

Ю. А. КРАВЦОВ

Ю. И. ОРЛОВ

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД



МОСКВА «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1980

**КРАВЦОВ Ю. А., ОРЛОВ Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.**— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

Систематически излагается метод геометрической оптики — эффективный метод построения и вычисления волновых полей в неоднородных средах. Наряду с традиционными вопросами, относящимися к монохроматическим волнам, в книге отражены также различные обобщения метода, существенно расширяющие его возможности: пространственно-временная геометрическая оптика диспергирующих сред, теория взаимодействия нормальных волн в неоднородных анизотропных средах и нерегулярных волноводах, новые варианты теории возмущений для лучей и др. Важным нововведением является формулировка достаточных условий применимости геометрической оптики, опирающаяся на волновые представления.

Общая теория иллюстрируется многочисленными примерами, относящимися к радиофизике, оптике и акустике.

Книга предназначена для широкого круга научных работников, инженеров, аспирантов и студентов-старшекурсников физико-технических и радиотехнических специальностей.

Рис. 108. Табл. 1. Библ. назв. 473.

*Юрий Александрович Кравцов*

*Юрий Ильич Орлов*

**ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД**

---

М., 1980 г., 304 стр. с илл.

Редактор *Д. А. Миртова*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректоры *О. А. Бутусова, А. Л. Ипагова*

ИБ № 11480

---

Сдано в набор 14.01.80. Подписано к печати 15.07.80. Т-13087. Бумага 60×90<sup>1/8</sup>, тип. № 2. Высокая печать. Обыкновенная гарнитура. Условн. печ. л. 19 + форзац 0,25. Уч.-изд. л. 19,65 + форзац 0,44. Тираж 3800 экз. Заказ № 28. Цена книги 3 р. 30 к.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

4-я типография издательства «Наука»

630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

К 20405 — 099  
053(02) — 80 112-80. 1704050000

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической литературы, 1980

Метод геометрической оптики играет исключительно важную роль при анализе волновых полей. Этот простой и наглядный метод обеспечивает хорошее количественное описание чрезвычайно широкого круга волновых явлений различной физической природы (электромагнитные и упругие волны, звук, волновые процессы в плазме и жидкостях, квантовомеханические явления и др.) в условиях, когда длина волны мала по сравнению с характерными масштабами задачи.

Число прикладных исследований, опирающихся на метод геометрической оптики, огромно. Даже их краткий обзор занял бы слишком много места. Особенно широко этот метод применяется в оптике и радиофизике, в физике плазмы, в теории распространения радиоволн через атмосферу Земли, солнечную корону и космическое пространство, а также в радиолокации, радионавигации и дистанционной диагностике. Круг приложений метода на самом деле еще шире, если учесть наличие «двойников» геометрической оптики в акустике (геометрическая акустика), в сейсмологии (геометрическая сейсмика), в квантовой механике (метод ВКБ или квазиклассическое приближение), в гидродинамике и др. Не преувеличивая, можно сказать, что львиная доля всех расчетов коротковолновых полей (особенно на начальном этапе оценок и прикидок) сейчас осуществляется при помощи геометрической оптики и ее модификаций.

Наиболее важна роль геометрической оптики при расчете полей в неоднородных средах. В частности, большой интерес представляют приложения, связанные с распространением и излучением волн в лабораторной, ионосферной и космической плазме, в атмосферах Земли и других планет, в солнечной короне, в неоднородном океане, в земной коре, в неоднородных линзах, в плазменных образованиях, в волноводах с неоднородным заполнением и в нерегулярных волноводах, в различных средах, содержащих случайные неоднородности.

Несмотря на то, что лучевой метод уже давно взят на вооружение в прикладной физике, в литературе до сих пор не существовало систематического изложения практических аспектов метода, хотя отдельные важные вопросы отражены в ряде моногра-

фий<sup>1)</sup>. Этот пробел и пытались восполнить авторы данной книги, поставив перед собой цель последовательно и по возможности полно изложить современное состояние метода геометрической оптики и применения этого метода к решению волновых задач прикладной физики. Книга ориентирована прежде всего на радиофизиков, оптиков и акустиков, а также на инженеров и математиков, занимающихся волновыми задачами. Геометрическая оптика обсуждается здесь с четырех точек зрения.

Во-первых, всюду, где это необходимо, изложен переход от точных волновых уравнений к более простым уравнениям геометрической оптики (П. Дебай [14], С. М. Рытов [16, 17]). Этот переход выявляет характер приближения, даваемого геометрической оптикой, более четко, чем простое постулирование ее основных уравнений. Волновая трактовка дает возможность сформулировать универсальные условия применимости геометрической оптики, опирающиеся на представление о френелевском объеме луча. Ознакомление с этой частью книги полезно, как нам представляется, не только тем, кто применяет геометрическую оптику и хочет иметь представление о возможностях этого метода, но и математикам, интересующимся его обоснованием и уточнениями<sup>2)</sup>.

Во-вторых, в книге показано, как решать уравнения геометрической оптики и как использовать решение для приближенного построения поля.

В-третьих, в соответствии с основной задачей книги приведены конкретные примеры из оптики, акустики и радиофизики. Эти примеры носят не только иллюстративный характер, но и представляют самостоятельный интерес, в своей совокупности они могут служить пособием по практическому применению геометрической оптики к решению широкого круга физических и технических задач.

В-четвертых, для полноты картины дан обзор работ, в которых приведены результаты конкретных расчетов или предложены те применения и обобщения геометрической оптики, которые невозможно было сколько-нибудь детально обсудить в рамках данной книги. В частности, нам пришлось ограничиться лишь ссылками на оригинальные и обзорные работы при упоминании таких важных вопросов, как геометрическая оптика открытых резонаторов и оптических волноводов, геометрическая оптика нелинейных и случайно неоднородных сред, геометрикооптический подход к описанию неустойчивости слабонеоднородной плазмы.

<sup>1)</sup> Здесь мы имеем в виду прежде всего книги [24—30], посвященные физическим проблемам, а также монографии [21, 32, 33] с изложением обобщений метода геометрической оптики.

<sup>2)</sup> Математические основы геометрической оптики изложены в книгах [2, 18, 19, 31].



Благодаря отмеченным выше обстоятельствам, данная книга является одновременно как учебным пособием, так и монографией. Действительно, в тех частях, где изложены основы лучевой оптики и с ее помощью решены простейшие задачи, известные по литературе, это — учебное пособие. Монографический характер книге придают систематичность изложения, результаты новых исследований по обобщениям геометрической оптики и расширению ее возможностей, а также — что важно — решение ряда новых задач (см. особенно §§ 16—19, 23—26). В частности, в книгу включены результаты анализа сложных петлеобразных и звездообразных каустик, возникающих в слоистых средах (§§ 13, 15, 16), различные варианты теории возмущений для лучей (§ 9), геометрическая оптика клиновидно-слоистой среды (§ 16), лучевая теория трансформации волн в нерегулярных волноводах (§ 17) и слабоанизотропных средах (§ 24), общая геометрическая теория распространения модулированных волн в диспергирующих средах (§§ 7, 25), проблемы, связанные с сохранением адиабатического инварианта в нестационарных средах (§ 26) и др.

Важным нововведением является формулировка достаточных условий применимости геометрической оптики, опирающаяся на волновые представления (§ 10).

Весь материал книги распределен по трем главам. Первая глава содержит общие вопросы геометрической оптики скалярного волнового поля. Наряду с выводом уравнений (в том числе уравнений пространственно-временной геометрической оптики) здесь рассмотрены основные свойства лучей, каустик и лучевых полей, приведена общая схема вычисления лучевого поля и изложены наиболее употребительные методы решения уравнений геометрической оптики (метод разделения переменных и метод возмущений).

Глава заканчивается формулировкой достаточных условий применимости метода и обсуждением возможностей, представляемых геометрической оптикой для анализа волновой картины в целом, в том числе и в областях, где геометрическая оптика неприменима (§ 10).

Если первая глава дает общие рецепты построения поля, их обоснование и границы применимости, то вторая глава знакомит читателя с наиболее важными и часто встречающимися постановками задач. Рассмотрение начинается с простейшего случая однородной среды (§ 11), после чего в §§ 12—16 изучаются лучи и поля при наличии тех или иных неоднородностей: при отражении от границ раздела, при распространении в слоистых средах (плоско-слоистая, цилиндрически- и сферически-слоистые среды, клиновидно-слоистая среда), а также при распространении в двумерно-неоднородных, слабонеоднородных и случайно-неоднородных средах.

Отдельно изложены наиболее важные факты, относящиеся к геометрической оптике волноводов (§ 17), и исследовано рассеяние на локализованных неоднородностях различного вида (§ 18). Применению пространственно-временной геометрической оптики к анализу распространения импульсов в диспергирующих средах посвящен § 19. Весь этот материал дает представление о многообразии задач, возникающих в прикладной физике. Конец второй главы имеет более общий характер, а именно, § 20 посвящен численным методам решения уравнений геометрической оптики, а § 21 — применению геометрической оптики к решению обратных задач и задач дистанционной диагностики.

В третью главу вынесены вопросы, специфические для электромагнитного поля, т. е. учет поляризации поля, учет взаимодействия нормальных волн, учет особенностей материального уравнения при одновременном наличии дисперсии и неоднородности (нестационарности) среды. В этой главе материал рассмотрен со всех четырех точек зрения, о которых говорилось выше (вывод уравнений, рецептура для построения поля, решение конкретных задач, обзор соответствующей литературы) применительно к электромагнитным явлениям. В третью главу включены также краткие сведения о родственных векторных задачах квантовой механики и теории упругих волн<sup>1)</sup>.

К сожалению, ряд важных проблем волновой теории, смежных с геометрической оптикой и упомянутых в заключении, мы вынуждены были оставить в стороне, надеясь обратиться к ним в будущем.

Авторы не пытались искусственно размежевать учебные, иллюстративные материалы<sup>2)</sup> и оригинальные результаты, а, напротив, стремились к их органичному сочетанию — с тем, чтобы облегчить читателю овладение красивым, наглядным, универсальным и эффективным лучевым методом.

Основные результаты, включенные в данную книгу, были получены под руководством и при поддержке С. М. Рытова и Е. Н. Васильева, которым авторы выражают свою искреннюю признательность. Авторы глубоко благодарны также Л. А. Вайнштейну за многочисленные ценные советы и замечания.

<sup>1)</sup> §§ 1—4, 6, 10 написаны авторами совместно. Глава III и §§ 5, 9, 17 написаны Ю. А. Кравцовым, остальные разделы — Ю. И. Орловым.

<sup>2)</sup> При работе над книгой авторы использовали свои лекции во Всесоюзных школах по дифракции и распространению волн [339, 79, 235].

## § 1. Уравнения геометрической оптики

**1. Исходные предположения.** Термин «геометрическая оптика» употребляется в различных значениях. Геометрическая оптика в узком, «лучевом», смысле изучает только способы построения изображений при помощи лучей, тогда как геометрическая оптика в широком, «волновом», понимании выступает как *метод приближенного описания волновых полей*. При волновом толковании, которого мы и будем придерживаться в данной книге, лучи образуют только геометрический костяк, на который «нашивается» волновое поле.

В соответствии с двумя указанными толкованиями геометрической оптики в ее развитии можно выделить два периода. Первоначальный лучевой период идейно был завершен еще фундаментальными трудами У. Гамильтона [1], которые оказали также существенное воздействие на развитие классической механики (изложение метода Гамильтона можно найти, например, в книгах [2—5]). Построение лучей лежит в основе инструментальной геометрической оптики, ориентированной на расчет различных оптических устройств. Достижения этой ветви геометрической оптики подытожены в известных монографиях [6—13], в которых освещена также и история лучевого периода геометрической оптики.

Современный волновой период геометрической оптики ведет свое начало от работы П. Дебая [14], которая оказала сильное влияние на формирование лучевых представлений в волновой теории<sup>1)</sup>. Результаты П. Дебая были развиты С. Л. Соболевым [15], С. М. Рытовым [16, 17], Р. Люнебургом [18], школой Р. Куранта [19, 20], В. М. Бабычем, В. С. Булдыревым [21] и др.<sup>2)</sup>

Рассмотрим монохроматические волны, описываемые уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k_0^2 n^2(r) u = 0, \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> В том числе и на формирование квазиклассических представлений в квантовой механике.

<sup>2)</sup> Сведения, относящиеся к истории «волнового этапа», содержатся в монографиях [19, 21, 22] и в обзорных статьях [20, 23].

где  $k_0 = \omega/c$  — волновое число,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\omega$  — частота (зависимость от времени зададим множителем  $e^{-i\omega t}$ ), а величина  $n(\mathbf{r})$ , называемая коэффициентом преломления, характеризует свойства среды, в которой распространяется волна.

В электродинамике уравнение (1.1) передает все характерные особенности поведения электромагнитных волн в изотропной среде, кроме поляризации, при этом квадрат показателя преломления равен диэлектрической проницаемости среды:  $n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})$  (всюду ниже будем считать, что магнитная проницаемость среды равна единице).

Уравнение (1.1) описывает также распространение звуковых волн, если принять  $k_0 = \omega/\bar{c}$  и  $n(\mathbf{r}) = \bar{c}/c(\mathbf{r})$ , где  $c(\mathbf{r})$  — локальное значение скорости звука, а  $\bar{c}$  — некоторое характерное значение скорости звука в рассматриваемой области пространства, которое использовано для нормировки. В случае стационарного уравнения Шредингера, определяющего поведение волновой функции частицы с массой  $m$  и энергией  $E$  в поле сил с потенциалом  $U(\mathbf{r})$ , под  $k_0$  нужно понимать величину  $\sqrt{2mE}/\hbar$ , а под  $n(\mathbf{r})$  — величину  $\sqrt{1 - U(\mathbf{r})/E}$ , так что  $k_0^2 n^2(\mathbf{r}) = 2m(E - U)/\hbar^2$  (здесь  $\hbar$  — постоянная Планка).

Решение уравнения Гельмгольца (1.1) в простейшем случае — для плоской волны, распространяющейся в направлении орта  $\mathbf{l}$  в однородной среде с  $n = \text{const}$ , имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = \mathcal{A} e^{i\Psi(\mathbf{r})}, \quad \Psi(\mathbf{r}) = k_0 n(\mathbf{r} \cdot \mathbf{l}),$$

где  $\mathcal{A}$  — постоянная амплитуда волны, а  $\Psi(\mathbf{r})$  — фаза, причем волновой вектор  $\mathbf{k} = \nabla \Psi$  постоянен и направлен вдоль орта  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{k} = k_0 n \mathbf{l}$ ). Если свойства волны или среды меняются в пространстве, но это изменение происходит достаточно медленно (плавно) в масштабе длины волны, то можно предположить, что поле волны будет также медленно меняться с расстоянием, оставаясь локально «почти плоским». Эта гипотеза и лежит в основе метода геометрической оптики для монохроматических волн.

Итак, будем считать, что решение уравнения (1.1) имеет вид «почти плоской» волны, т. е. волны

$$u(\mathbf{r}) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) e^{i\Psi(\mathbf{r})}, \quad (1.2)$$

где амплитуда  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$  и локальный волновой вектор  $\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \nabla \Psi(\mathbf{r})$  мало меняются на длине волны в среде  $\chi(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{k}(\mathbf{r})|$ :

$$\chi |\nabla \mathcal{A}| \ll |\mathcal{A}|, \quad \chi |\nabla k_j| \ll |k_j|. \quad (1.3')$$

Здесь  $k_j$  — компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$ , а  $\chi \equiv \lambda/2\pi$ . Аналогичное требование нужно предъявить и к коэффициенту преломления  $n(\mathbf{r})$ :

$$\chi |\nabla n| \ll n. \quad (1.3'')$$

Поскольку в среде с коэффициентом преломления  $n$  длина волны  $\lambda$  в  $n$  раз меньше, чем в свободном пространстве, т. е.  $\lambda = \lambda_0/n$ , условия (1.3') и (1.3'') равносильны неравенствам

$$\frac{\lambda_0}{n} \ll \frac{|\mathcal{A}|}{|\nabla \mathcal{A}|} \equiv L_1, \quad \frac{\lambda_0}{n} \ll \frac{|k_j|}{|\nabla k_j|} \equiv L_2, \quad \frac{\lambda_0}{n} \ll \frac{n}{|\nabla n|} \equiv L_3, \quad (1.3''')$$

где  $\lambda_0 = \lambda_0/2\pi = c/\omega$ .

Эти условия, означающие малость изменения величин  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  и  $n(\mathbf{r})$  в пределах области с размерами порядка  $\lambda$ , можно записать в виде одного неравенства

$$\mu = \frac{1}{kL} = \frac{1}{k_0 n L} = \frac{\lambda}{L} \ll 1, \quad (1.4)$$

где  $\mu$  — малый параметр в методе геометрической оптики, а  $L$  — наименьший из характерных масштабов изменения  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $n$ , т. е.  $L = \min(L_1, L_2, L_3)$ . Характерный масштаб  $L$  определяется здесь как расстояние, на котором приращение некоторой величины сравнимо с самой величиной, например,  $|n(\mathbf{r} + L) - n(\mathbf{r})| \sim \sim n(\mathbf{r})$ . Заменяя здесь приращение  $n(\mathbf{r} + L) - n(\mathbf{r})$  линейным по  $L$  членом разложения  $n(\mathbf{r} + L)$  в ряд Тейлора, имеем  $L \nabla n \sim n$ , откуда для  $L$  получаем оценку  $L \sim n/|\nabla n|$ , совпадающую с  $L_3$  в (1.3'''). В случае плоской волны в однородной среде величины  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $n$  строго постоянны, что отвечает  $L = \infty$  и  $\mu = 0$ , т. е. неравенство (1.4) становится тривиальным.

**2. Разложение поля в ряд по степеням малого безразмерного параметра  $\mu$ .** Существует несколько способов вывода основных уравнений геометрической оптики. Наиболее последовательный способ, использующий разложение по безразмерному малому параметру  $\mu \sim 1/k_0 L$ , принадлежит С. М. Рытову [16, 17]. В безразмерных переменных  $x_1 = k_0 x$ ,  $y_1 = k_0 y$ ,  $z_1 = k_0 z$  уравнение (1.1) принимает вид

$$\Delta_1 u + n^2 u = 0, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}. \quad (1.5)$$

Характерный масштаб  $L$  изменения  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $n$  в переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  превращается в безразмерный масштаб  $k_0 L = 1/\mu$  в безразмерных переменных  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ . Этот масштаб можно ввести в уравнение (1.5) явным образом, положив  $\mathbf{r}_2 = \mu \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/L$  и

$$n = n\left(\frac{\mathbf{r}}{L}\right) = n\left(\frac{\mathbf{r}_1}{k_0 L}\right) = n(\mu \mathbf{r}_1) = n(\mathbf{r}_2), \quad |\nabla_2 n| \sim 1, \quad (1.6)$$

где  $\nabla_2 \equiv \partial/\partial \mathbf{r}_2$ . С введением переменной  $\mathbf{r}_2$  уравнение (1.5) принимает вид

$$\Delta_2 u(\mathbf{r}_2) + \frac{n^2(\mathbf{r}_2)}{\mu^2} u(\mathbf{r}_2) = 0, \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}. \quad (1.7)$$

Зависимость показателя преломления  $n$  от  $r_2$  в (1.6) и (1.7) отражает медленную (в масштабе  $\lambda$ ) зависимость  $n$  от координат  $x, y, z$ , так как смещение  $|\delta r| \sim \lambda$  при  $L \gg \lambda$  ведет лишь к малому изменению  $\delta n \sim |\delta r \nabla n| \sim \lambda |\nabla_2 n|/L \sim \lambda/L \ll 1$ .

Такую же медленность следует предположить у амплитуды  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu r_1) = \mathcal{A}(r_2)$ . Что касается фазы  $\Psi$ , то ее целесообразно представить в виде  $\Psi(r) = \Psi_1(\mu r_1)/\mu = \Psi_1(r_2)/\mu$  с тем, чтобы градиент фазы, т. е. волновой вектор  $\nabla \Psi = \nabla_1 \Psi_1(\mu r_1)/\mu = \nabla_2 \Psi_1(r_2)$ , тоже был медленной функцией координат (здесь  $\nabla_{1,2} \equiv \partial/\partial r_{1,2}$ ). Таким образом, мы приходим к представлению поля в виде произведения медленной амплитуды на быстро осциллирующую экспоненту:

$$u = \mathcal{A}(\mu r_1) e^{i\Psi(\mu r_1)/\mu} = \mathcal{A}(r_2) e^{i\Psi_1(r_2)/\mu}. \quad (1.8')$$

Согласно (1.8'), решение волновой задачи сводится к отысканию двух функций  $\mathcal{A}$  и  $\Psi_1$ . Подставляя (1.8') в уравнение (1.7), получим

$$\Delta_2 u + \frac{n^2}{\mu^2} u \equiv \left\{ \frac{1}{\mu^2} [n^2 - (\nabla_2 \Psi_1)^2] \mathcal{A} + \right. \\ \left. + \frac{i}{\mu} [2 \nabla_2 \mathcal{A} \nabla_2 \Psi_1 + \mathcal{A} \Delta_2 \Psi_1] + \Delta_2 \mathcal{A} \right\} e^{i\Psi_1/\mu} = 0. \quad (1.8'')$$

Распространенный прием нахождения  $\mathcal{A}$  и  $\Psi_1$  состоит в том, чтобы разложить амплитуду  $\mathcal{A}$  в ряд по степеням малого параметра  $\mu$ , представив поле (1.8') в виде *лучевого ряда*<sup>1)</sup>

$$u(r_2) = e^{i\Psi_1(r_2)/\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{i}\right)^m \mathcal{A}_m(r_2) \quad (1.9)$$

(мнимая единица при  $\mu$  вводится для упрощения выкладок). Подстановка ряда (1.9) в уравнение (1.8'') и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $\mu$  приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} (\mu^{-2}): \quad & (\nabla_2 \Psi_1)^2 = n^2, \\ (\mu^{-1}): \quad & 2(\nabla_2 \mathcal{A}_0 \nabla_2 \Psi_1) + \mathcal{A}_0 \Delta_2 \Psi_1 = 0, \\ (\mu^0): \quad & 2(\nabla_2 \mathcal{A}_1 \nabla_2 \Psi_1) + \mathcal{A}_1 \Delta_2 \Psi_1 = -\Delta_2 \mathcal{A}_0, \\ & \dots \dots \dots \\ (\mu^{m-1}): \quad & 2(\nabla_2 \mathcal{A}_m \nabla_2 \Psi_1) + \mathcal{A}_m \Delta_2 \Psi_1 = -\Delta_2 \mathcal{A}_{m-1} \end{aligned} \quad (1.10)$$

(слева указаны соответствующие степени  $\mu$ ).

<sup>1)</sup> Возможны и другие способы вывода уравнений геометрической оптики — при помощи континуальных интегралов [34, 35, 146], при помощи усредненного лагранжиана [36, 95, 84, 23] и др. Мы выбираем здесь наиболее простой и наглядный путь с использованием разложения амплитуды по степеням  $\mu$ , что подсказано наличием степеней этого параметра в уравнении (1.8'').

Если вернуться в этих уравнениях к размерным переменным  $x, y, z$ , а фазу  $\Psi = \Psi_1/\mu$  обозначить  $k_0\psi$ , то уравнения (1.10) примут вид

$$(\nabla\psi)^2 = n^2, \tag{1.11}$$

$$2(\nabla\mathcal{A}_0\nabla\psi) + \mathcal{A}_0\Delta\psi = 0,$$

$$2(\nabla\mathcal{A}_1\nabla\psi) + \mathcal{A}_1\Delta\psi = -L\Delta\mathcal{A}_0, \tag{1.12}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2(\nabla\mathcal{A}_m\nabla\psi) + \mathcal{A}_m\Delta\psi = -L\Delta\mathcal{A}_{m-1}.$$

Функцию  $\psi$  принято называть *эйконалом*, а уравнение (1.11), которому подчиняется  $\psi$ , — *уравнением эйконала*<sup>1)</sup>. Эйконал  $\psi$  имеет размерность длины и называется еще *оптическим путем* волны. Уравнения для амплитудных коэффициентов  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots$  называют *уравнениями переноса* нулевого, первого и т. д. приближений.

К решению уравнений (1.11) и (1.12) и сводится определение поля в приближении геометрической оптики. Эти уравнения проще, чем исходное уравнение Гельмгольца (1.1): во-первых, это уравнение в частных производных *первого* порядка, а во-вторых, их решение сводится к решению *обыкновенных* дифференциальных уравнений (см. §§ 2 и 3).

**3. Разложение поля в ряд по обратным степеням волнового числа.** Уравнения эйконала и переноса можно также получить при помощи формального разложения поля по обратным степеням размерного параметра — волнового числа  $k_0$ :

$$u(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(r)}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi(r)}. \tag{1.13}$$

Такую форму лучевого ряда называют *дебаевским разложением*, так как впервые оно было предложено П. Дебаем [14].

Если подставить (1.13) в уравнение (1.1) и приравнять нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k_0$ , то мы придем к уравнению эйконала (1.11) и к уравнениям переноса для величин  $A_m$ , отличающихся от уравнений (1.12) только отсутствием коэффициента  $L$  в правых частях:

$$2(\nabla A_0\nabla\psi) + A_0\Delta\psi = 0, \tag{1.14'}$$

$$2(\nabla A_1\nabla\psi) + A_1\Delta\psi = -\Delta A_0, \tag{1.14''}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$2(\nabla A_m\nabla\psi) + A_m\Delta\psi = -\Delta A_{m-1}. \tag{1.14'''}$$

<sup>1)</sup> У. Гамильтон использовал для функции  $\psi$  термин «характеристическая функция» [1]. Название эйконал (от греческого εἰκων — изображение) ввел Х. Брунс [3, 24]. Аналогом эйконала в механике является действие [4, 5]. Величина  $\Psi = k_0\psi$  определяет фазу поля в нулевом приближении геометрической оптики. Высшие члены разложения (1.9) дают к этой фазе небольшие поправки порядка  $\mu^m, m=1, 2, \dots$

Это означает, что коэффициенты  $\mathcal{A}_m$  ряда (1.9) и коэффициенты  $A_m$  ряда (1.13) связаны между собой соотношением

$$A_m = \mathcal{A}_m / L^m. \quad (1.15)$$

В то время, как все коэффициенты  $\mathcal{A}_m$  имеют одинаковую размерность, совпадающую с размерностью самого поля  $u$  (поскольку в (1.9) разложение ведется по безразмерному параметру  $\mu$ ), размерности амплитуд  $A_m$  неодинаковы:  $[A_m] = [u] / L^m$ .

Хотя разложения (1.9) и (1.13) эквивалентны, использование безразмерного параметра  $\mu = 1/kL$  имеет определенные методические преимущества. Дело в том, что малость  $\mu$ , необходимая для применимости лучевого метода, может быть достигнута не только за счет увеличения  $k$  (уменьшения длины волны), но и за счет увеличения  $L$ , т. е. при переходе к более плавному изменению свойств среды. При формальном разложении по степеням  $1/k_0$  эта сторона вопроса остается в тени.

В то же время дебаевское разложение обеспечивает более лаконичную форму записи уравнений. В дальнейшем мы будем пользоваться преимущественно дебаевским разложением (1.13). Заметим, что при качественном анализе тех или иных задач полезно помнить, что замена  $k_0$  на  $k_0 L = \mu^{-1}$  формально переводит ряд (1.13) в (1.9).

**4. Начальные условия для эйконала и амплитуды.** Рассмотрим некоторую исходную поверхность  $Q$ , уравнения которой запишем в параметрической форме:

$$r = r^0(\xi, \eta), \quad (1.16)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — криволинейные координаты на  $Q$ . В частном случае, когда поверхностью  $Q$  является плоскость  $z = 0$ , в качестве  $\xi$  и  $\eta$  можно взять координаты  $x^0$  и  $y^0$  на этой плоскости.

Пусть на поверхности  $Q$  задано начальное поле  $u^0(\xi, \eta)$ , представленное в виде ряда, аналогичного (1.13):

$$u^0(\xi, \eta) = \sum \frac{A_m^0(\xi, \eta)}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi^0(\xi, \eta)} \quad (1.17)$$

(верхним индексом «0» мы обозначаем начальные значения). Сама форма записи начального поля определяет начальные значения эйконала  $\psi$  и амплитуд  $A_m$ :

$$\psi|_Q = \psi^0(\xi, \eta), \quad A_m|_Q = A_m^0(\xi, \eta). \quad (1.18)$$

Во многих случаях, например, в задаче о падении плоской волны на неоднородную среду, задана только амплитуда нулевого приближения, а остальные амплитуды равны нулю:

$$A_0^0 = A_0^0(\xi, \eta), \quad A_m^0 = 0 \quad (m \geq 1). \quad (1.19)$$

В задаче же об отражении волн от границы раздела двух сред



отличны от нуля, вообще говоря, все амплитуды  $A_m^0$ , соответствующие преломленным и отраженным волнам, даже если у падающей волны  $A_m^0 = 0$  ( $m \geq 1$ ). Начальные значения для  $A_m$  в этом случае не задаются, а определяются из граничных условий (см. § 5).

**5. Асимптотический характер лучевого ряда.** Оба разложения (1.9) и (1.13) обычно представляют собой асимптотические ряды. Для асимптотических рядов разность между точным решением  $u$  и конечной суммой лучевого ряда

$$u_M = e^{i\Psi_1/\mu} \sum_{m=0}^M \left(\frac{\mu}{i}\right)^m \mathcal{A}_m = e^{ik_0\psi} \sum_{m=0}^M \frac{A_m}{(ik_0)^m} \quad (1.20)$$

убывает при  $\mu \rightarrow 0$  как  $\mu^{M+1}$  [37, 38]:

$$|u - u_M|_{\mu \rightarrow 0} = O(\mu^{M+1}). \quad (1.21)$$

Условие  $\mu \ll 1$  связано с малостью длины волны  $\lambda$  по сравнению с характерным масштабом задачи  $L$ , и поэтому говорят, что лучевое разложение дает *коротковолновую асимптотику* поля. Иногда говорят также о *высокочастотной асимптотике* поля, имея в виду, что малые  $\lambda$  отвечают высоким частотам:  $k = \omega n/c \gg L^{-1}$ .

При  $\mu \neq 0$  лучевые ряды, как правило, расходятся, т. е.  $|u - u_M| \rightarrow \infty$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Асимптотический характер разложений (1.9) и (1.13) доказан для многих задач. В общем случае такое доказательство еще не получено, и тогда лучевые ряды (1.9) и (1.13) служат формальным решением уравнения (1.1).

В подавляющем большинстве физических приложений ограничиваются рассмотрением лишь нулевого приближения геометрической оптики, полагая

$$u \approx u_0 = A_0 e^{ik_0\psi} = \mathcal{A}_0 e^{i\Psi_1/\mu} \quad (1.22)$$

( $\mathcal{A}_0 = A_0$  в силу (1.15)). Незначительное внимание, уделяемое в физической литературе высшим членам лучевого ряда, связано в первую очередь с трудностями вычислений этих членов (см. § 3).

В этих условиях интерес к высшим приближениям оправдан лишь тогда, когда они описывают весь эффект, например, отражение от слабых границ раздела (см. § 5) или отражение вблизи брестерского угла (см. § 12).

## § 2. Лучи и эйконал

**1. Метод характеристик.** Уравнение эйконала (1.11) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка и принадлежит к классу уравнений Гамильтона — Якоби.

В общем случае уравнение Гамильтона — Якоби записывается в виде

$$\mathcal{H} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}; q_1, q_2, \dots, q_n \right) = 0 \quad (2.1')$$

или

$$\mathcal{H}(p_j, q_j) = 0, \quad p_j = \frac{\partial \psi}{\partial q_j}. \quad (2.1'')$$

Здесь  $\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$  — искомая функция,  $q_j$  — произвольные координаты ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), а  $p_j$  — сопряженные им «импульсы».

Важнейшая особенность дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка состоит в том, что их решение сводится к интегрированию соответствующей характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений [19, 39]

$$\frac{dq_j}{\partial \mathcal{H} / \partial p_j} = - \frac{dp_j}{\partial \mathcal{H} / \partial q_j} = \frac{d\psi}{\sum_{j=1}^n p_j (\partial \mathcal{H} / \partial p_j)}. \quad (2.2)$$

Приравнявая отношения (2.2) дифференциалу вспомогательной независимой переменной  $d\tau$ , характеристическую систему можно записать также в форме<sup>1)</sup>

$$\frac{dq_j}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad (2.3)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}. \quad (2.5)$$

В теории дифференциальных уравнений решения  $q_j = q_j(\tau)$ ,  $p_j = p_j(\tau)$ ,  $\psi = \psi(\tau)$  характеристической системы (2.3) — (2.5) па-

<sup>1)</sup> Напомним, как получаются характеристические уравнения (2.2) или (2.3), (2.4). На гиперповерхности  $\mathcal{H}(p_j, q_j) = 0$  в фазовом пространстве  $\{p_j, q_j\}$  выполняется соотношение

$$d\mathcal{H} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j \right) = 0, \quad (2.6)$$

которому можно удовлетворить, если выполнены уравнения (2.3), (2.4) или, что то же, первое равенство в (2.2). Уравнение же (2.5) может быть получено дифференцированием  $\psi$  вдоль характеристики с учетом (2.3), (2.4).

зываются характеристической полосой [19, 39]. В физической литературе совокупность  $2n$  функций  $q_j = q_j(\tau)$ ,  $p_j = p_j(\tau)$  кратко называют *характеристикой* уравнения (2.1) <sup>1)</sup>.

Уравнения характеристик (2.3), (2.4) представлены в канонической гамильтоновой форме. Они были предложены У. Гамильтоном первоначально именно для решения задач о распространении лучей света, а затем перенесены в механику, где под величинами  $p_j$  и  $q_j$  в уравнениях (2.1), (2.3)—(2.5) понимают обобщенные импульсы и обобщенные координаты, а функции  $\mathcal{H}(p_j, q_j)$  называют гамильтонианом системы [2—4]. Мы также будем придерживаться этой терминологии, помня при этом, что в волновых задачах функция  $\mathcal{H}(p_j, q_j)$  лишена энергетического смысла.

Если  $q_j (j = 1, 2, 3)$  считать декартовыми координатами и положить  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ , то гамильтоновы уравнения характеристик (2.3)—(2.5) можно представить в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{p} = \nabla \psi. \quad (2.8)$$

Здесь и ниже под  $\partial f / \partial \mathbf{a}$  следует понимать вектор  $\nabla_{\mathbf{a}} f$  с компонентами  $\{\partial f / \partial a_i\}$ .

**2. Уравнения лучей и эйконал волны.** В геометрической оптике *лучом* принято называть пространственную проекцию  $q_j = q_j(\tau)$  характеристики уравнения эйконала (1.11). Характеристику  $q_j = q_j(\tau)$ ,  $p_j = p_j(\tau)$  в фазовом пространстве  $\{p_j, q_j\}$  для краткости также иногда называют *лучом*, а уравнения характеристик именуют при этом *уравнениями лучей*.

Как следует из метода характеристик, использование лучей сводит задачу определения эйконала к квадратурам. Действительно, если известно решение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau)$  уравнений лучей записанных, например, в форме (2.7), то интегрирование (2.8) дает

$$\psi = \psi^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} \mathbf{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \quad (2.9)$$

Здесь  $\psi^0 \equiv \psi(\tau^0)$  — начальное значение эйконала при  $\tau = \tau^0$  а интеграл вычисляется вдоль луча, т. е. при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau)$ .

Параметр  $\tau$ , изменяющийся вдоль луча и входящий в интеграл (2.9), легко связать с длиной дуги  $\sigma$  луча  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ . С одной стороны, из (2.7) имеем  $d\mathbf{r}^2 = (\partial \mathcal{H} / \partial \mathbf{p})^2 d\tau^2$ . С другой стороны

<sup>1)</sup> Учитывая, что сам эйконал  $\psi$  является характеристикой уравнения Гельмгольца (1.1), характеристики уравнения эйконала (1.11) называют часто *бихарактеристиками* [19].

$dr^2 = d\sigma^2$ . Следовательно,

$$d\tau = \frac{d\sigma}{|\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}|}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим частные случаи дифференциальных уравнений лучей, конкретизировав вид гамильтониана  $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ . Удобная форма записи лучевых уравнений отвечает уравнению эйконала (1.11), записанному в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{r})] = 0, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{p} = \nabla\psi$ . Тогда из (2.7) получим следующие уравнения лучей в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p}, \quad (2.12')$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla n^2(\mathbf{r}). \quad (2.12'')$$

Из (2.12') видно, что касательный к лучу вектор  $d\mathbf{r}/d\tau$  параллелен импульсу  $\mathbf{p}$ , т. е. градиенту эйконала  $\nabla\psi$ . Иными словами, в изотропной среде лучи ортогональны поверхностям равного эйконала  $\psi = \text{const}$ , т. е. волновым фронтам.

Для эйконала  $\psi$  на основании (2.9) получаем

$$\psi = \psi^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} p^2 d\tau = \psi^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} n^2[\mathbf{r}(\tau)] d\tau, \quad (2.13)$$

где учтено, что  $p^2 = n^2$ . Для гамильтониана (2.11) параметр  $\tau$  связан с длиной дуги луча соотношением

$$d\tau = \frac{d\sigma}{p} = \frac{d\sigma}{n}, \quad (2.14)$$

следующим из (2.10). Поэтому формула (2.13) эквивалентна более привычному выражению

$$\psi = \psi^0 + \int_{\sigma^0}^{\sigma} n d\sigma, \quad (2.15)$$

где  $d\sigma$  — элемент длины дуги луча.

Другая форма записи лучевых уравнений отвечает гамильтониану

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = p - n(\mathbf{r}) = 0, \quad p = \sqrt{p^2}. \quad (2.16)$$

В этом случае  $\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p} = \mathbf{p}/p$ , так что  $|\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}| = 1$  и параметр  $\tau$ , согласно (2.10), совпадает с длиной дуги  $\sigma$ :  $\tau = \sigma$ . Уравнения лу-

чей, соответствующие (2.16), находятся из (2.7) и имеют вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \frac{\mathbf{p}}{n}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \nabla n, \quad (2.17)$$

при этом эйконал  $\psi$  определяется по формуле (2.15).

Введя единичный вектор  $\mathbf{l} = \mathbf{p}/p = \mathbf{p}/n$ , касательный к лучу, уравнения (2.17) можно записать иначе:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{l}, \quad \frac{d\mathbf{l}}{d\sigma} = \frac{\nabla n}{n} - \mathbf{l} \left( \frac{\nabla n}{n} \mathbf{l} \right) \equiv \nabla_{\perp} \ln n, \quad (2.18)$$

где учтено, что  $\frac{dn}{d\sigma} = \mathbf{l} \nabla n$ , и принято обозначение  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{l}(\mathbf{l} \nabla)$  для поперечного (по отношению к лучу) градиента. Этой форме лучевых уравнений также отвечает эйконал (2.15).

Систему дифференциальных уравнений лучей (2.12), (2.17) или (2.18) можно записать в виде одного уравнения второго порядка, если исключить импульс  $\mathbf{p}$  или орт  $\mathbf{l}$ . Соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2 \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\sigma} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right) = \nabla n \quad (2.19)$$

и в такой форме часто встречаются в литературе<sup>1)</sup>. Первое из уравнений (2.19) аналогично ньютоновскому уравнению движения материальной точки в силовом поле  $U(\mathbf{r})$  [4]:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}).$$

Эта аналогия позволяет переносить результаты траекторных расчетов из механики в геометрическую оптику и обратно.

**3. Кривизна и кручение луча.** Определим кривизну  $K$  и кручение  $\kappa$  луча в неоднородной среде. Для этого воспользуемся формулами Серре — Френе [40], которые описывают эволюцию сопровождающего трехгранника  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{b}$  вдоль луча:

$$\frac{d\mathbf{l}}{d\sigma} = K\mathbf{v}, \quad (2.20')$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} = -K\mathbf{l} - \kappa\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} = \kappa\mathbf{v}. \quad (2.20'')$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — орт главной нормали к лучу,  $\mathbf{b} = [\mathbf{l}, \mathbf{v}]$  — орт бинормали.

Из сравнения (2.20') и (2.18) следует, что главная нормаль к лучу  $\mathbf{v}$  параллельна вектору  $\nabla_{\perp} \ln n$ :

$$K\mathbf{v} = \nabla_{\perp} \ln n = \frac{\nabla_{\perp} n}{n} = \left[ \mathbf{l} \left[ \frac{\nabla n}{n} \mathbf{l} \right] \right] = \frac{\nabla n}{n} - \mathbf{l} \left( \mathbf{l} \frac{\nabla n}{n} \right). \quad (2.21)$$

<sup>1)</sup> Эти уравнения лучей отвечают лагранжевой форме уравнений движения в механике.

Согласно (2.21), луч в неоднородной среде изгибается в сторону увеличения показателя преломления<sup>1)</sup>. Кривизна луча равна

$$K = \left| \left[ \mathbf{l} \left[ \frac{\nabla n}{n} \mathbf{l} \right] \right] \right| = \left| \left[ \frac{\nabla n}{n} \mathbf{l} \right] \right| = \left| \frac{\nabla n}{n} \right| \sin \theta, \quad (2.22)$$

где  $\theta$  — острый угол между лучом (ортом  $\mathbf{l}$ ) и вектором  $\nabla n$ . Радиус кривизны луча  $\rho$  определяется величиной, обратной к (2.22):  $\rho = 1/K$ . Очевидно, в однородной среде ( $n = \text{const}$ ,  $\nabla n = 0$ ) кривизна лучей равна нулю, т. е. лучи представляют собой прямые линии.

Нормаль  $\mathbf{v}$  и бинормаль  $\mathbf{b}$  можно выразить через  $\mathbf{l}$ ,  $n$  и  $\nabla n$  при помощи (2.21):

$$\mathbf{v} = \frac{1}{K} \nabla_{\perp} \ln n, \quad \mathbf{b} = [\mathbf{l}\mathbf{v}] = \frac{1}{K} \left[ \mathbf{l} \frac{\nabla n}{n} \right] = \frac{\text{rot } \mathbf{l}}{K}. \quad (2.23)$$

В последнем равенстве учтено соотношение

$$\text{rot } \mathbf{l} = \left[ \mathbf{l} \frac{\nabla n}{n} \right], \quad (2.24)$$

которое вытекает из условия

$$\text{rot } (\mathbf{l}n) = \text{rot } \mathbf{p} = \text{rot } \nabla \psi = 0.$$

Согласно формулам (2.20'') кручение луча  $\kappa$  равно

$$\kappa = -\mathbf{b} \frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{b}}{d\sigma} = (\mathbf{v}, (\mathbf{l}\nabla) \mathbf{b}), \quad (2.25)$$

где  $d/d\sigma = (\mathbf{l}\nabla)$  — производная вдоль луча. Подставляя в (2.25) выражения (2.23) для  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{v}$ , получим

$$\kappa = \frac{1}{K} ((\mathbf{l}\nabla) \mathbf{b}, \nabla_{\perp} \ln n) = -\frac{1}{K} (\mathbf{b}, (\mathbf{l}\nabla) \nabla_{\perp} \ln n). \quad (2.26)$$

Если воспользоваться известной формулой векторного анализа для  $(\mathbf{l}\nabla) \mathbf{b}$ , то (2.25) можно преобразовать к виду

$$2\kappa = \mathbf{v} \text{rot } \mathbf{v} + \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{b} \quad (2.27)$$

(эта формула нам понадобится в гл. III).

Кручение  $\kappa$  обращается в нуль для лучей, являющихся плоскими кривыми, как это имеет место в однородных, плоско-слоистых и сферически-слоистых средах, а также в двумерных задачах. Во всех остальных случаях, в том числе и в аксиально-симметричных средах, кручение лучей отлично от нуля, за исключением, быть может, некоторых выделенных направлений.

<sup>1)</sup> Напомним, что кривизна пространственной кривой всегда положительна,  $K > 0$ ; при этом положительное направление орта  $\mathbf{v}$  соответствует вогнутости кривой.

4. Начальные условия для лучей. Лучевые координаты. Дифференциальные уравнения лучей необходимо снабдить еще начальными условиями. Естественным начальным условием для траектории луча  $r = r(\tau)$  служит точка выхода луча<sup>1)</sup>

$$r(\tau^0) = r^0(\xi, \eta) \quad (2.28)$$

из поверхности  $Q$ , на которой заданы начальные значения (1.18) амплитуды и эйконала волны. Кроме точки выхода (2.28), необходимо еще задать направление выхода луча или, что то же самое, начальное значение импульса  $p$  на исходной поверхности  $Q$ .

Два уравнения относительно составляющих начального импульса  $p(\tau^0) = p^0(\xi, \eta)$  можно получить, продифференцировав закон распределения эйконала  $\psi(r^0) = \psi^0(\xi, \eta)$  по  $\xi$  и по  $\eta$ :

$$p^0 \frac{\partial r^0}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \xi}, \quad p^0 \frac{\partial r^0}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi^0}{\partial \eta}. \quad (2.29)$$

Третьим соотношением для определения компонент вектора  $p^0$  служит уравнение эйконала (1.11), записанное на начальной поверхности  $Q$ :

$$(p^0)^2 = n^2(r^0). \quad (2.30)$$

Три уравнения (2.29) и (2.30) позволяют найти три компоненты начального импульса  $p^0$ . В общем случае выражения для  $p_i^0$  весьма громоздки. Приведем эти значения для простейшего частного случая, когда эйконал  $\psi^0(\xi, \eta)$  задан на плоскости  $z = 0$ . Положив  $x^0 = \xi$ ,  $y^0 = \eta$ ,  $z^0 = 0$ , получаем

$$p_x^0 = \frac{\partial \psi^0}{\partial \xi}, \quad p_y^0 = \frac{\partial \psi^0}{\partial \eta}, \quad p_z^0 = \pm \sqrt{\varepsilon^0 - \left(\frac{\partial \psi^0}{\partial \xi}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi^0}{\partial \eta}\right)^2}. \quad (2.31)$$

Здесь  $\varepsilon^0 = n^2(r^0)$ , а выбор знака производится в соответствии с направлением распространения волны: берется знак «+», если волна движется в сторону положительных  $z$ , и знак «-» в противоположном случае.

Решение дифференциальных уравнений лучей (2.12), удовлетворяющее начальным условиям (2.28), (2.29), может быть представлено в виде

$$r = R(\xi, \eta, \tau), \quad p = P(\xi, \eta, \tau). \quad (2.32)$$

Здесь параметры  $\xi$  и  $\eta$  «нумеруют» лучи, покидающие поверхность  $Q$ , тогда как параметр  $\tau$  (или длина дуги  $\sigma$ ) указывает

<sup>1)</sup> В дальнейшем будут преимущественно использоваться уравнения лучей в форме (2.12). Переменная  $\tau$  не входит явным образом в правые части (2.12), и поэтому решение  $r(\tau)$  зависит фактически только от разности  $\tau - \tau^0$ . Это позволяет положить  $\tau^0 = 0$ , но мы не будем этого делать, считая, что  $\tau^0$  может быть произвольной гладкой функцией  $\xi$  и  $\eta$ .

положение точки на фиксированном луче. Совокупность величин  $\xi, \eta, \tau$  (или, что эквивалентно, — величин  $\xi, \eta, \sigma$ ) называют *лучевыми координатами* (рис. 2.1). В общем случае эти координаты не ортогональны<sup>1)</sup>.

5. Семейства лучей и фронтов. Уравнение  $r = R(\xi, \eta, \tau)$  в (2.32) определяет семейство (или конгруэнцию) лучей, которое порождается заданным распределением поля на исходной поверхности  $r = r^0(\xi, \eta)$  (рис. 2.1). Уравнение семейства лучей

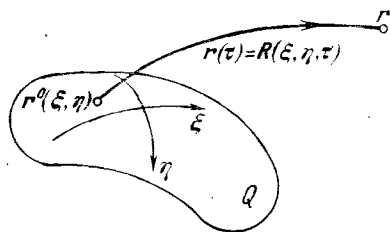


Рис. 2.1.

описывает связь лучевых координат с декартовыми. Если якобиан  $\mathcal{D} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}$  в рассматриваемой области отличен от нуля, то уравнение  $r = R(\xi, \eta, \tau)$  может быть однозначно разрешено относительно лучевых координат  $\xi, \eta, \tau$ , соответствующих данной точке наблюдения:  $\xi = \xi(r), \eta = \eta(r), \tau = \tau(r)$ .

Начальные условия для эйконала  $\psi = \psi^0(\xi, \eta)$  на исходной поверхности  $Q$  определяют в пространстве семейство фазовых фронтов, которое ортогонально семейству лучей  $r = R(\xi, \eta, \tau)$ . Система уравнений, определяющих семейство фазовых фронтов, имеет вид

$$\psi(\xi, \eta, \tau) = \psi^0(\xi, \eta) + \int_{\tau^0}^{\tau} n^2[R(\xi, \eta, \tau)] d\tau = \text{const} = \psi_0, \quad (2.33)$$

$$r = R(\xi, \eta, \tau).$$

Если при фиксированном  $\psi_0$  из первого уравнения (2.33) найти  $\tau = \tau_\phi(\xi, \eta, \psi_0)$  и подставить во второе, то для семейства фронтов получим следующее векторное уравнение:

$$r = R[\xi, \eta, \tau_\phi(\xi, \eta, \psi_0)] \equiv r_\phi(\xi, \eta, \psi_0). \quad (2.34)$$

Форма фазовых фронтов (2.34) может быть весьма разнообразной и сложной (см. § 4).

Следует специально отметить, что начальные условия (2.28), (2.29) ставятся одновременно для коллектива лучей, покидающих поверхность  $Q$ , а не для отдельных траекторий, как это делается в классической механике для траекторий отдельных материальных точек. Эта особенность начальных условий отражает волно-

<sup>1)</sup> Лучевыми координатами могут служить также величины  $\xi, \eta, \psi$  [21]. Тогда координатная поверхность  $\psi = \text{const}$  является волновым фронтом, а координатные линии  $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$  — лучами. Поэтому координата  $\psi$  ортогональна координатам  $\xi$  и  $\eta$ , тогда как  $\xi$  и  $\eta$  в общем случае неортогональны.



вой характер задачи: волновому полю соответствуют не одиночные траектории, а *семейства, пучки лучей* (для того чтобы подчеркнуть отличие от механики, в [3] даже введен термин «когерентные пучки лучей»). Из сказанного вытекает важность исследования семейства лучей — *лучевой картины*, так как это позволяет определить структуру волнового поля.

Семейство лучей  $r = R(\xi, \eta, \tau)$  в физическом пространстве может иметь, вообще говоря, достаточно сложный вид (ряд примеров рассмотрен в гл. II). Однако в фазовом пространстве  $\{p, r\}$  или  $\{p_j, q_j\}$  через каждую точку может проходить только одна фазовая траектория (2.32), т. е. фазовые траектории *не пересекаются*<sup>1)</sup>. Это свойство является, по существу, следствием теоремы единственности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями [39].

**6. Принцип Ферма.** Как известно, теория уравнений Гамильтона — Якоби (2.1) тесно связана с классическим вариационным исчислением [49]: решение уравнений вида (2.1) эквивалентно отысканию функций, которые отвечают экстремальным значениям функционала  $\int p(\partial \mathcal{H} / \partial p) d\tau$ , т. е. обращают в нуль его первую вариацию:

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} p \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right) d\tau \equiv \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} d\tau = 0. \quad (2.35)$$

В механике это соответствует принципу Гамильтона (принципу наименьшего действия), а в геометрической оптике — принципу Ферма.

В случае, когда гамильтониан  $\mathcal{H}(p, r)$  дается выражениями (2.11) или (2.16), принцип Ферма утверждает, что функционал

$$\psi(a, b) = \int_{r_a}^{r_b} n^2 d\tau = \int_{r_a}^{r_b} n d\sigma, \quad (2.36)$$

заданный на виртуальных лучах, соединяющих точки  $r_a$  и  $r_b$ , стационарен на траекториях, удовлетворяющих уравнениям (2.12) или (2.17). Условие стационарности можно записать в виде равенства нулю первой вариации эйконала:

$$\delta\psi(a, b) = 0. \quad (2.37)$$

<sup>1)</sup> Трехмерная гиперповерхность, образованная фазовыми траекториями (2.32), в шестимерном фазовом пространстве  $\{p, r\}$  определяет так называемое *лагранжево многообразие* [41]. При гладких начальных условиях это многообразие тоже является гладким. Все особенности лучевой картины (многолучевость, появление каустик, фокусов и т. д.) появляются при проектировании лагранжева многообразия  $\{P(\xi, \eta, \tau), R(\xi, \eta, \tau)\}$  на координатное пространство.

Уравнения лучей (2.19) выступают при этом как уравнения Эйлера для экстремалей функционала (2.36), являющихся геодезическими в неевклидовом пространстве с метрикой  $ds^2 = n^2(x, y, z) \times (dx^2 + dy^2 + dz^2)$  [29]. В рассматриваемом подходе принцип Ферма является следствием уравнения эйконала (4.11).

Разумеется, возможен и иной подход к построению метода геометрической оптики, основанный не на уравнении эйконала (4.11), а на принципе Ферма (2.37). Тогда уравнение эйконала (4.11) вытекает из принципа Ферма. Действительно, если интегралы в (2.36) вычислять вдоль экстремалей (лучей), то можно показать [19, 21], что  $\psi$  удовлетворяет уравнению эйконала (4.11).

В элементарных руководствах принцип Ферма до сих пор трактуется как требование минимальности времени, затрачиваемого волной на прохождение пути от  $r_a$  до  $r_b$ . Такая интерпретация пригодна только для недиспергирующих сред, поскольку при наличии дисперсии время распространения сигнала  $\Delta t(a, b)$  в общем случае не равно  $\text{const} \cdot \psi(a, b)$  (см. § 7).

Современная трактовка принципа Ферма (2.37) опирается на принцип Гюйгенса — Кирхгофа, т. е. на представление об *интерференции* волновых возмущений, порожденных первичной волной в точке  $a$  и попадающих в точку  $b$  по всем возможным виртуальным траекториям, не обязательно являющимся решениями уравнений характеристик. При такой интерференции вторичных волн существенный вклад в результирующее поле в точке  $b$  дадут только такие траектории, для которых набег фазы  $\psi(a, b)$  отличается от экстремального значения  $\bar{\psi}(a, b)$  не более, чем на  $\lambda_0/2$ . Вклад всех остальных траекторий будет пренебрежимо малым, так как при интерференции волн, сильно отличающихся друг от друга по фазе, происходит практически полное взаимное погашение вторичных волн. Таким образом, вследствие интерференции «выживают» только те виртуальные траектории, которые отвечают эйконалу  $\bar{\psi}(a, b)$ , т. е. подчиняются принципу Ферма.

Представление об интерференции волн, отвечающих различным траекториям, было использовано Р. Фейнманом при формулировке квантовой механики при помощи *континуальных интегралов* (интегралов по траекториям) [34, 35]. Мы не будем излагать технику интегрирования по траекториям, поскольку ниже она не понадобится, но используем (в § 10) представление об интерференции вторичных волн при формулировке достаточных условий применимости лучевого метода. Там же мы обсудим и вопрос о физическом содержании понятия «луч».

**7. Уравнения лучей в криволинейных координатах.** При конкретных расчетах приходится использовать дифференциальные уравнения лучей в тех или иных криволинейных координатах. Разумеется, переход к криволинейным координатам можно было бы проделать в уравнениях лучей (2.12) или (2.17), но этот путь

сопряжен с довольно громоздкими выкладками. Гораздо легче получить уравнения лучей, если использовать уравнения характеристик в канонической гамильтоновой форме (2.3), (2.4), которая не изменяется при переходе к произвольной криволинейной системе координат.

Наибольший интерес обычно представляют ортогональные криволинейные координаты  $q_i$ , для которых уравнение эйконала (1.11) можно представить в виде

$$\mathcal{H}(p_i, q_i) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{p_j^2}{h_j^2(q_i)} - n^2(q_i) \right\}, \quad (2.38)$$

где  $p_j = \partial\psi/\partial q_j$  — обобщенные компоненты импульса, а  $h_j$  — коэффициенты Ламе координат  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Подставляя гамильтониан (2.38) в уравнении характеристик (2.3), (2.4), получаем уравнения лучей в виде

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{1}{h_i^2} p_i, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = n \frac{\partial n}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} p_j^2, \quad (2.39)$$

при этом эйконал по-прежнему определяется формулой (2.13).

Если вместо величин  $p_i$  использовать компоненты импульса в криволинейных координатах

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{h_i} p_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \quad (2.40)$$

то уравнения лучей (2.39) принимают другой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{d\tau} &= \frac{1}{h_i} \tilde{p}_i, \\ \frac{d\tilde{p}_i}{d\tau} &= \frac{1}{h_i} n \frac{\partial n}{\partial q_i} + \frac{1}{h_i} \sum_{j \neq i}^3 \frac{\tilde{p}_j}{h_j} \left( \tilde{p}_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \tilde{p}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Иногда в уравнениях (2.41) удобно осуществить переход к направляющим косинусам луча в криволинейной системе координат по формуле

$$\tilde{p}_i = n \cos \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = 1. \quad (2.42)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{p}_i}{d\tau} &= -n \sin \alpha_i \frac{d\alpha_i}{d\tau} + \cos \alpha_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial n}{\partial q_j} \frac{dq_j}{d\tau} = \\ &= -n \sin \alpha_i \frac{d\alpha_i}{d\tau} + n \cos \alpha_i \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial n}{\partial q_j} \cos \alpha_j. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Запишем уравнения лучей (2.41) в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . Полагая  $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$  и учитывая, что  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$ , из (2.41) получаем

$$\frac{dr}{d\tau} = \tilde{p}_r, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \tilde{p}_\theta, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{p}_\varphi}{r \sin \theta},$$

$$\frac{d\tilde{p}_r}{d\tau} = n \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{p}_\theta^2 + \frac{1}{r} \tilde{p}_\varphi^2, \quad (2.44)$$

$$\frac{d\tilde{p}_\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \left( n \frac{\partial n}{\partial \theta} - \tilde{p}_r \tilde{p}_\theta + \operatorname{ctg} \theta \cdot \tilde{p}_\varphi^2 \right),$$

$$\frac{d\tilde{p}_\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( n \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \sin \theta \cdot \tilde{p}_r \tilde{p}_\varphi - \cos \theta \cdot \tilde{p}_\theta \tilde{p}_\varphi \right),$$

где  $\tilde{p}_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \tilde{p}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \tilde{p}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$  связаны уравнениями эйконала

$$\tilde{p}_r^2 + \tilde{p}_\theta^2 + \tilde{p}_\varphi^2 = n^2. \quad (2.45)$$

Используя (2.45), можно исключить  $\tilde{p}_\varphi$  из (2.44) и тем самым уменьшить число неизвестных. Эта система уравнений определяет траекторию луча  $r = r(\tau), \theta = \theta(\tau), \varphi = \varphi(\tau)$  и его направление  $\tilde{p}_r = \tilde{p}_r(\tau), \tilde{p}_\theta = \tilde{p}_\theta(\tau), \tilde{p}_\varphi = \tilde{p}_\varphi(\tau)$  в параметрической форме.

Система уравнений, аналогичная (2.44), в двумерном случае ( $\tilde{p}_\varphi = 0$ ) имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = \tilde{p}_r, \quad \frac{d\tilde{p}_r}{d\tau} = n \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r} \tilde{p}_\theta^2,$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \tilde{p}_\theta, \quad \frac{d\tilde{p}_\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \left( n \frac{\partial n}{\partial \theta} - \tilde{p}_r \tilde{p}_\theta \right). \quad (2.46)$$

Введя «угол преломления»  $\alpha$  по формулам

$$\tilde{p}_r = n \cos \alpha,$$

$$\tilde{p}_\theta = n \sin \alpha,$$

из (2.46) получим три уравнения

$$\frac{dr}{d\tau} = n \cos \alpha, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} n \sin \alpha,$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial n}{\partial \theta} \cos \alpha - \frac{\partial (nr)}{\partial r} \sin \alpha \right]. \quad (2.47)$$

Уравнение для  $d\theta/d\tau$  также можно исключить в силу условия (2.45). Если  $\alpha \neq \pi/2$ , то, поделив уравнения (2.47) на первое,

получим

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{nr} \left[ \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\partial (rn)}{\partial r} \frac{d\theta}{dr} \right]. \quad (2.48)$$

Эта система определяет траекторию луча в виде уравнения  $\theta = \theta(r)$ .

8. **Другие типы лучей.** Долгое время кроме «геометрооптических» не было известно никаких других лучей. Ситуация изменилась с появлением *геометрической теории дифракции*, предложенной Дж. Келлером [21, 32, 33, 73, 77], где наряду с обычными (геометрооптическими) лучами используются *дифракционные лучи*. Последние описывают дифракционные явления в области геометрической тени за препятствием. Известны два основных типа дифракционных лучей: *краевые лучи*, источниками которых служат ребра (кромки) и острия на телах (рис. 2.2), и *лучи соскальзывания* (*ползущие лучи*), которые «соскальзывают» с поверхности гладкого тела (рис. 2.3). Кроме того, специфический класс дифракционных лучей образуется при наличии преломляющей границы раздела — *дифракционные лучи боковой волны* [25, 73, 77] (рис. 2.4). Наконец, следует упомянуть *комплексные лучи* — лучи для волн с комплексным эйконалом, с помощью которых можно описать поле в области каустической тени, поле гауссова волнового пучка, поля поверхностных и вытекающих волн и др. (см., например, [42, 73, 445]).

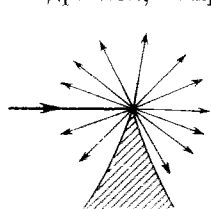


Рис. 2.2.

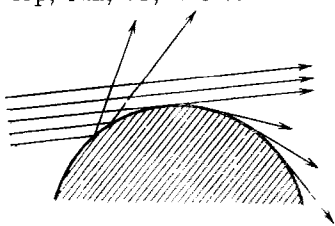


Рис. 2.3.

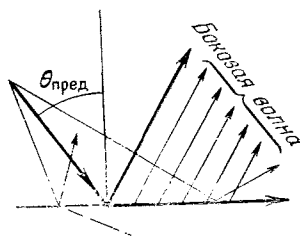


Рис. 2.4.

После того как лучи того или иного типа введены, с ними можно оперировать, как с обычными, геометрооптическими лучами. В частности, их траектории описываются уравнениями (2.12), а поле на этих лучах подчиняется законам геометрической оптики (см. также § 3). Границы области применимости различных форм лучевых методов могут быть установлены на основе критериев, обсуждаемых ниже, в § 10.

Особенности *пространственно-временных* лучей, возникающих в задачах распространения нестационарных волн, а также более общий случай лучей в анизотропных нестационарных средах с

временной и пространственной дисперсией подробно рассматриваются в §§ 7 и 25. Различные типы пространственно-временных лучей (комплексные, краевые и др.), которые связаны с *пространственно-временной геометрической теорией дифракции*, обсуждаются в [235].

### § 3. Амплитуда волны

1. **Формальное решение уравнения переноса для амплитуды нулевого приближения.** Уравнение переноса (1.14) содержит частные производные, но при помощи уравнений лучей оно может быть сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, величина  $(\nabla A_0 \nabla \psi)$  в (1.14) сводится к производной  $dA_0/d\tau$ :

$$(\nabla A_0 \nabla \psi) = \frac{dA_0}{d\sigma} |\nabla \psi| = \frac{dA_0}{d\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} n = \frac{dA_0}{d\tau}, \quad (3.1)$$

так как  $\nabla \psi = n l$ ,  $l \nabla = d/d\sigma$ ,  $d\tau = d\sigma/n$ . Тогда уравнение переноса принимает вид

$$2 \frac{dA_0}{d\tau} + A_0 \Delta \psi = 0, \quad (3.2)$$

или

$$\frac{dA_0^2}{d\tau} + A_0^2 \Delta \psi = \frac{dA_0^2}{d\tau} + A_0^2 \operatorname{div} \mathbf{p} = 0. \quad (3.3)$$

Интегрируя (3.3), получим

$$A_0^2(\tau) = A_0^2(\tau^0) \exp \left\{ - \int_{\tau^0}^{\tau} \operatorname{div} \mathbf{p} d\tau \right\}, \quad (3.4)$$

где  $A_0(\tau^0) \equiv A_0^0$  — начальное значение амплитуды волны, определяемое начальными условиями на поверхности  $Q$ .

Для вычисления величины  $\operatorname{div} \mathbf{p} = \Delta \psi$  в (3.4) воспользуемся известной формулой Лиувилля (см. [426]). В данном случае, когда система дифференциальных уравнений лучей  $d\mathbf{r}/d\tau = \mathbf{p}$  имеет зависящее от параметра  $\xi$  и  $\eta$  решение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \tau)$ , формула Лиувилля дает

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \frac{d}{d\tau} \ln \mathcal{D}(\tau), \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

— якобиан перехода от декартовых координат  $x, y, z$  к лучевым  $\xi, \eta, \tau$ . Согласно (3.6), якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  можно выразить через емшанное произведение трех векторов

$$r_{\xi} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}, \quad r_{\eta} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}, \quad r_{\tau} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau} = \mathbf{p}, \quad (3.7)$$

так что

$$\mathcal{D}(\tau) = ([r_{\xi} r_{\eta}] r_{\tau}) = r_{\xi} r_{\eta} r_{\tau} = r_{\xi} r_{\eta} p. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.5) в (3.4), окончательно находим

$$A_0 = A_0^0 \left[ \frac{\mathcal{D}(\tau^0)}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2} \equiv \frac{A_0^0}{\sqrt{\mathcal{J}}}. \quad (3.9)$$

Величину

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{D}(\tau)}{\mathcal{D}(\tau^0)} = \frac{r_{\xi} r_{\eta} p}{(r_{\xi} r_{\eta} p)|_{\tau=\tau^0}} = \frac{r_{\xi} r_{\eta} p}{(r_{\xi} r_{\eta} p)^0} \quad (3.10)$$

будем называть *расходимостью* лучей (геометрический смысл этого определения обсуждается ниже, в п. 3).

Если семейство лучей описывается уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \sigma)$ , где  $\sigma$  — длина дуги луча, то

$$\mathcal{D}(\tau) = r_{\xi} r_{\eta} r_{\tau} = r_{\xi} r_{\eta} r_{\sigma} \frac{d\sigma}{d\tau} = n \mathcal{D}(\sigma), \quad (3.11)$$

и расходимость лучей равна

$$\mathcal{J} = \frac{n \mathcal{D}(\sigma)}{n^0 \mathcal{D}(\sigma^0)} = \frac{n r_{\xi} r_{\eta} l}{n^0 (r_{\xi} r_{\eta} l)^0}, \quad (3.12)$$

где  $n^0$  — начальное значение показателя преломления (при  $\sigma = \sigma^0$ ), а  $l = p/n = r_{\sigma}$  — орт, касательный к лучу.

2. Лучи и направление потока энергии. Непосредственно из уравнения Гельмгольца (1.1) легко получить, что при вещественном показателе преломления  $n(\mathbf{r})$  величина

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2ik_0} (\mathbf{u}^* \nabla u - u \nabla u^*) \quad (3.13)$$

удовлетворяет закону сохранения

$$\operatorname{div} \mathbf{I} = 0. \quad (3.14)$$

Поэтому  $\mathbf{I}$  можно принять в качестве меры плотности потока энергии<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если пренебречь поляризационными эффектами и понимать под  $u$  напряженность электромагнитного поля, то для вектора Пойнтинга получим  $\mathbf{S} = c\mathbf{I}/8\pi$ . Для звуковых волн, если  $u$  — потенциал скорости, вектор плотности потока энергии (вектор Умова) равен  $\mathbf{S} = \rho \omega^2 \mathbf{I}/2c$ , где  $\rho$  — плотность жидкости, а  $c$  — скорость звука. В квантовой механике  $\mathbf{I}$  представляет собой (при соответствующей нормировке) плотность потока вероятности.

Подставляя в (3.13) геометрооптическое разложение (1.13) и предполагая вещественность всех амплитуд  $A_m$  (если  $A_0$  вещественно, то в силу уравнений переноса (1.14) вещественны и амплитуды всех последующих приближений), имеем

$$I = pA_0^2 + \frac{1}{k_0^2} [p(A_1^2 - 2A_0A_1) + A_1\nabla A_0 - A_0\nabla A_1] + \dots \quad (3.15)$$

Отсюда можно сделать важный вывод, что в нулевом приближении метода геометрической оптики *поток энергии направлен вдоль лучей*:

$$I \approx pA_0^2 \equiv I_0.$$

Поперечная к лучу составляющая потока энергии возникает только при учете первого и последующих приближений и, согласно (3.15), имеет второй порядок малости относительно  $1/k_0^1$ .

**3. Сохранение потока энергии в лучевой трубке.** В нулевом приближении геометрической оптики закон сохранения (3.14) принимает вид

$$\operatorname{div} I_0 = \operatorname{div} (pA_0^2) = 0, \quad (3.16)$$

что равносильно уравнению переноса (1.14'), поскольку  $p = \nabla\psi$  и  $\operatorname{div} p = \Delta\psi$ . При помощи (3.16) можно связать изменения амплитуды нулевого приближения  $A_0$  с сечением  $da$  бесконечно узкой лучевой трубки, образованной пучком близко идущих лучей (рис. 3.1). Проинтегрировав (3.16) по объему  $V$ , ограниченному лучевой трубкой, по теореме Остроградского — Гаусса имеем

$$\int_V \operatorname{div} I_0 dV = \oint_{\Sigma} I_0 da,$$

где  $\Sigma$  — поверхность, окружающая лучевую трубку. Интеграл по боковым стенкам трубки обращается в нуль, поскольку здесь  $da \perp p$  и  $I_0 da = 0$ , а интеграл по торцам дает

$$I_0 da = \text{const} = I_0^0 da^0. \quad (3.17)$$

Подставляя в (3.17)  $I_0 = A_0^2 p = A_0^2 n$ , получаем выражение для амплитуды нулевого приближения

$$A_0 = A_0^0(\xi, \eta) \sqrt{\frac{n^0 da^0}{nda}}. \quad (3.18)$$

<sup>1)</sup> Более строго следовало бы говорить о малости относительно безразмерного параметра  $\mu = 1/kL$ .



В одномерных задачах, когда  $da = da^0 = \text{const}$ ,

$$A_0 = A_0^0 \sqrt{\frac{n^0}{n}}, \quad (3.19)$$

т. е. амплитуда меняется обратно пропорционально  $\sqrt{n}$ . В однородной же среде ( $n = n^0 = \text{const}$ ) изменение амплитуды происходит только за счет изменения сечения лучевой трубки, т. е. за счет расходимости (или сходимости) лучей:

$$A_0 = A_0^0 \sqrt{\frac{da^0}{du}}. \quad (3.20)$$

Если общую формулу (3.18) записать в форме (3.9), т. е.  $A_0 = A_0^0 / \sqrt{\mathcal{F}}$ , то величина  $\mathcal{F}$  окажется равной произведению *собственно расходимости лучей*  $da/da^0$  на отношение  $n/n^0$ :

$$\mathcal{F} = \frac{nda}{n^0 da^0} \quad (3.21)$$

и заслуживает названия обобщенной расходимости. Для краткости, однако, будем называть  $\mathcal{F}$  просто расходимостью.

Из формулы (3.9), как и из (3.17) и (3.18), следует, что в нулевом приближении геометрической оптики амплитуда поля уменьшается вдоль луча, если расходимость лучей растет. Напротив, для сходящейся лучевой трубки амплитуда  $A_0$  возрастает вдоль луча.

Легко установить эквивалентность формул (3.21) и (3.10) или (3.12) для расходимости  $\mathcal{F}$ . Элемент объема лучевой трубки  $dV = dx dy dz = d\sigma da$ , если его выразить через  $\mathcal{D}(\tau)$  или  $\mathcal{D}(\sigma)$ , равен

$$dV = \mathcal{D}(\tau) d\xi d\eta d\tau = \mathcal{D}(\tau) d\xi d\eta \frac{d\sigma}{n} = \mathcal{D}(\sigma) d\xi d\eta d\sigma, \quad (3.22)$$

откуда имеем

$$da = \frac{dV}{d\sigma} = \frac{1}{n} \mathcal{D}(\tau) d\xi d\eta = \mathcal{D}(\sigma) d\xi d\eta. \quad (3.23')$$

Аналогично

$$da^0 = \frac{1}{n^0} \mathcal{D}(\tau^0) d\xi d\eta = \mathcal{D}(\sigma^0) d\xi d\eta. \quad (3.23'')$$

Подставляя (3.23) в (3.21), получим формулу, эквивалентную (3.10) или (3.12). Отметим попутно вытекающую из (3.23) связь якобианов  $\mathcal{D}(\tau)$  и  $\mathcal{D}(\sigma)$  с удельным нормальным сечением лучевой трубки  $da/d\xi d\eta$ :

$$\mathcal{D}(\sigma) = \frac{1}{n} \mathcal{D}(\tau) = \frac{da}{d\xi d\eta}. \quad (3.24)$$

4. Амплитуда поля, создаваемого точечным источником в неоднородной среде. Начальные условия в этом случае зададим на сфере малого радиуса  $R_0 \ll L$ , в пределах которой среду еще можно считать однородной. Пусть источник возбуждает направленную сферическую волну с нормированной диаграммой направленности  $G(\theta, \varphi)$ , где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярный и азимутальный углы, которые мы используем в качестве лучевых координат. Тогда

$$A^0(\theta, \varphi) = B^0 \frac{G(\theta, \varphi)}{R_0}, \quad (3.25)$$

где  $B^0$  — коэффициент, характеризующий силу источника. Подставляя (3.25) в формулу (3.18) и учитывая, что на малых расстояниях от источника  $da^0 = R_0^2 d\Omega$ , где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  — элемент телесного угла, для амплитуды  $A$  получаем выражение, не зависящее от  $R_0$ :

$$A = B^0 G(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{n^0}{n} \frac{d\Omega}{da}}. \quad (3.26')$$

Этой формуле можно придать и другой вид, если заменить, в соответствии с (3.24),  $da$  на  $\mathcal{D}(\tau) d\theta d\varphi / n$ :

$$A = B^0 G(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{n^0 \sin \theta}{\mathcal{D}(\tau)}}. \quad (3.26'')$$

5. Результирующее поле в нулевом приближении лучевого метода. Объединяя выражение (2.9) для эйконала с формулой (3.9) для амплитуды нулевого приближения, запишем результирующее поле вдоль фиксированного луча в виде

$$u(\tau) = \frac{u^0(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{J}}} \exp \left( ik_0 \int_{\tau^0}^{\tau} n^2 d\tau \right), \quad (3.27)$$

где

$$u^0(\xi, \eta) = A_0^0(\xi, \eta) \exp [ik_0 \psi^0(\xi, \eta)] \quad (3.28)$$

— начальное поле. Согласно (3.27), поле на луче зависит от значений начального поля только в точке  $r^0(\xi, \eta)$  выхода луча из поверхности  $Q$ , что отражает локальный характер передачи волновых возмущений, описываемых нулевым приближением геометрической оптики. Всякого рода нелокальные явления, т. е. отступления от законов геометрической оптики, принято называть *дифракционными*. Границы применимости геометрикооптического принципа локальности мы обсудим в § 10.

В большинстве приложений желательно знать поле не вдоль фиксированных лучей, а в фиксированной точке  $r$ . Для этого,

прежде всего, нужно найти луч, приходящий в эту точку, т. е. нужно разрешить векторное уравнение лучей

$$R(\xi, \eta, \tau) = r, \quad (3.29)$$

которое равносильно системе трех скалярных уравнений, относительно лучевых параметров  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$ . Соответствующие значения  $\xi(r)$  и  $\eta(r)$  определяют точку выхода луча из начальной поверхности  $Q$ ,

$$r^0 = r^0[\xi(r), \eta(r)], \quad (3.30)$$

тогда как величина  $\tau(r)$  характеризует «расстояние» от точки выхода луча  $r^0$  до интересующей нас точки  $r$ . После этого поле в нулевом приближении лучевого метода вычисляется по формуле (3.27).

Может оказаться, что уравнение (3.30) допускает несколько наборов параметров  $\xi_v(r)$ ,  $\eta_v(r)$ ,  $\tau_v(r)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ). Это означает, что в данную точку наблюдения  $r$  приходят *несколько* лучей, вышедших из разных точек исходной поверхности  $Q$ . Каждому из этих лучей отвечает свои значения амплитуды и фазы, определяемые по формулам (2.9) и (3.9), в которых нужно положить  $\xi = \xi_v(r)$ ,  $\eta = \eta_v(r)$ ,  $\tau = \tau_v(r)$ . Результирующее поле дается тогда суммой

$$u(r) = \sum_v \frac{u^0(\xi_v, \eta_v)}{V|\mathcal{F}_v|} \exp \left\{ ik_0 \int_{r_v^0}^{\tau_v} n^2 d\tau + \delta\Psi_v \right\}, \quad (3.31)$$

где значения  $\mathcal{F}_v$ ,  $\xi_v$ ,  $\eta_v$ ,  $\tau_v$  отвечают  $v$ -му лучу. Для полноты в (3.31) добавлена дополнительная фаза  $\delta\Psi_v$ , которая связана с изменением знака расходимости лучей  $\mathcal{F}$  на каустике и называется каустическим сдвигом фазы (см. § 4, п. 7).

Резюмируя, изложим кратко общую схему вычисления поля в нулевом приближении геометрической оптики:

- а) Решаются уравнения лучей (2.12) с начальными условиями, заданными на исходной поверхности  $Q$ .
- б) Находятся лучи, приходящие в точку наблюдения  $r$ , т. е. находятся параметры  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$  из (3.29).
- в) Определяются эйконалы (по формуле (2.9)) и амплитуды (по формуле (3.9)) с начальными значениями, отвечающими точкам выхода лучей.
- г) Определяется каустический сдвиг фазы  $\delta\Psi$  по формулам п. 7, § 4.
- д) Рассчитывается полное поле по формуле (3.31).

**6. Амплитуды высших приближений.** Уравнение переноса (1.14''') для амплитуды  $A_m$  можно записать в форме

$$2 \frac{dA_m}{d\tau} + A_m \frac{d \ln \mathcal{D}(\tau)}{d\tau} = -\Delta A_{m-1}. \quad (3.32)$$

Легко получить решение этого уравнения в виде квадратуры:

$$A_m = \frac{A_m^0}{\sqrt{\mathcal{F}}} - \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{D}(\tau)}} \int_{\tau^0}^{\tau} \Delta A_{m-1}(\tau') \sqrt{\mathcal{D}(\tau')} d\tau'. \quad (3.33)$$

При вещественном значении  $A_0$  все величины  $A_m$  тоже вещественны. Анализ высших приближений для однородной среды проведен в [20, 33].

Из (3.33) следует, что в высших приближениях геометрической оптики *нарушается локальность* передачи волновых возмущений. Действительно, наличие в формуле (3.33) лапласиана  $\Delta A_{m-1}$  означает, что  $A_m$  зависит не только от значений  $A_{m-1}$  непосредственно на луче, но и от значений  $A_{m-1}$  в окрестности луча. Амплитуды высших приближений описывают, следовательно, *дифракционные эффекты*.

**7. Учет слабого поглощения.** В поглощающей среде квадрат коэффициента преломления  $n^2 = \epsilon$  комплексен:  $n^2 = \epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$  (в электродинамике  $\epsilon$  — комплексная диэлектрическая проницаемость среды). Если поглощение слабое,  $\epsilon'' \ll \epsilon'$ , то его можно учесть при помощи небольшого видоизменения обычной схемы вычислений. Для этого следует считать  $\epsilon''$  малой величиной порядка  $\mu \ll 1$ . В этом случае с точностью до членов порядка  $\mu^2$  для  $n = \sqrt{\epsilon} = n' + in''$  имеем

$$n' \approx \sqrt{\epsilon'}, \quad n'' = \frac{\epsilon''}{2\sqrt{\epsilon'}}. \quad (3.34)$$

При  $\epsilon'' \sim \mu \ll 1$  среди членов первого порядка малости в уравнениях (1.10) появится слагаемое  $\epsilon'' A_0$ . При переходе от безразмерных переменных к размерным это приведет к появлению в уравнении переноса для амплитуды нулевого приближения нового слагаемого  $k_0 \epsilon'' A_0$ :

$$2(\nabla A_0 \nabla \psi) + A_0 \Delta \psi + k_0 \epsilon'' A_0 = 0. \quad (3.35)$$

Уравнение же эйконала примет вид

$$(\nabla \psi)^2 = \epsilon'. \quad (3.36)$$

Уравнение переноса (3.35) можно вывести и при помощи дебаевской процедуры, искусственно сделав  $\epsilon''$  величиной порядка  $1/k_0$ . Для этого нужно положить  $\epsilon'' = \kappa/k_0$ , считая  $\kappa$  величиной нулевого порядка относительно  $1/k_0$ . После приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $k_0$  в уравнении (1.14) появится слагаемое  $\kappa A_0 = k_0 \epsilon'' A_0$ , т. е. получится уравнение (3.35).

Наличие в уравнении (3.35) члена  $k_0 \epsilon'' A_0$  приводит к появлению в решении (3.9) дополнительного множителя, описываю-

щего ослабление волны:

$$A_0 = \frac{A_0^0(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{F}}} \mathcal{P}, \quad (3.37)$$

где

$$\mathcal{P} = \exp \left\{ -\frac{k_0}{2} \int_{\tau^0}^{\tau} \varepsilon'' d\tau \right\} = \exp \left\{ -k_0 \int_{\sigma^0}^{\sigma} n'' d\sigma \right\}. \quad (3.38)$$

Результирующее поле в нулевом приближении оказывается равным

$$u = \frac{u^0(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{F}(\tau)}} \exp \left( ik_0 \int_{\tau^0}^{\tau} \varepsilon' d\tau - \frac{k_0}{2} \int_{\tau^0}^{\tau} \varepsilon'' d\tau \right). \quad (3.39)$$

В случае сильного поглощения следует использовать приближение комплексной геометрической оптики [42], которое учитывает влияние поглощения на траекторию луча.

## § 4. Каустики

**1. Основные свойства.** Каустическими поверхностями или, проще, *каустиками* называют огибающие семейства лучей. На самой каустике якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  обращается в нуль:

$$\mathcal{D}(\tau)|_{\text{на каустике}} = 0. \quad (4.1)$$

Это отвечает основному свойству огибающей: при  $\mathcal{D}(\tau) = 0$  уравнение семейства лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, \eta, \tau)$  не может быть однозначно разрешено относительно  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$ , что соответствует бесконечному сближению лучей (рис. 4.1).

Положение каустик определяется из уравнения семейства лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, \eta, \tau)$  и условия (4.1), т. е. определяется системой уравнений

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\xi, \eta, \tau), \quad \mathcal{D}(\xi, \eta, \tau) = 0, \quad (4.2)$$

где учтено, что якобиан (3.6) является функцией координат  $\xi$  и  $\eta$ . Если исключить из (4.2) параметр  $\tau$ , то уравнения каустики могут быть записаны в векторной параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}[\xi, \eta, \tau(\xi, \eta)] \equiv \mathbf{r}_k(\xi, \eta), \quad (4.3)$$

где  $\tau = \tau(\xi, \eta)$  находится из уравнения  $\mathcal{D}(\xi, \eta, \tau) = 0$ . Согласно (4.3), положение точки на каустике можно описать теми же координатами  $\xi$  и  $\eta$ , что и на начальной поверхности. Иногда, правда, удобно ввести на каустике «свои» криволинейные координаты

$\alpha$  и  $\beta$ , которые вместе с параметром  $\gamma$ , характеризующим удаление от каустики, задают положение точки в пространстве. Такие координаты называются *каустическими*.

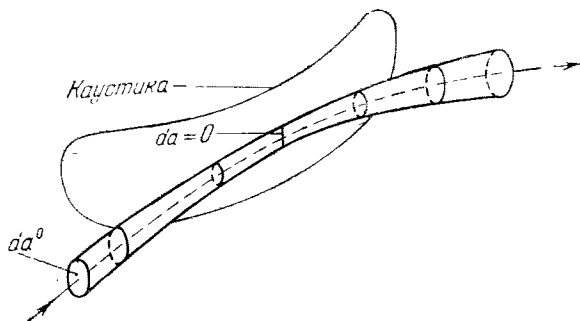


Рис. 4.1.

В одномерных задачах, где поле описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon(z) u = 0, \quad (4.4)$$

аналогом каустик являются точки поворота  $z = z_n$ , в которых коэффициент  $\varepsilon(z)$  обращается в нуль. Название «точки поворота» пришло из механики: при  $\varepsilon(z) = 0$ , когда кинетическая энергия сравнивается с потенциальной, частица меняет направление движения. Траектории лучей в пространстве также имеют точки поворота (примеры семейств лучей с точками поворота приведены в гл. II).

Гладкие, без особых точек каустические поверхности называют *простыми* или *неособыми*. В окрестности простой каустики пересекаются два луча, касающиеся этой каустики (рис. 4.2, а). Наличие особенностей на каустиках — точек заострения, петель и т. д. — сопровождается появлением большего числа лучей. Так, в окрестности точки заострения, а именно — внутри клюва каустики (рис. 4.2, б), пересекаются три луча.

Всякий переход через неособый участок каустики отвечает рождению или исчезновению двух лучей, поскольку вещественные корни уравнения (3.29) при изменении  $r$  появляются парами. Рис. 4.2 иллюстрирует применение этого простого правила на примерах неособой каустики и каустики с одной точкой заострения.

Важная роль каустических поверхностей в волновых задачах определяется тем, что они характеризуют *семейство лучей в целом* и позволяют составить качественную картину поведения поля во всем пространстве. Если задать на каустической поверхности

направления касającychся ее лучей, то по форме каустики можно восстановить семейство лучей. Особенно просто восстанавливаются лучи в однородной среде — это прямые линии, касательные к каустике.

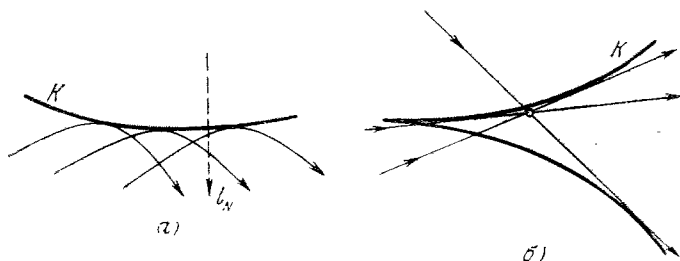


Рис. 4.2.

Области, куда лучи не проникают, — это области *каустической тени*. В приближении геометрической оптики зоне каустической тени соответствует нулевое поле. Разумеется, в действительности поле там отлично от нуля и имеет дифракционное происхождение (в простейшем случае поле в зоне тени экспоненциально убывает при удалении от каустики). При определенных условиях для его вычисления можно использовать комплексное обобщение геометрической оптики [42].

**2. Фокусировка волнового поля на каустиках.** В диапазоне волн видимого света фокусировку поля в окрестности каустики часто можно наблюдать визуально (световое пятно в фокусе линзы, солнечные блики на морском дне на мелководье и т. д.; ряд интересных примеров указан в [43]). В других диапазонах волн фокусировка поля на каустиках фиксируется приборами — акустическими или радиоприемниками и т. д.

При приближении точки наблюдения к каустике сечение лучевой трубки и связанная с ней расходимость лучей  $\mathcal{J} = \mathcal{D}/\mathcal{D}^0$  уменьшается (см. рис. 4.1). В силу (3.9) это приводит к возрастанию амплитуды нулевого приближения  $A_0$ . На самой каустике  $\mathcal{D}(\tau) = 0$ , вследствие чего  $A_0$  обращается в бесконечность. Амплитуды  $A_m$  высших приближений геометрической оптики ( $m \geq 1$ ) на каустике также обращаются в бесконечность и имеют на каустике особенности более высокого порядка, чем  $A_0$ , что вызвано наличием  $\Delta A_{m-1}$  в формуле (3.33).

Между тем уравнение Гельмгольца и другие исходные уравнения волновой теории не допускают бесконечных значений поля вне области, занятой источниками. Поэтому сингулярность (особенность) амплитуд  $A_0, A_1, \dots$  на каустике свидетельствует о *неприменимости* геометрикооптического решения на самих каустиках и в непосредственной их окрестности.

Существующие точные и приближенные решения волновой теории, пригодные при наличии каустик, показывают, что вблизи каустик действительно наблюдается концентрация (разбухание), или *фокусировка* поля<sup>1)</sup>, но, разумеется, значения поля всегда ограничены. В качестве примера на рис. 4.3 показано поведение

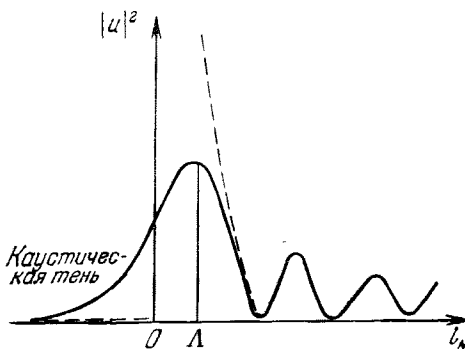


Рис. 4.3.

квадрата модуля результирующего поля  $|u|^2$  в окрестности простой каустики ( $l_N$  означает расстояние по нормали к каустике). В области света ( $l_N > 0$ ), где пересекаются два луча, происходит интерференция двух волн. По мере приближения к каустике геометрическое поле (штриховая кривая) устремляется в бесконечность, тогда как точная волновая функция (сплошная линия) остается конечной.

В области тени ( $l_N < 0$ ) поле экспоненциально убывает.

Явление фокусировки особенно сильно выражено в пределах некоторой конечной области, которую мы назовем каустической зоной. Грубой оценкой ширины каустической зоны простой каустики будем считать расстояние  $\Lambda$  от каустики до первого интерференционного максимума поля (см. рис. 4.3). В § 10 мы укажем простой способ вычисления ширины каустической зоны  $\Lambda$  и дадим оценки поля на каустике. Кроме того, в § 10 обсуждаются дополнительные вопросы, связанные с явлением фокусировки (индекс и фактор фокусировки, реальность каустик и др.).

**3. Классификация каустик на основе теории дифференцируемых отображений.** Упомянутые выше неособая (простая) каустика и каустика с одной точкой заострения (с «клювом») являются наиболее простыми типами каустик. Реальные каустики могут иметь значительно более сложную форму. Появления сложных каустик характерно, например, для зеркал и линз при наличии аберрации [9, 10, 13, 44], а также для распространения электромагнитных, звуковых, упругих и других волн в плавно неоднородных средах. Оказывается, что даже в средах с относительно простой структурой (например, в плоско-слоистых) возможно образование каустик с несколькими точками заострения, петлями и т. п.

<sup>1)</sup> С этим связано само название «каустика», которое в переводе с греческого означает «едкий», «жгучий». Любопытно, что в немецкой литературе каустик называли *Brandkurve* — «зажигательная кривая», аналогичный термин был принят и в старой русской литературе.



[25, 45—48, 71]. Сложные каустики образуются также в неоднородных волноводах (волновых каналах) [25, 49], в статистически неоднородных средах [50, 59] и др. Различные частные конфигурации каустик будут рассмотрены в гл. II на материале конкретных задач. В данном же разделе мы остановимся на важном вопросе о классификации каустик.

Несмотря на то, что каустики начали исследовать довольно давно, последовательная классификация их основных типов появилась только в последнее время. Эта классификация основана на теории особенностей дифференцируемых отображений, которую называют также теорией катастроф. Важные результаты этой теории были получены Р. Томом, В. И. Арнольдом и др. [51—56]. Элементы теории катастроф (особенностей), имеющие отношение к волновым задачам, содержатся, например, в работах [43, 52, 57, 58]. Здесь мы ограничимся лишь необходимыми для дальнейшего сведениями.

В методе геометрической оптики речь идет об отображении точек начальной поверхности  $Q$ :  $r = r^0(\xi, \eta)$  на трехмерное пространство  $x, y, z$ . Это отображение осуществляется при помощи функций

$$x = X(\xi, \eta, \tau), \quad y = Y(\xi, \eta, \tau), \quad z = Z(\xi, \eta, \tau), \quad (4.5)$$

описывающих семейство траекторий  $r = R(\xi, \eta, \tau)$ . Эти функции аналитичны по  $\xi, \eta, \tau$ , если аналитичны параметры среды  $n = n(x, y, z)$  и начальные условия, т. е. функции  $r = r^0(\xi, \eta)$  и  $\psi^0 = \psi^0(\xi, \eta)$ .

В расширенном пространстве  $\{x, y, z, \xi, \eta, \tau\}$  семейство лучей (4.5) образует некоторую трехмерную гиперповерхность. Обозначив для краткости  $\xi = (\xi, \eta, \tau)$ , уравнение этой гиперповерхности можно представить в форме:

$$F(r, \xi) = 0. \quad (4.6)$$

где функция  $F(r, \xi)$  аналитична по всем своим аргументам. Однако отображение гиперповерхности  $F(r, \xi) = 0$  на координатное пространство  $r = \{x, y, z\}$  может быть неоднозначным. Границы областей неоднозначного отображения являются особенностями этого отображения. Эти особенности и следует отождествить с каустиками, так как на этих особенностях якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  обращается в нуль<sup>1)</sup>. Далее можно рассматривать вложение семейства лучей (4.5) в пространство еще большей размерности, добавляя

<sup>1)</sup> Расширенным пространством может служить также фазовое пространство  $\{p, r\}$ , в котором фазовые траектории  $r = R(\xi, \eta, \tau)$ ,  $p = P(\xi, \eta, \tau)$  образуют гладкую трехмерную гиперповерхность (лагранжево многообразие) без особенностей (см. § 2). Каустики возникают при отображении этой гиперповерхности в конфигурационное пространство, и таким образом, являются особенностями проекций лагранжевых многообразий [41, 52, 60, 61].

к трем параметрам  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$  также набор параметров  $w', w'', \dots$ , которые, например, характеризуют начальный эйконал  $\psi^0 = \psi^0(\xi, \eta)$ , форму начальной поверхности  $r = r^0(\xi, \eta)$  и профиль коэффициента преломления  $n = n(r)$  (в частности, параметрам  $w', w'', \dots$  могут служить коэффициенты разложений Тейлора для функций  $\psi^0(\xi, \eta)$ ,  $r^0(\xi, \eta)$ ,  $n(r)$ ). Если  $w = \{\xi, \eta, \tau, w', w'', \dots\}$  — совокупность всех  $N$  параметров задачи, то речь пойдет об отображении трехмерной гиперповерхности  $F(r, w) = 0$  из пространства  $3 + N$  измерений на координатное пространство  $r = \{x, y, z\}$ .

Анализ особенностей в теории катастроф проводится на основе локального описания поведения функций  $F(r, w)$  в окрестности некоторой точки  $\{r_0, w_0\}$ . Пусть  $\tilde{r} = \{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\} = r - r_0$ ,  $\tilde{w} = w - w_0$  — локальные координаты в окрестности точки  $\{r_0, w_0\}$ . Аналитическая функция  $F(r, w)$  в этой окрестности может быть представлена своим рядом Тейлора, который мы запишем в символической форме:

$$F(r, w) = F(r_0, w_0) + P_1(\tilde{r}, \tilde{w}) + P_2(\tilde{r}, \tilde{w}) + \dots = 0, \quad (4.7)$$

где  $P_n(\tilde{r}, \tilde{w})$  — однородный полином от  $\tilde{r}, \tilde{w}$  степени  $n$ .

Классификация особенностей основана на приведении аналитической функции  $F(r, w)$  с помощью гладкого преобразования переменных (повороты осей и изменения масштабов) к одной из так называемых *нормальных форм*, т. е. к одному из простейших стандартных полиномов с одним, двумя, тремя и т. д. свободными параметрами. Такие нормальные формы соответствуют *структурно устойчивым особенностям*<sup>1)</sup>, а число  $m$  свободных параметров называют *коразмерностью*<sup>2)</sup>. Вопросы классификации особенностей исследовались в работах Р. Тома, В. И. Арнольда и др. [43, 52, 53]. Оказалось, что при  $m \leq 4$  все множество полиномов вида (4.7) локально приводится к семи стандартным формам (семь элементарных катастроф). Эти особенности перечислены в табл. 1 с указанием их обозначений  $A_k, D_k$  ( $k = m + 1$ ) по классификации В. И. Арнольда и снабжены значениями индекса фокусировки  $\sigma_k$ , о котором пойдет речь в § 10.

Дадим краткий комментарий к табл. 1. При коразмерности  $m \leq 4$  нормальные формы полиномов (4.7) содержат один ( $\xi$ ) или два параметра  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , которые исключаются при проектировании, и свободные параметры  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  или  $\nu_4$  в числе, отвечающем ко-

<sup>1)</sup> Такие особенности при наличии возмущений сохраняют свою форму (структуру) в том смысле, что возмущенная и невозмущенная особенности связаны плавным взаимно однозначным отображением.

<sup>2)</sup> Подчеркнем, что размерность физического пространства  $M$  не налагает на коразмерность  $m$  никаких ограничений. Так, уже в пространстве двух измерений могут возникать каустики с произвольным числом пиков, петель и т. д. [44—50, 59].

размерности. В реальных задачах все эти величины являются линейной комбинацией исходных координат  $\tilde{r}$  и параметров  $\tilde{w}$ . Для наглядности удобно рассматривать  $v_1$  и  $v_2$  как локальные координаты на плоскости  $x, y$ .

Таблица 1

## Простейшие виды каустик

Коразмерность	Символ каустики	Название каустики	Индекс фокусировки
1	$A_2$	Складка (неособая каустика)	1/6
2	$A_3$	Сборка (клюв)	1/4
3	$A_4$	Ласточкин хвост	3/10
	$D_4^-$	Гиперболический омбилик (волновой гребень)	1/3
	$D_4^+$	Эллиптический омбилик (волосок)	1/3
4	$A_5$	Бабочка	2/3
	$D_5$	Параболический омбилик (гриб)	3/8

Для простейшей особенности <sup>1)</sup> ( $m = 1$ ) нормальная форма имеет вид

$$F_1(\xi, v_1) = 3\xi^2 + v_1 = 0 \quad (4.8)$$

и носит название *складки*. Изображение поверхности  $F_1(\xi, v_1) = 0$  в пространстве  $\{\xi, v_1 = x, v_2 = y\}$  дано на рис. 4.4. При отображении поверхности (4.8) на плоскость  $v_1 = x, v_2 = y$  образуется простая (неособая) каустика, выделенная жирной прямой на нижней части рисунка.

Следующая по сложности особенность носит название *сборки* (для нее  $m = 2$ ). Соответствующая поверхность <sup>2)</sup>

$$F_2(\xi, v_1, v_2) = 4\xi^3 - 2v_2\xi + v_1 = 0 \quad (4.9)$$

изображена на рис. 4.5. Проекция сборки на плоскость  $v_1 = x, v_2 = y$  имеет вид клюва, показанного на нижней части рисунка. Она описывается полукубической параболой  $27v_1^2 = 8v_2^3$ .

<sup>1)</sup> В окрестности неособой точки  $F$  приводится к виду  $F = \xi + v_1$ . В этом случае поверхность  $F = 0$  однозначно проектируется на произвольную ось  $v_1$ , например, на ось  $v_1 = x$ .

<sup>2)</sup> Существует также дуальная сборка, отличающаяся от (4.9) знаком перед  $\xi^3$ . Дуальные особенности такого типа рассматриваются, например, в [58].

Для  $m = 3$  имеются уже три типа стандартных форм. Одна из них — особенность типа *ласточкин хвост* — описывается функцией

$$F_3(\zeta, v_1, v_2, v_3) = 5\zeta^4 + 3v_3\zeta^2 + 2v_1\zeta + v_2 = 0. \quad (4.10)$$

Эта трехмерная гиперповерхность в пространстве  $\{\zeta, v_1, v_2, v_3\}$  уже не может быть изображена графически, но ее особенности отображаются поверхностью характерного вида  $\Phi(v_1, v_2, v_3) = 0$  в пространстве  $\{v_1, v_2, v_3\}$  (рис. 4.6, а). Эволюция сечений этой

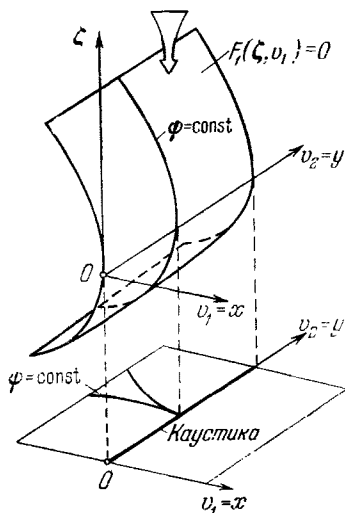


Рис. 4.4.

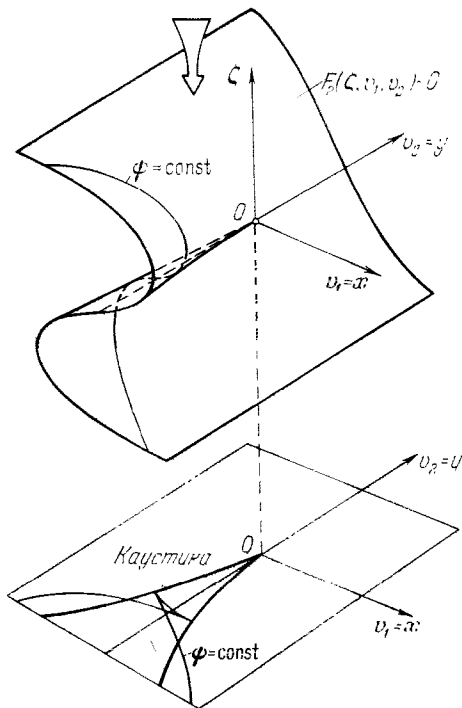


Рис. 4.5.

поверхности плоскостями  $v_3 = \text{const}$  показана на рис. 4.6, б. При  $v_3 < 0$  каустика на плоскости  $v_1 = x, v_2 = y$  имеет вид *петли*, образованной двумя клювами с одной общей ветвью. При критическом значении  $v_3 = 0$  происходит бифуркация (качественное изменение): петля стягивается в точку, а затем (при  $v_3 > 0$ ) исчезает.

Параметр  $v_3$  в этой задаче может быть третьей пространственной координатой, но может также характеризовать положение источника, градиент коэффициента преломления, кривизну начального фазового фронта и т. п.<sup>1)</sup> Вообще, каустики, наблюдаемые в физическом пространстве, представляют собой проекции сечений гиперповерхности особенностей в пространстве парамет-

<sup>1)</sup> Примеры см. в [44—48, 59], а также в гл. II.

ров  $\{v_1, v_2, \dots\}$  теми или иными плоскостями, скажем, плоскостью  $x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots = \text{const}$ .

Другие два типа каустик при  $m=3$  описываются уравнением  $F(v_1, v_2, v_3; \xi_1, \xi_2) = 0$ , которое содержит параметры  $\xi_{1,2}$  и распадается на систему уравнений  $F_1 = 0, F_2 = 0$ . Так, для *гиперболического омбилика (волнового гребня)*  $D_4^-$  имеем

$$F_1(v_i; \xi_1, \xi_2) = 3\xi_1^2 + v_3 \xi_2 - v_1 = 0,$$

$$F_2(v_i; \xi_1, \xi_2) = 3\xi_2^2 + v_3 \xi_1 - v_2 = 0.$$

Исключая отсюда с помощью условия  $(\partial F_1/\partial \xi_1)(\partial F_2/\partial \xi_2) - (\partial F_1/\partial \xi_2)^2 = 0$  параметры  $\xi_{1,2}$ , можно найти уравнение каустики

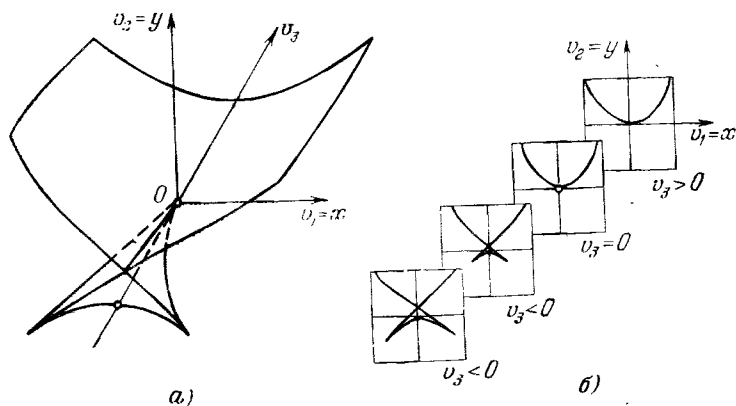


Рис. 4.6.

$\Phi(v_1, v_2, v_3) = 0$ . Геометрия рассматриваемой каустики изображена на рис. 4.7, а; на рис. 4.7, б показаны сечения каустики плоскостями  $v_3 = \text{const}$ .

Аналогично для *эллиптического омбилика (волоска)*  $D^+$  имеем

$$F_1(v_i; \xi_1, \xi_2) = 3(\xi_1^2 - \xi_2^2) - 2v_3 \xi_1 - v_1 = 0,$$

$$F_2(v_i; \xi_1, \xi_2) = 6\xi_1 \xi_2 + 2v_3 \xi_2 + v_2 = 0.$$

Каустика типа эллиптического омбилика и ее сечения показаны на рис. 4.8.

Подробные рисунки, изображающие элементарные катастрофы, а следовательно, и каустики других типов, указанных в табл. 1, можно найти в [43, 52, 55], а более сложные особенности с коразмерностью  $m \geq 5$  обсуждаются в [60, 61].

С различными особенностями каустик мы столкнемся в гл. II. В частности, каустические петли, являющиеся сечением ласточ-

кина хвоста, появятся в § 13 (рис. 13.5), различные сечения каустической особенности типа бабочка встретятся в § 11 (рис. 11.2) и в § 13 (рис. 13.12) и т. д.

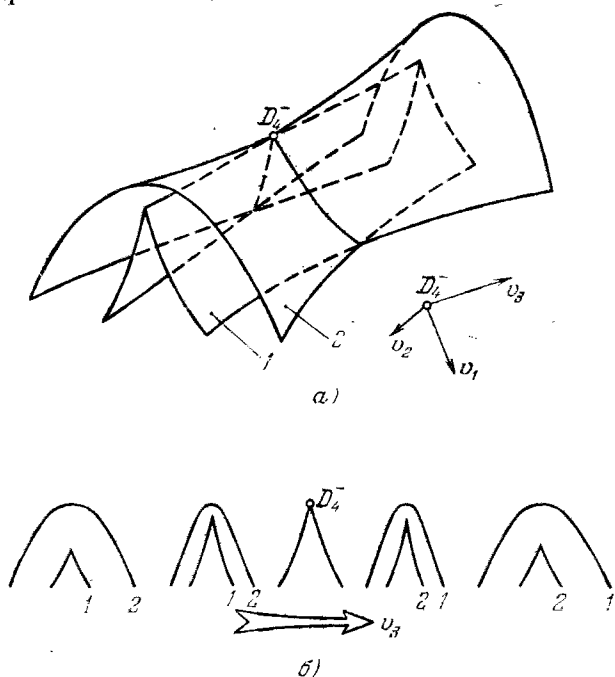


Рис. 4.7.

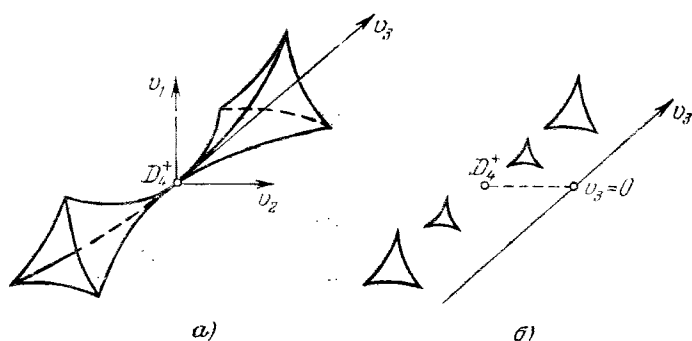


Рис. 4.8.

**4. Структурно устойчивые и структурно неустойчивые каустики в физических задачах.** Математическое понятие «структурная устойчивость» не следует отождествлять с физической устой-

чивостью каустик. Структурная устойчивость допускает вариации только тех параметров  $v_1, v_2, \dots, v_m$ , которые входят в нормальную форму функции  $F_m$ , — именно этим обеспечивается сохранение структуры каустик (например, сохранение петлеобразной формы каустики на рис. 4.6, б при малых вариациях параметра  $v_3$ ).

Между тем физические возмущения (т. е. добавки  $\delta F$  к функции  $F$ ) могут содержать как угодно высокие степени координат  $\tilde{x}_i$  и параметров  $\tilde{w}_j$  и поэтому почти всегда нарушают структурную устойчивость (функция  $F + \delta F$  приводится, вообще говоря, к иной нормальной форме, чем  $F$ ). Так, слабое синусоидальное возмущение фазового фронта может привести к появлению множества петель на гладкой каустике.

В связи с этим естественно возникает вопрос о месте, на которое могут претендовать структурно устойчивые особенности в физических теориях. Роль этих особенностей определяется тем, насколько хорошо они моделируют существенные черты реальных объектов, при этом критерий «насколько хорошо» должен вытекать из физической или технической постановки задачи.

В случае каустик разумно считать ту или иную модель приемлемой, если характерные для данной задачи возмущения начальных условий и параметров среды приводят лишь к малым возмущениям волнового поля. Малость же возмущений поля можно гарантировать, если возмущения каустической поверхности малы по сравнению с шириной каустической зоны (см. оценки в § 10). Если под действием того или иного возмущающего фактора каустика выходит за пределы первоначальной каустической зоны, то модель следует усложнить, включив возмущающий фактор в число самостоятельных (присущих задаче) параметров.

С точки зрения сформулированного критерия для прикладной физики могут представлять интерес не только структурно устойчивые каустики (простые каустики, клювы, петли и т. д.), но и структурно неустойчивые «объекты», подобные идеальному фокусу или плоской волне<sup>1)</sup>, если они служат подходящей моделью

<sup>1)</sup> Пучок параллельных лучей, отвечающих плоской волне, описывается уравнениями  $x = \xi, y = \eta, z = \tau$ . Очевидно, эти уравнения не изменятся, если добавить к ним полиномы произвольной степени  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ) с нулевыми коэффициентами  $v_1, v_2, \dots, v_m$ . Такое образование классифицируется как структурно неустойчивое, поскольку при сколь угодно малых, но отличных от нуля значениях коэффициентов  $v_1, v_2, \dots, v_m$  возникают сколь угодно сложные особенности. Аналогичные соображения относятся и к сферической волне, отвечающей идеальному фокусу лучей. М. Берри приписал таким математическим объектам бесконечную коразмерность  $m = \infty$  [43]. По всей видимости, бесконечную коразмерность можно было бы приписать любому реальному объекту, но при модельном описании (т. е. при идеализации) физических объектов мы вправе ограничиться конечным числом наиболее существенных параметров.

тех или иных волновых явлений. Такой прагматический подход характерен, разумеется, не только для волновой физики, но и для всей физики в целом.

**5. Другие типы каустик.** Рассмотренные выше каустики, связанные с дифференцируемыми отображениями, не исчерпывают всех каустик, представляющих физический интерес.

Прежде всего отметим так называемые *оборванные* каустики, возникающие вследствие тех или иных нарушений аналитичности задачи. Оборванные каустики возникают, например, при затенении части пучка лучей экраном или при скачкообразном изменении градиента показателя преломления  $n(r)$  [62—66].

В геометрической теории дифракции имеют дело с дифракционными лучами, срывающимися с ребер, острый или гладких поверхностей, которые и служат каустиками для этих лучей [32, 33]. Кроме того, дифракционные лучи могут образовать каустики сложной формы на гладких поверхностях [67]. Каустики дифракционных лучей в пространстве, как, впрочем, и оборванные каустики, могут располагаться вблизи области полутени, и тогда они называются *полутеневыми* каустиками [64, 68].

Наконец, следует упомянуть комплексные каустики, служащие огибающими комплексных лучей [42]. Частным случаем таких каустик являются каустики с просачиванием, т. е. огибающие лучей, связанных с полем волны, просочившейся через барьер [69, 70].

**6. Особенности фазовых фронтов.** Эйконал волны  $\psi$  является аналитической функцией параметров  $\xi, \eta, \tau$ :  $\psi = \psi(\xi, \eta, \tau)$ , и поэтому может рассматриваться как аналитическая функция на поверхности  $F(r, \xi) = 0$  в пространстве  $\{r, \xi\}$ . Линии  $\psi = \text{const}$  на этой поверхности после проектирования на пространство  $\{x, y, z\}$  будут иметь те или иные особенности как раз на каустиках. Так, при проектировании складки из пространства  $\{\xi, v_1, v_2\}$  на плоскость  $v_1 = x, v_2 = y$  линии  $\psi = \text{const}$  дают на координатной плоскости клюв, ориентированный перпендикулярно каустике (см. рис. 4.4; ортогональность вытекает из того, что лучи касательны к каустике и перпендикулярны фазовым фронтам). При проектировании сборки (см. рис. 4.5) на координатной плоскости образуются петли, являющиеся сечениями ласточкина хвоста.

Из приведенных примеров видно, что коразмерность особенностей фазовых фронтов на единицу превышает коразмерность соответствующей каустики. Эта закономерность имеет общий характер и вытекает из теории гладких отображений. В данном случае к трем функциям (4.5) следует добавить еще функцию  $\psi = \psi(\xi, \eta, \tau) \equiv \psi(\xi)$ , рассмотрев гиперповерхность  $\Phi(\psi, r, \xi) = 0$  в расширенном пространстве  $\{\psi, r, \xi\}$ . При проектировании этой поверхности в пространство  $\{\psi, r\}$  реализуются те или иные



особенности гладких отображений, в том числе — особенности, перечисленные в табл. 1. Сечения этих поверхностей плоскостью  $\psi = \text{const}$  и дадут возможные формы фазового фронта в координатном пространстве (подробнее см. [57]).

**7. Каустический сдвиг фазы.** Каустический сдвиг фазы, уже упомянутый нами в § 3, возникает при касании лучом каустики. Поясним происхождение этого сдвига на примере простой каустики.

Пусть в начальной точке на луче якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  положителен:  $\mathcal{D}(\tau) > 0$ . После касания каустики якобиан становится отрицательным (на самой каустике он равен нулю), и поэтому в выражении (3.9) для амплитуды появляется множитель  $\sqrt{-1}$ , который можно интерпретировать и как  $i = \exp(i\pi/2)$ , и как  $-i = \exp(-i\pi/2)$ . Появление этого множителя (знак показателя экспоненты уточняется ниже) и отвечает каустическому сдвигу фазы.

Изменение фазы волны на  $-\pi/2$  при касании с неособой каустикой и на  $-\pi$  после прохождения трехмерного фокуса было известно уже давно из частных примеров, допускающих точные решения. Однако универсальное правило о дополнительном сдвиге фазы на каустике было сформулировано сравнительно недавно: в [85] это правило выведено из рассмотрения асимптотики точного интегрального представления поля в однородной среде, а в [41] оно получено методом канонического оператора. Не обсуждая сам метод вывода<sup>1)</sup>, приведем только рецепт определения каустического сдвига фазы.

Рассмотрим матрицу

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \tau} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix}. \quad (4.11)$$

В точке касания луча с каустикой одновременно с обращением в нуль определителя  $\mathcal{D} = \det \hat{\mathcal{D}}$  возможно обращение в нуль либо одного, либо двух, либо трех собственных значений матрицы  $\hat{\mathcal{D}}$ . Пусть  $q$  — число собственных значений, равных нулю на каустике. После касания лучом каустики амплитуда поля приобретает

<sup>1)</sup> Каустический сдвиг фазы может быть получен также при помощи равномерных асимптотических представлений поля, справедливых в окрестности каустик [25, 26, 72, 73, 91], и при помощи комплексных лучей, которые, как и в методе фазовых интегралов, позволяют обойти каустик в комплексном пространстве (в [74] последним способом найден сдвиг фазы  $-\pi/2$  для неособой каустики).

фазовый множитель с показателем  $\delta\Psi = -\pi q/2$ :

$$A_0(\tau) = \frac{A_0^0}{\sqrt{|\mathcal{F}|}} e^{\frac{-i\pi q}{2}} = \frac{A_0^0}{\sqrt{|\mathcal{F}|}} e^{i\delta\Psi}. \quad (4.12)$$

Величину  $\delta\Psi$  и называют *каустическим сдвигом фазы*.

В одномерной задаче величина  $q$  может принимать только значение единицы, при этом  $\delta\Psi = -\pi/2$  (тривиальный случай  $q = 0$ , отвечающий отсутствию каустик, мы не рассматриваем). В двумерных задачах имеются две возможности.  $q = 1$  и  $q = 2$  и соответственно  $\delta\Psi = -\pi/2$  и  $\delta\Psi = -\pi$ . Простой расчет показывает, что в однородной среде в нуль может обратиться только одно из двух собственных значений. Поэтому в однородной среде для двумерной каустики любой формы  $q = 1$  и  $\delta\Psi = -\pi/2$ . В трехмерных задачах  $q$  может принимать значения 1, 2 и 3. Значение  $q = 1$  с соответствующим сдвигом фазы  $-\pi/2$  реализуется на неособых участках каустик. Значение  $q = 2$  со сдвигом фазы  $\delta\Psi = -\pi$  отвечает двукратному вырождению матрицы  $\hat{\mathcal{D}}$  и наблюдается в трехмерном фокусе или в трехмерном (осесимметричном) клюве.

При многократных касаниях лучом каустик дополнительный сдвиг фазы равен сумме фазовых сдвигов на всех каустиках, которых коснулся луч на своем пути:

$$\delta\Psi = \sum_j \delta\Psi_j = -\frac{\pi}{2} \sum_j q_j. \quad (4.13)$$

Величину  $\sum q_j$  называют *индексом траектории* [41].

Каустический сдвиг фазы влияет на интерференционную структуру поля в условиях многолучевости. В частности, учет  $\delta\Psi$  необходим при описании положения интерференционных максимумов и минимумов поля, при определении частот собственных колебаний в открытых резонаторах [263, 264, 21, 75], при нахождении фазовых скоростей нормальных волн в рефракционных волноводах [25] и др.

## § 5. Отражение и преломление волн на границах раздела

**1. Принцип локальности при отражении волн.** В рамках метода геометрической оптики наиболее сложная задача теории дифракции — об отражении волн от криволинейной границы раздела — решается сравнительно просто, вследствие того, что выполняется *принцип локальности*. Именно, в нулевом приближении отражение волны в каждой точке границы происходит так, как если бы падающая волна была плоской, а криволинейная граница была бы заменена касательной плоскостью (рис. 5.1). Принцип локальности позволяет, таким образом, использовать в качестве

нулевого приближения отражательные формулы для строго плоских волн и строго плоских поверхностей, в частности, формулы Френеля в акустике и электродинамике. Рассмотрим этот вопрос более подробно (см. также [77, 78]).

**2. Соотношения для лучей и эйконалов.** Пусть  $u_{\text{пад}} = A_{\text{пад}} e^{ik_0 \psi_{\text{пад}}}$  — волна, падающая на границу  $Q$ , разделяющую среду с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ . Отраженную от границы раздела волну обозначим через  $u_{\text{отр}} = A_{\text{отр}} e^{ik_0 \psi_{\text{отр}}}$ , а преломленную — через  $u_{\text{пр}} = A_{\text{пр}} e^{ik_0 \psi_{\text{пр}}}$ . На границе раздела  $Q$  быстро осциллирующие множители  $e^{ik_0 \psi_{\text{пад}}}$ ,  $e^{ik_0 \psi_{\text{отр}}}$  и  $e^{ik_0 \psi_{\text{пр}}}$  должны быть равны друг другу (в противном случае нельзя было бы удовлетворить граничным условиям иначе, как отказавшись от основного допущения метода геометрической оптики — медленности изменения амплитуд). Следовательно, на границе раздела должно быть

$$\psi_{\text{отр}} = \psi_{\text{пр}} = \psi_{\text{пад}} \quad \text{при } r \in Q. \quad (5.1)$$

Эти соотношения служат начальными условиями для эйконалов отраженной и преломленной волн, покидающих границу раздела.

В силу (5.1) тангенциальные к  $Q$  компоненты векторов  $\mathbf{p}_{\text{пад}} = \nabla \psi_{\text{пад}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{отр}} = \nabla \psi_{\text{отр}}$  и  $\mathbf{p}_{\text{пр}} = \nabla \psi_{\text{пр}}$  одинаковы:

$$(\mathbf{p}_{\text{пад}})_t = (\mathbf{p}_{\text{отр}})_t = (\mathbf{p}_{\text{пр}})_t, \quad \mathbf{p}_t = \mathbf{p} - N(\mathbf{p}N), \quad (5.2)$$

где  $N$  — единичный вектор нормали к границе раздела. Определим плоскость падения луча как плоскость, содержащую  $\mathbf{p}_{\text{пад}}$  и  $N$  (см. рис. 5.1). Из (5.2) следует тогда, что векторы  $\mathbf{p}_{\text{отр}}$  и  $\mathbf{p}_{\text{пр}}$  тоже лежат в плоскости падения, т. е. векторы  $\mathbf{p}_{\text{пад}}$ ,  $\mathbf{p}_{\text{отр}}$  и  $\mathbf{p}_{\text{пр}}$  компланарны. Для нормальных компонент этих векторов, представляющих собой одновременно нормальные производные эйконалов  $\psi_{\text{пад}}$ ,  $\psi_{\text{отр}}$  и  $\psi_{\text{пр}}$ , имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_{\text{пад}})_N &= -\sqrt{n_1^2 - (\mathbf{p}_{\text{пад}})_t^2}, & (\mathbf{p}_{\text{отр}})_N &= \sqrt{n_1^2 - (\mathbf{p}_{\text{пад}})_t^2}, \\ (\mathbf{p}_{\text{пр}})_N &= -\sqrt{n_2^2 - (\mathbf{p}_{\text{пад}})_t^2}, & r &\in Q. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если обозначить через  $\theta$ ,  $\theta_{\text{отр}}$  и  $\theta_{\text{пр}}$  соответственно углы падения, отражения и преломления, то равенства (5.2) примут вид

$$n_1 \sin \theta = n_1 \sin \theta_{\text{отр}} = n_2 \sin \theta_{\text{пр}}, \quad (5.4)$$

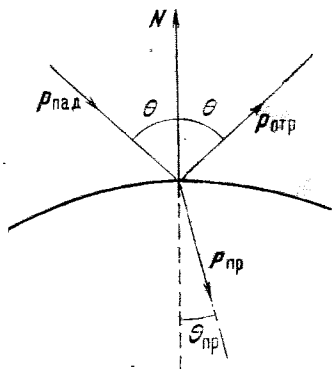


Рис. 5.1.

т. е. должен выполняться закон зеркального отражения

$$\theta_{\text{отр}} = \theta \quad (5.5)$$

и закон преломления (закон Снеллиуса)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.6)$$

С учетом этих равенств нормальные производные эйконолов запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial N} &= - \frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial N} = n_1 \cos \theta, \quad r \in Q, \\ \frac{\partial \psi_{\text{пр}}}{\partial N} &= - n_2 \cos \theta_{\text{пр}} = - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Соотношения (5.2)—(5.4) дают все необходимое для нахождения лучей и эйконолов отраженной и преломленной волн вдали от границы раздела. Заметим, что при выводе этих соотношений явный вид граничных условий не использовался. В противоположность этому для нахождения амплитуд  $A_{\text{отр}}$  и  $A_{\text{пр}}$  необходимо конкретизировать граничные условия. Соответствующие выкладки мы проведем, следуя работе [77].

**3. Отражательные формулы для амплитуды.** Довольно широкий класс задач, представляющих практический интерес, подчиняется граничным условиям вида

$$\begin{aligned} \kappa_1 (u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}) &= \kappa_2 u_{\text{пр}}, \\ \nu_1 \left( \frac{\partial u_{\text{пад}}}{\partial N} + \frac{\partial u_{\text{отр}}}{\partial N} \right) &= \nu_2 \frac{\partial u_{\text{пр}}}{\partial N}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где  $u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}$  — поле в «верхней» среде, а  $u_{\text{пр}}$  — поле в «нижней» среде. Параметры  $\kappa_1$ ,  $\nu_1$  и  $n_1$  относятся к верхней, а параметры  $\kappa_2$ ,  $\nu_2$  и  $n_2$  — к нижней среде. Условиям типа (5.8) удовлетворяют, например, звуковые поля. Если  $u$  — звуковой потенциал,  $v = -\nabla u$  — колебательная скорость частиц, а  $P = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$  — давление, то соотношения (5.8) вытекают из требования непрерывности на границе раздела  $Q$  давления и нормальной составляющей скорости  $v_N = -\partial u / \partial N$ , при этом  $\kappa_{1,2} = \rho_{1,2}$ ,  $\nu_{1,2} = 1$ . Соотношения (5.8) содержат как частный случай также граничные условия Дирихле  $(u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}})_Q = 0$  (когда  $\kappa_2 \rightarrow 0$ ) и Неймана  $\frac{\partial}{\partial N} (u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}})_Q = 0$  (когда  $\nu_2 \rightarrow 0$ ).

Представим каждое из полей  $u_{\text{пад}}$ ,  $u_{\text{отр}}$  и  $u_{\text{пр}}$  в виде ряда по степеням  $(1/ik_0)$ , например,

$$u_{\text{отр}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^{\text{отр}}}{(ik_0)^m} e^{ik_0 \psi_{\text{отр}}}. \quad (5.9)$$

Подстановка (5.9) в (5.8) с последующим приравниванием нулю коэффициентов при одинаковых степенях  $k_0$  дает

$$\kappa_1 (A_m^{\text{пад}} + A_m^{\text{отр}}) = \kappa_2 A_m^{\text{пр}}, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} v_1 \left( A_m^{\text{пад}} \frac{\partial \psi_{\text{пад}}}{\partial N} + \frac{\partial A_{m-1}^{\text{пад}}}{\partial N} + A_m^{\text{отр}} \frac{\partial \psi_{\text{отр}}}{\partial N} + \frac{\partial A_{m-1}^{\text{отр}}}{\partial N} \right) = \\ = v_2 \left( A_m^{\text{пр}} \frac{\partial \psi_{\text{пр}}}{\partial N} + \frac{\partial A_{m-1}^{\text{пр}}}{\partial N} \right) \end{aligned}$$

(все амплитуды  $A_m$  с  $m < 0$ , как обычно в лучевых разложениях, считаются равными нулю:  $A_{-1} = A_{-2} = \dots = 0$ ). Учитывая соотношения (5.7) и разрешая (5.10) относительно  $A_m^{\text{отр}}$  и  $A_m^{\text{пр}}$ , получаем систему рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} A_m^{\text{отр}} &= \Gamma A_m^{\text{пад}} + \frac{1}{1+Y} \delta_{m-1}, \\ A_m^{\text{пр}} &= D A_m^{\text{пад}} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2 (1+Y)} \delta_{m-1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где введены обозначения

$$\Gamma = \frac{1-Y}{1+Y}, \quad D = \frac{2\kappa_1}{\kappa_2 (1+Y)}, \quad (5.12)$$

$$Y = \frac{\kappa_1 v_2 n_2 \cos \theta_{\text{пр}}}{\kappa_2 v_1 n_1 \cos \theta}, \quad (5.13)$$

$$\delta_{m-1} = \frac{1}{n_1 \cos \theta} \left( v_2 \frac{\partial A_{m-1}^{\text{пр}}}{\partial N} - \frac{\partial A_{m-1}^{\text{пад}}}{\partial N} - \frac{\partial A_{m-1}^{\text{отр}}}{\partial N} \right). \quad (5.14)$$

Рекуррентные соотношения (5.11) позволяют последовательно найти амплитуды отраженной и преломленной волн на границе раздела  $Q$ , начиная с нулевого приближения ( $m=0$ ). Используя эти амплитуды как начальные значения, по формуле (3.9) можно рассчитать амплитуды отраженного и преломленного полей на удалении от границы раздела.

В нулевом приближении из (5.11) вытекает известная формула для амплитуды отраженной волны

$$A_0^{\text{отр}} = \frac{1-Y}{1+Y} A_0^{\text{пад}} = \Gamma A_0^{\text{пад}}, \quad (5.15)$$

а также формула для амплитуды преломленной волны

$$A_0^{\text{пр}} = \frac{2\kappa_1}{\kappa_2 (1+Y)} A_0^{\text{пад}} = D A_0^{\text{пад}}. \quad (5.16)$$

Здесь  $\Gamma$  — локальный коэффициент отражения, а  $D$  — локальный коэффициент прохождения (прозрачности). Формулы (5.15), (5.16)

содержат френелевские значения коэффициентов отражения  $\Gamma$  и преломления  $D$  и дают обоснование принципа локальности, о котором речь шла в начале параграфа.

Если плоская волна падает на плоскую границу раздела однородных сред, то амплитуды  $A_0^{\text{пад}}$ ,  $A_0^{\text{отр}}$  и  $A_0^{\text{пр}}$  постоянны вдоль границы и все величины  $\delta_{m-1}$  в (5.11) равны нулю. В этом случае нулевое приближение геометрической оптики дает точное френелевское решение задачи об отражении и преломлении волн. В общем же случае нулевое приближение обеспечивает тем более точные результаты, чем меньше кривизна фазовых фронтов и границы раздела и чем слабее неоднородность обеих сред. Оценки границ применимости приближения геометрической оптики (5.15), (5.16) при наличии границ раздела обсуждаются в § 12 (см. также [25, 79]).

**4. Отражение от слабых границ раздела.** При помощи (5.11) может быть решен и вопрос об отражении волн от так называемых *слабых* границ раздела, на которых терпят разрыв не сами параметры  $n$ ,  $\kappa$ ,  $\nu$ , а их производные  $M$ -го порядка, например,

$$\frac{\partial^m n_1}{\partial N^m} = \frac{\partial^m n_2}{\partial N^m} \quad \text{при} \quad m < M, \quad (5.17)$$

но

$$\frac{\partial^M n_1}{\partial N^M} \neq \frac{\partial^M n_2}{\partial N^M}, \quad r_i \in Q \quad (5.18)$$

(обычная граница раздела отвечает, с этой точки зрения, разрыву производных нулевого порядка). Для слабых границ раздела имеем  $Y = 1$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ , коэффициент отражения обращается в нуль,  $\Gamma = 0$ , а коэффициент прохождения равен единице:  $D = 1$ . Поэтому соотношения (5.11) принимают вид

$$A_m^{\text{отр}} = \frac{1}{2} \delta_{m-1}, \quad A_m^{\text{пр}} = A_m^{\text{пад}} + \frac{1}{2} \delta_{m-1}, \quad (5.19)$$

где

$$\delta_{m-1} = \frac{1}{n_1 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial N} (A_{m-1}^{\text{пр}} - A_{m-1}^{\text{пад}} - A_{m-1}^{\text{отр}}).$$

Величины  $\delta_{m-1}$  при  $m < M$  равны нулю, так что

$$A_m^{\text{отр}} = 0, \quad A_m^{\text{пр}} = A_m^{\text{пад}}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1, \quad (5.20)$$

но  $\delta_{M-1}$  уже не равно нулю, и в результате амплитуда отраженного поля  $A_M^{\text{отр}}$  отлична от нуля:

$$A_M^{\text{отр}} = \frac{1}{2n_1 \cos \theta} \frac{\partial}{\partial N} (A_{M-1}^{\text{пр}} - A_{M-1}^{\text{пад}}). \quad (5.21')$$

Это отвечает появлению отраженной волны

$$u_{\text{отр}} = \frac{1}{(ik_0)^M} e^{ik_0\psi_{\text{отр}}} \left\{ A_M^{\text{отр}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \right\}, \quad (5.21'')$$

главный член в этой формуле имеет порядок  $k_0^{-M}$  (или же порядок  $\mu^M$  при разложении по безразмерному параметру  $\mu$ ). Таким образом, при наличии слабых границ раздела отраженные волны возникают лишь в  $M$ -м члене лучевого ряда.

Из сказанного можно было бы сделать вывод, что в случае сред, параметры которых дифференцируемы бесконечное число раз ( $M \rightarrow \infty$ ), отражений не будет вовсе, и что лучевое разложение (1.20) при  $M \rightarrow \infty$  будет стремиться к точному решению. В действительности же отраженное или, правильнее, рассеянное поле не равно нулю даже в среде с бесконечно дифференцируемыми параметрами. Однако, в отличие от (1.20), рассеянное поле экспоненциально мало [79]:

$$u_{\text{рас}} \sim e^{-1/\mu} = e^{-k_0 n L}. \quad (5.22)$$

Именно поэтому оно не может быть вычислено в рамках метода геометрической оптики: при  $kL \rightarrow \infty$  поле  $u_{\text{рас}}$  убывает быстрее любой конечной степени  $\mu^M = (1/kL)^M$  и в силу этого не может быть представлено рядом (1.20).

Неспособность лучевых разложений «ухватить» экспоненциально малые рассеянные поля отражает асимптотический характер сходимости частичных сумм (1.20) к точному решению, о чем уже говорилось в § 1.

**5. Поверхностная геометрическая оптика.** Как известно, на границе раздела двух сред могут существовать так называемые поверхностные волны, как электромагнитные, так и акустические. Поле этих волн экспоненциально убывает при удалении от поверхности, вдоль которых они распространяются. При плавном (в масштабе  $\lambda$ ) изменении свойств поверхности волновое поле можно описывать при помощи геометрической оптики. Соответствующая модификация — *поверхностная геометрическая оптика* — имеет дело с *поверхностными* лучами и *каустиками*, с *поверхностными* уравнениями эйконала и переноса [21, 77, 80].

Сходные задачи возникают и для так называемых *ползущих* волн, т. е. волн, связанных с дифракционными (келлеровыми) лучами, огибающими гладкое тело [21, 67, 81, 82].

## § 6. Соотношения взаимности для лучей и каустик

**1. Теорема взаимности.** Для полей, описываемых скалярным уравнением (1.1), при определенных условиях справедлива *теорема взаимности*. Согласно этой теореме, поле  $u_1(r)$ , возбуждаемое источниками  $q_1(r)$  и удовлетворяющее неоднородному урав-

нению

$$\Delta u_1 + k_0^2 n^2 u_1 = q_1(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

и поле  $u_2(\mathbf{r})$ , возбуждаемое источниками  $q_2(\mathbf{r})$ , подчиняются соотношению

$$\int_V u_1(\mathbf{r}) q_2(\mathbf{r}) dV = \int_V u_2(\mathbf{r}) q_1(\mathbf{r}) dV. \quad (6.2)$$

Запишем теорему взаимности (6.2) для частного случая, когда поля  $u_1$  и  $u_2$  возбуждаются точечными источниками единичной силы:

$$q_1(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad q_2(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}''). \quad (6.3)$$

В этом случае

$$u_1(\mathbf{r}'') = u_2(\mathbf{r}'), \quad (6.4)$$

т. е. поле  $u_1(\mathbf{r}'')$ , создаваемое точечным источником  $q_1$  в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , оказывается равным полю  $u_2(\mathbf{r}')$ , создаваемому источником  $q_2$  в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}''$ .

**2. Соотношения взаимности для лучей и каустик.** Если поля  $u_1$  и  $u_2$  представлены своими лучевыми разложениями, то соотношения вида (6.4) должны быть справедливы в любом порядке по параметру  $(1/k_0)$ . В частности, в пулевом приближении метода геометрической оптики мы приходим к *лучевой теореме взаимности* [83]:

$$A_1(\mathbf{r}'') e^{ik_0\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} = A_2(\mathbf{r}') e^{ik_0\psi(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')}, \quad (6.5)$$

где в силу (2.9) и (3.26)

$$\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \int_0^{\tau(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')} n^2 d\tau, \quad \psi(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \int_0^{\tau(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')} n^2 d\tau, \quad (6.6)$$

$$A_1(\mathbf{r}'') = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{n' d\Omega_1}{n'' da_1} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}''}^{1/2}, \quad A_2(\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{n'' d\Omega_2}{n' da_2} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'}. \quad (6.7)$$

Из (6.5) следует, что  $\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = \psi(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$ , т. е. набег фазы в прямом (от  $\mathbf{r}'$  к  $\mathbf{r}''$ ) и обратном (от  $\mathbf{r}''$  к  $\mathbf{r}'$ ) направлениях одинаковы. Очевидно, экстремумы функционалов  $\psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  и  $\psi(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')$  достигаются на одном и том же луче, соединяющем точки  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}''$  (в элементарной геометрической оптике об этом говорят как об *обратимости лучей*).

Далее, из равенства амплитуд  $A_1(\mathbf{r}'')$  и  $A_2(\mathbf{r}')$  следует (при одинаковых элементах телесных углов  $d\Omega_1$  и  $d\Omega_2$ ) соотношение взаимности для сечений лучевых трубок:

$$n^2(\mathbf{r}'') da_1(\mathbf{r}'') = n^2(\mathbf{r}') da_2(\mathbf{r}'). \quad (6.8)$$



Если точки  $r'$  и  $r''$  соединены несколькими лучами, то соотношения взаимности справедливы для всех таких лучей.

Из соотношения (6.8) можно сделать полезное заключение о конфигурации каустик: если  $da_1(r'') = 0$ , т. е. если точка  $r''$  лежит на каустике  $K'$ , образованной лучами, покидающими точку  $r'$ , то каустика  $K''$  для лучей, покидающих  $r''$ , проходит через  $r'$ , поскольку  $da_2(r') = 0$  в силу (6.8). Упомянутые лучи и каустики показаны на рис. 6.1. Обе «взаимные» каустики  $K'$  и  $K''$  касательны к одному и тому же «опорному» лучу, соединяющему точки  $r'$  и  $r''$  [210].

Подобные же соображения взаимности можно высказать и в отношении особых участков каустик: во взаимных точках при источнике одного и того же типа должен сохраняться характер особенности каустик [47]. Например, если  $r''$  находится на вершине клюва (в точке заострения) каустики  $K''$ , то  $r'$  окажется на вершине клюва каустики  $K'$ . Эта «каустическая» теорема взаимности в ряде случаев помогает представить форму каустики, не проводя специальных исследований [46, 47, 71].

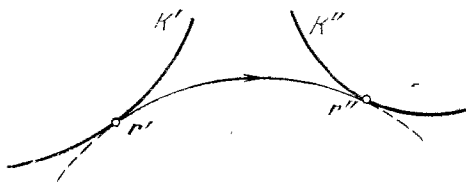


Рис. 6.1.

## § 7. Пространственно-временная геометрическая оптика

1. Волновое уравнение для сред с временной (частотной) дисперсией. В данном параграфе рассматривается метод геометрической оптики для нестационарных волновых полей, произвольно зависящих от времени. Такого рода задачи возникают, например, при распространении модулированных или импульсных волн, при излучении движущихся источников, при отражении волн от движущихся границ раздела и т. п.

Широкий класс волновых задач описывается (точно или модельно) уравнением

$$\Delta u(t, r) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{M}[u(t, r)] = 0, \quad (7.1)$$

в котором линейный интегральный оператор

$$\tilde{M}[u] = \int_{-\infty}^t \tilde{\varepsilon}(t - t', r) u(t', r) dt' \quad (7.2)$$

характеризует временную (частотную) дисперсию<sup>1)</sup> среды: со-

<sup>1)</sup> Геометрическая оптика сред с пространственной дисперсией построена (в рамках скалярной постановки задачи) в [468].

ласно (7.2), величина  $\tilde{M}[u(t, \mathbf{r})]$  зависит не только от значения поля в данный момент времени  $t$ , но и от значений поля  $u(t', \mathbf{r})$  в предшествующие моменты  $t' < t$ . По существу, связь  $v(t, \mathbf{r}) \equiv \tilde{M}[u(t, \mathbf{r})]$  служит *материальным уравнением* задачи, при этом ядро  $\tilde{\varepsilon}(t - t', \mathbf{r})$  оператора  $\tilde{M}$  определяется из рассмотрения микропроцессов в веществе ( $\tilde{\varepsilon}$  соответствует диэлектрической проницаемости в электродинамике). При  $t - t' < 0$  ядро  $\tilde{\varepsilon}(t - t', \mathbf{r})$  обращается в нуль, что обеспечивает выполнение принципа причинности.

Если поле  $u(t, \mathbf{r})$  удовлетворяет волновому уравнению (7.1), то спектральная компонента этого поля

$$u(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt \quad (7.3)$$

подчиняется, как легко установить, уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(\omega, \mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega, \mathbf{r}) u(\omega, \mathbf{r}) = 0, \quad (7.4)$$

где функция  $n^2(\omega, \mathbf{r})$  определяется как преобразование Фурье<sup>1)</sup> от ядра  $\tilde{\varepsilon}(t - t', \mathbf{r})$ :

$$n^2(\omega, \mathbf{r}) \equiv \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \tilde{\varepsilon}(t - t', \mathbf{r}) e^{i\omega(t-t')} d(t - t'). \quad (7.5)$$

Следовательно, если найдено точное или приближенное решение  $u(\omega, \mathbf{r})$  уравнения Гельмгольца (7.4), то решение  $u(t, \mathbf{r})$  волнового уравнения (7.1) может быть найдено при помощи преобразования Фурье

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.6)$$

Таким образом, рассмотрение нестационарных волновых процессов (импульсные или модулированные волны), в принципе, сводится к решению гармонической задачи. Однако трудности вычисления интеграла Фурье (7.6), как правило, велики, поэтому часто оказывается удобнее и нагляднее строить лучевое приближение не для спектральной амплитуды  $u(\omega, \mathbf{r})$ , а непосредственно для поля  $u(t, \mathbf{r})$ . Эту задачу и решает пространст-

<sup>1)</sup> Здесь и ниже, в формуле (7.14), учтено, что  $\tilde{\varepsilon}(\Delta t, \mathbf{r}) = 0$  при  $\Delta t < 0$ . Вследствие этого нижний предел интегрирования в (7.5) и (7.14) мы положили равным нулю.

венно-временная геометрическая оптика, интенсивно развиваемая в последнее время<sup>1)</sup>.

Существуют две модификации этого метода, тесно связанные между собой: теория распространения квазимонохроматических волн (квазимонохроматических *волновых пакетов*) — этой модификации посвящены пп. 2—8, и теория распространения *разрывов* (сингулярностей) поля в недиспергирующих средах (п. 9). Рассмотрим обе эти модификации.

**2. Необходимые условия применимости геометрической оптики для квазимонохроматических волновых пакетов.** В основе метода лежит представление о немонахроматических волнах вида

$$u(t, r) = A(t, r) e^{i\varphi(t, r)} \quad (7.7)$$

с медленно изменяющейся амплитудой  $A(t, r)$  и быстро изменяющейся фазой  $\varphi(t, r)$ , которые локально ведут себя как плоские и монохроматические волны в однородной и стационарной среде. Введем обозначения

$$\omega = \omega(t, r) = -\frac{\partial\varphi(t, r)}{\partial t}, \quad k = k(t, r) \equiv \nabla\varphi(t, r) \quad (7.8)$$

соответственно для «мгновенной частоты» —  $(\partial\varphi/\partial t)$  и «локального волнового вектора»  $\nabla\varphi$  (для краткости ниже будет говорить просто «частота» и «волновой вектор»). Величины  $\omega$ ,  $k$  и  $A$  строго постоянны в случае плоской монохроматической волны  $u = A \exp(ikr - i\omega t)$ , распространяющейся в однородной и стационарной среде, но в общем случае они изменяются во времени и пространстве с характерными масштабами  $T$  и  $L$ .

Для того чтобы волну можно было считать плоской и монохроматической, кроме условия (1.4) «пространственной плавности» параметров волны и среды, должно выполняться также условие «медленности»:

$$\frac{\bar{\tau}}{T} \sim \frac{1}{\omega T} \ll 1, \quad (7.9)$$

где  $\bar{\tau} \sim 1/\bar{\omega}$  — характерный период колебаний, а  $T$  — временной масштаб нестационарности параметров волны. Дополнительно мы потребуем еще выполнения неравенства

$$\frac{\tau_0}{T} \ll 1, \quad (7.10)$$

где  $\tau_0$  — характерный масштаб временной дисперсии, т. е. масштаб изменения ядра  $\tilde{\epsilon}(t - t', r)$  по аргументу  $t - t'$ . Условие

<sup>1)</sup> С историей развития этого метода можно познакомиться в [24, 23]; вместе с тем следует специально отметить ряд важных работ [30, 78, 84—90, 93].

(7.10) позволяет считать волну монохроматической в области  $|\Delta t| = |t - t'| \leq \tau_0$ , существенной для интегрирования в (7.2). Неравенства (1.4), (7.9) и (7.10) дают в совокупности *необходимые условия применимости* приближения геометрической оптики в диспергирующих средах:

$$\mu = \max \left\{ \frac{\bar{\kappa}}{L}, \frac{\bar{\tau}}{T}, \frac{\tau_0}{T} \right\} \ll 1. \quad (7.11)$$

Заметим, что эти неравенства допускают рассмотрение как слабой ( $\tau_0 \leq \bar{\tau}$ ), так и сильной ( $\tau_0 > \bar{\tau}$ ) временной дисперсии.

**3. Дифференциальная форма материального уравнения (7.2).** Наиболее последовательный вывод уравнений пространственно-временной геометрической оптики должен опираться на разложение поля (7.7) по малому параметру  $\mu$ <sup>1)</sup>. С целью сокращения выкладок мы обойдемся ниже без явных разложений по  $\mu$ , но будем следить за порядками отбрасываемых и оставляемых величин.

Воспользовавшись предполагаемой малостью изменения амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  на интегралах  $|\Delta t| = |t - t'| \leq \tau_0$ , разложим  $A(t')$  и  $\varphi(t')$  в ряды Тейлора по степеням  $\Delta t = t - t'$ :

$$A(t') \approx A(t) - \frac{\partial A(t)}{\partial t} \Delta t + \dots,$$

$$\varphi(t') \approx \varphi(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

В силу (7.11) величина  $\left| \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t \right| \leq A \frac{\tau_0}{T}$  мала по сравнению с  $A$ , а величина  $\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\Delta t)^2 \right| \leq \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \tau_0^2 \right| \sim \frac{\bar{\omega} \tau_0^2}{T} \sim \left( \frac{\tau_0}{\bar{\tau}} \right) \left( \frac{\tau_0}{T} \right)$  мала по сравнению с единицей, и в результате

$$u(t', \mathbf{r}) = A(t', \mathbf{r}) e^{i\varphi(t', \mathbf{r})} \approx$$

$$\approx e^{i\varphi(t, \mathbf{r}) + i\omega(t, \mathbf{r})\Delta t} \left\{ A(t, \mathbf{r}) - \frac{\partial A(t, \mathbf{r})}{\partial t} \Delta t + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} A(t, \mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(t, \mathbf{r})}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots \right\}. \quad (7.12)$$

Подставив (7.12) в (7.2), получим дифференциальную форму материального уравнения (7.2):

$$\check{M}[u(t, \mathbf{r})] = e^{i\varphi(t, \mathbf{r})} \left\{ \varepsilon(\omega) A + i \frac{\partial \varepsilon(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{iA}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(\omega)}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \dots \right\}, \quad (7.13)$$

<sup>1)</sup> Пример такого разложения для «плазменного» закона дисперсии имеется в [30], т. 1, § 7.

где учтено определение (7.5) пропицаемости  $\varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon(\omega, \mathbf{r})$  и вытекающее из него соотношение<sup>1)</sup>

$$\int_0^{\infty} (\Delta t)^m \tilde{\varepsilon}(\Delta t, \mathbf{r}) e^{i\omega\Delta t} d(\Delta t) = (-i)^m \frac{\partial^m \varepsilon(\omega, \mathbf{r})}{\partial \omega^m}. \quad (7.14)$$

Дважды продифференцировав (7.13) по  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{M}[u(t, \mathbf{r})] &= \\ &= -\omega^2 \varepsilon A e^{i\varphi} + i e^{i\varphi} \left\{ -2\omega \frac{\partial}{\partial t} (A\varepsilon) + A\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A\omega^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \omega^2} \right\} + \dots \equiv -\omega^2 \varepsilon A e^{i\varphi} + i e^{i\varphi} \check{\Gamma} A + \dots \quad (7.15) \end{aligned}$$

Все величины, объединенные здесь выражением  $\check{\Gamma} A$ , в силу (7.11) имеют первый порядок малости по  $\mu$  по сравнению со слагаемым нулевого порядка  $\omega^2 \varepsilon A$ , например,  $\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right| = \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \sim \frac{\bar{\omega}}{T} \ll \omega^2$ , поскольку  $1/\bar{\omega} T \ll 1$ .

4. Уравнения эйконала и переноса. Положив

$$A = A_0 + iA_1 + i^2 A_2 + \dots, \quad (7.16)$$

где  $|A_1| \sim \mu |A_0|$ ,  $|A_2| \sim \mu |A_1|$  и т. д., подставим (7.15) и (7.16) в уравнение (7.1) и приравняем нулю суммы слагаемых одинакового порядка по  $\mu$ . В нулевом порядке это дает уравнение эйконала ( $k = \nabla \varphi$ ,  $\omega = -\partial \varphi / \partial t$ )

$$\mathcal{H}(\omega, k, \mathbf{r}) \equiv k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = 0, \quad (7.17)$$

а в первом порядке — уравнение переноса для амплитуды нулевого приближения  $A_0$ , которую ниже для краткости мы будем обозначать просто  $A$ :

$$2\nabla A \nabla \varphi + A \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \check{\Gamma} A = 0. \quad (7.18)$$

Умножив уравнение (7.18) на  $A$ , преобразуем его к виду

$$\nabla A^2 \nabla \varphi + A^2 \Delta \varphi + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ A^2 \frac{\partial (\omega^2 \varepsilon)}{\partial \omega} \right\} = 0. \quad (7.19)$$

<sup>1)</sup> Для сходимости интегралов типа (7.14) необходимо, чтобы ядро  $\tilde{\varepsilon}(\Delta t, \mathbf{r})$  достаточно быстро (быстрее любой степени  $1/\Delta t$ , например, экспоненциально) убывало с ростом  $\Delta t$ .

Уравнение эйконала (7.17) формально имеет такой же вид, как и дисперсионное уравнение для плоской гармонической волны в однородной среде с проницаемостью  $\varepsilon$  или, что то же, с показателем преломления  $n(\omega, \mathbf{r}) = \sqrt{\varepsilon(\omega, \mathbf{r})}$ . Это отражает наиболее важную особенность геометрооптического поля (7.7), которое локально ведет себя подобно полю плоской монохроматической волны. Имея в виду эту аналогию, уравнение эйконала (7.17) часто называют *локальным дисперсионным уравнением*.

По своему содержанию, однако, уравнение эйконала (7.17) существенно отличается от дисперсионного уравнения, так как представляет собой не просто алгебраическое соотношение между частотой  $\omega$  и компонентами волнового вектора  $\mathbf{k}$ , а *дифференциальное уравнение* относительно неизвестной функции  $\Phi(t, \mathbf{r})$ .

5. **Пространственно-временные лучи.** Уравнение эйконала (7.17) принадлежит к уравнению типа Гамильтона—Якоби и может быть решено методом характеристик (см. § 2). Уравнения характеристик запишем в канонической гамильтоновой форме<sup>1)</sup>

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{d\zeta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{dt}{d\zeta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (7.20)$$

где функция  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$ , определяемая выражениями (7.17), играет роль гамильтониана, а  $\zeta$  является параметром, изменяющимся вдоль характеристики.

Решение  $\{t(\zeta), \mathbf{r}(\zeta)\}$  уравнений (7.20) определяет *пространственно-временные лучи* в четырехмерном пространстве  $\{t, \mathbf{r}\}$ , являющиеся, как мы увидим ниже, мировыми линиями волновых пакетов. Пространственные лучи (или просто лучи)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\zeta)$  являются проекциями пространственно-временных лучей на трехмерное (координатное) пространство  $\mathbf{r}$ . В то же время пространственно-временные лучи  $\{t(\zeta), \mathbf{r}(\zeta)\}$  можно рассматривать как проекцию 8-мерной фазовой траектории  $\{t(\zeta), \mathbf{r}(\zeta), \omega(\zeta), \mathbf{k}(\zeta)\}$ , удовлетворяющей системе уравнений (7.20), на четырехмерное пространство  $\{t, \mathbf{r}\}$ .

Уравнение пространственно-временных лучей (7.20) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}} \Big|_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}} \equiv \mathbf{g}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \Big|_{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega}}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Используя здесь гамильтониан (7.17), получаем

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \nabla n, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (7.22)$$

<sup>1)</sup> Одно из четырех уравнений (7.20) является следствием трех остальных уравнений, поскольку величины  $t, r_j, k_j, \omega$  связаны уравнением  $\mathcal{H} = 0$ .

где величина

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}} \Big/ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = c \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (7.23)$$

представляет собой *групповую скорость* волны. В силу изотропности среды групповая скорость  $\mathbf{g}$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{k} = \nabla \Phi$ , т. е. по нормали к фазовому фронту  $\Phi(t, \mathbf{r}) = \text{const}$  при фиксированном  $t$ <sup>1)</sup>. В отсутствие дисперсии, когда проницаемость  $\varepsilon$  не зависит от частоты,  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}) = n^2(\mathbf{r})$ , групповая скорость, согласно (7.23), совпадает с фазовой:

$$\mathbf{g} = \frac{c}{n} \mathbf{l} = v_{\Phi} \mathbf{l} = v_{\Phi}. \quad (7.24)$$

Согласно (7.22), частота волны  $\omega$  остается неизменной вдоль пространственно-временной траектории

$$\omega = \text{const} = \omega^0 \quad (7.25)$$

и определяется начальным условием, которое мы обсудим в п. 6.

Если учесть постоянство частоты на луче (7.25) и ввести в качестве параметра вдоль луча длину дуги  $\sigma$  по формуле  $d\sigma = g dt$ , то первые два уравнения в (7.22) легко преобразовать к виду

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{l} = \frac{\mathbf{p}}{n}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma} = \nabla n \quad \left( \mathbf{p} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} = n\mathbf{l} \right), \quad (7.26)$$

характерному для уравнений лучей (2.17) в случае монохроматических волн, при этом групповое время распространения волны равно

$$t = t^0 + \int_{\sigma^0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{g}. \quad (7.27)$$

Согласно (7.26), путь волн с мгновенной частотой  $\omega$  отвечает такая же траектория, как и для монохроматической волны с той же частотой, но следующий путь, с несколько иной частотой  $\omega_1 = \omega + \delta\omega$ , пойдет уже по другой траектории, соответствующей час-

<sup>1)</sup> Введя координату  $x_4 = ct$  и четвертую компоненту волнового вектора  $k_4 = -\omega/c$ , четырехкомпонентную величину

$$G = \alpha \{ \mathbf{g}, c \} = \alpha \left\{ \frac{d\mathbf{r}}{dt}, c \right\} = \alpha c \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_4} \right\} \Big/ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_4}$$

( $\alpha = (1 - g^2/c^2)^{-1/2}$ ) можно было бы рассматривать как 4-вектор групповой скорости, касательный к мировой линии  $\{t, \mathbf{r}(t)\}$  и нормальный к дисперсионной поверхности  $\mathcal{H} = \text{const}$  (см. [30, 87, 88], где обсуждаются конкретные виды дисперсии и изложен графический способ построения лучей, а также [92], где последовательно рассмотрена роль 4-вектора групповой скорости в электродинамике).

тоте  $\omega_1$ . В связи с этим в диспергирующей среде возможен обгон одних волновых пакетов другими, имеющими большую групповую скорость (подробнее см. § 19). В отсутствие же дисперсии пространственно-временные лучи становятся частотно-независимыми, так что мировые линии волновых пакетов с разными частотами совпадают.

**6. Начальные условия.** В отличие от геометрической оптики монохроматических волн, в рамках пространственно-временной геометрической оптики допустимо задавать *нестационарные* начальные условия, отвечающие модулированным (в частности, импульсным) колебаниям. Более того, начальные условия теперь можно задавать на *движущихся поверхностях* (движущиеся источники, отражение от движущихся границ разделов и др.). В общем случае начальные условия для поля могут быть заданы на трехмерной гиперповерхности  $\Sigma$  в четырехмерном мире  $\{t, r\}$ . Уравнение  $\Sigma$  запишем в параметрической форме:

$$r = r^0(\xi), \quad t = t^0(\xi), \quad (7.28)$$

где  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  — криволинейные координаты на  $\Sigma$ , которые служат нам *лучевыми координатами*.

В частности, если начальные условия заданы на покоящейся поверхности  $Q$ , то двумя лучевыми координатами могут служить, как в §§ 1—3, криволинейные координаты на  $Q$ , а в качестве третьей можно взять начальный момент времени  $t^0$ :

$$r|_{\Sigma} = r^0(\xi, \eta), \quad t|_{\Sigma} = t^0, \quad \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = t^0. \quad (7.29)$$

Для точечного источника, движущегося по траектории  $r = \rho(t)$ , лучевыми координатами могут служить начальный момент выхода луча  $t^0$  и угловые координаты на бесконечно малой сфере, окружающей источник:

$$r|_{\Sigma} = \rho(t^0), \quad t|_{\Sigma} = t^0, \quad \xi_1 = \theta, \quad \xi_2 = \varphi, \quad \xi_3 = t^0 \quad (7.30)$$

( $\theta$  и  $\varphi$  — угловые координаты на сфере).

Пусть на  $\Sigma$  задано начальное поле в форме, соответствующей нулевому приближению пространственно-временной геометрической оптики:

$$u|_{\Sigma} = A(t^0, r^0) e^{i\varphi(t^0, r^0)} = A^0(\xi) e^{i\varphi^0(\xi)}. \quad (7.31)$$

Дифференцируя начальный эйконал  $\varphi(t^0, r^0) = \varphi^0(\xi)$  по  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), получим

$$\frac{\partial \varphi^0}{\partial \xi_j} = \left( \nabla \varphi \frac{\partial r}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi_j} \right) \Big|_{\Sigma} = k^0 \frac{\partial r^0}{\partial \xi_j} - \omega^0 \frac{\partial t^0}{\partial \xi_j}. \quad (7.32)$$

Три уравнения (7.32) вместе с уравнением эйконала (7.17) определяют начальные значения частоты  $\omega|_{\Sigma} = \omega^0(\xi)$  и волнового



вектора  $\mathbf{k}|_{\Sigma} = \mathbf{k}^0(\xi)$  и вместе с условиями (7.28) задают семейство пространственно-временных лучей  $\{t, \mathbf{r}(t, \xi)\}$ . Так, в случае движущегося точечного источника эйконалу  $\varphi^0(t^0)$  отвечает начальная частота  $\omega^0(t^0) = -\partial\varphi^0(t^0)/\partial t^0$  и начальный волновой вектор  $\mathbf{k}^0(\theta, \vartheta, t^0) = l^0(\theta, \vartheta) \frac{\omega^0}{c} n[\rho(t^0)]$ , где  $l^0(\theta, \vartheta)$  — единичный вектор, соответствующий углам  $\theta$  и  $\vartheta$ :

$$l^0(\theta, \vartheta) = e_z \cos \theta + \sin \theta (e_x \cos \vartheta + e_y \sin \vartheta).$$

В качестве примера на рис. 7.1 представлены пространственно-временные траектории на плоскости  $\{z, t\}$  для двух случаев. Рис. 7.1, а отвечает полю  $u^0$  с переменной частотой  $\omega^0(t^0)$ , заданному при  $z=0$ . Здесь предполагается, что среда однородна, но обладает дисперсией, вследствие чего лучи имеют различный наклон  $dz/dt = g(\omega^0)$ . На рис. 7.1, б изображена система  $\{z, t\}$ -лучей для случая, когда монохроматическое поле излучается источником, движущимся по траектории  $z = z_u(t)$ .

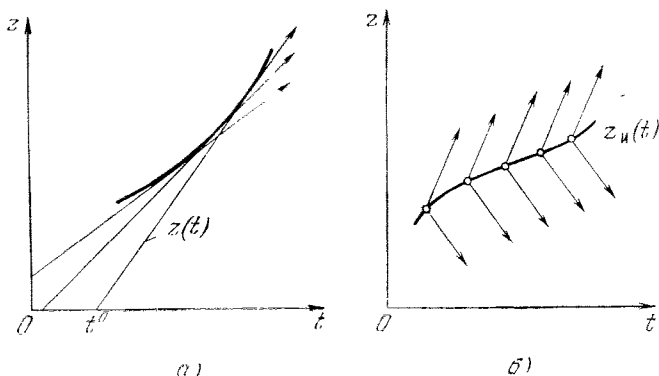


Рис. 7.1.

Семейство мировых линий  $\{t, \mathbf{r}(t, \xi)\}$  вместе с частотой  $\omega(t, \xi)$  и волновым вектором  $\mathbf{k}(t, \xi)$  образуют в расширенном фазовом пространстве  $\{t, \mathbf{r}; \omega, \mathbf{k}\}$  семейство фазовых траекторий (лагранжево многообразие), характеризуемое параметрами  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Траектории этого семейства не пересекаются, в то время как в четырехмерном мире  $\{t, \mathbf{r}\}$  через данную мировую точку могут проходить многие мировые линии.

**7. Эйконал и амплитуда волны.** На пространственно-временном луче  $\{t, \mathbf{r}(t)\}$  производная эйконала  $\varphi(t, \mathbf{r})$  равна

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega + \mathbf{k}g.$$

Отсюда находим

$$\varphi(t) = \varphi^0(t^0) + \int_{t^0}^t (kg - \omega) dt, \quad (7.33)$$

где  $\varphi(t) \equiv \varphi[t, r(t)]$ . Для произвольного параметра  $\zeta$  на луче имеем

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{dt}{d\zeta} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{dr}{d\zeta} = -\omega \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega} + k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k},$$

откуда

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0 + \int_{\zeta^0}^{\zeta} \left( -\omega \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\omega} + k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k} \right) d\zeta. \quad (7.34)$$

Учитывая постоянство  $\omega$  на мировой линии  $\{t, r(t)\}$  и используя в качестве параметра длину дуги  $\sigma$ , (7.33) можно представить в иной форме:

$$\varphi(\sigma) = \varphi^0 + \frac{\omega}{c} \int_{t^0}^t (ng - c) dt = \varphi^0 + \omega \int_{\sigma^0}^{\sigma} \left( \frac{1}{v_{\Phi}} - \frac{1}{g} \right) d\sigma, \quad (7.35)$$

причем время группового запаздывания волнового пакета  $\Delta t_g = t - t^0$  определяется формулой (7.27).

В среде без дисперсии, когда  $g = c/n$ , второе слагаемое в (7.33) или (7.35) обращается в нуль, так что на мировой линии  $\{t, r(t)\}$  эйконал оказывается сохраняющейся величиной:

$$\varphi(t) = \text{const} = \varphi^0. \quad (7.36)$$

Групповое запаздывание в этом случае оказывается не зависящим от частоты:

$$\Delta t_g = \frac{1}{c} \int_{\sigma^0}^{\sigma} n(r) d\sigma. \quad (7.37)$$

Как и в случае монохроматических волн, уравнение переноса удается свести к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Учитывая, что  $\nabla A^2 \nabla \varphi + A^2 \Delta \varphi = \nabla (k A^2)$  и что  $k = g \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon)}{\partial \omega} / 2c^2$ , придадим уравнению (7.18) форму закона сохранения энергии<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } S = 0, \quad (7.38)$$

<sup>1)</sup> Уравнению переноса (7.38) можно придать четырехмерную форму, записав его в виде равенства нулю четырехмерной дивергенции  $\partial S_{\alpha} / \partial x_{\alpha} = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ,  $S_4 = cw$ .

где величины

$$w = \frac{A^2}{2} \frac{\partial(\omega^2 \xi)}{\omega \partial \omega} = \frac{c}{g} n A^2, \quad S = wg = cn A^2 l \quad (7.39)$$

имеют смысл соответственно плотности энергии и плотности потока энергии (вектор Умова—Пойнтинга для данной задачи). Вектор  $S$  лишь множителем  $c$  отличается от вектора интенсивности  $I = pA^2 = nA^2 l$ , с которым мы имели дело в § 3:  $S = Ic$ .

Учитывая соотношение

$$\operatorname{div} S = w \operatorname{div} g + g \nabla w$$

и помня, что на мировой линии  $\{t, r(t)\}$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla w \frac{dr}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + g \nabla w,$$

уравнение сохранения представим в форме

$$\frac{dw}{dt} + w \operatorname{div} g = 0. \quad (7.40)$$

Но в соответствии с формулой Лиувилля [426]

$$\operatorname{div} g = \frac{d}{dt} \ln j(t, \xi), \quad (7.41)$$

где  $j(t, \xi)$  — якобиан перехода от лучевых координат  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  к пространственным координатам  $r = (x_1, x_2, x_3)$ :

$$j(t, \xi) = \det \left\| \frac{\partial x_i(t, \xi)}{\partial \xi_m} \right\| = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \frac{\partial r}{\partial \xi_3}. \quad (7.42)$$

Поэтому из (7.30) вытекает следующий закон изменения плотности энергии:

$$w(t) = w^0(t^0) \frac{j(t^0, \xi)}{j(t, \xi)}, \quad (7.43)$$

из которого можно определить и амплитуду волны:

$$A(t) = A^0(t^0) \left\{ \frac{n^0 g j(t^0, \xi)}{n g^0 j(t, \xi)} \right\}^{1/2}. \quad (7.44)$$

Согласно (7.43) и (7.44), величины  $w(t)$  и  $A(t)$  связаны со своими начальными значениями в момент времени  $t^0 = t - \Delta t_g$ , отстоящий от данного момента  $t$  на время группового запаздывания. Отсюда и непосредственно из (7.40) следует, что в приближении пространственно-временной геометрической оптики волновые пакеты движутся по мировым линиям  $\{t, r(t)\}$ , а их движение в координатном пространстве происходит с групповой скоростью  $g$ .

Отношение якобианов в (7.43) и (7.44) характеризует изменение объема волнового пакета  $dV(t) = j(t, \xi) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ . Этот объем определяется как поперечным сечением лучевой трубки  $da$ , так и длиной пакета  $d\sigma = gdt^0$ :  $dV = gda dt^0$  (рис. 7.2). Так,

в случае задания начальных условий в форме (7.29),

$$j(t, \xi) = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial t^0} =$$

$$= \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt^0} = -g\mathcal{D}(\sigma),$$
(7.45')

так что

$$\frac{j(t^0, \xi)}{j(t, \xi)} = \frac{j^0}{j} = \frac{g^0 \mathcal{D}(\sigma^0)}{g \mathcal{D}(\sigma)} = \frac{g^0 da^0}{g da}.$$
(7.45'')

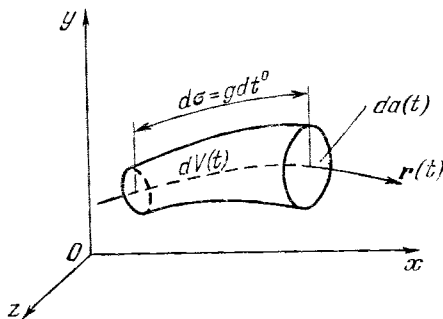


Рис. 7.2.

В случае монохроматического начального поля  $u(\xi, \eta, t^0) = A^0(\xi, \eta) \exp\left\{-i\omega t^0 + i\frac{\omega}{c} \psi^0(\xi, \eta)\right\}$ , заданного на неподвижной поверхности  $Q: \mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\xi, \eta)$ , все соотношения пространственно-временной геометрической оптики переходят в соответствующие выражения из §§ 1—3. В частности, из (7.34) и (7.35) для фазы  $\varphi(\sigma)$  получаем выражение

$$\varphi = -\omega t^0 + \frac{\omega}{c} \psi^0 + \omega \int_{\sigma^0}^{\sigma} \left( \frac{1}{v_{\varphi}} - \frac{1}{g} \right) d\sigma = -\omega t + \frac{\omega}{c} \left[ \psi^0 + \int_{\sigma^0}^{\sigma} n d\sigma \right],$$

согласующееся с (2.15), а (7.44) переходит в (3.18), поскольку в соответствии с (7.45) и (7.24)  $nj/g = -n\mathcal{D}(\sigma)$ .

**8. Пространственно-временные каустики.** Результирующее поле, связанное с семейством лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t, \xi)$ , может быть представлено в параметрической форме

$$u(t, \xi) = A(t, \xi) e^{i\varphi(t, \xi)}. \quad (7.46)$$

Явная зависимость поля  $u$  от  $t$  и  $\mathbf{r}$  может быть найдена исключением из (7.46) лучевых координат  $\xi$ , которые должны быть выражены через  $t$  и  $\mathbf{r}$  из уравнения семейства лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t, \xi)$ . При наличии нескольких пространственно-временных лучей, проходящих в интересующую нас мировую точку  $(t, \mathbf{r})$ , т. е. при наличии нескольких наборов лучевых координат  $\xi_{\nu}(t, \mathbf{r})$ , полное поле будет равно сумме лучевых полей вида (7.46):

$$u(t, \mathbf{r}) = \sum_{\nu} A(t, \xi_{\nu}) e^{i\varphi(t, \xi_{\nu})} \Big|_{\xi_{\nu} = \xi_{\nu}(t, \mathbf{r})}. \quad (7.47)$$

При многолучевости обязательно образуются области, где сливаются несколько (два и более) лучей и где якобиан  $j$  обращается в нуль. Это отвечает попаданию мировой точки  $\{t, r\}$  на пространственно-временную каустику, положение которой определяется уравнениями

$$r = R(t, \xi), \quad j(t, \xi) = 0.$$

При приближении к пространственно-временной каустике амплитуда поля неограниченно возрастает и лучевое приближение теряет силу. Частный случай пространственно-временной каустики представлен на рис. 7.1, а.

Свойства таких каустик во многом подобны свойствам пространственных каустик, в частности, они допускают классификацию типа приведенной в § 4. Некоторые особенности пространственно-временных каустик обсуждаются в § 19 на конкретных задачах (см. также [23]).

**9. Распространение разрывов (сингулярностей) поля в среде без дисперсии.** В недиспергирующих средах можно рассчитывать на применимость геометрической оптики не только для квазимонохроматических высокочастотных импульсов (см. пп. 2—8), но и для аперiodических возмущений и разрывов (сингулярностей) поля. Точнее, речь идет об описании поля *в окрестности волнового фронта*, где оно в основном определяется высокочастотными компонентами спектра, что и сближает эту теорию с пп. 2—8. Пространственно-временная геометрическая оптика, описывающая распространение аперiodических возмущений и разрывов поля, рассматривалась в работах [15, 19, 29, 78, 89, 94] и др.

Для частного случая начальных условий, заданных на неподвижной поверхности, основные результаты геометрической оптики легко воспроизвести с помощью спектрального представления. Действительно, пусть

$$u(\omega, r) e^{-i\omega t} = f_0(\omega) e^{-i\omega t} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(r)}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi(r)} \right) \quad (7.48)$$

— монохроматическое лучевое поле с начальным условием

$$u^0(\omega, r^0) e^{-i\omega t} = f_0(\omega) e^{-i\omega t} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^0(r^0)}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi^0(r^0)} \right),$$

заданным на поверхности  $Q: r = r^0(\xi, \eta)$ . По сравнению с §§ 1—3 мы восстановили здесь временную зависимость  $e^{-i\omega t}$  и добавили множитель  $f_0(\omega)$ , представляющий собой спектральную ампли-

туду излученного импульса  $f_0(t)$ :

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (7.49)$$

Суперпозиция монохроматических волн (7.48) с различными частотами дает для нестационарного поля  $u(t, r)$  выражение<sup>1)</sup>

$$u(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(r)}{\left(i \frac{\omega}{c}\right)^m} e^{i \frac{\omega}{c} \Psi(r)} \right\} f_0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m(r) f_m\left(t - \frac{\Psi(r)}{c}\right), \quad (7.50)$$

в котором  $\tilde{A}_m(r) = (-c)^m A_m(r)$ , а

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\omega) e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^m} d\omega. \quad (7.51)$$

Согласно (7.51), последовательность функций  $f_0(t)$ ,  $f_1(t)$ , ... удовлетворяет условию

$$\frac{d^m f_m(t)}{dt^m} = f_0(t) \quad \text{или} \quad \frac{df_m(t)}{dt} = f_{m-1}(t). \quad (7.52)$$

Представление поля в виде разложения (7.50) по системе функции  $f_m\left(t - \frac{\Psi}{c}\right)$  позволяет изучать поведение сигналов произвольной формы, в том числе распространение коротких импульсов и разрывов (сингулярностей) поля<sup>2)</sup>. Как и в случае монохроматических волн, главная часть поля описывается нулевым членом лучевого ряда (7.50):

$$u(t, r) \approx A_0(r) f_0\left(t - \frac{\Psi(r)}{c}\right), \quad (7.53)$$

который отвечает сохранению формы импульса на трассе распространения. Последующие же члены разложения (7.50) описывают искажение формы импульса.

Степень гладкости функций  $f_m(t)$  возрастает с номером  $m$ . Например, если разрыв поля описывается единичной функцией Хевисайда

$$f_0(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0, \quad f_0(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

<sup>1)</sup> Мы учитываем здесь, что  $A_m(r)$  и  $\Psi(r)$  не зависят от частоты.

<sup>2)</sup> При  $f_0(t) = e^{-i\omega t}$  и  $f_m(t) = \frac{(-i\omega)^m}{m!} e^{-i\omega t}$  мы возвращаемся к монохроматическому полю (§§ 1-3).

то функции  $f_m(t)$ , равные

$$f_m(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad f_m(t) = t^m/m! \quad \text{при } t \geq 0,$$

непрерывны при  $t = 0$  вместе со всеми производными до  $(m-1)$ -го порядка. В окрестности разрыва поля на фазовом фронте  $t - \psi(\mathbf{r})/c = 0$  все функции  $f_m(t - \psi/c)$  малы по сравнению с  $f_0$ , что и позволяет ограничиться в этой окрестности нулевым приближением (7.53).

Область применимости приближения геометрической оптики ограничена тем, что для низкочастотных составляющих спектра  $f_0(\omega)$  нарушается неравенство (1.4)  $\mu \sim \frac{1}{kL} \sim \frac{c}{\omega L} \ll 1$ . Поэтому (7.53) удовлетворительно описывает поведение только высокочастотной, быстроизменяющейся части поля с характерными частотами  $\omega > c/L$  и характерными временами  $\tau < L/c$ , тогда как низкочастотная, медленно изменяющаяся часть ( $\omega < c/L$ ,  $\tau > L/c$ ) подвержена заметным искажениям. Именно поэтому метод пространственно-временной геометрической оптики хорошо воспроизводит структуру поля в окрестности разрывов, но вносит значительную погрешность по прошествии времени  $\Delta t > L/c$  после прохождения разрыва.

При выводе представления (7.50) из (7.48) величины  $A_m(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r})$  считались известными из теории для монохроматического поля (§§ 1—3). Между тем эти величины можно найти и непосредственно, если подставить (7.50) в волновое уравнение без дисперсии

$$\square u \equiv \Delta u - \frac{n^2(\mathbf{r})}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7.54)$$

и приравнять нулю коэффициенты при функциях  $f_m\left(t - \frac{\psi}{c}\right)$ . Эти операции приводят к уравнениям геометрической оптики для монохроматических волн: к уравнению эйконала (1.11) для  $\psi$  и к уравнению переноса (1.14) для  $\tilde{A}_m = (-c)^m A_m$ . Следовательно, функции  $\tilde{A}_m(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r})$ , входящие в лучевой ряд (7.50), определяются по формулам §§ 1—3.

Более общий подход, пригодный и для описания полей, возбужденных движущимся источником или движущейся границей раздела, опирается на представление поля в форме [86]

$$u(t, \mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t, \mathbf{r}) f_m[\varphi(t, \mathbf{r})], \quad (7.55)$$

где функции  $f_m(t)$  считаются известными и при  $m \geq 1$  удовлетворяют условиям (7.52). Подстановка лучевого ряда (7.55) в волновое уравнение (7.54) и приравнивание коэффициентов при

одинаковых функциях  $f_m(t)$  приводит к уравнению эйконала

$$(\nabla\varphi)^2 - \frac{n^2(r)}{c^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0 \quad (7.56)$$

и уравнениям переноса ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$2 \left( \nabla A_m \nabla \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial A_m}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + A_m \square \varphi = - \square A_{m-1}. \quad (7.57)$$

Если обозначить  $\mathbf{k} = \nabla\varphi$  и  $\omega = -\partial\varphi/\partial t$ , то нетрудно показать, что (7.56) и (7.57) совпадают с уравнениями геометрической оптики для квазимонохроматических волн (7.17) и (7.18), если в последних пренебречь дисперсией. Это означает, что для определения искомым функций  $\varphi(t, \mathbf{r})$  и  $A_m(t, \mathbf{r})$  ( $m \geq 0$ ) справедливы формулы пп. 2—8. Разумеется, лучевой ряд (7.50) является частным случаем разложения (7.55). Вопросы математического обоснования этих разложений рассматривались в работах [78, 86, 89, 99] и др.

Указанный метод использовался для решения задач об излучении движущихся источников [86, 96, 97], об отражении волн от движущихся границ раздела [84, 86, 98] и др. (дополнительную библиографию можно найти в [22, 23, 29, 84, 85, 93]).

## § 8. Метод разделения переменных в уравнении эйконала

**1. Полный интеграл уравнения эйконала.** При некоторых условиях оказывается удобным решать не уравнения лучей (2.19), а непосредственно уравнение эйконала (1.11), при этом траектории лучей легко определяются через эйконал. Такой подход иногда может быть более предпочтителен, чем метод характеристик, например, на этапе выбора модели двумерно или трехмерно неоднородной среды при рассмотрении тех или иных физических задач. Основным методом непосредственного решения уравнения эйконала является метод (аддитивного) *разделения переменных*<sup>1)</sup>.

Этот метод предполагает отыскание эйконала  $\psi$  в виде суммы слагаемых, каждое из которых зависит лишь от одной переменной  $q_j$ :

$$\psi = \psi_1(q_1) + \psi_2(q_2) + \psi_3(q_3). \quad (8.1)$$

В случае, когда уравнение эйконала (1.11) допускает разделение переменных, подстановка (8.1) сводит его к трем независимым

<sup>1)</sup> Метод разделения переменных является общим методом решения уравнений типа Гамильтона — Якоби [19, 31, 39, 103] (см. также монографии по механике [3—5]).



обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\mathcal{H}_j \left( q_j, \frac{d\psi_j}{dq_j}; \alpha_1, \alpha_2 \right) = 0, \quad (8.2)$$

где  $j = 1, 2, 3$ , а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — постоянные разделения. Решения уравнений (8.2) можно получить в квадратурах, если их удастся разрешить относительно  $d\psi_j/dq_j$ .

Найденная таким путем функция  $\psi$  будет содержать две независимые постоянные разделения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :  $\psi = \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2)$ . Кроме того, учитывая, что  $\psi$  входит в уравнение эйконала  $(\nabla\psi)^2 = n^2$  только через частные производные, к решению (8.1) может быть добавлена произвольная аддитивная постоянная  $\alpha_3$ . В результате получим

$$\psi = \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 = \Psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (8.3)$$

Решение (8.3) содержит столько независимых постоянных  $\alpha_i$ , сколько имеется независимых переменных  $q_i$ , и называется *полным интегралом* уравнения эйконала. Полный интеграл подчиняется условию [19, 39]

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right\| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (8.4)$$

которое эквивалентно требованию независимости постоянных  $\alpha_j$ . Метод разделения переменных дает конструктивный способ нахождения полного интеграла (8.3) при условиях, которые обсуждаются ниже (в пп. 2—4).

**2. Разделение переменных в двумерном случае (декартовы координаты).** В декартовой системе координат уравнение эйконала

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 = n^2(x, y) \quad (8.5)$$

допускает разделение переменных, т. е. представление решения в виде  $\psi = \psi_1(x) + \psi_2(y)$  только при условии

$$n^2(x, y) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y), \quad (8.6)$$

где  $\varepsilon_1(x)$  и  $\varepsilon_2(y)$  — произвольные функции.

Из (8.5) и (8.6) в этом случае следует, что

$$\left[ \psi'_1(x) \right]^2 - \varepsilon_1(x) = - \left[ \psi'_2(y) \right]^2 + \varepsilon_2(y). \quad (8.7)$$

Это равенство должно выполняться тождественно по  $x$  и по  $y$ , и поэтому обе его части равны некоторой произвольной постоянной  $\alpha$ . Тогда

$$\psi'_1(x) = \pm \sqrt{\varepsilon_1(x) + \alpha}, \quad \psi'_2(y) = \pm \sqrt{\varepsilon_2(y) - \alpha}. \quad (8.8)$$

Интегрируя (8.8), приходим к следующему выражению для полного интеграла уравнения эйконала:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \psi_1(x) + \psi_2(y) = \\ &= \pm \int_{x^0}^x \sqrt{\epsilon_1(x) + \alpha} dx \pm \int_{y^0}^y \sqrt{\epsilon_2(y) - \alpha} dy + \alpha_0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Знаки и неизвестные постоянные  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  и  $x^0$ ,  $y^0$  в (8.9) выбираются из начальных условий для эйконала и определяются, таким образом, конкретной физической постановкой задачи.

**3. Разделение переменных в двумерном случае (произвольные криволинейные ортогональные координаты).** Напомним (см. [100, 101]), что произвольные криволинейные ортогональные координаты  $q_1$ ,  $q_2$  связаны с декартовыми координатами  $x$ ,  $y$  при помощи соотношения

$$q_1 + iq_2 = f(x + iy), \quad (8.10')$$

или

$$w = f(z), \quad w = q_1 + iq_2, \quad z = x + iy, \quad (8.10'')$$

где  $f(z)$  — произвольная аналитическая функция. В своей области регулярности эта функция осуществляет конформное отображение плоскости  $x$ ,  $y$  на плоскость  $q_1$ ,  $q_2$ :

$$q_1 = q_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad q_2 = q_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy). \quad (8.10''')$$

В координатах  $q_1$ ,  $q_2$  квадрат длины дуги равен

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 = h^2 (dq_1^2 + dq_2^2). \quad (8.11)$$

Равенство коэффициентов Ламе  $h_1 = h_2 = h$  и ортогональность координат  $q_1$  и  $q_2$  ( $\nabla q_1 \nabla q_2 = 0$ ) вытекают из соотношений (8.10) и уравнений Коши — Римана для аналитической функции  $f(z)$ , при этом в обозначениях формулы (8.10''') для коэффициента Ламе имеем [100]:

$$h = \left| \frac{dw}{dz} \right|^{-1} = \left| \frac{dz}{dw} \right|. \quad (8.12)$$

Запишем уравнение эйконала в криволинейных координатах  $q_1$ ,  $q_2$ :

$$(\nabla\psi)^2 \equiv \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \right)^2 \right] = n^2, \quad (8.13')$$

или

$$\left( \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \right)^2 = h^2 n^2. \quad (8.13'')$$

Уравнение (8.13'') аналогично уравнению эйконала (8.5) в декартовой системе координат. Поэтому разделение переменных в

(8.13'') возможно, если выполняется условие

$$h^2 n^2 = \varepsilon_1(q_1) + \varepsilon_2(q_2) \quad (8.14')$$

или

$$n^2 = \frac{1}{h^2} [\varepsilon_1(q_1) + \varepsilon_2(q_2)] \equiv n^2(q_1, q_2), \quad (8.14'')$$

где  $\varepsilon_1(q_1)$  и  $\varepsilon_2(q_2)$  — произвольные функции координат  $q_1$  и  $q_2$ .

При выполнении этого условия полный интеграл уравнения эйконала (8.13) имеет вид, аналогичный (8.9):

$$\psi = \pm \int_{q_1^0}^{q_1} \sqrt{\varepsilon_1(q_1) + \alpha} dq_1 \pm \int_{q_2^0}^{q_2} \sqrt{\varepsilon_2(q_2) - \alpha} dq_2 + \alpha_0, \quad (8.15)$$

где  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  — постоянные разделения, а  $q_{1,2}^0$  — постоянные интегрирования.

Условие представления величины  $n^2 h^2 = n^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2$  в виде суммы (8.14') эквивалентно требованию

$$\frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} \left\{ n^2 \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 \right\} = 0. \quad (8.16)$$

Это уравнение определяет системы ортогональных криволинейных координат на плоскости, которые допускают разделение переменных в уравнении эйконала (8.13), и одновременно ограничивает допустимые законы изменения показателя преломления.

Следует отметить, что условия (8.14) и (8.16) совпадают с условиями разделения переменных в уравнении Гельмгольца (1.1), которые подробно рассматривались в литературе [100], особенно для случая однородной среды.

Решения уравнения (8.16) в *однородной* среде ( $n = \text{const}$ ) рассмотрены в [100], где показано, что ему удовлетворяют декартова, полярная, параболическая и эллиптическая системы координат на плоскости. Этими системами и ограничены возможности разделения переменных в двумерном уравнении эйконала для однородной среды.

В случае *неоднородной* среды возможности разделения переменных в двумерном уравнении эйконала значительно богаче, чем для однородной среды. В самом деле, выбирая показатель преломления  $n(r)$  согласно (8.14''), можно добиться выполнения условия разделения переменных для любой ортогональной системы координат на плоскости. Например, помимо систем координат, упомянутых выше применительно к случаю однородной среды, могут быть полезны также гиперболическая и биполярная системы координат ([100], т. 2).

Отметим, что, кроме координат  $q_1, q_2$ , определяемых каноническим преобразованием (8.10), можно использовать более общие ортогональные координаты  $\xi$  и  $\eta$ , вводимые при помощи формул

$$\xi = \xi(q_1), \quad \eta = \eta(q_2), \quad \text{или} \quad q_1 = q_1(\xi), \quad q_2 = q_2(\eta). \quad (8.17)$$

Коэффициенты Ламе этих координат равны

$$h_\xi = h \frac{dq_1(\xi)}{d\xi}, \quad h_\eta = h \frac{dq_2(\eta)}{d\eta}, \quad (8.18)$$

где  $h$  определяется формулой (8.12). Очевидно, в общем случае  $h_\xi \neq h_\eta$ .

Достаточное условие разделения переменных в двумерном уравнении эйконала, записанном в координатах  $\xi, \eta$ ,

$$(\nabla \psi)^2 \equiv \frac{1}{h_\xi^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{h_\eta^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 = n^2, \quad (8.19)$$

может быть представлено в виде

$$n^2 = \frac{1}{h_\xi^2} \varepsilon_1(\xi) + \frac{1}{h_\eta^2} \varepsilon_2(\eta), \quad (8.20)$$

где  $\varepsilon_1(\xi)$  и  $\varepsilon_2(\eta)$  — произвольные функции, при этом полный интеграл уравнения (8.19) равен

$$\psi = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{\varepsilon_1(\xi) + \alpha} d\xi \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\varepsilon_2(\eta) - \alpha} d\eta + \alpha_0. \quad (8.21)$$

**4. Разделение переменных в трехмерном случае.** Вопрос об условиях разделения переменных в уравнениях типа Гамильтона — Якоби в трехмерном случае неоднократно рассматривался в литературе, однако достаточно общих условий, по всей видимости, до сих пор не получено<sup>1)</sup>. Ограничимся поэтому списком наиболее употребительных разделяющихся координат в трехмерном уравнении эйконала

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j^2(q_1, q_2, q_3)} \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \right)^2 = n^2(q_1, q_2, q_3), \quad (8.22)$$

где  $h_j$  — коэффициенты Ламе ортогональных координат  $q_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), а также укажем вид соответствующих функций  $n(q_1, q_2, q_3)$ , определяющих законы изменения показателя преломления.

<sup>1)</sup> Этот вопрос изучался, в частности, Штеккелем; условия Штеккеля обсуждаются в [31].

а) *Декартовы координаты*  $x, y, z$ . Полный интеграл уравнения эйконала

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y) + \varepsilon_3(z) \quad (8.23)$$

имеет вид, аналогичный (8.9):

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & \pm \int_{x^0}^x \sqrt{\varepsilon_1(x) + \alpha_1} dx \pm \int_{y^0}^y \sqrt{\varepsilon_2(y) + \alpha_2} dy \pm \\ & \pm \int_{z^0}^z \sqrt{\varepsilon_3(z) - \alpha_1 - \alpha_2} dz + \alpha_3. \end{aligned} \quad (8.24)$$

б) *Круговые цилиндрические координаты*  $z, r, \varphi$ . В этом случае уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon_1(r) + \frac{1}{r^2} \varepsilon_2(\varphi) + \varepsilon_3(z) \quad (8.25)$$

имеет решение

$$\begin{aligned} \psi = & \pm \int_{r^0}^r \sqrt{\varepsilon_1(r) - \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr \pm \int_{\varphi^0}^{\varphi} \sqrt{\varepsilon_2(\varphi) + \alpha_2} d\varphi \pm \\ & \pm \int_{z^0}^z \sqrt{\varepsilon_3(z) + \alpha_1} dz + \alpha_3. \end{aligned} \quad (8.26)$$

в) *Сферические координаты*  $r, \theta, \varphi$ . Уравнение эйконала

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\right)^2 = \\ = \varepsilon_1(r) + \frac{1}{r^2} \varepsilon_2(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \varepsilon_3(\varphi) \end{aligned} \quad (8.27)$$

допускает следующий полный интеграл:

$$\begin{aligned} \psi = & \pm \int_{r^0}^r \sqrt{\varepsilon_1(r) - \frac{\alpha_1}{r^2}} dr \pm \int_{\varphi^0}^{\varphi} \sqrt{\varepsilon_3(\varphi) + \alpha_2} d\varphi \pm \\ & \pm \int_{\theta^0}^{\theta} \sqrt{\varepsilon_2(\theta) + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \alpha_3. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Подобным же образом разделяются переменные в параболических, сфероидальных, эллиптических, тороидальных и бисферических координатах.

Следует отметить, что иногда могут существовать несколько систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении эйконала; например, в случае однородной среды разделение переменных возможно во всех координатах, перечисленных выше. Вопрос об удобстве той или иной системы координат в этом случае решается на основе дополнительных физических соображений с учетом особенностей геометрии задачи.

**5. Неполное (частичное) разделение переменных.** Всюду выше речь шла о полном разделении переменных в уравнении эйконала. Очевидно, что гораздо чаще возможно лишь частичное (неполное) разделение переменных, которое позволяет свести уравнение эйконала к уравнению в частных производных с меньшим числом независимых переменных [3—5]. Частичное разделение переменных возможно, например, если одна из координат явно не входит в уравнение эйконала. Такую координату в механике принято называть *циклической*, так как обычно это угловая координата (другие названия — *скрытая* или *игнорируемая* переменная). Если  $q_1$  — циклическая координата, то она может быть выделена в выражении для эйконала

$$\psi(q_1, q_2, q_3) = \alpha_1 q_1 + \tilde{\psi}(q_2, q_3) \quad (8.29)$$

(простое доказательство см., например, в [3—5]). Если все координаты, кроме одной, являются циклическими, то, очевидно, можно провести полное разделение переменных.

В теории распространения волн циклические переменные встречаются очень часто: в сущности, для любой одномерно- (двумерно-) неоднородной среды в трехмерной волновой задаче имеются две (одна) циклические координаты. Так, в плоско-слоистой среде с  $n^2 = \varepsilon_3(z)$  циклическими являются координаты  $x$  и  $y$ , при этом из (8.29) следует

$$\psi = \tilde{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_1 x + \tilde{\alpha}_2 y \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon_3(z) - \tilde{\alpha}_1^2 - \tilde{\alpha}_2^2} dz, \quad (8.30)$$

что, разумеется, согласуется с общей формулой для полного интеграла (8.24) при  $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(y) = 0$ .

Другим примером циклической координаты является время  $t$  в пространственно-временном уравнении эйконала (7.17) для неоднородной стационарной среды. Выделяя  $t$  в эйконале  $\varphi(t, \mathbf{r})$ , получим

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = -\omega t + \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{r}) = -\omega t + \frac{\omega}{c} \psi(\omega, \mathbf{r}),$$

где роль постоянной разделения играет частота  $\omega$ . Этот результат, очевидно, согласуется со спектральным методом решения нестационарной задачи (см. § 7).

### 6. Полный интеграл уравнения эйконала и уравнения лучей.

Метод разделения переменных дает возможность найти в квадратурах решение не только уравнения эйконала, но и уравнений лучей (2.19). Траектории лучей определяются из полного интеграла уравнения эйконала дифференцированием, что следует из известной теоремы Якоби [19, 39]. Сформулируем эту теорему применительно к уравнению эйконала  $(\nabla\psi)^2 = n^2$ .

Если известен полный интеграл

$$\psi = \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2) + \alpha_3 \quad (8.31)$$

этого уравнения, то решения уравнений лучей (2.19) даются равенствами

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2) = \beta_1, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \psi(q_1, q_2, q_3; \alpha_1, \alpha_2) = \beta_2, \quad (8.32)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  наряду с  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  суть произвольные постоянные. Компоненты импульса  $\mathbf{p}$ , определяющего направление луча в криволинейной системе координат, находятся из выражений

$$\tilde{p}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8.33)$$

причем  $\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_3^2 = n^2$ , а орт  $\mathbf{l}$ , касательный к лучу, равен

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{p}}{n} = \frac{\nabla \psi}{n} = \frac{1}{n} \sum \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \sum \mathbf{e}_i \cos \delta_i, \quad (8.34)$$

где  $\mathbf{e}_i$  — орты, касательные к координатным линиям криволинейных координат  $q_i$ , а  $\cos \delta_i$  — направляющие косинусы луча в криволинейной системе координат.

Доказательство этих утверждений сводится к прямой проверке уравнений лучей (2.12) при помощи дифференцирования формул (8.32), (8.33) и приводится в общем виде в [19, 39] (см. также [102]).

Если систему уравнений (8.32) удастся разрешить<sup>1)</sup> относительно координат  $q_2$  и  $q_3$ , то уравнения, определяющие траектории лучей в криволинейных координатах, записываются в явной форме

$$q_2 = q_2(q_1; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2), \quad q_3 = q_3(q_1; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2). \quad (8.35)$$

Из (8.35) ясен физический смысл констант  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  и  $\beta_2$ : последние определяются из начальных условий для лучей, задающих координаты точек выхода и направления выхода лучей из некоторой исходной поверхности. Постоянные  $\alpha_{1,2}$  и  $\beta_{1,2}$  определяют семейство лучей: величины  $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$  неизменны на фиксированном луче и меняются при переходе к соседним лучам семейства. В двумерном случае уравнения семейства лучей опре-

<sup>1)</sup> Независимость уравнений (8.32) и, следовательно, их разрешимость относительно координат  $q_2$  и  $q_3$ , следуют из условия отличия от нуля якобиана (8.4).

деляется выражением

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi(q_1, q_2, \alpha, \alpha_0) = \beta, \quad (8.36)$$

где  $\Psi(q_1, q_2, \alpha, \alpha_0)$  — полный интеграл (8.15) двумерного уравнения эйконала в криволинейных координатах  $q_1, q_2$ . Из формул (8.15) и (8.36) найдем следующее уравнение семейства лучей в двумерно неоднородной среде, отвечающей условию (8.14):

$$\pm \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{dq_1}{\sqrt{\varepsilon_1(q_1) + \alpha}} \pm \int_{q_2^0}^{q_2} \frac{dq_2}{\sqrt{\varepsilon_2(q_2) - \alpha}} = 2\beta. \quad (8.37)$$

Знаки и все неизвестные постоянные в (8.37) определяются физической постановкой задачи.

Используя полученные соотношения, легко найти решения уравнений лучей в любой криволинейной системе координат, допускающей разделение переменных в уравнении эйконала (выражения для полных интегралов  $\Psi$  приведены выше, в пп. 3, 4). На основе этого метода получены решения многочисленных задач распространения волн в приближении геометрической оптики: рефракция волн в двумерно-неоднородной среде [104, 105]; учет влияния горизонтальных градиентов на распространение радиоволн в ионосфере [106—108], а также на волноводное распространение волн в акустическом и ионосферном волновых каналах [25, 49]; распространение волн в плавных волноводах [109], отражение радиоволн от неоднородных плазменных образований [110—118] и др. В [119, 120] рассмотрен метод разделения переменных в более сложном случае — для уравнения эйконала в анизотропной среде. Ниже, в гл. II, мы проиллюстрируем применение метода разделения переменных для различных неоднородных сред.

В заключение отметим, что, кроме методов характеристик и разделения переменных, для решения уравнения эйконала могут быть использованы другие известные методы решения уравнений в частных производных первого порядка [19, 39, 103], например, метод Лагранжа — Шарпи [39], который предусматривает построение второго уравнения, находящегося в инволюции с первым. Кроме того, ниже мы рассмотрим метод неаддитивного (мультипликативного) разделения переменных (§ 16), численные методы (§ 20) и метод возмущений (§ 9), которые также позволяют найти эйконал волны.

## § 9. Методы возмущений для уравнений геометрической оптики

**1. Метод возмущений для эйконала.** Точные аналитические решения уравнений геометрической оптики удается получить лишь для ограниченного числа зависимостей показателя прелом-



ления от координат, например, для рассмотренных в § 8. В этих условиях может оказаться полезным метод возмущений, который применим в более общем случае и который позволяет найти поправки к эйконалу, лучам и амплитуде, вызванные малым возмущением:

$$v(r) = n^2(r) - \bar{n}^2(r) \equiv \varepsilon(r) - \bar{\varepsilon}(r), \quad \max |v| \equiv v_m \ll \bar{\varepsilon}, \quad (9.1)$$

где  $\bar{\varepsilon}(r) = \bar{n}^2(r)$  — невозмущенный квадрат показателя преломления. Метод возмущений в геометрической оптике использовался для расчета аббераций в оптических системах [6—13, 18, 24], для решения статистических задач [124—124] и для описания рефракции радиоволн в атмосфере [104, 105, 125—127]. В последнее время метод возмущений применялся также при рассмотрении рефракции на локализованных неоднородностях [128] и при учете горизонтальных градиентов в слоистой среде [106, 129—131]. Отметим, что в теории аббераций оптических систем возмущениями служат не объемные неоднородности среды, а те или иные отклонения поверхности зеркал и линз от предписанной формы [6—13, 18, 24].

Рассмотрим сначала теорию возмущений для эйконала. Следуя [124], будем искать решение уравнения эйконала

$$(\nabla\psi)^2 = \varepsilon(r) + v(r) \quad (9.2)$$

в виде ряда

$$\psi(r) = \psi_0(r) + \psi_1(r) + \psi_2(r) + \dots \quad (9.3)$$

по степеням малого параметра  $v_m$ . Подставляя (9.3) в (9.2) и приравнявая члены одинакового порядка малости, получим уравнения:

$$(\nabla\psi_0)^2 = \bar{\varepsilon}(r), \quad (9.4)$$

$$2(\nabla\psi_0, \nabla\psi_1) = v(r), \quad (9.5)$$

$$2(\nabla\psi_0, \nabla\psi_2) = -(\nabla\psi_1)^2, \quad (9.6)$$

.....

Предполагая решение невозмущенного уравнения (9.4) известными и учитывая, что  $\nabla\psi_0 = p = dr_0/d\tau$  ( $r_0(\tau)$  — невозмущенный луч), запишем уравнение первого приближения (9.5) в виде

$$2(\nabla\psi_0, \nabla\psi_1) = 2 \frac{d\psi_1}{d\tau} = v, \quad (9.7)$$

откуда находим поправку первого порядка

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} v d\tau = \frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{v}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} d\sigma. \quad (9.8)$$

Интегрирование в (9.8) производится вдоль невозмущенного луча. Аналогично из уравнения (9.6) найдем поправку второго порядка:

$$\psi_2 = -\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} (\nabla\psi_1)^2 d\tau = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{(\nabla\psi_1)^2}{\sqrt{\varepsilon}} d\sigma. \quad (9.9)$$

Область применимости выписанных выражений ограничена такими расстояниями, на которых боковое смещение лучей относительно невозмущенного положения мало по сравнению с характерным поперечным размером возмущения  $l_{\perp}$ . От этого недостатка свободен другой вариант теории возмущений, учитывающий смещения лучей.

**2. Метод возмущений для лучей.** Этот метод строится по образцу теории возмущений для движения материальной точки в механике (см., например, [132, 133]). Мы используем здесь простейший вариант теории, следуя [129].

При наличии возмущений уравнения лучей (2.19) запишутся в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \nabla v(\mathbf{r}). \quad (9.10)$$

Решение этого уравнения представим в виде ряда

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_0(\tau) + \mathbf{r}_1(\tau) + \mathbf{r}_2(\tau) + \dots, \quad (9.11)$$

где  $\mathbf{r}_0(\tau)$  — решение невозмущенного лучевого уравнения

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \frac{1}{2} \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0). \quad (9.12)$$

Подставив (9.11) в уравнение (9.10), разложим  $\bar{\varepsilon}(\mathbf{r})$  и  $v(\mathbf{r})$  в ряды Тейлора по степеням разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots$ . После приравнивания членов одинакового порядка малости в левой и правой частях мы придем к следующей системе уравнений последовательных приближений:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \nabla) \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{2} \nabla v(\mathbf{r}_0) \equiv F_1, \quad (9.13')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_2 \nabla) \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4} (\mathbf{r}_1 \nabla)^2 \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 \nabla) \nabla v(\mathbf{r}_0) \equiv F_2, \quad (9.13'')$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_n - \frac{1}{2} (\mathbf{r}_n \nabla) \nabla \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = F_n. \quad (9.13''')$$

Правые части  $F_n$  уравнений (9.13) зависят только от предшествующих приближений и поэтому могут рассматриваться как известные функции  $\tau$ . Если поправки  $\mathbf{r}_n(\tau)$  найдены, то эйконал

$\psi$  в рассматриваемом варианте метода находится путем интегрирования проницаемости  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \nu$  вдоль возмущенного луча (9.11), при этом точность определения  $\psi$  возрастает с увеличением числа удержанных в (9.11) членов. Ограничившись двумя членами ряда (9.11), получим

$$\psi = \psi^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} \{ \bar{\varepsilon} [r_0(\tau') + r_1(\tau')] + \nu [r_0(\tau') + r_1(\tau')] \} d\tau'. \quad (9.14)$$

Поправка первого порядка (9.8) отвечает здесь пренебрежению  $r_1$ . Как уже было отмечено в п. 1, отбрасывание  $r_1$  возможно при выполнении неравенства  $|r_1| \ll l_{\perp}$ .

Определение амплитуды вдоль возмущенных лучей сводится к вычислению якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  в том или ином приближении. Так, в рамках первого приближения

$$\mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial(r_0 + r_1)}{\partial \xi} \frac{\partial(r_0 + r_1)}{\partial \eta} \frac{\partial(r_0 + r_1)}{\partial \tau}. \quad (9.15)$$

Ясно, что погрешность определения амплитуды сильно возрастет вблизи каустик, где  $\mathcal{D}_0(\tau) = 0$ .

**3. Возмущение в однородной среде.** Получим сначала решение уравнений (9.13) при  $\bar{\varepsilon} = \text{const}$ , когда невозмущенная среда однородна, а лучи являются прямыми линиями;

$$\psi = \psi^0 + \varepsilon \tau, \quad r_0(\tau) = r^0 + p^0 \tau. \quad (9.16)$$

При  $\bar{\varepsilon} = \text{const}$  левые части уравнений (9.13) существенно упрощаются, так как  $\nabla \bar{\varepsilon} = 0$ , при этом поправки  $r_n$  находятся просто повторным интегрированием правых частей.

Рассмотрим поправку первого порядка, которая при  $\bar{\varepsilon} = \text{const}$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{r}_1 = \frac{1}{2} \nabla \nu [r_0(\tau)] \equiv F_1(\tau).$$

Однократное интегрирование дает

$$p_1 \equiv \dot{r}_1 = p_1^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} F_1(\tau') d\tau'. \quad (9.17)$$

При повторном же интегрировании имеем (для простоты полагаем  $\tau^0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1^0 + \tau p_1^0 + \int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} F_1(\tau'') d\tau'' = \\ &= r_1^0 + \tau p_1^0 + \int_0^{\tau} (\tau - \tau') F_1(\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Начальные значения  $r_1^0$  и  $p_1^0$  выбираются здесь в зависимости от постановки задачи. Если интересоваться судьбой заданного луча, то  $r_1^0$  следует положить равным нулю, а  $p_1^0$  — положить равным  $v^0 N / 2p_N^0$ , где  $N$  — нормаль к начальной поверхности  $Q$ , значение  $v^0$  относится к точке выхода данного луча, а  $p_N^0$  — составляющая невозмущенного импульса вдоль  $N$ .

Если же ищется луч, пришедший в заданную точку  $r$ , то в рамках первого приближения теории возмущений речь идет о нахождении параметров  $\xi$ ,  $\eta$  точки выхода луча и его «длины»  $\tau$  таких, что <sup>1)</sup>

$$r_0(\xi, \eta, \tau) + r_1(\xi, \eta, \tau) = r. \quad (9.19)$$

Это уравнение, являющееся частным случаем уравнения (3.29), может иметь несколько корней, что отвечает приходу в  $r$  нескольких лучей. Если в отсутствие возмущений в точку  $r$  приходил один луч, а при наличии возмущений — более одного луча, то это означает, что возмущение привело к появлению каустик.

Важно, что эти каустики удается выявить уже в *первом порядке* теории возмущений для лучей, тогда как теория возмущений для эйконала (п. 1) принципиально не в состоянии описать появление каустик. Дело в том, что при аналитическом возмущении  $v(r)$  теория возмущений для эйконала в любом порядке дает аналитическую зависимость  $\psi$  от координат, в то время как на каустиках фаза *неаналитична*.

4. Возмущение в неоднородной среде. Для того чтобы решить уравнения (9.13) в общем случае произвольной зависимости  $\varepsilon$  от координат, воспользуемся известным свойством уравнений в вариациях [132, 133], заключающимся в том, что производные невозмущенной траектории  $r_0(\tau) = r_0(\alpha_k, \tau)$  по свободным параметрам  $\alpha_k$ , т. е. векторные функции  $\rho_k(\tau) = \partial r_0(\tau) / \partial \alpha_k$ , образуют в совокупности фундаментальное решение системы однородных линейных уравнений:

$$\ddot{\rho}_k - \frac{1}{2} (\rho_k \nabla) \nabla \bar{\varepsilon}(r_0) = 0. \quad (9.20)$$

Доказывается это простым дифференцированием уравнения (9.12) по параметру  $\alpha_k$ .

В общем случае траектория луча определяется шестью параметрами  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), в качестве которых можно взять, скажем, три компоненты начального вектора  $r_0^0 \equiv r_0(0)$  и три

<sup>1)</sup> При учете последующих приближений в уравнении (9.19) появляются слагаемые  $r_2, r_3$  и т. д.

компоненты начального импульса  $P_0^0 \equiv P_0(0)$ , но можно выбрать и любой другой набор параметров.

Левые части уравнений (9.13) такие же, как в (9.20), но правые части  $F_n$  отличны от нуля. В силу линейности уравнений (9.13) их решение естественно искать методом вариации постоянных. Рассмотрим уравнения первого приближения (9.13'). Представим  $r_1$  в виде линейной комбинации фундаментальных решений  $\rho_k(\tau)$ :

$$r_1(\tau) = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \rho_k(\tau) = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \frac{\partial r_0(\tau)}{\partial \alpha_k}, \quad (9.21)$$

где  $C_k(\tau)$  — коэффициенты, подлежащие определению. Используя стандартные приемы метода вариации постоянных, для коэффициентов  $C_k$  получаем систему двух уравнений в векторной форме:

$$\sum_{k=1}^6 \dot{C}_k \rho_k(\tau) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \dot{\rho}_k(\tau) = F_1 \equiv \frac{1}{2} \nabla v(r_0), \quad (9.22')$$

или, что то же самое, систему шести скалярных уравнений:

$$\sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \rho_{kj}(\tau) = 0, \quad \sum_{k=1}^6 \dot{C}_k(\tau) \dot{\rho}_{kj}(\tau) = F_{1j}, \quad (9.22'')$$

где  $j = 1, 2, 3$ , а  $\rho_{kj}$  и  $F_{1j}$  — декартовы компоненты векторов  $\rho_k$  и  $F_1$ .

В силу линейной независимости  $\rho_k$  детерминант системы уравнений (9.22) отличен от нуля, так что уравнение (9.22) всегда можно разрешить относительно  $\dot{C}_k(\tau)$ , после чего для  $C_k(\tau)$  получаются квадратные формулы вида

$$C_k(\tau) = C_k(0) + \int_0^\tau \sum_{j=1}^3 Q_{kj}(\tau') F_{1j}(\tau') d\tau', \quad (9.23)$$

где  $C_k(0)$  определяются из начальных условий. Следовательно, отыскание поправки первого порядка сводится к вычислению интегралов вида (9.23). Подобным же образом находятся и поправки  $r_n$  более высоких порядков. В некоторых частных случаях (например, в плоско-слоистых средах) выражения типа (9.23) упрощаются в связи с тем, что векторы  $\rho_k$  принимают особенно простой вид (примеры см. в [129]).

Если касательный к лучу вектор  $P = \dot{r}$  представить рядом

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \dot{r}_0 + \dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \dots$$

то, согласно (9.21), поправка первого порядка равна

$$P_1 = \frac{d}{d\tau} \sum_{k=1}^6 C_k \rho_k = \sum_{k=1}^6 (\dot{C}_k \rho_k + C_k \dot{\rho}_k).$$

Но в силу первого уравнения (9.22)  $\sum C_k \rho_k = 0$  и в результате

$$p_1 = \sum_{k=1}^6 C_k(\tau) \dot{\rho}_k(\tau). \quad (9.24)$$

Таким образом, поправка  $p_1$  определяется теми же коэффициентами  $C_k(\tau)$ , которые входят в (9.21). Через  $p_1$  можно выразить поправку  $l_1$  к невозмущенному единичному вектору  $l_0$ :

$$l_1 = (p_1 - l_0(l_0 p_1)) / \sqrt{\bar{\varepsilon}} \equiv p_{1\perp} / \sqrt{\bar{\varepsilon}}. \quad (9.25)$$

Величина  $l_1$  определяет углы прихода возмущенного луча.

Теория возмущений может быть построена также для пространственно-временных лучей (см. литературу в [23] и § 27, п. 6). Теория возмущений с использованием двухмасштабных разложений предложена в работах [130] и [131].

## § 10. Условия применимости метода геометрической оптики и смежные проблемы

1. Существующие способы оценки погрешности метода геометрической оптики. Неравенство (1.4), при выполнении которого волну можно считать почти плоской, а среду — почти одномерной, является *необходимым*, но не достаточным условием применимости метода геометрической оптики (здесь и ниже под геометрооптическим полем мы подразумеваем только поле нулевого приближения  $u_0(r)$ ). Достаточные же условия применимости должны тем или иным способом учитывать накапливающиеся погрешности, обусловленные тем, что поле нулевого приближения  $u_0 = A_0 e^{ik_0 \psi}$  не является точным решением уравнения (1.1)<sup>1)</sup>.

Имеющиеся сейчас аналитические возможности сформулировать достаточные условия применимости метода и оценить его погрешность

$$\gamma \sim |u_{\text{точн}} - u_0| / |u_0| \quad (10.1)$$

весьма ограничены, так как в большинстве случаев мы не располагаем точным решением  $u_{\text{точн}}$ . Известные же строгие решения могут дать лишь указания о величине  $\gamma$  в тех или иных типичных условиях. Подобные же указания можно получить и из сравнения геометрооптических полей с известными приближенными (но более общими, чем лучевые) решениями волновой задачи

Более определенные оценки  $\gamma$  можно было бы извлечь из предположения, что разность  $|u_{\text{точн}} - u_0|$  имеет порядок первого от-

<sup>1)</sup> Разность  $\tilde{u} \equiv u - u_0$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \tilde{u} + k_0^2 n^2 \tilde{u} = -e^{ik_0 \psi} \Delta A_0.$$

брошенного члена  $A_1/ik_0$  в лучевом ряде (1.13):

$$\gamma \sim \left| \frac{A_1}{k_0 A_0} \right| = \left| \frac{1}{2k_0 A_0 \sqrt{\mathcal{D}(\tau)}} \int_{\tau_0}^{\tau} \Delta A_0(\tau') \sqrt{\mathcal{D}(\tau')} d\tau' \right| \quad (10.2)$$

(мы использовали здесь выражение (3.33)), но этой оценкой трудно воспользоваться из-за сложностей вычисления входящего сюда интеграла.

Ниже мы сформулируем универсальные *достаточные* условия применимости метода геометрической оптики на эвристической основе [79], используя только элементарные представления Гюйгенса и Френеля об интерференции вторичных волн, уже изложенные в § 2 в связи с принципом Ферма.

## 2. Зоны Френеля и френелевский объем в неоднородной среде.

Пусть точечный источник расположен в точке  $r_1$ , а точка наблюдения — в  $r_2$ . Оптический путь (эйконал) вдоль луча, соединяющего  $r_1$  и  $r_2$ , обозначим через  $\psi(r_1, r_2)$ :

$$\psi(r_1, r_2) = \int_1^2 \sqrt{\varepsilon} ds = \int_1^2 \varepsilon d\tau \equiv \psi_{\text{опорн}}(r_1, r_2). \quad (10.3)$$

Возьмем далее точку  $r'$ , лежащую возле нашего опорного луча, и проведем лучи из  $r_1$  в  $r'$  и из  $r'$  в  $r_2$ . Ломаный луч  $r_1 \rightarrow r' \rightarrow r_2$  назовем *виртуальным* лучом<sup>1)</sup>. Оптический путь вдоль виртуального луча равен  $\psi_{\text{вирт}} = \psi(r_1, r') + \psi(r', r_2)$ .

Далее построим в окрестности опорного луча поверхность

$$|\psi_{\text{вирт}}(r_1, r', r_2) - \psi_{\text{опорн}}(r_1, r_2)| = \lambda_0/2, \quad (10.4)$$

которой принадлежат точки  $r'$  такие, что эйконал  $\psi_{\text{вирт}}(r_1, r', r_2)$  на виртуальном луче отличается от эйконала  $\psi_{\text{опорн}}(r_1, r_2)$  на опорном луче точно на половину длины волны (соответствующие фазы  $\Psi = k_0 \psi$  отличаются на  $\pi$ ). Такая поверхность представляет собой *огибающую первых зон Френеля, нанизанных на луч* (рис. 10.1, а). Уравнение этой поверхности можно представить в виде

$$F(r') = |\psi(r_1, r') + \psi(r', r_2) - \psi(r_1, r_2)| - \lambda_0/2 = 0. \quad (10.5)$$

Объем, ограниченный поверхностью (10.5), назовем *френелевским объемом*<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Мы ограничимся здесь рассмотрением виртуальных лучей *первого порядка*, т. е. лучей с одним изломом. Многозвенные виртуальные лучи ниже нам не потребуются.

<sup>2)</sup> Это название представляется нам более предпочтительным, чем термины «трехмерная зона Френеля» [135], «пространственная зона Френеля» [136], «область, существенная для дифракции» [28] и др., использованные в аналогичных частных случаях.

В случае поля, заданного на поверхности  $Q$ , френелевский объем строится подобным же образом. Пусть точка  $r'$  лежит в окрестности опорного луча  $r_1 \rightarrow r_2$  и служит точкой излома виртуального луча  $r'_1 \rightarrow r' \rightarrow r_2$ , покидающего исходную поверхность  $Q$  (рис. 10,1, б). Огибающая первых зон Френеля описывается уравнением

$$F(r') = |\Psi_{\text{вирт}} - \Psi_{\text{опорн}}| - \lambda_0/2 = \\ = |[\Psi^0(r'_1) + \psi(r'_1, r') + \psi(r', r_2)] - [\Psi^0(r_1) + \psi(r_1, r_2)]| - \\ - \lambda_0/2 = 0, \quad (10.6)$$

где  $\Psi^0(r_1)$  — начальный эйконал на  $Q$ .

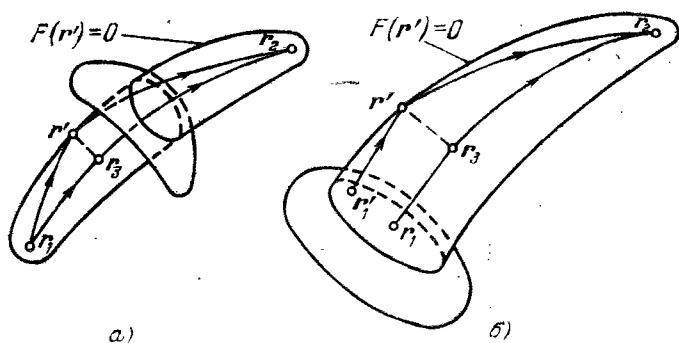


Рис. 10.1.

При фактическом нахождении френелевского объема можно воспользоваться тем, что фигурирующие в (10.5) и (10.6) эйконалы велики по сравнению с длиной волны. Это позволяет разложить входящие в (10.5) и (10.6) эйконалы  $\psi(r_1, r')$ ,  $\psi(r', r_2)$ ,  $\psi(r'_1, r')$  и  $\Psi^0(r'_1)$  в ряды по степеням разности  $r' - r_3$ , где  $r_3$  — точка на опорном луче, ближайшая к  $r'$ . Линейный по  $r' - r_3$  член выпадает из разложения в силу экстремальных свойств луча  $r_1 \rightarrow r_2$ , и поэтому<sup>1)</sup>

$$F(r') \approx \frac{1}{2} |(r' - r_3, \nabla_3)^2 [\Psi(r_1, r_3) + \psi(r_3, r_2)]| - \frac{\lambda_0}{2} = 0 \quad (10.7)$$

в случае границы френелевского объема (10.5) для точечного источника и

$$F(r') \approx \frac{1}{2} |(r'_1 - r_1, \nabla_1)^2 \Psi^0(r_1) + (r' - r_3, \nabla_3)^2 [\Psi(r_1, r_3) + \\ + \psi(r_3, r_2)]| - \frac{\lambda_0}{2} = 0 \quad (10.8)$$

<sup>1)</sup> Выражения типа (10.7) и (10.8) были предложены в работе [137]



для границы френелевского объема (10.6). Здесь  $\nabla_1$  и  $\nabla_3$  — производные по  $r_1$  и  $r_3$ . На фазовых фронтах эти приближенные поверхности вырезают френелевские эллипсы. Если окажется, что квадратичные члены в (10.7) и (10.8) обращаются в нуль, то нужно учесть члены более высокого порядка.

В частном случае плоской волны, распространяющейся в однородной среде ( $n = \text{const}$ ) в направлении оси  $z$ , уравнение (10.8) описывает параболоид вращения  $n\rho^2/z = \lambda_0$ , где  $z = |r_1 - r_3|$ ,  $\rho = |r' - r_3|$ . Отсюда вытекает известное выражение для радиуса первой зоны Френеля

$$a_f = \sqrt{\lambda_0 z / n}. \quad (10.9)$$

Подобные же вычисления для сферической волны (точки  $r_1$ ,  $r_3$  и  $r_2$  лежат на оси  $z$ ) дают уравнение эллипсоида вращения

$$n\rho^2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \lambda_0, \quad (10.10)$$

где  $R_1 = |r_1 - r_3|$ ,  $R_2 = |r_3 - r_2|$ ,  $\rho = |r' - r_3|$  — расстояние от опорного луча. В этом случае

$$a_f = \sqrt{\frac{\lambda_0 R_1 R_2}{(R_1 + R_2) n}}. \quad (10.11)$$

**3. Физическое содержание понятия «луч».** Зонам Френеля более высокого порядка в уравнениях (10.5) и (10.6) отвечают разности хода  $m\lambda_0/2$ ,  $m = 2, 3, \dots$  При гладких начальных условиях и при плавном изменении свойств среды вследствие интерференции вторичные волны от высших зон Френеля взаимно гасятся, и тогда результирующее поле определяется ближайшей окрестностью луча, а именно — его френелевским объемом.

Если рассматривать луч как физический объект, то френелевский объем следует считать *областью локализации луча*. В самом деле, если мы хотим выделить данный луч, пропуская волну через отверстие в экране (рис. 10.2), то размеры отверстия должны быть больше сечения френелевского объема [141]. Если сузить отверстие до размеров, меньших размера первой зоны Френеля, то это приведет к искажению поля, связанного с данным лучом.

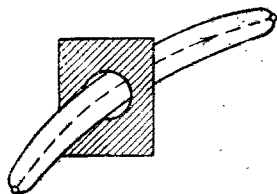


Рис. 10.2.

Таким образом, следует делать различие между математическим лучом — это бесконечно тонкая линия, удовлетворяющая уравнению лучей, и физическим лучом, который имеет *конечную толщину*, определяемую френелевским объемом.

**4. Эвристические критерии применимости приближения геометрической оптики.** Исходя из того, что френелевский объем определяет область пространства, которая формирует поле в заданной точке, сформулируем следующие два критерия применимости метода геометрической оптики [79]:

I. *Параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно изменяться в поперечном сечении френелевского объема.*

II. *Френелевские объемы лучей, приходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться друг с другом.*

Согласно критерию I, должно выполняться неравенство

$$a_f \left| \frac{\nabla_{\perp} A}{A} \right| \ll 1 \quad (10.12)$$

и аналогичные неравенства для компонент импульса  $\mathbf{p} = \nabla \psi$  и для показателя преломления  $n$ :

$$a_f \left| \frac{\nabla_{\perp} p_j}{p} \right| \ll 1, \quad a_f \left| \frac{\nabla_{\perp} n}{n} \right| \ll 1. \quad (10.13)$$

Здесь  $a_f$  — максимальное сечение френелевского объема, а  $\nabla_{\perp} = \nabla - l(lV)$  — оператор дифференцирования в направлении, перпендикулярном лучу. Из неравенства (10.12) следуют определенные ограничения на скорость изменения якобиана  $\mathcal{D}$  и на величину обоих главных радиусов кривизны фазового фронта  $R_{1,2}$ :

$$a_f \ll |R_{1,2}|. \quad (10.14)$$

Полезно отметить, что на малых расстояниях от начальной поверхности  $Q$  (см. рис. 10.1, б) величина  $a_f \sim \lambda$  (см., например, (10.9) при  $z \sim \lambda$ ), и поэтому условия (10.12) — (10.14) совпадают с необходимым условием применимости (1.4).

Что касается критерия II, то его можно формализовать в виде неравенств

$$\delta V_f \ll V_f \quad \text{или} \quad \delta S_f \ll S_f, \quad (10.15)$$

где  $\delta V_f$  — общая часть френелевских объемов лучей, приходящих в данную точку наблюдения (соответственно  $\delta S_f$  — общая площадь первых зон Френеля). Критерий II исключает возможность двукратного учета вклада одних и тех же вторичных волн в результирующее поле. Можно показать, что критерий II является следствием критерия I, но он более нагляден и удобен при определении границ применимости лучевого метода в окрестности каустик и поэтому имеет самостоятельную ценность.

Условия (10.13) — (10.15) в той или иной форме возникали во множестве исследований, начиная с работ О. Френеля. В ряде

случаев они допускают строгое обоснование<sup>1)</sup>. Новый момент состоит, пожалуй, в том, что мы подчеркиваем *универсальность и достаточность* этих критериев: во всех известных нам частных случаях критерии I и II полностью согласуются с другими способами определения границ применимости геометрической оптики (см. многочисленные примеры в [79] и некоторые иллюстрации в гл. II).

**5. Условия применимости пространственно-временной геометрической оптики.** Френелевский объем в пространстве — времени вводится по аналогии с пространственной задачей. Рассмотрим для простоты одномерную в пространстве волну  $u(t, z)$ .

Пусть  $\varphi_{\text{опорн}}(t, z)$  — фаза поля в точке  $t, z$ , лежащей на пространственно-временном луче  $(t^0, 0) \rightarrow (t, z)$ . Через  $\varphi_{\text{вирт}}(t^0, 0; t', z'; t, z)$  обозначим фазу на *виртуальном пространственно-временном луче*  $(t^0, 0) \rightarrow (t', z') \rightarrow (t, z)$  (рис. 10.3). Френелевский объем определим как область, ограниченную поверхностью

$$F(t', z') = |\varphi_{\text{вирт}}(t^0, 0; t', z'; t, z) - \varphi_{\text{опорн}}(t, z)| - \pi = 0. \quad (10.16)$$

Приближенные выражения для  $F(t', z')$  можно получить при помощи разложений по разности  $t' - t'_{\text{оп}}$ , где  $t'_{\text{оп}}$  соответствует опорному лучу (рис. 10.3). Эту разность можно рассматривать как *временной френелевский радиус* или *френелевский интервал*  $\tau$ .

В качестве примера приведем выражение для френелевского интервала  $\tau_f^0$  в плоскости  $z = 0$  в случае однородной диспергирующей среды [79]:

$$\tau_f^0 = \sqrt{2\pi \left| k_0'' \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z_R} \right) \right|^{-1}}, \quad (10.17)$$

$$k_0'' = \frac{d^2 k(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega(t^0)}, \quad z_R = \left[ -k_0'' \frac{d\omega(t^0)}{dt^0} \right]^{-1}$$

( $z_R$  — отвечает *каустике*). В отсутствие модуляции частоты ( $\omega(t^0) = \text{const}$ )  $\tau_f^0 = \sqrt{2\pi |k_0''| z}$ , так как  $z_R \rightarrow \infty$ . Это согласо-

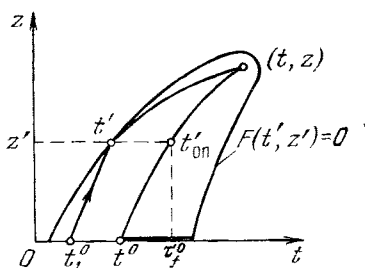


Рис. 10.3.

<sup>1)</sup> Например, при задании поля в плоскости  $z = 0$  геометрикооптическое поле возникает в результате применения метода стационарной фазы к вычислению интерференционного интеграла Гюйгенса — Кирхгофа [28], при этом  $\pi$ -окрестности стационарных точек выступают как сечения френелевских объемов плоскостью  $z = 0$ , а условие (10.15) исключает слияние  $\pi$ -окрестностей стационарных точек.

ется с результатами рассмотрения эволюции импульсов в диспергирующей среде на основе пространственно-временного параболического уравнения [142, 143] и на основе спектрального анализа [90].

Условия применимости пространственно-временной геометрической оптики в рассматриваемой задаче сводятся к требованию малости изменения параметров волны в пределах френелевских интервалов времени:

$$\tau_f \left| \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \right| \ll 1, \quad \tau_f \left| \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \ll 1. \quad (10.18)$$

Кроме того, следует требовать, чтобы френелевские объемы лучей не пересекались. Аналогичные условия применимости могут быть записаны и в общем случае [79].

Сформулированные выше критерии позволяют не только ответить на вопрос о достаточных условиях применимости геометрической оптики, но и осветить ряд смежных, дифракционных по своему существу, проблем, представляющих и самостоятельный интерес.

**6. Эвристические оценки погрешности нулевого приближения геометрической оптики.** Фигурирующие в неравенствах (10.13) — (10.15) малые параметры типа

$$v_1 \sim a_f^2 \left| \frac{\nabla_{\perp} A}{A} \right|^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad v_2 \sim \frac{\delta V_f}{V_f} \ll 1 \quad (10.19)$$

могут, видимо, служить эвристической мерой неточности поля нулевого приближения  $u_0$ :

$$\gamma_{\text{эвр}} \sim v_{1,2} \quad (10.20)$$

(это предположение качественно согласуется, в частности, с оценкой (10.2)). Разумеется, соотношение (10.20) следует рассматривать как ориентировочное. Оно может лишь подсказать, где погрешность  $\gamma$  заведомо мала и где — заведомо велика. Границу между областью применимости и областью неприменимости условно можно провести там, где  $\gamma_{\text{эвр}} \sim 1$ . Это условие эквивалентно замене знака «много меньше» ( $\ll$ ) в приводимых выше неравенствах, определяющих границы применимости геометрической оптики, на знак «меньше и равно» ( $\leq$ ); законность такой замены подтверждается многочисленными расчетами в [79] (см. также ряд примеров в гл. II).

**7. Оценки ширины каустической зоны.** Ширину каустической зоны, в которой лучевое приближение непригодно (см. рис. 4.3), можно оценить как из условия  $\gamma_{\text{эвр}} \sim 1$ , так и при помощи критерия II. Проведем оценки для простой каустики. Когда точка наблюдения  $r$  находится далеко от каустики, френелевские объемы двух лучей, приходящих в точку  $r$ , сильно разнесены в про-

пространстве (рис. 10.4, а). Существенное пересечение френелевских объемов наступает тогда, когда один из лучей оказывается центром внутри френелевского объема другого луча (рис. 10.4, б). Поэтому отвечает условие

$$k_0 |\psi_1 - \psi_2| < \pi \text{ или } |\psi_1 - \psi_2| < \lambda_0/2. \quad (10.21)$$

Простые геометрические построения показывают [138, 139], что разность эйконалов вблизи простой каустики равна

$$\delta\psi = |\psi_1 - \psi_2| \approx \frac{4}{3} \beta^{1/2} |l_N|^{3/2}, \quad \beta = 2n_K |K_{\text{отн}}|, \quad (10.22)$$

где  $l_N$  — расстояние (по нормали) от каустики,  $n_K$  — показатель преломления на каустике,  $K_{\text{отн}} = |K_{\text{кауст}} - K_{\text{луч}} \cos \delta|$  — величина,

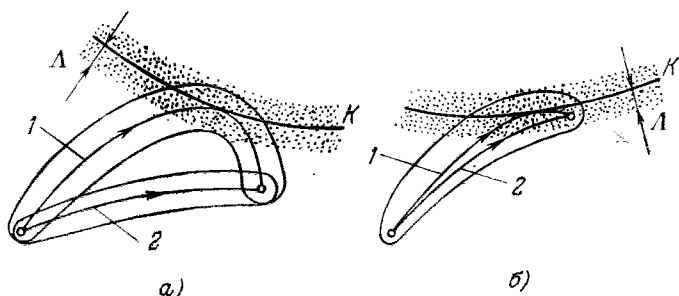


Рис. 10.4.

определяющая относительную кривизну луча и каустики,  $K_{\text{кауст}}$  — кривизна нормального сечения каустики в направлении луча,  $K_{\text{луч}}$  — кривизна луча в его точке касания,  $\delta$  — угол между нормалью к каустике и главной нормалью к лучу (нормаль к каустике предполагается направленной в область света, см. рис. 4.2, а).

Подставив (10.22) в (10.21), для ширины каустической зоны  $l_K$  получаем соотношение  $4/3 k_0 \beta^{1/2} l_K^{3/2} \approx \pi$ , откуда

$$l_K \approx \left( \frac{3\pi}{4k_0} \right)^{2/3} \beta^{-1/3} = 1,77\Lambda, \quad \Lambda \equiv k_0^{-2/3} \beta^{-1/3}. \quad (10.23)$$

Подобные же вычисления позволяют, в принципе, оценить ширину каустической зоны и в более сложных ситуациях, например, у вершины каустического клюва или в окрестности каустической петли. Соответствующие расчеты проведены в § 11 и в [79].

Сравним оценку (10.23) с тем, что дает волновая теория [72, 144, 145, 138—140], позволяющая рассчитать поле вблизи каустики. Согласно [72, 144, 145] (см. также [21, 33]), волновое поле при наличии простой каустики описывается функцией Эйри  $v(\zeta)$

и ее производной  $v'(\zeta)$ . При удалении точки наблюдения от каустики для функции Эйри становится справедливой асимптотика ВКБ при  $|\zeta| \gg 1$ , при этом каустическая асимптотика переходит в геометрическую. Поэтому ширина каустической зоны может быть оценена как  $|\zeta| < |\zeta_a|$ , где  $\zeta_a$  — то значение аргумента, начиная с которого

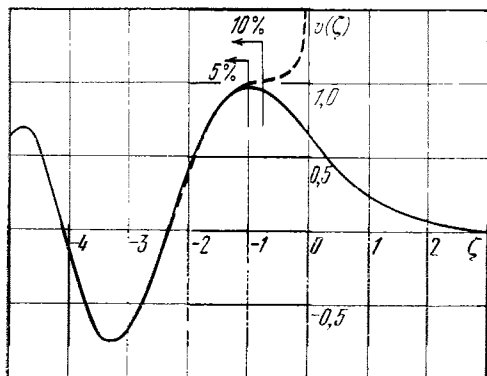


Рис. 10.5.

для  $v(\zeta)$  справедлива ее асимптотика. Величина  $\zeta_a$  легко определяется с помощью рис. 10.5, где показаны графики функции Эйри и ее асимптотика ВКБ. Как следует из этого рисунка,  $\zeta_a \approx -0,75$  при точности<sup>1)</sup> стыковки 10% и  $\zeta_a \approx -0,98$  при точности 5%. Практически часто выбирают значение  $\zeta_a = -1,02$ , соответствующее первому максимуму функции Эйри, что дает точность стыковки около 4%.

Как показано в работах [138—140], в окрестности каустики аргумент функции Эйри равен  $\zeta = -l_N/\Lambda$ , где  $\Lambda = (k_0^2 \beta)^{-1/3}$  — характерный масштаб изменения поля вблизи каустики. В простейшем случае однородной среды с коэффициентом преломления  $n = 1$ , когда лучи прямолинейны ( $K_{\text{луч}} = 0$ ) и  $\beta = 2/R_k$  ( $R_k = 1/K_{\text{кауст}}$  — радиус кривизны каустики), масштаб  $\Lambda$  дается выражением  $\Lambda = (R_k/2k_0^2)^{1/3}$ , приведенным в [26]. Согласно (10.23) ширине каустической зоны  $l_k$  отвечает значение  $\zeta_k = -1,77$ , сравнимое по величине с указанными выше значениями  $\zeta_a = -0,75, -0,98$  или  $-1,02$ , которые соответствуют 10%, 5% или 4%-ным отклонениям функции Эйри от своей асимптотики.

Заметим, что значение  $\zeta_k = -1,77$  лежит примерно посередине между первым максимумом функции Эйри ( $\zeta = -1,02$ ) и первым нулем этой функции ( $\zeta = -2,34$ ). Небольшая модификация приведенных выше рассуждений позволяет весьма точно оценивать расстояния до первого интерференционного максимума и до первого интерференционного нуля поля вблизи каустики. В самом деле, если принять во внимание каустический сдвиг фазы  $\delta\psi = -\pi/2$ , то условие противофазности падающей и от-

<sup>1)</sup> Разумеется, вблизи нулей функции  $v(\zeta)$  относительная ошибка аппроксимации резко возрастает.

раженной от каустики волн примет, в отличие от (10.21), следующий вид:  $k|\psi_1 - \psi_2| = 3\pi/2$ . В силу (10.22) этому равенству удовлетворяет расстояние  $l_N = 2,32\Lambda$ , которое почти не отличается от расстояния до первого нуля функции Эйри ( $l_N = 2,34\Lambda$ ). Далее, требование синфазности двух лучевых полей с учетом каустического сдвига фазы приводит к условию  $k_0|\psi_1 - \psi_2| = \pi/2$  вместо обычного условия  $\psi_1 = \psi_2$ . Условие  $k_0|\psi_1 - \psi_2| = \pi/2$  выполняется на расстоянии  $l_N = 1,11\Lambda$ , которое мало отличается от расстояния до первого максимума функции Эйри ( $l_N = 1,02\Lambda$ ).

Все расстояния, появляющиеся при нашем анализе, соизмеримы с масштабом  $\Lambda = (k_0^2\beta)^{-1/3}$ , который и будет принят далее в качестве оценки ширины каустической зоны:  $l_K \approx \Lambda$ .

**8. Неразличимость лучей в каустической зоне.** Неравенство (10.21) представляет собой условие физической неразличимости лучей: при  $l_N < l_K \sim \Lambda$  никакими физическими приборами нельзя раздельно определить параметры лучей. В частности, различить лучи при помощи непрозрачного экрана с отверстием не удастся потому, что при  $|\psi_1 - \psi_2| < \lambda_0/2$  френелевские объемы двух лучей практически сливаются друг с другом (рис. 10.4, б). Лучи здесь теряют свое физическое содержание (см. п. 3), хотя и продолжают играть роль геометрического костяка для волнового поля [21, 72, 91, 144—146].

Не приводит к успеху и другой способ различить лучи — по направлению их прихода. По мере приближения к каустике угол  $\theta$  между лучами уменьшается, и чтобы разрешить лучи, требуется уменьшить ширину  $\vartheta_a$  диаграммы направленности приемной антенны, для чего, например, нужно увеличить ее длину  $l_a$ , так как  $\vartheta_a \sim \lambda/l_a = \lambda_0/n_k l_a$ . Тогда из условия углового разрешения лучей  $\vartheta_a < \theta$  вытекает требование к  $l_a$ :  $l_a > \lambda_0/\theta n_k$ . Очевидно, длина антенны  $l_a$  не может быть больше ширины каустической зоны  $l_K \sim \Lambda$ :  $l_a \leq \Lambda$  (иначе поле в пределах антенны будет существенно неоднородным, и его нельзя рассматривать как суперпозицию двух локально плоских волн). В результате оказывается, что минимальный разрешимый угол равен  $\theta_{\min} \sim \lambda_0/n_k \Lambda$ . Расчеты показывают, что это как раз соответствует границе каустической зоны.

**9. О реальности каустик.** Очевидным условием реальности (наблюдаемости) каустик является требование, чтобы поле на каустике хотя бы в несколько раз превышало значения поля вне каустической зоны. Степень фокусировки характеризуется коэффициентом (или фактором) *фокусировки*, который определяется по отношению к полю вдали от каустики [148] или по отношению к полю в однородной среде [25].

Очевидно, две каустики можно считать наблюдаемыми (различимыми), если расстояние между ними превышает суммарную ширину каустической зоны  $\Lambda_1 + \Lambda_2$ . В противном случае появля-

ется новое физическое образование, а отдельные каустики следует рассматривать лишь как математические объекты, не доступные разделному наблюдению (в § 4 мы уже затрагивали этот вопрос в связи с выбором физически оправданных моделей для реальных каустик). Указанное различие между реальной и ненаблюдаемой (воображаемой) каустиками иллюстрирует рис. 10.6, на котором изображены две одинаковые петли на простой

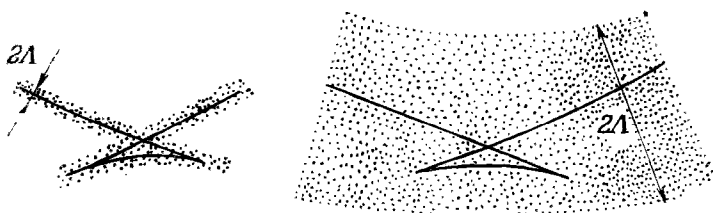


Рис. 10.6.

каустике при различной ширине каустической зоны<sup>1)</sup>. О самостоятельном существовании петли можно говорить при узкой каустической зоне (рис. 10.6, а), тогда как при широкой зоне (рис. 10.6, б) образование каустической петли физическими приборами не обнаруживается.

Таким образом, подобно тому, как луч приобретает физическое содержание, если его рассматривать вместе с френелевским объемом (п. 3), каустика становится реальным физическим объектом, только если ее окружить *каустическим объемом*. Тогда вопрос о реальности отдельных ветвей каустик сводится к оценке степени пересечения различных каустических объемов.

Разумеется, реальность (наблюдаемость, контрастность) каустик связана не только с фокусировкой поля на каустике, но и с образованием зоны каустической тени. Появление зоны тени заметить даже легче, чем фокусировку поля. Так же обстоит дело и с различимостью отдельных ветвей каустик. Например, если две ветви каустики сближаются, а их каустические объемы пересекаются, то со стороны области света каустики различить не удастся, но в области тени происходит резкое убывание интенсивности по сравнению с полем на самой каустике, что и свидетельствует о наличии каустики. Такая ситуация наблюдается, например, в открытых резонаторах [75] (см. также § 17).

**10. Оценки поля в области неприменимости метода геометрической оптики.** В ряде случаев лучевой подход позволяет дать хотя и грубую, но правильную по порядку величины оценку по-

<sup>1)</sup> Например, в случае простой каустики, согласно (10.23), ширина  $\Delta$  зависит от длины волны и от радиуса кривизны каустики.



ля в области неприменимости метода. Для этого можно воспользоваться либо значениями геометрооптического поля непосредственно на границе области неприменимости (т. е. там, где  $\gamma_{\text{эвр}} \sim 1$ ), либо законом сохранения энергии, предположив, что поток энергии, определенный на подходе к области неприменимости, более или менее равномерно «размазывается» по области неприменимости.

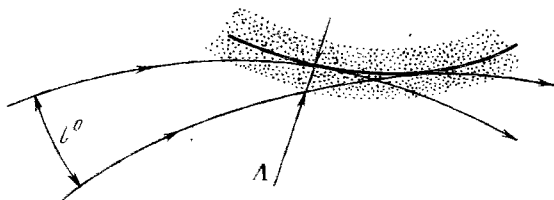


Рис. 10.7.

Проиллюстрируем сказанное на примере оценки поля в окрестности простой каустики. Пусть  $l^0 = l^0(\Lambda)$  — ширина той лучевой трубки, которая вблизи каустики имеет ширину  $\Lambda$  (рис. 10.7). Из закона сохранения потока энергии в лучевой трубке конечной ширины имеем

$$(A^0)^2 l^0 n^0 \approx |u_{\text{к}}|^2 \Lambda n_{\text{к}}, \quad (10.24)$$

где  $A^0$ ,  $n^0$  — начальные значения амплитуды и показателя преломления, а  $u_{\text{к}}$ ,  $n_{\text{к}}$  — значения поля и показателя преломления на каустике. Из (10.24) получаем оценку

$$|u_{\text{к}}| \sim A^0 \left( \frac{l^0 n^0}{\Lambda n_{\text{к}}} \right)^{1/2}. \quad (10.25)$$

Такой же порядок величины  $|u_{\text{к}}|$  предсказывают и асимптотические формулы для поля в окрестности простой каустики на основе функции Эйри [79, 139, 140]. Так, в [79] показано, что поле в первом, т. е. ближайшем к каустике интерференционном максимуме, лежащем при  $l_{\text{к}} = 1,02\Lambda$ , всего лишь в 1,34 раза превышает энергетическую оценку (10.25):

$$|u|_{\text{max}} = 1,34 A^0 (l^0 n^0 / \Lambda n_{\text{к}})^{1/2}.$$

При помощи энергетических оценок можно также оценивать поле в окрестности идеального фокуса, у вершины каустического гюва, в области пространственно-временного фокуса и т. д. (см. § 11 и разнообразные примеры в [79]).

**11. Индексы фокусировки поля на каустиках.** Вычисления показывают [79], что в формуле (10.24)  $l^0 \sim \sqrt{\Lambda}$ , так что  $|u_{\text{к}}| \sim \Lambda^{-1/4} \sim k_0^{1/6}$ , или, если воспользоваться малым параметром

$\mu = 1/kL$ ,  $|u_k| \sim A^0 \mu^{-1/6}$ . Эта оценка является частным случаем общей зависимости для поля на каустике

$$|u_k| \sim A^0 \mu^{-\sigma_\Phi}. \quad (10.26)$$

Показатель  $\sigma_\Phi$  будем называть *индексом фокусировки*<sup>1)</sup>. Для простой каустики индекс фокусировки принимает наименьшее значение  $\sigma_\Phi = 1/6$ . Наибольшее значение соответствует идеальному фокусу: в трехмерной задаче  $\sigma_\Phi = 1$ , а в двумерной задаче  $\sigma_\Phi = 1/2$ . Значения  $\sigma_\Phi$  для других каустик можно получить из энергетических оценок типа (10.24), но их можно выявить также из анализа интегральных представлений поля. В табл. 1 на стр 39 мы привели значения  $\sigma_\Phi$ , взятые из работы [43].

При помощи формул типа (10.26) можно делать приближенные, так сказать, априорные оценки поля на каустиках, понимая под  $L$  характерный масштаб задачи.

**12. Проблема устойчивости геометрического решения по отношению к малым возмущениям.** Существо проблемы можно пояснить на простом примере, уже обсуждавшемся в § 4. Рассмотрим плоскую волну, которой отвечает параллельный пучок лучей (рис. 10.8, а). Если плоский начальный фазовый фронт подвергнуть слабым периодическим возмущениям, то структура лучей кардинально изменится (рис. 10.7, б). Существенно изменится и геометрическое поле. Между тем ясно, что если амплитуда смещения фазового фронта  $\delta$  мала по сравнению с длиной волны, то реальное поле волны почти не изменится (появятся лишь возмущения порядка  $\delta/\lambda \ll 1$ ).

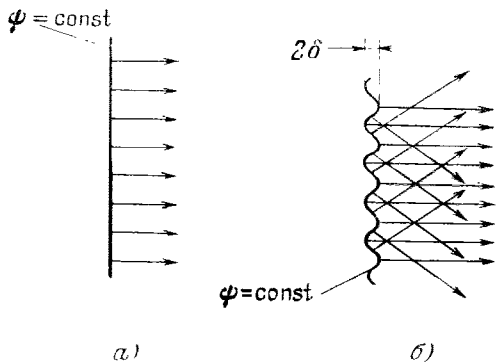


Рис. 10.8.

зать — *очень чувствительно*) по отношению к малым возмущениям начальных условий (а также и параметров среды). Разрешение проблемы устойчивости геометрических полей состоит просто в том, что при слабых мелкомасштабных возмущениях нарушаются условия (10.13) применимости самого лучевого метода. В частности, «новые» лучи, появившиеся на рис. 10.7, б в резуль-

Рассмотренный пример показывает, что геометрическое поле *неустойчиво* (или правильнее ска-

<sup>1)</sup> В [43, 469]  $\sigma_\Phi$  называется индексом сингулярности особенности.

тате возмущения плоского фазового фронта, оказываются с физической точки зрения фиктивными, поскольку окружающие их френелевские объемы при  $\delta \ll \lambda$  содержат много неоднородностей, а в этом случае геометрическая оптика неприменима, так как нарушено неравенство (10.13).

**13. Анализ волновой картины в целом.** Такой анализ представляет большой интерес в условиях, когда нужно быстро составить общее (грубое, недетализированное) представление о структуре коротковолнового поля — либо для инженерных оценок, либо перед началом расчетов.

Из сказанного выше следует, что обычная геометрическая оптика, дополненная представлением о френелевских объемах, позволяет осуществлять всесторонний анализ высокочастотных полей, который включает не только выяснение их качественной структуры, но и получение количественных оценок даже в зонах неприменимости геометрической оптики. Такой анализ предполагает выполнение следующих действий:

а) Определение геометрооптического поля (нахождение лучей, фазовых фронтов, каустик, амплитуд и т. д.).

б) Нахождение областей применимости и неприменимости геометрической оптики на основе эвристических критериев.

в) Эвристические оценки погрешности поля в области применимости геометрической оптики и оценки амплитуды в областях неприменимости метода.

При необходимости анализ может быть дополнен оценками экспоненциально малых рассеянных полей [79], о которых мы упоминали в § 5.

Некоторые примеры анализа волновой картины в целом с привлечением френелевских объемов лучей приведены в гл. II (более детальные сведения собраны в [79]).

## § 11. Однородная среда.

1. Лучи и эйконал. Из уравнений лучей (2.12) при  $n = \text{const}$  следует, что импульс на луче сохраняется неизменным:  $\mathbf{p} = \text{const} = \mathbf{p}^0(\xi, \eta)$ , при этом  $\tau = \frac{1}{n} \sigma$ , и лучи представляют собой прямые линии

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + \tau \mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0 + \sigma \frac{1}{n} \mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0 + \sigma \mathbf{l}^0 = R(\xi, \eta, \sigma). \quad (11.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^0(\xi, \eta)$  — начальная точка на луче,  $\mathbf{l}^0 = \frac{1}{n} \mathbf{p}^0 = \mathbf{l}^0(\xi, \eta)$  — орт, задающий направление луча в точке  $\mathbf{r}^0$ ,  $\sigma = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^0|$  — расстояние вдоль луча.

Эйконал волны (2.13) в однородной среде равен

$$\psi = \psi^0(\xi, \eta) + \tau n^2 = \psi^0(\xi, \eta) + \sigma n, \quad (11.2)$$

где  $\psi^0 = \psi^0(\xi, \eta)$  — начальное значение эйконала при  $\sigma = 0$  (в точке  $\mathbf{r}^0$ ).

Уравнение (11.1) описывает семейство (конгруэнцию) прямых, нормальных к волновому фронту  $\psi = \text{const}$ , т. е. *нормальную конгруэнцию прямых*. Условие нормальности конгруэнции прямых имеет вид [10]:

$$r_{\xi}^0 l_{\eta}^0 = r_{\eta}^0 l_{\xi}^0, \quad (11.3)$$

где  $r_{\xi}^0 \equiv \frac{\partial r^0}{\partial \xi}$ ,  $l_{\xi}^0 \equiv \frac{\partial l^0}{\partial \xi}$  и т. д. Отсюда, в частности, следует, что, в отличие от пространственного случая, плоская конгруэнция прямых ( $l_{\eta} = r_{\eta}^0 = 0$ ) всегда является нормальной.

2. Амплитуда волны. Используя уравнение семейства лучей (11.1), определим якобиан  $\mathcal{D}(\sigma)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\sigma) &= \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial \eta} \frac{\partial R}{\partial \sigma} = l^0 (r_{\xi}^0 + \sigma l_{\xi}^0) (r_{\eta}^0 + \sigma l_{\eta}^0) = \\ &= a\sigma^2 + b\sigma + c = a(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2). \end{aligned} \quad (11.4)$$

Через  $\sigma_{1,2}$  здесь обозначены корни уравнения  $\mathcal{D}(\sigma) = 0$ :

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad (11.5)$$

при этом

$$a = l^0 l_{\xi}^0 l_{\eta}^0, \quad b = l^0 l_{\xi}^0 r_{\eta}^0 - l^0 l_{\eta}^0 r_{\xi}^0, \quad c = l^0 r_{\xi}^0 r_{\eta}^0. \quad (11.6)$$

Тогда для расходимости лучевой трубки получим

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{D}(\sigma)}{\mathcal{D}(0)} = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \sigma^2 - \left( \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} \right) \sigma + 1, \quad (11.7)$$

где  $\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{a}{c}$ ,  $\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} = -\frac{b}{c}$ . Амплитуда поля  $A$  связана с расходимостью  $\mathcal{F}$  формулой (3.9)

$$A = \frac{A^0(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathcal{F}}} = A^0(\xi, \eta) \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)} \right]^{1/2}. \quad (11.8)$$

Таким образом, в нулевом приближении геометрической оптики поле произвольной волны в однородной среде изменяется по следующему закону:

$$u = A e^{ik_0 \psi} = u^0(\xi, \eta) \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)} \right]^{1/2} e^{ik_0 n \sigma}, \quad (11.9)$$

где  $u^0(\xi, \eta) = A^0(\xi, \eta) \exp [ik_0 \psi^0(\xi, \eta)]$  — поле волны на начальной поверхности  $r = r^0(\xi, \eta)$ .

Чтобы пояснить геометрический смысл величин  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в формулах (11.8) и (11.9), рассмотрим случай, когда начальная поверхность  $r = r^0(\xi, \eta)$  является волновым фронтом. Выбирая в качестве координат  $\xi$  и  $\eta$  линии кривизны<sup>1)</sup> фронта, согласно формулам Родрига [40], имеем

$$r_{\xi}^0 = R_1 l_{\xi}^0, \quad r_{\eta}^0 = R_2 l_{\eta}^0, \quad (11.10)$$

где  $R_{1,2}$  — главные радиусы кривизны фронта и где учтено, что орт  $l^0$  нормален к фронту. Подставляя далее (11.10) в (11.5) и учитывая, что  $b = -a(R_1 + R_2)$ ,  $c = aR_1 R_2$ , найдем

$$\sigma_1 = R_1, \quad \sigma_2 = R_2. \quad (11.11)$$

Таким образом, величины  $\sigma_{1,2}$  равны *главным радиусам кривизны* исходного волнового фронта (в точке  $r^0$ ). При  $R_1 \neq R_2$  элементарный пучок лучей (11.1) называют *астигматическим* (рис. 11.1), в отличие от *гомоцентрического* (стигматического) пучка с  $R_1 = R_2$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что линией кривизны на поверхности называют кривую, в каждой точке которой касательная принадлежит плоскости главного нормального сечения поверхности в этой точке. Через каждую неособую точку поверхности можно провести две линии кривизны; эти линии всегда ортогональны [40].

С учетом (11.1) и (11.8) для амплитуды поля имеем

$$A = A^0 \left[ \frac{R_1 R_2}{(R_1 - \sigma)(R_2 - \sigma)} \right]^{1/2} = A^0 \left( \frac{K}{\tilde{K}} \right)^{-1/2} = \\ = A^0 (1 - 2H\sigma + K\sigma^2)^{-1/2}, \quad (11.12)$$

где  $K = 1/R_1 R_2$  и  $\tilde{K} = 1/\tilde{R}_1 \tilde{R}_2$  — полные (гауссовы) кривизны начального ( $\sigma = 0$ ) и текущего волновых фронтов,  $\tilde{R}_{1,2} = R_{1,2} - \sigma$  — главные радиусы кривизны фронта,  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  — средняя кривизна начального фронта.

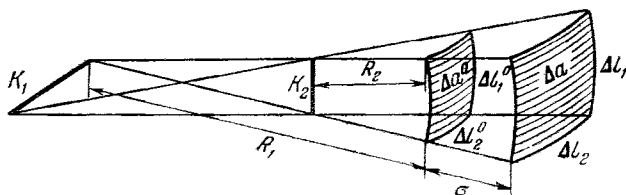


Рис. 11.1.

Формула (11.12) легко может быть получена геометрически, если вычислить площади поперечных сечений астигматической лучевой трубки (рис. 11.1) в начальной ( $\Delta a^0$ ) и текущей ( $\Delta a$ ) точках,

$$\Delta a^0 = \Delta l_1^0 \Delta l_2^0, \quad \Delta a = \Delta l_1 \Delta l_2, \quad (11.13')$$

и учесть, что

$$\Delta l_{1,2} = \Delta l_{1,2}^0 \frac{|R_{1,2}| + \sigma}{|R_{1,2}|} = \Delta l_{1,2}^0 \frac{R_{1,2} - \sigma}{R_{1,2}} \quad (11.13'')$$

(для расходящегося фронта на рис. 11.1  $R_{1,2} = -|R_{1,2}| < 0$ ). В двумерной задаче, например, на плоскости  $x, z$ , имеем  $R_2 \rightarrow \infty$ , и из (11.12) получаем ( $R_1 = R$ ):

$$A = A^0 \left( \frac{R}{R - \sigma} \right)^{1/2} = A^0 \left( 1 - \frac{\sigma}{R} \right)^{-1/2}, \quad (11.14)$$

где радиус кривизны фронта  $R$  дается выражением ( $a \equiv 0$ ):

$$R = -\frac{c}{b} = -\frac{(l^0 r_{\xi}^0 e_y)}{(l^0 l_{\xi}^0 e_y)} = l_z^0 \left( l_x^0 \frac{\partial z^0}{\partial \xi} - l_z^0 \frac{\partial x^0}{\partial \xi} \right) \left( \frac{\partial l_x^0}{\partial \xi} \right)^{-1}.$$

Можно убедиться, что в аксиально симметричной трехмерной задаче (ось симметрии  $z$ ):

$$A = A^0 \left( \frac{\rho}{r} \frac{R}{R - \sigma} \right)^{1/2} = A^0 \left[ \frac{r}{\rho} \left( 1 - \frac{\sigma}{R} \right) \right]^{-1/2}, \quad (11.15)$$

где  $\rho$  и  $r$  — цилиндрические координаты соответственно точки выхода луча и точки наблюдения, а радиус кривизны  $R$  определяется в меридиональном сечении фронта.

**3. Каустики.** В силу условия  $\mathcal{D}(\sigma_{1,2}) = 0$ , величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  равны отсчитываемым вдоль луча расстояниям до каустик<sup>1)</sup>. Каждый луч в трехмерном случае может коснуться каустик не более чем дважды<sup>2)</sup> (при  $\sigma = \sigma_1$  и  $\sigma = \sigma_2$ ), приобретая при каждом касании дополнительный каустический сдвиг фазы  $-\pi/2$  (см. § 4). Для гомоцентрического пучка лучей ( $R_1 = R_2$ ), когда образуется фокальная точка, каустический сдвиг фазы равен  $-\pi$ .

Из (11.11) следует, что каустические точки на луче лежат в центрах кривизны начального волнового фронта, при этом каустики элементарного астигматического пучка ( $K_1$  и  $K_2$  на рис. 11.1) перпендикулярны центральному лучу [9]. Каустики, соответствующие семейству лучей «в целом», являются *поверхностями центров кривизны* волнового фронта и состоят из двух полостей, каждая из которых отвечает одному семейству линий кривизны. Расположение каустик относительно исходного фронта определяется типом поверхности фронта. В частности, для эллиптических точек ( $R_1 R_2 > 0$ ) поверхности фронта образуются две *действительные* ( $R_1 > 0, R_2 > 0$ ) или *мнимые* ( $R_1 < 0, R_2 < 0$ ) каустики, расположенные по одну сторону от фронта (подробнее см. [9]). В случае аксиально симметричного фронта, согласно (11.15), одна из каустик представляет собой поверхность вращения, а другая вырождается в фокальную линию (ось симметрии) и носит название *осевой каустики*. В двумерной (плоской) задаче каустика является *эвольвотой*, а фронты — эвольвентами [40, 134].

Векторные параметрические уравнения каустик находятся из (11.1) при  $\sigma = \sigma_{1,2}$ :

$$r = r^0(\xi, \eta) + \sigma_{1,2} l^0(\xi, \eta) = r^0(\xi, \eta) + R_{1,2} l^0(\xi, \eta) \equiv F_{1,2}(\xi, \eta), \quad (11.16)$$

где  $R_{1,2} = \sigma_{1,2} = \sigma_{1,2}(\xi, \eta)$  определяются из (11.5). Конфигурация каустик в однородной среде может быть весьма разнообразной (см. § 4, а также фотографии в [43] и рисунки каустик в оптических устройствах при наличии аберраций [9, 10, 150]). Анализируя уравнение (11.16), можно показать, что точки заострения (клювы) на каустике соответствуют экстремумам радиуса кривизны фронта: при минимуме радиуса каустический клюв обращен к начальному фронту волны, а при максимуме — от фронта. Параболическим точкам ( $R_1 R_2 \rightarrow \infty$ ) фронта (в двумер-

<sup>1)</sup> Строго говоря, это утверждение справедливо, только если  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вещественны, что легко доказывается с помощью условия (11.3) нормальности конгруэнции прямых (см. [10], стр. 158—159).

<sup>2)</sup> Согласно [10], стр. 157, этот факт явился одним из наиболее ранних открытий в оптике (Мороликус, 1575 г.).

ном случае — точкам перегиба) отвечают ветви каустики (11.16), асимптотически уходящие на бесконечность. Указанные свойства каустики в двумерной задаче следуют из свойств эволюты.

Восстановление лучей по форме каустики особенно легко выполняется в двумерной задаче, ибо фронты являются эвольвентами каустики. В трехмерном случае для этого на каустической поверхности необходимо дополнительно задать поле направлений лучей, покидающих каустику.

**4. Плоский амплитудно-фазовый экран.** Рассмотрим наиболее часто встречающуюся постановку задачи, когда начальные условия для поля волны заданы на плоскости<sup>1)</sup>, скажем,  $z = 0$ . Эту плоскость можно рассматривать как *амплитудно-фазовый экран*, модулирующий плоскую волну  $e^{ik_0z}$  комплексным коэффициентом пропускания  $u^0(\xi, \eta) = A^0(\xi, \eta) \exp[ik_0\psi^0(\xi, \eta)]$ , где  $\xi, \eta$  — декартовы координаты в плоскости экрана.

Уравнения лучей (11.1) за экраном ( $z > 0$ ) имеют вид (ниже мы полагаем, что  $n = 1$ ):

$$x = \xi + p_x^0\sigma, \quad y = \eta + p_y^0\sigma, \quad z = p_z^0\sigma, \quad (11.17)$$

где  $p_{x,y,z}^0$  определяются выражениями (2.31) при  $\epsilon^0 = 1$ . Как видно из формул (11.17), для существования лучей при  $z > 0$  необходимо выполнение условия  $p_z^0 > 0$ , или  $(p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 < 1$ . В противном случае не существует вещественной «выводящей» компоненты импульса  $p_z^0$ , перпендикулярной экрану, и волна  $u^0 = A^0 e^{ik_0\psi^0}$  распространяется с замедленной фазовой скоростью вдоль экрана (поверхностная волна, [151]).

Элементарные вычисления дают

$$\mathcal{D}(\sigma) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \sigma)} = \frac{1}{p_z^0} (a_0\sigma^2 + b_0\sigma + p_z^0{}^2), \quad (11.18)$$

откуда

$$u(x, y, z) = \sum_{\xi, \eta} A^0(\xi, \eta) \sqrt{\frac{p_z^0{}^2}{a_0\sigma^2 + b_0\sigma + p_z^0{}^2}} \exp\{ik_0[\psi^0(\xi, \eta) + \sigma]\}. \quad (11.19)$$

Здесь

$$a_0 = \psi_{\xi\xi}^0 \psi_{\eta\eta}^0 - (\psi_{\xi\eta}^0)^2, \quad \sigma = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2},$$

$$b_0 = \psi_{\xi\xi}^0 (1 - \psi_{\eta\eta}^0{}^2) + \psi_{\eta\eta}^0 (1 - \psi_{\xi\xi}^0{}^2) + 2\psi_{\xi\xi}^0 \psi_{\eta\eta}^0 \psi_{\xi\eta}^0,$$

<sup>1)</sup> В ряде задач удобно рассматривать также начальные условия, заданные на каустике (см., например, [33]).



$\xi_v, \eta_v$  — лучевые координаты точки  $\{x, y, z\}$ , определяемые из системы лучевых уравнений (11.17), а суммирование проводится по всем лучам, проходящим через точку наблюдения.

В двумерной задаче (на плоскости  $x, z$ ), когда  $p_y^0 = 0$ , из (11.9) получим

$$u(x, z) = \sum_{\xi_v} A^0(\xi) \left(1 - \frac{\sigma}{R}\right)^{-1/2} \exp\{ik_0[\psi^0(\xi) + \sigma]\}, \quad (11.20)$$

где

$$R = -\frac{1}{\psi_{\xi\xi}^0} \left(1 - \psi_{\xi\xi}^0\right), \quad \sigma = \sqrt{(x - \xi)^2 + z^2}, \quad (11.21)$$

а  $\xi_v = \xi_v(x, z)$  — корни уравнений лучей (11.17) при  $p_y^0 = 0$ , которые можно представить в виде

$$x = \xi + z \frac{\psi_{\xi\xi}^0}{\sqrt{1 - \psi_{\xi\xi}^0}}. \quad (11.22)$$

Аналогично (11.20) и (11.15) при аксиально симметричном эйконале  $\psi^0$ , когда  $\psi^0 = \psi^0(\rho)$ , где  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — полярный радиус при  $z = 0$ , нетрудно получить

$$A(z, r, \varphi) = A^0(\rho, \varphi) \left[\frac{\rho R}{r(R - \sigma)}\right]^{1/2}, \quad (11.23)$$

где  $R$  дается формулой (11.21) с заменой  $\xi$  на  $\rho$ .

Каустики лучей (11.22) описываются уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \xi - \frac{\psi_{\xi\xi}^0}{\psi_{\xi\xi\xi}^0} \left(1 - \psi_{\xi\xi}^0\right) \equiv x_K(\xi), \\ z &= -\frac{1}{\psi_{\xi\xi\xi}^0} \left(1 - \psi_{\xi\xi}^0\right)^{3/2} \equiv z_K(\xi), \end{aligned} \quad (11.24)$$

из которых следует, что образование действительной каустики при  $z > 0$  возможно только при  $\psi_{\xi\xi\xi}^0 < 0$  (соответствующая часть экрана является *фокусирующей*). Клювы каустики (11.24) определяются условием:  $dx_K/d\xi = 0$  (или  $dz_K/d\xi = 0$ ), откуда

$$\psi_{\xi\xi}^0 \left[\psi_{\xi\xi\xi\xi}^0 \left(1 - \psi_{\xi\xi}^0\right) + 3\psi_{\xi\xi}^0 \psi_{\xi\xi\xi}^0\right] = 0. \quad (11.25)$$

Асимптотами каустики (11.24) являются лучи (11.22), выходящие из экрана в точках, где  $\psi_{\xi\xi}^0 = 0$ . Полезные сведения о геометрии асимптот каустик можно найти в [43]. Каустики, соответствующие ближнему полю плоских апертур, исследовались в [152].

### 5. Пример: синусоидальный фазовый экран. Пусть

$$\psi^0(\xi) = b \sin(\kappa\xi) = b \sin\left(2\pi \frac{\xi}{h}\right), \quad (11.26)$$

где  $b$  — амплитуда фазовой модуляции, а  $\kappa = 2\pi/h$  — волновое число синусоидального возмущения. Уравнение лучей (11.22) в этом случае принимает вид

$$\frac{x - \xi}{z} = \frac{\kappa b \cos(\kappa\xi)}{\sqrt{1 - \kappa^2 b^2 \cos^2(\kappa\xi)}}. \quad (11.27)$$

Определение различных областей многолучевости легко проводится с помощью уравнений каустик (11.24), которые принимают вид

$$\begin{aligned} \kappa x &= \kappa\xi + \operatorname{ctg}(\kappa\xi) [1 - \kappa^2 b^2 \cos^2(\kappa\xi)], \\ \kappa z &= \frac{1}{\kappa b \sin(\kappa\xi)} [1 - \kappa^2 b^2 \cos^2(\kappa\xi)]^{3/2}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Каустика (11.28) представляет собой периодическую по оси последовательность кривых с периодом  $h = 2\pi/\kappa$ , форма которых

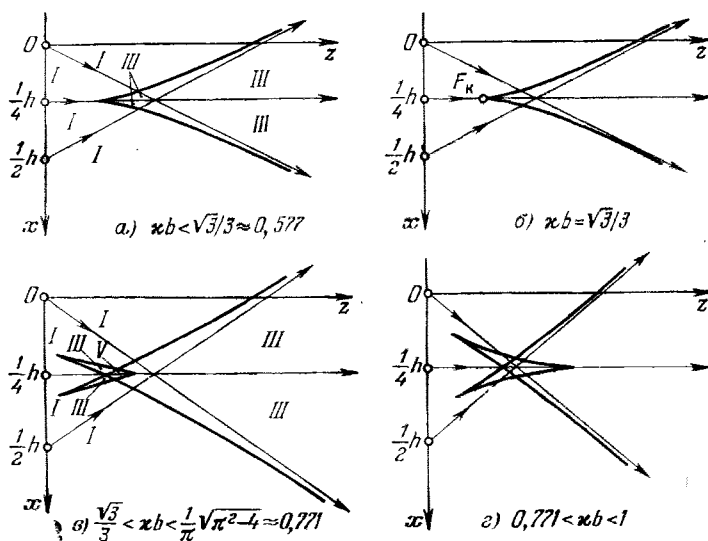


Рис. 11.2.

определяется величиной  $\kappa b$ . Каустика одного периода показана на рис. 11.2; римскими цифрами на этом рисунке отмечено число лучей, проходящих через точку наблюдения в разных областях плоскости  $x, z$ . При  $\kappa b < \sqrt{3}/3 \approx 0,577$  каустика имеет один кюв, обращенный к экрану (рис. 11.2, a), а при  $0,577 < \kappa b < 1$  —

три различных клюва (рис. 11.2, в, г), определяемых, согласно (11.25), из условий

$$\begin{aligned} \kappa \xi &= \frac{\pi}{2} m, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \sin(\kappa \xi) &= \pm \frac{1}{\kappa b} \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \kappa^2 b^2)}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

При  $\kappa b \rightarrow \sqrt{3}/3$  каустические петли стягиваются в фокус  $F_{\kappa}$  (рис. 11.2, б). Изображенные на рис. 11.2 каустики являются типичными сечениями поверхности типа «бабочка» (см. § 4). Лучи, выходящие из экрана при  $\xi = mh = 2\pi m/\kappa$  ( $m = 0, \pm 1, \dots$ ), представляют собой асимптоты каустик.

При  $\kappa b > 1$  часть экрана, на которой  $\partial\psi^0/\partial\xi > 1$ , не излучает. Каустика в этом случае не имеет асимптот и касается экрана в точках, где  $\partial\psi^0/\partial\xi = 1$ , при этом на каустике образуется один клюв, направленный от экрана, как на рис. 12.3, а.

Совокупная картина каустик при  $\kappa b < 0,577$  представлена на рис. 11.3 и позволяет легко определить число лучей в различных областях пространства (число лучей на рис. 11.3 указано римскими цифрами). С удалением от экрана число лучей, проходящих через точку наблюдения, увеличивается, что приводит к усложнению интерференционной структуры волнового поля.

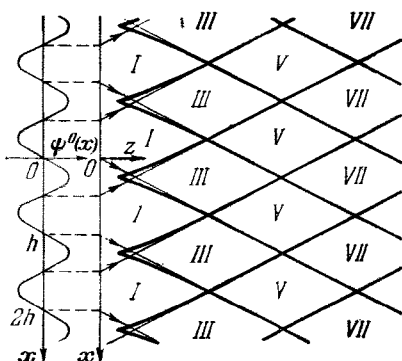


Рис. 11.3.

**6. Условия применимости геометрической оптики.** Размеры френелевской зоны на начальном волновом фронте при условии  $|R_{1,2}| \gg \lambda_0/n$  определяются по формуле, аналогичной (10.11):

$$a_f^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{n} \left| \frac{1}{R_{1,2}} - \frac{1}{\sigma} \right|^{-1}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{n} \left| \frac{\sigma R_{1,2}}{\sigma - R_{1,2}} \right|}, \quad (11.30)$$

где под  $R_{1,2}$  понимают главные радиусы кривизны фронта ( $R_{1,2} < 0$  для выпуклого, расходящегося фронта). На начальной поверхности  $Q$  френелевский объем вырезает зону с размерами

$$b_f^{(1,2)} = \frac{a_f^{(1,2)}}{|\cos \theta|}, \quad (11.31)$$

где  $\theta$  — угол между ортом луча  $l^0$  и нормалью  $N$  к  $Q$  (угол выхода луча из  $Q$ ).

Согласно критериям применимости геометрической оптики (10.12) и (10.14), имеем<sup>1)</sup>

$$\frac{a_f^{(1,2)}}{|\cos \theta|} \left| \frac{1}{A^0} \frac{\partial A^0}{\partial \xi_j} \right| \ll 1, \quad a_f^{(1,2)} \ll |R_{1,2}|, \quad (11.32)$$

где  $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$  — криволинейные координаты на  $Q$ . Подставив выражение (11.30) для  $a_f^{(1,2)}$  в (11.32), нетрудно показать, что в отсутствие каустик ( $R_{1,2} < 0$ ) неравенство  $a_f^{(1,2)} \ll |R_{1,2}|$  выполняется, если  $|R_{1,2}| \gg \lambda_0/n$ .

Если же начальная поверхность  $Q$  имеет конечные размеры  $d_{1,2} \gg \lambda_0/n$ , то, кроме (11.32), для применимости геометрической оптики должно выполняться дополнительное условие  $2b_f^{(1,2)} \ll d_{1,2}$ . С учетом (11.30) и (11.31) отсюда легко получить следующее ограничение на дистанцию  $\sigma$ :

$$\frac{\sigma}{\lambda} \ll \left\{ \left( \frac{2\lambda}{d_{1,2} \cos \theta} \right)^2 - \left| \frac{\lambda}{R_{1,2}} \right| \right\}^{-1}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (11.33')$$

Из (11.33) в частном случае  $\lambda |R_{1,2}| \gg \left( \frac{1}{2} d_{1,2} \cos \theta \right)^2$  находим

$$\lambda \sigma \ll \left( \frac{1}{2} d_{1,2} \cos \theta \right)^2. \quad (11.33'')$$

В случае же  $\lambda^2 \ll \lambda |R_{1,2}| \ll \left( \frac{1}{2} d_{1,2} \cos \theta \right)^2$  условие (11.33'') справедливо для любых  $\sigma$ .

Например, если исходная поверхность  $Q$  представляет собой расходящийся волновой фронт с  $A^0 = \text{const}$ , то при условии  $1 \ll |R_{1,2}|/\lambda \ll (d_{1,2}/2\lambda)^2$  приближение геометрической оптики справедливо вдоль всей трассы распространения волны. Границы применимости лучевого описания для сходящегося фронта, когда образуются каустики или фокус, подробнее рассматриваются ниже в пп. 9, 10.

**7. Геометрическая оптика в ближней и дальней зонах антенны. Распространение волновых пучков.** Рассмотрим поле плоской синфазной апертурной антенны с диаметром раскрыва  $2b \gg \lambda$ , в которой начальное (при  $z = 0$ ) распределение поля имеет вид  $u^0(x, y) = A^0(x, y)$ , т. е. начальная фаза считается постоянной и равной нулю:  $\psi^0 \equiv 0$ . Поясним, почему геометрическая оптика применима как в ближней, так и дальней зонах антенны, и чем отличаются лучевые описания полей в этих двух случаях.

<sup>1)</sup> Условием применимости (11.32) в однородной среде можно дать строгое обоснование с помощью асимптотического исследования дифракционного интеграла Кирхгофа — Гюйгенса (простые примеры см. в [28]).

Вблизи плоской синфазной апертурной антенны больших волновых размеров приближение геометрической оптики (11.19) описывает поле пучка параллельных лучей (пржекторного пучка, рис. 11.4, а) с тем же распределением амплитуды, что и на самом раскрыве:

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) e^{ikh_0 z} = A^0(x, y) e^{ikh_0 z}.$$

Согласно (11.33"), приближение применимо при условии<sup>1)</sup>  $\sigma \equiv z \ll b^2/\lambda$  (здесь учтено, что  $\theta = 0$  и  $|R_{1,2}| \rightarrow \infty$ ). Указанное условие соответствует ближней зоне антенны.

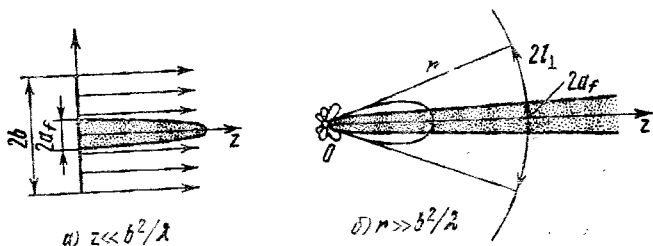


Рис. 11.4.

Вдали от раскрыва поле представляет собой направленную сферическую волну с шириной диаграммы направленности порядка  $\lambda/b$ , так что на расстоянии  $r$  от антенны характерный масштаб изменения поля составляет  $l_{\perp} \sim \lambda r/b$  (рис. 11.4, б). Размер френелевской зоны на сфере радиуса  $r$  для бесконечно удаленной точки наблюдения равен  $a_f = \sqrt{\lambda r}$ . Поэтому согласно критерию применимости геометрической оптики должно выполняться неравенство

$$a_f/l_{\perp} = \sqrt{b^2/\lambda r} \ll 1 \quad \text{или} \quad r \gg b^2/\lambda. \quad (11.34)$$

Полученное условие, естественно, совпадает с обычным критерием дальней зоны апертуры, при этом, если вместо (11.34) наложить более слабое требование  $a_f \leq l_{\perp}$ , то можно считать, что дальняя зона антенны начинается с  $r \geq b^2/\lambda$ . С позиций геометрической оптики пржекторного пучка при расположении наблюдателя на расстоянии  $r = b^2/\lambda$  на апертуре укладывается одна зона Френеля.

Таким образом, геометрооптическое описание применимо как в ближней (рис. 11.4, а), так и в дальней (рис. 11.4, б) зонах плоского синфазного раскрыва, однако следует подчеркнуть различие в начальных условиях. При описании поля в ближней зоне

<sup>1)</sup> Полученная оценка следует также непосредственно из формулы (10.9) для  $a_f$  и требования  $a_f \ll b$ .

начальные условия задаются на раскрыве, тогда как при вычислении поля в дальней зоне в качестве начальных условий берется поле направленной сферической волны, определяемое сформировавшейся диаграммой направленности антенны.

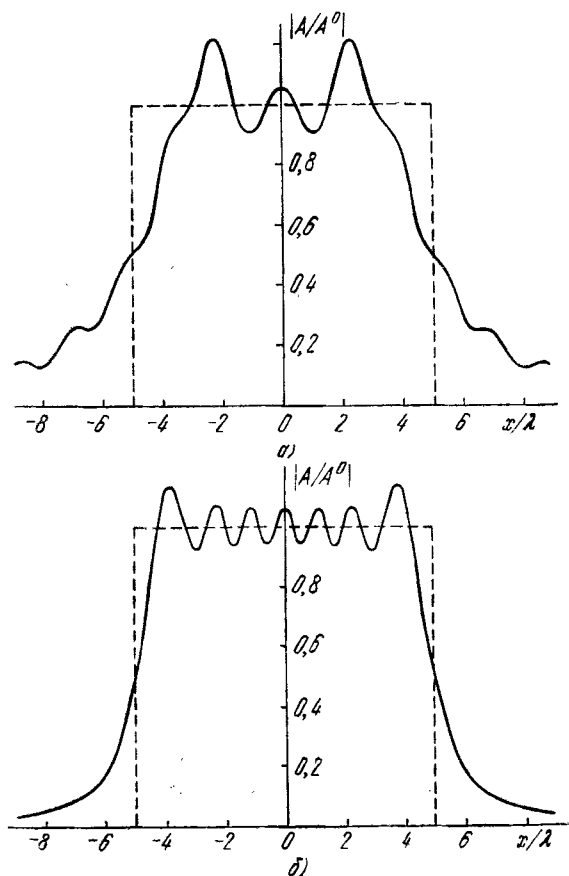


Рис. 11.5.

В промежуточной зоне  $r \sim b^2/\lambda$  поле антенны имеет более сложный характер, не описываемый геометрической оптикой (лучевой и квазилучевой подходы в этом случае см., например, в [152, 153]). Вместе с этим следует подчеркнуть, что в рассматриваемой задаче проявилась специфика пучка параллельных лучей (плоского фронта). Как уже отмечалось в п. 6, для криволинейного начального волнового фронта (например, для плоской апертуры с нелинейным фазовым возбуждением) единое геомет-

рооптическое описание может быть применимо как в ближней, так и в промежуточной и дальней зонах антенны.

Для ограниченных *волновых пучков* справедливы все предыдущие соображения относительно границ применимости геомет-

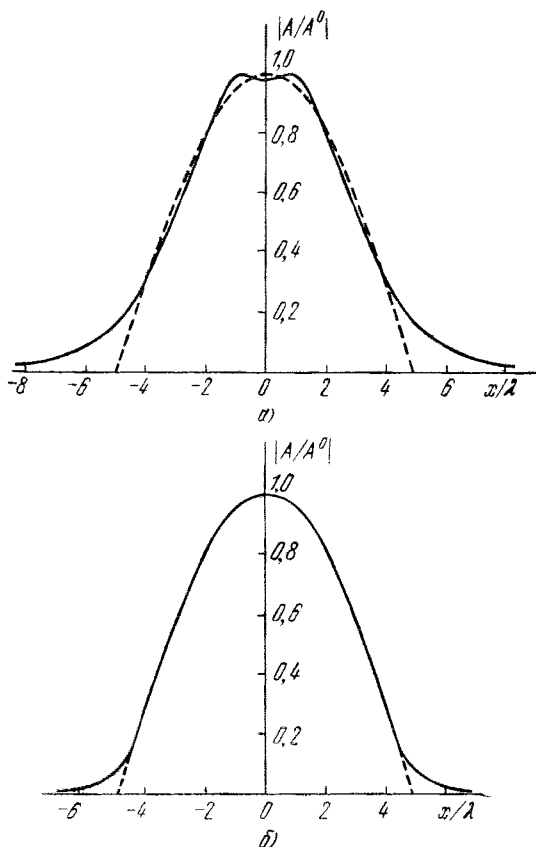


Рис. 11.6.

рической оптики в ближней и дальней зонах пучка. Приближение геометрической оптики в ближней зоне пучка определяется формулам (11.19), (11.20) и (11.23).

С целью иллюстрации точности геометрооптического приближения на рис. 11.5 и 11.6 представлены амплитудные распределения поля в двух различных поперечных сечениях  $z = \text{const}$  двумерного пучка<sup>1)</sup>, которые были рассчитаны с помощью диф-

<sup>1)</sup> Разумеется, те же рисунки относятся и к ближнему полю плоской апертурной антенны.

рациональной теории [153, 470] (сплошные кривые) и геометрической оптики (штриховые кривые). Рис. 11.5 относится к пучку с равномерным начальным распределением амплитуды  $A^0(x)$ , а рис. 11.6 — к пучку с косинусоидальным распределением  $A^0(x) = A^0 \cos(\pi x/2b)$ , при этом ширина пучка равна  $2b = 10\lambda$ , а начальный эйконал  $\psi^0 = 0$ . Нижние графики соответствуют расстоянию  $z = 2\lambda(a; \approx 1,4\lambda)$ , а верхние —  $z = 10\lambda(a; \approx 3,2\lambda)$ .

Как видно из рис. 11.5 и 11.6, точность геометрической оптики выше для плавно изменяющегося амплитудного распределения в связи с тем, что оно имеет меньший поперечный градиент амплитуды (более слабую поперечную диффузию). Очевидно, что точность геометрикооптических расчетов убывает (дифракционные эффекты становятся заметнее) с увеличением расстояния  $z$  от начальной апертуры, т. е. по мере перемещения точки наблюдения из ближней зоны в промежуточную зону пучка.

Если начальное распределение фазы  $\psi^0$  в пучке при  $z = 0$  нелинейно, то структура поля волнового пучка существенно отличается от рассмотренной на рис. 11.5 и 11.6. В ближней зоне пучка в этом случае значительное влияние оказывают эффекты расходимости пучка и фокусировки поля на каустиках (11.24). Исследование этих эффектов проводилось, например, в [152, 153, 470].

**8. О фазовом центре антенны или рассеивателя.** Поле антенны или рассеивателя в дальней зоне определяется выражением

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{e^{ik_0 r}}{r} F(\theta, \varphi) e^{i f(\theta, \varphi)}, \quad (11.35)$$

где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты, а  $F$  и  $f$  — соответственно амплитудная и фазовая диаграммы. Из-за комплексности диаграммы  $F e^{i f}$  суммарная фаза поля (11.35) зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ :

$$\Phi = k_0 r + f(\theta, \varphi) \equiv \Phi(r, \theta, \varphi). \quad (11.36)$$

Как известно [154, 155], поле (11.35) обладает *фазовым* центром, расположенным в точке  $r_\Phi = \{x_\Phi, y_\Phi, z_\Phi\}$  только при

$$f(\theta, \varphi) = k_0(\mathbf{r}_\Phi) = k_0(x_\Phi \cos \varphi + y_\Phi \sin \varphi) \sin \theta + k_0 z_\Phi \cos \theta$$

(при  $f \equiv 0$  фазовый центр совпадает с началом координат  $r = 0$ ). При  $f \neq k_0(\mathbf{r}_\Phi)$  эквифазные поверхности  $\Phi = \text{const}$  не являются сферическими, и единого (для всех  $\theta$  и  $\varphi$ ) фазового центра не существует. Отличие эквифазной поверхности (фазового фронта) от сферы, как мы видели выше, приводит к астигматизму — к появлению двух каустик, которые образуются пересечением лучей (нормалей к фронту), расположенных в главных нормальных сечениях фронта<sup>1)</sup>. Эти две каустики могут рассматриваться

<sup>1)</sup> Напомним, что положение двух главных нормальных сечений поверхности изменяется от точки к точке.



как два *кажущихся* (частичных, локальных) фазовых центра, соответствующих этим сечениям и данному направлению  $\theta$ ,  $\varphi$ ; разумеется, их положение зависит от углов  $\theta$ ,  $\varphi$ . В произвольном (не главном нормальном) сечении нормали к фронту (лучи) не пересекаются и не образуют никакого частичного фазового центра.

Таким образом, вместо фазового центра для поля (11.35) в общем случае следует рассматривать две «фазовые каустики», геометрия и положение которых могут быть определены с помощью уравнений (11.16). Очевидно, что в векторном волновом поле «фазовые каустики» различны для разных компонент поля.

9. Поле в окрестности фокуса линзы. Рассмотрим линзу с диаметром отверстия  $2b$  и фокусным расстоянием  $F$ . Такая линза формирует сходящуюся волну с радиусом кривизны  $F$  и соответствует следующему начальному распределению эйконала:

$$\psi^0(\rho) = -\sqrt{\rho^2 + F^2}, \quad (11.37)$$

где  $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  — цилиндрическая координата в плоскости линзы  $z = 0$ .

Вычисление поля в фокусе и в его окрестности не может быть непосредственно проведено с помощью геометрической оптики. Однако оценки поля в этом случае можно получить с помощью лучей, исходя из соображений, высказанных в п. 10 § 10. Сначала, используя критерии применимости геометрической оптики (§ 10), определим размеры фокального пятна. Для этого найдем радиус  $a_f$  первой зоны Френеля в плоскости линзы  $z = 0$ .

Поместим точку наблюдения  $z$  на оси линзы ( $z < F$ ). Величину  $a_f$  можно найти с помощью формулы (10.11), если положить там  $n = 1$ ,  $R_2 = z$ , а в качестве  $R_1$  взять величину  $(-F)$ , которая выступает как отрицательный радиус кривизны сходящейся сферической зоны. В результате

$$a_f = \sqrt{\lambda \frac{zF}{F-z}}. \quad (11.38)$$

Формула (11.38) вытекает также из уравнения границы френелевского объема (10.6). Форма френелевского объема, в том числе и для точек наблюдения, лежащих за фокусом линзы, более подробно обсуждается в [79].

При  $z \rightarrow F$  радиус  $a_f$  стремится к бесконечности: область влияния для фокуса идеальной линзы является вся плоскость  $z = 0$ . Вследствие увеличения  $a_f$  при  $z \rightarrow F$  нарушаются критерии применимости (10.12), (10.13), и геометрикооптическое приближение теряет силу, когда радиус  $a_f$  сравнивается с радиусом линзы  $b$ . Пусть  $\zeta \equiv F - z$  — расстояние точки наблюдения  $z$  от



Такую же оценку можно получить и при помощи энергетического подхода (см. п. 10 § 10, а также [141]). Если приравнять поток энергии через линзу  $(A^0)^2 \pi b^2$  потоку энергии через фокальное пятно  $|u_F|^2 \pi l_{\perp}^2$  (мы принимаем, что в фокусе линзы поток энергии равномерно распределен по кругу радиуса  $l_{\perp}$ ), то для трехмерной задачи получим

$$(A^0)^2 \pi b^2 = |u_F|^2 \pi l_{\perp}^2 = |u_F|^2 \pi (\lambda F/b)^2. \quad (11.44)$$

Аналогично для двумерной задачи (цилиндрическая линза) найдем

$$(A^0)^2 b = |u_F|^2 l_{\perp} = |u_F|^2 \lambda F/b. \quad (11.45)$$

Вытекающие из (11.44) и (11.45) оценки  $|u_F|$  в обоих случаях эквивалентны (11.43).

Оценочные значения (11.43) неплохо согласуются со значениями волнового поля в фокусе  $u(F)$ , которые следуют из волновой теории (интеграла Кирхгофа — Гюйгенса) [79]:

$$|u(F)| = \begin{cases} A^0 \pi b^2 / \lambda F, \\ A^0 2b / \lambda F. \end{cases} \quad (11.46)$$

Подчеркнем, что значения (11.46) относятся к центру фокального пятна (к фокусу), в то время как оценки (11.43) — к границе фокального пятна.

**10. Поле в фокусе линзы при наличии цилиндрической (сферической) аберрации.** Рассмотрим теперь фокусирующую систему (линзу), дающую при  $z=0$  квадратичное распределение фазы по  $\rho$ :

$$u^0(\rho) = \exp[ik_0 \psi^0(\rho)], \quad \psi^0(\rho) = -\rho^2/2F. \quad (11.47)$$

При таком начальном распределении фазы лучи (11.17) образуют каустику, имеющую, согласно уравнениям (11.24), вид астероиды (рис. 11.8, а)

$$r^{2/3} + z^{2/3} = F^{2/3}. \quad (11.48)$$

Точка заострения каустики (каустический клюв) с координатами  $r=0$ ,  $z=F$  является фокусом линзы в параксиальном ( $r \ll F$ ) приближении. Каустика (11.48) отвечает наличию *сферической аберрации* у фокусирующей системы. В аналогичной двумерной системе (в цилиндрической линзе) в этом случае говорят о *цилиндрической аберрации*.

Оценим поле в фокусе линзы при наличии сферической (цилиндрической) аберрации, при этом схема вычислений остается такой же, как и при отсутствии аберраций (см. п. 9).

Пусть точка наблюдения находится в фокусе линзы. Радиус  $a_f$  первой френелевской зоны непосредственно на выходе линзы

(т. е. при  $z = 0$ ) определим из уравнения (10.6), положив там  $\psi_{\text{вирт.}} = \sqrt{a_f^2 + F^2} - a_f^2/2F$ ,  $\psi_{\text{опорн}} = F$ :

$$\sqrt{a_f^2 + F^2} - \frac{a_f^2}{2F} - F - \frac{\lambda}{2} = 0. \quad (11.49)$$

Если  $a_f \ll F$ , то из (11.49) легко получим

$$a_f = (4\lambda F^3)^{1/4}. \quad (11.50)$$

В отличие от строго сферической волны (п. 9), когда фокусу линзы соответствует бесконечно протяженная зона Френеля на экране, теперь зона Френеля имеет ограниченные размеры даже в случае, когда точка наблюдения находится в фокусе.

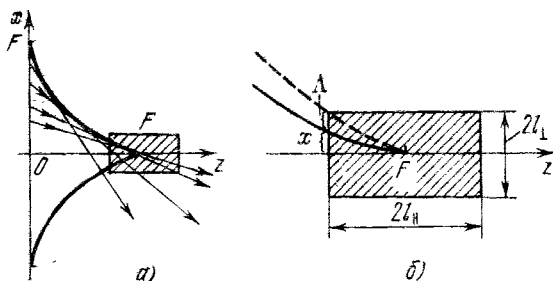


Рис. 11.8.

Центральный участок линзы с радиусом порядка  $a_f$  можно рассматривать как идеальную линзу с эффективным радиусом  $b_o \sim a_f$ . Исходя из этого, можно оценить ширину фокального пятна  $2l_{\perp}$  в плоскости  $z = F$ , протяженность пятна  $2l_{\parallel}$  вдоль оси  $z$  и величину поля в фокусе  $|u_F|$ , заменив в формулах (11.39), (11.40) и (11.43) радиус линзы  $b$  радиусом  $b_o \sim a_f = (4\lambda F^3)^{1/4}$ . Тогда получим

$$l_{\parallel} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\lambda F}, \quad l_{\perp} \sim (\lambda^3 F/4)^{1/4} \approx 0,7 (\lambda^3 F)^{1/4}, \quad (11.51)$$

$$|u_F| \sim \begin{cases} A^0 (4F/\lambda)^{1/2}, \\ A^0 (4F/\lambda)^{1/4}, \end{cases} \quad (11.52)$$

(верхняя строка в последней формуле относится к трехмерной задаче, а нижняя — к двумерной).

Оценки (11.51) и (11.52) можно подтвердить сравнением с расчетами на основе интегралов Кирхгофа — Гюйгенса. Например, расчеты поля в фокусе линзы дают [79]:

$$|u_F| = \begin{cases} \pi A^0 (2F/\lambda)^{1/2} = 2,2 A^0 (4F/\lambda)^{1/2}, \\ 1,8 A^0 (4F/\pi\lambda)^{1/4} = 1,35 A^0 (4F/\lambda)^{1/4}. \end{cases} \quad (11.53)$$

Таким образом, точное значение поля в фокусе (11.53) превышает энергетическую оценку (11.52) в 2,2 раза для трехмерной задачи и в 1,35 раза — для двумерной.

Приведенные выше оценки размеров каустической зоны и поля  $|u_F|$  внутри этой зоны хорошо согласуются также с асимптотическими выражениями для поля вблизи точки заострения каустики (11.48). В самом деле, поле волны в двумерной задаче в этом случае описывается интегралом Пирси [25]:

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(Yt + Xt^2 + t^4)] dt, \quad (11.54')$$

где

$$X = \left(\frac{12\pi}{\lambda\delta}\right)^{1/2} \tilde{x}, \quad Y = \left(\frac{192\pi^3}{\lambda^3\delta}\right)^{1/4} \tilde{y}, \quad (11.54'')$$

а  $\delta$  — параметр, определяемый из уравнения каустики вблизи точки заострения:  $\tilde{x}^3 = -\frac{9}{8}\delta\tilde{y}^2$ . Уравнение каустики (11.48) в двумерном случае ( $r \rightarrow x$ ) вблизи параксиального фокуса  $z = F$  можно представить в виде

$$x \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{F^{1/2}} (F - z)^{3/2}, \quad (11.55')$$

откуда

$$(z - F)^3 = -\frac{27}{8} Fx^2, \quad \delta = 3F, \quad (11.55'')$$

причем  $\tilde{x} = z - F$ ,  $\tilde{y} = x$ . Используя эти результаты, определим, например, размеры фокального пятна  $l_{\perp}$ ,  $l_{\parallel}$ .

Значения  $l_{\perp}$  и  $l_{\parallel}$  найдем как размеры области, где неприменимо приближение геометрической оптики. Рис. 11.9 иллюстрирует закон изменения волнового поля вдоль оси симметрии каустического ключа и в направлении, перпендикулярном этой оси. Сплошными линиями показаны результаты волновой теории, полученные на основе численного расчета функций  $|I(X, 0)|$  и  $|I(0, Y)|$  (см. [25]), а штриховыми линиями — результаты геометрической оптики. Как следует из рис. 11.9, продольный (при  $Y = 0$ ) и поперечный (при  $X = 0$ ) размеры области неприменимости геометрической оптики определяются соответственно условиями  $|X| \leq 2$ ,  $|Y| \leq 4$  (при этом точность стыковки не ниже 10%). Отсюда

$$(192\pi^3/\lambda^3\delta)^{1/4}|x| \leq 4, \quad (12\pi/\lambda\delta)^{1/2}|z - F| \leq 2. \quad (11.56)$$

Учитывая, что  $\delta = 3F$ , и выбирая в (11.56) знаки равенства, найдем  $l_{\perp} = |x|$  и  $l_{\parallel} = |z - F|$ :

$$l_{\perp} = \left(\frac{4}{\pi^3} \lambda^3 F\right)^{1/4} \approx 0,6 (\lambda^3 F)^{1/4}, \quad l_{\parallel} = \left(\frac{1}{\pi} \lambda F\right)^{1/2} \approx 0,56 \sqrt{\lambda F}. \quad (11.57)$$

Найденные значения хорошо согласуются с (11.51).

Полезно отметить, что оценки (11.57) и, следовательно, (11.51) стыкуются с оценкой ширины  $\Lambda$  области неприменимости геометрической оптики на неособом участке каустики (11.48). Учитывая,

что радиус кривизны каустики (11.48) равен  $R_K = = 3(xzF)^{1/3}$ , вблизи фокуса, т. е. при малых  $F - z$ , получим  $R_K \approx [6F(F - z)]^{1/6}$ . Отсюда найдем величину  $\Lambda$  на краю фокального пятна, т. е. при  $|F - z| = L_{\parallel} = \sqrt{1} \sqrt{\lambda F} / 2$ :

$$\Lambda |l_{\parallel}| = (R_K / 2k_0^2)^{1/3} \approx 3^{1/6} \times (\lambda^3 F)^{1/4} / 2\pi^{2/3} \approx 0,28 (\lambda^3 F)^{1/4}.$$

При этом каустическая точка, где определялась ширина каустической зоны  $\Lambda$ , отстоит от оси  $z$  на расстояние, которое находится из уравнения (11.55')

$$x |l_{\parallel}| \approx \frac{1}{3\sqrt{3}} (\lambda^3 F)^{1/4} \approx 0,19 (\lambda^3 F)^{1/4}.$$

В результате для поперечного размера фокального пятна получаем (рис. 11.8, б)

$$l_{\perp} \approx x |l_{\parallel}| + \Lambda |l_{\parallel}| \approx 0,47 (\lambda^3 F)^{1/4},$$

что согласуется по порядку величины и с (11.51), и с (11.57). Этот пример показывает, что каустические объемы даже сложных каустик

можно оценивать при помощи простых соотношений для ширины каустической зоны неособой каустики  $\Lambda = (k_0^3 \beta)^{-1/3}$ .

## § 12. Отражение и преломление волн на границах раздела однородных сред

**1. Отражательные формулы.** Решение задачи об отражении и преломлении произвольной волны на криволинейной границе раздела двух однородных сред в общем виде было получено В. А. Фоком [157, 158] и рассматривалось позднее в [159—162]

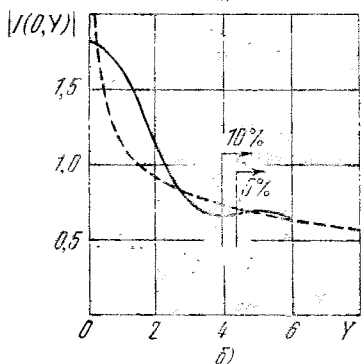
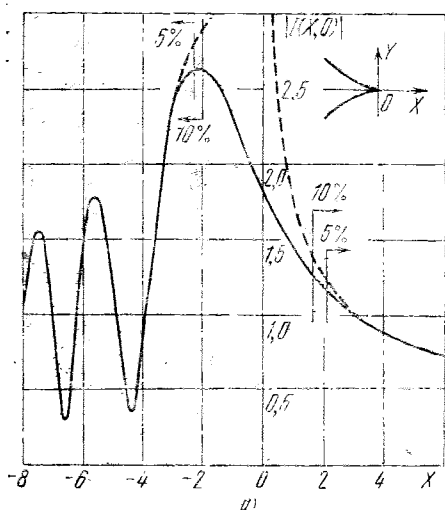


Рис. 11.9.

(см. также [32, 33, 89, 163—165]). Геометрия лучей при наличии границ раздела исследовалась во многих работах по инструментальной геометрической оптике [6—13]. В случае нескольких границ раздела оказались удобными матричные методы расчета лучей [11, 162]. Матричные методы нашли применение также и для расчета волновых полей [32, 162].

Отражательные формулы § 5 в случае однородных сред (см. § 11) принимают вид

$$u_{\text{отр}}(\mathbf{r}) = \Gamma(\xi, \eta) A_0^{\text{пад}}(\xi, \eta) \mathcal{F}_{\text{отр}}^{-1/2} \exp\{ik_0[\psi_{\text{пад}}(\xi, \eta) + \sigma n_1]\}, \quad (12.1')$$

$$u_{\text{пр}}(\mathbf{r}) = D(\xi, \eta) A_0^{\text{пад}}(\xi, \eta) \mathcal{F}_{\text{пр}}^{-1/2} \exp\{ik_0[\psi_{\text{пад}}(\xi, \eta) + \sigma n_2]\}, \quad (12.1'')$$

где  $\xi, \eta$  — криволинейные координаты на границе раздела  $Q$ ,  $A_0^{\text{пад}}$ ,  $\psi_{\text{пад}}$  — амплитуда и эйконал падающей волны на границе раздела,  $\Gamma$  и  $D$  — френелевские коэффициенты отражения и прохождения (5.15) и (5.16),  $\mathcal{F}_{\text{отр}}$  и  $\mathcal{F}_{\text{пр}}$  — расхождимости (11.7) отраженных и преломленных лучей,  $\sigma = |\mathbf{r} - \mathbf{r}^0|$  — расстояние вдоль луча, отсчитываемое от границы раздела  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\xi, \eta)$ . Амплитуды высших приближений геометрической оптики определяются формулами (5.11) и (3.33), высшие приближения для ряда частных случаев исследовались в [20, 86, 166, 167].

**2. Расхождимость отраженных и преломленных лучей.** Семейство лучей, отраженных от поверхности  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\xi, \eta)$ , описывается уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0(\xi, \eta) + \sigma \mathbf{l}_1(\xi, \eta) \equiv \mathbf{r}_1(\xi, \eta, \sigma), \quad (12.2)$$

где  $\mathbf{l}_1(\xi, \eta)$  — орт отраженного луча, определяемый из закона отражения

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_0 - 2N(\mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{l}_0 + 2N \cos \theta. \quad (12.3)$$

Здесь  $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}_0(\xi, \eta)$  — орт падающего луча, определяемый эйконом падающей волны  $\psi_{\text{пад}}$ :  $\mathbf{l}_0 = \nabla \psi_{\text{пад}}/n_1$ ;  $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi, \eta)$  — орт нормали к границе раздела, направленный навстречу падающей волне (рис. 12.1), а  $\theta$  — угол падения (отражения).

Для определения расхождимости  $\mathcal{F}_{\text{отр}}$  отраженных лучей необходимо вычислить якобиан  $\mathcal{D}(\sigma) = \mathbf{r}_{1\xi} \mathbf{r}_{1\eta} \mathbf{l}_1$ . Аналогично (11.7) нетрудно получить

$$\mathcal{F}_{\text{отр}} = \frac{\mathcal{D}(\sigma)}{\mathcal{D}(0)} = \frac{a}{c} \sigma^2 + \frac{b}{c} \sigma + 1 \equiv K_{\text{отр}} \sigma^2 - 2H_{\text{отр}} \sigma + 1, \quad (12.4')$$

где

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_{1\xi} \mathbf{l}_{1\eta}, & c &= \mathbf{l}_1 \mathbf{r}_{\xi}^0 \mathbf{r}_{\eta}^0, \\ b &= \mathbf{l}_1 \mathbf{r}_{\xi}^0 \mathbf{l}_{1\eta} + \mathbf{l}_1 \mathbf{l}_{1\xi} \mathbf{r}_{\eta}^0, \end{aligned} \quad (12.4'')$$

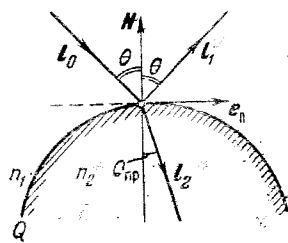


Рис. 12.1.

$K_{\text{отр}} = a/c$  и  $H_{\text{отр}} = -b/2c$  — соответственно полная и средняя кривизна отраженного фронта, при этом его главные радиусы кривизны  $R_1, R_2$  равны

$$R_{1,2} = \frac{1}{2a} (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) = \frac{1}{K_{\text{отр}}} (H_{\text{отр}} \pm \sqrt{H_{\text{отр}}^2 - K_{\text{отр}}}). \quad (12.5)$$

Аналогично рассчитывается расходимость преломленных лучей, которые описываются уравнением

$$r = r^0(\xi, \eta) + \sigma l_2(\xi, \eta). \quad (12.6)$$

Здесь  $l_2$  — орт преломленного луча (рис. 12.4),

$$l_2 = -\cos \theta_{\text{пр}} N + \sin \theta_{\text{пр}} e_{\parallel} = \frac{1}{n_2} (n_1 l_0 - M_{21} N), \quad (12.7)$$

$\theta_{\text{пр}}$  — угол преломления, подчиняющийся закону Снеллиуса (5.6),  $e_{\parallel}$  — орт касательной к границе раздела, расположенный в плоскости падения волны, а через  $M_{21}$  обозначена комбинация  $M_{21} = n_2 \cos \theta_{\text{пр}} - n_1 \cos \theta$ . Из сравнения уравнений лучей (12.6) и (12.2) следует, что для определения расходимости

$$\mathcal{F}_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} \sigma^2 - 2H_{\text{пр}} \sigma + 1 \quad (12.8)$$

и главных радиусов кривизны преломленного фронта можно использовать формулы (12.4) и (12.5), в которых орт  $l_1$  следует заменить на  $l_2$ .

Формулы (12.4) и (12.5) и аналогичные формулы для преломленной волны (12.8) в принципе полностью решают геометрическую часть задачи — определение расходимостей отраженных и преломленных лучей, что дает возможность рассчитать отраженные и преломленные поля (12.1). Для физических исследований удобны, однако, не формулы (12.4), (12.5), а вытекающие из них формулы в инвариантной форме, которые дают выражения для расходимостей  $\mathcal{F}_{\text{отр}}$ ,  $\mathcal{F}_{\text{пр}}$  через радиусы кривизны границы раздела и падающего волнового фронта. Решение общей задачи приводится в [159—162, 32, 33].

Здесь мы рассмотрим для простоты не произвольную падающую волну<sup>1)</sup>, а волну сферической формы, создаваемую источником, расположенным в точке  $r_{\text{и}}$ . В этом случае

$$l^0 = \frac{r^0(\xi, \eta) - r_{\text{и}}}{|r^0(\xi, \eta) - r_{\text{и}}|} = \frac{R_0}{R_0}, \quad (12.9)$$

где  $R_0$  — расстояние от источника до точки падения луча  $r^0(\xi, \eta)$ .

<sup>1)</sup> Задача о падении волны произвольной формы представляет особый интерес при изучении многократного рассеяния на неровных поверхностях [161] и на телах сложной формы [162, 168, 172].



В качестве координатных линий  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$  на поверхности раздела удобно выбрать (как и в п. 2 § 11) линии кривизны, что упрощает вычисления коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  по формулам (12.3). Опуская несложные, но достаточно громоздкие выкладки, приведем окончательные выражения для полной и средней кривизны отраженного и преломленного фронтов, которые следуют из формул (12.4):

$$K_{\text{отр}} = 4\tilde{K} - \frac{2 \cos \theta}{R_0} (2\tilde{H} + \tilde{\kappa} \text{tg}^2 \theta) + \frac{1}{R_0^2}, \quad (12.10')$$

$$H_{\text{отр}} = \cos \theta (2\tilde{H} + \tilde{\kappa} \text{tg}^2 \theta) - \frac{1}{R_0}, \quad (12.10'')$$

$$K_{\text{пр}} = \frac{n_1^2}{n_2^2 \cos^2 \theta_{\text{пр}}} \left[ \frac{1}{n_1^2} M_{21}^2 \tilde{K} + \frac{\cos^2 \theta}{n_1 R_0} M_{21} (2\tilde{H} + \tilde{\kappa} \text{tg}^2 \theta) + \frac{\cos^2 \theta}{R_0^2} \right], \quad (12.11')$$

$$H_{\text{пр}} = - \frac{1}{2n_2 \cos^2 \theta_{\text{пр}}} \left[ M_{21} \cos^2 \theta_{\text{пр}} (2\tilde{H} + \tilde{\kappa} \text{tg}^2 \theta) + \frac{1}{R_0} n_1 (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta_{\text{пр}}) \right]. \quad (12.11'')$$

Здесь  $\tilde{K} = 1/a_1 a_2$  — полная (гауссова) кривизна границы раздела в точке отражения,  $\tilde{H} = \frac{1}{2} (1/a_1 + 1/a_2)$  — ее средняя кривизна,  $\tilde{\kappa}$  — кривизна нормального сечения границы  $Q$  плоскостью падения:  $\tilde{\kappa} = (\cos^2 \alpha)/a_1 + (\sin^2 \alpha)/a_2$ ,  $\alpha$  — угол между плоскостью падения и плоскостью первого главного нормального сечения,  $a_1$ ,  $a_2$  — главные радиусы кривизны границы раздела  $Q$  ( $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ , если линии кривизны на  $Q$  загibaются в сторону орта  $N$ ; для выпуклой поверхности, как на рис. 12.1,  $a_1 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ). Формулы (12.10), (12.11) справедливы и для плоской падающей волны: в этом случае в них надо положить  $R_0 \rightarrow \infty$ .

В двумерной (плоской) задаче из (12.10) и (12.11) следуют формулы для расходимостей, справедливые и для произвольной падающей волны:

$$\mathcal{F}_{\text{отр}} = 1 - \frac{\sigma}{R_{\text{отр}}}, \quad \mathcal{F}_{\text{пр}} = 1 - \frac{\sigma}{R_{\text{пр}}}, \quad (12.12')$$

$$\frac{1}{R_{\text{отр}}} = \frac{1}{R_{\text{пад}}} + \frac{2}{a \cos \theta}, \quad \frac{1}{R_{\text{пр}}} = \frac{1}{n_2 \cos^2 \theta_{\text{пр}}} \left( \frac{n_1 \cos^2 \theta}{R_{\text{пад}}} - \frac{M_{21}}{a} \right), \quad (12.12'')$$

где  $R_{\text{пад}}$ ,  $R_{\text{отр}}$ ,  $R_{\text{пр}}$  — радиусы кривизны падающего, отраженного и преломленного волновых фронтов (для выпуклого фронта  $R < 0$ , например, для сферической волны  $R_{\text{пад}} = -R_0$ ,  $R_0 > 0$ ). Формулы (12.12) легко можно получить также с помощью геометрических

построений, которые показаны на рис. 12.2, а, б, при этом следует учесть, что  $\Delta\beta = \Delta\gamma + 2\Delta\alpha$ ,

$$|a| \Delta\alpha = \frac{|R^{\text{пад}}| \Delta\gamma}{\cos \theta} = \frac{|R^{\text{отр}}| \Delta\beta}{\cos \theta} = \frac{|R^{\text{пр}}| \Delta\beta_2}{\cos \theta_{\text{пр}}},$$

а углы  $\theta$  и  $\theta_{\text{пр}}$  связаны законом преломления (5.6) (см. также [30]).

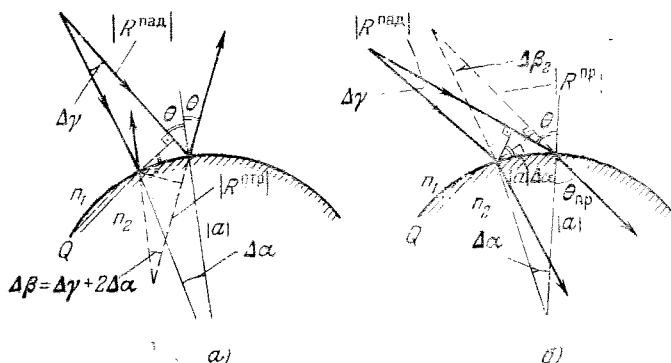


Рис. 12.2.

Аналогично (11.15) и (12.12), для аксиально-симметричной границы раздела и падающего фронта с той же симметрией имеем

$$\mathcal{F}_{\text{отр}} = \frac{r}{\rho} \left(1 - \frac{\sigma}{R^{\text{отр}}}\right), \quad \mathcal{F}_{\text{пр}} = \frac{r}{\rho} \left(1 - \frac{\sigma}{R^{\text{пр}}}\right), \quad (12.13)$$

где  $r$  и  $\rho$  — цилиндрические координаты соответственно точки наблюдения и точки падения луча, а  $R^{\text{отр}}$ ,  $R^{\text{пр}}$  определяются в меридиональном сечении по формулам (12.12).

**3. Эффективная поверхность рассеяния тела в приближении геометрической оптики.** Рассмотрим отражение плоской волны от произвольной границы раздела и найдем поле на больших расстояниях от границы, когда  $\sigma \gg |a_{1,2}|$ . Учитывая, что, согласно (12.4') и (12.10'), расходимость равна  $\mathcal{F}_{\text{отр}} \approx K_{\text{отр}} \sigma^2 = 4\tilde{K} \sigma^2 = 4\sigma^2/a_1 a_2$ , из (12.1') найдем амплитуду отраженного поля в дальней зоне:

$$A_0^{\text{отр}} \approx \frac{1}{2\sigma} \Gamma A_0^{\text{пад}} \sqrt{a_1 a_2} \approx \frac{1}{2r} \Gamma A_0^{\text{пад}} \sqrt{a_1 a_2}, \quad (12.14)$$

где  $r$  — расстояние от начала координат. Отсюда для эффективной поверхности рассеяния, которая определяется как

$$\Sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{A^{\text{отр}}}{A^{\text{пад}}} \right|^2, \quad (12.15)$$

получаем следующее геометрикооптическое представление [156, 170]:

$$\Sigma = \pi |a_1 a_2| |\Gamma|^2, \quad (12.16)$$

где главные радиусы кривизны границы  $a_1$ ,  $a_2$  и коэффициент отражения  $\Gamma$  берутся в точке падения (отражения) луча. Для идеального отражателя ( $|\Gamma| = 1$ ) имеем  $\Sigma = \pi |a_1 a_2|$ . В частном случае сферы ( $a_1 = a_2 = -a$ ) находим  $\Sigma = \pi a^2$ .

Для цилиндрического отражателя, когда эффективная поверхность рассеяния вводится формулой

$$\Sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left| \frac{A_{\text{отр}}}{A_{\text{пад}}} \right|^2, \quad (12.17)$$

из (12.1) и (12.12) получаем  $\Sigma = \pi |a| \cos \theta |\Gamma|^2$ . В частном случае рассеяния назад ( $\theta = \pi$ ) от идеального отражателя имеем  $\Sigma = \pi |a|$ .

**4. Отраженное поле направленного точечного источника (антенны) в дальней зоне.** Это поле можно получить аналогично (12.14):

$$u_{\text{отр}} \approx r^{-1} \exp [i k_0 (r + \psi_{\text{пад}})] F_{\text{отр}}, \quad F_{\text{отр}} = \Gamma A_0^{\text{пад}} K_{\text{отр}}^{-1/2}. \quad (12.18)$$

Здесь  $K_{\text{отр}}$  дается формулой (12.10'). Для направленного точечного источника, расположенного в точке  $r_0$ :

$$A_0^{\text{пад}} = F_0(l_0)/R_0, \quad \psi_{\text{пад}} = R_0 + f_0(l_0), \quad (12.19)$$

где  $F_0$  и  $f_0$  — функции, описывающие амплитудную и фазовую диаграммы направленности (в безграничном пространстве), а  $R_0 = |r^0 - r_0|$ . Тогда из (12.18) и (12.19) находим диаграмму направленности отраженного поля:

$$F_{\text{отр}}(l_1) = \Gamma F_0(l_0) \{1 - 2R_0 \cos \theta (2\tilde{H} + \tilde{\kappa} \operatorname{tg}^2 \theta) + 4R_0^2 \tilde{K}\}^{-1/2}, \quad (12.20)$$

где  $l_1$  — орт (12.3) отраженного луча. Очевидно, результирующее поле источника равно сумме полей всех лучей, попадающих в точку наблюдения (например, первичного и отраженного полей).

В двумерной задаче, используя (12.12'), легко получим

$$F_{\text{отр}}(l_1) = \Gamma F_0(l_0) \left( \frac{a \cos \theta}{a \cos \theta - 2R_0} \right)^{1/2}. \quad (12.21)$$

Приведенные выше формулы широко используются при расчетах эффективных поверхностей рассеяния и диаграмм направленности антенн, особенно в случае тел сложной формы [156, 170—172].

**5. Каустики отраженных и преломленных лучей.** Способность криволинейных границ раздела фокусировать лучи широко используется в оптических приборах, в связи с чем геометрия от-

раженных и преломленных лучей подробно исследовалась в работах по инструментальной геометрической оптике [6—13]. При наличии границы раздела принято различать *катакаустики* (каустики отраженных лучей) и *диакаустики* (каустики преломленных лучей). Так же как и в безграничной однородной среде (§ 11), отраженный фронт в трехмерном случае образует две катакаустики, а преломленный — две диакаустики<sup>1)</sup>.

Уравнения обеих катакаустик определяются из (12.2) при  $\sigma = R_1$  и  $\sigma = R_2$ , где  $R_{1,2}$  даются формулами (12.5). Диакаустики описываются уравнениями (12.6) при  $\sigma = R_{1,2}$ , где  $R_{1,2}$  определяются выражениями, аналогичными (12.5). Условием  $R_{1,2} > 0$  отвечают действительные, а  $R_{1,2} < 0$  — мнимые каустики. В двумерной задаче уравнения катакаустик и диакаустик приобретают следующий вид:

$$r = r^0(\xi) + R^{\text{отр}} l_1 \equiv r_{\text{кк}}(\xi), \quad (12.22')$$

$$r = r^0(\xi) + R^{\text{пр}} l_2 \equiv r_{\text{дк}}(\xi), \quad (12.22'')$$

где  $R^{\text{отр}}$  и  $R^{\text{пр}}$  определяются выражениями (12.12). В частном случае плоской падающей волны ( $R^{\text{пад}} \rightarrow \infty$ ) из (12.22) получим уравнения катакаустик:

$$x = x^0(\xi) + \frac{1}{2} a(\xi) \cos \theta \cdot \cos(2\theta) \equiv x_{\text{кк}}(\xi), \quad (12.23')$$

$$y = y^0(\xi) - \frac{1}{2} a(\xi) \cos \theta \cdot \sin(2\theta) \cdot \text{sgn} \frac{dy^0}{dx^0} \equiv y_{\text{кк}}(\xi), \quad (12.23'')$$

и уравнения диакаустик:

$$x = x^0(\xi) + a(\xi) \cos^2 \theta_{\text{пр}} \cdot \left( \frac{n_1}{M_{21}} + \cos \theta \right) \equiv x_{\text{дк}}(\xi), \quad (12.24')$$

$$y = y^0(\xi) - a(\xi) \cos^2 \theta_{\text{пр}} \cdot \sin \theta \cdot \text{sgn} \frac{dy^0}{dx^0} \equiv y_{\text{дк}}(\xi), \quad (12.24'')$$

где для удобства принято, что ось  $x$  направлена навстречу падающей волне, т. е.  $l_0 = -e_x$ . Уравнения (12.23) подтверждают, в частности, очевидный геометрический факт, что только вогнутая граница ( $a > 0$ ) фокусирует плоско-параллельный пучок лучей на каустике. Условие образования клюва на катакаустике (12.23), соответствующее требованию  $dx_{\text{кк}}/d\xi = 0$ , имеет вид

$$3 \operatorname{tg} \theta + \frac{d}{d\xi} a(\xi) = 0, \quad (12.25')$$

<sup>1)</sup> В аксиально-симметричной задаче одна из каустик вырождается в ось симметрии (см. также § 11).

или, если учесть, что  $1/a = -d\theta/d\xi$ ,

$$\frac{d}{d\xi}(a \cos^3 \theta) = 0. \quad (12.25'')$$

**6. Примеры катакаустик и диакаустик.** В задаче об излучении точечного источника вблизи плоской границы раздела образуется лишь мнимая диакаустика, уравнение которой, согласно (12.24), имеет вид

$$\left(\frac{x}{b_1}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b_2}\right)^{2/3} = 1, \quad (12.26)$$

где  $b_1 = x_n n_2 / n_1$ ,  $b_2 = b_1 (1 - n_2^2 / n_1^2)^{-1/3}$ . Диакаустика (12.26) является астроидой с точкой заострения  $F$  при  $y = 0$ ,  $x = x_F = x_n n_2 / n_1$ , причем клюв каустики при  $n_1 < n_2$  обращен к границе раздела,

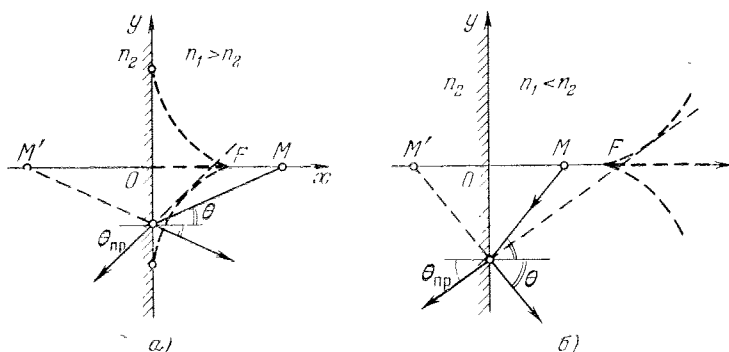


Рис. 12.3.

а при  $n_1 > n_2$  — в противоположную сторону (рис. 12.3). В случае  $n_1 > n_2$  диакаустика выходит на границу раздела в точках  $y = \pm b_2$ , соответствующих углу полного отражения  $\theta_{кр} = \arcsin(n_1/n_2)$  (при  $\theta = \theta_{кр}$  преломленный луч идет вдоль границы раздела). Как известно [25], при  $\theta > \theta_{кр}$  наблюдается дополнительное боковое смещение лучей при отражении, которое определяется фазой коэффициента отражения  $\Gamma$  и приводит к появлению катакаустики. Ее геометрия исследована в [44], где подробно рассмотрен случай плазмы с  $\epsilon_2 \equiv n_2^2 < 0$ .

При отражении плоской волны от цилиндрической (сферической) границы раздела радиусом  $a_0$  уравнения катакаустики (12.24) принимают вид

$$x = \mp \frac{1}{2} a_0 \cos \theta (1 + 2 \sin^2 \theta), \quad y = a_0 \sin^3 \theta, \quad (12.27)$$

где верхний (нижний) знак соответствует вогнутому (выпуклому) отражателю. Каустика (12.27) является эциклоидой (относи-

тельно окружности радиуса  $a_0/2$ ) и имеет точку заострения  $F$  на оси  $y = 0$  при  $|x| = a_0/2$  (рис. 12.4, а)<sup>1)</sup>. Каустика на рис. 12.4, б отвечает цилиндрической (сферической) аберрации отражателя, которую необходимо учитывать как при расчетах оптических устройств [6—13], так и при проектировании однозеркальных и двухзеркальных антенн [173, 174]. Каустики преломленных и отраженных лучей исследовались во многих работах, например,

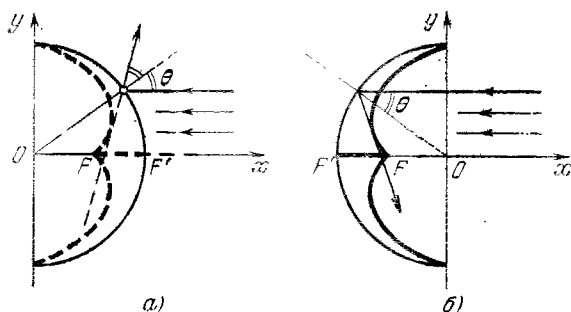


Рис. 12.4.

в [9, 40, 43, 24, 75, 175, 176]. Сведения о геометрии лучей и каустик при отражении и преломлении на границах раздела другой формы можно найти в [10, 13, 20, 177—179]. Следует отметить важную роль каустик в теории оптических aberrаций [6—13, 180], а также в теории открытых резонаторов [21, 75, 178] (см. также § 17).

**7. Условия применимости отражательных формул.** Область применимости формул (12.4) в различных частных случаях (плоские и сферические границы раздела, плоские и сферические волны) рассматривались в ряде работ, например, в [25, 28, 136, 181]. В частности, в работах Л. М. Бреховских [25, 181] детально изучена задача об излучении точечного источника, расположенного под плоской границей раздела.

Область применимости отражательных формул в общем случае устанавливается критериями I и II из § 10 и определяется условиями (11.32), где под  $A^0$  следует понимать амплитуды отраженной и преломленной волн на границе раздела, а под  $R_{1,2}$  — главные радиусы кривизны отраженного и преломленного фронтов<sup>2)</sup>. Рассмотрим для простоты условия (11.32) в плоскости падения волны и будем считать, что в этой плоскости лежат глав-

<sup>1)</sup> Отрезок оси  $FF'$  является осевой каустикой только для сферического зеркала.

<sup>2)</sup> Аналогично § 11 критерии применимости геометрикооптических формул в данном случае допускают обоснование с помощью интеграла Кирхгофа — Гюйгенса.

ные сечения поверхности раздела и фронтов (с радиусами кривизны  $a_1$ ,  $R_1^{\text{пад}}$ ,  $R_1^{\text{отр}}$  и  $R_1^{\text{пр}}$ ). Согласно (11.32), область применимости геометрикооптических формул (12.1) ограничивается условиями

$$\frac{a_f}{\cos \theta} \left| \frac{1}{A_0^{\text{пад}}} \frac{\partial A_0^{\text{пад}}}{\partial \xi} \right| \ll 1, \quad \frac{a_f}{\cos \theta} \left| \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right| \ll 1, \quad (12.28)$$

$$a_f \ll |R_1^{\text{отр}}|$$

для отраженного поля и

$$\frac{\hat{a}_f}{\cos \theta_{\text{пр}}} \left| \frac{1}{A_0^{\text{пад}}} \frac{\partial A_0^{\text{пад}}}{\partial \xi} \right| \ll 1, \quad \frac{\hat{a}_f}{\cos \theta_{\text{пр}}} \left| \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \right| \ll 1, \quad (12.29)$$

$$\hat{a}_f \ll |R_1^{\text{пр}}|$$

для преломленного поля. Полушприца Френелевской зоны на начальных отраженном ( $a_f$ ) и преломленном ( $\hat{a}_f$ ) фронтах определяется по формуле (11.30) с заменой  $R_1$  соответственно на  $R_1^{\text{отр}}$  или  $R_1^{\text{пр}}$ .

Если в отсутствие действительных каустик потребовать выполнения условий (12.28) и (12.29) на всем луче ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), то это приведет к неравенствам:

$$\sqrt{\frac{\lambda_0}{n_1} |R_1^{\text{отр}}|} \left| \frac{1}{A_0^{\text{пад}}} \frac{\partial A_0^{\text{пад}}}{\partial \xi} \right| \ll \cos \theta, \quad \sqrt{\frac{\lambda_0}{n_1} |R_1^{\text{отр}}|} \left| \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right| \ll \cos \theta, \quad (12.30')$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_0}{n_2} |R_1^{\text{пр}}|} \left| \frac{1}{A_0^{\text{пад}}} \frac{\partial A_0^{\text{пад}}}{\partial \xi} \right| \ll \cos \theta_{\text{пр}}, \quad \sqrt{\frac{\lambda_0}{n_2} |R_1^{\text{пр}}|} \left| \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \xi} \right| \ll \cos \theta_{\text{пр}}, \quad (12.30'')$$

$$|R_1^{\text{отр}}| \gg \frac{\lambda_0}{n_1}, \quad |R_1^{\text{пр}}| \gg \frac{\lambda_0}{n_2}, \quad (12.30''')$$

где  $R_1^{\text{отр}}$  и  $R_1^{\text{пр}}$  даются формулами (12.12) двумерной задачи. Условия (12.30) имеют простой физический смысл. Они требуют достаточно медленного изменения вдоль границы раздела амплитуды падающего поля  $A_0^{\text{пад}}$ , коэффициентов отражения ( $\Gamma$ ) и прохождения ( $D$ ), а также малой кривизны отраженного и преломленного фронтов (см. также § 10).

Из выражений (12.30), в частности, следует, что условия применимости отражательных формул (12.1) нарушаются вблизи лучей, касательных к криволинейной границе раздела ( $\theta \sim \pi/2$ ,  $|R_1^{\text{отр}}| \sim 0$ ), вблизи угла полного отражения ( $\theta \sim \theta_{\text{кр}} =$

$= \arcsin(n_2/n_1), n_2 < n_1, |D| \sim 0, \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \right| \rightarrow \infty$ ), вблизи брестеровского угла полного преломления<sup>1)</sup> ( $\theta \sim \theta_{кр2}, |\Gamma| \sim 0$ ), в окрестности нулей диаграммы направленности первичного поля ( $|A_0^{пад}| \sim 0$ ). Следуя § 10, легко уточнить размеры области неприменимости отражательных формул в этих случаях. Для этого нужно потребовать, чтобы окрестность того или иного критического угла  $\theta_{кр}$  не попадала во френелевский объем рассматриваемого луча

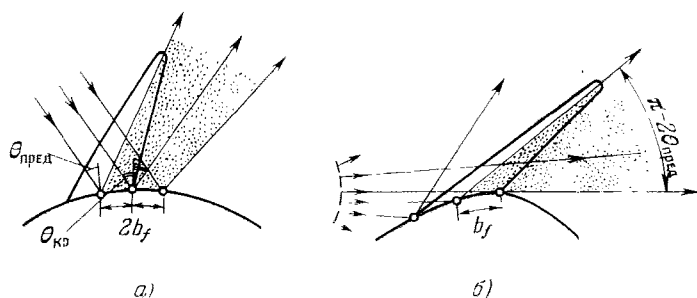


Рис. 12.5.

(рис. 12.5, а). Отсюда и из разложения  $\theta \approx \theta_{кр} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Delta \xi$  при  $|\Delta \xi| = b_f$  можно определить предельный угол падения (отражения), ограничивающий угловой сектор неприменимости отражательных формул (на рис. 12.5, а этот сектор выделен):

$$|\theta_{пред} - \theta_{кр}| \approx a_f \left| \frac{1}{R_1^{пад}} + \frac{1}{a_1 \cos \theta} \right|, \quad (12.31)$$

где в правой части следует положить  $\theta = \theta_{кр}$ , если  $\theta_{кр} \neq \pi/2$  (случай  $\theta_{кр} = \pi/2$  рассмотрен в п. 8). Для плоской падающей волны ( $R_1^{пад} \rightarrow \infty$ ) условие (12.31) принимает вид

$$|\theta_{пред} - \theta_{кр}| \approx \sqrt{\frac{\lambda_0}{2n_1 |a_1| \cos \theta_{кр}}}. \quad (12.32)$$

Подробное обсуждение полученных результатов приводится в нашей работе [79], где дается их сравнение с асимптотикой точных решений. Ниже рассмотрены два примера из [79].

**8. Область нарушения применимости отражательных формул в окрестности луча, касательного к границе раздела (отражение волны от выпуклого тела).** Интересуясь областью неприменимо-

<sup>1)</sup> Для электромагнитных волн угол Брюстера существует только в случае вертикальной поляризации:  $\sin \theta_{кр2} = n_2 / \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$ . Условия образования  $\theta_{кр2}$  для звуковых волн см., например, в [49].



сти отражательных формул для достаточно удаленных точек наблюдения ( $\sigma \gg |R_1^{\text{отр}}|$ ), из (11.30) и (12.12) при  $\theta \sim \pi/2$ ,  $n_1 = 1$  находим

$$\frac{1}{a_f^2} = \frac{1}{\lambda_0} \left| \frac{1}{R_1^{\text{отр}}} - \frac{1}{\sigma} \right|^{-1} \approx \frac{2}{\lambda_0 |a_1| \cos \theta},$$

где в качестве  $a_1$  можно взять радиус кривизны границы не в точке отражения, а в точке касания луча с границей (рис. 12.5, б). При  $\theta \sim \pi/2$  можно положить  $\cos \theta \approx \pi/2 - \theta$ , и тогда из (12.31) следует

$$\cos \theta_{\text{пред}} = \left( \frac{\lambda_0}{2|a_1|} \right)^{1/3} = \left( \frac{\pi}{k_0 |a_1|} \right)^{1/3}. \quad (12.33)$$

Углам падения (отражения)  $\theta > \theta_{\text{пред}}$  отвечают лучи (рис. 12.5, б), попадающие в область нарушения отражательных формул<sup>1)</sup>. Следовательно, условие применимости определяется неравенством

$$\cos \theta > \left( \frac{\pi}{k_0 |a_1|} \right)^{1/3}, \quad (12.34)$$

которое согласуется с условием  $\cos \theta > (2/k_0 |a_1|)^{1/3}$ , найденным В. А. Фоком при помощи метода параболического уравнения [158]. Решение, справедливое при нарушении условия (12.34), впервые получено В. А. Фоком [158] и рассматривалось в ряде последующих работ (см. [21, 32] и цитированную там литературу). Заметим, что область полутени, в которой нарушаются условия применимости геометрической оптики, является зоной эффективной поперечной диффузии поля [442, 443].

**9. Особенности отражения волн от поверхности с переменным импедансом.** Изменение поверхностного импеданса  $Z_s$  вдоль поверхности тела приводит к изменению коэффициента отражения волны. Поэтому, согласно (12.28), для применимости отражательных формул необходимо дополнительно потребовать выполнения условия

$$\frac{a_f}{\cos \theta} \left| \frac{1}{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial \xi} \right| \ll 1. \quad (12.35)$$

Для плоской падающей волны это условие приобретает вид

$$\left| \frac{1}{Z_s} \frac{\partial Z_s}{\partial \xi} \right| \ll \sqrt{\frac{\cos \theta}{\lambda_0} \left| \frac{\sigma - a \cos \theta}{\sigma a} \right|}, \quad (12.36')$$

<sup>1)</sup> Сходные геометрические соображения для частного случая сферической границы раздела приводятся, например, в [28, 136].

откуда в двух предельных случаях получим

$$\lambda_0 \left| \frac{1}{Z_S} \frac{\partial Z_S}{\partial \xi} \right| \ll \begin{cases} \frac{\lambda_0 \cos \theta}{|a|}, & \sigma \gg |a| \cos \theta, \\ \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sigma}} \cos \theta; & \lambda_0 \ll \sigma \ll |a| \cos \theta. \end{cases} \quad (12.36'')$$

Условия (12.36'') в случае нормального падения волны ( $\theta = 0$ ) согласуются с результатами Л. Фелсена, полученными на основе точного решения в случае синусоидального закона изменения на цилиндре (см. [73], а также [30]).

В заключение отметим, что возможности лучевого метода при наличии границы раздела существенно расширяются при использовании дифракционных лучей [32, 33, 77] (см. также §§ 2, 5 и заключительный раздел книги).

### § 13. Лучи и каустики в плоско-слоистых средах

**1. Уравнения лучей.** Модель плоско-слоистой среды, т. е. среды, показатель преломления которой  $n$  зависит лишь от одной декартовой координаты, скажем,  $z$ , часто используется при исследовании распространения электромагнитных волн в тропосфере и ионосфере, звуковых волн в океане и атмосфере, упругих волн в земной коре и т. п. Дифференциальные уравнения лучей (2.12) при  $n = n(z)$  принимают вид

$$\frac{dx}{d\tau} = p_x, \quad \frac{dy}{d\tau} = p_y, \quad \frac{dz}{d\tau} = p_z, \quad (13.1')$$

$$\frac{dp_x}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{dn^2}{dz}. \quad (13.1'')$$

Из (13.1) и из уравнения эйконала  $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = n^2$  следует, что

$$\begin{aligned} p_x &= \text{const} = p_x^0, & p_y &= \text{const} = p_y^0, \\ p_z &= \pm \sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}, \end{aligned} \quad (13.2)$$

где  $p_x^0, p_y^0$  — компоненты начального импульса  $p^0$ .

Исключая из (13.1) переменную  $\tau$  и учитывая (13.2), получаем уравнения

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{p_x^0}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}}, \quad \frac{dy}{dz} = \pm \frac{p_y^0}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}}, \quad (13.3)$$

которые интегрируются в квадратурах. Знак «+» в этих уравнениях отвечает условию  $p_z > 0$ , которое выполняется на *восходящей* ветви луча, идущей в положительном направлении оси  $z$ , а знак «-» соответствует *нисходящей* ветви луча ( $p_z < 0$ ). Условие  $p_z = 0$  определяет точку поворота луча  $z_n$ . В этой точке луч касается плоскости  $z = \text{const} = z_n$ , на которой  $n^2(z_n) = (p_x^0)^2 + (p_y^0)^2$  (рис. 13.1, а). При наличии точки поворота уравнения лучей принимают вид

$$x = x^0 + \left( \int_{z_<}^{z_>} \mp \int_{z_<}^{z_>} \right) \frac{p_x^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}} \equiv X(z, \xi, \eta), \quad (13.4')$$

$$y = y^0 + \left( \int_{z_<}^{z_>} \mp \int_{z_<}^{z_>} \right) \frac{p_y^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}} \equiv Y(z, \xi, \eta), \quad (13.4'')$$

где  $x^0, y^0, z^0$  — координаты точки выхода луча,  $\tilde{z}_<(\tilde{z}_>)$  — наименьшее (наибольшее) значение из двух величин —  $z^0$  и  $z_n$  и аналогично  $z_< \equiv \min(z, z_n)$ ,  $z_> \equiv \max(z, z_n)$ , а  $\xi, \eta$  — лучевые координаты, «нумерующие» лучи. Верхний знак в (13.4) берется на участке луча до точки поворота, т. е. при  $|x^0| < |x| < |x_n|$ ,

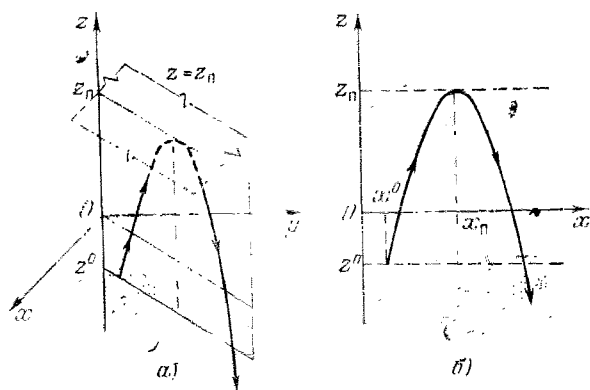


Рис. 13.1.

$|y^0| < |y| < |y_n|$ , а нижний — после поворота, когда  $|x| > |x_n|$ ,  $|y| > |y_n|$ , где  $x_n \equiv X(z_n, \xi, \eta)$ ,  $y_n \equiv Y(z_n, \xi, \eta)$  (координата  $x_n$  показана на рис. 13.1, б).

Уравнения (13.4) справедливы и при отсутствии точки поворота: тогда разность интегралов в (13.4) должна быть заменена

одним интегралом с пределами  $z^0, z$ . В частности, для восходящей траектории ( $p_z > 0$ ) имеем

$$\begin{aligned} x &= x^0 + \int_{z^0}^z \frac{p_x^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}}, \\ y &= y^0 + \int_{z^0}^z \frac{p_y^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}}; \end{aligned} \quad (13.4''')$$

для нисходящей траектории ( $p_z < 0$ ) пределы интегрирования в (13.4''') нужно поменять местами. Таким образом, выражения (13.4) описывают ветви лучей различной геометрии (рис. 13.2). Нетрудно убедиться, что уравнения лучей (13.4) могут быть получены и из полного интеграла уравнения эйконала, найденного в § 8 методом переменных.

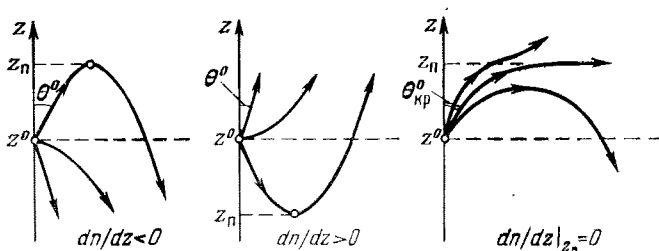


Рис. 13.2.

Приведем также удобные для вычисления якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  уравнения лучей в параметрической форме, которые следуют из (13.1), (13.2) и, очевидно, эквивалентны (13.4)

$$\begin{aligned} x &= x^0 + p_x^0 \tau, & y &= y^0 + p_y^0 \tau, \\ \tau &= \left( \int_{z^0}^z \pm \int_{z^0}^z \right) \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2}}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

**2. Особенности траектории луча в плоско-слоистой среде.** Если ввести углы  $\theta, \varphi, \theta^0, \varphi^0$  по формулам

$$p_x = n \sin \theta \cos \varphi, \quad p_y = n \sin \theta \sin \varphi, \quad p_z = n \cos \theta, \quad (13.6')$$

$$p_x^0 = n^0 \sin \theta^0 \cos \varphi^0, \quad p_y^0 = n^0 \sin \theta^0 \sin \varphi^0, \quad p_z^0 = n^0 \cos \theta^0, \quad (13.6'')$$

где  $n^0 \equiv n(z^0)$ , то из (13.2) следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = p_y/p_x = \operatorname{const} = p_y^0/p_x^0 = \operatorname{tg} \varphi^0, \quad (13.7')$$

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2} = n \sin \theta = \operatorname{const} = n^0 \sin \theta^0 = \sqrt{p_x^{02} + p_y^{02}}. \quad (13.7'')$$

Первое из соотношений (13.7) означает, что в плоско-слоистой среде луч является *плоской* кривой, а второе соотношение представляет собой *закон преломления* для непрерывной плоско-слоистой среды  $n(z)$  ( $\theta^0$  — угол падения, а  $\theta$  — текущий угол преломления луча). Выражения (13.7) легко выводятся и из закона Снеллиуса (5.6), если непрерывную среду  $n(z)$  рассматривать как предел системы бесконечно тонких однородных плоских слоев, при этом уравнение лучей (13.4') при  $p_y^0 = 0$  сразу вытекает из (13.7) и из очевидного условия  $dx/dz = \operatorname{tg} \theta$ .

Точка поворота  $z = z_n$  является *точкой отражения* луча (местом его наибольшего углубления в среду); в этой точке  $\theta = \pi/2$  и, следовательно,  $n(z_n) = n^0 \sin \theta^0$ . Появление точки поворота на восходящей траектории луча следует ожидать только при  $dn/dz < 0$ , а на нисходящей — при  $dn/dz > 0$  (рис. 13.2). Траектория луча симметрична относительно точки поворота. При  $n > n^0 \sin \theta^0$  точка поворота на луче отсутствует; в случае же немонотонного закона  $n(z)$  возможно *волноводное* распространение волн (см. § 17), при котором образуется бесконечное число точек поворота. Отметим, что если в точке поворота  $\frac{d}{dz} n(z_n) = 0$ , точка поворота луча уходит на бесконечность ( $x_n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ ). Последний случай соответствует возникновению скользящих траекторий (рис. 13.2) при *антиволноводном* распространении волн в средах с экстремумами  $n^2(z)$  (например, в параболическом слое). Эти выводы следуют из тейлоровского разложения:

$$n^2(z) - (p_x^0)^2 - (p_y^0)^2 = \frac{d}{dz} n^2(z_n)(z - z_n) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} n^2(z_n)(z - z_n)^2 + \dots, \quad (13.8)$$

от коэффициентов которого зависит степень сингулярности несобственных интегралов в уравнениях луча (13.4).

Отметим, что кривизна луча (13.4), согласно (2.22), равна

$$K = \frac{1}{n} \left| \frac{dn}{dz} \right| \sin \theta = \frac{n^0 \sin \theta^0}{n^2(z)} \left| \frac{dn}{dz} \right|. \quad (13.9)$$

При нормальном падении ( $\theta^0 = 0$ )  $K = 0$ , так как луч является прямой линией, перпендикулярной слоям  $n(z) = \text{const}$ .

3. **Уравнения каустик и геометрия семейства лучей.** Семейство лучей описывается уравнениями (13.4) или (13.5), при этом координаты  $x^0$ ,  $y^0$ ,  $z^0$  и компоненты импульса  $p_x^0$ ,  $p_y^0$  (или углы  $\theta^0$ ,  $\varphi^0$ ) задаются на начальной поверхности  $Q$  (см. § 2) и являются функциями лучевых координат  $\xi$  и  $\eta$ . Вычисление якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  с помощью уравнений (13.5) дает

$$\mathcal{D}(\tau) = p_z \left( \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) = p_z \frac{\partial (X, Y)}{\partial (\xi, \eta)}, \quad (13.10)$$

где функции  $X$  и  $Y$  выражаются формулами (13.4), а  $p_z$  определяется выражением (13.2), в котором знаки выбираются согласованно с (13.4).

В простейшем случае, когда все лучи выходят из плоскости  $z = z^0 = \text{const}$  с одинаковыми углами  $\theta^0, \varphi^0$  (плоская волна), имеем  $\mathcal{D}(\tau) = p_z$ , при этом все лучи параллельны, и каустическая поверхность  $z = z_K$ , на которой  $\mathcal{D} = 0$ , совпадает с геометрическим местом точек поворота ( $p_z = 0$ ), т. е.  $n(z_K) = n^0 \sin \theta^0$  (рис. 13.3). В общем случае на каустике  $p_z \neq 0$ <sup>1)</sup>, и ее положение определяется уравнениями (13.4) и условием  $\mathcal{D}(\tau) = 0$ , которое в неявном виде дает функцию  $z = z_K(\xi, \eta)$ . При определении каустик в двумерной или аксиально-симметричных задачах следует учесть, что

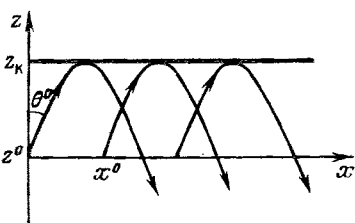


Рис. 13.3.

$z = z_K(\xi, \eta)$ . При определении каустик в двумерной или аксиально-симметричных задачах следует учесть, что

$$D_{\text{дв}}(\tau) = p_z \frac{\partial X}{\partial \xi}, \quad D_{\text{акс}}(\tau) = p_z r \frac{\partial r}{\partial \xi}, \quad (13.11)$$

где функции  $X(z, \xi)$  и  $r(z, \xi)$  описывают семейства лучей, а  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — цилиндрическая координата.

Рассмотрим в качестве примера задачу об излучении точечного источника, расположенного при  $x^0 = y^0 = 0, z = z^0$ . Уравнения лучей (13.4) в данном случае приводятся к виду

$$r = \left( \int_{z_<}^{\tilde{z}_>} \mp \int_{z_<}^{\tilde{z}_<} \right) \frac{n^0 \sin \theta^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}} \equiv r(z, \theta^0). \quad (13.12)$$

В частном случае  $dn/dz < 0$  для лучей с  $\theta^0 < \pi/2$  (рис. 13.4, а) в уравнениях (13.12) следует положить  $\tilde{z}_< = z^0, \tilde{z}_> = z_K, z_< = z, z_> = z_K$ ; при  $\theta^0 > \pi/2$  в (13.12) должен быть использован один интеграл с пределами от  $z$  до  $z^0$ . Каустика лучей (13.12) определяется системой уравнений ( $\xi \equiv \theta^0$ )<sup>2)</sup>

$$r = r(z, \theta^0), \quad \frac{\partial}{\partial \theta^0} r(z, \theta^0) = 0. \quad (13.13)$$

<sup>1)</sup> Анализ показывает, что в общем случае в точках поворота, где  $p_z = 0$ , якобиан (13.10) отличен от нуля (это, в частности, легко проверить на примере источника в линейном слое), т. е. точка поворота, вообще говоря, не является каустической точкой на луче. Иногда геометрическое место точек поворота по положению близко к каустике, хотя каустическая точка на отдельном луче может достаточно далеко отстоять от его точки поворота.

<sup>2)</sup> Условие  $\frac{\partial}{\partial \theta^0} r(z, \theta^0) = 0$  определяет огибающую семейства кривых  $r = r(z, \theta^0)$  [25, 40, 134].

Согласно (13.11) и условию  $\mathcal{D}_{\text{анс}} = 0$ , при вертикальном падении ( $\theta^0 = 0$ ) показатель преломления на каустике обращается в нуль:  $n(z_{\text{к}}) = 0$  (рис. 13.4, а). Это реализуется в плазменной среде (например, в ионосфере). Общие свойства каустики (13.13) исследовались в работах [25, 49, 45—47, 66]. Следуя [45, 47, 66], рассмотрим особенности каустики (13.13) в случае неоднородной среды ( $z > 0$ ), граничащей с однородным полупространством ( $z > 0$ ), в котором  $n = n(0) = 1$ .

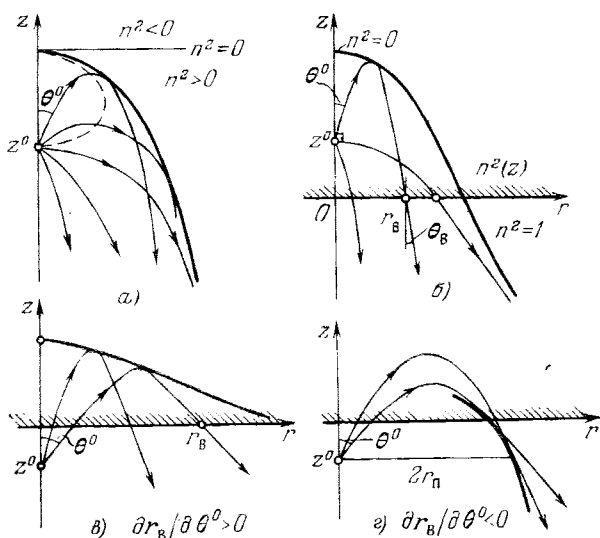


Рис. 13.4.

**4. Лучи и каустики точечного источника в неоднородном полупространстве.** Для *внутреннего* источника, расположенного при  $z^0 > 0$ , лучи и каустики внутри неоднородного полупространства те же, что и в безграничной среде, и определяются уравнениями (13.12) и (13.13). Семейство лучей, вышедших в свободное полупространство,  $r = r_{\text{в}} - z \operatorname{tg} \theta_{\text{в}}$ , образует каустику

$$r = r_{\text{в}} - \cos \theta_{\text{в}} \sin \theta_{\text{в}} \frac{dr_{\text{в}}}{d\theta_{\text{в}}}, \quad z = \cos^2 \theta_{\text{в}} \frac{dr_{\text{в}}}{d\theta_{\text{в}}}, \quad (13.14)$$

где  $\theta_{\text{в}}$  и  $r_{\text{в}}$  — угол выхода и координата пересечения луча (13.12) с границей среды  $z = 0$ , причем  $\sin \theta_{\text{в}} = n(z^0) \sin \theta^0$ . Согласно (13.14), эта каустика существует только для лучей с  $dr_{\text{в}}/d\theta_{\text{в}} < 0$ ; при  $dr_{\text{в}}/d\theta_{\text{в}} = 0$  она пересекает границу среды  $z = 0$  (рис. 13.4, б). Каустика (13.14) асимптотически уходит на бесконечность: асимптотой является луч с  $\theta^0 = \pi/2$  (рис. 13.4, в), ибо для него

9\*

$d\theta^0/d\theta_B \rightarrow \infty$ ,  $dr_B/d\theta_B \rightarrow \infty$ . Направление асимптоты каустики  $\theta_B = \arcsin n(z^0)$  определяет границу свет — тень в диаграмме направленности источника (таким образом, эта асимптота несет информацию о значении  $n(z^0)$ , см., например, [182]). Геометрия каустики (13.14) обсуждается ниже для ряда конкретных законов  $n(z)$ .

В случае *внешнего* источника, т. е. источника, расположенного в однородной среде на расстоянии  $|z^0|$  от границы  $z=0$  (рис. 13.4, в, г), уравнения лучей, согласно (13.12), имеют вид

$$r = |z^0| \operatorname{tg} \theta^0 + \left( \int_0^{z_{\pi}} \mp \int_z^{z_{\pi}} \right) \frac{\sin \theta^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta^0}} \equiv r(z, \theta^0), \quad (13.15)$$

где  $z_{\pi}$  — корень уравнения  $n(z_{\pi}) = \sin \theta^0$ . Каустика лучей (13.15) описывается уравнениями (13.13), при этом, очевидно, лучи касаются каустики после точки поворота на нисходящей ветви траектории (рис. 13.4, в). Как показано в [45], каустика (13.13) может пересекать границу среды  $z=0$ . Из (13.13) следует, что точка выхода каустики на границу соответствует условию  $\frac{\partial}{\partial \theta^0} r_B = 0$ , где  $r_B$  — координата точки выхода луча (13.15) из среды (рис. 13.4, г):

$$r_B = |z^0| \operatorname{tg} \theta^0 + 2 \int_0^{z_{\pi}} \frac{\sin \theta^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta^0}}. \quad (13.16)$$

Отраженные лучи в области  $z < 0$  описываются уравнением  $r = r_B - z \operatorname{tg} \theta^0$ . Уравнение каустики для отраженных лучей можно получить при помощи (13.13):

$$r = r_B - \sin \theta^0 \cos \theta^0 \frac{dr_B}{d\theta^0}, \quad z = \cos^2 \theta^0 \frac{dr_B}{d\theta^0}. \quad (13.17)$$

Отсюда следует, что образование этой каустики при  $z < 0$  возможно лишь при  $dr_B/d\theta^0 < 0$  (рис. 13.4, г). В противном случае ( $dr_B/d\theta^0 > 0$ ) каустика образуется внутри неоднородной среды (рис. 13.4, в) и определяется другой системой уравнений — (13.15), (13.13). Очевидно, условие выхода каустики (13.17) на уровень источника  $z = z^0$  имеет вид  $\frac{\partial}{\partial \theta^0} r_{\pi} = 0$ , где  $r_{\pi} = r(z_{\pi}, \theta^0)$  — координаты точек поворота лучей (13.15).

5. Лучи и каустики в линейном слое. Для ряда характерных профилей  $n^2(z)$  выписанные выше интегралы вычисляются элементарно. Особенно простые результаты получаются для *линей-*



ного слоя, для которого

$$n^2(z) = 1 - az = 1 - z/H, \quad (13.18)$$

где  $H = 1/a > 0$  — характерный масштаб слоя.

В случае *безграничного* линейного слоя  $-\infty < z < \infty$  семейство лучей (13.12) представляет собой параболы

$$a(x - x_{\pi})^2 = 4(1 - az^0)\sin^2 \theta^0 (z_{\pi} - z), \quad (13.19)$$

причем геометрическое место точек поворота

$$ax_{\pi} = (1 - az^0) \sin(2\theta^0), \quad az_{\pi} = 1 - (1 - az^0)\sin^2 \theta^0 \quad (13.20')$$

представляет собой эллипсоид вращения (штриховая кривая на рис. 13.4, а):

$$\left(\frac{ax_{\pi}}{1 - az^0}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{1 - az_{\pi}}{az^0}\right)^2 = 1. \quad (13.20'')$$

Каустика лучей (13.19) является неособой и имеет вид параболоида вращения (рис. 13.4, а)

$$a^2x^2 = 4(1 - az^0)(1 - az) \quad (13.21)$$

с вершиной при  $z = H = \frac{1}{a}$ , где  $n^2 = 0$ .

В случае *полубесконечного* линейного слоя  $0 < z < \infty$ , граничащего при  $z = 0$  с однородным полупространством  $z < 0$ , форма каустики неожиданно усложняется [45, 47, 66]: вместо гладкой каустики теперь возможно появление каустик с особенностями в виде петли с двумя точками заострения (сечение ласточкина хвоста, см. § 4). Такие особенности были обнаружены и исследованы в работах [45, 47] соответственно для внешнего ( $z^0 < 0$ ) и внутреннего ( $z^0 > 0$ ) источников.

Для полубесконечного линейного слоя

$$n^2(z) = 1 - az \quad \text{при } z \geq 0, \quad n^2 = 1 \quad \text{при } z \leq 0 \quad (13.22)$$

лучи представляют собой прямые линии при  $z < 0$  и отрезки парабол при  $z > 0$ . Оказалось, что каустика имеет гладкую форму, если источник расположен либо ниже уровня  $z = -2/3a$ , либо выше уровня  $z = 1/9a$ , тогда как при  $-2/3a < z^0 < 1/9a$  на каустике имеются две точки заострения, ограничивающие *каустическую петлю*. Эволюция формы каустики при понижении источника (или, в общем случае, при изменении параметра  $az^0$ ) показана на рис. 13.5. При  $z^0 = -2/3a$  (рис. 13.5, и) и  $z^0 = 1/9a$  (рис. 13.5, б) петля на каустике стягивается в *каустические фокусы*  $F_{\pi 1}$  и  $F_{\pi 2}$ , что по классификации § 4 соответствует критическому сечению, проходящему через начало ласточкина хвоста. Через каждую точку внутри каустической петли (рис. 13.5) проходят *четыре*

различных луча (разумеется, в зоне каустической тени вещественных лучей нет).

Дополнительно отметим, что при  $z^0 > -1/2a$  петля на каустике замыкается в свободном полупространстве  $z < 0$  (рис. 13.5, *б, е*), при этом каустика (13.17) может пересекать уровень источника  $z = z^0$  в двух точках, если  $z^0 > -1/4a$  (рис. 13.5, *б*). При

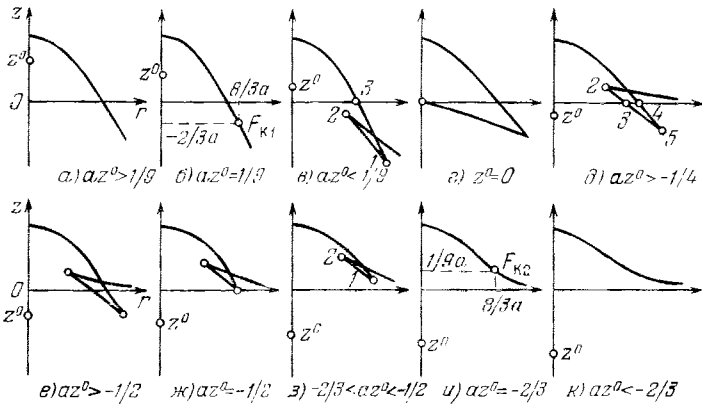


Рис. 13.5.

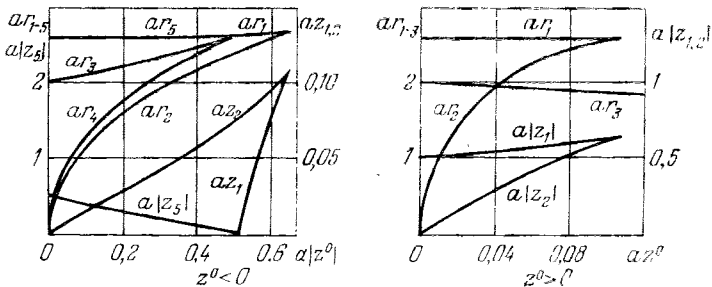


Рис. 13.6.

$-1/4a > z^0$  каустика расположена «выше» плоскости  $z = z^0$ , а при  $z^0 < -1/2a$  она целиком лежит в неоднородной среде (рис. 13.5, *з, и, к*)<sup>1)</sup>. Формулы, необходимые для определения координат всех особых точек каустики, следуют из общих соотношений п. 4 и приводятся в работах [45, 47, 66] (см. также [183]). На рис. 13.6

<sup>1)</sup> В работе [185] отдельные ветви каустики (13.17) в свободном пространстве наблюдались экспериментально (см. также [186, 187]); по поводу интерпретации этих результатов см. [183].

приведены результаты расчетов, позволяющие найти положение этих точек (индексы у координат соответствуют нумерации точек на рис. 13.5,  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\zeta$ ). Результаты этих расчетов могут служить иллюстрацией лучевой и каустической теоремы взаимности (см. § 6 и [47]): в частности, для каустических фокусов  $F_{K1}$  и  $F_{K2}$  (рис. 13.5,  $\beta$ ,  $\nu$ ) имеем

$$z_{K1} = z_{K2}^0 = -2/3a, \quad z_{K1}^0 = z_{K2} = 1/9a, \quad r_{K1} = r_{K2} = 8/3a.$$

Форма каустики в линейном слое зависит от формы фазового фронта падающей волны. В [59] исследовались каустики в случае волны, прошедшей при  $z=0$  через плоский спускопальный фазовый экран (см. § 11), а в [152, 184] — каустики, создаваемые апертурой с квадратичным распределением фазы. Разнообразие форм каустик в этих случаях определяется совместным влиянием двух факторов — фокусирующим действием неоднородной среды и формой начального фазового распределения поля.

**6. Другие слои.** Для монотонных законов  $n^2(z)$  плазменного типа, когда существует область  $z > z_n$  с  $n^2(z) < 0$ , конфигурации каустик в случае точечного источника в целом аналогичны представленным на рис. 13.5 [45]. Однако для квадратичного слоя  $n^2(z) = 1 - bz^2$  ( $b > 0$ ), плавно переходящего в свободное пространство, оказалось, что образуется лишь гладкая каустика (при  $z^0 < 0$  типа рис. 13.4,  $\epsilon$ ). Можно было бы думать, что петлеобразные особенности каустик связаны с наличием слабой границы раздела, на которой терпит разрыв первая производная  $dn/dz$ . Анализ показывает, однако, что при сглаживании разрыва  $dn/dz$  каустическая петля не исчезает, а лишь слегка деформируется [66]. Геометрия каустик для ряда элементарных профилей  $n^2(z)$  приводится также в [25]: например, для зависимости  $n^2(z) = (1 + az)^{-2}$  ( $a > 0, z > 0$ ), соответствующей линейному закону изменения скорости звука, каустика точечного источника всегда имеет клюв (рис. 13.7).

Интересная особенность появляется у каустик в неоднородных средах с кусочно-линейным, и, в частности, билинейным профилем  $n^2(z)$  [66, 188]. В билинейном слое образуются *разрывные (оборванные)* каустики, причем точки разрыва лежат на критическом луче, который касается межслоевой границы. Полное исследование топологии каустик в этом случае проведено в [66]. На рис. 13.8 в качестве примера показаны каустики двух характерных конфигураций. Возможность образования разрывных каустик необходимо учитывать при геометрикооптических расчетах: для плавных  $n(z)$  кусочно-линейная аппроксимация может приводить к появлению ложных каустик, и для их устранения необходимо использовать аппроксимирующие слои с непрерывными на границах производными  $dn/dz$  [188] (см. также § 20).

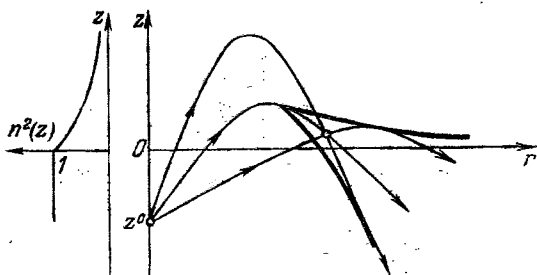


Рис. 13.7.

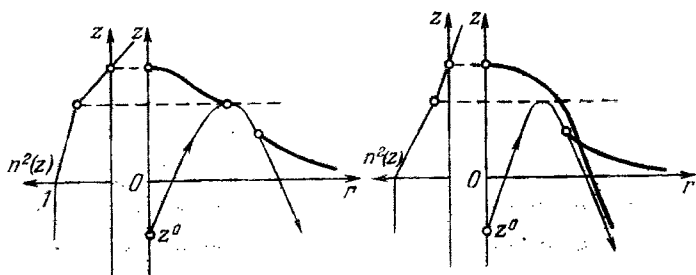


Рис. 13.8.

**7. Плоская волна в параболическом слое.** В случае параболического профиля

$$n^2(z) = \varepsilon_m + \varepsilon_2(z - z_m)^2 \quad (13.23)$$

принято различать (по аналогии с квантовой механикой) прохождение волны через потенциальный *барьер*, когда  $\varepsilon_2 > 0$ , и волноводное распространение в потенциальной *яме*, когда  $\varepsilon_2 < 0$  (рис. 13.9). Рассмотрим прохождение волны через барьер (волноводное распространение обсуждается в § 17).

Для плоской волны, падающей со стороны отрицательных  $z$  (рис. 13.10), лучи (13.4) представляют собой семейство параллельных кривых:

$$x = x^0 - \ln \left| \frac{1}{z_{\Pi}^{\pm}} (z^0 - z_m + b \cos \theta^0) \right| \pm \ln \left| \frac{1}{z_{\Pi}^{\pm}} [z - z_m + \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}] \right|, \quad (13.24)$$

где  $b \equiv \varepsilon_2^{-1/2} > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ . Точки поворота лучей

$$z_{\Pi}^{\pm} = z_m \mp b \sqrt{(n^0 \sin \theta^0)^2 - \varepsilon_m} \quad (13.25)$$

существуют только при  $\epsilon_m < (n^0 \sin \theta^0)^2$ . В этом случае огибающей лучей (13.24) является плоскость  $z = z_{\Pi}^-$ , которая разграничивает область двухлучевости  $z < z_{\Pi}^-$  и область геометрической тени  $z > z_{\Pi}^-$ . Особенность немонотонных профилей  $n^2(z)$  связана с тем, что в части зоны тени  $z > z_{\Pi}^+$  закон преломления (13.7'')

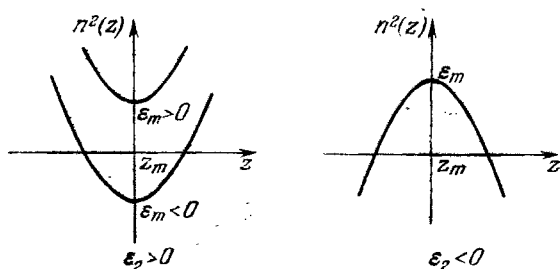


Рис. 13.9.

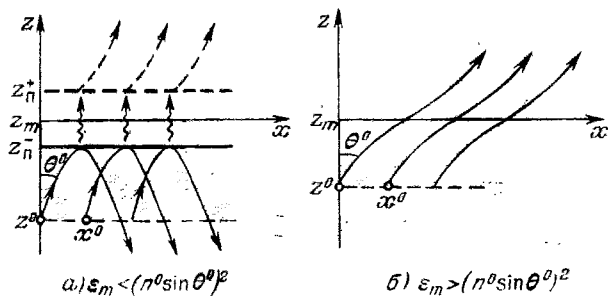


Рис. 13.10.

опять допускает распространения лучей с вещественными углами  $\theta = \theta(z)^1$ . Каустика этих лучей — плоскость  $z = z_{\Pi}^+$  (рис. 13.10, а). Появление области вторичного распространения волны  $z > z_{\Pi}^+$  (рис. 13.10, а) объясняется дифракционными эффектами — *подбарьерным просачиванием* волны. Плоскости  $z = z_{\Pi}^{\pm}$ , отвечающие переднему и заднему краям барьера, представляют собой две ветви *каустики с просачиванием* — каустики нового типа, характерной для неоднородной среды [69]. Отметим, что в случае  $\epsilon_m > (n^0 \sin \theta^0)^2$  наблюдается *прямое* прохождение волны через слои (*надбарьерное прохождение*), при этом в каж-

<sup>1</sup>) С позиций комплексной геометрической оптики [42] эти лучи являются комплексными: для них невозможно указать вещественные координаты  $x^0$  точек выхода из начальной плоскости  $z = z^0$  [70].

дую точку плоскости  $\{x, z\}$  попадает только один луч (рис. 13.10. б), который описывается формулой (13.24) с верхним знаком.

**8. Точечный источник в параболическом слое.** В случае точечного источника с координатами  $x = y = 0, z = z^0 < 0$  уравнения лучей в параболическом слое (13.23) имеют вид

$$r = \tau n^0 \sin \theta^0, \quad z - z_m = (z - z^0) \operatorname{ch}(\tau \sqrt{\varepsilon_2}) + \frac{n^0 \cos \theta^0}{\sqrt{\varepsilon_2}} \operatorname{sh}(\tau \sqrt{\varepsilon_2}). \quad (13.26)$$

При  $\varepsilon_m < 0$ , когда барьер непроницаем для вертикального луча ( $\theta^0 = 0$ ), лучи (13.26) и их каустика подобны изображенным на рис. 13.4, а. В случае  $\varepsilon_m > 0$  картина лучей качественно меняется: наряду с отраженными от слоя лучами, существуют лучи,

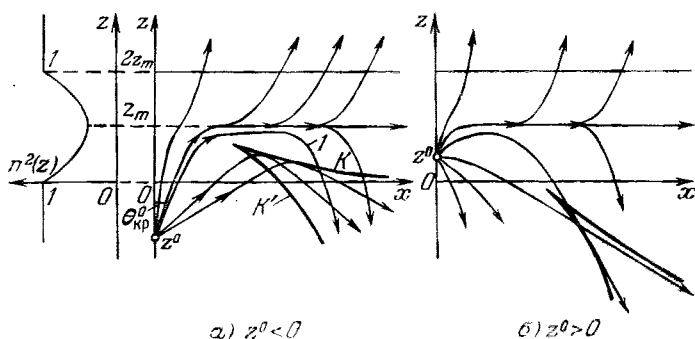


Рис. 13.11.

прошедшие сквозь слой. Обе эти группы лучей разделены *критическим лучом* с  $\sin^2 \theta_{\text{кр}}^0 = \varepsilon_m / (n^0)^2$ , который при  $\tau \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к вершине барьера  $z = z_m$ . Пример указанной лучевой картины в случае ограниченного параболического слоя:

$$n^2(z) = \begin{cases} 1 - \delta^{-2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{z}{z_m} \right)^2 \right], & 0 \leq z \leq 2z_m, \\ 1, & z \leq 0; \quad z \geq 2z_m, \end{cases} \quad (13.27)$$

где  $\delta = (1 - \varepsilon_m)^{-1/2}$ ,  $z_{m_0}$  — полутолщина слоя, показан на рис. 13.11. Лучи с  $\theta^0 < \theta_{\text{кр}}^0$  образуют расходящийся пучок, заполняющий все пространство  $z > z_m$ . При  $\theta^0 > \theta_{\text{кр}}^0$  лучи создают каустик, которая в простейшем случае имеет одну точку заострения и соответствует появлению области *трехлучевости* (рис. 13.11).

Лучи, близкие к критическому, образуют почти параллельный пучок; вследствие малости рефракции они достаточно долго идут компактной группой вблизи вершины барьера  $z = z_m$ , а затем покидают критическую область. Критический луч при больших  $\gamma$  является осью *антиволновода*: описанный механизм антиволноводного распространения волн может оказаться существенным на больших расстояниях от источника, например, в ионосфере [189—191]. Отметим, что в теории ионосферного распространения коротких радиоволн [192] ветвь каустики  $K'$  на рис. 13.11, *a* ограничивает так называемую *мертвую зону* для отраженных от ионосферы лучей, при этом из двух отраженных лучей, приходящих при  $z^0 < 0$  в точку наблюдения, «верхний» луч ( $I$  на рис. 13.11, *a*) с меньшим углом падения называется лучом Педерсена [192—196].

Рис. 13.11 показывает лишь простейшие каустики, которые могут возникать в ограниченном параболическом слое (13.27) при  $\epsilon_m > 0$ . Полная картина каустик весьма сложна: как показано в [71, 46], при некоторых соотношениях между параметрами  $\delta$  и  $|z^0/z_m|$  образуются каустики со многими петлями — «*каустические звезды*». Максимальное число лучей, проходящих через такие области, увеличивается с трех (рис. 13.11) до *пяти*. С точки зрения теории катастроф (§ 4) существенное усложнение формы каустики, например, по сравнению с линейным слоем, связано с увеличением коразмерности каустики до четырех (параболический слой характеризуется уже двумя параметрами), так что на плоскости  $\{x, z\}$  проектируются различные сечения четырехмерной каустической гиперповерхности. Отметим [46, 71], что при  $\epsilon_m < 0$  особенности на каустике в параболическом слое аналогичны особенностям каустик для линейного слоя (рис. 13.5). «Задняя» ветвь каустики с просачиванием при  $\epsilon_m < 0$ , изображенная для плоской волны на рис. 13.10, *a*, в случае точечного источника смещается в комплексное пространство (подробнее см. [70]).

Полная классификация каустик для внешнего ( $z^0 < 0$ ) и внутреннего ( $z^0 > 0$ ) точечных источников приведена в работе [46]. Согласно [46], каустики наиболее простой формы (гладкая каустика при  $\delta < 1$  и каустика с одним клювом при  $\delta > 1$ ) заведомо образуются в случае, когда  $\delta > 1,0835$ , а  $z^0/z_m < -0,8675$ , или  $z^0/z_m > 0,156$ . В противном случае возможно появление дополнительных лучевых и каустических особенностей: образование зоны *пятилучевости* и каустики типа «*бабочка*» (ср. рис. 11.2, *в, г*). Необходимые для этого соотношения параметров  $\delta$  и  $z^0/z_m$  указаны в [46]. На рис. 13.12 в качестве примера показана эволюция каустики при изменении положения источника ( $z^0/z_m$ ) в случае  $\delta = 1,05 = \text{const}$ , когда наблюдается образование каустики типа «*бабочка*» (число лучей на рис. 13.12 отмечено римскими

цифрами). Из рис. 13.12 видно, как каустическая петля «перетягивается» с одной ветви на другую, а затем исчезает, каустика при этом приобретает вид кривой с одним клювом.

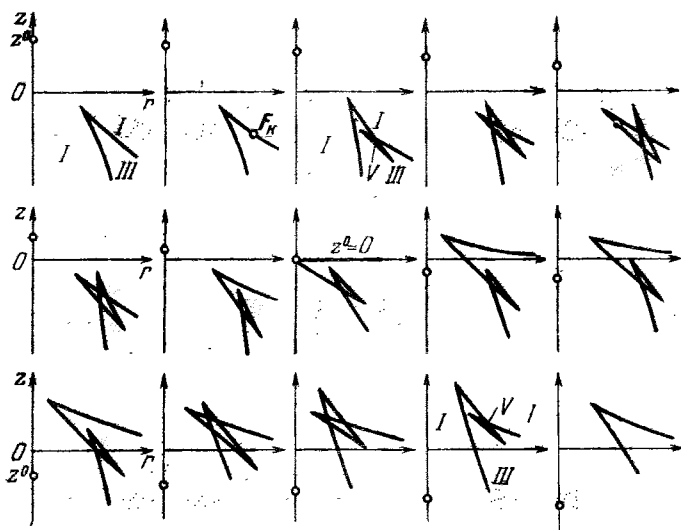


Рис. 13.12.

Исследование лучей и каустик в средах с зависимостью  $n(z)$  произвольного вида проводится численными методами (см. § 20); в ряде случаев может оказаться полезным метод возмущений (см. § 9).

#### § 14. Волновые поля в плоско-слоистых средах

1. Поле произвольной волны. Пусть на некоторой исходной поверхности  $r = r^0(\xi, \eta)$  в плоско-слоистой среде  $n(z)$  задано начальное распределение поля произвольной волны в виде  $u^0(\xi, \eta) = A^0(\xi, \eta) \exp[ik_0 \psi^0(\xi, \eta)]$ . Амплитуда этой волны в приближении геометрической оптики, согласно § 3, равна

$$A = A^0 \left[ \frac{\mathcal{D}(0)}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2}, \quad (14.1)$$

где якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  дается выражением (13.10), при этом, как нетрудно показать,  $\mathcal{D}(0) = r^0 \frac{\partial r^0}{\partial \xi} \frac{\partial r^0}{\partial \eta}$ . При вычислении квадратного корня из расходимости  $\mathcal{F} = \mathcal{D}(\tau)/\mathcal{D}(0)$  необходимо учитывать каустический сдвиг фазы (см. § 4).



Эйконал волны в плоско-слоистой среде  $n(z)$  может быть найден методом разделения переменных (см. § 8) или методом характеристик (интегрированием вдоль луча, см. § 2). Например, на восходящей ветви луча ( $p_z > 0$ )

$$\psi = \psi^0 + \int_0^{\tau} n^2 d\tau = \psi^0 + \int_{z^0}^z \frac{n^2(z)}{p_z} dz = \psi^0 + \int_{z^0}^z \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}}. \quad (14.2)$$

Аналогично, на луче (13.4) в общем виде

$$\psi = \psi^0 + \left( \int_{z_<}^{\tilde{z}} \mp \int_{z_<}^{z_>} \right) \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}}. \quad (14.3)$$

Такое же выражение получается и из полного интеграла уравнения эйконала (см. § 8)<sup>1)</sup>

$$\psi = \psi^0 + p_x^0(x - x^0) + p_y^0(y - y^0) + \left( \int_{z_<}^{\tilde{z}} \mp \int_{z_<}^{z_>} \right) \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2} dz, \quad (14.4)$$

если в нем исключить координаты  $x$  и  $y$  с помощью уравнений луча (13.4).

Формулы (14.1) и (14.3) позволяют рассчитать закон изменения поля волны вдоль отдельного луча (13.4). Полное поле определяется суммированием по всем лучам, приходящим в точку наблюдения (см. § 3, п. 5).

**2. Поле плоской волны.** Пусть в плоскости  $z = z^0 = \text{const}$  задано начальное поле в виде

$$u^0 = A^0 \exp(ik_0 \xi n^0 \sin \theta^0), \quad (14.5)$$

где  $n^0 \equiv n(z^0)$ ,  $A^0 = \text{const}$ ,  $\psi^0 = \xi n^0 \sin \theta^0$  — начальный эйконал, а  $\xi = x$  при  $z = z^0$ , и требуется определить поле при  $z > z^0$  (рис. 13.3). Начальное условие (14.5) возникает, например, при падении плоской волны из однородного полупространства  $z < z^0$  на плоско-слоистую среду  $z > z^0$ . Поэтому волну, отвечающую условию (14.5), для краткости будем называть плоской.

Согласно § 13, в рассматриваемом случае  $\mathcal{D}(\tau) = p_z = \pm \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}$ , где плюс соответствует волне, падаю-

<sup>1)</sup> Выражение (14.4) следует из (8.24), если учесть начальные условия для эйконала в точке выхода луча ( $x^0, y^0, z^0$ ) и в точке поворота ( $x_n, y_n, z_n$ ).

щей на каустику  $z = z_n$ , а минус — отраженной волне (рис. 13.3). В результате

$$A = \frac{A^0}{\sqrt{\mathcal{J}}} = A^0 \left( \frac{p_z^0}{p_z} \right)^{1/2} = \frac{A^0 n^0 \cos \theta^0 \exp\left(-\frac{i\pi}{2} q_{1,2}\right)}{\sqrt[4]{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}} \equiv A_{1,2}, \quad (14.6)$$

где  $\theta^0 < \pi/2$ ,  $q_1 = 0$  — для падающей волны,  $q_2 = 1$  — для отраженной волны. Последняя не возникает, если всюду на луче  $n(z) > n^0 \sin \theta^0$ . На каустике  $z = z_n$ , как обычно, амплитуда обращается в бесконечность.

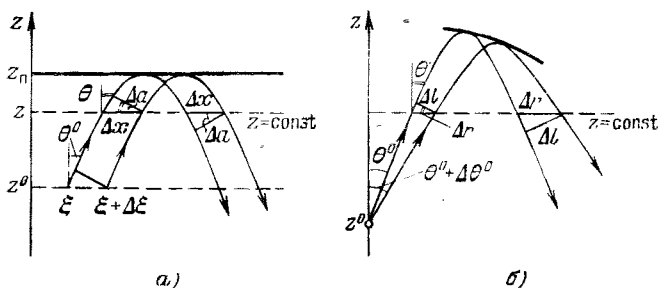


Рис. 14.1.

Расходимость лучей  $\mathcal{J}$  в (14.6) легко может быть найдена геометрически (рис. 14.1, а), если учесть, что, согласно (3.24),  $\mathcal{J} = n^0 da^0 / n da$  и  $\Delta a^0 = \Delta \xi \cos \theta^0$ ,  $\Delta a = \Delta x \cos \theta(z) = \pm \Delta \xi \frac{1}{n(z)} \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}$ , при этом  $|\Delta x| = |\Delta \xi|$  в силу параллельности лучей (13.4) при  $\theta^0 = \text{const}$ , а  $\theta(z)$  дается законом преломления (13.7).

Эйконалы двух лучей, приходящих в точку наблюдения  $\{x, z\}$ , легко определяются из (14.4), если учесть, что  $p_y^0 = 0$ ,  $p_x^0 = n^0 \sin \theta^0$ ,  $x \equiv \xi$ :

$$\psi_{1,2}(x, z) = xn^0 \sin \theta^0 + \left( \int_{z^0}^z \mp \int_z^{z_n} \right) \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2} dz, \quad (14.7)$$

где  $\psi_1 \equiv \psi_{\text{пад}}$ ,  $\psi_2 \equiv \psi_{\text{отр}}$ .

С учетом (14.6) и (14.7) полное поле волны равно:

$$u(x, z) = A_1 e^{ik_0 \psi_1} + A_2 e^{ik_0 \psi_2} = \frac{2A^0 n^0 \cos \theta^0}{\sqrt[4]{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}} e^{ik_0 \psi_n - i\frac{\pi}{4}} \cos \left( k_0 \int_z^{z_n} \gamma(z) dz - \frac{\pi}{4} \right), \quad (14.8)$$

где

$$\psi_{\pi} = xn^0 \sin \theta^0 + \int_{z^0}^z \gamma(z) dz, \quad \gamma(z) \equiv \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}.$$

Выражение (14.8) при  $\theta^0 = 0$  совпадает с известным ВКБ-решением одномерной задачи [25, 27, 30, 37]. Отметим, что ВКБ-метод может служить строгим обоснованием приближения геометрической оптики в одномерных задачах [25, 37, 147, 197, 198]. Другой подход к обоснованию геометрической оптики в одномерной задаче, основанный на использовании сходящегося разложения, обсуждается, например, в [25, 198]. С многочисленными приложениями ВКБ-метода к различным одномерным волновым задачам можно познакомиться в [147, 197, 198].

**3. Поля точечного и линейного источников.** Пусть поле точечного источника с координатами  $x = y = 0$ ,  $z = z^0$  на расстоянии  $R$ , малом по сравнению с характерным масштабом  $L$  изменения  $n(z)$ , т. е. при  $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z^0)^2} \ll L$ , имеет вид (см. § 3)

$$u = B^0 \frac{1}{R} e^{ik_0 n^0 R}, \quad B^0 = \text{const}, \quad n^0 \equiv n(z^0). \quad (14.9)$$

Для вычисления амплитуды поля на произвольных расстояниях от источника воспользуемся формулой (3.26), в которую следует подставить элемент телесного угла  $d\Omega = \sin \theta^0 d\theta^0 d\varphi^0$  и сечение лучевой трубки  $da = \frac{1}{n} \mathcal{D}(\tau) d\theta^0 d\varphi^0$ , где согласно (13.11) и (13.6):

$$\mathcal{D}(\tau) = p_z r \frac{\partial r}{\partial \theta^0} = n \cos \theta r \frac{\partial r}{\partial \theta^0}. \quad (14.10)$$

Здесь роль лучевой координаты  $\xi$  играет угол выхода луча  $\theta^0$ , а  $r = r(z, \theta^0)$  — уравнение семейства лучей (13.12). В результате

$$A = B^0 \left( \frac{n^0 d\Omega}{nda} \right)^{1/2} = B^0 \left( \frac{n^0 \sin \theta^0}{\mathcal{D}(\tau)} \right)^{1/2} = B^0 \left( \frac{n^0 \sin \theta^0}{nr \cos \theta \frac{\partial r}{\partial \theta^0}} \right)^{1/2}, \quad (14.11)$$

или, учитывая закон преломления (13.7"),

$$A = B^0 \frac{1}{\sqrt[4]{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2} \left( r \left| \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right| \right)^{1/2}} \exp\left(-i \frac{\pi}{2} q\right), \quad (14.12')$$

где

$$q = \frac{1}{2} (1 - \text{sgn } \mathcal{D}) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{sgn}(p_z) \text{sgn} \left( \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right) \right]. \quad (14.12'')$$

Здесь учтен дополнительный сдвиг фазы, который возникает пос-

ле касания каустики (13.13): при  $\mathcal{D} < 0$ ,  $q = 1$  фазовый сдвиг в (14.12) равен  $-\frac{\pi}{2}$ , при этом до касания луча с каустикой  $\mathcal{D} > 0$  и  $q = 0$  (см. § 4).

В однородной среде, т. е. при  $n(z) = \text{const} = n^0$ , из (13.12) следует, что  $r = (z - z^0) \text{tg } \theta^0$ . Тогда  $r \frac{\partial r}{\partial \theta^0} = R^2 \text{tg}^2 \theta^0$ , и формула

(14.12) дает очевидный результат:  $A_{\text{однор}} = \frac{B^0}{R}$ . Представим в аналогичном виде формулу (14.12):  $|A| = B^0/R_{\text{эфф}}$ , где  $R_{\text{эфф}}$  — эффективное расстояние от источника, дающее в свободном пространстве такое же сечение лучевой трубки, что и выражение (14.12):

$$R_{\text{эфф}} = \left\{ \frac{\sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}}{n^0 \sin \theta^0} r \left| \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right| \right\}^{1/2}. \quad (14.13')$$

Отношение

$$f = \left| \frac{A}{A_{\text{однор}}} \right|^2 = \frac{n^0 \sin^2 \theta^0 R^2}{r \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2} \left| \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right|} = \frac{R^2}{R_{\text{эфф}}^2}, \quad (14.13'')$$

показывающее, во сколько раз интенсивность волны в данной точке неоднородной среды больше интенсивности того же источника в однородной среде, называют фактором фокусировки [25, 49]. Расчеты  $f$  для ионосферных условий проводились в [199, 200], аналогичные исследования в сейсмологии см. в [201].

Эйконал волны (14.4) в случае точечного источника равен

$$\psi = rn^0 \sin \theta^0 + \left( \int_{z^0}^z \mp \int_{z^0}^z \right) \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2} dz. \quad (14.14)$$

Полное поле источника определяется вкладом всех лучей, приходящих в точку наблюдения  $(r, z)$ :

$$u(r, z) = \sum_{\nu} A_{\nu} e^{ik_0 \psi_{\nu}}, \quad (14.15)$$

где  $A_{\nu}$  и  $\psi_{\nu}$  даются формулами (14.12), (14.14), а углы выхода  $\theta_{\nu}^0 = \theta_{\nu}^0(r, z)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, m$ ) находятся из уравнения семейства лучей (13.12).

Выражения, подобные (14.12)–(14.14), получаются и для линейного источника (в двумерной задаче на плоскости  $x, z$ ). Согласно (13.11), амплитуда волны в этом случае определяется по формуле (14.12), если последнюю умножить на  $\sqrt{r/\sin \theta^0}$  и заменить в ней  $r$  на  $x$ . После такой же замены ( $r$  на  $x$ ) для эйконала  $\psi$  справедливо выражение (14.14).

Аналогично случаю плоской волны (п. 2) отметим, что формулы (14.10)–(14.12) имеют простой геометрический смысл,

поскольку в силу осевой симметрии площадь сечения лучевой трубки равна  $\Delta a = r \Delta \varphi^0 \Delta l$ , а  $\Delta l$ , в соответствии с рис. 14.1, б, определяется выражением  $\Delta l = \cos \theta \Delta r$ .

Полученные выше формулы справедливы для источников, расположенных как в безграничной среде  $n(z)$ , так и при наличии слабой границы раздела с однородным полупространством (см. § 13, п. 4).

**4. Точечный источник в линейном слое.** Пусть ненаправленный источник расположен внутри линейного слоя, описываемого формулами (13.22), на расстоянии  $z^0$  от границы раздела  $z = 0$  ( $z^0 > 0$ ). Определим диаграмму направленности источника в свободном полупространстве  $z < 0$ . Лучевая картина была проанализирована в п. 5 § 13: при  $z^0 < 1/9a$  внутри каустической петли образуется область четырехлучевости (см. рис. 13.5). Однако в дальней зоне через точку наблюдения проходят лишь два луча с различными углами выхода  $\theta_{1,2}^0$  из источника (рис. 14.2). Значения этих углов определяются из условия

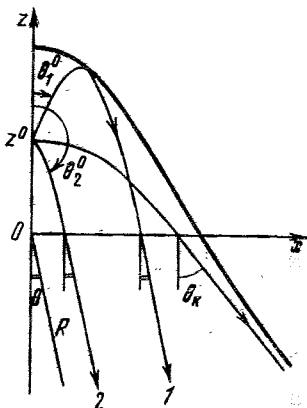
$$\sin \theta = \sqrt{1 - az^0 \sin^2 \theta_{1,2}^0}, \quad (14.16)$$


Рис. 14.2.

где  $\theta$  — угол наблюдения (будем отсчитывать  $\theta$  от нормали к границе раздела и считать  $\theta < \pi/2$ ). Совпадение углов  $\theta_1^0$  и  $\theta_2^0$  ( $\theta_1^0 = \theta_2^0 = \pi/2$ ) имеет место при  $\theta = \arccos \sqrt{az^0} \equiv \theta_k$ , что соответствует направлению асимптоты каустики (13.15) (рис. 14.2). Условие  $\theta < \theta_k$  определяет область света, где уравнение (14.16) имеет два решения, а  $\theta > \theta_k$  — область тени, где решения (14.16) отсутствуют.

Явное выражение для лучевых координат  $\theta_{1,2}^0$  дает возможность при помощи формул (14.12) и (14.14) в аналитической форме найти эйконалы  $\psi_{1,2}$  и амплитуды  $A_{1,2}$  двух лучей, проходящих в точку наблюдения  $(R, \theta)$  в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} &= r \sin \theta - z \cos \theta + \frac{2}{3a} \{ \cos^3 \theta \pm (\cos^2 \theta - az^0)^{3/2} \} = \\ &= R + \frac{2}{3a} \{ \cos^3 \theta \pm (\cos^2 \theta - az^0)^{3/2} \}, \end{aligned} \quad (14.17)$$

$$A_{1,2} = \frac{B^0}{R} \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt[4]{\cos^2 \theta - az^0}} \exp \left[ -i \frac{\pi}{4} (1 \pm 1) \right], \quad (14.18)$$

где  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$  — расстояние до точки наблюдения (рис. 14.2).

При вычислении амплитуды по формулам (14.12) было учтено, что уравнение лучей, вышедших в свободное полупространство, в дальней зоне может быть упрощено:

$$r = r_B - z \operatorname{tg} \theta \approx -z \operatorname{tg} \theta = R \sin \theta = R n^0 \sin \theta_{1,2}^0,$$

откуда

$$\frac{\partial r}{\partial \theta^0} = R n^0 \cos \theta_{1,2}^0 = \pm R \sqrt{\cos^2 \theta - a z^0}$$

$$\text{и } \Delta = 1 + \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right).$$

Полное поле источника равно

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= A_1 e^{i k_0 \psi_1} + A_2 e^{i k_0 \psi_2} = \\ &= B^0 \frac{e^{i k_0 R}}{R} \frac{2 \sqrt{\cos \theta}}{\sqrt[4]{\cos^2 \theta - a z^0}} \cos \left\{ \frac{2 k_0}{3a} (\cos^2 \theta - a z^0)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right\} \times \\ &\times \exp \left( i \frac{2 k_0}{3a} \cos^3 \theta - i \frac{\pi}{4} \right) \equiv B^0 \frac{e^{i k_0 R}}{R} F(\theta), \end{aligned} \quad (14.19)$$

где  $F(\theta)$  — искомая диаграмма направленности источника, рассчитанная в приближении геометрической оптики.

На рис. 14.3 представлены характерные нормированные диаграммы направленности, рассчитанные по формуле (14.19) (штриховые линии) и по точной формуле (сплошные линии). Точное решение задачи получено методом разделения переменных (см., например, [25, 151]). Рис. 14.3 соответствует  $a z^0 = 0,25$  ( $\theta_K = 60^\circ$ ) и различным значениям  $k_0/a$ :  $k_0/a = 5$  (кривые 2 на рис. 14.3, а),  $k_0/a = 10$  (кривые 1 на рис. 14.3, а) и  $k_0/a = 50$  (рис. 14.3, б). Сравнение с точным решением (см. также ниже, рис. 14.4, а и б) показывает, что геометрикооптическая формула (14.19) в области ее применимости ( $\theta < \theta_K$ , особенно при  $k_0/a \gg 1$ ) дает достаточно высокую точность расчетов.

Как следует из рис. 14.3, б, при  $k_0/a \gg 1$  диаграмма направленности в области света ( $\theta < \theta_K$ ) имеет осциллирующий характер, обусловленный интерференцией полей двух лучей. За каустикой, т. е. при  $\theta > \theta_K$ , образуется область геометрической тени, где поле сильно ослаблено (в приближении геометрической оптики равно нулю). Как обычно, в каустическом направлении  $\theta = \theta_K$  геометрическая оптика дает для  $F(\theta)$  бесконечность, что свидетельствует о необходимости уточнения формулы (14.19). Такое уточнение легко может быть выполнено с помощью формул каустической асимптотики [72, 144, 145] (см. также [21, 33]).

Характер изменения диаграммы направленности при изменении положения источника иллюстрирует рис. 14.4, на котором

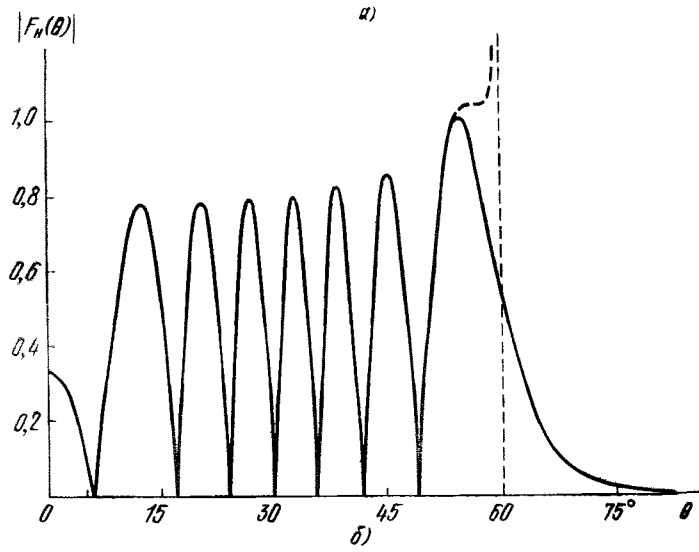
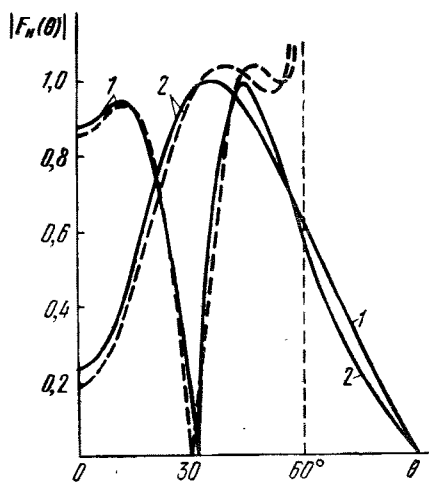


Рис. 14.3.

приведены результаты расчетов для  $k_0/a = 20$  и трех значений параметра  $az^0$ :  $az^0 = 0,8$  (кривые 1 на рис. 14.4, а),  $az^0 = 0,5$  (кривые 2 на рис. 14.4, а) и  $az^0 = 0,1$  (рис. 14.4, б). Как видно из рис. 14.4, при углублении источника, т. е. при возрастании параметра  $az^0$ , уменьшается освещенный сектор пространства

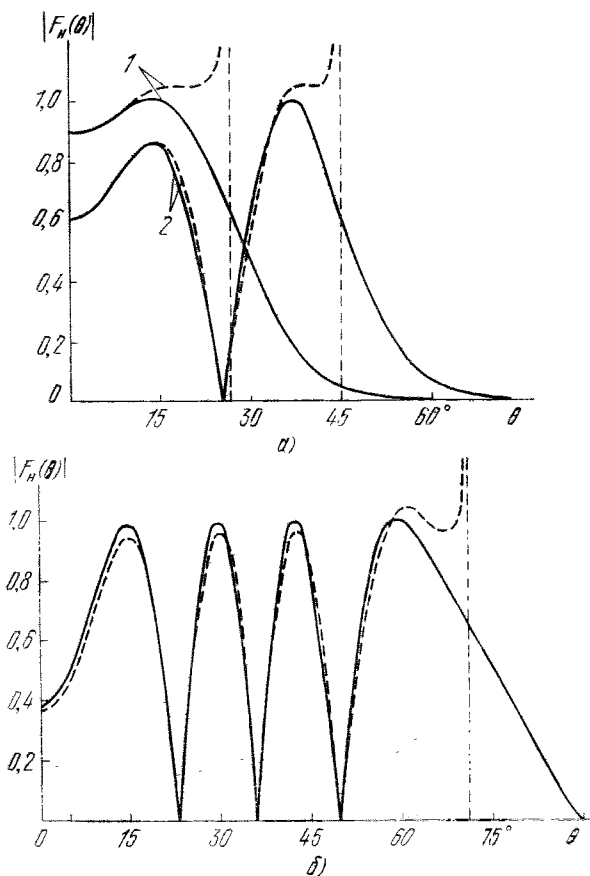


Рис. 14.4.

(уменьшается угол тени  $\theta_k$ ) и уменьшается изрезанность диаграммы. Уменьшение числа лепестков связано с уменьшением разности длинами оптических путей  $\psi_1$  и  $\psi_2$  (на лучах 1 и 2, см. рис. 14.2).

Приведенные результаты расчетов могут служить также хорошей иллюстрацией критериев реальности (наблюдаемости) каустик, которые мы уже обсуждали в п. 9 § 10, В частности,



как видно из рис. 14.3, б и 14.4, а, наличие каустики легко обнаружить по хорошо выраженной зоне тени, в которой волновое поле резко затухает.

**5. Точечный источник в параболическом слое.** Расчеты поля в этом случае затруднены тем, что, в отличие от п. 4, здесь не удастся определить лучевые координаты в аналитической форме. Ограничимся поэтому вычислением амплитуды поля на критическом луче в параболическом слое (13.23) далеко от источника.

Согласно (13.26),

$$\mathcal{D}(\tau) = r \frac{\partial(r, z)}{\partial(\theta^0, \tau)} = rn^0 \left[ \tau p_z \cos \theta^0 + \frac{n^0 \sin^2 \theta^0}{\sqrt{\varepsilon_2}} \operatorname{sh}(\tau \sqrt{\varepsilon_2}) \right]. \quad (14.20)$$

На критическом луче ( $z \rightarrow z_m$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ) имеем  $p_z \rightarrow 0$  и  $\tau = r/n^0 \sin \theta_{\text{кр}}^0 = r/\sqrt{\varepsilon_m}$ . В результате при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $\theta^0 = \theta_{\text{кр}}^0$

$$\mathcal{D}(\tau) \approx r \frac{(n^0 \sin \theta_{\text{кр}}^0)^2}{\sqrt{\varepsilon_2}} \operatorname{sh} \left( r \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_m}} \right) \approx r \frac{\varepsilon_m}{2\sqrt{\varepsilon_2}} \exp \left( r \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_m}} \right),$$

и в соответствии с формулой (14.11) получаем

$$A = B^0 \left[ \frac{n^0 \sin \theta^0}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2} \approx B^0 \left( \frac{2}{rh} \right)^{1/2} \exp(-r/2h), \quad (14.21)$$

где  $h = \sqrt{\varepsilon_m/\varepsilon_2}$ . Выражение (14.21) справедливо при  $r/h \gg 1$  и свидетельствует об экспоненциальном характере убывания амплитуды с расстоянием при антиволноводном распространении (п. 8, § 13). Такой характер изменения поля обусловлен, очевидно, «неустойчивостью» лучей на вершине барьера (см. рис. 13.11, 14.5), причем степень убывания амплитуды (14.21) тем меньше, чем более плоская вершина барьера (меньше коэффициент  $\varepsilon_2$ ) и чем больше квадрат показателя преломления ( $\varepsilon_m$ ) на вершине. Показатель экспоненты

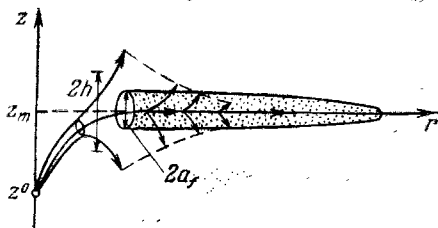


Рис. 14.5.

в (14.21) определяется масштабом слоя  $h = \sqrt{\varepsilon_m/\varepsilon_2}$ , равным расстоянию  $|z_m - z|$ , на котором  $n^2(z)$  увеличивается вдвое по сравнению с  $\varepsilon_m$ :  $n^2(z = z_m \pm h) = 2\varepsilon_m$ . Область применимости геометрических выражений типа (14.21) легко определить с помощью критериев § 10 (см. п. 7).

Исследование поля в окрестности критического луча проводилось, в частности, в [189]; антиволноводному механизму распространения волн посвящены работы [25, 207—209] и др. Различные вопросы исследования волновых полей в плоско-слоистых

средах рассматривались в большом числе работ [25, 27, 30, 49, 66, 73, 186, 187, 192, 193, 203—206] и др.

**6. О форме френелевских объемов в плоско-слоистых средах.** Подробно этот вопрос рассматривается в работе [79]. Приведем некоторые результаты из [79] для «плоского» фазового фронта

(линейного распределения эйконала  $\psi^0 = \xi n^0 \sin \theta^0$  при  $z = z^0$ , см. также п. 2); лучевая картина в этом случае обсуждалась в п. 3 § 13 (рис. 13.3). При наличии каустики  $z = z_{\Pi} = \text{const}$  образуются два френелевских объема I и II (рис. 14.6), соответствующие двум лучам, приходящим в точку наблюдения  $\{x, z\}$  (рис. 13.3).

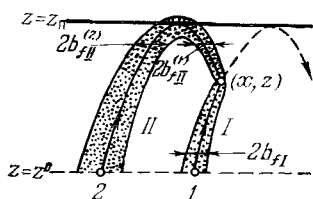


Рис. 14.6.

Горизонтальный (поперечный) размер объема I равен [79]:

$$b_{fI}(z') = |x' - x_0'| = \left\{ \lambda_0 \frac{d}{ds^0} \int_{z'}^z \frac{s^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (s^0)^2}} \right\}^{1/2} \equiv \sqrt{\lambda_0 L_I}. \quad (14.22)$$

где  $s^0 \equiv n^0 \sin \theta^0$ ;  $\{x, z\}$  — точка наблюдения,  $\{x', z'\}$  — текущая точка границы френелевского объема, а  $x_0'$  — координата точки пересечения «опорного» луча I с плоскостью  $z' = \text{const}$  (рис. 14.7, а). Общий вид френелевского объема I показан на

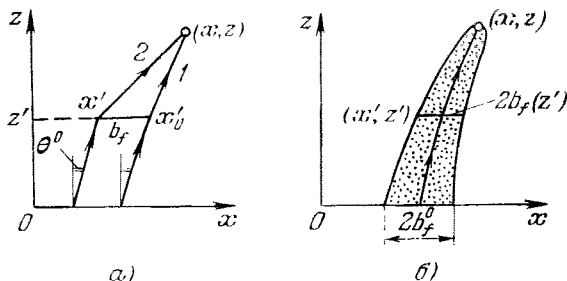


Рис. 14.7.

рис. 14.7, б. Отличительной особенностью объема II, отвечающего отраженному от каустики лучу 2, является его двузначность: при  $z' > z$  он дважды пересекает плоскость  $z' = \text{const}$ , порождая тем самым два размера:

$$b_{fII}^{(1,2)}(z') = \left\{ \lambda_0 \frac{d}{ds^0} \left( \int_{z'}^{z_{\Pi}} \mp \int_z^{z_{\Pi}} \right) \frac{s^0 dz}{\sqrt{n^2(z) - (s^0)^2}} \right\}^{1/2} \equiv \sqrt{\lambda_0 L_{II}^{(1,2)}}. \quad (14.23)$$

Формулы (14.22), (14.23) получены в квадратичном приближении

по  $\Delta x = |x' - x_0'|$  (см. § 10). Очевидно, что в отсутствие каустики образуется только один френелевский объем (рис. 14.7, а), размеры которого определяются формулой (14.22).

При  $\theta^0 = 0$  из (14.23) имеем

$$b_{fI}(z') = \left[ \lambda_0 \int_{z'}^z \frac{dz}{n(z)} \right]^{1/2}, \quad b_{fII}^{(1,2)}(z') = \left[ \lambda_0 \left( \int_{z'}^{z_{II}} \mp \int_z^{z_{II}} \right) \frac{dz}{n(z)} \right]^{1/2}. \quad (14.24)$$

При  $n(z) = \text{const} = n^0$  отсюда получаем  $b_{fI} = \sqrt{\lambda_0(z - z')/n^0}$  что, разумеется, совпадает с (10.9). Для линейного слоя (13.18), согласно (14.24), имеем

$$\begin{aligned} b_{fI}(z') &= \{2\lambda_0 H [n(z') - n(z)]\}^{1/2}, & z' < z, \\ b_{fII}^{(1,2)}(z') &= \{2\lambda_0 H [n(z) \mp n(z')]\}^{1/2}, & z' > z. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Френелевские объемы в линейном слое (при  $\theta^0 = 0$ ) показаны на рис. 14.8, а, при этом объем II имеет вид частично вывернутого «чупка» (см. отдельный эскиз — рис. 14.8, б).

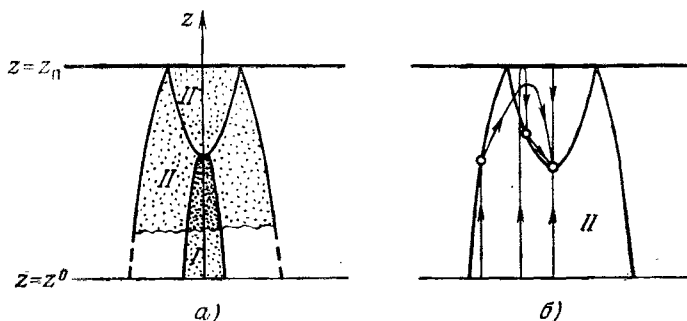


Рис. 14.8.

По аналогии с (14.24) в случае точечного источника (для луча с  $\theta^0 = 0$ ) имеем

$$b_{fI} = \sqrt{\lambda_0 \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)^{-1}} = \sqrt{\lambda_0 \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}, \quad (14.26)$$

где

$$L_1 = \int_{z_0}^{z'} \frac{dz}{n(z)}, \quad L_2 = \int_{z'}^z \frac{dz}{n(z)}.$$

Подобная же формула справедлива и для  $b_{fII}^{(1,2)}$ . Разумеется, для определения размеров френелевского объема в общем случае приходится прибегать к численным методам.

### 7. Условия применимости геометрикооптического приближения.

В одномерной задаче распространения плоской волны (п. 4) эти условия совпадают с известными условиями применимости ВКБ-приближения [197, 198] (см. также [25, 27]). В общем же случае следует использовать критерии из § 10. Рассмотрим, например, случай плоского фазового фронта, когда размер френелевского объема  $b_f$  известен в аналитической форме (см. п. 6). Для неоднородного начального распределения амплитуды  $A^0 = A^0(x)$  при  $z = z^0$  и  $-b < x < b$ , которое характерно для *волнового пучка* шириной  $2b$ , критерий применимости геометрикооптического решения (см. § 10) принимает вид

$$b_f^0 \left| \frac{1}{A^0} \frac{dA^0}{dx} \right| \ll 1, \quad b_f^0 \ll b, \quad (14.27)$$

где  $b_f^0$  — размер френелевской зоны на начальной плоскости, т. е. при  $z' = z^0$ . Если использовать обобщенное обозначение  $L_0$  для «эквивалентных» расстояний  $L_1, L_{II}^{(1,2)}$  при  $z' = z^0$  в формулах (14.22), (14.23), то условия (14.27) можно переписать в виде неравенств

$$L_0 \ll \frac{b^2}{\lambda_0}, \quad L_0 \ll \frac{1}{\lambda_0} \left| \frac{1}{A^0} \frac{dA^0}{dx} \right|^{-2}, \quad (14.28)$$

дающих ограничения на эквивалентную дистанцию  $L_0$ . В частности, для  $\theta^0 = 0$  и в отсутствие каустик эти условия означают, что

$$\left| \int_{z^0}^z \frac{dz}{n(z)} \right| \ll \frac{b^2}{\lambda_0}, \quad \left| \int_{z^0}^z \frac{dz}{n(z)} \right| \ll \frac{1}{\lambda_0} \left| \frac{1}{A^0} \frac{dA^0}{dx} \right|^{-2}, \quad (14.29')$$

или

$$\left| \int_{z^0}^z \lambda(z) dz \right| \ll b^2, \quad \left| \int_{z^0}^z \lambda(z) dz \right| \ll \left| \frac{1}{A^0} \frac{dA^0}{dx} \right|^{-2}, \quad (14.29'')$$

где  $\lambda(z) = \lambda_0/n(z)$  — локальная длина волны в среде. Кроме этих условий, необходимо также контролировать скорость изменения  $n(z)$  в пределах френелевского объема (см. § 10).

Пользуясь этими критериями, определим, например, область применимости геометрикооптического приближения (14.21) для поля волны на критическом луче в параболическом слое. Вблизи вершины барьера, когда  $|z - z_m| < h$ , среду можно считать однородной с  $n(z) \approx \sqrt{\varepsilon_m}$  (см. п. 5), так что радиус френелевской зоны можно взять равным  $a_f \approx \sqrt{\lambda_0 r/n} \approx \sqrt{\lambda_0 r} / \sqrt{\varepsilon_m}$ . Из условия  $a_f \leq h$ , при котором соблюдается однородность среды в пределах  $a_f$  (рис. 14.2), получаем оценку

$$r \ll \frac{\sqrt{\varepsilon_m}}{\lambda_0} h^2 = \frac{\varepsilon_m^{3/2}}{\lambda_0 \varepsilon_2} = \frac{k_0 \varepsilon_m^{3/2}}{2\pi \varepsilon_2},$$

которая согласуется с результатом работы [189], полученным при помощи метода эталонных функций.

Другие примеры использования полученных выше условий применимости обсуждаются в [79]. Интересный вопрос о ближней и дальней зонах антенны (волнового пучка) в неоднородной среде рассматривался в [137, 210, 211] (см. также [79]).

## § 15. Волны в радиально-неоднородных средах

1. Уравнения лучей в сферически-слоистых средах. Радиально-неоднородные среды с  $n = n(r)$  в приложениях встречаются не менее часто, чем плоско-слоистые среды. Уравнения лучей в сферически-слоистой среде с  $n = n(r)$ , согласно (2.44), принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \tilde{p}_r, & \frac{d\tilde{p}_r}{d\tau} &= n \frac{dn}{dr} + \frac{1}{r} (n^2 - \tilde{p}_r^2), \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{r} \tilde{p}_\theta, & \frac{d\tilde{p}_\theta}{d\tau} &= \frac{1}{r} (\tilde{p}_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - \tilde{p}_r \tilde{p}_\theta), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{r \sin \theta} \tilde{p}_\varphi, & \frac{d\tilde{p}_\varphi}{d\tau} &= -\frac{\tilde{p}_\varphi}{r \sin \theta} (\tilde{p}_r \sin \theta + \tilde{p}_\theta \cos \theta), \end{aligned} \quad (15.1)$$

где компоненты импульса  $\tilde{p}_r$ ,  $\tilde{p}_\theta$ ,  $\tilde{p}_\varphi$  связаны уравнением эйконала  $\tilde{p}_r^2 + \tilde{p}_\theta^2 + \tilde{p}_\varphi^2 = n^2(r)$ . Простыми преобразованиями из (15.1) можно получить

$$\frac{d}{d\tau} [r^2 (n^2 - \tilde{p}_r^2)] = 0, \quad \frac{d}{d\tau} (r \tilde{p}_\varphi \sin \theta) = 0,$$

откуда

$$r^2 (n^2 - \tilde{p}_r^2) = \text{const} = (r^0)^2 [(n^0)^2 - (\tilde{p}_r^0)^2] \equiv \rho^2, \quad (15.2')$$

$$r \tilde{p}_\varphi \sin \theta = \text{const} = r^0 \tilde{p}_\varphi^0 \sin \theta^0 \equiv \rho_1. \quad (15.2'')$$

Если далее по аналогии с (13.6) ввести углы преломления  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha^0$ ,  $\beta^0$  (рис. 15.1) по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{p}_r &= n \cos \alpha, & \tilde{p}_\varphi &= n \sin \alpha \sin \beta, & \tilde{p}_\theta &= n \sin \alpha \cos \beta, \\ \tilde{p}_r^0 &= n^0 \cos \alpha^0, & \tilde{p}_\varphi^0 &= n^0 \sin \alpha^0 \sin \beta^0, & \tilde{p}_\theta^0 &= n^0 \sin \alpha^0 \cos \beta^0, \end{aligned} \quad (15.3)$$

то из (15.2) получим законы преломления волны в сферически-слоистой среде<sup>1)</sup>

$$rn(r) \sin \alpha = \text{const} = r^0 n(r^0) \sin \alpha^0 \equiv \rho, \quad (15.4')$$

$$\sin \theta \sin \beta = \text{const} = \sin \theta^0 \sin \beta^0. \quad (15.4'')$$

<sup>1)</sup> Параметр  $\rho$ , определяемый формулой (15.4), пропорционален кратчайшему расстоянию  $r^0 \sin \alpha^0$  от центра среды  $r=0$  до луча. Поэтому он может быть назван обобщенным прицельным параметром луча, или, для краткости, просто прицельным параметром.

Если  $\beta^0 = 0$  ( $\tilde{p}_\varphi^0 = 0$ ) и лучи лежат в плоскости  $\varphi = \text{const} = \varphi^0$ , условие (15.4") выполняется тождественно и поэтому обычно не рассматривается.

С учетом формул (15.2)–(15.4) уравнения лучей (15.1) интегрируются в квадратурах. В самом деле, из (15.2) имеем

$$\tilde{p}_r = \pm \sqrt{n^2(r) - \frac{\rho^2}{r^2}}, \quad \tilde{p}_\varphi = \frac{\rho_1}{r \sin \theta}, \quad \tilde{p}_\theta = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\rho^2 - \frac{\rho_1^2}{\sin^2 \theta}},$$
(15.5)

и поэтому

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\tilde{p}_r}{\tilde{p}_\theta} = \pm \frac{r \sin \theta \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}}{\sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta - \rho_1^2}},$$
(15.6)

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\tilde{p}_\varphi}{\tilde{p}_\theta \sin \theta} = \pm \frac{\rho_1}{\sin \theta \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta - \rho_1^2}}.$$

Ниже для простоты рассмотрим *осесимметричный* случай, когда  $\rho_1 = 0$  (т. е.  $\tilde{p}_\varphi^0 = 0$ ), и начальные условия не зависят от  $\varphi$ . В этом случае из (15.6), аналогично (13.4), получим ( $\rho > 0$ )

$$\theta = \theta^0 + \left( \int_{r_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{r_<}^{r_>} \right) \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}},$$
(15.7)

где  $\tilde{r}_<$  и  $\tilde{r}_>$  — соответственно меньшее или большее значение из двух величин  $r^0$  и  $r_n$ , тогда как  $r_< \equiv \min(r, r_n)$ ,  $r_> \equiv \max(r, r_n)$ .

Координата  $r_n$  удовлетворяет уравнению  $r_n n(r_n) = \rho$  и определяет положение точки поворота на луче, где  $\tilde{p}_r = 0$ , а  $\alpha = \pi/2$ , при этом величина  $p_r$  положительна на восходящей ветви луча и отрицательна — на нисходящей (рис. 15.2). Уравнение (15.7) записано для случая, когда луч имеет одну точку поворота (рис. 15.2), т. е. когда величина  $rn(r)$  является монотонной функцией  $r$ . Если  $rn(r) > \rho$ , точка поворота на луче отсутствует, и в уравнении (15.7) следует взять верхний знак,

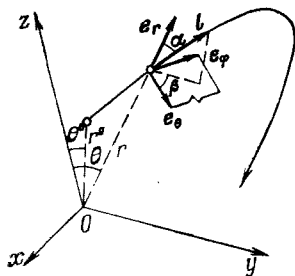


Рис. 15.1.

а разность двух интегралов, как и в § 13, заменить на один (с пределами  $r^0$ ,  $r$ ).

Если ввести функцию  $n_m(r) = \frac{r}{r^0} n(r)$ , называемую *модифицированным (приведенным) показателем преломления*, то закон

преломления (15.4) формально сводится к закону преломления (13.7) в плоско-слоистой среде. Пусть  $r = r^0 + z$  — расстояние от центра сферы, а  $z \ll r^0$  — высота, отсчитываемая от уровня  $r = r^0$ . В этих условиях использование модифицированного показателя преломления  $n_m(z) \approx n(z)(1 + z/r^0)$  или, что эквивалент-

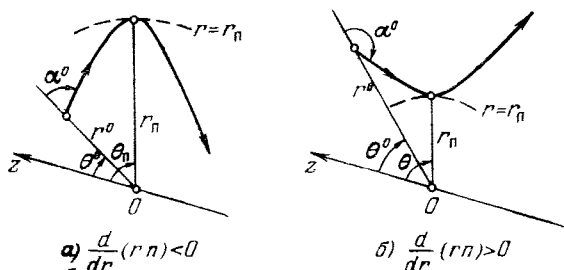


Рис. 15.2.

но, модифицированной проницаемости  $\epsilon_m(z) \approx \epsilon(z)(1 + 2z/r^0)$ , позволяет приближенно свести задачу о распространении волн в сферически-слоистых средах к задаче для плоско-слоистой среды. Этот прием находит широкое применение в теории распространения радиоволн в тропосфере и ионосфере Земли [25, 104, 194]. Мы воспользуемся этим приемом в § 17 при рассмотрении возможных типов ионосферных волновых каналов.

Отметим, что полученные выше выражения (15.4) и (15.7) легко выводятся и из геометрических соображений (рис. 15.3). Из закона Снеллиуса (5.6) следует, что в случае сферических однородных слоев  $n_1 \sin \delta = n_2 \sin \alpha_2$ , но по теореме синусов  $r_2 \sin \delta = r_1 \sin \alpha_1$  (см. рис. 15.3), и тогда  $n_1 r_1 \sin \alpha_1 = n_2 r_2 \sin \alpha_2 = \text{const}$ , что соответствует (15.4'). Из рис. 15.3 ясно также, что  $\text{tg } \alpha = r d\theta / dr$ . Вместе с (15.4') это и дает уравнение луча (15.7).

**2. Эйконал волны в сферически-слоистых средах.** Полный интеграл уравнения эйконала в сферически-слоистой среде с  $n = n(r)$ , согласно § 8, равен

$$\psi = \rho_1 \varphi \pm \int \sqrt{n^2 - \frac{\rho^2}{r^2}} dr \pm \int \sqrt{\rho^2 - \frac{\rho_1^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \psi^0. \quad (15.8)$$

Учитывая, что  $p = \nabla \psi$ , из (15.8) сразу получаем формулы (15.5) для  $p_r$ ,  $p_\theta$ ,  $p_\varphi$ , при этом закон сохранения (15.2) является след-

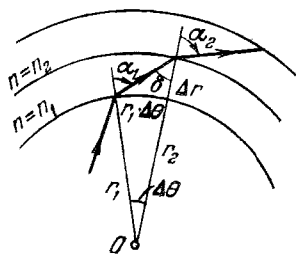


Рис. 15.3.

ствием цикличности координаты  $\varphi$ . При тех же условиях ( $\rho_1 = 0$ ), что и при выводе уравнения луча (15.7), имеем

$$\psi = \psi^0 + \rho(\theta - \theta^0) + \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{r_<}^{r_>} \right) \sqrt{n^2(r) - \frac{\rho^2}{r^2}} dr. \quad (15.9)$$

Отсюда находим, что на луче (15.7)

$$\psi = \psi^0 + \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{r_<}^{r_>} \right) \frac{rn^2(r) dr}{\sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}}. \quad (15.10')$$

Такое же выражение получается и при интегрировании  $n^2(r)$  вдоль луча (15.7), так как, согласно (15.1),  $d\tau = dr/\tilde{p}_r$ . Например, на восходящей ветви луча ( $\tilde{p}_r > 0$ )

$$\psi = \psi^0 + \int_0^{\tau} n^2 d\tau = \psi^0 + \int_{r^0}^r \frac{n^2}{\tilde{p}_r} dr = \psi^0 + \int_{r^0}^r \frac{rn^2(r) dr}{\sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \quad (15.10'')$$

**3. Цилиндрически-слоистые среды.** Уравнения лучей (2.41) в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  при  $n = n(r)$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \tilde{p}_r, & \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1}{r} \tilde{p}_\varphi, & \frac{dz}{d\tau} &= \tilde{p}_z, \\ \frac{d\tilde{p}_r}{d\tau} &= n \frac{dn}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{p}_\varphi^2, & \frac{d\tilde{p}_\varphi}{d\tau} &= -\frac{1}{r} \tilde{p}_r \tilde{p}_\varphi, & \frac{d\tilde{p}_z}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (15.11)$$

где  $\tilde{p}_r^2 + \tilde{p}_\varphi^2 + \tilde{p}_z^2 = n^2(r)$ . Отсюда легко находим

$$\tilde{p}_z = \text{const} = \tilde{p}_z^0, \quad r\tilde{p}_\varphi = \text{const} = r^0\tilde{p}_\varphi^0 \equiv \rho, \quad (15.12')$$

и, следовательно,

$$\tilde{p}_r = \pm \sqrt{n^2(r) - \frac{\rho^2}{r^2} - (\tilde{p}_z^0)^2}. \quad (15.12'')$$

Тогда уравнения лучей (15.11) могут быть представлены в форме

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\rho}{r \sqrt{r^2 (n^2 - \tilde{p}_z^0{}^2) - \rho^2}}, \quad \frac{dz}{dr} = \pm \frac{r\tilde{p}_z^0}{\sqrt{r^2 (n^2 - \tilde{p}_z^0{}^2) - \rho^2}}, \quad (15.13)$$

допускающей интегрирование в квадратурах. При  $\tilde{p}_\varphi = 0$  ( $\rho = 0$ ) уравнения (15.13) совпадают с уравнениями лучей в плоско-слоистой среде, а при  $\tilde{p}_z = 0$  — с уравнениями лучей (15.7) в сферически-слоистой среде. Это объясняется тем, что в двух главных плоскостях  $\varphi = \text{const}$  и  $z = \text{const}$  линии уровня цилиндрически-



слоистой среды  $n = \text{const}$  представляют собой соответственно плоские и круговые слои (рис. 15.4). Действительно, в случае  $\tilde{p}_z = 0$  лучи лежат в плоскости  $z = \text{const} = z^0$  и определяются уравнением

$$\varphi = \varphi^0 + \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \right) \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}}, \quad (15.14)$$

где использованы те же обозначения, что и в формуле (15.7). Уравнение (15.14) и закон преломления  $r \tilde{p}_\varphi = \text{const}$  совпадают соответственно с (15.7) и (15.4), если при  $\tilde{p}_z^0 = 0$  определить угол преломления  $\alpha$  по формулам  $\tilde{p}_\varphi = n \sin \alpha$ ,  $\tilde{p}_r = n \cos \alpha$ , подобным (15.3). Отметим, что в общем случае, когда  $\tilde{p}_\varphi^0 \neq 0$  ( $\rho \neq 0$ ) и  $\tilde{p}_z^0 \neq 0$ , лучи (15.13) не являются плоскими кривыми и обладают кручением (см., например, [116]). Как следует из § 8, эйконал волны в цилиндрически-слоистой среде  $n = n(r)$  равен

$$\psi = \tilde{p}_z^0 (z - z^0) + \rho (\varphi - \varphi^0) + \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \right) \sqrt{n^2(r) - \frac{\rho^2}{r^2} - (\tilde{p}_z^0)^2} dr + \psi^0, \quad (15.15)$$

откуда при  $\tilde{p}_z^0 = 0$  находим выражения, отличающиеся от (15.9) и (15.10) лишь заменой  $\theta - \theta^0$  на  $\varphi - \varphi^0$ .

**4. Геометрия лучей.** Ограничимся рассмотрением картины лучей в сферически-слоистой среде при  $\varphi = \text{const}$  или в цилиндрически-слоистой среде при  $z = \text{const}$ . Многие свойства таких лучей аналогичны свойствам лучей в плоско-слоистой среде (§ 13). В частности, лучи являются плоскими кривыми, имеющими ветви, симметричные относительно точки поворота  $\{r_n, \theta_n\}$  (см. рис. 15.2). Особенностью радиально-неоднородной среды является наличие центра  $r = 0$ , вокруг которого траектории лучей могут совершать различное число оборотов.

Принято различать *неограниченные* (инфинитные) и *ограниченные* (финитные) траектории<sup>1)</sup>: первые уходят на беско-

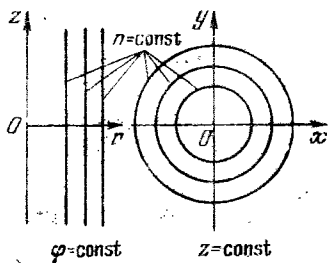


Рис. 15.4.

<sup>1)</sup> Названия заимствованы из механики [4, 5]. В работах по механике ([2-5, 132, 212] и др.) подробно исследовались траектории движения частиц в поле центральных сил  $U(r)$ . В силу оптико-механической аналогии (см. § 2), эти исследования легко переносятся на волновые задачи (на геометрическую оптику).

нечность по  $r$  ( $r \rightarrow \infty$ ), а вторые сосредоточены в круговом кольце  $r_{n1} \leq r \leq r_{n2}$ , где  $r_{n1,2}$  удовлетворяют уравнению  $r_{n1,2}n(r_{n1,2}) = \rho$ . Финитные траектории соответствуют волноводному распространению волны в радиально-неоднородной среде (см. § 17). Они образуются, только когда зависимость  $rn(r)$  имеет максимум, причем на траектории всегда  $rn(r) \geq \rho$  (рис. 15.5). Инфинитные траектории в простейшем виде показаны на рис. 15.2;

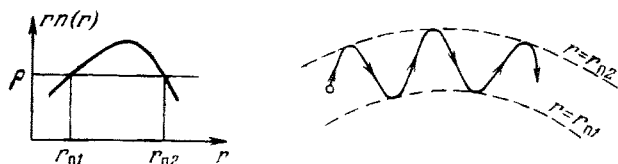


Рис. 15.5.

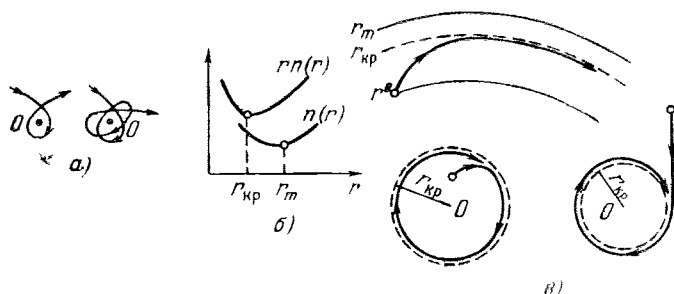


Рис. 15.6.

в общем же случае они могут образовывать несколько петель вокруг центра среды  $r=0$  (см. рис. 15.6, а, а также конкретные расчеты в [213]). Среди финитных траекторий интересной особенностью обладает луч, для которого при  $r=r_n=r_{kp}$  функция  $rn(r)$  имеет минимум (рис. 15.6, б). В этом случае угловая координата  $\theta_n$  точки поворота обращается в бесконечность<sup>1)</sup> (рис. 15.6, в), а луч закручивается по спирали вокруг точки  $r=0$ , асимптотически приближаясь к уровню  $r=r_{kp}$  (в квантовой механике с закручиванием связано так называемое спиральное рассеяние [214, 215]). Этот луч во многом аналогичен критическому лучу вблизи вершины плоского слоя (см. рис. 13.11, и §§13, 14), однако, в отличие от последнего, он образуется при  $dn/dr = -n/r < 0$  (а не при  $dn/dr = 0$ ).

<sup>1)</sup> С помощью аналогичного (13.8) тейлоровского разложения для функции  $r^2 n^2(r)$  легко показать, что, если  $\frac{d}{dr}(rn) = 0$  в точке  $r=r_n$ , то несобственный интеграл в (15.7) при  $r \rightarrow r_n$  логарифмически расходится.

Как следует из § 2, кривизна луча в радиально-неоднородной среде равна

$$K = \frac{1}{n} \left| \frac{dn}{dr} \right| \sin \alpha = \frac{\rho}{rn^2} \left| \frac{dn}{dr} \right|, \quad (15.16)$$

где  $\alpha = \alpha(r)$  — текущий угол преломления, а  $\rho = r^0 n^0 \sin \alpha^0$  — прицельный параметр луча. Отметим, что свойства траекторий лучей в радиально-неоднородной среде рассматривались в большом числе работ (см., например, [27, 45, 104, 110, 192—196, 199, 216, 217, 472] и др.); в [218] для исследования использовался метод фазовой плоскости.

**5. Поле точечного источника.** Семейство лучей, создаваемое точечным источником с координатами  $r^0, \theta^0 = 0$ , в сферически-слоистой среде определяется уравнением (15.7), откуда

$$\theta = \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{r_<}^{r_>} \right) \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \equiv \theta(r, \alpha^0), \quad (15.17)$$

где  $\rho = r^0 n^0 \sin \alpha^0$ , а  $\alpha^0$  — угол выхода луча из источника. Учитывая, что лучи (15.17) не зависят от  $\varphi$  и лежат в плоскостях  $\varphi = \text{const} = \varphi^0$ , для якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  получаем

$$\mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha^0, \varphi^0, \tau)} = r^2 \sin \theta \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(\alpha^0, \tau)} = r^2 \sin \theta \tilde{p}_r \frac{\partial}{\partial \alpha^0} \theta(r, \alpha^0), \quad (15.18)$$

где  $\tilde{p}_r$  дается выражением (15.5).

Учитывая формулы (15.18) и (3.26), можно найти амплитуду поля точечного источника

$$A = B^0 \left[ \frac{n^0 \sin \alpha^0}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2} = B^0 \left[ \frac{\rho}{r^2 r^0 \sin \theta \tilde{p}_r \frac{\partial}{\partial \alpha^0} \theta(r, \alpha^0)} \right]^{1/2}.$$

Отсюда, аналогично (14.12), получаем

$$A = \frac{B^0}{\sqrt[4]{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \left( \frac{\rho}{r r^0 \sin \theta \left| \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^0} \right|} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{i\pi}{2} q \right), \quad (15.19')$$

где

$$q = \frac{1}{2} (1 - \text{sgn } \mathcal{D}) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{sgn}(\tilde{p}_r) \text{sgn} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^0} \right]. \quad (15.19'')$$

Представляя (15.19') в виде  $|A| = B^0/R_{\text{эфф}}$ , определим эффективное расстояние  $R_{\text{эфф}}$  и фактор фокусировки  $f$  (см. § 4 и п. 3

§ 14) в сферически-слоистой среде:

$$R_{\text{эфф}} = \left\{ rr^0 \sin \theta \frac{1}{\rho} \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^0} \right| \right\}^{1/2}, \quad (15.20')$$

$$f = \left| \frac{A}{A_{\text{однор}}} \right|^2 = \frac{\rho R^2}{rr^0 \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \alpha^0} \right|} \equiv \frac{R^2}{R_{\text{эфф}}^2}. \quad (15.20'')$$

Эйконал (15.9) в случае точечного источника дается выражением

$$\psi = \rho \theta + \left( \int_{\tilde{r}_<}^{\tilde{r}_>} \mp \int_{r_<}^{r_>} \right) \sqrt{n^2(r) - \rho^2/r^2} dr. \quad (15.21)$$

Для линейного источника в цилиндрически-слоистой среде (двумерная задача) имеем

$$\begin{aligned} A &= B^0 \left( \frac{n^0 da^0}{nda} \right)^{1/2} = B^0 \left( \frac{n^0}{r \tilde{p}_r \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^0}} \right)^{1/2} = \\ &= \frac{B^0 \sqrt{n^0}}{\sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^0} \right|^{-1/2} \exp \left( -\frac{i\pi}{2} q \right), \quad (15.22) \end{aligned}$$

где  $\varphi = \varphi(r, \alpha^0)$  — уравнение семейства лучей (15.14), а величина  $q$  аналогична (15.19''), но с заменой  $\theta$  на  $\varphi$ . Такая же замена должна быть сделана и в формуле (15.21) для эйконала.

Формула (15.18) для  $\mathcal{D}(\tau)$ , аналогичная формула в двумерной задаче  $\mathcal{D}_{\text{дв}}(\tau) = r \tilde{p}_r \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha^0}$  и соответствующие выражения (15.19) и (15.22) для амплитуд могут быть легко получены из геометрических соображений (рис. 15.7), если учесть, что, согласно рис. 15.7, сечения лучевой трубки равны  $\Delta a = r \sin \theta \Delta \varphi^0 \Delta l$ ,  $\Delta l = r \cos \alpha \Delta \theta$ , при этом  $n \cos \alpha = \tilde{p}_r$ .

**6. Поле плоской волны.** В случае, когда  $n^2(r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ , на бесконечности можно задать плоскую волну  $u^0 = A^0 \exp(-ik_0 z)$ , набегающую на центр сферически-слоистой среды (рис. 15.8). Уравнения лучей (15.7) в среде принимают следующий вид:

$$\theta = \left( \int_{r_{\Pi}}^{\infty} \mp \int_{r_{\Pi}}^r \right) \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \equiv \theta(r, \rho), \quad (15.23)$$

где  $\rho$  — прицельный параметр луча (рис. 15.8)<sup>1)</sup>. Вычисления,

<sup>1)</sup> Легко могут быть записаны уравнения лучей и в случае, когда имеется не одна, а несколько точек поворота (траектория образует несколько петель вокруг центра среды  $r=0$ , см. рис. 15.6).

аналогичные случаю точечного источника, дают следующие выражения для амплитуды и эйконала волны:

$$A = A^0 \frac{1}{\sqrt[4]{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \left[ \frac{\rho}{r \sin \theta \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \theta(r, \rho) \right|} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{i\pi}{2} q\right), \quad (15.24')$$

$$\psi = \rho\theta + \left( \int_{r_n}^{\infty} \mp \int_{r_n}^r \right) \sqrt{n^2(r) - \rho^2/r^2} dr, \quad (15.24'')$$

где  $q = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{sgn}(\tilde{p}_r) \operatorname{sgn} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right]$ , а  $\rho$  — прицельный параметр луча.

Выражение для амплитуды волны в цилиндрически-слоистой

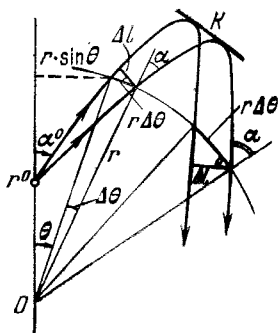


Рис. 15.7.

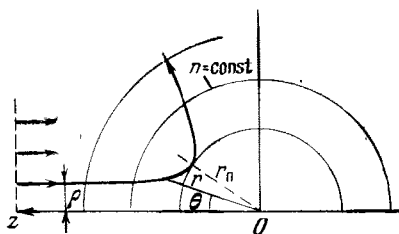


Рис. 15.8.

среде отличается от (15.24) лишь отсутствием множителя  $(\rho/r \sin \theta)^{1/2}$ . Очевидно, формулы для амплитуд могут быть получены и из геометрических соображений (рис. 15.8).

**7. Каустики.** Согласно (15.18), точечный источник в сферически-слоистой среде образует в общем случае две каустики — осевую каустикку при  $\theta = 0$  или  $\pi$  и каустикку вращения, определяемую условием  $\frac{\partial}{\partial \alpha^0} \theta(r, \alpha^0) = 0$ . Если семейство лучей (15.17) характеризовать прицельным параметром  $\rho$  (а не углом  $\alpha^0$ ), т. е.  $\theta = \theta(r, \rho)$ , то уравнения каустики вращения имеют вид

$$\theta = \theta(r, \rho), \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \theta(r, \rho) = 0. \quad (15.25)$$

Эти же уравнения применимы и для каустики плоской волны, где функция  $\theta(r, \rho)$  дается формулой (15.23). Если для плоской волны подобрать закон  $n(r)$  так, чтобы каустика (15.25) стянулась в точку — фокус, то в соответствии с лучевой теоремой

взаимности (см. § 6) получим идеальную радиально-неоднородную линзовую антенну (примеры см. в [102, 217]). При заданном законе  $n(r)$  форма каустики (15.25) может быть весьма сложной как для плоской волны, так и для точечного источника.

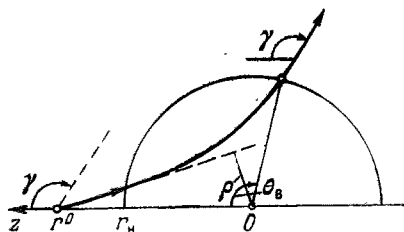


Рис. 15.9.

Пусть точечный источник расположен снаружи ограниченной сферически-слоистой неоднородности радиуса  $r_n$  (рис. 15.9). Рассмотрим, следуя [45], каустики, образованные этой неоднородностью в свободном пространстве. Так как  $n^2(r) = 1$  при  $r > r_n$ , уравнения лучей (15.17) в этом случае имеют вид

$$\theta = \theta_b - \arccos \frac{\rho}{r_n} + \arccos \frac{\rho}{r} = \gamma - \arcsin \frac{\rho}{r} \equiv \theta(r, \rho), \quad (15.26')$$

где  $\theta_b$  — координата точки выхода луча из среды:

$$\theta_b = \arccos \frac{\rho}{r^0} - \arccos \frac{\rho}{r_n} + 2 \int_{r_n}^{r_n} \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}}, \quad (15.26'')$$

а  $\gamma = \theta_b + \arcsin \frac{\rho}{r_n}$  — угол наклона луча к оси  $z$  (рис. 15.9).

Каустика (15.25), образованная лучами (15.26), определяется уравнениями

$$\theta = \gamma - \arcsin \frac{\rho}{r} \equiv \theta_K(\rho), \quad r = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\rho}\right)^{-2}} \equiv r_K(\rho), \quad (15.27')$$

или в цилиндрических координатах  $z = r \cos \theta$ ,  $R = r \sin \theta$ :

$$\begin{aligned} z &= \rho \sin \gamma + \left(\frac{d\gamma}{d\rho}\right)^{-1} \cos \gamma \equiv z_K(\rho), \\ R &= -\rho \cos \gamma + \left(\frac{d\gamma}{d\rho}\right)^{-1} \sin \gamma \equiv R_K(\rho). \end{aligned} \quad (15.27'')$$

Каустика (15.27) существует только при условиях  $d\gamma/d\rho > 0$  и  $d\theta_b/d\rho < 0$  (при  $d\theta_b/d\rho > 0$  каустика располагается внутри неоднородности и определяется другими уравнениями). При  $d\theta_b/d\rho = 0$  она пересекает границу среды  $r = r_n$ , а при  $d\gamma/d\rho = 0$  асимптотически уходит на бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ). Условие образования точек заострения на каустике (15.27) имеет вид  $\gamma'' = \rho(\gamma')^3$ , где  $\gamma' \equiv \frac{d\gamma}{d\rho}$  и т. п. Примеры каустик (15.27) для различных законов  $n(r)$  приводятся в [45]: на каустиках могут

образовываться петли (сечение особенности типа ласточкина хвоста) и другие каустические особенности, которые деформируются при изменении положения источника и параметров закона  $n(r)$  (другие примеры<sup>1)</sup> см. в [218—222]). В заключение отметим, что различным волновым задачам в радиально-неоднородных средах посвящено значительное число работ (например, [41, 66, 116, 117, 146, 199, 206, 214, 215, 221—230] и др.); в частности, в [227—230, 434] проводилось сравнение результатов геометрикооптического метода и других асимптотических методов с результатами численного решения задачи. Ниже в § 18 рассмотрены задачи рассеяния волн на локализованных радиально-неоднородных образованиях.

## § 16. Клиновидно-слоистые и другие неоднородные среды

1. **Эйконал и лучи в клиновидно-слоистой среде.** Геометрическая оптика клиновидно-слоистой среды, в которой показатель преломления  $n$  является функцией азимутального угла  $\varphi$ , рассмотрена в [48]. В клиновидно-слоистой модели среды с  $n = n(\varphi)$  линии постоянных значений показателя преломления наклонены друг по отношению к другу, что делает ее полезной для аппроксимации сред со сложной структурой, в частности, для учета горизонтальных градиентов в слоистых средах. Разумеется, окрестность вершины клина  $r \ll \left. \frac{1}{k_0 n^2} \left| \frac{dn}{d\varphi} \right| \right|$ , где величина  $|\nabla n|$  оказывается большой, должна быть исключена из рассмотрения, ибо здесь приближение геометрической оптики становится несправедливым.

Особенность клиновидно-слоистой среды связана с тем, что уравнение эйконала при  $n = n(\varphi)$  может быть решено специальным (не аддитивным, а *мультипликативным*) методом разделения переменных, между тем как в исходном волновом уравнении (1.1) переменные не разделяются. Рассмотрим для простоты решение двумерного уравнения эйконала:

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 = n^2(\varphi). \quad (16.1)$$

Подстановка в (16.1)  $\psi(r, \varphi) = rn(\varphi) \sin \theta(\varphi)$  дает следующий закон изменения угла  $\theta$  (*закон преломления*):

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 1 - \frac{1}{n} \frac{dn}{d\varphi} \operatorname{tg} \theta. \quad (16.2)$$

<sup>1)</sup> Определение каустик представляет интерес, например, для оценки эффектов поносферной фокусировки, фокусировок при радиопросвечивании атмосферы планет, солнечной короны, в различных задачах рассеяния и т. п. (см. § 18, а также [195, 196, 216, 219—223]).

Геометрический смысл угла  $\theta$  следует из выражения для импульса  $\mathbf{p} = \nabla\psi$  в полярных координатах:  $\tilde{p}_\tau = n \sin \theta$ ,  $\tilde{p}_\varphi = n \cos \theta$ , т. е. угол преломления  $\theta$  образован вектором  $\mathbf{p}$ , касательным к лучу, и нормалью  $\mathbf{e}_\varphi$  к слою  $n = \text{const}$ :  $\cos \theta = \frac{1}{n} \mathbf{p} \mathbf{e}_\varphi = l \mathbf{e}_\varphi$ , при этом  $\theta < \pi/2$  — на восходящей ветви луча ( $\tilde{p}_\varphi > 0$ ) и  $\theta > \pi/2$  — на нисходящей ветви ( $\tilde{p}_\varphi < 0$ ) (рис. 16.1, а). Обе ветви сопрягаются в точке поворота луча, где  $\tilde{p}_\varphi = 0$ , а  $\theta = \pi/2$ . Закон преломления (16.2) легко выводится также при помощи закона Снеллиуса, примененного к системе бесконечно тонких однородных клиновидных призм (рис. 16.1, б):  $n \sin \theta = (n + \Delta n) \sin \theta'$ , но  $\theta' = \theta + \Delta\theta - \Delta\varphi$ , откуда  $\sin \theta \Delta n = n \cos \theta (\Delta\varphi - \Delta\theta)$ , что после предельного перехода  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  совпадает с (16.2).

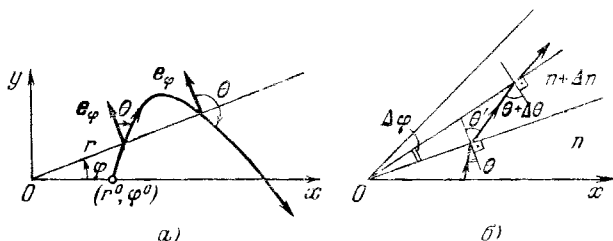


Рис. 16.1.

Дифференциальные уравнения лучей (2.17) в клиновидно-слоистой среде с  $n = n(\varphi)$  имеют вид ( $\theta = \pi/2 - \alpha$ )

$$\frac{dr}{d\tau} = n \sin \theta, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{r} n \cos \theta, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{r} \left[ n \cos \theta - \frac{dn}{d\varphi} \sin \theta \right]. \quad (16.3)$$

Если первое и третье уравнения в (16.3) разделить на  $d\varphi/d\tau$ , то снова приходим к закону преломления (16.2) и, кроме того, получаем уравнение  $dr/d\varphi = r \operatorname{tg} \theta$ , которое интегрируется в квадратурах<sup>1)</sup>:

$$r = r^0 \exp \left[ \int_{\varphi^0}^{\varphi} \operatorname{tg} \theta(\varphi) d\varphi \right]. \quad (16.4)$$

Здесь  $\theta(\varphi)$  — решение уравнения (16.2), удовлетворяющее граничному условию  $\theta = \theta^0$  при  $\varphi = \varphi^0$ , а  $r^0$ ,  $\varphi^0$  — координаты начальной точки луча. Из закона преломления (16.2) следует, что траектории лучей в клиновидно-слоистой среде являются *несим-*

<sup>1)</sup> Это уравнение можно записать и независимо от (16.3), как уравнение, определяющее наклон касательной к лучу в полярной системе координат,



метричными кривыми, в чем проявляется влияние горизонтального градиента  $n$ .

Для эйконала в клиновидно-слоистой среде имеем

$$\psi = \psi^0 + \int_0^{\tau} n^2 d\tau = \psi^0 + \int_{\varphi^0}^{\varphi} n^2 \frac{d\tau}{d\varphi} d\varphi = \psi^0 + \int_{\varphi^0}^{\varphi} \frac{rn}{\cos \theta} d\varphi. \quad (16.5')$$

С учетом формулы  $rn = \cos \theta \frac{d}{d\varphi}(rn \sin \theta)$ , которая легко проверяется с помощью (16.2) и (16.4), из (16.5') находим

$$\psi = \psi^0 + rn \sin \theta - r^0 n^0 \sin \theta^0, \quad (16.5'')$$

что, очевидно, совпадает с результатом решения уравнения эйконала (16.1) методом мультипликативного разделения переменных.

**2. Амплитуда. Поле плоской волны.** Вычисляя якобиан  $\mathcal{D}(\tau) = r \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(\xi, \tau)}$  с помощью уравнений лучей (16.3) и (16.4), нетрудно найти

$$\mathcal{D}(\tau) = \tilde{p}_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} r(\varphi, \xi) = n \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} r(\varphi, \xi), \quad (16.6)$$

где  $r = r(\varphi, \xi)$  — уравнение семейства лучей (16.4), а  $\xi$  — лучевая координата, нумерующая лучи. Отсюда, в соответствии с общей формулой (3.9), определяем амплитуду произвольной волны в клиновидно-слоистой среде:

$$A = A^0 \left[ \frac{\mathcal{D}(\tau)}{\mathcal{D}(\tau^0)} \right]^{1/2} = A^0 \left\{ \frac{n^0 \cos \theta^0}{n \cos \theta} \frac{\partial r}{\partial \xi} \bigg|_{\varphi^0} \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^{-1} \right\}^{1/2}, \quad (16.7)$$

где через  $\frac{\partial r}{\partial \xi} \bigg|_{\varphi^0}$  обозначено значение  $\frac{\partial r}{\partial \xi}$  при  $\varphi = \varphi^0$ .

Пусть начальное поле  $u^0 = A^0 \exp(ik_0 \psi^0)$  задано на прямой  $\varphi = \varphi^0 = \text{const}$ , причем  $\psi^0 = r^0 n^0 \sin \theta^0$ ,  $\theta^0 = \text{const}$ ,  $A^0 = \text{const}$  (аналогично п. 2 § 14 такую волну условно будем называть плоской). В силу постоянства  $\theta^0$  лучи (16.4) представляют собой параллельные кривые (рис. 16.2, а), при этом  $r^0 = \xi$  и  $\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{r}{r^0}$ ,

$\frac{\partial r}{\partial \xi} \bigg|_{\varphi^0} = 1$ , так что, согласно (16.7) и (16.5''),

$$u(r, \varphi) = A^0 \left( \frac{r^0 n^0 |\cos \theta^0|}{rn |\cos \theta|} \right)^{1/2} \exp \left( ik_0 rn \sin \theta - i \frac{\pi}{2} q \right), \quad (16.8)$$

где  $q = \frac{1}{2} [1 - \text{sgn}(\cos \theta \cos \theta^0)]$ , а  $\theta = \theta(\varphi)$  — решение уравнения (16.2) с граничным условием  $\theta = \theta^0$  при  $\varphi = \varphi^0$ . Каустикой плоской волны является плоскость  $\varphi = \text{const} = \varphi_k$ , на которой  $\theta = \pi/2$ , т. е. каустика совпадает с геометрическим местом точек

поворота лучей (16.4). Координата каустики  $\varphi_K$  определяется из (16.2) уравнением  $\theta(\varphi_K) = \pi/2$ .

**3. Поле линейного источника.** В случае источника, расположенного в точке  $r^0$ ,  $\varphi^0$  (двумерная задача), в качестве лучевой координаты  $\xi$  выберем угол выхода луча  $\theta^0$  (рис. 16.2, б). Тогда, согласно (16.6),  $\mathcal{D}(\tau) = n \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta^0} r(\varphi, \theta^0)$ . Для определения

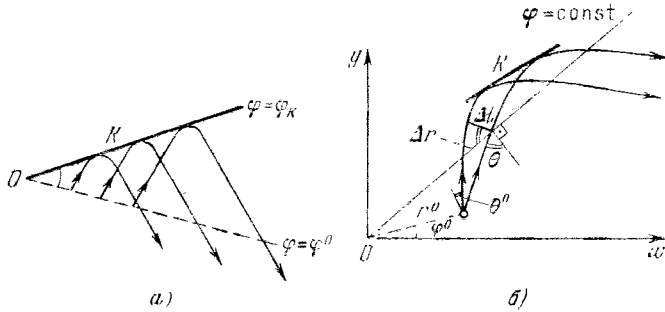


Рис. 16.2.

амплитуды поля по формуле (3.26') следует учесть, что в двумерной задаче элемент телесного угла  $d\Omega$  сводится к  $d\theta^0$ :

$$A = B^0 \left( \frac{n^0 d\Omega}{nda} \right)^{1/2} = B^0 \left[ \frac{n^0}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2} = B^0 \left( \frac{n}{n^0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta^0} r(\varphi, \theta^0) \right)^{-1/2}, \quad (16.9')$$

где  $n^0 \equiv n(\varphi^0)$ . В результате

$$u = B^0 \left\{ \frac{n}{n^0} \left| \cos \theta \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right| \right\}^{-1/2} \exp \left[ ik_0 (rn \sin \theta - r^0 n^0 \sin \theta^0) - \frac{i\pi}{2} q \right], \quad (16.9'')$$

где величина  $q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{sgn} \left( \cos \theta \frac{\partial r}{\partial \theta^0} \right) \right]$  определяет дополнительный сдвиг фазы поля на каустике, которая задана уравнениями

$$r = r(\varphi, \theta^0), \quad \frac{\partial}{\partial \theta^0} r(\varphi, \theta^0) = 0. \quad (16.10)$$

Выражение  $r = r(\varphi, \theta^0)$  в (16.9) и (16.10) описывает семейство лучей (16.4), создаваемых источником. Отметим, что используемая в (16.9') формула для сечения лучевой трубки

$\times \frac{\partial r}{\partial \theta^0} d\theta^0$  имеет простой геометрический смысл, так как из рис. 16.2, б ясно, что  $\Delta l = \cos \theta \Delta r$ .

Особенности каустики (16.10) исследованы в работах [48, 66], где показано, что по форме она близка к каустике, возникающей, например, в линейном плоском слое (рис. 13.5). В качестве иллюстрации на рис. 16.3 показаны рассчитанные в [48] каустики, образующиеся при облучении линейным источником ограниченного клина с экспоненциальным законом изменения

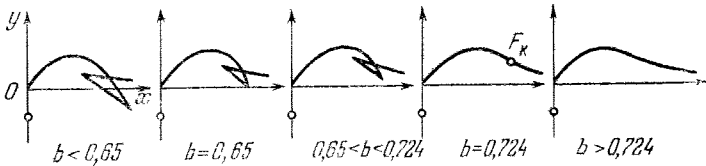


Рис. 16.3.

$n^2(\varphi) = e^{-b\varphi}$  ( $0 < \varphi < \varphi_m$ ,  $b > 0$ ), при этом  $n^2(\varphi) = 1$  при  $\varphi < 0$ , а источник расположен при  $\varphi^0 = 3\pi/2$  (рис. 16.4). Как видно из рис. 16.3, структура каустики определяется параметром среды  $b$  и не зависит от координаты источника  $r^0$  (от  $r^0$  зависит только положение особых точек на каустике [48]). Эта особенность эволюции каустики и, следовательно, лучевой картины связана с горизонтальными градиентами  $n$  в клиновидно-слоистой среде [48].

#### 4. Уравнения лучей в двумерно-неоднородной среде специального вида.

Различные модели двумерно- и трехмерно-неоднородных сред, допускающие разделение переменных в уравнении эйконала, обсуждались в § 8. Примером такой среды, допускающей разделение переменных в сферической системе координат, является среда, квадрат показателя преломления которой изменяется по закону

$$n^2(r, \theta) = \varepsilon_1(r) + \frac{1}{r^2} \varepsilon_2(\theta). \quad (16.11)$$

Такая модель представляет интерес в связи с задачами распространения волн в неоднородных плазменных образованиях [111—113, 199], в сферической ионосфере с горизонтальными градиентами [106—108], в широконаправленных неоднородных ливневых антеннах [217] и др.

Согласно § 8, компоненты импульса  $\mathbf{p} = \nabla\psi$  в среде с показателем преломления (16.11) равны ( $\alpha_2 \equiv \beta^2$ )

$$\tilde{p}_r = \pm \frac{1}{r} \sqrt{r^2 \varepsilon_1(r) - \alpha_1}, \quad \tilde{p}_\theta = \pm \frac{1}{r \sin \theta} q(\theta), \quad \tilde{p}_\varphi = \frac{\beta}{r \sin \theta}, \quad (16.12)$$

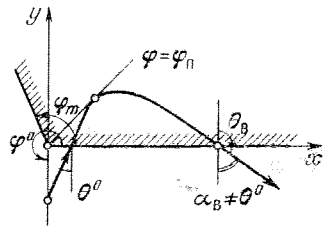


Рис. 16.4.

где  $q(\theta) = \sqrt{|\varepsilon_2(\theta) + \alpha_1| \sin^2 \theta - \beta^2}$ . Отсюда и из (2.44) для лучей получаем уравнения:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \sin \theta \frac{\tilde{p}_\theta}{\tilde{p}_\varphi} = \frac{1}{\beta} q(\theta) \sin \theta \operatorname{sgn}(\tilde{p}_\theta \tilde{p}_\varphi),$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r} \frac{\tilde{p}_\theta}{\tilde{p}_r} = \frac{q(\theta) \operatorname{sgn}(\tilde{p}_\theta \tilde{p}_r)}{r \sin \theta \sqrt{r^2 \varepsilon_1(r) - \alpha_1}}, \quad (16.13)$$

которые интегрируются в квадратурах. Особенностью траекторий (16.13) является наличие на них в общем случае точек поворота двух типов, соответствующих условиям  $\tilde{p}_\theta = 0$  и  $\tilde{p}_r = 0$  (рис. 16.5). В точках поворота происходит изменение направления луча и перемена знаков у  $\tilde{p}_\theta$  или  $\tilde{p}_r$  в выражениях (16.12) и (16.13), что позволяет выписать в интегральном виде уравнение луча (16.13) на различных его ветвях. Например, если для луча, изображенного на рис. 16.5,  $\tilde{p}_\theta^0 < 0$ , то уравнения его первой ветви с  $\tilde{p}_r < 0$  и  $\tilde{p}_\theta > 0$  имеют вид

$$\varphi = \varphi^0 + \int_{\theta^0}^{\theta} \frac{|\beta| d\theta}{q(\theta) \sin \theta}, \quad \int_r^{r^0} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 \varepsilon_1(r) - \alpha_1}} = \int_{\theta^0}^{\theta} \frac{\sin \theta}{q(\theta)} d\theta, \quad (16.14)$$

где  $r^0$ ,  $\theta^0$ ,  $\varphi^0$  — координаты начальной точки луча. Реализация той или иной геометрии луча зависит от конкретной физической постановки задачи.

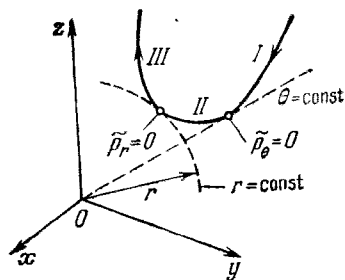


Рис. 16.5.

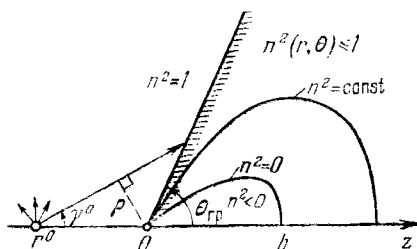


Рис. 16.6.

**5. Поле точечного источника (осесимметричная задача).** Пусть источник, расположенный в свободном пространстве на оси  $z$  (при  $r = r^0$ ,  $\theta^0 = \pi$ ), облучает *двумерно-неоднородный конус*, граница раздела которого задается углом  $\theta_{гп} < \pi/2$ , так что при  $\theta \leq \theta_{гп}$  квадрат показателя преломления описывается следующей формулой:

$$n^2(r, \theta) = 1 - \frac{b^2}{r^2} f(\theta), \quad b = \text{const} > 0, \quad (16.15)$$

где  $f(\theta) \equiv 0$  при  $\theta \geq \theta_{\text{гр}}$ . Кроме того, будем считать, что  $f(0) = 1$ ,  $f'_0(0) = 0$ . Линии уровня  $n^2 = \text{const}$  схематично показаны на рис. 16.6. Такого типа неоднородности используются как модели плазменной среды (см., например, [111—113]), при этом параметр  $b$  определяет продольный размер области по уровню  $n^2 = 0$  (рис. 16.6).

Согласно (16.12), для рассматриваемой модели среды (16.15) при  $\alpha_1 \equiv \rho^2$  имеем

$$\tilde{p}_r = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \rho^2}, \quad \tilde{p}_\theta = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}, \quad \tilde{p}_\varphi = 0, \quad (16.16)$$

и уравнения лучей (16.13) принимают вид<sup>1)</sup>:

$$r = \rho \sec \left\{ \arccos \frac{\rho}{r^0} - \theta_{\text{гр}} + \left( \int_{\theta_{\text{п}}}^{\theta_{\text{гр}}} \mp \int_{\theta_{\text{п}}}^{\theta} \right) \frac{\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \right\} \equiv r(\theta, \gamma^0), \quad (16.17)$$

где  $\rho = r^0 \sin \gamma^0$  — прицельный параметр луча (кратчайшее расстояние от центра 0 до луча, см. рис. 16.6),  $\gamma^0$  — угол выхода луча из источника:  $\cos \gamma^0 = \mathbf{p}^0 \mathbf{e}_z = l^0 e_z$ ,  $\theta_{\text{п}}$  — координата точки поворота, где  $\tilde{p}_\theta = 0$  и  $b^2 f(\theta_{\text{п}}) = \rho^2$ . Как и в §§ 13—15, условимся, что, если точка поворота на луче отсутствует, в (16.17) следует взять верхний знак и заметить разность двух интегралов на один в пределах от  $\theta$  до  $\theta_{\text{гр}}$ . Очевидно, лучи (16.17) являются несимметричными кривыми, лежащими в плоскости  $\varphi = \text{const}$ .

Для вычисления амплитуды поля точечного источника следует определить якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$ , для которого из (16.17), аналогично (15.18), получаем

$$\mathcal{D}(\tau) = r \sin \theta \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(\gamma^0, \tau)} = r \sin \theta \tilde{p}_\theta \frac{\partial}{\partial \gamma^0} r(\theta, \gamma^0), \quad (16.18)$$

где  $\tilde{p}_\theta$  дается выражением (16.16). Тогда в соответствии с формулами (3.26'), (14.9), подобно (14.12) и (15.19), находим

$$A = B^0 \left[ \frac{\sin \gamma^0}{\mathcal{D}(\tau)} \right]^{1/2} = \frac{B^0}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \left\{ \frac{\sin \gamma^0}{\sin \theta \left| \frac{\partial}{\partial \gamma^0} r(\theta, \gamma^0) \right|} \right\}^{1/2} \exp \left( -\frac{i\pi}{2} q \right), \quad (16.19)$$

где  $q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{sgn} \left( \tilde{p}_\theta \frac{\partial r}{\partial \gamma^0} \right) \right]$ . Геометрический смысл формул (16.18) и (16.19) ясен из рис. 16.7, а, поскольку сечение лучевой трубки

<sup>1)</sup> Знаки и константы в уравнении лучей (16.17) выбраны из условия непрерывности составляющих (16.16) и составляющих импульса падающего луча  $\mathbf{p}^0 = \{\tilde{p}_r^0, \tilde{p}_\theta^0, \tilde{p}_\varphi^0\}$  на границе среды  $\theta = \theta_{\text{гр}}$ .

равно  $\Delta a = r \sin \theta \Delta \varphi^0 \Delta l$ , где  $\Delta l = \Delta r \frac{1}{n} (\nabla \psi \mathbf{e}_\theta) = \frac{1}{n} \tilde{\rho}_0 \Delta r$ , а  $\mathcal{D}(\tau) = = n da / d\varphi^0 d\gamma^0$ .

Нетрудно показать, что эйконал (8.32) в рассматриваемом случае точечного источника равен ( $\alpha_1 \equiv \rho^2$ ,  $\alpha_2 \equiv 0$ ):

$$\psi = \left( \int_{\rho}^{r^0} + \int_{\rho}^r \right) \sqrt{1 - \rho^2/r^2} dr + \rho (\pi - \theta_{\text{ГР}}) + \\ + \left( \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta_{\text{ГР}}} \mp \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta} \right) \sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)} d\theta \quad (16.20)$$

(разумеется, интегралы по  $r$  могут быть вычислены явно).

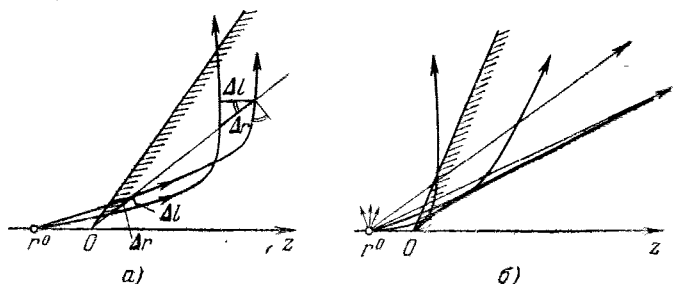


Рис. 16.7.

Семейство лучей (16.17) для  $\partial n / \partial \theta > 0$  схематично показано на рис. 16.7, б): одни лучи после рефракции пересекают границу конуса  $\theta = \theta_{\text{ГР}}$ , а другие асимптотически (так как  $n^2 \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ ) уходят на бесконечность внутри конуса. Каустика этого семейства лучей, согласно (16.18), определяется уравнениями

$$r = r(\theta, \gamma^0), \quad \frac{\partial}{\partial \gamma^0} r(\theta, \gamma^0) = 0 \quad (16.21)$$

и имеет ветвь, асимптотически уходящую на бесконечность (рис. 16.7, б). Лучи могут касаться каустики как до, так и после точки поворота. Конкретный анализ формы каустики (16.21) облегчается тем, что интегралы в (16.17) вычисляются в аналитической форме для широкого класса функций  $f(\theta)$ . Отметим, что модельные среды типа (16.11) использовались для анализа лучевой картины в сферической ионосфере с горизонтальными градиентами [107], при этом, в отличие от (16.15), важную роль играет радиальная зависимость  $\epsilon_1(r)$ .

**6. Падение плоской волны на двумерно-неоднородную среду (16.11).** Если в формуле (16.17) положить  $r^0 \rightarrow \infty$ , то получим

уравнение лучей

$$r = \rho \sec \left\{ \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{ГР}} + \left( \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta_{\text{ГР}}} \mp \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta} \frac{\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \right) \right\} \equiv r(\theta, \rho), \quad (16.22)$$

которые описывают распространение плоской волны  $u^0 = A^0 \exp(ik_0 z)$ , набегающей вдоль оси  $z$  на неоднородный конус (16.15). Амплитуда и эйконал в этом случае равны

$$A = A^0 \left\{ \frac{\rho}{\sin \theta \left| \frac{\partial}{\partial \rho} r(\theta, \rho) \right|} \right\}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \exp \left( -\frac{i\pi}{2} q \right), \quad (16.23')$$

$$\psi = \rho \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{ГР}} \right) + \int_{\rho}^r \sqrt{1 - \rho^2/r^2} dr + \left( \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta_{\text{ГР}}} \mp \int_{\theta_{\text{П}}}^{\theta} \right) \sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)} d\theta, \quad (16.23'')$$

где  $q = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{sgn} \left( \tilde{p}_\theta \frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \right]$ .

Если плоская волна падает на неоднородный конус (16.15) со стороны положительных  $z$ , т. е.  $p^0 = -e_z$  (рис. 16.8), то в отличие от (16.22) на лучах образуются только точки поворота второго типа, в которых  $p_r = 0$ , при этом

$$\tilde{p}_r = \mp \frac{1}{r} \sqrt{r^2 - \alpha_1}, \quad \tilde{p}_\theta = \frac{1}{r} \sqrt{\alpha_1 - b^2 f(\theta)}. \quad (16.24)$$

Постоянная разделения  $\alpha_1$  определяется из условия сшивания  $\tilde{p}_\theta$  и  $\tilde{p}_\theta^0 = \sin \theta^0 = \rho/r^0$  ( $\rho$  — прицельный параметр луча, см. рис. 16.8) на достаточно больших расстояниях  $r = r^0$ , где среду (16.15) можно считать почти однородной.

В результате при  $r^0 \rightarrow \infty$  ( $\theta^0 \rightarrow 0$ ) с учетом предположения  $f(0) = 1$  находим  $\alpha_1 = b^2 + \rho^2 \equiv \kappa_0^2$ .

Семейство лучей (16.3) в этом случае описывается уравнением

$$r = \kappa_0 \text{cosec} \left[ \int_0^\theta \frac{\kappa_0 d\theta}{\sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)}} \right] \equiv r(\theta, \kappa_0). \quad (16.25)$$

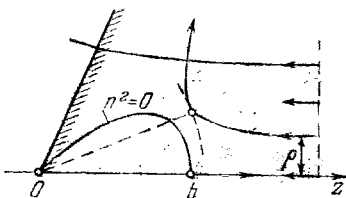


Рис. 16.8.

Мы не будем здесь подробно исследовать поле, связанное с этими лучами. Отметим лишь, что зеркально отраженный луч, очевидно, соответствует случаю  $\rho = 0$ ; в § 18 рассмотрены вопросы, связанные с определением поля в дальней зоне (см. также

[113]). С примерами исследования поля плоской волны, произвольно падающей на неоднородную среду (16.15), можно познакомиться, например, в [111, 112].

**7. Слабонеоднородные, квазислоистые и случайно-неоднородные среды.** Слабонеоднородной будем называть среду, проницаемость  $\varepsilon = n^2$  которой мало меняется в пределах рассматриваемой части пространства  $V$ : если  $\bar{\varepsilon} = \text{const}$  — среднее значение проницаемости в пределах  $V$ , то в слабонеоднородной среде отклонение  $v = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$  мало по сравнению с  $\bar{\varepsilon}$ :  $|v| \ll \bar{\varepsilon}$ . Геометрооптическое описание полей в слабонеоднородных средах<sup>1)</sup> естественно проводить при помощи теории возмущений (см. § 9). Теория возмущений используется, в частности, для расчета рефракции света и радиоволн в тропосфере Земли, где  $|v| \leq 10^{-2}$  [104, 245], рефракции УКВ- и более коротких радиоволн в ионосфере (см. [125, 245], а также краткий обзор наиболее существенных результатов в [127]).

Если средняя проницаемость  $\bar{\varepsilon}$  отвечает слоистой среде, то при  $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + v(\mathbf{r})$ ,  $|v| \ll \bar{\varepsilon}$ , мы имеем квазислоистую среду. Теория возмущений для лучей в квазислоистой среде построена в [129].

Наконец, если  $v(\mathbf{r})$  — случайная функция координат, то говорят о случайно-неоднородной среде. Теория возмущений для этого случая была предложена первоначально в [246] и [247]. Сейчас этому важному вопросу посвящена обширная литература (состояние проблемы изложено в [121—124]). Важно отметить, что многие результаты геометрической оптики сохраняют силу и в таких условиях, когда нельзя пренебречь дифракционными эффектами (в первую очередь это относится к расчетам фазовых флуктуаций волны и к расчетам функции когерентности второго порядка, характер поведения которой определяется в первую очередь фазовыми флуктуациями). Укажем еще, что ряд флуктуационных явлений, связанных с образованием или искажением каустик, допускает наглядное лучевое истолкование [50, 59, 124, 248].

## § 17. Геометрическая оптика волноводов и резонаторов

### 1. Особенности метода геометрической оптики для волноводов.

Различают волноводы с резкими границами, в которых волны удерживаются вследствие отражения от резких границ раздела сред (металлические или диэлектрические волноводы для СВЧ-радиоволн, акустические волноводы, оптические волокна), и ре-

<sup>1)</sup> Которые, разумеется, должны быть еще и плавнонеоднородными, т. е. должно выполняться неравенство  $\lambda|\nabla\varepsilon| = \lambda|\nabla v| \ll \bar{\varepsilon}$ .



*фракционные волноводы*, в которых действует рефракционный механизм удержания волн (к рефракционным принадлежат многие естественные волноводы — ионосферные волновые каналы для декаметровых радиоволн, тропосферные волноводы для УКВ- и СВЧ-радиоволн, подводные звуковые каналы в океане, а также изготавливаемые из стекла оптические волокна с поперечным градиентом показателя преломления типа «селфок»). Возможны и комбинированные механизмы удержания — с одной стороны рефракция, а с другой — резкая граница (примеры — волновод Земля — ионосфера, приповерхностные звуковые каналы в океане).

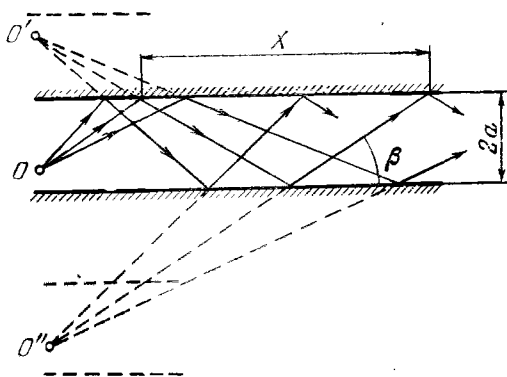


Рис. 17.1.

В волноводах любого типа лучи испытывают многократные отражения и поэтому образуют сложные лучевые картины с многочисленными каустиками. На рис. 17.1 показано семейство лучей, созданное точечным источником в двумерном волноводе, образованном двумя параллельными металлическими плоскостями. Внутри волновода каустики не образуются, по продолжению лучей пересекаются в мнимых фокальных точках, совпадающих с зеркальными изображениями источника в стенках волновода. Период (длина шага) луча  $X$  в волноводе зависит от его угла наклона  $\beta$  к оси  $x$ :

$$X = 4a \operatorname{ctg} \beta \quad (17.1)$$

( $2a$  — ширина волновода). Лучи, вышедшие из источника под разными углами, обгоняют друг друга и дают запутанную лучевую картину, при этом в данную точку приходит много (в случае точечного источника — бесконечно много) лучей. Изложение лучевого метода как для регулярных, так и для нерегулярных волноводов дано в [109].

В рефракционных волноводах точечный источник создает еще более сложную картину лучей с большим количеством пересечений и каустик. Здесь в полной мере проявляются фокусирующие (линзовые) свойства плавно-неоднородной среды. Пример поведения пучка лучей в рефракционном волноводе с  $n = n(z)$  показан на рис. 17.2, б для случая, когда точечный источник расположен на оси волновода (т. е. там, где коэффициент преломления максимален; профиль  $n(z)$  показан на рис. 17.2, а). Волноводный

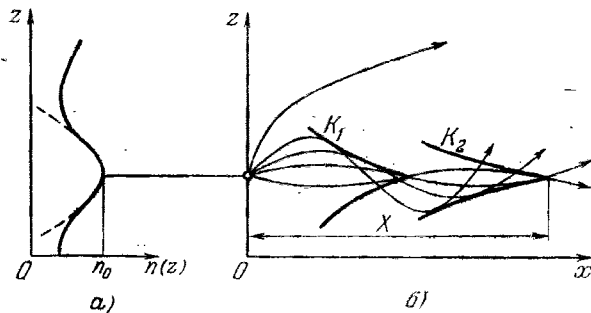


Рис. 17.2.

луч в плоско-слоистом волноводе с  $n = n(z)$  имеет бесконечное множество точек поворота, соответствующих двум уровням — нижнему  $\underline{z}$  и верхнему  $\bar{z}$ , в которых  $n(\underline{z}) = n(\bar{z}) = p_x^0$  (для плоской задачи  $p_y^0 = 0$ ). Шаг луча  $X$  в таком регулярном (т. е. однородном по  $x$ ) волноводе легко найти из уравнений лучей (13.4):

$$X = 2\underline{n} \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} [n^2(z) - \underline{n}^2]^{-1/2} dz, \quad (17.2)$$

где  $\underline{n} \equiv n(\underline{z}) = n(\bar{z}) \equiv \bar{n}$ .

Вблизи оси волновода высотный ход коэффициента преломления  $n(z)$  можно аппроксимировать параболой

$$n^2(z) \approx n_0^2 - z^2/b^2 \quad (17.3)$$

(штриховая кривая на рис. 17.2, а), при этом для прпосевых лучей из (17.2) имеем

$$X \approx 2\pi \underline{n} b, \quad \underline{n} = n_0 \sin \theta_0 \approx n_0 \quad (17.4)$$

( $\theta_0$  — угол падения, близкий к  $\pi/2$  для прпосевых лучей). Из (17.4) следует, что периоды прпосевых лучей близки друг к другу. В результате такие лучи периодически фокусируются на оси,

образуя систему каустических клювов [149] (жирные кривые на рис. 17.2, б). Возможны и такие профили  $n(z)$ , которые не удерживают все лучи. Один из таких лучей изображен на рис. 17.2, а.

Уравнения лучей в плоско-слоистом волноводе приведены, например, в [25, 49]; каустики, образующиеся в волноводе, определяются по-прежнему уравнениями из § 13. Многочисленные примеры лучевых и каустических картин в этом случае рассмотрены в [25, 49, 187] (см. также цитируемую там литературу). Геометрооптические формулы для определения амплитуды и фазы полей аналогичны формулам из § 14. На обороте обложки данной книги — на форзаце в качестве примера представлены результаты расчета фазовых фронтов в плоско-слоистом рефракционном волноводе [289]. Эти результаты иллюстрируют особенности геометрооптического поля, связанные с многолучевостью и образованием каустик.

На основе общих соотношений § 15 нетрудно также проанализировать свойства лучей, каустик и полей в регулярном (однородном по углам  $\theta$ ,  $\varphi$ ) сферически-слоистом волноводе с  $n = n(r)$ . Аналогично можно рассмотреть различные двумерно-неоднородные волноводы, допускающие разделение переменных в уравнении эйконала, например, в декартовых или сферических координатах (см. § 8). В случае волноводов с произвольной зависимостью  $n(r)$  для расчета лучей и полей необходимо прибегать к численным методам (см. § 20).

При использовании метода геометрической оптики для расчета полей в регулярных или нерегулярных волноводах приходится сталкиваться, по крайней мере, с двумя трудностями. Во-первых, сложность конфигурации лучей и каустик затрудняет расчет полного волнового поля в точке наблюдения, равному сумме отдельных (парциальных) лучевых полей. Во-вторых, с удалением точки наблюдения от источника резко увеличивается область, завятая прикаустическими зонами (каустическими объемами — см. §§ 4 и 10), так что область применимости геометрической оптики сужается. Вследствие этого на больших расстояниях от источника вместо лучевого метода предпочтительнее применять метод нормальных волн (см., например, [206, 25, 49, 187], а также п. 2).

**2. Лучевое описание нормальных волн в регулярных волноводах.** Как известно, любая волна в регулярном (однородном по  $x$ ) волноводе может быть представлена в виде суммы *собственных, нормальных* волн (или просто *мод*). В частности, лучевое поле тоже может быть разложено по нормальным волнам волновода. Общие вопросы о соотношении двух способов описания волнового поля — при помощи лучей и при помощи нормальных волн, рассмотрены П. Е. Краснушкиным [206, 473], Х. Бреммером

[249] и К. Баддепом [250]. Здесь мы изучим частный вопрос о лучевом описании отдельных нормальных волн [25, 49, 265].

Рассмотрим двумерный волновод, ограниченный стенками  $z = \pm a$  и заполненный однородной средой с коэффициентом преломления  $n = 1$ . Если волновое поле  $u(x, z)$  имеет нулевое значение на границах,  $u(x, \pm a) = 0$ , то собственные волны описываются функциями

$$u_m(x, z) = e^{ih_m x} \sin [\kappa_m (z + a)], \quad (17.5)$$

где  $\kappa_m = m\pi/2a$  — поперечное, а  $h_m = \sqrt{k_0^2 - \kappa_m^2}$  — продольное волновое число (постоянная распространения).

Волновое поле (17.5) может быть представлено в виде суммы двух плоских волн, называемых *бриллюэновскими волнами*:

$$u_m(x, z) = \frac{1}{2i} \{ \exp [ih_m x + i\kappa_m (z + a)] - \exp [ih_m x - i\kappa_m (z + a)] \}. \quad (17.6)$$

Угол  $\beta$  между осью  $x$  и волновыми векторами бриллюэновских волн  $k_{\pm}^{(m)} = \{ \pm \kappa_m, h_m \}$  принимает дискретный набор значений:

$$\sin \beta_m = \frac{\kappa_m}{k_0} = \frac{\pi m}{2k_0 a}. \quad (17.7)$$

Фазовый фронт и лучи, отвечающие одной из бриллюэновских волн, показаны на рис. 17.3, а. При отражении от стенок одна из бриллюэновских волн порождает другую.

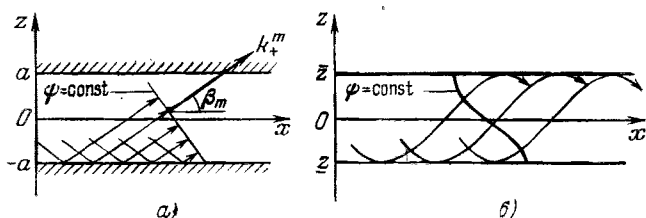


Рис. 17.3.

Подобную же интерпретацию допускают волны вида  $u(x, z) = U(z)e^{ihx}$ , распространяющиеся в рефракционных волноводах с  $n = n(z)$ . Предэкспоненциальный множитель  $U(z)$  удовлетворяет уравнению

$$U''(z) + k_0^2 \left[ n^2(z) - \frac{h^2}{k_0^2} \right] U(z) = 0 \quad (17.8)$$

и может быть найден методом геометрической оптики (методом

ВКБ). Представим  $U(z)$  как сумму двух встречных бегущих волн:

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[ A_1 \exp \left( ik_0 \int_{\underline{z}}^z \gamma dz \right) + A_2 \exp \left( ik_0 \int_z^{\bar{z}} \gamma dz \right) \right], \quad (17.9)$$

где  $\gamma(z) = |p_z| = \sqrt{n^2(z) - (p_x^0)^2}$ ,  $p_x^0 = h/k_0$ , а точки поворота  $\underline{z}$  и  $\bar{z}$  определяются из условия  $\gamma(z) = |p_z(z)| = 0$ .

Рассматривая волну, бегущую вниз (второе слагаемое в (17.9)), как результат отражения волны, бегущей вверх, мы должны положить, в соответствии с результатами § 14,

$$A_2 = A_1 \exp \left( ik_0 \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \gamma dz - i \frac{\pi}{2} \right), \quad (17.10')$$

где  $(-\pi/2)$  — каустический сдвиг фазы. Аналогичные рассуждения для нижней точки поворота приводят к соотношению

$$A_1 = A_2 \exp \left( ik_0 \int_z^{\bar{z}} \gamma dz - i \frac{\pi}{2} \right). \quad (17.10'')$$

Нетривиальное решение системы уравнений (17.10) существует при условии

$$2k_0 \int_{\underline{z}}^{\bar{z}} \gamma(z) dz - \pi = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (17.11)$$

которое означает, что за полный цикл «вверх — вниз» изменения фазы должны быть кратны  $2\pi$ , как в правилах квантования Бора — Зоммерфельда <sup>1)</sup>.

Условие (17.11) служит уравнением для определения постоянной распространения  $h_m$  и позволяет представить поле  $m$ -й моды в виде

$$u_m(x, z) = U_m(z) e^{ih_m x} = B \gamma^{-1/2} \cos \left( k_0 \int_{\underline{z}}^z \gamma dz - \frac{\pi}{4} \right) e^{ih_m x}, \quad (17.12)$$

где  $B = 2A_1 \exp \left( i \frac{\pi}{4} \right)$ . Подобно (17.5), это поле тоже можно

<sup>1)</sup> В металлическом волноводе аналогом (17.11) служит соотношение  $4\kappa_m a = 2\pi m$ . В обоих случаях  $m$  — это число осцилляций поля в поперечном сечении волновода.

рассматривать как сумму бриллюэновских волн:

$$u_m(x, z) = \frac{1}{2} B \gamma^{-1/2} \left[ \exp \left( i h_m x + i k_0 \int_{\underline{z}}^z \gamma dz \right) + \right. \\ \left. + \exp \left( i h_m x - i k_0 \int_{\underline{z}}^z \gamma dz \right) \right], \quad (17.13)$$

хотя теперь эти волны не являются плоскими. Фазовые фронты первой из волн (17.13) и соответствующее семейство лучей показаны на рис. 17.3, б. На каустиках  $z = \underline{z}$  и  $z = \bar{z}$  поле (17.13) обращается в бесконечность.

**3. Адиабатические моды плавно-нерегулярных волноводов.** В случае симметричного двумерного металлического волновода (уравнения стенок  $z = \pm a(x)$ ) интуитивно ясно, что при плавном изменении ширины волновода  $a(x)$ , когда

$$\frac{da}{dx} \sim \frac{a}{L} \ll 1 \quad (17.14)$$

( $L$  — масштаб изменения  $a(x)$ ), можно ожидать сохранения структуры поля в поперечном сечении, в частности, сохранения числа осцилляций  $m$  в поперечном сечении. В силу (17.7) это приводит к условию сохранения *адиабатического инварианта*<sup>1)</sup> задачи

$$I_m = 2a(x) \sin \beta_m(x) = \text{const} = \lambda m / k_0. \quad (17.15)$$

Это условие можно вывести непосредственно из уравнений лучей в волноводе, считая шаг луча  $X$  малым по сравнению с  $L$  [251, 252].

Из условия  $I_m = \text{const}$  можно найти зависящее от  $x$  продольное волновое число  $h_m(x) = k_0 \cos \beta_m(x)$ . Мы приходим тогда к *адиабатическим модам* плавно нерегулярного волновода

$$u_m(x) = A_m(x) \sin [\kappa_m(z + a)] \exp \left\{ i \int_{x^0}^x h_m(x) dx \right\}. \quad (17.16)$$

Изменение амплитудного фактора  $A(x)$  можно определить из условия сохранения потока энергии через сечение волновода:

$$\frac{1}{ik_0} \int_{-a(x)}^{a(x)} \text{Im} \left( u_m^* \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) dz = \frac{h_m(x)}{k_0} A_m^2(x) \frac{a(x)}{2} = \text{const} = \frac{k_m^0 (A_m^0)^2 a^0}{2k_0},$$

<sup>1)</sup> Напомним, что адиабатическими инвариантами называют физические характеристики колебательных или волновых процессов, остающиеся постоянными при адиабатическом (т. е. медленном по сравнению с характерными периодами процессов) изменении параметров [4, 424].

где  $h_m^0 \equiv h_m(x^0)$ ,  $a^0 \equiv a(x^0)$ ,  $A_m^0 \equiv A_m(x^0)$  — начальные значения параметров. Таким образом,  $A_m = A_m^0 (h_m^0 a^0 / h_m a)^{1/2}$ .

В силу (17.15) поле (17.16) удовлетворяет граничному условию  $u_m(x, \pm a(x)) = 0$ . Формулу (17.16) можно еще уточнить, вычислив поправки к фазе, связанные с искривлением фазового фронта в нерегулярных участках волновода [251, 257].

Плавная нерегулярность рефракционного волновода подразумевает выполнение неравенства  $\left| \frac{\partial n}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial n}{\partial z} \right|$ . Адиабатическим инвариантом в этом случае, по аналогии с (17.15) и (17.11), служит величина

$$I = \int_z^{\bar{z}} \sqrt{n^2(x, z) - \bar{n}^2(x)} dz = \text{const} = \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{k_0}. \quad (17.17)$$

Соответствующие адиабатические моды анализируются в работах [69, 191, 253].

**4. Ионосферные волновые каналы. Метод адиабатического инварианта.** Рассмотрим некоторые особенности волноводов, образуемых ионосферой Земли. Характерный вид высотного профиля модифицированной проницаемости  $\epsilon_m(z) = n_m^2(z) \approx \epsilon(z) (1 + 2z/R)$  показан на рис. 17.4, а для частоты, несколько меньшей критического значения. Максимумы  $z_F$  и  $z_E$  проницаемости  $\epsilon_m(z)$  отвечают максимумам электронной концентрации ионосферных слоев *E* и *F*. Во впадине между слоями *E* и *F* лежит межслойный *EF*-канал (1). Ниже слоя *E* располагается подслойный *E*-волновод (2), который существует только благодаря искривлению ионосферы: при  $R \rightarrow \infty$  этот канал исчезает. Кроме подслойного *E*-волновода, при определенных условиях может существовать и подслойный *F*-волновод (3). Все три типа волноводных лучей показаны на рис. 17.5. Лучи, захваченные в подслойный *E*-волновод (2), за их характерный вид называют *рикошетирующими* (само рикошетирующее распространение родственно явлению шепчущей галереи, см. [206], а также ниже п. 8).

Поведение всей совокупности лучей в системе ионосферных волноводов удобно изображать на фазовой плоскости  $\{z, p_z = -dz/dt\}$  (см. работу [218]). Интегральные кривые на этой плоскости, удовлетворяющие уравнению  $p_z^2 - \epsilon_m(z) = \text{const} = -(p_x^0)^2$ , показаны на рис. 17.4, б. Области 1, 2 и 3 на этом рисунке отвечают каналам 1, 2 и 3 на рис. 17.4, а. В области 4 находятся «скачковые» лучи, которые после отражения от слоя *F* возвращаются на Землю. Лучи из области 5 навсегда покидают Землю, тогда как лучи из области 6 никогда не снижаются ниже максимума слоя *F*. Область 7 для лучей недоступна (там

( $p_x^0)^2 < 0$ ). Нормальным волнам отвечают семейства лучей, удовлетворяющие условию квантования (17.11)<sup>1)</sup>.

В случае горизонтально-неоднородной ионосферы, когда  $\epsilon_m = \epsilon_m(x, z)$ , возможен переход лучей из одного канала в другой, захват скачковых лучей в волновые каналы или выбрасывание лучей из каналов. Эффективный метод анализа волноводного распространения в горизонтально-неоднородной ионосфере — так называемый *метод адиабатического инварианта* — предложен в [254].

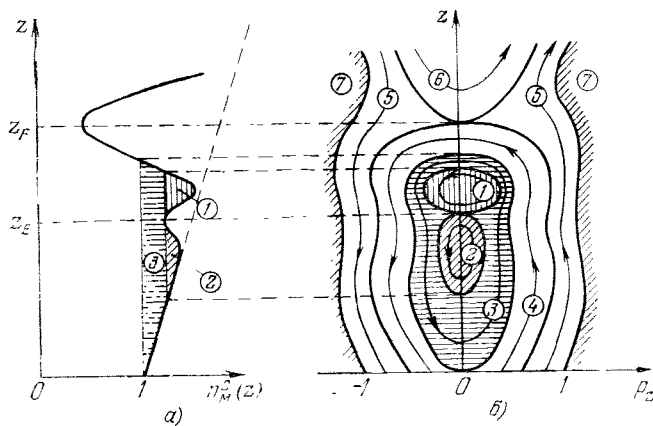


Рис. 17.4.

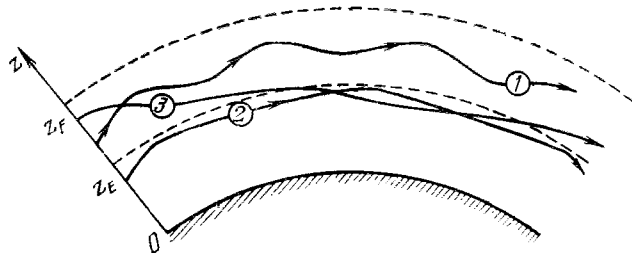


Рис. 17.5.

Этот метод, базирующийся на выполнении условия (17.17), позволяет оценивать границы волнового канала  $\underline{z}(x)$  и  $\bar{z}(x)$  и су-

<sup>1)</sup> Геометрический смысл этого условия заключается в том, что площадь  $S = 2 \int |p_z| dz = \oint p_z dz$ , ограниченная замкнутой фазовой траекторией, равна  $(m + \frac{1}{2}) \lambda_0$ .



доть о возможности или невозможности захвата или удержания данной моды (или группы мод) в нерегулярном волноводе, не прибегая к расчетам лучей. Это придает методу большую гибкость и универсальность. При помощи этого метода удается исследовать глобальные характеристики дальнего распространения радиоволн и рассчитывать дальние радиотрассы. Подробное изложение метода дано в монографии [191].

**5. Подводные звуковые каналы. Некогерентное сложение лучевых полей.** Образование звуковых каналов в океане связано с непостоянством скорости звука  $c(z)$  по глубине. Различают глубинные и приповерхностные звуковые каналы. Профили скорости звука и поведение лучей в звуковых каналах различных типов описаны в [25, 49].

В подводных звуковых каналах особенно сильно проявляется многолучевой характер волноводного распространения. Из-за того, что с увеличением расстояния от источника в точку наблюдения приходит все больше и больше лучей, расчеты волнового поля сильно усложняются. В этих условиях иногда пренебрегают интерференцией лучевых полей и производят их некогерентное сложение, т. е. сложение интенсивностей [49, 266]. Такой способ определения суммарной интенсивности работает тем лучше, чем большее число лучей  $N$  приходит в точку наблюдения: относительная погрешность определения поля по методу некогерентного сложения убывает примерно как  $N^{-1/2}$ .

**6. Волоконная оптика.** В оптических волокнах лучи в общем случае описывают винтообразные траектории — либо с изломами на резких границах, либо непрерывные — в так называемых градиентных волокнах, т. е. в волокнах с непрерывным профилем показателя преломления, удерживающим лучи возле оси. При наличии всякого рода нерегулярностей (изгибы оси, неоднородности материала) лучи могут покидать пределы волокна, что приводит к потерям световой энергии. Лучевая теория этих явлений изложена, например, в [255].

**7. Трансформация мод в плавно-нерегулярных волноводах.** Адиабатические моды, о которых говорилось в п. 3, не описывают трансформацию из одной моды в другую, так как до и после прохождения нерегулярного участка они совпадают с точным одноמודовым решением.

В последнее время предложено несколько методов описания межмодовой трансформации волн (обзор этих методов дан в [33, 256, 257]). Чисто геометрикооптический подход к этой проблеме, разработанный в [252, 258, 260], состоит в том, чтобы выявить искажение фазового фронта бриллюэновской волны в нерегулярном участке (рис. 17.6), а затем разложить лучевое поле  $A \exp(ik_0 \psi)$  этой волны по модам регулярного волновода. Из этого разложения и находятся коэффициенты трансформации  $K_{m \rightarrow m+p}$

первичной  $m$ -й моды в  $(m + p)$ -ю моду. Результаты расчетов по методу геометрической оптики неплохо согласуются с результатами, полученными другими методами, в частности, методом поперечных сечений [33, 256, 257, 261].

Не имея здесь возможности изложить детали вычислений и конкретные результаты лучевого подхода, остановимся лишь на некоторых качественных следствиях лучевой теории, свидетельствующих об эвристической ценности геометрической оптики в задаче о межмодовой трансформации волн.

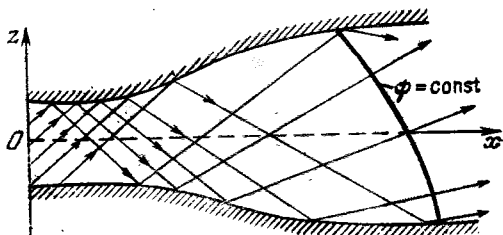


Рис. 17.6.

Во-первых, лучевая теория предсказала и описала эффект раскачки лучей [33, 258]. На рис. 17.7 раскачка лучей проявляется в волнообразных отклонениях углов наклона лучей  $\beta = \beta(x)$  от адиабатической кривой  $\beta_{ад}(x) = \arcsin [\pi m / 2k_0 a(x)]$  (рисунок построен для расширяющегося волновода). Раскачка лучей связана с тем, что в нерегулярном участке разные лучи отражаются от точек с неодинаковыми наклонами стенок, тогда как волнообразный характер зависимости  $\beta = \beta(x)$  обусловлен неодинаковостью

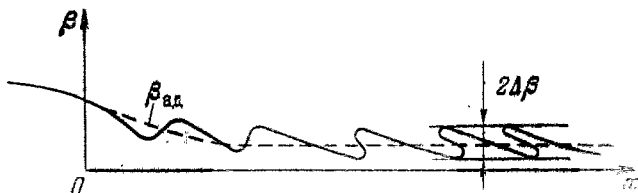


Рис. 17.7.

длины шага  $X$  для разных лучей: при одинаковом числе шагов пологие лучи уходят на большее расстояние, чем лучи, круто падающие на стенки. Неоднозначность кривой  $\beta(x)$  отражает многолучевой характер распространения. В рефракционном волноводе раскачка наклонов лучей приводит также к раскачке ширины волнового канала [259].

Во-вторых, лучевой подход позволяет оценивать число мод  $M$ , возбужденных в нерегулярном участке, простым делением ам-

плитуды раскачки углов  $2\Delta\beta$  на угловое расстояние между соседними модами  $\delta\beta \approx \beta_{m+1} - \beta_m \approx \pi \cos \beta_m / 2k_0 a$  [258]:

$$M \approx 2\Delta\beta / \delta\beta.$$

Аналогичная оценка для числа мод, возбуждаемых в рефракционных волноводах (ионосферные и подводные волновые каналы), дана в работе [259].

В-третьих, геометрическая оптика дает конструктивный принцип построения *нетрансформирующих переходов*: с лучевой точки зрения отсутствию трансформации отвечает плоский фронт бриллюэновской волны на выходе из перехода [252, 262].

Геометрическая оптика описывает также эффект «интерференции неоднородностей» (неоднородность — изгиб, расширение и т. д. — может как удвоить амплитуду раскачки, так и свести ее к нулю [252, 260]); возможность возбуждения «подкритических» мод в волноводе, за пределами для данной моды, и обратный эффект — отражение от перехода, не являющегося предельным для данной моды [252]; эффект «высыпания» лучей из рефракционного волновода, ограниченного низким барьером [259], и др.

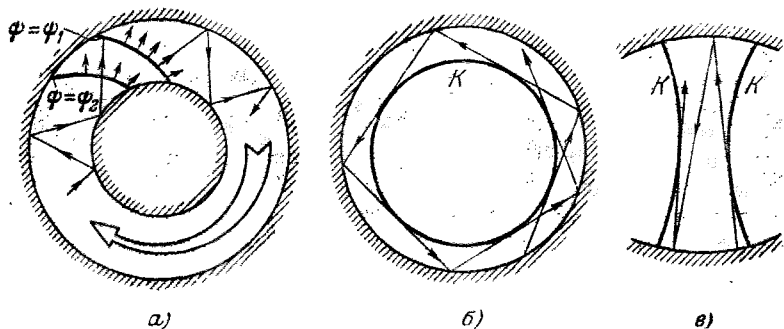


Рис. 17.8.

**8. Собственные колебания объемных резонаторов.** Простые идеи, лежащие в основе лучевого описания собственных колебаний объемных резонаторов, можно проиллюстрировать на кольцевом резонаторе (резонаторе бегущей волны), показанном на рис. 17.8, а (металлические границы резонатора заштрихованы). Пусть  $\psi = \text{const} = \psi_1$  — начальный фазовый фронт волны. После полного обхода волны по кольцу фазовый фронт  $\psi = \text{const} = \psi_2$ , вообще говоря, не совпадает с фазовым фронтом  $\psi = \psi_1$ . Существует, однако, такой (собственный) фазовый фронт  $\psi = \psi_1$ , что при полном обходе волна повторяет форму фазового фронта  $\psi = \psi_1$  с точностью до целого числа длин волн, т. е. фазовый

фронт  $\psi = \psi_2 = \psi_1 + m\lambda_0$  совпадает с фронтом  $\psi = \psi_1$ . Существенно, что лучи образуют в общем случае *незамкнутые* траектории.

Этот общий принцип был сформулирован в [263], где одновременно выделены важные типы собственных колебаний, допускающие лучевую интерпретацию: колебания типа *шепчущей галереи* и колебания типа *прыгающего мячика*. В первом случае волна бежит по кольцу, ограниченному стенкой и каустикой (рис. 17.8, б), а во втором волна последовательно отражается от верхней и нижней вогнутых стенок, будучи ограничена боковыми каустиками (рис. 17.8, в).

Собственные колебания в трехмерных системах изучались в работах [264, 75, 21] (см. также цитированную в этих работах литературу)<sup>1)</sup>. Исследования в этом направлении были стимулированы прежде всего широким использованием открытых резонаторов в лазерной технике, а также в технике СВЧ.

## § 18. Рассеяние волн на локализованных неоднородностях

**1. Эффективная поверхность рассеяния локализованной неоднородности в приближении геометрической оптики.** *Локализованными* будем называть неоднородности, сосредоточенные в объемах пространства с размерами  $l_n$ , малыми по сравнению с характерными масштабами изменения свойств среды  $L_{cp}$ , в которой они расположены:  $l_n \ll L_{cp}$ . Неоднородности могут иметь резкие границы (например, проводящие или жесткие тела в неоднородной среде), но могут обладать и размытыми формами, как, например, плавные неоднородности в плазме или плазменные образования в свободном пространстве [199]. Локализованные неоднородности с размытыми границами описываются показателем преломления  $n(r)$  таким, что  $n \rightarrow \text{const}$  при  $|r| \rightarrow \infty$ , вследствие чего лучи на удалении от неоднородности становятся прямыми. Задача о рассеянии плоской волны на локализованных неоднородностях рассматривалась во многих работах, например, [100, 110, 111, 114, 115, 199, 214, 215]. Рассеянное поле принято характеризовать величиной эффективной поверхности рассеяния, для которой, согласно (12.15), находим

$$\Sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{A}{A^0} \right|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \left| \frac{da^0}{da} \right| = 4\pi \left| \frac{da^0}{d\Omega} \right| = 4\pi \left| \frac{\mathcal{D}(0)}{G} \right|, \quad (18.1)$$

где  $da^0 = \mathcal{D}(0) d\xi d\eta$  — сечение лучевой трубки падающих лучей,  $d\Omega = \frac{1}{r^2} da = G d\xi d\eta$  — элемент телесного угла рассеянных лучей, а  $\xi, \eta$  — произвольные лучевые координаты, «нумерующие» лучи.

<sup>1)</sup> «Квазимодовый» характер лучевых полей обсуждается в [76].

Для рассеянных лучей в дальней зоне, например, в случае локализованной неоднородности, ограниченной некоторой поверхностью раздела  $Q$ , имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B + \sigma \mathbf{l} = \mathbf{r}_B + (\psi - \psi_B) \mathbf{l} \approx \psi \mathbf{l},$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\xi, \eta)$  — орт, определяющий направление рассеяния,  $\psi$  — эйконал, а индекс «в» относится к точке выхода луча из неоднородности (рис. 18.1). Отсюда

$$G = \frac{d\Omega}{d\xi d\eta} = \frac{1}{r^2} \mathcal{D}(\tau) = \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \eta} \right] \right| = \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi} \right)^2 \left( \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \eta} \right)^2 - \left( \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \eta} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (18.2)$$

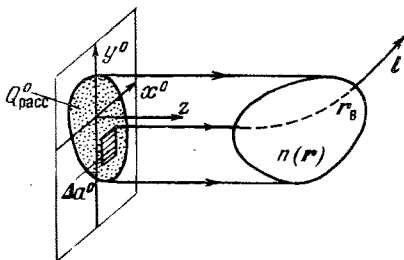


Рис. 18.1.

Для неоднородности с размытыми границами в качестве  $\mathbf{l}$  берется направление асимптоты луча:  $\mathbf{l} = \lim \nabla \psi$  при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ .

Очевидно,  $da^0 = dx^0 dy^0$ , откуда  $\mathcal{D}(0) = \frac{\partial(x^0, y^0)}{\partial(\xi, \eta)}$ , где  $x^0, y^0$  — декартовы координаты в плоскости фронта падающей волны (рис. 18.1). В результате

$$\Sigma = 4\pi \left| \frac{\partial(x^0, y^0)}{\partial(\xi, \eta)} \right| \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \eta} \right] \right|^{-1} \quad (18.3')$$

или, если выбрать  $\xi \equiv x^0, \eta \equiv y^0$ ,

$$\Sigma = 4\pi \left| \left[ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial x^0} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial y^0} \right] \right|^{-1}. \quad (18.3'')$$

Введем сферические углы рассеяния  $\theta, \varphi$  так, что

$$l_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad l_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad l_z = \cos \theta. \quad (18.4)$$

Тогда (18.3) можно представить в виде

$$\Sigma = \frac{4\pi}{\sin \theta} \left| \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(x^0, y^0)} \right|^{-1} \equiv \Sigma(\theta, \varphi). \quad (18.5)$$

Аналогично в двумерной задаче рассеяния (рис. 18.2, а)

$$\Sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\pi r \left| \frac{A}{A^0} \right|^2 = 2\pi \left| \frac{d\theta}{dx^0} \right|^{-1}, \quad (18.6)$$

где  $\theta = \theta(x^0)$  — угол между падающим и рассеянным лучами (угол рассеяния).

При осесимметричном рассеянии  $\frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(x^0, y^0)} = \frac{1}{\rho} \frac{d\theta}{d\rho}$ .

В результате, согласно (18.5),

$$\Sigma = \frac{4\pi\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\theta}{d\rho} \right|^{-1}, \quad (18.7')$$

где  $\rho$  — прицельный параметр луча, а  $\theta = \theta(\rho)$  — угол рассеяния (рис. 18.2, б).

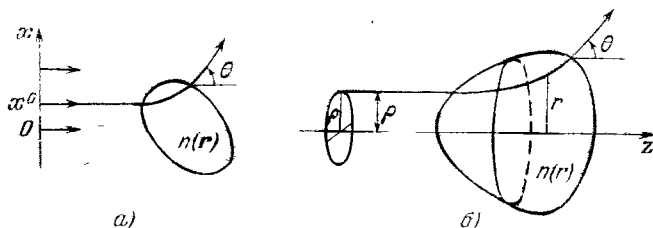


Рис. 18.2.

Если существует зеркально отраженный луч ( $\mathbf{l} = -\mathbf{l}^0$ ), то полученные формулы могут быть использованы и для определения сечения *обратного рассеяния* ( $\theta = \pi$ ). Для этого в них следует взять лучевые координаты  $x^0, y^0$  (или  $\xi, \eta$ ), соответствующие лучу с  $\theta = \pi$ . В частности, если в задаче осесимметричного рассеяния зеркально отраженный луч соответствует  $\rho = 0$ , то

$$\Sigma^{\text{обр}} = 4\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d\theta}{d\rho} \right|^{-1} = 4\pi \left| \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=0}^{-2}. \quad (18.7'')$$

*Полное (интегральное) сечение* рассеяния в приближении геометрической оптики равно

$$\Sigma^{\text{полн}} = \frac{1}{4\pi} \oint \Sigma d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int 4\pi \frac{da^0}{d\Omega} d\Omega = \int da^0 = Q^0_{\text{расс}}, \quad (18.8)$$

где  $Q^0_{\text{расс}}$  — площадь проекции рассеивающей неоднородности на плоскость падающего волнового фронта (см. рис. 18.1). Отсюда следует, что для неоднородностей с размытыми в поперечном направлении границами, у которых  $Q^0_{\text{расс}} = \infty$ , интегральное геометрикооптическое сечение рассеяния обращается в бесконечность:  $\Sigma^{\text{полн}} \rightarrow \infty$  (см., например, [215]).

Нетрудно показать, что при многолучевом рассеянии, когда в точку наблюдения приходят, например, два луча,

$$\Sigma = (\Sigma_1 + \Sigma_2) + 2(\Sigma_1 \Sigma_2)^{1/2} \cos[k_0(\psi_1 - \psi_2) + \delta\psi_1 - \delta\psi_2], \quad (18.9)$$

где  $\Sigma_j$  — парциальные эффективные поверхности рассеяния, определяемые выражениями (18.3), (18.5)–(18.7),  $\psi_j$  — эйконал  $j$ -го луча при  $r \rightarrow \infty$ , а  $\delta\psi_j$  — каустический фазовый сдвиг, который находится в соответствии с формулами (4.12) и (4.13). Первый

член в (18.9) соответствует *некогерентному* (энергетическому) суммированию лучей, а второй член описывает *интерференционные* явления при рассеянии, причем среднее значение эффективной поверхности рассеяния равно  $\Sigma^{\text{ср}} = \Sigma_1 + \Sigma_2$ .

Каустики рассеянного поля определяются уравнениями

$$\theta = \theta(\xi, \eta), \quad \varphi = \varphi(\xi, \eta), \quad \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} = 0. \quad (18.10)$$

При осесимметричном рассеянии одна каустика вырождается в ось симметрии, а другая отвечает условию экстремума функции  $\theta = \theta(\rho)$ :  $d\theta/d\rho = 0$ . В окрестности каустик может наблюдаться существенное увеличение (фокусировка) рассеянного поля. Хорошо известными примерами здесь являются эффекты *радуги и ореола (гало)* при рассеянии света [215]. Аналогичные эффекты возникают при квантовомеханическом рассеянии ([146, 214, 215] и др.).

**2. Рассеяние на теле, расположенном в неоднородной среде.** Приведенные в предыдущем разделе геометрикооптические формулы справедливы и при наличии отражающих границ раздела в неоднородной среде, в частности, они применимы для определения эффективной поверхности рассеяния тел больших электрических размеров, окруженных локализованной неоднородностью. Этот случай отличается от предыдущего (п. 1) только конкретными видами зависимостей  $I(\xi, \eta)$  или  $\theta = \theta(\xi, \eta)$ ,  $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$ , которые теперь определяются не только уравнением луча в неоднородной среде, но и законами отражения волны от границ раздела (§§ 4, 12).

Если же размеры тела ( $L_r$ ) много меньше характерного масштаба изменения падающего поля в среде и неоднородности среды ( $L$ ), т. е.  $L \gg L_r \approx \lambda$ , то отражение от тела происходит, как в однородной среде, и для определения отраженного поля может быть использована величина эффективной поверхности рассеяния  $\Sigma^{\text{одн}}$  того же тела в однородной среде [199, 231]. Неоднородная среда выполняет роль «трансформатора» поля. Рассеянное поле с учетом влияния неоднородной среды в этом случае принято характеризовать *кажущимся сечением* рассеяния [199, 231]. Формула для кажущегося сечения легко выводится из определения эффективной поверхности рассеяния. Например, для точечного источника типа (14.9) выражение (12.15) для эффективной поверхности рассеяния может быть переписано в виде

$$\Sigma = 4\pi R_{23}^2 \left| \frac{A^{\text{расс}}}{A^{\text{пад}}} \right|^2 = 4\pi R_{12}^2 R_{23}^2 \left| \frac{A}{B^0} \right|^2, \quad (18.11)$$

где  $R_{12} = |r_1 - r_2|$  и  $R_{23} = |r_2 - r_3|$  — расстояния между точками 1, 2 (передатчик — тело) и 2, 3 (тело — приемник),  $A^{\text{расс}}$  —

поле в точке приема  $\mathcal{Z}$  (рис. 18.3). Учитывая, что поле источника в неоднородной среде может быть представлено в виде  $|A| = |B^0|/R_{\text{эфф}}$ , где  $R_{\text{эфф}}$  — эффективное расстояние (см. п. 3 § 14), при наличии рассеивателя в неоднородной среде находим

$$|A|^2 = \left| \frac{B^0}{R_{\text{эфф}12}} \right|^2 \frac{\Sigma^{\text{одн}}}{4\pi R_{\text{эфф}23}^2}. \quad (18.12)$$

Здесь принято предположение об однолучевом рассеянии, при этом  $R_{\text{эфф}12}$  и  $R_{\text{эфф}23}$  суть соответствующие эффективные расстояния на трассах  $1-2$  и  $2-3$  (рис. 18.3). В результате из (18.11) и (18.12) для кажущегося сечения рассеяния получаем

$$\Sigma = \frac{R_{12}^2}{R_{\text{эфф}12}^2} \frac{R_{23}^2}{R_{\text{эфф}23}^2} \Sigma^{\text{одн}} = f_{12} f_{23} \Sigma^{\text{одн}}, \quad (18.13)$$

где  $f_{12} = R_{12}^2/R_{\text{эфф}12}^2$  и  $f_{23} = R_{23}^2/R_{\text{эфф}23}^2$  — факторы фокусировки поля соответственно на трассах  $1-2$  и  $2-3$ .

Величина  $\Sigma$  вследствие эффектов фокусировки может значительно превышать величину  $\Sigma^{\text{одн}}$ . Для оценок  $f_{12}$  и  $f_{23}$ , например, в плоско- и сферически-слоистых средах могут быть использованы формулы §§ 14, 15; конкретные расчеты проводились в [200]. Более подробное обсуждение рассмотренных здесь вопросов применительно к неоднородным плазменным средам дается в [199, 231] (см. также [232]). Рассеяние на теле, расположенном вблизи каустик, рассматривалось, в частности, в [233].

Заметим, что если тело помещено в среду, которая способна отражать лучи и в отсутствие тела (как, например, в ионосфере в диапазоне декаметровых радиоволн), то рассеянное поле попадает в точку наблюдения по *нескольким* каналам рассеяния. На рис. 18.4, а показан случай, когда имеются два падающих и два рассеянных луча, т. е. всего *четыре* канала рассеяния:  $\Pi \rightarrow \Pi'$ ,  $I \rightarrow \Pi'$ ,  $\Pi \rightarrow I'$ ,  $I \rightarrow I'$ . При обратном рассеянии (рис. 18.4, б), т. е. при тождественности каналов  $I = I'$  и  $\Pi = \Pi'$ , каналы  $I \rightarrow \Pi$  и  $\Pi \rightarrow I$  оказываются (в силу теоремы взаимности) синфазными или *когерентными* [267].

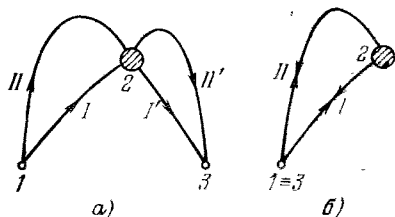


Рис. 18.4.

**3. Эффективная поверхность рассеяния сферически-слоистой неоднородности.** Угол рассеяния  $\theta$  на локализованном сферически-слоистом образовании ( $n^2 \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ ) определяется из



выражения (15.23):

$$\theta = 2\theta_{\pi} = 2 \int_{r_{\pi}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \equiv \theta(\rho), \quad (18.14')$$

где  $\theta_{\pi}$  и  $r_{\pi}$  — координаты точки поворота луча (см. § 15)<sup>1)</sup>. Отсюда, согласно (18.7), находим

$$\Sigma = \frac{2\pi\rho}{\sin \theta} \left| \frac{d}{d\rho} \int_{r_{\pi}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \right|^{-1}. \quad (18.14'')$$

Выражения (18.14) определяют зависимость  $\Sigma = \Sigma(\theta)$  в параметрической форме:  $\Sigma = \Sigma(\rho)$ ,  $\theta = \theta(\rho)$ . Для немонотонных законов  $\theta(\rho)$  зависимость  $\Sigma(\theta)$  описывается формулой (18.9), при этом могут наблюдаться явления интерференции и фокусировки на каустике<sup>2)</sup>, где  $d\theta/d\rho = 0$ . Очевидно, формула (18.14'') может быть получена и непосредственно из (15.24'), если в ней перейти к пределу  $r \rightarrow \infty$ , а затем воспользоваться определением эффективной поверхности рассеяния (12.15).

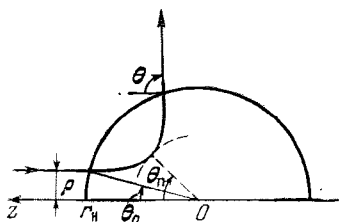


Рис. 18.5.

В случае неоднородности, ограниченной сферой  $r = r_{\pi}$ , ( $n(r) \equiv 1$  при  $r \geq r_{\pi}$ ), из (18.14'') получим

$$\Sigma = \frac{2\pi\rho}{\sin(2\theta_{\pi})} \left| \frac{d\theta_{\pi}}{d\rho} \right|^{-1} = \pi r_{\pi}^2 \frac{\sin(2\theta_0)}{\sin(2\theta_{\pi})} \left| \frac{d\theta_{\pi}}{d\theta_0} \right|^{-1}, \quad (18.15)$$

где  $\theta_{\pi}$  отвечает точке поворота луча,

$$\theta_{\pi} - \theta_0 = \int_{r_{\pi}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}},$$

$$\rho = r_{\pi} \sin \theta_0,$$

$\theta_0$  — координата точки падения луча на границу среды (рис. 18.5), а угол рассеяния равен  $\theta = 2\theta_{\pi}$ .

<sup>1)</sup> Угол рассеяния  $\theta$  отсчитывается здесь от оси  $z$ , а не от падающего луча, как в пп. 1 и 2.

<sup>2)</sup> Каустики в задаче рассеяния на сферически-симметричном квантовомеханическом потенциале рассматривались, в частности, в [146, 223].

Обратное отражение луча с  $\rho = 0$ <sup>1)</sup> происходит от уровня  $n^2 = 0$  (это возможно для плазменной среды), при этом

$$\Sigma^{\text{обр}} = \pi r_n^2 \left[ 1 + r_n \int_{r_0}^{r_n} \frac{dr}{r^2 n(r)} \right]^{-2}, \quad (18.16')$$

а для безграничной неоднородности ( $r_n \rightarrow \infty$ )

$$\Sigma^{\text{обр}} = \pi \left| \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 n(r)} \right|^{-2}, \quad (18.16'')$$

где  $r_0$  — корень уравнения  $n^2(r_0) = 0$ . Из полученных выражений вытекает, что  $\Sigma^{\text{обр}} < \pi r_0^2 < \pi r_n^2$ , т. е. эффективная поверхность рассеяния плазменной сферически-симметричной неоднородности ( $n < 1$ ) меньше, чем эффективная поверхность рассеяния идеально проводящего шара радиуса  $r_0$ , что является следствием дополнительной расходимости лучей в радиально-неоднородной среде с  $n = n(r)$ . Величина  $\Sigma^{\text{обр}}$  существенно зависит от поведения  $n^2(r)$  вблизи  $r_0$ :  $\Sigma^{\text{обр}} < \infty$  при  $\frac{d}{dr} n(r_0) \neq 0$ ; в противном случае, т. е. когда  $n^2(r)$  имеет нуль выше первого порядка,  $\Sigma^{\text{обр}} \rightarrow 0$ , что отвечает бесконечной расходимости осевых лучей (вблизи  $\rho = 0$ ) [199].

При рассеянии на аксиально-симметричной неоднородности аналогично (18.14'') и (18.16'') имеем

$$\Sigma = \pi \left| \frac{d}{d\rho} \int_{r_n}^{\infty} \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \right|^{-1}, \quad \Sigma^{\text{обр}} = \pi \left| \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 n(r)} \right|^{-1}, \quad (18.17)$$

при этом  $\theta = \theta(\rho)$  дается формулой (18.14). Эти же выражения справедливы и для ограниченной ( $r < r_n$ ) неоднородности, если в них положить  $n^2(r) = 1$  при  $r \geq r_n$ .

Сечения рассеяния сферически- и аксиально-симметричных неоднородностей рассматривались в большом числе работ, например, [110, 117, 118, 146, 214, 215, 223, 225, 229, 234], см. также литературу, цитированную в § 15.

4. Эффективная поверхность рассеяния идеально проводящей сферы в сферически-слонстой среде. Если радиус  $b$  идеально про-

<sup>1)</sup> При рассеянии назад ( $\theta = 0$ ) луча с  $\rho \neq 0$ , согласно (18.14) и (18.15),  $\Sigma \rightarrow \infty$ , что связано с образованием осевой каустики. Каустика приводит к появлению дифракционного пика и осцилляций в зависимости  $\Sigma(\theta)$  (явление ореольного рассеяния, или глории). Ореол наблюдается, например, в случае спирального рассеяния, когда лучевые траектории закручиваются вокруг центра симметрии  $r = 0$  (см. § 15, а также [214, 215]).

водящей сферы меньше  $r_0$ , где  $n^2 = 0$ , то тело лежит в области каустической тени<sup>1)</sup> и для определения эффективной поверхности рассеяния применимы формулы предыдущего раздела.

Если же лучи отражаются от идеально проводящей сферы, то для угла рассеяния  $\theta$  и эффективной поверхности рассеяния получаем те же формулы, что и в п. 3, но в них вместо координаты точки поворота луча  $r_n$  входит другой уровень отражения  $r = b$ . В результате

$$\Sigma = \frac{2\pi\rho}{\sin\theta} \left| \frac{d}{d\rho} \int_b^\infty \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \right|^{-1}, \quad \Sigma^{\text{обп}} = \pi \left| \int_b^\infty \frac{dr}{r^2 n(r)} \right|^{-2}, \quad (18.18')$$

$$\theta = 2 \int_b^\infty \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}}. \quad (18.18'')$$

В общем случае в формулах (18.18) в качестве нижнего предела в интегралах для  $\theta$  и  $\Sigma$  вместо  $b$  берется  $r_{\text{отр}} = \max(b, r_n)$ .

Аналогично для идеально проводящего цилиндра в цилиндрически-слоистой среде:

$$\Sigma = \pi \left| \frac{d}{d\rho} \int_{r_{\text{отр}}}^\infty \frac{\rho dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - \rho^2}} \right|^{-1}, \quad \Sigma^{\text{обп}} = \pi \left| \int_{r_{\text{отр}}}^\infty \frac{dr}{r^2 n(r)} \right|^{-1} \quad (18.19)$$

где  $r_{\text{отр}}^0 = \max(b, r_0)$ , а  $\theta = \theta(\rho)$  дается формулой (18.18''), если  $b > r_n$ , или (18.14'), если  $r_n > b$ .

Интересная особенность  $\Sigma^{\text{обп}}$  наблюдается в случае монотонного закона  $n^2(r)$  в плазменной среде. Она заключается в том, что, если изменять размер  $r_0$  критической области с  $n^2 = 0$ , оставляя фиксированными радиусы идеально проводящей сферы ( $b$ ) и неоднородной оболочки ( $r_n$ ), то величина  $\Sigma^{\text{обп}}$  достигает минимума при  $r_0 \sim b$  [228]. Это объясняется увеличением при  $r_0 \rightarrow b$  расходимости лучей, которая определяется интегралом в формуле (18.18') для  $\Sigma^{\text{обп}}$ . Для линейного закона  $n^2(r)$  эта особенность  $\Sigma^{\text{обп}}$  более подробно рассмотрена в [228], где она подтверждена также численными расчетами на основе точного решения.

**5. Эффективная поверхность рассеяния двумерно-неоднородного образования специального вида.** Рассмотрим задачу осесимметричного рассеяния на двумерно-неоднородном конусе (16.15) плоской волны, набегающей со стороны носика ( $l^0 = e_z$ ). Угол рассеяния  $\theta$  для лучей (16.22) определяется при  $r \rightarrow \infty$  из следующей

<sup>1)</sup> Подразумевается, что  $r_0 - b \gg \Lambda$ , где  $\Lambda$  — размер прикаустической зоны (см. § 10).

го трансцендентного уравнения:

$$\left( \int_{\theta_{\Pi}}^{\theta_{\Gamma P}} \mp \int_{\theta_{\Pi}}^{\theta} \right) \frac{\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} = \theta_{\Gamma P}. \quad (18.20)$$

Тогда из (18.7) и (18.20) находим эффективную поверхность рассеяния

$$\Sigma = \frac{4\pi\rho^2}{\sin\theta \sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \left| \frac{d}{d\rho} \left( \int_{\theta_{\Pi}}^{\theta_{\Gamma P}} \mp \int_{\theta_{\Pi}}^{\theta} \right) \frac{\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 - b^2 f(\theta)}} \right|^{-1} \quad (18.21)$$

Если изменить направление падения плоской волны на противоположное ( $\mathbf{l}^0 = -\mathbf{e}_z$ , см. рис. 16.8), то, согласно (16.25), для угла рассеяния<sup>1)</sup> получим уравнение

$$\frac{d}{d\kappa_0} \int_0^{\theta} \sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)} d\theta \equiv \int_0^{\theta} \frac{\kappa_0 d\theta}{\sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)}} = \pi, \quad (18.22')$$

или

$$\int_0^{\theta} \sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)} d\theta = \pi(\kappa_0 - b), \quad (18.22'')$$

где  $\kappa_0 = \sqrt{b^2 + \rho^2}$ , откуда аналогично (18.21) получаем

$$\Sigma = \frac{4\pi\kappa_0^2}{\sin\theta \sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)}} \left| \frac{d}{d\kappa_0} \int_0^{\theta} \frac{\kappa_0 d\theta}{\sqrt{\kappa_0^2 - b^2 f(\theta)}} \right|^{-1}. \quad (18.23)$$

При вычислении  $\Sigma^{0\text{ep}}$  следует иметь в виду, что при  $\rho = 0$  интегралы в (18.22) и (18.23) расходятся, так как при  $\theta \sim 0$

$$\kappa_0^2 - b^2 f(\theta) = \rho^2 - \frac{1}{2} b^2 f''(0) \theta^2 + \dots \quad (18.24)$$

(напомним, что по условию § 16  $f'(0) = 0$ ,  $f(0) = 1$ ). Поэтому, чтобы найти величину  $\left. \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=0}$ , учтем, что угол рассеяния  $\theta$  мал при  $\rho \sim 0$ , и воспользуемся разложением (18.24). Подставляя (18.24) в (18.22), получим при  $f''(0) < 0$

$$\theta \approx \frac{\rho}{b \sqrt{\alpha}} \operatorname{sh} \frac{\pi b \sqrt{\alpha}}{\sqrt{b^2 + \rho^2}},$$

<sup>1)</sup> В данном случае, как и в п. 3, угол рассеяния удобнее отсчитывать не от падающего луча, а от оси  $z$ .

где  $\alpha \equiv \frac{1}{2} |f''(0)|$ . В результате из (18.7'') находим

$$\Sigma^{\text{обр}} = 4\pi b^2 \frac{\alpha}{\text{sh}^2(\pi \sqrt{\alpha})}. \quad (18.25')$$

Аналогично (18.25'), для  $f''(0) > 0$  из (18.22), (18.24) и (18.7'') получим [113]:

$$\Sigma^{\text{обр}} = 4\pi b^2 \frac{\alpha}{\sin^2(\pi \sqrt{\alpha})}. \quad (18.25'')$$

При  $\alpha = 0$  выражения (18.25) описывают эффективную поверхность рассеяния сферически-симметричной неоднородности с показателем преломления  $n^2(r) = 1 - b^2/r^2$ :  $\Sigma^{\text{обр}} = 4b^2/\pi$ , что, разумеется, совпадает с результатом, следующим из формулы (18.16). Формулы (18.25) при  $\alpha \neq 0$  позволяют оценить влияние угловой неоднородности на величину эффективной поверхности рассеяния. Более подробный анализ эффективной поверхности рассеяния двумерно-неоднородных образований дается в [111—113]. Следуя [113], отметим, что величина  $\Sigma^{\text{обр}}$ , определяемая формулами (18.25), может быть как меньше (при  $f''(0) < 0$ ), так и больше (при  $f''(0) > 0$ ) эффективной поверхности рассеяния  $\Sigma^{\text{обр}}$ , соответствующей идеально проводящей поверхности вращения  $r = bf(\theta)$ , совпадающей с поверхностью уровня  $n^2(r, \theta) = 0$ . Эффективную поверхность рассеяния этой поверхности нетрудно найти из (12.16):  $\Sigma_0^{\text{обр}} = \pi b^2/[1 - f''(0)]^2$ . Указанное различие величин (18.25') и (18.25'') объясняется различным характером рефракции волны при  $f''(0) \neq 0$ . Наиболее ярко это различие проявляется при  $f''(0) = 2m^2 > 0$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ , когда, согласно (18.25''), сечение рассеяния обращается в бесконечность, т. е. наблюдается идеальная фокусировка рассеянных лучей с  $\rho \sim 0$  (подробнее см. [113]). Отметим, что расчеты эффективной поверхности рассеяния неоднородных параболоида и тороида в случае, когда переменные в уравнении эйконала разделяются, проводились в [114, 115].

**6. Особенности рассеяния сферической волны на локализованной неоднородности.** Аналогично случаю плоской волны (см. п. 4) для амплитуды поля источника в дальней зоне (рассеянное поле) получим

$$A = \frac{1}{r} B^0 \left( \frac{n^0 d\Omega^0}{d\Omega} \right)^{1/2} = \frac{1}{r} B^0 \left( \frac{n^0 G^0}{G} \right)^{1/2} \equiv \frac{1}{r} F,$$

где  $d\Omega^0 = G^0 d\xi d\eta$ ,  $d\Omega = G d\xi d\eta$  — элементы телесных углов пучка соответственно падающих и рассеянных лучей,  $\xi, \eta$  — произвольные лучевые координаты<sup>1)</sup>,  $n^0 \equiv n(r^0)$ ,  $r^0$  — радиус-вектор источ-

<sup>1)</sup> В случае источника, расположенного вне ограниченной неоднородности, в качестве  $\xi$  и  $\eta$  удобно выбрать криволинейные координаты точки падения луча на границу среды.

ника. В результате диаграмма направленности источника  $F$  оказывается равной

$$F = B^0 \left| n^0 \left[ \frac{\partial l^0}{\partial \xi} \frac{\partial l^0}{\partial \eta} \right]^{1/2} \left| \left[ \frac{\partial l}{\partial \xi} \frac{\partial l}{\partial \eta} \right] \right|^{-1/2} \right|, \quad (18.26)$$

где  $l^0$  — орт, задающий направление выхода луча из источника, а орт  $l$  определяет направление рассеяния. Для направленного источника  $B^0 = B^0(l^0)$  есть его диаграмма направленности в однородной среде с  $n = \text{const} = n^0$ .

Если использовать сферические углы рассеяния (наблюдения)  $\theta, \varphi$ , определяемые формулами (18.4), и аналогичные углы выхода  $\theta^0, \varphi^0$ , то

$$\begin{aligned} F &= B^0(\theta^0, \varphi^0) \sqrt{n^0} \left\{ \frac{\sin \theta^0}{\sin \theta} \frac{\partial(\theta^0, \varphi^0)}{\partial(\xi, \eta)} \left[ \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\xi, \eta)} \right]^{-1} \right\}^{1/2} = \\ &= B^0(\theta^0, \varphi^0) \sqrt{n^0} \left\{ \frac{\sin \theta}{\sin \theta^0} \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\theta^0, \varphi^0)} \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (18.27)$$

В случае аксиально-симметричной геометрии

$$F = B^0 \sqrt{n^0} \left( \frac{\sin \theta}{\sin \theta^0} \frac{d\theta}{d\theta^0} \right)^{-1/2}, \quad (18.28)$$

причем  $B^0 = B^0(\theta^0, \varphi^0)$ . Аналогично в двумерном случае

$$A = \frac{1}{\sqrt{r}} B^0(\theta^0) \sqrt{n^0} \left( \frac{d\theta}{d\theta^0} \right)^{-1/2}. \quad (18.29)$$

Приведенные выше формулы справедливы и при наличии отражающих границ раздела в неоднородной среде.

Рассмотрим в качестве примера поле излучения источника в сферически-слоистой среде. В этом случае парциальная диаграмма направленности, отвечающая одному рассеянному лучу, определяется выражением (18.28), а угол рассеяния  $\theta$  дается формулой (15.17), в которой следует положить  $r \rightarrow \infty$ . Такой же результат следует и из формулы (15.19), если учесть, что в дальней зоне  $r^2 \gg \rho^2$  и  $n^2(r) \rightarrow 1$ :

$$A = \frac{1}{r} B^0 \left( \frac{n^0 \sin \alpha^0}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\alpha^0} \right)^{1/2}$$

(в данном случае  $\alpha^0 = \theta^0$ ).

7. Рассеяние на слабых локализованных неоднородностях. В случае слабых неоднородностей проницаемость  $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv n^2(\mathbf{r})$  мало отклоняется от среднего «фонового» значения  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \bar{n}^2(\mathbf{r})$ , т. е. разность  $v(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) - \bar{\varepsilon}(\mathbf{r})$  мала по сравнению с  $\varepsilon$ :  $|v| \ll |\varepsilon|$ . Вследствие этого рассеяние лучей на слабых неоднородностях можно описывать при помощи метода возмущений (см. § 9).

Особенность слабых локализованных неоднородностей состоит в том, что внутри неоднородностей лучи испытывают весьма малое боковое смещение (если  $l_n$  — характерный масштаб неоднородности, то, как показывают оценки по формулам (9.17) и (9.18),  $|\Delta r_{\text{бок}}| \sim l_n |v_{\text{max}}| \ll l_n$ ). Это позволяет заменить неоднородность фазовым экраном, который воздействует только на фазу падающей волны, но не на ее амплитуду. Эквивалентное изменение эйконала  $\Delta\psi$  может быть рассчитано по формуле (9.8), пределы интегрирования в которой можно раздвинуть до бесконечности, пользуясь убыванием возмущения  $v(r)$  при  $\sigma \rightarrow \pm\infty$ :

$$\Delta\psi \approx \psi_1 = \frac{1}{v \varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} v(\sigma') d\sigma' \quad (18.30)$$

(здесь  $\varepsilon$  относится к центру неоднородности).

Рассматривая (18.30) как начальное значение эйконала в плоскости невозмущенного фазового фронта  $\psi_0 = \text{const}$ , можно найти все параметры лучевого поля как в однородной, так и в неоднородной среде. В частности, при помощи (18.30) можно выявить фокусы и каустики, возникающие за локализованной неоднородностью. Согласно (9.17), изменение импульса  $\Delta p \sim \nabla\psi_1$  сравнимо по величине с возмущением  $v$ , так что после прохождения волны через неоднородность каустики образуются на расстояниях  $z_R \sim l_n / |\Delta p| \sim l_n / |v|$  [128].

Интересная особенность неоднородных сред состоит в том, что неоднородность, оказывающая в однородной среде фокусирующее действие, в неоднородной среде может оказаться *дефокусирующей*. Это явление, обнаруженное в [129], объясняется совместным действием локализованной неоднородности и плавно неоднородной среды, работающей как толстая линза.

Используя эквивалентность слабой локализованной неоднородности фазовому экрану, легко оценить френелевский радиус  $a_f$  для точки наблюдения, удаленный на расстояние  $\sigma$  от неоднородности:

$$a_f(\sigma) = \sqrt{\lambda \left| \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\sigma} \right|^{-1}}, \quad a_f(\infty) = \sqrt{\lambda |R_0|},$$

где  $R_0$  — радиус кривизны фазового фронта сразу же после прохождения неоднородности. По порядку величины  $|R_0| \sim l_n / |v_{\text{max}}|$ . Поэтому условие применимости геометрической оптики для бесконечно удаленной точки,  $a_f(\infty) \ll l_n$ , приводит к неравенству

$$\lambda \ll |v_{\text{max}}| l_n, \quad (18.31)$$

которое означает, что разность оптических путей внутри неоднородности и рядом с ней, равная  $|v_{\text{max}}| l_n$ , должна превышать дли-

ну волны. По мере того как неоднородность становится менее плотной, т. е.  $|v_{\max}|$  уменьшается, геометрическая оптика теряет силу, и при условии, противоположном (18.31), т. е. при  $|v_{\max}|l_n \ll \lambda$ , применимо уже борновское приближение теории рассеяния.

## § 19. Распространение импульсов

**1. Общие соотношения для плазменного (волноводного) закона дисперсии.** В данном параграфе мы рассмотрим ряд примеров применения метода пространственно-временной геометрической оптики для определения полей высокочастотных импульсов, распространяющихся в средах с частотной дисперсией.

Закон дисперсии

$$n(\omega, \mathbf{r}) = \sqrt{1 - \omega_p^2(\mathbf{r})/\omega^2}, \quad (19.1)$$

где  $\omega_p$  — критическая частота среды, характерен для волн в волноводах (в этом случае  $\omega_p$  — критическая частота волновода) и для электромагнитных волн в холодной изотропной плазме (в этом случае  $\omega_p$  — плазменная частота). Волновое поле  $u(\mathbf{r}, t)$  — в среде (19.1) описывается более простым, чем в (7.1), волновым уравнением

$$\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2(\mathbf{r})}{c^2} \right] u(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (19.2)$$

в соответствии с этим несколько упрощаются соотношения геометрической оптики<sup>1)</sup>.

Из (7.23) следует, что групповая скорость равна  $g(\omega, \mathbf{r}) = c n(\omega, \mathbf{r})$ , так что уравнения пространственно-временных лучей принимают вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{c^2}{\omega} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\frac{1}{2\omega} \nabla \omega_p^2(\mathbf{r}), \quad (19.3')$$

или

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2\omega^2} \nabla \omega_p^2 \equiv -\frac{1}{2} c^2 \nabla n^2(\omega, \mathbf{r}), \quad (19.3'')$$

где  $\omega = \omega^0 = \omega^0(\xi)$  — начальная частота, постоянная на луче.

Если обозначить через  $d\tau = c dt = cd\sigma/g = d\sigma/n$  элемент группового пути импульса в среде (19.1), то уравнение (19.3) переходит в обычное уравнение луча (2.19):  $d^2\mathbf{r}/d\tau^2 = \nabla n^2/2$ .

Эйконал волны (7.35) для плазменного закона дисперсии (19.1) определяется выражением

$$\varphi = \varphi^0 - \frac{1}{\omega} \int_{t^0}^t \omega_p^2 dt = \varphi^0 - \omega(t - t^0) + \frac{\omega}{c} \int_{\tau^0}^{\tau} n^2 d\tau, \quad (19.4)$$

где интегрирование проводится вдоль лучей (19.3).

<sup>1)</sup> Специально метод геометрической оптики для уравнения (19.2) рассматривался, например, в [30] (см. также [23, 235]).



**2. Однородная среда с произвольным законом дисперсии.** В однородной среде ( $\nabla n \equiv 0$ ) уравнения лучей (7.22) принимают вид

$$dr/dt = g, \quad dk/dt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$r = r^0 + g^0(t - t^0) \equiv r(t, \xi), \quad (19.5)$$

причем для начальных условий, заданных при  $r = r^0(\xi)$  и  $t = t^0(\xi)$ , групповая скорость  $g^0$  определяется выражением (7.23), где  $k = k^0$  и  $\omega = \omega^0$  находятся из (7.32). Согласно (19.5), пространственно-временные лучи в однородной среде представляют собой семейство прямых линий, угол наклона которых определяется начальной групповой скоростью  $g^0$ .

Закон изменения мгновенной частоты волны вдоль траектории ее распространения определяется начальным значением частоты  $\omega = \omega^0(\xi)$  и уравнением (19.5) для семейства лучей  $r = r(t, \xi)$ .

Эйконал (7.35) в однородной среде равен

$$\varphi = \varphi^0 + (k^0 g^0 - \omega)(t - t^0) = \varphi^0 - \frac{\omega^2}{c} g^0 \frac{\partial n}{\partial \omega}(t - t^0), \quad (19.6)$$

где  $\omega = \omega^0(\xi)$ . Для определения амплитуды волны вычислим якобиан

$$j(t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \prod_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_m} r(t, \xi) = a_3(t - t^0)^3 + a_2(t - t^0)^2 + a_1(t - t^0) + a_0 = a_3(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3), \quad (19.7)$$

где коэффициенты  $a_i$  простым образом выражаются через производные  $\partial r^0 / \partial \xi_m$ ,  $\partial t^0 / \partial \xi_m$  и  $\partial g^0 / \partial \xi_m$ , а  $t_{1,2,3}$  — корни кубического уравнения  $j(t_i) = 0$ . В результате для амплитуды получаем

$$A(t) = A(t^0) \left[ \frac{j(t^0)}{j(t)} \right]^{1/2} = A(t^0) \left\{ \frac{(t^0 - t_1)(t^0 - t_2)(t^0 - t_3)}{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)} \right\}^{1/2}. \quad (19.8)$$

Наличие трех корней уравнения  $j(t) = 0$  в (19.7) означает, что пространственно-временной луч в однородной среде в общем случае может иметь *три каустических точки* при  $t = t_{1,2,3}$  и, следовательно, касаться трех пространственно-временных каустик. Уравнения последних определяются из (19.5) при  $t = t_i$  и имеют вид  $r = r(t_i, \xi)$ ,  $t = t_i(\xi)$ . Классификация структурно устойчивых типов образующихся здесь каустик в принципе такая же, как и в пространственном случае (см. §§ 4, 11), хотя, конечно, следует учитывать увеличение размерности физического пространства, а также иметь в виду необратимость временной координаты [23, 268] и ограниченность групповой скорости ( $g \leq c$ ).

**3. Плоский частотно-модулированный импульс в однородной среде.** Пусть в некоторой начальной плоскости  $z = 0$  задано начальное поле импульса в комплексной форме<sup>1)</sup>:

$$u(z = 0, t) = A^0(t)e^{i\varphi^0(t)} \equiv u^0(t), \quad (19.9')$$

где  $A^0(t)$  задает форму (оггибающую, амплитуду) импульса. Закон частотной модуляции определяется формулой

$$\omega(0, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \varphi^0(t) \equiv \omega^0(t). \quad (19.9'')$$

Пространственно-временные лучи (19.5) в этом случае описываются уравнением

$$z = g(t - \xi) = g(\omega^0)(t - \xi) \equiv z(t, \xi), \quad (19.10)$$

где  $t^0 \equiv \xi$  — время выхода луча из плоскости  $z = 0$ , а  $\omega^0 = \omega^0(\xi)$ . В силу принципа релятивистской причинности  $g(\omega) < c$ , и лучи (19.10) на плоскости  $\{z, t\}$  могут располагаться только в секторе  $z < ct$ .

Расходимость лучей (19.10) равна

$$\mathcal{J} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^{-1}_{t=\xi} = 1 - \frac{z}{g^2} \frac{dg}{d\xi} \equiv 1 - \frac{z}{z_R}, \quad (19.11')$$

откуда для амплитуды импульса при  $z > 0$  получим

$$A(z, t) = A^0(\xi) \mathcal{J}^{-1/2} = A^0(\xi) \left( 1 - \frac{z}{z_R} \right)^{-1/2}, \quad (19.11'')$$

где

$$z_R = g^2 \left( \frac{dg}{d\xi} \right)^{-1} = g^2 \left( \frac{dg}{d\omega^0} \frac{d\omega^0}{d\xi} \right)^{-1} \equiv z_R(\xi) \quad (19.12')$$

— пространственная координата каустики. Ее временную координату найдем из (19.10) в виде

$$t = \xi + g \left( \frac{dg}{d\xi} \right)^{-1} = \xi + g \left( \frac{dg}{d\omega^0} \frac{d\omega^0}{d\xi} \right)^{-1} \equiv t_R(\xi). \quad (19.12'')$$

Эйконал (19.6) с учетом (19.10) представим в виде

$$\varphi = \varphi^0 + k^0 g(t - \xi) - \omega^0(t - \xi) = \varphi^0 + k^0 z - \omega^0(t - \xi), \quad (19.13)$$

где  $k^0 = \frac{\omega^0}{c} n(\omega^0)$  — волновое число при  $\omega = \omega^0$ .

<sup>1)</sup> Начальное поле, первоначально заданное в виде вещественной функции  $\text{Re } u^0(t)$ , следует в общем случае представлять в комплексной форме, используя понятие аналитического сигнала [238, 239], не требующее узкополосности импульса, при этом амплитуда  $A^0(t)$  вводится как  $|u^0(t)|$ , а фаза  $\varphi^0(t)$  как  $\text{arg } u^0(t)$ .

В результате для поля частотно-модулированного импульса (ЧМ-импульса) в однородной среде получим

$$u(z, t) = u^0(\xi) \left(1 - \frac{z}{z_R}\right)^{-1/2} \exp[ik^0 z - i\omega^0(t - \xi)]. \quad (19.14)$$

При многолучевости, как обычно, необходимо взять сумму полей (19.14), при этом суммирование ведется по всем лучевым координатам  $\xi_j = \xi_j(z, t)$ , определяемым из уравнения семейства лучей (19.10). После касания каустики (при  $z > z_R > 0$ ) в (19.14) появляется дополнительный (каустический) фазовый сдвиг  $(-\pi/2)$ , если  $dg/d\omega > 0$  (подробнее см. [235]).

В отсутствие частотной модуляции, когда  $\omega^0 = \text{const}$ ,  $g = \text{const} = g(\omega^0)$ , из (19.10) находим  $\xi = t - z/g$ , при этом  $z_R \rightarrow \infty$  и

$$u(z, t) = A^0 \left(t - \frac{z}{g}\right) \exp(ik^0 z - i\omega^0 t). \quad (19.15)$$

Согласно приближению геометрической оптики (19.15), начальная огибающая импульса  $A^0(t)$  переносится вдоль параллельных лучей (19.10) как единое целое (без искажений формы и длительности) с групповой скоростью  $g = g(\omega^0)$  (рис. 19.1).

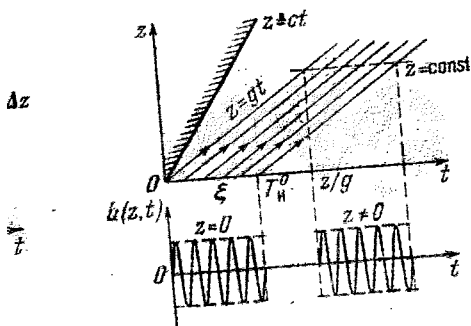


Рис. 19.1.

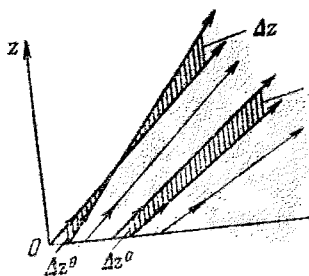


Рис. 19.2.

свя-  
занных  
интер-  
бъяс-  
, t) и  
сечную  
) лучи  
движе-  
нии их

Изменение огибающей ЧМ-импульса вдоль дистанции  $z$  связано с изменением поперечного (при  $t = \text{const}$ ) сечения лучевых трубок (рис. 19.2), а в окрестности каустик (рис. 19.3) — с дифференцией различных лучей (19.10). Этими же причинами объясняется изменение мгновенной частоты заполнения  $\omega = \omega(z, t)$  и длительности импульса  $T_n = T_n(z)$ .

Если импульс (19.9) при  $z = 0$  имеет практически конечную длительность  $T_n^0$ , т. е.  $A^0(t) \approx 0$  при  $t < 0$  и  $t > T_n^0$ , то (19.10) с  $\xi = 0$  и  $\xi = T_n^0$  описывают на плоскости  $\{z, t\}$  границы передней и задней границ импульса. Разность вре-

прихода дает текущую длительность импульса в приближении геометрической оптики:

$$\frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{н}}^0} = \left| 1 + \frac{z}{T_{\text{н}}^0} \left[ \frac{1}{g(T_{\text{н}}^0)} - \frac{1}{g(0)} \right] \right|,$$

где  $g(\xi) \equiv g[\omega^0(\xi)]$ .

При приближении к каустике (19.12) длительность импульса  $T_{\text{н}}$  уменьшается и соответственно увеличиваются его амплитуда и скорость изменения мгновенной частоты  $\omega(t)$  (рис. 19.3). В окрестности каустики происходит пересечение лучей с  $\xi = 0$  и

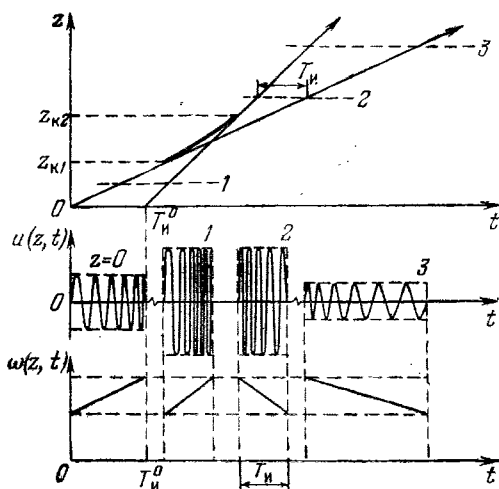


Рис. 19.3.

$\xi = T_{\text{н}}^0$ , что приводит к инверсии сигнала (хвостовая часть обгоняет головную) и к инверсии закона частотной модуляции  $\omega(t)$  (например, спадающий закон  $\omega(t)$  становится нарастающим, см. рис. 19.3) [240]. Как ясно из рис. 19.3, вследствие расширения пучка лучей после прохождения каустики длительность импульса начинает расти, а его амплитуда и скорость изменения  $\omega(t)$  — уменьшаться. В случае, когда каустика (19.2) не образуется, наблюдается только расширение пучка лучей со всеми сопутствующими эффектами (рис. 19.4). Отметим, что рис. 19.3 и 19.4 носят качественный характер и не показывают изменений формы огибающей и закона модуляции импульса вследствие изменения сечения лучевых трубок.

Ниже, в п. 6 дается обсуждение результатов расчетов, иллюстрирующих границы применимости пространственно-временной геометрической оптики.

4. Дисперсионное сжатие (компрессия) ЧМ-импульсов в однородной среде. Как видно из рис. 19.3, в окрестности каустики наблюдается эффект дисперсионного сжатия (компрессии) ЧМ-импульса<sup>1)</sup>. Условие образования каустики (19.12) имеет вид  $\frac{dg}{d\xi} =$

$$= \frac{dg}{d\omega^0} \frac{d\omega^0}{d\xi} > 0, \text{ причем при } \frac{dg}{d\xi} = 0$$

каустика образует ветвь, асимптотически уходящую на бесконечность. Форма каустики определяется законом дисперсии  $n(\omega)$  и законом частотной модуляции импульса  $\omega^0(\xi)$ ; подробное исследование ее свойств и особенностей дается в [235].

Отметим, что для импульсов конечной длительности физически реализуются лишь конечные участки каустик, соответствующие  $0 \leq \xi \leq T_n^0$ . Для плавных огибающих  $A^0(t)$  начального импульса (19.9') эти участки каустик не имеют четко выраженных краев. В то же время для импульсов с резким началом и концом

(например, для прямоугольного импульса<sup>2)</sup>) характерно образование *оборванных каустик* с точками обрыва, расположенными на границах импульса (см., например, рис. 19.3).

Если  $n(\omega)$  и  $\omega^0(\xi)$  выбрать так, чтобы лучи (19.10) образовывали не каустическую, а *пространственно-временной фокус* (рис. 19.5), то в приближении геометрической оптики следует ожидать *оптимальную* (идеальную) компрессию импульса. Согласно уравнениям семейства лучей (19.10), в этом случае  $z_\Phi = g(t_\Phi - \xi)$ , где  $t_\Phi, z_\Phi$  — координаты фокуса. Отсюда получаем условие идеальной компрессии:

$$\xi = t_\Phi - \frac{z_\Phi}{c} \left[ n(\omega^0) + \omega^0 \frac{d}{d\omega^0} n(\omega^0) \right], \quad (19.16)$$

<sup>1)</sup> Это явление аналогично сжатию ЧМ-импульсов, осуществляемому с помощью специальных устройств обработки сигналов, например, с помощью согласованных фильтров.

<sup>2)</sup> Хотя разрывные огибающие не удовлетворяют требованиям аналитического сигнала [239], они часто используются для аппроксимации импульсов. Очевидно, что с позиций аналитического сигнала такая аппроксимация может считаться удовлетворительным приближением, если у соответствующего вещественного импульса  $\text{Re} u^0(t)$  участки спектра, сосредоточенные вблизи частот  $+\omega_0$  и  $-\omega_0$ , практически не перекрываются, т. е. приближенно выполняется условие разделения спектров [239].

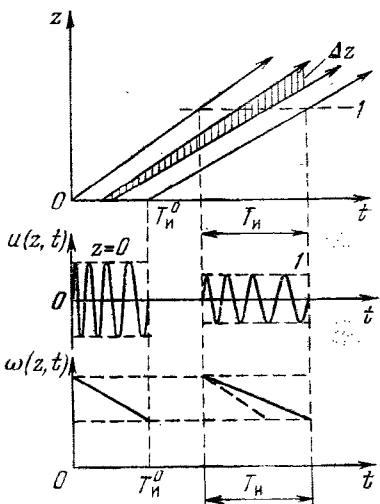


Рис. 19.4.

которое определяет функцию  $\xi = \xi(\omega^0)$ , обратную функции  $\omega^0(\xi)$ , задающей требуемый закон частотной модуляции. При малых отклонениях частоты  $\omega^0$  от некоторого опорного значения  $\omega_0^0$  в ряде Тейлора для функции, стоящей в (19.16), можно ограничиться лишь линейным членом, т. е. в этом приближении оптимальным для компрессии является *линейный закон* частотной модуляции [240]. Условие (19.16) легко переписать также в форме, допускающей определение закона дисперсии  $n(\omega)$  для идеальной компрессии ЧМ-импульса с заданной зависимостью  $\omega^0(\xi)$  (см., например, [235]).

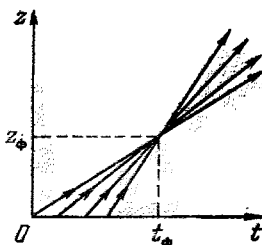


Рис. 19.5.

В частном случае плазменного закона дисперсии (19.1) из (19.16) находим, что при  $\omega_p = \text{const}$  идеальная фокусировка

ЧМ-импульса возможна при следующем виде частотной модуляции [23, 241]:

$$\frac{\omega(0, t)}{\omega_p} = \frac{c(t_\phi - t)}{\sqrt{c^2(t_\phi - t)^2 - z_\phi^2}}. \quad (19.17)$$

При законах  $\omega^0(\xi)$ , отличных от (19.17), среда (19.1) с  $\omega_p = \text{const}$  не является уже идеальной пространственно-временной линзой, а образует *каустику*:

$$z = \frac{c}{\omega_p^2} (\omega^0 - \omega_p^2)^{3/2} (d\omega^0/d\xi)^{-1}, \quad t = \xi + \frac{\omega^0}{\omega_p^2} (\omega^0 - \omega_p^2) (d\omega^0/d\xi)^{-1}. \quad (19.18)$$

Последняя существует в рассматриваемой области  $z > 0$  только при условии  $d\omega^0/d\xi > 0$ , т. е. только при нарастании частоты. Асимптоты *каустики* (19.18) отвечают условию  $d\omega^0/d\xi = 0$ , а ее точки заострения (клювы) — уравнению

$$3\omega^0 (d\omega^0/d\xi)^2 - (\omega^0 - \omega_p^2) d^2\omega^0/d\xi^2 = 0.$$

Каустика (19.18) для импульса с линейной частотной модуляцией показана на рис. 19.3, а для импульса с параболическим законом

$$\omega^0(t) = \omega_0 \left[ 1 + \alpha \left( t - \frac{1}{2} T_n^0 \right)^2 \right]$$

— на рис. 19.6.

Компрессия импульсов подробно рассматривалась в [23, 142, 241] (см. также [79, 235]); каустики (19.18) исследовались в [242], где приведены также результаты расчетов поля импульса по строгим формулам. С более полным обзором работ можно познакомиться в [23, 235].

5. Плоско-слоистая диспергирующая среда. Уравнения пространственно-временных лучей в среде с  $n = n(z, \omega)$ , согласно § 7,

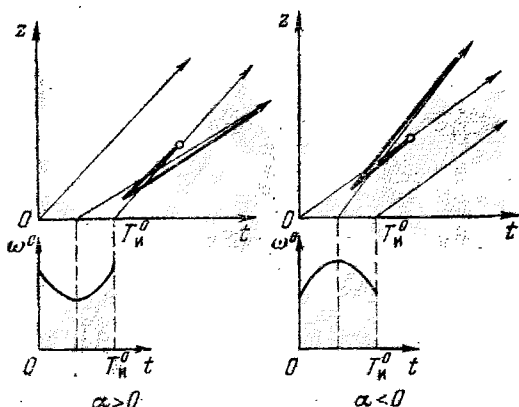


Рис. 19.6.

легче всего получить, используя уравнения лучей (13.14), добавляя к последним выражение для времени распространения импульса, при этом

$$dt = \frac{d\sigma}{g} = \pm \frac{dz}{g} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \pm \frac{ndz}{g \sqrt{n^2(z) - (n^0 \sin \theta^0)^2}},$$

так что

$$t = t^0 + \left( \int_{z^0}^{z^1} \mp \int_{z^1}^{z^2} \right) \frac{n(z, \omega) dz}{g(z, \omega) \sqrt{n^2(z, \omega) - (n^0 \sin \theta^0)^2}} \equiv t(z, \xi), \quad (19.19)$$

где  $\omega = \omega^0(\xi)$  и использованы те же обозначения, что и в § 13. Семейство лучей описывается уравнениями (13.4) и (19.19), которые могут быть представлены в виде  $x = x(z, \xi)$ ,  $y = y(z, \xi)$  и  $t = t(z, \xi)$ , где  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  — криволинейные координаты на начальной гиперповерхности (см. § 7).

Якобиан  $j(t)$ , необходимый для вычисления амплитуды поля (7.44), определяется из уравнений семейства лучей (13.4), (19.19) и аналогично (13.10) равен

$$j(t) = \frac{g}{n} p_z \frac{\partial(x, y, t)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \pm \frac{g}{n} \sqrt{n^2 - (n^0 \sin \theta^0)^2} \frac{\partial(x, y, t)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (19.20')$$

где производные от  $x, y, t$  находятся при  $z = \text{const}$ . Для пространственно-временного эйконала, согласно (7.35) и (19.9),

получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi^0 - \omega(t - t^0) + \frac{\omega}{c} \left( \int_{z_<}^{\tilde{z}} \mp \int_{z_<}^{\tilde{z}} \right) \frac{n^2(z, \omega) dz}{\sqrt{n^2(z, \omega) - (n^0 \sin \theta^0)^2}} = \\ &= \varphi^0 - \omega(t - t^0) + \frac{\omega}{c} \left\{ p_x^0(x - x^0) + p_y^0(y - y^0) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{z_<}^{\tilde{z}} \mp \int_{z_<}^{\tilde{z}} \right) \sqrt{n^2(z, \omega) - (n^0 \sin \theta^0)^2} dz \right\}. \quad (19.20^n) \end{aligned}$$

Обсуждение полученных формул (19.19), (19.20) и многочисленные примеры их применения к различным задачам распространения импульсов в плоско-слоистой среде даются в [235] (см. также [23, 84] и др.). В [235, 243] исследовалась геометрия каустик и структура радиоимпульсов в линейном слое плазмы, при этом форма образующихся здесь пространственно-временных каустик во многом аналогична пространственному случаю (§ 13). Вопросы оптимальной (идеальной) компрессии ЧМ-импульсов в неоднородной среде рассматривались в [23, 244] и др.

6. Ближняя и дальняя зоны импульса. Условия применимости метода пространственно-временной геометрической оптики были рассмотрены в п. 5 § 10 на примере задачи о распространении плоского ЧМ-импульса (19.9') в однородной диспергирующей среде. Согласно (10.17), в частном случае немодулированного импульса ( $\omega^0 = \text{const}$ ) френелевский интервал  $\tau_f^0$  при  $z = 0$  равен  $\tau_f^0 = \sqrt{2\pi |k_0''| z}$ . Поэтому условие применимости геометрикооптического решения (19.15)  $2\tau_f^0 \ll T$  ( $T$  — временной масштаб изменения поля при  $z = 0$ ) можно представить в виде

$$z \ll \frac{(T_0^0)^2}{8\pi |k_0''|}, \quad z \ll \frac{1}{8\pi |k_0''|} \left| \frac{1}{A^0} \frac{dA^0}{dt} \right|^{-2}, \quad (19.21)$$

где  $T_0^0$  — длительность, а  $A^0$  — огибающая исходного импульса. Неравенства (19.21) определяют ближнюю зону импульса, где, таким образом, и применима формула геометрической оптики (19.15). В дальней зоне импульса, как и в дальней зоне антенны (см. п. 7 § 11), также может быть использовано лучевое описание поля, однако оно уже связано не с полем импульса при  $z = 0$ , а с преобразованием Фурье от этого поля (т. е. со спектром начального импульса). Специфика поля импульса в дальней зоне обсуждается в [79, 90, 240].



На рис. 19.7 и 19.8 представлены огибающие радиосигналов в однородной среде с плазменным (волноводным) законом дисперсии  $n^2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , рассчитанные по точным формулам [90, 235] (сплошные линии) и формулам пространственно-временной геометрической оптики (штриховые линии). Расчеты проводились для импульсов с постоянной частотой заполнения  $\omega_0$ , их относительная длительность равнялась  $\omega_0 T_n^0 = 0,35 \cdot 10^3$ , при этом  $\omega_0/\omega_p = 1,1$ .

На рис. 19.7 представлены огибающие прямоугольного радиоимпульса на различных расстояниях  $z$ , соответствующих значениям  $z/cT_n^0 = 4,25$  (рис. 19.7, а),  $z/cT_n^0 = 1,27$  (кривые 1 на рис. 19.7, б) и  $z/cT_n^0 = 0,53$  (кривые 2 на рис. 19.7, б). Как видно из рис. 19.7, формула геометрической оптики (19.15) хорошо описывает групповое время запаздывания импульса, равное  $t_{гр} = z/g(\omega_0)$ . Вместе с тем, при перемещении точки наблюдения из ближней зоны импульса в промежуточную становятся заметными дисперсионные искажения (*пространственно-временная дифракция* импульсов [235]). На больших расстояниях (рис. 19.7, а), когда длительность импульса приблизительно совпадает с френелевским интервалом ( $T_n^0 \sim \tau_f^0$ ), огибающая начинает приобретать свойства, характерные для дальней зоны импульса.

В представленной на рис. 19.7 эволюции формы огибающей импульса можно увидеть много общего с трансформацией формы волнового пучка (см. п. 7 § 11). В этом, в частности, проявляется *пространственно-временная аналогия* распространения импульсов и волновых пучков [452, 235].

На рис. 19.8 изображены огибающие косинусоидального импульса (рис. 19.8, а) и косинусоидального импульса с пьедесталом (рис. 19.8, б), рассчитанные на одинаковом относительном расстоянии  $z/cT_n^0 = 1,02$ . Рис. 19.7 и 19.8 иллюстрируют более высокую точность геометрической оптики для импульсов с плавными огибающими, для которых поперечная диффузия амплитуды меньше (в частности в начале и конце импульсов). Аналогичная ситуация имеет место и для волновых пучков (см. п. 7 § 11).

В заключение отметим, что, используя формулу (10.17) для величины френелевского интервала  $\tau_f^0$ , можно определить размеры областей неприменимости метода пространственно-временной геометрической оптики в различных ситуациях, например, вблизи фронта импульса, в окрестности каустик и фокусов и т. п., а также оценить величину поля в этих областях (см. п. 10 § 10 и [79]). Например, в [79] на основе выражения (10.17) для  $\tau_f^0$  получена оценка степени компрессии (фокусировки) ЧМ-импульсов в однородной среде (см. также [23, 142, 240, 241] и др.).

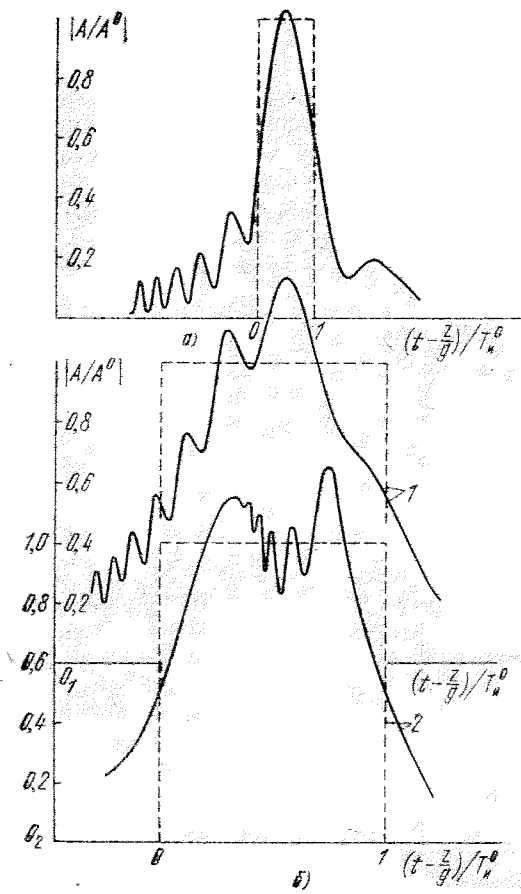


Рис. 19.7.

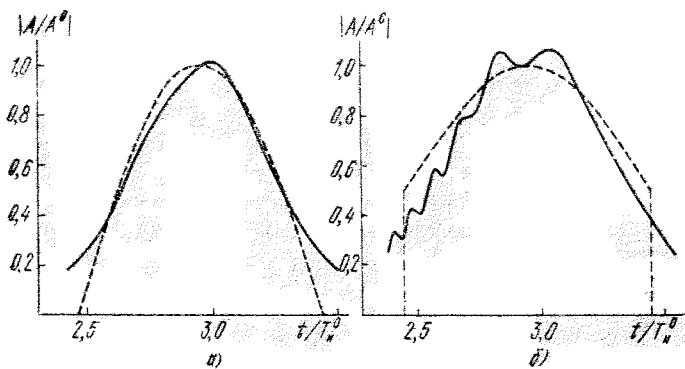


Рис. 19.8.

## § 20. Численные методы в геометрической оптике неоднородных сред

**1. Методы расчета траекторий лучей.** В произвольной двумерно- или трехмерно-неоднородной среде уравнения лучей не могут быть решены аналитически. Это вызывает известные трудности при применении метода геометрической оптики к различным реально встречающимся неоднородным средам. В связи с этим после появления ЭВМ стали интенсивно развиваться численные методы решения уравнений геометрической оптики, в том числе численные методы расчета лучей. Особенно широкое применение эти методы нашли при расчете лучей в различных задачах сейсмологии [201], гидроакустики [49], распространения радиоволн в ионосфере [216, 196] и др. Следует также иметь в виду большой опыт, накопленный при расчетах траекторий движения материальной точки в механике, в частности, в связи с задачами небесной механики [212]. Можно отметить несколько численных методов, используемых при расчетах лучевых траекторий на ЭВМ.

В случае сред с относительно простой структурой, например, плоско-слоистой, радиально-неоднородной и т. п., рассмотренных в предыдущих параграфах данной главы, численные расчеты обычно не представляют сложностей (вычислительные проблемы для этого случая обсуждаются в работах [196, 212, 271]). Здесь возможно применение стандартных численных методов расчетов интегралов, хотя иногда откажутся от квадратур и используют уравнения лучей в дифференциальной форме. Многочисленные примеры использования этого метода содержатся в монографиях по механике [212], акустике [25, 49, 187], сейсмологии [201] и распространению радиоволн в ионосфере [192—195] (см. также [104, 196, 216]).

Для расчета лучей в более сложных неоднородных средах необходимо численно решать дифференциальные уравнения лучей. Однако для ускорения расчетов используют различные варианты кусочно-однородной или кусочно-неоднородной аппроксимации среды, когда реальный закон неоднородности локально (на небольшом участке) заменяют более простым законом, допускающим явное вычисление траектории луча. Например, при кусочно-однородной аппроксимации траектория луча состоит из набора отрезков прямых; с вычислительной точки зрения в этом случае фактически используется кусочно-разностная схема решения уравнений лучей. Обсуждение некоторых особенностей алгоритмов расчетов с помощью указанного метода можно, например, найти в [216, 269, 274].

Метод расчета траекторий лучей может быть также основан на принципе Ферма (2.37), который позволяет сформулировать задачу расчета лучей как задачу численного отыскания экстре-

муму функционала Ферма (2.36). Пример реализации этого метода в задаче об отражении луча от криволинейной границы раздела двух однородных сред приводится в [270].

Прямой численный метод расчета лучевых траекторий в произвольной двумерно- или трехмерно-неоднородной среде основан на численном решении системы дифференциальных уравнений лучей в гамильтоновой форме (2.7) или (2.12). Этот метод был предложен Дж. Хазельгровом (1955 г.) в задаче о распространении радиоволн в неоднородной ионосфере [216], а затем получил широкое распространение в других областях применения лучевой теории [49, 187, 201, 275—277]. Для расчетов лучей могут быть использованы уравнения (2.12) в декартовой системе координат или уравнения (2.39), (2.41) в соответствующей системе криволинейных координат. Численное интегрирование уравнений лучей (2.12) или (2.39) проводят с учетом соответствующих начальных условий для лучей (см. § 4), при этом пользуются одним из хорошо известных методов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, например, методом Рунге — Кутты или его модификациями.

Важно отметить, что из шести уравнений системы уравнений (2.12) или (2.39) одна из компонент импульса может быть исключена, если воспользоваться уравнением эйконала, т. е. фактически на ЭВМ можно решать систему не из шести, а только из пяти уравнений лучей<sup>1)</sup>. Кроме того, в чисто траекторных расчетах, когда нас интересует только геометрия луча, можно уменьшить число уравнений до четырех, если еще исключить параметр  $t$ . В частности, если в декартовых координатах ( $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ )  $p_3 \neq 0$ , то система шести уравнений (2.12) легко преобразуется к виду

$$\frac{dx_i}{dx_3} = \frac{p_i}{p_3}, \quad \frac{dp_i}{dx_3} = \frac{1}{p_3} \frac{\partial}{\partial x_i} \ln n \quad (i = 1, 2), \quad (20.1)$$

где  $p_3^2 = n^2 - p_1^2 - p_2^2$ . Аналогично в двумерной задаче система четырех лучевых уравнений (2.12) сводится к двум уравнениям типа (20.1); примером такого преобразования в полярных координатах могут служить уравнения (2.46)—(2.48). В результате численного решения определяют не только координаты луча в физическом пространстве, но и фактически получают более общую информацию о виде траекторий в фазовом пространстве  $\{r, p\}$  (см. § 2).

Следует иметь в виду, что в алгоритмы численного интегрирования системы уравнения лучей может быть включено произ-

<sup>1)</sup> Другой способ, также приводящий к системе из пяти уравнений лучей, основан на использовании в (2.12) сферических углов  $\theta$ ,  $\varphi$  (углов преломления), которые характеризуют направление импульса  $p$  (см. формулы (13.6')).

вольное число отражающих и преломляющих границ раздела; методика расчета в этом случае подробно обсуждается в [201]. В ряде случаев оказываются весьма эффективными методы ускорения расчетов лучевых траекторий, основанные на использовании различных вариантов метода возмущений к решению уравнений для некоторых медленно изменяющихся характеристик лучей (например, для шага луча в квазислоистом неоднородном волноводе) [130, 131, 272, 273].

С многочисленными примерами применения метода прямого численного интегрирования на ЭВМ уравнений лучей для решения разнообразных прямых и обратных задач акустики, сейсмологии и радиофизики можно познакомиться в работах [49, 187, 196, 201, 216, 278—281, 289].

**2. Методы расчета эйконала и амплитуды волны.** Эйконал волны  $\psi$  легко находится численным интегрированием уравнения  $d\psi/d\tau = n^2$ , которое должно проводиться одновременно с интегрированием уравнений лучей (2.12) или (2.39). Если исключить параметр  $\tau$ , то мы приходим к пяти уравнениям, которые, например, в декартовой системе имеют вид

$$\frac{dx_i}{d\psi} = \frac{1}{n^2} p_i, \quad \frac{dp_j}{d\psi} = \frac{\partial}{\partial x_j} \ln n \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2), \quad (20.2)$$

где  $p_3^2 = n^2 - p_1^2 - p_2^2$ .

Сложнее обстоит дело с вычислением на ЭВМ амплитуды поля на луче, так как, согласно (3.9), для этого надо определить расходимость лучей (3.10), связанную с производными решения уравнения лучей. Приближенный метод определения расходимости лучей  $\mathcal{F} = \frac{n^0 da^0}{nda^0} = \frac{\mathcal{D}(\tau^0)}{\mathcal{D}(\tau)}$  основан на методе численного дифференцирования. Если иметь в виду систему уравнений лучей типа (20.2), то для вычисления удельного сечения лучевой трубки  $da/d\xi d\eta$  можно воспользоваться приближенной формулой

$$\left| \frac{da}{d\xi d\eta} \right| \approx \left| \frac{\Delta a}{\Delta \xi \Delta \eta} \right| = \left| \left[ \frac{\Delta r_1}{\Delta \xi} \frac{\Delta r_2}{\Delta \eta} \right] \right| = \left| \left( \frac{\Delta r_1}{\Delta \xi} \right)^2 \left( \frac{\Delta r_2}{\Delta \eta} \right)^2 - \left( \frac{\Delta r_1}{\Delta \xi} \frac{\Delta r_2}{\Delta \eta} \right)^2 \right|^{1/2}. \quad (20.3)$$

Здесь  $\Delta a$  — площадь, вырезаемая на фронте волны  $\psi = \text{const}$  трубкой лучей с координатами точек выхода  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi + \Delta \xi, \eta)$ ,  $(\xi, \eta + \Delta \eta)$ ,  $(\xi + \Delta \xi, \eta + \Delta \eta)$ , а  $\Delta r_1$  и  $\Delta r_2$  — приращения траекторий лучей (20.2), вычисленные соответственно при  $\eta = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$  или при  $\xi = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$ . Согласно (20.3), для расчета сечения лучевой трубки  $\Delta a$  необходимо провести с помощью (20.2) расчет траекторий трех соседних лучей, имеющих близкие лучевые координаты  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi + \Delta \xi, \eta)$ ,  $(\xi, \eta + \Delta \eta)$ , и найти соответствующие приращения этих траекторий  $\Delta r_1$  и  $\Delta r_2$ . Очевидно, это суще-

ственно увеличивает объем вычислений, при этом точность численного дифференцирования обычно невелика.

Возможен прямой численный метод расчета величины якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  и амплитуды поля, который основан на численном интегрировании *присоединенной* к (2.12) или (2.39) системы уравнений для производных  $\partial r/\partial \xi$ ,  $\partial r/\partial \eta$  от решения уравнений лучей [201, 278, 282—284]. Эта система уравнений получается из (2.12) и (2.39) дифференцированием по параметрам  $\xi$  и  $\eta$ <sup>1)</sup> и, например, в декартовых координатах  $x_i$  имеет следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n \frac{\partial n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}, \quad (20.4')$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2$  и для краткости использованы индексные обозначения лучевых координат  $\xi, \eta$ :  $\xi_1 \equiv \xi$ ,  $\xi_2 \equiv \eta$ . В векторной форме уравнения (20.4') принимают следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j} \right) = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \xi_j} \right) = \frac{d}{d\mathbf{r}} \left( n \frac{dn}{d\mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_j}. \quad (20.4'')$$

Численное решение уравнений (20.4) совместно с уравнениями лучей (2.12) дает возможность рассчитать якобиан  $\mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \mathbf{p}$  и амплитуду поля (3.9).

Аналогично в произвольной системе ортогональных криволинейных координат  $q_i$  для якобиана  $\mathcal{D}(\tau)$  имеем

$$\mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (\xi, \eta, \tau)} = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (q_1, q_2, q_3)} \frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (\xi, \eta, \tau)} = h_1 h_2 h_3 \frac{\partial (q_1, q_2, q_3)}{\partial (\xi, \eta, \tau)}, \quad (20.5)$$

где  $h_i$  — коэффициент Ламе координаты  $q_i$ . Поэтому для определения  $\mathcal{D}(\tau)$  в этом случае нужно численно рассчитать производные  $\partial q_i/\partial \xi_j$ . Присоединенная система для  $\partial q_i/\partial \xi_j$  получается из (2.41) аналогично (20.4) и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \right) &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \xi_j} - \frac{1}{h_i^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial h_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_j}, \\ \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial \xi_j} \right) &= \sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_j} + \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial \tilde{p}_k}{\partial \xi_j} \right), \end{aligned} \quad (20.6)$$

где  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2$ ;  $\tilde{p}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i}$  — компоненты импульса в

<sup>1)</sup> Законность этой операции обосновывается известной теоремой о существовании производных по начальным значениям от решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений ([39], стр. 298—307).

криволинейных координатах,  $f_i$  — функция, стоящая в правой части уравнения лучей (2.41):

$$f_i = \frac{1}{h_i} n \frac{\partial n}{\partial q_i} + \frac{1}{h_i} \sum_{m=1}^3 \frac{\tilde{p}_m}{h_m} \left( \tilde{p}_m \frac{\partial h_m}{\partial q_i} - \tilde{p}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_m} \right) \equiv f_i(q_k, \tilde{p}_k). \quad (20.7)$$

Явные выражения для  $\partial f_i / \partial q_k$ ,  $\partial f_i / \partial \tilde{p}_k$  могут быть получены из (20.7) и здесь не выписываются.

Использование наряду с уравнениями лучей присоединенной системы уравнений (20.4) или (20.6) увеличивает общее число интегрируемых уравнений до восемнадцати (шесть векторных уравнений). Избавившись с помощью уравнения эйконала от одной из компонент импульса (скажем,  $p_3$ ), число уравнений можно уменьшить до пятнадцати. Различные способы уменьшения числа численно решаемых уравнений и, следовательно, ускорения расчетов амплитуды поля на ЭВМ, обсуждаются в монографии [201]. Примеры конкретных физических задач из сейсмологии, акустики, радиофизики, которые решались указанным численным методом, можно найти в работах [49, 201, 216, 278] (см. также цитированную там литературу).

**3. Некоторые вычислительные проблемы.** Применение ЭВМ для решения уравнений геометрической оптики привело к возникновению некоторых специфических вычислительных проблем [201, 271]. Среди них отметим проблему задания (аппроксимации) параметров среды и вообще исходных данных, проблему переработки большого массива численных результатов при расчетах траекторий лучей, проблему нацеливания лучей на данную точку наблюдения и т. п.

В условиях, когда распределение параметров среды задано аналитической функцией, никаких специфических вычислительных сложностей не возникает. Однако в реальных физических задачах обычно приходится иметь дело с аппроксимацией параметров среды, заданных графически (картографически) или таблично. При аппроксимации приходится искать компромисс между простотой модели, позволяющей ускорить расчеты на ЭВМ, и точностью аппроксимации, которая, вообще говоря, зависит от целей и задач расчета. Например, при расчетах амплитуды поля следует избегать моделей среды с разрывами производных показателя преломления  $n(\mathbf{r})$ , поскольку это может привести к ложным эффектам и, следовательно, к большим ошибкам (см. § 13 и [188]). Это требование необходимо учитывать при использовании тех или иных интерполяционных формул для  $n(\mathbf{r})$ . Наиболее удобны для этой цели сплайны [285], например, кубические сплайны, которые аппроксимируют  $n(\mathbf{r})$  с двумя непрерывными производными. Примеры использования сплайнов для расчетов лучей содержатся в [201, 286]; дополнительные вопросы аппроксимации  $n(\mathbf{r})$  обсуждаются в [201, 271].

импульса несколько расширяет возможности решения обратных задач.

Нестационарная задача отражения от границ раздела представляет большой интерес, ибо в ряде случаев позволяет определить отдельные центры отражения. В недиспергирующих средах обратные задачи определения параметров среды по времени распространения волны  $t$  практически ничем не отличаются от стационарных обратных задач (пп. 2,3), так как, согласно § 7, время  $t$  пропорционально эйконалу волны. Нестационарным обратным задачам для недиспергирующих сред, особенно обратным кинематическим задачам в геофизике, посвящена обширная литература (см., например, [297—299, 311, 467]).

В случае сред с частотной дисперсией, например, плазмы (лабораторной, ионосферной, космической и др.) нестационарные обратные задачи представляют самостоятельный интерес. Наиболее разработана техника импульсного зондирования ионосферы [307—309, 192—195]. Расшифровку ионограмм (зависимостей группового времени задержки отраженного сигнала от несущей частоты) на основе геометрической оптики можно рассматривать как простейшую обратную задачу. Обратная задача в более сложной постановке позволяет по ионограмме восстановить высотный профиль электронной концентрации (в той его части, которая обуславливает отражение луча).

В настоящее время возрос также интерес к тонкой структуре принимаемых импульсов: информация о форме импульса может быть использована для определения характеристик границ раздела, а также для целей диагностики параметров как недиспергирующих, так и диспергирующих сред. Среди работ этого направления прежде всего необходимо отметить исследования, посвященные анализу сейсмограмм в геофизике [297—299] (см. также другие приложения [312—315]).

Очевидно, область применимости решения обратных задач геометрической оптики ограничена условиями применимости лучевого метода (см. § 10). Поэтому, например, в задачах диагностики определение параметров среды возможно лишь в областях, освещенных лучами. В противном случае, как уже отмечалось выше, для решения обратных задач могут применяться различные обобщения геометрической оптики (см. также заключительный раздел монографии) или другие подходы [300, 301, 310]<sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Кроме методов, рассмотренных в данном параграфе, при практических приложениях важно также иметь в виду голографические методы (см., например, [318, 466]) и другие волновые методы дистанционного зондирования и неразрушающего контроля материалов [319].



**§ 22. Поперечные электромагнитные волны  
 в изотропной среде**

**1. Уравнения Максвелла для монохроматических электромагнитных волн.** В данной главе мы уделим основное внимание тем особенностям, которые отличают векторные поля от скалярного, а именно — поляризации поля и возможности сосуществования нескольких типов волн. Эти отличительные черты мы рассмотрим на примере электромагнитных волн, которые представляют наибольший интерес для приложений в оптике и радиофизике. В отношении векторных задач теории упругих волн и квантовой механики мы ограничимся лишь некоторыми литературными ссылками.

В стационарной среде распространение монохроматических электромагнитных волн ( $E, H, B, D \sim e^{-i\omega t}$ ) описывается уравнениями Максвелла ( $k_0 = \omega/c$ ; используется гауссова система единиц):

$$\operatorname{rot} H + ik_0 D = 0, \quad \operatorname{rot} E - ik_0 B = 0. \quad (22.1)$$

Мы полагаем, что между индукциями и напряженностями электрического и магнитного полей имеют место линейные материальные соотношения вида

$$D_\alpha(r) = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, r) E_\beta(r), \quad B(r) = H(r), \quad (22.2)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  — тензор диэлектрической проницаемости в общем случае анизотропной среды (по повторяющимся индексам здесь и ниже подразумевается суммирование). Тензор магнитной проницаемости  $\mu_{\alpha\beta}$  предполагается равным единичному тензору:  $\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ , что справедливо для большинства сред (за исключением разве что ферритов), представляющих интерес с точки зрения распространения высокочастотных волн. Описание электромагнитных волн с учетом пространственной дисперсии, нестационарности среды и немонохроматичности поля мы отложим до § 25.

**2. Дебаевское разложение и уравнения последовательных приближений<sup>1)</sup>.** В изотропной среде тензор электрической проницае-

<sup>1)</sup> Для описания электромагнитных волн лучевой подход первым применил В. С. Игнатовский [320], но без рассмотрения поляризации поля. Полный анализ лучевого поля в изотропной среде провел С. М. Рытов [16, 17]. Позднее результаты С. М. Рытова неоднократно воспроизводились в литературе [29, 321].

Большой практический интерес представляет задача численного расчета лучей, проходящих в заданную точку наблюдения. Решение этой задачи, общий алгоритм решения которой в настоящее время не известен, необходимо для расчета полного поля (3.34) как функции точки наблюдения. С помощью рассмотренных выше численных методов решается задача Коши (задача с начальными данными), которая определяет изменение поля вдоль луча. Для расчета же поля в заданной точке наблюдения  $r$  необходимо разработать программу поиска начальных данных — лучевых координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ , т. е. программу *нацеливания лучей*<sup>1)</sup>. В принципе эта программа может быть основана на том или ином известном алгоритме численного решения трансцендентного уравнения. Однако практическая разработка более или менее общего алгоритма затрудняется при наличии многих лучей, когда трансцендентное уравнение имеет несколько корней  $\xi_v(r)$ ,  $\eta_v(r)$ ,  $\tau_v(r)$  со сложной динамикой их изменения при изменении точки наблюдения  $r$ , что осложняет прежде всего выбор адекватного начального приближения. При конкретных расчетах иногда может помочь метод перебора начальных данных, а в случае, когда известно хорошее начальное приближение, — различные итерационные методы [201], а также метод возмущений [287] (см. также [288]).

Подчеркнем, что обсуждаемые здесь методы могут быть использованы для расчетов как гармонических, так и не гармонических полей, полей в анизотропных и в нестационарных средах и др. Численные методы полезны также для определения различных характеристик полей, связанных с лучами (время распространения импульса, доплеровского смещения частоты, поляризационных характеристик и т. п.: см. [49, 187, 296, 201, 216] и цитированную там литературу).

Расчеты геометрикооптических полей могут быть дополнены вычислением френелевских объемов для того, чтобы оперативно контролировать условия применимости метода и численно оценивать поля в областях неприменимости лучевой оптики. Существенно, что расчеты френелевских объемов могут быть проведены фактически по стандартным методикам расчета лучевых траекторий.

## § 21. Обратные задачи геометрической оптики.

**1. Отражение и преломление волн на границах раздела.** Обратные задачи геометрической оптики представляют большой ин-

<sup>1)</sup> В наиболее часто встречающейся задаче об излучении точечного источника оказываются известными координаты двух точек — точки источника и точки приема, а ищутся направления выхода лучей из источника, определяемые начальными компонентами импульса  $P_i^0$ . В этом случае говорят о *двуточечной* траекторной задаче.

интерес для многих физических и технических исследований: радиолокация и гидролокация, синтез устройств с заданными характеристиками, волновые методы исследования структуры и параметров сред (диагностика плазмы, геофизические методы разведки полезных ископаемых, задачи структурной геологии), определение потенциалов квантовомеханического взаимодействия и др. Разумеется, интерпретация данных наблюдений на основе геометрической оптики возможна только в условиях малости дифракционных эффектов. Несмотря на то, что такие условия выполняются в очень многих случаях, представляющих практический интерес, дифракционные погрешности никогда не следует сбрасывать со счета при оценке потенциальной точности тех или иных методов решения обратных задач на основе геометрической оптики.

Наиболее простая обратная задача геометрической оптики заключается в определении характеристик границы раздела двух однородных сред по известным (измеренным или заданным техническими требованиями) характеристикам отраженного поля [290—292]. Так, в локационных задачах (задачах рассеяния) по отраженному полю плоской волны в дальней зоне (12.6) — величине эффективной поверхности рассеяния  $\Sigma$  можно определить комбинацию коэффициента отражения ( $\Gamma$ ) и гауссовой кривизны ( $K$ ) границы в точке отражения:  $K/|\Gamma|^2 = \pi/\Sigma$ . Отсюда, в частности, для идеального отражателя имеем:  $K = \pi/\Sigma$ . Как обобщение этого результата может быть использовано решение обратной задачи отражения в приближении физической оптики [293].

В задачах синтеза зеркальной антенны возникает проблема выбора формы зеркала или геометрии облучателя, которые обеспечивают заданную диаграмму направленности<sup>1)</sup>. В случае точечного источника определение формы зеркала в приближении геометрической оптики проводится на основе формулы (12.20) (см., например, [174, 291, 294]); возможно уточнение решения с помощью обобщений геометрической оптики, учитывающих дифракционные явления, возникающие на краях зеркала. Более сложна задача геометрикооптического синтеза в случае *двухзеркальных* антенн, когда необходимо учитывать эффекты отражения от двух поверхностей<sup>2)</sup>. Синтез *нескольких* отражающих и преломляющих границ представляет важную задачу инструментальной гео-

<sup>1)</sup> При синтезе линзовых антенн определяются необходимые параметры преломляющей границы [217].

<sup>2)</sup> Одна из первых задач синтеза формы отражающей поверхности была решена Б. Е. Кинбером [290], который показал, что в двумерной задаче достаточно двух отражений от криволинейных границ, чтобы из произвольного лучевого поля получить волну с заданным фазовым фронтом и с заданным распределением амплитуды на фронте. Идея этой работы была использована в [262] для расчета формы нетрансформирующего волноводного перехода.

метрической оптики, направленную на создание оптических устройств с заданными характеристиками [6—13].

**2. Обратные задачи в случае заданной модели неоднородной среды.** Привлечение априорной информации о структуре среды сводит решение обратной задачи к определению профиля или даже дискретного набора параметров неоднородности в рамках *предполагаемой модели* среды, например, для плоско-слоистой или радиально-неоднородной модели. Разумеется, необходимо контролировать возможные отклонения параметров среды от принятой модели, чтобы погрешность решения обратной задачи не превышала допустимый уровень.

В указанной постановке рассматривались задачи синтеза неоднородных линз и линзовых антенн [10, 217], а также многочисленные задачи диагностики параметров сред, в частности, лабораторной плазмы, ионосферы, космической плазмы, земной коры, теплового пограничного слоя и др. <sup>1)</sup> [182, 192—195, 245, 296—304, 307—309]. Проблемы синтеза плоско-слоистых, радиально-неоднородных и двумерно-неоднородных линзовых антенн обсуждаются в [217] (см. также [102] и §§ 15, 16).

При диагностике параметров среды возможно несколько постановок обратных задач, позволяющих восстановить профиль неоднородности  $n(x)$  или  $n(r)$  по следующим измеренным характеристикам поля: по фазе (эйконалу), по амплитуде (например, по эффективной поверхности рассеяния), по траектории луча (по особенностям его рефракции) <sup>2)</sup>. Основой решения обратных задач в этих случаях служит формула обращения для интегрального уравнения Абеля [303]:

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} dy, \quad (21.1)$$

которая при  $g(0) = f(0) = 0$  имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{dg}{dx} \frac{dx}{\sqrt{y-x}}. \quad (21.2)$$

Например, в задаче рассеяния плоской волны на радиально-неоднородном цилиндре измеряемой функцией  $g(x)$  может служить

<sup>1)</sup> С помощью квазиклассического приближения подробно исследованы обратные задачи квантовомеханического рассеяния, направленные на восстановление потенциала ядерного или молекулярного взаимодействия [4, 215, 302—304].

<sup>2)</sup> В ряде случаев, например, при оптических методах контроля среды, могут помочь наблюдения за каустиками. К указанным методам близки также интерференционные методы контроля.

фазовый сдвиг  $\Delta\Phi$  в зависимости от прицельного параметра луча  $\rho$  (см. § 15). Тогда формула (21.2) определяет  $n^2(r)$  через зависимость угла рассеяния  $\theta$  от  $\rho$ , ибо  $\theta = \frac{d}{d\rho} \Delta\Phi$ . При диагностике плазменного шнура роль функции  $g(x)$  может играть также зависимость фазового сдвига от частоты волны. В [4, 303] приводится аналогичное решение обратной задачи по заданной зависимости эффективной поверхности рассеяния от угла рассеяния. Другие примеры применения решения (21.2) можно найти в [295, 301, 305] для плоско-слоистой и радиально-неоднородной среды и в [245, 302—304] для квантовомеханического рассеяния. В ряде практических приложений, когда вид закона неоднородности хорошо известен, обратная задача сводится к определению параметров этого закона, например, параметров параболического закона  $n^2(z)$ . Фактически здесь для диагностики используется решение прямой задачи (см., например, [285, 296]).

Уточнение решения обратной задачи в рамках выбранной модели неоднородности проводится с помощью различных обобщений геометрической оптики (см. Заключение, а также [215, 227, 302—304, 306]). При постановке обратных задач следует также иметь в виду более сложные модели многомерно-неоднородных сред, допускающих разделение переменных (см. § 8). Представляют большой интерес и обратные задачи, связанные с отражением волн от одной или нескольких границ раздела в неоднородной среде.

**3. Многомерные обратные задачи.** Обратные задачи геометрической оптики в общем виде (многомерные обратные задачи) могут быть сформулированы для любого уравнения геометрической оптики: уравнения эйконала, переноса или луча. Разумеется, решения многомерных обратных задач возможно лишь численными методами. Особая трудность возникает в связи с тем, что эти задачи часто некорректны в классическом смысле и требуют специальных исследований [300, 301, 316, 317, 467].

Несмотря на большой интерес к многомерным обратным задачам, конкретных результатов получено пока немного [300, 301, 310, 467]. В ряде случаев при решении помогает метод возмущений (см. § 9), благодаря которому удается найти многомерную возмущающую функцию к априори известному закону (например, одномерной) неоднородности среды. Обратная геометрооптическая задача в этом случае оказывается тесно связанной с задачей интегральной геометрии (см. [300, 301]).

**4. Обратные задачи пространственно-временной геометрической оптики (нестационарные обратные задачи).** В случае пространственно-временной геометрической оптики возможны такие же постановки обратных задач, как и в пп. 1—3. Разумеется, дополнительная информация о времени распространения

мости  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  пропорционален единичному тензору:  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$ , при этом  $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$  и уравнения Максвелла (22.1) принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik_0\varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik_0\mathbf{H} = 0. \quad (22.3)$$

Применяя к этим уравнениям дебаевскую процедуру<sup>1)</sup>, представим электрическое и магнитное поля в виде разложений:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi}, \quad \mathbf{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi}. \quad (22.4)$$

Подставив (22.4) в (22.3) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $k_0$ , в нулевом приближении получим уравнения

$$[pH_0] + \varepsilon E_0 = 0, \quad [pE_0] - H_0 = 0, \quad (22.5)$$

где  $p \equiv \nabla\psi$ . В первом же приближении будем иметь

$$\begin{aligned} [pH_1] + \varepsilon E_1 &= -\operatorname{rot} H_0 \equiv X, \\ [pE_1] - H_1 &= -\operatorname{rot} E_0 \equiv Y. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Уравнения высших приближений получаются из (22.6) заменой индексов  $0 \rightarrow m-1$ ,  $1 \rightarrow m$ .

3. Уравнение эйконала. Исключив из уравнений нулевого приближения (22.5) магнитное поле  $H_0 = [pE_0]$ , для электрического поля  $E_0$  получим уравнение  $[p[pE_0]] + \varepsilon E_0 = 0$  или

$$(p^2 - \varepsilon)E_0 - p(pE_0) = 0. \quad (22.7)$$

Если ввести обозначение

$$q_{\alpha\beta} = (p^2 - \varepsilon)\delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta, \quad (22.8)$$

то уравнение (22.7) примет вид

$$q_{\alpha\beta}E_\beta = 0 \quad (22.9)$$

(начиная с этого момента мы опускаем индекс «0» у векторных амплитуд нулевого приближения).

Для того чтобы система линейных уравнений (22.9) имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\mathcal{H} = \det q_{\alpha\beta} = -\varepsilon(p^2 - \varepsilon)^2 = 0, \quad (22.10)$$

что возможно при

$$p^2 - \varepsilon = (\nabla\psi)^2 - \varepsilon = 0 \quad (22.11)$$

или при  $\varepsilon = 0$ . Условие  $\varepsilon = 0$  отражает возможность существо-

<sup>1)</sup> Разумеется, так же, как и в скалярной задаче, наиболее последовательный подход основан на разложении полей по степеням малого безразмерного параметра  $1/kL \ll 1$  (рытовская процедура); этот подход и был использован в [16].

вания продольных волн (см. § 25), тогда как условие (22.11) совпадает с уравнением эйконала (1.11) в скалярной постановке задачи. Следовательно, все результаты скалярной теории, относящиеся к эйконалу и лучам, сохраняют силу и для электромагнитных волн в изотропной среде.

**4. Поперечный характер электромагнитных волн в изотропной среде в рамках нулевого приближения. Поляризационное вырождение.** Умножая уравнения (22.5) скалярно на единичный вектор  $l = p/p$ , касательный к лучу, получаем  $(El) = (Hl) = 0$ . Следовательно, векторы  $E$  и  $H$  перпендикулярны лучу, т. е. в нулевом приближении поле имеет *поперечную структуру*. Из (22.5) следует также ортогональность векторов  $E$  и  $H$ :  $(EH) = 0$ .

При  $p^2 = \varepsilon$  элементы матрицы  $q_{\alpha\beta}$  равны  $-p_\alpha p_\beta$ , так что

$$\mathcal{H} = -\det \begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & p_1 p_3 \\ p_1 p_2 & p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_1 p_3 & p_2 p_3 & p_3^2 \end{vmatrix} = -p_1 p_2 p_3 \det \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}. \quad (22.12)$$

Из (22.12) видно, что ранг матрицы  $q_{\alpha\beta}$  равен единице, а в этом случае одновременно две из трех компонент вектора  $E$  могут быть выбраны по произволу [322]. В силу поперечности поля в качестве двух произвольных величин естественно взять проекции поля  $E$  на главную нормаль к лучу  $v$  и бинормаль  $b$ :

$$E = \Phi_v v + \Phi_b b, \quad (22.13)$$

при этом

$$H = [pE] = \sqrt{\varepsilon} [lE] = \sqrt{\varepsilon} (\Phi_v b - \Phi_b v). \quad (22.14)$$

Вещественным  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  отвечают линейно-поляризованные волны (рис. 22.1). В общем случае комплексных амплитуд  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  электромагнитная волна поляризована эллиптически.

Таким образом, поляризация поля определяется из уравнений нулевого приближения не полностью: ориентация векторов поля в плоскости, перпендикулярной лучу, остается неопределенной. В этом случае говорят о *поляризационном вырождении волн* в изотропной среде. Явление поляризационного вырождения связано с кратными собственными значениями матрицы  $q_{\alpha\beta}$  (см. § 23, п. 13 и § 24).

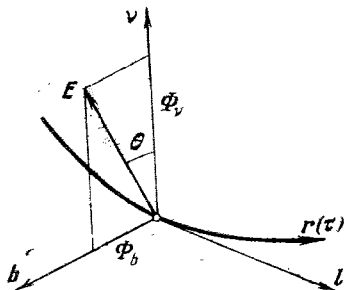


Рис. 22.1.

**5. Условия совместности уравнений первого приближения.** Исключив из системы уравнений (22.6) магнитное поле  $H_1$ ,

для  $E_1$  получим уравнение

$$[p[pE_1]] + \varepsilon E_1 = X + [pY] \equiv -\operatorname{rot} H - [p \operatorname{rot} E] \equiv Z. \quad (22.15)$$

При  $p^2 = \varepsilon$  определитель левой части этого уравнения и все его миноры второго порядка равны нулю (это видно непосредственно из (22.12)).

В соответствии с теоремой Фредгольма [322] для совместности неоднородных уравнений (22.15) необходимо, чтобы вектор  $Z$ , стоящий в правой части, был ортогонален всем решениям  $E'_j$  транспонированной однородной системы уравнений, т. е. должно быть  $(E'_j Z) = 0$ ,  $j = 1, 2$ . В данном случае решения транспонированной системы совпадают с решениями исходной системы (в силу симметрии матрицы  $q_{\alpha\beta}$ ). Поэтому решениями  $E'_j$  могут служить нормали  $\mathbf{v}$  и бинормаль  $\mathbf{b}$ , так что условия совместности имеют вид

$$(\mathbf{v}Z) = 0, \quad (\mathbf{b}Z) = 0. \quad (22.16)$$

Подставляя в (22.16) поля нулевого приближения (22.13) и (22.14) и учитывая, что  $p = \sqrt{\varepsilon} l$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \operatorname{rot} [\sqrt{\varepsilon} (\Phi_v \mathbf{b} - \Phi_b \mathbf{v})] - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{b} \operatorname{rot} (\Phi_v \mathbf{v} + \Phi_b \mathbf{b}) &= 0, \\ \mathbf{b} \operatorname{rot} [\sqrt{\varepsilon} (\Phi_v \mathbf{b} - \Phi_b \mathbf{v})] + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{v} \operatorname{rot} (\Phi_v \mathbf{v} + \Phi_b \mathbf{b}) &= 0. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Воспользовавшись далее формулой  $\operatorname{rot} \alpha \varphi = [\nabla \varphi \alpha] + \varphi \operatorname{rot} \alpha$ , формулой (2.27) для кручения  $\kappa$  и соотношением

$$\operatorname{div} l = \operatorname{div} [\mathbf{v} \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

преобразуем (22.17) к виду

$$l (2\sqrt{\varepsilon} \nabla \Phi_v + \Phi_v \nabla \sqrt{\varepsilon}) + \Phi_v \sqrt{\varepsilon} \operatorname{div} l + 2\sqrt{\varepsilon} \kappa \Phi_b = 0, \quad (22.18)$$

$$l (2\sqrt{\varepsilon} \nabla \Phi_b + \Phi_b \nabla \sqrt{\varepsilon}) + \Phi_b \sqrt{\varepsilon} \operatorname{div} l - 2\sqrt{\varepsilon} \kappa \Phi_v = 0. \quad (22.19)$$

Эти уравнения позволяют найти комплексные амплитуды  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  и тем самым полностью определить поляризационное состояние поля. Рассмотрим детали этого вопроса.

6. Сохранение потока энергии в лучевой трубке. Умножим уравнение (22.18) на  $\Phi_v^*$ , а уравнение (22.19) — на  $\Phi_b^*$ . Сложив вещественные части получившихся выражений, найдем

$$\operatorname{div} (pA^2) = 0, \quad A^2 \equiv |\Phi_v|^2 + |\Phi_b|^2 = |E|^2. \quad (22.20)$$

Учитывая, что в изотропной среде вектор Пойнтинга  $\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{E \mathbf{H}^*\}$  в силу (22.13) и (22.14) равен  $\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} pA^2$ , (22.20) можно интерпретировать как закон сохранения потока энергии  $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ . Определение амплитуды  $A = |E|$  из уравнения (22.20) производится так же, как в скалярной задаче (§ 3).



7. Сохранение формы эллипса поляризации. Система уравнений (22.18) и (22.19) допускает еще один закон сохранения: сложив уравнение (22.18), умноженное на  $\Phi_v$ , с уравнением (22.19), умноженным на  $\Phi_b$ , имеем

$$\operatorname{div}(\rho\Phi^2) = 0, \quad \Phi^2 \equiv \Phi_v^2 + \Phi_b^2 = E^2. \quad (22.21)$$

Величина  $\Phi^2 = E^2$  — квадрат напряженности электрического поля, — в общем случае не совпадает с  $A^2$ , т. е. с квадратом модуля электрического поля, но обе эти величины меняются вдоль луча одинаковым образом:

$$A = A^0 \sqrt{\mathcal{D}(\tau^0)/\mathcal{D}(\tau)}, \quad \Phi = \Phi^0 \sqrt{\mathcal{D}(\tau^0)/\mathcal{D}(\tau)}. \quad (22.22)$$

Поэтому отношение  $\chi = \Phi/A$  постоянно на луче и равно начальному значению:

$$\chi = \frac{\Phi}{A} = \operatorname{const} = \frac{\Phi^0}{A^0} = \chi^0. \quad (22.23)$$

В случае линейной поляризации ( $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  — вещественны)  $\chi = 1$ , а для кругополяризованных волн ( $\Phi_b = \pm j\Phi_v$ )  $\chi = 0$ . В общем случае эллиптически-поляризованной волны  $|\chi|$  характеризует эксцентриситет эллипса поляризации, а  $\arg \chi$  — положение векторов поля на поляризационном эллипсе. Поэтому сохранение величины  $\chi$  свидетельствует о сохранении формы эллипса поляризации вдоль луча.

8. Вращение векторов поля (закон Рытова). Выясним, как меняется ориентация эллипса поляризации на луче. Введем угол  $\theta$  следующим образом:

$$\operatorname{tg} \theta = \Phi_v/\Phi_b. \quad (22.24)$$

Этот угол в общем случае комплексен: его вещественная часть  $\theta' = \operatorname{Re} \theta$  описывает угол между большой осью эллипса поляризации и нормалью к лучу  $\nu$  (рис. 22.2), а мнимая часть  $\theta'' = \operatorname{Im} \theta$  определяет отношение малой полуоси эллипса  $l_1$  к большой полуоси  $l_2$ :  $l_1/l_2 = |\operatorname{th} \theta''|$ . От знака  $\theta''$  зависит направление вращения вектора поля  $E$  по поляризационному эллипсу (положительные значения  $\theta''$  отвечают вращению по часовой стрелке, если смотреть по направлению луча). В случае линейной поляризации (все величины  $\Phi$ ,  $\theta$ ,  $\Phi_v$ ,  $\Phi_b$  вещественны) угол  $\theta$  равен просто углу между вектором поля  $E$  и вектором главной нормали к лучу  $\nu$  (рис. 22.1).

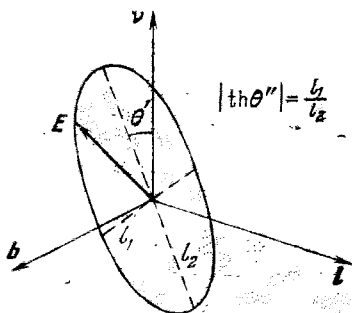


Рис. 22.2.

Величины  $\Phi = (\Phi_v^2 + \Phi_b^2)^{1/2}$  и  $\theta = \text{arctg}(\Phi_b/\Phi_v)$  можно использовать для описания поляризации поля вместо проекций  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$ . Последние выражаются через  $\Phi$  и  $\theta$  по формулам

$$\Phi_v = \Phi \cos \theta, \quad \Phi_b = \Phi \sin \theta. \quad (22.25)$$

Подставив (22.25) в (22.18) и учитывая (22.21), получаем

$$i\nabla\theta - \kappa = 0 \quad \text{или} \quad d\theta/d\sigma = \kappa. \quad (22.26)$$

Это уравнение было получено С. М. Рытовым [16, 17] и известно как закон Рытова вращения векторов поля относительно естественного трехгранника  $(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$ .

Интегрируя (22.26) вдоль луча, имеем

$$\theta = \theta^0 + \int_{\sigma^0}^{\sigma} \kappa d\sigma \quad \text{или} \quad \theta = \theta^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} \kappa \sqrt{\varepsilon} d\tau. \quad (22.27)$$

В силу вещественности кручения  $\kappa$  из (22.27) следует, что

$$\theta' = (\theta^0)' + \int_{\sigma^0}^{\sigma} \kappa d\sigma, \quad \theta'' = (\theta^0)'' = \text{const}. \quad (22.28)$$

т. е. вдоль луча меняется только ориентация эллипса поляризации, характеризуемая величиной  $\theta'$ , но не его форма, о чем уже говорилось в п. 7. Для плоских траекторий, когда кручение луча равно нулю, сохраняется также и ориентация большой оси эллипса поляризации относительно  $(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$ . Это характерно для плоско- и сферически-слоистых сред.

Для линейно-поляризованных волн ( $\theta$  — вещественно) изменение  $\theta$  отвечает вращению плоскости поляризации поля относительно трехгранника  $(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \mathbf{b})$ . Если ввести единичные векторы поля

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{E} = \mathbf{v} \cos \theta + \mathbf{b} \sin \theta, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H} = \mathbf{b} \cos \theta - \mathbf{v} \sin \theta, \quad (22.29)$$

то на достаточно больших (т. е. сравнимых с радиусом кручения  $R_{\text{кр}} = 1/\kappa$ ) расстояниях векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  в общем случае не возвращаются в начальные положения  $\mathbf{e}^0$  и  $\mathbf{h}^0$ , даже если в конце траектории вектор  $\mathbf{l}$  совпадает с начальным положением  $\mathbf{l}^0$  [323]<sup>1)</sup>.

Вместе с тем на сравнительно малых расстояниях  $\sigma \ll 1/\kappa$  векторы поля практически сохраняют свое положение относительно какой-либо неподвижной системы координат, поскольку

<sup>1)</sup> Отметим, что в неевклидовом пространстве с метрикой  $ds^2 = \varepsilon(x, y, z) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$  уравнение Рытова (22.26) описывает так называемый псевдопараллельный перенос векторов поля [323, 29].

одновременно с вращением векторов поля относительно естественного трехгранника со скоростью  $d\theta/d\sigma = \kappa$  происходит вращение самого трехгранника относительно  $l$  с той же скоростью, но в противоположном направлении (в силу одной из формул Серре — Френе (2.20)  $db/d\sigma = \kappa v$ ). Чтобы убедиться в этом, продифференцируем векторы (22.29) по  $\sigma$  с учетом (22.26) и (2.20); получим [323, 321]:

$$\frac{de}{d\sigma} = -Kl \cos \theta, \quad \frac{dh}{d\sigma} = Kl \sin \theta. \quad (22.30)$$

Согласно этим формулам элементарные приращения  $de$  и  $dh$  направлены вдоль касательной к лучу  $l$  и не имеют компонент по  $v$  и  $b$ . Таким образом, уравнение Рытова (22.26) отражает определенную инерционность векторов поля, которые локально не успевают следовать за кручением луча <sup>1)</sup>.

9. О поляризации поперечной волны в нулевом приближении лучевого метода. В случае линейно-поляризованной волны амплитуда  $\Phi$  совпадает с  $A$  и находится из (22.22) с вещественным начальным значением  $\Phi^0 = A^0$ . Угол  $\theta^0$  в (22.27) тоже веществен, а поле определяется выражением

$$E = \Phi_v v + \Phi_b b = \Phi (v \cos \theta + b \sin \theta). \quad (22.31)$$

Эквивалентный результат может быть получен и прямым интегрированием (22.30):  $E = \Phi e$ , где  $e = e^0 - \int Kl \cos \theta d\sigma$ .

В общем случае эллиптически-поляризованных волн  $\Phi$  и  $\theta$  в (22.31) вычисляются по формулам (22.22) и (22.27) с комплексными начальными значениями  $\Phi^0$  и  $\theta^0$ . Разумеется, тот же результат может быть получен путем разложения эллиптически-поляризованной волны на сумму двух линейно-поляризованных волн с последующим использованием более простых рецептов для волн с линейной поляризацией.

В большинстве приложений траектории лучей слабо отклоняются от плоских кривых, и поэтому текущий угол  $\theta$  обычно мало отличается от начального значения  $\theta^0$ . Тем не менее, этот эффект необходимо учитывать при рассмотрении ряда явлений. С отличиями  $\theta$  от  $\theta^0$  связана, в частности, так называемая геометрическая деполяризация световой волны в случайно-неоднородной среде. Величина этого эффекта была оценена в [324] путем решения уравнений (22.30) по методу возмущений. С рытовским вращением плоскости поляризации связана также деполяризация волн, отраженных от тел, помещенных в неоднородную среду [325, 422, 423]. Укажем еще, что рытовское вращение следует принимать во внимание в задачах переноса излучения в неоднородных средах [388].

<sup>1)</sup> Эта инерционность связана с сохранением момента импульса поля.

10. Возникновение продольных компонент поля в первом приближении лучевого метода. Спроектировав уравнения (22.6) на касательный к лучу вектор  $l$ , получим

$$E_{1l} \equiv (lE_1) = -\frac{1}{\varepsilon} l \operatorname{rot} H_0, \quad H_{1l} \equiv (lH_1) = l \operatorname{rot} E_0. \quad (22.32)$$

По порядку величины  $|\operatorname{rot} H_0| \sim |H_0|/L$ , где  $L$  — характерный масштаб изменения амплитуды. Учитывая, что  $E_1$  представляет собой коэффициент при  $1/ik_0$ , для «истинного» продольного поля  $E_{1l}/ik_0$  получаем оценку:

$$\left| \frac{E_{1l}}{ik_0} \right| \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{|H_0|}{k_0 L}$$

(аналогично  $|H_{1l}/ik_0| \sim |E_0|/k_0 L$ ). Из этой оценки следует, что продольная компонента поля мала всюду, за исключением области, в которой  $\varepsilon \leq 1/k_0 L$ . В плазме — это область плазменного резонанса  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где поперечные волны могут возбуждать интенсивные продольные (плазменные) колебания [27].

Анализ более высоких приближений проведен в [29].

11. Отражение поперечных электромагнитных волн от границ раздела. В случае электромагнитных волн коэффициенты отражения  $\Gamma$  и прохождение  $D$  зависят от поляризации падающей волны. Вычисления, подобные проведенным в § 5, но только с электродинамическими граничными условиями для тангенциальных компонент поля

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad H_{t1} = H_{t2}, \quad (22.33)$$

в нулевом приближении лучевого метода приводят к локальным формулам Френеля. Фазовые соотношения и законы отражения лучей остаются при этом такими же, как в скалярной задаче.

Представим падающую на границу раздела волну в виде суммы  $E_{\text{пад}} = E_{\parallel} + E_{\perp}$ , где  $E_{\parallel}$  — компонента поля в плоскости падения, а  $E_{\perp}$  — компонента, перпендикулярная плоскости падения. Тогда амплитуда отраженного и преломленного полей равны [326]:

$$E_{\text{отр}} = \Gamma_{\parallel} E_{\parallel} + \Gamma_{\perp} E_{\perp}, \quad E_{\text{пр}} = D_{\parallel} E_{\parallel} + D_{\perp} E_{\perp}, \quad (22.34)$$

где

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_{\text{пр}} - n_2 \cos \theta}{n_2 \cos \theta_{\text{пр}} + n_1 \cos \theta}, \quad D_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_{\text{пр}}}{n_1 \cos \theta_{\text{пр}} + n_2 \cos \theta},$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_{\text{пр}}}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_{\text{пр}}}, \quad D_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_{\text{пр}}}. \quad (22.35)$$

В этих формулах угол падения  $\theta$  и угол преломления  $\theta_{\text{пр}}$  связаны законом Снеллиуса (5.6), а  $n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2}}$  — показатели прелом-

ления двух сред. Коэффициент отражения  $\Gamma_{\parallel}$  обращается в нуль при брюстеровском угле  $\theta_{\text{бр}} = \text{arctg}(n_2/n_1)$ . Формулы для амплитуд полей на слабых границах раздела выводятся так же, как в § 5.

**12. Поляризационное вырождение в задачах квантовой механики и теории упругости.** Векторный характер уравнений квантовой механики обусловлен наличием у частиц спина. Первую попытку применить к решению уравнения Дирака квазиклассическое (геометрооптическое) приближение сделал В. Паули [327], который истолковал только одно из условий совместности уравнений первого приближения, приводящее к сохранению плотности потока вероятности. Вращение спина электрона, движущегося по классической траектории, предсказал С. М. Рытов [16, 17], а А. Д. Галанин подтвердил это расчетом [328], получив для ориентации спина уравнение, аналогичное (22.26). Поляризационное вырождение снимается в этом случае внешним магнитным полем.

Вращение плоскости поляризации происходит и при распространении поперечных упругих волн в неоднородной изотропной среде. Уравнение, совпадающее с (22.26), было получено для этого случая в работе [329] (см. также [330] и [331]). При наличии анизотропии поляризационное вырождение снимается. Особенность волн в упругих средах состоит в том, что кроме поперечных там могут распространяться также и продольные волны. На резких границах раздела происходит взаимная трансформация этих волн. Подробное изложение вопроса и обширная библиография по геометрической оптике упругих волн даны в [201].

## § 23. Независимые нормальные волны в анизотропной среде

**1. Уравнение эйконала.** Не обсуждая свойства плоских волн в однородных анизотропных средах (эти свойства описаны во многих книгах, см., например, [24, 27, 30, 326, 332]), обратимся непосредственно к рассмотрению волн в неоднородных средах. К настоящему времени довольно хорошо разработана геометрическая оптика одномерно-неоднородных анизотропных сред [27, 182, 192, 193, 333, 334] (обширная библиография по волнам в неоднородной магнитоактивной плазме имеется в [27]). Гораздо менее подробно изучены трехмерные задачи (см. [19, 85, 335—337, 425]). Здесь мы будем придерживаться работ [85, 338, 339].

Уравнения нулевого и первого приближений для волн в анизотропной среде отличаются от (22.5) и (22.6) только тем, что вместо скаляра  $\varepsilon$  в них появится тензор проницаемости  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , который сначала мы будем считать эрмитовым<sup>1)</sup>:  $\varepsilon_{\beta\alpha}^* = \varepsilon_{\alpha\beta}$ . Ес-

<sup>1)</sup> Для анизотропных диэлектриков без потерь тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  является вещественным; в гиротропных же средах (например, в магнитоактивной плазме) тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  комплексен даже в отсутствие поглощения и эрмитов.

ли исключить из уравнений нулевого приближения магнитное поле, то для вектора  $E$  мы получим систему однородных уравнений, родственную (22.7):

$$\rho^2 E - \hat{\varepsilon} E - p(pE) = 0 \quad (23.1)$$

или

$$q_{\alpha\beta} E_\beta = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (23.2)$$

В отличие от § 21 теперь

$$q_{\alpha\beta} = \rho^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad p_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}. \quad (23.3)$$

Приравняв нулю определитель системы уравнений (23.1), мы получаем уравнение эйконала для волн в анизотропной среде:

$$\mathcal{H} = \det \|q_{\alpha\beta}\| = \det \| \rho^2 \delta_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta - \varepsilon_{\alpha\beta} \| = 0. \quad (23.4)$$

Оно имеет такой же вид, как и дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в однородной анизотропной среде. Поэтому его можно рассматривать как локальное дисперсионное уравнение для квазиплоских волн в плавно неоднородной анизотропной среде.

Сделав в (23.4) подстановку

$$p = pl, \quad l^2 = 1, \quad (23.5)$$

мы получим биквадратное уравнение относительно  $p = |p|$ , поскольку слагаемое шестой степени выпадает:

$$\mathcal{H} = Ap^4 + 2Bp^2 + C = 0. \quad (23.6)$$

В общем случае коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  в этом уравнении довольно сложно выражаются через компоненты тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и единичного вектора  $l$ . Соответствующие выражения, однако, существенно упрощаются, если использовать специальные системы координат, в которых тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  записывается наиболее простым образом (системы координат, связанные с выделенными направлениями в среде — с оптическими осями, с направлением внешнего магнитного поля и т. д. [24, 27, 326, 332]). Отметим, что в изотропной среде  $A = -\varepsilon$ ,  $B = \varepsilon^2$  и  $C = -\varepsilon^3$ , так что уравнение (23.6) принимает вид (22.10).

Для эрмитова тензора проницаемости коэффициенты уравнения (23.6) вещественны, а его корни

$$p_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \equiv n_{1,2}^2(r, l) \quad (23.7)$$

являются либо вещественными, либо комплексно-сопряженными величинами. Величины  $n_{1,2}$  представляют собой показатели преломления волн в анизотропной среде. Мы ограничимся рассмот-

рением чисто вещественных корней, отвечающих распространяющимся волнам. Имея в виду (23.7), факторизуем гамильтониан (23.6):

$$\mathcal{H} = A(p^2 - n_1^2)(p^2 - n_2^2) = 0. \quad (23.8)$$

Это уравнение фактически распадается на два независимых уравнения, которые удобно представить в виде

$$\mathcal{H}_j(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} [p^2 - n_j^2(\mathbf{r}, l)] = 0, \quad j = 1, 2. \quad (23.9)$$

**2. Независимые нормальные волны.** Обращению в нуль одного из множителей  $\mathcal{H}_1$  или  $\mathcal{H}_2$  в (23.9) отвечает определенный тип электромагнитных *нормальных (собственных)* волн, или, коротко, определенные *моды* колебаний. Каждая такая волна характеризуется своим значением показателя преломления  $n_j$  и фазовой скоростью  $v_j = c/n_j$ , а также определенной поляризацией.

Учитывая возможность существования двух нормальных волн, следует несколько изменить форму геометрикооптического разложения (22.4), записав поле  $E$  в виде суммы двух рядов:

$$E = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{E_{m1}}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi_1} + \frac{E_{m2}}{(ik_0)^m} e^{ik_0\psi_2} \right). \quad (23.10)$$

При подстановке (23.10) в уравнения Максвелла (22.1) теперь нужно приравнивать нулю коэффициенты не только при одинаковых степенях  $k_0$ , но и при быстро осциллирующих функциях  $\exp(ik_0\psi_1)$  и  $\exp(ik_0\psi_2)$ . Тем самым делается допущение о *независимости* нормальных волн.

Строго говоря, рассматриваемые нами нормальные волны независимы только в однородной среде. В неоднородной же среде о независимом распространении нормальных волн можно говорить лишь приближенно. Критерий независимости можно сформулировать из следующих соображений. Суперпозиция волн (23.10) имеет три характерных пространственных масштаба: длину волны  $\lambda = \lambda_0/n$  (масштаб изменения экспонент), масштаб  $l_0 = 1/k_0|n_1 - n_2|$  биений между двумя осциллирующими экспонентами (на расстояниях  $\Delta r$  порядка  $l_0$  разность фаз  $k_0(\psi_1 - \psi_2) \approx k_0(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \Delta r$  меняется на 1 рад) и масштаб  $L$  изменения амплитуд поля.

Нормальные волны можно считать независимыми, если  $l_0 \ll L$  или

$$\Delta n \equiv |n_1 - n_2| \gg 1/k_0 L \sim \mu. \quad (23.11)$$

При выполнении этого условия имеющееся различие в коэффициентах преломления (фазовых скоростях) двух волн можно обнаружить при помощи тех или иных физических приборов. При

выполнении же противоположного условия

$$\Delta n \leq \mu \quad (23.12)$$

изменения результирующего поля (23.10) из-за различия в коэффициентах преломления нельзя отличить от изменений, связанных с переменностью амплитуд. В этих условиях уже нельзя говорить о независимости нормальных волн, так что в рамках представления о независимых волнах предельный переход  $\epsilon_{\alpha\beta} \rightarrow \epsilon \delta_{\alpha\beta}$  или  $\Delta n \rightarrow 0$  от анизотропной среды к изотропной принципиально невозможен. Такой переход осуществим, однако, на основе приближений, учитывающих взаимодействие нормальных волн (см. § 24).

**3. Уравнения лучей.** Каждой нормальной волне отвечает свое семейство лучей, т. е. семейство характеристик уравнения эйконала (23.9). Уравнения лучей в анизотропной среде имеют вид

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial p} \equiv s(p, r), \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial r}. \quad (23.13)$$

(индексы  $j = 1$  или  $2$ , обозначающие тип волны, для краткости опускаем). Параметр  $\tau$  связан с длиной дуги  $\sigma$  соотношением

$$d\sigma = \sqrt{(dr)^2} = \left| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right| d\tau = |s| d\tau. \quad (23.14)$$

Начальные условия для траектории  $r(\tau)$  и импульса  $p(\tau)$  ставятся так же, как и в скалярной задаче (см. § 2).

В анизотропной среде направление лучей (23.13) характеризуется *лучевым вектором*  $s = dr/d\tau$ , который в общем случае не совпадает с направлением нормали  $p$  к фазовому фронту<sup>1)</sup>. Различие между  $p$  и  $s$  определяется вектором

$$q = s - p = -\frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial p} = -n \frac{\partial n}{\partial p} \quad (23.15)$$

(в изотропной среде  $q = 0$ ). Поскольку коэффициент преломления  $n$  зависит только от направления  $l = p/p$  импульса  $p$ , имеем

$$\frac{\partial n}{\partial p_i} = \frac{\partial n}{\partial l_j} \frac{\partial l_j}{\partial p_i} = \frac{\partial n}{\partial l_j} \frac{1}{p} (\delta_{ij} - l_i l_j).$$

Тогда в силу (23.15) и с учетом того, что  $p = n$ ,

$$q_i = -\frac{\partial n}{\partial l_j} (\delta_{ij} - l_i l_j) \quad \text{или} \quad q = \left[ l \left[ l \frac{\partial n}{\partial l} \right] \right]. \quad (23.16)$$

Из (23.16) немедленно следует, что векторы  $q$  и  $p$  взаимно перпендикулярны (рис. 23.1),  $(pq) = 0$ , и что  $s = \sqrt{p^2 + q^2}$ . Угол

<sup>1)</sup> Иными словами, в анизотропной среде лучи теряют смысл *фазовых траекторий*, т. е. траекторий, перпендикулярных фазовому фронту.



$\alpha$  между векторами  $s$  и  $p$  можно найти из соотношения

$$\cos \alpha = \frac{p}{s} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (q/n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial n / \partial p)^2}}. \quad (23.17)$$

Касательный к лучу вектор  $s$  параллелен вектору групповой скорости  $g$ . В самом деле, гамильтониану (23.9), зависящему от  $p$ ,  $r$  и (это явно не указано) от  $\omega$ , можно поставить в соответствие гамильтониан (см. ниже (25.16)):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(k, \omega, r) = \\ = \frac{1}{2} \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \left( r, \omega, \frac{k}{\omega} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

зависящий от  $k = \frac{\omega}{c} p$ ,  $r$  и  $\omega$ . Тогда

по формулам из § 7 (см. также (25.17)) для групповой скорости  $g$  имеем

$$g = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{k - \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{\partial n^2}{\partial k}}{\frac{1}{2c^2} \frac{\partial (\omega^2 n^2)}{\partial \omega}} = \frac{cs}{n \frac{\partial (\omega n)}{\partial \omega}}. \quad (23.18')$$

Поскольку  $s = p / \cos \alpha = n / \cos \alpha$  (см. рис. 23.1), для модуля групповой скорости находим

$$g = \frac{c |s|}{n} \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} = \frac{c}{\cos \alpha} \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1}. \quad (23.18'')$$

В изотропной среде  $\alpha = 0$ , и поэтому (23.18) переходит в выражение (7.23) для  $g$ .

Поверхность  $\Pi$ , образованная в пространстве импульсов концом вектора  $p = \ln(l)$  при изменении направления единичного вектора  $l$ , носит название *поверхности показателя преломления*. На этой поверхности  $\mathcal{H}(p, r) = 0$ , так что лучевой вектор  $s = \partial \mathcal{H} / \partial p \equiv \nabla_p \mathcal{H}$  перпендикулярен этой поверхности  $\Pi$  (рис. 23.1). Это дает простой графический способ построения лучей, если известно направление нормали  $p$  к фазовому фронту  $\psi = \text{const}$ .

Поверхность показателя преломления имеет в  $p$ -пространстве две оболочки (правильнее сказать — двулистную оболочку) соответственно двум типам нормальных волн, например, обыкновенной и необыкновенной волнам в кристаллах или в магнитоактивной плазме. Наряду с поверхностью показателя преломления  $p = \ln(l)$  часто используются родственные ей поверх-

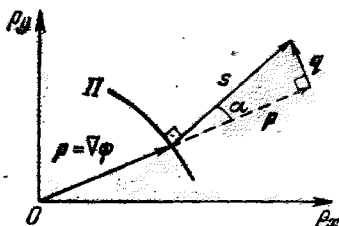


Рис. 23.1.

ности фазовых скоростей (поверхность нормалей)  $v = c/l/n(\mathbf{l})$  и групповых скоростей (лучевая поверхность)  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{l})$ . Общие свойства этих поверхностей описаны в [24, 326, 332] применительно к кристаллам и в [30, 342] — для магнитоактивной плазмы.

4. Решение уравнения эйконала. При известных решениях лучевых уравнений (23.13) эйконал можно найти по формуле (2.9). В данном случае для волны типа  $j$  имеем

$$\left( p \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \right)_j = (ps)_j = p_j^2 = n_j^2$$

и поэтому

$$\psi_j = \psi_j^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} n_j^2 d\tau. \quad (23.19)$$

Эту формулу можно записать иначе, если учесть, что в силу (23.14) и (23.17)  $nd\tau = |s|d\tau (n/|s|) = d\sigma \cos \alpha$ . Тогда

$$\psi_j = \psi_j^0 + \int_{\sigma^0}^{\sigma} n_j \cos \alpha_j d\sigma. \quad (23.20)$$

Величина  $n_r = n \cos \alpha$  характеризует изменение эйконала вдоль луча и поэтому называется *лучевым* коэффициентом преломления.

5. Определение векторов поляризации нормальных волн. Рассматривая какой-либо один тип волны, положим

$$\mathbf{E} = \Phi \mathbf{f}, \quad \mathbf{H} = [p\mathbf{E}] = \Phi [p\mathbf{f}]. \quad (23.21')$$

где  $\Phi$  — комплексная амплитуда поля, а  $\mathbf{f}$  — вектор поляризации (также, вообще говоря, комплексный). Этот вектор удобно нормировать к единице:

$$(\mathbf{f}\mathbf{f}^*) = 1, \quad |\mathbf{E}|^2 = |\Phi|^2, \quad (23.21'')$$

но возможны и другие варианты нормировки.

Компоненты вектора поляризации  $\mathbf{f}$ , как и компоненты самого поля нулевого приближения  $\mathbf{E}$ , удовлетворяют системе однородных уравнений

$$q_{\alpha\beta} f_{\beta} \equiv (p^2 \delta_{\alpha\beta} - p_{\alpha} p_{\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}) f_{\beta} = 0, \quad (23.22)$$

из которой определяются только отношения  $f_1 : f_2 : f_3$ , но не сами величины  $f_{\beta}$ . Нормировка (23.21'') устраняет произвол в выборе модулей  $|f_{\beta}|$ , но при этом остается еще неопределенность в выборе фазового множителя  $e^{i\gamma}$ , который характеризует положение вектора  $\mathbf{f}$  на эллипсе поляризации. С точностью до этого множителя вектор поляризации  $\mathbf{f}$  находится из (23.22) для каждой точки  $\mathbf{r}$  и для любого направления  $\mathbf{l} = p/p$ . Ниже мы убедимся, что

неопределенность в выборе множителя  $e^{it}$  не сказывается на величине поля  $E = \Phi f$ .

**6. Условие совместности уравнений первого приближения.** Уравнение для поля  $E_1$  аналогично уравнению (22.15):

$$[p[pE_1]] + \hat{\epsilon}E_1 = Z \equiv -\text{rot } H_0 - [p \text{rot } E_0], \quad (23.23)$$

но, в отличие от изотропной среды, определитель  $\mathcal{H} = \det \|q_{\alpha\beta}\|$  имеет некратные корни  $p_j = n_j$  (поляризационное вырождение отсутствует), и ранг матрицы  $q_{\alpha\beta}$  при  $p = P_1$  или  $p = P_2$  равен двум. В соответствии с теоремой Фредгольма мы должны записать теперь только *одно* условие совместности вида  $(E'Z) = 0$ .

В нашем случае тензор  $\hat{\epsilon}$  по предположению эрмитов, и поэтому решением  $E'$  транспонированной однородной системы может служить комплексно-сопряженное поле нулевого приближения  $E^*$ , так что условие совместности  $(E'Z) = 0$  принимает вид

$$(E^*Z) = 0. \quad (23.24)$$

Подставляя сюда поля  $E$  и  $H$  из (23.21), запишем это условие как

$$E^* \text{rot } H - H^* \text{rot } E = 0. \quad (23.25)$$

Из этого комплексного уравнения мы определим модуль и аргумент амплитудного фактора  $\Phi = |\Phi|e^{i\theta}$ .

**7. Уравнение переноса для амплитуды.** Приравняв нулю вещественную часть (23.25), получаем

$$(E^* \text{rot } H - H^* \text{rot } E) + \text{к. с.} = \text{div} ([EH^*] + [E^*H]) = 0, \quad (23.26)$$

где «к. с.» означает комплексно-сопряженную величину. Уравнение (23.26) можно переписать в форме закона сохранения потока энергии [85, 338, 339]:

$$\text{div } S = 0, \quad S = \frac{c}{16\pi} ([EH^*] + [E^*H]), \quad (23.27)$$

или

$$\text{div} (\sigma |\Phi|^2) = 0, \quad (23.28)$$

где  $\sigma = 16\pi S/c |\Phi|^2$  — вектор, параллельный вектору Пойнтинга:

$$\sigma = [f[pf^*]] - [f^*[pf]] = 2p - f(pf) - f^*(pf). \quad (23.29)$$

Вектор  $\sigma$  параллелен лучевому вектору  $s = dr/d\tau$  и вектору групповой скорости  $g$ . Коэффициент пропорциональности  $\xi$  между  $\sigma$  и  $s$  можно найти из соотношения  $S = wg$  между вектором Пойнтинга и плотностью электромагнитной энергии

$$w = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial (\omega^2 \epsilon_{\alpha\beta})}{\omega \partial \omega} f_{\alpha} f_{\beta}^* |\Phi|^2, \quad (23.30)$$

которое мы выведем в § 25. Использование (23.18) и (23.30) дает

$$\sigma = \frac{16\pi g w}{c|\Phi|^3} = 2s \frac{\partial(\omega^2 \epsilon_{\alpha\beta})}{\partial\omega} f_{\alpha} f_{\beta}^* \left(\frac{\partial\omega^2 n^2}{\partial\omega}\right)^{-1} \equiv \zeta s. \quad (23.31)$$

Интегрируя (23.28) по объему лучевой трубки (см. рис. 3.1), получаем формулу

$$|\Phi| = |\Phi^0| \sqrt{\frac{|\sigma^0| da^0}{|\sigma| da}} = |\Phi^0| \sqrt{\frac{\zeta^0 |s^0| da^0}{\zeta |s| da}}, \quad (23.32)$$

которая отличается от (3.18) только заменой коэффициента преломления  $n$  на  $|\sigma| = \zeta |s|$ .

При помощи соотношения (23.31) можно получить иную форму решения для амплитуды. Подставляя (23.31) в (23.28), имеем

$$s \nabla(\zeta |\Phi|^2) + \zeta |\Phi|^2 \operatorname{div} s = 0. \quad (23.33)$$

Поскольку  $s = dr/dt$ , первое слагаемое в (23.33) равно  $d(\zeta |\Phi|^2)/dt$ , тогда как второе слагаемое по формуле Лиувилля (см. [426]) выражается через якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$ :

$$\operatorname{div} s = \frac{d}{dt} \ln \mathcal{D}(\tau), \quad \mathcal{D}(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}.$$

В результате из (23.33) получаем выражение

$$|\Phi| = |\Phi^0| \sqrt{\frac{\zeta^0 \mathcal{D}(\tau^0)}{\zeta \mathcal{D}(\tau)}}, \quad (23.34)$$

которое эквивалентно (23.32), поскольку  $|\sigma| da = \zeta |s| da = \zeta \mathcal{D}(\tau) d\xi d\eta$ .

8. Уравнение для аргумента комплексной амплитуды. Уравнение для величины  $\delta = \arg \Phi$  получается приравниванием нулю мнимой части уравнения (23.25):

$$s \nabla \delta = M, \quad M = \operatorname{Im}(f^* \operatorname{rot}[pf] + [pf] \operatorname{rot} f^*). \quad (23.35)$$

В силу (23.31) левая часть (23.35) равна  $\zeta s \nabla \delta = \zeta d\delta/dt$ , откуда имеем

$$\delta = \delta^0 + \int_{\tau^0}^{\tau} \frac{M}{\zeta} d\tau. \quad (23.36)$$

Анализ выражения  $M$  показывает, что эта величина равна нулю в неоднородных кристаллах (в силу вещественности  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $f$ ) и в однородных средах (доказательство равенства  $M=0$  основано на постоянстве параметров  $p$  и  $f$  на луче) и отлична от нуля только в неоднородных гиротропных средах.

Изменение аргумента амплитуды  $\delta$  вдоль луча впервые обнаружил Р. Льюис [85]. Он же отметил инвариантность поля по отношению к выбору фазового множителя у вектора  $f$ . Если принудительно изменить аргумент вектора поляризации  $f$ , поло-

жив  $\tilde{f} = f e^{i\gamma}$ , то для соответствующей величины  $\tilde{M}$  получим

$$\tilde{M} = M - \zeta \frac{d\gamma}{dt}.$$

В результате из (23.36) следует, что  $\tilde{\delta} = \delta - \gamma$  и

$$\tilde{\Phi} = |\tilde{\Phi}| e^{i\tilde{\delta}} = |\Phi| e^{i(\delta-\gamma)} = \Phi e^{-i\gamma}$$

(мы учли здесь, что  $|\tilde{\Phi}| = |\Phi|$ , так как  $|\tilde{\sigma}| = |\sigma|$ ). Таким образом

$$\tilde{E} = \tilde{\Phi} \tilde{f} = |\Phi| e^{i\delta - i\gamma} f e^{i\gamma} = \Phi f = E,$$

т. е. результирующее поле  $E = \Phi f$  действительно не зависит от выбора фазы  $\gamma$  вектора поляризации.

В итоге мы приходим к следующей схеме нахождения лучевого поля в анизотропной среде: 1) определение лучей из уравнений (23.13) для каждой из нормальных волн; 2) вычисление эйконала по формулам (23.19) или (23.20); 3) нахождение вектора поляризации  $f$  из уравнений (23.22); 4) определение модулей амплитуд нормальных волн по формулам (23.32) или (23.34) и аргументов этих амплитуд по формуле (23.36). Результирующее поле нулевого приближения представляется суммой двух волн:

$$E = \Phi_1 f_1 e^{ik_0\psi_1} + \Phi_2 f_2 e^{ik_0\psi_2}. \quad (23.37)$$

В этой схеме вычислений предполагается, что на исходной поверхности  $Q$  заданы начальные условия для амплитуд  $\Phi_{1,2}$  и эйконалов  $\psi_{1,2}$ . При наличии каустик в (23.37) следует добавлять каустические сдвиги фазы, как в § 4, и проводить суммирование по всем лучам, приходящим в точку наблюдения.

**9. Лучи как энергетические траектории. Френелевский объем в анизотропной среде.** Из результатов п. 7 следует, что лучи, утратив в анизотропной среде функции *фазовых траекторий* (т. е. линий, перпендикулярных фазовым фронтам), сохранили функции *энергетических траекторий*, так как поток энергии  $S$  направлен вдоль лучевого вектора  $s = dr/dt$ . Это тесно связано с интерференционным характером формирования волнового поля в анизотропной среде [24, 30, 195].

Рассмотрим пучок плоских волн (волновой пакет), импульсы которых лежат внутри конуса  $(p, p + \Delta p)$ , показанного на рис. 23.2. Если в начальный момент времени все плоские волны имели одинаковые фазы, то через некоторое время  $t$  фазовые фронты этих волн  $\psi_p = pr = ct$  и  $\psi_{p+\Delta p} = (p + \Delta p)r = ct$  примут положения, показанные на рис. 23.2 тонкими линиями. Оказывается, что фазовые фронты пересекутся в точке  $P$ , лежащей на продолжении лучевого вектора  $s$  [24, 30, 195]. Таким образом, сложение волн в результате интерференции и, следовательно-

но, распространение электромагнитной энергии происходит именно вдоль вектора  $\mathbf{s}$  касательно к лучу.

Отклонения от направления  $\mathbf{s}$  приводят к нарушению синфазности волн, составляющих волновой пакет, так что луч является осью френелевского объема, ответственного за формирование поля в данной точке. Уравнение границы этого объема можно представить в форме, аналогичной (10.6):

$$|\Psi_{\text{вирт}}(\mathbf{r}') - \Psi_{\text{опорн}}| - \lambda/2 = 0. \quad (23.38)$$

Форма френелевского объема для плоской волны в однородной среде схематически изображена на рис. 23.3.

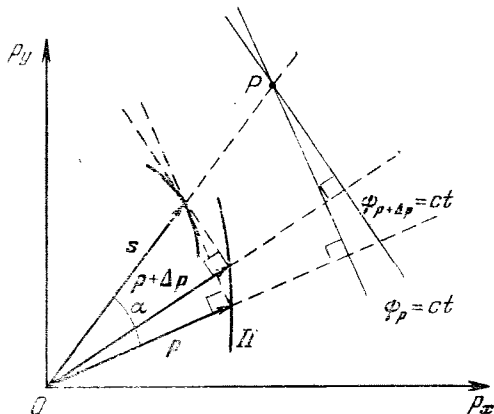


Рис. 23.2.

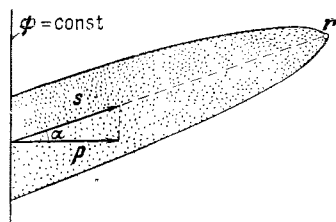


Рис. 23.3.

**10. Учет слабого поглощения.** В слабо поглощающей среде тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  приобретает антиэрмитову часть  $\epsilon_{\alpha\beta}^a$ , малую по сравнению с эрмитовой частью  $\epsilon_{\alpha\beta}^s$ :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^s + \epsilon_{\alpha\beta}^a, \quad |\epsilon_{\alpha\beta}^a| \ll |\epsilon_{\alpha\beta}^s|. \quad (23.39)$$

Как и в § 3, малый член  $ik_0 \hat{\epsilon}^a E$ , появляющийся в уравнениях Максвелла, отнесем к уравнениям первого приближения, при этом  $\text{rot } H_0$  в уравнении (23.23) заменится на  $\text{rot } H_0 + ik_0 \hat{\epsilon}^a E$ , а условие совместности (23.24) примет вид

$$E^* \text{rot } H - H^* \text{rot } E - ik_0 \epsilon_{\alpha\beta}^a E_\alpha E_\beta^* = 0. \quad (23.40)$$

Новое слагаемое с  $\epsilon_{\alpha\beta}^a$  вещественно, так как  $(\epsilon_{\alpha\beta}^a)^* = -\epsilon_{\beta\alpha}^a$ , и поэтому в первом приближении по  $\epsilon_{\alpha\beta}^a$  поглощение повлияет только на модуль амплитуды  $\Phi$ . Взяв вещественную часть (23.40), получим уравнение

$$\text{div}(\sigma |\Phi|^2) - ik_0 \epsilon_{\alpha\beta}^a f_\alpha f_\beta^* |\Phi|^2 = 0, \quad .$$

решение которого отличается от (23.34) экспоненциальным множителем, описывающим затухание:

$$|\Phi| = |\Phi^0| \sqrt{\frac{\xi^0 \mathcal{L}(\tau^0)}{\xi \mathcal{L}(\tau)}} \exp \left\{ ik_0 \int_{\tau^0}^{\tau} \xi^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta}^a f_{\alpha} f_{\beta}^* d\tau \right\}. \quad (23.41)$$

**11. Отражение и преломление волн на границах анизотропных сред.** Рассмотрим падение электромагнитной волны из изотропной среды на резкую границу раздела с анизотропной средой. В общем случае в анизотропной среде появляются *две преломленные волны* (двойное преломление), так что граничные условия (22.33) принимают вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{\text{пад}} + \mathbf{E}_{\text{отр}})_t &= (\mathbf{E}_{\text{пр}1} + \mathbf{E}_{\text{пр}2})_t, \\ (\mathbf{H}_{\text{пад}} + \mathbf{H}_{\text{отр}})_t &= (\mathbf{H}_{\text{пр}1} + \mathbf{H}_{\text{пр}2})_t. \end{aligned} \quad (23.42)$$

Отыскивая решение уравнений Максвелла в геометрикооптической форме, мы можем удовлетворить условиям (23.42) только при равенстве на границе раздела  $Q$  эйконалов всех волн:

$$\Psi_{\text{пад}}|_Q = \Psi_{\text{отр}}|_Q = \Psi_{\text{пр}1}|_Q = \Psi_{\text{пр}2}|_Q. \quad (23.43)$$

Эти соотношения играют роль начальных условий для эйконалов отраженной и преломленной волн.

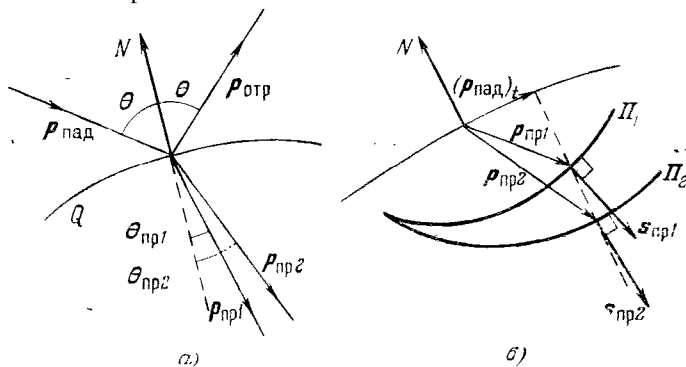


Рис. 23.4.

При помощи (23.43) могут быть получены также начальные условия для импульсов всех волн, покидающих границу раздела. Дифференцируя (23.43), легко убедиться в равенстве тангенциальных компонент импульса

$$(\mathbf{p}_{\text{пад}})_t = (\mathbf{p}_{\text{отр}})_t = (\mathbf{p}_{\text{пр}1})_t = (\mathbf{p}_{\text{пр}2})_t, \quad (23.44)$$

где  $\mathbf{p}_t \equiv \mathbf{p} - N(N\mathbf{p})$ .  $N$  — нормаль к  $Q$  (рис. 23.4, а). Вводя углы  $\theta \equiv \theta_{\text{пад}}, \theta_{\text{отр}}, \theta_{\text{пр}1}$  и  $\theta_{\text{пр}2}$ , запишем (23.44) иначе:

$$n \sin \theta = n \sin \theta_{\text{отр}} = n_{1,2}(\theta_{\text{пр}1,2}) \sin \theta_{\text{пр}1,2}, \quad (23.45)$$

где  $n$  — показатель преломления изотропной среды, а  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления для двух нормальных волн в анизотропной среде.

Соотношения (23.45) обобщают закон Снеллиуса на случай анизотропных сред. В отличие от изотропных сред, показатели преломления  $n_1$  и  $n_2$  зависят от направления  $l = p/p$ , так что отношения  $\sin \theta_{\text{пр}1,2} / \sin \theta$  являются теперь функциями угла падения. Сами углы  $\theta_{\text{пр}1}$  и  $\theta_{\text{пр}2}$  можно найти либо из трансцендентных соотношений (23.45), либо графически, используя поверхности показателя преломления (рис. 23.4, б). Графический метод позволяет найти и направления лучей  $s_{\text{пр}1}$  и  $s_{\text{пр}2}$ , которые, согласно п. 3, перпендикулярны поверхностям показателя преломления  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Существенно, что направления преломленных лучей в общем случае не лежат в плоскости падения.

Векторы поляризации преломленных волн  $f_{\text{пр}1,2}$  находятся из (23.22), тогда как две амплитуды  $\Phi_{\text{пр}1}$  и  $\Phi_{\text{пр}2}$  определяются (одновременно с амплитудами  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  отраженной волны) из системы двух векторных уравнений (23.42). Соответствующие обобщенные формулы Френеля, которые мы не приводим ввиду их громоздкости, даны в [343].

Число преломленных волн может быть меньше двух при полном отражении одной или даже обеих нормальных волн, а также при специальной ориентации осей симметрии анизотропной среды или при специальном выборе поляризации падающей волны. Различные частные случаи отражения и преломления нормальных волн разобраны в [30] и [344]. Своеобразная фокусировка нормальных волн при расположении точечного источника вблизи границы раздела описана в [345]; это явление связано с зависимостью коэффициентов преломления от направления распространения.

**12. Некоторые частные результаты.** Остановимся на некоторых вопросах, представляющих значительный практический интерес, но сравнительно слабо освещенных в литературе (более широкий круг вопросов затронут в монографиях [24, 27, 30, 182, 192, 193, 326, 332—334] и в цитируемой там литературе).

а) *Особенности поля точечного источника в анизотропной среде.* Поле в непосредственной близости к источнику можно определить в предположении, что среда вокруг источника однородна. В однородной среде импульс  $p$  и лучевой вектор  $s$  постоянны на луче:  $p = p^0$ ,  $s = s^0 = s^0(p^0)$ , в результате чего лучи оказываются прямыми,  $r = r^0 + s^0 \tau$ , а эйконал линейно увеличивается с расстоянием от источника:

$$\psi = \psi^0 + n^2 \tau = \psi^0 + n^2 \frac{r}{s} = \psi^0 + n \cos \alpha \cdot r.$$

Взяв в качестве лучевых координат  $\xi$  и  $\eta$  полярный ( $\theta$ ) и азимутальный ( $\varphi$ ) углы, начальную амплитуду  $\Phi_j^0$  волны типа  $j$



зададим формулой, аналогичной (3.25):

$$\Phi_j^0 = B_j \frac{G_j(\theta, \varphi)}{r^0}, \quad j = 1, 2, \quad (23.46)$$

где  $r^0$  — радиус сферы, малой по сравнению с масштабом неоднородности среды  $L$  и в то же время достаточно большой, чтобы при  $r \geq r^0$  мы находились в дальней (фраунгоферовой) зоне источника. В отличие от (3.25), фактор  $G_j(\theta, \varphi)$  в (23.46) определяется не только диаграммой излучения источника в однородной среде, но также и *типом волны*. Этот фактор можно найти из асимптотики точного решения задачи об излучении данной моды в однородной анизотропной среде.

Используя (23.46), по формуле (23.34) имеем

$$\Phi_j = \Phi_j^0 \sqrt{\frac{\zeta^0 \mathcal{D}(\tau^0)}{\zeta \mathcal{D}(\tau)}} = B_j G_j(\theta, \varphi) \sqrt{\frac{\zeta^0 W(\theta, \varphi)}{\zeta \mathcal{D}(\tau)}}, \quad (23.47)$$

где  $W(\theta, \varphi) = \mathcal{D}(\tau^0)/(r^0)^2$  — величина, не зависящая от выбора радиуса начальной сферы  $r^0$ . Связь амплитуды поля с радиусами кривизны поверхности показателя преломления обсуждается в [30], т. I, § 6.

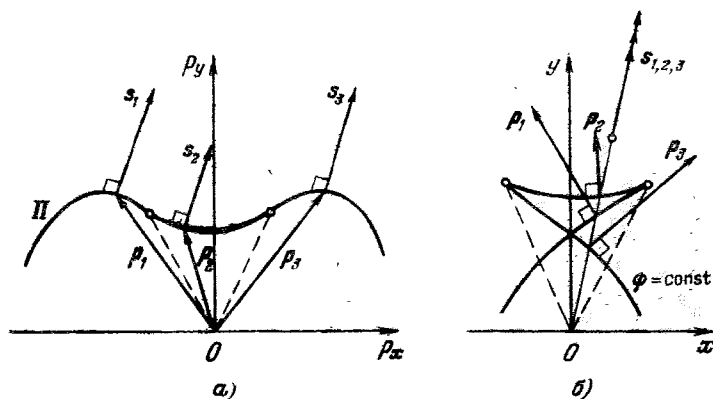


Рис. 23.5.

Особые условия возникают при наличии точек перегиба на поверхности показателя преломления  $\Pi$  (рис. 23.5, а). В этом случае в точку наблюдения могут прийти сразу три луча с одинаковыми по направлению лучевыми векторами  $s$ , но с разными эйконалами и, следовательно, разными импульсами  $p$  (поверхность  $\psi = \text{const}$ , отвечающая рис. 23.5, а, показана на рис. 23.5, б). В особых направлениях, соответствующих точкам перегиба поверхности  $\Pi$  (штриховые линии на рис. 23.5), два из трех лучей сливаются, при этом якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  в (23.45) обращается в нуль,

а амплитуда  $\Phi_j$  — в бесконечность [346]. В результате образуется специфическая каустика в виде двух прямолинейных лучей, идущих в особых направлениях. Согласно рис. 23.5, б фазовые фронты в этом случае соответствуют сечениям ласточкина хвоста.

б) Волны в плоско-слоистых анизотропных средах. Пусть  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}(z)$ . Согласно (23.13), в этом случае  $p_x = p_x^0 = \text{const}$ ,  $p_y = p_y^0 = \text{const}$ . Без потери общности величину  $p_y^0$  можно положить равной нулю, а условие постоянства  $p_x$ , можно придать вид закона Снеллиуса (23.45):

$$p_x = \text{const} = p \sin \theta = n(\theta) \sin \theta, \quad (23.48)$$

где  $\theta$  — угол падения, т. е. угол между вектором  $\mathbf{p}$  и осью  $z$ .

Подставив (23.48) и  $p_y = 0$  в уравнение эйконала  $\mathcal{H} = \det \|q_{\alpha\beta}\| = 0$ , мы получим полином четвертой степени («квартику Букера») относительно  $p_z = \partial\psi/\partial z$ :

$$a_0 p_z^4 + a_1 p_z^3 + a_2 p_z^2 + a_3 p_z + a_4 = 0,$$

где  $a_m = a_m(z, \theta)$ . Если разрешить это уравнение относительно  $p_z$ , то для эйконала  $\psi$  получим

$$\psi = \psi^0 + p_x^0 (x - \xi) + \int_{z^0}^z p_z dz.$$

Из четырех корней «квартики Букера» два корня отвечают двум типам падающих волн, а другие два — двум типам отраженных волн.

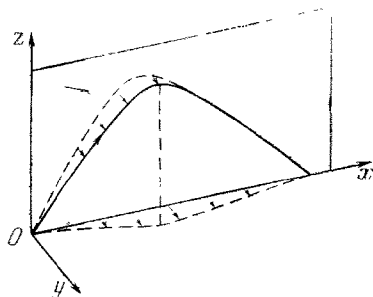


Рис. 23.6.

В то время как импульс  $\mathbf{p}$  лежит в плоскости падения  $y = 0$ , траектории лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ , вообще говоря, не являются плоскими кривыми, как это схематически показано на рис. 23.6 для случая отражения электромагнитной волны от неоднородной магнитоактивной ионосферы. Результаты численного расчета лучей в плоско-слоистой магнитоактивной плазме приведены, например, в [27, 192,

193, 333]. Там же обсуждаются интересные особенности фазовых траекторий, образующих острия и петли.

в) Разделение переменных в уравнении эйконала в общем случае. Вопрос об условиях, при которых разделяются переменные в уравнении эйконала для неоднородной анизотропной среды, исследован сравнительно слабо. В работах [119, 120] этот вопрос изучен применительно к двумерно-неоднородной магнитоак-

тивной плазме. В качестве примера в [119] рассмотрена задача о распространении волны в плоскости, перпендикулярной статическому магнитному полю. Из других работ в этом направлении укажем [350].

г) *Теория возмущений.* Теория возмущений для эйконала в анизотропной среде<sup>1)</sup> была предложена в [351], а в работе [352] метод возмущений был использован для расчета траекторий в неоднородной магнитоактивной плазме. В качестве возмущения в [352] выступало не само магнитное поле  $H_0$ , а некоторое выражение, обращающееся в нуль вместе с  $H_0$ , при этом уже первая итерация описывала слабый выход лучей из плоскости падения, подобный изображенному на рис. 23.6.

**13. Расходимость полей первого приближения при поляризационном вырождении.** Пусть  $\hat{\lambda}_j$  — собственные значения, а  $f_j$  — собственные векторы матрицы  $\hat{q} = q_{\alpha\beta}$ :

$$\hat{q}f_j = \lambda_j f_j. \quad (23.49)$$

Интересующим нас нормальным волнам, согласно (23.22), отвечают нулевые собственные значения  $\lambda_j = 0$  (соответствующие векторы  $f_j$ , выступающие у нас как векторы поляризации, называются *нуль-векторами* [19, 85]). Детерминант  $\mathcal{H}$  матрицы  $\hat{q}$  равен произведению собственных значений:  $\mathcal{H} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , так что уравнение эйконала  $\mathcal{H} = 0$  может быть записано в форме

$$\mathcal{H} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0. \quad (23.50)$$

В изотропной среде  $\lambda_1 = \lambda_2 = -(p^2 - \epsilon)$ ,  $\lambda_3 = -\epsilon$ , так что (23.50) эквивалентно уравнению (22.10). В анизотропной среде собственные значения  $\lambda_{1,2,3}$  в общем случае различаются между собой, при этом обращение  $\lambda_j(p)$  в нуль согласовано с обращением в нуль гамильтониана (23.9).

Рассмотрим одну из нормальных волн, присвоив ей индекс «1». Для этой волны уравнение эйконала (23.50) сводится просто к уравнению  $\lambda_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0$ . Пусть  $\psi_1(\mathbf{r})$  — решение этого уравнения,  $\mathbf{p}_1 = \nabla\psi_1$  — соответствующая нормаль к фазовому фронту, а  $\mathbf{f}_1(\mathbf{r})$  — вектор поляризации первой нормальной волны, отвечающий  $\lambda_1 = 0$ . В нулевом приближении поле пропорционально  $\mathbf{f}_1$ :  $E_0 = \Phi \mathbf{f}_1$ , тогда как в первом приближении поле содержит и другие компоненты. Пользуясь ортогональностью собственных

<sup>1)</sup> В кристаллах разница между главными значениями тензора проницаемости  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  обычно невелика. Пусть  $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)/3$ . Рассматривая разности  $\delta\epsilon_i = \epsilon_i - \epsilon$  как малые возмущения, можно было бы вычислить пропорциональные  $\delta\epsilon_i$  поправки к эйконалу и другим параметрам волны, упростив тем самым исследование волн в одноосных и, особенно в двухосных кристаллических средах, в том числе и в жидких кристаллах. Этот прием однако, еще не получил должного распространения.

векторов эрмитовой матрицы,  $(f_k^* f_j) = \delta_{kj}$ , представим поле первого приближения в виде суммы

$$E_1 = \sum_{j=1}^3 \Phi_j^{(1)} f_j \quad (23.51)$$

и спроектируем уравнение (23.23) на собственные векторы  $f_k$ , для чего надо умножить (23.23) слева на  $f_k^*$  и учесть (23.49), тогда получим

$$\lambda_j \Phi_j^{(1)} = (f_j^* Z) \Big|_{p=p_1}. \quad (23.52)$$

Из (23.52) можно найти все амплитудные коэффициенты  $\Phi_j^{(1)}$ , для которых <sup>1)</sup>  $\lambda_j \neq 0$ , т. е. в данном случае амплитуды  $\Phi_2^{(1)}$  и  $\Phi_3^{(1)}$  (но не  $\Phi_1^{(1)}$ , так как  $\lambda_1 = 0$ ):

$$\Phi_j^{(1)} = \frac{(f_j^* Z)}{\lambda_j} \Big|_{p=p_1}, \quad j = 2, 3. \quad (23.53)$$

Оставшееся неопределенным значение  $\Phi_1^{(1)}$  находится затем из условий совместности уравнений второго приближения и т. д.

Формула (23.53) важна тем, что из нее следует *расходимость поля первого приближения*  $E_1$  в случае поляризационного вырождения, т. е. при уменьшении  $\lambda_2(p_1)$ :  $\Phi_2^{(1)} \rightarrow \infty$  при  $\lambda_2(p_1) \rightarrow \rightarrow \lambda_1(p_1) = 0$  [19].

Получим условие относительной малости поля  $E_1$ . Положив  $p_1 = p_2 + \Delta p$ , где  $p_2$  — решение уравнения эйконала  $\lambda_2(p_2) = 0$  для второй нормальной волны, имеем

$$\lambda_2(p_1) = \lambda_2(p_2 + \Delta p) \approx \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_2} \Delta p, \quad (23.54)$$

откуда следует, что  $\Phi_2^{(1)}$  возрастает как  $1/\Delta p \sim 1/\Delta n$ , где  $\Delta n$  — разность показателей преломления. Учитывая, что по порядку величины  $Z \sim \Phi/L$ ,  $|\partial \lambda / \partial p| \sim 1$  и что поле первого приближения  $E_1$  входит в разложение (23.10) с множителем  $1/ik_0$ , условие малости  $|E_1/ik_0|$  по сравнению с  $|E_0|$  можно представить как

$$\frac{|E_1|}{k_0 |E_0|} \sim \frac{|\Phi_2^{(1)}|}{k_0 |\Phi|} = \frac{1}{k_0 |\Phi|} \left| \frac{(f_2^* Z)}{\lambda_2} \right| \sim \frac{1}{k_0 L \Delta n} \ll 1. \quad (23.55)$$

<sup>1)</sup> При  $j=1$  левая часть (23.52) обращается в нуль (поскольку  $\lambda_1=0$ ), откуда следует равенство нулю и правой части:  $(f_1^* Z) = 0$ , т. е. мы получили независимый вывод условия совместности (23.24). Если одновременно обращаются в нуль два собственных значения,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то из (23.52) следуют равенства  $(f_1^* Z) = (f_2^* Z) = 0$ , частным случаем которых являются условия совместности (22.16), поскольку в изотропной среде в качестве  $f_1$  и  $f_2$  можно взять нормаль  $\mathbf{v}$  и бинормаль  $\mathbf{b}$ .

Легко видеть, что это неравенство равносильно условию (23.11) независимости нормальных волн, выведенному из качественных соображений.

Модификации метода геометрической оптики, которые справедливы в области поляризационного вырождения  $k_0 L \Delta n \leq 1$  и описывают там взаимодействие нормальных волн, рассмотрены ниже в § 24.

14. Другие векторные задачи в условиях отсутствия поляризационного вырождения. Последовательная лучевая теория волн в неоднородных упругих средах была построена В. М. Бабичем [353]. Уравнения теории упругости в общем случае допускают существование трех типов нормальных волн, из которых две по своим параметрам ближе к поперечным волнам, а третья — к продольной волне. Различные аспекты лучевой теории волн в анизотропных упругих средах рассмотрены в [18].

Ситуации, эквивалентные распространению нормальных волн в анизотропной среде, возникают в квантовой теории при рассмотрении поведения частиц со спином в магнитном поле. Квазиклассическое описание прецессии спина электрона в неоднородном магнитном поле изложено в [354] (см. также [41] и [355]). Во всех упомянутых случаях переход к поляризационному вырождению, т. е. появление кратных корней  $\lambda_j$ , требует специальных методов описания взаимодействия соответствующих нормальных волн.

## § 24. Взаимодействие нормальных волн в неоднородных анизотропных средах

1. Волны в слабоанизотропных средах. Квазиизотропное приближение геометрической оптики. Как уже отмечалось в § 23, при нарушении условия (23.11) (или, что то же самое, условия (23.55)), т. е. при  $k_0 L \Delta n \leq 1$ , нормальные волны уже нельзя считать независимыми, и метод геометрической оптики в неоднородной анизотропной среде требует модификации. Такая модификация должна описывать линейное взаимодействие нормальных волн в области поляризационного вырождения  $k_0 L \Delta n \leq 1$ , где оказываются близкими собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы  $\hat{q} = q_{\alpha\beta}$  (см. § 23, п. 13).

В слабоанизотропных средах близость собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  обусловлена малостью недиагональных компонент тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (а также разностей диагональных компонент) по сравнению с диагональными элементами тензора. Для таких сред из тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  можно выделить большую изотропную часть  $\epsilon \delta_{\alpha\beta}$  и малую анизотропную часть  $\chi_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon \delta_{\alpha\beta}$ :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon \delta_{\alpha\beta} + \chi_{\alpha\beta}. \quad (24.1)$$

В качестве  $\varepsilon$  можно взять одну из диагональных компонент  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  или их среднее значение  $(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3 = 1/3 \text{Sp } \varepsilon_{\alpha\beta}$ .

Очевидно, что при слабой анизотропии структура электромагнитной волны мало отличается от поля в изотропной среде. Считая, что в нулевом приближении среда изотропна,  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon \delta_{\alpha\beta}$ , и рассматривая анизотропию  $\chi_{\alpha\beta}$  (т. е. анизотропную часть тензора проницаемости) как малое возмущение, мы придем к квазиизотропному приближению геометрической оптики [341].

Уравнения квазиизотропного приближения можно получить из следующих соображений. Запишем материальное уравнение  $D = \hat{\varepsilon}E$  в виде  $D = \varepsilon E + \hat{\chi}E$ . Разность коэффициентов преломления  $\Delta n = |n_1 - n_2|$  имеет порядок  $|\chi_{\alpha\beta}|$ , так что величину

$$\mu_1 = \Delta n/n \sim \chi_{\alpha\beta}/n \ll 1 \quad (24.2)$$

можно рассматривать как дополнительный (к  $\mu \sim 1/kL$ ) малый параметр задачи. В этих условиях поиск асимптотического решения предполагает разложение полей одновременно по двум малым параметрам  $\mu$  и  $\mu_1$ , которые следует считать величинами одного порядка. Те же результаты можно получить и более простым путем, если воспользоваться дебаевской процедурой и формально приписать анизотропии  $\hat{\chi}$  первый порядок малости относительно  $1/k_0$ :  $\hat{\chi} = \hat{\xi}/k_0$ . Тем самым член  $\hat{\chi}E = \hat{\xi}E/k_0$  автоматически будет отнесен к уравнениям первого порядка, при этом величины  $X$  и  $Z$  в уравнениях первого приближения (22.6) и (22.15) получат приращение  $i\hat{\xi}E = ik_0\hat{\chi}E$ , например,

$$Z_{\text{нов}} = -\text{rot } H + ik_0\hat{\chi}E - [p \text{ rot } E]. \quad (24.3)$$

Уравнения нулевого приближения останутся, разумеется, такими же, как в изотропной среде, в частности, останется неизменной и поперечная структура поля (22.13) и (22.14), характерная для изотропной среды. Однако амплитуды  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$  подчиняются теперь более сложным, чем (22.18), уравнениям, которые вытекают из условий совместности (22.16) с учетом (24.3):

$$\begin{aligned} l(2\sqrt{\varepsilon} \nabla \Phi_v + \Phi_v \nabla \sqrt{\varepsilon}) + \Phi_v \sqrt{\varepsilon} \text{div } l + 2\sqrt{\varepsilon} \kappa \Phi_b - \\ - ik_0(\chi_{vv}\Phi_v + \chi_{vb}\Phi_b) = 0, \end{aligned} \quad (24.4)$$

$$\begin{aligned} l(2\sqrt{\varepsilon} \nabla \Phi_b + \Phi_b \nabla \sqrt{\varepsilon}) + \Phi_b \sqrt{\varepsilon} \text{div } l - 2\sqrt{\varepsilon} \kappa \Phi_v - \\ - ik_0(\chi_{bv}\Phi_v + \chi_{bb}\Phi_b) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\chi_{vv} = (v\hat{\chi}v), \quad \chi_{bv} = (b\hat{\chi}v), \quad \chi_{vb} = (v\hat{\chi}b), \quad \chi_{bb} = (b\hat{\chi}b)$$

— компоненты тензора анизотропии в системе координат  $(l, \nu, b)$ , связанной с лучом.

**2. Различные формы уравнений квазиизотропного приближения.** Уравнения (24.4) можно записать в нескольких эквивалентных формах, каждая из которых имеет те или иные преимущества при рассмотрении конкретных задач.

Положим  $\Phi_{\nu, b} = A\Gamma_{\nu, b}$ , где  $A^2 = |\Phi_{\nu}|^2 + |\Phi_b|^2$  подчиняется уравнению переноса (22.20). Тогда для  $\Gamma_{\nu}$  и  $\Gamma_b$  из (24.4) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{\nu}}{d\sigma} &= \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon}} (\chi_{\nu\nu}\Gamma_{\nu} + \chi_{\nu b}\Gamma_b) - \kappa\Gamma_b, \\ \frac{d\Gamma_b}{d\sigma} &= \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon}} (\chi_{b\nu}\Gamma_{\nu} + \chi_{bb}\Gamma_b) + \kappa\Gamma_{\nu}. \end{aligned} \quad (24.5)$$

Эти уравнения описывают влияние слабой анизотропии среды и кручения лучей, тогда как расходимость лучей уже учтена в амплитуде  $A$ . Легко убедиться, что в отсутствие поглощения, когда  $\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\beta\alpha}^*$ , из (24.5) следует закон сохранения  $|\Gamma_{\nu}|^2 + |\Gamma_b|^2 = 1$ .

Для угла  $\theta = \arctg(\Phi_b/\Phi_{\nu}) = \arctg(\Gamma_b/\Gamma_{\nu})$  (в общем случае комплексного) и для величины  $\ln \Gamma^2 \equiv \ln(\Gamma_{\nu}^2 + \Gamma_b^2)$  из (24.5) вытекают уравнения [341]:

$$\frac{d \ln \Gamma^2}{d\sigma} = \frac{ik_0}{2\sqrt{\varepsilon}} [(\chi_{\nu\nu} + \chi_{bb}) + (\chi_{\nu\nu} - \chi_{bb}) \cos 2\theta + (\chi_{\nu b} + \chi_{b\nu}) \sin 2\theta], \quad (24.6)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \kappa + \frac{ik_0}{4\sqrt{\varepsilon}} [(\chi_{b\nu} - \chi_{\nu b}) + (\chi_{b\nu} + \chi_{\nu b}) \cos 2\theta - (\chi_{\nu\nu} - \chi_{bb}) \sin 2\theta].$$

Согласно (24.6), угол  $\theta$  в принципе может быть найден (из второго уравнения) независимо от амплитуд<sup>1)</sup>, после чего нахождение  $\Gamma^2$  из первого уравнения сводится к квадратуре.

В пределе исчезающе малой анизотропии, когда  $\chi_{\alpha\beta} \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\Delta n/\mu \sim \mu_1/\mu \rightarrow 0$ , уравнения квазиизотропного приближения переходят, очевидно, в уравнения для поперечных волн в изотропной среде. В то же время при  $\Delta n/\mu \sim \mu_1/\mu \gg 1$ , когда уже выполнено условие (23.11) независимости нормальных волн, но параметр  $\mu_1 = \Delta n/n$  еще достаточно мал ( $\mu_1 \ll \varepsilon$ ), уравнения квазиизотропного приближения должны давать результаты, согласующиеся с представлением поля в виде суммы не взаимодействующих волн (см. § 23).

<sup>1)</sup> Отметим еще, что уравнение для  $\theta$  может быть преобразовано к уравнению Риккати. Это при определенных условиях облегчает получение приближенных решений [359].

Анализ уравнений (24.4) и (24.5) показывает, что такое соответствие имеет место в действительности с тем лишь уточнением, что поле

$$E = (\Phi_v \mathbf{v} + \Phi_b \mathbf{b}) e^{ik_0 \psi} = A(\Gamma_v \mathbf{v} + \Gamma_b \mathbf{b}) e^{ik_0 \psi} \quad (24.7)$$

переходит в сумму *укороченных* нормальных волн

$$E = \tilde{\Phi}_1 \tilde{f}_1 e^{ik_0 \tilde{\psi}_1} + \tilde{\Phi}_2 \tilde{f}_2 e^{ik_0 \tilde{\psi}_2}, \quad (24.8)$$

амплитуды  $\tilde{\Phi}_{1,2}$ , векторы поляризации  $\tilde{f}_{1,2}$  и эйконалы  $\tilde{\psi}_{1,2}$  которых вычисляются не по точным формулам § 23, а по приближенным формулам, в которых учтены лишь члены первого порядка малости относительно  $\chi_{\alpha\beta}$ <sup>1)</sup>. В частности, эйконалы  $\tilde{\psi}_{1,2} = \psi + \delta\psi_{1,2}$  отличаются от эйконала  $\psi$  в изотропной среде на величину

$$\delta\psi_{1,2} = \frac{k_0}{4V\varepsilon} \int_{\sigma^0}^{\sigma} (\chi_{vv} + \chi_{bb} \pm V(\chi_{vv} - \chi_{bb})^2 + \chi_{vb}\chi_{bv}) d\sigma, \quad (24.9)$$

которая может быть получена и по теории возмущений [351].

Учитывая, что укороченные нормальные волны (24.8) гораздо проще позволяют воссоздать точные (неукороченные) независимые волны, чем решения (24.7), уравнениям квазиизотропного приближения можно придать форму уравнений для *взаимодействующих* нормальных волн, положив

$$\begin{aligned} \Phi_v &= F_1 f_{1v} e^{ik_0 \delta\psi_1} + F_2 f_{2v} e^{ik_0 \delta\psi_2}, \\ \Phi_b &= F_1 f_{1b} e^{ik_0 \delta\psi_1} + F_2 f_{2b} e^{ik_0 \delta\psi_2} \end{aligned} \quad (24.10)$$

и рассматривая  $F_1$  и  $F_2$  как неизвестные величины [357]. Не приводя самих уравнений для  $F_1$  и  $F_2$ , отметим только, что они тесно связаны с уравнениями Баддена [27, 182, 192, 334], отличаясь от последних в двух отношениях: уравнения для  $F_{1,2}$  содержат лишь члены первого порядка малости по  $\chi_{\alpha\beta}$  (в уравнениях Баддена это приближение не делается), но зато они учитывают *трехмерную неоднородность среды* (уравнения Баддена записываются лишь для одномерно неоднородной среды).

<sup>1)</sup> Этот результат можно получить, решая уравнения квазиизотропного приближения *методом Хохлова (методом вторичного укорачивания* [356]). Первичное укорачивание сводится в данном случае к переходу от полных уравнений Максвелла к уравнениям геометрической оптики, а *вторичное укорачивание* подразумевает асимптотическое решение уравнений (24.5) с использованием большого параметра  $\mu_1/\mu \gg 1$ , поскольку именно такой порядок имеет отношение членов, содержащих анизотропию  $\chi_{\alpha\beta}$ , к слагаемым с кручением  $\kappa = 1/\rho_{\text{кр}} \sim 1/L$ :  $k_0 \chi_{\alpha\beta} \varepsilon^{-1/2} / \kappa \sim k_0 \mu_1 \rho_{\text{кр}} \sim k_0 L \mu_1 \sim \mu_1/\mu \gg 1$ .



Наконец, еще одна форма уравнений квазиизотропного приближения имеет дело с вектором  $D$  вместо  $E$ , при этом разложение полей ведется по анизотропной части тензора  $\hat{\epsilon}^{-1}$ , обратного тензору  $\hat{\epsilon}$ . Тем самым удается уже в нулевом приближении учесть продольную компоненту вектора  $E = \hat{\epsilon}^{-1} D$ , возникающую вследствие анизотропии. Достоинства такого подхода обсуждаются в [358, 471].

**3. Методы решения уравнений квазиизотропного приближения.** Определение поля в рамках квазиизотропного приближения сводится к решению системы двух линейных уравнений в обыкновенных производных первого порядка с переменными коэффициентами. Такие уравнения часто возникают в задачах математической физики, причем не только в теории колебаний и теории распространения волн (кроме уже упомянутых книг [27, 182, 192, 193, 333, 334], см. также обзоры [362, 363]), но и в квантовой теории (переходы под влиянием адиабатических возмущений и смежные вопросы, см., например, [364, 365, 462]). Аналитические решения таких уравнений известны лишь для ограниченного числа частных случаев<sup>1)</sup>, и поэтому чаще всего прибегают к тем или иным приближенным методам. Перечислим наиболее употребительные из этих методов.

а) *Метод фазовых интегралов* позволяет осуществить аналитическое продолжение решения путем обхода области взаимодействия в плоскости комплексной переменной. Этот метод пригоден для широкого класса переменных коэффициентов, но не позволяет найти поле непосредственно в области взаимодействия. Примеры использования метода фазовых интегралов для определения межмодовой трансформации имеются в [27, 182, 192, 334] и др.

б) *Метод возмущений* пригоден при достаточно малых значениях анизотропии  $\chi_{ab}$  и позволяет описать лишь слабую межмодовую трансформацию [27, 364, 367].

в) *Метод эталонных функций* применяется тогда, когда поведение коэффициентов данного уравнения качественно подобно поведению другой системы, имеющей аналитическое решение. В качестве примеров можно указать на решения с использованием функций параболического цилиндра, функций Эйри и др. [365, 368—372, 358, 471].

Кроме того, возможно применение метода возмущений к уравнению (24.6) для комплексного угла  $\theta$  [341] или к уравнению Риккати, связанному с системой (24.5) [359].

**4. О погрешности квазиизотропного приближения.** Этот вопрос еще не получил исчерпывающего решения, хотя и изучался

<sup>1)</sup> Из последних результатов, относящихся к электромагнитной теории, отметим [366].

в ряде работ [360, 361]. Здесь мы ограничимся некоторыми общими замечаниями.

Основной источник погрешности квазиизотропного приближения — неучтенные квадратичные по  $\mu_1 \sim \Delta n \sim \chi_{\alpha\beta}$  члены, которые приводят прежде всего к накапливающейся погрешности в фазе:

$$\gamma_1 \sim k_0 \int_{\sigma^0}^{\sigma} (\Delta n)^2 d\sigma. \quad (24.11)$$

Формально для применимости квазиизотропного приближения необходимо выполнение неравенства  $\gamma_1 \ll 1$ . Однако фактически это неравенство часто может быть заметно ослаблено.

Во-первых, в большинстве приложений интересны не столько поправки к фазе, сколько параметры эллипса поляризации волны после прохождения области взаимодействия, которые, как показывают некоторые модельные расчеты, менее подвержены влиянию квадратичных членов, чем фаза.

Во-вторых, в условиях достаточного быстрого роста  $\Delta n$  в (24.11) существен только ограниченный участок, где происходит переход квазиизотропного решения (24.7) в сумму независимых нормальных волн (24.8). Существенное взаимодействие нормальных волн происходит на интервале  $l_{\text{вз}} = |\sigma_2 - \sigma_1|$ , на котором эти волны практически синфазны, т. е.

$$|\psi_1 - \psi_2| \sim k_0 \left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Delta n d\sigma \right| \ll 1. \quad (24.12)$$

Пусть  $\overline{\Delta n}$  — среднее значение  $\Delta n$  на интервале  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Тогда из (24.12) вытекает следующая оценка для длины взаимодействия:  $l_{\text{вз}} \sim 1/k_0 |\overline{\Delta n}|$ . На этой длине квадратичная погрешность (24.11) оказывается малой величиной:  $\gamma_1 \sim k_0 |\overline{\Delta n}|^2 l_{\text{вз}} \sim |\overline{\Delta n}| \ll 1$ .

Разумеется, при переходе «квазиизотропного» поля в сумму независимых нормальных волн необходимо учитывать еще и погрешность  $\gamma_2$  представления поля в форме (24.8). Согласно (23.55), эта погрешность определяется выражением

$$\gamma_2 \sim 1/k_0 L |\Delta n|. \quad (24.13)$$

Величина  $\gamma_2$ , в противоположность  $\gamma_1$ , возрастает по мере уменьшения  $\Delta n$ . В связи с этим возникает задача об оптимальном месте смыкания двух решений, при котором суммарная погрешность  $\gamma_1 + \gamma_2$  минимальна [360, 361]. Эту задачу необходимо решать, зная конкретную зависимость  $\Delta n(\sigma)$ .

**5. Применения квазиизотропного приближения.** Слабая анизотропия характерна прежде всего для высокочастотных электромаг-

нитных волн в магнитоактивной плазме в условиях, когда гирочастота  $\omega_e = eH_0/mc$  мала по сравнению с  $\omega$ . Такие условия довольно часто реализуются как в лабораторной, так и в естественной плазме (ионосфера Земли, солнечная корона, космическая плазма).

Слабая деполяризация волны в магнитоактивной плазме при одновременном действии эффекта Фарадея и эффекта Коттона — Мутона<sup>1)</sup> описана в [341], а роль этой деполяризации при рассеянии УВБ-радиоволн в ионосфере изучена в [373]. Сильная деполяризация поля в области квазипоперечного распространения исследована в работах [371] и [471], результаты которых хорошо согласуются с исследованиями по методу фазовых интегралов [182, 334]. Численные результаты, относящиеся к взаимодействию волн в области нейтрального магнитного поля, даны в [374].

Далее, квазиизотропное приближение может быть использовано для описания *предельной поляризации* волны, выходящей из намагниченной плазмы в вакуум [341, 360] (сама проблема предельной поляризации освещена в [27, 182, 192, 334, 366]), и для описания деполяризации поля в случайно неоднородной космической плазме [375]. Отметим еще, что изученные в [390, 391, 393] динамооптические эффекты, связанные с изменением поляризации волны под действием неоднородного движения плазмы, также могут быть описаны квазиизотропным приближением, поскольку неоднородное движение плазмы приводит к слабой анизотропии (см. § 26).

Наконец, укажем, что квазиизотропное приближение удобно для изучения действия слабой анизотропии в теории упругости [376] и в оптике (в частности, речь может идти об описании естественной оптической активности и о дихроизме — анизотропии поглощения).

6. Квазивырожденное приближение геометрической оптики. В отличие от слабоанизотропных сред, в которых разность коэффициентов преломления мала при всех направлениях распространения, в сильноанизотропных средах разность  $\Delta n$  может оказаться малой величиной только в окрестности определенных (вырожденных) направлений. В этих направлениях уравнение эйконала (23.4) допускает близкие (или кратные) корни  $p_1 = n_1 l$  и  $p_2 = n_2 l$  или, что то же самое, близкие собственные значения

<sup>1)</sup> Эффект Фарадея (вращение плоскости поляризации волны) линейен по магнитному полю  $H_0$  и в чистом виде наблюдается при продольном (по отношению к  $H_0$ ) распространении. Эффект Коттона — Мутона (несовпадение фазовых скоростей линейно-поляризованных волн при поперечном распространении) квадратичен по  $H_0$ . При плавном изменении направления распространения от квазипродольного к квазипоперечному действуют одновременно оба эффекта.

$\lambda_1 \sim \lambda_2$ . В окрестности вырожденных направлений как раз и возможно взаимодействие нормальных волн, распространяющихся с близкими фазовыми скоростями. Такое взаимодействие описывается *квазивырожденным приближением* геометрической оптики, предложенным в работе [377] (близкий подход рассматривался в [378]).

Основной вычислительный прием квазивырожденного приближения состоит в том, чтобы вынести малые члены порядка  $\lambda_2(\mathbf{p}_1) \approx \frac{\partial \lambda_2}{\partial p} \Delta p$ ,  $\Delta p = p_1 - p_2$  из уравнений нулевого в уравнении первого приближения, сделав почти вырожденную систему для  $E_0$  строго вырожденной. Этот прием может быть реализован, например, следующим способом.

Известно, что линейная форма  $\hat{q}E_0$  с эрмитовой матрицей  $q_{\alpha\beta}$  может быть представлена в виде [416]:

$$\hat{q}E_0 = \sum_{j=1}^3 (f_j \times f_j^*) \lambda_j(p) E_0 = 0, \quad (24.14)$$

где  $(f_j \times f_j^*)$  означает прямое произведение собственных векторов  $f_j$  и  $f_j^*$  <sup>1)</sup>. При рассмотрении волны первого типа  $\lambda_1(\mathbf{p}_1) = 0$ , а  $\lambda_2(\mathbf{p}_1)$  близко к нулю. Заменяя в уравнении нулевого приближения точную матрицу  $\hat{q}$ , обладающую, вообще говоря, различными (но близкими) собственными значениями  $\lambda_2(\mathbf{p}_1) \neq \lambda_1(\mathbf{p}_1) = 0$ , приближенной матрицей  $\hat{q}_0$  с двумя одинаковыми собственными значениями  $\lambda_{20}(\mathbf{p}_1) = \lambda_1(\mathbf{p}_1) = 0$ , например,

$$\hat{q}_0 = (f_3 \times f_3^*) \lambda_3(\mathbf{p}_1) E_0, \quad \lambda_{20} = \lambda_1 = 0, \quad (24.15)$$

мы должны учесть малую разницу:

$$(\hat{q} - \hat{q}_0) E_0 = (f_2 \times f_2^*) \lambda_2(\mathbf{p}_1) E_0 \approx (f_2 \times f_2^*) \left( \frac{\partial \lambda_2}{\partial p_2} \Delta p \right) E_0$$

в уравнениях *первого* приближения <sup>2)</sup>.

Два условия совместности уравнений первого приближения дадут систему двух уравнений первого порядка для амплитуд взаимодействующих волн. Как и в случае квазиизотропного приближения, решение, полученное внутри области взаимодействия, следует спивать с независимыми нормальными волнами вне области взаимодействия.

<sup>1)</sup> Прямое произведение  $(a \times b)$  представляет собой тензор с элементами  $a_\alpha b_\beta$ .

<sup>2)</sup> Вырожденную матрицу  $\hat{q}_0$ , близкую к почти вырожденной матрице  $\hat{q}$ , можно построить и многими другими способами.

При переходе к слабоанизотропным средам квазивырожденное приближение переходит в квазиизотропное. Возможные применения квазивырожденного приближения обсуждаются в [377]. В заключение параграфа отметим, что рассмотренные здесь типы линейного взаимодействия не исчерпывают все возможные ситуации, в частности, не описывают трансформацию волн в окрестности особенностей (полюсов)  $n_z$  и трансформацию продольных волн в поперечные. С этими вопросами можно ознакомиться по обзорам [362] и [363].

## § 25. Уравнения геометрической оптики для негармонических электромагнитных волн в общем случае неоднородных и нестационарных диспергирующих сред

**1. Уравнения Максвелла в неоднородной и нестационарной среде при наличии временной и пространственной дисперсии.** В § 7 мы ограничились рассмотрением скалярных немонахроматических волн в неоднородных стационарных средах и учли только временную дисперсию, а в §§ 22—24 мы изучали гармонические электромагнитные поля. Рассмотрим теперь более общий случай немонахроматических электромагнитных волн в неоднородных и нестационарных средах, обладающих как временной, так и пространственной дисперсией. Совместное действие всех этих факторов приводит к некоторым качественно новым эффектам, например, к появлению анизотропии в изотропной среде при наличии одновременно неоднородности и пространственной дисперсии или же к несохранению электромагнитной энергии вследствие нестационарности среды.

Попытки построить по возможности общую геометрикооптическую теорию предпринимались во многих работах, например, в [395, 85, 379]. Последовательное рассмотрение проблемы с учетом всех упомянутых выше факторов проведено в работе [380], которой мы и будем следовать ниже. Кроме того, в оставшихся трех параграфах мы существенно используем материалы обзоров [23] и [84].

Для немонахроматических волн уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (25.1)$$

Весьма общий случай связи между индукциями и напряженностями описывается материальными уравнениями

$$D_{\alpha}(t, r) = \int_{-\infty}^t dt' \int dr' \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}(t-t', r-r'; t, r) E_{\beta}(t', r'), \quad (25.2)$$

$$B = H,$$

которые предполагают, что электрические и магнитные свойства среды характеризуются тензором электрической проницаемости<sup>1)</sup>  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$ . В то время как зависимость ядра  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$  в (25.2) от разности  $\tilde{\Delta}t = t - t'$  характеризует *временную* дисперсию, зависимость  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$  от  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  отвечает *пространственной* дисперсии среды: электрическая индукция  $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$  в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$  зависит не только от  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ , но и от значений напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$  в предшествующие моменты времени  $t' < t$  и в близлежащих точках  $\mathbf{r}'$ .

Явная же зависимость ядра  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$  от  $t$  и  $\mathbf{r}$  отражает нестационарность и неоднородность среды. Тензор проницаемости  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$  находится, вообще говоря, из рассмотрения микропроцессов в веществе, проходящих под действием электромагнитного поля. Ниже, если не оговорено противное, мы считаем этот тензор заданным.

В методе пространственно-временной геометрической оптики векторы поля представляются в виде

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{E}}(t, \mathbf{r}) e^{i\varphi(t, \mathbf{r})}, \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{D}}(t, \mathbf{r}) e^{i\varphi(t, \mathbf{r})} \quad (25.3)$$

и т. д., где  $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{D}}$  — медленные амплитуды.

Необходимые условия (7.11) применимости пространственно-временной геометрической оптики, введенные в § 7, следует дополнить еще неравенством  $\rho_0/L \ll 1$ , где  $\rho_0$  — радиус пространственной дисперсии (радиус нелокальности), т. е. масштаб изменения ядра  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}(\Delta t, \Delta\mathbf{r}; t, \mathbf{r})$  по аргументу  $\Delta\mathbf{r}$ . При выполнении неравенства  $\rho_0 \ll L$  волну  $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} e^{i\varphi}$  можно считать плоской в пределах области  $\Delta\mathbf{r} \ll \rho_0$ , существенной для интегрирования в (25.2). Таким образом, при учете пространственной дисперсии должно выполняться неравенство

$$\mu = \max\left(\frac{\bar{\tau}}{T}, \frac{\tau_0}{T}, \frac{\bar{\lambda}}{L}, \frac{\rho_0}{L}\right) \ll 1, \quad (25.4)$$

где  $\tau \sim 1/\omega$ ,  $\lambda \sim 1/k$  — средние период и длина волны поля, а  $T$  и  $L$  — масштабы, характеризующие нестационарность и неоднородность параметров поля  $\tilde{\mathbf{E}}$ ,  $\omega = -\partial\varphi/\partial t$ ,  $\mathbf{k} = \nabla\varphi$  и параметров среды.

**2. Дифференциальная форма материального уравнения.** По аналогии с (7.12) разложим амплитуду  $\tilde{\mathbf{E}}(t', \mathbf{r}')$  и фазу  $\varphi(t', \mathbf{r}')$

<sup>1)</sup> Как известно, в случае переменных полей введение тензора магнитной проницаемости затруднено неоднозначностью разделения электрических и магнитных свойств вещества при наличии дисперсии, что делает целесообразным включение в поляризацию  $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi$  всех наведенных в среде токов [381, 382].

в ряды Тейлора по разностям  $\Delta t = t - t'$  и  $\Delta r = r - r'$ :

$$E_{\beta}(t', r') = \exp[i\varphi(t, r) + i\omega\Delta t - ik\Delta r] \left\{ \tilde{E}_{\beta}(t, r) - \frac{\partial \tilde{E}_{\beta}}{\partial t} \Delta t - \frac{\partial \tilde{E}_{\beta}}{\partial x_j} \Delta x_j + \frac{i\tilde{E}_{\beta}}{2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_j} \Delta t \Delta x_j + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} \Delta x_j \Delta x_m \right] + \dots \right\} \quad (25.5)$$

(по повторяющимся индексам здесь и ниже производится суммирование).

При подстановке разложения (25.5) в (25.2) интегрированию подлeжит ядро  $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}$  с экспоненциальным множителем  $\exp(i\omega\Delta t - ik\Delta r)$  и степенями  $\Delta t$  и  $\Delta x_j$ . Подобно (7.14), интегралы такого рода выражаются производными по  $\omega$  и  $k$  от величины

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k; t, r) \equiv \int_{-\infty}^t dt \int dr' \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}(\Delta t, \Delta r; t, r) e^{i\omega\Delta t - ik\Delta r}, \quad (25.6)$$

которую называют *комплексным тензором электрической проницаемости*<sup>1)</sup>. В результате для электрической индукции  $D$  получаем разложение [380]:

$$D_{\alpha}(t, r) = e^{i\varphi(t, r)} \{ \epsilon_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\beta} + i\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\beta} + O(\mu^2) \}, \quad (25.7)$$

где  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$  — дифференциальный оператор, определенный соотношением

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\beta} = \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega} \frac{\partial \tilde{E}_{\beta}}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_j} \frac{\partial \tilde{E}_{\beta}}{\partial x_j} - \frac{\tilde{E}_{\beta}}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega \partial k_j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_j \partial k_m} \right). \quad (25.8)$$

В силу (25.4) все величины, объединенные выражением  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\beta}$ , имеют первый порядок малости по  $\mu$  относительно  $\epsilon_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\beta}$ .

Таким образом, интегральное соотношение (25.2) мы заменили приближенным дифференциальным соотношением (25.7). В отсутствие дисперсии (как временной, так и пространственной) оператор  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$  обращается в нуль, и между  $D$  и  $E$  устанавливается алгебраическая связь  $D_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}(t, r) E_{\beta}$ .

**3. Уравнения для полей нулевого и первого приближений.** Разложив амплитуды  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{D}$  в ряды по степеням малого пара-

<sup>1)</sup> Зависимость этого тензора от  $k = \nabla\varphi$  отвечает пространственной дисперсии среды, подобно тому, как зависимость от  $\omega = -\partial\varphi/\partial t$  связана с временной дисперсией.

метра  $\mu$ , например,  $\tilde{E} = \tilde{E}^{(0)} + i\tilde{E}^{(1)} + i^2\tilde{E}^{(2)} + \dots$ , после стандартных операций мы получим сначала уравнения нулевого приближения (начиная с этого момента мы не снабжаем амплитуды поля значком «тильда»)

$$[kH^{(0)}]_{\alpha} + \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}^{(0)} = 0, \quad [kE^{(0)}]_{\alpha} - \frac{\omega}{c} H_{\alpha}^{(0)} = 0, \quad (25.9)$$

а затем уравнения первого приближения

$$[kH^{(1)}]_{\alpha} + \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}^{(1)} = \\ = -\text{rot}_{\alpha} H^{(0)} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}^{(0)}) - i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\alpha\beta}^a E_{\beta}^{(0)} - \frac{\omega}{c} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta} E_{\beta}^{(0)} \equiv \tilde{X}_{\alpha}, \quad (25.10)$$

$$[kE^{(1)}]_{\alpha} - \frac{\omega}{c} H_{\alpha}^{(1)} = -\text{rot}_{\alpha} E^{(0)} - \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\alpha}^{(0)}}{\partial t} \equiv \tilde{Y}_{\alpha}$$

и т. д. (как обычно, здесь  $k^i = \nabla\varphi$ ,  $\omega = -\partial\varphi/\partial t$ ). Мы выделили здесь из тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, k; t, r)$  антиэрмитову часть

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^a = (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^*)/2,$$

предполагая, что она мала по сравнению с эрмитовой частью  $\varepsilon_{\alpha\beta}^e = (\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}^*)/2$ , за которой мы сохранили обозначение  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Таким образом, к величинам порядка  $\mu$  в неравенстве (25.4) следует добавить еще один параметр  $|\varepsilon_{\alpha\beta}^a| \sim \mu |\varepsilon_{\alpha\beta}^e| \ll |\varepsilon_{\alpha\beta}^e|$ .

Как и в §§ 22—24, удобно исключить из уравнений (25.9) и (25.10) магнитные поля  $H^{(0)}$  и  $H^{(1)}$ , получив для  $E^{(0)}$  и  $E^{(1)}$  следующие уравнения, обобщающие уравнения (23.2) и (23.23) на случай немонохроматических волн:

$$\hat{Q}E^{(0)} = 0, \quad (25.11)$$

$$\hat{Q}E^{(1)} = \frac{\omega}{c} \tilde{X} + [k\tilde{Y}] \equiv \tilde{Z}, \quad (25.12)$$

где  $\hat{Q}$  — матрица с компонентами

$$Q_{\alpha\beta} = k^2\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha}k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (25.13)$$

**4. Уравнение эйконала. Пространственно-временные лучи.** Приравнявая нулю определитель системы (25.11), получаем уравнение эйконала (локальное дисперсионное уравнение)

$$\mathcal{H} = \det \left\| k^2\delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha}k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\alpha\beta} \right\| = 0, \quad (25.14)$$

которое определяет поведение фазы  $\varphi = \varphi(t, r)$ . В стационарных задачах, когда тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  не зависит явно от времени и частота



$\omega$  постоянна, фаза равна  $\varphi = \frac{\omega}{c} \psi(\mathbf{r}) - \omega t$ , где  $\psi(\mathbf{r})$  — эйконал, с которым мы имели дело при рассмотрении монохроматических волн. Соответственно этому  $\mathbf{k} = \nabla\varphi = \frac{\omega}{c} \nabla\psi = \frac{\omega}{c} \mathbf{p}$ , так что уравнение (25.14) в стационарном случае эквивалентно уравнению (23.4).

Уравнение (25.14) можно представить в различных формах. В частности, его можно факторизовать аналогично (23.8) или записать в виде произведения собственных значений  $\lambda_j$  матрицы  $\hat{Q}$ :  $\mathcal{H} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$ . При учете пространственной дисперсии могут обращаться в нуль не два, а все три собственных значения  $\lambda_j$ , что соответствует возможности распространения продольных волн (см. п. 9).

В отличие от скалярной и стационарной постановки задачи, принятой в § 7, гамильтониан  $\mathcal{H}(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r})$  теперь зависит от времени, вследствие чего на пространственно-временном луче  $\{t(\xi), \mathbf{r}(\xi)\}$ , удовлетворяющем уравнениям (7.20),

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \neq 0, \quad (25.15)$$

т. е. частота  $\omega$  не остается постоянной. Связанные с этим эффекты (изменение энергии и длительности волновых пакетов) мы рассмотрим в § 27. Еще одно отличие от скалярной постановки задачи состоит в том, что в случае векторных полей  $\mathcal{H}$  обращается в нуль на нескольких поверхностях (оболочках) в пространстве  $\{\omega, \mathbf{k}\}$ , соответствующих разным типам нормальных волн (на этих оболочках обращаются в нуль те или иные собственные значения  $\lambda_j(\omega, \mathbf{k})$ ).

Каждой из нормальных волн отвечает свое семейство лучей. Запишем эйконал  $\mathcal{H}$  для одной из мод в форме, аналогичной (23.9):

$$\mathcal{H}_j(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left[ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_j^2(\omega, \mathbf{l}; t, \mathbf{r}) \right] = 0, \quad (25.16)$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$  — направление волнового вектора, а  $n_j$  — коэффициент преломления  $j$ -й нормальной волны (моды). Подставив (25.16) в (25.15) и исключив параметр  $\xi$ , получим уравнения лучей, использованные в работах [23, 84, 383, 384] и обобщающие уравнения (7.22) на анизотропные нестационарные среды:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= 2c^2 \left( \mathbf{k} - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{k}} \right) \Big/ \frac{\partial \omega^2 n^2}{\partial \omega} = \mathbf{g}, \\ \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= \omega^2 \frac{\partial n^2 / \partial \mathbf{r}}{\partial \omega^2 n^2} = \omega \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\omega^2 \frac{\partial n^2 / \partial t}{\partial \omega^2 n^2} = -\omega \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial t}. \end{aligned} \quad (25.17)$$

В стационарной среде без пространственной дисперсии ( $\partial n / \partial \mathbf{k} = 0$ ,  $\partial n / \partial t = 0$ ) эти уравнения переходят в (7.22).

**5. Уравнение переноса для амплитуд независимых нормальных волн в анизотропной среде.** Как и в § 23, положим  $E^{(0)} = \Phi \mathbf{f}$ , где  $\mathbf{f}$  — вектор поляризации одной из нормальных волн. Условие совместности уравнений первого приближения (25.12) имеет вид, аналогичный условию (23.24):  $(E^* \tilde{\mathbf{Z}}) = 0$  или

$$\tilde{\mathbf{X}} E^* - \tilde{\mathbf{Y}} H^* = 0, \quad (25.18)$$

где, согласно (25.9),

$$H = \frac{c}{\omega} [kE] \equiv h\Phi, \quad h = \frac{c}{\omega} [kf] = [pf],$$

и для краткости опущены индексы «0». Приравняв нулю вещественную часть (25.18), мы получим уравнение для модуля амплитуды  $|\Phi|$ , тогда как мнимая часть уравнения (25.18) определяет поведение аргумента амплитуды  $\delta = \arg \Phi$ .

Уравнение для  $|\Phi|$  можно записать в форме закона сохранения энергии, если ввести плотность электромагнитной энергии  $w$  и вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}$ , определив их таким же образом, как и для однородной и стационарной среды [326]:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega} E_{\alpha} E_{\beta}^* + H_{\alpha} H_{\alpha}^* \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial \omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\omega \partial \omega} f_{\alpha} f_{\beta}^* \right\} |\Phi|^2 \equiv \frac{\eta |\Phi|^2}{16\pi}, \end{aligned} \quad (25.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{16\pi} \{ [E H^*] + [E^* H] \} - \frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} E_{\alpha} E_{\beta}^* = \\ &= \frac{|\Phi|^2}{16\pi} \left\{ c ([f h^*] + [f^* h]) - \omega \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{k}} f_{\alpha} f_{\beta}^* \right\}. \end{aligned} \quad (25.20)$$

Последнее слагаемое в формуле (25.20), содержащее производную  $\partial \varepsilon_{\alpha\beta} / \partial \mathbf{k}$ , описывает потоки энергии, связанные с когерентным движением зарядов [385] (см. также [326] и [386]).

Частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  в (25.19) и (25.20) являются функциями координат и времени:  $\omega = \omega(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(t, \mathbf{r})$ . Учитывая это, прямой проверкой можно убедиться, что равенство нулю вещественной части (25.18) эквивалентно следующему уравнению для  $|\Phi|^2$  [380, 23]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = - \left( 2\chi + \frac{1}{\eta} f_{\alpha}^* f_{\beta} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t} \right) w, \quad (25.21)$$

где

$$2\chi = - \frac{\omega}{\eta} \left[ 2i \varepsilon_{\alpha\beta}^a + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega \partial t} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial x_j \partial k_j} \right) \right] f_{\alpha}^* f_{\beta}. \quad (25.22)$$

В то же время уравнение для  $\delta = \arg \Phi$  может быть представлено в виде

$$w \frac{\partial \delta}{\partial t} + S \nabla \delta = -wN, \quad (25.23)$$

где

$$N = \frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \left\{ c \mathbf{f} \operatorname{rot} \mathbf{h}^* + c \mathbf{h}^* \operatorname{rot} \mathbf{f} + f_{\alpha}^* \frac{\partial f_{\beta}}{\partial t} \frac{\partial \omega \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega} - \omega f_{\alpha}^* \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_j} \right\}.$$

**6. Теорема о групповой скорости.** Вектор Пойнтинга  $S$  и плотность электромагнитной энергии  $w$  в квазиплоской и квазимонохроматической волне связаны соотношением [326]:

$$S = w \mathbf{g}, \quad (25.24)$$

где  $\mathbf{g} = d\mathbf{r}/dt$  — групповая скорость волны. Это важное соотношение связано с именами Гамильтона, Стокса, Релея, Зоммерфельда, Бриллюэна. Теорема о групповой скорости (25.24) допускает и четырехмерное обобщение [92, 387].

В рамках излагаемой здесь геометрической теории соотношение  $S = w \mathbf{g}$  можно вывести, используя собственные значения определяемой выражением (25.13) матрицы  $\hat{Q}$ :

$$\hat{Q}E = \lambda E. \quad (25.25)$$

Продифференцируем (25.25) один раз по  $\mathbf{k}$ , а другой раз по  $\omega$ . Умножив результаты слева на  $E^*$  и положив  $\lambda = 0$ , получим

$$E^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \mathbf{k}} E = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{k}} |E|^2, \quad E^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \omega} E = \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} |E|^2. \quad (25.26)$$

Вычислив с помощью (25.13) производные  $Q_{\alpha\beta}$ ,

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial k_l} = 2k_l \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} \delta_{\beta l} - k_{\beta} \delta_{\alpha l} - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_l},$$

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial \omega} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \omega^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega},$$

мы получаем возможность выразить левые части соотношений (25.26) через  $S$  и  $w$ , определенные согласно (25.19) и (25.20):

$$\begin{aligned} E^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \mathbf{k}} E &= \frac{16\pi c^2}{\omega} S = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{k}} |E|^2, \\ E^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial \omega} E &= -\frac{16\pi c^2}{\omega} w = \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} |E|^2. \end{aligned} \quad (25.27)$$

Отсюда и следует формула (25.24):

$$\frac{S}{w} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{k}} \Big/ \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}} \Big/ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = \mathbf{g}.$$

Аналогичным образом выводится и ряд других соотношений между билинейными характеристиками волны [92, 387].

Подчеркнем, что если вектор групповой скорости определен кинематическим соотношением  $\mathbf{g} = d\mathbf{r}/dt$ , как это было сделано выше, то формула  $\mathbf{S} = \mathbf{g}w$  возникает только в рамках лучевого приближения, т. е. справедлива лишь для почти плоских и почти монохроматических волн. Более общая постановка вопроса о скорости распространения импульсов и модулированных волн, не опирающаяся на кинематическое определение вектора  $\mathbf{g}$ , рассмотрена Л. А. Вайнштейном [90].

**7. Интегрирование уравнения переноса вдоль пространственно-временных лучей.** Преобразуем уравнение (25.21), учитывая (25.24), соотношение <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\eta} f_{\alpha\beta}^* \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t} = - \frac{d \ln \omega}{dt}, \quad (25.28)$$

и теорему Лиувилля  $\operatorname{div} \mathbf{g} = d \ln j(t)/dt$ :

$$\frac{dw}{dt} + w \frac{d}{dt} \ln j(t) = \left( -2\chi + \frac{d \ln \omega}{dt} \right) w \quad (25.29)$$

(якобиан  $j(t)$  определен выражением (7.42)). Отсюда получаем значение плотности энергии на луче

$$w = w(t^0) \frac{j(t^0) \omega(t)}{j(t) \omega(t^0)} \exp \left( -2 \int_{t^0}^t \chi dt \right), \quad (25.30)$$

а также закон изменения модуля амплитуды

$$|\Phi| = \sqrt{\frac{16\pi w}{\eta}} = |\Phi^0| \sqrt{\frac{\eta^0 j(t^0) \omega(t)}{\eta j(t) \omega(t^0)}} \exp \left( - \int_{t^0}^t \chi dt \right). \quad (25.31)$$

Уравнение (25.23) для аргумента  $\delta$  в силу (25.24) принимает вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{g} \nabla \delta = \frac{d\delta}{dt} = -N,$$

откуда

$$\delta = \delta^0 - \int_{t^0}^t N dt. \quad (25.32)$$

<sup>1)</sup> В силу уравнений Гамильтона (25.15)  $\frac{d\omega}{dt} = - \frac{\partial \lambda / \partial t}{\partial \omega / \partial \omega}$ . Дифференцируя (25.25) по  $t$ , имеем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} |E|^2 = E^* \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} E = - \frac{\omega^2}{c^2} f_{\alpha\beta}^* \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial t} |E|^2.$$

Используя далее значение  $\partial \lambda / \partial \omega$  из (25.27), мы получим (25.28).

В стационарной постановке задачи и в отсутствие пространственной дисперсии решения (25.31) и (25.32) переходят соответственно в (23.34) и (23.36) (доказательство такое же, как в § 7).

8. Поперечные волны в изотропной среде. Проведенное выше рассмотрение относилось к анизотропным средам, в которых все собственные значения  $\lambda_j$  различны, т. е. поляризационное вырождение отсутствует. Рассмотрим теперь поведение волн в изотропной среде<sup>1)</sup>, тензор проницаемости которой имеет вид [381, 382]

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\perp}(\omega, k; t, r) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right) + \epsilon_{\parallel}(\omega, k; t, r) \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2}, \quad (25.33)$$

где  $\epsilon_{\perp}$  — поперечная, а  $\epsilon_{\parallel}$  — продольная проницаемость.

Гамильтониан (25.14) в изотропной среде распадается на произведение

$$\mathcal{H} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right)^2 \left( -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} \right) = 0, \quad (25.34)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_2 = - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right)$  — кратные собственные значения, отвечающие поляризационно вырожденным поперечным колебаниям, а  $\lambda_3 = -\omega^2 \epsilon_{\parallel} / c^2$  соответствует продольным колебаниям.

Как и в монохроматической задаче, в нулевом приближении электрическое и магнитное поле поперечной волны можно представить в форме (22.13) и (22.14), а условия совместности  $(\nabla Z) = 0$ ,  $(bZ) = 0$  уравнений первого приближения приводят к следующим уравнениям для амплитуд  $\Phi_v$  и  $\Phi_b$ :

$$\frac{d\Phi_v}{dt} + \alpha\Phi_v + \kappa g_{\perp} \Phi_b = 0, \quad \frac{d\Phi_b}{dt} - \kappa g_{\perp} \Phi_v + \alpha\Phi_b = 0, \quad (25.35)$$

где  $\kappa$  — кручение луча,  $g_{\perp}$  — групповая скорость поперечной волны:

$$g_{\perp} = c \left( 2\sqrt{\epsilon_{\perp}} - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \epsilon_{\perp}}{\partial k} \right) \eta_{\perp}, \quad \eta_{\perp} = \frac{\partial(\omega^2 \epsilon_{\perp})}{\omega \partial \omega},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\eta_{\perp} j(t)}{\omega} \right) + \chi_{\perp}, \quad (25.36)$$

$$\chi_{\perp} = \frac{1}{\eta_{\perp}} \left[ 2\omega \epsilon_{\perp}' + \omega \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{\perp}}{\partial x_j \partial k_j} - \frac{\partial^2 \epsilon_{\perp}}{\partial \omega \partial t} \right) \right]$$

<sup>1)</sup> Описывая волны в изотропной среде, следует иметь в виду, что пространственная дисперсия при наличии неоднородности или же неоднородное движение среды приводит к появлению слабой анизотропии (оба эти эффекта обсуждаются в § 26). Поэтому, задавая тензор проницаемости в форме (25.33), мы неявно делаем предположение о пренебрежимой малости указанных эффектов.

( $\epsilon_{\perp}''$  — мнимая часть комплексной проницаемости  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\perp}' + i\epsilon_{\perp}''$ ; ее вещественная часть  $\epsilon_{\perp}'$  обозначена здесь просто через  $\epsilon_{\perp}$ ). При выводе уравнений (25.35) учтено соотношение  $d \ln \omega / dt = -\eta_{\perp}^{-1} \partial \epsilon_{\perp} / \partial t$ , которое доказывается аналогично (25.28). В отсутствие пространственной дисперсии, когда  $\partial \epsilon_{\perp} / \partial k = 0$ , скорость  $g_{\perp}$  переходит в (7.23).

Для амплитуды поля  $A = |E| = (|\Phi_{\nu}|^2 + |\Phi_{\delta}|^2)^{1/2}$  из (25.35) следует уравнение

$$\frac{dA}{dt} + \alpha A = 0, \quad (25.37)$$

решение которого имеет вид

$$A = A^0 \sqrt{\frac{\eta_{\perp j}^0(t^0) \omega(t)}{\eta_{\perp j}(t) \omega(t^0)}} \exp\left(-\int_{t^0}^t \chi_{\perp} dt\right). \quad (25.38)$$

Уравнение (25.37) можно представить также в виде закона сохранения

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} S = \left(-2\chi_{\perp} - \frac{d \ln \omega}{dt}\right) w, \quad (25.39)$$

где  $w = \eta_{\perp} |E|^2 / 16\pi$  — плотность энергии,

$$S = \frac{c}{16\pi} \left\{ [EH^*] + [E^*H] - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \epsilon_{\perp}}{\partial k} |E|^2 \right\} = g_{\perp} w$$

— плотность потока энергии.

Положив в (25.35)  $\Phi_{\nu} = \Phi \cos \theta$ ,  $\Phi_{\delta} = \Phi \sin \theta$ , для  $\Phi$  получим такое же уравнение  $d\Phi/dt + \alpha\Phi = 0$ , как и для  $A$ . Следовательно, отношение  $\Phi/A$ , характеризующее форму эллипса поляризации волны, сохраняется на всем луче и равно начальному значению  $\Phi^0/A^0$ . В то же время угол  $\theta = \operatorname{arctg}(\Phi_{\delta}/\Phi_{\nu})$ , характеризующий ориентацию эллипса поляризации, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = g_{\perp} \alpha. \quad (25.40)$$

В стационарной задаче оно переходит в уравнение Рытова (22.26), так как  $g_{\perp} dt = d\sigma$ .

**9. Продольные волны в изотропной среде.** При обращении в нуль продольной проницаемости,

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r}) = 0, \quad (25.41)$$

из уравнений нулевого приближения (25.11) следует, что

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp}\right) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2}\right) E_{\beta} = 0 \quad \text{или} \quad E_{\perp} = E - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}E)}{k^2} = 0.$$

Следовательно, при  $\epsilon_{\parallel} = 0$  электрическое поле является продоль-

ным и может быть представлено в форме

$$E = \Phi_{\parallel} \frac{k}{k} = \Phi_{\parallel} l. \quad (25.42)$$

Магнитное поле в нулевом приближении равно нулю:

$$H = \frac{c}{\omega} [kE] = \frac{c}{\omega} [kl] \Phi_{\parallel} = 0. \quad (25.43)$$

Условие совместности уравнений первого приближения  $(l\tilde{Z}) = 0$  приводит к закону сохранения:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} S = \left( -2\chi_{\parallel} - \frac{d \ln \omega}{dt} \right) w, \quad (25.44)$$

где

$$w = \frac{|\Phi_{\parallel}|^2 \eta_{\parallel}}{16\pi}, \quad \eta_{\parallel} = \frac{\partial \omega^2 \varepsilon_{\parallel}}{\omega \partial \omega} = \omega \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega},$$

$$S = -\frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial k} |\Phi_{\parallel}|^2 = g_{\parallel} w, \quad g_{\parallel} = -\frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial k} \left| \frac{\partial \varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega} \right|, \quad (25.45)$$

$$2\chi_{\parallel} = \frac{1}{\eta_{\parallel}} \left[ 2\omega \varepsilon_{\parallel}'' + \omega \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\parallel}}{\partial x_j \partial k_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\parallel}}{\partial \omega \partial t} \right) \right].$$

Согласно (25.44) и (25.45), перенос энергии продольными волнами осуществляется только благодаря пространственной дисперсии: при  $\partial \varepsilon_{\parallel} / \partial k = 0$  вектор Пойнтинга обращается в нуль, как и групповая скорость  $g_{\parallel}$ .

Решение для  $|\Phi_{\parallel}|$  записывается аналогично (25.38):

$$\Phi_{\parallel} = \Phi_{\parallel}^0 \sqrt{\frac{\eta_{\parallel j}^0(t^0) \omega(t)}{\eta_{\parallel j}(t) \omega(t^0)}} \exp \left( - \int_{t^0}^t \chi_{\parallel} dt \right). \quad (25.46)$$

**10. Волны в слабоанизотропных средах.** Для описания негармонических волн в слабоанизотропных средах, в частности, в неоднородно движущихся средах, обладающих слабой анизотропией, можно применять квазиизотропное приближение, описанное в § 24. В этом случае в уравнениях (25.35) появятся слагаемые, отвечающие анизотропной части тензора проницаемости и описывающие взаимодействие мод в слабоанизотропной неоднородной и нестационарной среде (см., в частности, [378]). Ряд конкретных результатов, примыкающих к квазиизотропному приближению, получен в [390, 391, 393].

## § 26. Особенности материальных уравнений для нестационарных и неоднородных диспергирующих сред. Условия существования адиабатического инварианта

**1. О поправках к квазистационарному тензору диэлектрической проницаемости.** Проведенное выше рассмотрение осуществлено в предположении заданного тензора проницаемости

$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r})$ . Между тем фактическое вычисление этого тензора в общем случае неоднородных и нестационарных сред с дисперсией сопряжено со значительными трудностями, поскольку нахождение  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  эквивалентно решению уравнений, описывающих поведение (отклик) среды под действием электромагнитного поля. Определение тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  существенно облегчается в случае плавно неоднородных и медленно нестационарных сред, т. е. сред, для которых выполняются неравенства (25.4).

В сущности, речь идет о решении *самосогласованной* задачи о поведении системы «поле — среда» с привлечением уравнений для микропроцессов в среде. Решение такой самосогласованной задачи существенно облегчается в случае плавно неоднородных и медленно нестационарных сред, когда можно применять метод геометрической оптики к полной системе уравнений, описывающих систему «поле — среда». Не рассматривая эту проблему в полном объеме, мы ограничимся здесь изучением качественно новых электромагнитных явлений, к которым приводит плавная неоднородность и медленная нестационарность диспергирующих сред.

Для таких сред естественно ожидать, что тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  будет слабо отличаться от своего «квазистационарного» значения  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r})$ , которое мы определим как тензор проницаемости такой однородной и стационарной среды, значения макроскопических параметров которой  $\gamma_j$  (температура, концентрация, гидродинамическая скорость и т. д.<sup>1)</sup>) совпадают с параметрами  $\gamma_j(t, \mathbf{r})$  рассматриваемой неоднородной и нестационарной среды в данный момент  $t$  в данной точке  $\mathbf{r}$ . Иными словами, если электродинамические свойства однородной и стационарной среды описываются тензором  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{однор}}(\omega, \mathbf{k}; \gamma_j)$ , то для среды с переменными параметрами  $\gamma_j = \gamma_j(t, \mathbf{r})$  квазистационарный тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r})$  вводится как

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{однор}}(\omega, \mathbf{k}; \gamma_j(t, \mathbf{r})). \quad (26.1)$$

Реальный тензор плавно неоднородной и медленно нестационарной среды  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , который фигурирует в уравнениях из § 25, отличается от своего квазистационарного значения  $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$  на малую величину порядка геометрикооптического малого параметра  $\mu$ :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + O(\mu^2), \quad |\delta\varepsilon_{\alpha\beta}| \sim \mu \ll 1. \quad (26.2)$$

Поскольку в пределе однородной и стационарной среды поправка

<sup>1)</sup> Набор параметров  $\gamma_j$  может быть как дискретным, так и непрерывным, как например, совокупность значений невозмущенной функции распределения электронов в случае плазмы.



$\delta \epsilon_{\alpha\beta}$  обращается в нуль, можно предвидеть, что выражение для  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$  должно содержать пространственные и временные производные параметров  $\gamma_j$ :

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta} \approx B_0 \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} + B_m \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial \gamma_j} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_m}. \quad (26.3)$$

Фактическое нахождение поправки  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$  облегчается тем, что тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}; t, \mathbf{r})$  по определению описывает отклик среды на монохроматическую плоскую волну  $E e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ . Это позволяет искать решение микроскопических уравнений, описывающих поведение среды, в виде

$$f(t, \mathbf{r}) = [F^{(0)}(t, \mathbf{r}) + F^{(1)}(t, \mathbf{r}) + F^{(2)}(t, \mathbf{r}) + \dots] e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

где  $|F^{(1)}| \sim \mu |F^{(0)}| \ll |F^{(0)}|$  и т. д. (здесь  $f(t, \mathbf{r})$  — один из параметров, характеризующих волновые процессы в среде). Примеры такого ряда вычислений имеются в работах [389—394]. Некоторые из этих примеров мы затронем ниже.

**2. Физические явления, связанные с отличием тензора проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  от своего квазистационарного значения.** Вычисление  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$  оправдано только в условиях, когда они приводят к качественно новым явлениям и эффектам. К настоящему времени выявлено несколько таких эффектов. Прежде всего, в неоднородной среде могут возбудиться *новые типы волн*, которых не было в однородной среде. Наиболее ярким примером этому служит появление *дрейфово-диссипативных* волн в неоднородной плазме, помещенной в неоднородное же магнитное поле. Такие волны часто оказываются неустойчивыми в результате того, что электронами, совершающие дрейфовое движение в неоднородном магнитном поле, отдают свою энергию электромагнитной волне, если скорость дрейфа электронов определенным образом согласована со скоростью волны.

Геометрооптическая теория дрейфово-диссипативных колебаний направлена на отыскание прежде всего мнимой (более общо — эрмитовой) поправки к квазистационарному значению проницаемости, которая пропорциональна градиентам тех или иных параметров плазмы и ответственна (при определенном знаке поправки) за нарастание колебаний. Не затрагивая здесь эту обширную область исследований, отметим, что соответствующие вопросы освещены в многочисленных публикациях, в частности, в обзорах [395, 396] и в книгах [382, 397, 398].

Во-вторых, при наличии нестационарности в диспергирующей среде антиэрмитова часть поправки  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}$  оказывается отличной от нуля *даже в отсутствие поглощения*. Этот эффект тесно связан с существованием адиабатического инварианта в прозрачных средах и рассмотрен в пп. 3 и 4.

В-третьих, неоднородность в изотропной среде и неоднородность ее движения могут приводить к *слабой анизотропии* (см. [389—394, 23, 84]).

В-четвертых, протекание электромагнитных процессов в неоднородной и нестационарной среде зависит, как оказалось, не только от закона изменения макроскопических параметров, но и от *конкретного микромеханизма*, ответственного за эти изменения [394, 23]. Ясное понимание этих особенностей отсутствует в некоторых работах, посвященных неоднородным и нестационарным средам с дисперсией.

**3. Условие существования адиабатического инварианта.** Если выполнено условие<sup>1)</sup>

$$2\chi \equiv \frac{-\omega}{\eta} \left[ 2ie_{\alpha\beta}^a + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial \omega \partial t} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial x_j \partial k_j} \right) \right] f_{\alpha}^* f_{\beta} = 0, \quad (26.4)$$

то уравнение переноса (25.29) приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{w_j}{\omega} = 0. \quad (26.5)$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{w_j}{\omega} = \text{const} = \frac{w_j^0}{\omega^0}, \quad (26.6)$$

умножив которое на  $d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ , получим

$$d\mathcal{J} = \frac{w dV(t)}{\omega} = \text{const} = \frac{w^0 dV^0}{\omega^0}, \quad (26.7)$$

где  $dV(t) = j(t) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = dx_1 dx_2 dx_3$  — элемент объема волнового пакета, перемещающийся вместе с волной, а  $dV^0$  — первоначальный элемент объема при  $t = t^0$ .

Таким образом, при выполнении условия (26.4) комбинация  $w dV / \omega = d\mathcal{J}$  оказывается сохраняющейся величиной. Интегрирование  $d\mathcal{J}$  по всему объему волнового пакета приведет нас к *адиабатическому инварианту* задачи

$$\mathcal{J} = \int_{V(t)} \frac{w dV}{\omega} = \text{const}, \quad (26.8)$$

при этом отношение  $w/\omega = d\mathcal{J}/dV$  целесообразно рассматривать как *плотность адиабатического инварианта*.

Если объем волнового пакета  $V(t)$  столь мал, что для всех точек, лежащих внутри  $V(t)$ , значения частоты  $\omega(t)$  одинаковы (разумеется, это общее для всех точек значение  $\omega(t)$  может ме-

<sup>1)</sup> Мы восстановили здесь индекс «э» у эрмитовой части тензора проницаемости.

няться по мере перемещения пакета), то для  $\mathcal{I}$  получается такое же выражение, как и для адиабатического инварианта одиночного осциллятора:

$$\mathcal{I} \approx \frac{\int \omega dV}{\omega} = \frac{W}{\omega} = \text{const}, \quad (26.9)$$

где  $W$  — полная энергия пакета. Таким образом, (26.8) можно рассматривать как обобщение понятия адиабатического инварианта на протяженные волновые пакеты. Конкретные примеры сохранения  $\mathcal{I}$  были обнаружены в работах [399—403] (см. также обзоры [23, 84]). Условие (26.4) было сформулировано в работе [404] для одного частного случая и обобщено в [405].

4. Феноменологический способ нахождения антиэрмитовой части поправки к квазистационарному тензору проницаемости для прозрачных сред. Очевидно, все приведенные в п. 3 рассуждения можно провести в обратном порядке, и тогда из требования существования адиабатического инварианта, естественного для прозрачных (непоглощающих) сред, будет следовать соотношение (26.4), из которого и можно будет определить антиэрмитову поправку  $\delta \epsilon_{\alpha\beta}^a$  чисто феноменологическим путем [404, 405].

Для непоглощающих сред квазистационарный тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}^0$  эрмитов:  $\epsilon_{\alpha\beta}^0 = \epsilon_{\alpha\beta}^{0*}$ , и поэтому в формуле (26.2)  $\epsilon_{\alpha\beta}^a = \delta \epsilon_{\alpha\beta}^a + O(\mu^2)$ . Учитывая это, подставим (26.2) в (26.4) и получим соотношение

$$\epsilon_{\alpha\beta}^a = \delta \epsilon_{\alpha\beta}^a = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial \omega \partial t} - \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial x_j \partial k_j} \right) + O(\mu^2), \quad (26.10)$$

которое дает универсальную связь между антиэрмитовой частью тензора проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}^a$  и квазистационарным тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}^0$  в условиях, когда существует адиабатический вариант. Выражения, аналогичные (26.10), справедливы также для продольных и поперечных волн в изотропной среде. В частности, для однородной и изотропной нестационарной среды с одной лишь частотной дисперсией из (26.10) получаем результат работы [404]:

$$\delta \epsilon'' \equiv \text{Im} \delta \epsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon^0(\omega, t)}{\partial \omega \partial t} + O(\mu^2). \quad (26.11)$$

В то время как в стационарных задачах антиэрмитова часть тензора проницаемости описывает джоулевы потери в среде (или — в активных средах — передачу энергии от среды к волне), в нестационарных прозрачных средах с дисперсией появление антиэрмитовой части не связано с джоулевыми потерями, а обусловлено дополнительным фазовым сдвигом между векторами  $D$  и  $E$ . Например, при изменении концентрации  $N_e$  электронов в плазме из-за конечного времени установления поляри-

зации в среде с дисперсией колебания индукции  $D$  будут отставать или, наоборот, опережать (в зависимости от знака  $\partial N_e / \partial t$ ) по фазе колебания напряженности поля  $E$  в той же точке. В среде с пространственной дисперсией подобное рассогласование по фазе (из-за переноса вещества) может быть вызвано также неоднородностью среды.

В стационарных средах, когда  $d\omega/dt = 0$  и вдоль луча  $\omega = \text{const}$ , из (26.7) следует сохранение энергии  $dW = \omega dV$  в элементе волнового пакета, однако в нестационарной среде энергия пакета не сохраняется. Изменение  $W$  обусловлено энергообменом со средой (энергия волны черпается, например, из кинетической энергии направленного движения частиц среды). Разумеется, полная энергия системы «волна — среда» при этом не изменяется. Собственно говоря, введение поправки (26.10) как раз и обеспечивает сохранение полной энергии в случае прозрачных сред, как это было продемонстрировано, например, в [406].

При резком изменении свойств среды, например, при быстром перемещении границы раздела двух сред, адиабатический инвариант (и, следовательно, число квантов) не сохраняется [407—412].

## § 27. Волновые процессы в нестационарных средах

1. Одномерная задача. Общие соотношения. При рассмотрении волновых процессов в нестационарных средах мы максимально упростим постановку задачи, ограничившись *одномерно-неоднородными* средами. Большую часть примеров мы заимствуем из первых работ [399—401] по применению метода геометрической оптики к исследованию волн в нестационарных средах, а также из обзоров [23, 84].

Пусть изотропная среда неоднородна в направлении оси  $z$  (показатель преломления  $n = n(\omega; t, z)$ ). Рассматривая волны, распространяющиеся только вдоль оси  $z$ , выберем простейший вариант задания начальных условий, а именно, как в § 19, п. 3, зададим поле при  $z = 0$  как функцию времени:

$$E(t, 0) \equiv E^0(t) = A^0(t) e^{i\varphi^0(t)}. \quad (27.1)$$

Уравнения пространственно-временных лучей (25.17), отвечающие уравнению эйконала  $k = \omega n/c$ , в одномерно неоднородной изотропной среде с  $n = n(\omega; t, z)$  принимают вид

$$\frac{dz}{dt} = c \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \equiv g, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\omega \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial t}, \quad (27.2')$$

где  $g = g_z$  — групповая скорость волны. Уравнение

$$\frac{dk}{dt} = \omega \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{\partial n}{\partial z} \quad (27.2'')$$

для волнового числа  $k = k_z$  является следствием уравнений (27.2') и уравнения эйконала  $k = n\omega/c$  (см. соответствующее замечание в § 7).

В качестве параметра, характеризующего семейство решений  $z = z(t)$  и  $\omega = \omega(t)$ , как и в § 19, п. 3, удобно взять момент  $\xi = t^0$  выхода пространственно-временного луча  $(t, z(t))$  из начала координат  $z = 0$  (рис. 27.1). При таком выборе параметра решения  $z = Z(t, \xi)$  и  $\omega = \Omega(t, \xi)$  должны удовлетворять следующим начальным условиям:

$$Z(\xi, \xi) = 0, \quad \Omega(\xi, \xi) = -\frac{\partial \Phi^0(\xi)}{\partial \xi}. \quad (27.3)$$

Якобиан  $j(t)$  в одномерной задаче выражается через производную решения  $Z(t, \xi)$  по параметру  $\xi = t^0$ :

$$j(t) = \frac{\partial Z(t, \xi)}{\partial \xi}. \quad (27.4)$$

Фаза и амплитуда волны находятся по общим формулам из §§ 7 и 25.

Согласно (27.2'), частота волны  $\omega$  увеличивается на тех участках траектории, где коэффициент преломления уменьшается во времени ( $\partial n/\partial t < 0$ ) и, напротив, частота уменьшается при  $\partial n/\partial t > 0$ .

В результате даже при строго монохроматическом начальном колебании появляется частотная модуляция, которая может сопровождаться (особенно в диспергирующей среде) появлением пространственно-временных каустик, а это в свою очередь может привести к существенным изменениям амплитуды. Эти особенности медленно нестационарных сред позволяют эффективно управлять частотой и амплитудой волны. Рассмотрим некоторые имеющиеся здесь возможности.

2. Нестационарная среда без дисперсии. В отсутствие дисперсии, когда показатель преломления  $n$  зависит только от  $t$  и  $z$ , первое из уравнений (27.2) становится независимым от второго:

$$\frac{dz}{dt} = g = \frac{c}{n(t, z)}, \quad \frac{d \ln \omega}{dt} = -\frac{\partial \ln n(t, z)}{\partial t}. \quad (27.5)$$

Для произвольных функций  $n(t, z)$  уравнение для  $z = z(t)$  аналитически неразрешимо, но в тех частных случаях, когда аналитическое решение  $z(t) = Z(t, \xi)$  все же удастся найти (простейшие

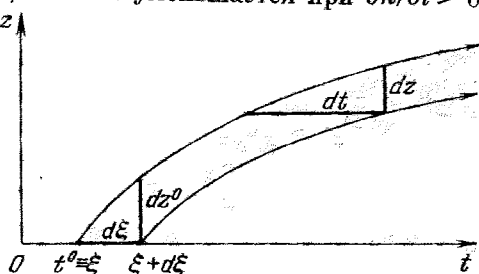


Рис. 27.1.

примеры приведены ниже), остальные параметры волны могут быть найдены в виде неявных функций.

В недиспергирующей изотропной среде комбинация  $kg - \omega$  обращается в нуль, и в силу (7.33) фаза  $\varphi(t)$  на луче  $(t, z(t))$  не изменяется:

$$\varphi(t) = \varphi^0(\xi), \quad \xi = t^0. \quad (27.6)$$

Значение фазы  $\varphi(t, z)$  в заданной мировой точке  $(t, z)$  может быть получено подстановкой в (27.6) значения  $\xi = \xi(t, z)$ , которое неявно задается уравнением  $z = Z(t, \xi)$ .

Из второго уравнения (27.5) вытекает следующий закон изменения частоты  $\omega(t)$  [401]:

$$\omega(t) = \omega^0(\xi) \exp \left\{ - \int_{\xi}^t \frac{\partial \ln n}{\partial t} dt' \right\}, \quad \omega^0(\xi) = - \frac{\partial \varphi^0(\xi)}{\partial \xi}, \quad (27.7)$$

где значения  $n = n[t', z(t')]$  берутся на луче  $(t', z(t'))$ . Величины  $\eta$  и  $\chi$ , входящие в выражение (25.38) для амплитуды поля  $A$ , в случае изотропной недиспергирующей среды равны (индекс « $\perp$ » опускаем)

$$\eta = 2n^2, \quad \chi = \frac{\omega \varepsilon''}{2\varepsilon} = \frac{\omega n''}{n},$$

где  $n'' = \varepsilon'' / 2\sqrt{\varepsilon'}$  — малая мнимая часть показателя преломления. Подставляя эти величины в (25.38), имеем

$$A(t) = A^0 \frac{n^0}{n} \sqrt{\frac{j^0 \omega}{j \omega^0}} \mathcal{P}, \quad (27.8)$$

где индексом «0» отмечены начальные значения  $A$ ,  $n$ ,  $j$  и  $\omega$  в момент выхода луча  $\xi$ , а множитель

$$\mathcal{P} = \exp \left\{ - \int_{\xi}^t \frac{\omega n''}{n} dt' \right\} \quad (27.9)$$

описывает ослабление поля вследствие поглощения. В стационарных условиях этот множитель совпадает с (3.37), поскольку  $dt = dz/g = ndz/c$ .

Выражение (27.8) можно дополнительно упростить, если учесть, что в соответствии с формулой Лиувилля

$$j(t) = j(\xi) \exp \left( \int_{\xi}^t \operatorname{div} g dt \right).$$

В одномерной задаче  $\operatorname{div} g = \partial g / \partial z$ , а в отсутствие дисперсии

$g = c/n$ . Поэтому

$$j(t) = j(\xi) \exp\left(-\int_{\xi}^t \frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial z} dt'\right).$$

Входящую сюда производную  $\partial n/\partial z$  можно выразить через  $\partial n/\partial t$  и  $dn/dt$ , поскольку

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + g \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c}{n} \frac{\partial n}{\partial z}.$$

С учетом (27.7) это приводит к выражению

$$j(t) = j(\xi) \frac{n^0}{n} \exp\left(\int_{\xi}^t \frac{\partial \ln n}{\partial t} dt\right) = j^0 \frac{n^0 \omega^0}{n\omega}. \quad (27.10)$$

Подстановка (27.10) в (27.8) окончательно дает

$$A = A^0 \sqrt{\frac{n^0}{n} \frac{\omega}{\omega^0}} \mathcal{P}. \quad (27.11)$$

В отсутствие поглощения, когда  $\mathcal{P} = 1$ , из (27.11) следует существование инварианта  $A^2 n/\omega^2 = \text{const}$  или, что то же самое,

$$\frac{S}{\omega^2} = \frac{c}{8\pi} \frac{A^2 n}{\omega^2} = \text{const}, \quad (27.12)$$

где  $S = nc|E|^2/8\pi = cnA^2/8\pi$  — плотность потока энергии в изотропной среде. Постоянство величины  $S/\omega^2$  эквивалентно существованию адиабатического инварианта (26.6), поскольку в изотропной среде без дисперсии  $w = n^2 A^2/8\pi$ , а  $j = j^0 n^0 \omega^0/n\omega$  в силу (27.10).

В пространственно-однородной нестационарной среде ( $n = n(t)$ ) из (27.7) и (27.10) имеем

$$\frac{\omega}{\omega^0} = \frac{n^0}{n}, \quad A = A^0 \left(\frac{n^0}{n}\right)^{3/2} \mathcal{P}, \quad (27.13)$$

при этом зависимость  $z = Z(t, \xi)$  дается квадратурой

$$z = c \int_{\xi}^t \frac{dt'}{n(t')}.$$

Из (27.13) следует, что для заметного изменения частоты и амплитуды волны показатель преломления должен варьироваться в широких пределах. Гораздо более чувствительными к изменениям  $n$  оказываются системы с бегущей волной показателя преломления, для которых

$$n = n(z - Vt) \equiv n(\xi) \quad (27.14)$$

( $V$  — скорость перемещения волны показателя преломления). В силу (27.5) величина  $\xi = z - Vt$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = g(\xi) - V, \quad g(\xi) = \frac{c}{n(\xi)}. \quad (27.15)$$

Характер процессов в рассматриваемом случае зависит от соотношения между скоростью волны параметра  $V$  и групповой скоростью  $g$ . В несинхронном режиме ( $g \neq V$ ) решение уравнения (27.15) записывается в виде квадратуры

$$t = \xi + \int_{-V\xi}^{z-Vt} \frac{d\xi}{g(\xi) - V}, \quad (27.16)$$

которая в неявной форме задает решение  $z = Z(t, \xi)$ .

Используя (27.14) и (27.15), преобразуем показатель экспоненты в (27.7) следующим образом:

$$\int_{\xi}^t \frac{\partial \ln n}{\partial t'} dt' = \int_{\xi^0}^{\xi} \frac{V}{n} \frac{dn}{d\xi} \frac{d\xi}{(g - V)} = \ln \left[ 1 - \beta n(\xi) \right] \Big|_{\xi^0 = -V\xi}^{\xi = z - Vt},$$

после чего для частоты  $\omega$  получим выражение

$$\omega = \omega^0 \frac{1 - \beta n(\xi^0)}{1 - \beta n(\xi)} \quad (27.17)$$

(здесь  $\beta = V/c$ ). Из (27.17) видно, что по мере приближения к синхронизму ( $g \rightarrow V$ ,  $1 - \beta n \rightarrow 0$ ) вариации частоты увеличиваются. Однако при точном синхронизме ( $1 - \beta n = 0$ ) выражение (27.17) становится непригодным.

Закон изменения частоты в синхронном режиме можно установить из следующих соображений. Пусть  $\xi_c$  — одна из точек синхронизма, в которых  $g(\xi_c) = V$  и, следовательно,  $\beta n(\xi_c) = 1$ . Согласно (27.14),  $\xi_c = z - Vt = \text{const} \Rightarrow \xi_c^0$ , так что уравнение синхронного луча имеет вид  $z = \xi_c^0 + Vt = V(t - \xi_c)$ , где  $\xi_c = -\xi_c^0/V$  — момент выхода синхронного луча из плоскости  $z = 0$ . На таком луче величина

$$-\frac{\partial \ln n}{\partial t} \Big|_{\xi = \xi_c} = V \frac{d \ln n(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_c} \equiv V\alpha$$

постоянна, и в силу (27.7) частота  $\omega$  меняется по экспоненциальному закону:

$$\omega = \omega^0 e^{\alpha V(t - \xi_c)} = \omega^0 e^{\alpha z}. \quad (27.18)$$

При положительных значениях  $\alpha$  частота экспоненциально нарастает, а при  $\alpha < 0$  — убывает с ростом  $z$ . Из (27.18) видно, что даже при небольших изменениях  $n$  в бегущей волне в синхронном



режиме возможны очень большие изменения частоты, если  $|\alpha|z \gg 1$ . Для несинхронных точек ( $\xi \neq \xi_0$ ) частота  $\omega$  принимает значения, промежуточные между максимальным и минимальным значениями, достигаемыми на синхронных лучах.

Результаты детальных расчетов как для синхронного, так и для несинхронного режимов в случае синусоидального изменения коэффициента преломления  $n(\xi) = n_0(1 + \delta \cos K\xi)$  приведены в работах [400, 401]. Относительно различных применений нестационарных волновых систем (модуляторы частоты и фазы электромагнитных волн в распределенных диодах и нестационарных линиях, модуляторы бегущей волны в лазерной технике, усилители и генераторы коротких импульсов, модуляторы ультразвуковых и упругих волн и др.) см. обзоры [23, 84] и цитированную там литературу.

**3. Нестационарные среды с дисперсией.** При наличии дисперсии первое из уравнений (27.2) нельзя решить независимо от второго, что заставляет нас сразу же перейти к частным случаям, допускающим аналитические решения. Один из таких случаев — нестационарная, но однородная среда с дисперсией:  $n = n(\omega, t)$  [414]. Из однородности среды ( $\partial n / \partial z = 0$ ) вытекает постоянство волнового числа  $k = k_z$  (см. уравнение (27.2'')):

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega, t) = \text{const} = k^0 = \frac{\omega^0}{c} n^0. \quad (27.19)$$

Разрешая (27.19) относительно  $\omega$ , можно найти частоту как функцию текущего времени  $t$  и начального момента  $t^0 = \xi$ :  $\omega = \Omega(t, \xi)$ . Подставив это значение частоты в первое уравнение (27.2), получаем уравнение траектории  $z = Z(t, \xi)$  в виде квадратуры:

$$z = \int_{\xi}^t g[t', \Omega(t', \xi)] dt'. \quad (27.20)$$

Якобиан  $j(t)$  получается отсюда дифференцированием  $z$  по  $\xi$  при  $t = \text{const}$ :

$$j(t) = \frac{\partial z}{\partial \xi} = -g[t, \Omega(t, \xi)] + \int_{\xi}^t \frac{\partial g}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} dt'. \quad (27.21)$$

В качестве простого примера рассмотрим изменение частоты при распространении поперечной электромагнитной волны в нестационарной холодной плазме, для которой  $\epsilon(\omega, t) = 1 - \omega_p^2(t)/\omega^2$ ,  $\omega_p = [4\pi e^2 N(t)/m]^{1/2}$  — плазменная частота<sup>1)</sup>. В дан-

<sup>1)</sup> Напомним, что в противоположность поведению амплитуды изменения частоты не зависит от механизма изменения электронной концентрации. Поэтому здесь мы не указываем физическую причину нестационарности.

ном случае дисперсионное уравнение (27.19) принимает вид<sup>1)</sup>

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2(t)}{\omega^2}} = k^0 = \frac{\omega^0(\xi)}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2(\xi)}{[\omega^0(\xi)]^2}}, \quad (27.22)$$

откуда получаем закон изменения частоты

$$\omega(t) \equiv \Omega(t, \xi) = \sqrt{\omega_p^2(t) - \omega_p^2(\xi) + [\omega^0(\xi)]^2}. \quad (27.23)$$

При известной из (27.23) зависимости  $\omega(t)$  траектория находится при помощи квадратуры (для плазмы  $g = c\sqrt{\epsilon}$ ):

$$z(t) = \int_{\xi}^t g(t') dt' = c \int_{\xi}^t \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2(t')}{\Omega^2(t', \xi)}} dt'.$$

Анализ интегралов такого типа для линейного во времени закона изменения концентрации  $\omega_p^2(t) = A + Bt$  показал, что при уменьшении концентрации электронов возможно образование пространственно-временных каустик, отвечающих сжатию импульса [23, 84].

При рассмотрении эволюции волн в *диспергирующих средах с бегущей волной показателя преломления* уравнения лучей могут быть проинтегрированы в квадратурах путем перехода к переменной  $\xi = z - Vt$  ( $V$  — скорость волны параметра). Обусловленные нестационарностью изменения частоты в диспергирующих средах приводят к изменению групповой скорости, что облегчает (по сравнению с недиспергирующей средой) образование пространственно-временных каустик с соответствующими геометрическими особенностями поля.

Существенная особенность диспергирующей среды состоит еще в том, что синхронизм  $g \sim V$  достигается для *конечного интервала значений  $V$* . Кроме того, синхронизм может реализоваться не только для части волнового пакета, но и для всей волны в целом — этому отвечают так называемые «стационарные волны обтекающей» [414, 23, 84]. Общие представления о характере движения лучей в системе с бегущей волной параметра можно получить при помощи графического построения, как это сделано в [415] на

<sup>1)</sup> Заметим, что «плазменный» закон дисперсии (27.22), который можно представить в форме  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ , охватывает также и продольные волны в изотропной плазме (для этого под  $c$  нужно понимать скорость теплового движения электронов  $v_T$ ) и волны в цилиндрическом волноводе, заполненном недиспергирующим диэлектриком (в этом случае следует заменить  $c$  на  $v_0 = c\sqrt{\epsilon}$ , а  $\omega_p$  на  $v_0 k$ , где  $k$  — поперечное волновое число для данной моды). В литературе изучены также системы с более сложными законами дисперсии — магнитоактивная плазма, волновод с плазменным заполнением и др. (см. [23, 84]).

примере равномерно движущейся плазмы с экспоненциальным профилем электронной концентрации.

Качество аппроксимации, обеспечиваемое геометрооптическим приближением, в ряде случаев удается проверить путем сравнения с точными решениями. Для сред с бегущим параметром ряд точных решений можно получить при помощи перехода к переменным, в которых волна параметра «заморожена» (см. [409, 411] и цитированную там литературу).

**4. Эволюция коротких импульсов.** Короткий импульс, длина  $l = g\tau$  и длительность  $\tau$  которого малы соответственно по сравнению с масштабом неоднородности  $L$  и временем нестационарности  $T$ , можно рассматривать как *однородный волновой пакет*, поскольку частота  $\omega$  и волновое число  $k$  в пределах импульса практически не меняются, если эти величины постоянны вначале. Изменения длины  $l$  и длительности  $\tau$  подчиняются простым закономерностям, установленным в [383].

Пусть  $dz$  и  $dz^0$  — пространственные сечения лучевой трубки, соответствующей временному интервалу  $d\xi = dt^0$  (см. рис. 27.1). Длина короткого импульса  $l$  меняется пропорционально  $dz$ :

$$\frac{l}{l^0} \approx \frac{dz}{dz^0} = \frac{\partial z / \partial t^0}{\partial z / \partial t^0} = \frac{j(t)}{j(\xi)} \equiv \frac{j}{j^0}, \quad (27.24)$$

где  $l^0$  — начальная длина импульса,  $\xi = t^0$  — начальный момент времени. Для длительности же импульса  $\tau = l/g$  имеем

$$\frac{\tau}{\tau^0} \approx \frac{dt}{d\xi} = \left(\frac{dz}{g}\right) : \left(\frac{dz^0}{g^0}\right) = \frac{jg^0}{j^0g}. \quad (27.25)$$

С длительностью импульса  $\tau$  можно связать ширину спектра сигнала  $\Delta\omega = 1/\tau$  и относительную ширину спектра  $\delta = \Delta\omega/\omega = 1/\omega\tau$ :

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega^0} = \frac{\tau^0}{\tau} = \frac{j^0g}{jg^0}, \quad \frac{\delta}{\delta^0} = \frac{\omega^0\tau^0}{\omega\tau} = \frac{j\omega^0g}{j^0\omega g^0}. \quad (27.26)$$

Легко убедиться, что в стационарной неоднородной среде длительность однородного волнового пакета не меняется («прожекторная зона» импульса, см. § 19):

$$\tau = \tau^0, \quad (27.27)$$

Положив в (27.25)  $\tau = \tau^0$ , находим  $j/j^0 = g/g^0$ , так что <sup>1)</sup>

$$l/l^0 = g/g^0. \quad (27.28)$$

Учитывая, что в стационарной среде  $\omega = \omega^0$ , имеем также

$$\Delta\omega = \Delta\omega^0, \quad \delta = \delta^0.$$

<sup>1)</sup> Это согласуется и с прямым расчетом, который для рассматриваемых условий дает  $j = -g$ .

**5. Отражение от движущихся границ раздела.** Рассмотрим, следуя [407] и [410], одномерную задачу об отражении и преломлении волн на движущейся границе раздела  $Q$ , заданной уравнением  $z = Z_{\text{гр}}(t)$ . Пусть волна  $E_{\text{пад}} = A_{\text{пад}} \exp(i\varphi_{\text{пад}})$  движется слева направо ( $k_{\text{пад}} = \partial\varphi_{\text{пад}}/\partial z > 0$ ) и переходит из однородной среды 1 (проницаемость  $\varepsilon_1$ ) в однородную среду 2 (проницаемость  $\varepsilon_2$ ).

Значение фазы падающей волны на движущейся границе  $\varphi_{\text{пад}}|_Q$  определяет начальные условия для фаз отраженной и преломленной волн:

$$\varphi_{\text{отр}}|_Q = \varphi_{\text{пр}}|_Q = \varphi_{\text{пад}}|_Q \equiv \varphi_{\text{пад}}(t, Z_{\text{гр}}(t)). \quad (27.29)$$

Дифференцируя (27.29) по  $t$ , получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{\text{пад}}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_{\text{пад}}}{\partial z} \frac{dZ_{\text{гр}}}{dt} &= -\omega_{\text{пад}} + k_{\text{пад}}V_{\text{гр}} = \\ &= -\omega_{\text{отр}} + k_{\text{отр}}V_{\text{гр}} = -\omega_{\text{пр}} + k_{\text{пр}}V_{\text{гр}}, \\ V_{\text{гр}} &= \frac{dZ_{\text{гр}}}{dt}, \end{aligned}$$

которые вместе с дисперсионным уравнением  $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon_{1,2}(\omega)$  позволяют найти начальные значения  $\omega$  и  $k$  для отраженной и преломленной волн. Это дает возможность построить систему отраженных и преломленных пространственно-временных лучей, при помощи которых можно найти затем не только фазы, но и амплитуды волн. Начальные амплитуды  $A_{\text{отр}}|_Q$  и  $A_{\text{пр}}|_Q$  выражаются через  $A_{\text{пад}}|_Q$  из известных граничных условий на движущейся границе [326]:

$$\{E + [\beta B]\}_t = \{H - [\beta D]\}_t = 0,$$

где  $\beta = V_{\text{гр}}/c$ ,  $V_{\text{гр}}$  — скорость движения границы, а фигурные скобки означают разность значений по обе стороны границы<sup>1)</sup>.

Различные эффекты, возникающие на движущейся границе раздела, допускают наглядную лучевую интерпретацию на плоскости  $\{t, z\}$ . На рис. 27.2 показаны типичные случаи, возникающие при равномерном движении границы  $Z_{\text{гр}}(t) = Z_{\text{гр}}^0 + V_{\text{гр}}t$  ( $V_{\text{гр}} < 0$ ) навстречу падающей волне. Предполагается, что обе среды 1 и 2 не обладают дисперсией, так что групповые скорости  $g_1$  и  $g_2$  не зависят от частоты (для определенности примем, что  $g_2 > g_1$ ). Простейший случай — падение плоской волны на покоящуюся границу раздела ( $V_{\text{гр}} = 0$ ,  $Z_{\text{гр}} = Z_{\text{гр}}^0$ ) показан на рис. 27.2, а, а конфигурация пространственно-временных лучей при сравнительно медленном движении границы, когда  $|V_{\text{гр}}|$  не превышает  $g_1$ , изображена на рис. 27.2, б. Из сравнения

<sup>1)</sup> Важные особенности поведения полей на движущихся границах раздела обобщаются в работе [410].

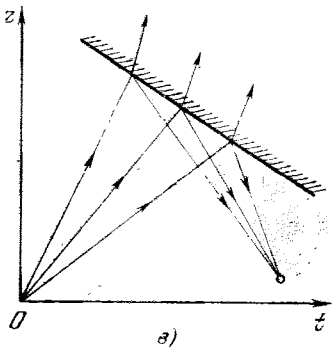
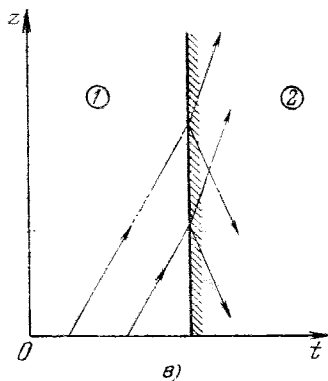
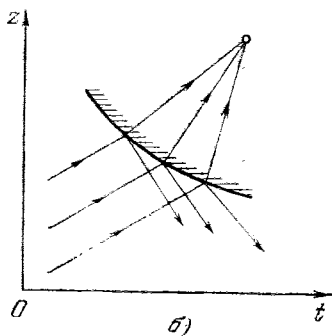
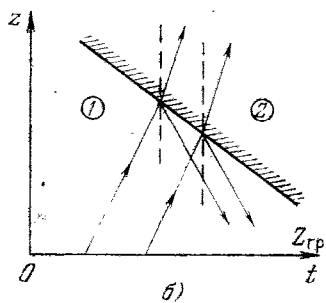
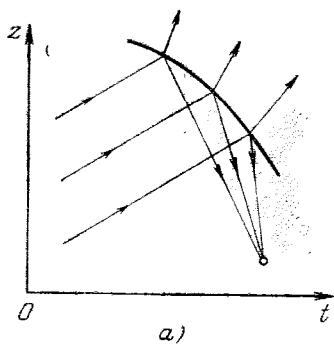
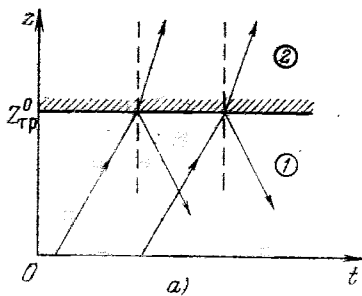


Рис. 27.2.

Рис. 27.3.

рис. 27.2, *a* и *б* видно, что в случае движущейся границы отраженный импульс короче, чем падающий, что отвечает увеличению амплитуды поля. Амплитуда отраженной волны обращается в бесконечность при  $|V_{\text{гр}}| = g_1$ , когда граница раздела «гопит» отраженную волну перед собой. Такого рода «бульдозерный» эффект имеет место и при  $g_1 < |V_{\text{гр}}| < g_2$ .

При  $|V_{\text{гр}}| > g_2$  во второй среде появляются две волны с групповой скоростью  $g_2$ , распространяющиеся в *противоположные* стороны. На рис. 27.2, *в* показаны лучи в предельном случае  $|V_{\text{гр}}| = \infty$ , когда скачок проницаемости от значения  $\epsilon_1$  до значения  $\epsilon_2$  совершается одновременно во всем пространстве в некоторый момент  $t_0$ . Возникновение двух противоположно распространяющихся волн в среде 2 диктуется необходимостью удовлетворить начальным условиям при  $t = t_0$  (см. обзор [412]).

В диспергирующих средах картина отражения и преломления волн усложняется в двух отношениях. Во-первых, при наличии дисперсии групповая скорость отраженных и преломленных волн *зависит от скорости границы* (через частоту, которая меняется с  $V_{\text{гр}}$  вследствие эффекта Доплера). Поэтому при неравномерном ( $V_{\text{гр}} \neq \text{const}$ ) движении границы некоторые группы волн, покидающие границу, могут догонять и перегонять другие группы, т. е. возможно образование пространственно-временных фокусов и каустик. Два варианта возможных фокусировок показаны на рис. 27.3, *a* и *б* (для отраженных и преломленных волн). Фокусировка может наблюдаться и при равномерном движении границы, если на нее падает *немонохроматический* волновой пакет, отвечающий, например, дальней зоне пространственно-временной дифракции импульса. Такой пакет изображен на рис. 27.3, *в* расходящимся пучком лучей (фокусировка лучей при  $V_{\text{гр}} = \infty$ , т. е. при мгновенном изменении свойств среды, проанализирована Л. Фелсеном [30, 88]). Во всех перечисленных случаях движущаяся граница играет роль *пространственно-временной линзы* [98, 23].

Во-вторых, в случае движущихся сред могут появляться *новые типы собственных* волн, отсутствующие в покоящейся среде. Для среды, состоящей из осцилляторов, такая возможность обсуждалась в работе [410], где было показано, что вслед за границей движутся две новые волны, частоты которых близки к собственной частоте осцилляторов. Эти волны возникают за счет переходных процессов в осцилляторах после того, как проходит фронт волны параметра.

На резкой границе раздела двух *анизотропных* сред падающая волна порождает, вообще говоря, все типы отраженных и преломленных нормальных волн, которые допускаются дисперсионным уравнением. В частности, при мгновенном изменении параметров анизотропной среды сразу во всем пространстве воз-

никают две пары нормальных волн, распространяющиеся в противоположных направлениях [417].

Ясно, что на движущейся границе раздела нельзя ожидать сохранения адиабатического инварианта. Подробный анализ вопроса показал, что при определенных условиях, а именно, когда частота одной из волн  $\omega_j$  оказывается отрицательной (область аномального доплеровского эффекта; эта область соответствует движению границы со скоростью, превышающей фазовую скорость  $v_\phi(\omega_j)$ ), происходит увеличение числа квантов (см. [407], а также литературу в [23, 84]) и, следовательно, возможно усиление волн.

Заметим, что при отражении волн от движущихся границ в трехмерном случае законы преломления и отражения лучей принимают привычный вид лишь в системе отсчета, связанной с движущейся границей, тогда как при возвращении в лабораторную систему угол отражения оказывается отличным от угла падения. Однако во многих случаях удается подобрать кажущуюся границу раздела, которая сохраняет привычные свойства лучей и в то же время позволяет эффективно рассчитывать рассеянные поля в приближении геометрической оптики [418].

6. Теория возмущений в нестационарных задачах. Если параметры среды слабо уклоняются от некоторого среднего значения, то для решения уравнений геометрической оптики можно использовать метод возмущений. В большинстве случаев возможен квазистационарный учет временных вариаций показателя преломления, при котором зависимость  $n$  от времени восстапавливается лишь на последнем этапе расчета. Квазистационарный подход возможен при условии, что волна проходит неоднородность размером  $l_n$  за время  $\Delta t \sim l_n/g$ , меньшее характерного времени изменения свойств среды  $\tau_n$ :  $l_n/g \ll \tau_n$ . Такого рода расчеты часто используются при вычислении доплеровского смещения частоты радиоволны, прошедшей через нестационарную ионосферную плазму [195, 127].

Более общие расчеты в условиях, когда квазистационарное приближение неприменимо, т. е. когда  $l_n/g \geq \tau_n$ , предприняты в [419—421, 23] применительно к задаче о флуктуациях электромагнитных волн в турбулентной плазме.

После изложения основ лучевой теории и рассмотрения примеров применения этой теории к разнообразным проблемам естественно закончить книгу общей характеристикой метода геометрической оптики.

Наиболее притягательная черта лучевого метода заключается в его *наглядности*. В частности, лучевые образы хорошо согласуются с нашими интуитивными представлениями о распространении волн вообще и световых волн в особенности. Именно в силу своей наглядности геометрическая оптика до сих пор остается наиболее употребительным приближенным методом волновой теории.

Другая важная причина популярности лучевого метода связана с тем, что это в достаточной мере *универсальный*, а во многих случаях и *единственно возможный* приближенный метод расчета волновых полей. В особенности это относится к плавно неоднородным средам, которым посвящена большая часть данной книги. Здесь у метода геометрической оптики практически нет конкурентов как среди аналитических, так и среди численных методов. Особая роль геометрической оптики в случае неоднородных сред обусловлена и тем обстоятельством, что параметры сред, как правило, известны приближенно, и попытки точного решения исходных уравнений задачи приводят к превышению точности.

Универсальный характер приближения геометрической оптики дополняется универсальными же эвристическими условиями применимости метода (см. § 10). Эти критерии обеспечивают *внутренний контроль* применимости метода, так как они опираются на лучевые построения френелевских объемов. В ряде случаев на основе сформулированных критериев удается оценивать величину поля даже там, где геометрическая оптика неприменима. Тем самым открываются широкие возможности геометрико-оптического анализа волновой картины в целом. Это важно как для правильной постановки теоретических исследований, так и для проведения оценочных расчетов в инженерной или экспериментальной практике.

Популярности геометрической оптики способствует и само существование чрезвычайно широкого круга конкретных физи-



ческих и технических проблем, вполне адекватно описываемых лучевой теорией. Многочисленность проблем такого рода связана как с разнообразием неоднородных сред, допускающих распространение волн различной физической природы, так и с использованием в физике и технике все более широкого диапазона частот и длин волн.

В этих условиях для данной неоднородной среды почти всегда можно подыскать класс коротковолновых задач, допускающих лучевую трактовку с соблюдением приемлемой точности расчетов волновых полей. В существующей литературе мощь геометрической оптики продемонстрирована десятками и сотнями расчетов из различных областей физики и техники, так что эффективность метода в настоящее время не требует специального доказательства. Однако, исходя из учебных целей, авторы включили в данную книгу некоторые типичные примеры, иллюстрирующие реальную силу метода.

Круг задач, допускающих геометрическое описание, непрерывно расширялся, но одновременно росли и возможности самой геометрической оптики за счет обобщений и новых модификаций, в том числе и тех, которые были предложены авторами данной книги. Разумеется, авторы не смогли осветить в монографии все новые вопросы, разработанные за последние годы, и поэтому во многих случаях ограничились лишь ссылками на существующую литературу.

Значение метода геометрической оптики в современной волновой теории определяется не только его наглядностью, универсальностью и эффективностью при решении разнообразных задач, но и тем, что он явился *эвристической основой многих приближенных методов* в теории распространения и дифракции волн.

В коротковолновых асимптотических методах, порожденных геометрической оптикой, лучи теряют непосредственный физический смысл линий, вдоль которых распространяется энергия волны, но, по образному выражению Б. Е. Кинбера, они продолжают выполнять роль костяка, несущего волновую (дифракционную) плоть. Эта важная функция лучей в немалой степени способствовала тому, что большая часть обобщений лучевого метода уже нашла широкое применение в радиофизике, акустике и оптике.

Полезно перечислить здесь наиболее важные обобщения лучевого метода с тем, чтобы помочь читателю ориентироваться в обширной литературе по коротковолновым асимптотическим методам и одновременно отразить тенденции, индуцированные геометрической оптикой.

*Метод комплексной геометрической оптики* используется для описания полей в сильно поглощающих средах и в области ка-

устической тени (см. обзоры [42, 445]). Обобщение этого метода на случай *пространственно-временных комплексных лучей* дано в работах [447, 235], а на случай анизотропных сред — в работе [446].

Ряд обобщений геометрической оптики предназначен для описания полей при наличии каустик. Один из них — *метод эталонных функций*, являющийся трехмерным аналогом метода эталонных уравнений, применяемого при решении одномерных задач [37, 147, 448], позволяет выразить асимптотику волнового поля через те или иные специальные функции: функции Эйри, Бесселя, Вебера и др. *Равномерные* асимптотики поля получены в работах [72, 144, 145] (см. также [21, 33]), а *локальные* асимптотические выражения даны в работах [139, 140, 463, 464]. Равномерную асимптотику поля дает и *метод канонического оператора* Маслова [41, 197, 449—451] (см. также обзоры [72, 339]).

Для определения волнового поля при наличии границ раздела используется *метод геометрической теории дифракции*, предложенный Дж. Б. Коллером [435] и развитый во многих последующих работах [81, 82, 436, 67, 43, 7]. С современным состоянием этого эффективного метода можно познакомиться по монографиям [21, 32, 33]. Близкие идеи лежат также в основе *метода краевых волн* Уфимцева [439, 440]. Обобщению геометрической теории дифракции на распространение импульсов в диспергирующих средах посвящены работы [438, 235] (частные примеры рассмотрены в работах [242] и [243]).

Для определения волновых полей в окрестности границы свет — тень используются *полутеневые асимптотики* [158, 82, 21, 453, 454] (см. также [32, 33]), а при наличии оборванных каустик — *обобщенные полутеневые асимптотики* [63, 64, 68, 422, 423]. Соответствующие пространственно-временные полутеневые асимптотики описаны в работе [235].

Квазиоптическим обобщением геометрической оптики, эффективно учитывающим энергетический обмен между лучевыми трубками, является *метод параболического уравнения* Леонтовича и Фока (см. [444, 158], а также [442, 443, 21, 75, 143, 432]). Другое обобщение квазиоптического типа дает *метод плавных возмущений* Рытова [121, 122, 124]. *Дифракционный интеграл Кирхгофа — Гюйгенса* для плавно неоднородных сред использовался в работах [137, 325, 444, 210].

Для описания суперпозиции локально-плоских нормальных волн в работах [455—457] был предложен *метод интерференционного интеграла (метод виртуальных лучей)* (см. также [226, 227, 230, 235, 242, 243, 458, 465]). Модификации этого метода для задачи дифракции на телах рассматривались в работах [459—461, 437].

Наконец, различные варианты обобщений лучевого метода на *нелинейные задачи* даны в работах [92, 240, 427—433].

Обобщения геометрической оптики существенно расширили возможности метода и позволили проводить расчеты полей в таких областях его неприменимости, как зоны тени и полутени, окрестности каустик и фокусов и др. Эффективность применения этих обобщений, как и самой геометрической оптики (см. § 20), существенно повышается при использовании ЭВМ. Можно не сомневаться, что коротковолновые асимптотические методы и в будущем сохранят важные позиции в волновой теории.

1. *Hamilton W. R. Mathematical Papers.*— Cambridge Univ. Press, pt. 1, 1931; pt. 2, 1940.
2. *Synge J. L. Geometrical Optics. An Introduction to Hamilton's Method.*— L.— N.-Y.: Cambridge Univ. Press, 1954.
3. *Синг Дж. Л. Классическая динамика.*— М.: Физматгиз, 1963.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.*— М.: Наука, 1965.
5. *Голдстейн Г. Классическая механика.*— М.: Наука, 1975.
6. *Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика.*— М.—Л.: Изд. АН СССР, 1946.
7. *Слюсарев Г. Г. Расчет оптических систем.*— Л.: Машиностроение, 1975.
8. *Бегунов Б. Н. Геометрическая оптика.*— М.: Изд. МГУ, 1966.
9. *Тудоровский А. И. Теория оптических приборов.*— М.—Л.: Изд. АН СССР, т. 1, 1948; т. 2, 1952.
10. *Герцбергер М. Современная геометрическая оптика.*— М.: ИЛ, 1962.
11. *Brouwer W. Matrix Methods in Optical Instrument Design.*— N.-Y.: Benjamin, 1964.
12. *Buchdahl H. A. Optical Aberration Coefficients.*— N.-Y.: Dover, 1968.
13. *Stravroudis O. N. The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics.*— N.-Y.: Acad. Press, 1972.
14. *Дебай П. Примечание к статье: Sommerfeld A., Runge J. Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der Geometrischen Optik.*— Ann. Phys., 1911, т. 35, p. 277. См. также: *Дебай П. Полярные молекулы.*— М.—Л.: ГНТИ, 1931, с. 183.
15. *Соболев С. Л. Волновое уравнение в неоднородной среде.*— Труды Сейсмологич. института АН СССР, 1930, № 6. См. также: *Смирнов В. И. Курс высшей математики.*— М.: Физматгиз, 1953, т. 4, гл. III.
16. *Рылов С. М. Модулированные колебания и волны.*— Труды ФИАН, 1940, т. 2, № 1, с. 3.
17. *Рылов С. М. О переходе от волновой к геометрической оптике.*— ДАН СССР, 1938, т. 18, № 2, с. 263.
18. *Luneburg R. K. Mathematical Theory of Optics.*— Berkley: Univ. of California Press, 1964.
19. *Курант Р. Уравнения с частными производными.*— М.: Мир, 1964.
20. *Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D. Asymptotic Solution of Some Diffraction Problems.*— Comm. Pure Appl. Math., 1956, т. 9, № 2, p. 207.
21. *Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.*— М.: Наука, 1972.
22. *Линейные уравнения математической физики/Под ред. С. Г. Михлина.*— М.: Наука, 1964.
23. *Кравцов Ю. А., Островский Л. А., Степанов Н. С. Геометрическая оптика неоднородных и нестационарных диспергирующих сред.*— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 91.
24. *Борн М., Вольф Э. Основы оптики.*— М.: Наука, 1970.
25. *Вреховский Л. М. Волны в слоистых средах.*— 2-е изд.— М.: Наука, 1973.
26. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.*— М.: Физматгиз, 1962.
27. *Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.*— 2-е изд.— М.: Наука, 1967.

28. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности.— М.: Изд. АН СССР, 1961.
29. Кline М., Kay I. W. Electromagnetic Theory and Geometrical Optics.— N.-Y.: John Wiley a. Sons, 1965.
30. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн, т. 1, 2.— М.: Мир, 1978.
31. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ч. II.— Л.— М.: ОНТИ, 1937.
32. James G. L. Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves.— Institution of Electrical Engineers: Peter Peregrinus Ltd., 1976.
33. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции.— М.: Связь, 1978.
34. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям.— М.: Мир, 1968.
35. Буслаев В. С. Континуальные интегралы и асимптотика решений параболических уравнений при  $t \rightarrow 0$ . Приложения к дифракции.— В сб.: Проблемы матем. физики.— Л.: Изд. ЛГУ, 1967, № 2, с. 85.
36. Whitham G. B. General Approach to Linear and Nonlinear Dispersive Waves Using a Lagrangian.— J. Fluid Mech., 1965, v. 22, № 2, p. 273.
37. Эрдейи А. Асимптотические разложения.— М.: Физматгиз, 1962.
38. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.
39. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.
40. Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии.— Харьков: Изд. ХГУ, 1967.
41. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.
42. Кравцов Ю. А. Комплексные лучи и комплексные каустики.— Изв. вузов: Радиофизика, 1967, т. 10, № 9, 10, с. 1283.
43. Berry M. V. Waves and Tom's Theorem.— Advances in Physics, 1976, v. 25, № 1, p. 1.
44. Орлов Ю. И. Сферическая абберация плоской границы раздела однородной плазмы.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 5, с. 760.
45. Орлов Ю. И. О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабонеоднородной плазме, ч. I, II.— Изв. вузов: Радиофизика, 1966, т. 9, № 3, с. 497; № 4, с. 657.
46. Орлов Ю. И. Особенности лучевых и каустических картин в неоднородном параболическом слое.— Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, № 11, с. 1669.
47. Орлов Ю. И. О фокусирующих свойствах полуограниченного плазменного линейного слоя в случае внутреннего источника.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 2, с. 317.
48. Орлов Ю. И. Особенности каустики цилиндрической волны в клиновиднослоистой плазме.— Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 6, с. 1125.
49. Акустика океана/Под ред. Л. М. Бреховских.— М.: Наука, 1974.
50. Кравцов Ю. А. Сильные флуктуации амплитуды световой волны и вероятность образования случайных каустик.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 3 (9), с. 798.
51. Особенности дифференцируемых отображений: Сб. переводов/Под ред. В. И. Арнольда.— М.: Мир, 1968.
52. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
53. Арнольд В. И. Особые точки гладких функций и их нормальные формы.— УМН, 1975, т. 30, № 5, с. 3.

54. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
55. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М.: Мир, 1977.
56. Залгаллер В. А. Теория огибающих.— М.: Наука, 1975.
57. Arnold V. I. Wave Front Evolution and Equivariant Morse Lemma.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, v. 29, № 6, p. 557.
58. Connor J. N. L. Catastrophes and Molecular Collisions.— Molec. Phys., 1976, v. 31, № 1, p. 33.
59. Миллер М. А., Пермитин Г. В., Фрайман А. А. О влиянии фазовых флуктуаций волны на деформацию каустических поверхностей.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 11, с. 1603.
60. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $E_n$  и лагранжевы особенности.— Функц. анализ и его приложения, 1972, т. 6, № 4, с. 3.
61. Duistermaat J. J. Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities.— Comm. Pure Appl. Math., 1974, v. 27, № 2, p. 207.
62. Levey L., Felsen L. B. On Incomplete Airy Functions and Their Application to Diffraction Problems.— Radio Sci., 1969, v. 4, № 10, p. 959.
63. Орлов Ю. И. Равномерная асимптотика поля дифракции на криволинейном клине при наличии каустик.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 2, с. 242.
64. Орлов Ю. И. Дифракция волн на теле с криволинейным ребром в окрестности полутеневых особых каустик.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 4, с. 730.
65. Levey L., Felsen L. B. On Transition Functions Occurring in the Theory of Diffraction in Inhomogeneous Media.— J. Inst. Math. Appl., 1967, v. 3, № 1, p. 76.
66. Орлов Ю. И. Особенности лучевой теории распространения электромагнитных волн в неоднородных плазменных средах. Канд. дисс.— М.: МЭИ, 1969.
67. Орлова Н. С., Орлов Ю. И. Асимптотическая теория дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем теле вращения.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 9, с. 1811.
68. Орлов Ю. И. Модификация геометрической теории дифракции волн при наличии каустики краевой волны.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 1, с. 62.
69. Кравцов Ю. А. Модификация метода геометрической оптики для волны, просачивающейся через каустику.— Изв. вузов: Радиофизика, 1965, т. 8, № 4, с. 659.
70. Калюшин В. А., Орлов Ю. И. Об особенностях лучевой теории «просачивания» сферической волны через параболический плазменный слой.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 10, с. 2028.
71. Орлов Ю. И. Об особенностях рефракции и фокусировки сферических электромагнитных волн в слабонеоднородном плазменном параболическом слое.— Изв. вузов: Радиофизика, 1967, т. 10, № 1, с. 30.
72. Кравцов Ю. А. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах.— Акуст. ж., 1968, т. 14, № 1, с. 1.
73. Фельсен Л. Квазиоптические явления в дифракции.— В сб.: Квазиоптика.— М.: Мир, 1966, с. 11.
74. Бабич В. М. Аналитическое продолжение решений волнового уравнения в комплексную область и каустики.— В сб.: Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1961, № 5, с. 145.
75. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Сов. радио, 1966.

76. Арнольд В. И. Моды и квазимоды.— Функц. анализ и его приложения, 1972, т. 6, № 2, с. 12.
77. Lewis R. M., Keller J. B. Asymptotic Methods for Partial Differential Equations: The Reduced Wave Equation and Maxwell's Equations.— N.-Y.: New York Univ. Res. Rep. EM-194, 1964.
78. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельцинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.— В сб.: Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1961, № 5, с. 3.
79. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. О границах применимости метода геометрической оптики.: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Современные проблемы распространения и рассеяния волн.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 76.
80. Keller J. B., Karal F. C. Surface Wave Excitation and Propagation.— J. Appl. Phys., 1960, v. 31, № 6, p. 1039.
81. Levy B. R., Keller J. B. Diffraction by a Smooth Object.— Comm. Pure Appl. Math., 1959, v. 12, № 1, p. 159.
82. Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D. Uniform Asymptotic Theory of Creeping Waves.— Comm. Pure Appl. Math., 1967, v. 20, № 2, p. 295.
83. Бабич В. М. Принцип взаимности для динамических уравнений теории упругости.— В сб.: Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1962, № 6, с. 60.
84. Островский Л. А., Степанов Н. С. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, № 4, с. 489.
85. Lewis R. M. Asymptotic Theory of Wave-propagation.— Arch. Ration. Mech. Anal., 1965, v. 20, № 3, p. 191.
86. Льюис Р. Формальная теория бегущей волны.— В сб.: Квазиоптика.— М.: Мир, 1968, с. 80.
87. Felsen L. B. Transients in Dispersive Media. Part I: Theory.— IEEE Trans., 1969, v. AP-17, № 2, p. 191.
88. Felsen L. B. Rays, Dispersion Surfaces and their Uses for Radiation and Diffractions Problems.— SIAM Review, 1970, v. 12, № 3, p. 424.
89. Фридлендер Ф. Звуковые импульсы.— М.: ИЛ, 1962.
90. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов.— УФН, 1976, т. 118, № 2, с. 339.
91. Ludwig D. Uniform Asymptotic Expansions for Wave Propagation and Diffraction Problems.— SIAM Review, 1970, v. 12, № 3, p. 325.
92. Полевой В. Г., Рыгов С. М. О четырехмерной групповой скорости.— УФН, 1978, т. 125, № 3, с. 549.
93. Transient Electromagnetic Fields. Ed. L. B. Felsen.— Berlin — Heid.— N.-Y.: Springer-Verlag, 1976.
94. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках.— М.: Наука, 1966.
95. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
96. Wolfe P., Lewis R. M. Progressing Waves Radiated from a Moving Point Source in a Inhomogeneous Media.— J. Diff. Equat., 1966, v. 2, № 3, p. 328.
97. Lewis R. M., Pressman W. The Progressing Wave Formalism for Electromagnetic Waves from Moving Sources.— J. Diff. Equat., 1967, v. 3, № 3, p. 360.
98. Островский Л. А. Ускоренно движущаяся граница как пространственно-временная линза.— Изв. вузов: Радиофизика, 1975, т. 18, № 4, с. 618.
99. Бабич В. М. О сходимости рядов лучевого метода вычисления интенсивности волновых фронтов.— В сб.: Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1961, № 5, с. 25.
100. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики.— М.: ИЛ, 1958, т. 1; 1960, т. 2.
101. Маделунг Э. Математический аппарат физики.— М.: Наука, 1968.

102. *Фельд Я. Н., Бененсон Л. С.* Антенно-фидерные устройства.— М.: Изд. ВВИА им. Жуковского, 1959, ч. 2.
103. *Какже Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М.: Наука, 1966.
104. *Колосов М. А., Шабельников А. В.* Рефракция электромагнитных волн в атмосфере Земли, Венеры и Марса.— М.: Сов. радио, 1976.
105. *Бурков В. Г., Яшин Ю. Я.* К теории рефракции электромагнитных волн в двумерно-неоднородной изотропной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1967, т. 10, № 12, с. 1631.
106. *Нильсон Д. Л.* Уравнение траектории луча в ионизированном слое с горизонтальным градиентом.— В сб.: Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн.— М.: Наука, 1971, с. 104.
107. *Орлов Ю. И., Аютогин А. П.* Распространение радиоволн в сферической ионосфере с горизонтальными градиентами.— Труды МЭИ, 1972, № 119, с. 92.
108. *Бояринцев Е. Л., Яшин Ю. Я.* О влиянии некоторых особенностей высокоширотной ионосферы на траекторию радиоволн.— Геомагн. и аэрoнoмия, 1974, т. 14, № 6, с. 1019.
109. *Mauger S. J., Felsen L. B.* Ray-optical Techniques for Guided Waves.— Proc. IEEE, 1967, v. 55, № 10, p. 1718.
110. *Марьин Н. П.* Об эффективной отражающей поверхности ионизированной области, имеющей форму шара.— Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 2, с. 235.
111. *Марьин Н. П.* Рассеяние лучей электромагнитных волн конусообразным ионизированным следом.— Геомагн. и аэрoнoмия, 1965, т. 5, № 2, с. 260.
112. *Жидко Ю. М.* Поперечники обратного рассеяния неоднородных по радиусу и угловой координате диэлектрических объектов.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 6, с. 876.
113. *Ярыгин А. П.* Эффективная поверхность рассеяния аксиально-симметричных плазменных образований в направлении их оси вращения.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 5, с. 912.
114. *Марьин Н. П.* Рассеяние электромагнитных волн ионизированным следом в виде параболоида вращения.— Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 10, с. 1765.
115. *Марьин Н. П.* Траектории лучей электромагнитных волн в ионизированном тороиде и его эффективная отражающая поверхность.— Геомагн. и аэрoнoмия, 1965, т. 5, № 3, с. 568.
116. *Woo R., Ishimaru A.* Fields Excited by an Arbitrarily Oriented Dipole in a Cylindrically Inhomogeneous Plasma.— Radio. Sci., 1971, v. 6, № 5, p. 583.
117. *Семенов Б. И.* Рассеяние сферической волны сферической неоднородностью с произвольным распределением показателя преломления по радиусу.— Радиотехника и электроника, 1972, т. 17, № 2, с. 1725.
118. *Семенов Б. И.* Расчет поля электромагнитной волны, рассеянной гиротропной плазменной неоднородностью в приближении геометрической оптики.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 1, с. 51.
119. *Яшин Ю. Я.* О разделении переменных в уравнении эйконала в задаче о распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 4, с. 491.
120. *Яшин Ю. Я.* Некоторые вопросы теории распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах. Канд. дисс.— Горький: ГГУ, 1969.
121. *Чернов Л. А.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями.— М.: Наука, 1975.
122. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.



123. *Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И.* Со-стояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде.— УФН, 1970, т. 102, № 1, с. 3.
124. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статисти-ческую радиофизику, ч. II. Случайные поля.— М.: Наука, 1978.
125. *Гдалевич Г. Л., Грингауз К. И., Рудаков В. А., Рытов С. М.* К вопросу о влиянии ионосферы на определение положения космических ракет.— Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, № 6, с. 942.
126. *Lawrence R. S., Little G. G., Chivers J. A.* A Survey of Ionospheric Effects upon Earth Space Radio Propagation.— Proc. IEEE, 1964, v. 52, № 1, p. 4.
127. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Виноградов А. Г.* Радиофизические эффек-ты при распространении УКВ-радиоволн.— В сб.: Вопросы излучения и распространения радиоволн. Труды Радиотехнич. института АН СССР.— М.: 1974, № 18, с. 3.
128. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И.* О решении лучевых уравнений мето-дом возмущений.— Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 2, с. 1777.
129. *Баранов В. А., Кравцов Ю. А.* Метод возмущений для лучей в неоднородной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1975, т. 18, № 1, с. 52.
130. *Тинин М. В.* О волноводном распространении в плавно неоднородной квазислойной среде (ионосфере).— В сб.: Исследование по геомагнетизму, астрономии и физике Солнца.— М.: Наука, 1976, № 39, с. 166.
131. *Баранов В. А., Попов А. В.* Метод возмущений для лучей в почти сло-истой среде.— В сб.: Распространение декаметровых радиоволн.— М.: ИЗМИРАН, 1975, с. 14.
132. *Дубошин Т. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы.— М.: Наука, 1968.
133. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию.— М.: Наука, 1968.
134. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1956.
135. *Bertoni H. L., Felsen L. B., Hessel A.* Local Properties of Radiation in Lossy Media.— IEEE Trans., 1971, AP—19, № 3, p. 226.
136. *Черный Ф. В.* Распространение радиоволн.— М.: Сов. радио, 1972.
137. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И.* Некоторые следствия из принципа Гюй-генса — Кирхгофа для плавно неоднородной среды.— Изв. вузов: Радио-физика, 1969, т. 12, № 6, с. 886.
138. *Грошев В. Я., Кравцов Ю. А.* О границах применимости асимптотиче-ских выражений в методе эталонных функций.— Изв. вузов: Радиофи-зика, 1968, т. 11, № 12, с. 1812.
139. *Газарян Ю. Л.* О геометрикоакустическом приближении поля в окрестно-сти неособого участка каустики.— В сб.: Вопросы динамич. теории рас-пространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1964, № 5, с. 73.
140. *Орлов Ю. И.* Локальная асимптотика электромагнитного поля в неоднородной среде в окрестности неособой каустики.— Труды МЭИ, 1974, № 194, с. 103.
141. *Горелик Г. С.* Колебания и волны.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1959.
142. *Блюх П. В.* Сжатие импульса излучения в диспергирующей среде со случайными неоднородностями.— Изв. вузов: Радиофизика, 1964, т. 7, № 3, с. 460; Рефераты докладов III Всесоюзного симпозиума по дифракции волн.— М.: Наука, 1964, с. 226.
143. *Литвак А. Г., Таланов В. И.* Применение метода параболического урав-нения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1967, т. 10, № 4, с. 539.
144. *Кравцов Ю. А.* Об одной модификации метода геометрической опти-ки.— Изв. вузов: Радиофизика, 1964, т. 7, № 4, с. 664.
145. *Ludwig D.* Uniform Asymptotic Expansions at a Caustic.— Comm. Pure Appl. Math., 1966, v. 19, № 2, p. 215.

146. *Berry M. V., Mount K. E.* Semiclassical Approximations in Wave Mechanics.— Rep. Prog. Phys., 1972, v. 35, № 4, p. 315.
147. *Найфэ А.* Методы возмущений.— М.: Мир, 1978.
148. *Ludwig D.* Strength of Caustics.— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, v. 43, № 5, p. 1179.
149. *Буддырев В. С.* Поле точечного источника в волноводе. Труды ЛОМИ им. Стеклова В. А.— Л.: Наука, 1971, т. СХV, с. 78.
150. *Струок Дж.* Введение в когерентную оптику и голографию.— М.: Мир, 1967.
151. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн.— М.: Энергия, 1967.
152. *Орлов Ю. И., Анютин А. П., Тропкин С. К.* О дифракционной структуре полей апертурных антенн и полей радиосигналов в диспергирующих средах.— В сб.: Теория дифракции и распространения волн (VI Всесоюзный симпозиум).— М.: Изд. АН СССР, 1977, т. 1, с. 183.
153. *Орлов Ю. И., Тропкин С. К.* Асимптотическое представление ближнего поля плоской апертурной антенны.— Труды МЭИ, № 341, 1977, с. 37.
154. *Вендик О. Г.* Антенны с немеханическим движением луча.— М.: Сов. радио, 1965.
155. *Марков Г. Т., Сазонов Д. М.* Антенны.— М.: Энергия, 1975.
156. *Кобак В. О.* Радиолокационные отражатели.— М.: Сов. радио, 1975.
157. *Фок В. А.* Обобщение отражательных формул на случай отражения произвольной волны от поверхности произвольной формы.— ЖЭТФ, 1950, т. 20, № 11, с. 961.
158. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.
159. *Гельчинский Б. Я.* Отражение и преломление упругой волны произвольной формы в случае криволинейной границы раздела.— ДАН СССР, 1958, т. 118, № 3, с. 458.
160. *Фукс И. М.* Отражение и преломление волны произвольной формы на криволинейной границе раздела.— Изв. вузов: Радиофизика, 1965, т. 8, № 6, с. 1078.
161. *Басс Ф. Г., Фукс И. М.* Рассеяние волн на статистически шероховатой поверхности.— М.: Наука, 1972.
162. *Дешамп Г.* Лучевые методы в теории электромагнетизма.— ТИИЭР, 1972, т. 60, № 9, с. 5.
163. *Keller J. B., Keller H. B.* Determination of Reflected and Transmitted Fields by Geometrical Optics — J. Opt. Soc. Amer., 1950, v. 40, № 1, p. 48.
164. *Конторович М. И., Муравьев Ю. К.* Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задач дифракции.— ЖТФ, 1952, т. 22, № 3, с. 394.
165. *Lee S. W.* Electromagnetic Reflection from a Conducting Surface: Geometrical Optics Solution.— IEEE Trans., 1975, AP-23, № 2, p. 184.
166. *Иванов В. И.* Вычисление поправок к геометрической оптике. I. Скалярная задача.— ЖВММФ, 1968, т. 8, № 5, с. 1141.
167. *Иванов В. И.* Вычисление поправок к геометрической оптике. II. Электромагнитная задача.— ЖВММФ, 1970, т. 10, № 2, с. 490.
168. *Куюнджан Р., Патзак П.* Равномерная геометрическая теория дифракции на идеально проводящей поверхности с ребром.— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 40.
169. *Хёни Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.— М.: Мир, 1964.
170. *Менцер Дж. Р.* Дифракция и рассеяние волн.— М.: Сов. радио, 1958.
171. Антенны сантиметровых волн. Пер. с англ./Под ред. Я. Н. Фельда.— М.: Сов. радио, 1950, т. 1, 2.
172. *Штагер Е. А., Чаевский Е. В.* Рассеяние волн на телах сложной формы.— М.: Сов. радио, 1974.

173. *Spencer R. C., Hyde G.* Studies of the Focal Region of a Spherical Reflector: Geometric Optics.— IEEE Trans., 1968, AP-16, № 3, p. 317.
174. *Жук М. С., Молочков Ю. Б.* Проектирование антенно-фидерных устройств.— М.— Л.: Энергия, 1966.
175. *Кинбер Б. Е.* О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра.— Радиотехника и электроника, 1964, т. 6, № 8, с. 1273.
176. *Burridge R.* The Reflexion of a Pulse in a Solid Sphere.— Proc. Roy. Soc., 1963, A-276, № 1366, p. 367.
177. *Bartkowski Z.* Allgemeine Betrachtungen über die Katakaustik von Rotationsflächen.— Optik, 1961, v. 18, № 1, p. 22.
178. *Быков В. П.* Фокусировка лучей между гладкими зеркалами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1966, т. 19, № 1, с. 85.
179. *Хейфец Е. И., Шендеров Е. Л.* Образование каустик при взаимодействии звука с оболочками.— Акустич. ж., 1972, т. 18, № 3, с. 456.
180. *Ландсберг Г. С.* Оптика.— М.: Наука, 1976.
181. *Бреховских Л. М.* Пределы применимости некоторых приближенных методов, употребляемых в архитектурной акустике.— УФН, 1947, т. 32, № 4, с. 464.
182. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
183. *Орлов Ю. И.* Коротковолновая асимптотика отраженного поля диполя, расположенного над неоднородным линейным слоем.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 3, с. 412.
184. *Орлов Ю. И., Тропкин С. К.* Поле плоской апертурной антенны в неоднородной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1980, т. 23, № 9, с. 870.
185. *Бархатов А. Н., Шмелев И. И.* Фокусировка звука при отражении от границы неоднородной среды.— Акустич. ж., 1958, т. 4, № 1, с. 100.
186. *Бархатов А. Н.* Моделирование распространения звука в море.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
187. *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана.— М.: Мир, 1969.
188. *Pedersen M. A., Gordon D. F.* Comparison of Curvilinear and Linear Profile Approximation in the Calculation of Underwater Sound Intensities by Ray Theory.— J. Acoust. Soc. Amer., 1967, v. 47, № 2, p. 419.
189. *Тинин М. В.* Роль луча Педерсена и связанных с ним направляемых волн при распространении волн вдоль параболического слоя.— В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэронавтике и физике Солнца.— М.: Наука, 1973, вып. 29, с. 157.
190. *Кравцов Ю. А., Тинин М. В., Черкашин Ю. Н.* О возможных механизмах возбуждения ионосферных волновых каналов (обзор).— Геомагн. и аэронавтика, 1979, т. 19, № 5, с. 769.
191. *Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.* Сверхдальнее распространение коротких радиоволн.— М.: Наука, 1979.
192. *Budden K. G.* Radio Waves in the Ionosphere. Cambridge: Univ. Press, 1961.
193. *Kelso J. M.* Radio Ray Propagation in the Ionosphere.— Lond.: McGraw-Hill, 1964.
194. *Альперт Я. Л.* Распространение радиоволн и ионосфера.— М.: Изд. АН СССР, 1960.
195. *Дэвис К.* Радиоволны в ионосфере.— М.: Мир, 1973.
196. *Керблай Т. С., Ковалевская Е. М.* О траекториях коротких радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1974.
197. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ).— М.: Мир, 1965.
198. *Фрёман Н., Фрёман П. У.* ВКБ-приближение.— М.: Мир, 1967.
199. *Гильденбург В. Б., Жидко Ю. М., Кондратьев И. Г., Миллер М. А.* Некоторые вопросы дифракции электромагнитных волн на плазменных образованиях.— Изв. вузов: Радиофизика, 1967, т. 10, № 9, 10, с. 1358.

200. *Жерносок С. Д., Кондратьев И. Г.* Расчет полей излучения заданных источников в плоскостной плазменной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 2, с. 656.
201. *Serpeny V., Molotkov I. A., Pšenčík I.* Ray Method in Seismology.— Praha: Univerzita Karlova, 1977.
202. *Кормилицын Б. Т.* Распространение электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z$ , возбуждаемой источником в виде светящейся нити.— Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 6, с. 1130.
203. *Seckler B. D., Keller J. B.* Geometrical Theory of Diffraction in Inhomogeneous Media.— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, № 2, p. 192.
204. *Seckler B. D., Keller J. B.* Asymptotic Theory of Diffraction in Inhomogeneous Media.— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, № 2, p. 206.
205. *Wait J. R.* Electromagnetic Waves in Stratified Media. Pergamon Press, 1962.
206. *Краснушкин П. Е.* Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей.— М.: Изд. МГУ, 1947.
207. *Lang R. H., Shmoys J.* Lateral Waves on Diffuse Interfaces of Finite Thickness.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, v. 48, № 1, p. 242.
208. *Молотков И. А.* Исследование нестационарного распространения волн в неоднородной среде при образовании области геометрической тени.— В сб.: Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1962, № 6, с. 92.
209. *Цепелев Н. В.* Зона тени на границе неоднородного полупространства.— В сб.: Математич. вопросы теории распространения волн (Записки науч. семинаров ЛОМИ).— Л.: Наука, 1970, вып. 3, с. 209.
210. *Кондратьев И. Г., Пермигин Г. В.* О структуре поля направленного излучателя вблизи простой каустики в неоднородной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 12, с. 1795.
211. *Пермигин Г. В.* О возможности сопоставления поля широкого волнового пучка в плавно неоднородной среде с полем пучка в вакууме.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, № 2, с. 254.
212. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регуляриная небесная механика.— М.: Наука, 1975.
213. *Alexopoulos N. G.* On the Refractive Properties of Media with Poles or Zeros in the Index of Refraction.— IEEE Trans., 1974, AP-22, № 2, p. 242.
214. *Мотт Н., Месси Г.* Теория атомных столкновений.— М.: Мир, 1969.
215. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц.— М.: Мир, 1969.
216. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн.— М.: Наука, 1971.
217. *Зелкин Е. Г., Петрова Р. А.* Линзовые антенны.— М.: Сов. радио, 1974.
218. *Краснушкин П. Е.* Качественное исследование траекторий лучей радиоволн в слоистой среде методом фазовых траекторий.— ДАН СССР, 1971, т. 200, № 6, с. 1313.
219. *Humphrey L. C.* Horizon Focusing Effects Observed on Ionospherically Reflected Radio Waves.— Radio Sci., 1968, v. 3, № 11, p. 1074.
220. *Блюх П. В., Синицын В. Г., Фукс И. М.* Рефракция и рассеяние в солнечной короне при затменных наблюдениях космических источников.— Астрон. ж., 1969, т. 46, № 2, с. 348.
221. *Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Решение задачи дифракции радиоволн в неоднородной среде на основе асимптотики канонического оператора Маслова.— В сб.: Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1977, с. 12.
222. *Худяков С. В.* О методе ВРБ для трехмерных задач.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, № 3, с. 938.
223. *Худяков С. В.* О квазиклассическом рассеянии в центрально-симметричном поле.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 3, с. 927.

224. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— Киев: Наукова думка, 1978.
225. Пермяков В. А. Дифракция электромагнитных волн на радиально неоднородных шаре и цилиндре.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 4, с. 531.
226. Биргер Е. С., Вайнштейн Л. А., Конюхова Н. Б. Дифракция волнового пучка на плазменном цилиндре.— ЖВММФ, 1976, т. 16, № 6, с. 1526.
227. Вайнштейн Л. А., Биргер Е. С., Конюхова Н. Б., Косарев Е. Л., Прудковский Г. И. Коротковолновая диагностика плазменного шнура.— Физика плазмы, 1976, т. 2, № 4, с. 658.
228. Пермяков В. А. Об особенностях обратного рассеяния электромагнитных волн металлической сферой, покрытой радиально неоднородной плазменной оболочкой.— Изв. вузов: Радиофизика, 1976, т. 19, № 10, с. 1556.
229. Гутман А. Л., Чесноков В. А. Сравнение приближения геометрической оптики с точным решением задачи о рассеянии плоской волны неоднородной плазменной сферой.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 2, с. 335.
230. Орлов Ю. И., Демин А. В. Асимптотический метод расчета диаграмм рассеяния на радиально неоднородном цилиндре.— Труды МЭИ, 1980, № 433, с. 10.
231. Кондрагьев И. Г. Рассеяние электромагнитных волн на гладких идеально отражающих объектах, расположенных в плавно неоднородной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, № 12, с. 118.
232. Жидко Ю. М. Рассеяние электромагнитных волн на идеально отражающих телах, помещенных в неоднородную среду.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 8, с. 1205.
233. Пермитин Г. В. Обратное рассеяние скалярного волнового поля идеально отражающим объектом, расположенным вблизи каустической поверхности.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, № 1, с. 62.
234. Маслов В. П. Задача рассеяния в квазиклассическом приближении.— ДАН СССР, 1963, т. 151, № 2, с. 306.
235. Орлов Ю. И. Пространственно-временная дифракция импульсов: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Прямые и обратные задачи теории дифракции.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 5.
236. Бабич В. М., Булдырев В. С., Мологков И. А. Метод возмущений в теории распространения волн: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 28.
237. Орлов Ю. И., Аютин А. П. Комплексная пространственно-временная лучевая теория распространения гауссовых радиоимпульсов в диспергирующих средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 5, с. 743.
238. Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей.— М.: Высшая школа, 1975.
239. Вайнштейн Л. А. Аналитический сигнал в теории нестационарных колебаний и волн: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Математические вопросы теории распространения волн.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 5.
240. Островский Л. А., Рабинович М. И. Нелинейные и нестационарные волны: Лекции на IV Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн.— Рязань: Изд. Рязанск. радиотехнич. ин-та, 1975.
241. Felsen L. B. Asymptotic Theory of Pulse Compression in Dispersive Media.— IEEE Trans., 1971, AP-19, № 3, p. 424.
242. Аютин А. П., Орлов Ю. И. Пространственно-временная геометрическая теория дифракции частотно-модулированных радиосигналов в однород-

- ной диспергирующей среде.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 10, с. 2082.
243. *Аиютин А. П., Орлов Ю. И.* Об особенностях искажений радиосигналов в неоднородном линейном слое плазмы.— Изв. вузов: Радиофизика, 1976, т. 19, № 4, с. 495.
244. *Островский Л. А.* Дисперсионное сжатие частотно-модулированных волн в неоднородной плазме.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 9, с. 133.
245. Справочник по радиолокации/Под ред. М. Скольника.— М.: Сов. радио, 1976, т. 1.
246. *Красильников В. А.* О распространении звука в турбулентной атмосфере.— ДАН СССР, 1945, т. 47, № 7, с. 486.
247. *Bergman P. G.* Propagation of Radiation in a Medium with Random Inhomogeneities.— Phys. Rev., 1946, v. 70, № 7/8, p. 486.
248. *Баранов В. А., Кравцов Ю. А.* О флуктуациях каустической поверхности в среде со случайными неоднородностями.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 10, с. 1500.
249. *Bremmer H.* Terrestrial Radio Waves. Theory of Propagation.— Amsterdam, 1949.
250. *Budden K. G.* The Wave-Guide Mode Theory of Wave Propagation.— London: Logos Press, 1961.
251. *Кинбер Б. Е., Мальцев Н. Е., Токалы А. И.* Асимптотическая теория нерегулярных волноводов.— Радиотехника и электроника, 1970, т. 15, № 12, с. 2512.
252. *Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А.* Лучевая теория преобразования волн в многомодовых нерегулярных волноводах.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 12, с. 2470.
253. *Попов А. В.* Собственные моды нерегулярных волноводов.— ДАН СССР, 1976, т. 230, № 6, с. 1322.
254. *Гуревич А. В.* Влияние нелинейности на генерацию кругосветных каналов.— Геомагн. и астрономия, 1971, т. 11, № 6, с. 961.
255. *Шатров А. Д.* Потери световой мощности в многомодовом фокусирующем волокне со случайными изгибами.— Радиотехника и электроника, 1977, т. 22, № 11, с. 2257; см. также *Шатров А. Д.* Статистика лучей в многомодовых нерегулярных световодах: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Обратные задачи теории рассеяния и теория статистически нерегулярных трактов.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 57.
256. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А., Попов А. В., Уфимцев П. Я.* Волны и лучи в нерегулярных волноводах.— М.: ИЗМИРАН, 1978, препринт № 13 (212).
257. *Боровиков В. А., Попов А. В.* Асимптотическая теория плавно нерегулярных волноводов: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Прямые и обратные задачи теории дифракции.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 157.
258. *Кинбер Б. Е.* О преобразовании волн в плавном волноводном переходе.— Радиотехника и электроника, 1976, т. 21, № 6, с. 1314.
259. *Кинбер Б. Е., Комиссарова Н. Н., Кравцов Ю. А.* Лучевая теория распространения волн в неоднородных рефракционных волноводах: трансформация мод и раскочка ширины волновых каналов.— Изв. вузов: Радиофизика, 1979, т. 22, № 4, с. 414.
260. *Кинбер Б. Е., Кравцов Ю. А., Салганик М. П.* Геометрооптический подход к описанию трансформации волн в изогнутом волноводе.— Радиотехника и электроника, 1979, т. 24, № 9, с. 1721.
261. *Боровиков В. А.* Высшие типы волн в плавнонерегулярных волноводах.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 7, с. 1365.
262. *Калюшин В. А.* О лучевом методе синтеза волноводного перехода.— Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 12, с. 2623.

263. Keller J. B., Rubinow S. Asymptotic Solution of Eigenvalue Problems.— *Ann. Physics*, 1960, v. 9, № 1, p. 24.
264. Быков В. П. Геометрическая оптика трехмерных колебаний в открытых резонаторах.— В сб.: *Электроника больших мощностей*.— М.: Наука, 1965, вып. 4, с. 66.
265. Каценеленбаум В. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами.— М.: Изд. АН СССР, 1961.
266. Брезхович Л. М. Усредненное поле в подводном звуковом канале.— *Акуст. ж.*, 1965, т. 11, № 2, с. 148.
267. Кравцов Ю. А., Намазов С. А. Особенности рассеяния радиоволн на магнитоориентированных неоднородностях ионосферы на частотах ниже критической.— *Радиотехника и электроника*, 1980, т. 25, № 3, с. 459.
268. Островский Л. А., Соустова И. А. О пространственно-временных каустиках и фокусах в диспергирующих средах.— В сб.: *Теория дифракции и распространения волн (VI Всесоюзный симпозиум)*.— М.—Е.: Изд. АН СССР, 1973, т. 2, с. 216.
269. Куляновский М. П. Метод расчета характеристик КВ радиотрасс для двумерной модели ионосферы.— В сб.: *Исследования по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца*.— М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 87.
270. Мальцев Н. Е. Применение принципа Ферма для расчетов геометроакустических лучей в волноводах переменного сечения.— В сб.: *Теория дифракции и распространения волн (VI Всесоюзный симпозиум)*.— М.: Изд. АН СССР, 1973, т. 2, с. 122.
271. Келсо Дж. М. Траектории лучей в ионосфере.— В сб.: *Лучевые приближение и вопросы распространения радиоволн*.— М.: Наука, 1971, с. 9.
272. Свистунов К. В., Тинин М. В. Некоторые особенности применения метода усреднения в траекторных расчетах.— В сб.: *Исследования по геомагнетизму, аэронавигации и физике Солнца*.— М.: Наука, 1979, вып. 45, с. 178.
273. Карпенко А. Л. Метод быстрого расчета лучей в локально слоистой среде.— В сб.: *Дифракционные эффекты декаметровых радиоволн в ионосфере*.— М.: Наука, 1977, с. 54.
274. Ким В. Ю., Солодовникова Л. Н., Шоя Л. Д. Метод расчета траекторных характеристик радиоволн в ионосфере.— В сб.: *Распространение декаметровых радиоволн*.— М.: Наука, 1978, с. 56.
275. Елисеев В. А. Расчет лучей, распространяющихся в неоднородной среде.— *Акуст. ж.*, 1964, т. 10, № 3, с. 284.
276. Белопосова А. В., Таджимухамедова С. С., Алексеев А. С. К расчету годографов и геометрического расхождения лучей в неоднородных средах.— В сб.: *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизич. данных*.— М.: Наука, 1967, с. 124.
277. Бурмаков Ю. А., Облогина Т. И. Определение лучей и годографов рефракционированных волн численными методами.— *Изв. АН СССР, Сер. Физика Земли*, 1968, № 12, с. 81.
278. Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г. Применение метода характеристик для решения на ЭВМ задач распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах.— В сб.: *Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн*.— М.: Наука, 1971, с. 265.
279. Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г. Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере.— *Космич. исслед.*, 1967, т. 5, № 4, с. 593.
280. Спиридонов Ю. Г., Лукин Д. С. О напряженности поля в ионосферном канале.— *Изв. вузов: Радиофизика*, 1969, т. 12, № 12, с. 1769.
281. Croft T. A. HF Radio Focusing Caused by the Electron Distribution between Ionospheric Layers.— *J. Geophys. Res.*, 1967, v. 72, № 9, p. 2343.
282. Ugnatius P. Intensity Equations in Ray Acoustics. II, III.— *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1969, v. 45, № 1, p. 206; 1970, v. 47, № 1, p. 339.

283. MacKinnon R. F., Partridge J. S., Toole S. H. On the Calculation of Ray-Acoustic Intensity.— J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 52, № 5, p. 1471.
284. Chen K. G., Ludwig D. Calculation of Wave Amplitudes by Ray Tracing.— J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 54, № 2, p. 431.
285. Стечкин С. В., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике.— М.: Наука, 1976.
286. Moler C. B., Solomov L. P. Use of Splines and Numerical Integration in Geometrical Acoustics.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, v. 48, № 3, p. 739.
287. Тинин М. В. Применение метода возмущений для решения двухточечной траекторной задачи в сферической системе координат.— В сб.: Теория дифракции и распространения волн (VII Всесоюзный симпозиум).— М.: Изд. АН СССР, 1977, т. 1, с. 58.
288. Julian B. R., Gubbins D. Two-point Seismic Ray Tracing.— Trans. AGU, 1975, v. 56, № 12, p. 1027.
289. Вагин А. В., Мальцев Н. Е. Расчеты инфразвуковых полей в слоистом океане.— В сб.: Вопросы судостроения. Акустика.— Л.: Румб, 1977, вып. 9, с. 61.
290. Кинбер Б. Е. Решение обратной задачи геометрической акустики.— Акуст. ж., 1955, т. 1, № 3, с. 221.
291. Keller J. B. The Inverse Scattering Problem in Geometrical Optics and the Design of Reflectors.— IRE Trans., 1959, AP-17, № 2, p. 146.
292. Weiss M. R. Inverse Scattering in the Geometrical Optics Limit.— J. Opt. Soc. Amer., 1968, v. 58, № 11, p. 1524.
293. Lewis R. M. Physical Optics Inverse Diffraction.— IEEE Trans., 1969, AP-17, № 3, p. 308.
294. Кюн Р. Микроволновые антенны.— Л.: Судостроение, 1967.
295. Голант В. Е. Сверхвысоочастотные методы исследования плазмы.— М.: Наука, 1968.
296. Хауф В., Григуль У. Оптические методы в теплопередаче.— М.: Мир, 1973.
297. Алексеев А. С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1962, № 11, с. 1514.
298. Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сейсмики.— В сб.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизич. данных.— М.: Наука, 1967, с. 9.
299. Берзон И. С., Пасечник И. П. Строение Земли по динамическим характеристикам сейсмических волн.— М.: Наука, 1976.
300. Лаврентьев М. М., Васильев В. Г., Романов В. Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1969.
301. Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1978.
302. Newton R. G. Inverse Problems in Physics.— SIAM Review, 1970, v. 12, № 3, p. 346.
303. Buck U. Inversion of Molecular Scattering Data.— Reviews of Modern Physics, 1974, v. 46, № 2, p. 369.
304. Buck U. Determination of Intermolecular Potentials by the Inversion of Molecular Beam Scattering.— J. Chem. Phys., 1971, v. 54, № 5, p. 1923.
305. Асколи-Барголи У., Бадьями М., Де Марко Ф., Душин Л. А., Пьерони И. Зондирование неоднородной плазмы электромагнитными волнами.— М.: Атомиздат, 1973.
306. Агранович Э. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния.— Харьков: Изд. ХГУ, 1960.
307. Барашков А. С., Дмитриев В. И. Об обратной задаче наклонного зондирования ионосферы.— В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца.— М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 3.



308. *Барашков А. С., Дмитриев В. И., Костомаров Д. П.* К вопросу об обратной задаче вертикального зондирования.— В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца.— М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 37.
309. *Бояринцев Е. Л., Гоцакова Л. С., Яшин Ю. Я.* К вопросу о рефракции электромагнитных волн в ионосфере (прямая и обратная задачи).— В сб.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца.— М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 76.
310. *Благовещенский А. О.* Обратные задачи распространения волн.: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).— В сб.: Прямые и обратные задачи теории дифракции.— М.: Изд. ИРЭ АН СССР, 1979, с. 115.
311. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев: Наукова думка, 1973.
312. Эхо-сигналы от упругих объектов/Под ред. У. К. Нигула.— Таллин: Валгус, 1974, т. 1; 1976, т. 2.
313. *Кенно Е., Моффатт Д.* Аппроксимации переходных и импульсных переходных характеристик.— ТИИЭР, 1965, т. 53, № 8, с. 1025.
314. *Намазов С. А., Орлов Ю. И., Тропкин С. К.* Дисперсионные искажения при импульсном зондировании ионосферы на частотах, близких к критическим.— Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн.— М.: Наука, 1978, ч. I, с. 42.
315. *Лукин А. А., Черкашин Ю. И.* К вопросу об обратных нестационарных задачах дифракции.— Радиотехника и электроника, 1975, т. 20, № 5, с. 898.
316. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
317. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* Применение метода регуляризации к нелинейным задачам.— ЖВММФ, 1965, т. 5, № 3, с. 93.
318. *Тимошин Ю. В.* Импульсная сейсмическая голография.— М.: Недра, 1978.
319. Приборы для неразрушающего контроля материалов и изделий. Справочник/Под ред. В. В. Клюева.— М.: Машиностроение, 1976, т. 1, 2.
320. *Венатовский В. С.* Связь между геометрической и волновой оптикой и дифракция гомоцентрического пучка.— Петроград: Труды гос. оптич. института, 1919, т. 1, № 3, с. 1 (см. также В. А. Фок, там же, 1924, т. 3, № 27, с. 1).
321. *Lewis R. M.* Geometrical Optics and the Polarization Vectors.— IEEE Trans., 1966, AP-14, № 1, p. 100.
322. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики.— М.: ГТТИ, 1934, т. 1.
323. *Владимирский В. В.* О вращении плоскости поляризации в искривленном световом луче.— ДАН СССР, 1941, т. 31, № 3, с. 222.
324. *Красцов Ю. А.* О «геометрической» деполаризации света в турбулентной атмосфере.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 2, с. 284.
325. *Гутман А. Л., Ярышев А. П.* Учет вращения плоскости поляризации вдоль луча при решении задач дифракции в неоднородной среде.— Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, № 1, с. 3.
326. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1957.
327. *Pauli W.* Dirac Wellengleichung des Electrons und Geometrische Optik.— Helv. Phys. Acta, 1932, Bd 5, № 1, S. 179.
328. *Galanin A. D.* Untersuchung der Eigenschaften des Electrons und Mesonen — Spins in der Klassischen Näherung.— J. Phys. (USSR), 1942, Bd 6, № 1—2, S. 35.
329. *Левин М. Л., Рыгов С. М.* О переходе к геометрическому приближению в теории упругости.— Акуст. ж., 1956, т. 2, № 2, с. 173.

330. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.— ДАН СССР, 1956, т. 110, № 3, с. 355.
331. *Karal F. C., Keller J. B.* Elastic Wave Propagation in Homogeneous and Inhomogeneous Media.— J. Acoust. Soc. Amer., 1959, v. 31, № 6, p. 694.
332. *Федоров Ф. И.* Оптика анизотропных сред.— Минск: Изд. АН БССР, 1958.
333. *Ратклифф Дж. А.* Магнитоинертная теория и ее приложения к ионосфере.— М.: ИЛ, 1962.
334. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964.
335. *Veinberg S.* Eikonal Method in Magnetohydrodynamics.— Phys. Rev., 1962, v. 126, № 5, p. 1829.
336. *Poevlein H.* Sommerfeld — Runge Law in Three and Four Dimensions.— Phys. Rev., 1962, v. 128, № 3, p. 956.
337. *Bazer J., Harley J.* Geometrical Hydromagnetics.— J. Geophys. Res., 1963, v. 68, № 1, p. 147.
338. *Зайцев Ю. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я.* К вопросу о переходе к приближению геометрической оптики в электродинамике неоднородных анизотропных сред.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 12, с. 1802.
339. *Кравцов Ю. А.* Приближение геометрической оптики для неоднородных сред и примыкающие к нему асимптотические методы.— В сб.: Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн.— М.: Научн. совет по акустике, МРП, 1970, с. 257.
340. *Гинзбург В. Л.* Об исследовании напряжений оптическим методом.— ЖТФ, 1944, т. 14, № 3, с. 181.
341. *Кравцов Ю. А.* «Квазиизотропное» приближение геометрической оптики.— ДАН СССР, 1968, т. 183, № 1, с. 74.
342. *Элаис В., Буксбаум С., Берс Л.* Волны в анизотропной плазме.— М.: Атомиздат, 1966.
343. *Федоров Ф. И., Филипов В. В.* Отражение и преломление света прозрачными кристаллами.— Минск: Наука и техника, 1976.
344. *Christiansen P. L.* Comparative Studies of Diffraction Processes in the Geometrical Theory of Diffraction.— Lyngby: Polyteknisk Forlag, 1975.
345. *Felsen L. B.* Focusing by an Anisotropic Plasma Interface.— IEEE Trans., 1964, AP-12, № 5, p. 624.
346. *Arbel E., Felsen L. B.* Theory of Radiation from Sources in Anisotropic Media.— In: Electromagnetic Theory and Antennas.— Pergamon Press, 1963, pt. I, p. 391 pt II, p. 421.
347. *Алексин В. Ф., Пахомов В. Н., Степанов Е. Н.* О некоторых особенностях излучения электромагнитных волн в анизотропных средах с дисперсией.— Изв. вузов: Радиофизика, 1965, т. 8, № 6, с. 1135.
348. *Staras H.* The Infinity Catastrophe Associated with Radiation in Magnetoionic Media.— Rad. Sci., 1966, t. 1, № 7, p. 1013.
349. *Бродский Ю. Я., Кондратьев И. Г., Миллер М. А.* Электромагнитные пучки в анизотропных средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 9, с. 1339.
350. *Крупина А. Е.* О траекториях распространения волн Бернштейна в высокоширотной ионосфере при внешнем зондировании.— Изв. вузов: Радиофизика, 1976, т. 19, № 12, с. 1810.
351. *Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я.* О применении теории возмущений к уравнению эйконала в случае неоднородных анизотропных сред.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 8, с. 1175.
352. *Баранов В. А., Кравцов Ю. А.* Расчет лучей в неоднородной магнитоактивной ионосфере методом возмущений.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 8, с. 1588.
353. *Бабич В. М.* Лучевой метод вычисления интенсивностей волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды.— В сб.: Во-

- просы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд. ЛГУ, 1961, вып. 5, с. 36.
354. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория, М.: Наука, 1968, ч. 1.
355. *Дубровский В. А.* Квазиклассическая асимптотика уравнения Дирака.— ДАН СССР, 1963, т. 150, № 3, с. 527.
356. *Хохлов Р. В.* К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы.— ДАН СССР, 1954, т. 97, № 3, с. 411.— A Method of Analysis in the Theory of Sinusoidal Self-Oscillations.— IRE Trans., 1960, CT-7, № 4, p. 398.
357. *Найда О. Н.* О поправках к поляризации нормальных волн.— Изв. вузов: Радиофизика, 1971, т. 14, № 12, с. 1843.
358. *Найда О. Н.* К геометрической оптике трехмерно-неоднородных анизотропных сред.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 12, с. 2489.
359. *Найда О. Н.* О решениях уравнений «квазиизотропного» приближения геометрической оптики.— Изв. вузов: Радиофизика, 1970, т. 13, № 10, с. 1496.
360. *Найда О. Н.* К проблеме предельной поляризации.— Изв. вузов: Радиофизика, 1972, т. 15, № 5, с. 751.
361. *Найда О. Н.* О спивании нормальных волн и решений квазиизотропного приближения.— Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, № 6, с. 896.
362. *Голант В. Е., Пулиа А. Д.* Линеинная трансформация и поглощение волн в плазме.— УФН, 1971, т. 104, № 3, с. 413.
363. *Ерохин Н. С., Моисеев С. С.* Волновые процессы в неоднородной плазме.— В сб.: Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 146.
364. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика.— М.: Физматгиз, 1974.
365. *Никитин Е. Е., Уманский С. Я.* Неадиабатические переходы при медленных атомных соударениях.— М.: Атомиздат, 1979.
366. *Денисов Н. Г.* К вопросу о предельной поляризации электромагнитных волн, выходящих из неоднородного слоя магнитоактивной плазмы.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 7, с. 1921.
367. *Кучеренко В. В.* Асимптотика решения системы  $A(x, -i\hbar\partial/\partial x)u=0$  при  $\hbar \rightarrow 0$  в случае характеристик переменной кратности.— Изв. АН СССР: Сер. матем., 1974, т. 38, № 3, с. 625.
368. *Zener C.* Nonadiabatic Crossing Energy Levels.— Proc. Roy. Soc., 1932, v. A137, p. 696.
369. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.
370. *Краснушкин П. Е.* Взаимодействие модулированных нормальных волн.— ДАН СССР, 1978, т. 239, № 4, с. 815.
371. *Кравцов Ю. А., Найда О. Н.* Линеинная трансформация электромагнитных волн на участке квазипоперечного распространения в трехмернеоднородной магнитоактивной плазме.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, № 1 (7), с. 237.
372. *Беллюстин Н. С.* О линеинном взаимодействии электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 4, с. 487.
373. *Горышкин Л. Л., Кравцов Ю. А., Томашук Л. Я., Фокин Б. В.* О поляризации сигналов авроральных радиотражений.— Геомагнетизм и аэрномия, 1969, т. 9, № 5, с. 873.
374. *Железняков В. В., Злотник Е. Я.* О распространении радиоволн в неоднородном магнитном поле солнечной короны.— Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, № 9, с. 1444.
375. *Апресян Л. А.* О предельной поляризации волны, проходящей толстый слабоанизотропный слой со случайными неоднородностями.— Астрон. ж., 1976, т. 53, № 1, с. 53.

376. *Найда О. Н.* Лучевое приближение в акустике неоднородных анизотропных сред.— ДАН СССР, 1977, т. 236, № 4, с. 842; Геометрическая акустика трехмерно-неоднородных анизотропных сред.— Акуст. ж., 1978, т. 24, № 5, с. 731.
377. *Апресян Ж. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я., Яшинов В. А.* О линейной трансформации волн в неоднородной анизотропной среде («квазиырожденное» приближение геометрической оптики).— Изв. вузов: Радиофизика, 1976, т. 19, № 9, с. 1296.
378. *Найда О. Н.* Равномерная геометрическая аппроксимация линейных систем вдоль лучей переменной кратности.— Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, № 3, с. 383.
379. *Chen C.* Asymptotic Theory of Wave Propagation in Spatial and Temporal Dispersive Inhomogeneous Media.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, № 5, p. 743.
380. *Кравцов Ю. А.* Приближение геометрической оптики в общем случае неоднородных и нестационарных сред с частотной и пространственной дисперсией.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, № 4 (10), с. 1470.
381. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред.— М.: Атомиздат, 1961.
382. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.
383. *Степанов Н. С.* Адиабатические преобразования спектра волн в диспергирующих нестационарных средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 2, с. 283.
384. *Островский Л. А.* О распространении ЧМ-сигналов в диспергирующих средах.— Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 7, с. 1176.
385. *Герценштейн М. Е.* Энергетические соотношения в пространственно-диспергирующих средах.— ЖЭТФ, 1954, т. 26, № 6, с. 680.
386. *Стикс Т.* Теория плазменных волн.— М.: Атомиздат, 1965.
387. *Рыгов С. М.* Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, № 10, с. 930.
388. *Апресян Л. А.* Уравнение переноса излучения с учетом продольных волн.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, № 3, с. 461.
389. *Кравцов Ю. А., Кузусhev А. И., Черных А. В.* О поправках к «квазистационарному» значению тензора диэлектрической проницаемости плазмы неоднородной электронной плазмы.— ЖЭТФ, 1970, 59, № 5 (12), с. 2160.
390. *Степанов Н. С., Гавриленко В. Г.* К теории электромагнитных волн в слабонестационарной плазме.— ДАН СССР, 1971, т. 201, № 3, с. 577.
391. *Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А., Степанов Н. С.* Динамооптические эффекты в плазме.— Изв. вузов: Радиофизика, 1972, т. 15, № 2, с. 183.
392. *Пикულიн В. Д., Степанов Н. С.* Кинетическая теория электромагнитных волн в электронной плазме с медленно меняющимися параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, № 8, с. 1138.
393. *Гавриленко В. Г., Степанов Н. С.* Деполяризация электромагнитных волн в турбулентной космической плазме.— Астрон. ж., 1976, т. 53, № 2, с. 291.
394. *Степанов Н. С.* О диэлектрической проницаемости нестационарной плазмы.— Изв. вузов: Радиофизика, 1976, т. 19, № 7, с. 960.
395. *Рухадзе А. А., Силин В. П.* Метод геометрической оптики в электродинамике неоднородной плазмы.— УФН, 1964, т. 82, № 3, с. 499.
396. *Рухадзе А. А., Силин В. П.* Дрейфово-диссипативные неустойчивости плазмы.— УФН, 1968, т. 96, № 1, с. 87.
397. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей.— М.: Атомиздат, 1970, ч. I; 1971, ч. II.
398. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.

399. *Аверков С. И., Островский Л. А.* Распространение колебаний в системах с переменными параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1958, т. 1, № 1, с. 46.
400. *Аверков С. И., Степанов Н. С.* Распространение волн в системах с бегущими параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1959, т. 2, № 2, с. 203.
401. *Степанов Н. С.* Распространение волн в недиспергирующей системе с переменными параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1960, т. 3, № 4, с. 672.
402. *Степанов Н. С.* О приближении геометрической оптики для волн пространственного заряда.— Изв. вузов: Радиофизика, 1963, т. 6, № 1, с. 112.
403. *Степанов Н. С.* О преобразовании спектра волн в диспергирующей среде с медленно меняющимися параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 5, с. 700.
404. *Цугаевский Л. П.* Энергетические силы в прозрачной среде с дисперсией.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, № 11, с. 1450.
405. *Кравцов Ю. А., Степанов Н. С.* Геометрическая оптика и сохранение адиабатического инварианта.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 11, с. 1730.
406. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
407. *Островский Л. А.* Некоторые общие соотношения для волн на границе раздела.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 2 (8), с. 551.
408. *Сорокин Ю. М.* Энергетические соотношения в системах с бегущими параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1972, т. 15, № 1, с. 51.
409. *Степанов Н. С., Сорокин Ю. М.* К кинетической теории отражения электромагнитных волн от движущегося неоднородного слоя плазмы.— ЖТФ, 1972, т. 42, № 3, с. 578.
410. *Островский Л. А.* Некоторые «парадоксы движущихся границ» в электродинамике.— УФН, 1973, т. 116, № 2, с. 315.
411. *Миллер М. А., Сорокин Ю. М., Степанов Н. С.* Ковариантность уравнений Максвелла и сопоставление электродинамических систем.— УФН, 1977, т. 121, № 3, с. 525.
412. *Столяров С. И.* Граничные задачи электродинамики движущихся сред.— «Эйнштейновский сборник», 1975—76 гг.— М.: Наука, 1978, с. 152.
413. *Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А., Степанов Н. С.* К вопросу об отражении электромагнитных волн в движущейся плазме.— ЖТФ, 1971, т. 43, № 3, с. 534.
414. *Островский Л. А.* О приближении геометрической оптики для волн в линиях передач с переменными параметрами.— Изв. вузов: Радиофизика, 1961, т. 4, № 2, с. 293.
415. *Whitham J. B., Felsen L. B.* Pulse Propagation in a Dispersive Medium with Moving Density Profile.— J. Math. Phys., 1972, v. 13, № 5, p. 760.
416. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: ГИИТЛ, 1954.
417. *Рок В. Е.* О распространении электромагнитных волн в нестационарной изотропной среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, № 11, с. 1728.
418. *Красильников В. Н., Лугченко Л. Н.* Принцип кажущегося положения границы раздела и обобщение отражательных формул В. А. Фока.— В сб.: Проблемы дифракции и распространения радиоволн.— Изд. ЛГУ, 1973, вып. 12, с. 150.
419. *Гавриленко В. Г., Степанов Н. С.* О преобразовании спектра волн в среде с плавными пространственно-временными флуктуациями.— Изв. вузов: Радиофизика, 1973, т. 16, № 1, с. 69.
420. *Гавриленко В. Г., Степанов Н. С.* О спектре волны, прошедшей через турбулентную струю.— Радиотехника и электроника, 1973, т. 18, № 6, с. 1105.
421. *Гавриленко В. Г., Кром М. Н., Степанов Н. С.* К вопросу о среднем потоке энергии во флуктуирующей среде.— Изв. вузов: Радиофизика, 1977, т. 20, № 8, с. 1181.

422. Орлов Ю. И., Власов С. А. Асимптотическое решение уравнений Максвелла в области полутени при наличии каустики краевой волны.— Радиотехника и электроника, 1978, т. 23, № 1, с. 17.
423. Орлов Ю. И., Власов С. А. Асимптотическое решение уравнений Максвелла в окрестности края каустики.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 5, с. 422.
424. Крускал М. Адиабатические инварианты.— М.: ИЛ, 1962.
425. Suchy K. Stepwise Transition from Wave Optics to Ray Optics in Inhomogeneous Anisotropic Absorbing Media.— Ann. Phys., 1952, v. 11, № 2—3, p. 113 (pt. I); Ann. Phys., 1953, v. 13, № 1, p. 178 (pt. II).
426. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4.— 5-е изд.— М.: Физматгиз, 1958.
427. Нелинейные волны/Под ред. С. Лейбовича и А. Сиббасса.— М.: Мир, 1977.
428. Азманов С. А., Хозлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики.— М.: Изд. ВИНТИ, 1964.
429. Горшков К. А., Островский Л. А., Пелиновский Е. Н. Вопросы асимптотической теории нелинейных волн.— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 113.
430. Шварцбург А. Б. Геометрическая оптика в нелинейной теории волн.— М.: Наука, 1976.
431. Гуревич А. В., Шварцбург А. Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.
432. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Суворов А. П. Теория волн.— М.: Наука, 1979.
433. Каплан А. Е. Искривление траекторий осесимметричных пучков света в нелинейных средах.— Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 9, № 1, с. 58.
434. Пермяков В. А. Дифракционные эффекты при обратном рассеянии электромагнитных волн радиально неоднородным плазменным шаром.— Изв. вузов: Радиофизика, 1980, 23, № 9, с. 780.
435. Keller J. B. Geometrical Theory of Diffraction.— J. Opt. Soc. Amer., 1962, v. 52, № 2, p. 116.
436. Патлак П., Куюмджан Р. Расчет излучения из отверстий в криволинейных поверхностях методом геометрической теории дифракции.— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 29.
437. Орлов Ю. И., Орлова Н. С. Асимптотический метод определения полей дифракции волн на выпуклых телах вращения.— Изв. вузов: Радиофизика, 1978, т. 21, № 7, с. 1011.
438. Lewis R. M. Asymptotic Theory of Transients.— Electromagnetic Wave Theory.— N.-Y.: Pergamon Press, 1967, pt. 2, p. 845.
439. Уфимцев П. Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции.— М.: Сов. радио, 1962.
440. Уфимцев П. Я. Геометрическая теория дифракции как асимптотическая форма метода краевых волн.— В сб.: Теория дифракции и распространения волн (VII Всесоюзный симпозиум).— М.: Изд. АН СССР, 1977, т. 1, с. 54.
441. Леонтович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.— В сб.: Исследования по распространению радиоволн.— М.: Изд. АН СССР, 1948, вып. 2, с. 13; ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 7, с. 557.
442. Малюжинец Г. Д. Развитие представлений о явлениях дифракции.— УФН, 1959, т. 69, № 2, с. 321.
443. Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Поперечная диффузия при дифракции коротких волн на выпуклом цилиндре с плавно меняющейся кривизной. I, II.— Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, № 3, с. 363, 377.
444. Гутман Л. С. Применение принципа Гюйгенса к решению дифракционных задач в неоднородной среде.— Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, № 10, с. 1726.

445. Вей-и Д. Ван, Дешамп Дж. Использование комплексных лучей в задачах рассеяния.— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 150.
446. Крацов Ю. Я., Яшин Ю. А. Комплексная геометрическая оптика неоднородных анизотропных сред.— Изв. вузов: Радиофизика, 1969, т. 12, № 5, с. 674.
447. Коннор К., Фелсен Л. Комплексные пространственно-временные лучи и их применение в теории распространения импульсов в поглощающих и диспергирующих средах.— ТИИЭР, 1974, т. 62, № 11, с. 203.
448. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— УМН, 1952, т. 7, № 6, с. 3.
449. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.
450. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.— М.: Наука, 1977.
451. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М.: Наука, 1978.
452. Зверев В. А. Радиооптика.— М.: Сов. радио, 1975.
453. Lewis R. M., Boersma J. Uniform Asymptotic Theory of Edge — Diffraction.— J. Math. Phys., 1969, v. 10, № 12, p. 2291.
454. Ahluwalia D. S. Uniform Asymptotic Theory of Diffraction by the Edge of a Three-Dimensional Body.— SIAM Journ. Appl. Math., 1970, v. 18, № 2, p. 287.
455. Орлов Ю. И. Асимптотический метод для определения волнового поля в произвольной плавно неоднородной среде.— Труды МЭИ, 1972, вып. 119, с. 82.
456. Орлов Ю. И. Коротковолновое интегральное представление волнового поля в произвольной плавно неоднородной среде.— Тезисы докладов X Всесоюзной конференции по распространению радиоволн. Секция VII.— М.: Наука, 1972, с. 23.
457. Орлов Ю. И. Равномерное асимптотическое интегральное представление полей в неоднородных средах.— Изв. вузов: Радиофизика, 1974, т. 17, № 7, с. 1035.
458. Вайнштейн Л. А., Тищенко Э. А. Интеграл по траекториям и коротковолновая диагностика цилиндрической плазмы.— ЖТФ, 1976, т. 46, № 11, с. 2271.
459. Орлов Ю. И. Равномерная асимптотика поля краевой волны, испускаемой ребром криволинейной поверхности.— Труды МЭИ, 1975, вып. 237, с. 96.
460. Орлов Ю. И., Власов С. А. Рассеяние плоской электромагнитной волны на крутовой кромке поверхности вращения.— Труды МЭИ, 1977, вып. 334, с. 192.
461. Орлов Ю. И., Орлова Н. С. Метод эквивалентных источников в трехмерных задачах дифракции волн на выпуклых телах.— В сб.: Теория дифракции и распространения волн (VI Всесоюзный симпозиум).— М.: Изд. АН СССР, 1973, т. 1, с. 372.
462. Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий.— М.: Наука, 1979.
463. Buchal R. N., Keller J. B. Boundary Layer Problems in Diffraction Theory.— Comm. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, № 1, p. 85.
464. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции.— Л.: Изд. ЛГУ, 1974.
465. Авдеев В. Б., Ярыгин А. П. Применение метода интерференционного интеграла для определения поля в области каустической тени.— В сб.: Тезисы докладов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн.— М.: Наука, 1978, ч. II, с. 294.
466. Бекетова А. К., Белозеров А. Ф., Березкин А. П. и др. Голографическая интерферометрия фазовых объектов.— Л.: Наука, 1979.

467. Алексеев А. С., Бессонова Э. Н., Матвеева Н. Н. и др. Обратные кинематические задачи взрывной сейсмологии.— М.: Наука, 1979.
468. Красцов Ю. А. Геометрическая оптика сред с пространственной дисперсией (скалярная задача).— Изв. вузов: Радиофизика, 1968, т. 11, № 10, с. 1582.
469. Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера.— УМН, 1973, т. 28, № 5, с. 17.
470. Орлов Ю. И., Тропкин С. К. О численном моделировании ближних полей апертурных антенн с целью восстановления их характеристик.— В сб.: Краткие тексты докладов Всесоюзной научной конференции «Машинное проектирование устройств и систем СВЧ».— Тбилиси: Изд. ТГУ, 1979, с. 215.
471. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. О линейном взаимодействии волн в плазме с неоднородным магнитным полем.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, № 1 (7), с. 101.
472. Войк Э. Е. (Хвойкова). Формула радиотраектории. I. Теория. Кругосветное эхо и другие особенности.— Геомагнетизм и аэрономия, 1974, т. 14, № 1, с. 57.
473. Краснушкин П. Е. Волноводные свойства неоднородных сред.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 4, с. 431.



Предисловие . . . . .	3
<b>Глава I. СКАЛЯРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>§ 1. Уравнения геометрической оптики</b> . . . . .	<b>7</b>
1. Исходные предположения (7). 2. Разложение поля в ряд по степеням малого безразмерного параметра $\mu$ (9). 3. Разложение поля в ряд по обратным степеням волнового числа (11). 4. Начальные условия для эйконала и амплитуды (12). 5. Асимптотический характер лучевого ряда (13).	
<b>§ 2. Лучи и эйконал</b> . . . . .	<b>13</b>
1. Метод характеристик (13). 2. Уравнения лучей и эйконал волны (15). 3. Кривизна и кручение луча (17). 4. Начальные условия для лучей. Лучевые координаты (19). 5. Семейства лучей и фронтов (20). 6. Принцип Ферма (21). 7. Уравнения лучей в криволинейных координатах (22). 8. Другие типы лучей (25).	
<b>§ 3. Амплитуда волны</b> . . . . .	<b>26</b>
1. Формальное решение уравнения переноса для амплитуды нулевого приближения (26). 2. Лучи и направление потока энергии (27). 3. Сохранение потока энергии в лучевой трубке (28). 4. Амплитуда поля, создаваемого точечным источником в неоднородной среде (30). 5. Результирующее поле в нулевом приближении лучевого метода (30). 6. Амплитуды высших приближений (31). 7. Учет слабого поглощения (32).	
<b>§ 4. Каустики</b> . . . . .	<b>33</b>
1. Основные свойства (33). 2. Фокусировка волнового поля на каустиках (35). 3. Классификация каустик на основе теории дифференцируемых отображений (36). 4. Структурно устойчивые и структурно неустойчивые каустики в физических задачах (42). 5. Другие типы каустик (44). 6. Особенности фазовых фронтов (44). 7. Каустический сдвиг фазы (45).	
<b>§ 5. Отражение и преломление волн на границах раздела</b> . . . . .	<b>46</b>
1. Принцип локальности при отражении волн (46). 2. Соотношения для лучей и эйконалов (47). 3. Отражательные формулы для амплитуды (48). 4. Отражение от слабых границ раздела (50). 5. Поверхностная геометрическая оптика (51).	
<b>§ 6. Соотношения взаимности для лучей и каустик</b> . . . . .	<b>51</b>
1. Теорема взаимности (51). 2. Соотношения взаимности для лучей и каустик (52).	
<b>§ 7. Пространственно-временная геометрическая оптика</b> . . . . .	<b>53</b>
1. Волновое уравнение для сред с временной (частотной) дисперсией (53). 2. Необходимые условия применимости геометрической оптики для квазимонохроматических волновых пакетов (55). 3. Дифференциальная форма материального уравнения (7.2) (56). 4. Уравнения эйконала и переноса (57). 5. Пространственно-временные лучи (58). 6. Начальные условия (60). 7. Эйконал и амплитуда волны (61). 8. Пространственно-временные каустики (64). 9. Распространение разрывов (сингулярностей) поля в среде без дисперсии (65).	
<b>§ 8. Метод разделения переменных в уравнении эйконала</b> . . . . .	<b>68</b>
1. Полный интеграл уравнения эйконала (68). 2. Разделение переменных в двумерном случае (декартовы координаты) (69). 3. Разделение переменных в двумерном случае (произвольные кривые)	

волинейные ортогональные координаты) (70). 4. Разделение переменных в трехмерном случае (72). 5. Неполное (частичное) разделение переменных (74). 6. Полный интеграл уравнения эйконала и уравнения лучей (75).

### § 9. Методы возмущений для уравнений геометрической оптики . . . . . 76

1. Метод возмущений для эйконала (76). 2. Метод возмущений для лучей (78). 3. Возмущение в однородной среде (79). 4. Возмущение в неоднородной среде (80).

### § 10. Условия применимости метода геометрической оптики и смежные проблемы . . . . . 82

1. Существующие способы оценки погрешности метода геометрической оптики (82). 2. Зоны Френеля и френелевский объем в неоднородной среде (83). 3. Физическое содержание понятия «луч» (85). 4. Эвристические критерии применимости приближения геометрической оптики (86). 5. Условия применимости пространственно-временной геометрической оптики (87). 6. Эвристические оценки погрешности нулевого приближения геометрической оптики (88). 7. Оценка ширины каустической зоны (88). 8. Неразличимость лучей в каустической зоне (91). 9. О реальности каустик (91). 10. Оценка поля в области неприменимости метода геометрической оптики (92). 11. Индексы фокусировки поля на каустиках (93). 12. Проблема устойчивости геометрикооптического решения по отношению к малым возмущениям (94). 13. Анализ волновой картины в целом (95).

## Глава II. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ . . . . . 96

### § 11. Однородная среда . . . . . 96

1. Лучи и эйконал (96). Амплитуда волны (96). 3. Каустики (99). 4. Плоский амплитудно-фазовый экран (100). 5. Пример: синусоидальный фазовый экран (102). 6. Условия применимости геометрической оптики (103). 7. Геометрическая оптика в ближней и дальней зонах антенны. Распространение волновых пучков (104). 8. О фазовом центре антенны или рассеивателя (108). 9. Поле в окрестности фокуса линзы (109). 10. Поле в фокусе линзы при наличии цилиндрической (сферической) аберрации (111).

### § 12. Отражение и преломление волн на границах раздела однородных сред . . . . . 114

1. Отражательные формулы (114). 2. Расходимость отраженных и преломленных лучей (115). 3. Эффективная поверхность рассеяния тела в приближении геометрической оптики (116). 4. Отраженное поле направленного точечного источника (антенны) в дальней зоне (119). 5. Каустики отраженных и преломленных лучей (119). 6. Примеры катякаустик и диакаустик (121). 7. Условия применимости отражательных формул (122). 8. Область нарушения применимости отражательных формул в окрестности луча, касательного к границе раздела (отражение волны от выпуклого тела) (124). 9. Особенности отражения волн от поверхности с переменным импедансом (125).

### § 13. Лучи и каустики в плоско-слоистых средах . . . . . 126

1. Уравнения лучей (126). 2. Особенности траектории луча в плоско-слоистой среде (127). 3. Уравнения каустик и геометрия семейства лучей (128). 4. Лучи и каустики точечного источника в неоднородном полупространстве (131). 5. Лучи и каустики в линейном слое (132). 6. Другие слои (135). 7. Плоская волна в параболическом слое (136). 8. Точечный источник в параболическом слое (138).

### § 14. Волновые поля в плоско-слоистых средах . . . . . 140

1. Поле произвольной волны (140). 2. Поле плоской волны (141). 3. Поля точечного и линейного источников (143). 4. Точечный источник в линейном слое (145). 5. Точечный источник в параболическом слое (149). 6. О форме френелевских объемов в плоско-слоистых средах (150). 7. Условия применимости геометрикооптического приближения (152).

§ 15. Волны в радиально-неоднородных средах . . . . .	153
1. Уравнения лучей в сферически-слоистых средах (153). 2. Эйконоиды: волны в сферически-слоистых средах (155). 3. Цилиндрически-слоистые среды (156). 4. Геометрия лучей (157). 5. Поле точечного источника (159). 6. Поле плоской волны (160). 7. Каустики (161).	
§ 16. Клиновидно-слоистые и другие неоднородные среды . . . . .	163
1. Эйконоид и лучи в клиновидно-слоистой среде (163). 2. Амплитуда. Поле плоской волны (165). 3. Поле линейного источника (166). 4. Уравнения лучей в двумерно-неоднородной среде специального вида (167). 5. Поле точечного источника (асимметричная задача) (168). 6. Падение плоской волны на двумерно-неоднородную среду (16.11) (170). 7. Слабонеоднородные, квазислоистые и случайно-неоднородные среды (172).	
§ 17. Геометрическая оптика волноводов и резонаторов . . . . .	172
1. Особенности метода геометрической оптики для волноводов (172). 2. Лучевое описание нормальных волн в регулярных волноводах (175). 3. Адиабатические моды плавно-нерегулярных волноводов (178). 4. Поворотные волновые каналы. Метод адиабатического инварианта (179). 5. Подводящие звуковые каналы. Некогерентное сложение лучевых полей (181). 6. Волоконная оптика (181). 7. Трансформация мод в плавно-нерегулярных волноводах (181). 8. Собственные колебания объемных резонаторов (183).	
§ 18. Рассеяние волн на локализованных неоднородностях . . . . .	184
1. Эффективная поверхность рассеяния локализованной неоднородности в приближении геометрической оптики (184). 2. Рассеяние на теле, расположенном в неоднородной среде (187). 3. Эффективная поверхность рассеяния сферически-слоистой неоднородности (188). 4. Эффективная поверхность рассеяния идеально проводящей сферы в сферически-слоистой среде (190). 5. Эффективная поверхность рассеяния двумерно-неоднородного образования специального вида (191). 6. Особенности рассеяния сферической волны на локализованной неоднородности (193). 7. Рассеяние на слабых локализованных неоднородностях (194).	
§ 19. Распространение импульсов . . . . .	196
1. Общие соотношения для плазменного (волноводного) закона дисперсии (196). 2. Однородная среда с произвольным законом дисперсии (197). 3. Плоский частотно-модулированный импульс в однопородной среде (198). 4. Дисперсионное сжатие (компрессия) ЧМ-импульсов в однородной среде (201). 5. Плоско-слоистая диспергирующая среда (203). 6. Ближняя и дальняя зоны импульса (204).	
§ 20. Численные методы в геометрической оптике неоднородных сред . . . . .	207
1. Методы расчета траекторий лучей (207). 2. Методы расчета эйконала и амплитуды волны (209). 3. Некоторые вычислительные проблемы (211).	
§ 21. Обратные задачи геометрической оптики . . . . .	212
1. Отражение и преломление волн на границах раздела (212). 2. Обратные задачи в случае заданной модели неоднородной среды (214). 3. Многомерные обратные задачи (215). 4. Обратные задачи пространственно-временной геометрической оптики (нестационарные обратные задачи) (215).	
Глава III. ВЕКТОРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ . . . . .	217
§ 22. Поперечные электромагнитные волны в изотропной среде . . . . .	217
1. Уравнения Максвелла для монохроматических электромагнитных волн (217). 2. Дебаевское разложение и уравнения последовательных приближений (217). 3. Уравнение эйконала (218). 4. Поперечный характер электромагнитных волн в изотропной среде в	

рамках нулевого приближения. Поляризационное вырождение (219). 5. Условия совместности уравнений первого приближения (219). 6. Сохранение потока энергии в лучевой трубе (220). 7. Сохранение формы эллипса поляризации (221). 8. Вращение векторов поля (закон Рытова) (221). 9. О поляризации поперечной волны в нулевом приближении лучевого метода (223). 10. Возникновение продольных компонент в первом приближении лучевого метода (224). 11. Отражение поперечных электромагнитных волн от границы раздела (224). 12. Поляризационное вырождение в задачах квантовой механики и теории упругости (225).

### § 23. Независимые нормальные волны в анизотропной среде . . . . . 225

1. Уравнение эйконала (225). 2. Независимые нормальные волны (227). 3. Уравнения лучей (228). 4. Решение уравнения эйконала (230). 5. Определение векторов поляризации нормальных волн (230). 6. Условия совместности уравнений первого приближения (231). 7. Уравнение переноса для амплитуды (231). 8. Уравнение для аргумента комплексной амплитуды (232). 9. Лучи как энергетические траектории Френелевский объем в анизотропной среде (233). 10. Учет слабого поглощения (234). 11. Отражение и преломление волн на границах анизотропных сред (235). 12. Некоторые частные результаты (236). 13. Расходимость полей первого приближения при поляризационном вырождении (239). 14. Другие векторные задачи в условиях отсутствия поляризационного вырождения (241).

### § 24. Взаимодействие нормальных волн в неоднородных анизотропных средах . . . . . 241

1. Волны в слабоанизотропных средах. Квазианизотропное приближение геометрической оптики (241). 2. Различные формы уравнений квазианизотропного приближения (243). 3. Методы решения уравнений квазианизотропного приближения (245). 4. О погрешности квазианизотропного приближения (245). 5. Применения квазианизотропного приближения (246). 6. Квазивырожденное приближение геометрической оптики (247).

### § 25. Уравнения геометрической оптики для негармонических электромагнитных волн в общем случае неоднородных и нестационарных диспергирующих сред . . . . . 249

1. Уравнения Максвелла в неоднородной и нестационарной среде при наличии временной и пространственной дисперсии (249). 2. Дифференциальная форма материального уравнения (250). 3. Уравнения для полей нулевого и первого приближений (251). 4. Уравнение эйконала. Пространственно-временные лучи (252). 5. Уравнение переноса для амплитуд независимых нормальных волн в анизотропной среде (254). 6. Теорема о групповой скорости (255). 7. Интегрирование уравнения переноса вдоль пространственно-временных лучей (256). 8. Поперечные волны в изотропной среде (257). 9. Продольные волны в изотропной среде (258). 10. Волны в слабоанизотропных средах (259).

### § 26. Особенности материальных уравнений для нестационарных и неоднородных диспергирующих сред. Условия существования адиабатического инварианта . . . . . 259

1. О поправках к квазистационарному тензору диэлектрической проницаемости (259). 2. Физические явления, связанные с отличием тензора проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  от своего квазистационарного значения (261). 3. Условия существования адиабатического инварианта (262). 4. Феноменологический способ нахождения антигермитовой части поправки к квазистационарному тензору проницаемости для прозрачных сред (263).

### § 27. Волновые процессы в нестационарных средах . . . . . 264

1. Одномерная задача. Общие соотношения (264). 2. Нестационарная среда без дисперсии (265). 3. Нестационарные среды с дисперсией (269). 4. Эволюция коротких импульсов (271). 5. Отражение от движущихся границы раздела (272). 6. Теория возмущений в нестационарных задачах (275).

Заключение . . . . .	276
Литература . . . . .	280