равенств (49) и (50), имеем

$$ac\,{}_1F_1(a+1;\,c;\,z)=c(a+z)\,{}_1F_1(a;\,c;\,z)+z(a-c)\,{}_1F_1(a;\,c+1;\,z). \quad (52)$$

Заменим в равенстве (50) a на $a-1$ и исключим функцию ${}_1F_1(a;\ c+1;\ z)$. Мы получим рекуррентную формулу

$$a\,{}_1F_1(a+1;\ c;\ z)+(a-c)\,{}_1F_1(a-1;\ c;\ z)= \\ =(2a-c+z_1)\,{}_1F_1(a;\ c;\ z), \quad (53)$$

в которой параметр c является постоянным. Переходя в равенстве (49) к параметру $c-1$ и исключая с помощью равенства (52) функцию ${}_1F_1(a+1;\ c;\ z)$, получаем рекуррентную формулу, в которой первый параметр остается неизменным

$$(a-c)z\,{}_1F_1(a;\ c+1;\ z)-c(c-1)\,{}_1F_1(a;\ c-1;\ z)+ \\ +c(z+c-1)\,{}_1F_1(a;\ c;\ z)=0. \quad (54)$$

Другие возможности возникают при использовании равенства (51). Например, принимая во внимание равенство (49), получаем

$$c\frac{d\,{}_1F_1(a;\ c;\ z)}{dz}=c\,{}_1F_1(a;\ c;\ z)+(a-c)\,{}_1F_1(a;\ c+1;\ z), \quad (55)$$

а с помощью равенства (50) —

$$z\frac{d\,{}_1F_1(a;\ c;\ z)}{dz}=a\,{}_1F_1(a+1;\ c;\ z)-a\,{}_1F_1(a;\ c;\ z). \quad (56)$$

В этих равенствах параметры увеличиваются на единицу; используя равенства (53) и (54), легко добиться, чтобы эти параметры уменьшились на единицу.

Интегрируя равенство (51), получаем

$$\int_0^z {}_1F_1(a+1;\ c+1;\ t)\,dt=\frac{c}{a}({}_1F_1(a;\ c;\ z)-1). \quad (57)$$

С помощью равенства (49) легко заменить второй параметр на $c+1$:

$$\int_0^z {}_1F_1(a+1;\ c+1;\ t)\,dt= \\ ={}_1F_1(a+1;\ c+1;\ z)+\frac{c-a}{a}\,{}_1F_1(a;\ c+1;\ z)-\frac{c}{a}. \quad (57а)$$

Равенство же (50) приводит к соотношению

$$a\int_0^z {}_1F_1(a+1;\ c+1;\ t)\,dt= \\ =c\,{}_1F_1(a+1;\ c;\ z)-z\,{}_1F_1(a+1;\ c+1;\ z)-c. \quad (57б)$$

6.6. Частные случаи для особых значений параметров. Как и в случае функции Гаусса, при некоторых соотношениях между параметрами имеют место дополнительные соотношения для функций ${}_1F_1$. Мы рассмотрим сначала случай целочисленных параметров.

6.6.1. Целочисленные параметры, $c-a=\nu$ — целое число. Мы установили уже, что если параметр c — целое отрицательное число, то функция Куммера ${}_1F_1(a;\ c;\ z)$ обращается в бесконечность, за исключением случая, когда и a — целое число, причем $0\geqslant a>c$. Если a — целое отрицательное число, причем $a>c$, и c — отрицательное целое число, то ряд (34) обрывается. В этом случае функция Куммера ${}_1F_1(-\nu;\ c;\ z)$ обращается в многочлен степени ν ($\nu\geqslant 0$ — целое число). Ниже мы изучим подробно эти *многочлены Лагерра*. Функция $v(-\nu;\ c;\ z)$, равно как и функция $w_0(-\nu;\ c;\ z)$, бесконечна из-за множителя $\Gamma(-\nu)$, в то время как функция $w_1(-\nu;\ c;\ z)$, согласно равенству (37а), остается конечной. Выражение $w_0(-\nu;\ c;\ z)/\Gamma(-\nu)$, в силу равенства (36а), является многочленом степени ν.

Если $c-a=\nu$ — целое число, то из равенства Куммера (23) следует

$$ {}_1F_1(c+\nu;\ c;\ z)=e^z\,{}_1F_1(-\nu;\ c;\ -z). \tag{58}$$

Таким образом, ${}_1F_1(c+\nu;\ c;\ z)$ является многочленом степени ν от z, умноженным на e^z. В частности, при $\nu=0$

$$ {}_1F_1(c;\ c;\ z)=e^z. \tag{58а}$$

Пусть $\nu>0$ — целое число, причем c не является целым числом, меньшим или равным ν. Из равенств (38) или (36а) следует, что тогда $w_0(c-\nu;\ c;\ z)$, с точностью до множителя z^{1-c}, является многочленом степени $\nu-1$. Из равенства (37а) вытекает, что $w_1(c+\nu;\ c;\ z)$ обращается в бесконечность при целых значениях $\nu\geqslant 0$.

6.6.2. $c=2a$. Если параметр c вдвое больше параметра a, то в интегральном представлении оба показателя равны. Мы имеем

$$ {}_1F_1(a;\ 2a;\ z)=\frac{\int\limits_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}e^{zs}\,ds}{\int\limits_{(0)}^{(1)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}\,ds}. $$

Если на плоскости s путем интегрирования является восьмерка, обходящая точку $s=1$ в положительном направлении, а точку $s=0$ в отрицательном направлении, то для любого a мы получаем на

римановой поверхности замкнутый путь интегрирования. Сделаем подстановку $s=\frac{1-t}{2}$, $1-s=\frac{1+t}{2}$. Мы получаем тогда

$$\oint^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}e^{zs}\,ds = 2^{-2a+1}e^{\frac{z}{2}}\oint^{(1+,\,-1-)}(1-t^2)^{a-1}e^{-z\frac{t}{2}}\,dt,$$

или, если разложить петли на обходы в обоих направлениях,

$$\int^{(1+,\,0+)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}e^{zs}\,ds =$$

$$= 2^{-2a+1}e^{\frac{z}{2}}\left\{\oint_0^{(1+)}(1-t^2)^{a-1}e^{-z\frac{t}{2}}\,dt - \oint_0^{(-1+)}(1-t^2)^{a-1}e^{-z\frac{t}{2}}\,dt\right\}.$$

Заменяя во втором интеграле t на $-t$, получаем

$$\oint^{(1+,\,0-)} s^{a-1}(1-s)^{a-1}e^{zs}\,ds = 2^{-2a+1}e^{\frac{z}{2}}\oint_0^{(1+)}(1-t^2)^{a-1}\left(e^{-z\frac{t}{2}}+e^{z\frac{t}{2}}\right)dt.$$

Разложим обе показательные функции в ряд и примем во внимание, что нечетные степени исчезают. Мы получим выражение

$$2^{-2a+1}e^{\frac{z}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{1}{(2x)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2x}\oint_0^{(1+)}(1-t^2)^{a-1}t^{2x}2\,dt.$$

Делая подстановку $r=t^2$, получаем

$$\oint_0^{(1+)}(1-t^2)^{a-1}t^{2x}2\,dt=(1-e^{2i\pi a})\,\mathrm{B}\left(x+\frac{1}{2},\ a\right).$$

Поэтому, принимая во внимание равенство (1.22) и вводя постоянный множитель, имеем

$${}_1F_1(a;\ 2a;\ z)=Ce^{\frac{z}{2}}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x\left(\frac{z}{2}\right)^{2x}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_x(2x)!}.$$

Поскольку по равенству (1.4)

$$(2x)!=(1)_{2x}=2^{2x}\left(\frac{1}{2}\right)_x(1)_x,$$

то сумму можно записать в виде

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_x\left(\frac{z}{2}\right)^{2x}}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_x(2x)!}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z^2}{16}\right)^x}{\left(a+\frac{1}{2}\right)_x(1)_x}={}_0F_1\left(a+\frac{1}{2};\ \frac{z^2}{16}\right).$$

Постоянный множитель вычисляется из условия, что функция равна 1 при $z=0$. Отсюда следует

$$ {}_1F_1(a;\ 2a;\ z)=e^{\frac{z}{2}}\,{}_0F_1\left(a+\frac{1}{2};\ \frac{z^2}{16}\right). \tag{59}$$

Из равенства (35а), учитывая равенство (59), имеем

$$ w_{01}(a;\ 2a;\ z)=-e^{-i\pi a}\,\Gamma(2a-1)\,z^{1-2a}e^{\frac{z}{2}}\,{}_0F_1\left(\frac{3}{2}-a;\ \frac{z^2}{16}\right). \tag{59а}$$

Точно так же с помощью равенств (36а) и (37а) можно преобразовать функции $w_0(a;\ 2a;\ z)$ и $w_1(a;\ 2a;\ z)$.

6.7. Функции Уиттекера. При рассмотрении дифференциального уравнения Лапласа в п. 6.2.1 было показано, что решение этого уравнения можно записать симметричным образом, если ввести вместо параметров a и c параметры m и k с помощью подстановки

$$ m=\frac{c-1}{2};\quad k=\frac{c}{2}-a. \tag{60а}$$

Из этих соотношений следует

$$ \begin{aligned} &a=\tfrac{1}{2}+m-k, && c-a=\tfrac{1}{2}+m+k,\\ &a-c+1=\tfrac{1}{2}-m-k, && 1-a=\tfrac{1}{2}-m+k,\\ &c=1+2m. \end{aligned} \tag{60б}$$

Уиттекер использовал это для того, чтобы ввести вместо функции Куммера ${}_1F_1(a;\ c;\ z)$ новую функцию $M_{k,\,m}(z)$, определяемую равенством

$$ M_{k,\,m}(z)\equiv z^{\frac{1}{2}+m}e^{-\frac{z}{2}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+m-k;\ 1+2m;\ z\right). \tag{61}$$

В силу соотношения между ${}_1F_1$ и v, даваемого формулой (34), имеем

$$ v(a;\ c:\ z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)}{\Gamma(1+2m)}\,e^{\frac{z}{2}}z^{-\frac{1}{2}-m}M_{k,\,m}(z) \tag{61а}$$

и

$$ \begin{aligned} v(a-c+1;\ 2-c;\ z)=\\ =\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+k\right)}{\Gamma(1-2m)}\,e^{\frac{z}{2}}z^{-\frac{1}{2}+m}M_{k,\,-m}(z). \end{aligned} \tag{61б}$$

Вторым фундаментальным решением $w_{01}(a;\ c;\ z)$ уравнения Лапласа является, согласно равенству (35б),

$$w_{01}(a;\ c;\ z)=i\,e^{i\pi(k-m)}\,\Gamma(2m)\,e^{\frac{z}{2}}\,z^{-\frac{1}{2}-m}\,M_{k,\,-m}(z). \qquad (61в)$$

Поскольку функция Уиттекера отличается от решения уравнения Лапласа множителем, зависящим от z, она сама не удовлетворяет этому уравнению. Подставляя выражение (61а) в уравнение Лапласа, устанавливаем, что функция Уиттекера удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2M}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right)M=0. \qquad (62)$$

Из этого уравнения следует, что вместе с $M_{k,\,m}(z)$ функции $M_{k,\,-m}(z)$ и $M_{-k,\,m}(-z)$ также удовлетворяют этому же уравнению.

Подставляя в равенство (36а) функцию Уиттекера, получаем

$$w_0(a;\ c;\ z)=e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-m+k\right)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)e^{\frac{z}{2}}\,z^{-\frac{1}{2}-m}\times$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}\,M_{k,\,m}(z)+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\,M_{k,\,-m}(z)\right\}.$$

Согласно Уиттекеру, введем еще функцию

$$W_{k,\,m}(z)=\frac{e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}-m+k\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\,e^{-\frac{z}{2}}\,z^{\frac{1}{2}+m}\,w_0\left(\frac{1}{2}+m-k;\ 1+2m;\ z\right). \qquad (63)$$

Мы имеем

$$W_{k,\,m}(z)=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}\,M_{k,\,m}(z)+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\,M_{k,\,-m}(z). \qquad (63а)$$

Поскольку $W_{k,\,m}(z)$ линейно выражается через два решения уравнения Уиттекера (62), то она также удовлетворяет этому уравнению. Равенству (38) соответствует соотношение, непосредственно вытекающее из (63а):

$$W_{k,\,m}(z)=W_{k,\,-m}(z). \qquad (64)$$

Если с помощью равенства (19в) перейти в формуле (63) к интегральному представлению, то мы получим

$$W_{k,\,m}(z)=\frac{e^{-\frac{z}{2}}z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\int_0^{(\infty)}e^{-t}\,t^{-\frac{1}{2}+m-k}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{-\frac{1}{2}+m+k}dt. \qquad (65)$$

Асимптотическое представление (41) дает нам

$$W_{k,m}(z)\sim$$
$$\sim e^{-\frac{z}{2}}z^{k}\left(1+\frac{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{1!\,z}+\frac{\left(m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right)}{2!\,z^2}+\ldots\right). \tag{66}$$

Так называемое первое равенство Куммера (23) приводит к *соотношению обхода*

$$M_{k,m}(e^{\pm i\pi}z)=e^{\pm i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}M_{-k,m}(z) \tag{67}$$

и

$$M_{k,m}(e^{\pm 2i\pi}z)=e^{\pm 2i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}M_{k,m}(z), \tag{67a}$$

в то время как из равенства (32) получаем

$$W_{k,m}(e^{2i\pi}z)=e^{-2i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}W_{k,m}(z)+\frac{2i\pi}{\Gamma(1+2m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}M_{k,m}(z). \tag{68}$$

Формула для $W_{k,m}(e^{\pm i\pi}z)$ вытекает из равенств (63а) и (67).

6.7.0. Рекуррентные формулы для функций Уиттекера. Установленные в 6.5 рекуррентные формулы принимают при переходе к функции Уиттекера вид

$$(2m-1)z^{\frac{1}{2}}M_{k,m-1}(z)=$$
$$=\left(m-k-\frac{1}{2}\right)M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)+\left(m+k-\frac{1}{2}\right)M_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z), \tag{69}$$

$$z^{\frac{1}{2}}M_{k,m}(z)=2m\,M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)-2m\,M_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z) \tag{70}$$

и

$$2z\frac{d}{dz}M_{k,m}(z)+(z-2m-1)M_{k,m}(z)-$$
$$-2z^{\frac{1}{2}}\frac{m-k+\frac{1}{2}}{2m+1}M_{k-\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z)=0. \tag{71}$$

Заменим в равенстве (70) m на $m-\frac{1}{2}$ и k на $k\pm\frac{1}{2}$ и исключим из полученных равенств и равенства (69) $M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)$ и $M_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)$. Заменяя в получающейся формуле $m-1$ на m, мы

приходим к рекуррентной формуле

$$\left(m-k+\frac{1}{2}\right)M_{k-1,m}(z)+(2k-z)M_{k,m}(z)-\left(m+k+\frac{1}{2}\right)M_{k+1,m}(z)=0, \quad (72)$$

в которой m сохраняет постоянное значение. Если использовать равенство (70) для исключения функции $M_{k-\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z)$ из (71), то получим

$$z\frac{d}{dz}M_{k,m}(z)+\left(\frac{z}{2}-k\right)M_{k,m}(z)-\left(m-k+\frac{1}{2}\right)M_{k-1,m}(z)=0. \quad (73)$$

Несколько более сложным является вывод рекуррентной формулы, в которой k сохраняет постоянное значение. Из равенств (69) и (70) найдем $M_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)$ и $M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)$. Мы получим

$$M_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}\left(M_{k,m-1}(z)-\frac{m-k-\frac{1}{2}}{2m(2m-1)}M_{k,m}(z)\right). \quad (74а)$$

$$M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}\left(M_{k,m-1}(z)+\frac{m+k-\frac{1}{2}}{2m(2m-1)}M_{k,m}(z)\right). \quad (74б)$$

Заменяя в первом равенстве k на $k-1$, имеем

$$M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}=z^{\frac{1}{2}}\left(M_{k-1,m-1}(z)-\frac{m-k+\frac{1}{2}}{2m(2m-1)}M_{k-1,m}(z)\right). \quad (74в)$$

Третье представление для $M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)$ вытекает из равенства (70), если заменить в нем k на $k-\frac{1}{2}$ и m на $m-\frac{1}{2}$:

$$M_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}=z^{-\frac{1}{2}}\left((2m-1)M_{k-1,m-1}(z)-(2m-1)M_{k,m-1}(z)\right).$$

Сравнивая эти три выражения, находим

$$(z+2m-1)M_{k,m-1}(z)+z\frac{m+k-\frac{1}{2}}{2m(2m-1)}M_{k,m}(z)-(2m-1)M_{k-1,m-1}(z)=0$$

и

$$(z-2m+1)\,M_{k-1,\,m-1}(z)-z\frac{m-k+\frac{1}{2}}{2m\,(2m-1)}\,M_{k-1,\,m}(z)+ \\ +(2m-1)\,M_{k,\,m-1}(z)=0.$$

Заменяя в предпоследнем равенстве m на $m+1$, имеем

$$(z+2m+1)\,M_{k,\,m}(z)+z\frac{m+k+\frac{1}{2}}{2\,(m+1)\,(2m+1)}\,M_{k,\,m+1}(z)- \\ -(2m+1)\,M_{k-1,\,m}(z)=0.$$

Из этих трех равенств можно исключить $M_{k-1,\,m-1}(z)$ и $M_{k-1,\,m}(z)$. Мы получаем тогда искомую рекуррентную формулу

$$\frac{(2m+1)^2-4k^2}{16m\,(m+1)\,(2m+1)}\,M_{k,\,m+1}(z)+\frac{4m^2-2kz-1}{(2m-1)\,z}\,M_{k,\,m}(z)- \\ -(2m+1)\,M_{k,\,m-1}(z)=0. \quad (75)$$

Заменим еще в равенстве (74а) m на $m+1$ и подставим в равенство (71). Мы имеем

$$\frac{d}{dz}\,M_{k,\,m}(z)+\left(\frac{k}{2m+1}-\frac{2m+1}{2z}\right)M_{k,\,m}(z)- \\ -\frac{(2m+1)^2-4k^2}{8\,(m+1)\,(2m+1)^2}\,M_{k,\,m+1}(z)=0. \quad (76)$$

Для функции $W_{k,\,m}(z)$ справедливы аналогичные соотношения, но коэффициенты должны быть частично изменены. В силу (63), из равенства (46) вытекает, что

$$z^{\frac{1}{2}}W_{k,\,m}(z)=-\left(m-k+\frac{1}{2}\right)W_{k-\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z)+W_{k+\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z), \quad (77)$$

из равенства (47):

$$z^{\frac{1}{2}}W_{k,\,m}(z)=\left(m+k-\frac{1}{2}\right)W_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)+W_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z) \quad (78)$$

и из равенства (48):

$$2z\frac{d}{dz}\,W_{k,\,m}(z)+(z-2m-1)\,W_{k,\,m}(z)+ \\ +2z^{\frac{1}{2}}\left(m-k+\frac{1}{2}\right)W_{k-\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z)=0. \quad (79)$$

Тот же процесс исключения, что и для $M_{k,m}(z)$, приводит к соотношениям

$$W_{k+1,m}(z)+(2k-z)W_{k,m}(z)-(m^2-(k-{}^1/_2)^2)W_{k-1,m}(z)=0, \quad (80)$$

$$z\frac{d}{dz}W_{k,m}(z)+\left(\frac{z}{2}-k\right)W_{k,m}(z)+\left(m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right)W_{k-1,m}(z)=0, \quad (81)$$

$$(2m+1)\left(m+k-\frac{1}{2}\right)W_{k,m-1}(z)+\frac{2m}{z}(4m^2-2kz-1)W_{k,m}(z)-$$
$$-(2m-1)\left(m-k+\frac{1}{2}\right)W_{k,m+1}(z)=0 \quad (82)$$

и

$$\frac{d}{dz}W_{k,m}(z)+\left(\frac{k}{2m+1}-\frac{2m+1}{2z}\right)W_{k,m}(z)+\frac{m-k+\frac{1}{2}}{2m+1}W_{k,m-1}(z)=0. \quad (83)$$

Поскольку многие классы функций являются частными случаями функции Уиттекера при постоянном k или m, мы получаем также и для этих классов рекуррентные формулы.

6.8. Соотношения ортогональности. Многочлены Лагерра. Точно так же, как и уравнение Гаусса, уравнение Лапласа можно преобразовать так, чтобы из него получались соотношения ортогональности. Из тождества

$$\frac{d}{dz}(e^{-z}z^cy')=e^{-z}z^c\left(y''-y'+\frac{c}{z}y'\right)$$

и из равенства (13) следует, что любая вырожденная гипергеометрическая функция с параметрами λ и c является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-z}z^c\frac{dy}{dz}\right)=\lambda z^{c-1}e^{-z}y; \quad (84)$$

в частности, его решениями являются $v(\lambda; c; z)$, $w_0(\lambda; c; z)$, $w_1(\lambda; c; z)$ и $w_{01}(\lambda; c; z)$. Возьмем два решения y_1 и y_2, которые при постоянном c принадлежат различным значениям λ_1 и λ_2. Тогда из равенства (84) следует, что

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[y_2\frac{d}{dz}(e^{-z}z^cy_1')-y_1\frac{d}{dz}(e^{-z}z^cy_2')\right]dz=(\lambda_1-\lambda_2)\int_{z_1}^{z_2}e^{-z}z^{c-1}y_1y_2\,dz. \quad (85)$$

Левая часть этого равенства может быть вычислена с помощью интегрирования по частям, что приводит к соотношению

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_{z_1}^{z_2} e^{-z}z^{c-1}y_1y_2\,dz = e^{-z}z^c\left(y_1'y_2-y_2'y_1\right)\Big|_{z_1}^{z_2}. \qquad (85a)$$

Для того чтобы правая часть обращалась в нуль, надо выбрать в качестве пределов интегрирования особые точки $z=0$ и $z=\infty$.

6.8.1. Многочлены Лагерра. Выберем в качестве пределов интегрирования в равенстве (85а) точки 0 и ∞. Тогда, в силу установленных в пункте 6.4.2 свойств вырожденной гипергеометрической функции, правая часть этого равенства может обратиться в нуль в обеих этих точках лишь в случае, когда обе функции y_1 и y_2 вырождаются в многочлены. Это имеет место при любом значении c тогда и только тогда, когда λ является отрицательным целым числом или нулем. Если, кроме того, $\operatorname{Re} c>0$, то в равенстве (85а) правая часть обращается в нуль и мы получаем

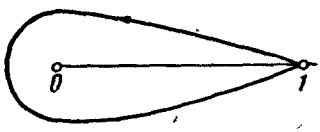


Рис. 37. Путь интегрирования для вычисления интегралов в равенстве (87).

$$\int_0^\infty e^{-z}z^{c-1}\,{}_1F_1(-\nu_1;\ c;\ z)\ {}_1F_1(-\nu_2;\ c;\ z)\,dz=0 \qquad (86)$$

$$(\operatorname{Re} c>0,\ \nu_1\neq\nu_2,\ \nu_{1,2}\geqslant 0 \text{ — целое}).$$

Многочлен ${}_1F_1(-\nu;\ c;\ z)$ имеет замечательное представление. По равенству (34) мы имеем

$${}_1F_1(-\nu;\ c;\ z)=\frac{\int_{(0)}^{(1)} e^{zs}s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds}{\int_{(0)}^{(1)} s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds}. \qquad (87)$$

Чтобы найти значение отношения этих двух интегралов, вычислим интеграл

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{1-\varepsilon}^{(0+)} e^{zs}s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds.$$

Путь интегрирования (рис. 37) начинается и кончается в точке $1-\varepsilon$ и не обходит точки 1. Поскольку при целочисленном значении ν начало координат не является точкой ветвления, то этот путь замкнут

на римановой поверхности. Точка $s=1$ бесконечно близка к пути интегрирования, но находится вне его. По теореме Коши мы можем теперь стянуть путь в путь, лежащий в окрестности нулевой точки; для этого необходимо, чтобы выполнялось условие $\nu \geqslant 0$, так как в противном случае отношение будет иметь вид 0/0. Полагая $1-s=\frac{t}{z}$, получим

$$\oint^{(0+)} e^{zs} s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds = (-1)^{\nu} z^{1-c} e^{z} \oint^{(z+)} e^{-t} \frac{t^{c+\nu-1}\,dt}{(t-z)^{\nu+1}}.$$

Поскольку по теореме Коши

$$\oint^{(z+)} \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{\nu+1}} = \frac{2i\pi}{\nu!} \frac{d^{\nu} f(z)}{dz^{\nu}},$$

то

$$\oint^{(0+)} e^{zs} s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds = \frac{2i\pi}{\nu!}(-1)^{\nu} z^{1-c} e^{z} \frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(z^{c+\nu-1}e^{-z}).$$

Тем самым вычислен числитель в формуле (87). Чтобы вычислить знаменатель этой формулы, положим в полученном равенстве $z=0$. Поскольку при этом исчезают члены, содержащие низшие степени z, то мы получаем

$$\oint^{(0+)} s^{-\nu-1}(1-s)^{c+\nu-1}\,ds = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{2i\pi}{\nu!}(-1)^{\nu} z^{1-c} e^{z} \frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(z^{c+\nu-1}e^{-z})\right\} =$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{2i\pi}{\nu!}\lim_{z\to 0}\{z^{1-c}e^{-z}((c+\nu-1)(c+\nu-2)\ldots(c+1)c\,z^{c-1}+\ldots)\} =$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{2i\pi}{\nu!}(c)_{\nu}.$$

Таким образом, из равенства (87) следует, что

$${}_1F_1(-\nu;\ c;\ z) = \frac{1}{(c)_{\nu}} z^{1-c} e^{z} \frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(z^{c+\nu-1}e^{-z}) \qquad (\nu \geqslant 0 \text{ — целое}). \quad (88)$$

Функция Куммера ${}_1F_1(-\nu;\ c;\ z)$ нормирована таким образом, что первый член разложения в степенной ряд равен 1. Если нормировать ее так, чтобы высшая степень имела коэффициент $(-1)^{\nu}/\nu!$, то мы получим многочлены Лагерра [1])

$$L_{\nu}^{(c)}(z) \equiv \frac{(c+1)_{\nu}}{\nu!}\,{}_1F_1(-\nu;\ c+1;\ z) = \frac{z^{-c}e^{z}}{\nu!}\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(z^{c+\nu}e^{-z}). \quad (89)$$

Из этих обобщенных многочленов Лагерра получаются обыкновенные многочлены Лагерра, если положить $c=0$;

$$L_{\nu}(z) = {}_1F_1(-\nu;\ 1;\ z) = \frac{e^{z}}{\nu!}\frac{d^{\nu}}{dz^{\nu}}(z^{\nu}e^{-z}). \quad (90)$$

[1]) В литературе встречаются и другие нормировки.

Введем еще присоединенные многочлены, определяемые равенством

$$^{*}L_{\nu}^{(\varkappa)}(z)=\frac{d^{\varkappa}}{dz^{\varkappa}}L_{\nu}(z). \tag{91}$$

В этих обозначениях нижний индекс не совпадает больше со степенью многочлена. Равенство (89) задает, в частности, и присоединенные многочлены. Очевидно, что, в силу равенств (51а) и (1.3) имеем

$$\frac{\partial^{\varkappa}L_{\nu}^{(c)}(z)}{\partial z^{\varkappa}}=\frac{(c+1)_{\nu}(-\nu)_{\varkappa}}{(c+1)_{\varkappa}\,\nu!}\,{}_1F_1(-\nu+\varkappa;\ 1+c+\varkappa;\ z)=(-1)^{\varkappa}L_{\nu-\varkappa}^{(c+\varkappa)}(z). \tag{92}$$

Отсюда следует, что определенные равенством (91) присоединенные функции выражаются через функции $L_{\nu}^{(c)}$ следующим образом:

$$^{*}L_{\nu}^{(\varkappa)}(z)=(-1)^{\varkappa}L_{\nu-\varkappa}^{(\varkappa)}(z). \tag{92а}$$

Соотношения ортогональности (86) допускают следующее обобщение. Пусть заданы два многочлена Лагерра $L_{\nu_1}^{(c_1)}(z)$, $L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)$ различных степеней, и пусть $\nu_1>\nu_2$. Тогда можно представить многочлен $L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)$ в виде $L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)=L_{\nu_2}^{(c_1)}(z)+A_{\nu_2-1}(z)$, где $A_{\nu_2-1}(z)$ является многочленом степени ν_2-1. Продолжая этот процесс, мы получаем

$$L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)=\sum_{\varkappa=0}^{\nu_2}a_{\varkappa}L_{\varkappa}^{(c_1)}(z).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\infty}e^{-z}z^{c_1}L_{\nu_1}^{(c_1)}(z)\,L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)\,dz=\sum_{\varkappa=0}^{\nu_2}a_{\varkappa}\int_0^{\infty}e^{-z}z^{c_1}L_{\nu_1}^{(c_1)}(z)\,L_{\nu_2}^{(c_1)}(z)\,dz.$$

Поскольку, согласно равенству (86), при $\operatorname{Re}c_1>-1$ все слагаемые в правой части равны нулю, то мы получаем *соотношение ортогональности*

$$\int_0^{\infty}e^{-z}z^{c_1}L_{\nu_1}^{(c_1)}(z)\,L_{\nu_2}^{(c_2)}(z)\,dz=0 \tag{93}$$

$$(\nu_1>\nu_2,\ \operatorname{Re}c_1>-1).$$

Норма многочленов Лагерра

$$\int_0^{\infty}e^{-z}z^{c}\left(L_{\nu}^{(c)}(z)\right)^2dz$$

может быть вычислена, если заменить в интеграле один из множителей выражением

$$L_\nu^{(c)}(z)=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}z^\nu+\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1}a_\varkappa L_\varkappa^{(c)}(z).$$

На основании соотношения ортогональности получаем

$$\int_0^\infty e^{-z}z^c\left(L_\nu^{(c)}(z)\right)^2dz=\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_0^\infty e^{-z}z^cz^\nu L_\nu^{(c)}(z)\,dz.$$

Из равенства (89) следует теперь, что эта величина равна

$$\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\int_0^\infty\frac{z^\nu}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}(z^{c+\nu}e^{-z});$$

после ν-кратного интегрирования по частям получаем

$$\frac{1}{\nu!}\int_0^\infty z^{c+\nu}e^{-z}\,dz.$$

Примем теперь во внимание равенство (1.34а), определяющее Г-функцию. Мы получим, что

$$\int_0^\infty e^{-z}z^c\left(L_\nu^{(c)}(z)\right)^2dz=\frac{\Gamma(c+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}. \tag{94}$$

Полагая $c=0$, найдем

$$\int_0^\infty e^{-z}\left(L_\nu(z)\right)^2dz=1. \tag{94а}$$

Таким образом, нормированными ортогональными функциями Лагерра являются

$$\varphi_\nu(z)=e^{-\frac{z}{2}}L_\nu(z).$$

Дифференциальное уравнение для многочленов Лагерра непосредственно следует из уравнения (13):

$$z\frac{d^2L_\nu^{(c)}(z)}{dz^2}+(c+1-z)\frac{dL_\nu^{(c)}(z)}{dz}+\nu L_\nu^{(c)}(z)=0. \tag{95}$$

Рекуррентные формулы получаются из равенств пункта 6.5; например, из равенства (53) вытекает, что

$$(\nu+1)L_{\nu+1}^{(c)}(z)-(2\nu+c+1-z)L_\nu^{(c)}(z)+(\nu+c)L_{\nu-1}^{(c)}(z)=0. \tag{96}$$

Тем же способом, каким было доказано в пункте 4.4.1.0 соответствующее утверждение для многочленов Якоби, доказывают с помощью равенств (84) и (92), что все нули многочленов Лагерра $L_\nu^{(\gamma)}(z)$ при вещественных $\gamma > -1$ являются простыми вещественными и положительными.

Многочлены Лагерра $L_\nu^{(c)}(z)$ имеют простую производящую функцию. Из равенства (89) следует, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(c)}(z)\, t^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(c+1)_\nu}{\nu!} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \frac{(-\nu)_\varkappa\, z^\varkappa}{(c+1)_\varkappa\, \varkappa!}\, t^\nu.$$

Меняя порядок суммирования и принимая во внимание равенства (1.2) и (1.3), имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(c)}(z)\, t^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-z)^\varkappa}{\varkappa!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(c+1+\varkappa)_{\nu-\varkappa}\, (\nu+1-\varkappa)_\varkappa}{\nu!}\, t^\nu.$$

При $\nu = \mu + \varkappa$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(c)}(z)\, t^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-z)^\varkappa}{\varkappa!}\, t^\varkappa \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(c+1+\varkappa)_\mu\, (1+\mu)_\varkappa}{(1)_{\varkappa+\mu}}\, t^\nu.$$

Поскольку $(1)_{\varkappa+\mu} = (1)_\mu (1+\mu)_\varkappa$ и $(c+1+\varkappa)_\mu/(1)_\mu = (-1)^\mu \binom{-c-1-\varkappa}{\mu}$, то

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(c)}(z)\, t^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-zt)^\varkappa}{\varkappa!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{-c-\varkappa-1}{\mu} (-t)^\mu =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-zt)^\varkappa}{\varkappa!} (1-t)^{-(c+1+\varkappa)}.$$

Окончательно мы нашли производящую функцию в виде

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu^{(c)}(z)\, t^\nu = \frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{c+1}}. \tag{97}$$

При $c = 0$ эта формула дает

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(z)\, t^\nu = \frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{1-t}. \tag{97a}$$

Из равенства (57а) непосредственно следует, что

$$\int_0^z L_\nu^{(c)}(t)\,dt = L_\nu^{(c)}(z) - L_{\nu+1}^{(c)}(z) + \frac{(c)_{\nu+1}}{(\nu+1)!} \tag{98}$$

и при $c=0$

$$\int_0^z L_\nu(t)\,dt = L_\nu(z) - L_{\nu+1}(z). \tag{98а}$$

Связь с функцией Уиттекера $M_{k,m}(z)$ дается формулой

$$L_\nu^{(c)}(z) = \frac{(c+1)_\nu}{\nu!}\, z^{-\frac{c+1}{2}} e^{\frac{z}{2}} M_{\nu+\frac{c+1}{2},\frac{c}{2}}. \tag{99}$$

Для справедливости этого представления нужно, чтобы выражение $k - m - \frac{1}{2} = \nu$ было целым.

6.8.2. Многочлены Эрмита. Если мы хотим вести интегрирование в равенстве (85) вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$, то добиться обращения в нуль правой части равенства (85а) можно, лишь заменив z четной степенью x, например $x^2/2$. Дифференциальное уравнение (84) принимает тогда вид

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2c-1} \frac{dy}{dx}\right) = 2\lambda x^{2c-1} e^{-\frac{x^2}{2}} y, \tag{100}$$

а вместо равенства (85а) получаем

$$2(\lambda_1 - \lambda_2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2c-1} y_1 y_2\,dx = \left(y_2 y_1' - y_1 y_2'\right) e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2c-1}\Big|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Для обращения в нуль правой части достаточно, чтобы y_1 и y_2 были многочленами; это имеет место, если в функции Куммера $y = {}_1F_1(\lambda; c; x^2/2)$ параметр λ является отрицательным целым числом.

Мы ограничимся простейшим случаем $c = 1/2$. Если ввести в этом случае новый параметр $\nu = -2\lambda$, дифференциальное уравнение (100) примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} y_\nu'\right) = -\nu e^{-\frac{x^2}{2}} y_\nu \tag{101}$$

или

$$y_\nu''(x) - x y_\nu'(x) + x y_\nu(x) = 0. \tag{101а}$$

Пусть ν — любое число. Тогда одним из решений уравнения (101а) является функция

$$y_\nu = C_{\frac{\nu}{2}}\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right). \tag{101б}$$

Дифференцируя уравнение (101а) по x, получаем

$$y_\nu'''(x) - xy_\nu''(x) + (\nu - 1)\, y_\nu'(x) = 0.$$

Это равенство показывает, что y_ν' удовлетворяет уравнению (101а), в котором ν заменено на $\nu - 1$. Поэтому мы можем определить функцию $y_{\nu-1}$ равенством

$$y_\nu'(x) = c_\nu y_{\nu-1}(x),$$

где c_ν — произвольный нормирующий множитель. В частности, полагая $c_\nu = \nu$, имеем

$$y_\nu'(x) = \nu y_{\nu-1}(x). \tag{101в}$$

Принимая во внимание равенство (51) и то, что $\frac{d}{dx} = x\frac{d}{dz}$, получаем

$$y_{\nu-1} = -C_{\frac{\nu}{2}}\, x\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2} + 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right). \tag{101г}$$

Заметим, что функция (101г) не совпадает с функцией, которая получается из равенства (101б), если заменить в правой части ν на $\nu - 1$. Мы считали до сих пор ν любым числом. Перейдем теперь к рассмотрению целых неотрицательных значений ν. Определим при четных ν значение $y_\nu(x)$ формулой (101б), а значение для нечетных ν — формулой (101г), в которой ν заменено на $\nu + 1$. Значения коэффициентов $C_{\frac{\nu}{2}}$ выберем так, чтобы выполнялось соотношение (101в).

Вычислим коэффициенты $C_{\frac{\nu}{2}}$. Если ν — четное число, то из равенства (101г) имеем

$$y_{\nu+1} = -C_{\frac{\nu}{2}+1}\, x\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right). \tag{101д}$$

Поскольку, кроме того, должно выполняться равенство (101в), то

$$\frac{dy_{\nu+1}}{dx} = (\nu + 1)\, y_\nu.$$

Подставляя сюда значение $y_{\nu+1}$ из равенства (101д) и принимая во внимание, что $z = \frac{x^2}{2}$, имеем

$$\frac{dy_{\nu+1}}{dx} = -C_{\frac{\nu}{2}+1}\left\{ {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right) + 2z\frac{d}{dz}\, {}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ z\right)\right\}.$$

Но по равенству (56)

$$2z\frac{d}{dz}{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\frac{3}{2};z\right)=\nu\,{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\frac{3}{2};z\right)-\nu\,{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}+1;\frac{3}{2};z\right),$$

а потому

$$\frac{dy_{\nu+1}}{dx}=-C_{\frac{\nu}{2}+1}\left\{(\nu+1)\,{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right)-\nu\,{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2}+1;\frac{3}{2};z\right).\right.$$

Из равенства (49) вытекает, что

$$\frac{dy_{\nu+1}}{dx}=-C_{\frac{\nu}{2}+1}\,{}_1F_1\left(-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right)=-\frac{C_{\frac{\nu}{2}+1}}{C_{\frac{\nu}{2}}}y_\nu.$$

Таким образом, равенство (101в) будет иметь место, если выбрать нормирующие множители так, чтобы

$$C_{\frac{\nu}{2}+1}=-(\nu+1)C_{\frac{\nu}{2}}. \tag{102}$$

Построенные нами функции $y_\nu(x)$ являются многочленами. Они называются *многочленами Эрмита* $\mathrm{He}_\nu(x)$. В силу равенства (101б) при $\nu=0$ имеем $\mathrm{He}_0(x)=C_0$. Положим для простоты, что $C_0=1$; тогда из равенства (102) следует

$$C_\mu=(-1)^\mu\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\mu-1)=(-1)^\mu\frac{(2\mu)!}{2^\mu\mu!}$$

и из равенств (101б) и (101д)

$$\mathrm{He}_{2\mu}(x)=(-1)^\mu\frac{(2\mu)!}{2^\mu\mu!}\,{}_1F_1\left(-\mu;\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right), \tag{103а}$$

$$\mathrm{He}_{2\mu+1}(x)=(-1)^\mu\frac{(2\mu+1)!}{2^\mu\mu!}x\,{}_1F_1\left(-\mu;\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right). \tag{103б}$$

Выбранная нормировка такова, что $\mathrm{He}_\nu(x)$ является многочленом степени ν, старший член которого x^ν имеет коэффициент 1

$$\mathrm{He}_\nu(x)=x^\nu-\binom{\nu}{2}x^{\nu-2}+1\cdot 3\binom{\nu}{4}x^{\nu-4}-\ldots. \tag{103в}$$

Многочлены Эрмита можно, в силу равенства (89), свести к многочленам Лагерра с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{He}_{2\mu}(x)&=(-2)^\mu\,\mu!\,L_\mu^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right),\\ \mathrm{He}_{2\mu+1}(x)&=(-2)^\mu\,\mu!\,xL_\mu^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right).\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Они связаны с функциями Уиттекера равенствами

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{He}_{2\mu}(x) &= \frac{(-1)^{\mu}(2\mu)!}{2^{\mu-\frac{1}{4}}\mu!}\, x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} M_{\mu+\frac{1}{4},-\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right), \\ \mathrm{He}_{2\mu+1}(x) &= \frac{(-1)^{\mu}(2\mu+1)!}{2^{\mu-\frac{3}{4}}\mu!}\, x^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} M_{\mu+\frac{3}{4},\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

Заменим в равенстве (101) производную y'_{ν} по равенству (101в) через $\nu y_{\nu-1}$; мы получим тогда

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} y_{\nu-1}\right) = -e^{-\frac{x^2}{2}} y_{\nu}. \tag{106}$$

Повторно применяя это равенство, получим при любом целочисленном ν

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y_{\nu} = (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} y_0\right). \tag{106а}$$

Поскольку для многочленов Эрмита $y_0 = \mathrm{He}_0(x) = 1$, то

$$\mathrm{He}_{\nu}(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right). \tag{107}$$

Это равенство можно принять за определение многочленов Эрмита для всех целочисленных значений ν [1]).

Рекуррентная формула для наших многочленов имеет, в силу (101в), вид

$$\mathrm{He}'_{\nu}(x) = \nu \mathrm{He}_{\nu-1}(x). \tag{108а}$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (101а), получаем

$$\mathrm{He}'_{\nu}(x) - x\,\mathrm{He}_{\nu}(x) + \mathrm{He}_{\nu+1}(x) = 0. \tag{108б}$$

Подстановка равенства (108а) в это соотношение дает

$$\nu\,\mathrm{He}_{\nu-1}(x) - x\,\mathrm{He}_{\nu}(x) + \mathrm{He}_{\nu+1}(x) = 0. \tag{108в}$$

---

[1]) Наша нормировка примыкает к Янке—Эмде—Леш, Магнусу—Оберхеттингеру, Уиттекеру—Ватсону и др. В математической литературе (см., например, Курант—Гильберт, Франк—Мизес, Зоммерфельд) часто определяют эти функции так, чтобы вместо равенства (107) выполнялось $\mathrm{He}^*_{\nu}(x) = (-1)^{\nu} e^{x^2} \frac{d^{\nu} e^{-x^2}}{dx^{\nu}}$; тогда имеем $\mathrm{He}^*_{\nu}(x) = 2^{\frac{\nu}{2}} \mathrm{He}_{\nu}(x\sqrt{2})$. Рекуррентная формула (108в) принимает при этом вид

$$\mathrm{He}^*_{\nu+1}(x) - 2x\,\mathrm{He}^*_{\nu}(x) + 2\nu\,\mathrm{He}^*_{\nu-1}(x) = 0.$$

Для вычисления нормы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{He}_\nu^2(x)\,dx$$

заменим один из множителей $\mathrm{He}_\nu(x)$ по равенству (107). Интегрируя по частям и принимая во внимание равенство (108а), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{He}_\nu^2(x)\,dx = (-1)^\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{He}_\nu(x)\,\frac{d^\nu e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^\nu}\,dx =$$

$$= (-1)^{\nu-1}\,\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{He}_{\nu-1}(x)\,\frac{d^{\nu-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{\nu-1}}\,dx.$$

Применив это равенство ν раз, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{He}_\nu^2(x)\,dx = \nu! \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{He}_0(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \nu!\sqrt{2\pi}.$$

Таким образом, имеют место соотношения ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{He}_\nu(x)\,\mathrm{He}_\mu(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu, \\ \nu!\sqrt{2\pi}, & \nu = \mu. \end{cases} \tag{109}$$

Нормированными ортогональными функциями являются, таким образом,

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{He}_\nu(x)}{\sqrt{\nu!\sqrt{2\pi}}}. \tag{109а}$$

Определим при нечетных ν функцию $y_\nu(x)$ формулой (101б), а при четных ν — формулой (101г) (с заменой ν на $\nu+1$). Соответствующие ряды *не обрываются*. Мы получим при этом *функции Эрмита второго рода* $\mathrm{he}_\nu(x)$. Если в соответствии с равенством (101б) положить

$$\mathrm{he}_{2\mu+1}(x) = C_{\mu+\frac{1}{2}}\,{}_1F_1\left(-\mu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

то аналогично равенству (102), получим условие нормировки

$$C_{\mu+\frac{1}{2}} = (-2)^\nu \mu!\, C_{\frac{1}{2}}.$$

Полагая произвольное постоянное $C_{\frac{1}{2}}=-1$, мы получаем из равенств (101б, 101д)

$$\mathrm{he}_{2\mu}(x)=(-2)^{\mu}\mu!\,{}_1F_1\left(-\mu+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right), \tag{110а}$$

$$\mathrm{he}_{2\mu+1}(x)=-(-2)^{\mu}\mu!\,{}_1F_1\left(-\mu-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right). \tag{110б}$$

Пусть $y_\nu(x)$ и $y_\nu^*(x)$ — два линейно независимых решения дифференциального уравнения (101). Тогда их *определитель Вронского* отличен от нуля. Мы имеем

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y_\nu'\right)=-\nu e^{-\frac{x^2}{2}}y_\nu,$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}y_\nu^{*\prime}\right)=-\nu e^{-\frac{x^2}{2}}y_\nu^*.$$

Умножая первое равенство на y_ν^*, второе — на y_ν и вычитая, получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\left(y_\nu^*y_\nu'-y_\nu y_\nu^{*\prime}\right)\right]=0.$$

Интегрируя это равенство, находим

$$y_\nu^*y_\nu'-y_\nu y_\nu^{*\prime}=Ce^{\frac{x^2}{2}}. \tag{111а}$$

В силу равенства (101в), мы можем переписать это соотношение в следующем виде:

$$y_\nu^*y_{\nu-1}-y_\nu y_{\nu-1}^*=\frac{C}{\nu}e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{111б}$$

Положим здесь $y_\nu^*=\mathrm{He}_\nu$ и $y_\nu=\mathrm{he}_\nu$. Для определения значения C положим в последнем равенстве $x=0$. Подставляя значения функций из равенств (103) и (110), мы находим, что независимая от x постоянная $C=\nu!$, а потому

$$\mathrm{He}_\nu(x)\,\mathrm{he}_\nu'(x)-\mathrm{he}_\nu(x)\,\mathrm{He}_\nu'(x)=\nu!\,e^{\frac{x^2}{2}}, \tag{112а}$$

$$\mathrm{He}_\nu(x)\,\mathrm{he}_{\nu-1}(x)-\mathrm{He}_{\nu-1}(x)\,\mathrm{he}_\nu(x)=(\nu-1)!\,e^{\frac{x^2}{2}}. \tag{112б}$$

6.9. Частные случаи вырожденной гипергеометрической функции. Функции Куммера и Уиттекера образуют, вообще говоря, двупараметрическое семейство функций. Мы получим частные случаи, если

придадим одному из двух параметров фиксированное значение или зададим какое-нибудь соотношение между двумя параметрами так, чтобы получилось однопараметрическое семейство функций. Мы имели такой случай для функций Эрмита и многочленов Эрмита. С ними связаны функции параболического цилиндра.

6.9.1. Функции параболического цилиндра. Будем исходить из волнового уравнения параболического цилиндра (3.111) и введем в качестве новых переменных x' или z с помощью равенства $i\gamma v = x' = \frac{z^2}{2}$. Параметр $P/(4i\gamma)$ обозначим через k. Мы имеем тогда дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(2k - \frac{z^2}{4}\right)u = 0. \tag{113}$$

Если считать независимым переменным x', то получим уравнение

$$x'\frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{1}{2}\frac{du}{dx'} + \left(k - \frac{x'}{4}\right)u = 0, \tag{114}$$

имеющее вид уравнения Лапласа (1) с коэффициентами $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 0$, $a_0 = k$, $b_0 = -\frac{1}{4}$. По равенствам (12) и (11) решением этого уравнения является

$$u = e^{-\frac{x'}{2}} w_{k, -\frac{1}{4}}(x') = e^{-\frac{z^2}{4}} w_{k, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Для того чтобы это решение обращалось в нуль на бесконечности, надо по равенству (41) в качестве $w_{k, -\frac{1}{4}}$ выбрать функцию w_0. Нормируем решение согласно Уиттекеру и выразим по равенству (63) решение дифференциального уравнения (113) через функции Уиттекера. Полагая $2k = n + \frac{1}{2}$, перепишем уравнение (113) в виде

$$\frac{d^2D_n}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)D_n = 0. \tag{115}$$

Отсюда следует

$$D_n(z) = -\frac{2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}n}}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{z^2}{4}} w_0\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) = 2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right). \tag{115a}$$

6.9.1.1. Разложения и асимптотические представления. Потребуем, чтобы $D_n(z)$ было *однозначной функцией* точки. Обходу вокруг начала координат на плоскости z соответствует увеличение аргумента независимой переменной функции W на 4π. В силу соотношений обхода (68) и (67а), имеем

$$W_{k,m}(e^{4i\pi}z)=e^{-4i\pi m}W_{k,m}(z)+\frac{4i\pi\cos(2m+1)\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\Gamma(1+2m)}M_{k,m}(z).$$

Отсюда следует, что $W_{k,-\frac{1}{4}}(e^{4i\pi}z)=-W_{k,-\frac{1}{4}}(z)$ и, в силу наличия множителя $z^{-\frac{1}{2}}$,

$$D_n(e^{2i\pi}z)=D_n(z). \tag{116}$$

Поведение в окрестности точки $z=0$ видно из равенств (63а) и (61):

$$D_n(z)=e^{-\frac{z^2}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\pi}\times$$
$$\times\left\{-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{}_1F_1\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right)+\frac{z}{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)}{}_1F_1\left(\frac{1-n}{2};\frac{3}{2};\frac{z^2}{2}\right)\right\}. \tag{117}$$

Таким образом, $D_n(z)$ является целой трансцендентной функцией. При больших значениях z из равенства (66) вытекает асимптотическое представление:

$$D_n(z)\sim e^{-\frac{z^2}{4}}z^n\left(1-\frac{n(n-1)}{2z^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!\,4z^4}-\right.$$
$$\left.-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3!\,8z^6}+\ldots\right)$$
$$\left(|\arg z|<\frac{3\pi}{4},\ |z|>\sqrt{2}\right). \tag{118}$$

Поскольку исходная формула применима при $\arg z>-\frac{3\pi}{2}$, то полученное разложение справедливо лишь при $|\arg z|<3\pi/4$.

Второе представление мы получим, согласно Уиттекеру, рассматривая другие решения дифференциального уравнения (115). Заменим в нем z на $\pm iz$ и одновременно n на $-(n+1)$, тогда уравнение останется неизменным; таким образом, вместе с $D_n(z)$ решениями нашего уравнения являются $D_{-n-1}(iz)$, $D_{-n-1}(-iz)$ и, далее, $D_n(-z)$. Поскольку это уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка, оно может иметь лишь два линейно независимых

решения. Поэтому между функциями $D_n(z)$, $D_{-n-1}(iz)$ и $D_{-n-1}(-iz)$ должна иметь место линейная зависимость. Положим $D_n(z) = aD_{-n-1}(iz) + bD_{-n-1}(-iz)$. Применим разложение (117) и сравним коэффициенты при членах z^0 и z^1. Принимая во внимание равенство (140) и формулу удвоения для Г-функции, получаем, что

$$D_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}n}D_{-n-1}(iz) + e^{-i\frac{\pi}{2}n}D_{-n-1}(-iz)\right). \quad (119)$$

Заменим в этом равенстве z на $\pm iz$ и одновременно заменим n на $-(n+1)$. Мы получим тогда, что

$$D_n(z) = e^{-i\pi n}D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{-i\frac{\pi}{2}(n+1)}D_{-n-1}(iz)$$

и

$$D_n(z) = e^{i\pi n}D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)}D_{-n-1}(-iz).$$

Применим к правым частям равенство (118). Мы получим асимптотические представления

$$D_n(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}}z^n\left(1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!4z^4} - \ldots\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{-i\pi n}e^{\frac{z^2}{4}}z^{-n-1}\left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2!4z^4} + \ldots\right)$$

$$\left(-\frac{5\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4},\ |z| > \sqrt{2}\right) \quad (120а)$$

и

$$D_n(z) \sim e^{-\frac{z^2}{4}}z^n\left(1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!4z^4} - \ldots\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)}e^{i\pi n}e^{\frac{z^2}{2}}z^{-n-1}\left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2!4z^4} + \ldots\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},\ |z| > \sqrt{2}\right). \quad (120б)$$

Поскольку в равенстве (120а) мы под $-z$ понимаем $e^{i\pi}z$, то представление для $D_n(-z)$ имеет место в области $-\frac{7\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$, в то время как представление для $D_{-n-1}(iz)$, где $iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$, спра-

ведливо в области $-\frac{5\pi}{4} < \arg z < +\frac{\pi}{4}$. Следовательно, равенство (120а) имеет место в области $-\frac{5\pi}{4} < \arg z < -\frac{\pi}{4}$. Аналогично, если $-z = e^{-i\pi}$ и $-iz = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$, то область применимости равенства (120б) имеет вид $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$. Равенства (118), (120а, 120б) дают асимптотические представления для всех значений z, таких, что $|z| > \sqrt{2}$. Там, где области применимости разложений перекрываются, полученные представления *не* совпадают друг с другом. Однако члены, на которые они отличаются, меньше, чем остаточный член, возникающий от того, что мы берем конечное число членов ряда.

6.9.1.2. Интегральное представление и связь с многочленами Эрмита. Из равенства (115а) вытекает, что функция $D_n(z)$ отличается лишь нормирующим множителем от функции $e^{-\frac{z^2}{4}} w_0\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$. Мы будем обозначать функцию $w_0\left(\frac{z^2}{2}\right)$, рассматриваемую как функцию от z, через $U(z)$. Тогда мы получаем

$$U_n(z) \equiv w_0\left(-\frac{n}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) = Ce^{\frac{z^2}{4}} D_n(z) = C' z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right). \quad (121)$$

Сравнивая это выражение с равенством (105), мы видим, что с точностью до нормирующего множителя функция $\mathrm{He}_n(z)$ отличается от $U_n(z)$ лишь тем, что вместо функции M взята функция W. Поэтому функция $U_n(z)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $\mathrm{He}_n(z)$, т. е. для нее имеют место равенства (101) и (101а). Легко показать, что при подстановке $D_n(z) = C^* e^{-\frac{z^2}{4}} U_n(z)$ уравнение (115) принимает вид

$$U_n'' - zU_n' + nU_n = 0. \quad (122)$$

Отсюда, как и в случае уравнения (101), имеем

$$U_n' = c_n U_{n-1}. \quad (122а)$$

Если n — целое положительное число, то U_n находится с точностью до нормирующего множителя c_n так же, как и для функций Эрмита. Обобщение на случай любого n, аналитические

продолжения решений (106а) и (107) получаются с помощью применения преобразования Лапласа.

Подстановка

$$U(z)=\int_L e^{zt}Y(t)\,dt$$

переводит дифференциальное уравнение в

$$\int_L e^{zt}(t^2-zt+n)\,Y\,dt=0$$

или после преобразования в уравнение

$$-\int_L \frac{d}{dt}(tYe^{zt})\,dt+\int_L e^{zt}(tY'+(1+n+t^2)\,Y)\,dt=0.$$

Это равенство выполняется, если либо путь интегрирования замкнут, либо функция tYe^{zt} обращается в нуль на концах пути интегрирования и, кроме того, $tY'+(1+n+t^2)\,Y=0$. Поскольку из наших условий вытекает, что

$$\frac{dY}{Y}=\left(-\frac{1+n}{t}-t\right)dt \quad \text{и} \quad Y=e^{-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1},$$

то

$$U=\int_L e^{zt-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1}\,dt.$$

Допустимый путь интегрирования идет от точки $t=-\infty$ до точки $t=0$ в обобщенном смысле, указанном в пункте 1.2. Мы имеем, таким образом,

$$U_n(z)=\int_{-\infty}^{(0)} e^{zt-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1}\,dt. \tag{123}$$

При этой нормировке равенство (122а), очевидно, переходит в

$$U_n'(z)=U_{n-1}(z). \tag{123а}$$

Поскольку $U(z)$ является решением уравнения Лапласа, то оно должно линейно выражаться через два фундаментальных решения этого уравнения. Таким образом, оно должно иметь вид

$$U_n(z)=Aw_0\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right)+Bv\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right).$$

Для нахождения коэффициентов A и B сравним снова коэффициенты первых двух членов разложений в окрестности точки $z=0$. Они

получаются проще всего, если мы вычислим $U(0)$ и $U'(0)$. Мы имеем

$$U_n(0)=\int_{-\infty}^{(0)} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-n-1}\,dt.$$

Значение аргумента однозначно определяется требованием, чтобы вдоль пути интегрирования t имело аргумент $-\pi$ и, следовательно, $e^{i\pi}t$ имело аргумент 0. Мы полагаем поэтому $(e^{i\pi}t)^2=2s$ и получаем

$$U_n(0)=e^{i\pi n}2^{-\frac{n}{2}-1}\int_{\wp}^{(0)} e^{-s}s^{-\frac{n}{2}-1}\,ds=e^{i\pi(n+1)}2^{-\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right).$$

По равенству (123а)

$$U_n'(0)=e^{i\pi n}2^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right).$$

Подставим вместо w_0 и v разложения, даваемые равенствами (36а) и (34). Мы получаем тогда

$$U_n(0)=e^{i\pi(n+1)}2^{-\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)=$$

$$=-Ae^{i\frac{\pi}{2}n}\frac{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}+B\frac{\Gamma\left(-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

и

$$U_n'(0)=e^{i\pi n}2^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)=-Ae^{i\frac{\pi}{2}n}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда следует, что

$$A=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}2^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$B=0.$$

Таким образом,

$$U_n(z)=\int_{-\infty}^{(0)} e^{zt-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1}\,dt=-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}w_0\left(-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right).\quad(124)$$

Сравнивая этот результат с равенством (115а), получаем

$$D_n(z)=\frac{e^{-i\pi n}}{\Gamma(-n)}\,e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{(0)}^{-\infty}e^{zt-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1}\,dt. \tag{125}$$

Принимая во внимание равенства (1.12) и (1.40), мы можем переписать это выражение в виде

$$D_n(z)=\frac{\Gamma(n+1)}{2i\pi}\,e^{-\frac{z^2}{4}}\oint_{-\infty}^{(0+)}e^{zt-\frac{t^2}{2}}t^{-n-1}\,dt. \tag{125а}$$

Если $n=\nu$ — положительное целое число, то путь интегрирования в равенстве (125а) замкнут на римановой поверхности и может быть стянут в путь, обходящий точку $t=0$ в ее окрестности. Полагая $t=z-s$, можно переписать это равенство в виде

$$D_\nu(z)=\frac{\nu!}{2i\pi}(-1)^\nu e^{\frac{z^2}{4}}\int^{(0+)}\frac{e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds}{(s-z)^{\nu+1}}$$

$$(\nu\geqslant 0 \text{ — целое}). \tag{126}$$

Из теоремы Коши вытекает, что

$$D_\nu(z)=(-1)^\nu e^{\frac{z^2}{4}}\frac{d^\nu e^{-\frac{z^2}{2}}}{dz^\nu}. \tag{127}$$

Мы видим, таким образом, из равенств (107) и (109а), что при положительных целых значениях параметра функции параболического цилиндра отличаются лишь нормирующим множителем от ортогонализированных многочленов Эрмита

$$D_\nu(z)=e^{-\frac{z^2}{4}}\,\mathrm{He}_\nu(z)=\sqrt{\nu!\sqrt{2\pi}}\,\varphi_\nu(z). \tag{128}$$

Второе интегральное представление получится, если в правую часть равенства (119) подставить интегралы (125). Мы получим

$$D_n(z)=\frac{e^{i\pi(n+1)}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4}}\left[e^{i\frac{\pi}{2}n}\int_{(0)}^{-\infty}e^{izt'-\frac{t'^2}{2}}t'^n dt'+e^{-i\frac{\pi}{2}n}\int_{(0)}^{-\infty}e^{-izt'-\frac{t'^2}{2}}t'^n dt'\right].$$

Полагая в первом интеграле $e^{i\pi}t'=t$, имеем

$$D_n(z)=\frac{e^{i\pi(n+1)}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4}}e^{-i\frac{\pi}{2}n}\left(-\int_{(0)}^{\infty}e^{-izt-\frac{t^2}{2}}t^n dt-\int_{-\infty}^{(0)}e^{-izt-\frac{t^2}{2}}t^n dt\right),$$

и потому

$$D_n(z)=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}n}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt-\frac{t^2}{2}}t^n\,dt \qquad (-\pi\leqslant\arg t\leqslant 0). \quad (129)$$

Если $\operatorname{Re} n\leqslant 1$, то путь интегрирования должен обходить начало координат в нижней полуплоскости. Если $n=\nu$ — положительное целое число, то из равенства (129) получаем следующее интегральное представление многочленов Эрмита:

$$\mathrm{He}_\nu(z)=\frac{i^\nu}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{z^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-izt-\frac{t^2}{2}}t^\nu\,dt. \quad (130)$$

Подстановка $t+iz=s$ переводит это равенство в

$$\mathrm{He}_\nu(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}(z+is)^\nu\,ds. \quad (131)$$

6.9.1.3. Рекуррентные формулы. Поскольку по равенствам (123а) $U'_{n+1}(z)=U_n(z)$ и $U''_{n+1}(z)=U_{n-1}(z)$, то из дифференциального уравнения (112) для U_{n+1} вытекает рекуррентная формула

$$U_{n-1}(z)-zU_n(z)+(n+1)U_{n+1}(z)=0.$$

Отсюда, в силу равенства (125), имеем

$$nD_{n-1}(z)-zD_n(z)+D_{n+1}(z)=0. \quad (132)$$

Поскольку дифференциальное уравнение (122) можно записать также в виде

$$\left(U'_n-\frac{z}{2}U_n\right)-\frac{z}{2}U_n+(n+1)U_{n+1}=0,$$

то из равенства (125) вытекает, что

$$D'_n(z)-\frac{z}{2}D_n(z)+D_{n+1}(z)=0. \quad (133а)$$

Комбинируя это равенство с равенством (132), находим

$$D'_n(z)+\frac{z}{2}D_n(z)-nD_{n-1}(z)=0. \quad (133б)$$

6.9.1.4. Ортогональность. Поскольку соотношение ортогональности (109) имеет место, если функции обращаются в нуль на бесконечности и регулярны в конечной части плоскости, а эти усло-

вия выполняются для функций $D_n(z)$, то при $n_1 \neq n_2$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{n_1}(x)\, D_{n_2}(x)\, dx = 0 \qquad (n_1 \neq n_2). \tag{134}$$

Функции параболического цилиндра связаны с целым рядом других функций; мы рассмотрим ниже эти связи.

6.9.2. Неполная Г-функция и интеграл вероятности. Интегралы Френеля. Простым частным случаем функции Уиттекера

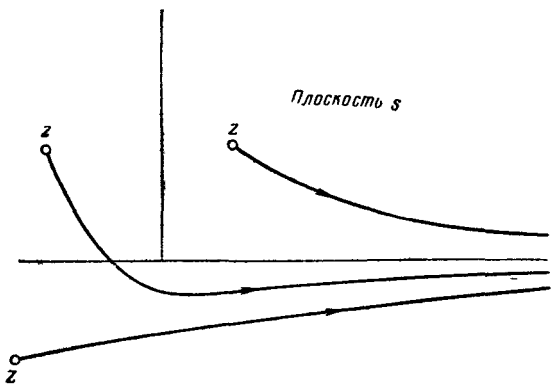


Рис. 38. Пути интегрирования для неполной Г-функции.

является неполная Г-функция. Она была определена Нильсеном равенствами,

$$Q(z,\ p) \equiv \int_z^{\infty} s^{p-1} e^{-s}\, ds \quad \text{и} \quad P(z,\ p) \equiv \int_0^z s^{p-1} e^{-s}\, ds. \tag{135}$$

Если z является отрицательным или комплексным числом, то надо разрезать плоскость s вдоль положительной мнимой полуоси (см. рис. 38). Подстановка $s = z + t$ переводит интеграл Q в

$$Q(z,\ p) = e^{-z} z^{p-1} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{p-1} dt.$$

Из равенства (65) вытекает, что

$$Q(z,\ p) \equiv z^{\frac{p-1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} W_{\frac{p-1}{2},\ \frac{p}{2}}(z). \tag{136}$$

Поскольку $P(z, p)+Q(z, p)=\Gamma(p)$, то

$$\Gamma(p, z)\equiv P(z, p)=\Gamma(p)-z^{\frac{p-1}{2}}e^{-\frac{z}{2}}W_{\frac{p-1}{2}, \frac{p}{2}}(z). \qquad (137)$$

Неполная Г-функция была протабулирована Пирсоном [1]) (семизначные таблицы, 164 стр.). Обозначение $\Gamma(p, z)$ и $P(z, p)$ используют Янке — Эмде — Леш.

Обобщенный интеграл вероятностей определяется по Янке — Эмде — Лешу равенством

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)E_n(x)\equiv\int_0^x e^{-t^n}dt. \qquad (138)$$

Подстановка $t^n=v$ переводит его в

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)E_n(x)=\frac{1}{n}\int_0^x e^{-v}v^{\frac{1}{n}-1}dv=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n},\ x^n\right).$$

Таким образом,

$$E_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n},\ x^n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}. \qquad (139)$$

Из равенства (137) следует

$$E_n(x)=1-\frac{Q\left(x^n,\ \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}=1-\frac{x^{\frac{1-n}{2}}e^{-\frac{x^n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}W_{\frac{1-n}{2n}, \frac{1}{2n}}(x^n). \qquad (140)$$

Другое представление для интеграла (138) получается с помощью подстановки $t^n=x^n s$. Мы получаем

$$\int_0^x e^{-t^n}dt=\frac{x}{n}\int_0^1 e^{-x^n s}s^{\frac{1}{n}-1}ds=\frac{x\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{}_1F_1\left(\frac{1}{n};\ 1+\frac{1}{n};\ -x^n\right)$$

и

$$E_n(x)=\frac{x}{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{}_1F_1\left(\frac{1}{n};\ 1+\frac{1}{n};\ -x^n\right). \qquad (141)$$

---

[1]) См. Pearson K., Tables of the incomplete Γ-Function, London, 1922.

Обычный интеграл вероятностей [1]) получается отсюда при $n=2$:

$$E_2(x)=\Phi(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt. \tag{142}$$

Из равенства (140) следует

$$\Phi(x)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{x}}W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2), \tag{143}$$

и из равенства (141)

$$\Phi(x)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -x^2\right). \tag{144}$$

Асимптотическое разложение (66) дает

$$\Phi(x)\sim 1-\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 3}{(2x^2)^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x^2)^3}+\ldots\right). \tag{145}$$

Из равенства же (144) следует имеющее место при малых значениях x разложение

$$\Phi(x)=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{1!3}+\frac{x^4}{2!5}-\frac{x^6}{3!7}+\ldots\right). \tag{146}$$

Из равенства (142) получаются формулы для производных интеграла вероятностей

$$\Phi'(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},\qquad \Phi^{(\nu+1)}(x)=\Phi'(x)e^{x^2}\frac{d^\nu e^{-x^2}}{dx^\nu}. \tag{147}$$

Принимая во внимание равенство (107), можно выразить эти соотношения через многочлены Эрмита

$$\Phi^{(\nu+1)}(x)=(-1)^\nu\Phi'(x)\mathrm{He}_\nu(x)=(-1)^\nu\Phi'(x)2^{\frac{\nu}{2}}\mathrm{He}_\nu\left(x\sqrt{2}\right). \tag{148}$$

Принимая во внимание равенство (64), легко установить равенство

$$1-\Phi(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}D_{-1}\left(z\sqrt{2}\right). \tag{149}$$

---

[1]) Интеграл вероятностей определяется различными авторами разными способами. Уиттекер и Ватсон называют так интеграл $\mathrm{erfc}(x)\equiv\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$. Они полагают $\mathrm{erf}(x)\equiv\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. В обоих случаях отсутствует наш множитель $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

В оптике важную роль играют *интегралы Френеля*. Они определяются формулой

$$F(x)\equiv\int_0^x e^{i\pi\frac{s^2}{2}}ds. \tag{150}$$

Сравнение с формулой (142) дает

$$F(x)=\frac{1+i}{2}\,\Phi\left(x\sqrt{-i\tfrac{\pi}{2}}\right). \tag{150а}$$

Поскольку разложения функций Уиттекера и Куммера имеют место не только при вещественных значениях независимого переменного, то из равенств (145) и (146) непосредственно следуют представления для $F(x)$, применимые при малых и больших значениях x. В частности, имеем $F(\infty)=\frac{1+i}{2}$.

Отделяя при вещественных значениях x вещественную и мнимую части $F(x)$, получаем

$$F(x)=C(x)+iS(x), \tag{151}$$

где

$$C(x)=\int_0^x\cos\frac{s^2\pi}{2}ds \quad\text{и}\quad S(x)=\int_0^x\sin\frac{s^2\pi}{2}ds. \tag{151а}$$

Из равенства (145) получаем пригодные для больших значений x асимптотические разложения

$$C(x)=\frac{1}{2}-\frac{\sin\frac{x^2\pi}{2}}{\pi x}\left(1-\frac{1\cdot3}{(\pi x^2)^2}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(\pi x^2)^4}-\ldots\right)-$$
$$-\frac{\cos\frac{x^2\pi}{2}}{\pi x}\left(\frac{1}{\pi x^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(\pi x^2)^3}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{(\pi x^2)^5}-\ldots\right) \tag{152а}$$

и

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{x^2\pi}{2}}{\pi x}\left(1-\frac{1\cdot3}{(\pi x^2)^2}+\ldots\right)+$$
$$+\frac{\sin\frac{x^2\pi}{2}}{\pi x}\left(\frac{1}{\pi x^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(\pi x^2)^3}+\ldots\right). \tag{152б}$$

Аналогичным образом из равенства (146) получаются разложения, пригодные для малых значений x.

Если при вещественных значениях x изобразить значение $F(x)$ на комплексной плоскости $C+iS$, то получаем кривую с параметром x, которая называется *спиралью Корню*. Поскольку диф-

ференциал длины дуги этой кривой равен $dF=\sqrt{dC^2+dS^2}=dx$, то соответствие между F и x можно рассматривать как наматывание вещественной оси x на нашу кривую. Угол φ между касательной к кривой и осью C вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dC}{dx}}=\operatorname{tg}\frac{x^2\pi}{2},$$

где $\varphi=\frac{x^2\pi}{2}$. Из монотонности связи между φ и x следует, что кривая имеет форму спирали. Из соотношения $\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{\rho}$ (s — длина дуги, ρ — радиус кривизны) вытекает, что радиус кривизны этой спирали $\rho=\frac{1}{\pi x}$. Точки $x=\pm\infty$, $F=\pm\frac{1+i}{2}$ являются асимптотическими точками.

Интегралы Френеля были рассмотрены подробно Ломмелем [1]). Изложение этих результатов дано Ватсоном в его книге о функциях Бесселя.

6.9.3. Интегральная показательная функция. Интегральный синус. Интегральный косинус. Интегральный логарифм.

Функция

$$\operatorname{Ei}(z)\equiv\int_{-\infty}^{z}\frac{e^t\,dt}{t}\left(-\frac{3\pi}{2}<\arg<\frac{\pi}{2}\right) \tag{153}$$

называется *интегральной показательной функцией*. В силу равенства (17), она совпадает с функцией

$$w_1(0;\ 1;\ z)=\operatorname{Ei}(z). \tag{153а}$$

Поэтому мы проведем разрез на плоскости z вдоль положительной мнимой полуоси [2]). В начале координат функция имеет логарифмическую особенность. Из равенства (33а) вытекает

$$w_1(0;\ 1;\ e^{-2i\pi}z)=w_1(0;\ 1;\ z)+\oint^{(0-)}\frac{e^{zs}\,ds}{s}=w_1(0;\ 1;\ z)-2i\pi.$$

Поэтому имеет место *соотношение обхода*

$$\operatorname{Ei}(e^{+2i\pi}z)=\operatorname{Ei}(z)+2i\pi. \tag{154}$$

---

[1]) Lommel E. C. J. v., *Abh. d. math.-phys. Classe der k. b. Akad. d. Wiss.* (*München*), 15 (1886), 229—328, 529—664.

[2]) Янке—Эмде—Леш проводят разрез по положительной полуоси и вводят на ней функцию $\operatorname{Ei}(x)$, равную среднему значению на берегах разреза. Она совпадает на положительной полуоси с нашей функцией $\operatorname{Ei}(z)$.

Для половины обхода имеем

$$\mathrm{Ei}(z) - \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) = \int\limits_{e^{-i\pi}z}^{z} \frac{e^t\,dt}{t}.$$

Заменяя здесь переменную интегрирования: $-t = e^{i\pi}t$, получим

$$\int\limits_{e^{-i\pi}z}^{z} \frac{e^t\,dt}{t} = \int\limits_{z}^{e^{i\pi}z} \frac{e^{-t}\,dt}{t}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{z}^{e^{-i\pi}z} \frac{e^{-t}\,dt}{t} = \int\limits_{z}^{e^{i\pi}z} \frac{e^{-t}\,dt}{t} + \oint^{(0+)} \frac{e^{-t}\,dt}{t} = -\int\limits_{e^{-i\pi}z}^{z} \frac{e^{-t}\,dt}{t} + 2i\pi,$$

то отсюда следует, что

$$\mathrm{Ei}(z) - \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_{e^{-i\pi}z}^{z} \frac{e^t\,dt}{t} + \int\limits_{z}^{e^{i\pi}z} \frac{e^{-t}\,dt}{t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{e^{-i\pi}z}^{z} \frac{e^t - e^{-t}}{t}\,dt + i\pi$$

или

$$\mathrm{Ei}(z) - \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) = \int\limits_{-z}^{z} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt + i\pi.$$

Точно так же доказывается, что

$$\mathrm{Ei}(z) - \mathrm{Ei}(e^{i\pi}z) = \int\limits_{-z}^{z} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt - i\pi.$$

Подинтегральная функция $\mathrm{sh}\,t/t$ не имеет особых точек в конечной части плоскости. Поэтому путь интегрирования может быть произвольным и можно не различать $e^{+i\pi z}$ и $e^{-i\pi z}$. Далее, поскольку подинтегральная функция является четной, то в качестве пределов интегрирования можно выбрать 0 и z. Определим функции $\mathfrak{Si}\,z$ формулой

$$\mathfrak{Si}\,z \equiv \int\limits_{0}^{z} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-z}^{z} \frac{\mathrm{sh}\,t}{t}\,dt. \qquad (155)$$

Тогда

$$2\mathfrak{Si}\,z = \mathrm{Ei}(z) - \mathrm{Ei}(e^{\pm i\pi}z) \pm i\pi. \qquad (156)$$

Заменим переменную интегрирования на is. Из равенства (155), определяющего функцию $\mathfrak{Si}\, z$, имеем

$$\mathfrak{Si}\, iz = i\int_0^z \frac{\sin s}{s}\,ds = i\,\mathrm{Si}(z), \tag{157}$$

где через

$$\mathrm{Si}(z) \equiv \int_0^z \frac{\sin s}{s}\,ds \tag{158}$$

обозначена функция, называемая *интегральным синусом*.

Аналогично равенству (156), определим, далее,

$$2\mathfrak{Ci}\, z \equiv \mathrm{Ei}(z) + \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) - i\pi. \tag{159}$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (154), имеем

$$\mathfrak{Ci}\, e^{2i\pi}z = \mathfrak{Ci}\, z + 2i\pi. \tag{160}$$

В силу определяющего равенства

$$2\mathfrak{Ci}\, e^{i\pi}z = \mathrm{Ei}(e^{i\pi}z) + \mathrm{Ei}(z) - i\pi$$

и принимая во внимание соотношение (154)

$$2\mathfrak{Ci}\, e^{i\pi}z = \mathrm{Ei}(z) + \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) + 2i\pi - i\pi = 2\mathfrak{Ci}\, z + 2i\pi.$$

Отсюда следует

$$\mathfrak{Ci}\, e^{i\pi}z = \mathfrak{Ci}\, z + i\pi. \tag{161}$$

Складывая равенства (156) и (159), получаем

$$\mathfrak{Ci}\, z + \mathfrak{Si}\, z = \mathrm{Ei}(z) - i\pi, \tag{162а}$$

а вычитая эти равенства —

$$\mathfrak{Ci}\, z - \mathfrak{Si}\, z = \mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z). \tag{162б}$$

Но

$$\mathrm{Ei}(e^{-i\pi}z) + \mathfrak{Si}\, z = \int_{-\infty}^{e^{-i\pi}z} \frac{e^t\,dt}{t} + \int_0^z \frac{e^t - e^{-t}}{2t}\,dt.$$

Заменим в первом интеграле t на $-t$. Мы получим

$$\mathfrak{Ci}\, z = -\int_z^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} + \int_0^z \frac{e^t - e^{-t}}{2t}\,dt = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} + \int_0^z \frac{e^t + e^{-t}}{2t}\,dt.$$

В силу равенства (161), достаточно рассмотреть случай, когда $-\pi/2 \leqslant \arg z < \pi/2$. Поскольку в этих интегралах подинтегральная функция имеет особенность при $t = 0$, мы прибавим и вычтем dt/t.

При этом получим

$$\mathfrak{Ci}\, z = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} + \int_0^z \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\,dt + \int_0^z \frac{dt}{t}.$$

Обозначим через

$$C = \int_0^1 \frac{dt}{t} - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = 0{,}577215665\ldots$$

постоянную Эйлера — Маскерони (см. стр. 33); тогда

$$\mathfrak{Ci}\, z = C + \ln z + \int_0^z \frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}\,dt. \tag{163}$$

Заменим и здесь переменную интегрирования t на is. Мы получим, что

$$\mathfrak{Ci}\, iz = C + \ln z + \int_0^z \frac{\cos s - 1}{s}\,ds + \frac{i\pi}{2}, \tag{163a}$$

или, вводя функцию

$$\operatorname{Ci} z \equiv C + \ln z - \int_0^z \frac{1 - \cos s}{s}\,ds, \tag{164}$$

что

$$\operatorname{Ci} z = \mathfrak{Ci}\, iz - \frac{i\pi}{2}. \tag{165}$$

Многозначность функций $\mathfrak{Ci}\, z$ и $\operatorname{Ci} z$ учтена в равенствах (163) и (164) с помощью стоящего справа выражения $\ln z$; поэтому в этих равенствах не накладывается никаких ограничений на $\arg z$ и введение разреза не является больше необходимым (если, разумеется, выполнено естественное условие, что значение $\arg z$ в обоих частях равенства выбрано одинаковым образом). При этих условиях равенство (165) выполняется без каких-либо ограничений.

Определенный равенством (164) *интегральный косинус* можно представить еще следующей простой формулой. Мы имеем

$$C + \ln z - \int_0^z \frac{1 - \cos s}{s}\,ds = -\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \int_0^z \frac{\cos s}{s}\,ds.$$

Интеграл $\int \frac{e^{-t}\,dt}{t}$ по полуокружности $|t| = R$, $\operatorname{Re} t \geqslant 0$, стремится к нулю, если $R \to \infty$. Поэтому

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}\,dt}{t} = \int_0^{\pm i\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{t} = \int_0^\infty \frac{e^{\pm is}\,ds}{s} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{is} + e^{-is}}{2s}\,ds = \int_0^\infty \frac{\cos s\,ds}{s}$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Ci}(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos s}{s}\,ds. \tag{166}$$

По аналогии с этим положим

$$\mathrm{si}\,z \equiv -\int_z^\infty \frac{\sin s}{s}\,ds = \mathrm{Si}(z) - \mathrm{Si}(\infty). \tag{167}$$

Точка $s=0$ является особой точкой подинтегральной функции в формуле 166. Так как $\lim\limits_{s\to 0} \arg s = 0$, то в обеих частях равенства (166) значения $\arg z$ должны быть выбраны одинаковым образом. Проще всего провести разрез по отрицательной вещественной полуоси.

Наконец, рассмотрим *интегральный логарифм*. Эта функция определяется равенством

$$\mathrm{li}\,z \equiv \int_0^z \frac{ds}{\ln s}. \tag{168}$$

Подстановка $t=\ln s$, $s=e^t$, переводит этот интеграл в интеграл вида (153) с верхним пределом интегрирования $t=\ln z$. Отсюда следует

$$\mathrm{li}\,z = \mathrm{Ei}(\ln z). \tag{168а}$$

Таким образом, все свойства интегрального логарифма могут быть выведены из свойств интегральной показательной функций.

6.9.3.0. Соотношения обхода, разложения и асимптотические представления. Из определяющих равенств непосредственно вытекают соотношения обхода

$$\begin{gathered}\mathrm{Ei}(e^{\pm i\pi}z) = \mathrm{Ei}(z) - 2\,\mathfrak{S}iz \pm i\pi,\\ \mathfrak{S}i(e^{\pm i\pi}z) = -\mathfrak{S}i(z), \qquad \mathrm{Si}(e^{\pm i\pi}z) = -\mathrm{Si}(z),\\ \mathfrak{C}i(e^{\pm i\pi}z) = \mathfrak{C}i(z) \pm i\pi, \qquad \mathrm{Ci}(e^{\pm i\pi}z) = \mathrm{Ci}(z) \pm i\pi.\end{gathered} \tag{169}$$

При $|z|<1$ получаем почленным интегрированием из равенства (155)

$$\mathfrak{S}i(z) = z + \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \frac{z^5}{5\cdot 5!} + \ldots, \tag{170а}$$

$$\mathrm{Si}\,z = z - \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \frac{z^5}{5\cdot 5!} - \ldots \quad (|z|<1). \tag{170б}$$

Из равенства (163) имеем

$$\mathfrak{Ci}\, z = C + \ln z + \frac{z^2}{2\cdot 2!} + \frac{z^4}{4\cdot 4!} + \ldots, \tag{171а}$$

$$\mathrm{Ci}\, z = C + \ln z - \frac{z^2}{2\cdot 2!} - \frac{z^4}{4\cdot 4!} - \ldots \quad (|z|<1). \tag{171б}$$

Далее, из равенства (162а) следует

$$\mathrm{Ei}\,(z) = -i\pi + \ln z + z + \frac{z^2}{2\cdot 2!} + \frac{z^3}{3\cdot 3!} + \ldots \quad (|z|<1). \tag{172}$$

Равенство (43) показывает, что для больших значений $|z|$

$$\mathrm{Ei}\,(z) \sim \frac{e^z}{z}\left(1 + \frac{1!}{z} + \frac{2!}{z^2} + \ldots\right) \quad \left(|z|>1,\ -\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}\right). \tag{173}$$

Из равенства (156) вытекает, что при $0 \leqslant \arg z < \pi$ имеет место равенство

$$\mathrm{Si}\, z = \frac{1}{i}\,\mathfrak{Si}\, iz = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ei}\,(iz) - \mathrm{Ei}\,(-iz)\right) \sim$$

$$\sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \ldots\right) - \frac{\sin z}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \ldots\right) \tag{174}$$

$$(|z|>1, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi).$$

Поэтому

$$\mathrm{Si}\,(\infty) = \frac{\pi}{2}, \tag{174а}$$

и

$$\mathrm{si}\, z = \mathrm{Si}\, z - \mathrm{Si}\,\infty \sim -\frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2} - \ldots$$

$$(|z|>1, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi). \tag{174б}$$

Если же $-\pi \leqslant \arg z < 0$, то имеет место разложение

$$\mathrm{Si}\, z \sim -\frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \ldots\right) - \frac{\sin z}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \ldots\right)$$

$$(|z|>1, \quad -\pi \leqslant \arg z < 0).$$

Аналогично из равенства (159) при $0 \leqslant \arg < \pi$ имеем

$$\mathrm{Ci}\, z = \mathfrak{Ci}\, iz - \frac{i\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ei}\,(ie^{-2i\pi} z) + \mathrm{Ei}\,(-iz)\right) \sim$$

$$\sim \frac{\sin z}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \ldots\right) - \frac{\cos z}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \ldots\right)$$

$$(|z|>1, \ 0 \leqslant \arg z < \pi). \tag{175}$$

Если z лежит в нижней полуплоскости, то мы получаем либо непосредственно, либо используя соотношение обхода (169), что

$$\operatorname{Ci} z \sim -i\pi + \frac{\sin z}{z}\left(1 - \frac{2!}{z^2} + \frac{4!}{z^4} - \dots\right) - \\ - \frac{\cos z}{z^2}\left(1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \dots\right)$$

$$(|z| > 1,\ \pi \leqslant \arg z < 0). \qquad (175a)$$

6.10. Гипергеометрические функции и преобразование Лапласа. Между вырожденными гипергеометрическими функциями и функциями Гаусса имеют место замечательные соотношения, которые проще всего установить с помощью преобразования Лапласа. Мы вычислим сначала интеграл, впервые изученный Эрдейи.

6.10.1. Интеграл Эрдейи. Этот интеграл имеет вид

$$J \equiv \int_{(0)}^{\infty} e^{-pz} z^q M_{k,\,m}(rz)\,dz.$$

Часть пути интегрирования, уходящая в бесконечность, должна быть расположена так, чтобы этот интеграл существовал. Подставляя значение для $M_{k,\,m}(rz)$ по равенству (61), получаем

$$J = \frac{r^{m+\frac{1}{2}}}{B\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+k+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \int_{(0)}^{\infty} e^{-\left(p+\frac{r}{2}\right)z} z^{m+q+\frac{1}{2}}\,dz \int_{(0)}^{(1)} e^{rzs} s^{m-k-\frac{1}{2}} (1-s)^{m+k-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Выберем пределы интегрирования так, чтобы для больших значений z вещественная часть $\left(p+\frac{r}{2}\right)z$ была положительна. В этом случае можно изменить порядок интегрирования и мы получаем

$$J = \frac{r^{m+\frac{1}{2}}}{B\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+k+\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \int_{(0)}^{(1)} s^{m-k-\frac{1}{2}} (1-s)^{m+k-\frac{1}{2}}\,ds \int_{(0)}^{\infty} e^{-\left(p+\frac{r}{2}-rs\right)z} z^{m+q+\frac{1}{2}}\,dz.$$

Принимая во внимание равенство (1.38), имеем отсюда

$$J=\frac{r^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+q+\frac{3}{2}\right)}{B\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+k+\frac{1}{2}\right)\left(p+\frac{r}{2}\right)^{m+q+\frac{3}{2}}}\times$$
$$\times\int_{(0)}^{(1)}s^{m-k-\frac{1}{2}}(1-s)^{m+k-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{r}{p+\frac{r^s}{2}}\right)^{-\left(m+q+\frac{3}{2}\right)}ds.$$

Используя равенство (4.11), определяющее гипергеометрические функции Гаусса, непосредственно выводим отсюда, что

$$J=\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^qM_{k,m}(rz)\,dz=$$
$$=\frac{r^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+q+\frac{3}{2}\right)}{\left(p+\frac{r}{2}\right)^{m+q+\frac{3}{2}}}{}_2F_1\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+q+\frac{3}{2};\ 1+2m;\ \frac{r}{p+\frac{r}{2}}\right). \tag{176}$$

Если перейти от функции Уиттекера к функции Куммера, то можно переписать это равенство, несколько изменяя обозначения, в следующем виде:

$$\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^q\,{}_1F_1(a;\ c;\ rz)\,dz=\frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}}{}_2F_1\left(a,\ q+1;\ c;\ \frac{r}{p}\right). \tag{176a}$$

Для второй функции Уиттекера $W_{k,m}$ также можно вычислить соответствующий интеграл

$$J^*\equiv\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^qW_{k,m}(rz)\,dz.$$

Проще всего свести этот интеграл с помощью равенства (63а) к только что вычисленному интегралу. Мы имеем

$$J^*=\frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^qM_{k,m}(rz)\,dz+$$
$$+\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^qW_{k,-m}(rz)\,dz$$

или, используя равенство (176),

$$J^*=\frac{r^{m+\frac{1}{2}}\,\Gamma(-2m)\,\Gamma\left(q+m+\frac{3}{2}\right)}{\left(p+\frac{r}{2}\right)^{m+q+\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+q+\frac{3}{2};\ 1+2m;\ \frac{r}{p+\frac{r}{2}}\right)+$$

$$+\frac{r^{-m+\frac{1}{2}}\,\Gamma(2m)\,\Gamma\left(q-m+\frac{3}{2}\right)}{\left(p+\frac{r}{2}\right)^{-m+q+\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-m-k+\frac{1}{2},\ -m+q+\frac{3}{2};\ 1-2m;\ \frac{r}{p+\frac{r}{2}}\right).$$

Применим к этому выражению равенство (4.21а), положив в нем

$$a=\frac{1}{2}+m-k,\quad b=\frac{3}{2}+m+q,\quad c=2+q-k,\quad z=\frac{p-\frac{r}{2}}{p+\frac{r}{2}}.$$

Мы получаем

$$J^*=\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^q\,W_{k,m}(rz)\,dz=\frac{r^{m+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(q+m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(q-m+\frac{3}{2}\right)}{\left(p+\frac{r}{2}\right)^{q+m+\frac{3}{2}}\Gamma(2+q-k)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(m-k+\frac{1}{2},\ m+q+\frac{3}{2};\ 2+q-k;\ \frac{p-\frac{r}{2}}{p+\frac{r}{2}}\right).\qquad(177)$$

В этом случае также получается небольшое упрощение, если перейти к функции; $w_0(a;\ c;\ rz)$,

$$\int_{(0)}^{\infty}e^{-pz}z^q\,w_0(a;\ c;\ rz)\,dz=$$

$$=\frac{e^{i\pi(1-a)}\,\Gamma(a)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(q+2-c)}{p^{q+1}\,\Gamma(q+2-c+a)}\,{}_2F_1\left(a,\ q+1;\ q+2-c+a;\ \frac{p-r}{p}\right).$$

(177а)

Соответствующий интеграл для функции $w_1(a;\ c;\ rz)$ может быть получен из равенств (176а) и (177а) с помощью соотношения (6.20). Мы получаем, таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-pz} z^q w_1(a;\ c;\ rz)\,dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(q+1)}{p^{q+1}} \left\{ \frac{\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a,\ q+1;\ c;\ \frac{r}{p}\right) - \right.$$

$$\left. - e^{-i\pi a} \frac{\Gamma(q+2-c)}{\Gamma(q+2+a-c)} {}_2F_1\left(a,\ q+1;\ 2+q+a-c;\ 1-\frac{r}{p}\right)\right\}.$$

Применим теперь к первому слагаемому равенство (4.21а). Мы имеем

$$\int_0^\infty e^{-pz} z^q w_1(a;\ c;\ rz)\,dz = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(q+1)}{p^{q+1}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{\Gamma(c-a-q-1)}{\Gamma(c-q-1)} - \frac{e^{i\pi a}\,\Gamma(2+q-c)}{\Gamma(2+q+a-c)} \right] {}_2F_1\left(a,\ q+1;\ 2+q+a-c;\ 1-\frac{r}{p}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{r}{p}\right)^{c-a-q-1} \frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a+q+1-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(q+1)} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2F_1\left(c-a,\ c-q-1;\ c-a-q;\ 1-\frac{r}{p}\right)\right\}.$$

Из равенства $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin z\pi}$ следует, что

$$\frac{\Gamma(c-a-q-1)}{\Gamma(c-q-1)} - e^{-i\pi a} \frac{\Gamma(2+q-c)}{\Gamma(2+q+a-c)} =$$

$$= \Gamma(c-a-q-1)\,\Gamma(2+q-c)\,e^{-i\pi(q-c+a+1)} \frac{\sin a\pi}{\pi}.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty e^{-pz} z^q w_1(a;\ c;\ rz)\,dz = \frac{\Gamma(2+q-c)}{p^{q+1}} \left\{ e^{+i\pi(c-q-a-1)} \times \right.$$

$$\times \frac{\Gamma(q+1)\,\Gamma(c-a-q-1)}{\Gamma(1-a)} {}_2F_1\left(a,\ q+1;\ 2+q+a-c;\ 1-\frac{r}{p}\right) +$$

$$+ \left(1-\frac{r}{p}\right)^{c-a-q-1} \frac{\Gamma(c-a)\,\Gamma(1+q+a-c)}{\Gamma(2+q-c)} \times$$

$$\left. \times {}_2F_1\left(c-a,\ c-q-1;\ c-a-q;\ 1-\frac{r}{p}\right)\right\}.$$

Применим теперь равенство (4.22), положив $a'=q+1$, $b'=c-a$, $c'=2+q-a$, $z=p/(p-r)$. Мы получим тогда

$$\int_0^\infty e^{-pz}z^q w_1(a;\ c;\ rz)\,dz=\frac{\Gamma(2+q-c)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(2+q-a)}\,e^{i\pi(c-a)}\times$$
$$\times(p-r)^{-q-1}\,{}_2F_1\left(q+1,\ c-a;\ 2+q-a;\ \frac{p}{p-r}\right)$$
$$\left(\arg\left(1-\frac{r}{p}\right)\geqslant 0\right). \qquad (178)$$

6.10.1.0. Обобщение на произведение функций. Эрдейи обобщил свою формулу на произведение любого числа функций Уиттекера. Тем же способом, что и выше, получаем

$$\int_{(0)}^\infty e^{-pz}z^q\prod_{i=1,\,2,\,\ldots,\,\nu}M_{k_i,m_i}(r_i,\ z)\,dz=$$
$$=\frac{\prod\limits^{i=1,\,\ldots,\,\nu}r_i^{m_i+\frac12}\,\Gamma\left(q+1+\frac{\nu}{2}+\sum\limits_{i=1}^{\nu}m_i\right)}{\prod\limits_{i=1,\,\ldots,\,\nu}B\left(m_i-k_i+\frac12,\ m_i+k_i+\frac12\right)\left(p+\frac12\sum r_i\right)^{q+1+\frac{\nu}{2}+\sum\limits_{i=0}^{\nu}m_i}}\times$$
$$\times\int_{(0)}^{(1)}\cdots\int_{(0)}^{(1)}\left(1-\frac{\sum r_is_i}{p+\sum\frac{r_i}{2}}\right)^{-\left(q+1+\frac{\nu}{2}+\sum m_i\right)}\times$$
$$\times\prod s_i^{m_i-k_i-\frac12}(1-s_i)^{m_i+k_i-\frac12}\,ds_1\,ds_2\ldots ds_\nu.$$

На основании равенства, определяющего обобщенную гипергеометрическую функцию Лауричеллы (см. пункт 4.5.3), имеем

$$\int_{(0)}^\infty e^{-pq}z^q\prod^{i=1,\,2,\,\ldots,\,\nu}M_{k_i,\,m_i}(r_iz)\,dz=$$
$$=\frac{\prod\limits^{i=1,\,\ldots,\,\nu}r_i^{m_i+\frac12}\,\Gamma\left(q+1+\frac{\nu}{2}+\sum\limits_{1}^{\nu}m_i\right)}{\left(p+\frac12\sum r_i\right)^{q+1+\frac{\nu}{2}+\sum m_i}}\times$$

$$\times F_A\left(q+1+\frac{\nu}{2}+\sum m_i;\ m_1-k_1+\frac{1}{2},\ m_2-k_2+\frac{1}{2},\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\ m_\nu-k_\nu+\frac{1}{2};\ 1+2m_1,\ \ldots,\ 1+2m_\nu;\ \frac{r_1}{p+\sum\frac{m_i}{\nu}},\ \ldots,\ \frac{r_\nu}{p+\sum\frac{m_i}{\nu}}\right).$$

И здесь переход к функциям Куммера приводит к упрощению

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-pz}\, z^q\, {}_1F_1(a_1;\ c_1;\ r_1z)\, {}_1F_1(a_2,\ c_2,\ r_2z)\ \ldots {}_1F_1(a_\nu;\ c_\nu;\ r_\nu z)\, dz =$$

$$= \frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}} F\left(q+1;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_\nu;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_\nu;\ \frac{r_1}{p},\ \frac{r_2}{p},\ \ldots,\ \frac{r_\nu}{p}\right).$$

Эти соотношения содержат большое число частных формул для многочленов Лагерра и функций Бесселя. Мы укажем сейчас их связь с преобразованиями Лапласа.

6.10.2. Преобразование Лапласа функций Уиттекера. В теории преобразования Лапласа [1]) каждой функции $F(t)$ (прообразу), удовлетворяющей некоторым условиям, сопоставляют функцию $f(s)$ (образ), определяемую формулой

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt.$$

Функцию $f(s)$ называют преобразованием Лапласа функции $F(t)$. Мы ограничимся здесь рассмотрением прообразов экспоненциального типа. Несколько отклоняясь от Дёча (см. Г. Дёч, стр. 355), мы определим их следующим образом: функция имеет экспоненциальный тип, если она растет как показательная функция при $t \to \infty$, а в конечной части плоскости не имеет особых точек, кроме точки $t = 0$, где у нее может быть полюс любого порядка. Для этого должно иметь место следующее: при некотором $p > 0$ функция $t^{-p}F(t)$ конечна во всей плоскости, причем существуют положительные постоянные a и A, такие, что для всех значений t выполняются неравенства $|t^{-p}F(t)| < A\, e^{a|t|}$. Легко показать, что для так определенных функций экспоненциального типа найдется конечное значение s_0, такое, что интеграл $\int_{(0)}^{\infty} e^{-st}F(t)\, dt$ абсолютно сходится

[1]) См. подробное изложение у Дёча [Doetsch G.].

в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$. Иными словами, при $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ сходится интеграл $\int_{(0)}^{\infty} e^{-\operatorname{Re} s\, t} |F(t)|\, dt$. Мы ограничимся далее лишь такими прообразами. Введем для краткости обозначения

$$f(s) = \mathfrak{L}\{F,\ s\}, \quad \text{или} \quad f(s) = \mathfrak{L}\{F(t);\ s\}_t, \tag{179}$$

где

$$f(s) = \int_{(0)}^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \quad (\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0). \tag{179а}$$

Второй способ записи мы будем применять, если надо явно указать переменную интегрирования. Если ограничиться прообразами экспоненциального типа, то преобразование Лапласа допускает обращение. Функция $F(t)$ выражается через $f(s)$ по формуле

$$F(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s)\, ds \quad (x > \operatorname{Re} s_0),$$

где $x > \operatorname{Re} s_0$ — произвольное значение абсциссы в полуплоскости сходимости преобразования Лапласа. Сокращенно мы будем писать формулу обращения в виде

$$F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{f(s);\ t\}_s \quad \text{или} \quad F(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{f;\ t\}. \tag{180}$$

Из равенства, определяющего $f(s)$, следует, что

$$f\left(\frac{s}{c}\right) = c\, \mathfrak{L}\{F(ct);\ s\}_t \tag{181а}$$

и

$$f(s+c) = \mathfrak{L}\{e^{-ct} F(t);\ s\}_t. \tag{181б}$$

Далее введем обозначение

$$F_1 * F_2(t) \equiv \int_{(0)}^{t} F_1(u)\, F_2(t-u)\, du \tag{182}$$

и назовем обозначенную символом $*$ операцию *обобщенной сверткой*.

По равенству (179) имеем

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2;\ s\} = \int_{(0)}^{\infty} e^{-st}\, dt \int_{(0)}^{t} F_1(u)\, F_2(t-u)\, du.$$

Если переменная интегрирования вещественна, то повторный интеграл абсолютно сходится для рассматриваемого класса функций. Заменяя t на $v = t - u$, преобразуем его в двойной интеграл по

квадранту. Этот двойной интеграл можно выразить в виде произведения двух обычных интегралов. Комплексные значения переменного интегрирования могут быть сведены к случаю вещественных переменных (см. Г. Дёч, стр. 121). В результате мы получаем, что интеграл можно записать в виде

$$\int_0^\infty F_1(u)\,e^{-su}\,du \int_0^\infty F_2(v)\,e^{-sv}\,dv.$$

Поэтому

$$\mathfrak{L}\{F_1 * F_2;\ s\} = \mathfrak{L}\{F_1;\ s\}\,\mathfrak{L}\{F_2;\ s\}. \qquad (183)$$

Итак, если $f_1 = \mathfrak{L}\{F_1\}$ и $f_2 = \mathfrak{L}\{F_2\}$, то функция $f = f_1 f_2$ является преобразованием Лапласа для $F_1 * F_2$.

Применим теперь эти определения и теоремы к функциям Уиттекера, рассматриваемым как прообразы. Для того чтобы прообраз удовлетворял условиям, необходимым для принадлежности к экспоненциальному типу, параметры функции Уиттекера должны быть сначала выбраны соответствующим образом. Поскольку, согласно равенствам (45), (61) и (66), поведение функции Уиттекера на бесконечности по существу независимо от параметров, мы сможем в дальнейшем избавиться от сделанных предположений. Используя введенные в определении (179) обозначения, перепишем равенство (176), заменив p на $p+s$, в виде

$$\mathfrak{L}\{e^{-pz}z^q M_{k,m}(rz);\ s\}_z = \frac{r^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+q+\frac{3}{2}\right)}{\left(s+p+\frac{r}{2}\right)^{m+q+\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(m+q+\frac{3}{2},\ m-k+\frac{1}{2};\ 1+2m;\ \frac{r}{s+p+\frac{r}{2}}\right), \qquad (184)$$

а равенство (177) в виде

$$\mathfrak{L}\{e^{-pz}z^q W_{k,m}(rz);\ s\}_z = \frac{r^{m+\frac{1}{2}}\Gamma\left(q+m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(q-m+\frac{3}{2}\right)}{\left(s+p+\frac{r}{2}\right)^{m+q+\frac{3}{2}}\Gamma(q-k+2)} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(q+m+\frac{3}{2},\ m-k+\frac{1}{2};\ q-k+2;\ \frac{s+p-\frac{r}{2}}{s+p+\frac{r}{2}}\right). \qquad (185)$$

Полученные образы можно упростить, если параметр q принимает специальные значения. Например, по равенству (4.40), гипер-

геометрическая функция Гаусса при $a=c$ сводится к биному: ${}_2F_1(a, b; a; z)=(1-z)^{-b}$. При $q=m-\frac{1}{2}$ из равенства (184) имеем

$$\mathfrak{L}\left\{e^{-pz}z^{m-\frac{1}{2}}M_{k,m}(rz);\ s\right\}_z=r^{m+\frac{1}{2}}\Gamma(1+2m)\frac{\left(s+p-\frac{r}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s+p+\frac{r}{2}\right)^{k+p+\frac{1}{2}}}. \quad (186)$$

Это равенство можно переписать в более обозримом виде, если ввести, согласно Эрдейи, новую функцию, задаваемую формулой

$$N_{k,m}(z)=\frac{z^{m-\frac{1}{2}}M_{k,m}(z)}{\Gamma(1+2m)}=\frac{z^{2m}e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(1+2m)}\,{}_1F_1\left(m+\frac{1}{2}-k;\ 2m+1;\ z\right). \quad (187)$$

Тогда это равенство примет вид

$$\mathfrak{L}\{e^{-pz}N_{k,m}(rz);\ s\}_2=r^{2m}\frac{\left(s+p-\frac{r}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s+p+\frac{r}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}. \quad (187а)$$

Преобразование Лапласа самой N-функции получается, если положить $p=0$, $r=1$:

$$\mathfrak{L}\{N_{k,m}(z);\ s\}_z=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{k-m-\frac{1}{2}}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{k+m+\frac{1}{2}}}. \quad (187б)$$

Встречающиеся здесь образы обладают тем замечательным свойством, что произведение двух из них, имеющих в качестве прообразов различные N-функции, снова является функцией того же типа. Поскольку по равенству (183) произведению образов соответствует свертка прообразов, то при свертке двух N-функций снова получается N-функция. В частности, мы имеем из равенства (187б)

$$\mathfrak{L}\{N_{k_1,m_1};\ s\}\,\mathfrak{L}\{N_{k_2,m_2};\ s\}=\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^{k_1+k_2-m_1-m_2-1}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{k_1+k_2+m_1+m_2+1}}=$$

$$=\mathfrak{L}\left\{N_{k_1+k_2,\,m_1+m_2+\frac{1}{2}};\ s\right\} \quad (188)$$

и потому по равенствам (183) и (182)

$$\int_{(0)}^{z} N_{k_1,\, m_1}(t)\, N_{k_2,\, m_2}(z-t)\, dt = N_{k_1+k_2,\, m_1+m_2+\frac{1}{2}}(z). \qquad (188а)$$

Это равенство доказано на основе теоремы Дёча. Оно справедливо лишь для таких значений параметров k_1, k_2, m_1, m_2, для которых указанные интегралы имеют смысл. Но, поскольку обе части последнего равенства являются аналитическими функциями параметров, то оно справедливо, по принципу аналитического продолжения, для любых значений параметров.

Частным случаем ревенства (188а) является

$$N_{k,\, m}(z) = N_{k,\, k-\frac{1}{2}} * N_{0,\, m-k}(z). \qquad (188б)$$

По равенству (187)

$$N_{k,\, k-\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{2k-1} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(2k)}.$$

Как будет показано в п. 7.1, если первый параметр N-функции равен нулю, то она совпадает, с точностью до постоянного множителя, с бесселевой функцией.

§ 7

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

7.1. Дифференциальное уравнение Бесселя. Определение цилиндрических функций. Запишем волновое уравнение $\Delta u + k^2 u = 0$ в цилиндрических координатах r, φ, z. Если

$$u = e^{ip\varphi} Z_p(r)$$

является решением этого уравнения, то функция $Z_p(r)$ должна, согласно (3.89) и (3.95), удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dZ}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) Z = 0. \tag{1}$$

Сделаем подстановку $z = kr$ (не следует путать z с пространственной координатой; в дальнейшем мы будем считать z комплексным переменным). Эта подстановка приводит уравнение к виду

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dZ}{dz}\right) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *дифференциальным уравнением Бесселя*, а его решения — *цилиндрическими функциями*. Для того чтобы подчеркнуть, что решения дифференциального уравнения Бесселя зависят не только от z, но и от параметра p, мы будем записывать их в виде $Z_p(z)$. Решением уравнения (1) является, таким образом, $Z_p(kr)$.

Уравнение Бесселя

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z = 0 \tag{2a}$$

является, согласно пунктам 3.2.3.6 и 2.2.7, вырожденным уравнением Римана. При преобразовании показателей

$$Z(z) = z^{\pm p} y(z)$$

оно переходит в уравнение Лапласа

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (1 \pm 2p)\frac{dy}{dz} + zy = 0.$$

Поскольку коэффициенты этого уравнения равны $a_1 = 1 \pm 2p$, $b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, то по п. 6.2.2 его решение имеет вид

$$y = e^{c_1 z} w_{k,m}(z') = Ae^{iz} w_{0,\pm p}(-2iz).$$

Следовательно, мы имеем два решения уравнения Бесселя, отличающиеся знаком индекса

$$Z_{\pm p}(z) = A e^{iz} e^{\pm p} w_{0,\pm p}(-2iz). \tag{3}$$

Для уравнения Лапласа мы нашли много решений, отличающихся друг от друга поведением в окрестностях особых точек 0 и ∞. Этим решениям соответствуют решения уравнения Бесселя. Возьмем сначала решение $M_{k,m}(z)$ уравнения Лапласа, характеризующееся тем, что оно регулярно при $z = 0$. Заменяя $v(-2iz)$ по формуле (6.61а), найдем соответствующее решение уравнения Бесселя

$$Z_p(z) = A e^{i\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)} 2^{-\left(p+\frac{1}{2}\right)} z^{-\frac{1}{2}} M_{0,p}(-2iz).$$

Принято выбирать коэффициент $A = 2^{2p}\Gamma(1+p)$. Получающуюся нормированную цилиндрическую функцию

$$J_p(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)}}{2^{2p+\frac{1}{2}}\Gamma(1+p)} z^{-\frac{1}{2}} M_{0,p}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right) \tag{4}$$

называют *функцией Бесселя* (в узком смысле) p-го порядка. Заменим по равенству (6.61) функцию Уиттекера функцией Куммера. Мы получим

$$J_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \frac{e^{iz}}{\Gamma(1+p)} {}_1F_1\left(p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right), \tag{4а}$$

а в качестве второго решения

$$J_{-p}(z) = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\left(-p+\frac{1}{2}\right)}}{2^{-2p+\frac{1}{2}}\Gamma(1-p)} z^{-\frac{1}{2}} M_{0,-p}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right) =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \frac{e^{iz}}{\Gamma(1-p)} {}_1F_1\left(-p+\frac{1}{2};\ -2p+1;\ 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right). \tag{4б}$$

Другое решение, которое выражается через функцию Уиттекера $W_{k,m}$, будет рассмотрено позже.

7.2. Разложение функций Бесселя (в узком смысле)

7.2.1. Поведение в окрестности точки $z = 0$. Для того чтобы разложить функцию Бесселя $J_p(z)$ в степенной ряд, воспользуемся

равенством (6.59). Из него следует

$$\Lambda_p(z)\equiv e^{iz}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+p;\ 1+2p;\ -2iz\right)={}_0F_1\left(p+1;\ -\frac{z^2}{4}\right). \quad (5)$$

Подставляя это выражение в равенство (4а), получаем

$$J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{1}{\Gamma(1+p)}\,{}_0F_1\left(p+1;\ -\frac{z^2}{4}\right)=$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^p\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2\varkappa}\frac{1}{\varkappa!\,\Gamma(p+\varkappa+1)}. \quad (6)$$

Полученный ряд абсолютно и равномерно сходится в любой ограниченной области изменения переменных z и p. Отношение последующего члена ряда к предыдущему при $|z|\leqslant a$ и $|p|\leqslant P$ допускает следующую оценку

$$\left|\frac{-\frac{z^2}{4}}{\varkappa(p+\varkappa)}\right|\leqslant\frac{\frac{a^2}{4}}{\varkappa(\varkappa-P)}.$$

Если $\varkappa>\varkappa_0$, где $\varkappa_0$ — положительный корень уравнения

$$\varkappa_0^2-\varkappa_0 P-\frac{a^2}{4}=0,$$

то правая часть этого неравенства меньше единицы. Поскольку $\varkappa_0$ не зависит от z и p, то по признаку Вейерштрасса ряд равномерно и абсолютно сходится. Таким образом, *функция Бесселя $J_p(z)$ аналитична в обеих плоскостях z и p*, исключая лишь точку $z=0$. В точке $z=0$ она имеет ветвление порядка $\operatorname{Re} p$. Поэтому если $\operatorname{Re} p<0$ и p — нецелое число, то она обращается в этой точке в бесконечность.

Если p — целое, то мы имеем особый случай. Именно в этом случае

$$J_\nu(z)=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa\left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa+\nu}\frac{1}{\varkappa!\,(\nu+\varkappa)!} \quad (6а)$$

и

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{\varkappa=\nu}^{\infty}(-1)^\varkappa\left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-\nu}\frac{1}{\varkappa!\,(-\nu+\varkappa)!},$$

поскольку во второй сумме первые ν слагаемых обращаются в нуль. Заменим индекс суммирования $\varkappa$ на $\rho=\varkappa-\nu$. Тогда это равенство перейдет в

$$J_{-\nu}(z)=(-1)^\nu\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\rho\left(\frac{z}{2}\right)^{2\rho+\nu}\frac{1}{\rho!\,(\nu+\rho)!} \quad (7)$$

и потому

$$J_{-\nu}(z)=(-1)^{\nu}J_{\nu}(z). \tag{8}$$

Таким образом, обе функции Бесселя $J_{\nu}(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ при целочисленном индексе имеют в точке $z=0$ нуль ν-го порядка. Бесселева функция нулевого порядка $J_0(z)$ при $z=0$ равна 1.

Поскольку

$$\left|{}_0F_1\left(p+1;-\frac{z^2}{4}\right)\right|=\left|\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^{\varkappa}}{\varkappa!\,(p+1)_{\varkappa}}\right|<\left|\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^{\varkappa}}{\varkappa!\,(p_0+1)^{\varkappa}}\right|<e^{\frac{|z|^2}{4|p_0+1|}},$$

где $|p_0+1|$ равно наименьшему из чисел $|p+1|$, $|p+2|$, ..., $|p+\varkappa|$, то по равенству (6)

$$J_p(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)}(1+\theta),\quad |\theta|<e^{\frac{|z|^2}{4|p_0+1|}}. \tag{9}$$

Мы используем в дальнейшем это равенство для исследования сходимости некоторых рядов.

7.2.2. Поведение на бесконечности. Асимптотические разложения для больших значений $|z|$. Связь между функциями Бесселя и вырожденной гипергеометрической функцией позволяет получить разложение для больших значений $|z|$. Из равенств (6.45) и (4a) получаем при $|\arg(z)|<\pi$:

$$J_p(z)\sim\frac{\Gamma(2p+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^p(2z)^{-\left(p+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left\{e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\left(1+\frac{p^2-\frac{1}{4}}{-2zi}+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{2!\,(-2zi)^2}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\left(1+\frac{p^2-\frac{1}{4}}{-2zi}+\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)\left(p^2-\frac{9}{4}\right)}{2!\,(-2zi)^2}+\ldots\right)\right\}.$$

Это равенство можно записать в виде

$$J_p(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(P_p(z)\cos\left(z-\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-Q_p(z)\sin\left(z-\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right), \tag{10}$$

где положено

$$P_p(z) \equiv 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8z)^2} + \\ + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)}{4!\,(8z)^4} - \ldots \qquad (10а)$$

и

$$Q_p(z) \equiv \frac{4p^2-1}{8z}\left(1 - \frac{(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8z)^2} + \right. \\ \left. + \frac{(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)(4p^2-81)}{5!\,(8z)^4} - \ldots\right). \qquad (10б)$$

Для больших значений $|z|$ достаточно использовать первое слагаемое

$$J_p(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right). \qquad (10в)$$

Таким образом, если аргумент стремится к бесконечности по вещественной оси, то функции Бесселя стремятся, колеблясь, к нулю. Полученные ряды являются асимптотическими, а именно: представление с помощью небольшого числа членов ряда дает хороший результат при больших значениях $|z|$. Вейрих показал, что функция $J_0(x)$ может быть приближена на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1{,}8$ с помощью многочлена $1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$, причем погрешность не превышает значения 0,014. Далее, он доказал, что выражение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1{,}8\, x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

при $x \geqslant 1{,}8$ дает приближение для $J_0(x)$ с точностью до 0,01.

7.3. Функции Ганкеля (цилиндрические функции третьего рода). Мы использовали для вывода асимптотического разложения функции $J_p(z)$ формулу (6.45). Правая часть этой формулы может быть представлена в виде линейной комбинации двух W-функций Уиттекера. Поэтому можно ожидать, что цилиндрические функции, которые получаются согласно равенству (3) из W-функций, также будут иметь весьма простое поведение на бесконечности. Положим, по аналогии с равенством (4),

$$H_p^{(1)}(z) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)} W_{0,p}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right). \qquad (11)$$

Здесь выбрана такая нормировка, чтобы множители в равенствах, которые связывают $H_p^{(1)}$ и J_p, имели наиболее простой вид. Мы будем называть функцию, определяемую равенством (11), *первой функцией*

Ганкеля. Равенство (6.66) дает нам асимптотическое разложение

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)} \times$$
$$\times\left(1+i\,\frac{4p^2-1}{8z}-\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8z)^2}-\right.$$
$$-i\,\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8z)^3}+$$
$$\left.+\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)}{4!\,(8z)^4}-\ldots\right) \quad (12)$$

и при очень больших значениях $|z|$

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}. \quad (12a)$$

Поскольку по равенству (6.63)

$$H_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\,\frac{e^{i\pi\left(p-\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right)^{p+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\, w_0\left(p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ -2iz\right), \quad (13)$$

мы могли для доказательства использовать также соотношение (6.41). Введем, далее, по аналогии с равенством (13), *вторую функцию Ганкеля*

$$H_p^{(2)}(z) \equiv -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\,\frac{e^{i\pi\left(p-\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right)^{p+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\, w_1\left(p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ -2iz\right). \quad (14)$$

Тогда мы получим с помощью равенства (6.43)

$$H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\left(1-i\,\frac{4p^2-1}{8z}-\right.$$
$$-\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8z)^2}+i\,\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8z)^3}+$$
$$\left.+\frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)}{4!\,(8z)^4}-\ldots\right) \quad (15)$$

и для очень больших значений $|z|$

$$H_p^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}. \quad (15a)$$

Поскольку равенство (4), в силу формулы удвоения для Г-функции и равенства (6.61а), может быть записано в виде

$$-2J_p(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i\left(z-\frac{\pi}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)\right)}\,\frac{e^{i\pi\left(p-\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\left(2e^{-i\frac{\pi}{2}}z\right)^{p+\frac{1}{2}}\times$$

$$\times v\left(p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ -2iz\right), \quad (16)$$

то, принимая во внимание равенство (6.20), мы имеем

$$H_p^{(1)}(z)+H_p^{(2)}(z)=2J_p(z). \quad (17)$$

Справедливость этого равенства при больших значениях z вытекает из равенств (10в), (12а), (15а) и из связи между $\cos z$ и e^{iz}, e^{-iz}.

Для того чтобы изучить поведение функции Ганкеля при малых значениях z, используем равенство (6.63а). Оно дает

$$W_{0,p}=\frac{2^{-2p}\,\Gamma(-p)}{2\sqrt{\pi}}M_{0,p}+\frac{2^{2p}\,\Gamma(p)}{2\sqrt{\pi}}M_{0,-p}.$$

Подставляя сюда цилиндрические функции по равенствам (4) и (11) получаем

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{i}{\sin p\pi}\left(e^{-ip\pi}J_p(z)-J_{-p}(z)\right). \quad (18)$$

Поскольку разложение функций Бесселя в окрестности точки $z=0$ нам уже известно, мы можем получить из равенства (18) разложение, справедливое во всей плоскости z. В частности, из равенства (6) мы получаем с помощью формулы Стирлинга, что для всех z справедливо соотношение

$$H_p^{(1)}(z)\sim-\frac{i}{\sin p\pi}J_{-p}(z) \qquad p\to+\infty \quad (18а)$$

и

$$H_p^{(1)}(z)\sim\frac{ie^{-ip\pi}}{\sin p\pi}J_p(z) \qquad p\to-\infty. \quad (18б)$$

Соответствующие соотношения для второй функции Ганкеля проще всего получить, рассматривая равенства (18) и (17). Они имеют вид

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{-i}{\sin p\pi}\left[e^{ip\pi}J_p(z)-J_{-p}(z)\right] \quad (19)$$

и

$$H_p^{(2)}(z)\sim\frac{i}{\sin p\pi}J_{-p}(z) \qquad \text{при} \quad p\to+\infty, \quad (19а)$$

$$H_p^{(2)}(z)\sim-\frac{ie^{ip\pi}}{\sin p\pi}J_p(z) \qquad \text{при} \quad p\to-\infty. \quad (19б)$$

Из равенства (6.64) или непосредственно из равенства (18) вытекает, что

$$H^{(1)}_{-p}(z) = e^{ip\pi} H^{(1)}_p(z). \tag{20а}$$

Соответственно из равенства (19) следует, что

$$H^{(2)}_{-p}(z) = e^{-ip\pi} H^{(2)}_p(z). \tag{20б}$$

Оба равенства (18) и (19) теряют силу, если индекс $p = \nu$ является целым числом. В этом случае получаем по правилу Лопиталя

$$H^{(1)}_\nu(z) = \lim_{p\to\nu} H^{(1)}_p(z) = \lim_{p\to\nu} \frac{i\frac{\partial}{\partial p}(e^{-ip\pi}J_p(z) - J_{-p}(z))}{\frac{\partial}{\partial p}\sin p\pi},$$

и потому

$$H^{(1)}_\nu(z) = J_\nu(z) + \frac{i}{\pi}\left(\frac{\partial J_p(z)}{\partial p} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu}. \tag{21а}$$

Соответственно имеем

$$H^{(2)}_\nu(z) = J_\nu(z) - \frac{i}{\pi}\left(\frac{\partial J_p(z)}{\partial p} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu}. \tag{21б}$$

Из равенств (18) и (19) следует, что при *вещественных* значениях индекса p функцией, комплексно сопряженной к $H^{(1)}_p(z)$, является $H^{(2)}_p(z)$,

$$\overline{H^{(1)}_p(z)} = H^{(2)}_p(\bar{z}) \quad (p \text{ — вещественное}). \tag{22}$$

7.4. Функции Неймана (цилиндрические функции второго рода). Равенство (17) для очень больших значений z является непосредственным следствием формулы $e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z$. Для того чтобы получить аналог формулы $e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z$, введем новую цилиндрическую функцию с помощью соотношения

$$2i\,N_p(z) \equiv H^{(1)}_p(z) - H^{(2)}_p(z). \tag{23}$$

Назовем ее *цилиндрической функцией Неймана* или цилиндрической функцией второго рода. Очевидно, что

$$H^{(1)}_p(z) = J_p(z) + i\,N_p(z), \tag{24}$$

$$H^{(2)}_p(z) = J_p(z) - i\,N_p(z). \tag{25}$$

Принимая во внимание равенства (18) и (19), имеем

$$\sin p\pi\, N_p(z) = \cos p\pi\, J_p(z) - J_{-p}(z), \tag{26а}$$

$$\sin p\pi\, N_{-p}(z) = J_p(z) - \cos p\pi\, J_{-p}(z) \tag{26б}$$

или, исключая $J_{-p}(z)$,

$$N_{-p}(z) = \cos p\pi\, N_p(z) + \sin p\pi\, J_p(z). \tag{27}$$

И в этом случае при переходе к целочисленным значениям индекса надо выполнить предельный переход. По равенству (26а) имеем

$$N_\nu(z)=\lim_{p\to\nu}\frac{\cos p\pi J_p(z)-J_{-p}(z)}{\sin p\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}-(-1)^\nu\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu}. \quad (28)$$

что согласуется с равенствами (23) и (21а), (21б).

Поведение этой функции в окрестности точки $z=0$ легко уяснить из равенств (26а) и (6). Относительно поведения при целочисленных значениях индекса мы будем говорить еще ниже.

Поведение при больших значениях z легко получается из равенств (23), (13) и (15). Именно,

$$N_p(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(P_p(z)\sin\left(z-\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+Q_p(z)\cos\left(z-\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)\right). \quad (29)$$

Здесь P_p и Q_p имеют значения, указанные равенствами (10а), (10б). При больших значениях $|z|$ имеем

$$N_p(z)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right). \quad (29а)$$

Как и функция Бесселя, функция Неймана стремится, колеблясь, к нулю, когда x стремится к бесконечности вдоль вещественной оси.

При полуцелых значениях $p=\nu+1/2$ равенства (26а), (26б) дают

$$N_{\nu+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^{\nu+1}J_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) \quad \text{и} \quad N_{-\nu-\frac{1}{2}}(z)=(-1)^\nu J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \quad (30)$$

7.5. Соотношения обхода. При введении функций Ганкеля мы уже доказали, что

$$H^{(1)}_{-p}(z)=e^{i\pi p}H^{(1)}_p(z), \quad (31а)$$

$$H^{(2)}_{-p}(z)=e^{-i\pi p}H^{(2)}_p(z) \quad (31б)$$

(см. равенства (20а) (20б)). Используем теперь равенство Куммера (6.67)

$$M_{k,p}(e^{\pm i\pi}t)=e^{\pm i\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)}M_{-k,p}(t).$$

Из равенства (4) следует, что

$$J_p(e^{\pm i\pi}z)=e^{\pm i\pi p}J_p(z). \quad (32а)$$

Отсюда, путем повторного применения получаем

$$J_p(e^{i\pi\mu}z)=e^{i\pi\mu p}J_p(z) \qquad (\mu\text{ — целое}). \quad (32б)$$

При целочисленных значениях ν имеем

$$J_\nu(-z)=(-1)^\nu J_\nu(z) \qquad (\nu \text{ — целое}). \tag{32в}$$

Подставим равенство (18) в правую часть формулы (32б). Мы получим тогда

$$-i\sin p\pi\, H_p^{(1)}\left(e^{i\pi\mu}z\right)=e^{-i\pi p}\,e^{i\pi\mu p}\,J_p(z)-e^{-i\pi\mu p}\,J_{-p}(z).$$

Заменим теперь в правой части полученного соотношения J_p и J_{-p} по равенству (17) и исключим $H_{-p}(z)$ с помощью равенств (31а), (31б). Мы получим

$$H_p^{(1)}\left(e^{i\pi\mu}z\right)=-\frac{\sin(\mu-1)p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(1)}(z)-e^{-i\pi p}\,\frac{\sin\mu p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(2)}(z) \tag{33а}$$

(μ — целое).

Точно так же, исходя из равенства (19), получаем

$$H_p^{(2)}\left(e^{i\pi\mu}z\right)=e^{i\pi p}\,\frac{\sin\mu p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(1)}(z)+\frac{\sin(\mu+1)p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(2)}(z) \tag{33б}$$

(μ — целое).

Поскольку при целочисленных значениях $p=\nu$ имеет место равенство

$$\frac{\sin\mu\nu\pi}{\sin\nu\pi}=(-1)^{\mu\nu-\nu}\mu,$$

то, принимая во внимание равенство (17), имеем

$$(-1)^{\mu\nu}H_\nu^{(1)}\left(e^{i\pi\mu}z\right)=H_\nu^{(1)}(z)-2\mu J_\nu(z) \tag{34а}$$

и

$$(-1)^{\mu\nu}H_\nu^{(2)}\left(e^{i\pi\mu}z\right)=H_\nu^{(2)}(z)+2\mu J_\nu(z). \tag{34б}$$

Точно так же, исходя из равенства (26а), имеем

$$N_p(e^{i\pi\mu}z)=e^{-i\pi\mu p}N_p(z)+2i\sin\mu p\pi\operatorname{ctg}p\pi\,J_p(z) \tag{35а}$$

(μ — целое),

а исходя из равенства (26б),

$$N_{-p}(e^{i\pi\mu}z)=e^{-i\pi\mu p}N_{-p}(z)+2i\,\frac{\sin\mu p\pi}{\sin p\pi}J_p(z) \tag{35б}$$

(μ — целое).

Для целочисленных значений индекса ν снова получаем

$$(-1)^{\mu\nu}N_\nu\left(e^{i\pi\mu}z\right)=N_\nu(z)+2i\mu J_\nu(z). \tag{35в}$$

7.6. Определитель Вронского и рекуррентные формулы. При обзоре линейных дифференциальных уравнений было показано, что определитель Вронского двух решений такого уравнения обращается в нуль тогда и только тогда, когда эти решения линейно зависят друг от друга. Пусть $Z_p^{(1)}(z)$ и $Z_p^{(2)}(z)$ — два различных решения дифференциального уравнения Бесселя. Тогда имеем

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(zZ_p^{(1)\prime}\right)+Z_p^{(1)}\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)=0$$

и

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(zZ_p^{(2)\prime}\right)+Z_p^{(2)}\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)=0.$$

Умножим первое уравнение на $Z_p^{(2)}$, второе — на $Z_p^{(1)}$ и вычтем второе уравнение из первого. Мы получим тогда

$$\frac{d}{dz}\left(z\left(Z_p^{(2)}Z_p^{(1)\prime}-Z_p^{(1)}Z_p^{(2)\prime}\right)\right)=0.$$

Отсюда, интегрируя, находим значение определителя Вронского

$$Z_p^{(1)\prime}Z_p^{(2)}-Z_p^{(2)\prime}Z_p^{(1)}=\frac{C}{z}. \tag{36}$$

Для определения постоянной C используем специальные представления для $Z_p^{(1)}$ и $Z_p^{(2)}$. Возьмем сначала

$$Z_p^{(1)}(z)=J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{1}{\Gamma(p+1)}(1+\ldots),$$

$$Z_p^{(2)}(z)=J_{-p}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\frac{1}{\Gamma(1-p)}(1+\ldots).$$

Мы получим тогда

$$J_{-p}(z)J_p'(z)-J_p(z)J_{-p}'(z)=\frac{2p}{z\,\Gamma(1+p)\,\Gamma(1-p)}(1+\ldots).$$

Невыписанные здесь члены образуют степенные ряды по z. Поскольку по равенству (36) правая часть должна иметь форму $\frac{C}{z}$, то все невыписанные члены должны обращаться в нуль. Поэтому, используя равенства (1.36) и (1.40), находим, что

$$J_p'(z)J_{-p}(z)-J_{-p}'(z)J_p(z)=\frac{2\sin p\pi}{\pi z}. \tag{37}$$

Подставим теперь вместо $Z_p^{(1)}$ функцию Ганкеля $H_p^{(1)}(z)$ и примем во внимание равенство (18). Мы получим

$$H_p^{(1)\prime}(z)J_p(z)-J_p'(z)H_p^{(1)}(z)=\frac{2i}{\pi z}. \tag{38}$$

Аналогично получаются равенства

$$H_p^{(2)\prime}(z)\,J_p(z) - J_p'(z)\,H_p^{(2)}(z) = -\frac{2i}{\pi z} \tag{39}$$

и

$$N_p'(z)\,J_p(z) - J_p'(z)\,N_p(z) = \frac{2}{\pi z}, \tag{40}$$

а также

$$H_p^{(1)\prime}(z)\,H_p^{(2)}(z) - H_p^{(2)\prime}(z)\,H_p^{(1)}(z) = \frac{4i}{\pi z}. \tag{41}$$

Окончательно для любых цилиндрических функций (α, β, α^*, β^* — независимые от p и z постоянные)

$$Z_p(z) = \alpha J_p(z) + \beta N_p(z) \tag{42а}$$

и

$$Z_p^*(z) = \alpha^* J_p(z) + \beta^* N_p(z) \tag{42б}$$

получаем

$$Z_p(z)\,Z_p^{*\prime}(z) - Z_p^*(z)\,Z_p'(z) = \frac{2(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}{\pi z}. \tag{42в}$$

Положим в равенствах (6.75) и (6.76) $k = 0$. Тогда, в силу равенства (4), имеем

$$J_{p+1}(z) - \frac{2p}{z} J_p(z) + J_{p-1}(z) = 0 \tag{43}$$

и

$$J_p'(z) - \frac{p}{z} J_p(z) + J_{p+1}(z) = 0. \tag{44}$$

Вычитая эти равенства друг из друга, находим

$$J_p'(z) + \frac{p}{z} J_p(z) - J_{p-1}(z) = 0. \tag{44а}$$

Складывая же равенства (44) и (44а), получаем

$$2J_p'(z) = J_{p-1}(z) - J_{p+1}(z). \tag{44б}$$

Поскольку по равенствам (12), (14) и (16) функции $H_p^{(1)}(z)$, $H_p^{(2)}(z)$ и $J_p(z)$ совершенно одинаковым образом связаны с вырожденными гипергеометрическими функциями, имеющими одинаковые параметры и аргументы, то рекуррентные формулы для всех трех функций должны иметь один и тот же вид. Поскольку, далее, по равенству (23), функция Неймана $N_p(z)$ линейно выражается через функции $H_p^{(1)}(z)$ и $H_p^{(2)}(z)$, причем коэффициенты этого выражения не зависят от p, то такие же рекуррентные соотношения должны иметь место для $N_p(z)$, а потому и для общей цилиндрической функции $Z_p(z)$ (равен-

ство (42а)). Мы имеем, таким образом,

$$Z_{p+1}(z) - \frac{2p}{z} Z_p(z) + Z_{p-1}(z) = 0, \tag{45}$$

$$Z'_p(z) - \frac{p}{z} Z_p(z) + Z_{p+1}(z) = 0, \tag{46}$$

$$Z'_p(z) + \frac{p}{z} Z_p(z) - Z_{p-1}(z) = 0. \tag{47}$$

Заметим, что переход к отрицательным значениям индекса не приводит к новым цилиндрическим функциям. Поэтому в формулах (45), (46) и (47) можно p *всюду* заменить на $-p$. Для приложений важны частные случаи

$$Z_{-1}(z) = -Z_1(z) \tag{45а}$$

и

$$Z'_0(z) = -Z_1(z). \tag{46а}$$

Умножим равенство (46) на z^{-p}. Оно примет тогда вид

$$-\frac{d}{dz}(z^{-p} Z_p(z)) = z^{-p} Z_{p+1}(z). \tag{48}$$

Повторно применяя это равенство, получаем, что

$$z^{-p} Z_{p+\mu}(z) = (-1)^\mu \frac{d^\mu}{dz^\mu}(z^{-p} Z_p(z)). \tag{48а}$$

Точно так же, из равенства (47) вытекает

$$\frac{d}{dz}(z^p Z_p(z)) = z^p Z_{p-1}(z). \tag{48б}$$

Равенства (46) и (47) можно связать определителем Вронского. Запишем равенство (47) для Z^*_p, умножим это равенство на Z_p и вычтем из равенства (47), умноженного на Z^*_p. Мы получим

$$Z_p Z^{*\prime}_p - Z'_p Z^*_p = Z_p Z^*_{p-1} - Z^*_p Z_{p-1}. \tag{49}$$

Поскольку в левой стороне написан определитель Вронского, то по равенству (42в) имеем

$$Z_p Z^*_{p-1} - Z^*_p Z_{p-1} = \frac{2(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)}{\pi z}. \tag{49а}$$

С помощью специализации отсюда получаются многочисленные частные случаи, например имеем ($\alpha = 1$, $\beta^* = 1$, $\alpha^* = \beta = 0$)

$$J_p N_{p-1} - J_{p-1} N_p = \frac{2}{\pi z}. \tag{49б}$$

Связь между функциями с положительным и отрицательным значениями индекса может быть получена с помощью равенств (46), (47) и (37) точно так же, как равенство (49). Мы получаем

$$J_{p-1}J_{-p}+J_pJ_{1-p}=\frac{2\sin p\pi}{\pi z} \tag{49в}$$

и соответствующее равенство для остальных функций.

Из равенства (44б), принимая во внимание равенство (43), получаем

$$\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}J_{p+2\nu}(z)\right]=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}}{p+2\nu}(\nu J_{p+2\nu-1}(z)-(p+\nu)J_{p+2\nu+1}(z)).$$

Так как, если p не является целым отрицательным числом, то ряды равномерно сходятся (см. (9)), и потому

$$\frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(p+2\nu)\,\Gamma(p+\nu)}{\nu!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}J_{p+2\nu}(z)=$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+\nu)}{(\nu-1)!}J_{p+2\nu-1}(z)-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+\nu+1)}{\nu!}J_{p+2\nu+1}(z)\right).$$

Поскольку правая часть обращается в нуль, то стоящая слева сумма постоянна. При $z=0$ она сводится к первому члену ($\nu=0$), который по равенству (6) есть 1. Таким образом, мы получаем для любого значения p (кроме p целых отрицательных)[1])

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{p}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(p+2\nu)\,\Gamma(p+\nu)}{\nu!}J_{p+2\nu}(z). \tag{50}$$

7.7. Поведение функций в точке $z=0$. Мы нашли в пунктах 2, 3 и 4 разложение цилиндрических функций в окрестности точки $z=0$ для нецелых значений p. Если $p=\nu$ — целое число, то вопрос требует дальнейшего изучения. Используем равенство (28)

$$\pi N_\nu(z)=\left(\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu}-(-1)^\nu\left(\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu} \tag{51}$$

и разложение в степенной ряд (6). Почленно дифференцируя это разложение по p (это возможно, поскольку $J_p(z)$ является аналитической функцией от p), получаем

$$\frac{\partial J_p(z)}{\partial p}=J_p(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa\frac{\Psi(p+\varkappa)}{\varkappa!\,\Gamma(p+\varkappa+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa+p}. \tag{52}$$

[1]) Gegenbauer L., *Wiener Sitzungsberichte*, 74 (2) (1877), 124.

Здесь через $\Psi(z)$ обозначена логарифмическая производная Г-функции $\Gamma(z+1)$ (см. равенство (1.53)). При дифференцировании J_{-p} мы должны принять во внимание, что Г-функция имеет полюсы на отрицательной полуоси, и выделить соответствующие слагаемые

$$J_{-p}(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} (-1)^{\varkappa} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \frac{1}{\varkappa!\,\Gamma(1-p+\varkappa)} + \\ + \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \frac{1}{\varkappa!\,\Gamma(1-p+\varkappa)}.$$

С помощью соотношения

$$\Gamma(p-\varkappa)\Gamma(1-p+\varkappa) = (-1)^{\varkappa} \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

преобразуем это равенство к виду

$$J_{-p}(z) = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \frac{\sin p\pi\,\Gamma(p-\varkappa)}{\pi\,\varkappa!} + \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \frac{1}{\varkappa!\,\Gamma(1-p+\varkappa)}.$$

Почленное дифференцирование дает

$$\frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p} = \\ = \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{1}{\pi\,\varkappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \Gamma(p-\varkappa)\left(\left(\ln\frac{z}{2} + \Psi(p-\varkappa-1)\right)\sin p\pi + \pi\cos p\pi\right) - \\ - \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa}}{\varkappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-p} \frac{1}{\Gamma(1+\varkappa-p)} \left(\ln\frac{z}{2} - \Psi(\varkappa-p)\right).$$

Отсюда с помощью равенства (51) получаем, меняя в последней сумме индекс суммирования,

$$\pi N_{\nu}(z) = J_{\nu}(z)\ln\frac{z}{2} - \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{\Psi(\nu+\varkappa)}{\varkappa!\,(\nu+\varkappa)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\varkappa} - \\ - \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-\varkappa-1)!}{\varkappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa-\nu} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!\,(\nu+\varkappa)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\varkappa} \left(\ln\frac{z}{2} - \Psi(\varkappa)\right).$$

Из полученных равенств вытекает

$$\pi N_{\nu}(z) = 2J_{\nu}(z)\ln\frac{z}{2} - \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-\varkappa-1)!}{\varkappa!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa} - \\ - \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{\Psi(\varkappa)+\Psi(\nu+\varkappa)}{\varkappa!\,(\nu+\varkappa)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\varkappa} \qquad (53)$$

(ν — целое).

Таким образом, функция Неймана $N_\nu(z)$ имеет при $z=0$ полюс порядка ν и логарифмическую особенность. То же самое имеет место по равенству (21) для функций $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. В частности, для функций Неймана нулевого порядка имеем

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(J_0(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{x=0}^{\infty}(-1)^x\frac{\Psi(x)}{x!\,x!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2x}\right). \qquad (54)$$

или так как, согласно равенству (1.53а),

$$\Psi(x)=-C+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x},$$

то

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\left(C+\ln\frac{z}{2}\right)J_0(z)-\right.$$

$$\left.-\sum_{x=1}^{\infty}(-1)^x\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2x}}{x!\,x!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}\right)\right), \qquad (54а)$$

а по равенству (21)

$$H_0^{(1)}(z)=iN_0(z)+J_0(z),\quad H_0^{(2)}(z)=-iN_0(z)+J_0(z). \qquad (55)$$

7.8. Другие фундаментальные решения и связи между ними. Дифференциальное уравнение Бесселя является уравнением второго порядка, а потому имеет два линейно независимых фундаментальных решения. В качестве этих решений можно взять функцию Бесселя $J_p(x)$ и функцию Неймана $N_p(z)$. Поэтому введенные нами функции третьего рода, т. е. функции Ганкеля, являются излишними. Тем не менее эти функции используются, поскольку они являются решениями некоторых физических задач и имеют весьма простое поведение на бесконечности. По тем же соображениям в литературе используются многочисленные другие цилиндрические функции, которые в некоторых вопросах позволяют найти решение в наиболее простой форме. Мы опишем в дальнейшем наиболее важные из этих функций и укажем вкратце их основные свойства. Одновременно воспользуемся случаем сделать некоторые замечания относительно обозначений.

Мы будем, как правило, использовать функции Бесселя $J_p(z)$ и функции Ганкеля $H_p^1(z)$, $H_p^2(z)$. Их характеристическими свойствами являются следующие: если $\mathrm{Re}(p)>0$, то функция Бесселя $J_p(z)$ обращается в нуль при $z=0$ и бесконечно велика, если мнимая часть z стремится к ∞. Функции Ганкеля обращаются в бесконечность при $z=0$. При этом функция $H_p^1(z)$ стремится к нулю, если $z\to\infty$ в верхней полуплоскости, а $H_p^2(z)$ стремится к нулю, если $z\to\infty$ в нижней полуплоскости. Мы следуем в обозначениях

Янке — Эмде — Лешу и используем символы $J_p(z)$, $H_p^1(z)$, $H_p^2(z)$, $N_p(z)$. Ватсон использует в первую очередь функции Бесселя и Неймана. Он использует обозначения, отличающиеся от наших, а именно, он полагает

$$Y_p(z) = N_p(z).$$

Вместо функций Ганкеля Ватсон пишет при нецелом p

$$H_p^1(z) = J_p(z) + i\,Y_p(z) \quad \text{и} \quad H_p^2(z) = J_p(z) - i\,Y_p(z).$$

Кроме того, он использует функцию

$$\mathrm{Y}_p(z) = \frac{\pi e^{i\pi p}}{\cos p\pi}\, Y_p(z),$$

которая при целочисленных значениях $p = \nu$ определена Ганкелем с помощью равенства

$$\mathrm{Y}_\nu(z) = \lim_{p\to\nu} \frac{J_p(z) - (-1)^\nu J_{-p}(z)}{p-\nu} = \left(\frac{\partial J_p(z)}{\partial p} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-p}(z)}{\partial p}\right)_{p=\nu}.$$

При чисто мнимых значениях аргумента удобно вместо функций Бесселя ввести другие функции. По предложению Бассе[1]), их пишут в виде[2])

$$I_p(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}p} J_p\left(e^{i\frac{\pi}{2}} z\right) = e^{i\frac{3\pi}{2}p} J_p\left(e^{-i\frac{3\pi}{2}} z\right).$$

Из разложения в ряд (6) видно, что функция $I_p(z)$ вещественна. Далее, введем функцию Макдональда[3])

$$K_p(z) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin p\pi}.$$

Она связана с указанными выше функциями очевидным соотношением

$$K_p(z) = i\frac{\pi}{2} e^{i\frac{\pi}{2}p} H_p^{(1)}(iz) = i\frac{\pi}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}p} H_{-p}^{(1)}(iz).$$

Из равенства (13а) следует, что когда z стремится по вещественной положительной оси к бесконечности, то функция $K_p(z)$ экспоненциально убывает. Кроме того, $K_p(z)$, как и $I_p(z)$, является не только вещественной функцией, но, кроме того, при вещественных p и положительном z эта функция положительна. Это вытекает непосредственно из выведенного в 7.10.2. интеграла (73а), в котором при положительных значениях z можно положить $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

---

[1]) Basset A. B., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, VI (1889), 11.

[2]) Встречающееся обычно в литературе ограничение аргументов для этой формулы является излишним.

[3]) Macdonald H. M., *Proc. London Math. Soc.*, 30 (1899), 167.

При решении электродинамических задач Томсон[1]) ввел функции с аргументами $z\sqrt{i}$ и $z\sqrt{-i}$, которые были обобщены Расселом и Уайтхедом[2]). Они определяются равенствами

$$\operatorname{ber}_p(z)\pm i\operatorname{bei}_p(z)=J_p(z\,e^{\pm 3\pi i/4})$$

и

$$\operatorname{her}_p(z)\pm i\operatorname{hei}_p(z)=H_p^{(1)}(z\,e^{\pm 3\pi i/4}),$$

а также

$$\operatorname{ker}_p(z)\pm i\operatorname{kei}_p(z)=K_p(z\sqrt{\pm i}).$$

Отсюда следует

$$\operatorname{ker}(z)=-\frac{\pi}{2}\operatorname{hei}(z),\quad \operatorname{kei}(z)=\frac{\pi}{2}\operatorname{her}(z),$$

где функции без индекса означают функции нулевого порядка.

7.9. Произведения цилиндрических функций. Произведение двух цилиндрических функций можно представить в виде суммы гипергеометрических функций. Проведем вычисления для функций Бесселя. По равенству (6) имеем

$$J_p(az)\,J_q(bz)=\left(\frac{az}{2}\right)^p\left(\frac{bz}{2}\right)^q\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu+\nu}a^{2\mu}\,b^{2\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(\mu+\nu)}}{\mu!\,\nu!\,\Gamma(p+\mu+1)\,\Gamma(q+\nu+1)}.$$

Вводя индекс суммирования $\lambda=\mu+\nu$ и принимая во внимание функциональное уравнение для Γ-функции, получаем

$$J_p(az)\,J_q(bz)=\left(\frac{az}{2}\right)^p\left(\frac{bz}{2}\right)^q\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{bz}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(q+\lambda+1)\,\Gamma(p+1)}\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\lambda}\frac{(-q-\lambda)_\mu\,(-\lambda)_\mu}{\mu!\,(p+1)_\mu}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^{\mu}.$$

Из равенства (4.12) следует

$$J_p(az)\,J_q(bz)=\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^p\left(\frac{bz}{2}\right)^q}{\Gamma(p+1)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}\left(\frac{bz}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(q+\lambda+1)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(-\lambda,\ -q-\lambda;\ p+1;\ \frac{a^2}{b^2}\right).\qquad(56)$$

---

[1]) Thomson, W. *Math. and Phys.* Papers III (1890), стр. 492.
[2]) Whitehead A. N., *Quarterly J.*, 42 (1911), 316—342.

Частные случаи

При $a=b$ аргумент гипергеометрической функции равен 1. По равенству (4.23) функция приводится в этом случае к произведению Г-функций. Подстановка дает

$$J_p(z)J_q(z)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(-1)^\lambda(p+q+\lambda+1)_\lambda}{\lambda!\Gamma(p+\lambda+1)\Gamma(q+\lambda+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+q+2\lambda}. \quad (56a)$$

Полагая $b=ia$ и принимая во внимание равенство

$$I_p(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}p}J_p(iz),$$

получаем

$$J_p(az)I_p(az)=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{2p+2\lambda}}{\lambda!\Gamma(p+1)\Gamma(p+\lambda+1)}{}_2F_1(-\lambda,\ -p-\lambda;\ p+1;\ -1).$$

Используя равенство Куммера

$${}_2F_1(a,\ b;\ a-b+1;\ -1)=\frac{\Gamma(a-b+1)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}-b+1\right)\Gamma(a+1)},$$

получаем путем двукратного применения формулы удвоения Г-функции и равенства (1.40а)

$$J_p(az)I_p(az)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{az}{2}\right)^{2p+2\lambda}\cos\frac{\pi\lambda}{2}}{\Gamma(p+\lambda+1)\Gamma\left(p+\frac{\lambda}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}.$$

Поскольку $\cos\pi\lambda/2$ обращается в нуль при нечетных λ, окончательно получаем

$$J_p(az)I_p(az)=\left(\frac{az}{2}\right)^{2p}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\left(\frac{az}{2}\right)^{4\mu}}{\mu!\Gamma(p+\mu+1)\Gamma(p+2\mu+1)}. \quad (56б)$$

Равенство (56а) дает возможность представить произведение двух функций Бесселя в виде интеграла от бесселевой функции. Мы будем исходить из равенства (1.76)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\cos ntdt=\frac{\pi}{2^{m+1}}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}\quad(\mathrm{Re}\,m>+1).$$

При $m = p + q + 2\lambda$, $n = p - q$ заменим в равенстве (56а) Г-функции соответствующими интегралами и получим

$$J_p(z) J_q(z) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{z^{p+q+2\lambda}}{\lambda! \Gamma(p+q+\lambda+1)} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q+2\lambda} \theta \cos(p-q)\theta \, d\theta.$$

Переставляя суммирование и интегрирование, получаем

$$J_p(z) J_q(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((p-q)\theta) \, d\theta \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} (z \cos\theta)^{p+q+2\lambda}}{\lambda! \Gamma(p+q+\lambda+1)},$$

а потому, в силу равенства (6),

$$J_p(z) J_q(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{p+q}(2z \cos\theta)(\cos(p-q)\theta) \, d\theta \qquad (56в)$$

$$(\operatorname{Re}(p+q) > -1).$$

7.10. Интегральные представления цилиндрических функций

7.10.1. Интеграл Пуассона. Мы установили в равенстве (16) связь между функцией Бесселя и вырожденной гипергеометрической функцией в следующем виде:

$$2 J_p(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} (2z)^p e^{iz} v\left(\frac{1}{2}+p;\ 1+2p;\ -2iz\right).$$

Заменяя здесь v по равенству (6.15), получаем

$$2 J_p(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(2z)^p}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_{(0)}^{(1)} s^{p-\frac{1}{2}} (1-s)^{p-\frac{1}{2}} e^{iz(1-2s)} \, ds.$$

Подстановка $t = 1 - 2s$ переводит это выражение в

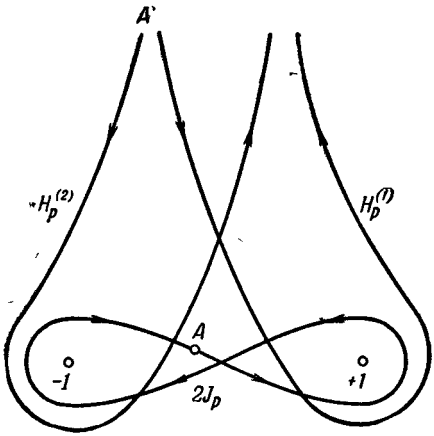
$$2 J_p(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_{(-1)}^{(+1)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} e^{izt} dt. \qquad (57)$$

При $\operatorname{Re} p > -1/2$ можно непосредственно вычислить этот интеграл. В общем случае надо вычислять этот интеграл по пути, имеющем

вид восьмерки, обходящей особые точки $t = \pm 1$. Принимая во внимание равенство (1.40а), можно написать

$$2J_p(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^p \oint^{(+1+,\,-1-)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} e^{izt}\,dt. \quad (57а)$$

Заменим путь, имеющий вид восьмерки, разностью двух обходов



Р и с. 39. Пути интегрирования и определение аргументов для интегралов (57), (58), (59).

точек $+1$ и -1 и сделаем во втором интеграле подстановку $t' = -t$. Мы получим тогда

$$2J_p(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^p \int_0^{(1+)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} (e^{izt}+e^{-izt})\,dt, \quad (57б)$$

откуда следует

$$J_p(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^p \int_0^{(1+)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos zt\,dt. \quad (57в)$$

На римановой поверхности путь интегрирования не замкнут.

Точно так же получаем из равенств (12) и (14)

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^p \int_{\infty e^{i\beta}}^{(1+)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} e^{izt}\,dt \quad (58)$$

и

$$H_p^{(2)}(z)=-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^p\int\limits_{i\infty}^{(-1+)}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}e^{izt}dt. \qquad (59)$$

В этих трех интегралах аргументы подинтегральных функций выбраны так, чтобы в точке A рис. 39 они обращались в нуль, а точка A' могла быть переведена в точку A с помощью деформации пути интегрирования. Пути интегрирования так уходят в бесконечность, что $\operatorname{Re}(izt)<0$. Для вещественных z это означает, что путь интегрирования уходит на бесконечность в верхней полуплоскости. Вообще должно иметь место неравенство

$$-\arg z<\arg t<\pi-\arg z.$$

Так как путь, имеющий вид восьмерки, можно деформировать в два пути, обходящие особые точки, то справедливо равенство $2J_p(z)=H_p^{(1)}(z)+H_p^{(2)}(z)$. Выведенные из него равенства дают представления цилиндрических функций, называемые *интегралами Пуассона*. В приведенной здесь форме они были впервые даны Ганкелем.

Интеграл Пуассона может быть преобразован к виду, позволяющему установить связи между функциями Бесселя, индексы которых отличаются на целое число. По равенству (57) имеем

$$J_{p+\nu}(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{p+\nu}}{\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}dt,$$

где при $\operatorname{Re}p>-\nu-1/2$ путь интегрирования идет из -1 к $+1$. Заменим в интеграле показательную функцию по формуле

$$e^{izt}=\frac{1}{(iz)^\nu}\frac{d^\nu e^{izt}}{dt^\nu}.$$

Мы получим

$$J_{p+\nu}(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{p+\nu}}{(iz)^\nu\,\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^{p+\nu-\frac{1}{2}}\frac{d^\nu e^{izt}}{dt^\nu}dt.$$

Из равенства (5.141а) следует тогда

$$J_{p+\nu}(z)=\frac{\nu!\,\Gamma(p)\,(2z)^p}{i^\nu 2\pi\Gamma(2p+\nu)}\int\limits_{-1}^{+1}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}C_\nu^p(t)\,e^{izt}dt \qquad (60)$$

$$\left(\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}\right).$$

Выберем в качестве переменного интегрирования $\cos\theta$. Мы получаем тогда равенство

$$J_{p+\nu}(z)=\frac{(-i)^{\nu}\nu!\,\Gamma(p)}{2\pi\Gamma(2p+\nu)}(2z)^{p}\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\theta}\sin^{2p}\theta\,C_{\nu}^{p}(\cos\theta)\,d\theta. \quad (60а)$$

При $p=1/2$ функции Гегенбауэра переходят в многочлены Лежандра, а бесселевы функции — в элементарные функции (см. 7.11)

$$J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)=(-i)^{\nu}\left(\frac{z}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\pi}e^{iz\cos\theta}P_{\nu}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta. \quad (60б)$$

Подстановка $t=\cos\omega$ приводит интеграл Пуассона к виду

$$Z_{p}(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-i\pi}z}{2}\right)^{p}\int_{C}e^{iz\cos\omega}\sin^{2p}\omega\,d\omega. \quad (61)$$

Пути интегрирования C получаются при отображении $t=\cos\omega$ из путей, изображенных на рис. 39, и пробегаются в обратных направлениях; они изображены на рис. 40. При этом надо иметь в виду, что $1-t=2\sin^2\frac{\omega}{2}$ и $1+t=2\cos^2\frac{\omega}{2}$. Обходу точки $t=1$ в положительном направлении соответствует изменение аргумента $1-t$ на 2π, а $1+t$ остается неизменным. Отсюда следует, что $\sin\frac{\omega}{2}$ меняет знак, в то время как $\cos\frac{\omega}{2}$ не меняется; это соответствует переходу от ω к $-\omega$. Соответственно этому обход в положительном направлении точки $t=-1$ приводит к изменению знака $\cos\frac{\omega}{2}$, в то время как $\sin\frac{\omega}{2}$ не меняется; это соответствует переходу от ω к $2\pi-\omega$. Отрицательному обходу точки $t=-1$ соответствует переход от ω к $-2\pi-\omega$. Если сопоставить точке A на плоскости t значение $\omega=\frac{\pi}{2}$, то из произведенных рассмотрений вытекает, что обход в положительном направлении точки $t=+1$ приводит к значению $\omega=-\frac{\pi}{2}$; после этого отрицательный обход точки $t=-1$ приводит к значению $\omega=-2\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{2}$. Поскольку путь интегрирования пробегается в противоположном направлении, то путь, имеющий форму восьмерки, соответствует переходу от $-\frac{3\pi}{2}$ к $+\frac{\pi}{2}$; при этом, как легко видеть, точка $-\pi$ обходится в нижней полуплоскости, а точка 0 — в верхней полуплоскости. Для идущего из

бесконечности пути на плоскости t мы получаем: если обозначить аргумент z через Θ, а аргумент t через φ, то при условии $\operatorname{Re}(izt) < 0$ имеем $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Theta + \varphi\right) < 0$; следовательно, при $|t| \to \infty$ φ принадлежит отрезку $-\Theta < \varphi < \pi - \Theta$ (или отрезку, получаемому из него

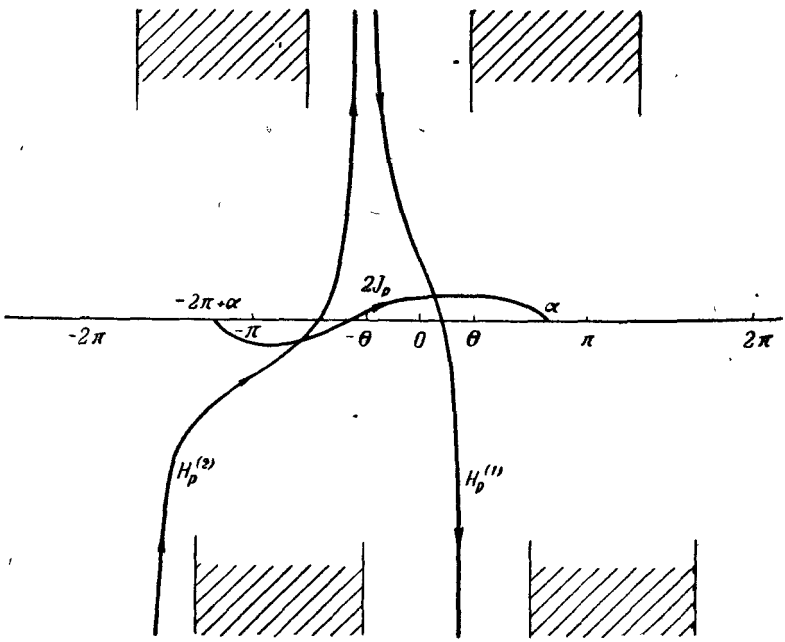


Рис. 40. Пути интегрирования для интегралов Пуассона.

сдвигом на $2\pi n$). Преобразование $t = \cos\omega$ дает, если положить $\omega = \omega_1 + i\omega_2$,

$$|t|\cos\varphi = \cos\omega_1 \operatorname{ch}\omega_2,$$
$$|t|\sin\varphi = -\sin\omega_1 \operatorname{sh}\omega_2.$$

Когда $\omega_2 \to -\infty$, имеем $-\operatorname{sh}\omega_2 = \operatorname{ch}\omega_2$, а потому оба равенства выполняются при $\omega_1 = \varphi$. Если $\omega_2 \to +\infty$, то равенство выполняется при $\omega_1 = -\varphi$. Отсюда следует, что на плоскости ω для пути интегрирования в нижней полуплоскости при большой мнимой части допустима лишь полоса $-\Theta < \omega_1 < \pi - \Theta$, в то время как в верхней полуплоскости допустима полоса $\Theta > \omega_1 > \Theta - \pi$ и все полосы, получающиеся из нее сдвигом на $2\pi n$. На рис. 40 заштрихованы недопустимые области и указаны пути интегрирования для функций

Ганкеля. Эти пути легко получаются, если принять во внимание сказанное выше относительно обхода особых точек на плоскости t.

Результаты проведенных рассмотрений таковы. Интеграл Пуассона в уравнении (60) представляет

$2J_p$ при пути от $-2\pi+\alpha$ до α,

$H_p^{(2)}$ при пути от $-2\pi+\beta_1-i\infty$ до $-\beta_2+i\infty$,

$H_p^{(1)}$ при пути от $-\beta_3+i\infty$ до $\beta_4-i\infty$.

Здесь α, β_1, β_2, β_3, β_4 — значения, произвольно выбранные в границах

$$-2\pi-\Theta<\beta_1<-\pi-\Theta,$$
$$-\pi+\Theta<\beta_2<\Theta,$$
$$-\pi+\Theta<\beta_3<\Theta,$$
$$-\Theta<\beta_4<+\Theta.$$

Если $\operatorname{Re} p\leqslant-\frac{1}{2}$, то мы должны обходить особую точку $\omega=-\pi$ (и все точки $(2n+1)\pi$) в положительном направлении, а точку $\omega=0$ (и все точки $2\pi n$) — в отрицательном направлении. Поскольку подинтегральная функция периодична и имеет период 2π, то все пути, получаемые сдвигом на $2n\pi$, равноправны; в частности, для J_p начало пути можно выбрать произвольно. Если точка $\omega=n\pi$ не является полюсом $\left(\operatorname{Re} p>-\frac{1}{2}\right)$, то для функций J_p можно взять отрезок вещественной оси длиной 2π; этому соответствует, что в равенстве (57) вместо петли берется путь из -1 в $+1$. Равенству (57в) соответствует

$$J_p(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_0^1(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\cos zt\,dt, \qquad (62)$$

$$\left(\operatorname{Re} p>-\frac{1}{2}\right),$$

или, при переходе на плоскость ω,

$$J_p(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}\omega\,\cos(z\cos\omega)\,d\omega \qquad (62а)$$

$$\left(\operatorname{Re} p>-\frac{1}{2}\right),$$

или, наконец, непосредственно используя равенство (6),

$$J_p(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^p\int_0^{\pi}\sin^{2p}\omega\, e^{iz\cos\omega}\,d\omega \qquad (62б)$$

$$\left(\operatorname{Re} p>-\frac{1}{2}\right).$$

7.10.2. Интегралы Бесселя — Сонина — Зоммерфельда. Для функций Бесселя мы имеем простое представление (равенство (6)):

$$J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{{}_0F_1\left(p+1;-\frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma(p+1)}.$$

Применяя формулу (4.79б), получаем интеграл Шлефли

$$J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{1}{2i\pi}\oint_{-\infty}^{(0+)}e^{t-\frac{z^2}{4t}}t^{-p-1}\,dt. \qquad (63)$$

Если $\operatorname{Re} p>-1$, то путь интегрирования можно деформировать так, чтобы он шел в бесконечность параллельно мнимой оси. Тогда равенство принимает вид

$$J_p(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{1}{2i\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{t-\frac{z^2}{4t}}t^{-p-1}\,dt \qquad (63а)$$

$$(c>0,\ \operatorname{Re} p>-1).$$

Подстановкой $t=sz/2$ получаем отсюда интеграл Сонина

$$J_p(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint_{-\infty}^{(0+)}e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-p-1}\,ds. \qquad (64)$$

Положим, далее,

$$s=e^{-i\left(u-\frac{\pi}{2}\right)},\quad s-\frac{1}{s}=2i\cos u. \qquad (64а)$$

Мы получим тогда интеграл Зоммерфельда

$$J_p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_2+2\pi+i\infty}e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\,du. \qquad (65)$$

Возникающий при подстановке $ds=-is\,du$ знак минус принимается во внимание с помощью перестановки пределов интегрирования. Введем комплексное переменное $u=\alpha+i\beta$; тогда отображение плоскости s на плоскость u дается равенствами

$$\beta=\ln|s|,\quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\arg s=\frac{\pi}{2}+\arg z-\arg t. \qquad (65а)$$

Поскольку в интеграле (62) верхний предел интегрирования определяется тем, что $\operatorname{Re} t = -\infty$, то $|t| = \infty$, $\frac{\pi}{2} < \arg t < \frac{3\pi}{2}$. Поэтому для нижнего предела интегрирования по u в равенстве (64) имеем из соотношения (64а)

$$\beta = \infty, \quad -\pi + \arg z < \alpha_1 < \arg z. \tag{65б}$$

В нижнем пределе интегрирования интеграла (62) аргумент принадлежит сдвинутой на -2π области. Соответственно этому вещественная часть верхнего предела интегрирования интеграла (64) принадлежит области, сдвинутой на $+2\pi$.

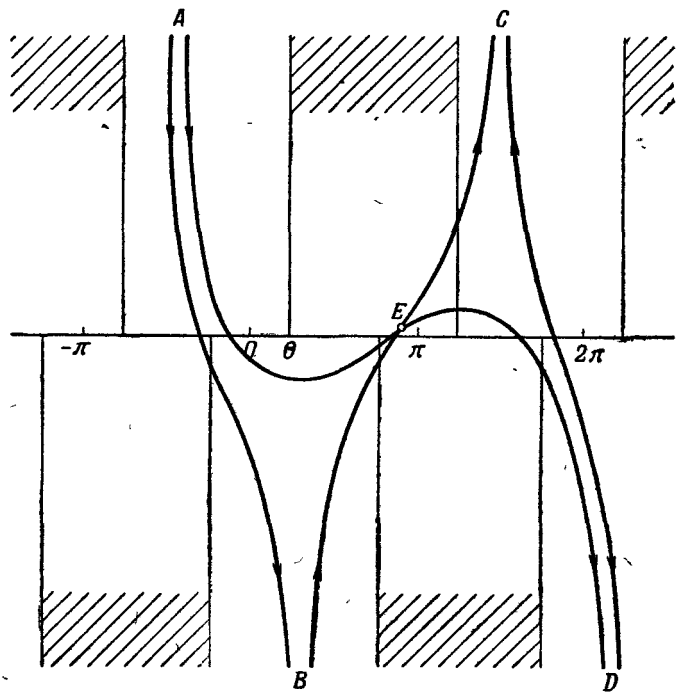


Рис. 41. Пути интегрирования для интегралов Зоммерфельда.

Путь интегрирования (см. рис. 41) начинается, таким образом, в бесконечно удаленной точке некоторой допустимой полуполосы $\arg z - \pi < \alpha_1 < \arg z$ верхней полуплоскости u, проходит любым способом конечную область и заканчивается в бесконечно удаленной точке полуполосы, получаемой из исходной сдвигом на 2π.

Меняя знак p, получаем далее

$$J_{-p}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha_3+i\infty}^{\alpha_4+2\pi+i\infty} e^{i\left(z\cos v-p\left(v-\frac{\pi}{2}\right)\right)}dv. \tag{65в}$$

Отсюда подстановкой $u=-v$ с одновременной перестановкой пределов интегрирования получаем

$$e^{i\pi p}J_{-p}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\alpha_4-2\pi-i\infty}^{-\alpha_3-i\infty} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du.$$

Заметим, что сдвиг пути интегрирования вправо на 2π влечет за собой умножение подинтегральной функции на $e^{2i\pi p}$. Отсюда следует

$$e^{i\pi p}J_{-p}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\alpha_3-i\infty}^{-\alpha_4+2\pi-i\infty} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du. \tag{65г}$$

Для этого интеграла мы получаем такое же разложение нижней полуплоскости на полосы, как и аналогичное разложение плоскости, использованное для интеграла Пуассона (60).

Поскольку интегралы (65) и (65г) отличаются друг от друга лишь путями интегрирования, из них вытекает соотношение

$$J_p(z)-e^{i\pi p}J_{-p}(z)=\int\limits_A^C-\int\limits_B^D.$$

Пути интегрирования можно выбрать так, чтобы они имели общую точку E; тогда имеем (см. рис. 41)

$$\int\limits_A^C-\int\limits_B^D=\int\limits_A^E+\int\limits_E^C-\int\limits_B^E-\int\limits_E^D=\left(\int\limits_A^E+\int\limits_E^B\right)-\left(\int\limits_C^E+\int\limits_E^D\right)=\int\limits_A^B-\int\limits_C^D.$$

Путь CD при сдвиге на 2π переходит в путь AB. Интеграл по CD равен, таким образом, интегралу по пути AB, умноженному на $e^{2i\pi p}$. Отсюда следует, что

$$J_p(z)-e^{i\pi p}J_{-p}(z)=(1-e^{2i\pi p})\frac{1}{2\pi}\int\limits_A^B e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du.$$

В силу равенства (18), полученное соотношение равносильно соотношению

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_A^B e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du. \tag{66}$$

Наконец, из равенства

$$H_p^{(2)}(z)=2J_p(z)-H_p^{(1)}(z)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_A^C e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du+\frac{1}{\pi}\int_A^B e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du,$$

мы получаем

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_B^C e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du. \tag{67}$$

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему выводу. Пусть

$$Z_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du. \tag{68}$$

Тогда $Z_p(z)$ равно

$$\left.\begin{array}{l} 2J_p(z), \text{ если } u_1=\alpha_1+i\infty, \quad u_2=\alpha_3+2\pi+i\infty, \\ H_p^{(1)}(z), \text{ если } u_1=\alpha_1+i\infty, \quad u_2=-\alpha_2-i\infty, \\ H_p^{(2)}(z), \text{ если } u_1=-\alpha_2-i\infty, \quad u_2=\alpha_3+2\pi+i\infty \end{array}\right\} \arg z-\pi<\alpha_i<\arg z.$$

Для практики интересен вопрос, можно ли провести путь интегрирования по границе допустимых полос. Рассмотрим для этого интегралы

$$F_p^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_1+i\infty}^{\alpha_1} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du$$

и

$$F_p^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_2-i\infty}^{\alpha_2} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du$$

для значений $\alpha_{1,2}=\pm\arg z$ и $\alpha_{1,2}=\pm(\arg z-\pi)$. Преобразуем эти интегралы с помощью формул (64а) к виду (63). Мы получим тогда

$$F_p^{(1)}(z)=\frac{1}{i\pi}\int_F^A e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-p-1}ds=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{i\pi}\int_e^{R\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-p-1}ds.$$

Путь интегрирования в плоскости s ($s=re^{i\Phi}$) лежит на луче $\Phi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, начинается в точке, где $r=1$, и идет (при $R\to\infty$) в бесконечно удаленную точку. Рассмотрим интеграл при конечном

значении R. Дополним отрезок FA до замкнутого пути, добавив к нему дугу AA' окружности $r=R$ с углом $\pm\frac{\pi}{2}$, проходящую в допустимой области плоскости s (в полуплоскости), и произвольную дугу $A'F$, такую, что путь $FAA'F$ не охватывает начало

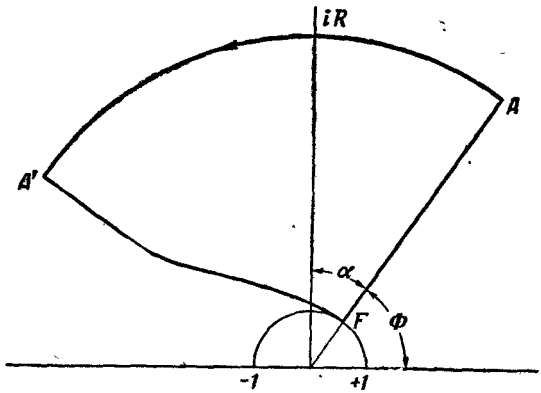


Рис. 42. Положение пути интегрирования на плоскости s.

координат (см. рис. 42). Поскольку этот замкнутый путь не охватывает ни одной особой точки, то

$$\int_F^A + \int_A^{A'} + \int_{A'}^F = 0.$$

Мы покажем ниже, что при некоторых предположениях интеграл от A до A' при $R\to\infty$ стремится к нулю. Но тогда искомый интеграл от F до A равен сходящемуся интегралу от F до A'. Поскольку вдоль пути интегрирования AA' имеем $ds=is\,d\Phi$, то, полагая $z=|z|\,e^{i\Theta}$, имеем

$$\frac{1}{i\pi}\int_A^{A'} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-p-1}\,ds=\frac{R^{-p}}{\pi}\int_A^{A'} e^{\frac{|z|}{2}\left(\mathrm{Re}^{i(\Theta+\Phi)}-\frac{1}{R}e^{i(\Theta-\Phi)}\right)}e^{-ip\Phi}\,d\Phi.$$

Используя дважды то обстоятельство, что абсолютное значение показательной функции при чисто мнимом значении показателя равно 1, получаем

$$\left|\frac{1}{i\pi}\int_A^{A'} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}s^{-p-1}\,ds\right|\leqslant\left|\frac{R^{-p}}{\pi}\cdot e^{\frac{|z|}{2R}}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}-\alpha_1\pm\frac{\pi}{2}} e^{\frac{|z|R}{2}\cos(\Theta+\Phi)}\,d\Phi\right|.$$

Подставим здесь для α_1 значение $+\arg z = \Theta$. Тогда в верхнем пределе надо взять знак $+$. Сделаем подстановку $\omega = \Phi + \Theta - \frac{\pi}{2}$. Используя неравенство $\omega \geqslant 2\omega/\pi$, имеющее место при $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\left| \frac{1}{i\pi} \int_A^{A'} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-p-1}\, ds \right| \leqslant \left| \frac{R^{-p}}{\pi} e^{\frac{|z|}{2R}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{|z|R}{\pi}\omega}\, d\omega \right|.$$

При $\alpha_1 = -\pi + \Theta$ получаем с точностью до несущественного изменения знака то же самое выражение. При этом надо иметь в виду, что из-за знака минус в верхнем пределе интегрирования надо сделать подстановку $\omega = \frac{3\pi}{2} - (\Phi + \Theta)$. Выполним интегрирование и перейдем к пределу для $R \to \infty$. Мы получим

$$\left| \frac{1}{i\pi} \int_A^{A'} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-p-1}\, ds \right| \leqslant \lim_{R\to\infty} \left| \frac{R^{-1-p}}{|z|} \left(1 - e^{-\frac{|z|R}{2}}\right) e^{\frac{|z|}{2R}} \right|.$$

Этот предел существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} p > -1$. При этом предположении интеграл в верхней полуплоскости сходится также и на границе полосы. Аналогичное рассмотрение, в котором вместо точки $r = \infty$ берется точка $r = 0$, приводит к условию сходимости в нижней полуплоскости.

Для простоты положим $s' = -1/s$; тогда единственное изменение в формулах заключается в том, что меняется знак при p. Для того чтобы существовал предел

$$\lim_{R\to\infty} \left| \frac{R^{-1+p}}{|z|} e^{\frac{|z|}{2R}} \left(1 - e^{-\frac{|z|R}{2}}\right) \right|,$$

должно быть $\operatorname{Re} p < 1$. Если это условие выполнено, то интегралы взятые по границе допустимой полосы, сходятся. Мы получили таким образом, следующий результат.

Для функций Бесселя $J_p(z)$ можно брать интеграл (68) и по границам допустимых полос в верхней полуплоскости, когда $\operatorname{Re} p > -1$, и в нижней полуплоскости, когда $\operatorname{Re} p < 1$. Для функций Ганкеля $H_p(z)$ можно провести путь интегрирования по границам в бесконечность, если $-1 < \operatorname{Re} p < +1$.

7.10.2.1. Непосредственное вычисление интеграла Зоммерфельда. Интеграл (64) был получен Зоммерфельдом непосредственно из дифференциального уравнения. Простейшим решением волнового уравнения $\Delta u + u = 0$ является плоская волна $u = e^{ix} = e^{ir\cos\varphi}$. Если ищут решение задачи для кругового цилиндра, имеющее вид

$V(r)e^{-i\nu\varphi}$, то функция V должна удовлетворять дифференциальному уравнению Бесселя $V''+\frac{1}{r}V'+\left(1-\frac{\nu^2}{r^2}\right)V=0$. С другой стороны, функция v, определяемая равенством $u=ve^{-i\nu\varphi}$, где $u=e^{ir\cos\varphi}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\left(1-\frac{\nu^2}{r^2}\right)v+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-\frac{2i\nu}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=0.$$

Попытаемся теперь найти независящее от φ решение V, усредняя решение v по φ. Для этого надо положить

$$V=\int_a^b v\,d\varphi=\int_a^b e^{i(r\cos\varphi+\nu\varphi)}\,d\varphi.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение и переставляя дифференцирование и интегрирование, получаем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\left(1-\frac{\nu^2}{r^2}\right)V+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]_a^b-\frac{2i\nu}{r^2}[v]_a^b=0.$$

Таким образом, если пределы интегрирования a и b выбраны так, чтобы $\left[\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]_a^b$ и $[v]_a^b$ обращались в нуль, то V является решением дифференциального уравнения Бесселя. Поскольку $v=\exp(i(z\cos\varphi+\nu\varphi))$, то оба эти условия будут выполнены, если в точках a и b вещественная часть равна $-\infty$. Отсюда следует, что интегралы (64), (66) и (67) являются решениями дифференциального уравнения Бесселя. Отсюда можно вывести все свойства цилиндрических функций. Поскольку возникающая из физических соображений целочисленность ν не использована при вычислениях, то ν можно заменить на p.

7.10.2.2. Частные случаи интегралов Зоммерфельда. Интегралы Зоммерфельда имеют целый ряд частных случаев. Если $p=\nu$ — целое число, то подинтегральная функция периодична и имеет период 2π. Путь для $2J_p$ можно деформировать в путь I, II, III (рис. 43). Если параллели к мнимой оси I и III получаются одна из другой сдвигом на 2π, то их вклады в интеграл взаимно уничтожаются. Поэтому остается лишь путь II вдоль вещественной оси

$$J_\nu(z)=\frac{i^{-\nu}}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} e^{iz\cos\varphi}e^{i\nu\varphi}\,d\varphi. \tag{69}$$

Разложим показательную функцию $\exp(i\nu\varphi)$ по формуле Эйлера $\cos\nu\varphi+i\sin\nu\varphi$. Мы получим тогда четную и нечетную функции Интеграл от $-\pi$ до $+\pi$ от нечетной части обращается в нуль.

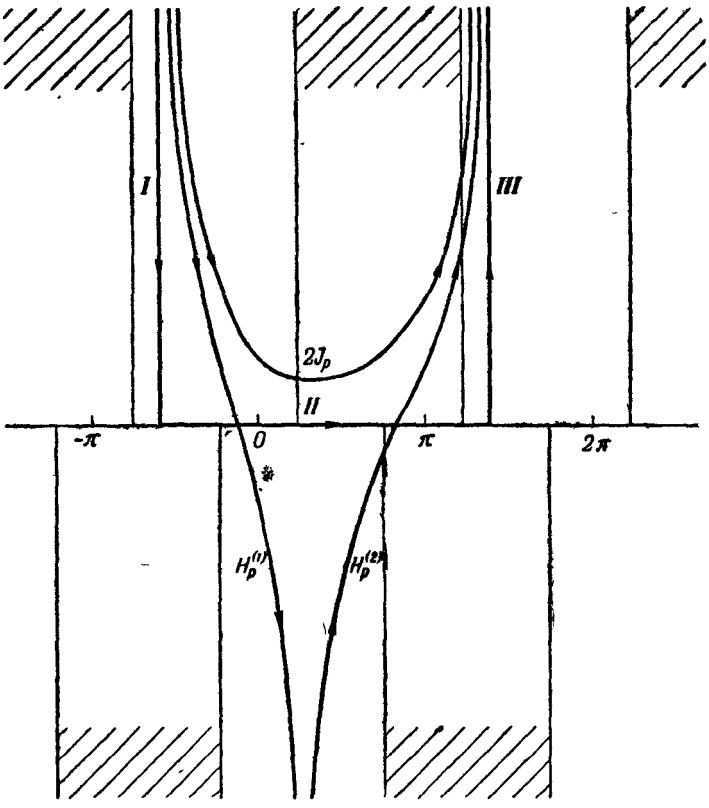


Рис. 43. Пути для интегральных представлений Зоммерфельда цилиндрических функций.

а интеграл от четной части равен удвоенному интегралу от 0 до π. Отсюда имеем (Хансен)

$$J_\nu(z) = \frac{i^{-\nu}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz\cos\varphi} \cos\nu\varphi \, d\varphi. \tag{70}$$

Заменим теперь в интеграле Зоммерфельда $\varphi - \frac{\pi}{2}$ на $-\psi$; тогда переставляя пределы интегрирования, получаем (Бессель)

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-2\pi}^{\alpha} e^{i(z\sin\psi - \nu\psi)} \, d\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z\sin\psi - \nu\psi) \, d\psi. \tag{71}$$

Для четного индекса получаем отсюда

$$J_{2\nu}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\sin\psi)\cos 2\nu\psi\,d\psi=$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\cos\psi)\cos 2\nu\psi\,d\psi, \qquad (72a)$$

а для нечетного индекса

$$J_{2\nu+1}(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\sin\psi)\sin(2\nu+1)\psi\,d\psi=$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\cos\psi)\sin(2\nu+1)\psi\,d\psi. \qquad (72б)$$

Для первой функции Ганкеля подстановка $u=iv=i\ln t$ в формуле (68) приводит к равенству

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{i\pi}e^{-\frac{ip\pi}{2}}\int_{0e^{i\alpha_2}}^{\infty e^{-i\alpha_1}}e^{i\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{-p-1}\,dt \qquad (73)$$

$$(\arg z-\pi<\alpha<\arg z),$$

или, если принять во внимание определение в пункте 7.8, к равенству

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\int_{0e^{i\beta_2}}^{\infty e^{i\beta_1}}e^{-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{-p-1}\,dt \qquad (73a)$$

$$\left(\arg z-\frac{\pi}{2}<\beta<\arg z+\frac{\pi}{2}\right).$$

Мы получили, таким образом, дополнение к интегралу Сонина (равенство (64)). Далее, можно расположить путь интегрирования в плоскости u так, чтобы он был симметричен относительно начала координат. Полагая $u=-iw$, получаем тогда

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_{i\alpha-\infty}^{-i\alpha+\infty}e^{iz\operatorname{ch}w+pw}dw=$$

$$=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_{i\alpha-\infty}^{-i\alpha+\infty}e^{iz\operatorname{ch}w}(\operatorname{ch}pw+\operatorname{sh}pw)\,dw. \qquad (74)$$

Поскольку $\operatorname{sh} pw$ — нечетная функция, то вклад по симметричному пути равен нулю и остается

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_0^{-i\alpha+\infty} e^{iz\operatorname{ch} w}\operatorname{ch} pw\,dw. \qquad (74а)$$

Если $\operatorname{Im} z>0$, то можно положить $\alpha=0$ и получить

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_0^{\infty} e^{iz\operatorname{ch} w}\operatorname{ch} pw\,dw \qquad (\operatorname{Im} z>0). \qquad (74б)$$

Из результатов, полученных в п.7.10 следует, далее, что

$$H_p^{(1)}(x)=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\operatorname{ch} w+pw}\,dw=$$

$$=\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}p}}{i\pi}\int_0^{\infty} e^{ix\operatorname{ch} w}\operatorname{ch} pw\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|<1) \qquad (74в)$$

и

$$H_p^{(1)}(ix)=\frac{1}{\pi}\int_{i\infty}^{-i\infty} e^{x\sin v+ipv}\,dv=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\operatorname{sh} w-pw}\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|>1). \qquad (75)$$

По равенству (31а) имеем

$$e^{i\pi p}H_p^{(1)}(ix)=H_{-p}^{(1)}(ix)=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\operatorname{sh} w+pw}\,dw$$

$$(|\operatorname{Re} p|<1).$$

Складывая это соотношение с (75), получаем

$$i\pi e^{i\frac{\pi}{2}p}\cos\frac{p\pi}{2}H_p^{(1)}(ix)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\operatorname{sh} w}\operatorname{ch} pw\,dw=$$

$$=2\int_0^{\infty}\cos(x\operatorname{sh} w)\operatorname{ch} pw\,dw \qquad (75а)$$

$$(|\operatorname{Re} p|<1).$$

Если для второй функции Ганкеля выбрать путь интегрирования симметричным относительно точки $u=\pi$, то, полагая $u-\pi=iw$,

получим

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi-\alpha'-i\infty}^{\pi+\alpha'+i\infty} e^{i\left(z\cos u+p\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\right)}du=$$

$$=-\frac{2}{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}p}\int\limits_0^{-i\alpha'+\infty} e^{-iz\,\mathrm{ch}\,w}\,\mathrm{ch}\,pw\,dw \qquad (76)$$

$$(\arg z<\alpha'<\pi+\arg z).$$

Если $\operatorname{Im} z<0$, то можно положить $\alpha'=0$, что приводит к равенствам

$$H_p^{(2)}(z)=-\frac{2}{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}p}\int\limits_0^{\infty} e^{-iz\,\mathrm{ch}\,w}\,\mathrm{ch}\,pw\,dw, \qquad (\operatorname{Im} z<0) \quad (76а)$$

и

$$H_p^{(2)}(-x)=-\frac{2}{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}p}\int\limits_0^{\infty} e^{ix\,\mathrm{ch}\,w}\,\mathrm{ch}\,pw\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|<1). \quad (76б)$$

Равенству (75) соответствует соотношение

$$H_p^{(2)}(-ix)=-\frac{1}{i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\,\mathrm{sh}\,w+pw}\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|<1). \quad (77)$$

Соответствующее преобразование приводит к аналогу равенства (75а)

$$-i\pi e^{-i\frac{\pi}{2}p}\cos\frac{p\pi}{2}H_p^{(2)}(-ix)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\,\mathrm{sh}\,w}\,\mathrm{ch}\,pw\,dw=$$

$$=2\int\limits_0^{\infty}\cos(x\,\mathrm{sh}\,w)\,\mathrm{ch}\,pw\,dw \qquad (78)$$

$$(|\operatorname{Re} p|<1).$$

Наконец, складывая равенства (74в) и (76б), получаем

$$J_p(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\sin\left(x\,\mathrm{ch}\,w-p\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{ch}\,pw\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|<1), \quad (79а)$$

в то время как вычитание дает

$$N_p(x)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\cos\left(x\,\mathrm{ch}\,w-p\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{ch}\,pw\,dw \qquad (|\operatorname{Re} p|<1). \quad (79б)$$

При $p=0$ получаем отсюда (полагая $\operatorname{ch} w=\tau$)

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin x\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}} \tag{79в}$$

и

$$N_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos x\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2-1}}. \tag{79г}$$

В заключение наших рассмотрений укажем еще, что Ватсон использует другую форму интегралов Шлефли — Зоммерфельда; подстановка $u-\frac{\pi}{2}=iw$ дает

$$Z_p(z)=\frac{1}{i\pi}\int_{w_1}^{w_2} e^{z\operatorname{sh} w-pw}\,dw. \tag{80}$$

Путь интегрирования получается из изображенного на рис. 43 поворотом на 90°. Другая, восходящая к Шлефли, форма получается, если в интеграле Зоммерфельда провести путь интегрирования из $-\frac{\pi}{2}+i\infty$ в $-\frac{\pi}{2}$, из $-\frac{\pi}{2}$ в точку $\frac{3\pi}{2}$ и, далее, в $\frac{3\pi}{2}+i\infty$. Используя вдоль первого и третьего отрезка формулу (80) и заменяя на отрезке вещественной оси $u-\pi/2$ на φ, получаем

$$J_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi-p\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin p\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh} w-pw}\,dw \tag{81}$$

$$\left(|\arg z|<\frac{\pi}{2}\right).$$

В силу специального выбора пути интегрирования, эта формула верна лишь, если $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$.

7.11. Цилиндрические функции полуцелого индекса $Z_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$.

Из интегрального представления Пуассона (равенство (57)) непосредственно следует, что функция

$$J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)^\nu e^{izt}\,dt \tag{82}$$

может быть представлена в виде суммы двух слагаемых, имеющих вид многочленов от $\frac{1}{z}$ и умноженных на $z^{\frac{1}{2}}e^{\pm iz}$. Поскольку в общем

случае формулы получаются почти элементарно, но они мало обозримы, мы ограничимся вычислением лишь для нескольких случаев. При $\nu = 0$ равенство (82) дает

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{izt}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \tag{83}$$

Используя рекуррентные формулы (48) и (48б), можем получить отсюда все остальные функции. Например, имеем

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = -z^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right), \tag{83а}$$

$$J_{\frac{5}{2}}(z) = -z^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(z)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right) \tag{83б}$$

и

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = z^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left(z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(z)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \tag{84}$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = z^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(z)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\frac{\cos z}{z} - \sin z\right), \tag{84а}$$

$$J_{-\frac{5}{2}}(z) = z^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dz}\left(z^{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(z)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\cos z + \frac{3}{z}\sin z\right). \tag{84б}$$

Из равенств (26а) и (26б) следует

$$N_{\nu+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{\nu+1} J_{-\nu-\frac{1}{2}}(z), \tag{85а}$$

$$N_{-\nu-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{\nu} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \tag{85б}$$

С помощью равенств (24) и (25) можно теперь определить все цилиндрические функции. Например,

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i e^{iz}, \qquad H^{(1)}_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz}$$

и

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(z) = +\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, i e^{-iz}, \quad H^{(2)}_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-iz}. \tag{86}$$

Встречающиеся здесь многочлены отличаются от многочленов Лагерра лишь постоянным множителем. Из равенства (6.99) вытекает,

что эти многочлены могут быть выражены через функции Уиттекера $M_{k,m}(z)$, в которых параметры k и m отличаются лишь полуцелым слагаемым. Из равенства (4) следует, что $J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$ с точностью до множителя совпадает с функцией $M_{0,\nu+\frac{1}{2}}(-2iz)$, которая при целочисленном ν связана с многочленами Лагерра.

7.12. Интегралы от цилиндрических функций. В применениях цилиндрических функций часто встречаются с некоторыми интегралами, важнейшие из которых будут сейчас указаны.

7.12.1. Неопределенные интегралы. Из равенств (48) и (48б) непосредственно следует, что

$$\int Z_p(z)\, z^{1-p}\, dz = -z^{1-p} Z_{p-1}(z) \tag{87а}$$

и

$$\int Z_p(z)\, z^{1+p}\, dz = z^{1+p} Z_{p+1}(z). \tag{87б}$$

Для того чтобы вычислить другие важные интегралы, воспользуемся дифференциальным уравнением Бесселя, записав его в форме (1)

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}Z_p(\lambda r)\right)+\left(r\lambda^2-\frac{p^2}{r}\right)Z_p(\lambda r)=0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}Z_p^*(\mu r)\right)+\left(r\mu^2-\frac{q^2}{r}\right)Z_q^*(\mu r)=0.$$

Умножим первое уравнение на Z_q^*, второе — на Z_p, вычтем одно из другого и примем во внимание, что $\frac{d}{dr}Z_p(\lambda r)=\lambda Z_p'(\lambda r)$. Интегрируя по r, имеем

$$\int\left(\lambda^2-\mu^2-\frac{p^2-q^2}{r^2}\right)Z_p(\lambda r)\,Z_q^*(\mu r)\,r\,dr=$$
$$=r\left[\mu Z_p(\lambda r)\,Z_q^{*\prime}(\mu r)-\lambda Z_p'(\lambda r)\,Z_q^*(\mu r)\right]. \tag{88}$$

Заменяя в этом равенстве производные по формулам (46) и (47) и заменяя r на z, получаем

$$\int\left[\lambda^2-\mu^2-\frac{p^2-q^2}{z^2}\right]Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\mu z)\,z\,dz=$$
$$=(p-q)\,Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\mu z)-\lambda z\,Z_{p-1}(\lambda z)\,Z_q^*(\mu z)+\mu z\,Z_p(\lambda z)\,Z_{q-1}^*(\mu z)=$$
$$=-(p-q)Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\mu z)+\lambda z\,Z_{p+1}(\lambda z)\,Z_q^*(\mu z)-\mu z Z_p(\lambda z)\,Z_{q+1}^*(\mu z). \tag{89}$$

Переход к частному случаю $p=q$ дает

$$\int Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\mu z)\,z\,dz=\begin{cases}\frac{z}{\lambda^2-\mu^2}\left(\mu Z_p(\lambda z)\,Z_p^{*\prime}(\mu z)-\lambda Z_p'(\lambda z)\,Z_p^*(\mu z)\right),\\ \frac{z}{\lambda^2-\mu^2}\left(\mu Z_p(\lambda z)\,Z_{p-1}^*(\mu z)-\lambda Z_{p-1}(\lambda z)\,Z_p^*(\mu z)\right),\\ \frac{z}{\lambda^2-\mu^2}\left(\lambda Z_{p+1}(\lambda z)\,Z_p^*(\mu z)-\mu Z_p(\lambda z)\,Z_{p+1}^*(\mu z)\right).\end{cases} \tag{90}$$

При $\lambda=\mu$ из равенств (88) и (89) следует

$$\int \frac{1}{z} Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)\,dz=$$

$$=\begin{cases}\frac{z\lambda}{p^2-q^2}\left(Z_p'(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)-Z_p(\lambda z)\,Z_q^{*\prime}(\lambda z)\right),\\ \frac{z\lambda}{p^2-q^2}\left(Z_{p-1}(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)-Z_p(\lambda z)\,Z_{q-1}^*(\lambda z)\right)-\frac{Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)}{p+q},\\ \frac{z\lambda}{p^2-q^2}\left(Z_p(\lambda z)\,Z_{q+1}^*(\lambda z)-Z_{p+1}(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)\right)+\frac{Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)}{p+q}.\end{cases} \tag{91}$$

Заменим в последнем равенстве $z\lambda\,Z_p(\lambda z)$ и $z\lambda\,Z_q^*(\lambda z)$ по равенству (45) через функции с большим индексом. Мы получим тогда

$$(p+q)\int Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)\,\frac{dz}{z}=Z_p(\lambda z)\,Z_q^*(\lambda z)+2\sum_{\nu=1}^{\infty} Z_{p+\nu}(\lambda z)\,Z_{q+\nu}^*(\lambda z).$$

Переходя к случаю $p=q$, получаем

$$2p\int Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\lambda z)\,\frac{dz}{z}=Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\lambda z)+2\sum_{\nu=1}^{\infty} Z_{p+\nu}(\lambda z)\,Z_{p+\nu}^*(\lambda z). \tag{91а}$$

В частности,

$$p\int_0^z J_p^2(z)\,\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}J_p^2(z)+\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{p+\nu}^2(z). \tag{91б}$$

Дальнейшая специализация при $p=\frac{1}{2}$ дает замечательное соотношение для интегрального синуса. Согласно равенству (83), имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^z J_{\frac{1}{2}}^2(t)\,\frac{dt}{t}=\frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{\sin^2 t\,dt}{t^2}=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin^2 t}{t}\Big|_0^z+\frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{\sin 2t}{t}\,dt.$$

Отсюда следует

$$\mathrm{Si}(2z)=\int_0^{2z}\frac{\sin t}{t}\,dt=\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}J^2_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \tag{91в}$$

Для частного случая $p=q$, $\lambda=\mu$ получаем из равенства (90)

$$\int Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\lambda z)\,z\,dz=\lim_{\mu\to\lambda} z\,\frac{\mu\,Z_p(\lambda z)\,Z^*_{p-1}(\mu z)-\lambda\,Z_{p-1}(\lambda z)\,Z_p^*(\mu z)}{\lambda^2-\mu^2}.$$

Применив правило Лопиталя, имеем

$$\int Z_p(\mu z)\,Z_p^*(\lambda z)\,z\,dz=$$

$$=\lim_{\mu\to\lambda} z\,\frac{Z_p(\lambda z)\,Z^*_{p-1}(\mu z)+\mu Z_p(\mu z)\,zZ^{*\prime}_{p-1}(\mu z)-\lambda Z_{p-1}(\lambda z)\,zZ^{*\prime}_p(\mu z)}{-2\mu}.$$

Принимая во внимание равенства (45), (46) и (47), после элементарных вычислений получаем

$$\int Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\lambda z)\,z\,dz=$$

$$=\frac{z^2}{4}\left(2Z_p(\lambda z)\,Z_p^*(\lambda z)-Z_{p-1}(\lambda z)\,Z^*_{p+1}(\lambda z)-Z_{p+1}(\lambda z)\,Z^*_{p-1}(\lambda z)\right). \tag{92}$$

Дальнейшая специализация, при которой Z_p^* полагается равным Z_p, дает

$$\int Z_p^2(\lambda z)\,z\,dz=$$

$$=\frac{z^2}{2}\left(Z_p^2(\lambda z)-Z_{p-1}(\lambda z)\,Z_{p+1}(\lambda z)\right)=\frac{z^2}{2}\left(\left(1-\frac{p}{\lambda^2z^2}\right)Z_p^2(\lambda z)+Z'^2_p(\lambda z)\right). \tag{93}$$

Последняя форма особенно часто используется при вычислении коэффициентов в разложении по бесселевым функциям.

Это равенство можно также преобразовать так, чтобы правая часть была представлена в виде ряда. Из равенств (43) и (44б) следует, что

$$\frac{2p}{z}\,\frac{d}{dz}\left(J_p^2(z)\right)=J^2_{p-1}(z)-J^2_{p+1}(z).$$

Отсюда повторным применением получаем

$$J^2_{p-1}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{2(p+2\nu)}{z}\,\frac{d}{dz}\left(J^2_{p+2\nu}(z)\right).$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\frac{1}{2}\int zJ_{p-1}^2(z)\,dz=\sum_{\nu=0}^{\infty}(p+2\nu)\,J_{p+2\nu}^2(z).$$

Поэтому, интегрируя равенство (93) от 0 до z, получаем

$$\frac{z^2}{4}\left(J_{p-1}^2(z)-J_{p-2}(z)J_p(z)\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(p+2\nu)\,J_{p+2\nu}^2(z). \qquad (93a)$$

При $p=1$ отсюда следует

$$\frac{z^2}{4}\left(J_0^2(z)+J_1^2(z)\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)\,J_{2\nu+1}^2(z).$$

Применим теперь равенство для $p=\frac{1}{2}$ и $p=\frac{3}{2}$; складывая и вычитая эти равенства и принимая во внимание соотношения (83) и (84), находим, что

$$\frac{z}{\pi}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}^2,$$

$$\frac{\sin 2z}{2\pi}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_{\nu+\frac{1}{2}}^2(z).$$

7.12.2. Определенные интегралы. Среди определенных интегралов от цилиндрических функций особую роль играет интеграл Липшица — Ганкеля. Мы можем непосредственно вывести его из интегральной формулы Эрдейи (см. 6.10.1). Поскольку по равенству (4а)

$$J_p(bz)=\left(\frac{bz}{2}\right)^p\frac{e^{ibz}}{\Gamma(1+p)}\,{}_1F_1\left(p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ -2ibz\right),$$

то из равенства (6.176а) следует, что

$$\int_{(0)}^{\infty}e^{-az}z^{q-1}J_p(bz)\,dz=$$

$$=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^p\Gamma(p+q)}{(a-ib)^{p+q}\,\Gamma(p+1)}\,F\left(p+q,\ p+\frac{1}{2};\ 2p+1;\ \frac{-2ib}{a-ib}\right) \qquad (94)$$

$$(\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\quad \text{если}\quad z\to\infty).$$

Но по равенству (10в) $J_p(bz)$ ведет себя на бесконечности, как $\cos bz$, т. е. как $e^{ibz}+e^{-ibz}$. Поэтому путь интегрирования надо провести в бесконечности так, чтобы выполнялось неравенство $\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0$. Но для гипергеометрической функции Гаусса имеет место равен-

тво (4.41)

$$ {}_2F_1(a,\ b;\ 2b;\ z)=\left(\frac{2}{2-z}\right)^a {}_2F_1\left(\frac{a}{2},\ \frac{a+1}{2};\ b+\frac{1}{2};\ \left(\frac{z}{z-2}\right)^2\right). $$

Поэтому интеграл Липшица — Ганкеля можно записать в виде

$$ \int_{(0)}^{\infty} e^{-az}z^{q-1}J_p(bz)\,dz = $$

$$ =\frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^p \Gamma(p+q)}{a^q\,\Gamma(p+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p+q+1}{2};\ p+1;\ -\frac{b^2}{a^2}\right) \qquad (95) $$

$$ (\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\quad \text{если}\quad z\to\infty), $$

или, используя равенство (4.19), в виде

$$ \int_{(0)}^{\infty} e^{-az}z^{q-1}J_p(bz)\,dz = $$

$$ =\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^p \Gamma(p+q)}{(a^2+b^2)^{\frac{p+q}{2}}\,\Gamma(1+p)}\,{}_2F_1\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{1+p-q}{2};\ p+1;\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) \qquad (95a) $$

$$ (\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\quad \text{если}\quad z\to\infty). $$

Частный случай $q=1$, $p=0$ приводит нас по равенству (4.38a) к соотношению

$$ \int_0^{\infty} e^{-az}J_0(bz)\,dz=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (96) $$

$$ (\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\quad \text{если}\quad z\to\infty). $$

Замкнутое выражение для гипергеометрического ряда получается еще в случаях, когда $q=p+1$ или $q=p+2$. Принимая во внимание равенство (4.40) и формулу удвоения для Г-функции, мы получаем

$$ \int_{(0)}^{\infty} e^{-az}z^pJ_p(bz)\,dz=\frac{(2b)^p\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{p+\frac{1}{2}}} \qquad (97) $$

$$ (\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\quad \text{если}\quad z\to\infty) $$

$$ \int_{(0)}^{\infty} e^{-az}z^{p+1}J_p(bz)\,dz=\frac{2a(2b)^p\,\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{p+\frac{3}{2}}} \qquad (98) $$

$$ (\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\ \text{если}\ z\to\infty). $$

Эти интегралы при $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2}$ и соответственно $\operatorname{Re} p > -1$ можно записать как сходящиеся интегралы.

Случаи $q = 0$ и $q = 1$ можно изучить столь же просто. Именно, равенство (95) дает нам

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} J_p(bz) \frac{dz}{z} = \frac{1}{p}\left(\frac{b}{2a}\right)^p {}_2F_1\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}; p+1; -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a \pm ib) z\} > 0, \text{ если } z \to \infty)$$

и

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} J_p(bz)\, dz = \frac{1}{a}\left(\frac{b}{2a}\right)^p {}_2F_1\left(\frac{p+1}{2}, \frac{p}{2}+1; p+1; -\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a \pm ib) z\} > 0, \text{ если } z \to \infty).$$

Отсюда с помощью равенства Гаусса (4.42) и соотношений (4.12) и (4.42) следует, что

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} J_p(bz) \frac{dz}{z} = \frac{(\sqrt{a^2+b^2} - a)^p}{pb^p} \tag{99}$$

$$(\operatorname{Re}\{(a \pm ib) z\} > 0, \text{ если } z \to \infty)$$

и

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} J_p(bz)\, dz = \frac{(\sqrt{a^2+b^2} - a)^p}{b^p \sqrt{a^2+b^2}} \tag{100}$$

$$(\operatorname{Re}\{(a \pm ib) z\} > 0, \text{ если } z \to \infty).$$

Интеграл Липшица — Ганкеля для функции Неймана получается непосредственно из равенств (26а) и (95). Он имеет вид

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} z^{q-1} N_p(bz)\, dz =$$

$$= \operatorname{ctg} p\pi \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^p \Gamma(p+q)}{a^q \Gamma(1+p)} {}_2F_1\left(\frac{p+q}{2}, \frac{1+p+q}{2}; p+1; -\frac{b^2}{a^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{\sin p\pi} \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^{-p} \Gamma(q-p)}{a^q \Gamma(1-p)} {}_2F_1\left(\frac{q-p}{2}, \frac{1-p+q}{2}; -p+1; -\frac{b^2}{a^2}\right) \tag{101}$$

$$(\operatorname{Re}\{(a \pm ib) z\} > 0, \text{ если } z \to \infty).$$

Соответствующие интегралы для функций Ганкеля получаются из интегралов Эрдейи (6.177), (6.178) и из равенств (11) и (14). Они имеют вид

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} z^{q-1} H_p^{(1)}(bz)\,dz = e^{-i\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{2^{p+1} b^p \Gamma(q+p)\,\Gamma(q-p)}{(a-ib)^{p+q}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(p+\frac{1}{2},\ p+q;\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a+ib}{a-ib}\right) \quad (102а)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a-ib)z\} > 0)$$

и

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} z^{q-1} H_p^{(2)}(bz)\,dz = e^{i\pi\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{2^{p+1} b^p \Gamma(p+q)\,\Gamma(q-p)}{(a+ib)^{p+q}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(p+\frac{1}{2},\ p+q,\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a-ib}{a+ib}\right) \quad (102б)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a+ib)z\} > 0).$$

Так как по равенству (4.44) имеем

$${}_2F_1\left(p+q,\ p+\frac{1}{2};\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a\pm ib}{a\mp ib}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pm 2ib}{a\mp ib}\right)^{-(p+q)} {}_2F_1\left(\frac{q-p}{2},\ \frac{q+p}{2};\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a^2+b^2}{b^2}\right),$$

то

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} z^{q-1} H_p^{(1)}(bz)\,dz = e^{-(p-q+1)i\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(q+p)\,\Gamma(q-p)}{2^{q-1} b^q \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{q-p}{2},\ \frac{q+p}{2};\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a^2+b^2}{b^2}\right) \quad (103а)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a-ib)z\} > 0)$$

и

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az} z^{q-1} H_p^{(2)}(bz)\,dz = e^{+(p-q+1)i\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(p+q)\,\Gamma(q-p)}{2^{q-1} b^q \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{q-p}{2},\ \frac{q+p}{2};\ q+\frac{1}{2};\ \frac{a^2+b^2}{b^2}\right) \quad (103б)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a+ib)z\} > 0).$$

В силу равенства (13а) поведение функции $H_p^{(1)}(bz)$ на бесконечности определяется по сути дела множителем e^{ibz}. Поэтому путь

интегрирования на бесконечности должен быть проведен так, чтобы в интеграле, содержащем $H_p^{(1)}(bz)$, выполнялось неравенство $\operatorname{Re}\{(a-ib)z\}>0$, в то время как в интеграле, содержащем $H_p^{(2)}(bz)$, должно выполняться, в силу (15а), неравенство $\operatorname{Re}\{(a+ib)z\}>0$.

Полагая $a=0$ и $b=1$, получаем из последних двух соотношений замечательные частные случаи. Принимая во внимание равенство (4.23) и формулу (1.42) удвоения для Г-функции, имеем

$$\int_0^\infty z^{q-1}H_p^{(1)}(z)\,dz=\frac{1}{2\pi}e^{-i\frac{\pi}{2}(p-q+1)}2q\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right) \quad (104а)$$

$$(\operatorname{Re}q>|\operatorname{Re}p|,\quad \operatorname{Re}(-iz)>0)$$

и

$$\int_0^\infty z^{q-1}H_p^{(2)}(z)\,dz=\frac{1}{2\pi}e^{+i\frac{\pi}{2}(p-q+1)}2q\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right) \quad (104б)$$

$$(\operatorname{Re}q>|\operatorname{Re}p|,\quad \operatorname{Re}(iz)>0).$$

Поведение функций в точке $z=0$ требует, согласно равенствам (18), (19) и (6), выполнения соотношения $\operatorname{Re}q>|\operatorname{Re}p|$. Равенства (104) дают *преобразования Меллина*[1]) обеих функций Ганкеля. Обратное преобразование дает

$$H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{2i\pi}\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(p+1)}}{2\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{-iz}{2}\right)^{-q}\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)dq \quad (105а)$$

$$(\alpha>|\operatorname{Re}p|,\quad \operatorname{Re}(-iz)>0)$$

и

$$H_p^{(2)}(z)=\frac{1}{2i\pi}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(p+1)}}{2\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\left(\frac{iz}{2}\right)^{-q}\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)dq \quad (105б)$$

$$(\alpha>|\operatorname{Re}p|,\quad \operatorname{Re}(iz)>0).$$

С помощью подстановки $2s=-(q+p)$ эти два равенства переходят в

$$\pi e^{i\frac{\pi}{2}(p+1)}H_p^{(1)}(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{-iz}{2}\right)^{p+2s}\Gamma(-s)\Gamma(-s-p)\,ds \quad (106а)$$

$$(\sigma<0,\ \sigma<\operatorname{Re}p,\quad \operatorname{Re}(-iz)>0)$$

---

[1]) См. Doetsch G., I, стр. 60.

$$\pi e^{-i\frac{\pi}{2}(p+1)} H_p^{(2)}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{iz}{2}\right)^{p+2s} \Gamma(-s)\Gamma(-s-p)\,ds \quad (106б)$$

$$(\sigma < 0, \quad \sigma < \operatorname{Re} p, \quad \operatorname{Re}(iz) > 0).$$

Мы получили, таким образом, два интегральных представления, которые были найдены Бернсом [1]). Сходимость этих интегралов легко следует из равенства (1.69).

Равенствам (104а, 104б) соответствует интеграл Вебера для функций Бесселя, который получается из (95а) при $a = 0$. Принимая во внимание (4.23) и формулу удвоения для Г-функции, имеем

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(z)\, z^{q-1}\, dz = 2^{q-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)} \quad \left(\operatorname{Re} q < \frac{3}{2}\right). \quad (107)$$

Вспоминая, как ведет себя функция $J_p(z)$ на бесконечности (равенство (10в)), мы видим, что путь интегрирования должен быть проведен по вещественной оси в бесконечно удаленную точку и что должно выполняться неравенство $\operatorname{Re} q < \frac{3}{2}$. При $\operatorname{Re}(p+q) > 0$ этот интеграл можно представить в виде собственного интеграла. Этот интеграл также является преобразованием Меллина. Из равенства (1.69) следует, что при вещественных x и при условии $\operatorname{Re} p > 0$ справедлива формула обращения вида

$$2J_p(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{-q} \frac{\Gamma\left(\frac{q+p}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p-q}{2}\right)}\, dq \quad (108)$$

$$\left(\operatorname{Re} p > 0,\ x \text{ — вещественно}, \quad -\operatorname{Re} p < a < \frac{3}{2}\right).$$

Если сделать подстановку $2s = -(p+q)$, то эта формула принимает вид

$$J_p(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2s} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(1+p+s)}\, ds \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

При этом особую точку $s = 0$ нужно обходить, оставаясь в левой полуплоскости.

7.12.2.0. Связь с функциями Лежандра. Вычисленные в предыдущем пункте интегралы позволяют установить связь с функ-

[1]) Дальнейшие представления этого вида см. Ватсон, стр. 212 и далее.

циями Лежандра. Правая часть равенства (94) совпадает с правой частью равенства (5.52а). Отсюда следует, что

$$\mathfrak{P}_{q-1}^{-p}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\mathfrak{P}_{-q}^{-p}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^{\frac{q}{2}}}{(a-ib)^{p+q}}\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}p}b^p}{2^p\Gamma(p+1)}\,{}_2F_1\left(p+\frac{1}{2},\ p+q;\ 2p+1;\ \frac{-2ib}{a-ib}\right).$$

Поэтому, в силу равенства (94),

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-az}z^{q-1}J_p(bz)\,dz=e^{i\frac{\pi}{2}p}\,\frac{\Gamma(p+q)}{(a^2+b^2)^{\frac{q}{2}}}\,\mathfrak{P}_{q-1}^{-p}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad (109)$$

$$(\mathrm{Re}\,\{(a\pm ib)z\}>0,\ \text{если}\ z\to\infty;\ |a-ib|\geqslant|a+ib|).$$

При этом следует иметь в виду, что в равенстве (5.52а) в соотношении $1-u^2=-\frac{2ib}{a-ib}$ значение u однозначно определено условием $|u|\leqslant 1$. Поскольку $u^2=\frac{a+ib}{a-ib}$, то полученное равенство справедливо лишь при условии $|a+ib|\leqslant|a-ib|$.

Из равенства (5.51) следует

$${}_2F_1\left(p+\frac{1}{2},\ p+q+1;\ q+\frac{3}{2};\ \frac{a\pm ib}{a\mp ib}\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(q+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p+q+1)}\,\frac{e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{u^{q+1}(1-u^2)^p},$$

где

$$u^2=\frac{a\pm ib}{a\mp ib}\qquad 1-u^2=\frac{\mp 2ib}{a\mp ib}.$$

Подставим это соотношение в равенства (102а), (102б); мы получим тогда

$$e^{(p+1)\frac{i\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-az}z^qH_p^{(1)}(bz)\,dz=$$

$$=\frac{2}{\pi}\,\frac{\Gamma(q-p+1)}{(a^2+b^2)^{\frac{q+1}{2}}}\,e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad (110а)$$

$$(\mathrm{Re}\,\{(a-ib)z\}>0,\ \text{если}\ z\to\infty;\ \ |a+ib|<|a-ib|)$$

и

$$e^{-(p+1)\frac{i\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-az}z^q H_p^{(2)}(bz)\,dz = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(q-p+1)}{(a^2+b^2)^{\frac{q+1}{2}}}e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \quad (110б)$$

$$(\operatorname{Re}\{(a+ib)z\}>0, \text{ если } z\to\infty;\ |a-ib|<|a+ib|).$$

Эти равенства имеют любопытные частные случаи. Положим сначала

$$a=\operatorname{ch} w,\quad b=i\operatorname{sh} w,\quad \operatorname{Re} w>0,\quad |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $a\pm ib=e^{\mp w}$, и потому выполнены условия, необходимые для справедливости равенства (109). Отсюда следует, что

$$\int_{(0)}^\infty e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q J_p(i\tau\operatorname{sh} w)\,d\tau = e^{i\frac{\pi}{2}p}\Gamma(p+q+1)\mathfrak{P}_q^{-p}(\operatorname{ch} w) \quad (111)$$

$$\left(\operatorname{Re} w>0,\ |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Введем, согласно пункту 7.5, функцию $I_p(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}p}J_p(iz)$. Тогда это равенство принимает вид

$$\int_{(0)}^\infty e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q I_p(\tau\operatorname{sh} w)\,d\tau = \Gamma(p+q+1)\mathfrak{P}_q^{-p}(\operatorname{ch} w) \quad (111а)$$

$$\left(\operatorname{Re} w\geqslant 0,\ |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогичная подстановка приводит равенство (110а) к виду

$$e^{(p+1)\frac{i\pi}{2}}\int_{(0)}^\infty e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q H_p^{(1)}(i\tau\operatorname{sh} w)\,d\tau = \frac{2}{\pi}\Gamma(q-p+1)e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p(\operatorname{ch} w) \quad (112)$$

$$\left(\operatorname{Re} w\geqslant 0,\ |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

а использование функции Макдональда — к виду

$$\int_{(0)}^\infty e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q K_p(\tau\operatorname{sh} w)\,d\tau = e^{-i\pi p}\Gamma(q-p+1)\mathfrak{Q}_q^p(\operatorname{ch} w) \quad (112а)$$

$$\left(\operatorname{Re} w\geqslant 0,\ |\operatorname{Im} w|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

Если положить $a=\cos(\alpha+i0)$, $b=\sin(\alpha+i0)$, то выполнены условия применимости равенства (109). Мы получаем при $\sin\alpha>0$

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\cos\alpha}\tau^q J_p(\tau\sin\alpha)\,d\tau=\Gamma(p+q+1)\,e^{i\frac{\pi}{2}p}\mathfrak{P}_q^{-p}(\cos\alpha-i0)$$

или, принимая во внимание равенство (5.12),

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\cos\alpha}\tau^q J_p(\tau\sin\alpha)\,d\tau=\Gamma(p+q+1)\,P_q^{-p}(\cos\alpha). \qquad (113)$$

Другая группа формул получается из равенства (109) при $a=\operatorname{ch} w$, $b=i$:

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q J_p(i\tau)\,d\tau=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}p}\,\Gamma(p+q+1)}{\operatorname{sh}^{q+1}w}\,\mathfrak{P}_q^{-p}(\operatorname{cth} w)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w)>1)$$

или

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q I_p(\tau)\,d\tau=\frac{\Gamma(p+q+1)}{\operatorname{sh}^{q+1}w}\,\mathfrak{P}_q^{-p}(\operatorname{cth} w) \qquad (114)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w)>1).$$

Эти равенства могут быть преобразованы с помощью соотношения Уиппла (5.53) к виду

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q I_p(\tau)\,d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\pi\left(q+\frac{1}{2}\right)}}{\operatorname{sh}^{q+\frac{1}{2}}w}\,\mathfrak{Q}_{q-\frac{1}{2}}^{p+\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} w) \qquad (115)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w)>1).$$

Аналогично из равенства (110а) имеем

$$\frac{\pi}{2}e^{(p+1)\frac{i\pi}{2}}\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q H_p^{(1)}(i\tau)\,d\tau=\frac{\Gamma(q-p+1)}{\operatorname{sh}^{q+1}w}\,e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p(\operatorname{cth} w) \qquad (116а)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w)>-1)$$

или

$$\int_{(0)}^{\infty} e^{-\tau\operatorname{ch} w}\tau^q K_p(\tau)\,d\tau=\frac{\Gamma(q-p+1)}{\operatorname{sh}^{q+1}w}\,e^{-i\pi p}\mathfrak{Q}_q^p(\operatorname{cth} w) \qquad (116б)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w)>-1).$$

Применяя и здесь соотношения Уиппла, получаем

$$\int_0^\infty e^{-\tau \operatorname{ch} w}\tau^q K_p(\tau)\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(q+p+1)\,\Gamma(q-p+1)}{\operatorname{sh}^{q+\frac{1}{2}} w}\,\mathfrak{P}^{q+\frac{1}{2}}_{p-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch} w) \quad (117)$$

$$(\operatorname{Re}(\operatorname{ch} w) > -1).$$

При специальном выборе параметров p и q отсюда вытекают многочисленные частные случаи. Полагая, например, $q=0$ и принимая во внимание равенство (5.20а), получаем из соотношения (116б)

$$\int_{(0)}^\infty e^{-\tau \operatorname{ch} w} K_p(\tau)\,d\tau = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,\frac{\operatorname{sh} pw}{\operatorname{sh} w}. \quad (118)$$

Отсюда, применяя правило Лопиталя,

$$\int_{(0)}^\infty e^{-\tau \operatorname{ch} w} K_0(\tau)\,d\tau = \frac{w}{\operatorname{sh} w}. \quad (118а)$$

7.12.3. Разрывные интегралы Сонина и Гегенбауэра. Вычислим теперь некоторые интегралы, которые находят применение в физике. Начнем с данного Ганкелем обобщения экспоненциального интеграла Вебера. Формула Сонина (интеграл (63)) дает

$$\int_0^\infty J_0(at)\,e^{-b^2t^2}t^{q-1}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^p \int_{(0)}^\infty e^{-b^2t^2}t^{q+p-1}\,dt \oint_{-\infty}^{(0+)} e^{s-\frac{a^2t^2}{4s}}s^{-p-1}\,ds.$$

Путь интегрирования выходит из бесконечно удаленной точки в левой полуплоскости, обходит начало координат и возвращается в бесконечно удаленную точку в левой полуплоскости. Ввиду абсолютной сходимости мы можем изменить порядок интегрирования, что приводит к равенству

$$\int_{(0)}^\infty J_p(at)\,e^{-b^2t^2}t^{q-1}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{a}{2}\right)^p \frac{1}{2} \oint_{-\infty}^{(0+)} e^s s^{-p-1}\,ds \int_{(0)}^\infty e^{-t^2\left(b^2+\frac{a^2}{4s}\right)}t^{2\left(\frac{q+p}{2}-1\right)}\,2t\,dt.$$

Из формулы (1.38) вытекает теперь, что

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(at)\, e^{-b^2t^2} t^{q-1}\, dt =$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^{-q} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{2} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{(0+)} e^s s^{\frac{q-p}{2}-1} \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} s\right)^{-\frac{p+q}{2}} ds.$$

Полученный интеграл имеет вид (6.17) с путем интегрирования C_{01}^* и потому равен

$$(1 - e^{-2i\pi p}) \left(-\frac{a^2}{4b^2}\right)^{\frac{q-p}{2}} w_{01}\left(\frac{q-p}{2};\ 1-p;\ -\frac{a^2}{4b^2}\right).$$

Используя равенство (6.35а) и равенство Куммера (6.23) или (6.25), получаем

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(at)\, e^{-b^2t^2} t^{q-1}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma(1+p)} \frac{a^p e^{-\frac{a^2}{4b^2}}}{2^{p+1} b^{p+q}} {}_1F_1\left(1 + \frac{p-q}{2};\ 1+p;\ \frac{a^2}{4b^2}\right). \quad (119)$$

При $q = p + 2$ имеем частный случай

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(at)\, t^{p+1} e^{-b^2t^2}\, dt = \frac{a^p}{(2b^2)^{p+1}} e^{-\frac{a^2}{4b^2}}. \quad (120)$$

Для вычисления интеграла

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r) \frac{J_q(\beta\sqrt{z^2+r^2})}{(z^2+r^2)^{\frac{q}{2}}} r^{p+1}\, dr$$

будем исходить из представления Сонина (63а) и используем перестановку порядка интегрирования. Мы получим

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r) \frac{J_q(\beta\sqrt{z^2+r^2})}{(z^2+r^2)^{\frac{q}{2}}} r^{p+1}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} t^{-q-1} e^{\frac{\beta}{2}\left(t - \frac{z^2}{t}\right)} \int_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r)\, r^{p+1} e^{-\frac{\beta r^2}{2t}}\, dr.$$

Учитывая равенство (120), это выражение можно записать так:

$$\frac{\alpha^p}{\beta^{p+1}}\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma+i\infty}^{\gamma-i\infty} t^{p-q}e^{\frac{t}{2\beta}(\beta^2-\alpha^2)-\frac{\beta z^2}{2t}}\,dt.$$

Предположим теперь, что α и β — положительные вещественные числа. Если $\alpha>\beta$, то подинтегральная функция в правой полуплоскости обращается в нуль на бесконечности. Поэтому путь интегрирования может быть деформирован в путь, проходящий в обоих направлениях положительную полуось, а потому интеграл равен нулю. Если же $\alpha<\beta$, то по равенству (63а) интеграл представляет функцию Бесселя. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r)\frac{J_q(\beta\sqrt{z^2+r^2})}{(z^2+r^2)^{\frac{q}{2}}}r^{p+1}\,dr= \tag{121}$$
$$=\begin{cases} 0, & \alpha>\beta>0 \\ \dfrac{\alpha^p}{\beta^q}\left(\dfrac{\sqrt{(\beta^2-\alpha^2)}}{z}\right)^{q-p-1}J_{q-p-1}\left(z\sqrt{\beta^2-\alpha^2}\right), & 0<\alpha<\beta. \end{cases}$$

Чтобы вычислить соответствующее выражение для функции Ганкеля, перепишем сначала равенство (73а). Оно имеет вид

$$K_p(z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{z}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{-p-1}\,dt=\left(\frac{z}{2}\right)^p\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}e^{-\left(u+\frac{z^2}{4u}\right)}u^{-p-1}\,du. \tag{122}$$

Отсюда следует, что для значений z, аргумент которых по модулю меньше $\frac{\pi}{4}$,

$$\int\limits_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r)\frac{K_q(\beta\sqrt{z^2+r^2})}{(z^2+r^2)^{\frac{q}{2}}}r^{p+1}\,dr=$$
$$=\frac{\beta^q}{2^{q+1}}\int\limits_{(0)}^{\infty}J_p(\alpha r)\,r^{p+1}\,dr\int\limits_0^{\infty}e^{-\left(u+\frac{\beta^2(z^2+r^2)}{4u}\right)}u^{-q-1}\,du.$$

Меняя порядок интегрирования и принимая во внимание равенство (120), запишем эту величину как

$$\frac{\alpha^p}{2^{q-p}\beta^{2p-q+2}}\int\limits_0^{\infty}u^{p-q}e^{-\left(u\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2z^2}{4u}\right)}\,du.$$

Применяя равенство (122), получаем

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r)\,\frac{K_q(\beta\sqrt{z^2+r^2})}{(z^2+r^2)^{\frac{q}{2}}}\,r^{p+1}\,dr =$$

$$= \frac{\alpha^p}{\beta^q}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{z}\right)^{q-p-1} K_{q-p-1}\left(z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\right). \quad (123)$$

Ограничения на $\arg z$, наложенные при выводе формулы, могут быть ослаблены с помощью аналитического продолжения до $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.

Если в последнем равенстве z — чисто мнимое число, $z = \pm iy$, то при интегрировании вдоль вещественной оси r аргумент функции K_q обращается в нуль при $r = y$. Поэтому надо обойти эту

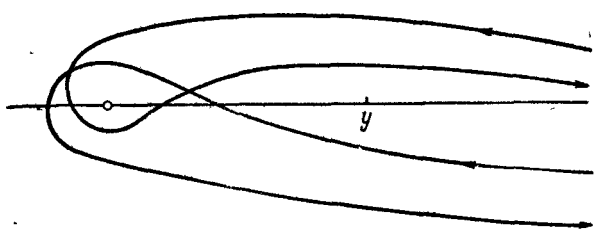


Рис. 44. Пути для интегралов Сонина и Гегенбауэра.

точку в верхней или нижней полуплоскости. При этом интегралы получают различные значения. Для того чтобы интеграл сходился, выражение $\sqrt{r^2-y^2}$ при больших значениях r и вещественном y должно быть положительным. Поэтому если путь интегрирования обходит точку y в верхней полуплоскости, то при $r = 0$ должно выполняться равенство $\arg\sqrt{r^2-y^2} = +\frac{\pi}{2}$. Следовательно, мы должны считать $-y^2 = e^{i\pi}y^2$, т. е. $z = +iy$. Если же путь интегрирования обходит особую точку в нижней полуплоскости, то надо положить $-y^2 = e^{i\pi}y^2$ и $z = -iy$. Заметим, что по определению функции K и равенству (33а) имеем

$$K_p(iz) = \frac{i\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}p}H_p^{(1)}\left(e^{i\pi}z\right) = -\frac{i\pi}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}p}H_p^{(2)}(z)$$

и

$$K_p(-iz) = \frac{i\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}p}H_p^{(1)}(z).$$

Поэтому из равенства (123) следует

$$\int_{(0)}^{\infty} J_p(\alpha r)\frac{K_q(\beta\sqrt{r^2-y^2})}{(r^2-y^2)^{\frac{q}{2}}}r^{p+1}dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}e^{\mp i\pi\left(q-p-\frac{1}{2}\right)}\frac{\alpha^p}{\beta^q}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{y}\right)^{q-p-1}H^{\binom{2}{1}}_{q-p-1}(y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}). \qquad (124)$$

Здесь верхний знак соответствует верхнему, а нижний знак — нижнему пути интегрирования на рис. 44. Положим в этом равенстве $p=0$, $q=\frac{1}{2}$. Тогда, принимая во внимание равенство (86), получаем

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha r)\frac{e^{-\beta\sqrt{r^2-y^2}}}{\sqrt{r^2-y^2}}r\,dr=\frac{e^{\mp iy\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \qquad (125)$$

Здесь два знака также соответствуют двум путям интегрирования на рис. 44.

7.12.4. Интегралы от произведений функций Бесселя. Разрывные интегралы Сонина и Шафхейтлина. Предположим сначала, что в интеграле

$$\int_0^{\infty} e^{-ct}J_p(at)J_q(bt)t^{-s}dt$$

числа a и c положительны, $|\operatorname{Im} b|<c$ и $a>\operatorname{Re} b>0$. Далее, пусть $\operatorname{Re}(p+q+1)>\operatorname{Re} s>-1$. Тогда можно быть уверенным, что этот интеграл сходится. Заменяя вторую функцию Бесселя в этом интеграле рядом, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-ct}J_p(at)\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu}\left(\frac{b}{2}\right)^{q+2\mu}}{\mu!\,\Gamma(q+\mu+1)}t^{-s+q+2\mu}dt.$$

Если ряд

$$\sum\frac{(-1)^{\mu}\left(\frac{b}{2}\right)^{q+2\mu}}{\mu!\,\Gamma(q+\mu+1)}\int_0^{\infty}e^{-ct}\left|J_p(at)t^{-s+q+2\mu}\right|dt$$

абсолютно сходится, то можно изменить порядок суммирования и интегрирования; для этого достаточно, чтобы было $|b|<c$. Переставляя интегрирование и суммирование, мы получаем *интеграл Липшица — Ганкеля*, который можно вычислить по равенству (95).

Мы получаем, таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-ct} J_p(at)\, J_q(bt)\, t^{-s}\, dt =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu\, \Gamma(p+q-s+2\mu+1)}{\mu!\, \Gamma(p+1)\, \Gamma(q+\mu+1)} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^p \left(\frac{b}{2}\right)^{q+2\mu}}{(a^2+c^2)^{\frac{1+p+q-s}{2}+\mu}} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{p+q-s+1}{2}+\mu,\ \frac{p-q+s}{2}-\mu;\ p+1;\ \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) \quad (126)$$

$$(|\operatorname{Im} b| < c,\ \operatorname{Re}(p+q+1) > \operatorname{Re} s > -1).$$

Если выполнены указанные условия и $0 < b < a$, то существует[1]) предел

$$\lim_{c\to 0} \int_0^\infty e^{-ct} J_p(at)\, J_q(bt)\, t^{-s}\, dt = \int_0^\infty J_p(at)\, J_q(bt)\, t^{-s}\, dt.$$

Мы получаем, таким образом,

$$\lim_{c\to 0} \int_0^\infty e^{-ct} J_p(at)\, J_q(bt)\, t^{-s}\, dt =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu\, \Gamma(p+q-s+1+2\mu)}{2^{p+q+2\mu}\, \mu!\, \Gamma(p+1)\, \Gamma(q+1+\mu)} a^s \left(\frac{b}{a}\right)^{q+2\mu} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{1+p+q-s}{2}+\mu,\ \frac{p-q+s}{2}-\mu;\ p+1;\ 1\right).$$

Подставим в это равенство значение гипергеометрической функции из формулы (4.23). Мы получим тогда

$$\lim_{c\to 0} \int_0^\infty e^{-ct} J_p(at)\, J_q(bt)\, t^{-s}\, dt =$$

$$= a^s \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu\, \Gamma(b+q-s+1+2\mu)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{q+2\mu}}{2^{p+q+2\mu}\, \mu!\, \Gamma(q+1+\mu)\, \Gamma\left(\frac{p-q+s+1}{2}-\mu\right) \Gamma\left(\frac{p+q-s+1}{2}+\mu\right)}.$$

Используя формулу удвоения для Γ-функции и соотношение

$$\frac{1}{\Gamma(a-\mu)} = \frac{(-1)^\mu\, (1-a)_\mu}{\Gamma(a)},$$

[1]) Ватсон, п. 13.4.

получаем

$$\int_0^\infty J_p(at)\,J_q(bt)\,t^{-s}\,dt=\left(\frac{a}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{b}{a}\right)^q\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{p-q+s+1}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{p+q-s+1}{2}+\mu\right)\left(\frac{-p+q-s+1}{2}\right)_\mu}{\mu!\,\Gamma(q+1+\mu)}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^\mu.$$

Это равенство можно записать, представив правую часть в виде гипергеометрической функции

$$\int_0^\infty J_p(at)\,J_q(bt)\,t^{-s}\,dt=\frac{a^{s-1}}{2^s}\left(\frac{b}{a}\right)^q\frac{\Gamma\left(\frac{p+q-s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p-q+s+1}{2}\right)\Gamma(q+1)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{p+q-s+1}{2},\ \frac{-p+q-s+1}{2};\ q+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right)\qquad(127\text{а})$$

$$(0<b<a;\ \operatorname{Re}(p+q+1)>\operatorname{Re}s>-1).$$

Вычисляя этот же интеграл при $b>a>0$, получаем

$$\int_0^\infty J_p(at)\,J_q(bt)\,t^{-s}\,dt=\frac{b^{s-1}}{2^s}\left(\frac{a}{b}\right)^p\frac{\Gamma\left(\frac{p+q-s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-p+q+s+1}{2}\right)\Gamma(p+1)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\frac{p+q-s+1}{2},\ \frac{p-q-s+1}{2};\ p+1;\ \frac{a^2}{b^2}\right)\qquad(127\text{б})$$

$$(0<a<b;\ \operatorname{Re}(p+q+1)>\operatorname{Re}s>-1).$$

Правые части, рассматриваемые как функции от $\frac{a}{b}$, не являются аналитическими продолжениями друг друга, когда $\frac{a}{b}$ переходит через точку 1, поскольку показатели при $\frac{a}{b}$ в этих равенствах различны. При $\frac{a}{b}=1$ имеем

$$\int_0^\infty J_p(at)\,J_q(at)\,t^{-s}\,dt=$$

$$=\left(\frac{a}{2}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{p+q-s+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{s+p+q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+p-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-p+q+1}{2}\right)}\qquad(127\text{в})$$

$$(\operatorname{Re}(p+q+1)>\operatorname{Re}s>0;\ a>0).$$

Если $\frac{p-q+s+1}{2}$ — отрицательное целое число, то интеграл (127а) обращается в нуль, а если $\frac{q-p+s+1}{2}$ — отрицательное целое число, то в нуль обращается интеграл (127б), поскольку в этом случае Г-функция в знаменателе принимает бесконечное значение. При частных значениях $p-s$ (целых отрицательных или равных нулю) особенность компенсируется числителем, и потому интеграл (127в) отличен от нуля при $a=b$. Разрывный интеграл мы будем называть в дальнейшем интегралом Сонина — Шафхейтлина. Относительно дальнейших подробностей отсылаем читателя к специальной литературе. Укажем лишь еще на случай $p=q$, $s=1$. В этом случае имеем

$$\int_0^\infty \frac{J_p(at)\,J_p(bt)}{t}\,dt=\begin{cases}\frac{1}{2p}\left(\frac{b}{a}\right)^p, & b<a,\\ \frac{1}{2p}\left(\frac{a}{b}\right)^p, & b>a,\end{cases}\qquad \operatorname{Re} p>0. \quad (127г)$$

Аналогично можно вычислить много других интегралов от цилиндрических функций. Этот вопрос подробно изложен в книге Ватсона.

7.13. Свойства нулей цилиндрических функций. В физических приложениях часто бывает важно знать положение нулей цилиндрических функций. Практически достаточно рассмотреть лишь случаи, когда p — вещественное число или аргумент z положителен. В дальнейшем мы ограничимся случаем вещественного значения p. Символ Z_p означает здесь общую цилиндрическую функцию, т. е. $Z_p=c_1J_p+c_2N_p$. Сначала докажем следующие утверждения.

7.13.1. Все нули, за исключением $z=0$, являются простыми. Предположим, что z_0 — нуль высшего порядка. Тогда функции $Z_p(z_0)$ и $Z_p'(z_0)$ должны были бы обратиться в нуль. В силу дифференциального уравнения Бесселя, тогда и $Z_p''(z_0)$ обращалось бы в нуль, но в этом случае, дифференцируя дифференциальное уравнение, мы убедились бы, что и все производные высшего порядка обращаются в нуль при $z=z_0$. По известной теореме теории функций мы имели бы тогда, что $Z_p(z)\equiv 0$.

7.13.2. Нули функций $Z_p(z)$ и $Z_{p+1}(z)$ перемежаются друг с другом. Несколько далее (в пункте 7.13.5) будет показано, что при вещественном $p>-1$ нули функции $Z_p(z)$ вещественны. Для этого случая из равенства (48) следует

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-p}Z_p(x)\right)=-x^{-p}Z_{p+1}(x),$$

а потому между двумя нулями функции $Z_p(z)$ по теореме Ролля должен лежать по крайней мере один нуль функции $Z_{p+1}(x)$. Так как по равенству (48б) имеем

$$\frac{d}{dx}(x^{p+1}Z_{p+1}(x)) = x^{p+1}Z_p(x),$$

то между двумя нулями функции $Z_{p+1}(x)$ должен лежать по крайней мере один нуль функции $Z_p(x)$.

7.13.3. Нули функций Z_p и Z_p^* перемежаются. Пусть Z_p и Z_p^* — линейно независимые функции. Тогда их определитель Вронского отличен от нуля

$$Z_pZ_p^{*\prime} - Z_p^*Z_p' = \frac{C}{z}, \quad C \neq 0.$$

Если x_1 и x_2 — два последовательных нуля функции Z_p, то в этих точках функция Z_p' отлична от нуля (утверждение 7.13.1). Если $Z_p'(x)$ положительно между x_1 и x_2, то должны выполняться неравенства $Z_p'(x_1) > 0$ и $Z_p'(x_2) < 0$, если $Z_p(x)$ отрицательно, то знаки в этих неравенствах надо заменить противоположными. Из определителя Вронского следует, что

$$Z_p^*(x_1) = -\frac{C}{x_1Z_p'(x_1)} \quad \text{и} \quad Z_p^*(x_2) = -\frac{C}{x_2Z_p'(x_2)}.$$

Таким образом, $Z_p^*(x_1)$ и $Z_p^*(x_2)$ имеют разные знаки. Поэтому функция Z_p^* должна иметь по крайней мере один нуль между точками x_1 и x_2. Поскольку между двумя нулями Z_p^* также расположен по крайней мере один нуль функции Z_p, то между x_1 и x_2 лежит в точности один нуль функции Z_p^*.

7.13.4.1. Отличные от $z = 0$ нули функции $F_p(z) = AJ_p(z) + Bz J_p'(z)$ являются простыми [1]). Равенство (93) можно переписать, используя дифференциальное уравнение Бесселя, в виде

$$\int_0^x J_p^2(x)\, x\, dx = -\frac{x}{2}\begin{vmatrix} J_p(x) & x J_p'(x) \\ \frac{d}{dx}J_p(x) & \frac{d}{dx}(x J_p'(x)) \end{vmatrix}.$$

Если бы $F_p(z)$ имела в точке x нуль высшего порядка, то этот определитель должен был бы обратиться в нуль. Но поскольку

[1]) Dixon A. C., Messenger, 32, 7 (1903).

левая часть при положительном x положительна, а при отрицательном x отрицательна, то наше предположение привело к противоречию.

7.13.4.2. Если $AD-BC\neq 0$ и $p>-1$, то **нули функций** $F_p(z)=AJ_p(z)+BzJ_p'(z)$ и $G_p(z)=CJ_p(z)+DzJ_p'(z)$ **перемежаются.** Положим $\Phi(z)\equiv\frac{G_p(z)}{F_p(z)}$. Тогда имеем

$$\Phi'(z)=-\frac{2}{zF_p^2(z)}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}\int_0^z J_p^2(z)\,z\,dz.$$

Эта функция для всех положительных значений z имеет один и тот же знак. Следовательно, $\Phi(z)$ — монотонная функция и ее (простые) нули и полюсы должны перемежаться.

При $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=1$ мы получаем: *положительные нули функции* $J_p(z)$ *и* $J_p'(z)$ *перемежаются.* Предположение $p>-1$ сделано для того, чтобы нули, о которых идет речь, были вещественными.

7.13.5. При вещественном $p>-1$ **нули функции** $J_p(z)$ **вещественны.** Заметим сначала, что из степенного разложения (6) следует, что при чисто мнимом z и $p>-1$ все его члены положительны. Поэтому при любом $p>-1$ функция $J_p(z)$ не может иметь чисто мнимых нулей. По равенству (1) имеем, далее,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_p(\lambda r)}{dr}\right)+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{r^2}\right)J_p(\lambda r)=0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_p(\mu r)}{dr}\right)+\left(\mu^2-\frac{p^2}{r^2}\right)J_p(\mu r)=0.$$

Умножим первое равенство на $J_p(\mu r)$, второе — на $J_p(\lambda r)$ и вычтем одно из другого. Мы получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\left[J_p(\mu r)\frac{d}{dr}J_p(\lambda r)-J_p(\lambda r)\frac{d}{dr}J_p(\mu r)\right]\right\}=(\mu^2-\lambda^2)J_p(\lambda r)J_p(\mu r).$$

Интегрирование показывает, что

$$\lambda J_p(\mu)J_p'(\lambda)-\mu J_p(\lambda)J_p'(\mu)=(\mu^2-\lambda^2)\int_0^1 J_p(\lambda r)J_p(\mu r)\,dr.$$

Комплексные нули вещественной функции всегда сопряжены друг с другом. Поэтому, если бы λ было одним из нулей, то $\overline{\lambda}$ также была бы нулем. Положим в полученном равенстве $\mu=\overline{\lambda}$; если λ — комплексный корень, то левая часть равенства обращается в нуль, в то время как правая часть отлична от нуля в силу того, что

подинтегральная функция всюду положительна. Итак, предположение о существовании комплексного корня привело к противоречию. Поэтому все корни вещественны.

7.13.6. Наименьший положительный корень функций $J_p(x)$ и $J'_p(x)$ больше, чем p $(p>0)$. Из разложения в степенной ряд следует, что при очень малых значениях $x>0$ функции $J_p(x)$ и $J'_p(x)$ положительны. Но из дифференциального уравнения следует, что

$$x\frac{d}{dx}\left(xJ'_p(x)\right)=\left(p^2-x^2\right)J_p(x).$$

Поэтому, если $0<x\leqslant p$ и $J_p>0$, то xJ'_p не убывает и, следовательно, $J'_p(x)>0$. Но если $J'_p>0$, то функция $J_p(x)$ возрастает. Поэтому, поскольку ее начальные значения положительны, она не обращается в нуль. Тем самым доказано, что при $0<x\leqslant p$ функции $J_p(x)$ и $J'_p(x)$ положительны.

7.13.7. Только при вещественном индексе функция Бесселя может иметь отличные от нуля вещественные корни. По уравнению (1) имеем

$$\frac{d}{dr}r\frac{dJ_p(r)}{dr}+\left(r-\frac{p^2}{r}\right)J_p(r)=0;$$

$$\frac{d}{dr}r\frac{dJ_q(r)}{dr}+\left(r-\frac{q^2}{r}\right)J_q(r)=0.$$

Умножим первое уравнение на $J_q(r)$, второе — на $J_p(r)$ и вычтем второе из первого. Мы получим тогда

$$\frac{d}{dr}\left\{r\left(J_q(r)\frac{d}{dr}J_p(r)-J_p(r)\frac{d}{dr}J_q(r)\right)\right\}=(p^2-q^2)\frac{1}{r}J_p(r)J_q(r).$$

По равенству (10) интегралы от обеих частей этого равенства сходятся на бесконечности. Интегрируя от $x>0$ до $+\infty$, получаем

$$x\left(J_p(x)J'_q(x)-J_q(x)J'_p(x)\right)=\left(p^2-q^2\right)\int_x^{+\infty}\frac{dr}{r}J_p(r)J_q(r).$$

Если $J_p(x)=0$ и $q=\bar{p}$, то и $J_q(x)=0$, поскольку $J_p(x)$ при вещественном x является вещественной функцией от p. Поэтому левая часть обращается в нуль. Но тогда обращается в нуль и правая часть. Поскольку интеграл не может быть равен нулю в силу положительности подинтегральной функции, то должно выполняться равенство $p^2=\bar{p}^2$, а потому p должно быть вещественным или чисто мнимым. Случай чисто мнимого p не может иметь места, так как

тогда мы имели бы $\bar{p}=-p$, а по (37) у функций J_p и J_{-p} при мнимом p не может быть общих нулей. Поэтому, как утверждалось, при $x>0$ обращение в нуль $J_p(x)$ возможно только при вещественных p.

Поскольку, в силу (32), $J_p(e^{im\pi}x)$ пропорционально $J_p(x)$, то это справедливо и для отрицательных x, а тем самым для всех вещественных x, кроме точки $x=0$. Принимая во внимание 7.13.5, получаем, что значения p, для которых $J_p(x)$ при вещественном x обращается в нуль, лежат на вещественной оси p, причем $p<|x|$.

7.13.8. Модифицированные функции Ганкеля (функции Макдональда) лишь при чисто мнимых p имеют положительные отличные от нуля корни. Это доказывается точно так же, как в 7.13.7. Из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\,x\,\frac{d}{dx}\,K_p(x)+\left(\frac{p^2}{x}-x\right)K_p(x)=0$$

следует

$$x\left(K_p(x)\,K_q'(x)-K_q(x)\,K_p'(x)\right)=\left(q^2-p^2\right)\int\limits_x^{\infty}\frac{dr}{r}\,K_p(r)\,K_q(r).$$

Этот интеграл сходится, так как по равенству (13) $K_p(r)$ экспоненциально убывает при $r\to+\infty$. Положим $q=\bar{p}$. Тогда интеграл снова будет положительным и x может быть корнем, лишь если $p^2-\bar{p}^2=0$. Согласно равенству (73а), вещественные значения p не могут быть корнями, следовательно, p — чисто мнимое.

7.13.9. Наименьший положительный корень функции $K_p(x)$ при чисто мнимом p лежит в области $x<|p|$. Это доказывается совершенно аналогично утверждению 7.13.7. Согласно (73а), при чисто мнимом p и $x>0$ функция $K_p(x)$ вещественна. По равенству (13) и утверждению пункта 7.8 при больших x имеем

$$K_p(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x},$$

а потому $K_p(x)>0$, $K_p'(x)>0$. Далее, имеет место равенство

$$x\,\frac{d}{dx}\,x\,K_p'(x)=\left(p^2+x^2\right)K_p(x).$$

Если $p^2+x^2>0$, то величина $x\,K_p'(x)$ при больших x отрицательна, а при уменьшении x убывает. Следовательно, при $x>|p|$ имеем $K_p'(x)<0$ и $K_p(x)>0$. Тем самым наше утверждение доказано.

7.13.10. Функции Ганкеля при вещественном индексе не имеют положительных нулей, а при чисто мнимом индексе не имеют вещественных нулей. Предположим, что $H_p^{(1)}\left(e^{im\frac{\pi}{2}}x\right)=0$, где p — вещественное или чисто мнимое число и $x>0$. Тогда в силу (20) также и $H_p^{(2)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right)=0$. По равенству (33а) имеем

$$H_p^{(1)}\left(e^{im\frac{\pi}{2}}x\right)=-\frac{\sin(m-1)p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(1)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right)-$$

$$-e^{-ip\pi}\frac{\sin mp\pi}{\sin p\pi}H_p^{(2)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right).$$

Поэтому функция $\frac{\sin(m-1)p\pi}{\sin p\pi}H_p^{(1)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right)$ должна обращаться в нуль. Согласно (41) функции $H_p^{(1)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right)$ и $H_p^{(2)}\left(e^{-im\frac{\pi}{2}}x\right)$ не обращаются одновременно в нуль. Следовательно, должно иметь место соотношение

$$\frac{\sin(m-1)p\pi}{\sin p\pi}=0.$$

Это соотношение может выполняться, если либо $m=1$, либо $p=\frac{N}{m-1}$; p — нецелое; N — целое; $m=-1,\ -2,\ \pm3,\ \pm4,\ \ldots$. Соотношение $m=1$ приводит к случаю, рассмотренному в 7.13.8 и 7.13.9. В этом случае $z=e^{i\frac{\pi}{2}}x$, и поэтому необходимо, чтобы p было чисто мнимым, $|p|>x$. Функции Ганкеля чисто мнимого индекса не имеют, таким образом, вещественных корней, а чисто мнимые корни должны иметь аргумент $\frac{\pi}{2}$, причем $|p|>|z|$.

Функция Ганкеля $H_p^{(1)}(x)$ с вещественным индексом не имеет нулей с аргументами $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$; $H_p^{(2)}(x)$ — нулей с аргументами $0,\ -\frac{\pi}{2},\ -\pi$. Однако функция Ганкеля с рациональным индексом может иметь корни с другими аргументами вида $m\frac{\pi}{2}$, например, $H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(i)=0$.

7.13.11. При вещественном p функция $K_p(z)$ не имеет нулей с $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Этим уточняется утверждение 7.13.10, согласно которому отсутствуют нули с аргументами $0,\ \pm\frac{\pi}{2}$.

Для доказательства используем интегральное представление произведения[1]) $K_p(z)\,K_p(Z)$. Мы будем исходить из равенства (68). При $z=ix$, $x>0$ имеем

$$H_p^{(1)}(ix)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{+i\infty}^{-i\infty} e^{-x\cos u+ip\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,du.$$

Введем в качестве переменной интегрирования $v=iu$ и примем во внимание определение функции $K_p(x)$, данное в пункте 7.8. Мы получим

$$K_p(x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\operatorname{ch} v-pv}\,dv. \tag{128}$$

Из этого представления вытекает, что при вещественном p и положительном x функция K_p положительна. Далее, имеем

$$K_p(x)\,K_p(X)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dv\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dV\,e^{-x\operatorname{ch} v-X\operatorname{ch} V-p(v+V)}.$$

Подстановка $V=\tau+t$, $v=\tau-t$ дает

$$K_p(x)\,K_p(X)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\,e^{-x\operatorname{ch}(\tau-t)-X\operatorname{ch}(\tau+t)-2p\tau}.$$

Введем вместо t новое переменное по формуле

$$U=(Xe^{\tau}+xe^{-\tau})e^{t}.$$

Мы получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dU}{U}e^{-\frac{1}{2}U-\frac{1}{2U}(X^2+x^2+2Xx\operatorname{ch}2\tau)-2p\tau}$$

или

$$K_p(x)\,K_p(X)=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dU}{U}e^{-\frac{1}{2}\left(U+\frac{X^2+x^2}{U}\right)}K_p\left(\frac{Xx}{U}\right). \tag{129}$$

Это равенство, выведенное пока что при $x>0$, $X>0$, можно аналитически продолжить в область, где сходится интеграл. Если $\operatorname{Re}[(x+X)^2]>0$, то сходимость при $U\to 0$ обеспечивается множителем $e^{-\frac{(X^2+x^2)}{2U}}$. Заметим, что при условии $|\arg(X+x)|<\frac{\pi}{4}$ функция $K_p\left(\frac{Xx}{U}\right)$ ведет себя асимптотически, как $e^{-\frac{Xx}{U}}$.

[1]) Macdonald H. M., *Proc. Lond. Math. Soc.*, 30 (1899), 169.

Предположим теперь, что функция $K_p(z)$ с вещественным индексом p имеет корень $z=xe^{i\alpha}$. Тогда имеем также $K_p(xe^{-i\alpha})=0$; но если $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$, то по равенству (129)

$$K_p(xe^{+i\alpha})\,K_p(xe^{-i\alpha})=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dU}{U}\,e^{-\left(\frac{U}{2}+\frac{x^2\cos 2\alpha}{U}\right)}\,K_p\left(\frac{x^2}{U}\right). \quad (130)$$

Поскольку правая часть этого равенства должна быть положительна, то в области $|\alpha|<\frac{\pi}{2}$ нет корней функции $K_p(xe^{i\alpha})$.

7.13.12. В случае чисто мнимого индекса функция $K_p(z)$ имеет в области $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}$ лишь вещественные корни. Мы знаем из пункта 7.13.10, что при $|\arg z|=\frac{\pi}{2}$ корней нет. Поэтому нам осталось рассмотреть случай, когда $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$. Из дифференциального уравнения получаем, как и в 7.13.5, что

$$\frac{d}{dx}\,x\left[K_p(\mu x)\frac{d}{dx}K_p(\lambda x)-K_p(\lambda x)\frac{d}{dx}K_p(\mu x)\right]=$$
$$=(\lambda^2-\mu^2)\,x\,K_p(\lambda x)\,K_p(\mu x).$$

Предположим, что $\arg x=0$, $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$, $|\arg\mu|<\frac{\pi}{2}$. Тогда обе функции K_p при $x\to+\infty$ экспоненциально убывают, а потому полученное равенство можно проинтегрировать от $x=1$ до $x=+\infty$:

$$\lambda K_p(\mu)K_p'(\lambda)-\mu K_p(\lambda)K_p'(\mu)=(\mu^2-\lambda^2)\int_1^\infty dx\,x\,K_p(\lambda x)K_p(\mu x).$$

Поскольку $K_p=K_{-p}$, то в случае чисто мнимого p выполняется равенство $\overline{K_p(\lambda)}=K_p(\overline{\lambda})$. Поэтому при $\mu=\overline{\lambda}$ интеграл больше нуля и равенство $K_p(\lambda)=0$, как и $K_p(\mu)=0$ может выполняться лишь, если $\lambda^2=\overline{\lambda^2}$. Но при условии, что $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$, равенство $\lambda^2=\overline{\lambda^2}$ имеет место лишь при вещественных λ. Кроме того, в силу 7.13.9. $|\lambda|<|p|$.

7.14. Кривые нулей и асимптотические разложения цилиндрических функций

7.14.1. Разложения при больших значениях индекса p. Для представления бесселевых функций в виде рядов и интегралов часто надо знать поведение функции в зависимости от индекса p. Мы будем

исходить из интеграла Зоммерфельда

$$Z_p(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_C e^{ip\left(s-\frac{\pi}{2}+\frac{z}{p}\cos s\right)}\,ds \tag{131}$$

и применим к нему изложенный в пункте 4.3.5.1 метод перевала. Этот метод был разработан Дебаем [1]) именно для рассматриваемого интеграла. В обозначениях пункта 4.3.5.1 имеем

$$f(s)=-i\left(s-\frac{\pi}{2}+\frac{z}{p}\cos s\right).$$

Точка перевала является корнем производной $f'(s)$ и, следовательно, определяется равенством

$$\sin s_0=\frac{p}{z}=a. \tag{132}$$

Путь через перевал задается уравнением $\operatorname{Im}\{f(s)-f(s_0)\}=0$, которое можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\left\{s-s_0+\frac{z}{p}(\cos s-\cos s_0)\right\}=0.$$

Вводя для краткости обозначение $S\equiv s-s_0$, перепишем это уравнение в виде

$$\operatorname{Re}\{S-\sin S+\operatorname{ctg} s_0(\cos S-1)\}=0. \tag{133}$$

В качестве переменной интегрирования вдоль пути через перевал выберем вещественную величину $\tau=f(s)-f(s_0)$, т. е.

$$\tau=i[\sin S-S+\operatorname{ctg} s_0(1-\cos S)]. \tag{134}$$

По равенству (4.51) получаем для нашего интеграла выражение

$$Z_p(z)=\frac{e^{i\left(z\cos s_0+p\left(s_0-\frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi}\int\limits_C e^{-p\tau}\frac{dS}{d\tau}\,d\tau. \tag{135}$$

Для дальнейшего вычисления рассмотрим путь интегрирования, вдоль которого переменная интегрирования τ меняется от значения $+\infty$ до значения $\tau=0$ в точке перевала, а потом возрастает вновь до значения $+\infty$. Тогда интеграл принимает вид

$$Z_p(z)=\frac{e^{i\left(z\cos s_0+p\left(s_0-\frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-p\tau}\left(\frac{dS_2}{d\tau}-\frac{dS_1}{d\tau}\right)d\tau. \tag{136}$$

Так как τ и $\frac{d\tau}{dS}$ обращаются в нуль в точке перевала $S=0$, то разложение переменной τ по степеням S начинается с члена

[1]) Debye P., Math. Ann., 67, 535—568 (1908).

второй степени

$$\tau = S^2 P(S). \tag{137}$$

Обращая это равенство, имеем

$$S = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa}{\varkappa+1} \tau^{\frac{\varkappa+1}{2}}. \tag{138}$$

Значения S_1 и S_2 отличаются тем, что в одном случае мы полагаем $\tau^{\frac{1}{2}} = +|\sqrt{\tau}|$, а во втором $-\tau^{\frac{1}{2}} = -|\sqrt{\tau}|$. Ниже будут вычислены коэффициенты $a_\varkappa$. Производная $\frac{dS}{d\tau}$ выражается следующим рядом

$$\frac{dS}{d\tau} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{a_\varkappa}{2} \tau^{\frac{\varkappa-1}{2}}. \tag{138a}$$

Поскольку S_1 и S_2 отличаются друг от друга лишь знаком $\tau^{\frac{1}{2}}$, то в разности, стоящей под знаком интеграла (136), все члены с целочисленными показателями, т. е. с показателями, для которых $\varkappa - 1$ — четное число, обращаются в нуль, в то время, как остальные члены удваиваются. Поэтому

$$Z_p(z) = \frac{e^{i\left(z\cos s_0 + p\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} a_{2\varkappa} \tau^{\varkappa - \frac{1}{2}} d\tau.$$

Вычисляя $\frac{d\tau}{dS}$ по равенству (134), убеждаемся, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{dS}{d\tau} = 0$; к интегралу можно применить теорему Ватсона (см. 4.3.5.1). Возьмем конечное число членов ряда и переставим интегрирование и суммирование. Мы получим тогда асимптотическое представление, справедливое при больших значениях p

$$Z_p(z) \sim \frac{e^{i\left(z\cos s_0 + p\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi} \sum_{\varkappa=0} a_{2\varkappa} \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \tau^{\varkappa - \frac{1}{2}} d\tau,$$

или, принимая во внимание равенство (1.38),

$$Z_p(z) \sim \frac{e^{i\left(z\cos s_0 + p\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi} \sum_{\varkappa=0} a_{2\varkappa} \frac{\Gamma\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right)}{p^{\varkappa+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{i\left(z\cos s_0 + p\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}}{\pi} \sum_{\varkappa=0} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2\varkappa-1)}{(2p)^\varkappa} a_{2\varkappa}. \tag{139}$$

Вычислим сначала главный член ряда, $\varkappa = 0$. Из равенств (134) и (138) следует, что

$$a_0 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2 \operatorname{tg} s_0}.$$

Таким образом, при очень больших значениях p имеем

$$Z_p(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi p \operatorname{ctg} s_0}}\, e^{i\left(z\cos s_0 + p\left(s_0 - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\right)}. \tag{139a}$$

Вычисление дальнейших членов асимптотического ряда удобнее всего провести, заменив описанный здесь метод элементарным рекуррентным методом [1]), при этом мы используем то, что общая форма ряда, полученная с помощью метода перевала, нам уже известна. Этот метод будет использован в дальнейшем для того, чтобы получить специальные асимптотические представления.

7.14.2. p и z — большие положительные числа, $p > z$. В этом случае целесообразно положить $s_0 = \frac{\pi}{2} \pm i\gamma$. Мы имеем тогда из равенства (132)

$$\sin s_0 = \operatorname{ch}\gamma = \frac{p}{z}. \tag{140}$$

Полагая в уравнении (133) $s = \frac{\pi}{2} + \xi + i\eta$, получаем для путей, проходящих через точки перевала $s_0 = \frac{\pi}{2} \pm i\gamma$,

$$\xi = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}\eta = \frac{\xi}{\sin\xi}\operatorname{ch}\gamma. \tag{141}$$

Эти пути изображены на рис. 45, на который перенесены также с рис. 41 допустимые полосы. Очевидно, что для функции Бесселя $J_p(z)$ можно непосредственно использовать путь I, II в верхней полуплоскости. При $s_0 = \frac{\pi}{2} + i\gamma$ и $\operatorname{tg} s_0 = i \operatorname{cth}\gamma$ получаем по равенству (136) $S_{II} = S_2$. Из равенства (139а) вытекает, что главный член асимптотического разложения имеет вид

$$J_p(z) \sim \frac{e^{z(\operatorname{sh}\gamma - \gamma\operatorname{ch}\gamma)}}{\sqrt{2\pi z \operatorname{sh}\gamma}} \qquad (\gamma \text{ — вещественная, } p \gg 1). \tag{142}$$

Оценка второго фундаментального решения несколько сложнее, поскольку любой другой допустимый путь интегрирования должен проходить через обе точки перевала. Выберем путь, идущий из точки $s = -\frac{\pi}{2} + i\infty$ через $\frac{\pi}{2} + i\gamma$ в $\frac{\pi}{2} - i\infty$. Интегрирование по этому

[1]) Bickley W. G., *Phil. Mag.*, 34 (1943), 37—49.

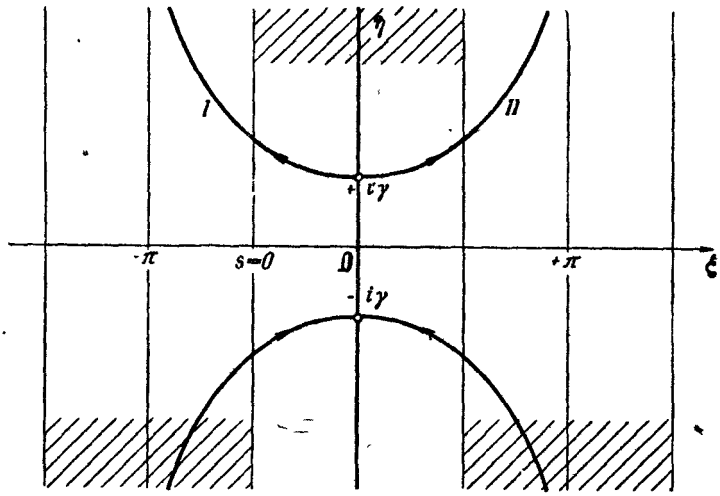


Рис. 45. Пути через перевал при $p > z \gg 1$.

пути дает функцию Ганкеля $H_p^{(1)}(x)$. Мы имеем

$$H_p^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}+i\infty} e^{i\left(x\cos s + p\left(s-\frac{\pi}{2}\right)\right)} ds + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+i\gamma}^{\frac{\pi}{2}-i\gamma} e^{i\left(x\cos s + p\left(s-\frac{\pi}{2}\right)\right)} ds. \tag{143}$$

Рассмотрим сначала второй интеграл. Введем по равенству (134) при $s_0 = \frac{\pi}{2} - i\gamma$ переменную интегрирования

$$\tau = i(\sin S - S) - \operatorname{th}\gamma\,(1 - \cos S).$$

Так как пределу интегрирования $\frac{\pi}{2} + i\gamma$ соответствует значение $\tau = 2(\gamma - \operatorname{th}\gamma)$, то по равенству (136)

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{2}+i\gamma}^{\frac{\pi}{2}-i\gamma} e^{i\left(x\cos s + p\left(s-\frac{\pi}{2}\right)\right)} ds =$$

$$= \frac{e^{-x\operatorname{sh}\gamma + p\gamma}}{\pi} \left[\int\limits_0^{\infty} e^{-p\tau} \left(\frac{dS_{II}}{d\tau} - \frac{dS_I}{d\tau} \right) d\tau + \int\limits_{2(\gamma-\operatorname{th}\gamma)}^{\infty} e^{-p\tau} \left(\frac{dS_I}{d\tau} \right) \right] d\tau. \tag{144}$$

Первое слагаемое может быть вычислено с помощью неоднократно использованного выше метода. При $\operatorname{ctg} s_0 = i\operatorname{th}\gamma$ получаем из ра-

венства (139а)

$$\frac{e^{-x\,\mathrm{sh}\,\gamma+p\gamma}}{\pi}\int_0^\infty e^{-p\tau}\left(\frac{dS_{\mathrm{II}}}{d\tau}-\frac{dS_{\mathrm{I}}}{d\tau}\right)d\tau\sim\frac{e^{p(\gamma-\mathrm{th}\,\gamma)}}{i\sqrt{\frac{\pi}{2}p\,\mathrm{th}\,\gamma}}.$$

Благодаря наличию множителя $e^{-p\tau}$ при достаточно больших значениях γ и p погрешность, возникающая из-за отбрасывания второго интеграла в формуле (144), меньше, чем остаточный член асимптотического выражения. То же самое имеет место и для первого интеграла в формуле (143). При этом мы отбрасываем члены, содержащие множитель $e^{-p(\gamma-\mathrm{th}\,\gamma)}$, удерживая члены, содержащие множитель $e^{+p(\gamma-\mathrm{th}\,\gamma)}$. Таким образом, мы получили асимптотическое представление

$$H_p^{(1)}(z)\sim\frac{e^{z(\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma-\mathrm{sh}\,\gamma)}}{i\sqrt{\frac{\pi}{2}z\,\mathrm{sh}\,\gamma}}\qquad(\gamma\text{ — вещественное, }z\gg1)\qquad(145)$$

(напомним, что $p=z\,\mathrm{ch}\,\gamma$).

Так как по равенству (24) функция Неймана определяется равенством $iN_p=H_p^{(1)}-J_p$, а функция J_p по равенству (142) имеет тот же порядок, что и отброшенный член в (145), то мы получаем

$$N_p(z)\sim-\frac{e^{z(\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma-\mathrm{sh}\,\gamma)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}z\,\mathrm{sh}\,\gamma}}\qquad(\gamma\text{ — вещественное, }z\gg1).\qquad(146)$$

Точно так же доказывается

$$H_p^{(2)}(z)\sim-H_p^{(1)}(z)\qquad(p>z\gg1).\qquad(147)$$

Теперь мы хотим вычислить асимптотический ряд по методу Бикли. Представим цилиндрическую функцию в виде

$$Z=e^{z(\mathrm{sh}\,\gamma-\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma)}S.\qquad(148)$$

Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение Бесселя, получаем дифференциальное уравнение для функции S:

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}-\mathrm{sh}^2\,\gamma\right)e^{z(\mathrm{sh}\,\gamma-\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma)}S=0.$$

Его можно представить в виде

$$\left[\frac{1}{z}\left(\frac{d}{dz}+\mathrm{sh}\,\gamma\right)z\left(\frac{d}{dz}+\mathrm{sh}\,\gamma\right)-\mathrm{sh}^2\,\gamma\right]S=0.$$

Это уравнение можно записать также в следующей форме:

$$\left[\frac{1}{z}\frac{d}{dz}z\frac{d}{dz}+2\,\mathrm{sh}\,\gamma\frac{d}{dz}-\frac{1}{z\,\mathrm{sh}\,\gamma}\right]S=0.\qquad(149)$$

Положим теперь

$$x\equiv8z\,\mathrm{sh}\,\gamma;\quad y\equiv\mathrm{cth}^2\,\gamma\qquad(150)$$

и будем рассматривать S как функцию обеих переменных x и y. Мы должны тогда заменить дифференциальный оператор $\frac{d}{dz}$ следую-

щим выражением

$$\frac{d}{dz} = -\frac{8}{\operatorname{sh}\gamma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{z}\,y(y-1)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{151}$$

Для S мы получаем дифференциальное уравнение

$$\left[8\left(-x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}\right)(y-1)\left(-x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}\right)+\right.$$
$$\left.+\,x\left(4y\frac{\partial}{\partial y}-2x\frac{\partial}{\partial x}-1\right)\right]S=0. \tag{152}$$

Подставим в это уравнение асимптотический ряд для S с неопределенными коэффициентами

$$S=\sum_{r,\,s=0} a_{rs}\frac{(-y)^s}{x^{r+\frac{1}{2}}}. \tag{153}$$

Мы получим тогда рекуррентную формулу для коэффициентов

$$(r+2s)\,a_{rs}=(2r+4s-1)^2\,a_{r-1,\,s}+$$
$$+(2r+4s-1)(2r+4s-5)\,a_{r-1,\,s-1}. \tag{154}$$

Из этой рекуррентной формулы легко вычислить все коэффициенты a_{rs}. Полагая для простоты $a_{00}=1$, получаем коэффициенты, указанные в таблице 1.

Часто нужны асимптотические ряды для производных цилиндрических функций. Их можно получить путем почленного дифференцирования формулы (148) с последующей подстановкой выражения для S по формуле (153). Сравнивая выражение

$$Z_p'(z)=\operatorname{sh}\gamma\, e^{(\operatorname{sh}\gamma-\gamma\operatorname{ch}\gamma)T} \tag{155}$$

с результатом дифференцирования формулы (148) по z

$$Z_p'(z)=e^{z(\operatorname{sh}\gamma-\gamma\operatorname{ch}\gamma)}\left[\operatorname{sh}\gamma+\frac{d}{dz}\right]S,$$

получаем

$$T=\left[1-8(y-1)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{16}{x}\,y(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]S=$$
$$=\sum_{r,\,s} a_{rs}\frac{y^s}{x^{r+\frac{1}{2}}}\left[1+4(2r+1)\frac{y-1}{x}+\frac{16}{x}\,s(y-1)\right]. \tag{156}$$

Подставляя теперь

$$T=\sum_{r=0}^{R}\sum_{s=0}^{r} b_{rs}\frac{y^s}{x^{r+\frac{1}{2}}}, \tag{157}$$

находим

$$b_{rs}=a_{rs}+4(2r+4s-5)\,a_{r-1,\,s-1}-4(2r+4s-1)\,a_{r-1,\,s}. \tag{158}$$

Пользуясь равенством (158) и таблицей 1, легко вычислить значения b_{rs}.

r \ s	0	1	2
0	1		
1	1	$\frac{5}{3}$	
2	$\frac{9}{2}$	$\frac{77}{3}$	$\frac{5\cdot7\cdot11}{18}$
3	$\frac{75}{2}$	$\frac{27\cdot13\cdot13}{10}$	$\frac{7\cdot11\cdot13\cdot17}{18}$
4	$\frac{75\cdot49}{8}$	$\frac{11\cdot803}{10}$	$\frac{11\cdot13\cdot19\cdot53}{4}$
5	$\frac{15\cdot49\cdot81}{8}$	$\frac{13\cdot17\cdot23\cdot47\cdot283}{280}$	$\frac{7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot23\cdot641}{180}$
6	$\frac{5\cdot49\cdot81\cdot121}{16}$	$\frac{9\cdot5\cdot19\cdot454\,849}{7\cdot8}$	$\frac{13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot14\,924\,597}{7\cdot9\cdot400}$
7	$\frac{5\cdot7\cdot81\cdot121\cdot169}{16}$	$\frac{25\cdot17\cdot59\,737\,661}{7\cdot16}$	$\frac{11\cdot17\cdot19\cdot1\,714\,151}{400}$

r \ s	5	6
0		
1		
2		
3		
4		
5	$\frac{25\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29}{8\cdot9\cdot81}$	$\frac{125\,49\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31}{16\cdot81\cdot81}$
6	$\frac{25\cdot49\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31}{8\cdot9\cdot81}$	$\frac{25\cdot49\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41}{16\cdot9\cdot81\cdot81}$
7	$\frac{5\cdot11\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37}{16\cdot81}$	

Таблица 1

зложения Дебая

3	4
$\frac{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}{2\cdot81}$	
$\frac{7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}{2\cdot81}$	$\frac{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}{8\cdot3\cdot81}$
$\frac{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot67}{36}$	$\frac{25\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29}{8\cdot3\cdot81}$
$\frac{7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot23\cdot193}{180}$	$\frac{27\cdot5\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot31}{16}$
$\frac{13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot29\cdot19\,727}{4\cdot27}$	$\frac{11\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\,159}{27\cdot16}$

Продолжение табл. 1

7

$$\frac{125\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot37\cdot41}{16\cdot3\cdot81\cdot81}$$

7.14.3. Линии нулей являются линиями раздела областей применимости асимптотических выражений. Если z и p принимают любые комплексные значения, то часто бывает трудно установить, через какие седловые точки s_0 $\left(\text{где } \sin s_0 = \frac{p}{z}\right)$ должен проходить путь интегрирования в методе перевала. По этому вопросу есть ряд работ[1]), в которых исходят из рассмотрения путей интегрирования. В этих работах сложным способом приходят к результатам, которые нельзя считать ни обозримыми, ни полными. Существует, однако, удобный и обозримый способ, позволяющий получать асимптотические представления для любых комплексных значений z и p. Этот способ будет изложен ниже.

Асимптотические представления цилиндрических функций, согласно 7.14.1, связаны с отдельными точками перевала, каждая из которых дает необращающееся в нуль выражение вида (139а). Поэтому в нулях цилиндрических функций вклады двух точек перевала асимптотически имеют одинаковое абсолютное значение. Для любой пары точек перевала при фиксированном z мы получаем кривую на плоскости p, вдоль которой абсолютные величины вкладов этих точек равны между собой. Поскольку на этих кривых асимптотически лежат нули цилиндрических функций, мы будем называть их линиями нулей. Поскольку вдоль такой линии вклады обеих точек перевала имеют одинаковое абсолютное значение, разность аргументов этих вкладов меняется вдоль них особенно сильно (заметим, что $\ln|F|$ и $\arg F$ являются вещественной и мнимой частями $\ln F$). Если эта разность аргументов принимает значение $(2n+1)\pi$, то соответствующая точка асимптотически находится вблизи нуля цилиндрической функции.

При переходе через линию нулей отношение вкладов обоих слагаемых переходит через единицу. На каждой из сторон линии нулей влияние одной из точек перевала экспоненциально мало по сравнению с влиянием другой точки перевала, поэтому при переходе через линию нулей асимптотическое представление меняет вид. Иными словами, асимптотическое представление может изменить свой вид только потому, что влияние одной из точек перевала становится больше влияния другой точки перевала, т. е. из-за того, что мы переходим через линию нулей. Тем самым доказано утверждение, сформулированное в названии этого пункта. Далее известно, что *из каждой точки ветвления асимптотического представления выходит по крайней мере одна линия раздела областей применимости асимптотических представлений, т. е. линия нулей.* Если удается установить положение линий нулей, то асимптотическое

---

[1]) Ватсон Г. Н., гл. VIII; Emde F., *ZAMM*, **19** (1939), 101; Beckmann P. и Franz W., *ZAMM*, **37** (1957), 17.

представление для любых значений z и p может быть получено из представления для $0 < z < p$ (п. 7.13.2) путем аналитического продолжения с помощью обхода кривой нулей. Эта программа будет выполнена в следующих пунктах.

7.14.4. Асимптотическое представление цилиндрических функций вне линий раздела. Согласно изложенному выше, вне линий нулей каждая из функций $2J_p(z)$, $H_p^{(1)}(z)$, $H_p^{(2)}(z)$ может быть представлена выражением вида (142), в которых асимптотические ряды получаются соответственно из равенств (148) и (153)

$$Z_p(z) \sim \frac{e^{z(\operatorname{sh}\gamma - \gamma \operatorname{ch}\gamma)}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} z \operatorname{sh}\gamma}} \sum_{r,s} \frac{a_{rs} \operatorname{cth}^{2s}\gamma}{(8z \operatorname{sh}\gamma)^r}. \tag{159}$$

Коэффициенты a_{rs} указаны в таблице 1. Значение γ не определяется однозначно равенством (140), но из равенств (142), (145), (147) вытекает, что при $p > z > 0$

$$\gamma \left\{ \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \\ < 0 \end{matrix} \right\}; \quad \arg(\operatorname{sh}\gamma) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \\ -\pi \end{matrix} \right\} \text{ для } \left\{ \begin{matrix} 2J_p(z), \\ H_p^{(1)}(z), \\ H_p^{(2)}(z). \end{matrix} \right. \tag{160}$$

Указанные здесь значения аргумента $\operatorname{sh}\gamma$ необходимы также для определения знака корня в знаменателе равенства (159).

7.14.5. Возможные линии нулей для цилиндрических функций. Мы будем в дальнейшем рассматривать лишь три цилиндрические функции $2J_p(z)$, $H_p^{(1)}(z)$, $H_p^{(2)}(z)$. Все линии нулей для них асимптотически задаются равенством (159) и, следовательно, в первом приближении определяются показательным множителем

$$e^{z(\operatorname{sh}\gamma - \gamma \operatorname{ch}\gamma)} = e^{\sqrt{p^2 - z^2} - \gamma p}. \tag{161}$$

Их линии нулей возникают из-за того, что две ветви (159) дают вклады, имеющие одинаковые абсолютные значения. Функция имеет различные ветви потому, что, в силу условия

$$\operatorname{ch}\gamma = \frac{p}{z}, \tag{162}$$

заданным значениям z и p соответствуют различные значения γ, которые получаются друг из друга либо сдвигом на кратное $2\pi i$, либо отражением в одной из точек $\gamma = im\pi$. Если две такие ветви дают одинаковое абсолютное значение показательного множителя (161), то должно иметь место равенство

$$\operatorname{Re}\left[z(\operatorname{sh}(\gamma - m\pi i) - (\gamma - m\pi i)\operatorname{ch}(\gamma - m\pi i))\right] = 0, \tag{163a}$$

или

$$\operatorname{Re}[iz\operatorname{ch}\gamma]=\operatorname{Re}(ip)=0. \tag{163б}$$

Для каждого целого значения m равенство (163а) задает кривую в плоскости p, выходящую из точки $\gamma=m\pi i$ или, что то же самое, из точки $p=(-1)^m z$. При обходе вокруг этой точки на плоскости p мы переходим от одной ветви функции γ к другой. Кривая (163б) является вещественной осью p; она выходит из точки ветвления $p=\infty$ определяющего уравнения (162) для γ. При обходе вокруг этой точки ветвления γ увеличивается на $2\pi i$.

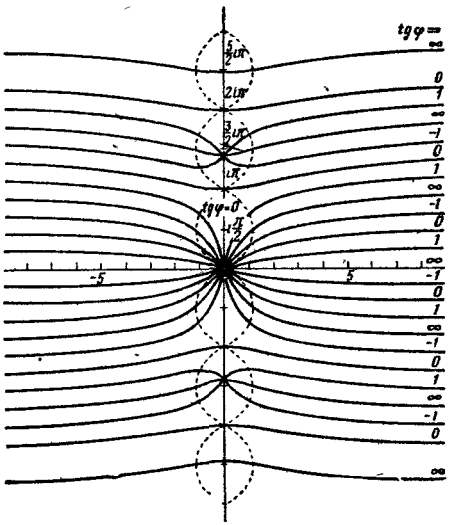


Рис. 46. Возможные линии нулей по (166а). Параметром является $\operatorname{tg}\varphi$.

Рассмотрим точки пересечения двух кривых (163а) с различными значениями m. Вычитая друг из друга два уравнения кривых (163), находим, что пересечение лежит на кривой (163б). Таким образом, *линии нулей, соответствующие различным значениям m, могут пересекаться лишь на вещественной оси p.*

Для практического вычисления линий нулей положим

$$\gamma'\equiv\gamma-im\pi=\alpha+i\beta;\quad \alpha,\ \beta\text{ — вещественные.} \tag{164}$$

Далее обозначим через φ аргумент переменной z. Мы можем тогда сначала переписать равенства (163) в виде

$$\operatorname{Re}[e^{i\varphi}(\operatorname{sh}\gamma'-\gamma'\operatorname{ch}\gamma')]=0, \tag{165а}$$

$$\operatorname{Re}[ie^{i\varphi}\operatorname{ch}\gamma']=0. \tag{165б}$$

Решая их относительно $\operatorname{tg}\varphi$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{th}\alpha-\alpha+\beta\operatorname{th}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\beta-\alpha\operatorname{th}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \tag{166а}$$

соответственно

$$\operatorname{tg}\varphi=-\operatorname{th}\alpha\operatorname{tg}\beta. \tag{166б}$$

На рис. 46 изображены кривые (166а), причем в качестве параметра выбран $\operatorname{tg}\varphi$, а также изображена пунктиром кривая пересечений семейств (166а) и (166б); исключая $\operatorname{tg}\varphi$, получаем для этой кривой уравнение

$$\cos^2\beta=\operatorname{sh}\alpha\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\alpha}-\operatorname{sh}\alpha\right) \tag{167а}$$

или же

$$|\operatorname{ch}\gamma|^2 = \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2\alpha} \geqslant 1. \tag{167б}$$

Пунктирная линия на плоскости γ соответствует p точкам пересечения различных ветвей (166а) на плоскости p, которые лежат на вещественной оси. Как показывает равенство (167), эти точки лежат в области $|p| \geqslant |z|$, где знак равенства имеет место для вещественных z.

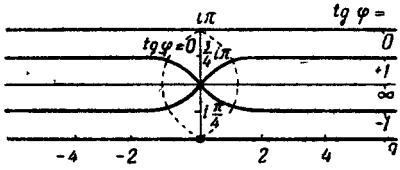


Рис. 47. Вещественная ось p на плоскости γ. Параметром является tg φ.

Рис. 47 изображает кривую (166б) (т. е. вещественную ось p) на плоскости γ с параметром tg φ. Штриховая линия изображает место возможных точек пересечения с другими линиями нулей, согласно равенству (167).

7.14.6. При $p = \pm z$ линии нулей выходят в трех направлениях $(\mp z)^{\frac{1}{3}}$. Доказательство: кривые (163а) выходят из точки $\gamma' = 0$. В окрестности этой точки равенство (163а) дает

$$\operatorname{Re}(\gamma'^3 z) \approx 0.$$

Это означает, что

$$-\gamma'^6 z^2 > 0. \tag{168}$$

По равенствам (140) и (164) $z \operatorname{ch}\gamma' = \pm p$, в зависимости от того, является ли m четным или нечетным числом. Отсюда при $\gamma' \sim 0$ имеем приближенное равенство

$$p \mp z = \pm z(\operatorname{ch}\gamma' - 1) \sim \pm\frac{1}{2}\gamma'^2 z = \frac{1}{2}(\mp z)^{\frac{1}{3}}\left(-\gamma'^6 z^2\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Всилу (168) мы можем считать последний множитель положительным, придавая три возможных значения корню из $\mp z$. Тем самым наше утверждение доказано.

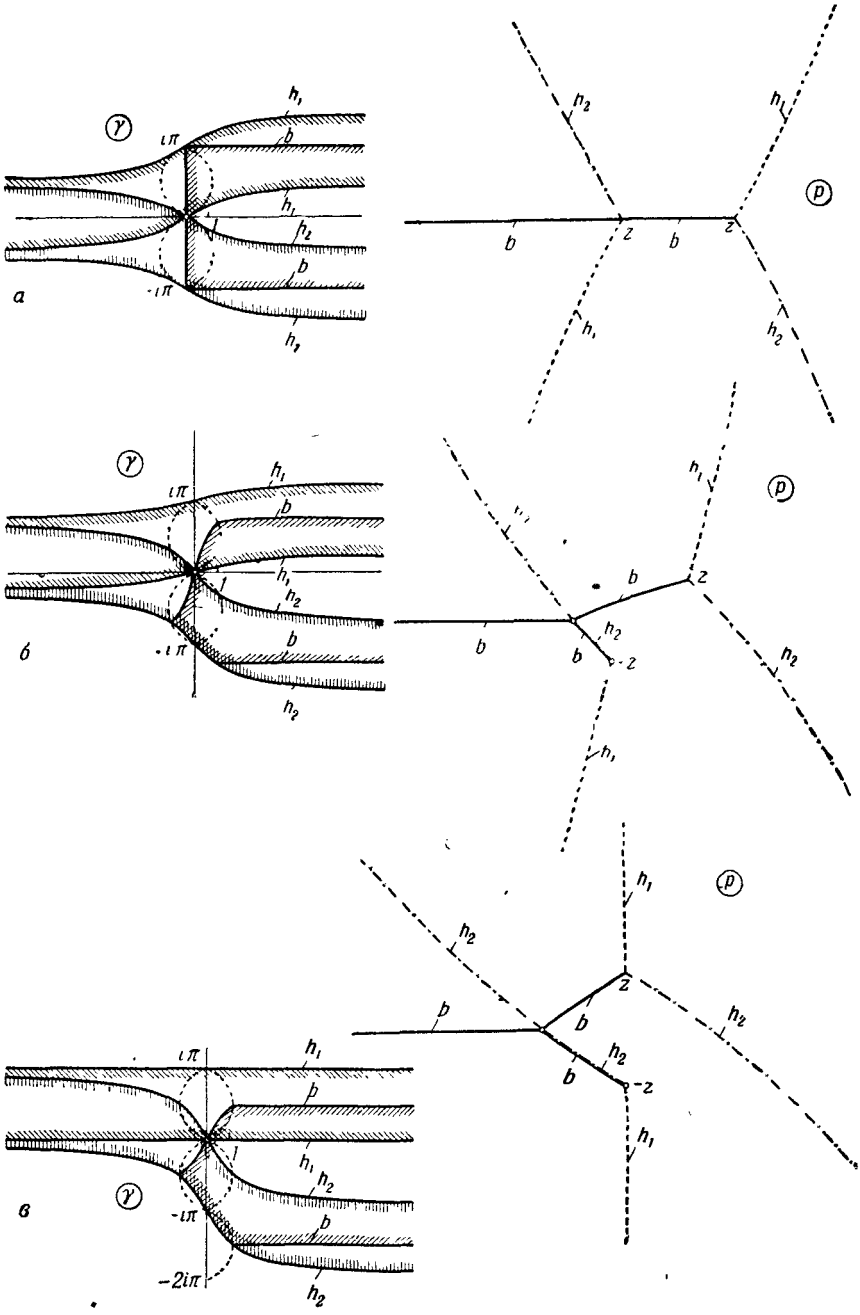
Мы получаем при этом, что три возможные линии нулей, выходящие из точки ветвления $p = \pm z$ асимптотического представления, образуют друг с другом углы по 120°. Если аргумент φ переменного z увеличивается с угловой скоростью ω, то кривые нулей, выходящие из $\pm z$, поворачиваются с угловой скоростью $\omega/3$.

7.14.7. Поведение линии нулей в плоскости p для любого z. Мы будем исходить из уже известных нам случаев и проследим, как меняются линии нулей при изменении z. Из пункта 7.13.7 уже известно, что при положительных z нули функции $J_p(z)$ лежат на вещественной оси p, причем $p < z$. Если z лежит на положительной или отрицательной мнимой полуоси $\left(\text{точнее, } \varphi = \pm\frac{\pi}{2}\right)$, то нули функции $H_p^{(1)}(z)$, соответственно $H_p^{(2)}(z)$, лежат, согласно пунктам 7.13.9 и 7.13.10, на мнимой оси p в области $|p| > |z|$. То, что эти лучи на всем своем протяжении являются линиями нулей, вытекает из того, что, согласно 7.14.3, из каждой точки $p = \pm z, \infty$ выходит по крайней мере одна линия нулей.

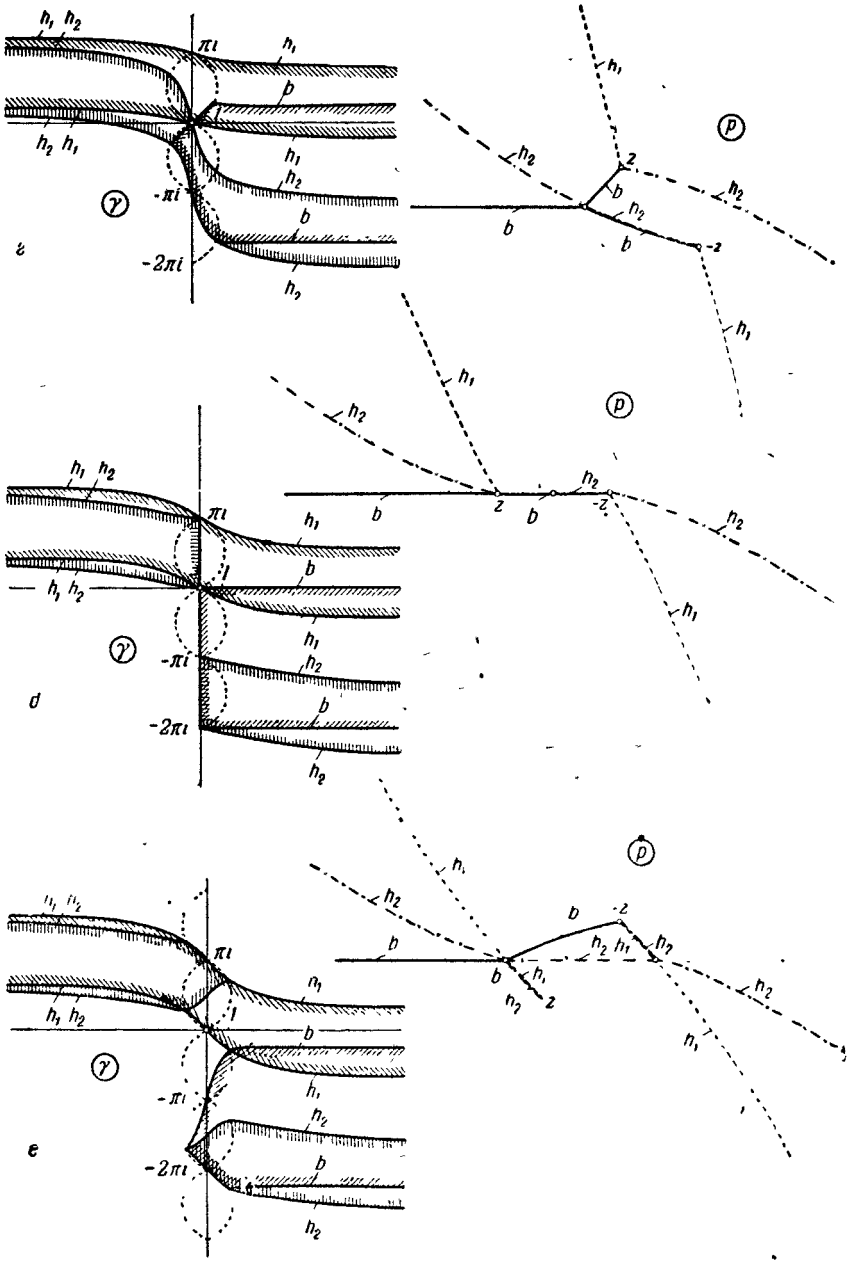
Из этих случаев легко вывести все остальные, если идти по берегу линии раздела в плоскости γ; возможные при этом ветви кривых изображены на рис. 46 и 47. Для некоторых положительных значений φ положения линий раздела на плоскости γ и соответствующих им линий нулей на плоскости p изображены на рис. 48. Здесь через b, h_1 и h_2 обозначены линии нулей для J_p, $H_p^{(1)}$ и $H_p^{(2)}$. Берега сечений ветвления на плоскости γ заштрихованы. Выбор ветви γ при положительных z и p и $z < p$ вытекает из равенства (160). Мы начинаем, таким образом, для J_p с положительных значений γ, а для функций Ганкеля — с отрицательных значений γ. Рис. 48, *а* показывает известное из 7.13.7 положение дел для функций Бесселя, а на рис. 48 изображено положение дел для $H_p^{(1)}$, известное из 7.13.9 и 7.13.10.

Если мы будем двигаться на рис. 48, *а* вдоль берега области γ для функции Бесселя, то в плоскости p мы обойдем с обеих сторон кривую b. Кривые h_1 и h_2 состоят из двух ветвей, которые связаны в бесконечности и дают в плоскости p две линии раздела, выходящие соответственно из точек $+z$ и $-z$.

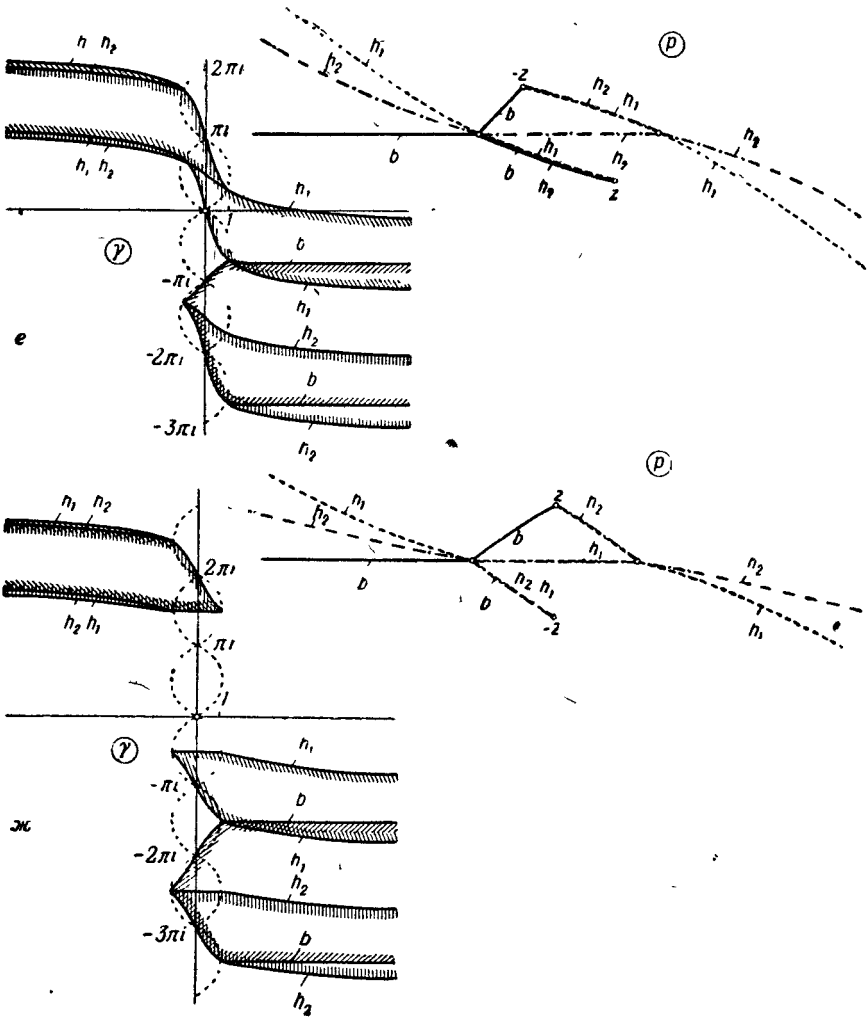
При переходе от рис. 48, *а* к последующим рисункам кривые h_1 и h_2 получаются путем непрерывного изменения кривых (163а), соответствующих рис. 46. Для функции Бесселя надо заметить, что уже на рис. 48, *а* кривая b состоит из двух кусков различного типа. А именно, слева от $p = -z$ кривая имеет тип (163б) и потому сравниваются две ветви кривой γ, которые отличаются на $2\pi i$, а между точками $-z$ и $+z$ мы имеем кривую типа (163а) и сравниваемые ветви γ противоположны по знаку (отражение в $\gamma = 0$). При переходе к $\varphi = \frac{\pi}{4}$ на рис. 48, *б* часть кривой b, согласно (163б), остается лежать на отрицательной полуоси плоскости p, соответственно кривым рис. 47 в плоскости γ. Часть берега на плоскости γ, лежащая между точками $-i\pi$ и $+i\pi$, согласно рис. 46, не соответствует вещественной оси p, но, как и ранее, симметрична отно-



Р и с. 48. Линии нулей на плоскости индекса для различных значений аргумента φ независимого переменного z.



Р и с. 48. (Продолжение.)



Р и с. 48. (Продолжение.)

сительно точки $\gamma = 0$. Поэтому и из точки $p = -z$, то есть $\gamma = -i\pi$, выходит линия раздела, симметричная на плоскости γ относительно $-i\pi$. Вся кривая берега на плоскости γ состоит, таким образом, по рис. 48, *б*, из четырех кусков, два из которых соответствуют уравнению (163а), и два — уравнению (163б). На плоскости p линия нулей b состоит из трех ветвей. Две ветви выходят из

точек $\pm z$, и встречаются на отрицательной полуоси, которая от точки пересечения до $-\infty$ также является линией нулей.

Если φ увеличивается на кратное π, то линия нулей b повторяется, в то время как кривые h_1 и h_2 изменяются. Если проследить, например, за изменением кривой h_2, то мы увидим, что эта кривая, начиная с рис. 48, *а*, остается связанной с точками $p=\pm z$ и поворачивается соответственно 7.14.6, пока на рис. 48, *д* не попадает на отрезок $[-z, z]$ вещественной оси и впредь остается на нем. Допустимая для $H_p^{(2)}$ область в плоскости γ распадается на две части; соответственно плоскость p рассекается кривой h_2 на две части. Поэтому здесь уже невозможно получить при фиксированном z асимптотические представления во всей плоскости p с помощью аналитического продолжения из одной точки. При дальнейшем увеличении φ зигзагообразная линия h_2, ведущая из точки $-z$ над вещественной осью в точку $+z$, повторяется; ветви же, ведущие в бесконечно удаленную точку, приближаются все более к вещественной оси. Соответствующие кривые на рис. 46 удаляются все больше в направлении мнимой оси, заканчиваясь на пунктирных линиях (пересечение с вещественной осью p). Область внутри пунктирных двуугольников при $|\operatorname{Im}\gamma'|>\pi$ не встречается для кривых типа (163а).

При $p>1{,}51\,|z|$ как нули функции Бесселя, так и нули обеих функций Ганкеля не лежат на положительной полуоси. Поэтому равенство (159) при фиксированном p может быть аналитически продолжено для любого значения z, такого, что $1{,}51\,|z|<p$. Тем самым равенство (159) имеет место для любого z, если $p>1{,}51\,|z|$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}\gamma>0;\ |\operatorname{Im}\gamma+\varphi|<\frac{\pi}{2};\ |\arg(\operatorname{sh}\gamma)+\varphi|<\frac{\pi}{2}\quad\text{для}\quad 2J_p(z)\\ \operatorname{Re}\gamma<0;\ |\operatorname{Im}\gamma-\varphi|<\frac{\pi}{2};\ |\arg(\operatorname{sh}\gamma)\mp\pi-\varphi|<\frac{\pi}{2}\quad\text{для}\quad \begin{cases}H_p^{(1)}(z)\\ H_p^{(2)}(z)\end{cases}\end{array}\right\}. \tag{169}$$

Пользуясь этим, при фиксированном z можно легко получить продолжение для любых значений p. При этом надо обходить кривые нулей; однако, используя соотношения обхода (31), можно и пересекать эти кривые.

7.14.8. Асимптотические формулы в окрестности кривых нулей. Из проведенного в пункте 7.14.3 рассмотрения легко получить представления цилиндрических функций на линиях нулей и в окрестности этих кривых. Здесь сравниваются две ветви асимптотических формул (159); поэтому функция Z_p асимптотически представляется суммой двух ветвей функции. Эти представления с помощью двух ветвей применимы в довольно широкой окрестности линии нулей, так как вдали от линии нулей одна из ветвей пренебрежимо мала по сравнению с другой. Поэтому мы не сделаем

ошибки, если оставим обе ветви. Лишь если мы приближаемся к соседней линии нулей, образующей с данной кривой угол 120°, то вторая ветвь типа (163а) снова становится заметной, и мы уже больше не можем ее сохранять. Аналогично обстоит дело для линий нулей типа (163б). Здесь тоже можно произвольно продолжать в мнимом направлении плоскости p имеющее место на линии нулей представление, состоящее из двух ветвей (159). Это представление можно продолжить также в вещественном направлении, если мы находимся достаточно далеко от вещественной оси p. Представляя Z_p через две ветви вида (159), мы имеем то преимущество, что нам не надо знать точного положения линии нулей, поскольку асимптотическое представление справедливо в широкой области с обеих сторон от этой линии.

В точке вещественной оси p, где пересекаются три линии нулей различных типов (например, три ветви b на рис. 48), сравнивают три ветви типа (159). Поэтому асимптотическое представление функции $Z_p(z)$ является суммой трех ветвей функции (159). И это представление остается справедливым в достаточно большой окрестности точки пересечения [1]). Иначе обстоят дела в окрестности точек $p = \pm z$. Здесь разложения (159) становятся неприменимыми и должны быть заменены формулами Никольсона.

7.14.9. Формулы Никольсона — Шёбе [2]). Асимптотические ряды (153) могут рассматриваться и как ряды по степеням $\frac{1}{x}$, и как ряды по степеням $\frac{y}{x}$. Поэтому эти ряды применимы лишь в случае, когда обе эти величины малы по сравнению с 1 (в крайнем случае — порядка 1). Если принять также во внимание и равенства (150) и (140), то получим, что должны выполняться неравенства

$$|\sqrt{p^2 - z^2}| \gg 1; \quad |(p^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}| \gg |p^2|. \tag{170}$$

Эти неравенства, вообще говоря, выполняются, если абсолютное значение p или z велико по сравнению с 1; лишь при $p^2 \sim z^2$ это не имеет уже места. Заменим во втором условии (170) $p^2 - z^2$ приближенно через $2p(p - z)$. Мы получим тогда, что для применимости равенства (159) должно иметь место неравенство

$$|p - z| \gg |p^{\frac{1}{3}}|. \tag{170а}$$

[1]) Относительно несколько более сложных обстоятельств в окрестности средней части вещественной оси для функций Ганкеля см. Franz W., *ZAMM*, 40 (1960), 385.

[2]) Nicholson J. W., *Phil. Mag.*, 19 (1910), 247—249; Schöbe W., *Ann. Math.*, 1 (1948), 230—232; Franz W. и Galle R., *Z. Naturforsch.* 10a (1955), 374.

Если это условие не выполнено, то $\frac{p}{z}$ близко к $+1$ или -1. Это может быть использовано для приближенного вычисления интеграла Зоммерфельда, даваемого равенством (68). Нам достаточно рассмотреть случай, когда $\frac{p}{z} \sim +1$, поскольку переход к случаю $\frac{p}{z} \approx -1$ может быть сделан с помощью соотношений обхода (31) или (32). Предположим сначала, что z положительно, и сделаем в интегральном представлении (68) подстановку $S = u - \frac{\pi}{2}$,

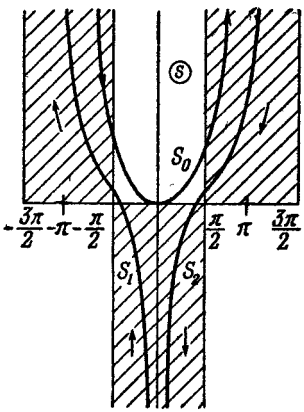


Рис. 49. Пути интегрирования для равенства (171).

$$Z_p^{(k)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_k} e^{i(pS - z\sin S)}\, dS; \quad Z_p^{(0)} = 2J_p;$$

$$Z_p^{(1)} = -H_p^{(1)}; \quad Z_p^{(2)} = -H_p^{(2)}. \quad (171)$$

Соответствующие пути интегрирования изображены на рис. 49. Производная показателя обращается в нуль, если $\cos S = \frac{p}{z}$; поскольку эта дробь близка к 1, то точка перевала находится вблизи точки $S = 0$. Поэтому разложим показатели по возрастающим степеням S. Мы получим

$$Z_p^{(k)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{S_k} e^{i(p-z)S + \frac{1}{3!}izS^3 - \frac{1}{5!}izS^5 + \frac{1}{7!}izS^7 - \cdots}\, dS. \quad (172)$$

Так как $|p - z|$ должно быть мало по сравнению с $|z|$, то поведение подинтегральной функции в окрестности точки перевала определяется членом izS^3; высшие члены следует учитывать лишь тогда, когда без них подинтегральная функция исчезающе мала. Поэтому мы удержим лишь первые два слагаемых в показателе и разложим $\exp(-izS^5/5! + izS^7/7! - \ldots)$ в ряд Тейлора. Чтобы получить асимптотическое приближение, оборвем этот ряд на конечном числе членов. Каждый множитель iS в подинтегральной функции можно заменить дифференцированием по p, которое выносится за знак интеграла. Поэтому интеграл можно записать в виде

$$Z_p^{(k)}(z) \sim e^{-\frac{z}{5!}\partial^5 - \frac{z}{7!}\partial^7 - \frac{z}{9!}\partial^9 - \cdots} B^{(k)}(p - z, z), \quad (173)$$

где для краткости через ∂ обозначено $\partial/\partial p$ и положено

$$B^{(k)}(p-z,\ z)\equiv\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_k} e^{i(p-z)S+\frac{1}{6}izS^3}\,dS. \tag{174}$$

Пути интегрирования проходят теперь в клиновидных областях, изображенных на рис. 50. Поскольку подинтегральная функция обращается в нуль на концах пути интегрирования, имеет место тождество

$$\int\limits_{C_k}\frac{d}{dS}e^{i(p-z)S+\frac{1}{6}izS^3}\,dS=0.$$

Выполним здесь дифференцирование и заменим вновь возникающий множитель S через $-i\partial/\partial p$; мы получим тогда дифференциальное уравнение

$$\partial^2 B=2\frac{p-z}{z}B. \tag{175}$$

Дифференцируя это соотношение $n-2$ раза, получаем

$$\partial^n B=2\frac{p-z}{z}\partial^{(n-2)}B+2\frac{n-2}{z}\partial^{(n-3)}B. \tag{175а}$$

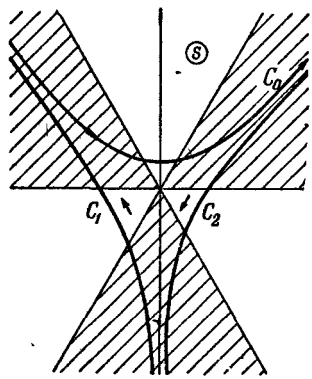


Рис. 50. Пути интегрирования для асимптотических оценок.

Отсюда вытекает, что каждая операция ∂ уменьшает порядок величины B и ее производных на $z^{-\frac{1}{3}}$ или $\sqrt{(p-z)/z}$ в зависимости от того, какая из этих двух величин имеет высший порядок.

Для того чтобы Z_p было приближенно равно B и чтобы разложение показательного множителя (173) приводило к применимому асимптотическому ряду, должно выполняться следующее условие для порядка величин, которое символически записано через операторы:

$$1\gg|z\partial^5|\gg|z\partial^7|.$$

При этом порядок величины ∂ должен выбираться равным $z^{-\frac{1}{3}}$ или $\sqrt{(p-z)/z}$. Это приводит к следующим *условиям применимости разложений Никольсона — Шёбе*

$$|z|\gg 1;\quad |p-z|\ll\left|z^{\frac{3}{5}}\right|. \tag{176}$$

Интеграл B выражается через цилиндрические функции. Для этого введем новую переменную χ с помощью равенства

$$S=\alpha\,\mathrm{sh}\frac{\chi}{3},\quad dS=\frac{\alpha}{3}\,\mathrm{ch}\frac{\chi}{3}\,d\chi. \tag{177}$$

Коэффициент α выберем так, чтобы в показателе подинтегральной функции оба слагаемых могли быть заменены с помощью тождества

$$\operatorname{sh}\chi = 3\operatorname{sh}\frac{\chi}{3} + 4\operatorname{sh}^3\frac{\chi}{3}$$

выражением $y\operatorname{sh}\chi$, где y — соответствующий постоянный множитель. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство

$$(p-z)\alpha\operatorname{sh}\frac{\chi}{3} + \frac{1}{6}\alpha^3 z\operatorname{sh}^3\frac{\chi}{3} \equiv y\left(3\operatorname{sh}\frac{\chi}{3} + 4\operatorname{sh}^3\frac{\chi}{3}\right),$$

откуда

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{2\frac{(p-z)^3}{z}}; \quad \alpha = \frac{3y}{p-z}. \tag{178}$$

Из пункта 7.14.6 вытекает, что если p лежит на отрицательном продолжении линии нулей, выходящей из $p=z$, то y^2 положительно. Мы будем далее предполагать, что p лежит там. Это означает, что для функции Бесселя $\arg(p-z)=0$, для $H_p^{(1)}$ он равен $-\frac{2\pi}{3}$ и для $H_p^{(2)}$ равен $+\frac{2\pi}{3}$. Тогда за y мы выбираем положительный корень, а α получает один из аргументов 0, $\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$. Но это — углы поворотов, переводящих, согласно рис. 50, пути C_0, C_1, C_2 в C_0. В плоскости χ, таким образом, все три пути совпадают, и мы имеем

$$B = \frac{1}{\pi}\frac{y}{p-z}\int_D e^{iy\operatorname{sh}\chi}\operatorname{ch}\frac{\chi}{3}\,d\chi. \tag{179}$$

Так как по равенству (174) в окрестности точки $p=z$ B аналитично, то можно отбросить предположение о специальном выборе положения точки p, аналитически продолжая интеграл (179).

Сравним теперь равенство (179) с интегральным представлением функции $K_p(x)$, которое получается из равенства (75) и определения функции K_p, данного в пункте 7.8:

$$K_p(x) = K_{-p}(x) = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}p}\int_D e^{ix\operatorname{sh}\psi - p\psi}\,d\psi. \tag{180}$$

Путь интегрирования для точек x, лежащих вблизи положительной полуоси, совпадает с нашим путем D. Из (180) следует при $p=\frac{1}{3}$

$$\int_D e^{ix\operatorname{sh}\psi - \frac{1}{3}\psi}\,d\psi = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}K_{\frac{1}{3}}(x), \tag{181a}$$

а при $p=-\frac{1}{3}$

$$\int_D e^{ix\operatorname{sh}\psi+\frac{1}{3}\psi}\,d\psi = 2e^{i\frac{\pi}{6}}K_{\frac{1}{3}}(x). \tag{181б}$$

Образуя полусумму равенств (181а) и (181б), получаем

$$\int_D e^{ix\operatorname{sh}\psi}\operatorname{ch}\frac{\psi}{3}\,d\psi = \sqrt{3}\,K_{\frac{1}{3}}(x). \tag{181в}$$

Поэтому из (179) вытекает

$$B(p-z,\,z)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{y}{p-z}K_{\frac{1}{3}}(y), \tag{182}$$

где

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{(p-z)^3}{z}}, \tag{182а}$$

$y>0$ на отрицательном продолжении кривой нулей. Из равенства (173) получаем асимптотическое разложение цилиндрической функции:

$$Z_p(z)\sim e^{-z\left[\operatorname{sh}(\partial)-\partial-\frac{\partial^3}{3!}\right]}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{y}{p-z}K_{\frac{1}{3}}(y). \tag{183}$$

7.14.9.1. Вычисление коэффициентов в разложении Никольсона — Шёбе. Для вычисления асимптотического ряда разложим сначала показательную функцию (173). Мы сохраним члены вплоть до величины порядка ∂^8 или $z^{-\frac{8}{3}}$ и получим

$$e^{-z\left[\frac{\partial^5}{5!}+\frac{\partial^7}{7!}+\frac{\partial^9}{9!}+\frac{\partial^{11}}{11!}\right]}\sim 1-\frac{z}{5!}\partial^5-\frac{z}{7!}\partial^7-\frac{z}{9!}\partial^9-\frac{z}{11!}\partial^{11}+$$
$$+\frac{z^2}{2\cdot 5!\cdot 5!}\partial^{10}+\frac{z^2}{5!\,7!}\partial^{12}+\frac{13z^2}{7\cdot 5!\,9!}\partial^{14}-$$
$$-\frac{z^3}{6(5!)^3}\partial^{15}-\frac{z^3}{2\cdot 5!\cdot 5!\,7!}\partial^{17}+\frac{z^4}{4!\,(5!)^4}\partial^{20}. \tag{184}$$

Этот дифференциальный оператор, согласно равенству (173), надо применить к функции B. Так как эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (175), соответственно (175а), то высшие производные можно выразить через B и ∂B. Последовательное применение равенства (175а) показывает, что

$$\partial^5 B=16\frac{p-z}{z^2}B+4\left(\frac{p-z}{z}\right)^2\partial B,$$

$$\partial^7 B=72\frac{(p-z)^2}{z^3}B+8\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^3+\frac{5}{z^2}\right]\partial B,$$

$$\partial^9 B = 32\left[8\frac{(p-z)^3}{z^4}+\frac{7}{z^3}\right]B+16\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^4+26\frac{p-z}{z^3}\right]\partial B,$$

$$\partial^{10} B = 32\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^5+50\frac{(p-z)^2}{z^4}\right]B+320\left[\frac{(p-z)^3}{z^4}+\frac{2}{z^3}\right]\partial B,$$

$$\partial^{11} B = 160\left[5\frac{(p-z)^4}{z^5}+28\frac{p-z}{z^4}\right]B+32\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^5+80\frac{(p-z)^2}{z^4}\right]\partial B,$$

$$\partial^{12} B = 64\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^6+130\frac{(p-z)^3}{z^5}+\frac{70}{z^4}\right]B+960\left[\frac{(p-z)^4}{z^5}+10\frac{p-z}{z^4}\right]\partial B,$$

$$\partial^{14} B = 128\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^7+280\frac{(p-z)^4}{z^6}+13\cdot 70\frac{p-z}{z^5}\right]B+$$
$$+21\cdot 128\left[\frac{(p-z)^5}{z^6}+30\frac{(p-z)^2}{z^5}\right]\partial B,$$

$$\partial^{15} B = 7\cdot 128\left[7\frac{(p-z)^6}{z^7}+340\frac{(p-z)^3}{z^6}+\frac{130}{z^5}\right]B+$$
$$+128\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^7+5\cdot 77\frac{(p-z)^4}{z^6}+70\cdot 31\frac{p-z}{z^5}\right]\partial B,$$

$$\partial^{17} B = 1024\left[16\frac{(p-z)^7}{z^8}+47\cdot 35\frac{(p-z)^4}{z^7}+13\cdot 280\frac{p-z}{z^6}\right]B+$$
$$+256\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^8+700\frac{(p-z)^5}{z^7}+83\cdot 140\frac{(p-z)^2}{z^6}\right]\partial B,$$

$$\partial^{20} B = 1024\left[\left(\frac{p-z}{z}\right)^{10}+1500\frac{(p-z)^7}{z^9}+\right.$$
$$+280\cdot 300\frac{(p-z)^4}{z^8}+7\cdot 13\cdot 19\cdot 80\frac{p-z}{z^7}\Big]B+$$
$$+90\cdot 512\left[\frac{(p-z)^8}{z^9}+9\cdot 28\frac{(p-z)^5}{z^8}+49\cdot 56\frac{(p-z)^2}{z^7}\right]\partial B.$$

Подставляя это в равенства (184) и (173), получаем

$$Z_p(z)\sim\xi B(p-z,\ z)-\eta\,\partial B(p-z,\ z), \tag{185}$$

где

$$\xi = 1-\frac{2}{15}\frac{p-z}{z}+\frac{13}{9\cdot 35}\left(\frac{p-z}{z}\right)^2+\frac{1}{900}\frac{(p-z)^5}{z^3}-$$
$$-\frac{1}{9\cdot 25}\frac{1}{z^2}-\frac{463}{81\cdot 350}\left(\frac{p-z}{z}\right)^3-\frac{283}{7\cdot 81\,000}\frac{(p-z)^6}{z^4}+$$
$$+\frac{71\,451}{11\cdot 81\cdot 21\cdot 500}\frac{p-z}{z^3}+\frac{26\,897}{21\cdot 81\cdot 50\cdot 44}\left(\frac{p-z}{z}\right)^4+\frac{599}{75\cdot 810\cdot 49}\frac{(p-z)^7}{z^5}+$$
$$+\frac{1}{6\cdot 810\,000}\frac{(p-z)^{10}}{z^6}+\ldots, \tag{186a}$$

$$\eta = \frac{(p-z)^2}{30z} - \frac{1}{70z} - \frac{1}{7\cdot 15}\frac{(p-z)^3}{z^2} + \\ + \frac{19}{7\cdot 9\cdot 25}\frac{p-z}{z^2} + \frac{13}{81\cdot 50}\frac{(p-z)^4}{z^3} + \frac{1}{81\,000}\frac{(p-z)^7}{z^4} - \\ - \frac{718}{125\cdot 9\cdot 77}\frac{(p-z)^2}{z^3} - \frac{2521}{77\cdot 2700}\frac{(p-z)^5}{z^4} - \frac{17}{28\cdot 81\,000}\frac{(p-z)^8}{z^5} - \ldots . \tag{186б}$$

Наконец, выразим, согласно равенству (182), B и ∂B через $K_{\frac{1}{3}}$. Применяя рекуррентную формулу (46) к $H_{\frac{1}{3}}(iy)$, легко получаем, что

$$\partial B(p-z, z) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{y}{p-z}\right)^2 K_{-\frac{2}{3}}(y). \tag{187}$$

Поскольку, согласно пункту 7.8, $K_{-\frac{2}{3}} = K_{\frac{2}{3}}$, получаем, наконец,

$$Z_p(z) \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{y}{p-z}\left[\xi K_{\frac{1}{3}}(y) + \frac{3}{2}\eta\frac{y}{p-z}K_{\frac{2}{3}}(y)\right]. \tag{188}$$

7.14.10. Асимптотическое разложение при $|p-z| \ll \left|z^{\frac{1}{3}}\right|$. При этих условиях в равенстве (188) можно заменить функцию K несколькими членами разложения по степеням y соответственно равенству (6). Проще, однако, исходить непосредственно из равенства (172). Введем новое переменное

$$t = \frac{iz}{6}S^3, \qquad S = i\left(\frac{6}{z}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{3}}. \tag{189}$$

Из равенства (172) вытекает, что

$$Z_p^{(k)}(z) = \frac{1}{3i\pi}\int_{-\infty}^{(0+)} e^t e^{-(p-z)\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{3!}{5!}t\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{3!}{7!}t\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{6}{z}\right)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}}\, dt. \tag{190}$$

Для того чтобы в этом равенстве интегрирование велось по пути, начинающемуся в $-\infty$, обходящему точку $t=0$ и заканчивающемуся также в $-\infty$, надо выбрать для $(6/z)^{\frac{1}{3}}$ соответствующий аргумент, а именно положить

$$\arg\left(\frac{6}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{3}k \quad \text{при} \quad \arg z = 0. \tag{189а}$$

Разлагая вторую показательную функцию в (190) по возрастающим степеням $(6t/z)^{\frac{1}{3}}$, получаем следующее асимптотическое представление:

$$Z_p(z) \sim \frac{2}{i\pi z} \int_{-\infty}^{(0+)} dt\, e^t \left(\frac{6t}{z}\right)^{-\frac{2}{3}} \left[1 - (p-z)\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{1}{3}} + \right.$$
$$+ \left(\frac{t}{20} + \frac{(p-z)^2}{2}\right)\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{p-z}{20}\, t + \frac{(p-z)^3}{6}\right)\frac{6t}{z} +$$
$$\left. + \left(\frac{t^2}{800} + \frac{t}{840} + \frac{(p-z)^2}{40}\, t + \frac{(p-z)^4}{24}\right)\left(\frac{6t}{z}\right)^{\frac{4}{3}} + \ldots\right].$$

По равенству (1.43а) интегралы от всех членов выражаются через Г-функцию, и мы получаем

$$Z_p(z) \sim \frac{4}{z}\left[\left(\frac{z}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} - (p-z)\left(\frac{z}{6}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} + \right.$$
$$+ \left(\frac{p-z}{15} - \frac{(p-z)^3}{6}\right)\left(\frac{z}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} +$$
$$\left. + \left(\frac{1}{280} - \frac{(p-z)^2}{24} + \frac{(p-z)^4}{24}\right)\left(\frac{z}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)} \ldots\right]. \quad (191)$$

Принимая во внимание значения аргументов для $z^{\frac{1}{3}}$, даваемые равенством (189а), получаем для главного члена равенства (191) следующее выражение:

$$\left.\begin{matrix} 2J_z(z) \\ H_z^{(1)}(z) \\ H_z^{(2)}(z) \end{matrix}\right\} \sim \frac{2}{3}\left(\frac{6}{z}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \begin{cases} 1, & \\ e^{-i\frac{\pi}{3}}, & \arg\left(\frac{6}{z}\right)^{\frac{1}{3}} = 0, \\ e^{i\frac{\pi}{3}}, & \arg z = 0. \end{cases} \quad (192)$$

7.14.11. Линии нулей в плоскости z при фиксированном индексе p. Линии нулей (163а) могут быть также проведены при фиксированном индексе p на плоскости z. Этого нельзя сделать для (163б), поскольку это уравнение дает лишь условие на p при любом z. На самом деле и для этого типа линий нулей имеет место условие на z, которое будет получено в следующих пунктах с помощью учета высших членов асимптотических формул. Выразим

в равенстве (163а) переменную z через p с помощью (162) и обозначим через ψ аргумент p. Для линии нулей на плоскости γ получаем тогда

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\psi}\left(\operatorname{th}\gamma-(\gamma-m\pi i)\right)\right]=0. \tag{193}$$

В обозначениях равенства (164) это означает, что

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\operatorname{sh}2\alpha-\alpha(\operatorname{ch}2\alpha+\cos 2\beta)}{\sin 2\beta-\beta(\operatorname{ch}2\alpha+\cos 2\beta)}. \tag{194}$$

На рис. 51 изображен ход кривых на плоскости γ'. Кривые $\operatorname{tg}\psi=0$ совпадают с пунктирными линиями на рис. 46 (вещественной осью p).

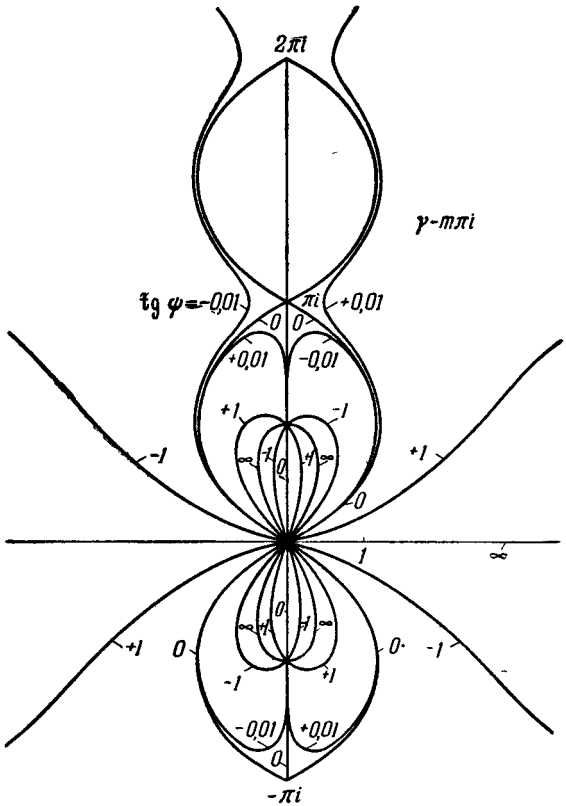
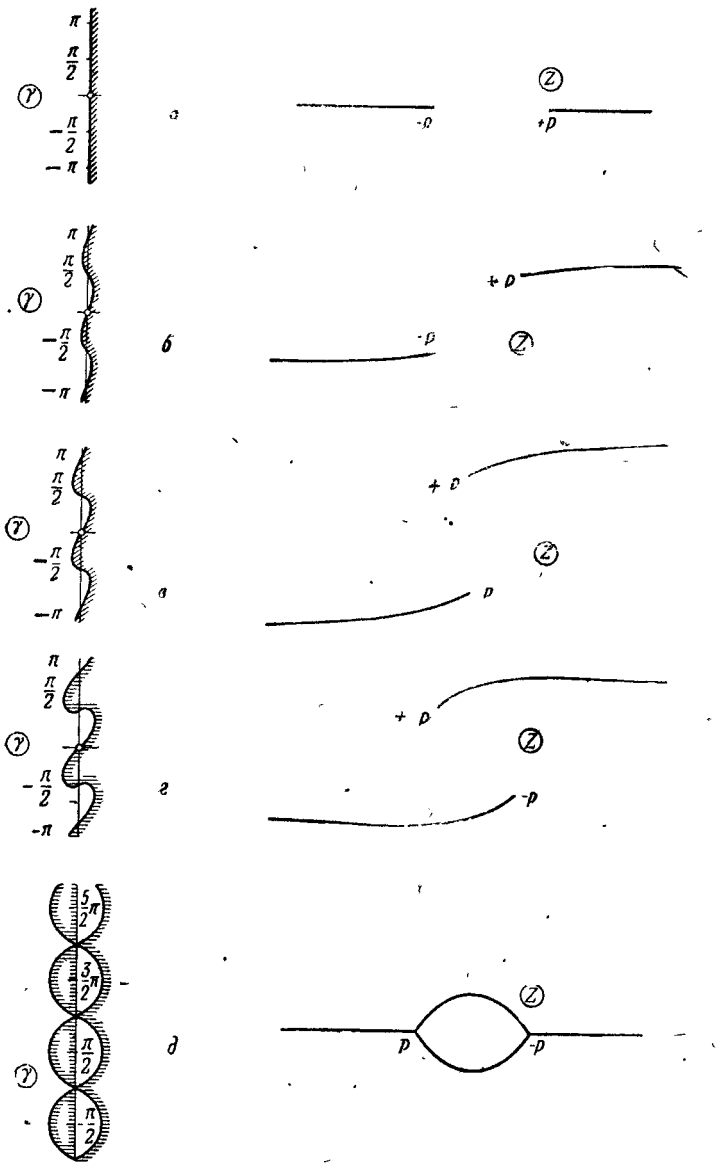


Рис. 51. Возможные линии нулей по равенству (194). Параметром является $\operatorname{tg}\psi$.

Как было выяснено в пункте 7.14.7, ограниченные ими области, за исключением области, ограниченной линией $\gamma=0$, не содержат линий нулей типа (163а).



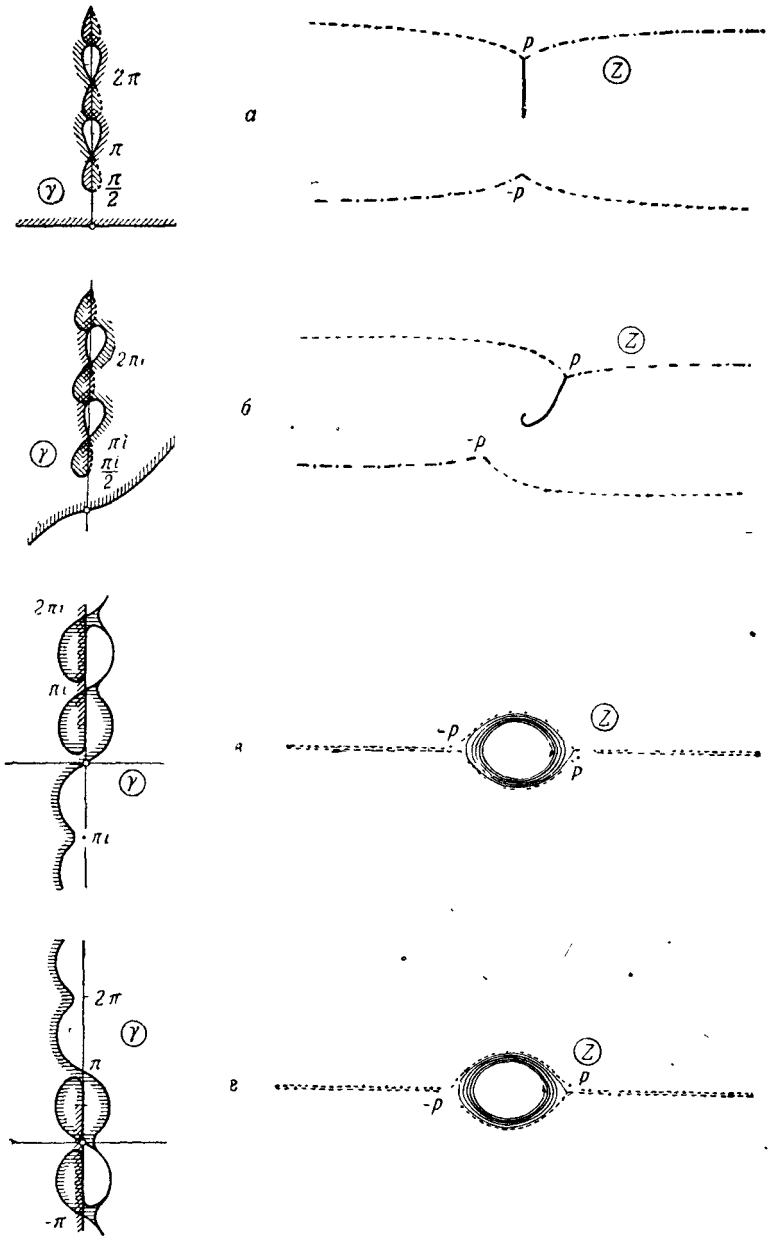
Р и с. 52. Линии нулей для функции Бесселя на плоскости независимого переменного для различных значений аргумента ψ индекса p.

Из возможных линий нулей на рис. 51 мы должны теперь выбрать линии, соответствующие отдельным цилиндрическим функциям. Это легко сделать, используя результаты пункта 7.14.7. Для функций Бесселя возникают при этом кривые, изображенные на рис. 52, а для функций Ганкеля — на рис. 53.

На плоскости γ нечетные кратные $\frac{i\pi}{2}$ являются точками ветвления; а именно они соответствуют $z=\infty$. Поэтому через них проходит одна из линий раздела. Для функций Бесселя эта линия разбивает всю плоскость γ на две части, из которых нам нужна лишь правая. Точно так же и для функций $H_p^{(1)}(z)$ используется лишь часть плоскости γ; для положительных мнимых частей p в точке $\frac{i\pi}{2}$ имеет место ветвление на два листа римановой поверхности. Асимптотическое представление (159) справедливо в каждом листе вплоть до линии, которая начинается в точке $\frac{i\pi}{2}$ и извивается вдоль мнимой оси. Оба листа римановой поверхности, таким образом, частично перекрываются по дугообразным выступам. Перекрытая часть левого листа отмечена на рисунке пунктиром.

Асимптотическое представление (159), рассматриваемое как функция от γ, является двузначным, а если отбросить множитель $(\operatorname{sh}\gamma)^{\frac{1}{2}}$, то даже однозначным. Напротив, как функция от z это разложение (как и сами цилиндрические функции) многозначно; на плоскости z точки 0 и ∞ являются точками ветвления бесконечно большого порядка. Аргумент переменной z определяется тем, что входящая в нулевую точку спираль должна начинаться при $z=\pm p$ в области $0<\varphi<\pi$; на плоскости γ этим точкам отвечает $\gamma=0$ и соответственно $\gamma=+\pi$. С помощью аналитического продолжения можно, исходя отсюда, однозначно определить аргумент z для любой точки допустимой γ-полуплоскости.

Линии нулей разбиваются на три типа. Граничной кривой γ-полуплоскости соответствует на плоскости z указанная выше спираль, которая начинается в точках $z=\pm p$ и асимптотически приближается, делая бесконечно много оборотов, к точке $z=0$. При этом $\arg\varphi$ начинается со значения $\frac{\pi}{2}$ и далее увеличивается. Для чисто мнимых значений p спираль вырождается в прямолинейный отрезок, идущий от $\pm p$ к 0. Из извилистой линии на плоскости γ возникают два вида линий нулей, которые, с одной стороны, периодически повторяются в области $\varphi<0$, а с другой — в области $\varphi>\pi$ и имеют по φ период π. В каждой точке $\pm p$ начинается в точности одна такая линия, идущая к $+\infty$ или $-\infty$, не пересекая вещественной оси. Мнимая часть стремится при этом к конечному



Р и с. 53. Линии нулей для функции Ганкеля $H_p^{(1)}(z)$ на плоскости z для различных значений аргумента ψ индекса p.

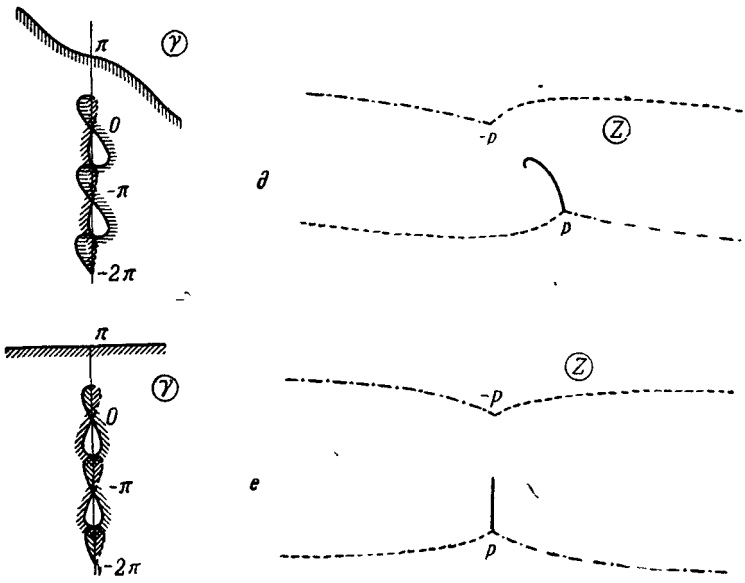


Рис. 53. (Продолжение.)

значению $-|p|\frac{\pi}{2}\sin\psi\cos 2\psi$; это можно доказать, вычисляя приближенно значение (166а) и (162) при $\gamma\sim\frac{i\pi}{2}$.

Если p приближается к вещественной оси, то спираль приближается изнутри к изображенному на рис. 53, *д* двуугольнику с углами $\pm p$. На листах, свободных от спирали, линии нулей приближаются извне своими внутренними концами к этому двуугольнику, а внешними частями — к вещественной оси. Спираль сливается на углах с третьим видом линий нулей, которые переходят в вещественную ось. Лишь при аргументах $\varphi=0$ и π внешние части вещественной оси не содержат нулей. Если p пересекает вещественную ось, то роли меняются: дуги двуугольника, которые приближались извне, переходят в дуги, лежащие внутри, и образуют спираль, в то время как внешние ветви отделяются. Те же двуугольники, которые состояли из спиралей, отделяются друг от друга и вместе с внешними ветвями образуют стремящуюся к бесконечности линию нулей. Для того чтобы продемонстрировать этот переход, на рис. 53 изображены линии нулей при весьма малом значении $\varphi=0{,}01$.

7.14.12. Линии нулей функции Бесселя с почти отрицательным индексом. Если p лежит близко к отрицательной полуоси, то оно лежит на плоскости p (см. рис. 48), там, где линии нулей типа (163а) заканчиваются и переходят в линии типа (163б); нам надо рассмотреть нули типа (163б) (отрицательную p-полуось). Здесь надо вычислять точнее, поскольку в асимптотическом представлении складываются все три сравниваемые ветви. В силу соотношения (32а), достаточно ограничиться рассмотрением области $0 < \varphi < \pi$. Три

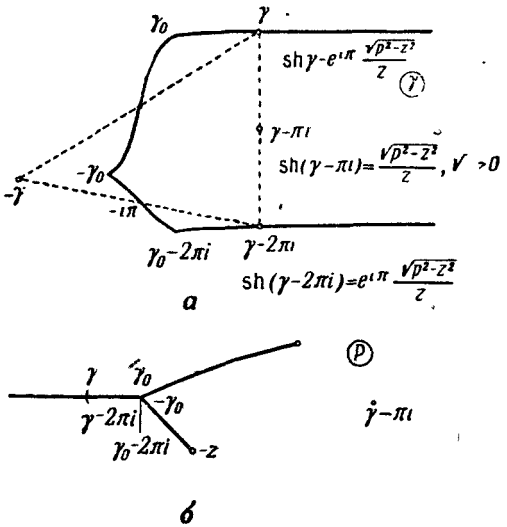


Рис. 54. Определение аргумента в представлении функции Бесселя с почти отрицательным индексом: $а$ — на плоскости γ, $б$ — на плоскости p.

сравниваемых значения γ и $\operatorname{sh}\gamma$ мы возьмем из рис. 54. Значение γ получается из рис. 46, а значение $\operatorname{sh}\gamma$ получается из равенства (160) с помощью аналитического продолжения от положительных значений z в точку $\gamma - \pi i$. При переходе вдоль вещественной оси p к $-\gamma$ вновь получаем исходное значение аргумента, при переходе же к γ аргумент увеличивается на πi, а при переходе к $\gamma - 2\pi i$ он уменьшается на πi. Условие, что сумма всех трех ветвей (159) равна нулю, приводит поэтому к равенству

$$e^{z(\gamma \operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh}\gamma)} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{z(\operatorname{sh}\gamma - \gamma \operatorname{ch}\gamma)} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{z(\operatorname{sh}\gamma - (\gamma - 2\pi i)\operatorname{ch}\gamma)} = 0$$

или

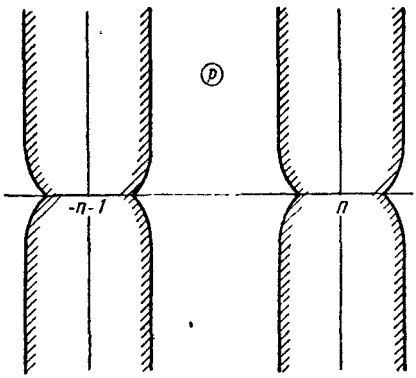
$$e^{2\pi i p} - 1 = i\, e^{2z(\gamma \operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh}\gamma)}. \qquad (195)$$

В точке пересечения γ_0 абсолютное значение показательной функции в правой части равенства равно 1. При движении по отрицательной оси p оно быстрее стремится к нулю, чем показательная функция. Таким образом, равенство (195) выполнимо лишь в том случае, когда левая часть (195) по абсолютной величине меньше 1, т. е., когда p достаточно близко к целому числу. Это условие определяет области, изображенные на рис. 55. Лишь для точек p, лежащих внутри этой области, могут встретиться нули внутри двуугольника на плоскости z изображенного на рис. 52, *д*. Более точный вывод об их положении можно сделать, если выразить правую часть равенства (195) через z и p. Сначала из рис. 54, *а* находим

$$e^{\gamma} = \operatorname{ch}\gamma + \operatorname{sh}\gamma = \frac{p - \sqrt{p^2 - z^2}}{z}.$$

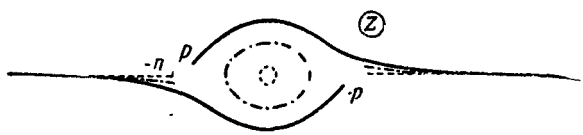
Подставляя это в (195), получаем

$$e^{2\pi i p} - 1 = i\left(\frac{p - \sqrt{p^2 - z^2}}{z}\right)^{2p} e^{2\sqrt{p^2 - z^2}}. \qquad (195а)$$



Р и с. 55. Области плоскости p, в которых нули стремятся к нулевой точке плоскости z.

Отрицательная полуось z является линией ветвления для правой части. Если p стремится к целому значению $-n$, то левая часть очень мала, поэтому и правая часть должна быть очень мала. Для



Р и с. 56. Изменение линий нулей функции Бесселя при приближении индекса к отрицательному целому числу.

того чтобы правая часть была мала, абсолютное значение z должно быть малым. Приближенно имеем

$$p + n \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{z}{-2n}\right)^{2n} e^{2n}. \qquad (195б)$$

Согласно теореме Гурвица, получаем $2n$ нулей z, которые равномерно распределены на малой окружности с центром в начале

координат. По точной формуле (195а) мы также имеем $2n$ нулей, но они не расположены на одной окружности. Если мы будем извне приближаться к значению $p=-n$, находясь в заштрихованной на рис. 55 области, то $2n$ нулей пробегают изображенный на рис. 52, *д* двуугольник. Если p стремится к точке $-n$, эти нули стремятся к точке $z=0$ (рис. 56). Там они компенсируют бесконечность z^p функции J_p. Из-за этого функция $J_{-n}=\pm J_n$ имеет в начале координат n-кратный нуль (см. равенство (8), справедливое лишь для целочисленных значений p).

7.14.13. Линии нулей для функций Ганкеля с почти вещественными индексами. Если p близко к вещественному числу, то нам надо рассматривать нули типа (136б). Если мы рассмотрим на рис. 48 точки, из которых выходят линии нулей рис. 53, то найдем, что лишь для первых двух четвертей спирали выходят из областей, в которых линии нулей определяются равенством (163а). В остальных случаях рассмотрение линий нулей требует учета большего числа ветвей (159). Мы применим поэтому соотношение обхода (33а) для того, чтобы свести $H_p^{(1)}(z)$ к представлению обеих функций Ганкеля в полуплоскости $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. Положим поэтому

$$z=e^{im\pi}z_0,\quad 0\leqslant\arg z_0\leqslant\pi. \tag{196}$$

Из равенства (159) следует, что для значений p, лежащих около положительной полуоси при $|z_0|>|p|$ имеем

$$H_p^{(1)}(z_0)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z_0^2-p^2}}}\,e^{i\sqrt{z_0^2-p^2}+p\ln\frac{\sqrt{z_0^2-p^2}+ip}{z_0}-ip\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}, \tag{197}$$

$$0\leqslant\arg\sqrt{z_0^2-p^2}\leqslant\pi.$$

Для функции $H_p^{(2)}(z)$ при каждом почти положительном p имеется представление, справедливое на линии нулей h_2, а именно сумма обеих ветвей (159), возникающих при обходе точки $z=p$

$$H_p^{(2)}(z_0)\sim-H_p^{(1)}(z_0)+$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{z_0^2-p^2}}}\,e^{-i\sqrt{z_0^2-p^2}-p\ln\frac{\sqrt{z_0^2-p^2}+ip}{z_0}+ip\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{4}}, \tag{198}$$

где

$$0<\arg z_0<\pi;\quad 0<\arg\left(\sqrt{z_0^2-p^2}\right)<\pi.$$

Если z_0 лежит настолько близко к положительной полуоси, что показательная функция не мала по сравнению с 1, то надо вычеркнуть в правой части член $-H_p^{(1)}$.

Используем теперь соотношение обхода (33а) и равенства (196), (197), (198) для того, чтобы получить асимптотическое представление $H_p^{(1)}(z)$. Мы получаем тогда уравнение для нулей

$$i\,e^{im\pi}\frac{\sin mp\pi}{\sin p\pi}\sim\left(\frac{\sqrt{z_0^2-p^2}+ip}{z_0}\right)^{2p}e^{2i\sqrt{z_0^2-p^2}} \tag{199}$$

для комплексных z и

$$\left|\frac{\sin mp\pi}{\sin(m-1)p\pi}\right|=1$$

для вещественных z. Поскольку модуль правой части (199) при $\operatorname{Im} z_0>0$ меньше 1, то нули лежат над вещественной осью z_0 лишь в случае, когда и модуль левой части меньше 1. Асимптотическое значение левой части при большой положительной мнимой части p, а именно $i\exp(ip\pi)$ и соответственно $i\exp(i(2m-1)p\pi)$, приводит к линиям нулей, исследованным в пункте 7.14.11. Они изображены

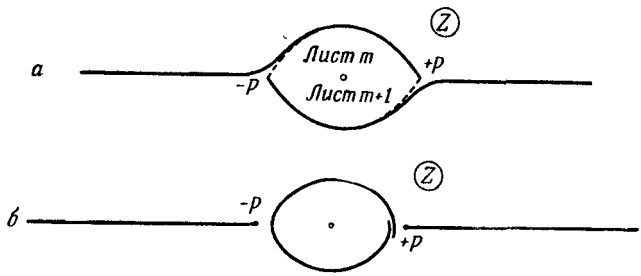


Рис. 57. Изменение линий нулей функции $H_p^{(1)}(z)$ при пересечении p вещественной оси.

на рис. 57 для двух значений p, лежащих близко к вещественной оси, причем одно лежит над ней, а другое — под ней.

Существенное отклонение от этой асимптотики возникает, если мы приближаемся к нулю левой части (199); тогда и правая часть должна быть очень малой. Это имеет место при z_0, удаляющемся от нулевой кривой рис. 56 вверх, соответственно вправо. Если левая часть (199) равна нулю (т. е. если mp — целое, p — не целое), то все нули, лежащие в верхней полуплоскости z_0, стремятся к бесконечности. Это связано с тем, что для рассматриваемых рациональных значений p функция Ганкеля имеет в точке $z=0$ ветвление m-го порядка. Поэтому рассматриваемая полуплоскость $m\pi\leqslant\varphi\leqslant(m+1)\pi$ совпадает с полуплоскостью $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, которая, согласно 7.13.11, не содержит нулей.

Левая часть (199) может быть также по модулю больше, чем 1; максимальное значение ее модуля равно m (при целых значениях p). Для того чтобы и правая часть (199) была больше 1, линия нулей должна отклониться влево, она может при этом пересечь вещественную ось z_0, но потом она возвращается в верхнюю полуплоскость z_0 при условии, что p снова уходит из окрестности вещественной оси.

7.15. Примеры рядов Неймана. Теоремы сложения

7.15.1. Ряды Неймана. Если p — целое число, то путь интегрирования в интеграле Сонина (равенство (64)) замкнут на римановой поверхности. Возникающее отсюда равенство

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2i\pi}\oint^{(0+)} e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-\nu-1}\,ds$$

можно на основе теоремы о вычетах истолковать следующим образом: коэффициент при s^ν в разложении функции $e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}$ в ряд Лорана равен $J_\nu(z)$. Отсюда следует, что

$$e^{\frac{z}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} s^\nu J_\nu(z). \tag{200}$$

Рассматриваемый как разложение по функциям Бесселя, этот ряд называется рядом Неймана. Из формулы (9) легко вытекает, что этот ряд, рассматриваемый как функция от z, равномерно сходится в каждой конечной области изменения z.

Подстановка Зоммерфельда $s=e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}$ преобразует равенство (200) в

$$e^{iz\cos\varphi}=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu\varphi}e^{i\frac{\pi}{2}\nu}J_\nu(z). \tag{201}$$

Этот ряд, рассматриваемый как ряд по показательным функциям, является рядом Фурье. Физически его можно рассматривать как разложение плоской волны на цилиндрические волны. Он может быть записан в виде

$$e^{iz\cos\varphi}=J_0(z)+2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{2}\nu}\cos\nu\varphi\,J_\nu(z). \tag{201а}$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\cos(z\cos\varphi)=J_0(z)+2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\cos 2\nu\varphi\,J_{2\nu}(z) \tag{201б}$$

и

$$\sin(z\cos\varphi) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\cos(2\nu+1)\varphi\, J_{2\nu+1}(z). \qquad (201в)$$

Заменим здесь φ на $\frac{\pi}{2}-\psi$. Мы получим

$$\cos(z\sin\psi) = J_0(z) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z)\cos 2\nu\psi \qquad (202а)$$

и

$$\sin(z\sin\psi) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(z)\sin(2\nu+1)\psi. \qquad (202б)$$

Полагая в равенстве (202а) $\psi = 0$, получаем

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_{2\nu}(z). \qquad (203)$$

Дифференцируя (202а) и (202б) по ψ и полагая потом $\psi = 0$, имеем

$$\frac{z}{2} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(2\nu+1)J_{2\nu+1}(z), \qquad (203а)$$

а при $\psi = \frac{\pi}{2}$, применяя правило Лопиталя, находим

$$\frac{z}{2}\sin z = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}(2\nu)^2 J_{2\nu}(z) = 2^2J_2(z) - 4^2J_4(z) + 6^2J_6(z) - \ldots, \qquad (203б)$$

$$\frac{z}{2}\cos z = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}(2\nu+1)^2 J_{2\nu+1}(z) = 1^2J_1(z) - 3^2J_3(z) + 5^2J_5(z) - \ldots. \qquad (203в)$$

Разложим в равенствах (202а) и (202б) обе части по степеням $\sin\psi$ и сравним коэффициенты при положительных целых степенях μ. Мы получим

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\mu+2\nu)\,\Gamma(\mu+\nu)}{\nu!}J_{\mu+2\nu}(z).$$

Это равенство при любом $\mu = p$ было уже получено в пункте 7.6 (см. равенство (50)).

Равенство (201), которое, как мы уже указывали, можно рассматривать как разложение плоской волны на цилиндрические волны, допускает обобщение, если использовать равенство (50). Разложим

показательную функцию и применим равенство (50); мы получим тогда

$$z^p e^{iz\cos\varphi} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{i^\varkappa \cos^\varkappa\varphi}{\varkappa!} z^{p+\varkappa} =$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{i^\varkappa \cos^\varkappa\varphi}{\varkappa!} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{2^{p+\varkappa}(p+\varkappa+2\mu)\,\Gamma(p+\varkappa+\mu)}{\mu!} J_{p+\varkappa+2\mu}(z).$$

Введем новый индекс суммирования, положив $\nu = \varkappa + 2\mu$; мы получим

$$z^p e^{iz\cos\varphi} = 2^p \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu J_{p+\nu} \sum_{\mu=0}^{\leqslant \left[\frac{\nu}{2}\right]} (-1)^\mu 2^{\nu-2\mu} \frac{(p+\nu)\,\Gamma(p+\nu-\mu)}{\mu!\,(\nu-2\mu)!} \cos^{\nu-2\mu}\varphi.$$

По равенству (5.123) внутреннюю сумму можно заменить функцией Гегенбауэра, что приводит к

$$z^p e^{iz\cos\varphi} = 2^p \Gamma(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu (p+\nu) C_\nu^p(\cos\varphi) J_{p+\nu}(z). \qquad (204)$$

Поскольку при $p = \frac{1}{2}$ функция Гегенбауэра переходит в функцию Лежандра, то имеем частный случай

$$e^{iz\cos\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \sum_{\nu=0}^{\infty} i^\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right) P_\nu(\cos\varphi)\, J_{\nu+\frac{1}{2}}(z). \qquad (204a)$$

7.15.2. Теорема сложения. Интеграл Зоммерфельда можно рассматривать как разложение цилиндрической волны на плоские волны, в то время как равенство (201) дает разложение плоской волны на цилиндрические волны. Применение обоих соотношений дает возможность разложить цилиндрическую волну на цилиндрические волны (с другой осью)[1]. Мы проведем вычисление для первой функции Ганкеля. В силу равенства (68) имеем

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{+i\infty+\alpha_1}^{-i\infty-\alpha_2} e^{iz\cos u + ip\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\, du \qquad (205)$$

$$(-\pi + \arg z < \alpha < \arg z).$$

[1]) Относительно значений для вычислений см. Weyrich R., стр. 90, или Sommerfeld A, в Riemann — Webers Differentialgl. d. Physik, т. II, 491 (1927).

Пусть z выражается через величины z_1, z_2, Φ следующим образом:

$$z\cos\psi = z_1 - z_2\cos\Phi \tag{206а}$$

$$z\sin\psi = z_2\sin\Phi. \tag{206б}$$

Если величины z_1, z_2, Φ вещественны, то соответствие между z и ψ и этими величинами становится очевидным из рис. 58. Мы будем всегда выбирать z_2 так, чтобы $|z_1| > |z_2|$. Из рисунка следует, что тогда в вещественном случае угол ψ острый. В общем случае ψ определяется равенствами (206). Мы покажем ниже, что при условии $|z_2 e^{\pm i\Phi}| < |z_1|$ будет $|\operatorname{Re}\psi| < \frac{\pi}{2}$. Зафиксируем путь интегрирования в интеграле (205) равенствами

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \arg z - \frac{\pi}{2}.$$

Тогда допустим сдвиг этого пути на ψ, поскольку в силу неравенства $|\operatorname{Re}\psi| < \frac{\pi}{2}$ после сдвига путь будет проходить в допустимой полосе. Таким образом,

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{l\infty+\alpha}^{-l\infty-\alpha} e^{iz\cos(u-\psi)+ip\left(u-\psi-\frac{\pi}{2}\right)}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{l\infty+\alpha}^{-l\infty+\alpha} e^{iz(\cos u\cos\psi+\sin u\sin\psi)+ip\left(u-\psi-\frac{\pi}{2}\right)}\,du.$$

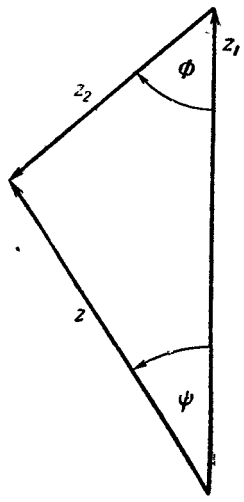


Рис. 58. Геометрическая интерпретация теоремы сложения.

Принимая во внимание соотношение (206а, 206б), получаем отсюда

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{l\infty+\alpha}^{-l\infty-\alpha} e^{-iz_2\cos(u+\Phi)}\,e^{iz_1\cos u+ip\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,e^{-ip\psi}\,du,$$

и, преобразуя первый множитель по равенству (201),

$$e^{ip\psi}H_p^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{l\infty+\alpha}^{-l\infty-\alpha}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_\nu(z_2)\,e^{i\nu\Phi}\,e^{iz_1\cos u+i(p+\nu)\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,du$$

Изменим здесь порядок суммирования и интегрирования. Тогда, если выполнено условие $-\frac{\pi}{2}+\arg z_1 < \arg z_2 < \frac{\pi}{2}+\arg z_1$, то

$$e^{ip\psi}H_p^{(1)}(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\Phi}\,J_\nu(z_2)\,H_p^{(1)}(z_1).$$

Возможность изменения порядка суммирования и интегрирования связана с выполнением следующих трех условий:

1. В каждом ограниченном интервале, $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, на пути интегрирования должен равномерно сходиться ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\left(u+\Phi-\frac{\pi}{2}\right)} J_\nu(z_2) = e^{-iz_2\cos(u+\Phi)}.$$

2. Функция $e^{iz_1\cos u+ip\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}$ должна для любого конечного значения u быть непрерывной вдоль пути интегрирования.

3. Ряд

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\Phi} J_\nu(z_2) \int_{i\infty+\alpha}^{-i\infty-\alpha} \frac{1}{\pi} e^{iz\cos u+i(p+\nu)\left(u-\frac{\pi}{2}\right)} du$$

должен абсолютно сходиться.

Первые два условия всегда выполняются в силу равенства (9). Что касается третьего условия, предположим сначала, что путь интегрирования лежит в допустимой полосе, а потому интеграл сходится и представляет функцию Ганкеля. Тогда для абсолютной сходимости достаточно, чтобы

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{e^{i(\nu+1)\Phi} J_{\nu+1}(z_2) H^{(1)}_{p+\nu+1}(z_1)}{e^{i\nu\Phi} J_\nu(z_2) H^{(1)}_{p+\nu}(z_1)}\right| < 1$$

и

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{e^{i(\nu-1)\Phi} J_{-\nu-1}(z_2) H^{(1)}_{p-\nu-1}(z_1)}{e^{i\nu\Phi} J_{-\nu}(z_2) H^{(1)}_{p-\nu}(z_1)}\right| < 1.$$

Принимая во внимание равенства (18а), (18б), имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|-e^{i\Phi}\frac{J_{\nu+1}(z_2) J_{-p-\nu-1}(z_1)}{J_\nu(z_2) J_{-p-\nu}(z_1)}\right| < 1$$

и

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|e^{i\Phi}\frac{J_{-\nu-1}(z_2) J_{p-\nu-1}(z_1)}{J_{-\nu}(z_2) J_{p-\nu}(z_1)}\right| < 1,$$

и отсюда, в силу равенств (6), (8) и $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, следует

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|-e^{i\Phi}\frac{(-p-\nu) z_2}{(\nu+1) z_1}\right| = \left|\frac{e^{i\Phi} z_2}{z_1}\right| < 1,$$

соответственно

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|e^{-i\Phi}\frac{(p-\nu) z_2}{(\nu+1) z_1}\right| = \left|\frac{e^{-i\Phi} z_2}{z_1}\right| < 1.$$

Поэтому для абсолютной сходимости достаточно, чтобы выполнялись *оба* условия $|e^{\pm i\Phi} z_2| < |z_1|$. Если знак неравенства заменить знаком равенства, то из наших рассмотрений мы ничего не можем сказать о сходимости ряда. Однако если заменить один из знаков $<$ знаком $>$, то ряд будет расходиться.

Нам осталось исследовать допустимость пути интегрирования. Из равенств (206) следует

$$ze^{+i\psi} = z_1 - z_2 e^{-i\Phi},$$

$$ze^{-i\psi} = z_1 - z_2 e^{+i\Phi},$$

и потому

$$\arg z - \arg z_1 \pm \operatorname{Re}\psi = \arg\left(1 - \frac{z_2 e^{\mp i\Phi}}{z_1}\right).$$

Если выполнены условия сходимости, то вещественная часть $1 - z_2 e^{\mp i\Phi}/z_1$ положительна, а потому аргумент по модулю меньше, чем $\frac{\pi}{2}$. Поэтому имеют место *оба* неравенства

$$|\arg z - \arg z_1 \pm \operatorname{Re}\psi| < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует

$$|\arg z - \arg z_1| + |\operatorname{Re}\psi| < \frac{\pi}{2},$$

и потому $|\operatorname{Re}\psi| < \frac{\pi}{2}$ и $|\arg z - \arg z_1| < \frac{\pi}{2}$. Но эти два условия достаточны для сходимости интеграла. Заменим еще по равенству (206) вспомогательную величину ψ через z_1, z_2, Φ. Мы получим тогда следующий результат:

При условии, что $|e^{\pm i\Phi} z_2| < |z_1|$, имеем

$$H_p^{(1)}(z) = \left(\frac{z_1 - z_2 e^{+i\Phi}}{z_1 - z_2 e^{-i\Phi}}\right)^{\frac{p}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\Phi} J_\nu(z_2)\, H_{p+\nu}^{(1)}(z_1)$$

$$\left(z = +\sqrt{z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos\Phi}\right). \qquad (207)$$

Знак $+$ означает, что при $z_2 \to 0$ корень $z \to +z_1$. Это условие удобно для вещественных значений аргумента. Для комплексных значений аргумента удобнее определить знак из условия, что основание степени, стоящей перед суммой, имеет положительную вещественную часть. Читатель легко докажет, что соответствующее равенство справедливо и для второй функции Ганкеля. Поэтому для любой цилин-

дрической функции имеем

$$Z_p(z)=\left(\frac{z_1-z_2e^{i\Phi}}{z_1-z_2e^{-i\Phi}}\right)^{\frac{p}{2}}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}e^{i\nu\Phi}J_\nu(z_2)Z_{p+\nu}(z_1)$$

$$(z=+\sqrt{z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\cos\Phi},\ |z_2e^{\pm i\Phi}|<|z_1|). \qquad (208)$$

Это соотношение обычно называют ***теоремой сложения для цилиндрических функций.*** При $\Phi=\pi$ получаем частный случай

$$Z_p(z_1+z_2)=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}J_\nu(z_2)Z_{p+\nu}(z_1)$$

$$(|z_2|<|z_1|). \qquad (208а)$$

Применяя равенство (208) к функциям Бесселя с целочисленным индексом $J_\mu(z)$ и принимая во внимание, что в этом случае и ряд и интеграл всегда сходятся, получаем, что

$$J_\mu(z)=\left(\frac{z_1-z_2e^{+i\Phi}}{z_2-z_2e^{-i\Phi}}\right)^{\frac{\nu}{2}}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}e^{i\nu\Phi}J_\nu(z_2)J_{\mu+\nu}(z_1) \qquad (208б)$$

(μ — целое).

Это равенство имеет место без каких-либо ограничений.

Рассмотренные примеры показывают, что ряды Неймана имеют некоторые общие свойства с рядами Лорана. Подробное изложение читатель найдет в книге Ватсона (стр. 574 и далее).

7.16. Разложения по собственным функциям. Ряды Бесселя, Фурье и Дини. Будем искать решение F_p дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF_p}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{p^2}{r^2}\right)F_p=0$$

в области $0<a\leqslant r\leqslant b$, которое при $r=a$, $r=b$ удовлетворяет однородным граничным условиям $B(F_p)=0$. Здесь

$$B(F_p)\equiv\alpha(r)F_p+\beta(r)\frac{dF_p}{dr} \qquad (209)$$

и $p+\frac{1}{2}\geqslant 0$ (p — вещественно). В п. 7.1 мы видели, что все решения дифференциального уравнения Бесселя могут быть представлены как линейные комбинации двух линейно независимых цилиндрических функций. Поэтому можно положить

$$F_p=Z_p(kr)=c_1J_p(kr)+c_2N_p(kr)=c_1'H_p^{(1)}(kr)+c_2'H_p^{(2)}(kr).$$

Граничные условия

$$\alpha_1 Z_p(ka) + \beta_1 k Z_p'(ka) = 0$$

и

$$\alpha_2 Z_p(kb) + \beta_2 k Z_p'(kb) = 0$$

представляют два однородных линейных уравнения для постоянных c_1, c_2 и c_1', c_2'. Поэтому они могут выполняться лишь в случае, когда определитель обращается в нуль. Это дает следующее уравнение для параметра k:

$$D(k) = \begin{vmatrix} \alpha_1 H_p^{(1)}(ka) + \beta_1 k H_p^{(1)\prime}(ka) & \alpha_1 H_p^{(2)}(ka) + \beta_1 k H_p^{(2)\prime}(ka) \\ \alpha_2 H_p^{(1)}(kb) + \beta_2 k H_p^{(1)\prime}(kb) & \alpha_2 H_p^{(2)}(kb) + \beta_2 k H_p^{(2)\prime}(kb) \end{vmatrix} = 0. \tag{210}$$

Подставляя для больших значений k асимптотические разложения (13) и (15), получаем приближенное уравнение для больших k:

$$(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2(k^2 + \ldots)) \sin(a-b)k + \\ + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(k + \ldots)\cos(a-b)k = 0.$$

Если $\beta_1\beta_2 \neq 0$, то для обеих границ получаем граничные условия второго или третьего рода и допустимые собственные значения k^2 определяются из равенства

$$\sin(a-b)k \sim 0 \quad \text{или} \quad k_\nu = \frac{\nu\pi}{b-a} + \ldots . \tag{211а}$$

Если $\beta_1\beta_2 = 0$ и $\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 \neq 0$, то одно из граничных условий является условием первого рода, а одно — второго или третьего рода. В этом случае имеем

$$\cos(a-b)k \sim 0 \quad \text{или} \quad k_\nu = \frac{(2\nu+1)\frac{\pi}{2}}{b-a} + \ldots . \tag{211б}$$

Наконец, если $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то в обеих граничных точках имеем граничные условия первого рода и

$$\sin(a-b)k \sim 0 \quad \text{или} \quad k_\nu = \frac{\nu\pi}{b-a} + \ldots . \tag{211в}$$

Во всех случаях получаем бесконечно много собственных значений k_ν^2, и соответствующих собственных функций $Z_p(k_\nu r)$. Для граничных условий первого рода легко показать, что все собственные

значения положительны [1]). Из дифференциального уравнения вытекает

$$r\frac{dZ_p}{dr} = \int_a^r \left(\frac{p^2}{r} - k^2 r\right) Z_p\, dr + a\left(\frac{dZ_p}{dr}\right)_{r=a}.$$

Если бы имело место неравенство $k^2 \leqslant 0$, то мы имели бы $\left(\frac{p^2}{r} - k^2 r\right) > 0$ в промежутке $0 < a \leqslant r \leqslant b$. Предположим, что $\left(\frac{dZ_p}{dr}\right)_{r=a} < 0$. Поскольку $Z_p(ka) = 0$ (граничные условия), то $Z_p(k(a+\varepsilon)) < 0$. Тогда оба слагаемых в правой части отрицательны, а потому для всех значений $r > a$ левая часть должна быть отрицательна. Это исключено, поскольку при $r = b > a$ мы должны снова получить $Z_p(kb) = 0$. Аналогичное рассуждение проводится и в случае $\left(\frac{dZ_p}{dr}\right)_{r=a} > 0$. Поскольку случай $Z_p'(ka) = 0$ исключен, в силу теоремы 7.13.1, то предположение $k^2 \leqslant 0$ всегда приводит к противоречию Доказательство еще не является полным, поскольку Z_p' мог. о бы быть комплексным; его легко пополнить, рассматривая выше $\operatorname{Re} Z_p$ или $\operatorname{Im} Z_p$ вместо Z_p. Случай, когда k^2 является чисто мнимым или комплексным числом, рассматривать не надо, поскольку собственные значения всегда должны быть вещественными.

Поскольку по общей теореме (Франк — Мизес, т. 1, стр. 283) между двумя собственными значениями для первого граничного условия лежит одно собственное значение для второго или третьего граничного условия, то для второго и третьего граничного условия могут встречаться и отрицательные значения k^2. Мы увидим ниже, что встречается не более чем *одно* неположительное собственное значение k^2. Собственные функции, соответствующие положительным собственным значениям, всегда вещественны. Собственному значению $k = 0$ соответствует вырожденная цилиндрическая функция $Z_p^0(r) = c_1 r^p + c_2 r^{-p}$, которая при $p = 0$ переходит в $Z_0^0(r) = c_1 \ln r + c_2$. При мнимом k собственная функция имеет комплексную форму.

Предшествующие рассмотрения не переносятся непосредственно на случай $a = 0$. Поскольку среди фундаментальных решений уравнения Бесселя лишь функция Бесселя непрерывна при $r = 0$, то $Z_p(kr)$ должно совпадать с $cJ_p(kr)$. Поэтому мы имеем лишь одну произвольную постоянную и можем удовлетворить только одному граничному условию. По физическому смыслу задач обычно возникают следующие условия: в точке $r = 0$ функция Z_p конечна, а при $r = b$ удовлетворяет соотношению $B(Z_p) = 0$. Если это соотношение

[1]) См Weyrich R, S. 100.

является граничным условием первого рода, то собственные значения k_ν определяются нулями $x_\nu = k_\nu b$ функции Бесселя $J_p(x_\nu) = 0$. При граничных условиях второго или третьего рода собственные значения определяются из уравнения

$$\alpha_2 J_p(k'_\nu b) + \beta_2 k'_\nu J'_p(k'_\nu b) = 0.$$

Если x'_ν являются корнями уравнения $\alpha_2 J_p(x'_\nu) + \beta'_2 x'_\nu J'_p(x'_\nu) = 0$, где $\beta_2 = b\beta'_2$, то $x'_\nu = k'_\nu b$.

7.16.1. Ряды Бесселя, Фурье и Дини. Из дифференциального уравнения легко следует, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям k_ν и k_μ, удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_a^b Z_p(k_\nu r) Z_p(k_\mu r) r\, dr = 0, \quad k_\nu \neq k_\mu. \tag{212}$$

Для разложения функции по собственным функциям имеет место следующая теорема: каждая кусочно-непрерывная на отрезке (a, b) функция $f(r)$, производная которой на промежутках непрерывности имеет интегрируемый квадрат, может быть разложена в ряд по собственным функциям $\sum_{\mu=1}^{\infty} c_\mu Z_p(k_\mu r)$. Этот ряд равномерно и абсолютно сходится на любом отрезке, лежащем внутри промежутка непрерывности, а в точках разрыва сходится к среднему арифметическому левого и правого предельных значений. Коэффициенты разложения определяются формулами

$$c_\mu = \frac{\int_a^b Z_p(k_\mu r) f(r) r\, dr}{\int_a^b Z_p^2(k_\mu r) r\, dr}, \quad p + \frac{1}{2} \geqslant 0. \tag{213}$$

Стоящий в знаменателе нормирующий множитель может быть вычислен с помощью равенства (93). Для третьего граничного условия

$$\alpha_1 Z_p(k'_\mu a) + \beta_1 k'_\mu Z'_p(k'_\mu a) = \alpha_2 Z_p(k'_\mu b) + \beta_2 k'_\mu Z'_p(k'_\mu b) = 0$$

имеем

$$2\int_a^b Z_p^2(k'_\mu r)\,r\,dr = \left(\left(1+\frac{\alpha_2^2}{\beta_2^2 k_\mu'^2}\right)b^2-\frac{p^2}{k_\mu'^2}\right)Z_p^2(k'_\mu b)- \\ -\left(\left(1+\frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2 k_\mu'^2}\right)a^2-\frac{p^2}{k_\mu'^2}\right)Z_p^2(k'_\mu a). \quad (214а)$$

Выражение для второго граничного условия получается отсюда при $\alpha = 0$. Для первого граничного условия ($Z_p(k_\mu a) = Z_p(k_\mu b) = 0$) имеем

$$2\int_a^b Z_p^2(k_\mu r)\,r\,dr = b^2 Z_{p+1}^2(k_\mu b) - a^2 Z_{p+1}^2(k_\mu a). \quad (214б)$$

Теорему о разложении нельзя непосредственно применить в случае $a = 0$, поскольку здесь нет граничного условия и, более того, дифференциальное уравнение имеет особую точку. Но мы уже видели, что в этом случае собственными функциями являются функции Бесселя $J_p(k_\mu r)$, которые при $r = b$ удовлетворяют либо граничному условию $J_p(k_\mu b) = 0$, либо более общему граничному условию $\alpha J_p(k'_\mu b) + \beta k'_\mu J'_p(k'_\mu b) = 0$. Последнее условие часто бывает удобнее записать в виде

$$h J_p(k'_\mu b) + b k'_\mu J'_p(k'_\mu b) = 0. \quad (215)$$

Поскольку при $r = 0$ функции Бесселя $J_p(k_\mu r)$ при $p \neq 0$ удовлетворяют, согласно равенству (6), граничному условию первого рода, а при $p = 0$ — условию второго рода, то граничные условия для собственных функций выполнены. Поскольку, далее, в доказательстве теоремы разложения было использовано лишь, что собственные функции имеют асимптотическое представление $Z_p \sim \frac{a}{\sqrt{r}}(\sin(kr+\delta)$, которое имеет место и для функций Бесселя (см. равенства (10в)), то все условия теоремы выполнены и в случае $a = 0$. Принято различать эти ряды и называть *рядом Бесселя — Фурье* ряд по функциям $J_p(k_\mu r)$, где $J_p(k_\mu b) = 0$, и *рядом Дини* — ряд по функциям $J_p(k'_\mu r)$, где $h J_p(k'_\mu b) + k'_\mu b J'_p(k'_\mu b) = 0$.

Для *рядов Бесселя — Фурье* имеет место следующая теорема [1]): каждая функция $f(r)$, кусочно непрерывная на отрезке $(0, b)$, имеющая ограниченное изменение и такая, что $\int_0^b f(r) r^{\frac{1}{2}}\,dr$ абсолютно

[1]) Ватсон, гл. XVIII.

сходится, может быть разложена в ряд $\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu J_p(k_\mu r)$. Этот ряд абсолютно и равномерно сходится на каждом отрезке непрерывности функции $f(r)$, лежащем внутри промежутка $(0, b)$, в точках разрыва сходится к среднему арифметическому правого и левого предельных значений, а при $r=b$ принимает значение 0. Здесь собственные значения k_μ определяются равенством $k_\mu^{-p} J_p(k_\mu b)=0$, а коэффициенты разложения a_μ определяются равенством

$$a_\mu = \frac{2\int_0^b J_p(k_\mu \rho) f(\rho)\, \rho\, d\rho}{b^2 J_p'^2(k_\mu b)} = \frac{2\int_0^b J_p(k_\mu \rho) f(\rho)\, \rho\, d\rho}{b^2 J_{p+1}^2(k_\mu b)}. \qquad (216)$$

Если $f(b-0)=0$, то ряд равномерно сходится в окрестности точки $b\,(r \leqslant b)$.

Следует заметить, что эта теорема не дает никаких сведений о поведении ряда в точке $r=0$. Это связано с тем, что асимптотическое разложение функции J_p, использованное при больших k_μ и справедливое при постоянном ε для $r \geqslant \varepsilon$, при r, близких к нулю, должно быть заменено разложением в степенной ряд. Множитель k^{-p} введен для того, чтобы исключить решение $x=0$ уравнения $J_p(x)=0$. Дело в том, что соответствующее $k=0$ решение r^p дифференциального уравнения (см. стр. 424) не является собственной функцией, поскольку не удовлетворяет граничным условиям.

При разложении в *ряд Дини* уравнение, определяющее собственные значения, имеет вид

$$k_\mu'^{-p}\left[h J_p(k_\mu' b) + k_\mu' b\, J_p'(k_\mu' b)\right] = 0. \qquad (217)$$

В соответствии с теоремой на стр. 424 здесь могут встретиться и и неположительные значения k^2. Разложение (6) дает

$$h + p + \mathfrak{P}(k'b) = 0. \qquad (218)$$

Здесь $\mathfrak{P}$ является степенным рядом по $(ik'b)^2$, не содержащим свободного члена. При $h+p=0$ $k_0'=0$ является собственным значением. Соответствующая собственная функция равна $Z^0=r^p$. Она удовлетворяет граничному условию $(hZ^0+bZ^{0\prime})_{r=b}=b$. Далее, из равенства (6) имеем: если k' — чисто мнимое число, то все члены ряда $\mathfrak{P}$ положительны и, следовательно, его сумма положительна. Если $h+p<0$, то уравнение (218) имеет решение с чисто мнимым k'; соответствующей собственной функцией является $J_p(k_0 r)$, где $k_0 = i|k_0|$. Для коэффициентов разложения из равенства (93)

имеем

$$b_\mu = \frac{2\int_0^b J_p(k'_\mu r) f(r) r\, dr}{\left(b^2 + \frac{h^2 - p^2}{k'^2_\mu}\right) J_p^2(k'_\mu b)}. \tag{219}$$

Здесь при $h + p > 0$ все значения k'_μ положительны, а при $h + p < 0$ встречается *одно* чисто мнимое значение. Разложение имеет вид

$$f(r) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu J_p(k'_\mu r) \qquad (h + p \neq 0). \tag{220}$$

Если $h + p = 0$, то имеется дополнительное слагаемое и все k' положительны

$$f(r) = \frac{2(p+1) r^p}{b^{2p+2}} \int_0^b f(\rho) \rho^{p+1} d\rho + \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu J_p(k'_\mu r). \tag{221}$$

Имеет место теорема, утверждающая, что при тех же условиях, как и для ряда Бесселя — Фурье, ряд Дини сходится абсолютно и равномерно. В частности, он сходится в точке $r = b$, где теперь значение функции может быть любым.

7.16.2. Интеграл Бесселя — Фурье. Пусть b стремится к бесконечности. Как показывает равенство (211), тогда расстояние между соседними собственными значениями стремится к нулю. Переменная k будет тогда изменяться непрерывно, и ряд Бесселя — Фурье переходит в интеграл Бесселя — Фурье. Мы проведем соответствующий предельный переход чисто формально, не пытаясь преодолеть трудности доказательства сходимости. Из асимптотической формулы для собственного значения (211в) следует

$$\Delta k = \frac{\pi}{b}.$$

Встречающийся в равенстве (216) множитель $J'_p(k_\mu b)$ может быть вычислен с помощью асимптотического разложения, даваемого формулой (10). Мы имеем

$$J_p(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

и

$$J'_p(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) + \ldots .$$

Поскольку в силу граничного условия J_p обращается в нуль, то косинус должен обратиться в нуль. Следовательно, в формуле для J_p' синус принимает наибольшее значение. Отсюда следует, что

$$\frac{b^2}{2} J_p'^2 (k_\mu b) = \frac{b^2}{2} \frac{2}{\pi k_\mu b} = \frac{1}{k_\mu \Delta k}.$$

Подставляя это выражение в равенство (216), получаем для функции $f(r)$ разложение Бесселя — Фурье

$$f(r) = \sum_{\mu=1}^{\infty} J_p(k_\mu r) k_\mu \Delta k \int_0^b J_p(k_\mu \rho) f(\rho) \rho \, d\rho.$$

В пределе, когда $b \to \infty$, $\Delta k \to 0$ и сумма переходит в интеграл Бесселя — Фурье, получаем

$$f(r) = \int_0^\infty J_p(kr) k \, dk \int_0^\infty J_p(k\rho) f(\rho) \rho \, d\rho.$$

Для того чтобы преодолеть трудности предельного перехода, Грей и Метьюз получают этот результат несколько иным способом, восходящим к Ганкелю, который и установил полученную формулу. Мы исходим из равенства (90)

$$\int_0^h J_p(k\rho) J_p(kr) k \, dk = \frac{1}{\rho^2 - r^2} (\rho h J_p(hr) J_{p+1}(h\rho) - r h J_p(h\rho) J_{p+1}(hr)).$$

Используя асимптотическое представление (10), получаем отсюда

$$\int_0^h J_p(k\rho) J_p(kr) k \, dk =$$

$$= \frac{2}{\pi(\rho^2 - r^2)} \left\{ \sqrt{\frac{\rho}{r}} \cos\left(hr - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(h\rho - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{r}{\rho}} \cos\left(h\rho - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(hr - \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right) \right\} + \frac{R}{h}$$

Множитель R в остаточном члене при всех значениях h остается конечным и не обращается в бесконечность в точке $\rho = r$. Принимая во внимание формулу $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta$, получаем отсюда

$$\int_0^h J_p(k\rho) J_p(kr) k \, dk =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \frac{\cos(h(\rho + r) - p\pi)}{\rho + r} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r\rho}} \frac{(h - \rho - r))}{\rho - r} + \frac{R}{h}.$$

Умножим обе части этого равенства на $f(\rho)\rho$, проинтегрируем по ρ от r_1 до r_2 и перейдем к пределу при $h\to\infty$. Тогда справа получим *интегралы Дирихле*, из которых отличен от нуля лишь интеграл, содержащий синус. Мы получаем (см. Франк — Мизес, т. 1, стр. 154), что если $f(r)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то

$$\int_{r_1}^{r_2} f(\rho)\rho\,d\rho\int_0^\infty J_p(k\rho)J_p(kr)\,k\,dk=\begin{cases}\frac{1}{2}\{f(r+0)+f(r-0)\}, & r_1<r<r_2,\\ \frac{1}{2}f(r_1+0), & r=r_1,\\ \frac{1}{2}f(r_2-0), & r=r_2;\\ 0, & 0<r<r_1 \text{ или } r>r_2.\end{cases}$$

Если интеграл $\int_{r_1}^{r_2} f(\rho)\rho\,d\rho$ абсолютно сходится, то можно переставить порядок интегрирования. Отсюда имеем: если функция $f(r)$ определена на всей полуоси $0\leqslant r\leqslant\infty$, абсолютно интегрируема и удовлетворяет условию Дирихле, то

$$\int_0^\infty\int_0^\infty J_p(kr)J_p(k\rho)f(\rho)k\,dk\rho\,d\rho=\begin{cases}\frac{1}{2}(f(r-0)+f(r+0)), & 0<r<\infty,\\ \frac{1}{2}f(r+0), & r=0\end{cases}\tag{222}$$

(теорема Ганкеля).

Аналогичное утверждение справедливо для интегралов вида

$$\int_0^\infty\int_0^\infty Z_p(kr)Z_p(k\rho)f(\rho)\rho\,d\rho\,k\,dk,$$

при соответствующим образом выбранных нижних пределах.

7.17. Обобщения цилиндрических функций

7.17.1. Функции Аигера и Ломмеля — Вебера. Различные представления цилиндрических функций с помощью интегралов приводят к различным обобщениям цилиндрических функций. Эти обобщения получаются при рассмотрении интегралов, аналогичных тем, которые задают цилиндрические функции. Возьмем сначала интеграл Бесселя

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(z\sin\varphi-\nu\varphi)\,d\varphi,$$

который при целочисленном ν представляет функцию Бесселя. Естественно рассмотреть аналитическое продолжение этого интеграла по переменной ν:

$$A_p(z) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - p\varphi)\,d\varphi. \tag{223}$$

Эта функция была введена Ангером [1]) и названа его именем. Другое обобщение интеграла Бесселя восходит к Ломмелю [2]) и Веберу [3]). Мы определяем функцию Ломмеля — Вебера равенством [4])

$$\Omega_p(z) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(z\sin\varphi - p\varphi)\,d\varphi. \tag{224}$$

Обе функции *не являются* цилиндрическими функциями, поскольку они не удовлетворяют дифференциальному уравнению Бесселя. Образуем

$$\Phi_p^{\pm}(z) \equiv A_p(z) \pm i\,\Omega_p(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\pm i(z\sin\varphi - p\varphi)}\,d\varphi, \tag{225}$$

и применим к этой функции дифференциальный оператор Бесселя. Мы получим тогда

$$\Phi_p''(z) + \frac{1}{z}\Phi_p'(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)\Phi_p = \frac{1}{\pi z^2}\int_0^{\pi} e^{\pm i(z\sin\varphi - p\varphi)}(z^2\cos^2\varphi - p^2 \pm iz\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Интегрируя справа по частям, имеем

$$\frac{1}{\pi z^2}\left\{e^{\pm i(z\sin\varphi - p\varphi)} \mp i(z\cos\varphi + p)\right\}_0^{\pi} = \frac{\pm i}{\pi z^2}(z + p + (z - p)\,e^{\mp ip\pi}).$$

Складывая и вычитая, получаем отсюда

$$\frac{d^2A_p(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dA_p(z)}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)A_p(z) = \frac{z-p}{z^2}\frac{\sin p\pi}{\pi} \tag{226}$$

и

$$\frac{d^2\Omega_p(z)}{dz} + \frac{1}{z}\frac{d\Omega_p(z)}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)\Omega_p(z) = \frac{1}{\pi z^2}(z + p + (z - p)\cos p\pi). \tag{227}$$

---

[1]) Anger, *Neueste Schriften der Naturf. Ges. in Danzig*, 5 (1855), 1—29.
[2]) Lommel, *Math. Ann.*, 16 (1880), 183—208.
[3]) Weber H. F., *Zürich, Vierteljahresschrift*, 24 (1878), 33—76.
[4]) Определение совпадает с данным Янке — Эмде, изд. 3, стр. 211. Ватсон пишет $E_p(z) = -\Omega_p(z)$.

Таким образом, обе функции являются решениями неоднородного *дифференциального уравнения Бесселя*, в правой части которого стоят элементарные функции.

7.17.1.1. Разложение для малых значений переменного. Для того чтобы получить разложение при малых значениях z, применим к подинтегральной функции теоремы сложения для синуса и косинуса и разложим $\cos(z\sin\varphi)$, соответственно $\sin(z\sin\varphi)$, в степенной ряд. Меняя местами интегрирование и суммирование, получаем

$$\pi A_p(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{(2\mu)!} \int_0^{\pi} \sin^{2\mu}\varphi \cos p\varphi \, d\varphi + \\ + \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \int_0^{\pi} \sin^{2\mu+1}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi$$

и

$$\pi \mathfrak{Q}_p(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \int_0^{\pi} \sin^{2\mu+1}\varphi \cos p\varphi \, d\varphi - \\ - \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{z^{2\mu}}{(2\mu)!} \int_0^{\pi} \sin^{2\mu}\varphi \sin p\varphi \, d\varphi.$$

Эти интегралы вычислены выше (см. равенства (1.77в) и (1.77г)). Используя суммы Ломмеля

$$S_{0,p}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} z^{2\mu+1}}{\prod_{\varkappa=0}^{\mu} ((2\varkappa+1)^2 - p^2)} = \frac{z}{1-p^2} - \frac{z^3}{(1-p^2)(9-p^2)} + \\ + \frac{z^5}{(1-p^2)(9-p^2)(25-p^2)} - \ldots, \qquad (228а)$$

$$S_{-1,p}(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} z^{2\mu}}{\prod_{\varkappa=0}^{\mu} ((2\varkappa)^2 - p^2)} = \\ = -\frac{1}{p^2} + \frac{z^2}{p^2(4-p^2)} - \frac{z^4}{p^2(4-p^2)(16-p^2)} + \ldots, \qquad (228б)$$

получаем для функции Ангера выражение

$$A_p(z) = \frac{\sin p\pi}{\pi} S_{0,p}(z) - \frac{\sin p\pi}{\pi} p\, S_{-1,p}(z), \qquad (229)$$

а для функции Ломмеля — Вебера — выражение

$$\mathfrak{Q}_p(z) = \frac{1+\cos p\pi}{\pi} S_{0,p}(z) - \frac{1-\cos p\pi}{\pi} p\, S_{-1,p}(z). \qquad (230)$$

Суммы Ломмеля не меняются при изменении знака p, а потому

$$A_{-p}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(z\sin\varphi+p\varphi)\,d\varphi=$$

$$=-\frac{\sin p\pi}{\pi}S_{0,p}(z)-\frac{\sin p\pi}{\pi}pS_{-1,p}(z)$$

и

$$\mathfrak{Q}_{-p}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin(z\sin\varphi+p\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1+\cos p\pi}{\pi}S_{0,p}(z)-\frac{1-\cos p\pi}{\pi}pS_{-1,p}(z).$$

Отсюда простым исключением получаем

$$A_p\sin p\pi=-\mathfrak{Q}_p\cos p\pi+\mathfrak{Q}_{-p} \tag{231}$$

и

$$\mathfrak{Q}_p\sin p\pi=A_p\cos p\pi-A_{-p}. \tag{232}$$

Последнее равенство совершенно аналогично равенству (26а), в то время как равенство (231) аналогично соответствующему равенству для J_p. В частности, равенство (231) показывает, что достаточно иметь таблицы для функций $\mathfrak{Q}$: функции Ангера выражаются через них.

7.17.1.2. Определенные интегралы. Из равенства (81) непосредственно вытекает

$$\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\psi-p\psi}\,d\psi=\frac{\pi}{\sin p\pi}(A_p(z)-J_p(z)),\quad |\arg z|<\frac{\pi}{2}, \tag{233}$$

Меняя знак p, получаем отсюда

$$\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\psi+p\psi}\,d\psi=\frac{\pi}{\sin p\pi}(J_{-p}(z)-A_{-p}(z)). \tag{233а}$$

Складывая эти равенства и принимая во внимание равенства (232) и (26а), имеем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\psi}\,\mathrm{ch}\,p\psi\,p\psi=\mathrm{tg}\,\frac{p\pi}{2}(A_p(z)-J_p(z))+\mathfrak{Q}_p(z)-N_p(z). \tag{234а}$$

Соответственно, вычитая равенства, получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\,\mathrm{sh}\,\psi}\,\mathrm{sh}\,p\psi\,d\psi=\mathrm{ctg}\,\frac{p\pi}{2}(J_p(z)-A_p(z))+\mathfrak{Q}_p(z)-N_p(z). \tag{234б}$$

Интеграл $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}\psi}\operatorname{ch} p\psi\, d\psi$ может быть, согласно равенству (74б) или (76а), выражен через функцию Ганкеля; для интеграла же $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\operatorname{ch}\psi}\operatorname{sh} p\psi\, d\psi$ нет простых выражений.

7.17.1.3. Асимптотические представления для больших значений z. В силу соотношений (233) и (233а) для определения A_p и $\mathfrak{Q}_p$ при больших значениях z достаточно вычислить при этих значениях z интегралы, стоящие в равенствах (233) или (234). Путем повторного интегрирования по частям мы получаем разложение по степеням $\frac{1}{z}$. Поскольку вычисление весьма затруднительно, мы применим восходящий к Ватсону [1]) способ. Очевидно, что можно провести интегрирование элементарными методами, если удастся привести интеграл к виду

$$\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\psi}\begin{matrix}\operatorname{ch}\\ \operatorname{sh}\end{matrix} p\psi\, d\psi = \int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\psi}\sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{a_\mu}{z^{\mu+1}}(z\operatorname{sh}\psi)^\mu\, d(z\operatorname{sh}\psi).$$

Поскольку $\int_0^\infty e^{-x}x^\mu\, dx = \mu!$, то

$$\int_0^\infty e^{-z\operatorname{sh}\psi}\begin{matrix}\operatorname{ch}\\ \operatorname{sh}\end{matrix} p\psi\, d\psi = \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\mu!\, a_\mu}{z^{\mu+1}}. \qquad (235)$$

Поэтому нам надо разложить $\frac{\operatorname{ch} p\psi}{\operatorname{ch}\psi}$ и $\frac{\operatorname{sh} p\psi}{\operatorname{ch}\psi}$ по степеням $\operatorname{sh}\psi$. Это разложение проще всего получить с помощью следующего искусственного приема. По теореме Коши имеем

$$u^{\frac{p}{2}} + u^{-\frac{p}{2}} = \frac{1}{2i\pi}\oint^{(u+,\,u^{-1}+)} t^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{t-u} + \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{t-u^{-1}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\oint^{(u+,\,u^{-1}+)} t^{\frac{p-1}{2}}\frac{(t-1)\left(u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}}\right)}{t^2+1-t(u+u^{-1})}dt.$$

[1]) Ватсон, стр. 342—345.

Сделаем подстановку $u = e^{2\psi}$ и вынесем постоянный множитель за знак интеграла. Мы получим

$$\frac{\operatorname{ch} p\psi}{\operatorname{ch}\psi} = \frac{1}{2i\pi} \oint^{(u+,\, u^{-1}+)} \frac{t^{\frac{p-1}{2}}(t-1)\,dt}{(t-1)^2 - 4t\operatorname{sh}^2\psi}.$$

В точке $t=1$ имеем простой нуль, а потому можно расположить путь интегрирования так, чтобы он охватывал эту точку. Кривая может быть выбрана настолько большой, чтобы при постоянном ψ имело место неравенство $\frac{4t\operatorname{sh}^2\psi}{(t-1)^2} < 1$. Тогда биномиальное разложение равномерно сходится вдоль всего пути интегрирования. Так как в дальнейшем нам понадобится переставить суммирование и интегрирование по ψ, мы ограничимся использованием конечной суммы с остаточным членом. Из соотношения $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ $\ldots + x^{\nu-1} + \frac{x^\nu}{1-x}$ следует $(0 \leqslant \Theta_1 \leqslant 1)$

$$\frac{\operatorname{ch} p\psi}{\operatorname{ch}\psi} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} 2^{2\mu}\operatorname{sh}^2\psi \frac{1}{2i\pi}\oint^{(1+)} \frac{t^{\mu+\frac{p-1}{2}}\,dt}{(t-1)^{2\mu+1}} +$$

$$+ \frac{2^{2\nu}\operatorname{sh}^{2\nu}\psi}{2i\pi}\oint^{(1+,\, u+,\, u^{-1}+)} \frac{t^{\nu+\frac{p-1}{2}}}{(t-1)^{2\nu+1}\left(1-\frac{4t\operatorname{sh}^2\psi}{(t-1)^2}\right)} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (2\operatorname{sh}\psi)^{2\mu}\binom{\mu+\frac{p-1}{2}}{2\mu} + \Theta_1 (2\operatorname{sh}\psi)^{2\nu}\binom{\nu+\frac{p-1}{2}}{2\nu}. \qquad (236)$$

Коэффициенты определяются при этом из разложения

$$\frac{1}{2i\pi}\oint^{(1+)} \frac{t^{\mu+\frac{p-1}{2}}\,dt}{(t-1)^{2\mu+1}} = \frac{1}{2i\pi}\oint^{(1+)} \frac{(t-1+1)^{\mu+\frac{p-1}{2}}\,dt}{(t-1)^{2\mu+1}} =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\binom{\mu+\frac{p-1}{2}}{\varkappa}\oint^{(1+)} (t-1)^{\varkappa-2\mu-1}\,dt.$$

Принимая во внимание, что $\Gamma\left(\frac{p}{2}-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\frac{p}{2}\right) = (-1)^\mu \frac{\pi}{\cos\frac{p\pi}{2}}$, можно переписать выражение (236) в виде

$$\frac{\operatorname{ch} p\psi}{\operatorname{ch}\psi}=\frac{\cos\frac{p\pi}{2}}{\pi}\left\{\sum_{\mu=0}^{\nu-1}(-1)^{\mu}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}{(2\mu)!}(2\operatorname{sh}\psi)^{2\mu}+\right.$$

$$\left.+\Theta_2(-1)^{\nu}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}{(2\nu)!}(2\operatorname{sh}\psi)^{2\nu}\right\}. \quad (236a)$$

Остаточный член оценивается следующим образом. Путь интегрирования $u+$, $u^{-1}+$, $1+$ можно деформировать в путь $\infty-$, $0-$. Возьмем ν настолько большим, чтобы $\operatorname{Re}\left(\nu+\frac{p-1}{2}\right)>0$. Тогда обе особые точки являются точками ветвления и интеграл сводится к вкладам вдоль дважды пробегаемого пути от 0 до ∞. Поэтому имеем

$$\frac{1}{2i\pi}\oint^{(1+,\,u+,\,u^{-1}+)}\frac{t^{\nu+\frac{p-1}{2}}\,dt}{(t-1)^{2\nu+1}\left(1-\frac{4t}{(t-1)^2}\operatorname{sh}^2\psi\right)}=$$

$$=(1-e^{i\pi(p-1)})\frac{1}{2i\pi}\int_0^{\infty}\frac{t^{\nu+\frac{p-1}{2}}\,dt}{(t-1)^{2\nu+1}\left(1-\frac{4t\operatorname{sh}^2\psi}{(t-1)^2}\right)}.$$

Подстановка $t=e^{-i\pi}\frac{1-x}{x}$ преобразует этот интеграл в

$$(1+e^{i\pi p})\,e^{i\pi(\nu+1)}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-p)}}{2i\pi}\int_1^0\frac{x^{\nu-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}(1-x)^{\nu+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}}{1+4x(1-x)\operatorname{sh}^2\psi}\,dx.$$

Но для вещественных ψ на пути интегрирования знаменатель всегда больше 1. Поэтому, в силу равенства (1), формула (236) доказана.

Точно так же доказывается представление

$$\frac{\operatorname{sh} p\psi}{\operatorname{ch}\psi}=\sum_{\mu=0}^{\nu-1}a'_{\mu}\operatorname{sh}^{\mu}\psi+a'_{\nu}\operatorname{sh}^{\nu}\psi.$$

Мы исходим из

$$u^{\frac{p}{2}}-u^{-\frac{p}{2}}=\frac{1}{2i\pi}\oint^{(u+,\,u^{-1}+)}t^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{t-u}-\frac{1}{t-u^{-1}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\oint^{(u+,\,u^{-1}+)}t^{\frac{p}{2}}\frac{u-u^{-1}}{(t-1)^2-t(u-2+u^{-1})}\,dt.$$

Подстановка $u = e^{2\psi}$ приводит теперь к

$$\frac{\operatorname{sh} p\psi}{\operatorname{sh} 2\psi} = \frac{\operatorname{sh} p\psi}{2 \operatorname{sh}\psi \operatorname{ch}\psi} = \frac{1}{2i\pi} \oint^{(1+,\, u+,\, u^{-1}+)} \frac{t^{\frac{p}{2}}\, dt}{(t-1)^2\left(1 - \frac{4t}{(t-1)^2}\operatorname{sh}^2\psi\right)}.$$

Дальнейшее вычисление проходит точно так же, как и выше, и дает результат

$$\frac{\operatorname{sh} p\psi}{\operatorname{ch}\psi} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (2 \operatorname{sh}\psi)^{2\mu+1} \binom{\mu + \frac{p}{2}}{2\mu+1} + \Theta_2 (2 \operatorname{sh}\psi)^{2\nu+1} \binom{\nu + \frac{p}{2}}{2\nu+1} \qquad (237)$$

или, принимая во внимание, что $\Gamma\left(-\mu + \frac{p}{2}\right)\Gamma\left(1 + \mu - \frac{p}{2}\right) = (-1)^{\mu} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi p}{2}}$,

$$\frac{\operatorname{sh} p\psi}{\operatorname{ch}\psi} = \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{\pi} \left\{ \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^{\mu} (2 \operatorname{sh}\psi)^{2\mu+1} \frac{\Gamma\left(\mu+1+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1-\frac{p}{2}\right)}{(2\mu+1)!} + \right.$$

$$\left. + \Theta_2 (-1)^{\nu} (2 \operatorname{sh}\psi)^{2\nu+1} \frac{\Gamma\left(\nu+1+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\nu+1-\frac{p}{2}\right)}{(2\nu+1)!} \right\}. \qquad (237а)$$

Из равенств (235), (236) и (237а) вытекает

$$\int_0^{\infty} \operatorname{ch} p\psi\, e^{-z \operatorname{sh}\psi}\, d\psi \sim$$

$$\sim \frac{\cos\frac{p\pi}{2}}{2} \sum_{\mu=0} \frac{(-1)^{\mu}\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu+1}}; \qquad (238)$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sh} p\psi\, e^{-z \operatorname{sh}\psi}\, d\psi \sim$$

$$\sim \frac{\sin\frac{p\pi}{2}}{2} \sum_{\mu=0} \frac{(-1)^{\mu}\,\Gamma\left(\mu+1+\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu+2}}. \qquad (239)$$

Из равенств (234а), (234б) следуют асимптотические представления

$$A_p(z)\sim J_p(z)+\frac{\sin p\pi}{\pi z}\left[1+\frac{p^2-1}{z^2}+\frac{(p^2-1)(p^2-9)}{z^4}+\ldots\right]-$$
$$-\frac{\sin p\pi}{\pi z}\left[\frac{p}{z}+\frac{p(p^2-4)}{z^3}+\frac{p(p^2-4)(p^2-16)}{z^5}+\ldots\right] \quad (240)$$

и

$$\Omega_p(z)\sim N_p(z)+\frac{1+\cos p\pi}{\pi z}\left[1+\frac{p^2-1}{z^2}+\frac{(p^2-1)(p^2-9)}{z^4}+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1-\cos p\pi}{z\pi}\left[\frac{p}{z}+\frac{p(p^2-4)}{z^3}+\frac{p(p^2-4)(p^2-16)}{z^5}+\ldots\right].$$

Из хода доказательства вытекает, что эти равенства справедливы при $|\arg z|<\pi$.

Разложения Дебая для больших значений p справедливы и здесь с соответствующими изменениями. Относительно этого результата см. Ватсон, стр. 345—348.

7.17.2. Интеграл Эйри — Харди. В теории диффракции в окрестности каустики Эйри [1]) пришел к интегралу вида

$$\int_0^\infty \cos(t^3\pm xt)\,dt.$$

Этот интеграл можно рассматривать как частный случай интегралов, изученных Харди [2]). Мы будем исходить из полученных выше выражений для $\operatorname{ch} p\psi$ и $\operatorname{sh} p\psi$ (равенства (236) и (237)). Интегрируя эти равенства по ψ и полагая постоянную интегрирования равной нулю при $\psi=0$, имеем

$$\frac{1}{p}\operatorname{sh} p\psi=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{2^{2\mu}}{2\mu+1}\operatorname{sh}^{2\mu+1}\psi\binom{\mu+\frac{p-1}{2}}{2\mu} \quad (241а)$$

и

$$\frac{1}{p}\operatorname{ch} p\psi=\frac{1}{p}+\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{2^{2\mu+1}}{2\mu+2}\operatorname{sh}^{2\mu+2}\psi\binom{\mu+\frac{p}{2}}{2\mu+1}. \quad (241б)$$

Если $p=\nu$ — нечетное число, то обрывается ряд для $\operatorname{sh} p\psi$, если $p=\nu$ — четное число, то обрывается ряд для $\operatorname{ch} p\psi$. Простой под-

[1]) Airy J. R., On the Intensity of Light in the neighbourhood of a Caustic, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, **6** (1838), 379—402.

[2]) Hardy G. H., *Quarterly Journal*, **41** (1910), 226—240. Наше представление примыкает к Ватсону, стр. 348 и далее.

счет показывает, что в обоих случаях имеем

$$2\quad \psi = (2s)^{\nu}\, {}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2};\ 1-\nu;\ -s^{-2}\right), \qquad (242)$$

ν — четное: ch; ν — нечетное: sh

где $s = \operatorname{sh}\frac{\psi}{\nu}$. Вводя для краткости обозначение

$$T_\nu(t, z) = t^{\nu}\, {}_2F_1\left(-\frac{\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2};\ 1-\nu;\ -\frac{4z}{t^2}\right), \qquad (243)$$

имеем

$$T_\nu(t, z) = 2z^{\frac{\nu}{2}} \begin{matrix}\operatorname{ch}\\ \operatorname{sh}\end{matrix} \psi, \quad t = 2\sqrt{z}\operatorname{sh}\frac{\psi}{\nu}. \qquad (244)$$

ν — четное: ch; ν — нечетное: sh

Мы можем теперь, следуя Харди, определить три функции (x — вещественное, z — комплексное)

$$Ci_\nu(x) \equiv \int_0^\infty \cos T_\nu(t, x)\, dt, \qquad (245)$$

$$Si_\nu(x) \equiv \int_0^\infty \sin T_\nu(t, x)\, dt, \qquad (246)$$

$$El_\nu(z) \equiv \int_0^\infty e^{-T_\nu(t, z)}\, dt. \qquad (247)$$

Поскольку T_ν имеет различный вид, в зависимости от того, является ли ν четным или нечетным числом, мы должны раздельно провести вычисление обоих интегралов в обоих случаях.

7.17.2.1. Интегралы Харди при четном индексе. При четном ν и положительном x имеем

$$Ci_\nu(x) + i\, Si_\nu(x) = \int_0^\infty e^{iT_\nu(t, x)}\, dt = \frac{2\sqrt{x}}{\nu} \int_0^\infty e^{2ix\frac{\nu}{2}\operatorname{ch}\psi} \operatorname{ch}\frac{\psi}{\nu}\, d\psi.$$

Этот интеграл известен из равенства (74в)

$$Ci_\nu(x) + i\, Si_\nu(x) = \frac{i\pi}{\nu}\sqrt{x}\, e^{\frac{i\pi}{2\nu}} H^{(1)}_{\frac{1}{\nu}}\left(2x^{\frac{\nu}{2}}\right).$$

Заменим здесь $H^{(1)}$ по равенству (18). Мы имеем

$$Ci_\nu(x)+iSi_\nu(x)=\frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{\nu\sin\frac{\pi}{\nu}}\left(e^{\frac{i\pi}{2\nu}}J_{-\frac{1}{\nu}}\left(2x^{\frac{\nu}{2}}\right)-e^{-\frac{i\pi}{2\nu}}J_{\frac{1}{\nu}}\left(2x^{\frac{\nu}{2}}\right)\right).$$

Поскольку функции Бесселя при вещественном аргументе вещественны, то, отделяя вещественную и мнимую части, имеем

$$Ci_{2\mu}(x)=\frac{\pi\sqrt{x}}{4\mu\sin\frac{\pi}{4\mu}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu}}(2x^\mu)-J_{\frac{1}{2\mu}}(2x^\mu)\right) \tag{248}$$

$$Si_{2\mu}(x)=\frac{\pi\sqrt{x}}{4\mu\cos\frac{\pi}{4\mu}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu}}(2x^\mu)+J_{\frac{1}{2\mu}}(2x^\mu)\right). \tag{249}$$

Правая часть определена также и при отрицательном x; это равенство может быть, таким образом, использовано для всех вещественных значений x. Из равенства (32б) легко следует, что при положительных y имеем

$$Ci_{2\mu}(-y)=\frac{\pi\sqrt{y}}{4\mu\sin\frac{\pi}{4\mu}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu}}(2y^\mu)+J_{\frac{1}{2\mu}}(2y^\mu)\right), \tag{250}$$

$$Si_{2\mu}(-y)=\frac{\pi\sqrt{y}}{4\mu\cos\frac{\pi}{4\mu}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu}}(2y^\mu)-J_{\frac{1}{2\mu}}(2y^\mu)\right). \tag{251}$$

Из равенства (74б) непосредственно вытекает, что

$$Ei_{2\mu}(x)=\frac{i\pi\sqrt{x}}{2}e^{\frac{i\pi}{4\mu}}H^{(1)}_{\frac{1}{2\mu}}(2ix^\mu). \tag{252}$$

Это равенство справедливо и при комплексном $x=z$, однако следует иметь в виду, что из-за показателя μ аргумент независимого переменного в $H^{(1)}_{\frac{1}{2\mu}}$ сильно меняется.

7.17.2.2. Интеграл Харди для нечетных индексов. При нечетном ν имеем

$$Ci_{2\mu+1}(x)=\frac{2\sqrt{x}}{2\mu+1}\int_0^\infty\cos\left(2x^{\mu+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\psi\right)\operatorname{ch}\frac{\psi}{2\mu+1}\,d\psi.$$

В силу равенства (75а) при положительном x интеграл можно непосредственно выразить через функцию Ганкеля чисто мнимого пере-

менного. Мы имеем

$$Ci_{2\mu+1}(x)=\frac{i\pi\sqrt{x}}{2\mu+1}\,e^{\frac{i\pi}{2(2\mu+1)}}\cos\frac{\pi}{2(2\mu+1)}\,H^{(1)}_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2ix^{\mu+\frac{1}{2}}\right). \quad (253)$$

Заменяя функцию Ганкеля функцией Бесселя, получаем

$$Ci_{2\mu+1}(x)=\frac{\pi\sqrt{ix}}{2(2\mu+1)\sin\frac{\pi}{2(2\mu+1)}}\times$$

$$\times\left(e^{\frac{i\pi}{2(2\mu+1)}}J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2ix^{\mu+\frac{1}{2}}\right)-e^{-\frac{i\pi}{2(2\mu+1)}}J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2ix^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right). \quad (254)$$

Переход к отрицательным вещественным значениям независимого переменного $x=-y$ дает, в силу равенства (32б),

$$Ci_{2\mu+1}(-y)=\frac{\pi\sqrt{y}}{2(2\mu+1)\sin\frac{\pi}{2(2\mu+1)}}\times$$

$$\times\left(J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2y^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2y^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right). \quad (254а)$$

Для

$$Ei_{2\mu+1}(z)=\frac{2\sqrt{z}}{2\mu+1}\int_0^\infty e^{-2z^{\mu+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\psi}\operatorname{ch}\frac{\psi}{2\mu+1}\,d\psi$$

равенство (242а) дает, после исключения N_p с помощью равенства (26а), что

$$Ei_{2\mu+1}(z)=\frac{\pi\sqrt{z}}{2\mu+1}\left\{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(2\mu+1)}A_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+\Omega_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mu+1}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)-J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right)\right\}. \quad (255)$$

Принимая еще во внимание равенства (229) и (230), получаем

$$Ei_{2\mu+1}(z)=\frac{\sqrt{z}}{2\mu+1}\left\{2S_{0,\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2\mu+1}}\left(J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)-J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2z^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right)\right\}. \quad (255а)$$

Для вычисления $Sl_{2\mu+1}(x)$ будем исходить из соотношения

$$Cl_{2\mu+1}(x)+i\,Sl_{2\mu+1}(x)=\frac{2\sqrt{x}}{2\mu+1}\int_0^\infty \exp\left(2iz^{\mu+\frac{1}{2}}\operatorname{sh}\psi\right)\operatorname{ch}\frac{\psi}{2\mu+1}\,d\psi$$

и получим точно так же, как и выше,

$$Cl_{2\mu+1}(x)+i\,Si_{2\mu+1}(x)=\frac{\sqrt{x}}{2\mu+1}\left\{2S_{0,\frac{1}{2\mu+1}}\left(-2iz^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2\mu+1}}\left[J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2iz^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-i\pi}\right)-J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2iz^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-i\pi}\right)\right]\right\}.$$

Вычитая отсюда $Cl_{2\mu+1}(x)$ (см. равенство (254)) и принимая во внимание равенства (32а) и (228), получаем

$$Sl_{2\mu+1}(x)=-\frac{4x^{\mu+1}}{2\mu+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(4x^{2\mu+1})^{\varkappa}}{\prod\limits_{\lambda=0}^{\varkappa}\left((2\lambda+1)^2-\frac{1}{(2\mu+1)^2}\right)}+$$
$$+\frac{\sqrt{x}}{2\mu+1}\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2(2\mu+1)}}\left[e^{\frac{i\pi}{2(2\mu+1)}}J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2iz^{\mu+\frac{1}{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{i\pi}{2(2\mu+1)}}J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2iz^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right]. \qquad (256)$$

При отрицательном независимом переменном ($x=-y$) получаем отсюда

$$Sl_{2\mu+1}(-y)=-\frac{4(-y)^{\mu+1}}{2\mu+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-4y^{2\mu+1})^{\varkappa}}{\prod\limits_{\lambda=0}^{\varkappa}\left((2\lambda+1)^2-\frac{1}{(2\mu+1)^2}\right)}+$$
$$+\frac{\sqrt{y}}{2\mu+1}\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2(2\mu+1)}}\left[J_{-\frac{1}{2\mu+1}}\left(2y^{\mu+\frac{1}{2}}\right)-J_{\frac{1}{2\mu+1}}\left(2y^{\mu+\frac{1}{2}}\right)\right]. \qquad (256а)$$

Интеграл Эйри в узком смысле получается из равенств (254) и (256а) при $2\mu+1=3$. Из определений (243) и (245) следует

$$Cl_3(\pm\alpha)=\int_0^\infty\cos(t^3\pm3\alpha t)\,dt.$$

Отсюда для интеграла Эйри имеем

$$\int_0^\infty \cos(t^3 \pm xt)\,dt = Ci_3\left(\pm\frac{x}{3}\right).$$

Равенства (254) и (254а), в силу $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, дают

$$\int_0^\infty \cos(t^3 - xt)\,dt = Ci_3\left(-\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left[J_{-\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)+J_{\frac{1}{3}}\left(2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right]; \quad (257а)$$

$$\int_0^\infty \cos(t^3 + xt)\,dt = Ci_3\left(\frac{x}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left[e^{\frac{i\pi}{6}}J_{-\frac{1}{3}}\left(2i\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right) - e^{-\frac{i\pi}{6}}J_{\frac{1}{3}}\left(2i\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right]. \quad (257б)$$

7.17.3. Функции Струве. В то время как рассмотренные до сих пор функции возникали путем обобщения интеграла Бесселя, функция Струве выводится из интеграла Пуассона. Заменим в равенстве (57б) сумму обоих показательных функций их разностью. Мы получим тогда функцию, определенную для всех значений p

$$S_p(z) \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}e^{-i\pi}\right)^p \int_0^{(1+)} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} \sin zt\,dt. \quad (258)$$

Путь интегрирования начинается в точке $t=0$, обходит вокруг точки $t=1$ и снова возвращается в точку $t=0$, причем точка $t=-1$ не обходится. Этот путь *незамкнут* на римановой поверхности. Если $\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2}$, то в точке $t=1$ подинтегральная функция не обращается в бесконечность и путь можно заменить путем от 0 до 1 по вещественной оси. Так как

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right) = \frac{2\pi}{e^{ip\pi}+e^{-ip\pi}},$$

то мы можем записать формулу (258) в виде

$$S_p(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\int_0^1 (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\sin zt\,dt \quad (259)$$

$$\operatorname{Re} p > -\frac{1}{2},$$

или, делая подстановку $t=\cos w$,

$$S_p(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\cos w)\sin^{2p}w\,dw \qquad (260)$$

$$\left(\operatorname{Re}p>-\frac{1}{2}\right).$$

Из равенств (258) и (57в) следует, что

$$J_p(z)+iS_p(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}e^{-i\pi}\right)^p\int_0^{(1+)}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}e^{izt}\,dt. \qquad (261)$$

Так как по равенству (58) функция Ганкеля $H_p^{(1)}$ определяется точно тем же интегралом, с той лишь разницей, что путь интегрирования начинается и кончается в бесконечно удаленной точке, то, деля на $1+e^{2i\pi p}$, получаем

$$H_p^{(1)}(z)-(J_p(z)+iS_p(z))=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\int_{\infty e^{i\beta}}^{0}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}e^{izt}\,dt.$$

Принимая во внимание равенство (24) и делая подстановку $t=is$, получаем

$$S_p(z)=N_p(z)+\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\int_0^{\infty e^{i\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)}}(1+s^2)^{p-\frac{1}{2}}e^{-zs}\,ds \qquad (262)$$

$$(-\arg z<\beta<\pi-\arg z).$$

Подстановка $zs=u$ дает удобную форму

$$S_p(z)=N_p(z)+\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\int_0^{\infty}e^{-u}\left(1+\frac{u^2}{z^2}\right)^{p-\frac{1}{2}}du. \qquad (263)$$

Из равенства (258) непосредственно вытекает соотношение обхода

$$S_p(e^{i\mu\pi}z)=e^{i\mu(p+1)\pi}S_p(z). \qquad (264)$$

7.17.3.1. Разложение в окрестности точки $z=0$. Поскольку функция $\sin zt$ во всей плоскости t разлагается в равномерно сходящийся степенной ряд, то, переставляя суммирование и интегри-

рование, получаем из равенства (258)

$$S_p(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}e^{-i\pi}\right)^p\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}\frac{z^{2\varkappa+1}}{(2\varkappa+1)!}\oint_0^{(1+)}t^{2\varkappa+1}(1-t^2)^{p-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Подстановка $t^2=s$ переводит этот интеграл в

$$\frac{1}{2}\oint_0^{(1+)}s^{\varkappa}(1-s)^{p-\frac{1}{2}}\,ds=\frac{1}{2}(1+e^{2i\pi p})\oint_0^{(1)}s^{\varkappa}(1-s)^{p-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Стоящий справа несобственный интеграл, в силу равенства (1.16), является B-функцией. Поэтому, принимая во внимание равенства (1.39) и (1.40), имеем

$$S_p(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}z^{2\varkappa+1}\frac{\varkappa!}{(2\varkappa+1)!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+p+\varkappa\right)},$$

или, принимая во внимание равенство (1.42),

$$S_p(z)=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\varkappa}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2\varkappa+1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\varkappa\right)\Gamma\left(p+\frac{3}{2}+\varkappa\right)}. \qquad (265)$$

Это равенство является аналогом равенства (6) для функции Бесселя.

7.17.3.2. Асимптотическое представление при больших z. Следуя Ватсону, будем исходить из равенства (263). Умножим обе части равенства

$$\left(1+\frac{u^2}{z^2}\right)^{p-\frac{1}{2}}=\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\binom{p-\frac{1}{2}}{\varkappa}\frac{u^{2\varkappa}}{z^{2\varkappa}}+R_{\nu}(z)$$

на e^{-u} и проинтегрируем по u. Оценка, совершенно аналогичная проведенной в 6.4.2.0, показывает, что при $|\arg z|<\pi$ остаточный член имеет тот же порядок, что и первый оставленный член. Поскольку

$$\int_0^{\infty}e^{-u}u^{2\varkappa}\,du=(2\varkappa)!$$

то, принимая во внимание равенство (263), получаем

$$S_p(z)\sim N_p(z)+\frac{1}{\pi}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\frac{\Gamma\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}-\varkappa\right)}\left(\frac{2}{z}\right)^{2\varkappa+1-p}. \qquad (266)$$

Поскольку поведение функции $N_p(z)$ описывается равенством (29), то функция $S_p(z)$ определена тем самым при больших значениях $|z|$.

Для положительных полуцелых p выражение $\left(1+\frac{u^2}{z^2}\right)^{p-1/2}$ является, очевидно, многочленом. Отсюда следует, что при $\varkappa = p + \frac{1}{2}$ разложение в равенстве (266) обрывается.

Для функций Струве большого порядка p, так же как и для цилиндрических функций, может быть получено асимптотическое разложение по способу Дебая. Результат приведен в книге Ватсона, стр. 362—364.

ЛИТЕРАТУРА [1])

Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.

Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.

Грей Э. и Мэтьюз Г. Б.*, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.

Зоммерфельд А., Лекции по теоретической физике, ИЛ, 1950.

Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, ГИТТЛ, изд. 3, 1951.

Лебедев Н. Н.*, Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953.

Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958; т. II, ИЛ, 1960.

Натансон И. П.*, Конструктивная теория функций, ГИТТЛ, 1949.

Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, изд. 4, Физматгиз, 1962.

Сеге Д.*, Ортогональные многочлены, ИЛ, 1961.

Сонин Н. Я.*, Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.

Степанов В. В.*, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959.

Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. ГТТИ т. I, 1933, т. II, 1934; готовится к печати новое издание (Физматгиз).

Фихтенгольц Г. М.*, Курс дифференциального и интегрального исчисления, ГИТТЛ, т. I, 1948; т. II, 1948; т. III, 1949.

Янке Е., Эмде Ф.*, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

Appel P., Kampé de Fériet J., Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques. Polynomes d'Hermite. Gautier-Villars, Paris, 1926.

Belardinelli G.*, Fonctions hypergéométriques de plusiers variables et résolution analytiqué des équations algébriques générales, Gauthier-Villars, Paris, 1960.

Bromwich T. J. I'-a, An Introduction to the Theory of Infinite Series, 2 ed., London, 1955.

Buchholz H.*, Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer, Berlin, 1953.

[1]) Звездочкой отмечены работы, включенные в список переводчиком — *Прим. ред.*

Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950. Bd. II, Anwendungen der Laplace-Transformation 1. Abteilung. Basel, 1955. Bd. III, Anwendungen der Laplace-Transformation 2. Abteilung. Basel, 1956.

Erdélyi A., Higher Transcendental Functions. Vol. I, New York, 1953. Vol. II, New York, 1953. Vol. III, New York, 1955.

Frank Ph., Mises R., Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig, 1935 [1]).

Jahnke—Emde—Lösch, Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart, 1960.

Kamke E., Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig (AVG), 1950.

Kampé de Fériet J.*, La fonction hypergéométrique, Mémorial de Sciences mathém. № 85, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Klein F., Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion. Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 34. Springer Verl. Berlin, 1933.

Lagally M., Franz W., Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig, 1950.

Lense J.*, Kugelfunktionen, Leipzig, 1954.

Mac Robert T. M*., Spherical Harmonics, Methuen 2 éd., 1947.

Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Aufl., Berlin, 1948.

Nielsen N.*, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

Nielsen N.*, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig, 1904.

Nörlund*, Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre superier, Kopenhavn, 1956.

Petiau G.*, La Théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications á la physique mathématique. Centre National de la Recherche Scientifique, 1955.

Pinney F.*, Laguerre functions in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector, *Journ. of Math. and Physics (MIT)*, 25, 1946, 49—79.

Rainville*, Special functions, New Jork, 1960. (готовится русское издание, Физматгиз).

Robin L.*, Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, Gauthier-Villars.

Serret J. A., Scheffers G., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Leipzig, 1909.

Snow C.*, Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory. National Bureau of Standards, Appl. Math. Series 19, Washington, 1952.

Tricomi F.*, Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, 1960.

Tricomi F.*, Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin, 1955.

Vogel T.*, Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique, Paris, 1953.

[1]) См. также Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ч. II, ОНТИ, 1937. — *Прим. ред.*

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ*)

Азимутальное уравнение 89
Ангера функция 431
~ асимптотические разложения 438
~ дифференциальное уравнение 431
~ определенные интегралы 433
~ разложение в ряд 432
Асимптотическое разложение 128
~ линии раздела 390

Бернулли числа 41
Бесселя дифференциальное уравнение 317
~ переход к уравнению Лапласа 317
~ решения 318, 348
— интеграл 342
— функция 312, 316
~ аналитичность 319
~ асимптотические разложения 320
~ интеграл Вебера 363
~ поведение на бесконечности 320
~ приближение с помощью многочлена 321
~ n-го порядка 318
~ нулевого порядка 320
~ произведения 334
~ разложение 318
~ поведение в окрестности $z = 0$ 318
~ ряды по квадратам 357—358.
~ связь между функциями, индексы которых отличаются на целое число 338
~ — с вырожденной гипергеометрической функцией 323
~ соотношение обхода 325
Бесселя — Фурье интеграл 428 и сл.
— — ряд 426
~ сходимость 427
B — функция 14
Бесселя — Фурье ряд для специальных значений параметров 17
~ ~ при целой сумме параметров 17
~ ~ при целой разности параметров 19
~ определение 14
~ применение к вычислению интегралов 43
~ при целочисленных значениях параметра 20
~ свойства 15
~ связь с Г-фуикцией 26
~ симметричность 15
Бикли метод 387

Валлиса формула 34
Ватсона теорема 130, 383
Вебера интеграл 363
Вероятностей интеграл 299
~ асимптотическое разложение 299
~ производные 299
~ обобщенный 298
Ветвления точки 102
Волновое уравнение 75, 93, 347
~ в конических координатах 94
~ в параболических координатах 95
~ для кругового цилиндра 94
~ для параболического цилиндра 96
~ для параболоида вращения 96
~ для полярного угла 91
~ для сфероида 90
~ для эллиптического цилиндра 93
~ разделение переменных 84
~ случаи вырождения 89
Вырожденная гипергеометрическая функция 251
~ асимптотические представления 363

*) Тире заменяет слово, тильда ~ — группу слов.

Вырожденная нормальная форма 254
~ представления 260
~ при $c = 2a$ 270
~ разложения по степеням z 260
~ рекуррентные формулы 267
~ связь с Бесселя функцией 320, 323
~ — гипергеометрической фуикцией Гаусса 251
~ — Лагерра многочленами 279
~ — обобщенным интегралом вероятностей 298
~ — параболического цилиндра фуикциями 289
~ — Уиттекера функцией 272, 273
~ — Эрмита многочленами 285
Г-функция 22
~ интегральное представление 23
~ ~ Ганкеля 28, 262
~ логарифмическая производная 32, 172, 331
~ ~ представление Гаусса 37
~ неполная 297
~ определение 22
~ при больших значениях $|\mathrm{Im}\, z|$ 42
~ применение к вычислению интегралов 43
~ разложения в бесконечные произведения 32
~ ~ Вейерштрасса формула 33
~ связь с B-функцией 26
~ удвоения формула 28
~ умножения формула 32
~ функциональное уравнение 25

Ганкеля функции 321
~ вторая 322
~ ~ асимптотическое разложение 322
~ ~ при больших $|z|$ 322
~ ~ при малых z 323
~ ~ теорема сложения 421
~ нормировка 321
~ первая 321
~ ~ асимптотическое разложение 322
~ ~ при больших значениях $|z|$ 322
~ ~ поведение при малых значениях z 323
~ ~ теорема сложения 418
~ поведение иа бесконечности 321
~ преобразование Меллина 362
~ при вещественных значениях p 324
~ связь с функциями Уиттекера 321
Ганкеля соотношения обхода 325
Гаусса дифференциальное уравнение 99, 142, 151
~ выражение решений через гипергеометрическую функцию 106
~ нормальная форма 99
~ особые точки 99
~ решение 99, 102, 109, 110, 113
~ связь между решениями 102
~ частные решения 109
Гегенбауэра функции 239, 249, 418
~ дифференциальное уравнение 243
~ определение 241—242
~ рекуррентные формулы 244
~ соотношения ортогональности и нормировки 246, 250
Гипергеометрическая функция Гаусса 99, 106, 139, 151, 358
~ асимптотические представления 128
~ ~ для ${}_2F_1(a, b; c + l; z)$ 131
~ ~ для ${}_2F_1(a + l, b - l; c; z)$ 133 и сл.
~ ~ для весьма больших значений аргумента 112
~ линейные связи между параметрами a, b и c 122
~ неполная B-функция 127
~ определение 104, 308
~ параметры a и c — целые 121
~ представление Римана 115
~ разложение в непрерывную дробь 146
~ связи между смежными функциями 115
~ связь между производными и смежными функциями 118
~ смежные функции 115
~ соотношения обхода 112
~ сумма или разность параметров целочисленна 121
~ целочисленный параметр a 119
~ целочисленный параметр c 119
~ частные случаи 126
Гипергеометрические функции 90—93
Гипергеометрический интеграл 186
— ряд 105, 106
~ аналитическое продолжение 110
~ поведение на границе круга сходимости 106
Гипергеометрическое дифференциальное уравнение 68, 90, 91
~ вырожденное 72
~ для функций Гегенбауэра 243
~ ~ решение 244

Двойная петля 9, 102
Дини ряд 426
~, сходимость 428

Зоммерфельда интеграл 342, 353, 382, 418
~ непосредственное вычисление 347
~ приближенное вычисление 400
~ частные случаи 348
— подстановка 416

Интеграл
— $I(a_1, a_2)$ 9
— вероятностей обобщенный 298
— Дирихле 51
— по двойной петле 9
— ~ связь с обычным криволинейным интегралом 103
— Шлефли обобщенный 195
— Эйлера второго рода 22
— — первого рода 14
Интегралы от цилиндрических функций 355, 371
~ неопределенные 355
~ разрывные интегралы Сонина и Гегенбауэра 367
~ — — Сонина и Шафхейтлина 371
Интегральная показательная функция 301
~ асимптотические разложения 306
~ разложение в ряд 306
~ соотношение обхода 301, 305
Интегральный косинус 304
~ асимптотические разложения 306
~ разложение в ряд 306
~ соотношение обхода 305
— логарифм 305
— синус 303, 357
~ асимптотические разложения 306
~ разложение в ряд 305
~ соотношение обхода 305

Конические координаты 79
Корню спираль 300
Кристофеля формула 173
Куммера дифференциальное уравнение 73, 255
— равенство 259, 325, 368
— функция 261, 268, 272, 279, 283, 288, 308, 312, 318
~ представление через гипергеометрический ряд 265

Лагерра многочлены 270, 277, 278 и сл., 312
~ производящая функция 282
~ норма 280, 281
~ обобщенные 279
~ рекуррентные формулы 281
~ связь с функцией Уиттекера 283
~ соотношение ортогональности 280
Ламе уравнение волновое 84, 85
~ особые точки 85
~ потенциальные функции для внешней области эллипсоида 88
~ ~ для внутренней области эллипсоида 86
~ ~ собственные значения 87
Лапласа интеграл 194
~ определение аргументов для $\mathfrak{P}_n^{\mu}(z)$ 196
— оператор 239, 240
~ в эллиптических координатах 84
~ через коэффициенты первой квадратичной формы 83
— преобразование 312
~ обращение 313
— уравнение в частных производных 75
~ в n-мерном евклидовом пространстве 239
~ решение в трехмерном пространстве 248, 249
— — обыкновенное 252
~ второе фундаментальное решение 256, 262, 273
~ интегрирование 252
~ общее решение 254, 255
~ соотношения между решениями 256
Лежандра дифференциальное уравнение 151
~ второго вида 151
~ первого вида 151, 154
— многочлены 146
~ как частный случай функций Гегенбауэра 248
~ присоединенные 147
— функции 151, 418
~ асимптотические разложения 205
~ ~ при $|m| \gg 1$ 208
~ ~ при $|n| \gg 1$ 206
~ второго рода 157
~ ~ присоединенные 158, 173
~ ~ связь с функциями первого рода 160
~ интегралы от аргументов ch w и cos θ 190

Лежандра интегральные представления 152, 186
~ ~ для $\mathfrak{P}_n^m(z)$ 188
~ первого рода 153, 155
~ представления 169
~ — интегралами Лапласа 194 и сл.
~ — в окрестности точки $z = +1$ 169
~ — в окрестности точки $z = -1$ 174
~ присоединенные 155
~ разложение для любого z 181
~ — по степеням $z^2 - 1$ 178
~ ~ z 178
~ ~ $z - \sqrt{z^2 - 1}$ 182
~ — при больших значениях $|z|$ 179
~ — $\mathfrak{P}_n^m(z)$ по степеням $\frac{z-1}{z+1}$ 173
~ ряды по ним 219 и сл.
~ связь с интегралами от цилиндрических функций 364
~ скачок функции $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ при переходе через разрез 169
~ соотношение обхода 166
~ теорема сложения 224
~ ~ для $P_n(z)$ 224, 226
~ ~ для $Q_n(z)$ 229
~ обобщение на случай $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Re} z' > 0$ 238
~ частный случай $n = \nu - \frac{1}{2}$ — целое, $n \pm m = \lambda$ — целое 163
Линейные дифференциальные уравнения
~ нерегулярные особые точки 54
~ нормальная форма 52
~ определяющее уравнение 53
~ особые точки 52
~ регулярные особые точки 53
~ рекуррентные соотношения 53, 54
~ точки определенности 53, 54
Линии нулей 390 и сл.
~ возможные для цилиндрических функций 392, 393
~ в плоскости z при фиксированном p 406
~ поведение в плоскости p 394 и сл.
~ при $p = \pm z$ 393
~ функции Бесселя с почти отрицательным индексом 412
~ — Ганкеля с почти вещественным индексом 414
Логарифмическая производная Г-функции
~ по Вейерштрассу 34
~ по Гауссу 36
Ломмеля — Вебера функции 430
~ асимптотические разложения 438
~ дифференциальное уравнение 431
~ определенные интегралы 433
~ разложение в ряд 432

Макдональда функция (модифицированная функция Ганкеля) 333, 365
~ интегральное представление произведения 380
Матье дифференциальное уравнение 94
~ обобщение 96
Мелера формула 193
Меллина преобразование 362, 363

Неймана ряды 416
— функции 324
~ определение 324
~ поведение в окрестности точки $z = 0$ 325
~ — при больших значениях z 325
~ соотношение обхода 326
Никольсона — Шёбе разложения, вычисление коэффициентов 403
~ условия применимости разложений 401
~ формулы 399

Обобщенная свертка 313
Обобщенные гипергеометрические функции 148
~ Аппеля для двух переменных 149
~ Лауричеллы для n переменных 150, 311
~ одного переменного 148
Ортогонализация гипергеометрической функции 142 и сл.
Ортогональная система функций 142
Особые точки P-функции Римана 68

Параболические координаты 80
Параболического цилиндра функции 289
~ интегральное представление 292, 295
~ ортогональность 296

Параболического цилиндра функции, поведение в окрестности точки $z = 0$ 290
~ разложение и асимптотическое представление 290 и сл.
~ рекуррентные формулы 296
~ связь с вырожденной гипергеометрической функцией 289
~ — с многочленами Эрмита 292
~ — с ортогонализованными многочленами Эрмита 295
Парсеваля формула 224
Перевала метод 128, 131, 382
— точка 129, 134, 382
Плоская волна 416, 417
Поведение Г-функции в особых точках 29, 30
Потенциала теория 75
Потенциальная функция сфероида 92
Потенциальное уравнение для сфероида 91
Присоединенные сферические функции 92
~ рекуррентные формулы 211
~ ~ для шаровых функций 218
Пуассона интеграл 336, 338

Радиальное уравнение 92, 95
Римана дифференциальное уравнение 67, 93, 252
~ вырожденное (см. дифференциальное уравнение Бесселя) 92, 94, 96, 97, 252, 317
~ с полюсами $0, 1, \infty$ 91

Собственные функции уравнения Бесселя 422 и сл.
Сонина интеграл 342, 367, 416
Сонина — Шафхейтлина интеграл 374
Сопряженное дифференциальное выражение 100
Стирлинга ряд 41
— формула 38, 207, 209, 323
Струве функции 443
~ асимптотическое представление при больших z 445
~ разложения по степени z 445
Сферические координаты 78
— функции 148
Сфероконическая система координат 79

Томсона функции 334

Уиппла соотношение 366
Уиттекера дифференциальное уравнение 273
— функции 272 и сл., 288, 289, 308, 314
~ асимптотическое представление 274
~ интегральное представление 273
~ преобразование Лапласа 312 и сл.
~ неполная Г-функция 297
~ рекуррентные формулы 274
~ ~ при постоянном k 275
~ связь с функциями Гаикеля 321
~ соотношение обхода 274

Факториал 7
Френеля интеграл 300
~ асимптотические разложения 300
~ спираль Корню 300
Фукса уравнение 55
~ вырожденное 71, 72, 95
~ дробно-линейное преобразование 57
~ поведение в бесконечно удаленной точке 58
~ преобразование показателей 57, 60
~ — полюсов 64
~ регулярные особые точки 66, 67

Харди функции (интегралы) 439
~ при нечетном индексе 440 и сл.
~ при четном индексе 440 и сл.

Цилиндрические волны 416, 417
— координаты 79
— функции 94, 317
~ асимптотические разложения 381
~ ~ вне линии раздела 391
~ ~ в окрестности линий нулей 398—399
~ ~ Никольсона — Шёбе 403 и сл.
~ ~ p и z — большие положительные числа, $p > z \gg 1$ 386
~ ~ ~ для функций Бесселя 384
~ ~ ~ — Ганкеля 385
~ ~ ~ — Неймана 386
~ ~ при больших значениях индекса p 381 и сл.
~ второго рода, см. Неймана функции
~ интегральные представления Бернса 362—363
~ интегральные представления 336
~ ~ Зоммерфельда интеграл 342 и сл.

Цилиндрические функции, непосредственное вычисление 347 и сл.
~ Пуассона интегралы 336 и сл.
~ частные случаи 348 и сл.
~ произведение 334
~ ~ частные случаи 335
~ Липшица — Ганкеля интеграл 358 и сл.
~ нули 374 и сл.
~ определение 317
~ определенные интегралы
~ ~ выражаемые через функции Лежандра 363 и сл.
~ ~ Липшица — Ганкеля 358, 371
~ ~ ~ для функций Ганкеля 361
~ ~ ~ — Неймана 360
~ ~ от произведений функций Бесселя, разрывные Сонина и Шафхейтлина 371 и сл.
~ ~ разрывные Сонина и Гегенбауэра 367 и сл.
~ определитель Вронского и рекуррентные формулы 327 и сл.
~ поведение в точке $z = 0$ 330
~ полуцелого индекса $Z_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$ 353
~ ~ Бесселя 354
~ ~ Ганкеля 354
~ ~ Неймана 354
~ при мнимых значениях независимой переменной 333
~ сотношения обхода 325
~ теорема сложения 418 и сл., 422
~ третьего рода, см. Ганкеля функции 421
см. также Линии нулей

Шлефли интеграл 342, 353

Эйлера — Маскерони постоянная 33
~ десятичное разложение 33
Эйлера преобразование 100
— разложение Г-функции в бесконечное произведение 32
Эйри — Харди интеграл 438
Эллиптические координаты 76
~ определение 76
~ осевая симметрия 77
~ связь между случаями вырождения 81
~ случаи вырождения 77
~ частные случаи 77
Эрдейи интеграл 307, 358
~ обобщение на произведение любого числа функций Уиттекера 311
Эрмита многочлены 283, 285
~ норма 287
~ рекуррентная формула 286
~ связь с многочленами Лагерра 285
~ — производными интеграла вероятностей 299
~ — функциями параболического цилиндра 292
~ — — Уиттекера 286
~ соотношения ортогональности 287, 295
— функции второго рода 287
— — для целочисленных значений ν 286

Якоби интегральная формула, доказательство 227
— многочлены 142, 143
~ нули 145
~ определение 145

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\binom{a}{\mu}$ — биномиальный коэффициент 7

$(a)_\mu$ — факториал 7

$A_p(z)$ — функция Ангера 431

$B_{2\mu}$ — числа Бернулли 41

$\mathrm{B}(p, q)$ — B-функция 14

$\mathrm{B}_x(p, q)$ — неполная B-функция 127

$\mathrm{ber}_p(z)$, $\mathrm{bei}_p(z)$ — функции Томсона 334

C — постоянная Эйлера — Маскерони 33

$C(x)$ — интеграл Френеля 300

$C_\nu^p(z)$ — функция Гегенбауэра 242

$Ci_\nu(x)$ — функция Харди 439

$D_n(z)$ — функции параболического цилиндра 289

Du — линейный дифференциальный оператор 52

Δ — оператор Лапласа 75

$E_n(x)$ — обобщенный интеграл вероятностей 298

$\mathrm{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция 301

$\mathrm{Ei}_\nu(z)$ — функция Харди 439

$\mathfrak{Ei}(z)$ — 303

$F(x)$ — интеграл Френеля 300

$F_D(a; b_1, b_2, \ldots, b_\nu; c; x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ — гипергеометрическая функция Лауричелла 150

${}_1F_1(a; c; z)$ — функция Куммера 261

${}_2F_1(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса 105

$F_1(a; b, b'; c; x, y)$ и др. — гипергеометрические функции Аппеля двух переменных 149

${}_\nu F_\mu(a, a_2, \ldots, a_\nu; c_1, c_2, \ldots, c_\mu; z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция 148

$\mathfrak{P}_\nu(a, c; z)$ — многочлен Якоби 143

$\Phi(x)$ — интеграл вероятностей 299

$\Gamma(z)$ — Г-функция 22

$H_p^{(1)}(z)$, $H_p^{(2)}(z)$ — функции Ганкеля 321

$\mathrm{He}_\nu(x)$ — многочлен Эрмита 285

$\mathrm{he}_\nu(x)$ — функция Эрмита второго рода 287, 288

$\left.\begin{matrix}\mathrm{her}_p(z)\\ \mathrm{hei}_p(z)\end{matrix}\right\}$ — функции Томсона 334

$I(a_1, a_2)$ — интеграл по двойной петле 9

$I_p(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента 333

$J_p(z)$ — функция Бесселя 318

$K_p(z)$ — функция Макдональда 333

$\left.\begin{matrix}\mathrm{ker}_p(z)\\ \mathrm{kei}_p(z)\end{matrix}\right\}$ — функции Томсона 334

$L_\nu(z)$ — многочлен Лагерра 279

$L_\nu^{(c)}(z)$ — обобщенный многочлен Лагерра 279

$\mathrm{li}\, z$ — интегральный логарифм 305

$M_{k,m}(z)$ — функция Уиттекера 272

$\mu!$ — факториал 7

$N_p(z)$ — функции Неймана 324

$P\left\{\begin{matrix}a_1, & a_2, & a_3\\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3\\ \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3'\end{matrix}\ z\right\}$ — P-функции Римана 67

$P_\nu(x)$ — многочлен Лежандра 146, 156

$P_m^n(x)$ — присоединенная функция Лежандра на разрезе 157

$P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра 92

$P_\nu^\mu(x)$ — присоединенные многочлены Лежандра 147

$P(z, p)$ — неполная Г-функция 297

$p_{\nu,\mu}(x)$ — 147

$\mathfrak{p}_{n,m}(z)$ — 153

$\mathfrak{P}_n^m(z)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода 154

$\mathfrak{P}_n(z)$ — функции Лежандра первого рода 155

$\Psi(z)$ — логарифмическая производная Г-функции 34

$Q(z, p)$ — неполная Г-функция 297

$Q_\nu(a, b; z)$ — многочлен Якоби 143

$Q_n^m(z)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода на разрезе 159

$\mathfrak{q}_{n,m}(z)$ — 157

$\mathfrak{Q}_n(z)$ — функция Лежандра второго рода 158

$\mathfrak{Q}_n^m(z)$ — присоединенная функция Лежандра второго рода 158

$S(x)$ — интеграл Френеля 300

$S_p(z)$ — функция Струве 443

$S_{0,p}(z), S_{-1,p}(z)$ — суммы Ломмеля 432

$\mathrm{si}\, z$ — 305

$\mathrm{Si}(z)$ — интегральный синус 303

$\mathfrak{Si}(z)$ — 303

$Si_\nu(x)$ — функция Харди 439

$\Omega_p(z)$ — функция Ломмеля — Вебера 431

$v(a;\ c;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция 256

$W(z)$ — определитель Вронского —56

$W_{k,m}(z)$ — функция Уиттекера 272

$w_0(a;\ c;\ z)$, $w_1(a;\ c;\ z)$, $w_{01}(a;\ c;\ z)$ — вырожденные гипергеометрические интегралы 258

$Y_n^m(\theta)$ — шаровая функция 218

$Y_p(z)$, $\mathbf{Y}_p(z)$ — функции Неймана 333

$Z_p(z)$ — цилиндрическая функция 317

$\int_{(z_1)}^{(z_2)}$ — контурный интеграл 10

$\oint_{(z_1)}^{(z_2)}$ — контурный интеграл 9

$\oint_{(z_2+,\ z_1+)}^{(z_2\ ,\ z_1+,\ z_2-,\ z_1-)}$ — контурный интеграл 9

$\int_A$ — контурный интеграл 12

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

§ 1. В- и Г-ФУНКЦИИ 7

1.1. Правила вычисления с факториалами 7

1.2. Регуляризация определенных интегралов 9
1.2.1. $a_1 + a_2 = \nu$ — целое число 12
1.2.2. $a_1 - a_2 = \nu$ — целое число 13
1.2.3. $a_1 = \nu$ — целое число 14

1.3. B-функция 14
1.3.1. Свойства B-функции 15
1.3.2. B-функция для специальных значений переменных 17
1.3.2.1. $p + q = \nu$ — целые числа 17
1.3.2.2. $p - q = \nu$ — целые числа 19
1.3.2.3. Целочисленные значения параметра 20

1.4. Определение Г-функций 22
1.4.0. Доказательство допустимости перестановки перехода к пределу интегрирования 24
1.4.1. Функциональное уравнение для Г-функции 25
1.4.2. Связь между B- и Г-функциями 26
1.4.2.0. Доказательство допустимости изменения порядка интегрирования 27
1.4.3. Свойства Г-функции 27

1.5. Разложение Г-функции в бесконечное произведение. Логарифмическая производная Г-функции. Ряд Стирлинга 32
1.5.1. Бесконечные произведения Эйлера и Вейерштрасса 32
1.5.1.0. Постоянная Эйлера — Маскерони 33
1.5.2.1. Логарифмическая производная Г-функции Вейерштрасса 34
1.5.2.2. Логарифмическая производная Г-функции Гаусса 36

1.5.3. Формула Стирлинга 37
1.5.3.0. Вычисление второго интеграла 38
1.5.4. Ряд Стирлинга 40
1.5.4.0. Оценка Г-функции при больших значениях $|\operatorname{Im} z|$ . . 42

1.6. Применения B- и Г-функций 43

1.6.1. Вычисление $u_{1,2} = \int_0^\infty e^{-a\tau}\tau^{p-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} k\tau\, d\tau$ 43

1.6.1.1. Частный случай: вещественные постоянные 44
1.6.1.2. Частный случай $a = 0$ 45

1.6.2. Вычисление интегралов $v_{1,2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-q-1}\varphi \sin^{q-1}\varphi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\varphi\, d\varphi$ 46

1.6.3. Вычисление $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(p-q)\varphi \cos^{p+q-2}\varphi\, d\varphi$ и связанных с ним интегралов 48
1.6.4. Различные интегралы 50
1.6.5. Интеграл Дирихле 51

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 52

2.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка 52
2.1.0. Особые точки и точки определенности 52
2.1.1. Определитель Вронского 55
2.1.2. Преобразования полюсов и показателей 57
2.1.3. Поведение в бесконечно удаленной точке 58

2.2. Дифференциальные уравнения типа Фукса второго порядка 60
2.2.1. Преобразование показателей 60
2.2.2. Связь между показателями 63
2.2.3. Преобразование полюсов 64
2.2.4. Регулярное поведение в бесконечно удаленной точке 66
2.2.5. Три полюса. Дифференциальное уравнение Римана 67
2.2.6. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение 68
2.2.7. Слияние полюсов 70

§ 3. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ 75

3.0. Волновое уравнение и уравнение Лапласа 75

Эллиптические координаты 76
3.1.1. Определение эллиптических координат 76

3.1.2. Частные случаи и случаи вырождения 77
3.1.2.1. Осевая симметрия 77
3.1.2.2. Сферические координаты 78
3.1.2.3. Конические координаты 79
3.1.2.4. Цилиндрические координаты 79
3.1.2.5. Параболические координаты 80
3.1.2.6. Связь между случаями вырождения общих эллиптических координат 81

3.2. Разделение переменных в волновом уравнении в эллиптических координатах 81

3.2.1. Оператор Лапласа в эллиптических координатах 81
3.2.1.1. Вычисление дифференциала длины дуги 81
3.2.1.2. Выражение оператора Лапласа через коэффициенты первой квадратичной формы 83
3.2.1.3. Вычисление операторов Лапласа в эллиптических координатах 84
3.2.2. Уравнение Ламе 84
3.2.2.1. Разделение переменных в волновом уравнении . . . 84
3.2.2.2. Особые точки уравнения Ламе 85
3.2.2.3. Потенциальные функции Ламе для внутренней области эллипсоида 86
3.2.2.4. Собственные значения уравнения Ламе вещественны и просты 87
3.2.2.5. Потенциальные функции Ламе для внешней области эллипсоида 88
3.2.3. Случаи вырождения волнового уравнения Ламе 89
3.2.3.1. Азимутальное уравнение 89
3.2.3.2. Волновое уравнение для сфероида 90
3.2.3.3. Волновое уравнение для полярного угла 91
3.2.3.4. Радиальное уравнение 92
3.2.3.5. Волновое уравнение для эллиптического цилиндра 93
3.2.3.6. Волновое уравнение для кругового цилиндра 94
3.2.3.7. Волновое уравнение в конических координатах . . . 94
3.2.3.8. Волновое уравнение в параболических координатах 95
3.2.3.9. Волновое уравнение для параболоида вращения . . 96
3.2.3.10. Волновое уравнение для параболического цилиндра 96

§ 4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССА 98

4.1. Дифференциальное уравнение Гаусса 99
4.1.1. Решение дифференциального уравнения Гаусса 99
4.1.2. Связь между решениями дифференциального уравнения Гаусса 102

4.2. Определение гипергеометрической функции Гаусса 104
4.2.1. Гипергеометрический ряд 105
4.2.1.1. Поведение гипергеометрического ряда на границе круга сходимости 106
4.2.2. Выражение решений дифференциального уравнения Гаусса через гипергеометрическую фуикцию 106
4.2.3. Вывод дальнейших решений уравнения Гаусса 109
4.2.4. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда . . 110
4.2.4.0. Разложение для весьма больших значений аргумента 112
4.2.5. Соотношения обхода 112

4.3. Функция Гаусса как функция параметров 115
4.3.1. Связи между смежными функциями 115
4.3.1.0. Связи между производными и смежными функциями 118
4.3.2. Целочисленные значения параметра 119
4.3.2.1. Параметр a целочисленный 119
4.3.2.2. Параметр c целочисленный 119
4.3.2.3. Параметры a и c — целые 121
4.3.2.4. Сумма и разность параметров целочисленна 121
4.3.3. Линейные связи между параметрами a, b и c 122
4.3.3.0. Частные случаи 126
4.3.4. Неполная B-функция 127
4.3.5. Асимптотические представления при больших значениях параметра 128
4.3.5.1. Метод перевала 128
4.3.5.2. Асимптотическое разложение для ${}_2F_1(a, b; c+l; z)$ 131
4.3.5.3. Асимптотическое разложение для ${}_2F_1(a+l, b-l; c; z)$ 133

4.4. Ортогонализация гипергеометрической функции 142
4.4.1. Многочлены Якоби 142
4.4.1.0. Нули многочлена Якоби 145
4.4.2. Многочлены Лежандра 146

4.5. Обобщенные гипергеометрические функции 148
4.5.1. Обобщение на случай одного переменного 148
4.5.2. Обобщение Аппеля для двух переменных 149
4.5.3. Обобщение Лауричелла для n переменных 150

§ 5. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 151

5.1. Уравнение Лежандра 151
5.1.1. Функции Лежандра первого рода 153
5.1.2. Функции Лежандра второго рода 157
5.1.3. Связь между функциями Лежандра первого и второго рода 160
5.1.3.0. Частные случаи: $n = \nu - \frac{1}{2}$ — целое число, $n \pm m = \lambda$ — целое число 163
5.1.4. Соотношение обхода 166

5.2. Представления функций Лежандра 169
5.2.1. Представления в окрестности точки $z = +1$ 169
5.2.1.0. Разложение $\mathfrak{P}_n^m(z)$ по степеням $\frac{z-1}{z+1}$ 173
5.2.2. Представления в окрестности $z = -1$ 174
5.2.3. Разложение по степеням $1 - z^2$ 178
5.2.4. Разложение в окрестности точки $z = 0$ 178
5.2.5. Разложения при больших значениях $|z|$ 179
5.2.6. Разложение по степеням $z - \sqrt{z^2 - 1}$ 182
5.2.6.0. Поведение на разрезе 184

5.3. Интегральные представления 186
5.3.1. Гипергеометрический интеграл 186
5.3.2. Интегралы для функций Лежандра от переменных $\operatorname{ch} w$ и $\cos\theta$ 190
5.3.3. Интеграл Лапласа 194

5.4. Асимптотические представления при больших значениях z, n, m 204
5.4.1. Асимптотические разложения при $|z| \gg 1$ 204
5.4.2. Асимптотические разложения для больших значений индекса 205
5.4.2.1. $|n| \gg 1$ 206
5.4.2.2. $|m| \gg 1$ 208

5.5 Рекуррентные формулы 211
5.5.1. Рекуррентные формулы для присоединенных функций Лежандра 211
5.5.2. Рекуррентные формулы для сферических функций 218

5.6. Ряды Фурье и разложения по функциям Лежандра 219

5.7. Теоремы сложения для функций Лежандра 224
5.7.1. Теорема сложения для $P_n(z)$ 224
5.7.1.0. Доказательство интегральной формулы Якоби . . . 227
5.7.2. Теорема сложения для $\mathfrak{Q}_n(z)$ 229
5.7.3. Обобщение теоремы сложения на случай $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Re} z' > 0$ 238

5.8. Функции Гегенбауэра 239
5.8.1. Уравнение Лапласа в n-мерном евклидовом пространстве . . 239
5.8.2. Определение функций Гегенбауэра 241
5.8.3. Дифференциальное уравнение для функций Гегенбауэра . . 243
5.8.4. Рекуррентные формулы 244
5.8.5. Соотношения ортогональности и нормировки 246
5.8.6. Многочлены Лежандра как частный случай функций Гегенбауэра 248

§ 6. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ 251

6.1. Связь между вырожденной и гауссовской гипергеометрическими функциями 251

6.2. Дифференциальное уравнение Лапласа 252
6.2.1. Интегрирование уравнения Лапласа 252
6.2.2. Нормальная форма вырожденной гипергеометрической функции 254
6.2.3. Соотношения между решениями уравнения Лапласа 256

6.3. Соотношения обхода 259

6.4. Представления вырожденной гипергеометрической функции . 260
6.4.1. Разложение по степеням z 260
6.4.2. Асимптотические представления при больших значениях $|z|$ 263
6.4.2.0. Оценка остаточного члена 265

6.5. Соотношения между смежными функциями. Рекуррентные формулы 267

6.6. Частные случаи для особых значений параметров 270
6.6.1. Целочисленные параметры, $c-a=\nu$ — целое число 270
6.6.2. $c=2a$ 270

6.7. Функции Уиттекера 272
6.7.0. Рекуррентные формулы для функций Уиттекера 274

6.8. Соотношения ортогональности. Многочлены Лагерра 277
6.8.1. Многочлены Лагерра 278
6.8.2. Многочлены Эрмита 283

6.9. Частные случаи вырожденной гипергеометрической функции 288
6.9.1. Функции параболического цилиндра 289
6.9.1.1. Разложения и асимптотические представления . . . 290
6.9.1.2. Интегральное представление и связь с многочленами Эрмита 292
6.9.1.3. Рекуррентные формулы 296
6.9.1.4. Ортогональность 296
6.9.2. Неполная Г-функция и интеграл вероятности. Интегралы Френеля 297
6.9.3. Интегральная показательная функция. Интегральный синус. Интегральный косинус. Интегральный логарифм 301
6.9.3.0. Соотношения обхода, разложения и асимптотические представления 305

6.10. Гипергеометрические функции и преобразование Лапласа . . 307
6.10.1. Интеграл Эрдейи 307
6.10.1.0. Обобщение на произведение функций 311
6.10.2. Преобразование Лапласа функций Уиттекера 312

§ 7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ 317

7.1. Дифференциальное уравнение Бесселя. Определение цилиндрических функций 317

7.2. Разложение функций Бесселя (в узком смысле) 318
7.2.1. Поведение в окрестности точки $z = 0$ 318
7.2.2. Поведение на бесконечности. Асимптотические разложения для больших значений $|z|$ 320

7.3. Функции Ганкеля 321

7.4. Функции Неймана 324

7.5. Соотношения обхода 325

7.6. Определитель Вронского и рекуррентные формулы 327

7.7. Поведение функций в точке $z = 0$ 330

7.8. Другие фундаментальные решения и связи между ними . . . 332

7.9. Произведения цилиндрических функций 334

7.10. Интегральные представления цилиндрических функций . . . 336
7.10.1. Интеграл Пуассона 336
7.10.2. Интегралы Бесселя — Сонина — Зоммерфельда 342
7.10.2.1. Непосредственное вычисление интеграла Зоммерфельда 347
7.10.2.2. Частные случаи интегралов Зоммерфельда 348

7.11. Цилиндрические функции полуцелого индекса $Z_{\nu+1/2}(z)$ 353

7.12. Интегралы от цилиндрических функций 355
7.12.1. Неопределенные интегралы 355
7.12.2. Определенные интегралы 358
7.12.2.0. Связь с функциями Лежандра 363
7.12.3. Разрывные интегралы Сонина и Гегенбауэра 367
7.12.4. Интегралы от произведений функций Бесселя. Разрывные интегралы Сонина и Шафхейтлина 371

7.13. Свойства нулей цилиндрических функций 374
7.13.1. Все нули за исключением $z = 0$ являются простыми 374
7.13.2. Нули функций $Z_p(z)$ и $Z_{p+1}(z)$ перемежаются друг с другом 374
7.13.3. Нули функций Z_p и Z_p^* перемежаются 375
7.13.4.1. Отличные от $z = 0$ нули функции $F_p(z) = AJ_p(z) + BzJ'_p(z)$ являются простыми 375
7.13.4.2. Если $AD - BC \neq 0$ и $p > -1$, то нули функций $F_p(z) = AJ_p(z) + BzJ'_p(z)$ и $G_p(z) = CJ_p(z) + DzJ'_p(z)$ перемежаются 376

7.13.5. При вещественном $p > -1$ нули функции $J_p(z)$ вещественны 376
7.13.6. Наименьший положительный корень функций $J_p(x)$ и $J'_p(x)$ больше, чем p ($p > 0$) 377
7.13.7. Только при вещественном индексе функция Бесселя может иметь отличные от нуля вещественные корни 377
7.13.8. Модифицированные функции Ганкеля (функции Макдональда) лишь при чисто мнимых p имеют положительные отличные от нуля корни 378
7.13.9. Наименьший положительный корень функции $K_p(x)$ при чисто мнимом p лежит в области $x < |p|$ 378
7.13.10. Функции Ганкеля при вещественном индексе не имеют положительных нулей, а при чисто мнимом индексе не имеют вещественных нулей 379
7.13.11. При вещественном p функция $K_p(z)$ не имеет нулей с $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 379
7.13.12. В случае чисто мнимого индекса функция $K_p(z)$ имеет в области $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$ лишь вещественные корни 381

7.14. Кривые нулей и асимптотические разложения цилиндрических функций 381
7.14.1. Разложения при больших значениях индекса p 381
7.14.2. p и z — большие положительные числа, $p > z$ 384
7.14.3. Линии нулей являются линиями раздела областей применимости асимптотических выражений 390
7.14.4. Асимптотическое представление цилиндрических функций вне линий раздела 391
7.14.5. Возможные линии нулей для цилиндрических функций . . . 391
7.14.6. При $p = \pm z$ линии нулей выходят в трех направлениях $(\mp z)^{\frac{1}{3}}$ 393
7.14.7. Поведение линии нулей в плоскости p для любого z 394
7.14.8. Асимптотические формулы в окрестности кривых нулей . . 398
7.14.9. Формулы Никольсона — Шёбе 399
7.14.9.1. Вычисление коэффициентов в разложении Никольсона — Шёбе 403
7.14.10. Асимптотическое разложение при $|p - z| \ll \left|z^{\frac{1}{3}}\right|$ . . . 405
7.14.11. Линии нулей в плоскости z при фиксированном индексе p 406
7.14.12. Линии нулей функции Бесселя с почти отрицательным индексом 412
7.14.13. Линии нулей для функций Ганкеля с почти вещественными индексами 414

7.15. Примеры рядов Неймана. Теоремы сложения 416
7.15.1. Ряды Неймана 416
7.15.2. Теорема сложения 418

7.16. Разложения по собственным функциям. Ряды Бесселя, Фурье и Дини 422
7.16.1. Ряды Бесселя, Фурье и Дини 425
7.16.2. Интеграл Бесселя — Фурье 428

7.17. Обобщения цилиндрических функций 430
7.17.1. Функции Ангера и Ломмеля — Вебера 430
7.17.1.1. Разложение для малых значений переменного . . . 432
7.17.1.2. Определенные интегралы 433
7.17.1.3. Асимптотические представления для больших значений z 434
7.17.2. Интеграл Эйри-Харди 438
7.17.2.1. Интегралы Харди при четном индексе 439
7.17.2.2. Интеграл Харди для нечетных индексов 440
7.17.3. Функции Струве 443
7.17.3.1. Разложение в окрестности точки $z = 0$ 444
7.17.3.2. Асимптотическое представление при больших z 445

Литература 447
Алфавитный указатель 449
Обозначения 455

В Кратцер и В. Франц

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Художник *В. М. Новоселова*
Художествен. редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в производство 22/XI 1962 г.
Подписано к печати 5/IV 1963 г.
Бумага 60×90¹/₁₆= 14,6 бум. л.
29,2 печ. л.
Уч.-изд. л. 26,4. Изд. № 1/1067
Цена 2 р Зак. 875.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Типография № 2 им Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Лексовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.