С. Г. КРЕЙН,
Ю. И. ПЕТУНИН,
Е. М. СЕМЕНОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

~~517.2~~
К 79
~~УДК 517~~

Интерполяция линейных операторов. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 400 стр.

Книга посвящена одному из важных направлений функционального анализа — теории интерполяции линейных операторов. Излагаются основные методы построения интерполяционных пространств, изучаются их свойства. Эти методы позволяют с новых позиций взглянуть на ряд теорем и неравенств классического анализа. Теория интерполяции операторов имеет многочисленные приложения в теории рядов Фурье, в теории приближений, в теории уравнений в частных производных и др. Некоторые из них изложены в книге.

Книга доступна студентам старших курсов математических факультетов и будет полезна аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области функционального анализа и его приложений.

Селим Григорьевич Крейн,
Юрий Иванович Петунин,
Евгений Михайлович Семенов

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М., 1978 г. 400 стр.

Редактор *И. М. Овчинникова.*
Техн. редактор *Н. В. Кошелева.*
Корректоры *Е. А. Белицкая, В. П. Сорокина, Е. В. Сидоркина.*
ИБ № 11053

Сдано в набор 13.12.77. Подписано к печати 16.05.78. Т-08272.
Формат 84×108$^{1}/_{32}$. Бумага тип. № 1. Латинская гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 21,47. Тираж 7000 экз. Заказ № 4839.
Цена книги 1 р. 60 к.

Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография изд-ва «Наука». 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

К $\dfrac{20203-090}{053(02)-78}$ 44-78

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена систематическому изложению одного из разделов функционального анализа, возникшего и развившегося в течение последних двух десятилетий и получившего применения в различных областях.

Основным объектом классического функционального анализа являлись операторы, действующие из одного банахова пространства (или, позднее, линейного топологического пространства) в другое. При этом сами пространства рассматривались как нечто заранее данное. Изменению такой идеологии в значительной степени способствовали теоремы вложения С. Л. Соболева, в которых ряд фундаментальных теорем и неравенств анализа трактовался как утверждения о вложении одних банаховых пространств в другие. Теоремы вложения возникли в связи с задачами теории уравнений в частных производных, в которых для изучения гладкости решений вводятся одни серии пространств, для изучения поведения вблизи границы области или вблизи каких-либо особых точек — другие типы пространств; изучение значений решений на многообразиях меньшей размерности проводится в новых пространствах и т. д. Обилие различных пространств потребовало детального исследования взаимных связей между этими пространствами. Таким образом, возник новый уровень абстракции, на котором сами банаховы пространства рассматриваются как элементы некоторой категории. Излагаемая в книге теория интерполяции линейных операторов в значительной степени связана с таким подходом.

Первая интерполяционная теорема в теории операторов была получена М. Риссом в 1926 г. в виде некоторого неравенства для билинейных форм. Уточнение ее и операторная формулировка были даны Г. О. Ториным. Существенным дальнейшим шагом явилась интерполяционная теорема Ж. Марцинкевича (1939), доказательство которой опубликовано А. Зигмундом в 1956 г. В 50-х годах Е. М. Стейном и Г. Вейсом были получены важные обобщения теорем Рисса — Торина и Марцинкевича. Однако все эти и другие сообщения относились к пространствам L_p или близким к ним. Разработка общих интерполяционных теорем для семейств абстрактных гильбертовых и банаховых пространств была начата в 1958 г. независимо в ряде стран. Первые публикации принадлежат здесь Ж. Л. Лионсу (1958—1960 гг.), Е. Гальярдо (1959—1960 гг.), А. П. Кальдерону (1960 г.) и С. Г. Крейну (1960 г.). В дальнейшем существенную роль сыграли работы Ж. Петре. Был создан ряд методов получения интерполяционных теорем, имеющих между собой глубокие связи. При этом довольно быстро выяснилось, что интерполяционные свойства промежуточных пространств между двумя банаховыми пространствами являются следствиями функториальности методов их построения. Поэтому основной упор был перенесен на изучение свойств промежуточных интерполяционных пространств, получаемых различными методами, и их конкретизацию. Наряду с этим в работах В. Орлича, А. П. Кальдерона, Г. Г. Лоренца, Е. М. Семенова и др. были получены глубокие результаты относительно интерполяции линейных операторов в функциональных пространствах измеримых функций.

Изложить полностью все результаты теории интерполяции линейных операторов в одной книге не представляется возможным. Мы старались осветить лишь некоторые основные направления ее развития: вещественные и комплексный методы построения интерполяционных пространств, метод шкал банаховых пространств, интерполяция в пространствах измеримых функций. Дополнительные сведения содержатся в замечаниях и литературных указаниях.

В процессе развития теории интерполяции операторов возник ряд новых общих понятий функционального анализа. Эти понятия и их взаимосвязи изучаются в первой главе книги. Изложение существенно опирается на работу Н. Ароншайна и Е. Гальярдо. Для чтения этой главы нужно знать лишь основные принципы функционального анализа.

Вторая глава, посвященная интерполяции в пространствах измеримых функций, занимает большое место в книге. Она может читаться независимо от первой главы, из которой нужны лишь простейшие определения. В главе содержатся: теорема, описывающая все интерполяционные пространства между L_1 и L_∞, и теорема, являющаяся дальнейшим развитием теоремы Марцинкевича. Изложение доводится до конкретных приложений, например, к теории ортогональных рядов: изучаются свойства сходимости рядов Фурье и базисности системы функций. Кроме того, в главе содержится большой вспомогательный материал по теории функций, который мало освещен в литературе. Детально изучаются убывающие перестановки измеримых функций, исследуются симметричные в смысле Е. М. Семенова функциональные пространства (в иностранной литературе близкие пространства называются перестановочно инвариантными) и, в частности, пространства Лоренца и Марцинкевича. Приводятся уточнения ряда классических неравенств анализа: Харди — Литтльвуда, Гильберта и др.

В третьей главе излагается теория шкал банаховых пространств, развитая в основном в работах С. Г. Крейна и Ю. И. Петунина. Подготовительный материал для нее содержится в первой главе. Важные свойства шкал и, в частности, их почти интерполяционные свойства приведены также в четвертой главе. В последнем параграфе главы детально исследуются свойства классической шкалы пространств Гёльдера, важной для приложений.

В четвертой главе подробно описываются два метода построения интерполяционных пространств, получивших наибольшее число приложений: метод комплексной интерполяции, предложенный независимо А. П. Кальдероном и Ж. Л. Лионсом и глубоко развитый А. П. Кальдероном, и метод констант и средних Ж. Л. Лионса и Ж. Петре. Последний метод изложен в более общей форме, которую он приобрел в работах В. И. Дмитриева (который принимал самое активное участие в написании соответствующего параграфа). Четвертая глава может читаться независимо от второй и третьей.

В книгу не включена теория интерполяции в пространствах гладких функций и ее приложения. Эта теория развивалась под влиянием работ С. Л. Соболева, С. М. Никольского, их учеников и последователей по теоремам вложения. Абстрактная теория не сразу и не легко поднялась до уровня конкретных теорем вложения, полученных специальными средствами. Однако сейчас такая теория создана. Для ее изложения, по-видимому, требуется еще одна книга. Частично с ней можно познакомиться по книге: Butzer P. E., Berens H. Semigroups of Operators and Approximation, Berlin, Springer-Verlag, 1967. С большой полнотой она изложена в вышедшей в ГДР книге: Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB, Berlin, Deutsch. Verl. Wiss., 1977 *). С приложениями этой теории к исследованию краевых задач для уравнений в частных производных можно познакомиться по книге Ж. Л. Лионса и Е. Мадженеса «Неоднородные граничные задачи и их приложение» и по упоминавшейся книге Х. Трибеля. В конце книги мы поместили библиографию и по указанному разделу теории интерполяции.

Как отмечалось выше, отдельные места книги были написаны В. И. Дмитриевым. Неоценимую помощь оказал И. Я. Шнейберг. Он принял участие в написании § 1 гл. IV и прочел значительную часть книги. Его критические замечания позволили устранить ряд неточностей и улучшить некоторые доказательства. Им обоим авторы выражают свою искреннюю благодарность.

Наконец, мы благодарим всех участников Воронежского семинара по теории интерполяции линейных операторов и, в частности, М. Ш. Бравермана, А. А. Дмитриева, Е. А. Павлова, П. А. Кучмента и А. А. Седаева за постоянную помощь в работе над книгой.

---

*) Авторы благодарны проф. Х. Трибелю, представившему в их распоряжение рукопись своей книги.

Авторы

ГЛАВА I

ВЛОЖЕННЫЕ, ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Вложение банаховых пространств

1. Вложенные банаховы пространства.

Определение 1.1. Будем говорить, что *банахово пространство E_1 вложено в банахово пространство E_0*, если:

1°. Из $x \in E_1$ следует, что $x \in E_0$.

2°. Пространство E_0 индуцирует на E_1 структуру векторного пространства, совпадающую со структурой векторного пространства E_1.

3°. Существует такая константа C_{01}, что

$$\|x\|_{E_0} \leqslant C_{01} \|x\|_{E_1} \tag{1.1}$$

для всех $x \in E_1$.

Наименьшее возможное значение константы C_{01} в неравенстве (1.1) называется *константой вложения E_1 в E_0*.

Иногда термин «вложение» употребляется в более широком смысле. Вместо условий 1° и 2° требуется, чтобы существовало инъективное линейное отображение j (оператор вложения), переводящее пространство E_1 в пространство E_0, и тогда условие (1.1) записывается в виде $\|jx\|_{E_0} \leqslant C_{01} \|x\|_{E_1}$.

В такой ситуации мы всегда будем отождествлять пространство E_1 с его образом jE_1.

Условие 3° можно формулировать в эквивалентной форме: если $x_n \to x$ в E_1, то $x_n \to x$ и в E_0. В таком виде определение вложения переносится на линейные топологические пространства, и при этом говорят, что пространство E_1 алгебраически и топологически вложено в пространство E_0.

Определение 1.2. Пространство E_1 *плотно вложено в E_0*, если кроме 1°—3° выполнено:

4°. Множество E_1 плотно в E_0.

Пространство E_1 *компактно вложено в* E_0, если, кроме 1°—3°, выполнено:

5°. Всякое ограниченное в норме пространства E_1 множество относительно компактно в E_0.

Будем в дальнейшем обозначать вложение пространства E_1 в E_0 символом $E_1 \subset E_0$, считая, что знак $\subset$ означает не только теоретико-множественное включение, но и вложение, обладающее свойствами 2° и 3°.

Если пространство E_1 вложено в E_0, то на E_1 можно ввести новую норму:

$$\|x\|^*_{E_1} = C_{01}\|x\|_{E_1}.$$

Тогда пространство E^*_1, наделенное этой нормой, изоморфно E_1 и

$$\|x\|_{E_0} \leqslant \|x\|^*_{E_1}.$$

В связи с этим введем

Определение 1.3. Будем говорить, что *пространство E_1 нормально вложено в пространство* E_0, если E_1 плотно в E_0 и константа вложения C_{01} не превосходит единицы, т. е.

$$\|x\|_{E_0} \leqslant \|x\|_{E_1}.$$

Рассмотрим некоторые примеры нормально вложенных банаховых пространств.

Пусть $E_0 = C(0, 1)$ — пространство непрерывных функций, а $E_1 = C^{(1)}(0, 1)$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций. Тогда $C^{(1)}(0, 1)$ нормально вложено в $C(0, 1)$, так что $C^{(1)}(0,1) \subset C(0, 1)$ и

$$\|x\|_{C(0,1)} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \leqslant \|x\|_{C^{(1)}(0,1)} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|.$$

Кроме того, в силу теоремы Вейерштрасса множество M алгебраических многочленов плотно в пространстве $C(0, 1)$, следовательно, $C^{(1)}(0, 1) \supset M$ также плотно в $C(0, 1)$. Наконец, в силу теоремы Арцела пространство $C^{(1)}(0, 1)$ компактно вложено в пространство $C(0, 1)$.

Аналогично показывается, что пространство $C^{(n)}(0, 1)$ n раз непрерывно дифференцируемых функций нормально и компактно вложено в пространство $C^{(m)}(0, 1)$, когда $n > m$.

Другой пример нормально вложенных пространств представляют пространства L_p.

Пусть G — ограниченная область n-мерного пространства. Рассмотрим пространство L_p, состоящее из вещественнозначных или комплекснозначных функций, суммируемых с p-й степенью в области G $(1 \leqslant p < \infty)$. Обозначим через L^α пространство L_p с $p = \frac{2}{1-\alpha}$, в котором введена норма по формуле

$$\|x\|_{L^\alpha} = (\operatorname{mes} G)^{\frac{\alpha-1}{2}} \|x\|_{L_p}.$$

Пространство L^β нормально вложено в пространство L^α, если $\beta > \alpha$. Действительно, $L^\alpha \supset L^\beta$ при $\alpha < \beta$ и по неравенству Гёльдера

$$\|x\|_{L^\alpha} = (\operatorname{mes} G)^{\frac{\alpha-1}{2}} \left(\int_G |x(t)|^{\frac{2}{1-\alpha}} dt \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{mes} G)^{\frac{\alpha-1}{2}} (\operatorname{mes} G)^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \left(\int_G |x(t)|^{\frac{2}{1-\beta}} dt \right)^{\frac{1-\beta}{2}} =$$

$$= \|x\|_{L^\beta} \quad (x \in L^\beta).$$

Множество конечнозначных измеримых функций плотно в любом пространстве L^α $(-1 \leqslant \alpha < 1)$, поэтому L^β плотно в L^α.

Нетрудно проверить, что вложение L^β в L^α не обладает свойством компактности.

Аналогичным образом показывается, что пространство последовательностей l_p нормально вложено в l_q при $p < q$.

Следует иметь в виду следующее обстоятельство: пространство E_1 может быть плотно вложено в пространство E_0, однако замыкание шара пространства E_1 в пространстве E_0 может не содержать внутренних точек в смысле нормы пространства E_0. Более того, хорошо известно утверждение:

Лемма 1.1. *Если банахово пространство E_1 вложено в банахово пространство E_0 и не совпадает с ним, то* *замыкание в E_0 любого шара пространства E_1 нигде не плотно в пространстве E_0.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть замыкание $\overline{S}_1^0$ единичного шара S_1 пространства E_1 содержит шар $\sigma_{2r}(x_0)$ с центром в точке x_0 и радиуса $2r$ (в смысле нормы E_0). Тогда точка $\frac{y-x_0}{2} \in \overline{S}_1^0$, где $y \in \sigma_{2r}(x_0)$, пробегает шар σ_r с центром в нуле. Таким образом, замыкание любого шара $\overline{S}_k^0$ содержит шар σ_{kr}. Пусть z — любой элемент σ_r. Тогда найдется $x_1 \in S_1$, такой, что $\|z - x_1\|_{E_0} \leqslant r/2$. Отсюда следует, что найдется $x_2 \in S_{1/2}$, такой, что $\|z - x_1 - x_2\|_{E_0} \leqslant r/4$. Продолжая этот процесс дальше, строим последовательность элементов $x_n \in S_{2^{1-n}}$ таких, что $\|z - x_1 - \ldots - x_n\|_{E_0} \leqslant r2^{-n}$. Тогда $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, и ряд сходится в норме E_1. Поэтому $z \in E_1$. Мы пришли к противоречивому выводу, что $E_1 = E_0$.

2. Относительное пополнение. Пусть E_0 и E_1 — пара вложенных банаховых пространств ($E_1 \subset E_0$). Обозначим через E_{01} совокупность всех элементов из E_0, являющихся пределами в E_0 последовательностей элементов из E_1, ограниченных по норме E_1:

$$x \in E_{01} : x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ (в } E_0) \quad \text{и} \quad \|x_n\|_{E_1} \leqslant R. \tag{1.2}$$

Очевидно, что E_{01} будет линейным многообразием в E_0. В нем можно ввести норму, полагая

$$\|x\|_{01} = \inf R,$$

где inf берется по тем R, для которых существуют последовательности x_n со свойством (1.2). Проверим, что величина $\|x\|_{01}$ обладает свойствами нормы. Для этого заметим, что из (1.1) следует, что $\|x_n\|_{E_0} \leqslant C_{01}\|x_n\|_{E_1} \leqslant C_{01}R$, и так как $x_n \to x$ в E_0, то и $\|x\|_{E_0} \leqslant C_{01}R$. Отсюда вытекает, что $\|x\|_{E_0} \leqslant C_{01}\|x\|_{01}$ и, в частности, что $\|x\|_{01} = 0$ только при $x = 0$. Очевидно, что $\|\lambda x\|_{01} = |\lambda|\,\|x\|_{01}$. Далее, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ обладают свойствами (1.2) по отношению к элементам x и y соответственно с константами R и R_1, то

$$x_n + y_n \to x + y \text{ в } E_0 \quad \text{и} \quad \|x_n + y_n\|_{E_1} \leqslant R + R_1.$$

Отсюда получаем, что $\|x+y\|_{01}\leqslant R+R_1$, а затем, переходя к inf в правой части, что $\|x+y\|_{01}\leqslant\|x\|_{01}+\|y\|_{01}$.

Отметим, что при $x\in E_1$ можно выбрать $x_n\equiv x$, и из определения нормы в E_{01} будет следовать, что $\|x\|_{01}\leqslant\leqslant\|x\|_{E_1}$.

Построению пространства E_{01} можно придать следующий геометрический смысл. Пусть $x\in E_{01}$ и $\|x\|_{01}=r$. Тогда, по определению, элемент x принадлежит замыканию в пространстве E_0 любого шара пространства E_1 с радиусом $R>r$. Беря последовательность $R_k\to r$ и выбирая для каждого R_k соответствующую последовательность элементов из E_1 со свойством (1.2), мы можем построить последовательность $\{x_k'\}\subset E_1$ такую, что $x_k'\to x$ в E_0 и $\|x_k'\|_{E_1}\to r$ при $k\to\infty$. Тогда последовательность $\bar{x}_k==rx_k'(\|x_k'\|_{E_1})^{-1}\to x$ в E_0 и $\|\bar{x}_k\|_{E_1}=r$. Таким образом, элемент x принадлежит замыканию в E_0 шара (и даже сферы) радиуса r пространства E_1 и не принадлежат замыканию шаров меньшего радиуса.

Итак, шар пространства E_{01} является замыканием в E_0 шара пространства E_1 того же радиуса.

Докажем, что нормированное пространство E_{01} полно.

Пусть $\{x^{(k)}\}$ — фундаментальная последовательность в E_{01}; тогда в силу неравенства $\|x\|_{E_0}\leqslant C_{01}\|x\|_{01}$ она фундаментальна в E_0. Пусть $x^{(k)}\to x$ в E_0. Для любого $\varepsilon>0$ и достаточно больших m и l $\|x^{(m)}-x^{(l)}\|_{01}\leqslant\varepsilon$. Это означает, что $x^{(m)}-x^{(l)}$ принадлежит замыканию в E_0 шара радиуса ε пространства E_1. Но $x^{(m)}-x^{(l)}\to x^{(m)}-x$ в E_0 при $l\to\infty$, поэтому этому же замыканию принадлежит элемент $x^{(m)}-x$, т. е. $\|x^{(m)}-x\|_{01}\leqslant\varepsilon$. Итак, $x^{(k)}\to x$ в E_{01} при $k\to\infty$, пространство E_{01} — полно.

Подводя итоги, можно сказать, что мы построили банахово пространство E_{01} такое, что $E_1\subset E_{01}\subset E_0$; при этом $\|x\|_{01}\leqslant\|x\|_{E_1}$ $(x\in E_1)$ и

$$\|x\|_{E_0}\leqslant C_{01}\|x\|_{01} \quad (x\in E_{01}). \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует, что в случае, когда E_1 нормально вложено в E_0, то и E_{01} нормально вложено в E_0.

Банахово пространство E_{01} называется *относительным пополнением пространства E_1 относительно пространства E_0.*

Важными являются следующие факты:

Лемма 1.2. *Если пространство E_1 не совпадает с E_0, то и его относительное пополнение E_{01} не совпадает с E_0.*

Доказательство. По лемме 1.1 замыкание в E_0 любого шара S_r пространства E_1 нигде не плотно в E_0. Поэтому $E_{01}=\bigcup\limits_{r>0} S_r$ является множеством первой категории в пространстве E_0 и, следовательно, не совпадает с E_0.

Лемма 1.3. *Пополнение $\hat{E}_{01}$ пространства E_{01} относительно пространства E_0 совпадает с самим пространством E_{01}.*

Доказательство. Если $y\in\hat{E}_{01}$, то найдется такая последовательность элементов $y_k\in E_{01}$, что $\|y_k\|_{01}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$ и $y_k\to y$ в E_0. Для каждого y_k существует последовательность $x_n^{(k)}\to y_k$ в E_0 при $n\to\infty$ и такая, что $\|x_n^{(k)}\|_{E_1}=\|y_k\|_{E_{01}}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$. Но тогда можно сконструировать последовательность $x_{n_k}^{(k)}$ так, что $x_{n_k}^{(k)}\to y$ в E_0 и $\|x_{n_k}^{(k)}\|_{E_1}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$, и следовательно, $y\in E_{01}$. Кроме того, из предыдущего следует, что $\|y\|_{01}\leqslant\|y\|_{\hat{E}_{01}}$, и так как всегда справедливо обратное неравенство (см. (1.3)), то $\|y\|_{01}=\|y\|_{\hat{E}_{01}}$. Лемма доказана.

Простейший пример относительного пополнения получается, если положить $E_0=L_1(0, 1)$, $E_1=C(0, 1)$. Тогда легко убедиться, что $E_{01}=L_\infty(0, 1)$. Аналогично, если $E_0=C(0, 1)$ и $E_1=C_1(0, 1)$, то $E_{01}=H_1(0, 1)$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Из определения относительного пополнения вытекают следующие утверждения о связи между пространствами E_1 и E_{01}.

Лемма 1.4. *Для того чтобы пространство E_1 было изометрично вложено в пространство E_{01}, необходимо и достаточно, чтобы шар пространства E_1 был замкнутым (в E_1) в топологии, индуцируемой нормой пространства E_0.*

Доказательство. Если для некоторого $x\in E_1$ выполняется неравенство $\|x\|_{01}<\|x\|_{E_1}$, то существует последовательность $x_n\to x$ в E_0, такая, что $\|x_n\|_{E_1}=\|x\|_{01}=a$. Это означает, что шар радиуса a в E_1 не замкнут по норме пространства E_0. Его предельная точка x имеет норму больше a.

Обратно, если шар радиуса a не замкнут, то найдется точка x с $\|x\|_{E_1} > a$ и последовательность $x_n \to x$ в E_0 такая, что $\|x_n\|_{E_1} \leqslant a$. Но тогда $\|x\|_{01} \leqslant a < \|x\|_{E_1}$.

Лемма 1.5. *Для того чтобы пространство E_1 было замкнутым подмножеством пространства E_{01}, необходимо и достаточно, чтобы замыкание шара пространства E_1 в топологии, индуцированной в E_1 нормой пространства E_0, было ограниченным множеством в пространстве E_1.*

В силу теоремы Банаха пространство E_1 будет замкнутым в E_{01} тогда и только тогда, когда нормы $\|x\|_{E_1}$ и $\|x\|_{01}$ на E_1 эквивалентны. После этого замечания доказательство леммы 1.5 проводится совершенно аналогично доказательству леммы 1.4.

Определение 1.4. Пространство E_1 назовем *полным относительно пространства E_0*, если пространство E_{01} изометрически совпадает с пространством E_1.

В силу леммы 1.3 пространство E_{01} полно относительно пространства E_0. В частности, пространство $L_\infty(0, 1)$ полно относительно пространства $L_1(0, 1)$.

Лемма 1.6. *Если $E_1 \subset F \subset E_0$, то пополнение $E_{F,1}$ пространства E_1 относительно пространства F вложено в пространство E_{01} с константой вложения, не превосходящей единицы. Пополнение пространства $E_{F,1}$ относительно E_0 изометрически совпадает с E_{01}.*

Доказательство. Если $x \in E_{F,1}$, то существует последовательность $x_n \in E_1$ с $\|x_n\|_{E_1} = \|x\|_{E_{F,1}}$ такая, что $x_n \to x$ в F. В силу вложения $F \subset E_0$ тогда $x_n \to x$ в E_0, и следовательно, $x \in E_{01}$ и $\|x\|_{E_{01}} \leqslant \|x\|_{E_{F,1}}$.

Далее, единичный шар пополнения пространства $E_{F,1}$ относительно пространства E_0 представляет собой замыкание в пространстве E_0 единичного шара пространства $E_{F,1}$, в последнем же шаре расположен единичный шар пространства E_1 плотно относительно нормы F, а значит, и относительно нормы E_0. Таким образом, единичный шар пополнения пространства $E_{F,1}$ относительно E_0 совпадает с замыканием в E_0 единичного шара пространства E_1, т. е. с единичным шаром пространства E_{01}.

Следствие 1. *Если пространство E_1 полно относительно E_0, то оно полно относительно F.*

Например, пространство $L_\infty(0, 1)$ полно относительно всех пространств $L_p(0, 1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Следствие 2. *Если пространство $E_{F,1}$ полно относительно E_0, то пополнение $E_{F,1}$ совпадает с пополнением E_{01}.*

§ 2. Сопряженные пространства к вложенным банаховым пространствам

1. Сопряженные пространства и относительное пополнение. Если пространство E_1 вложено в пространство E_0, то суже́ние на E_1 всякого непрерывного линейного функционала $f(x)$ на E_0 естественно порождает линейный функционал на E_1. Этот функционал непрерывен в норме пространства E_1. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{E_0'} \|x\|_{E_0} \leqslant C_{01} \|f\|_{E_0'} \|x\|_{E_1}.$$

Таким образом, получается линейное отображение пространства E_0' в пространство E_1'. Если E_1 не плотно в E_0, то существует ненулевой функционал из E_0', который аннулируется на E_1 и, следовательно, отображается в нуль. В этом случае отображение не будет инъективным. Если же E_1 плотно в E_0, то отображение инъективно, и пространство E_0' можно считать вложенным в пространство E_1'. При этом константа вложения не превосходит C_{01}.

Величина

$$\sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_1}} = \|f\|_{E_1'} \qquad (f \in E_0')$$

будет полунормой на E_0' в первом случае и нормой пространства E_1' — во втором.

Дадим теперь другую характеристику относительного пополнения E_{01}.

Лемма 2.1. *Пополнение E_{01} пространства E_1 относительно пространства E_0 состоит из всех элементов пространства E_0, порождающих по формуле $x(f) = f(x)$ функционалы на E_0', ограниченные по полунорме $\|f\|_{E_1'}$.*

Доказательство. Если $x \in E_{01}$, то существует такая последовательность x_n, что $x_n \to x$ в E_0 и $\|x_n\|_{E_1} = \|x\|_{01}$. Пусть $f \in E_0'$; тогда $f(x_n) \to f(x)$ и $|f(x_n)| \leqslant$

$\leqslant \|f\|_{E_1'} \cdot \|x_n\|_{E_1} = \|f\|_{E_1'} \|x\|_{01}$. Отсюда следует, что и $|f(x)| \leqslant \leqslant \|f\|_{E_1'} \|x\|_{01}$. Таким образом, функционал $x(f)$ ограничен на E'_0 по полунорме $\|f\|_{E_1'}$, и его норма не превосходит $\|x\|_{01}$.

Пусть теперь $x \in E_0$ и $|x(f)| = |f(x)| \leqslant C\|f\|_{E_1'}$ $(f \in E_0')$. Покажем, что x принадлежит замыканию в E_0 шара S_C радиуса C пространства E_1. В противном случае найдется функционал $f_0 \in E_0'$ такой, что $\sup\limits_{y \in S_C} |f_0(y)| < f_0(x)$ или $C\|f_0\|_{E_1'} < f_0(x)$, что противоречит исходному предположению. Итак, $x \in E_{01}$ и $\|x\|_{10} \leqslant C$.

Из доказательства леммы вытекает

Следствие 1. *Норма функционала $x(f)$ относительно полунормы $\|f\|_{E_1'}$ равна $\|x\|_{01}$:*

$$\|x\|_{01} = \sup_{f \in E_0', \|f\|_{E_1'} \leqslant 1} |f(x)|. \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Линейное множество M' непрерывных линейных функционалов на банаховом пространстве E называется *нормативным*, если

$$\|x\|_E = \sup_{f \in M', \|f\|_{E'} \leqslant 1} |f(x)| \quad (x \in E).$$

Из формулы (2.1) и леммы 1.4 вытекает

Теорема 2.1. *Для того чтобы сужения на E_1 всех функционалов из E_0' образовывали нормативное множество для пространства E_1, необходимо и достаточно, чтобы пространство E_1 было изометрически вложено в пространство E_{01} или, что то же, чтобы шар пространства E_1 был замкнутым в E_1 в топологии, индуцируемой нормой пространства E_0.*

2. Сопряженные пространства к плотно вложенным пространствам. Если E_1 плотно вложено в E_0, то, как указывалось выше, E_0' вложено в E_1', однако это вложение может не быть плотным. Например, пространство $l_1 = E_1$ нормально вложено в пространство $c_0 = E_0$. Сопряженные к ним пространства $E_0' = l_1$ и $E_1' = l_\infty$ не будут плотно вложенными. Действительно, элемент $(1, 1, \ldots \ldots, 1, \ldots) \in l_\infty$ отстоит от линейного многообразия l_1 на расстояние 1.

Напомним, что линейное многообразие $M' \subset E_1'$ называется *тотальным*, если из условия $f(x_0) = 0$ ($x_0 \in E_1$) для всех $f \in M'$ вытекает, что $x_0 = \theta$ *). Если E_1 плотно в E_0, то пространство E_0' является тотальным линейным многообразием в E_1'. Действительно, если $x_0 \in E_1$ и $x_0 \neq 0$, то $x_0 \in E_0$, и поэтому найдется функционал $f_0 \in E_0'$ такой, что $f_0(x_0) = \|x_0\|_{E_0} \neq 0$.

Если пространство E_1 рефлексивно, то всякое тотальное многообразие плотно в E_1', поэтому в этом случае E_0' плотно вложено в E_1'.

Теорема 2.2. *Если пространство E_1 плотно вложено в пространство E_0, то пространство E_0' полно относительно пространства $E_1^{\cdot}$.*

Доказательство. Если f принадлежит пополнению $(E_0')_1$ пространства E_0' относительно пространства E_1', то найдется последовательность $f_n \in E_0'$ такая, что $f_n \to f$ в E_1' и $\|f_n\|_{E_0'} = \|f\|_{(E_0')_1}$. Тогда для любого $x \in E_1$ выполнено соотношение $f_n(x) \to f(x)$. Последовательность линейных функционалов $f_n \in E_0'$ равномерно ограничена и сходится к функционалу f на плотном в E_0 множестве E_1. По теореме Банаха — Штейнгауза отсюда вытекает, что $f \in E_0'$ и последовательность f_n слабо сходится на E_0 к f. Далее $\|f\|_{E_0'} \leqslant \leqslant \underline{\lim} \|f_n\|_{E_0'} = \|f\|_{(E_0')_1}$. Так как при пополнении всегда справедливо противоположное неравенство, то $\|f\|_{E_0'} = \|f\|_{(E_0')_1}$.

Теорема 2.3. *Рефлексивное пространство E_1 полно относительно любого другого пространства E_0, в которое оно вложено.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что E_1 плотно в E_0, так как в противном случае пространство E_0 можно заменить на пространство, полученное замыканием E_1 в E_0, и от этого пополнение

*) θ — нуль-элемент пространства.

E_{01} не изменится. При этом предположении из рефлексивности E_1 следует, что пространство E_0' плотно вложено в пространство E_1'. Тогда по теореме 2.2 пространство $E_1'' = E_1$ полно относительно пространства E_0'', и в силу следствия 1 из леммы 1.3 пространство E_1 полно относительно пространства E_0. Теорема доказана.

Если пространство E_0' плотно вложено в E_1', то оно является нормативным множеством на E_1, поэтому из леммы 2.1 и формулы (2.1) вытекает утверждение:

Лемма 2.2. *Если E_1 плотно вложено в E_0 и E_0' плотно вложено в E_1', то E_1 изометрически вложено в E_{01}. Пространство E_{01} естественно вкладывается изометрически в пространство E_1'', и при естественном отождествлении можно считать, что $E_{01} = E_0 \cap E_1''$.*

Если теперь пространство E_0' не плотно вложено в пространство E_1', то можно рассмотреть его замыкание $\overset{0}{E_1'}$ в E_1'. Это будет подпространство пространства E_1'. Лемму 2.1 и следствие 1 можно для этого случая переформулировать так.

Лемма 2.3. *Если E_1 плотно в E_0, то пространство E_{01} состоит из всех элементов x из E_0, порождающих по формуле $x(f) = f(x)$ непрерывные линейные функционалы на пространстве $\overset{0}{E_1'}$. Отображение $x = x(f)$ является изометрическим вложением пространства E_{01} в сопряженное пространство $(\overset{0}{E_1'})'$.*

Определение 2.2. Если E_1 плотно в E_0 и при естественном вложении пространство E_1 совпадает со всем пространством $(\overset{0}{E_1'})'$, то пара вложенных пространств E_1 и E_0 называется *рефлексивной*.

Из леммы 2.3 ясно, что для рефлексивной пары E_0, E_1 пространство E_1 полно относительно пространства E_0.

§ 3. Промежуточные банаховы пространства

1. Сумма и пересечение пространств банаховой пары.

Определение 3.1. *Банаховой парой* называются два банаховых пространства A и B, алгебраически и топологически вложенные в некоторое отделимое топологическое линейное пространство $\mathscr{A}$.

Это определение означает, что A и B есть линейные многообразия в $\mathscr{A}$, и топология, индуцируемая на A и B топологией пространства $\mathscr{A}$, слабее исходных топологий нормированных пространств A и B.

Очевидно, что пару вложенных банаховых пространств E_0 и E_1, когда $E_1 \subset E_0$, можно рассматривать как частный вид банаховой пары, где роль топологического пространства $\mathscr{A}$ играет банахово пространство E_0.

С произвольной банаховой парой можно каноническим образом связать пару вложенных банаховых пространств следующим образом:

1. Пространство $A \cap B$ состоит из элементов, общих для A и B; в нем вводится норма по формуле

$$\|x\|_{A \cap B} = \max(\|x\|_A, \|x\|_B) \qquad (x \in A \cap B). \tag{3.1}$$

2. Пространство $A+B$ образовано элементами вида $x=u+v$, где $u \in A$, $v \in B$, и наделено нормой

$$\|x\|_{A+B} = \inf\{\|u\|_A + \|v\|_B\}, \tag{3.2}$$

где inf берется по всем элементам $u \in A$ и $v \in B$, сумма которых равна $x: x=u+v$.

Первое из этих пространств называется *пересечением пространств банаховой пары*, второе — *суммой пространств банаховой пары*.

Покажем, что эти пространства являются банаховыми. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — фундаментальная последовательность из пространства $A \cap B$. В силу определения нормы (3.1) последовательность $\{x_n\}$ будет фундаментальной как в пространстве A, так и в пространстве B. Из полноты пространств A и B следует, что $x_n \to x_A$ (в пространстве A) и $x_n \to x_B$ (в пространстве B). Так как пространство A топологически вложено в $\mathscr{A}$, то x_n сходится к x_A в топологии пространства $\mathscr{A}$; аналогично $x_n \to x_B$ в топологии $\mathscr{A}$. Отсюда вытекает равенство $x_A = x_B = x$, ибо топология $\mathscr{A}$ отделима. Мы получаем таким образом, что $x_n \to x \in A \cap B$ в нормах $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$, поэтому $x_n \to x$ и в норме пространства $A \cap B$.

Для доказательства полноты пространства $A+B$ мы построим изометричное ему банахово пространство. С этой целью в прямом произведении $A \times B$ пространств

A и B с нормой $\|(u, v)\|_{A\times B}=\|u\|_A+\|v\|_B$ рассмотрим подпространство L, состоящее из элементов вида $w=(z, -z)$, $z\in A\cap B$, и фактор-пространство $A\times B/L$. Если два элемента (u, v) и (u_1, v_1) принадлежат одному классу смежности по L, то $u+v=u_1+v_1$ и, следовательно, всему этому классу смежности отвечает один элемент $x=u+v\in\in A+B$. Обратно, для любого элемента $x\in A+B$ пары (u, v), отвечающие всевозможным представлениям $x=u+v$, образуют класс смежности пространства $A\times B$ по подпространству L. Далее, из определения нормы (3.2) видно, что норма элемента $x\in A+B$ равна норме соответствующего класса в фактор-пространстве $A\times B/L$. Таким образом, $A+B$ изометрично $A\times B/L$. Как известно (см. [3], Сводка результатов, § 5, 5), фактор-пространство банахова пространства по его подпространству (замкнутому) является банаховым пространством и, следовательно, таким же будет пространство $A+B$. Из сказанного видно, что в случае, когда $A\cap B=0$, $A+B$ изометрично прямому произведению пространств A и B.

Заметим, что каждое из пространств A и B содержится в пространстве $A+B$ и, более того, в силу неравенств

$$\|x\|_{A+B}\leqslant\|x\|_A+\|\theta\|_B=\|x\|_A \text{ при } x\in A, \tag{3.3}$$

и

$$\|x\|_{A+B}\leqslant\|\theta\|_A+\|x\|_B=\|x\|_B \text{ при } x\in B, \tag{3.4}$$

пространства A и B вложены в пространство $A+B$ и константы вложения не превосходят единицы. Из предыдущих неравенств следует, что при $x\in A\cap B$ справедливо неравенство $\|x\|_{A+B}\leqslant\|x\|_{A\cap B}$, которое говорит о вложении пространства $A\cap B$ в пространство $A+B$.

В случае пары вложенных банаховых пространств $E_1\subset E_0$ пространство $E_0\cap E_1$ по запасу элементов совпадает с E_1, а пространство E_0+E_1 — с E_0. Более того, эти пространства соответственно изоморфны. В самом деле, если

$$\|x\|_{E_0}\leqslant C_{01}\|x\|_{E_1},$$

то при $x\in E_1$

$$\|x\|_{E_1}\leqslant\max(\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1})=\|x\|_{E_0\cap E_1}\leqslant\max(1, C_{01})\|x\|_{E_1},$$

и при $x \in E_0$

$$\min\left\{1, \frac{1}{C_{01}}\right\} \|x\|_{E_0} \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{C_{01}}\right\} \inf_{x=u+v} (\|u\|_{E_0} + \|v\|_{E_0}) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{x=u+v} (\|u\|_{E_0} + \|v\|_{E_1}) = \|x\|_{E_0+E_1} \leqslant \|x\|_{E_0}$$

(последнее в силу (3.3) и (3.4)). Таким образом, $E_0 \cap E_1$ и E_0+E_1 образуют пару вложенных пространств, изоморфных соответственно пространствам E_1 и E_0.

Рассмотрим геометрическую структуру единичных шаров $S_1(A \cap B)$ и $S_1(A+B)$ пространств $A \cap B$ и $A+B$. Нетрудно видеть, что $S_1(A \cap B)$ является пересечением единичных шаров $S_1(A)$ и $S_1(B)$. В самом деле, если $x \in S_1(A \cap B)$, то $\|x\|_A \leqslant 1$, $\|x\|_B \leqslant 1$, поэтому $x \in S_1(A)$ и $x \in S_1(B)$. Обратно, если $x \in S_1(A) \cap S_1(B)$, то $\|x\|_A \leqslant 1$, $\|x\|_B \leqslant 1$, и поэтому $\|x\|_{A \cap B} = \max\{\|x\|_A, \|x\|_B\} \leqslant 1$.

Открытый шар $S_1^0(A+B)$ совпадает с выпуклой оболочкой открытых шаров $S_1^0(A)$ и $S_1^0(B)$ пространств A и B:

$$S_1^0(A+B) = \operatorname{conv}(S_1^0(A), S_1^0(B)). \tag{3.5}$$

Действительно, пусть $\|x\|_{A+B} < 1$; тогда существуют такие u и v, что $x = u+v$ и $\|u\|_A + \|v\|_B < 1$. Элементы $u_1 = (\|u\|_A + \|v\|_B) \dfrac{u}{\|u\|_A}$ и $v_1 = (\|u\|_A + \|v\|_B) \dfrac{v}{\|v\|_B}$ принадлежат шарам $S_1^0(A)$ и $S_1^0(B)$ соответственно. Далее

$$x = u + v = \mu u_1 + (1-\mu) v_1, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{\|u\|_A}{\|u\|_A + \|v\|_B}$$

и, следовательно, $x \in \operatorname{conv}(S_1^0(A), S_1^0(B))$. Обратно, из включения $x \in \operatorname{conv}(S_1^0(A), S_1^0(B))$ следует, что $x = \mu u + (1-\mu)v$ ($u \in S_1^0(A)$, $v \in S_1^0(B)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$), и, значит,

$$\|x\|_{A+B} \leqslant \|\mu u\|_A + \|(1-\mu)v\|_B < 1,$$

т. е. $x \in S_1^0(A+B)$.

Отметим еще некоторые свойства суммы и пересечения пространств банаховой пары.

Лемма 3.1. *Для любого $x \in A$ имеет место формула*

$$d_A(x, A \cap B) = d_{A+B}(x, B), \tag{3.6}$$

где через $d_E(x, L)$ обозначено расстояние в пространстве E от элемента x до линейного многообразия L.

Доказательство. Из неравенства (3.3) и включения $B \supset A \cap B$ непосредственно следует, что $d_A(x, A \cap B) \geqslant d_{A+B}(x, B)$. Установим обратное неравенство. Если $y \in B$, то $x - y \in A + B$ и

$$\|x - y\|_{A+B} = \inf_{x-y=u+v} (\|u\|_A + \|v\|_B) \geqslant$$
$$\geqslant \inf_{x-y=u+v} \|u\|_A = \inf_{x-y=u+v} \|x - y - v\|_A. \tag{3.7}$$

Так как $x \in A$ и $x - y - v \in A$, то $y + v \in A$. С другой стороны, $y \in B$ и $v \in B$, и следовательно, $y + v \in B$. Тогда из (3.7) следует, что

$$\|x - y\|_{A+B} \geqslant \inf_{z \in A \cap B} \|x - z\|_A = d_A(x, A \cap B).$$

Переходя в левой части к inf по $y \in B$, получаем (3.6).

Следствие 1. *Пересечение $A \cap B$ плотно в A тогда и только тогда, когда B плотно в $A + B$.*

Действительно, если $A \cap B$ плотно в A, то $d_A(x, A \cap B) = 0$, а значит, и $d_{A+B}(x, B) = 0$ при любом $x \in A$. Но тогда $d_{A+B}(x, B) = 0$ и при любом $x \in A + B$, т. е. B плотно в $A + B$. Обратное очевидно.

Следствие 2. *Если пересечение $A \cap B$ плотно и в A и в B, то оно плотно и в $A + B$.*

В самом деле, $A \cap B$ плотно в B, а последнее в силу предыдущего плотно в $A + B$. Так как $\|\cdot\|_{A+B} \leqslant \|\cdot\|_B$, то $A \cap B$ плотно в $A + B$.

Предположим теперь, что $A \cap B$ не плотно в A. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется ненулевой элемент $x \in A$ такой, что $d_A(x, A \cap B) \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|_A$. Из (3.6) тогда получаем, что

$$(1 - \varepsilon)\|x\|_A \leqslant d_{A+B}(x, B) \leqslant \|x\|_{A+B}.$$

Сравнивая это неравенство с (3.3), мы приходим к выводу, что константа вложения пространства A в пространство $A + B$ в этом случае равна единице. Справедливо более глубокое утверждение:

Лемма 3.2. *Если константа вложения пространства A в пространство $A + B$ меньше единицы, то пространство A вложено в пространство B.*

Доказательство. Пусть константа вложения равна $q<1$. Тогда для $x\in A$ с $\|x\|_A<1$ будем иметь $\|x\|_{A+B}<<q$. По определению нормы в пространстве $A+B$ существует представление $x=u_1+v_1$, где $\|u_1\|_A+\|v_1\|_B<q$ и, следовательно, $\|u_1\|_A<q$ и $\|v_1\|_B<q$. Применим те же рассуждения к элементу u_1 и получим для него представление $u_1=u_2+v_2$, где $\|u_2\|_A<q^2$ и $\|v_2\|_B<q^2$. Продолжая этот процесс, придем к равенству

$$x=u_n+\sum_{k=1}^{n} v_k, \quad \text{где} \quad \|u_n\|_A<q^n \text{ и } \|v_k\|_B<q^k.$$

Тогда

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n} v_k\right\|_{A+B}=\|u_n\|_{A+B}\leqslant\|u_n\|_A<q^n\to 0.$$

С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится в пространстве B. Учитывая, что B вложено в $A+B$, мы приходим к выводу, что $x=\sum_{k=1}^{\infty} v_k\in B$. Значит, пространство A содержится в B.

Из предыдущего следует, что справедливо неравенство

$$\|x\|_B\leqslant\frac{q}{1-q}\|x\|_A,$$

т. е. A вложено в B.

Последнюю часть доказательства леммы можно было бы опустить, если иметь в виду следующее утверждение:

Лемма 3.3. *Если в банаховой паре A и B пространство A есть линейное многообразие в B, то A вложено в B.*

Доказательство. Если A содержится в B, то линейные пространства B и $A+B$ совпадают. В силу (3.4) $\|x\|_{A+B}\leqslant\|x\|_B$. Так как пространства B и $A+B$ являются банаховыми, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе справедливо неравенство $\|x\|_B\leqslant C\|x\|_{A+B}$. Если теперь $x\in A$, то $\|x\|_B\leqslant C\|x\|_{A+B}\leqslant C\|x\|_A$.

Следствие. *Если в банаховой паре A и B пространства A и B совпадают как линейные пространства, то банаховы пространства A и B изоморфны.*

В дальнейшем нам понадобится следующий результат:

Лемма 3.4. *Если для банаховой пары A, B имеется подмножество $M \subset A \cap B$, плотное в A, на котором выполнено неравенство $\|x\|_B \leqslant C\|x\|_A$, то пространство A вложено в пространство B с константой вложения, не превосходящей C.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$. Рассмотрим открытые шары $\|x - x_0\|_A < \frac{1}{2}\|x_0\|_A$ и $\|x\|_A < \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. Они пересекаются, поэтому в их пересечении найдется хотя бы один элемент $x_1 \in M$. Тогда $\|x_0 - x_1\|_A < \frac{1}{2}\|x_0\|_A$ и $\|x_1\|_A < \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. Повторяя такое же рассуждение для элемента $x_0 - x_1$, мы найдем элемент x_2 такой, что $\|x_0 - x_1 - x_2\|_A < 2^{-2}\|x_0\|_A$ и $\|x_2\|_A < 2^{-2}(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. Продолжая этот процесс дальше, получим последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots$ из M такую, что $\left\|x_0 - \sum_1^m x_k\right\|_A < 2^{-m}\|x_0\|_A$ и $\|x_m\|_A < 2^{-m}(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. Тогда $x_0 = \sum_1^\infty x_k$ и $\sum_1^\infty \|x_k\|_A < (1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. По условию теоремы $\sum_1^\infty \|x_k\|_B \leqslant C\sum_1^\infty \|x_k\|_A < C(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$, следовательно, ряд $\sum_1^\infty x_k$ сходится в пространстве B и, в силу вложения A и B в $\mathcal{A}$, его сумма также равна x_0. Значит, $x_0 \in B$ и $\|x_0\|_B \leqslant \sum_1^\infty \|x_k\|_B < C(1+\varepsilon)\|x_0\|_A$. В силу произвольности ε лемма доказана.

Определение 3.2. Две банаховы пары A, B и C, D называются *изоморфными*, если существует изоморфизм пространств $A+B$ и $C+D$, сужения которого на A и B

являются изоморфизмами пространств A и C, B и D соответственно.

2. Сопряженные пространства к сумме и пересечению. Для выяснения структуры сопряженных пространств к сумме и пересечению пространств банаховой пары напомним, что пространством, сопряженным к прямому произведению $A\times B$ банаховых пространств с нормой

$$\|(u, v)\|_{A\times B}=\|u\|_A+\|v\|_B, \tag{3.8}$$

будет пространство $A'\times B'$ с нормой

$$\|(f, g)\|_{A'\times B'}=\max(\|f\|_{A'}, \|g\|_{B'}). \tag{3.9}$$

Аналогично, если в $A\times B$ ввести норму

$$\|(u, v)\|_{A\times B}=\max(\|u\|_A, \|v\|_B), \tag{3.10}$$

то в сопряженном пространстве $A'\times B'$ возникает норма

$$\|(f, g)\|_{A'\times B'}=\|f\|_{A'}+\|g\|_{B'}. \tag{3.11}$$

Заметим, что в обоих случаях двойственность между пространствами $A\times B$ и $A'\times B'$ можно задать соотношением

$$\langle(u, v), (f, g)\rangle=f(u)-g(v). \tag{3.12}$$

В п. 1 мы уже говорили о том, что пространство $A+B$ для банаховой пары A и B изометрично фактор-пространству пространства $A\times B$ с нормой (3.8) по его подпространству L, состоящему из элементов вида $(z, -z)$, где $z\in A\cap B$. Согласно общим теоремам пространство, сопряженное к фактор-пространству, изометрично ортогональному дополнению к подпространству. Выясним, из каких функционалов из $A'\times B'$ состоит ортогональное дополнение $L^\perp$ к L. В силу (3.12), если $(f, g)\in L^\perp$, то $f(z)=-g(z)$ $(z\in A\cap B)$.

Таким образом, пространство $(A+B)'$, сопряженное к сумме $A+B$, изометрично подпространству $L^\perp$ пространства $A'\times B'$ с нормой (3.9), состоящему из всех функционалов (f, g), для которых $f(z)=-g(z)$ при $z\in A\cap B$.

Значение функционала $(f, g)\in L^\perp$ на элементе $x\in A+B$ вычисляется по формуле (3.12), где $x=u+v$ $(u\in A, v\in B)$.

Аналогично, если в пространстве $A\times B$ ввести норму (3.10), то подпространство L будет изометричным пространству $A\cap B$. Сопряженное пространство к подпространству банахова пространства будет изометрично фактор-пространству сопряженного пространства по ортогональному дополнению к подпространству. Таким образом, пространство $(A\cap B)'$, сопряженное к пересечению $A\cap B$, будет изометрично фактор-пространству пространства $A'\times B'$ с нормой (3.11) по подпространству $L^{\perp}$.

Картина значительно упрощается, если предположить, что пересечение $A\cap B$ плотно в каждом из пространств A и B. Как показано в § 2 п. 1, в этом случае пространства A' и B' будут естественно вложенными в пространство $(A\cap B)'$ и, следовательно, будут образовывать банахову пару. Если теперь $(f, g)\in L^{\perp}$, то функционал g совпадает с $-f$ как элемент пространства $(A\cap B)'$ и, так как $f\in A'$ и $f\in B'$, то $f\in A'\cap B'$. Обратно, каждый функционал $f\in A'\cap B'$ порождает пару $(f, -f)\in L^{\perp}$. Норма (f, g) в пространстве $A'\times B'$ с нормой (3.9) совпадает с нормой f в пространстве $A'\cap B'$.

Аналогично, фактор-пространство $A'\times B'/L^{\perp}$ пространства $A'\times B'$ с нормой (3.11) по подпространству $L^{\perp}$, которое, как показано, состоит из пар $(f, -f)$, $f\in A'\cap B'$, изометрично сумме $A'+B'$. Таким образом, мы приходим к утверждению:

Теорема 3.1. *Если пересечение $A\cap B$ плотно в пространствах банаховой пары A и B, то пространства A' и B' образуют банахову пару; сопряженное пространство $(A+B)'$ к сумме A и B изометрично пересечению $A'\cap B'$; сопряженное пространство $(A\cap B)'$ к пересечению A и B изометрично сумме $A'+B'$.*

Выясним еще, как задается двойственность между пространствами $A+B$ и $A'\cap B'$, пространствами $A\cap B$ и $A'+B'$. Если $x\in A+B$ и $f\in A'\cap B'$, то $x=u+v$ $(u\in A,$ $v\in B)$, и согласно (3.12)

$$\langle x, f\rangle = \langle (u, v), \quad (f, -f)\rangle = f(u) + f(v),$$

т. е. функционал $\langle x, f\rangle$ совпадает с линейным распространением функционала f на пространство $A+B$. Если теперь $z\in A\cap B$ и $f\in A'+B'$, то $f=g+h$ $(g\in A', h\in B')$, и согласно (3.12)

$$\langle z, f\rangle = \langle (z, -z), (g, h)\rangle = g(z) - h(-z) = f(z),$$

т. е. $\langle z, f\rangle$ совпадает с сужением функционала f на пересечение $A\cap B$.

3. Промежуточные пространства.

Определение 3.3. Банахово пространство E называется *промежуточным* для пространств банаховой пары A, B, если имеются вложения

$$A\cap B\subset E\subset A+B. \tag{3.13}$$

Напомним, что здесь символ $\subset$ означает алгебраическое и непрерывное вложение, однако в силу леммы 3.3 для того, чтобы убедиться, что банахово пространство E является промежуточным, достаточно знать, что оно алгебраически и непрерывно вложено в пространство $\mathscr{A}$, содержит в себе пространство $A\cap B$ и содержится в пространстве $A+B$.

Для иллюстрации изложенных выше определений рассмотрим несколько простых примеров промежуточных банаховых пространств.

Легко видеть, что промежуточным пространством между пространствами $L_{p_0}(0, 1)$ и $L_{p_1}(0, 1)$ $(p_0<p_1)$ будет любое пространство $L_p(0, 1)$, если $p_0\leqslant p\leqslant p_1$.

В самом деле, в § 1 п. 3 показано, что $L_{p_1}(0, 1)\subset\subset L_p(0, 1)\subset L_{p_0}(0, 1)$ и, кроме того,

$$\|x\|_{L_{p_0}(0,1)}\leqslant\|x\|_{L_p(0,1)} \qquad (x\in L_p(0, 1)),$$

$$\|x\|_{L_{p(0,1)}}\leqslant\|x\|_{L_{p_1}(0,1)} \qquad (x\in L_p(0, 1)).$$

Для пространств Гёльдера H_{α_0} и H_{α_1} $(\alpha\leqslant\alpha_1)$, например, промежуточными пространствами являются пространства Гёльдера H_α, если $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ (см. гл. III, § 3).

Пусть $L_{p_0}(0, \infty)$ и $L_{p_1}(0, \infty)$ $(p_0<p_1)$ — пространства измеримых функций, модуль которых суммируем с p_i-й $(i=0, 1)$ степенью на полуоси. Пространства $L_{p_i}(0, \infty)$ не будут вложенными друг в друга: очевидно, что $L_{p_0}(0, \infty)\cap L_{p_1}(0, \infty)\neq L_{p_i}(0, \infty)$. Тем не менее пространство $L_p(0, \infty)$ является промежуточным между $L_{p_0}(0, \infty)$ и $L_{p_1}(0, \infty)$, если $p_0\leqslant p\leqslant p_1$. Действительно, рассмотрим отделимое топологическое векторное пространство $S(0, \infty)$, состоящее из всех измеримых функций, определенных на полуоси с топологией сходимости по мере (см. [6], гл. III, 2). Тогда каждое из пространств $L_{p_i}(0, \infty)$ $(i=0, 1)$ алгебраически и топологически вло-

жено в топологическое векторное пространство $S(0, \infty)$, и поэтому эти пространства образуют банахову пару.

Покажем, что

$$L_{p_0}(0, \infty) \cap L_{p_1}(0, \infty) \subset L_p(0, \infty) \subset L_{p_0}(0, \infty) + L_{p_1}(0, \infty). \tag{3.14}$$

Действительно, пусть $x \in L_{p_0}(0, \infty) \cap L_{p_1}(0, \infty)$. Обозначим

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } |x(t)| \geqslant 1, \\ 0, & \text{если } |x(t)| < 1, \end{cases}$$

и $x_2(t) = x(t) - x_1(t)$. Тогда $x_1, x_2 \in L_{p_0}(0, \infty) \cap L_{p_1}(0, \infty)$. Так как $p \leqslant p_1$, то $x_1 \in L_p(0, \infty)$; из условия $p_0 \leqslant p$ также вытекает, что $x_2 \in L_p(0, \infty)$. Таким образом, $x \in L_p(0, \infty)$, т. е. пространство $L_{p_0}(0, \infty) \cap L_{p_1}(0, \infty)$ содержится в пространстве $L_p(0, \infty)$, а значит, как указывалось выше, вложено в него. Аналогично проверяется второе вложение в (3.14).

В следующей главе будут детально изучаться промежуточные пространства для банаховой пары $L_1(0, \infty)$ и $L_\infty(0, \infty)$.

4. Сумма и пересечение семейства банаховых пространств. В этом пункте мы будем обозначать через $E \overset{1}{\subset} F$ вложение банахова пространства E в банахово пространство F, удовлетворяющее условию $\|x\|_F \leqslant \|x\|_E$ $(x \in E)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — отделимое линейное топологическое пространство и E_i $(i \in I)$ — произвольное семейство банаховых пространств, алгебраически и топологически вложенных в пространство $\mathcal{A}$.

Пересечением семейства E_i будем называть банахово пространство $\Cap E_i$, удовлетворяющее условиям:

1) $\Cap E_i \overset{1}{\subset} E_j$ при любом $j \in I$; 2) если F такое банахово пространство, что $F \overset{1}{\subset} F_j$ при всех $j \in I$, то $F \overset{1}{\subset} \Cap E_i$.

Суммой семейства E_i будем называть банахово пространство $\Cup E_i$, алгебраически и топологически вложенное в $\mathcal{A}$ и такое, что выполнены условия:

1) $E_j \overset{1}{\subset} \Cup E_i$ при любом $j \in I$; 2) если банахово пространство G, алгебраически и топологически вложенное в $\mathcal{A}$, таково, что $E_j \overset{1}{\subset} G$ для всех $j \in I$, то $\Cup E_i \overset{1}{\subset} G$.

Покажем, что пересечение $\bigcap E_i$ всегда существует. Рассмотрим линейное подмножество $\bigcap E_i$, состоящее из всех элементов x, принадлежащих всем пространствам E_i, для которых

$$\|x\|_{\bigcap E_i} = \sup_{i \in I} \|x\|_{E_i} < \infty. \tag{3.15}$$

Величина, стоящая слева, обладает свойствами нормы. Покажем полноту пространства $\bigcap E_i$ по этой норме. Пусть x_n — фундаментальная в норме (3.15) последовательность элементов из $\bigcap E_i$. Тогда она фундаментальна в каждом пространстве E_i и, следовательно, в нем имеет предел. Поскольку все пространства E_i вложены в $\mathscr{A}$, эти пределы совпадают с некоторым элементом $x \in \bigcap\limits_i E_i$. Кроме того,

$$\|x - x_n\|_{\bigcap E_i} = \sup_i \|x - x_n\|_{E_i} = \sup_i \lim_{m \to \infty} \|x_m - x_n\|_{E_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{m \geqslant n} \sup_i \|x_m - x_n\|_{E_i} = \sup_{m \geqslant n} \|x_m - x_n\|_{\bigcap E_i} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, пространство $\bigcap E_i$ — банахово. Если теперь $F \overset{1}{\subset} E_j$ при всех $j \in I$ и $x \in F$, то

$$\|x\|_{\bigcap E_i} = \sup_i \|x\|_{E_i} \leqslant \|x\|_F < \infty,$$

и поэтому $x \in \bigcap E_i$, т. е. $F \overset{1}{\subset} \bigcap E_i$.

Для построения суммы $\bigcup E_i$ сделаем дополнительное предположение о том, что существует банахово пространство W, вложенное в $\mathscr{A}$ и такое, что $E_i \overset{1}{\subset} W$ для всех $i \in I$. За линейную систему $\bigcup E_i$ примем множество всех элементов x из $\mathscr{A}$, представимых в виде

$$x = \sum_{i \in I} u_i \quad (u \in E_i), \text{ где } \sum_{i \in I} \|u_i\|_{E_i} < \infty. \tag{3.16}$$

Из последнего условия следует, что в сумме $\sum\limits_{i \in I} u_i$ лишь счетное множество слагаемых, отличных от нуля. Более того, так как

$$\sum_{i \in I} \|u_i\|_W \leqslant \sum_{i \in I} \|u_i\|_{E_i} < \infty, \tag{3.17}$$

то ряд $\sum\limits_{i\in I} u_i$ сходится абсолютно в пространстве W, а значит, сходится и в пространстве $\mathcal{A}$. Введем теперь норму

$$\|x\|_{\bigcup E_i} = \inf \sum_{i\in I} \|u_i\|_{E_i}, \tag{3.18}$$

где inf берется по всевозможным представлениям x в виде (3.16). Предоставляем читателю проверить выполнение свойств нормы.

Из неравенства (3.17) вытекает, что

$$\|x\|_W \leqslant \|x\|_{\bigcup E_i},$$

поэтому пространство $\bigcup E_i$ вложено в W, а значит, и в $\mathcal{A}$. Докажем полноту этого пространства. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ — фундаментальная последовательность в норме (3.18). Без ограничения общности можно считать, что эта последовательность такова, что

$$x_0 = \theta, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\|_{\bigcup E_i} < \infty.$$

В силу определения нормы (3.18) существуют представления $x_k - x_{k-1} = \sum\limits_i u_{ik}$ такие, что

$$\sum_i \|u_{ik}\|_{E_i} \leqslant \|x_k - x_{k-1}\|_{\bigcup E_i} + \frac{1}{2^k}.$$

Тогда

$$\sum_{i\in I} \sum_{k=1}^{\infty} \|u_{ik}\|_{E_i} < \infty. \tag{3.19}$$

Из этого неравенства вытекает, в частности, что ряды $v_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{ik}$ абсолютно сходятся в пространствах E_i и $v_i \in E_i$. Из (3.19) получаем, что

$$\sum_{i\in I} \|v_i\|_{E_i} < \infty,$$

и следовательно, определен элемент $x = \sum\limits_{i\in I} v_i \in \bigcup E_i$.

Далее

$$x-x_k=x-\sum_{l=1}^{k}(x_l-x_{l-1})=\sum_{i\in I}\left\{v_i-\sum_{l=1}^{k}u_{il}\right\},$$

поэтому

$$\|x-x_k\|_{\Cup E_i}\leqslant\sum_{i\in I}\left\|v_i-\sum_{l=1}^{k}u_{il}\right\|_{E_i}=\sum_{i\in I}\left\|\sum_{l=k+1}^{\infty}u_{il}\right\|_{E_i}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{l=k+1}^{\infty}\sum_{i\in I}\|u_{il}\|_{E_i}\to 0\quad\text{при } k\to\infty$$

в силу сходимости ряда (3.19). Итак, пространство $\Cup E_i$ — полное.

Если теперь банахово пространство G таково, что $E_i\overset{1}{\subset}G$, то мы можем в качестве W взять пространство G и, как это сделано выше, показать, что $\Cup E_i\overset{1}{\subset}G$.

§ 4. Интерполяционные пространства, интерполяционные тройки

1. Интерполяционные тройки банаховых пространств. Пусть A, B и C, D — две банаховы пары.

Определение 4.1. Линейное отображение T, действующее из пространства $A+B$ в пространство $C+D$, называется *ограниченным оператором из пары A, B в пару C, D*, если сужение T на пространство $A(B)$ является ограниченным оператором из $A(B)$ в $C(D)$.

Линейное пространство всех ограниченных операторов из пары A, B в пару C,D обозначим через $L(AB,CD)$. Это пространство будет банаховым относительно нормы

$$\|T\|_{L(AB,CD)}=\max(\|T\|_{A\to C},\|T\|_{B\to D}). \tag{4.1}$$

Действительно, сужения операторов из фундаментальной в $L(AB, CD)$ последовательности операторов T_n на пространства A и C будут сходиться в пространствах $L(A, C)$ и $L(B, D)$ к операторам T' и T'' соответственно, которые будут, очевидно, совпадать на пересечении $A\cap B$. Тогда последовательность T_n будет сходиться в $L(AB, CD)$ к однозначно определенному оператору T, действующему из пространства $A+B$ в пространство $C+D$ по формуле $Tx=T'u+T''v$ ($x=u+v$, $u\in A$, $v\in B$).

Лемма 4.1. *Ограниченный оператор T из пары A, B в пару C, D порождает ограниченный оператор из $A+B$ в $C+D$ и из $A\cap B$ в $C\cap D$, причем*

$$\|T\|_{A+B\to C+D}\leqslant\|T\|_{L(AB,CD)},\tag{4.2}$$

$$\|T\|_{A\cap B\to C\cap D}\leqslant\|T\|_{L(AB,CD)}.\tag{4.3}$$

Доказательство. Для $x\in A+B$ в силу определения нормы в сумме пространств банаховой пары

$$\|Tx\|_{C+D}\leqslant\inf_{x=u+v}(\|Tu\|_C+\|Tv\|_D)\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{x=u+v}(\|T\|_{A\to C}\|u\|_A+\|T\|_{B\to D}\|v\|_B)\leqslant\|T\|_{L(AB,CD)}\|x\|_{A+B},$$

откуда следует неравенство (4.2). Если $x\in A\cap B$, то

$$\|Tx\|_{C\cap D}=\max(\|Tx\|_C,\|Tx\|_D)\leqslant$$
$$\leqslant\max(\|T\|_{A\to C}\|x\|_A,\|T\|_{B\to D}\|x\|_B)\leqslant\|T\|_{L(AB,CD)}\|x\|_{A\cap B}.$$

Установим одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть G, H — банаховы пространства и E, F — банаховы пространства, вложенные в G и H соответственно. Если ограниченный линейный оператор T из пространства G в пространство H отображает пространство E в пространство F, то сужение T на E является ограниченным оператором из E в F.*

Доказательство. Достаточно показать, что сужение T на E является замкнутым оператором. Пусть $x_n\to x$ в E и $Tx_n\to y$ в F. Тогда $x_n\to x$ в G и $Tx_n\to y$ в H. Следовательно, $y=Tx$, оператор T замкнут, а значит, и ограничен.

Следствие. *Если A, B и C, D — две банаховы пары, и линейный ограниченный оператор из $A+B$ в $C+D$ отображает пространства A и B в пространства C и D соответственно, то этот оператор является ограниченным оператором из пары A, B в пару C, D.*

Определение 4.2. Пусть A, B и C, D — две банаховы пары, а E и F — промежуточные пространства между A и B, C и D соответственно. Тройка (A, B, E) называется *интерполяционной* относительно тройки (C, D, F), если всякий ограниченный оператор из пары A, B в пару C, D отображает пространство E в пространство F.

Если A совпадает с C, B с D и E с F, то пространство E называется *интерполяционным между пространствами банаховой пары* A и B.

Замечание. Из лемм 4.1 и 4.2 непосредственно следует, что в предыдущих условиях всякий оператор $T\subset\subset L(AB, CD)$ будет ограниченным оператором из пространства E в пространство F.

Лемма 4.3. *Если тройка* (A, B, E) *является интерполяционной относительно тройки* (C, D, F), *то существует такая константа* $c>0$ (*интерполяционная константа*), *что*

$$\|T\|_{E\to F}\leqslant c\|T\|_{L(AB,CD)} \tag{4.4}$$

для любого $T\in L(AB, CD)$.

Доказательство. Всякому оператору $T\in L(AB, CD)$ поставим в соответствие его сужение на пространство E: $\Phi(T)=T|_E$. Как было сказано выше, $\Phi(T)$ будет ограниченным оператором из E в F. Таким образом определяется линейное отображение Φ банахова пространства $L(AB, CD)$ в банахово пространство $L(E, F)$. Это отображение замкнуто. Действительно, пусть $T_n\to T$ в $L(AB, CD)$ и $\Phi(T_n)\to S$ в $L(E, F)$. Из первого соотношения и леммы 4.1 следует, что $T_nx\to Tx$ в $C+D$ при любом $x\in A+B$ и, в частности, при $x\in E$. Из второго получаем, что $T_nx\to Sx$ в F при любом $x\in E$. Таким образом, в силу вложения $F\subset C+D$, $Tx=Sx$ при $x\in E$, т. е. $\Phi(T)=T|_E=S$. Из замкнутости оператора Φ следует его ограниченность, что равносильно неравенству (4.4). Лемма доказана.

Если пространство E является интерполяционным между A и B, то неравенство (4.4) переходит в следующее: $\|Tx\|_E\leqslant c\|T\|_{L(AB,\,AB)}\|x\|_E$. В этом случае в пространстве E можно ввести новую эквивалентную норму

$$\|x\|_E^* = \frac{1}{c}\sup_{T\in L(AB,AB)}\frac{\|Tx\|_E}{\|T\|_{L(AB,AB)}}.$$

В этой норме уже справедливо неравенство $\|T\|^*_{E\to E}\leqslant\leqslant\|T\|_{L(AB,\,AB)}$, т. е. интерполяционная константа равна 1.

Приведем пример промежуточного пространства, не воляющегося интерполяционным. Пусть $A=l_2$ — гильбертовая пространство последовательностей $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ с нормой $\|x\|_{l_2} = \left(\sum_1^\infty |\xi_i|^2\right)^{1/2}$ и $B = l_2^\rho$ — гильбертово пространство, состоящее из всех последовательностей x, для которых $\|x\|_{l_2^\rho} = \left\{\sum_1^\infty i(|\xi_{2i-1}|^2 + |\xi_{2i}|^2)\right\}^{1/2} < \infty$. Рассмотрим промежуточное гильбертово пространство E, элементами которого являются все последовательности, удовлетворяющие условию $\|x\|_E = \left\{\sum_1^\infty (i|\xi_{2i-1}|^2 + |\xi_{2i}|^2)\right\}^{1/2} < \infty$. Очевидно, что $B \overset{1}{\subset} E \overset{1}{\subset} A$.

Определим теперь операторы T_n равенством

$$T_n x = (\xi_1, \ldots, \xi_{2n-2}, \xi_{2n}, \xi_{2n-1}, \xi_{2n+2}, \ldots).$$

Очевидно, эти операторы действуют в пространствах A и B и имеют там норму 1, т. е. $\|T_n\|_{L(AB,\,AB)} = 1$. Вычисляя оператор T_n на элементе x_n, для которого $\xi_i = 0$ при $i \neq 2n$ и $\xi_{2n} = 1$, видим, что $\|T_n\|_{E\to E} \geqslant \sqrt{n}$. Если бы пространство E было интерполяционным, то это противоречило бы лемме 4.3.

Полезно иметь в виду следующее обстоятельство.

Лемма 4.4 *Пусть тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, F). Если через $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ обозначить пополнения пространств E и F относительно пространств $A+B$ и $C+D$ соответственно, то тройка $(A, B, \tilde{E})$ интерполяционна относительно тройки $(C, D, \tilde{F})$.*

Доказательство. Если $x \in \tilde{E}$, то найдется последовательность $x_n \to x$ в $A+B$, такая, что $\|x_n\|_E = \|x\|_{\tilde{E}}$. Тогда для любого оператора $T \in L(AB, CD)$ имеем $Tx_n \to Tx$ в $C+D$ и $\|Tx_n\|_F \leqslant \|T\|_{E\to F}\|x_n\|_E = \|T\|_{E\to F}\|x\|_{\tilde{E}}$. Отсюда следует, что $Tx \in \tilde{F}$ и $\|Tx\|_{\tilde{F}} \leqslant \|T\|_{E\to F}\|x\|_{\tilde{E}}$.

Мы доказали лемму и неравенство $\|T\|_{\tilde{E}\to\tilde{F}} \leqslant \|T\|_{E\to F}$.

2. Вполне интерполяционные тройки. Тип интерполяционной тройки.

Определение 4.3. Пусть тройка пространств (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, F). Будем говорить, что тройка (A, B, E) — *вполне интерполяционная относительно* (C, D, F) *применительно к* A *и* C, если для всех операторов $T \in L(AB, CD)$

$$\|T\|_{E\to F} \leqslant \varphi(\|T\|_{A\to C}, \|T\|_{B\to D})$$

и $\varphi(\lambda, \mu)\to 0$ при $\lambda\to 0$ равномерно на каждом конечном отрезке изменения μ.

Теорема 4.1. *Пусть тройка (A, B, E) является вполне интерполяционной относительно тройки (C, D, F) применительно к A и C, и пусть имеется последовательность конечномерных операторов P_n, действующих в пространствах C и D, сильно сходящихся к I в пространстве C и равномерно ограниченных в пространстве D. Тогда, если оператор $T \in L(AB, CD)$ ограничен как оператор из B в D и вполне непрерывен как оператор из A в C, то он вполне непрерывен как оператор из E в F.*

Доказательство. Пусть S_1 — единичный шар пространства A. Тогда замыкание множества TS_1 компактно в C. Операторы P_n на компактных множествах равномерно сходятся к единичному оператору, поэтому

$$\|(P_n - I)T\|_{A\to C} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Нормы $\|(P_n - I)T\|_{B\to D}$ в силу условий теоремы равномерно ограничены. Тогда

$$\|(P_n - I)T\|_{E\to F} \leqslant \varphi(\|(P_n - I)T\|_{A\to C}, \|(P_n - I)T\|_{B\to D}) \to 0$$

при $n\to\infty$. Таким образом, оператор T, действующий из E в F, является равномерным пределом конечномерных операторов и, следовательно, вполне непрерывен.

Определение 4.4. Говорят, что тройка (A, B, E) является *интерполяционной типа* α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ относительно тройки (C, D, F), если она интерполяционна и выполнено неравенство

$$\|T\|_{E\to F} \leqslant c\|T\|_{A\to C}^{1-\alpha}\|T\|_{B\to D}^{\alpha}. \tag{4.5}$$

В случае, когда A совпадает с C, B с D и E с F, говорят, что пространство E является *интерполяционным типа* α *между* A *и* B.

Если константа c, входящая в (4.5), равна единице, то тройка (A, B, E) называется *нормально интерполяционной типа* α относительно тройки (C, D, F).

Может случиться, что интерполяционное между A и B пространство не является интерполяционным типа α ни при каком $\alpha \in [0, 1]$.

Если тройка (A, B, E) будет интерполяционной типа α с $\alpha < 1$ относительно тройки (C, D, F), то она, очевидно, будет вполне интерполяционной применительно к A и C, и для нее будет справедлива теорема 4.1.

Теоремы, которые устанавливают интерполяционность одной тройки банаховых пространств относительно другой, называются *интерполяционными теоремами*. Исторически первая интерполяционная теорема была получена М. Риссом и Ториным, и вся теория интерполяции линейных операторов первоначально развивалась в направлении обобщения этой теоремы. Здесь приводится общая формулировка этой первой интерполяционной теоремы.

Теорема М. Рисса—Торина. *Пусть* $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ *и* $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — *два пространства с мерами* μ_1 *и* μ_2 *соответственно и* $L_p(\Omega_i)$ $(i=1, 2;\ p \geqslant 1)$ — *банаховы пространства комплекснозначных функций, суммируемых с р-й степенью по мерам* μ_i. *Тройка банаховых пространств* $(L_{p_0}(\Omega_1), L_{p_1}(\Omega_1), L_p(\Omega_1))$ *является нормально интерполяционной типа* α *относительно тройки* $(L_{q_0}(\Omega_2), L_{q_1}(\Omega_2), L_q(\Omega_2))$, *если*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{q_0} + \frac{\alpha}{q_1} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{4.6}$$

Доказательство этой теоремы, опирающееся на известную теорему о трех прямых из теории аналитических функций, можно найти в [8], т. II, стр. 144—148.

Напомним, что нормальная интерполяционность типа α означает, что для всякого линейного оператора A, ограниченно действующего из $L_{p_i}(\Omega_1)$ в $L_{q_i}(\Omega_2)$ и имеющего нормы M_i $(i=0, 1)$, при условиях (4.6) справедливо неравенство

$$\|Tx\|_{L_q(\Omega_2)} \leqslant M_0^{1-\alpha} M_1^{\alpha} \|x\|_{L_p(\Omega_1)}. \tag{4.7}$$

3. Оптимальные интерполяционные пространства. Если E — промежуточное пространство для банаховой пары A, B, а C, D — другая банахова пара, то возникает вопрос об описании таких пространств F, промежуточных между C и D, что тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, F). Ясно, что если пространство F обладает этим свойством, то всякое промежуточное между C и D пространство F_1, в которое F вложено, будет также обладать этим свойством. В связи с этим можно поставить задачу об отыскании минимального в определенном смысле пространства F. Ясно, что всякое пространство F должно содержать в себе все элементы из $C+D$ вида Tx, где x пробегает пространство E, а T — множество $L(AB, CD)$. Кроме того, в F должна содержаться и линейная оболочка множества элементов вида Tx. Если бы в эту линейную оболочку можно было бы внести структуру банахова пространства так, чтобы оно стало промежуточным между C и D, то это банахово пространство и решало бы поставленную задачу. Ниже будет несколько сложнее осуществлена намеченная здесь программа.

Единичный шар в пространстве $L(AB, CD)$ обозначим через $\pi_1(AB, CD)$. Пусть T принадлежит $\pi_1(AB, CD)$. Рассмотрим ядро $N(T)$ оператора T и образ $T(E)$. Так как оператор T непрерывен, как оператор из E в $C+D$, то ядро $N(T)$ замкнуто в E. Оператор T порождает каноническое взаимно однозначное соответствие между фактор-пространством $E/N(T)$ и образом $T(E)$. Это позволяет перенести структуру банахова пространства $E/N(T)$ на линейное пространство $T(E)$. Полученное банахово пространство обозначим через $F_T(E)$. Формула для нормы в $F_T(E)$ согласно сказанному имеет вид

$$\|y\|_{F_T(E)} = \inf \|x\|_E, \tag{4.8}$$

где inf берется по всем $x \in E$, для которых $y = Tx$.

Банахово пространство $F_T(E)$ вложено в пространство $C+D$. Действительно, согласно (4.2)

$$\|y\|_{C+D} = \|Tx\|_{C+D} \leqslant \|T\|_{L(AB,CD)} \|x\|_{A+B} \leqslant \|x\|_{A+B} \leqslant \frac{1}{m(E)} \|x\|_E,$$

через $1/m(E)$ обозначена константа вложения пространства E в пространство $A+B$.

В силу (4.8) отсюда вытекает, что

$$m(E) \|y\|_{C+D} \leqslant \|y\|_{F_T(E)}.$$

В дальнейшем через kG, где G — банахово пространство, обозначается банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{kG} = k\|x\|_G \quad (k > 0,\ x \in G).$$

В этих обозначениях предыдущее неравенство можно записать так:

$$F_T(E) \overset{1}{\subset} m(E)(C + D). \tag{4.9}$$

Мы получили семейство банаховых пространств $F_T(E)$, вложенных в банахово пространство $m(E)(C+D)$; согласно тому, что изложено в § 3, п. 4, можно построить сумму пространств

$$F(E) = \biguplus_{T \in \pi_1(AB,CD)} F_T(E).$$

Из вложения (4.9) следует, что $F(E) \overset{1}{\subset} m(E)(C+D)$.

Покажем теперь, что пространство $C \cap D$ вложено в пространство $F(E)$. Для этого по элементу $y \in C \cap D$ построим одномерный оператор $T_0 x = \frac{1}{\alpha}\langle x, f\rangle y$, где f — функционал из пространства $(A+B)'$. Согласно сказанному в п. 2, § 3, сужения функционала f на пространства A и B являются линейными функционалами на этих пространствах и $\|f\|_{(A+B)'} = \max\{\|f\|_{A'}, \|f\|_{B'}\}$. Тогда для оператора T_0 получаем

$$\|T_0\|_{A\to C} = \sup \frac{\|T_0 x\|_C}{\|x\|_A} = \frac{1}{\alpha}\|y\|_C \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|_A} = \frac{1}{\alpha}\|f\|_{A'}\|y\|_C,$$

и аналогично: $\|T_0\|_{B\to D} = \frac{1}{\alpha}\|f\|_{B'}\|y\|_D$, поэтому

$$\|T_0\|_{L(AB,CD)} = \frac{1}{\alpha}\max\{\|f\|_{A'}\|y\|_C, \|f\|_{B'}\|y\|_D\}.$$

Выберем $\alpha = \max\{\|f\|_{A'}\|y\|_C, \|f\|_{B'}\|y\|_D\}$. Тогда $\|T_0\|_{L(AB,CD)} = 1$ и $T_0 \in \pi_1(AB, CD)$. Таким образом, мы получаем, что $1/\alpha\langle x, f\rangle y \in F_{T_0}(E)$ при любом $x \in A+B$, а значит, $y \in F_{T_0}(E) \subset F(E)$. Итак, пересечение $C \cap D$ содержится в $F(E)$. Для получения неравенства вложения для любого ε выберем элемент x_ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|x_\varepsilon\|_{A+B} \geqslant \frac{1}{m(E)+\varepsilon}\|x_\varepsilon\|_E$$

(такой выбор возможен, так как $1/m(E)$ — константа вложения E в $A+B$), и функционал $f_\varepsilon(x)$ так, чтобы $\|f_\varepsilon\|_{(A+B)'}=1$ и $\langle x_\varepsilon, f_\varepsilon\rangle=\|x_\varepsilon\|_{A+B}$. Тогда $T_0\left(\frac{\alpha x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_{A+B}}\right)=y$ и поэтому

$$\|y\|_{F_{T_0}(E)} \leqslant \left\|\frac{\alpha x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|_{A+B}}\right\|_E \leqslant \alpha(m(E)+\varepsilon). \tag{4.10}$$

Далее имеем:

$$\alpha \leqslant \max(\|y\|_C, \|y\|_D)\max(\|f\|_{A'}, \|f\|_{B'}).$$

Согласно сказанному в п. 2 § 3 последний множитель совпадает с $\|f\|_{(A+B)'}$ и равен единице. Поэтому $\alpha \leqslant \|y\|_{C\cap D}$ и соотношение (4.10) дает неравенство

$$\|y\|_{F(E)} \leqslant \|y\|_{F_{T_0}(E)} \leqslant (m(E)+\varepsilon)\|y\|_{C\cap D}.$$

В силу произвольности ε отсюда следует вложение

$$m(E)(C\cap D) \overset{1}{\subset} F(E).$$

Мы приходим к утверждению:

Теорема 4.2. *Пусть E — промежуточное пространство для банаховой пары A, B, а C, D — другая банахова пара. Существует промежуточное для пары C, D пространство $F(E)$, обладающее тем свойством, что тройка (A, B, E) интерполяционна относительно тройки (C, D, F) тогда и только тогда, когда $F(E)\subset F$.*

Доказательство. Пространство $F(E)$ содержит все пространства $F_T(E)$ и, следовательно, все элементы вида Tx ($x\in E$, $T\in\pi_1(AB, CD)$). Значит, тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки $(C, D, F(E))$. Отсюда непосредственно вытекает, что тройка (A, B, E) интерполяционна относительно (C, D, F), если $F\supset F(E)$.

По построению пространство $F(E)$ состоит из элементов вида

$$z = \sum y_i, \quad \sum \|y_i\|_{F_{T_i}(E)} < \infty. \tag{4.11}$$

По определению нормы в пространстве $F_{T_i}(E)$ найдутся элементы x_i такие, что $y_i = T_i x_i$ и $\|x_i\|_E \leqslant \|y_i\|_{F_{T_i}(E)} + 1/2^i$. Тогда $\sum \|x_i\|_E < \infty$. Если теперь тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, F), то в силу (4.11)

$$\sum \|y_i\|_F = \sum \|T_i x_i\|_F \leqslant \sum \|T_i\|_{E \to F} \|x_i\|_E \leqslant c \sum \|x_i\|_E < \infty,$$

и следовательно, $z \in F$. Таким образом, $F(E) \subset F$.

Замечание. *Пространство $F(E)$ является интерполяционным относительно пары C и D.*

Действительно, пусть оператор $S \in \pi_1(CD, CD)$ и $T \in \pi_1(AB, CD)$. Тогда $\|ST\|_{L(AB, CD)} \leqslant 1$. Если теперь $z \in F(E)$, то справедливо представление (4.11), и так как ряд $\sum y_i$ сходится в $C+D$, то $Sz = \sum Sy_i$.

Вычисляем

$$\|Sy_i\|_{F_{ST_i}(E)} = \inf_{Sy_i = ST_i x} \|x\|_E \leqslant \inf_{y_i = T_i x} \|x\|_E = \|y_i\|_{F_{T_i}(E)}. \tag{4.12}$$

Из (4.11) тогда следует, что ряд $\sum \|Sy_i\|_{F_{ST_i}(E)}$ сходится и, следовательно, $Sz \in F(E)$.

Таким образом, каждый оператор из $L(CD, CD)$ отображает $F(E)$ в $F(E)$, и наше утверждение доказано.

Заметим, что если промежуточное между A и B пространство $E_1 \subset E$, то тройка (A, B, E_1) будет интерполяционной относительно тройки $(C, D, F(E))$, поэтому в силу теоремы 4.2 $F(E_1) \subset F(E)$.

Пусть теперь A, B — банахова пара, а F — промежуточное пространство в банаховой паре C, D. Можно попытаться построить наиболее широкое промежуточное между A и B пространство так, чтобы оно образовывало с A и B интерполяционную тройку относительно тройки (C, D, F). Пусть $T \in \pi_1(AB, CD)$; рассмотрим полный прообраз $T^{-1}(F)$ пространства F при отображении $A+B$ в

$C+D$ с помощью оператора T. На этом прообразе введем норму

$$\|x\|_{E_{T^{-1}}} = \max\{m'(F)\|x\|_{A+B}, \|Tx\|_F\},$$

где $m'(F)$ — константа вложения $C\cap D$ в F. В этой норме пространство $E_{T^{-1}}$ — банахово. Действительно, если $\{x_n\}$ — фундаментальна в $E_{T^{-1}}$, то $\{x_n\}$ — фундаментальна в $A+B$ и, значит, сходится в $A+B$ к элементу x, и $\{Tx_n\}$ — фундаментальна в F, и, значит, сходится в F и в $C+D$ к элементу y. Так как $\|T\|_{A+B\to C+D}\leqslant 1$, то $y=Tx$ и $\{x_n\}$ сходится к x в пространстве $E_{T^{-1}}$.

Пространство $E_{T^{-1}}$ является промежуточным между A и B. Очевидно, что $E_{T^{-1}}\overset{1}{\subset} m'(F)(A+B)$. Пусть $x\in A\cap B$. Тогда, если $\|x\|_{E_{T^{-1}}} = m'(F)\|x\|_{A+B}$, то $\|x\|_{E_{T^{-1}}}\leqslant m'(F)\|x\|_{A\cap B}$. Если же $\|x\|_{E_{T^{-1}}} = \|Tx\|_F$, то в силу (4.3)

$$\|x\|_{E_{T^{-1}}}\leqslant m'(F)\|Tx\|_{C\cap D}\leqslant m'(F)\|x\|_{A\cap B}. \tag{4.13}$$

Таким образом, $m'(F)A\cap B \overset{1}{\subset} E_{T^{-1}} \overset{1}{\subset} m'(F)(A+B)$.

Обозначим теперь через $E(F)$ пересечение семейства пространств $E_{T^{-1}}$ при всех $T\in\pi_1(AB, CD)$. Очевидно, что справедливы вложения

$$m'(F)A\cap B\overset{1}{\subset} E(F)\overset{1}{\subset} m'(F)(A+B).$$

Напомним, что норма в пространстве $E(F)$ определяется по формуле

$$\|x\|_{E(F)} = \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)} \max\{m'(F)\|x\|_{A+B}, \|Tx\|_F\}. \tag{4.14}$$

Эту формулу можно упростить. Пусть $x_0\in E(F)$; построим линейный функционал $f\in(A+B)'$ такой, что $\|f\|_{(A+B)'}=1$ и $\langle x_0, f\rangle=\|x_0\|_{A+B}$. Пользуясь тем, что $m'(F)$ — константа вложения $C\cap D$ в F, выберем $y\in C\cap D$ так, что $\|y\|_F>(m'(F)-\varepsilon)\|y\|_{C\cap D}$. Введем в рассмотрение оператор $T_0x=\frac{1}{\alpha}\langle x_0, f\rangle y$. Если выбрать $\alpha=\max\{\|f\|_{A'}\|y\|_C, \|f\|_{B'}\|y\|_D\}$, то будет $T_0\in\pi_1(AB, CD)$ (см. стр. 39). При этом $\alpha \leqslant \|y\|_{C\cap D}$ и

$$\|T_0x_0\|_F = \frac{1}{\alpha}\|x_0\|_{A+B}\|y\|_F \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\alpha}\|x_0\|_{A+B}(m'(F)-\varepsilon)\|y\|_{C\cap D} \geqslant (m'(F)-\varepsilon)\|x_0\|_{A+B}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\|Tx_0\|_F \geqslant m'(F)\|x_0\|_{A+B},$$

поэтому формулу (4.14) можно записать в виде

$$\|x\|_{E(F)} = \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\|Tx\|_F. \tag{4.15}$$

Попутно мы доказали, что пространство $E(F)$ состоит из всех элементов $x\in A+B$, для которых

$$\sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\|Tx\|_F < \infty.$$

Теорема 4.3. *Пусть A, B — банахова пара, а F — промежуточное пространство для банаховой пары C, D. Существует промежуточное между A и B пространство $E(F)$, обладающее тем свойством, что тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, F) тогда и только тогда, когда $E\subset E(F)$.*

Доказательство. Очевидно, что тройка $(A, B, E(F))$ сама является интерполяционной относительно тройки (C, D, F), так как при $x\in E(F)$ по определению пространства $E(F)$ элемент $Tx\in F$ при любом $T\in L(AB, CD)$. Отсюда следует, что при $E\subset E(F)$ тройка (A, B, E) будет интерполяционной относительно (C, D, F). Обратно, если тройка (A, B, E) — интерполяционна относительно тройки (C, D, F), то при $x\in E$ в силу (4.15)

$$\|x\|_{E(F)} = \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\|Tx\|_F \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\{\|T\|_{E\to F}\|x\|_E\} \leqslant c\|x\|_E,$$

где c — интерполяционная константа для пространств E и F, т. е. $E\subset E(F)$.

Замечание. *Пространство $E(F)$ является интерполяционным между A и B.*

Действительно, если $S\in L(AB, AB)$, то при $T\in \in\pi_1(AB, CD)$ оператор $TS\in L(AB, CD)$ и $\|TS\|_{L(AB, CD)}\leqslant \leqslant\|S\|_{L(AB, AB)}$. Поэтому при $x\in E(F)$, $TSx\in F$ и

$$\|Sx\|_{E(F)} = \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)} \|TSx\|_F =$$

$$= \|S\|_{L(AB,AB)} \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)} \left\| \frac{1}{\|S\|_{L(AB,AB)}} TSx \right\|_F \leqslant$$

$$\leqslant \|S\|_{L(AB,AB)} \sup_{T\in\pi_1(AB,CD)} \|Tx\|_F = \|S\|_{L(AB,AB)} \|x\|_{E(F)},$$

что и доказывает наше утверждение.

Заметим, что если промежуточное между C и D пространство F_1 содержит F, то тройка $(A, B, E(F))$ будет интерполяционной относительно (C, D, F_1), поэтому в силу теоремы 4.3

$$E(F)\subset E(F_1). \tag{4.16}$$

Определение 4.5. Пусть (A, B, E) — тройка пространств, являющаяся интерполяционией относительно тройки (C, D, F). Она называется *оптимальной интерполяционной*, если из того, что тройка $(A, B, \tilde{E})$ является интерполяционной относительно $(C, D, \tilde{F})$ и $\tilde{E}\supset E$, $\tilde{F}\subset F$, следует, что $\tilde{E}=E$ и $\tilde{F}=F$.

Другими словами, тройка $\{A, B, E\}$ является оптимальной интерполяционной относительно (C, D, F), если пространство E нельзя расширить с сохранением интерполяционности, а пространство F — сýзить с сохранением интерполяционности.

Теорема 4.4. *Для того чтобы тройка (A, B, E) была оптимальной интерполяционной относительно тройки (C, D, F), необходимо и достаточно, чтобы $F=F(E)$ и $E=E(F)$.*

Доказательство. Если (A, B, E) — оптимально интерполяционная относительно (C, D, F), то по теореме 4.2 $F(E)\subset F$. Тройка (A, B, E) интерполяционна относительно $(C, D, F(E))$, поэтому из определения оптимальной интерполяционности следует, что $F(E)=F$. Аналогично из теоремы 4.3 получаем, что $E=E(F)$.

Пусть теперь $F=F(E)$ и $E=E(F)$ и тройки $(A, B, \tilde{E})$ и $(C, D, \tilde{F})$ такие, как в определении 4.5; тогда тройка (A, B, E) интерполяционна относительно тройки $(C, D,$

$\bar{F}$). Из теоремы 4.2 тогда вытекает, что $\bar{F}\supset F(E)=F$, откуда $\bar{F}=F$. Аналогично показывается, что $\bar{E}=E$.

Следствие. *Если тройка* (A, B, E) *является оптимальной интерполяционной относительно тройки* (C, D, F), *то пространства* E *и* F *являются интерполяционными между* A, B *и* C, D *соответственно.*

Это непосредственно вытекает из теоремы 4.4 и замечаний к теоремам 4.2 и 4.3.

Теорема 4.5. *Пусть* E *и* F — *промежуточные пространства между пространствами банаховых пар* A, B *и* C, D *соответственно. Тогда справедливы утверждения:*

1. *Тройка* $(A, B, E(F(E)))$ *является оптимальной интерполяционной относительно тройки* $(C, D, F(E))$.

2. *Тройка* $(A, B, E(F))$ *является оптимальной интерполяционной относительно тройки* $(C, D, F(E(F)))$.

3. *Если тройка* $(A, B, \bar{E})$ *является оптимальной интерполяционной относительно тройки* $(C, D, \bar{F})$, $\bar{E}\supset E$ *и* $\bar{F}\supset F$, *то справедливы вложения*

$$F(E)\subset\bar{F}\subset F(E(F)),$$

$$E(F(E))\subset\bar{E}\subset E(F).$$

Доказательство. Если тройка $(A, B, \bar{E})$ — интерполяционная относительно тройки $(C, D, \bar{F})$ и $\bar{E}\supset E(F(E))$ и $\bar{F}\subset F(E)$, то тройка $(A, B, \bar{E})$ интерполяционна относительно $(C, D, F(E))$, и по теореме 4.3 $\bar{E}\subset E(F(E))$, а значит, $\bar{E}=E(F(E))$. Так как (A, B, E) интерполяционна относительно $(C, D, F(E))$, то в силу той же теоремы $E\subset E(F(E))=\bar{E}$, поэтому тройка (A, B, E) интерполяционна относительно тройки $(C, D, \bar{F})$, откуда по теореме 4.2 получаем $\bar{F}\supset F(E)$, а значит, $\bar{F}=F(E)$. Мы доказали оптимальную интерполяционность $(A, B, E(F(E)))$ относительно $(C, D, F(E))$. Аналогично этот факт проверяется для троек $(A, B, E(F))$ и $(C, D, F(E(F)))$.

Пусть теперь тройки $(A, B, \bar{E})$ и $(C, D, \bar{F})$ обладают свойствами, указанными в 3. Тогда (A, B, E) и $(A, B, \bar{E})$ интерполяционны относительно $(C, D, \bar{F})$ и соответственно (C, D, F), поэтому по теоремам 4.2 и 4.3 справедливы вложения $F(E)\subset\bar{F}$ и $\bar{E}\subset E(F)$. Из первого из этих вложений в силу (4.16) получаем $E(F(E))\subset E(\bar{F})$, но из условия оптимальности, в силу теоремы 4.4, $E(\bar{F})=\bar{E}$, поэтому $E(F(E))\subset\bar{E}$. Аналогично, из $\bar{E}\subset E(F)$ вытекает, что $\bar{F}=F(\bar{E})\subset F(E(F))$.

Теорема 4.6. *Если тройка (A, B, E) является оптимальной интерполяционной относительно тройки (C, D, F), то тройка (C, D, F) является интерполяционной для тройки (A, B, E).*

Доказательство. Из замечания к теореме 4.2 мы знаем, что пространство F является интерполяционным относительно C и D с некоторой константой c_F. По теореме 4.4 $E=E(F)$. Если $x\in F$ и $T_1\in L(CD, AB)$, то в силу (4.15)

$$\|T_1x\|_E=\|T_1x\|_{E(F)}=\sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}\|TT_1x\|_F\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{T\in\pi_1(AB,CD)}c_F\|TT_1\|_{L(CD,CD)}\|x\|_F\leqslant c_F\|T_1\|_{L(CD,AB)}\|x\|_F.$$

4. Дополняемая подпара банаховой пары. Пусть A и B — банахова пара пространств, вложенных в отделимое линейное топологическое пространство $\mathscr{A}$, и M и N — подпространства пространств A и B соответственно. Тогда пространства M и N вложены в пространство $\mathscr{A}$ и, следовательно, образуют банахову пару, которая называется *подпарой пары* A, B.

Определение 4.6. Подпара M, N называется *дополняемой*, если существует ограниченный в пространстве $A+B$ проектор P, проектирующий пространство A на M и B на N.

Оператор P будет естественно ограниченным в пространствах A и B. Пространство $A\cap B$ он будет проектировать на пространство $M\cap N$.

Пусть E — промежуточное между A и B пространство. Образ PE пространства E будет содержать в себе пересечение $M\cap N$ и содержаться в сумме $M+N$. Поступая так же, как в п. 3, мы можем на этом образе ввести структуру банахова пространства, сделав его изометричным фактор-пространству E по ядру оператора P. Используя введенные в п. 3 обозначения, мы обозначим полученное банахово пространство через $F_P(E)$. При этом $\|y\|_{F_P(E)}=\inf\limits_{y=Px}\|x\|_E$. Пространство $F_P(E)$ будет промежуточным между пространствами M и N (см. лемму 3.3).

Если теперь F — промежуточное между M и N пространство, то можно рассмотреть полный прообраз $P^{-1}F$

пространства F и в нем ввести норму $\|x\|_{E_{P^{-1}}(F)}=$ $=\max\{\|x\|_{A+B}, \|Px\|_F\}$. Как показано в п. 3, полученное банахово пространство $E_{P^{-1}}(F)$ будет промежуточным между A и B.

Пусть теперь E — интерполяционное между A и B пространство. Обозначим через C_E интерполяционную константу в неравенстве

$$\|T\|_{E\to E}\leqslant C_E\|T\|_{L(AB,\ AB)}.$$

Так как $P\in L(AB, AB)$, то оператор P будет ограниченно действовать в пространстве E и

$$\|P\|_{E\to E}\leqslant C_E\|P\|,$$

где для сокращения через $\|P\|$ обозначена $\|P\|_{L(AB,\ AB)}$. В этом случае образ PE будет подпространством в E и норма в PE, как подпространстве пространства E, эквивалентна норме пространства $F_P(E)$. В самом деле, если $y\in PE\subset E$, то $y=Py$, и поэтому $\|y\|_{F_P(E)}\leqslant\|y\|_E$. Далее при $Px=y$ $(x\in E)$ имеем $\|y\|_E\leqslant\|P\|_{E\to E}\|x\|_E$ и, следовательно,

$$\|y\|_{F_P(E)}\leqslant\|y\|_E\leqslant\inf_{Px=y}(\|P\|_{E\to E}\|x\|_E)\leqslant C_E\|P\|\|y\|_{F_P(E)}. \tag{4.17}$$

Таким образом, с точностью до изоморфизма можно считать, что $F_P(E)$ является подпространством пространства E.

Лемма 4.5. *Если E — интерполяционное между A и B пространство, то пространство $F_P(E)$ является интерполяционным между M и N. Тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки $(M, N, F_P(E))$.*

Доказательство. Если $T\in L(MN, MN)$, то $TP\in$ $\in L(AB, AB)$. В силу интерполяционности E при $y\in$ $\in F_P(E)\subset E$ элемент $TPy=Ty\in E$. Область значений оператора T лежит в $M+N$, поэтому $Ty=PTy\subset PE=F_P(E)$ и

$$\|Ty\|_{F_P(E)}\leqslant\|Ty\|_E=\|TPy\|_E\leqslant C_E\|TP\|_{L(AB,AB)}\|y\|_E\leqslant$$
$$\leqslant C_E\|T\|_{L(MN,MN)}\|P\|\|y\|_E. \tag{4.18}$$

С учетом (4.17) окончательно получаем

$$\|Ty\|_{F_P(E)}\leqslant(C_E\|P\|)^2\|T\|_{L(MN,MN)}\|y\|_{F_P(E)}.$$

Пусть теперь $T\in L(AB, MN)$; тогда $T\in L(AB, AB)$ и, следовательно, если $x\in E$, то $Tx\in E$. Далее $PTx=Tx\in$

$\in PE = F_P(E)$ и

$$\|Tx\|_{F_P(E)} \leqslant \|Tx\|_E \leqslant C_E \|T\|_{L(AB,MN)} \|x\|_E. \tag{4.19}$$

Следствие. *Пространство $F_P(E)$ изоморфно пространству $F(E)$, построенному согласно теореме* 4.2 *по тройке A, B, E.*

В самом деле, по построению пространства $F(E)$ из того, что $P \in L(AB, MN)$, следует, что пространство $F_P(E)$ вложено в пространство $F(E)$. С другой стороны, так как тройка (A, B, E) интерполяционна относительно тройки $(M, N, F_P(E))$, то по теореме 4.2 $F(E) \subset F_P(E)$. Таким образом, с точностью до изоморфизма $F(E) = F_P(E)$.

Если F — интерполяционное пространство между M и N, то, вообще говоря, пространство $E_{P^{-1}}(F)$ не будет интерполяционным между A и B. Разъясним это на примере. Положим $A = L_1(0, 1)$ и $B = L_\infty(0, 1)$. Тогда $A + B = L_1(0, 1)$. За $M(N)$ примем подпространство $L_1(0, 1)$ $(L_\infty(0, 1))$, состоящее из всех функций, анулирующихся при $t \in [1/2, 1]$. Пара M, N является дополняемой подпарой A, B. Пусть F — интерполяционное между M и N пространство, не совпадающее с $M + N$. Прообраз $P^{-1}F$ будет в нашем случае состоять из всех функций на $[0, 1]$, сужéние которых на $[0, 1/2]$ принадлежит F, а сужéние на $[1/2, 1]$ — $L_1(1/2, 1)$. Пусть функция $y_0(t)$ из $M + N$ не принадлежит F. Определим функцию: $x_0(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, $x_0(t) = y_0(1-t)$ при $1/2 < t \leqslant 1$. Очевидно, что $x_0 \in P^{-1}F$. Обозначим через T оператор, определенный равенством $Tz(t) = z(1-t)$ $(z \in L_1(0, 1))$. Этот оператор имеет норму 1 в $L_1(0, 1)$ и в $L_\infty(0, 1)$. Далее $PTx_0 = y_0 \notin F$, следовательно, $Tx_0 \overline{\in} P^{-1}F$. Таким образом, пространство $P^{-1}F$ не является интерполяционным.

Можно рассмотреть часть прообраза $P^{-1}F$, изученную в п. 3, а именно пересечение $E(F)$ прообразов $T^{-1}F$ всех операторов T из $\pi_1(AB, MN)$. Как показано в замечании к теореме 4.3, это пространство будет интерполяционным между A и B. Напомним, что норму в этом пространстве можно ввести по формуле (4.15):

$$\|x\|_{E(F)} = \sup \|Tx\|_F. \tag{4.20}$$

Заметим, что интерполяционная константа для пространства $E(F)$ равна 1 (см. стр. 44). Если F — интерполяционное между M и N пространство, то оно вложено в $E(F)$. Действительно, если $T\in\pi_1(AB, MN)$, то $T\in\pi_1(MN, MN)$, поэтому при $x\in F$

$$\|x\|_{E(F)}\leqslant C_F\|x\|_F,$$

где C_F— интерполяционная константа в неравенстве

$$\|T\|_{F\to F}\leqslant C_F\|T\|_{L(MN,MN)}. \tag{4.21}$$

Отметим еще, что $E(F)\subset P^{-1}(F)$, и поэтому $PE(F)=F$.

Нам иногда будет удобнее вводить в пространстве $E(F)$ эквивалентную норму по формуле

$$\|x\|^*_{E(F)}=\sup_{T\in\pi_1(AB,AB)}\|PTx\|_F. \tag{4.22}$$

Если $T\in\pi_1(AB, AB)$, то $\|PT\|_{L(AB,\ MN)}\leqslant\|P\|\times\|T\|_{L(AB,\ AB)}\leqslant\|P\|$, поэтому $\|P\|^{-1}PT\in\pi_1(AB, MN)$. Отсюда

$$\|x\|_{E(F)}\geqslant\sup_{T\in\pi_1(AB,AB)}\|\|P\|^{-1}PTx\|_F=\|P\|^{-1}\|x\|^*_{E(F)}.$$

С другой стороны, если $T\in\pi_1(AB, MN)$, то $PT=T\in\pi_1(AB, AB)$, поэтому

$$\|x\|^*_{E(F)}\geqslant\sup_{T\in\pi_1(AB,MN)}\|PTx\|_F=\|x\|_{E(F)}.$$

Таким образом,

$$\|x\|_{E(F)}\leqslant\|x\|^*_{E(F)}\leqslant\|P\|\|x\|_{E(F)}. \tag{4.23}$$

Интерполяционное неравенство для пространства $E(F)$ в новой норме будет иметь вид

$$\|Tx\|^*_{E(F)}\leqslant\|P\|\|Tx\|_{E(F)}\leqslant\|P\|\|T\|_{L(AB,AB)}\|x\|_{E(F)}\leqslant$$
$$\leqslant\|P\|\|T\|_{L(AB,AB)}\|x\|^*_{E(F)}. \tag{4.24}$$

Пусть теперь E — интерполяционное между A и B пространство. По лемме 4.5 подпространство $F=PE$ будет интерполяционным между M и N. По нему можно построить пространство $E(F)$. Оказывается, что E вложено в $E(F)$. В самом деле, если $T\in\pi_1(AB, MN)$, то в силу (4.19) $\|Tx\|_F\leqslant C_E\|x\|_E$ и, следовательно, $\|x\|_{E(F)}\leqslant C_E\|x\|_E$.

Подведем итог наших исследований.

Теорема 4.7. *Пусть M, N — дополняемая подпара банаховой пары A, B и P — соответствующий оператор проектирования A, B на M, N. Каждое интерполяционное между A и B пространство E оператор P проектирует на подпространство PE, являющееся интерполяционным между M и N. Пространство PE является наиболее узким из всех пространств F, для которых тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (M, N, F) (PE изоморфно $F(E)$).*

По каждому интерполяционному между M и N пространству F строится пространство $E(F)$, интерполяционное между A и B, являющееся наиболее широким среди всех интерполяционных между A и B пространств E, для которых $PE = F$.

Тройка $(A, B, E(F))$ является оптимальной интерполяционной относительно тройки (M, N, F).

Последнее утверждение теоремы вытекает из следствия леммы 4.5 и теоремы 4.4.

Мы специально выписывали констаиты в неравенствах (4.17), (4.18), (4.23) и (4.24) для того, чтобы сделать полезное

Замечание. Если $\|P\|_{L(AB,\,AB)} = 1$ и интерполяционная константа $C_E = 1$, то пространство $F_P(E)$ изометрично подпространству PE, интерполяционная константа в неравенстве типа (4.21) для пространства $F = PE$ равна 1, нормы (4.20) и (4.22) совпадают, интерполяционная константа в неравенстве (4.24) равна 1.

Отметим еще одно утверждение.

Лемма 4.6. *Если тройки (A, B, E) и (M, N, F) являются интерполяционными друг относительно друга, то F изоморфно пространству PE.*

Доказательство. Так как $P \in L(AB, MN)$, то $PE \subset F$. Оператор вложения j пространства $M+N$ в пространство $A+B$ принадлежит $L(MN, AB)$, поэтому $jF \subset \subset E$, т. е. $F \subset E$. Если учесть, что $PF = F$, то из отмеченных включений получается наше утверждение.

5. Обратимые справа отображения банаховых пар. Пусть R — линейный ограниченный оператор, определенный на банаховом пространстве E, действующий в банахово пространство F и имеющий правый обратный, т. е. такой линейный ограниченный оператор Π из F в E, что

$R\Pi=I_F$. Так как $R\Pi y=y$ при любом $y\in F$, то область значений оператора R совпадает со всем пространством F. Оператор $P=\Pi R$ будет ограниченным проектором в пространстве $E: P^2=\Pi R\Pi R=\Pi R=P$. Обозначим через E_1 подпространство, на которое проектирует P пространство E. Это подпространство совпадает с областью значений оператора Π. Действительно, если $x=\Pi y$, то $Px=\Pi R\Pi y=\Pi y=x$. Дополнительный проектор $I-P$ отображает пространство E на ядро $N(R)$ оператора R. В самом деле, каждый элемент ядра z может быть представлен в виде $z=z-\Pi Rz=(I-P)z$, и обратно, всякий элемент $(I-P)z$ принадлежит $N(R)$: $R(I-\Pi R)z=(R-R)z=\theta$. Таким образом, пространство E разлагается в прямую сумму подпространств $N(R)$ и E_1. Суже́ние R_1 оператора R на подпространство E_1 осуществляет уже изоморфное отображение пространства E_1 на пространство F, причем $\Pi=R_1^{-1}$.

Обратно, если область значений оператора R совпадает с пространством F, а ядро $N(R)$ является дополняемым подпространством E, то этот оператор обратим справа. В самом деле, если $E=N(R)\dot{+}E_1$, то можно положить $\Pi=R_1^{-1}$, где R_1— суже́ние R на E_1.

Пусть теперь A, B и C, D — две банаховы пары и $R\in L(AB, CD)$. Предположим, что существует оператор Π, определенный на $C+D$, суже́ния которого на C и D являются правыми обратными к суже́ниям оператора R на A и B соответственно. Тогда мы говорим, что R является *обратимым справа отображением пары A, B на пару C, D*. Если суже́ния R на A и B имеют правые обратные Π_1 и Π_2, то для существования оператора Π, о котором шла выше речь, совпадающего с Π_1 на C и с Π_2 на D, необходимо и достаточно, чтобы на пересечении $C\cap D$ операторы Π_1 и Π_2 совпадали.

Обозначим через M и N образы при отображении Π пространств C и D. Как объяснялось выше, эти образы будут подпространствами пространств A и B, изоморфными пространствам C и D соответственно. Оператор $P=\Pi R$ будет проектировать пространства A на M и B на N и, следовательно, M, N будет дополняемой подпарой пары A, B. Сужение R_1 оператора R на подпространство $M+N$ осуществляет изоморфизм этого пространства и пространства $C+D$. Всякому промежуточному между M и N пространству F этот изоморфизм ставит в соответствие промежуточное между C и D пространство G. При этом между интерполяционными свойствами (M, N, F) и (C, D, G) устанавливается естественное соответствие. Из теоремы 4.7 тогда непосредственно вытекает

Теорема 4.8. *Пусть R — обратимое справа отображение банаховой пары A, B на банахову пару C, D.*

Каждому интерполяционному между A и B пространству E соответствует интерполяционное между C и D пространство $G_R(E)$ с нормой

$$\|y\|_{G_R(E)} = \inf_{Rx=y} \|x\|_E.$$

Пространство $G_R(E)$ является наиболее узким из всех пространств G, для которых тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки (C, D, G).

По каждому интерполяционному между C и D пространству G строится пространство $E(G)$, интерполяционное между A и B, являющееся наиболее широким среди всех интерполяционных между A и B пространств E, для которых $RE=G$. Эквивалентная норма в пространстве $E(G)$ может быть введена по формуле

$$\|x\|_{E(G)} = \sup_{T\in\pi_1(AB,AB)} \|RTx\|_G.$$

Тройка $(A, B, E(G))$ является оптимальной интерполяционной относительно тройки (C, D, G).

Аналогично из леммы 4.6 следует

Лемма 4.7. *Если тройки (A, B, E) и (C, D, G) являются интерполяционными друг относительно друга, то пространство G изоморфно пространству $G_R(E)$.*

Отметим, что формально теорема 4.7 и лемма 4.6 являются частными случаями теоремы 4.8 и леммы 4.7. Проектор P порождает обратимое справа отображение пары A, B на пару M, N; при этом роль обратного справа отображения Π играет оператор естественного вложения пространства $M+N$ в пространство $A+B$.

Другой частный случай получается, если рассмотреть фактор-пространства пространств пары A, B по подпространствам дополняемой подпары M, N. Рассмотрим фактор-пространства $(A+B)/(M+N)$, A/M и B/N. Каждому классу смежности $x+M$ $(x\in A)$ пространства A по подпространству M отвечает содержащий его класс смежности $x+M+N$ пространства $A+B$ по подпространству $M+N$. При этом отображении разные классы смежности из A/M переходят в разные классы смежности $(A+B)/(M+N)$. В самом деле, если $x+M$ и $y+M$ содержатся в одном классе $z+M+N$, то $x-y\in M+N$ и, следовательно, $x-y=P(x-y)$. Так как $x-y\in A$, то $x-y\in M$ и классы $x+M$ и $y+M$ совпадают. Наконец,

$$\|x+M+N\|_{(A+B)/(M+N)}=\inf_{u\in M+N}\|x+u\|_{A+B}\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{u\in M}\|x+u\|_A=\|x+M\|_{A/M}.$$

Таким образом, пространства A/M и B/N вложены в пространство $(A+B)/(M+N)$ и, следовательно, образуют банахову пару. Естественная проекция $\pi:(A+B)\to\to(A+B)/(M+N)$ порождает обратимое справа отображение пары A, B на пару A/M, B/N. Обратным справа к нему будет изоморфизм, который естественно устанавливается между пространствами A/M, B/N и дополнительными к M, N подпространствами $(I-P)A$, $(I-P)B$.

Читатель легко переформулирует теорему 4.8 и лемму 4.7 для рассмотренного частного случая.

6. Интерполяционный функтор. Пусть заданы две категории $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}_1$. *Ковариантным функтором* $\mathfrak{T}$, действующим из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{C}_1$, называется пара отображений, каждое из которых обозначается обычно одной и той же буквой $\mathfrak{T}$. Одно отображение определено на объектах и ставит в соответствие каждому объекту $\mathscr{A}$ категории $\mathfrak{C}$ объект $\mathfrak{T}(\mathscr{A})$ категории $\mathfrak{C}_1$; другое отображение определено на морфизмах и сопоставляет каждому морфизму $\gamma\in\mathrm{Mor}(\mathscr{A},\mathscr{A}')$ морфизм $\mathfrak{T}(\gamma)\in\mathrm{Mor}(\mathfrak{T}(\mathscr{A}),\mathfrak{T}(\mathscr{A}'))$. Для этой пары отображений должны выполняться следующие условия:

$$\mathfrak{T}(1_{\mathscr{A}})=1_{\mathfrak{T}(\mathscr{A})}\quad(\mathscr{A}\in\mathfrak{C})\quad\text{и}\quad\mathfrak{T}(\beta\gamma)=\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T}(\gamma),$$

где $\beta\gamma$ определено в $\mathfrak{C}$.

В качестве категории $\mathfrak{C}$ возьмем категорию банаховых пар A, B, в которой морфизмами являются всевозможные операторы из $L(AB, CD)$ (A, B — первый объект, C, D — второй объект). Обозначим через $\mathfrak{C}_1$ категорию банаховых пространств E, в которой морфизмами являются линейные ограниченные операторы из $L(E, F)$.

Определение 4.7. *Интерполяционным функтором* называется функтор $\mathcal{F}$, действующий из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств, ставящий в соответствие каждой банаховой паре A, B банахово пространство $\mathcal{F}(A, B)$, являющееся промежуточным между A и B: $A\cap B\subset\mathcal{F}(A, B)\subset A+B$, а каждому оператору $T\in L(AB, CD)$ — его сужение $\mathcal{F}(T)$ на пространство $\mathcal{F}(A, B)$.

Если описанное соответствие является функтором, то оператор $\mathcal{F}(T)$ должен принадлежать множеству морфизмов $\mathrm{Mor}(\mathcal{F}(A, B), \mathcal{F}(C, D))$, т. е. быть линейным ограниченным оператором из пространства $\mathcal{F}(A, B)$ в пространство $\mathcal{F}(C, D)$. Иначе говоря, тройки $(A, B, \mathcal{F}(A, B))$ и $(C, D, \mathcal{F}(C, D))$ должны быть интерполяционными для любых банаховых пар A, B и C, D.

Простейшими примерами функторов из категории банаховых пар в категорию банаховых пространств являются функторы суммы и пересечения пространств банаховой пары. В силу леммы 4.1 эти функторы являются интерполяционными.

Интерполяционный функтор $\mathcal{F}$ называется *нормализованным*, если интерполяционная константа для любых троек $(A, B, \mathcal{F}(A, B))$ и $(C, D, \mathcal{F}(C, D))$ не больше 1. Функторы суммы и пересечения нормализованы.

Говорят, что интерполяционный функтор $\mathcal{F}$ имеет *тип* (*нормальный тип*) α, если любая тройка $(A, B, \mathcal{F}(A, B))$ является интерполяционной (нормально интерполяционной) типа α относительно любой тройки $(C, D, \mathcal{F}(C, D))$.

Исследования п. 3 позволяют дать некоторые конструкции общих интерполяционных функторов. Пусть A, B — фиксированная банахова пара и E — промежуточное между A и B пространство. Для каждой другой банаховой пары C, D (которая может и совпадать с A, B) в п. 3 построено промежуточное между C и D пространство $F(E)$. Покажем, что соответствие $\mathcal{F}(C, D) = F(E)$ порождает интерполяционный функтор. C^0, D^0 и C^1, D^1 — две банаховы пары, $F^0(E)$ и $F^1(E)$ — соответствующие промежуточные пространства. Напомним, что пространство $F^i(E)$ $(i=0, 1)$ является суммой пространств $F^i_T(E)$, где T пробегает множество $\pi_1(AB, C^iD^i)$.

Пусть $S\in\pi_1(C^0D^0,\ C^1D^1)$ и $z\in F^0(E)$. Последнее означает, что $z=\sum y_k$, где $y_k\in F^0_{T_k}(E)$ и $T_k\in\pi_1(AB,\ C^0D^0)$. Тогда $Sz=\sum Sy_k$, так как ряд $\sum y_k$ сходится в C^0+D^0, а оператор S непрерывно действует из C^0+D^0 в C^1+D^1. Далее, $y_k=T_kx_k$ $(x_k\in E)$ и, следовательно, $Sy_k=ST_kx_k$, причем $ST_k\in\pi_1(AB,\ C^1D^1)$. Для того чтобы доказать, что $Sz\in F^1(E)$, достаточно проверить, что

$$\sum \|Sy_k\|_{F^1_{ST_k}(E)}<\infty.$$

Выберем $x_k\in E$ так, что $y_k=T_kx_k$ и $\|y_k\|_{F^0_{T_k}(E)}+\varepsilon/2^k\geqslant\|x_k\|_E$. Тогда

$$\sum\|Sy_k\|_{F^1_{ST_k}(E)}\leqslant\sum\|x_k\|_E\leqslant\sum\|y_k\|_{F^0_{T_k}(E)}+\varepsilon.$$

Пользуясь произвольностью ε и беря затем inf по всем представлениям $z=\sum y_k$, получаем, что

$$\|Sz\|_{F^1(E)}\leqslant\|z\|_{F^0(E)}.$$

Таким образом мы построили нормализованный интерполяционный функтор, который обозначим через $\mathcal{F}_{(A,\,B,\,E)}$.

Если функтор $\mathcal{F}_{(A,\,B,\,E)}$ применить к паре A, B, то мы получим, вообще говоря, пространство, отличное от E. Пусть теперь E — интерполяционное между A и B пространство. Построим пространство $\mathcal{F}_{(A,\,B,\,E)}(A,\ B)$. Оно состоит из элементов вида $z=\sum y_k$, где $y_k=T_kx_k$, $T_k\in\pi_1(AB,\ AB)$, $x_k\in E$, причем $\sum\|y_k\|_{F_{T_k}(E)}<\infty$. Если $y=Tx$ $(T\in\pi_1(AB,\ AB))$, то, в силу интерполяционности E, $\|y\|_E\leqslant C_E\|x\|_E$, поэтому

$$\|y\|_{F_T(E)}=\inf_{Tx=y}\|x\|_E\geqslant C_E^{-1}\|y\|_E.$$

Тогда из сходимости ряда $\sum\|y_k\|_{F_{T_k}(E)}$ следует сходимость ряда $\sum\|y_k\|_E$, и, значит, $z\in E$. Кроме того,

$$\|z\|_{F(E)}=\inf\sum\|y_k\|_{F_{T_k}(E)}\geqslant C_E^{-1}\inf\sum\|y_k\|_E=C_E^{-1}\|z\|_E.$$

Наконец, рассматривая представление $z=Iz$, мы придем к выводу, что E содержится в $F(E)$ и $\|z\|_{F(E)} \leqslant \|z\|_E$. Таким образом, пространства E и $\mathscr{F}_{(A,B,E)}(A, B)$ изоморфны и, если $C_E=1$, то они совпадают.

Мы пришли к важному утверждению.

Теорема 4.9. *Если банахово пространство E является интерполяционным между пространствами A и B банаховой пары, то существует такой нормализованный интерполяционный функтор $\mathscr{F}$, что пространство E изоморфно пространству $\mathscr{F}(A, B)$. Если интерполяционная константа $C_E=1$, то $E=\mathscr{F}(A, B)$.*

В п. 3 по промежуточному пространству F между пространствами C и D фиксированной банаховой пары строилось для всякой другой банаховой пары A, B промежуточное пространство $E(F)$. Соответствие $\mathscr{F}(A, B)=E(F)$ порождает также интерполяционный функтор, который мы обозначим через $\mathscr{E}_{(C,D,F)}$. Если F — интерполяционное между C и D пространство, то оно изоморфно пространству $\mathscr{E}_{(C,D,F)}(C, D)$ и, если $C_F=1$, то $F=\mathscr{E}_{(C,D,F)}(C, D)$. Таким образом, получается еще один функтор, обладающий свойствами, описанными в теореме 4.9.

Оказывается, что функторы $\mathscr{F}_{(A,B,E)}$ и $\mathscr{E}_{(A,B,E)}$ являются в определенном смысле крайними: для любого функтора, обладающего свойствами, указанными в теореме 4.9, справедливы вложения

$$\mathscr{F}_{(A,B,E)}(C, D) \subset \mathscr{F}(C, D) \subset \mathscr{E}_{(A,B,E)}(C, D).$$

Доказательство приведенных фактов предоставляется читателю (см. литературные указания).

Из леммы 4.7 непосредственно следует

Теорема 4.10. *Пусть R — обратимое справа отображение банаховой пары A, B на банахову пару C, D. Тогда для всякого интерполяционного функтора $\mathscr{F}$ пространство $\mathscr{F}(C, D)$ изоморфно пространству $F_R(\mathscr{F}(A, B))$ (образу пространства $\mathscr{F}(A, B)$ при отображении R).*

Условия леммы 4.7 выполнены, так как тройки $(A, B, \mathscr{F}(A, B))$ и $(C, D, \mathscr{F}(C, D))$ интерполяционны друг относительно друга.

ГЛАВА II

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

1. Измеримые функции на пространстве с мерой. Пусть $\mathfrak{M}$ — измеримое пространство, на σ-алгебре измеримых множеств которого задана мера μ (см. [23]). В дальнейшем всегда будет предполагаться, что эта мера σ-конечна, т. е. что пространство $\mathfrak{M}$ является объединением не более чем счетного числа множеств конечной меры.

Через $\chi_e(t)$ всегда будем обозначать характеристическую функцию измеримого множества $e \subset \mathfrak{M}$. Функция $x(t)$ называется *конечнозначной*, если она принимает лишь конечное число ненулевых значений на множествах конечной меры, и *обобщенно конечнозначной*, если требование конечности меры не выполняется. Всякую обобщенно конечнозначную функцию можно записать в виде $x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \chi_{e_i}(t)$, где e_i — измеримые подмножества.

Всякая измеримая функция представляет собой предел последовательности обобщенно конечнозначных функций; при этом, если функция неотрицательна, то последовательность можно выбрать возрастающей. Если функция ограничена, то последовательность можно выбрать равномерно сходящейся.

Теорема Егорова. *Если мера $\mathfrak{M}$ конечна и последовательность почти всюду конечных измеримых функций $x_n(t)$ сходится почти всюду к почти всюду конечной функции $x(t)$, то для всякого ε существует измеримое подмножество e с мерой $\mu(e) > \mu(\mathfrak{M}) - \varepsilon$, на котором последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ равномерно.*

Говорят, что последовательность $x_n(t)$ сходится по мере к функции $x(t)$, если меры тех множеств, где $|x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon$, стремятся к нулю при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Если последовательность сходится почти всюду на пространстве с конечной мерой, то она сходится по мере. Если последовательность сходится по мере, то из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится почти всюду.

Пространство $S(\mathfrak{M}, \mu)$ всех вещественных измеримых на $\mathfrak{M}$ функций (точнее, классов эквивалентных функций) является линейным. В этом пространстве можно ввести метрику следующим образом: пусть $\nu(t)$ — некоторая интегрируемая по мере μ положительная функция; тогда положим

$$\rho(x, y) = \int \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \nu(t)\, d\mu.$$

Пространство $S(\mathfrak{M}, \mu)$ в этой метрике становится полным метрическим линейным пространством. Сходимость в этом пространстве эквивалентна сходимости по мере на каждом множестве конечной меры.

Банахово пространство всех интегрируемых на $\mathfrak{M}$ по мере μ функций (точнее, классов эквивалентных функций) обозначается через $L_1(\mathfrak{M}, \mu)$.

Теорема Лебега. *Если последовательность интегрируемых функций $x_n(t)$ сходится почти всюду к функции $x(t)$ и почти всюду $|x_n(t)| \leqslant |y(t)|$, где $y(t)$ — некоторая интегрируемая функция, то функция $x(t)$ интегрируема, и последовательность x_n сходится к x по норме пространства $L_1(\mathfrak{M}, \mu)$.*

Лемма Фату. *Если $x_n(t)$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, то*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} x_n(t)\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int x_n(t)\, d\mu.$$

Теорема Леви. *Если возрастающая последовательность измеримых неотрицательных функций $x_n(t)$ почти всюду сходится к функции $x(t)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int x_n(t)\, d\mu = \int x(t)\, d\mu.$$

2. Идеальные банаховы структуры. Не сводящееся к нулю банахово пространство E, являющееся линейным многообразием пространства $S(\mathfrak{M}, \mu)$, называется *функциональным банаховым пространством.*

В пространстве $S(\mathfrak{M}, \mu)$ имеется естественная полуупорядоченность: $x \leqslant y$ ($x, y \in S(\mathfrak{M}, \mu)$) эквивалентно тому, что $x(t) \leqslant y(t)$ почти при всех $t \in \mathfrak{M}$.

Определение 1.1. Функциональное банахово пространство E называется *идеальной банаховой структурой* или, короче, *идеальной структурой*, если из условий $|x| \leqslant |y|$, где $x(t)$ — измеримая функция, а $y \in E$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$ *).

Из определения естественно вытекает, что $\||x|\|_E = \|x\|_E$, если $x \in E$.

Приведем простейшие свойства идеальных структур.

1°. *Если $x_n \to x$ в E и последовательность $x_n(t)$ возрастает, то $x_n(t)$ почти всюду сходится к $x(t)$.*

Для доказательства заметим сначала, что $x(t) - x_n(t) \geqslant 0$. Если бы на множестве e положительной меры было бы $x(t) - x_{n_0}(t) < -\gamma$ $(\gamma > 0)$, то при всех $n > n_0$ было бы также $x(t) - x_n(t) < -\gamma$ $(t \in e)$ и $\|x - x_n\|_E \geqslant \|(x - x_n)\chi_e\|_E > \gamma \|\chi_e\|_E$, что противоречит сходимости x_n к x в E. Обозначим $z(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t)$. Тогда $x(t) - x_n(t) \geqslant x(t) - z(t) \geqslant 0$, поэтому функция $x(t) - z(t)$, а значит, и функция $z(t)$ принадлежат E. Далее $\|x - z\|_E \leqslant \|x - x_n\|_E \to 0$ и, следовательно, $x(t) = z(t)$ почти всюду.

2°. *Если последовательность y_n $(y_n \in E)$ возрастает и стремится к ∞ на множестве e положительной меры, то $\|y_n\|_E \to \infty$.*

В самом деле, обычными рассуждениями показывается, что существует множество $e' \subset e$ с $\mu(e') > 0$, на котором последовательность $y_n(t)$ равномерно стремится к ∞. Тогда характеристическая функция $\chi_{e'}(t) \in E$ и

$$\|\chi_{e'}(t)\|_E \min_{t \in e'} y_n(t) \leqslant \|y_n\|_E \to \infty.$$

3°. *Пусть $\mu(\mathfrak{M}) < \infty$, $e_k \subset \mathfrak{M}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\mu(e_k) > \delta$; тогда*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \chi_{e_k} \right\|_E \to \infty \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

*) В литературе для таких пространств встречаются названия: «банахова структура», «банахова решетка», «функциональная структура».

Обозначим $y_N(t)=\sum_{k=1}^{N} \chi_{e_k}(t)$. Последовательность y_N возрастает. Если предположить, что ее предел почти всюду конечен, то в силу конечности меры $\mathfrak{M}$ найдется множество $e'\subset\mathfrak{M}$ с мерой, сколь угодно близкой к $\mathfrak{M}$, например, $\mu(\mathfrak{M}-e')<\delta/2$, на котором последовательность $y_N(t)$ равномерно ограничена. Но

$$\int_{e'} y_N(t)\,d\mu=\sum_{k=1}^{N}\int_{e'}\chi_{e_k}(t)\,d\mu=\sum_{k=1}^{N}\mu(e_k\cap e')>N\delta/2,$$

так как $\mu(e'\cap e_k)>\delta/2$, а это противоречит ограниченности последовательности $y_N(t)$ на e'. Таким образом, предел последовательности $y_N(t)$ бесконечен на множестве положительной меры, и в силу 2° $\|y_N\|_E\to\infty$ при $N\to\infty$.

Теорема 1. *Идеальная структура вложена в пространство $S(\mathfrak{M}, \mu)$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что из условия $\|x_n\|_E\to 0$ вытекает сходимость к нулю x_n в $S(\mathfrak{M}, \mu)$, или, что то же, сходимость последовательности $x_n(t)$ по мере к нулю на любом множестве Ω конечной меры. Предположим противное: пусть существует множество Ω $(0<\mu(\Omega)<\infty)$ и положительное число $\varepsilon>0$ такие, что для некоторой подпоследовательности $x_{n_k}(t)$ неравенство $|x_{n_k}(t)|>\varepsilon$ выполняется на подмножестве $\Omega_k\subset\Omega$ с мерой $\mu(\Omega_k)>\delta$, где δ — некоторое фиксированное число. Тогда $\varepsilon\chi_{\Omega_k}(t)\leqslant|x_{n_k}(t)|$, и следовательно, $\varepsilon\|\chi_{\Omega_k}\|_E\leqslant\leqslant\|x_{n_k}\|_E$. Без ограничения общности можно считать последовательность n_k выбранной так, что $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_k}\|_E<\infty$.

Отсюда

$$\varepsilon\left\|\sum_{k=1}^{N}\chi_{\Omega_k}\right\|_E\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\|\chi_{\Omega_k}\|_E\leqslant\sum_{k=1}^{N}\|x_{n_k}\|_E\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_{n_k}\|_E<\infty,$$

что противоречит свойству 3°.

Следствие 1. *Любая пара идеальных структур (на том же множестве $\mathfrak{M}$ и с той же мерой μ) образует банахову пару.*

Следствие 2. *Если* $\sum_1^\infty \|x_n\|_E < \infty$ *и* $\sum_1^N x_n \to x$ *в* E *при* $N \to \infty$, *то ряд* $\sum_1^\infty x_n(t)$ *почти всюду абсолютно сходится к функции* $x(t)$.

Действительно, ряд $\sum_1^\infty |x_n|$ сходится в E и в силу 1° сходится почти всюду. Поэтому почти всюду сходится и ряд $\sum_1^\infty x_n(t)$. Так как E вложено в $S(\mathfrak{M}, \mu)$, то этот ряд сходится к $x(t)$ в $S(\mathfrak{M}, \mu)$ и, значит, $\sum_1^\infty x_n(t) = x(t)$ почти всюду.

4°. *Если* $0 \leqslant x \leqslant y$ *и* $y_n \to y$ *в* E, *то функции* $\min(x, y_n) = \bar{x}_n$ *сходятся к* x *в* E.

Действительно,

$$0 \leqslant x(t) - \bar{x}_n(t) = [x(t) - y_n(t)]_+ \leqslant |y(t) - y_n(t)| \ ^{*)}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \bar{x}_n\|_E \leqslant \lim_{n\to\infty} \| |y - y_n| \|_E = \lim_{n\to\infty} \|y - y_n\|_E = 0.$$

5°. *Если* $x, z \in E$, *то функции* $|x(t)|^\theta |z(t)|^{1-\theta}$ *при* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ *также принадлежат* E.

Это свойство следует из неравенств

$$|x(t)|^\theta |z(t)|^{1-\theta} \leqslant \max(|x(t)|, \ |z(t)|) \leqslant |x(t)| + |z(t)|.$$

6°. *Если* $x, z \in E$ *и при почти всех* t

$$|y(t)| \leqslant |x(t)|^\theta |z(t)|^{1-\theta} \tag{0.1}$$

при некотором $\theta \in [0, 1]$, *то*

$$\|y\|_E \leqslant \|x\|_E^\theta \|z\|_E^{1-\theta}, \tag{0.2}$$

и для всякого положительного функционала из E'

$$f(|y|) \leqslant [f(|x|)]^\theta [f(|z|)]^{1-\theta}. \tag{0.3}$$

---

*) $z^+(t) = \begin{cases} z(t) & \text{при } z(t) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } z(t) \leqslant 0. \end{cases}$

Неравенство (0.1) эквивалентно следующему:

$$|y(t)|\leqslant\theta\varepsilon^{\theta-1}|x(t)|+(1-\theta)\varepsilon^{\theta}|z(t)|$$

при всех $\varepsilon>0$. Поэтому

$$\|y\|_E\leqslant\theta\varepsilon^{\theta-1}\|x\|_E+(1-\theta)\varepsilon^{\theta}\|z\|_E$$

и

$$f(|y|)\leqslant\theta\varepsilon^{\theta-1}f(|x|)+(1-\theta)\varepsilon^{\theta}f(|z|).$$

Минимизируя правые части по ε, получим (0.2) и (0.3).

Частным случаем соотношения (0.2) является неравенство

$$\||x|^{\theta}|z|^{1-\theta}\|_E\leqslant\|x\|_E^{\theta}\|z\|_E^{1-\theta}, \tag{0.4}$$

которое переходит в неравенство Гёльдера в случае, когда $E=L_1$.

7°. *Пусть x, y, x_n, y_n — положительные элементы идеальной структуры E, причем $x_n\to x$, $y_n\to y$ в E. Тогда*

$$x_n^{\theta}y_n^{1-\theta}\to x^{\theta}y^{1-\theta} \text{ в } E.$$

Пользуясь (0.4), получаем

$$\|x^{\theta}y^{1-\theta}-x_n^{\theta}y_n^{1-\theta}\|_E\leqslant\|x^{\theta}(y^{1-\theta}-y_n^{1-\theta})\|_E+\|y_n^{1-\theta}(x^{\theta}-x_n^{\theta})\|_E\leqslant$$
$$\leqslant\|x\|_E^{\theta}\,\||y^{1-\theta}-y_n^{1-\theta}|^{1/(1-\theta)}\|_E^{1-\theta}+\|y_n\|_E^{1-\theta}\,\||x^{\theta}-x_n^{\theta}|^{1/\theta}\|_E^{\theta}.$$

Функция $|x^{\theta}-x_n^{\theta}|^{1/\theta}$ принадлежит E, так как $|x^{\theta}-x_n^{\theta}|^{1/\theta}\leqslant|x-x_n|$. Аналогично $|y^{1-\theta}-y_n^{1-\theta}|^{1/(1-\theta)}\leqslant|y-y_n|$. Следовательно,

$$\|x^{\theta}y^{1-\theta}-x_n^{\theta}y_n^{1-\theta}\|_E\leqslant\|x\|_E^{\theta}\|y-y_n\|_E^{1-\theta}+\|y_n\|_E^{1-\theta}\|x-x_n\|_E^{\theta}\to 0.$$

Рассмотрим некоторые операции, которые позволяют по одним идеальным структурам строить другие.

Сужение идеальной структуры. Если $\mathfrak{M}_1$ — измеримое подмножество $\mathfrak{M}$ положительной меры и $\chi_1(t)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{M}_1$, то функции $\chi_1(t)x(t)$ $(x\in E)$ образуют подпространство E_1 пространства E. Так как $\|\chi_1x\|_E\leqslant\|x\|_E$, то умножение на χ_1 представляет собой ограниченный единицей проектор на это подпространство. С другой стороны, элементы банахова пространства E_1 естественно отождествляются с сужениями функций из E на множество $\mathfrak{M}_1$. Таким образом, это пространство можно рассматривать как функциональное банахово пространство на $\mathfrak{M}_1$ с мерой μ_1, являющейся сужением меры μ на $\mathfrak{M}_1$. В дальнейшем часто о пространстве E_1 говорится как о «пространстве E на $\mathfrak{M}_1$».

Идеальные структуры с весом. Пусть $\rho(t)$ — измеримая почти всюду положительная функция (вес) на пространстве $\mathfrak{M}$. Тогда совокупность всех измеримых функций (классов) $x(t)$, для которых функции $\rho(t)x(t)$ принадлежат данной идеальной структуре, наделенная нормой

$$\|x\|_{E_{\rho(t)}}=\|\rho x\|_E,$$

очевидно образует идеальную структуру на $\mathfrak{M}$, которая обозначается через $E_{\rho(t)}$.

Сумма и пересечение идеальных структур. Если E_0 и E_1—две идеальные структуры на одном и том же пространстве $\mathfrak{M}$ с той же мерой μ, то очевидно, что их пересечение $E_0\cap E_1$—также идеальная структура. Покажем, что этим же свойством обладает их сумма E_0+E_1.

Пусть $y\in E_0+E_1$ и $|x|\leqslant|y|$. Для заданного $\varepsilon>0$ выберем $y_0\in E_0$ и $y_1\in E_1$ так, чтобы $\|y_0\|_{E_0}+\|y_1\|_{E_1}\leqslant\leqslant\|y\|_{E_0+E_1}+\varepsilon$ и $y=y_0+y_1$. Положим $h(t)=x(t)/y(t)$, если $y(t)\neq0$, и $h(t)=0$, если $y(t)=0$. Тогда $x=y_0h+y_1h$, и так как $|y_ih|\leqslant|y_i|$ $(i=0, 1)$, то $y_ih\in E_i$. Поэтому $x\in E_0+E_1$ и

$$\|x\|_{E_0+E_1}\leqslant\|y_0h\|_{E_0}+\|y_1h\|_{E_1}\leqslant$$
$$\leqslant\|y_0\|_{E_0}+\|y_1\|_{E_1}\leqslant\|y\|_{E_0+E_1}+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε $\|x\|_{E_0+E_1}\leqslant|y|_{E_0+E_1}$.

Дискретизация идеальной структуры. Пусть $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$—разбиение $\mathfrak{M}$ на непересекающиеся множества $\mathfrak{M}_n$ конечной положительной меры μ_n. Предположим, что $\chi_{\mathfrak{M}_n}\in E$. Такое разбиение всегда существует, если в E содержится почти всюду положительная функция. Обозначим через E^c совокупность всех функций из E, постоянных на каждом множестве $\mathfrak{M}_n$. Эта совокупность является подпространством пространства E. На множестве натуральных чисел $\mathbf{N}_+$ введем меру μ' по формуле $\mu'(\{n\})=\mu_n$. Тогда пространство E^c можно отождествить с пространством dE всех функций $x(n)$ на $\mathbf{N}_+$ с конечной нормой $\|x\|_{dE}=\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(n)\chi_{\mathfrak{M}_n}\|_E$. Пространство dE будет идеальной структурой. Мы будем говорить, что структура dE получена *дискретизацией структуры* E.

По разбиению $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ можно построить оператор усреднения

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\mathfrak{M}_n} x(s)\,d\mu\,\chi_{\mathfrak{M}_n}(t).$$

Если этот оператор ограничен в E, то он отображает E на E^c. Оператор

$$T^d x=\left\{\frac{1}{\mu_n}\int\limits_{\mathfrak{M}_n} x(s)\,d\mu\right\}$$

тогда отображает E на dE. Оператор вложения $dE\to E^c$ является для него правым обратным.

3. Специальные классы идеальных структур. Говорят, что идеальная структура обладает *свойством Фату*, если из того, что последовательность функций $x_n(t)\in E$ сходится почти всюду к функции $x(t)$ и ограничена в E ($\|x_n\|\leqslant M$), следует, что $x\in E$ и $\|x\|_E\leqslant\varliminf\|x_n\|_E$.

Норма в идеальной структуре E называется *абсолютно непрерывной*, если для функции $x\in E$ и любой убывающей последовательности измеримых множеств e_n с пустым пересечением $\|\chi_{e_n}x\|_E\to 0$ при $n\to\infty$. Структура с абсолютно непрерывной нормой называется *правильной*.

Свойство абсолютной непрерывности нормы тесно связано с сепарабельностью пространства E. Мера μ называется *сепарабельной*, если существует такая счетная система Γ измеримых множеств в $\mathfrak{M}$, что для всякого $\varepsilon>0$ и измеримого множества $e\subset\mathfrak{M}$ найдется множество $e'\subset\Gamma$ такое, что $\mu(e\setminus e'\cup e'\setminus e)<\varepsilon$. Оказывается, что идеальная структура E сепарабельна тогда и только тогда, когда мера μ сепарабельна, а норма в E абсолютно непрерывна.

Носителем $\mathfrak{N}$ идеальной структуры E называется наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из E равны нулю. В идеальной структуре всегда существует функция, положительная во всех точках носителя.

Ассоциированным пространством E^1 для идеальной структуры E называется совокупность всех измеримых функций $y(t)$ на $\mathfrak{M}$, носители которых содержатся в носителе E, для которых

$$\|y\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E=1} \int x(t)\, y(t)\, dt < \infty.$$

Ассоциированное пространство само является идеальной структурой. Оно содержится в сопряженном к E пространстве E' и образует в нем подпространство. Пространство E^1 совпадает со всем сопряженным пространством тогда и только тогда, когда норма в E абсолютно непрерывна.

По пространству E^1 строится второе ассоциированное пространство $E^{11} = (E^1)^1$. Пространство E естественно вкладывается в пространство E^{11}; при этом $\|x\|_{E^{11}} \leqslant \|x\|_E$ $(x \in E)$. Если пространство E — сепарабельно, то $\|x\|_{E^{11}} = \|x\|_E$ $(x \in E)$, т. е. пространство E изометрически вложено в пространство E^{11}. Если пространство E обладает свойством Фату, то $E^{11} = E$.

Доказательства перечисленных выше утверждений можно найти в [7], [37].

Отметим еще одно обобщение известного неравенства Минковского: пусть $u(t, \tau)$ — такая функция двух переменных $t, \tau \in \mathfrak{M}$, что почти при каждом фиксированном t она как функция τ принадлежит идеальной структуре E, функция $\|u(t, \tau)\|_E$ измерима и

$$\int \|u(t, \tau)\|_E\, dt < \infty.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left\| \int u(t, \tau)\, dt \right\|_{E^{11}} \leqslant \int \|u(t, \tau)\|_E\, dt. \tag{0.5}$$

Действительно, при $z \in E^1$ получаем

$$\int |u(t, \tau)|\, |z(\tau)|\, d\tau \leqslant \|u(t, \tau)\|_E \|z\|_{E^1},$$

поэтому по теореме Фубини

$$\left\| \int u(t, \tau)\, dt \right\|_{E^1} \leqslant \sup_{\|z\|_{E^1} \leqslant 1} \int \left[\int |u(t, \tau)|\, |z(\tau)|\, dt \right] d\tau =$$

$$= \sup_{\|z\|_{E^1} \leqslant 1} \int \left[\int |u(t, \tau)|\, |z(\tau)|\, d\tau \right] dt = \int \|u(t, \tau)\|_E\, dt.$$

4. Пространства Лебега. Два пространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ с мерами μ_1 и μ_2 называются *изоморфными*, если после отбрасывания из них подмножеств меры нуль можно установить взаимно однозначное соответствие между оставшимися частями, сохраняющее классы измеримых множеств и меру множеств.

Пространства, которые изоморфны интервалам $(0, a)$ вещественной оси (с конечным или бесконечным a) с мерой Лебега, называются здесь *пространствами Лебега.* Имеется аксиоматическое определение пространств Лебега. В нем требуется сепарабельность меры, ее непрерывность (мера любой точки равна нулю) и некоторое свойство полноты, которое здесь не формулируется (см. [138]). Важным свойством пространства Лебега является то, что всякое его измеримое подмножество конечной меры также является пространством Лебега. Пространство $\mathbf{R}^n$ с мерой Лебега естественно является пространством Лебега и, следовательно, любое измеримое множество в $\mathbf{R}^n$ конечной меры есть пространство Лебега. Отсюда, в частности, следует, что для двух множеств в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно с равными ненулевыми конечными мерами существует взаимно однозначное отображение одного множества на другое, сохраняющее меру всех измеримых подмножеств.

§ 1. Положительные функции на полуоси и их функции растяжения

1. Классы положительных функций на полуоси $(0, \infty)$. Функция $\psi(t)$, заданная на интервале (отрезке) I вещественной прямой, называется *вогнутой* (*выпуклой*) на нем, если выполняется неравенство

$$\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[\psi(t_1) + \psi(t_2)];$$

$$\left(\psi\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[\psi(t_1) + \psi(t_2)]\right) \quad t_1, t_2 \in I. \qquad (1.1)$$

Свойства вогнутых (выпуклых) функций хорошо известны, и мы напомним без доказательств лишь некоторые из них, отсылая читателя к книгам [11], [26].

Если вогнутая функция измерима, то она непрерывна. Если она ограничена снизу на каком-нибудь отрезке, внутреннем к открытому интервалу I, то она также непрерывна на I. В частности, неотрицательная вогнутая на интервале функция непрерывна. Для непрерывной вогнутой функции из (1.1) вытекает неравенство Иенсена

$$\psi((1-\alpha)t_1+\alpha t_2)\geqslant(1-\alpha)\psi(t_1)+\alpha\psi(t_2). \qquad (1.2)$$

Непрерывная вогнутая функция — абсолютно непрерывна; она имеет производную всюду, за исключением счетного множества точек; эта производная является убывающей функцией*).

В дальнейшем нас будут интересовать положительные вогнутые функции на полуоси $(0, \infty)$. Как указывалось выше, такая функция всегда непрерывна. Из неравенства (1.2) следует, что $\psi((1-\alpha)t_1+\alpha t_2)>\alpha\psi(t_2)$. Устремляя t_1 к нулю, получаем $\psi(\alpha t_2)\geqslant\alpha\psi(t_2)$. Это говорит о том, что если положить $\psi(0)=0$, то неравенство вогнутости (1.2) будет выполнено для всех точек замкнутой полуоси $[0, \infty)$. Если в неравенстве (1.2) обозначить $t=(1-\alpha)t_1+\alpha t_2$, то оно примет вид

$$\psi(t)\geqslant\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\psi(t_1)+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\psi(t_2) \qquad (t_1\leqslant t\leqslant t_2). \qquad (1.3)$$

Отсюда видно, что функция $\psi(t)$ возрастает. Действительно, если предположить, что $\psi(t)<\psi(t_1)$ $(t_1<t)$, то при достаточно больших t_2 из (1.3) получится, что $\psi(t_2)<0$. Это противоречит условию.

Неравенство (1.3) можно еще записать в виде

$$\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1}\geqslant\frac{\psi(t_2)-\psi(t_1)}{t_2-t_1}. \qquad (1.4)$$

Таким образом, неравенство вогнутости (1.2) эквивалентно тому, что функция $\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1}$ при любом

*) Следуя Н. Бурбаки, мы не применяем термин *неубывающая* (*невозрастающая*) функция, а говорим о *возрастающих* (*убывающих*) функциях и *строго возрастающих* (*строго убывающих*) функциях.

$t_1 \in [0, \infty)$ убывает. В частности, если положить $t_1=0$, то получим, что функция $\psi(t)/t$ убывает.

Нетрудно проверить, что inf любого множества положительных вогнутых функций будет обладать свойством (1.2) и, следовательно, будет либо положительной вогнутой функцией, либо тождественным нулем. Если теперь $\varphi(t)$ такая положительная функция, что для нее имеется вогнутая мажоранта $\psi_0(t): \varphi(t) \leqslant \psi_0(t)$ $(0<t<\infty)$, то inf всех вогнутых мажорант функции $\varphi(t)$ будет наименьшей вогнутой мажорантой функции $\varphi(t)$. Обозначим эту мажоранту через $\tilde{\varphi}(t)$. Дадим ее конструктивное описание. Из неравенства (1.2) индукцией получается неравенство

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(t_i)$$

для любого $n \geqslant 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Поэтому если обозначить $t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i$, то

$$\tilde{\varphi}(t) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{\varphi}(t_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(t_i).$$

Обозначим

$$\psi(t) = \sup \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(t_i)$$

$$\left(n = 1, 2, \ldots; \quad \lambda_i \geqslant 0; \quad \sum_{1}^{n} \lambda_i = 1; \quad \sum_{1}^{n} \lambda_i t_i = t\right).$$

Тогда из предыдущего следует, что $\varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t)$. Функция $\psi(t)$ вогнута. Действительно, если $t', t'' \in (0, \infty)$, то найдутся λ_i, μ_i, t_i' и t_i'' такие, что $\sum_{1}^{n'} \lambda_i \varphi(t_i') \geqslant \psi(t') - \varepsilon$, $\sum_{1}^{n''} \mu_i \varphi(t_i'') \geqslant \psi(t'') - \varepsilon$.

Тогда

$$(1-\alpha)\sum_1^{n'}\lambda_i\varphi(t_i') + \alpha\sum_1^{n''}\mu_i\varphi(t_i'') > (1-\alpha)\psi(t') + \alpha\psi(t'') - \varepsilon.$$

И так как $\sum\limits_1^{n'}(1-\alpha)\lambda_i + \sum\limits_1^{n''}\alpha\mu_i = 1$ и $\sum\limits_1^{n'}(1-\alpha)\lambda_i t_i' + \sum\limits_1^{n''}\alpha\mu_i t_i'' = (1-\alpha)t' + \alpha t''$, то

$$\psi((1-\alpha)t' + \alpha t'') \geqslant (1-\alpha)\psi(t') + \alpha\psi(t'') - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает, что функция вогнута, а значит, по определению наименьшей вогнутой мажоранты $\psi(t) = \tilde{\varphi}(t)$. Таким образом,

$$\tilde{\varphi}(t) = \sup \sum_1^n \lambda_i\varphi(t_i)$$

$$\left(n = 1, 2, \ldots;\quad \lambda_i \geqslant 0;\quad \sum_1^n \lambda_i = 1;\quad \sum_1^n \lambda_i t_i = t\right). \tag{1.5}$$

Две положительные на полуоси $(0, \infty)$ функции называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1\psi(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant C_2\psi(t)$$

при всех $t > 0$.

Теорема 1.1. *Для того чтобы положительная функция $\varphi(t)$ была эквивалентной положительной вогнутой функции, необходимо и достаточно, чтобы при любых положительных t_0 и t_1 $(t_0 < t_1)$ выполнялись неравенства*

$$\varphi(t_0) \leqslant k\varphi(t_1), \qquad \varphi(t_1)/t_1 \leqslant k\varphi(t_0)/t_0 \tag{1.6}$$

с некоторой константой k. При этом за эквивалентную вогнутую функцию может быть принята наименьшая вогнутая мажоранта $\tilde{\varphi}(t)$ функции $\varphi(t)$.

Доказательство. Необходимость. Из определения эквивалентных функций получаем

$$\varphi(t_0) \leqslant C_2\psi(t_0) \leqslant C_2\psi(t_1) \leqslant \frac{C_2}{C_1}\varphi(t_1)$$

и

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} \leqslant \frac{C_2\psi(t_1)}{t_1} \leqslant \frac{C_2\psi(t_0)}{t_0} \leqslant \frac{C_2}{C_1}\frac{\varphi(t_0)}{t_0},$$

т. е. (1.6) выполнено с константой $k = C_2/C_1$.

Достаточность. По определению, $\tilde{\varphi}(t) \geqslant \varphi(t)$. Далее в силу формулы (1.5) и неравенств (1.6)

$$\tilde{\varphi}(t) = \sup \sum_1^n \lambda_i \varphi(t_i) \leqslant \sup \sum_1^n \lambda_i k \max\left\{1, \frac{t_i}{t}\right\} \varphi(t) \leqslant$$
$$\leqslant k \sup\left\{\sum_1^n \lambda_i + \sum_1^n \lambda_i \frac{t_i}{t}\right\} \varphi(t) = 2k\varphi(t).$$

Таким образом, $\frac{1}{2k}\tilde{\varphi}(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t)$.

Определение 1.1. Функция $\varphi(t)$ на полуоси $[0, \infty)$ называется *квазивогнутой*, если: 1) $\varphi(0) = 0$; 2) функция $\varphi(t)$ положительна и возрастает при $t > 0$; 3) функция $\varphi(t)/t$ убывает при $t > 0$.

Из предыдущего следует, что положительная вогнутая на полуоси $(0, \infty)$ функция, доопределенная в нуле нулем, будет квазивогнутой на $[0, \infty)$. Обратное, вообще говоря, не верно. Так, функция, определенная равенствами

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 0, \\ 0{,}5 & \text{при } 0 < t \leqslant 1, \\ 0{,}5x & \text{при } t > 1, \end{cases}$$

квазивогнута, но не вогнута.

Из теоремы 1.1 вытекает

Следствие. *Всякая квазивогнутая функция* $\varphi(t)$ *эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте* $\tilde{\varphi}(t)$, *причем*

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \tilde{\varphi}(t). \tag{1.7}$$

Всякая квазивогнутая функция непрерывна при $t > 0$. Действительно, если бы было $\varphi(t_0 - 0) < \varphi(t_0 + 0)$ при некотором $t_0 > 0$, то для достаточно близких к t_0 точек t' и t'' ($t' < t_0 < t''$) было бы $\varphi(t')/t' < \varphi(t'')/t''$, что противоречит определению 1.1.

Лемма 1.1. *Пусть* $\Delta_i=(t_i', t_i'')$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — *система попарно непересекающихся интервалов на полуоси, и* $\sum_1^n |\Delta_i|=d$. *Тогда для любой квазивогнутой функции* $\varphi(t)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} [\varphi(t_i'')-\varphi(t_i')] \leqslant 2\varphi(d). \tag{1.8}$$

В частности, если $\varphi(+0)=0$, *то функция* $\varphi(t)$ *абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Разобьем сумму, стоящую слева в (1.8), на две: $\sum'$ и $\sum''$, где $\sum'$ распространена на те интервалы, которые лежат левее d, а $\sum''$ — на интервалы, лежащие правее d (если точка d принадлежит одному из интервалов, то правую его часть относим к $\sum''$, левую — к $\sum'$). Тогда в силу монотонности $\varphi(t)$

$$\sum{}' [\varphi(t_i'')-\varphi(t_i')] \leqslant \varphi(d).$$

Далее, при $d \leqslant t_i'$

$$\varphi(t_i'')-\varphi(t_i') = \frac{\varphi(t_i'')}{t_i''}t_i'' - \frac{\varphi(t_i')}{t_i'}t_i' \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varphi(t_i')}{t_i'}(t_i''-t_i') \leqslant \frac{\varphi(d)}{d}(t_i''-t_i')$$

и, следовательно,

$$\sum{}'' [\varphi(t_i'')-\varphi(t_i')] \leqslant \frac{\varphi(d)}{d}\sum{}''(t_i''-t_i') \leqslant \varphi(d).$$

Неравенство (1.8) установлено, а из него непосредственно следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Заметим, что неравенство (1.8) — точное. Если рассмотреть пример квазивогнутой функции, приведенный на стр. 70, то при сколь угодно малом $\delta>0$ для интервалов $(0, \delta)$ и $(1, 2-\delta)$ имеем $d=1$ и

$$\varphi(\delta)-\varphi(0)+\varphi(2-\delta)-\varphi(1)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\delta)=2\varphi(1)-\frac{1}{2}\delta.$$

Если $\varphi(+0)>0$, то квазивогнутая функция абсолютно непрерывна на каждом луче $[a, \infty)$ $(a>0)$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть квазивогнутую функцию

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}\varphi(a) & \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant a,\\ \varphi(t) & \text{при} \quad t\geqslant a.\end{cases}$$

Сумма двух квазивогнутых функций, очевидно, квазивогнута. Если sup семейства квазивогнутых функций конечен хотя бы в одной точке, отличной от 0, то он представляет собой квазивогнутую функцию. Аналогичным свойством обладает inf, если он — не тождественный нуль.

Определение 1.2. Положительная функция $u(t)$, заданная на интервале (отрезке) I вещественной оси, называется *логарифмически выпуклой*, если функция $\ln u(t)$ выпукла на I.

Из (1.1) следует, что это определение эквивалентно требованию

$$u^2\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\leqslant u(t_1)\,u(t_2). \tag{1.9}$$

Если функция $u(t)$ непрерывна, то из неравенства (1.3) для выпуклой функции вытекает неравенство

$$u(t)\leqslant [u(t_1)]^{\frac{t_2-t}{t_2-t_1}}\,[u(t_2)]^{\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}. \tag{1.10}$$

Отметим важное свойство логарифмически выпуклых функций: сумма двух логарифмически выпуклых функций является также логарифмически выпуклой функцией.

Для доказательства заметим, что неравенство (1.9) эквивалентно тому, что квадратичная форма

$$u(t_1)\,\xi^2+2u\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\xi\eta+u(t_2)\,\eta^2$$

является неотрицательной. Так как сумма двух неотрицательных квадратичных форм неотрицательна, то ясно, что при сложении функций свойство их логарифмической выпуклости не изменяется.

Очевидно, что произведение логарифмически выпуклых функций также логарифмически выпукло.

Определение 1.3. Функция $\nu(t)$, определенная на оси $(-\infty, \infty)$ или полуоси $(0, \infty)$, называется *полуаддитивной*, если выполнено неравенство

$$\nu(t_1+t_2)\leqslant \nu(t_1)+\nu(t_2). \tag{1.11}$$

Свойства полуаддитивных функций подробно изложены в книге [26].

Отметим, что, например, всякая квазивогнутая на полуоси $(0, \infty)$ функция является полуаддитивной на $(0, \infty)$. Действительно,

$$\nu(t_1+t_2)=t_1\frac{\nu(t_1+t_2)}{t_1+t_2}+t_2\frac{\nu(t_1+t_2)}{t_1+t_2}\leqslant$$
$$\leqslant t_1\frac{\nu(t_1)}{t_1}+t_2\frac{\nu(t_2)}{t_2}=\nu(t_1)+\nu(t_2).$$

Если полуаддитивная функция отлична от $+\infty$ в каждой точке, то она ограничена сверху на любом конечном отрезке, лежащем в ее области определения; если к тому же она отлична от $-\infty$, то она ограничена на каждом таком отрезке. Таким образом, всюду конечная полуаддитивная функция может становиться неограниченной лишь при приближении к концам интервала ее определения. Поведение ее вблизи концов описывается следующей важной теоремой, которую мы приведем с доказательством.

Теорема 1.2. *Если функция $\nu(t)$ всюду конечна и полуаддитивна на всей оси $(-\infty, \infty)$ и если*

$$\inf_{t>0}\frac{\nu(t)}{t}=\beta \quad \text{и} \quad \sup_{t<0}\frac{\nu(t)}{t}=\alpha, \tag{1.12}$$

то

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\nu(t)}{t}=\beta \quad \text{и} \quad \lim_{t\to-\infty}\frac{\nu(t)}{t}=\alpha. \tag{1.13}$$

При этом $-\infty<\alpha\leqslant\beta<+\infty$.

Доказательство. Так как $\nu(t)$ всюду конечна, то β либо конечно, либо равно $-\infty$, а α либо конечно, либо равно $+\infty$. Предположим, что β конечно. Тогда найдется такое $t_0>0$, что $\nu(t_0)/t_0<\beta+\varepsilon$. Пусть теперь $t>t_0$. Существует целое n такое, что $(n+1)t_0\leqslant t\leqslant (n+2)t_0$. Тогда

$$\beta\leqslant\frac{\nu(t)}{t}\leqslant\frac{\nu(nt_0)}{t}+\frac{\nu(t-nt_0)}{t}\leqslant\frac{n\nu(t_0)}{t}+\frac{\nu(t-nt_0)}{t}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{nt_0}{(n+1)t_0}(\beta+\varepsilon)+\frac{\nu(t-nt_0)}{t}.$$

Величина $t-nt_0$ изменяется на отрезке $[t_0, 2t_0]$, на котором функция $\nu(t)$ ограничена. Поэтому правая часть при $t\to\infty$ стремится к $\beta+\varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\nu(t)}{t}=\beta$. Аналогично этот факт доказывается в случае, когда $\beta=-\infty$. Точно так же рассматривается второй предел в (1.13).

Далее заметим, что $\nu(0)\leqslant\nu(0)+\nu(0)$ и, следовательно, $\nu(0)\geqslant 0$. Пользуясь снова соотношением (1.11), получаем, что $0\leqslant\nu(0)\leqslant\nu(t)+\nu(-t)$. Разделив на t и перейдя к пределу при $t\to\infty$, получим неравенство $\alpha\leqslant\beta$. Тогда $-\infty<-\nu(-1)\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\nu(1)<\infty$, и теорема полностью доказана.

Доказанная теорема говорит, что всюду конечная полуаддитивная функция на всей оси асимптотически ведет себя на $+\infty$ и $-\infty$, как некоторые линейные функции. Отметим, что поведение полуаддитивной функции на полуоси может быть более сложным (см. [26]).

Определение 1.4. Положительная всюду конечная на $(0, \infty)$ функция $v(t)$ называется *полумультипликативной*, если выполнено неравенство

$$v(t_1t_2)\leqslant v(t_1)\,v(t_2). \tag{1.14}$$

Очевидно, что если ввести переменную $s=\ln t$, то функция $\nu(s)=\ln v(e^s)$ будет всюду конечной полуаддитивной функцией на всей оси $-\infty<s<\infty$. Применение теоремы 1.2 к этой функции непосредственно приводит к утверждению:

Теорема 1.3. *Для каждой полумультипликативной функции $v(t)$ существуют числа α и β такие, что*

$-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty$ *и*

$$v(t)\geqslant t^{\beta}\quad \textit{при}\quad t>1\quad \textit{и}\quad v(t)\geqslant t^{\alpha}\quad \textit{при}\quad t<1. \tag{1.15}$$

Для любого $\varepsilon>0$ $v(t)\leqslant t^{\beta+\varepsilon}$ *при достаточно больших* t *и* $v(t)\leqslant t^{\alpha-\varepsilon}$ *при* t, *достаточно близких к нулю. При этом*

$$\alpha=\lim_{t\to 0}\frac{\ln v(t)}{\ln t}=\sup_{0<t<1}\frac{\ln v(t)}{\ln t},$$

$$\beta=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln v(t)}{\ln t}=\inf_{t>1}\frac{\ln v(t)}{\ln t}.$$

Следствие 1. *Если* $v(t)$ — *полумультипликативная функция, и* $v(t_0)<t_0^{\mu_0}$ *при некотором* $t_0>1$ (*при некотором* $t_0<1$), *то* $v(t)<t^{\mu}$ *при достаточно больших* t (*при достаточно близких к нулю* t), *где* μ — *некоторое число* $<\mu_0$ (μ — *некоторое число* $>\mu_0$).

Доказательство. Если $v(t_0)<t_0^{\mu_0}$ при $t_0>1$, то $\beta\leqslant\ln v(t_0)[\ln t_0]^{-1}<\mu_0$. Выбирая μ так, что $\beta<\mu<\mu_0$ и применяя теорему 1.3 с $\varepsilon=\mu-\beta$, мы придем к требуемому утверждению.

Аналогично рассматривается второй случай.

Следствие 2. Если $v(t)$ — полумультипликативная функция, и $v(t)=o(t^{\mu_0})$ при $t\to\infty$ (при $t\to 0$), то существует число $\mu_1<\mu_0$ ($\mu_1>\mu_0$) такое, что $v(t)=o(t^{\mu_1})$ при $t\to\infty$ (при $t\to 0$).

Доказательство непосредственно вытекает из предыдущего следствия.

2. Функции растяжеиия положительной функции на полуоси. Пусть $\psi(t)$ — положительная всюду конечная функция на полуоси $(0, \infty)$. Введем в рассмотрение функцию

$$M_{\psi}(s)=\sup_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}\quad (0<s<\infty), \tag{1.16}$$

которую назовем *функцией растяжения функции* $\psi(t)$. Очевидно, что

$$\inf_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{\psi(t)}=\inf_{0<\tau<\infty}\frac{\psi(\tau)}{\psi(s^{-1}\tau)}=$$

$$=\left[\sup_{0<\tau<\infty}\frac{\psi(s^{-1}\tau)}{\psi(\tau)}\right]^{-1}=[M_{\psi}(s^{-1})]^{-1}\leqslant M_{\psi}(s). \tag{1.17}$$

Функция $M_\psi(s)$ удовлетворяет соотношению полумультипликативности (1.14). Действительно,

$$M_\psi(s_1s_2) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(s_1s_2t)}{\psi(t)} \leqslant \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(s_1s_2t)}{\psi(s_2t)} \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(s_2t)}{\psi(t)} = M_\psi(s_1)\, M_\psi(s_2). \quad (1.18)$$

Из этого неравенства следует, что $M_\psi(s)$ будет всюду конечной, если она ограничена в окрестности единицы.

Если функция $M_\psi(s)$ — всюду конечная, то она полумультипликативна, и в силу теоремы 1.2 для нее существуют два числа γ_ψ и δ_ψ $(0<\gamma_\psi\leqslant\delta_\psi<\infty)$ такие, что

$$M_\psi(s) \geqslant s^{\delta_\psi} \text{ при } s>1 \text{ и } M_\psi(s)\geqslant s^{\gamma_\psi} \text{ при } s<1, \quad (1.19)$$

и для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших s

$$M_\psi(s) \leqslant s^{\delta_\psi+\varepsilon}, \quad (1.20)$$

при достаточно малых s —

$$M_\psi(s) \leqslant s^{\gamma_\psi-\varepsilon}. \quad (1.21)$$

Числа γ_ψ **и** δ_ψ будем называть *нижним* и *верхним показателями растяжения функции* $\psi(t)$.

Объединяя неравенства (1.17), (1.20) и (1.21), можно сказать, что при достаточно больших s

$$s^{\gamma_\psi-\varepsilon} \leqslant [M_\psi(s^{-1})]^{-1} \leqslant M_\psi(s) \leqslant s^{\delta_\psi+\varepsilon}. \quad (1.22)$$

Если положительная функция $\varphi(t)$ возрастает, то $M_\varphi(s)\leqslant 1$ при $s<1$ и, следовательно, в силу (1.19) $s^{\gamma_\varphi}\leqslant 1$, т. е. $\gamma_\varphi\geqslant 0$. Пусть функция квазивогнута; тогда $\frac{\varphi(st)}{st}\leqslant\frac{\varphi(t)}{t}$ при $s>1$ и, значит, $\frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}\leqslant s$. Отсюда следует, что $M_\varphi(s)\leqslant s$ и, следовательно, $\delta_\varphi\leqslant 1$. Таким образом, для квазивогнутой функции $\varphi(t)$ справедливы неравенства

$$1 \leqslant [M_\varphi(s^{-1})]^{-1} \leqslant M_\varphi(s) \leqslant s \quad \text{при} \quad s>1, \quad (1.23)$$

$$0 \leqslant \gamma_\varphi \leqslant \delta_\varphi \leqslant 1. \quad (1.24)$$

Из определения показателей растяжения видно, что для эквивалентных функций они совпадают, поэтому если функция эквивалентна вогнутой, то для нее выполнены неравенства (1.24). Для проверки того, что функция эквивалентна вогнутой, полезна

Лемма 1.2. *Если для функции $\varphi(t)$ при некоторых s_0, $s_1>1$ выполнены неравенства $M_\varphi(s_0^{-1})\leqslant 1$ и $M_\varphi(s_1)\leqslant s_1$, и на некотором отрезке $[1, a]$ функция $M_\varphi(s)$ ограничена, то функция $\varphi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.*

Доказательство. Достаточно проверить, что при любых $t_0<t_1$ для функции $\varphi(t)$ выполняются неравенства (1.6) с некоторой константой k.

Обозначим $C=\sup\limits_{1\leqslant s\leqslant a} M_\varphi(s)$. Из неравенства полумультипликативности (1.18) вытекает, что на отрезке $[1, a^r]$ функция $M_\varphi(s)$ не превосходит число C^r. Если выбрать целое r так, чтобы было $a^r\geqslant s_0$, то $M_\varphi(s)$ не будет превосходить C^r на отрезке $[1, s_0]$. Отсюда следует, что на $[t_1, s_0t_1]$ выполняются неравенства $\varphi(t)\leqslant\varphi(t_1)M_\varphi\left(\frac{t}{t_1}\right)\leqslant$ $\leqslant C^r\varphi(t_1)$. Пусть целое i выбрано так, что $s_0^it_0\leqslant t_1\leqslant s_0^{i+1}t_0$. Из условия $M_\varphi(s_0^{-1})\leqslant 1$ следует, что $\varphi(t)\leqslant\varphi(s_0t)$, поэтому

$$\varphi(t_0)\leqslant\varphi(s_0^{i+1}t_0)\leqslant C^r\varphi(t_1). \tag{1.25}$$

Выберем теперь целое j так, чтобы было $s_1^{-(j+1)}t_1\leqslant$ $\leqslant t_0\leqslant s_1^{-j}t_1$. Тогда из неравенства (1.25), в котором t_1 заменено на t_0, а t_0 — на $s_1^{-(j+1)}t_1$, получаем

$$\varphi(s_1^{-j-1}t_1)\leqslant C^r\varphi(t_0).$$

Из условия $M_\varphi(s_1)\leqslant s_1$ следует, что $s_1^{-1}\varphi(t)\leqslant\varphi\left(\frac{t}{s_1}\right)$, поэтому

$$\varphi(s_1^{-j-1}t_1)\geqslant s_1^{-j-1}\varphi(t_1)\geqslant s_1^{-1}\frac{t_0}{t_1}\varphi(t_1).$$

Объединяя это неравенство с предыдущим, приходим к неравенству

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1}\leqslant s_1C^r\frac{\varphi(t_0)}{t_0}. \tag{1.26}$$

Из неравенств (1.25) и (1.26) следует, что (1.6) выполнено с $k=s_1C^r$.

Следствие 1. *Если функция $\psi(t)$ возрастает и $M_\psi(s_1)\leqslant s_1$ при некотором $s_1>1$, то она эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.*

Действительно, в силу монотонности $M_\psi(s_0^{-1})<1$ при любом $s_0>1$. Далее, для любого $s\leqslant s_1$ $\psi(st)\leqslant\psi(s_1t)\leqslant\leqslant s_1\psi(t)$, т. е. $M_\psi(s)\leqslant s_1$ на отрезке $[0, s_1]$.

В этом случае можно положить $a=C=s_1$, $r=1$ и (1.26) переходит в неравенство

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1}\leqslant s_1^2\frac{\varphi(t_0)}{t_0}.$$

Следствие 2. *Если выполнены условия $0<\gamma_\psi\leqslant\leqslant\delta_\psi<1$, то функция $\psi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте.*

Доказательство. Если выбрать ε так, что $\gamma_\psi-\varepsilon>0$ и $\delta_\psi+\varepsilon<1$, то из (1.22) следует, что при достаточно больших s_1

$$1<s_1^{\gamma_\psi-\varepsilon}\leqslant[M_\psi(s_1^{-1})]^{-1}\leqslant M_\psi(s_1)\leqslant s_1^{\delta_\psi+\varepsilon}<s_1. \quad (1.27)$$

Далее, при фиксированном $a>1$ и $1\leqslant s\leqslant a$

$$M_\psi(s)\leqslant M_\psi(s_1)M_\psi\left(\frac{s}{s_1}\right)\leqslant s_1^{\delta_\psi+\varepsilon}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon}\leqslant s_1^{\delta_\psi-\gamma_\psi+2\varepsilon}a^{\gamma_\psi-\varepsilon}$$

при достаточно большом s_1. Таким образом, все условия леммы 1.2 выполнены.

Замечание. В условиях следствия 2 константа эквивалентности зависит от γ_ψ, δ_ψ и того s_1, при котором выполнены неравенства (1.27).

Утверждение следствия 2 в определенном смысле не может быть улучшено. Например, функция $\psi_0(t)=\max\{t, t\ln t\}$ — возрастающая и растет быстрее линейной на бесконечности. Поэтому она не эквивалентна вогнутой. Для нее $M_{\psi_0}(s)=\max\{s, s(1+\ln s)\}$, и, следовательно, $0<\gamma_{\psi_0}=\delta_{\psi_0}=1$. Таким образом, в условии следствия 2 нельзя неравенства заменить на равенства.

Лемма 1.3. *Если для положительной вогнутой функции $M_\psi(s_0^{-1})=1$ $(s_0>1)$, то $M_\psi(s^{-1})\equiv1$ $(s\geqslant1)$. Если для положительной вогнутой функции $M_\psi(s_1)=s_1$ $(s_1>1)$, то $M_\psi(s)\equiv s$ $(s\geqslant1)$.*

Доказательство. Вследствие формулы (1.17) функция $[M_\psi(s^{-1})]^{-1}$ является инфимумом вогнутых функний $\psi(st)/\psi(t)$ от s и поэтому она вогнута. В силу (1.23) $[M_\psi(s^{-1})]^{-1}\geqslant 1$ при $s>1$, и если эта вогнутая функция принимает свое минимальное значение 1 при $s=s_0>1$, то она — константа: $[M_\psi(s^{-1})]^{-1}\equiv 1$ $(s>1)$.

Функция $s^{-1}M_\psi(s)=\sup\limits_{0<t<\infty}\frac{\psi(st)}{st}\cdot\frac{t}{\psi(t)}$ убывает в силу вогнутости функции $\psi(t)$, поэтому из равенства $s_1^{-1}M_\psi(s_1)=1$ и (1.23) следует, что $s^{-1}M_\psi(s)=1$ при $1<s\leqslant s_1$. Пусть теперь $1<s_1<s$. Тогда

$$\psi(st)\geqslant\frac{s(s_1-1)}{(s-1)s_1}\psi(s_1t)+\frac{s-s_1}{(s-1)s_1}\psi(ss_1t).$$

Отсюда

$$\frac{\psi(s_1t)}{\psi(ss_1t)}\leqslant\frac{s_1(s-1)}{s(s_1-1)}\frac{\psi(st)}{\psi(ss_1t)}-\frac{s-s_1}{s(s_1-1)}.$$

Тогда

$$M_\psi(s)=\left[\inf_{0<t<\infty}\frac{\psi(s_1t)}{\psi(ss_1t)}\right]^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\left[\inf_{0<t<\infty}\left\{\frac{s_1(s-1)}{s(s_1-1)}\frac{\psi(st)}{\psi(ss_1t)}-\frac{s-s_1}{s(s_1-1)}\right\}\right]^{-1}=s.$$

В силу (1.23) $M_\psi(s)\equiv s$. Лемма доказана.

Отметим еще некоторые свойства верхних и нижних показателей растяжения. Очевидно, что

$$M_{(\psi)^\theta}(s)=[M_\psi(s)]^\theta.$$

Поэтому

$$\gamma_{(\psi)^\theta}=\theta\gamma_\psi\quad\text{и}\quad\delta_{(\psi)^\theta}=\theta\delta_\psi.$$

Далее, $M_{\varphi_0\varphi_1}(s)\leqslant M_{\varphi_0}(s)M_{\varphi_1}(s)$, поэтому

$$\gamma_{\varphi_0\varphi_1}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln M_{\varphi_0\varphi_1}(t)}{\ln t}\leqslant\lim_{t\to 0}\frac{\ln M_{\varphi_0}(t)+\ln M_{\varphi_1}(t)}{\ln t}=\gamma_{\varphi_0}+\gamma_{\varphi_1}. \tag{1.28}$$

Аналогично

$$\delta_{\varphi_0\varphi_1}\leqslant\delta_{\varphi_0}+\delta_{\varphi_1}. \tag{1.29}$$

3. Исследование интеграла $\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau$. Мы хотим для положительной функции $\psi(t)$ на полуоси $(0, \infty)$ сравнить поведение интеграла, указанного в заголовке, и самой функции $\psi(t)$.

Лемма 1.4. *Если при некотором $s_0>1$ выполнено условие $M_\psi(s_0^{-1})<1$, и на некотором отрезке $[1, a]$ функция $M_\psi(s)$ ограничена, то функция $\int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau$ эквивалентна функции $\psi(t)$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 1.2 следует, что при наших условиях $\psi(\tau)\leqslant C^r\psi(t_1)$ при любом t_1 и $\tau\in[t_1, s_0t_1]$. Тогда, полагая в этом неравенстве последовательно $t_1=s_0^{-j+1}t$, получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau = \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{s_0^{-j}t}^{s_0^{-j+1}t} \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C^r\sum_{j=1}^{\infty}\psi(s_0^{-j+1}t)\ln s_0 \leqslant C^r\ln s_0\sum_{j=1}^{\infty}[M_\psi(s_0^{-1})]^{j-1}\psi(t) =$$

$$= C^r\ln s_0\,[1-M_\psi(s_0^{-1})]^{-1}\psi(t) = C_2\psi(t).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau \geqslant \int\limits_{ta^{-1}}^t \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau \geqslant \ln a \inf_{ta^{-1}\leqslant\tau\leqslant t}\psi(\tau) \geqslant$$

$$\geqslant \ln a\,[\sup_{1\leqslant s\leqslant a} M_\psi(s)]^{-1}\psi(t) = C_1\psi(t).$$

Таким образом,

$$C_1\psi(t) \leqslant \int\limits_0^t \frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau \leqslant C_2\psi(t). \tag{1.30}$$

Следствие 1. *Если функция $\psi(t)$ возрастает и $M_\psi(s_0^{-1})<1$ и $M_\psi(s_1)<\infty$ при некоторых $s_0, s_1>1$, то справедливы неравенства* (1.30).

Следствие 2. *Если положительная функция $\psi(t)$ вогнута и $M_\psi(s_0^{-1})<1$ при некотором $s_0>1$, то справедливы неравенства* (1.30).

Следствие 3. *Если $0<\gamma_\psi\leqslant\delta_\psi<\infty$, то справедливы неравенства* (1.30).

Из леммы 1.4 непосредственно вытекает

Лемма 1.5. *Если при некотором* $s_0>1$ *выполнено условие* $M_\psi(s_0)<1$ *и на некотором отрезке* $[1/a, 1]$ $(a>1)$ *функция* $M_\psi(s)$ *ограничена, то справедливы неравенства*

$$C_1\psi(\tau)\leqslant\int_t^\infty\frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau\leqslant C_2\psi(t). \tag{1.31}$$

Действительно, замены $\tau=1/z$, $\theta=1/t$, $\psi(1/\theta)=\psi_1(\theta)$ сводят неравенства (1.31) для функции $\psi(t)$ к неравенствам (1.30) для функции $\psi_1(\theta)$. При этом следует учесть, что $M_{\psi_1}(s)=M_\psi(s^{-1})$.

Из трех следствий, вытекающих аналогично предыдущему из этой леммы, приведем лишь одно.

Следствие. *Если* $-\infty<\gamma_\psi\leqslant\delta_\psi<0$, *то справедливы неравенства* (1.31).

§ 2. Перестановки измеримых функций

1. Равноизмеримые функции. Перестановки. Мы будем рассматривать метрическое пространство $S(0, \infty)$ всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций $x(t)$ на полуоси $(0, \infty)$. Для каждой неотрицательной функции $x\in S(0, \infty)$ введем функцию распределения $n_x(\tau)$, определенную формулой

$$n_x(\tau)=\operatorname{mes}\{t:\ x(t)>\tau\}.$$

Функция распределения убывает, непрерывна справа и может принимать бесконечные значения. Совокупность всех функций $x(t)$, для которых $n_{|x|}(\tau)\not\equiv\infty$, обозначим через $S_0(0, \infty)$. Для каждой функции из $S_0(0, \infty)$ функция $n_{|x|}(\tau)\to0$ при $\tau\to\infty$. Действительно, если $n_{|x|}(\tau_0)<\infty$, то при $\tau>\tau_0$ мера множеств $\{t:\ |x(t)|>\tau\}$ конечна, а пересечение их имеет меру нуль, поэтому $\operatorname{mes}\{t:\ |x(t)|>\tau\}\to0$ при $\tau\to\infty$. В дальнейшем рассматриваются лишь функции из $S_0(0, \infty)$.

Если функция $x(t)$ суммируема на $(0, \infty)$, то

$$\|x\|_{L_1}=\int_0^\infty|x(t)|\,dt=\int_0^\infty n_{|x|}(\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Две неотрицательные функции $x(t)$ и $y(t)$ из $S_0(0, \infty)$ называются *равноизмеримыми*, если

$$n_x(\tau) = n_y(\tau).$$

Из равноизмеримости функций $x(t)$ и $y(t)$, вообще говоря, не следует равенство

$$\operatorname{mes}\{t:\ x(t) \geqslant \tau\} = \operatorname{mes}\{t:\ y(t) \geqslant \tau\}. \tag{2.2}$$

Например, функции $x(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t$ и $y(t) \equiv 1$ равноизмеримы. Однако $\operatorname{mes}\{t:\ x(t) \geqslant 1\} = 0$, а $\operatorname{mes}\{t:\ y(t) \geqslant 1\} = \infty$.

Равенство (2.2) будет иметь место при τ, лежащих внутри интервала, где $n_x(\tau) < \infty$. Действительно, в этом случае

$$\operatorname{mes}\{t:\ x(t) \geqslant \tau\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{mes}\{t:\ x(t) > \tau - \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon\to 0} n_x(\tau - \varepsilon)$$

и аналогично $\operatorname{mes}\{t:\ y(t) \geqslant \tau\} = \lim n_y(\tau - \varepsilon)$. Из того, что $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ $(0 \leqslant \tau < \infty)$, вытекает равенство (2.2).

Отметим еще, что для двух равноизмеримых функций $x(t)$ и $y(t)$ будут равноизмеримыми и функции $x(t)\chi_{e_a}(t)$ и $y(t)\chi_{e'_a}(t)$, где $\chi_{e_a}(t)$ и $\chi_{e'_a}(t)$ — характеристические функции лебеговых множеств $e_a = \{t:\ x(t) > a\}$ и $e_a' = \{t:\ y(t) > a\}$ соответственно. Если выполнено условие $n_x(\tau) < \infty$ при $\tau > 0$, то множества e_a и e_a' можно заменить на множества $\{t:\ x(t) \geqslant a\}$ и $\{t:\ y(t) \geqslant a\}$.

Пусть $t \to \omega(t)$ — измеримое отображение полуоси $(0, \infty)$ в себя. Будем говорить, что отображение $\omega(t)$ *не уменьшает меру множеств*, если $\operatorname{mes}\omega^{-1}(e) \leqslant \operatorname{mes} e$ и *сохраняет меру множеств*, если $\operatorname{mes}\omega(e) = \operatorname{mes} e$ для любого измеримого множества e. Так как $\omega(\omega^{-1}(e)) \subset e$, то всякое сохраняющее меру отображение не уменьшает меру множеств.

Если $\omega(t)$ — неуменьшающее меру отображение, то

$$\operatorname{mes}\{t : y(\omega(t)) > \tau\} \leqslant \operatorname{mes}\{s : y(s) > \tau\},$$

поэтому для неотрицательных функций $y(t)$ и $y_\omega(t) \equiv y(\omega(t))$ справедливо неравенство

$$n_{y_\omega}(\tau) \leqslant n_y(\tau).$$

Очевидно, что $\|y_\omega\|_{L_\infty} \leqslant \|y\|_{L_\infty}$, а из (2.1) вытекает, что

$$\|y_\omega\|_{L_1} \leqslant \|y\|_{L_1}.$$

Определение 2.2. *Перестановкой неотрицательной функции* $x \in S_0(0, \infty)$ называется убывающая непрерывная слева функция $x^*(t)$, равноизмеримая с функцией $x(t)$.

Покажем однозначную определенность перестановки. Пусть $x^*(t)$ и $x_1^*(t)$ — две различные перестановки одной и той же функции $x(t)$. Предположим, что $x_1^*(t_0) > x^*(t_0)$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $x_1^*(t_0) - \varepsilon > x^*(t_0)$. В силу непрерывности функции $x^*(t)$ слева найдется интервал $[t_1, t_0]$, в котором $x^*(t) < x_1^*(t_0) - \varepsilon$. Тогда $\operatorname{mes}\{t: x_1^*(t) > x_1^*(t_0) - \varepsilon\} \geqslant t_0$, а $\operatorname{mes}\{t: x^*(t) > x^*(t_0) - \varepsilon\} \leqslant t_1 < t_0$. Функции $x^*(t)$ и $x_1^*(t)$ не являются равноизмеримыми, что противоречит их равноизмеримости с $x(t)$.

Таким образом, перестановка единственна. Она может быть определена по формуле

$$x^*(t) = \inf\{\tau: n_x(\tau) < t\}.$$

Нетрудно проверить, что $n_x(x^*(t)) = t$, если $x^*(t)$ — точка непрерывности $n_x(\tau)$, и $n_x(x^*(t)) \leqslant t$, если $x^*(t)$ — точка разрыва $n_x(\tau)$. Аналогично $x^*(n_x(\tau)) = \tau$, если $n_x(\tau)$ — точка непрерывности $x^*(t)$ и $x^*(n_x(\tau)) \geqslant \tau$, если $n_x(\tau)$ — точка разрыва функции $x^*(t)$.

Обозначим через $x^*(t)$ перестановку модуля произвольной функции $x(t)$ из $S_0(0, \infty)$.

Легко вычисляются перестановки от конечнозначных функций. Всякую конечнозначную функцию можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} x_k \chi_{e_k}(t),$$

где e_k — попарно непересекающиеся множества конечной меры и $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$. Тогда

$$x^*(t) = \sum_{j=1}^{N} x_j^* \chi_{(\tau_{j-1}, \tau_j]},$$

где x_j^* — перестановка в убывающем порядке чисел $|x_k|$, а $\tau_j = \sum_{|x_i| \geqslant x_j^*} \operatorname{mes} e_i$ ($\tau_0 = 0$).

Иногда неотрицательную конечнозначную функцию удобно записывать в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{e_k'},$$

где $\Delta_k > 0$ и $e_1' \subset e_2' \subset \ldots \subset e_N'$ — множества конечной меры. Тогда при $t > 0$

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{(0, \operatorname{mes} e_k']}. \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение число

$$x^*(\infty) = \lim_{t \to \infty} x^*(t) = \inf \{\tau : n_x(\tau) < \infty\}.$$

Это число обладает тем свойством, что

$$n_x(\tau) \begin{cases} < \infty & \text{при} \quad \tau > x^*(\infty), \\ \leqslant \infty & \text{при} \quad \tau = x^*(\infty), \\ = \infty & \text{при} \quad \tau < x^*(\infty). \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — две неотрицательные равноизмеримые функции. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ полуоси $(0, \infty)$ в себя, что*

$$\| x_1 - y_\omega \|_{L_\infty \cap L_1} \leqslant \varepsilon, \tag{2.4}$$

где $x_1(t) = \max\{x(t), x^*(\infty)\}$ и $y_\omega(t) = y(\omega(t))$.

Доказательство. Положим $\tau_0 = x^*(\infty) + \varepsilon/8$ и разобьем полуось на три множества:

$$E_x^1 = \{t : \tau_0 < x(t)\}, \quad E_x^2 = \{t : x^*(\infty) < x(t) \leqslant \tau_0\},$$
$$E_x^3 = \{t : x(t) \leqslant x^*(\infty)\}.$$

Отображение $\omega(t)$ будем определять на каждом из этих множеств в отдельности. Для функции $y(t)$ введем аналогичные три множества E_y^i ($i = 1, 2, 3$), имея при этом в виду, что $x^*(\infty) = y^*(\infty)$.

Определение $\omega(t)$ на E_x^1. Множество E_x^1 имеет конечную меру. Выберем $\delta = \min\left\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} E_x^1}\right\}$ и рассмотрим множества $e_{k,x}^1 = \{t: \tau_0 + k\delta < x(t) \leqslant \tau_0 + (k+1)\delta\}$ и $e_{k,y}^1 = \{t: \tau_0 + k\delta < y(t) \leqslant \tau_0 + (k+1)\delta\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Они имеют равные меры и $E_x^1 = \bigcup\limits_k e_{k,x}^1$ и $E_y^1 = \bigcup\limits_k e_{k,y}^1$. На каждом множестве $e_{k,x}^1$ определим сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ на множество $e_{k,y}^1$. Тогда по построению

$$|x(t) - y(\omega(t))| \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$$

и

$$\int\limits_{E_x^1} |x(t) - y(\omega(t))|\, dt \leqslant \delta \operatorname{mes} E_x^1 < \varepsilon/2. \tag{2.5}$$

Определение $\omega(t)$ на E_x^2. Если мера множества E_x^2 конечна, то отображение $\omega(t)$ определяется на нем так же как на E_x^1 с заменой τ_0 на $x^*(\infty)$ и ε на $(1/2)\varepsilon$. При этом будут выполняться неравенства (2.5). Сложнее тот случай, когда $\operatorname{mes} E_x^2 = \operatorname{mes} E_y^2 = \infty$. В этом случае множества E_x^2 и E_y^2 можно разбить на непересекающиеся множества $e_{k,x}^2$ и $e_{k,y}^2$ $(k = 0, 1, \ldots)$ соответственно так, что $\operatorname{mes} e_{k,x}^2 = \operatorname{mes} e_{k,y}^2 = 1$,

$$\tau_{k+1} \leqslant x(t) \leqslant \tau_k \quad (t \in e_{k,x}^2)$$

и

$$\tau_{k+1} \leqslant y(t) \leqslant \tau_k \quad (t \in e_{k,y}^2),$$

где $\tau_k \downarrow x^*(\infty)$ при $k \to \infty$. Выберем бесконечную последовательность натуральных чисел m_i $(i = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы было

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\tau_{m_i+1} - x^*(\infty)) < \varepsilon/8.$$

Множества $e_{m_i,y}^2$ объединим в одно множество F_y. Обозначим через $e_{n_k,y}$ $(k = 0, 1, \ldots; n_k < n_{k+1})$ оставшиеся множества. Определим функцию $\omega(t)$ так, чтобы она отображала с сохранением меры $e_{k,x}^2$ на $e_{n_k,y}^2$.

Тогда

$$\int\limits_{E_x^2} |x(t)-y_\omega(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{e_{k,x}^2} |x(t)-y_\omega(t)|\,dt \leqslant \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_k-\tau_{n_k+1}).$$

Оценим последнюю сумму. При любом $N>0$

$$\sum_{k=0}^{N} (\tau_k-\tau_{n_k+1}) = \sum_{k=0}^{N} \tau_k - \sum_{n_k+1\leqslant N} \tau_{n_k+1} - \sum_{n_k+1>N,\,k\leqslant N} \tau_{n_k+1} = \tau_0 + \sum_{m_i+1\leqslant N} \tau_{m_{i+1}} - \sum_{\substack{k\leqslant N\\ n_k+1>N}} \tau_{n_k+1} \leqslant \leqslant \tau_0 - x^*(\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} (\tau_{m_i+1} - x^*(\infty)) < \varepsilon/4.$$

Таким образом,

$$|x(t)-y_\omega(t)| \leqslant \tau_k-\tau_{n_k+1} \leqslant \tau_0 - x^*(\infty) \leqslant \varepsilon \qquad (t\in E_x^2) \tag{2.6}$$

и

$$\int\limits_{E_x^2} |x(t)-y_\omega(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Определение $\omega(t)$ на E_x^3. На множестве E_x^3 $x_1(t)\equiv \equiv x^*(\infty)$, поэтому при отображении $\omega(t)$ E_x^3 нужно засылать в такие части полуоси, где функция $y(t)$ достаточно близка к $x^*(\infty)=y^*(\infty)$.

Если $\operatorname{mes} E_x^2=\infty$, то для этой цели используется выделенное выше множество F_y. Если $\operatorname{mes} E_x^3<\infty$, то выделяем в F_y множество e_y такой же меры так, чтобы на e_y выполнялось неравенство

$$x^*(\infty)\leqslant y^*(t)\leqslant x^*(\infty)+\min\left\{\varepsilon,\ \frac{\varepsilon}{4\operatorname{mes} E_x^3}\right\},$$

и отображаем E_x^3 на e_y с сохранением меры. Тогда на E_x^3

$$|x^*(\infty)-y(\omega(t))|\leqslant\varepsilon$$

и

$$\int_{E_x^3} |x^*(\infty) - y(\omega(t))| \, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.7}$$

Если же $\operatorname{mes} E_x^3 = \infty$, то произвольным образом разбиваем E_x^2 на множества $e_{k,x}^3$ $(k = 1, 2, \ldots)$ с мерой единица и отображаем их с сохранением меры на такие множества $e_{m_{i_k}y}^2$, для которых $\tau_{m_{i_k}} \leqslant x^*(\infty) + \varepsilon/2^{k+2}$. Тогда также будут выполняться неравенства (2.7).

Нам осталось рассмотреть случай, когда $\operatorname{mes} E_x^2 = \operatorname{mes} E_y^2 < \infty$. Но тогда $\operatorname{mes} E_x^3 = \operatorname{mes} E_y^3 = \infty$, и при любом $\tau < x^*(\infty)$ $\operatorname{mes}\{t: \tau < y(t) \leqslant x^*(\infty)\} = \infty$. Поэтому ту роль, которую выше играло множество F_y, теперь может играть множество E_y^3. Повторяя предыдущие построения, мы получим отображение со свойствами (2.7).

Таким образом, мы определили сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ на всей полуоси и в силу неравенств (2.5)—(2.7)

$$|x_1(t) - y(\omega(t))| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |x_1(t) - y(\omega(t))| \, dt < \varepsilon.$$

Из леммы вытекает следующая важная теорема:

Теорема 2.1. *Если для двух измеримых функций $x(t)$ и $y(t)$ выполняется неравенство $x^*(t) \leqslant y^*(t)$ при всех $t > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие сохраняющие меру отображение $\omega(t)$ полуоси $(0, \infty)$ в себя и измеримая функция $\beta(t)$ с $|\beta(t)| \leqslant 1$, что*

$$\| x - \beta y_\omega \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon \quad (y_\omega(t) = y(\omega(t))). \tag{2.8}$$

Доказательство. Функция $y^*(t)$ равноизмерима с $|y(t)|$, поэтому в силу леммы 2.1 и монотонности функции $y^*(t)$ найдется такое сохраняющее меру отображение $\omega_1(t)$, что $\| y^* - |y|_{\omega_1} \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon/2$. Обозначим $\alpha_1(t) = x^*(t)[y^*(t)]^{-1}$ (считая $\alpha(t) = 0$, если $y^*(t) = 0$); тогда $0 \leqslant \alpha_1(t) \leqslant 1$ и

$$\| x^* - \alpha_1 |y|_{\omega_1} \|_{L_\infty \cap L_1} = \| \alpha_1 (y^* - |y|_{\omega_1}) \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon/2. \tag{2.9}$$

Аналогично в силу равноизмеримости x^* и $|x|$ найдется такое сохраняющее меру отображение $\omega_2(t)$, что

$$\| x_1 - (x^*)_{\omega_2} \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon/2,$$

где $x_1(t) = \max\{|x(t)|, \ x^*(\infty)\}$. Обозначим $\alpha_2(t) = |x(t)|[x_1(t)]^{-1}$, тогда $0 \leqslant \alpha_2(t) \leqslant 1$ и

$$\| |x| - \alpha_2 (x^*)_{\omega_2} \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon/2. \tag{2.10}$$

Выберем $\omega(t) = \omega_1(\omega_2(t))$ и $\beta(t) = \alpha_2(t)\alpha_1(\omega_2(t)) \times \operatorname{sign} x(t) \operatorname{sign} y_\omega(t)$. Тогда из неравенств (2.9) и (2.10) получаем

$$\| x - \beta y_\omega \|_{L_\infty \cap L_1} = \| |x| - \alpha_2 (\alpha_1)_{\omega_2} |y|_{\omega_1 \circ \omega_2} \|_{L_\infty \cap L_1} \leqslant$$

$$\leqslant \| |x| - \alpha_2 (x^*)_{\omega_2} \|_{L_\infty \cap L_1} + \| \alpha_2 [(x^*)_{\omega_2} - (\alpha_1)_{\omega_2} |y|_{\omega_1 \circ \omega_2}] \|_{L_\infty \cap L_1} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \| x^* - \alpha_1 |y|_{\omega_1} \|_{L_\infty \cap L_1} < \varepsilon.$$

2. Свойства перестановок. 1°. *Из равноизмеримости функций $|x(t)|$ и $x^*(t)$ следует, что*

$$\int_0^\infty |x(t)|\, dt = \int_0^\infty x^*(t)\, dt = \int_0^\infty n_{|x|}(\tau)\, d\tau, \tag{2.11}$$

причем обе части могут равняться бесконечности.

2°. *Если $|x(t)| \leqslant |y(t)|$, то $x^*(t) \leqslant y^*(t)$.*

3°. *Если $x(t) = y(t)$ всюду, за исключением множества с мерой, не превосходящей числа $\gamma < \infty$, то $x^*(t) \leqslant y^*(t-\gamma)$ и $y^*(t) \leqslant x^*(t-\gamma)$ $(t > \gamma)$.*

Действительно, пусть $x^*(t_0) = \tau_0$ $(t_0 > \gamma)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество e меры t_0, на котором $|x(s)| > \tau_0 - \varepsilon$. Тогда можно построить множество e' с $\operatorname{mes} e' \geqslant t_0 - \gamma$, на котором $|y(s)| > \tau_0 - \varepsilon$. Из определения функции y^* следует, что $y^*(t_0 - \gamma) > \tau_0 - \varepsilon = x^*(t_0) - \varepsilon$. В силу произвольности ε и равноправности x и y утверждение доказано.

4°. *Если $x(t) \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$, то $(x+\varepsilon)^*(t) = x^*(t) + \varepsilon$.*

5°. *Если $|x(t) - y(t)| \leqslant \varepsilon$ при почти всех t, то $|x^*(t) - y^*(t)| \leqslant \varepsilon$.*

Действительно, $|x(t)| \leqslant |y(t)| + \varepsilon$ и, значит, $x^*(t) \leqslant (|y| + \varepsilon)^*(t) = y^*(t) + \varepsilon$. Аналогично $y^*(t) \leqslant x^*(t) + \varepsilon$.

6°. *Имеет место неравенство*

$$\int_e |x(s)|\,ds \leqslant \int_0^{\operatorname{mes} e} x^*(s)\,ds. \tag{2.12}$$

Обозначим через $\chi_e(s)$ характеристическую функцию измеримого множества e. Тогда $n_{|x|\chi_e}(\tau) \leqslant \operatorname{mes} e$ и $n_{|x|\chi_e}(\tau) \leqslant n_{|x|}(\tau)$, поэтому $n_{|x|\chi_e}(\tau) \leqslant \min\{\operatorname{mes} e,\ n_{|x|}(\tau)\}$. Интегрируя это неравенство и пользуясь (2.11), получаем

$$\int_e |x(s)|\,ds = \int_0^\infty n_{|x|\chi_e}(\tau)\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \min\{\operatorname{mes} e,\ n_{|x|}(\tau)\}\,d\tau = \int_0^{\operatorname{mes} e} x^*(s)\,ds.$$

7°. *Если* $x^*(\theta) > x^*(\infty)$, *то найдется множество* $e_\theta(x)$ *с* $\operatorname{mes} e_\theta(x) = \theta$, *для которого*

$$\int_0^\theta x^*(s)\,ds = \int_{e_\theta(x)} |x(s)|\,ds. \tag{2.13}$$

Из условия $x^*(\theta) > x^*(\infty)$ следует, что в окрестности $x^*(\theta)$ функция $n_{|x|}(\tau) < \infty$, поэтому множества всех s, при которых $x^*(s) \geqslant x^*(\theta)$ и $|x(s)| \geqslant x^*(\theta)$, имеют одинаковую меру $\geqslant \theta$. Если обозначить через e'_θ множество тех s, где $|x(s)| > x^*(\theta)$ и через e''_θ множество тех s, где $|x(s)| \geqslant x^*(\theta)$, то $\operatorname{mes} e'_\theta \leqslant \theta \leqslant \operatorname{mes} e''_\theta$. Множество $e_\theta(x)$ выберем так, что $e'_\theta \subset e_\theta(x) \subset e''_\theta$ и $\operatorname{mes} e_\theta(x) = \theta$. Для функций $|x(t)|$ и $x^*(t)$ равноизмеримы их сужения на $e_\theta(x)$ и $(0, \theta]$ соответственно, поэтому выполнено (2.13).

Если $x^*(\theta) = x^*(\infty)$, то множества $e_\theta(x)$, на котором достигается равенство (2.13), может не быть. Такой пример дает уже рассмотренная выше функция $x(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t$. Однако справедливо утверждение:

8° *Имеет место равенство*

$$\int_0^\theta x^*(s)\,ds = \sup_{\operatorname{mes} e = \theta} \int_e |x(s)|\,ds. \tag{2.14}$$

Из (2.12) непосредственно следует неравенство

$$\int_0^\theta x^*(s)\,ds \geqslant \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int_e |x(s)|\,ds, \tag{2.15}$$

поэтому в случае, когда $x^*(\theta) > x^*(\infty)$, из (2.13) и (2.15) вытекает равенство (2.14).

Если $x^*(\theta)=x^*(\infty)$, то через e'_θ снова обозначим множество тех s, где $|x(s)|>x^*(\infty)$, а через e''_θ — множество тех s, при которых $|x(s)|>x^*(\theta)-\varepsilon/\theta$, где $\varepsilon>0$ — произвольное малое число. Тогда в силу равноизмеримости функций $x^*(s)$ и $|x(s)|$ $\operatorname{mes} e'_\theta \leqslant \theta \leqslant \operatorname{mes} e''_\theta = \infty$. Поэтому существует множество e^ε_θ такое, что $e'_\theta \subset e^\varepsilon_\theta \subset e''_\theta$ и $\operatorname{mes} e^\varepsilon_\theta = \theta$. Суже́ния функций $|x(t)|$ и $x^*(t)$ на множества e'_θ и $(0, \operatorname{mes} e'_\theta]$ равноизмеримы. Поэтому

$$\int_{e'_\theta} |x(s)|\,ds = \int_0^{\operatorname{mes} e'_\theta} x^*(s)\,ds.$$

Тогда

$$\int_{e^\varepsilon_\theta} |x(s)|\,ds = \int_{e'_\theta} |x(s)|\,ds + \int_{e^\varepsilon_\theta - e'_\theta} |x(s)|\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\operatorname{mes} e'_\theta} x^*(s)\,ds + \int_{e^\varepsilon_\theta - e'_\theta} [x^*(\infty)-\varepsilon/\theta]\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^{\operatorname{mes} e'_\theta} x^*(s)\,ds + x^*(\infty)(\theta - \operatorname{mes} e'_\theta) - \varepsilon.$$

На интервале $(\operatorname{mes} e'_\theta, \theta)$ функция $x^*(s)$ равна $x^*(\infty)$, поэтому

$$\int_{e^\varepsilon_\theta} |x(s)|\,ds \geqslant \int_0^\theta x^*(s)\,ds - \varepsilon. \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) вытекает (2.14).

Отметим, что из равенства (2.14) следует важное неравенство:

$$\int_0^\theta (x+y)^*(s)\,ds \leqslant \int_0^\theta x^*(s)\,ds + \int_0^\theta y^*(s)\,ds. \tag{2.17}$$

Замечание. При условии $n_{|x|}(\tau)<\infty$ при всех $\tau>0$, т. е. при условии $x^*(\infty)=0$, множества $e_\theta(x)$, построенные в 7°, определены при всех θ, для которых $x^*(\theta)>0$. Обозначим

$$e(x) = \bigcup_{x^*(\theta)>0} e_\theta(x). \tag{2.18}$$

Тогда множество $e(x)$ совпадает с носителем функции $x(t)$.

9°. *Для того чтобы для двух локально суммируемых функций $x(t)$ и $y(t)$, для которых $n_x(\tau)<\infty$, $n_y(\tau)<\infty$, при всех $\tau>0$ выполнялось равенство*

$$(x+y)^*(t) = x^*(t) + y^*(t), \tag{2.19}$$

необходимо и достаточно, чтобы функции $x(t)$ и $y(t)$ имели почти всюду значения одного знака и чтобы для них можно было выбрать общую систему множеств $e_\theta : e_\theta(x) = e_\theta(y)$ $(0<\theta<\infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(x+y)^*=x^*+y^*$. Тогда в силу (2.14)

$$\int_{e_\theta(x+y)} |x+y|\,dt = \int_0^\theta (x+y)^*\,dt = \int_0^\theta x^*\,dt + \int_0^\theta y^*\,dt =$$

$$= \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int_e |x|\,dt + \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int_e |y|\,dt. \tag{2.20}$$

Если предположить, что

$$\int_{e_\theta(x+y)} |x|\,dt < \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int_e |x|\,dt$$

или

$$\int_{e_\theta(x+y)} |y|\,dt < \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int_e |y|\,dt,$$

то

$$\int\limits_{e_\theta(x+y)} |x+y|\,dt \leqslant \int\limits_{e_\theta(x+y)} |x|\,dt + \int\limits_{e_\theta(x+y)} |y|\,dt <$$

$$< \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int\limits_e |x|\,dt + \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int\limits_e |y|\,dt,$$

что противоречит (2.20). Поэтому

$$\int\limits_{e_\theta(x+y)} |x|\,dt = \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int\limits_e |x|\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{e_\theta(x+y)} |y|\,dt =$$

$$= \sup_{\operatorname{mes} e=\theta} \int\limits_e |y|\,dt, \qquad (2.21)$$

и, следовательно, система множеств $e_\theta(x+y)$ может служить системой $e_\theta(x)$ и $e_\theta(y)$. Из (2.20) и (2.21) вытекает равенство

$$\int\limits_{e_\theta(x+y)} |x+y|\,dt = \int\limits_{e_\theta(x+y)} |x|\,dt + \int\limits_{e_\theta(x+y)} |y|\,dt,$$

откуда следует, что почти во всех точках множества $e_\theta(x+y)$

$$|x(t)+y(t)| = |x(t)| + |y(t)|. \qquad (2.22)$$

В силу замечания на стр. 91 это равенство выполнено почти всюду на всей полуоси. Необходимость доказана.

Достаточность. Если e_θ — общая система множеств для функций $x(t)$ и $y(t)$, и для этих функций почти всюду выполнено (2.22), то

$$\int\limits_0^\theta x^*\,dt + \int\limits_0^\theta y^*\,dt = \int\limits_{e_\theta} |x|\,dt + \int\limits_{e_\theta} |y|\,dt =$$

$$= \int\limits_{e_\theta} |x+y|\,dt \leqslant \int\limits_0^\theta (x+y)^*\,dt.$$

Из (2.17) тогда следует, что

$$\int\limits_0^\theta x^*\,dt + \int\limits_0^\theta y^*\,dt = \int\limits_0^\theta (x+y)^*\,dt.$$

Дифференцируя по θ, получаем (2.19).

10°. *Справедливо неравенство*

$$(xy)^*(t_1+t_2)\leqslant x^*(t_1)\,y^*(t_2).$$

Для доказательства обозначим $x^*(t_1-\varepsilon)=a$ и $y^*(t_2-\varepsilon)=b$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало́. Справедливо включение

$$\{t: |x(t)\,y(t)|>ab\}\subset\{t: |x(t)|>a\}\cup\{t: |y(t)|>b\},$$

из которого следует, что

$$n_{|xy|}(ab)\leqslant n_{|x|}(a)+n_{|y|}(b)\leqslant t_1+t_2-2\varepsilon<t_1+t_2.$$

Отсюда

$$(xy)^*(t_1+t_2)\leqslant ab=x^*(t_1-\varepsilon)\,y^*(t_2-\varepsilon).$$

В силу непрерывности слева перестановок из этого неравенства вытекает требуемое.

Следствие. *Справедливо неравенство*

$$(x+y)^*(t_1+t_2)\leqslant x^*(t_1)+y^*(t_2). \tag{2.23}$$

Действительно,

$$e^{(x+y)^*(t_1+t_2)}=(e^{|x+y|})^*(t_1+t_2)\leqslant(e^{|x|}e^{|y|})^*(t_1+t_2)\leqslant$$
$$\leqslant(e^{|x|})^*(t_1)\,(e^{|y|})^*(t_2)\leqslant e^{x^*(t_1)}e^{y^*(t_2)}=e^{x^*(t_1)+y^*(t_2)},$$

откуда следует (2.23).

11°. *Если последовательность $x_n(t)$ сходится по мере к функции $x(t)$, то $\overset{*}{x}_n(t)\to x^*(t)$ во всех точках непрерывности функции $x^*(t)$.*

Если $\operatorname{mes}(t: |x(t)-x_n(t)|>\varepsilon)<\tau$ при $n\geqslant n_0(\varepsilon,\tau)$, то $(x-x_n)^*(\tau)\leqslant\varepsilon$, т. е. $(x-x_n)^*(\tau)\to 0$ при $n\to\infty$. Далее по следствию из свойства 10°

$$x^*(t+\eta)\leqslant\overset{*}{x}_n(t)+(x-x_n)^*(\eta)$$

и

$$\overset{*}{x}_n(t)\leqslant x^*(t-\eta)+(x-x_n)^*(\eta).$$

Отсюда и из предыдущего следует, что для любых $\delta>0$ и $\eta>0$ при достаточно больших n будет выполнено неравенство

$$x^*(t+\eta)-\delta\leqslant\overset{*}{x}_n(t)\leqslant x^*(t-\eta)+\delta.$$

Если в точке t функция $x^*(t)$ непрерывна, то из этого неравенства вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(t) = x^*(t)$.

12°. *Пусть* $n_{|y|}(\tau) < \infty$ *при всех* $\tau > 0$ *и* $|x_m(t)| \leqslant y(t)$. *Если* $x_m(t) \to x(t)$ *почти всюду, то* $(x - x_m)^*(\tau) \to 0$ *при всех* $\tau > 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ полуось можно разбить на два множества e и e' так, что $|y(t)| < \varepsilon/2$ на e, а множество e' имеет конечную меру. На множестве e тогда $|x(t) - x_m(t)| < \varepsilon$, а на множестве e' последовательность $x_m(t)$ сходится по мере к $x(t)$, поэтому $\operatorname{mes}\{t : |x(t) - x_m(t)| > \varepsilon\} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, на всей полуоси $x_m - x \to 0$ по мере. Из свойства 11° вытекает, что $(x - x_m)^*(\tau) \to 0$ при всех $\tau > 0$.

Заметим, что ограничения, наложенные на последовательность функций $x_m(t)$, существенны. Например, для последовательности функций $\chi_{[m,m+1]}(t)$ выполнено условие $n_{\chi_{[m,m+1]}}(\tau) \leqslant 1$; она сходится всюду к функции $x(t) \equiv 0$, однако $\chi^*_{[m,m+1]}(\tau) = \chi_{[0,1]}(\tau)$.

Следствие. *Если в предыдущих условиях функция* $y(t)$ *суммируема на всей полуоси, то в силу теоремы Лебега*

$$\lim_{n\to\infty} \int_e x_n^*(t)\,dt = \int_e x^*(t)\,dt \tag{2.24}$$

для любого измеримого множества e.

13°. *Справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty x(s)\,y(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds. \tag{2.25}$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем функции x и y неотрицательными. Построим возрастающую последовательность конечнозначных функций $y_n(t)$, сходящуюся почти всюду к функции $y(t)$. Функции $y_n(t)$ представим в виде

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k}\chi_{e_{n,k}}(t),$$

где $y_{n,k}$ — положительные числа и $e_{n,1} \subset e_{n,2} \subset \ldots \subset e_{n,N_n}$.

Тогда из 6° следует, что

$$\int_0^\infty x(s)\,y_n(s)\,ds = \sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k} \int_{e_{n,k}} x(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k} \int_0^{\operatorname{mes} e_{n,k}} x^*(s)\,ds = \int_0^\infty x^*(s) \sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k}\chi_{[0,\operatorname{mes} e_{n,k}]}(s)\,ds.$$

Функция $\sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k}\chi_{[0,\operatorname{mes} e_{n,k}]}(t)$ в силу (2.3) совпадает с функцией $y_n^*(t)$. Таким образом,

$$\int_0^\infty x(s)\,y_n(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y_n^*(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, в силу теоремы Леви получаем неравенство (2.25).

Неравенство (2.25) является точным в следующем смысле:

14°. *Справедливо равенство*

$$\sup_u \int_0^\infty u(s)\,y(s)\,ds = \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds, \tag{2.26}$$

где sup *берется по всем функциям* $u(s)$, *для которых функция* $|u(s)|$ *равноизмерима с функцией* $x^*(s)$.

В силу неравенства (2.25) достаточно установить неравенство

$$\sup_u \int_0^\infty u(s)\,y(s)\,ds \geqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds. \tag{2.27}$$

Без ограничения общности можно считать, что $y(t)\geqslant 0$, и тогда $u(t)\geqslant 0$. Предположим, что $y^*(t) > y^*(\infty)$ при $t\in(0,\theta)$ и $y^*(t)=y^*(\infty)$ при $t>\theta$ (возможно, что $\theta=\infty$). Разобьем полуось на интервалы длиной δ так, что $N\delta=\theta$ $(N\leqslant\infty)$. Рассуждая так же, как и в пп. 7°, 8°, можно построить множества e_i $(i=1, \ldots, N)$ меры δ так, что $y^*((i-1)\delta)\geqslant y(t)\geqslant y^*(i\delta)$ при $t\in e_i$, и множества e_i $(i=N+1, \ldots)$ меры δ так, что $y^*(\infty)\geqslant y(t)\geqslant y^*(\infty)-\varepsilon$ при $t\in e_i$, где $\varepsilon>0$ произвольно мало. Отобразим каждое множество e_i с сохранением меры взаимно однозначно на интервал $((i-1)\delta, i\delta]$ с помощью функций $\omega_i(t)$ и положим

$$u_\delta(t)=\sum_{i=1}^{\infty} x^*(\omega_i(t))\,\chi_{e_i}(t).$$

Функция $u_\delta(t)$ равноизмерима с функцией $x^*(t)$. Далее,

$$\sup_u \int_0^\infty u(s)\,y(s)\,ds \geqslant \int_0^\infty u_\delta(s)\,y(s)\,ds = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{e_i} x^*(\omega_i(s))\,y(s)\,ds \geqslant$$
$$\geqslant \delta\sum_{i=1}^{N} x^*(i\delta)\,y^*(i\delta)+\sum_{i=N+1}^{\infty}\int_{e_i} x^*(\omega_i(s))\,[y^*(\infty)-\varepsilon]\,ds.$$

Имеем

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\int_{e_i} x^*(\omega_i(s))\,ds=\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds.$$

Если этот интеграл бесконечен, то неравенство (2.27) справедливо, так как его левая часть бесконечна. Если же последний интеграл конечен, то

$$\sup_u \int_0^\infty u(s)\,y(s)\,ds \geqslant \delta\sum_{i=1}^{\infty} x^*(i\delta)\,y^*(i\delta)-\varepsilon\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds.$$

Функция $x^*(t)\,y^*(t)$ — убывающая, поэтому она интегрируема по Риману на любом промежутке $[1/a, a]$. Отсюда следует, что предел первого слагаемого в правой части при $\delta\to 0$ равен интегралу от функции $x^*(t)\ y^*(t)$ по полуоси $(0, \infty)$. Таким образом,

$$\sup_u \int_0^\infty u(s)\,y(s)\,ds \geqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds-\varepsilon\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds,$$

откуда в силу произвольности ε следует (2.27), а значит, и (2.26).

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что при $y(t)\geqslant 0$ sup можно брать по функциям $u(t)$ вида $u(t)=x^*(\omega(t))$, где $\omega(t)$ — сохраняющее меру взаимно однозначное отображение полуоси $(0, \infty)$ на себя.

Следствие. *Справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty x^*(s)\,[y(s)+z(s)]^*\,ds \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,y^*(s)\,ds + \int_0^\infty x^*(s)\,z^*(s)\,ds.$$

15°. *Справедливо равенство*

$$\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds = \inf \int_{e'} |x(s)|\,ds, \tag{2.28}$$

где inf *берется по всем измеримым множествам* e', *дополнение к которым имеет меру* θ.

Установим сначала неравенство

$$\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds \leqslant \int_{e'} |x(s)|\,ds. \tag{2.29}$$

Если функция $x(s)$ суммируема на $(0, \infty)$, то это неравенство вытекает из равенства (2.11) и неравенства (2.12). Пусть $x(s)$ не суммируема на $(0, \infty)$. Для доказательства неравенства интересно рассматривать лишь те множества e', для которых $\int_{e'} |x(s)|\,ds < \infty$. Функция $y_\theta(s) = \min\{|x(s)|,\ x^*(\theta)\}$ будет ограниченной на дополнении к e', которое имеет конечную меру θ, и не будет превосходить $|x(s)|$ на e', поэтому она суммируема на $(0, \infty)$. Далее, $y_\theta^*(s) = \min\{x^*(s),\ x^*(\theta)\}$, поэтому

$$\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds = \int_\theta^\infty y_\theta^*(s)\,ds \leqslant \int_{e'} y_\theta(s)\,ds \leqslant \int_{e'} |x(s)|\,ds.$$

Требуемое неравенство (2.29) доказано.

При доказательстве (2.28) можно предполагать, что $\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds < \infty$. Тогда выполнено условие $n_{|x|}(\tau) < \infty$ при всех $\tau > 0$, и поэтому существует множество $e_\theta(x)$ меры θ, построенное в 7°. Обозначим $e'_\theta(x) = (0, \infty) \setminus e_\theta(x)$. Функции $x^*(s)$ и $|x(s)|$ на множествах (θ, ∞) и $e'_\theta(x)$ соответственно равноизмеримы, поэтому

$$\int_\theta^\infty x^*(s)\,ds = \int_{e'_\theta(x)} |x(s)|\,ds.$$

Следствие. *Если* $x(s)\equiv 0$ *при* $s>a$, *то*

$$\int_0^a x^*(s)\,ds \leqslant \int_0^a |x(s)|\,ds. \qquad (2.30)$$

16°. *Если* $x(t)=y(t)=0$ *при* $t>a$, *то справедливо неравенство*

$$\int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds \leqslant \int_0^a |x(s)\,y(s)|\,ds. \qquad (2.31)$$

Доказательство. Считая x и y неотрицательными, строим возрастающую последовательность конечнозначных функций $y_n(t)$, сходящуюся почти всюду к функции $y(t)$. Фуикции $y_n(t)$ представим в виде

$$y_n(t)=\sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k}\chi_{e_{n,k}}(t),$$

где $y_{n,k}$ — положительные числа и $e_{n,1}\subset e_{n,2}\subset \ldots \subset e_{n,N_n}$. Тогда в силу (2.29)

$$\int_0^a x(s)\,y(s)\,ds \geqslant \int_0^a x(s)\,y_n(s)\,ds =$$

$$=\sum_{k=1}^{N_n} y_{nk}\int_{e_{n,k}} x(s)\,ds \geqslant \sum_{k=1}^{N_n} y_{n,k}\int_{a-\operatorname{mes} e_{n,k}}^{a} x^*(s)\,ds =$$

$$=\int_0^a x^*(s)\sum y_{n,k}\chi_{[a-\operatorname{mes} e_k,\,a]}(s)\,ds = \int_0^a x^*(s)\,y_n^*(a-s)\,ds. \qquad (2.32)$$

Последовательность $y_n^*(a-s)$ возрастает, и в силу свойства 11° почти везде сходится к фуикции $y^*(a-s)$. Теорема Леви позволяет из (2.32) получить предельным переходом (2.31).

17°. *Если* $x(t)=y(t)=0$ *при* $t>a$, *то выполняется равенство*

$$\int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds = \inf_u \int_0^a |u(s)\,y(s)|\,ds, \qquad (2.33)$$

где inf *берется по всем таким функциям* $u(t)$, *что* $|u(t)|$ *равноизмерима с* $x^*(t)$.

Достаточно установить неравенство

$$\int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds \geq \inf_u \int_0^a |u(s)\,y(s)|\,ds. \tag{2.34}$$

Слева стоит интеграл Римана. Для произвольного $\varepsilon>0$ построим последовательность точек $\{s_i\}_{i=-\infty}^{i=\infty}$, обладающую следующими свойствами:

1) $s_{-i}+s_i=a$;

2) $y^*(a-s_i+0)\leqslant(1+\varepsilon)\,y^*(a-s_{i-1})$

и

3) $$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*(s_{i-1}+0)\,y^*(a-s_{i-1})(s_i-s_{i-1})\leqslant \leqslant(1+\varepsilon)\int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds.$$

Из свойств 2) и 3) вытекает неравенство

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*(s_{i-1}+0)\,y^*(a-s_i+0)(s_i-s_{i-1})\leqslant \leqslant(1+\varepsilon)^2\int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds.$$

Построим попарно непересекающиеся множества e_i меры s_i-s_{i-1}, на которых

$$y^*(a-s_{i-1})\leqslant|y(t)|\leqslant y^*(a-s_i+0)$$
$$(t\in e_i).$$

Отобразим каждое множество e_i с сохранением меры на отрезок $[s_{i-1}, s_i]$ с помощью функций $\omega_i(t)$ и положим

$$v(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*(\omega_i(t))\,\chi_{e_i}(t).$$

Функция $v(t)$ равноизмерима с функцией $x^*(t)$.

Имеем

$$\inf \int_0^a |u(s)\,y(s)|\,ds \leqslant \int_0^a v(s)\,|y(s)|\,ds =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{e_i} x^*(\omega_i(s))\,|y(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=-\infty}^{\infty} x^*(s_{i-1}+0)\,y^*(a-s_i+0)\,(s_i-s_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)^2 \int_0^a x^*(s)\,y^*(a-s)\,ds.$$

В виду произвольности ε из последнего неравенства следует (2.34), а вместе с ним и (2.33).

18°. *Пусть для локально суммируемых функций $x(t)$ и $y(t)$ выполнено неравенство*

$$\int_0^\theta x(s)\,ds \leqslant \int_0^\theta y(s)\,ds, \tag{2.35}$$

и пусть $b(t)$ — такая убывающая неотрицательная на $(0, \infty)$ функция, что функции $x(t)\,b(t)$ и $y(t)\,b(t)$ локально суммируемы. Тогда справедливо неравенство:

$$\int_0^\infty x(s)\,b(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty y(s)\,b(s)\,ds. \tag{2.36}$$

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны, то условие суммируемости xb и yb можно отбросить.

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда функция $b(t)$ конечнозначна:

$$b(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{(0,\theta_k]}(t),$$

где $\Delta_k > 0$ и $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_N$. Тогда

$$\int_0^\infty x(s)\,b(s)\,ds = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \int_0^{\theta_k} x(s)\,ds \leqslant \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \int_0^{\theta_k} y(s)\,ds =$$

$$= \int_0^\infty y(s)\,b(s)\,ds,$$

т. е. неравенство (2.36) выполняется. Если $b(t)$ — ограниченная функция, то ее можно на каждом конечном отрезке $[0, a]$ аппроксимировать равномерно последовательностью убывающих конечнозначиых функций $b_N(s)$, и тогда

$$\int_0^a x(s)\,b(s)\,ds = \lim_{N\to\infty}\int_0^a x(s)\,b_N(s)\,ds \leqslant \lim_{N\to\infty}\int_0^a y(s)\,b_N(s)\,ds = \int_0^a y(s)\,b(s)\,ds,$$

откуда также следует (2.36).

Наконец, для произвольной $b(t)$ обозначим $b^{(n)}(t) = \min\{b(t), n\}$. Тогда в уже доказанном неравенстве

$$\int_0^a x(s)\,b^{(n)}(s)\,ds \leqslant \int_0^a y(s)\,b^{(n)}(s)\,ds \tag{2.37}$$

можно перейти к пределу в силу абсолютной непрерывности интегралов от суммируемых функций. Таким образом, мы снова приходим к неравенству (2.36).

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны, то в случае, когда функция $y(t)\,b(t)$ не суммируема, неравенство (2.36) очевидно, а в случае ее суммируемости в неравенстве (2.37) возможен предельный переход в силу леммы Фату.

Замечание 1. Если функция $b(t)$ имеет носитель на $(0, N]$, то достаточно требовать, чтобы неравенство (2.35) выполнялось на $(0, N]$.

Замечание 2. Если функция $b(t)$ — возрастающая, то неравенство

$$\int_0^\infty |x(s)|\,b(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty |y(s)|\,b(s)\,ds$$

следует из неравенства

$$\int_0^\infty |x(s)|\,ds \leqslant \int_0^\infty |y(s)|\,ds.$$

19°. *Из неравенства*

$$\int_0^\theta x^*(s)\,ds \leqslant \int_0^{\theta_1} y^*(s)\,ds$$

при всех $\theta > 0$ *вытекает неравенство*

$$\int_0^\infty x(s)\,a(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty y^*(s)\,a^*(s)\,ds \tag{2.38}$$

для любой измеримой функции $a(s)$.

Действительно, утверждение следует из свойств 18° и 13° перестановок.

20°. *Если* $b(t)$ — *неотрицательная возрастающая функция, то справедливо неравенство*

$$\int_0^\infty x^*(t)\,b(t)\,dt = \inf_\omega \int_0^\infty x(\omega(t))\,b(t)\,dt, \tag{2.39}$$

где $\omega(t)$ — *взаимно однозначное, сохраняющее меру отображение полуоси* $(0, \infty)$ *на себя.*

Доказательство. Функции $|x(\omega(t))|$ и $x^*(t)$ равноизмеримы, поэтому из неравенства (2.29), примененного к функции $x(\omega(t))$, и замечания 2 к свойству 18° вытекает неравенство

$$\int_0^\infty x^*(s)\,b(s)\,ds \leqslant \int_0^\infty |x(\omega(s))|\,b(s)\,ds.$$

Таким образом, достаточно доказать противоположное неравенство в предположении, что левая часть конечна. Зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим последовательность чисел $(1+\varepsilon)^k$ $(-\infty < k < \infty)$. Считая $b(-0) = 0$, обозначим через τ_k какую-нибудь точку полуоси, в которой $b(\tau_k - 0) \leqslant (1+\varepsilon)^k \leqslant b(\tau_k + 0)$. Предел τ_k при $k \to -\infty$ обозначаем через $\tau_{-\infty}$. Если функция $b(t)$ ограничена, то среди τ_k имеется последнее τ_{k_0-1}, и тогда полагаем $\tau_{k_0} = \infty$. Числа τ_k обладают свойствами $b(\tau_k - 0) \leqslant (1+\varepsilon)\,b(\tau_{k-1} + 0)$ $(-\infty < k < \infty)$. Из конечности интеграла в левой части и возрастания функции $b(t)$ следует, что $x^*(\infty) = 0$ и, значит, $n_{|x|}(\tau) < \infty$ при всех $\tau > 0$. Поэтому, рассуждая так же, как в пп. 7°, 8°, можно построить множества e_k с $\operatorname{mes} e_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ так, что функции $x^*(t)\,\chi_{(\tau_{k-1}, \tau_k]}(t)$ равноизмеримы с функциями $|x(t)|\,\chi_{e_k}(t)$ для всех чисел $\tau_k \leqslant \infty$ $(k > -\infty)$. Если $\tau_{-\infty} > 0$, то еще строим множество $e_{-\infty}$ так, что функция $x^*(t)\,\chi_{(0, \tau_{-\infty}]}(t)$ равноизмерима с функцией $|x(t)|\,\chi_{e_{-\infty}}(t)$. Далее определяем взаимно однозначное сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ полуоси $(0, \infty)$ на себя, отображающее интервалы $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ на множествах e_k и интервал $(0, \tau_{-\infty}]$ на $e_{-\infty}$. Тогда функции $x^*(t)\,\chi_{(\tau_{k-1}\tau_k]}(t)$ и $|x(\omega(t))|\,\chi_{(\tau_{k-1},\tau_k]}(t)$, а также $x^*(t)\,\chi_{(0,\tau_{-\infty}]}(t)$ и $|x(\omega(t))|\,\chi_{(0,\tau_{-\infty}]}(t)$ соответственно равноизмеримы и поэтому

$$\int_0^{\infty} x(\omega(t))\, b(t)\, dt = \sum_k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x(\omega(t))\, b(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k b(\tau_k - 0) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x(\omega(t))\, dt = \sum b(\tau_k - 0) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x^*(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \sum b(\tau_{k-1} + 0) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} x^*(t)\, dt \leqslant (1+\varepsilon) \int_0^{\infty} x^*(t)\, b(t)\, dt.$$

В силу произвольности ε требуемое неравенство, а вместе с ним и равенство (2.39),— доказаны.

Следствие. *Если $b(t)$ — неотрицательная возрастающая функция, то выполнено неравенство*

$$\int_0^{\infty} (x+y)^*(t)\, b(t)\, dt) \geqslant \int_0^{\infty} x^*(t)\, b(t)\, dt + \int_0^{\infty} y^*(t)\, b(t)\, dt.$$

21°. *Если $\alpha > -1$ и $x(t)$ — убывающая неотрицательная функция, то справедливо неравенство*

$$C_1 \int_0^{\infty} x(t)\, t^{\gamma+\alpha}\, dt \leqslant \int_0^{\infty} (x(t)\, t^{\gamma})^*\, t^{\alpha}\, dt \leqslant C_2 \int_0^{\infty} x(t)\, t^{\gamma+\alpha}\, dt, \quad (2.40)$$

где C_1 и C_2 не зависят от выбора функции $x(t)$.

При $\gamma \leqslant 0$ интегралы во всех частях неравенств совпадают, поэтому интересным является случай $\gamma > 0$.

Для характеристической функции $\chi_{(0,h]}(t)$ имеем

$$\int_0^{\infty} (\chi_{(0,h]}(t)\, t^{\gamma})^*\, t^{\alpha}\, dt = \int_0^{h} (\chi_{(0,h]}(t)\, t^{\gamma})^*\, t^{\alpha}\, dt = \int_0^{h} (h-t)^{\gamma}\, t^{\alpha}\, dt =$$

$$= h^{\alpha+\gamma+1} \int_0^{1} (1-s)^{\gamma} s^{\alpha}\, ds = (\alpha+\gamma+1) \int_0^{1} (1-s)^{\gamma} s^{\alpha}\, ds \int_0^{h} t^{\gamma+\alpha}\, dt =$$

$$= C_{\alpha\gamma} \int_0^{\infty} \chi_{(0,h]}(t)\, t^{\gamma+\alpha}\, dt. \quad (2.41)$$

1) Пусть $\alpha>0$. Убывающую неотрицательную конечнозначную функцию $x(t)$ представим в виде

$$x(t)=\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\chi_{(0,h_k]}(t)\qquad(\Delta_k>0;\ h_1>h_2>\ldots>h_n).\ (2.42)$$

Функция t^α возрастает, поэтому в силу свойства 20°

$$\int_0^\infty (x(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt=\inf_\omega\int_0^\infty x(\omega(t))\,[\omega(t)]^\gamma\,t^\alpha\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\inf_\omega\int_0^\infty \chi_{(0,h_k]}(\omega(t))\,[\omega(t)]^\gamma\,t^\alpha\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\int_0^\infty(\chi_{(0,h_k]}(t)\,t^\gamma)^*t^\alpha\,dt=C_{\alpha\gamma}\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\int_0^\infty\chi_{(0,h_k]}(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt=$$

$$=C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

(Здесь $\omega(t)$ — взаимно однозначное, сохраняющее меру отображение полуоси $(0,\infty)$ на себя.) Произвольную убывающую неотрицательную функцию $x(t)$ представим как предел возрастающей последовательности неотрицательных ступенчатых функций $x_n(t)$. Тогда

$$\int_0^\infty (x(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt\geqslant\int_0^\infty (x_n(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt\geqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x_n(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

Переходя к пределу в правой части при $n\to\infty$, получаем неравенство

$$\int_0^\infty (x(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt\geqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

Левая часть неравенства (2.40) доказана. Правая часть в силу (2.39) выполняется с константой $C_2=1$.

2) Пусть $-1<\alpha<0$. Тогда функция t^α убывает и левая часть неравенства (2.40) в силу свойства 13° выполнена с константой $C_1=1$.

Для функции вида (2.42) из (2.26) и (2.41) получаем

$$\int_0^\infty (x(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt = \sup\int_0^\infty x(t)\,t^\gamma u_\alpha(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \Delta_k \sup\int_0^\infty \chi_{(0,h_k]}(t)\,t^\gamma u_\alpha(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \Delta_k \int_0^\infty (\chi_{(0,h_k]}(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt =$$

$$= C_{\alpha\gamma}\sum_{k=1}^N \Delta_k \int_0^\infty \chi_{(0,h_k]}(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt = C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt,$$

где $u_\alpha(t)$ — функции, равноизмеримые с t^α.

Любую убывающую неотрицательную функцию $x(t)$ представляем как предел возрастающей последовательности $x_n(t)$ вида (2.42). Тогда

$$\int_0^\infty x_n(t)\,t^\gamma u_\alpha(t)\,dt \leqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x_n(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt \leqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\int_0^\infty x(t)\,t^\gamma u_\alpha(t)\,dt \leqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

Беря sup по всем функциям $u_\alpha(t)$, равноизмеримым с t^α, приходим в силу (2.26) к неравенству

$$\int_0^\infty (x(t)\,t^\gamma)^*\,t^\alpha\,dt \leqslant C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty x(t)\,t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

22°. *Пусть* $\alpha>-1$ *и* $\alpha+\gamma<-1$, $x(t)$ — *неотрицательная возрастающая функция; тогда справедливо неравенство* (2.40).

Пусть $x(t)=\chi_{(h,\infty)}(t)$. Тогда

$$\int_0^\infty (\chi_{(h,\infty)}(t)t^\gamma)^* t^\alpha\,dt = \int_0^\infty (t+h)^\gamma t^\alpha\,dt = h^{\gamma+\alpha+1}\int_0^\infty (1+s)^\gamma s^\alpha\,ds =$$

$$= |\gamma+\alpha+1|\int_0^\infty (1+s)^\gamma s^\alpha\,ds \int_h^\infty t^{\gamma+\alpha}\,dt = C_{\alpha\gamma}\int_0^\infty \chi_{(h,\infty)}(t)t^{\gamma+\alpha}\,dt.$$

$\left(\text{Здесь } \int_0^\infty (1+s)^\gamma s^\alpha\,ds<\infty \text{ в силу условий на } \alpha \text{ и } \gamma.\right)$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые проводились при доказательстве 21°. При этом возрастающая функция $x(t)$ аппроксимируется возрастающей последовательностью обобщенно конечнозначных функций вида

$$x(t)=\sum_{k=1}^N \Delta_k\chi_{(h_k,\infty)}(t).$$

§ 3. Операторы в банаховой паре $L_1(0, \infty)$, $L_\infty(0, \infty)$

1. Пространства $L_1\cap L_\infty$ и L_1+L_∞. Пространство $L_1\cap L_\infty$ состоит из всех ограниченных суммируемых на $(0, \infty)$ функций с нормой

$$\|x\|_{L_1\cap L_\infty} = \max\left\{\operatorname{vrai\,sup}|x(t)|,\ \int_0^\infty |x(t)|\,dt\right\}.$$

Множество конечнозначных функций плотно в пространстве $L_1\cap L_\infty$. Действительно, пусть $x\in L_1\cap L_\infty$ и $x(t)\geqslant 0$. Разобьем отрезок $[0, \|x\|_{L_\infty}]$ на N равных частей и положим

$$x_N(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{N}\|x\|_{L_\infty}\chi_{e_k}(t),$$

где $e_k=\left\{t:\frac{k}{N}\|x\|_{L_\infty}\leqslant x(t)<\frac{k+1}{N}\|x\|_{L_\infty}\right\}$. Из того, что $x\in L_1$, следует, что $\operatorname{mes} e_k<\infty$ при $1\leqslant k\leqslant N-1$, и следовательно, функции $x_N(t)$ конечнозначны. Очевидно,

$\|x - x_N\|_{L_\infty} \leqslant \frac{1}{N}\|x\|_{L_\infty} \to 0$ при $N \to \infty$. Далее,

$$\|x - x_N\|_{L_1} = \int_0^\infty [x(t) - x_N(t)]\, dt \to 0$$

по теореме Лебега, так как $x(t) - x_N(t) \leqslant x(t)$.

Для любой функции $x \in L_1 \cap L_\infty$ утверждение следует из представления $x = x_+ - x_-$, где $x_+ = \max\{x(t), 0\}$.

Пространство $L_1 + L_\infty$ состоит из функций, являющихся суммами измеримых ограниченных и суммируемых на $(0, \infty)$ функций. Норма в этом пространстве определяется по формуле

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} = \inf_{\substack{x(t)=u(t)+v(t)\\ u\in L_1, v\in L_\infty}} (\|u\|_{L_1} + \|v\|_{L_\infty}). \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что пространство $L_1 + L_\infty$ состоит из всех локально суммируемых функций $x(t)$, для которых $n_{|x|}(\tau) \not\equiv \infty$. Действительно, если $x \in L_1 + L_\infty$, то $x(t) = u(t) + v(t)$, где $u \in L_1$ и $v \in L_\infty$, следовательно, функция $x(t)$ локально суммируема. Далее, если $\tau > \operatorname{vrai} \sup |v(t)| = c$, то $n_{|x|}(\tau) \leqslant n_{|u|}(\tau - c) < \infty$. Обратно, пусть $x(t)$ локально суммируема и $n_{|x|}(\tau_0) < \infty$. Тогда для множества $e_0 = \{t : |x(t)| > \tau_0\}$ мера $\operatorname{mes} e_0 < \infty$. Полагая $x(t) = x(t)\chi_{e_0}(t) + x(t)(1 - \chi_{e_0}(t))$, получаем, что первое слагаемое справа принадлежит L_1, а второе — L_∞, т. е. $x \in L_1 + L_\infty$.

Можно дать явную формулу для вычисления нормы функции $x(t)$ в пространстве $L_1 + L_\infty$. Пусть $\operatorname{mes} e = 1$; тогда

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} \geqslant \|x\chi_e\|_{L_1+L_\infty} = \inf_{u(t)+v(t)=x(t)\chi_e(t)} (\|u\|_{L_1} + \|v\|_{L_\infty}).$$

Очевидно, что для вычисления inf достаточно брать функции u и v с носителями на множестве e, и тогда $\|v\|_{L_1} \leqslant \|v\|_{L_\infty}$. Поэтому

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} \geqslant \inf (\|u\|_{L_1} + \|v\|_{L_1}) \geqslant \|x\chi_e\|_{L_1}.$$

В силу (2.14)

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} \geqslant \sup_{me=1} \|x\chi_e\|_{L_1} = \int_0^1 x^*(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Для доказательства обратного неравенства введем функции
$$v(t)=\operatorname{sign} x(t)\min(|x(t)|,\ x^*(1))$$
и $u(t)=x(t)-v(t)$. Тогда $|u(t)|=[|x(t)|-x^*(1)]_+$, и так как функции $[|x(t)|-x^*(1)]_+$ и $[x^*(t)-x^*(1)]_+$ равноизмеримы, то
$$\|u\|_{L_1}=\int_0^\infty \big||x(s)|-x^*(1)\big|_+ ds=\int_0^1 [x^*(s)-x^*(1)]\,ds.$$

С другой стороны $\|v\|_{L_\infty}=x^*(1)$ и, следовательно,
$$\|u\|_{L_1}+\|v\|_{L_\infty}=\int_0^1 x^*(s)\,ds. \tag{3.3}$$

Из (3.1)—(3.3) получаем основную формулу
$$\|x\|_{L_1+L_\infty}=\int_0^1 x^*(s)\,ds. \tag{3.4}$$

Из этой формулы, в частности, вытекает: $x^*(t)\in L_1+L_\infty$ для любого $x\in L_1+L_\infty$.

В дальнейшем нас будет интересовать функционал, определенный на пространстве L_1+L_∞ формулой
$$K(t,x)=\inf_{x(s)=u(s)+v(s)}\left(\|u\|_{L_1}+t\|v\|_{L_\infty}\right)\qquad (x\in L_1+L_\infty,\ t>0).$$

При фиксированном t функционал $K(t, x)$ эквивалентен норме пространства L_1+L_∞.

Выражение для $K(t, x)$ можно записать в виде
$$K(t,x)=t\inf_{x(t\sigma)=u(t\sigma)+v(t\sigma)}\left[\int_0^\infty |u(t\sigma)|\,d\sigma+\sup_{0<\sigma<\infty}|v(t\sigma)|\right]$$
и по предыдущему (см. (3.4))
$$K(t,x)=t\int_0^1 [x(t\sigma)]^*\,d\sigma=\int_0^t x^*(s)\,ds. \tag{3.5}$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством $[x(t\sigma)]^*=x^*(t\sigma)$.

Заметим, что пространства $L_1\cap L_\infty$ и L_1+L_∞ не сепарабельны. Действительно, в $L_1\cap L_\infty$ для континуального семейства функций $\chi_{[0,\tau]}$ расстояние между каждыми двумя различными функциями равно единице. В пространстве L_1+L_∞ таким свойством обладает в силу (3.4) континуальное семейство функций $\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[n_k, n_k+1]}$, где $\{n_k\}$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел.

Отметим, что множество L_1 не плотно в L_1+L_∞. Замыкание $\bar{L}_1$ в L_1+L_∞ состоит из всех локально суммируемых функций, для которых $n_{|x|}(\tau)<\infty$ при всех $\tau>0$. Действительно, если функция $x(t)$ обладает перечисленными свойствами, то обозначим $e_k=\{t\colon |x|>1/k\}$. Тогда $\operatorname{mes} e_k<\infty$, и, следовательно, функция $x(t)\chi_{e_k}(t)$ принадлежит L_1. Далее

$$\|x-x\chi_{e_k}\|_{L_1+L_\infty} \leqslant \|x-x\chi_{e_k}\|_{L_\infty} \leqslant 1/k$$

и, следовательно, $x\in\bar{L}_1$. Обратно, если $n_{|x|}(\tau_0)=\infty$ ($\tau_0>0$) и $y(t)$ — любая функция из L_1, то $|y(t)|>\varepsilon$ на множестве конечной меры и, следовательно, $|x(t)-y(t)|\geqslant\tau_0-\varepsilon$ на множестве бесконечной меры. В силу формулы (3.4) $\|x-y\|_{L_1+L_\infty}\geqslant\tau_0-\varepsilon$, т. е. $x\notin\bar{L}_1$.

Легко видеть, что множество L_∞ плотно в пространстве L_1+L_∞.

Лемма 3.1. *Для всякой функции $x(t)$ из L_1+L_∞ можно найти такую последовательность множеств e_n конечной меры, что функции $[x(t)\chi_{e_n}(t)]^*$ сходятся почти всюду к функции $x^*(t)$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $e_n'=\{t\colon |x(t)|>x^*(\infty)+1/n\}$. Тогда $[x(t)\chi_{e_n'}(t)]^*=x^*(t)\chi_{[0,\operatorname{mes} e_n']}(t)$. Если меры множеств e_n' стремятся к ∞, то принимаем их за множества e_n, и утверждение очевидно.

Если $\operatorname{mes} e_n'\leqslant M<\infty$, то множество $e=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n'$ имеет конечную меру. На интервале $(\operatorname{mes} e, \infty)$ функция $x^*(t)$ равна $x^*(\infty)$. Обозначим через f_n множество меры n, на котором выполнено неравенство $x^*(\infty)\geqslant|x(t)|>x^*(\infty)-1/n$, и положим $e_n=e\cup f_n$. Тогда функция $[x(t)\chi_{e_n}(t)]^*$ совпадает с функцией $x^*(t)$ на отрезке

$[0, \operatorname{mes} e]$ и отличается от нее меньше, чем на $1/n$ на отрезке $[\operatorname{mes} e, \operatorname{mes} e+n]$.

Замечание. Если систему множеств $\{e_n\}$ заменить более широкой системой $\{e_n'\}$ $(e_n' \supset e_n)$, то утверждение леммы останется справедливым и для системы $\{e_n'\}$.

Пространства $L_1 \cap L_\infty$ и $L_1 + L_\infty$ находятся в двойственности в том смысле, что при $x \in L_1 + L_\infty$ и $y \in L_1 \cap L_\infty$

$$\left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \leqslant \|x\|_{L_1+L_\infty} \|y\|_{L_1 \cap L_\infty}. \tag{3.6}$$

Действительно, если $x = u + v$, где $u \in L_1$ и $v \in L_\infty$, то

$$\left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \leqslant \|u\|_{L_1} \|y\|_{L_\infty} + \|v\|_{L_\infty} \|y\|_{L_1} \leqslant$$
$$\leqslant \|y\|_{L_1 \cap L_\infty} (\|u\|_{L_1} + \|v\|_{L_\infty}).$$

Неравенство (3.6) тогда следует из определения нормы в пространстве $L_1 + L_\infty$.

Далее,

$$\sup_{\|x\|_{L_1+L_\infty} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| = \|y\|_{L_1 \cap L_\infty}. \tag{3.7}$$

Действительно,

$$\sup_{\|x\|_{L_1+L_\infty} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \geqslant$$
$$\geqslant \max \left[\sup_{\|x\|_{L_1} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right|, \sup_{\|x\|_{L_\infty} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \right] =$$
$$= \max [\|y\|_{L_1}, \|y\|_{L_\infty}] = \|y\|_{L_1 \cap L_\infty}. \tag{3.8}$$

Из (3.6) и (3.8) вытекает (3.7).

Аналогично

$$\sup_{\|y\|_{L_1 \cap L_\infty} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| = \|x\|_{L_1+L_\infty}. \tag{3.9}$$

Действительно, из (3.4) и (2.14) получаем

$$\|x\|_{L_1+L_\infty} = \int_0^1 |x(t)|^* dt \leqslant \int_{e_1^\varepsilon} |x(t)|\, dt + \varepsilon,$$

где e_1^ε — некоторое множество с $\operatorname{mes} e_1^\varepsilon = 1$. Тогда

$$\sup_{\|y\|_{L_1 \cap L_\infty} \leqslant 1} \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty x(t)\, \chi_{e_1^\varepsilon}(t) \operatorname{sign} x(t)\, dt \geqslant \|x\|_{L_1+L_\infty} - \varepsilon.$$

Из сказанного на стр. 65 и соотношений (3.7) и (3.9) вытекает, что пространства $L_1 \cap L_\infty$ и $L_1 + L_\infty$ являются ассоциированными друг к другу.

2. Оператор усреднения. Пусть полуось $(0, \infty)$ разбита на счетное число измеримых множеств e_i ($i = 1, 2, \ldots$) конечной меры. По системе $\Delta = \{e_i\}_1^\infty$ построим оператор усреднения, определенный для каждой локально суммируемой функции формулой

$$T_\Delta x(t) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\operatorname{mes} e_i} \int_{e_i} x(\tau)\, d\tau \chi_{e_i}(t) = \sum_{i=1}^\infty x_i \chi_{e_i}(t). \tag{3.10}$$

Очевидно, $T_\Delta \chi_{e_i}(t) = \chi_{e_i}(t)$. Оператор T_Δ ограничен в пространстве L_∞ и имеет норму, равную единице. Далее, при $x \in L_1$

$$\|T_\Delta x\|_{L_1} = \sum_{i=1}^\infty \left| \int_{e_i} x(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \|x\|_{L_1}.$$

Это неравенство переходит в равенство на функциях $\chi_{e_i}(t)$, поэтому $\|T_\Delta\|_{L_1} = 1$. Из сказанного вытекает, что оператор T_Δ ограниченно действует в пространстве $L_1 + L_\infty$ и $\|T_\Delta\|_{L_1+L_\infty} \leqslant 1$. В силу формулы (3.4) для нормы в пространстве $L_1 + L_\infty$ это эквивалентно неравенству

$$\int_0^1 (T_\Delta u)^*(\tau)\, d\tau \leqslant \int_0^1 u^*(\tau)\, d\tau.$$

Применяя это же рассуждение к норме в L_1+L_∞, определенной функционалом $K(t, x)$, из (3.5) получим

$$\int_0^t (T_\Delta u)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t u^*(\tau)\,d\tau. \tag{3.11}$$

3. Еще одно свойство перестановки. Рассмотрим конечномерное банахово пространство E_n векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Будем называть это пространство *симметричным*, если норма вектора не изменяется при произвольных перестановках и изменениях знаков его координат.

Если $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y=(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $|\xi_i| \geqslant |\eta_i|$ $(i=1, \ldots, n)$, то точка y принадлежит параллелепипеду с вершинами в точках $(\pm\xi_1, \ldots, \pm\xi_n)$. Радиусы-векторы этих вершин имеют одинаковые нормы, равные $\|x\|$, поэтому все точки куба имеют нормы, не превосходящие $\|x\|$ и, в частности, $\|y\| \leqslant \|x\|$.

Через x^* будем обозначать вектор с координатами $\xi_1^* = |\xi_{i_1}|, \ldots, \xi_n^* = |\xi_{i_n}|$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — такая перестановка индексов $(1, \ldots, n)$, что $|\xi_{i_1}| \geqslant |\xi_{i_2}| \geqslant \ldots \geqslant |\xi_{i_n}|$

Лемма 3.2. *В пространстве с симметричной нормой справедливо неравенство*

$$\|x^* - y^*\| \leqslant \|x - y\|. \tag{3.12}$$

Доказательство. Левая и правая части неравенства не будут изменяться, если у векторов x и y делать одинаковые перестановки и изменения знаков координат, поэтому при доказательстве можно считать, что $x=x^*$. При этом предположении, в силу описанного выше свойства монотонности нормы, $\|x-|y|\| \leqslant \|x-y\|$, $|y| = (|\eta_1|, \ldots, |\eta_n|)$. Следовательно, неравенство (3.12) будет доказано, если его установить для векторов y с неотрицательными координатами. Итак, пусть $x=x^*$ и $y \geqslant 0$. Пусть при некоторых i и j с $i<j$ имеет место неравенство $\eta_i<\eta_j$. Это означает, что точки x и y лежат по разные стороны от плоскости l с уравнением $\zeta_i=\zeta_j$ (x может лежать в этой плоскости). Рассмотрим точку $\bar{y}$, симметричную точке y относительно плоскости l и точку z, симметричную y относительно плоскости, параллельной l и проходящей через точку x. Очевидно, что $\bar{y}$

лежит на отрезке, соединяющем y и z. Далее $\|x-y\|=\|x-z\|$ в силу симметричности пространства, следовательно, $\|x-\bar{y}\|\leqslant\|x-y\|$. Таким образом, перестановка пары координат вектора y в убывающем порядке не увеличивает норму $\|x-y\|$. Применяя последовательно это свойство, приходим к неравенству (3.12).

Читателю предоставляется возможность доказать, что величина

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{l}\xi_i^*$$

при каждом фиксированном $l\leqslant n$ обладает свойствами нормы симметричного банахова пространства (см. неравенство (2.16)). Из леммы тогда будет следовать неравенство

$$\sum_{i=1}^{l}(\xi_i^*-\eta_i^*)^*\leqslant\sum_{i=1}^{l}(\xi_i-\eta_i)^* \qquad (1\leqslant l\leqslant n). \tag{3.13}$$

Возвратимся теперь к перестановкам функций.

Теорема 3.1. *Для любых функций x, $y\in L_1+L_\infty$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\tau [x^*(t)-y^*(t)]^*\,dt\leqslant\int_0^\tau [x(t)-y(t)]^*\,dt. \tag{3.14}$$

Доказательство. Установим сначала вспомогательное утверждение: пусть для последовательностей пар функций $x_n(t)$, $y_n(t)\in L_1+L_\infty$ уже показана справедливость неравенства (3.14). Если: а) почти всюду $x_n^*(t)\to x^*(t)$, $y_n^*(t)\to y^*(t)$; б) $\int_0^\tau [x_n(t)-y_n(t)]^*dt\leqslant\int_0^\tau [x(t)-y(t)]^*dt$, то неравенство (3.14) будет справедливо и для пары функций x, y. Действительно, из (3.14) и условия б) получим

$$\int_0^\tau [x_n^*(t)-y_n^*(t)]^*\,dt\leqslant\int_0^\tau [x(t)-y(t)]^*\,dt.$$

Из свойства 7° следует, что для любого $e \subset$ mes $e=\tau$

$$\int_e |x_n^*(t)-y_n^*(t)|\,dt \leqslant \int_0^\tau [x(t)-y(t)]^*\,dt.$$

По теореме Фату из этого неравенства и свойства а) вытекает, что

$$\int_e |x^*(t)-y^*(t)|\,dt \leqslant \int_0^\tau [x(t)-y(t)]^*\,dt.$$

Взяв в левой части sup по e, из того же свойства 7° получим неравенство (3.14).

Приведенное утверждение позволит нам расширять класс функций, для которых справедливо неравенство (3.14).

Рассмотрим сначала ступенчатые функции вида

$$x(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{[(k-1)a,ka)}(t) \quad \text{и} \quad y(t)=\sum_{k=1}^{n} y_k\chi_{[(k-1)a,ka)}(t).$$

Для таких функций

$$x^*(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k^*\chi_{(k-1)a,ka)}(t) \quad \text{и} \quad y^*(t)=\sum_{k=1}^{n} y_k^*\chi_{[(k-1)a,ka]}(t).$$

Неравенство (3.13) непосредственно приводит к неравенству

$$\int_0^{la}[x^*(t)-y^*(t)]^*\,dt \leqslant \int_0^{la}[x(t)-y(t)]^*\,dt \qquad (0\leqslant l\leqslant n). \quad (3.15)$$

Функции от τ, стоящие слева и справа в неравенстве (3.14), в нашем случае кусочно-линейные, поэтому из (3.15) вытекает (3.14).

Пусть теперь $x, y\in L_1(0,\infty)$. Введем в рассмотрение ступенчатые функции

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n^2} n\int_{(k-1)/n}^{k/n} x(s)\,ds\,\chi_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)}(t)=T_nx(t),$$

$$y_n(t)=\sum_{k=1}^{n^2} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} y(s)\,ds\,\chi_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right)}(t)=T_ny(t).$$

По предыдущему для этих функций справедливо неравенство (3.14). Проверим, что последовательности x_n и y_n удовлетворяют условиям а) и б). В силу свойств интеграла от суммируемой функции последовательности $T_n x(t)$ и $T_n y(t)$ сходятся почти всюду к $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. Из принадлежности функций x, y к L_1 следует сходимость указанных последовательностей по мере. В силу свойства 11° перестановок отсюда вытекает, что $x_n^*(t) \to x^*(t)$ и $y_n^*(t) \to y^*(t)$ во всех точках непрерывности $x^*(t)$ и $y^*(t)$, а значит, почти всюду. Свойство а) выполнено. Свойство б) следует из неравенства (3.11):

$$\int_0^\tau [x_n(t) - y_n(t)]^* \, dt = \int_0^\tau [T_n(x-y)]^*(t)\, dt \leqslant \int_0^\tau (x-y)^*(t)\, dt.$$

Пусть теперь $x, y \in L_1 + L_\infty$. Согласно лемме 3.1 построим множества e_n и f_n для функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно, а затем возьмем их объединения $\tilde{e}_n = e_n \cup f_n$. Функции $x_n(t) = x(t)\chi_{\tilde{e}_n}(t)$ и $y_n(t) = y(t)\chi_{\tilde{e}_n}(t)$ принадлежат $L_1(0, \infty)$. Далее, в силу замечания к лемме 3.1, $x_n^*(t) \to x^*(t)$ и $y_n^*(t) \to y^*(t)$ почти всюду. Наконец, в силу свойства перестановок 2°

$$\int_0^\tau [x_n(t) - y_n(t)]^* \, dt = \int_0^\tau [(x-y)(t)\chi_{\tilde{e}_n}(t)]^*\, dt \leqslant \int_0^\tau [x(t) - y(t)]^* dt.$$

Свойства а) и б) выполнены. Теорема доказана.

4. Полугруппа сжимающих операторов. Рассмотрим множество Σ всех таких линейных операторов в $L_1 + L_\infty$, что их суже́ния на пространства L_1 и L_∞ действуют в каждом из этих пространств и являются сжимающими операторами:

$$\Sigma = \{T : \|T\|_{L_1 \to L_1} \leqslant 1,\ \|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \leqslant 1\}.$$

В соответствии с обозначениями первой главы, $\Sigma = \pi_1(L_1 L_1, L_\infty L_\infty)$, множество Σ выпукло и образует полугруппу относительно композиции операторов.

Операторы из Σ обладают следующим важным свойством:

$$\int_0^\theta (Tx)^*(s)\, ds \leqslant \int_0^\theta x^*(s)\, ds \qquad (0 < \theta < \infty). \tag{3.16}$$

Действительно, в силу формулы (3.5) это неравенство эквивалентно следующему: $K(\theta, Tx) \leqslant K(\theta, x)$. Функционал $K(\theta, x)$ является нормой в сумме пространств L_1 и θL_∞ (с нормой $\theta\|x\|_{L_\infty}$), и последнее неравенство вытекает из того, что эта сумма является интерполяционным пространством между L_1 и θL_∞ с интерполяционной константой 1 (см. лемму 4.2, гл. I).

Нетрудно видеть, что и обратно, из неравенства (3.16) следует, что $T \in \Sigma$.

Приведем примеры операторов из Σ. Очевидно, что множеству Σ принадлежат операторы умножения на измеримые функции, не превосходящие по модулю единицу.

В силу неравенства (3.11) множеству Σ принадлежат все операторы усреднения.

Наконец, множеству Σ принадлежат операторы преобразования вида $Tx(t) = x(\omega(t))$, где $\omega(t)$ — не уменьшающее меру преобразование полуоси $(0, \infty)$ в себя.

Введем в рассмотрение оператор V, являющийся сопряженным к сужению оператора $T \in \Sigma$ на $L_1: V = (T|_{L_1})^*$. Оператор V будет действовать в L_∞ и иметь норму $\leqslant 1$. Покажем, что оператор V допускает расширение по непрерывности с $L_1 \cap L_\infty$ до сжимающего оператора в L_1. По определению

$$\int_0^\infty Tx(t)\, y(t)\, dt = \int_0^\infty x(t)\, Vy(t)\, dt \tag{3.17}$$

для всех $x \in L_1$ и $y \in L_\infty$.

При $y \in L_1 \cap L_\infty$

$$\|Vy\|_{L_1} = \int_0^\infty |Vy(t)|\, dt =$$

$$= \sup_{0<N<\infty} \int_0^\infty \chi_{[0,N]}(t) \operatorname{sign} Vy(t)\, Vy(t)\, dt =$$

$$= \sup_{0<N<\infty} \int_0^\infty T[\chi_{[0,N]}(t) \operatorname{sign} Vy](t)\, y(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \|y\|_{L_1} \leqslant \|y\|_{L_1}.$$

Так как пересечение $L_1 \cap L_\infty$ плотно в L_1, то из последнего неравенства следует наше утверждение.

Оператор V по линейности расширяется на $L_1 + L_\infty$. После этого он будет принадлежать Σ и обозначаться через T^0.

Если $x \in L_1 \cap L_\infty$, то с помощью предельного перехода из формулы (3.17) получаем, что

$$\int_0^\infty Tx(t)\, y(t)\, dt = \int_0^\infty x(t)\, T^0 y(t)\, dt$$
$$(x \in L_1 \cap L_\infty, \quad y \in L_1 + L_\infty). \tag{3.18}$$

Оператор умножения является самосопряженным в том смысле, что $T = T^0$. Тем же свойством обладают операторы усреднения, что следует из равенства

$$\int_0^\infty Tx(t)\, y(t)\, dt = \sum \frac{1}{\operatorname{mes} e_j} \int_{e_j} x(s)\, ds \int_{e_j} y(s)\, ds.$$

Можно привести пример отличного от нуля оператора $T_1 \in \Sigma$, для которого $T_1^0 = 0$. Построим на L_∞ линейный функционал $f_0(x)$ с нормой единица, обращающийся в нуль на $L_1 \cap L_\infty$ и не равный тождественно нулю. Тогда оператор $T_1 x = f_0(x)\chi_{(0, \infty)}$ принадлежит Σ (на L_1 оператор T_1 тождественно равен нулю). Из тождества (3.18) тогда следует, что

$$\int_0^\infty x(t)\, T_1^0 y(t)\, dt = 0$$

при всех $x \in L_1$ и $y \in L_\infty$ и, значит, $T_1^0 y = 0$.

Из этого примера следует, в частности, что, вообще говоря, $T^{00} \neq T$.

Через Σ_0 обозначим совокупность всех операторов $T \in \Sigma$, для которых $T^{00} = T$. Из формулы (3.18) для операторов $T \in \Sigma_0$ вытекает соотношение

$$\int_0^\infty x(t)\, T^0 y(t)\, dt = \int_0^\infty T^{00} x(t)\, y(t)\, dt = \int_0^\infty Tx(t)\, y(t)\, dt$$
$$(x \in L_1 + L_\infty,\ y \in L_1 \cap L_\infty).$$

Равенство

$$\int_0^\infty Tx(t)\,y(t)\,dt = \int_0^\infty x(t)\,T^0y(t)\,dt$$

$$(x \in L_1 + L_\infty,\ y \in L_1 \cap L_\infty) \tag{3.19}$$

в силу (3.18) является характеристическим свойством, выделяющим Σ_0 из Σ.

В пространстве L_1+L_∞ можно ввести слабую топологию $\sigma(L_1+L_\infty,\ L_1\cap L_\infty)$. Оператор $T\in\Sigma$ принадлежит Σ_0 тогда и только тогда, когда он непрерывен в этой топологии. Действительно, если $T\in\Sigma_0$ и x_n слабо сходится к x, то при $y\in L_1\cap L_\infty$

$$\lim \int_0^\infty Tx_n(t)\,y(t)\,dt = \lim \int_0^\infty x_n(t)\,T^0y(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty x(t)\,T^0y(t)\,dt = \int_0^\infty Tx(t)\,y(t)\,dt.$$

Обратно, если $T\in\Sigma$ непрерывен, то, пользуясь тем, что для любого $x\in L_1+L_\infty$ последовательность $x(t)\chi_{[0,N]}(t)\in L_1$ и сходится при $N\to\infty$ в топологии $\sigma(L_1+L_\infty,\ L_1\cap L_\infty)$ к $x(t)$, из (3.17) при $y\in L_1\cap L_\infty$ получаем

$$\int_0^\infty Tx(t)\,y(t)\,dt = \lim \int_0^\infty Tx_N(t)\,y(t)\,dt =$$

$$= \lim \int_0^\infty x_N(t)\,T^0y(t)\,dt = \int_0^\infty x(t)\,T^0y(t)\,dt,$$

что и доказывает принадлежность T к Σ_0.

Из последнего свойства, в частности, вытекает, что множество Σ_0 является полугруппой относительно композиции операторов.

Пусть $\omega(t)$ — взаимно однозначное сохраняющее меру отображение полуоси в себя. Покажем, что оператор $T_\omega x = x(\omega(t))$ принадлежит Σ_0. Для этого обозначим через S образ множества $(0, \infty)$ при отображении ω. Нетрудно проверить, что для любых функций $x\in L_1+L_\infty$ и

$y \in L_1 \cap L_\infty$ справедливо равенство

$$\int_0^\infty x(\omega(t))\, y(t)\, dt = \int_S x(\tau)\, y(\omega^{-1}(\tau))\, d\tau.$$

Вводя функцию $z(\tau) = \begin{cases} y(\omega^{-1}(\tau)) & \text{при } \tau \in S, \\ 0 & \text{при } \tau \notin S, \end{cases}$ получим

$$\int_0^\infty x(\omega(t))\, y(t)\, dt = \int_0^\infty x(\tau)\, z(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что $z \in L_1 \cap L_\infty$. Поэтому из слабой сходимости x_n к x следует слабая сходимость $x_n(\omega(t))$ к $x(\omega(t))$ и, следовательно, $T_\omega \in \Sigma_0$.

Теорема 3.2. *Если $u \in L_1 \cap L_\infty$ и $v \in L_1 + L_\infty$, то*

$$\sup_{T \in \Sigma_0} \int_0^\infty Tu(t)\, v(t)\, dt = \sup_{T \in \Sigma_0} \int_0^\infty u(t)\, Tv(t)\, dt = \int_0^\infty u^*(t)\, v^*(t)\, dt. \tag{3.20}$$

Доказательство. В силу свойства 13°, неравенства (3.16) и свойства 18° перестановок

$$\int_0^\infty Tu(t)\, v(t)\, dt \leqslant \int_0^\infty (Tu)^*(t)\, v^*(t)\, dt \leqslant \int_0^\infty u^*(t)\, v^*(t)\, dt. \tag{3.21}$$

Аналогично

$$\int_0^\infty u(t)\, Tv(t)\, dt \leqslant \int_0^\infty u^*(t)\, v^*(t)\, dt. \tag{3.22}$$

Докажем, что

$$\sup_{T \in \Sigma_0} \int_0^\infty Tu(t)\, v(t)\, dt \geqslant \int_0^\infty u^*(t)\, v^*(t)\, dt. \tag{3.23}$$

Так как в Σ_0 входят операторы умножения на функции, по модулю не превосходящие единицы, то можно считать, что $u(t) \geqslant 0$, $v(t) \geqslant 0$ и $Tu(t) \geqslant 0$.

Согласно лемме 2.1 построим операторы T_{ω_1} и T_{ω_2} из Σ_0 так, что

$$T_{\omega_1} u(t) = u^*(t) + \alpha(t), \quad T_{\omega_2} v(t) = v^*(t) + \beta(t)$$

и $\|\alpha\|_{L_1\cap L_\infty}<\varepsilon$, $\|\beta\|_{L_1\cap L_\infty}<\varepsilon$. Тогда

$$\int_0^\infty T^0_{\omega_2}T_{\omega_1}u(t)\,v(t)\,dt=\int_0^\infty T_{\omega_1}u(t)\,T_{\omega_2}v(t)\,dt=\int_0^\infty u^*(t)\,v^*(t)\,dt+\gamma,$$

где

$$|\gamma|\leqslant\|\alpha\|_{L_1\cap L_\infty}\|v^*+\beta\|_{L_1+L_\infty}+\|u\|_{L_1\cap L_\infty}\|\beta\|_{L_1+L_\infty}\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon(\|u\|_{L_1\cap L_\infty}+\|v\|_{L_1+L_\infty}+\varepsilon)\to 0 \qquad (3.24)$$

при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом,

$$\sup_{T\in\Sigma_0}\int_0^\infty Tu(t)\,v(t)\,dt\geqslant\int_0^\infty T^0_{\omega_2}T_{\omega_1}u(t)\,v(t)\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^\infty u^*(t)\,v^*(t)\,dt+|\gamma|$$

откуда в силу (3.24) следует (3.23).

Аналогично с помощью оператора $T^0_{\omega_1}T_{\omega_2}$ доказывается неравенство

$$\sup_{T\in\Sigma_0}\int_0^\infty u(t)\,Tv(t)\,dt\geqslant\int_0^\infty u^*(t)\,v^*(t)\,dt,$$

которое вместе с (3.21) и (3.22) дает (3.20).

Каждому оператору $T\in\Sigma$ поставим в соответствие функцию

$$\rho_T(x,y)=\int_0^\infty Tx(t)\,y(t)\,dt$$

на произведении $L_\infty\times(L_1\cap L_\infty)$. Очевидно, что

$$|\rho_T(x,y)|\leqslant\|Tx\|_{L_\infty}\|y\|_{L_1}\leqslant\|x\|_{L_\infty}\|y\|_{L_1}. \qquad (3.25)$$

Легко проверяется, что отображение $T\to\rho_T$ — взаимно однозначно.

С помощью функций ρ_T введем на Σ топологию, в которой базис окрестностей точки T_0 определяется всевозможными конечными наборами функций $\{x_i\}\in L_\infty$, $\{y_i\}\in\in L_1\cap L_\infty$. Окрестность состоит из всех T, для которых

$|\rho_T(x_i, y_j)-\rho_{T_0}(x_i, y_j)|<1$. При такой топологии отображение $T\to\rho_T$ будет непрерывным вложением Σ в компакт Q, являющийся тихоновским произведением отрезков $I_{xy}=\{\alpha : |\alpha|\leqslant\|x\|_{L_\infty}\|y\|_{L_1}\}$ $(x\in L_\infty,\ y\in L_1\cap L_\infty)$.

Покажем, что при этом образ Σ замкнут, откуда будет следовать, что он компактен. Пусть $\tilde\rho(x, y)$ — предельная точка образа Σ. Тогда $\tilde\rho(x, y)$ является билинейным функционалом от x и y. Из неравенств (3.25) для всех $T\in\Sigma$ следует неравенство

$$|\tilde\rho(x, y)|\leqslant\|x\|_{L_\infty}\|y\|_{L_1}. \tag{3.26}$$

Таким образом, при фиксированном $x\in L_\infty$ функционал $\tilde\rho(x, y)$ ограничен в L_1 и, следовательно, представим в виде

$$\tilde\rho(x, y)=\int_0^\infty\tilde z(t)\,y(t)\,dt,$$

где $\tilde z\in L_\infty$. Положим $\tilde Tx=\tilde z$. Из линейности $\tilde\rho(x, y)$ по x и плотности множества $L_1\cap L_\infty$ в L_1 вытекает линейность оператора $\tilde T$. Множество $L_1\cap L_\infty$ как подмножество L'_∞ является нормативным (см. гл. I, § 2) для пространства L_∞. Поэтому из (3.26) следует, что $\|\tilde T\|_{L_\infty}\leqslant 1$.

Так как для функционалов $\rho_T(x, y)$ при $x\in L_\infty\cap L_1$ справедливо неравенство

$$|\rho_T(x, y)|\leqslant\|x\|_{L_1}\|y\|_{L_\infty},$$

то такое же неравенство выполнено и для функционала $\tilde\rho(x, y)$, т. е.

$$\left|\int_0^\infty\tilde Tx(t)\,y(t)\,dt\right|\leqslant\|x\|_{L_1}\|y\|_{L_\infty}\qquad(x\in L_\infty\cap L_1),$$

откуда $\|\tilde Tx\|_{L_1}\leqslant\|x\|_{L_1}$. Так как $L_1\cap L_\infty$ плотно в L_1, то оператор $\tilde T$ допускает расширение по непрерывности на все пространство L_1, а затем по линейности и на L_1+L_∞. При этом $\|\tilde T\|_{L_1}\leqslant 1$. Итак, $\tilde T\in\Sigma$. Следовательно, $\tilde\rho(x, y)=\rho_{\tilde T}(x, y)$, и образ Σ замкнут в Q.

Обозначим через O_x орбиту точки $x\in L_1+L_\infty$ относительно полугруппы Σ : $O_x=\{y : y=Tx,\ T\in\Sigma\}$.

Теорема 3.3. *Орбита любой точки $x\in L_1+L_\infty$ замкнута в слабой топологии $\sigma(L_1+L_\infty, L_1\cap L_\infty)$.*

Доказательство. Пусть $x \in L_1 + L_\infty$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что отображение $T \to Tx$ компакта Σ в $L_1 + L_\infty$ непрерывно. Пусть $T_\alpha \to T_0$ в Σ. Тогда

$$\rho_{T_\alpha}(z, y) = \int_0^\infty T_\alpha z(t) y(t)\,dt \to \int_0^\infty T_0 z(t) y(t)\,dt$$

при любых $z \in L_\infty$ и $y \in L_1 \cap L_\infty$. Выберем последовательность $z_n \in L_\infty$ так, что $z_n \to x$ в $L_1 + L_\infty$. Тогда

$$\left| \int_0^\infty T_\alpha x(t) y(t)\,dt - \int_0^\infty T_0 x(t) y(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_0^\infty T_\alpha (x - z_n) y\,dt \right| +$$

$$+ \left| \int_0^\infty T_0 (x - z_n) y\,dt \right| + \left| \int_0^\infty (T_\alpha z_n - T_0 z_n) y\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| x - z_n \|_{L_1 + L_\infty} \| y \|_{L_1 \cap L_\infty} + \left| \int_0^\infty (T_\alpha z_n - T_0 z_n) y\,dt \right|.$$

Выбирая достаточно большим n, а затем α, получаем

$$\int_0^\infty T_\alpha x(t) y(t)\,dt \to \int_0^\infty T_0 x(t) y(t)\,dt$$

при любом $y \in L_1 \cap L_\infty$.

В дальнейшем важную роль играет

Теорема 3.4. *Пусть $x \in L_1 + L_\infty$. Для того чтобы измеримая функция y принадлежала орбите O_x, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\int_0^\theta y^*(t)\,dt \leqslant \int_0^\theta x^*(t)\,dt \quad (0 < \theta < \infty). \tag{3.27}$$

Доказательство. Необходимость условия (3.27) непосредственно вытекает из неравенства (3.16).

Доказательство достаточности проведем от противного. Пусть для функции $y(t)$ выполнено неравенство (3.27) и предположим, что $y \notin O_x$. Заметим, что из неравенства (3.27) следует, что $y \in L_1 + L_\infty$. Орбита O_x выпукла и замкнута в слабой топологии $\sigma(L_1 + L_\infty, L_1 \cap L_\infty)$. В силу общих теорем двойственности (см. [3], гл. II) пространство $L_1 \cap L_\infty$ является сопряженным к локально выпуклому линейному топологическому пространству $L_1 + L_\infty$ с топологией $\sigma(L_1+L_\infty, L_1\cap L_\infty)$. Тогда, пользуясь теоремой об отделимости (см. там же), можно утверждать, что существует функция $a(t) \in L_1 \cap L_\infty$ такая, что

$$\int_0^\infty a(t)\, y(t)\, dt > \sup_{T\in\Sigma} \int_0^\infty a(t)\, Tx(t)\, dt.$$

Из соотношения (2.25) и теоремы 3.2 получаем, что

$$\int_0^\infty a^*(t)\, y^*(t)\, dt \geqslant \int_0^\infty a(t)\, y(t)\, dt > \int_0^\infty a^*(t)\, x^*(t)\, dt. \quad (3.28)$$

В силу свойства 18° перестановок неравенство (3.28) противоречит условию (3.27).

§ 4. Симметричные пространства. Интерполяция между L_1 и L_∞

1. Определение симметричных пространств. Функциональное банахово пространство на полуоси $(0, \infty)$ с мерой Лебега называется *симметричным*, если

1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ почти всюду на $(0, \infty)$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$ (т. е. E является идеальной структурой);

2) из того, что $y \in E$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Условия 1) и 2) эквивалентны одному:

1′) если $y \in E$ и $x^*(t) \leqslant y^*(t)$ для всех $t \in (0, \infty)$, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

Пусть функциональное банахово пространство E удовлетворяет условию 1). Оно содержит хотя бы одну функцию $x_0(t) \not\equiv 0$. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество e_0 положительной меры: $\operatorname{mes} e_0 = \mu_0$, что $|x_0(t)| \geqslant \varepsilon$ при $t \in e_0$. Отсюда вытекает, что функция $\varepsilon\chi_{e_0}(t)$, а значит, и $\chi_{e_0}(t)$, принадлежат E.

Лемма 4.1. *Если идеальная структура E (условие 1)) содержит все функции $\chi_e(t)$ с $\operatorname{mes} e = \mu_0$ и $\|\chi_e\|_E \leqslant C$, где C не зависит от выбора e, то пространство $L_1 \cap L_\infty$ вложено в E.*

Доказательство. Пусть $x \in L_1 \cap L_\infty$. Без ограничения общности считаем, что $x(t) \geqslant 0$. Обозначим $\lambda_j = x^*(j\mu_0)$ $(j=0, 1, \ldots)$. Существуют такие взаимно непересекающиеся множества e_j, что $\mathrm{mes}\, e_j = \mu_0$ и $\lambda_{j+1} \leqslant x(t) \leqslant \lambda_j$ $(j=0, 1, \ldots)$. Если

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \chi_{e_j}(t) \quad \text{и} \quad \underline{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1} \chi_{e_j}(t),$$

то $\underline{x}(t) \leqslant x(t) \leqslant \bar{x}(t)$. Отсюда

$$\mu_0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1} = \| \underline{x} \|_{L_1} \leqslant \| x \|_{L_1} < \infty. \tag{4.1}$$

Рассмотрим функции $x_N(t) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \chi_{e_j}(t)$. Последовательность x_N фундаментальна в E. Действительно,

$$\| x_{N+p} - x_N \|_E \leqslant \sum_{j=N+1}^{N+p} \lambda_j \| \chi_{e_j} \|_E \leqslant C \sum_{j=N+1}^{N+p} \lambda_j \to 0$$

при $N \to \infty$ в силу сходимости ряда (4.1). Так как $x_N \to \bar{x}$ в $S(0, \infty)$, то $x_N \to \bar{x}$ в E и, следовательно, $\bar{x} \in E$. В силу 1) также $x \in E$ и

$$\| x \|_E \leqslant \| \bar{x} \|_E \leqslant C \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j = C \left(\lambda_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1} \right) \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\| x \|_{L_\infty} + \frac{1}{\mu_0} \| x \|_{L_1} \right) \leqslant C \left(1 + \frac{1}{\mu_0} \right) \| x \|_{L_1 \cap L_\infty}.$$

Замечание. Из условий леммы и 1) вытекает, что пространство E содержит характеристические функции любых измеримых множеств конечной меры, поэтому можно положить $\mu_0 = 1$ и предыдущее неравенство примет вид

$$\| x \|_E \leqslant 2 \sup_{\mathrm{mes}\, e = 1} \| \chi_e \| \, \| x \|_{L_1 \cap L_\infty}.$$

Теорема 4.1. *Любое симметричное пространство является промежуточным между пространствами* $L_1(0, \infty)$ *и* $L_\infty(0, \infty)$, т. е.

$$L_1 \cap L_\infty \subset E \subset L_1 + L_\infty.$$

Доказательство. Пространство E очевидно удовлетворяет условиям леммы 4.1, причем $\|\chi_e\|_E = \|\chi_{(0,1)}\|_E$ при $\operatorname{mes} e = 1$. Поэтому в E вложено $L_1 \cap L_\infty$ и

$$\|x\|_E \leqslant 2\|\chi_{(0,1)}\|_E \|x\|_{L_1 \cap L_\infty}. \tag{4.2}$$

Перейдем к доказательству второго вложения. Пусть $x \in E$ и $x(t) = x^*(t)$. В силу формулы (3.4)

$$\|x\|_{L_\infty + L_1} = \int_0^1 x(t)\,dt, \tag{4.3}$$

поэтому достаточно оценить норму в L_1 функций из E с носителем на $[0, 1]$. Рассмотрим сначала на $[0, 1]$ кусочно-постоянную функцию $y_0(t)$, принимающую значения $x_k \geqslant 0$ на множествах e_k ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) из $[0, 1]$ равной меры: $\operatorname{mes} e_k = 1/N$.

Тогда

$$y_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \chi_{e_k}(t).$$

Положим

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{k+j (\operatorname{mod} N)} \chi_{e_k}(t).$$

Очевидно, что функции $y_0(t)$ и $y_j(t)$ равноизмеримы, поэтому $\|y_j\|_E = \|y_0\|_E$. Далее,

$$\sum_{j=0}^{N-1} y_j(t) \equiv \sum_{k=0}^{N-1} x_k \chi_{[0,1]},$$

поэтому

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k\right) \|\chi_{[0,1]}\|_E = \left\|\sum_{j=0}^{N-1} y_j\right\|_E \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \|y_j\|_E = N\|y_0\|_E.$$

Отсюда

$$\|y_0\|_E \geqslant \|\chi_{[0,1]}\|_E \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k = \|\chi_{[0,1]}\|_E \|y_0\|_{L_1}. \tag{4.4}$$

Произвольную неотрицательную убывающую функцию $z \in E$, равную нулю при $t > 1$, можно аппроксимировать возрастающей последовательностью кусочно-постоянных функций

$$z_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} z\left(\frac{k+1}{N}\right) \chi_{\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]}(t) \qquad (N = 2^n),$$

которая будет почти всюду сходиться к $z(t)$. Так как $z_N(t) \leqslant z(t)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} \|z_N\|_E \leqslant \|z\|_E$. С другой стороны, в силу теоремы Леви $\|z\|_{L_1} = \lim\limits_{N\to\infty} \|z_N\|_{L_1}$. Применяя неравенство (4.4) к функциям z_N и используя последние соотношения, получаем

$$\|z\|_{L_1} \leqslant \frac{1}{\|\chi_{[0,1]}\|_E} \|z\|_E. \tag{4.5}$$

Сочетая это неравенство с (4.3), мы приходим к окончательному неравенству:

$$\|x\|_{L_\infty + L_1} \leqslant \frac{1}{\|\chi_{[0,1]}\|_E} \|x\chi_{[0,1]}\|_E \leqslant \frac{1}{\|\chi_{[0,1]}\|_E} \|x\|_E.$$

Таким образом, $E \subset L_\infty + L_1$. Теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем нам понадобится неравенство

$$\|x^*\chi_{[0,h]}\|_{L_1} \leqslant \frac{h}{\|\chi_{[0,h]}\|_E} \|x^*\chi_{[0,h]}\|_E. \tag{4.6}$$

Лемма 4.2. *В симметричном пространстве E плотно множество счетнозначных функций.*

Доказательство. В силу теоремы 4.1 каждая функция $x \in E$ представима в виде суммы суммируемой и ограниченной, поэтому ее суже́ние на любой конечный интервал принадлежит L_1. Тогда функцию $x\chi_{(n-1,\,n]} \in L(n-1,\,n)$ можно равномерно аппроксимировать меньшей по модулю счетнозначной функцией $z_n(t)$ $(n-1 \leqslant t \leqslant n)$ с точностью до $\varepsilon/2^n$. Это означает, что если функцию $z_n(t)$ продолжить нулем вне $(n-1,\,n]$, то

$$\|x\chi_{(n-1,n]} - z_n\|_{L_1 \cap L_\infty} < \varepsilon/2^n. \tag{4.7}$$

Тогда функция $z(t) = \sum\limits_{1}^{\infty} z_n(t)$ счетнозначна и $|z(t)| \leqslant$

$\leqslant |x(t)|$. Поэтому $z \in E$. Далее в силу (4.7)

$$\|x - z\|_{L_1 \cap L_\infty} \leqslant \sum_1^\infty \|x\chi_{(n-1,n]} - z_n\|_{L_1 \cap L_\infty} \leqslant \varepsilon. \tag{4.8}$$

По неравенству (4.2) $\|x-z\|_E \leqslant 2\|\chi_{(0,1]}\|_E\, \varepsilon$.

Лемма 4.3. *При выполнении условия* 1) *определения симметричного пространства условие* 2) *эквивалентно следующему: для произвольного неуменьшающего меру отображения $t \to \omega(t)$ полуоси* $(0, \infty)$ *в себя и $y \in E$ функция $y_\omega(t) = y(\omega(t)) \in E$* и

$$\|y_\omega\|_E \leqslant \|y\|_E. \tag{4.8'}$$

Доказательство. Как показано выше, из условия 1) следует, что пространство E содержит функцию вида $\chi_{e_0}(t)$ с $\operatorname{mes} e_0 = \mu_0 > 0$. Если e_1 — другое измеримое множество той же меры, то можно построить отображение $\omega(t)$ оси $(0, \infty)$ на себя, отображающее множество e_1 на множество e_0 и сохраняющее меру. Тогда $\chi_{e_1}(t) = \chi_{e_0}(\omega(t))$, и поэтому $\chi_{e_1} \in E$ и $\|\chi_{e_1}\|_E \leqslant \|\chi_{e_0}\|_E$. Таким образом, выполнены условия леммы 4.1, и пространство $L_1 \cap L_\infty$ вложено в E.

Пусть теперь $y \in E$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$. Тогда по теореме 2.1 для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие сохраняющее меру отображение $\omega(t)$ полуоси $(0, \infty)$ в себя и функция $\beta(t)$ с $|\beta(t)| \leqslant 1$, что $\|x - \beta y_\omega\|_{L_1 \cap L_\infty} < \varepsilon$. В силу леммы 4.1 и неравенства (4.2) $x - \beta y_\omega \in E$ и

$$\|x - \beta y_\omega\|_E \leqslant 2\|\chi_{[0,1]}\|_E\, \varepsilon.$$

По свойству 1) и условию леммы $\beta y_\omega \in E$, поэтому $x \in E$ и

$$\|x\|_E \leqslant \|\beta y_\omega\|_E + 2\|\chi_{[0,1]}\|_E\, \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \|y_\omega\|_E + 2\|\chi_{[0,1]}\|_E\, \varepsilon \leqslant \|y\|_E + 2\|\chi_{[0,1]}\|_E\, \varepsilon.$$

В силу произвольности ε и равноправности x и y получаем, что $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Обратно, если $\omega(t)$ — неуменьшающее меру отображение $(0, \infty)$ в себя, то выполнено неравенство $y_\omega^*(t) \leqslant y^*(t)$. Тогда в симметричном пространстве из того, что $y \in E$, следует, что $y_\omega \in E$ и справедливо нера венство (4.8′). Лемма доказана.

Линейное подмножество F симметричного простран ства E назовем *симметричным*, если из принадлежност y к F следует принадлежность к F всех функций x, дл которых $x^*(t) \leqslant y^*(t)$.

Лемма 4.4. *Замыкание в E симметричного линей ного подмножества F является симметричным простран ством относительно нормы E.*

Доказательство. Пусть $y \in \bar{F}$, и последователь ность $y_n \in F$ сходится к y в E. Если $|x| < |y|$, то после довательность $\min(|x|, |y_n|) \leqslant |y_n|$ принадлежит F, в силу свойства 4° идеальных структур (см. стр. 61 сходится в E к $|x|$ и, следовательно, $\operatorname{sign} x \cdot \min(|x|, |y_n|) \in F$ и сходится к x в E, т. е. $x \in \bar{F}$. Таки образом, выполнено свойство 1). Если теперь $\omega(t)$ – неуменьшающее меру преобразование полуоси в себя, т $\|(y_n)_\omega - y_\omega\|_E \leqslant \|y_n - y\|_E \to 0$. Так как $\overset{*}{(y_n)_\omega} \leqslant \overset{*}{y_n} \in F$, т $(y_n)_\omega \in F$, и значит, $y_\omega \in \bar{F}$. На основании леммы 4.3 от сюда вытекает свойство 2) для пространства $\bar{F}$.

Лемма 4.5. *Пересечение и сумма двух симметричны пространств являются симметричными пространствам*

Доказательство. Пусть E_1, E_2 — симметричны пространства. То, что пересечение $E_1 \cap E_2$ симметричнс является очевидным. Рассмотрим сумму $E = E_1 + E_2$ Пусть $y \in E$ и $x^*(t) \leqslant y^*(t)$. По теореме 2.1 для всяког $\varepsilon > 0$ существуют сохраняющее меру отображение $\omega(t$ полуоси $[0, \infty)$ в себя и измеримая функция $\beta(t)$ $|\beta(t)| \leqslant 1$ такие, что

$$x(t) = \beta(t) y(\omega(t)) + z(t),$$

где $\|z\|_{L_1 \cap L_\infty} < \varepsilon$. Если теперь $y(t) = u(t) + v(t)$, $u \in E$ $v \in E_2$, то $x(t) = \beta(t) u(\omega(t)) + \beta(t) v(\omega(t)) + z(t)$, причен в силу леммы 4.3 $\beta u_\omega \in E_1$ и $\beta v_\omega \in E_2$. Отсюда следует что $x \in E$ и

$$\|x\|_E \leqslant \|\beta u + z\|_{E_1} + \|\beta v\|_{E_2} \leqslant \|u\|_{E_1} + \|v\|_{E_2} + 2\|\chi_{[0,1]}\|_{E_1}\varepsilon.$$

Переходя к inf по всем представлениям $y = u + v$ $u \in E_1$, $v \in E_2$, получаем, что $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E + 2\|\chi_{[0,1]}\|_E$ В силу произвольности ε, $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$ и, следовательно, $E_1 + E_2$ выполнено свойство 1′).

Теорема 4.2. *Пусть E_0 и E_1 — два симметричных пространства и E — интерполяционное между ними пространство с интерполяционной константой единица, т. е.*

$$\|T\|_{E\to E}\leqslant \max(\|T\|_{E_0\to E_0},\ \|T\|_{E_1\to E_1}) \tag{4.9}$$

для всех $T\in\pi(E_0, E_1; E_0, E_1)$. Тогда E — симметричное пространство.

Доказательство. Пусть $\alpha(t)$ — функция с $|\alpha(t)|\leqslant 1$ и $\omega(t)$ — неуменьшающее меру отображение полуоси $(0, \infty)$ в себя. Из свойства 1) и леммы 4.3 вытекает, что оператор $\alpha T_\omega y(t)=\alpha(t)y(\omega(t))$ действует в пространствах E_0 и E_1, и его норма там не превосходит единицу. Тогда он действует и в пространстве E и $\|\alpha T_\omega y\|_E\leqslant\|y\|_E$. При $\omega(t)\equiv t$ отсюда следует, что в E выполнено условие 1), а при $\alpha\equiv 1$ в силу леммы 4.3 — условие 2).

Замечание. Если вместо неравенства (4.9) выполнено неравенство

$$\|T\|_{E\to E}\leqslant C\max(\|T\|_{E_0\to E_0},\ \|T\|_{E_1\to E_1}), \tag{4.10}$$

то из того, что сказано на стр. 34, следует, что в пространстве E можно ввести эквивалентную норму, относительно которой оно станет симметричным.

2. Основная интерполяционная теорема. Если пространство E является интерполяционным между L_1 и L_∞ и

$$\|T\|_{E\to E}\leqslant \max(\|T\|_{L_1\to L_1},\ \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}), \tag{4.11}$$

то в силу теоремы 4.2 пространство E симметрично.

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 4.6. *Во всяком интерполяционном между L_1 и L_∞ пространстве E, для которого справедливо* (4.11), *выполнено неравенство*

$$\|x^*-y^*\|_E\leqslant\|x-y\|_E \quad (x, y\in E).$$

Действительно, из неравенства (3.14) для любых функций из L_1+L_∞ и теоремы 3.4 вытекает, что $x^*-y^*= =T(x-y)$ для некоторого T из Σ. Тогда в силу (4.11)

$$\|x^*-y^*\|_E=\|T(x-y)\|_E\leqslant\|T\|_{E\to E}\|x-y\|_E\leqslant\|x-y\|_E.$$

Лемма доказана.

Возникает вопрос об описании всех симметричных пространств, являющихся интерполяционными между L_1 и L_∞ и обладающих свойством (4.11). Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4.3. *Для того чтобы промежуточное между L_1 и L_∞ банахово пространство E было интерполяционным с интерполяционной константой единица, необходимо и достаточно выполнение условия: если $y \in E$, $x \in L_0 + L_1$ и*

$$\int_0^t x^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t y^*(\tau)\,d\tau \tag{4.12}$$

при всех $t \geqslant 0$, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$.

Доказательство. Необходимость. Если функции x и y связаны соотношением (4.12), то в силу теоремы 3.4 существует оператор $T \in \Sigma$ такой, что $x = Ty$. Тогда из интерполяционности пространства E следует, что $x \in E$, а из (4.11) вытекает неравенство

$$\|x\|_E = \|Ty\|_E \leqslant \|T\|_{E \to E} \|y\|_E \leqslant \|y\|_E.$$

Достаточность. Пусть T — произвольный оператор из Σ и $y \in E$. В силу неравенства (3.16)

$$\int_0^t (Ty)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t y^*(\tau)\,d\tau.$$

Из предположенного свойства пространства E вытекает, что $Ty \in E$ и $\|Ty\|_E \leqslant \|y\|_E$.

В связи с теоремой 4.3 естественно поставить вопрос о том, существуют ли симметричные пространства, не являющиеся интерполяционными между L_1 и L_∞. Оказывается, что такие примеры существуют; они будут приведены в § 5, п. 7.

Замечание. Если пространство E таково, что из неравенства (4.12) следует, что $\|x\|_E \leqslant C\|y\|_E$, то в нем можно ввести эквивалентную норму по формуле $\|x\|_{\overset{*}{E}} = \sup \|u\|_E$, где sup берется по всем $u \in L_1 + L_\infty$, для которых

$$\int_0^t u^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t x^*(\tau)\,d\tau.$$

Пространство E с новой нормой будет уже удовлетворять условиям теоремы 4.3 и, следовательно, будет интерполяционным между L_1 и L_∞ со свойством (4.11). Так как $\|x\|_E \leqslant \|x\|^*_E \leqslant C\|x\|_E$, то в исходной норме для него будет выполнено неравенство (4.10) с той же константой C.

3. Операторы растяжения в симметричном пространстве. В пространстве $S(0, \infty)$ действуют операторы растяжения, определяемые формулой

$$\sigma_\tau x(t) = x(\tau^{-1}t) \qquad (\tau > 0).$$

Очевидно, что операторы σ_τ непрерывны в $S(0, \infty)$. Эти операторы образуют группу с единицей, равной $\sigma_1 = I$. Нетрудно проверить, что операторы σ_τ коммутируют с операцией перестановки $(\sigma_\tau x)^*(t) = \sigma_\tau(x^*)(t) = x^*(\tau^{-1}t)$.

Теорема 4.4. *Операторы σ_τ ограниченно действуют в любом симметричном пространстве E.*

Доказательство. Если $\tau_1 < \tau_2$, то $x^*(\tau_1^{-1}t) \leqslant x^*(\tau_2^{-1}t)$ и, следовательно, $(\sigma_{\tau_1}x)^*(t) \leqslant (\sigma_{\tau_2}x)^*(t)$. Отсюда следует, что при $x \in E$ функция $\|\sigma_\tau x\|_E$ возрастает по τ. В частности, при $\tau \leqslant 1$ оператор σ_τ ограничен в E и $\|\sigma_\tau\|_E \leqslant 1$ $(\tau \leqslant 1)$.

Пусть теперь $\tau > 1$ и $x \in E$.

Для доказательства ограниченности операторов σ_τ, в силу сказанного ранее, достаточно показать ограниченность операторов σ_m $(m = 2, 3, \ldots)$. Предположим сначала, что функция $x \in E$ счетнозначна,

$$x(t) = \sum_1^\infty x_j \chi_{e_j}(t), \tag{4.13}$$

где $e_i \cap e_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\operatorname{mes} e_j < \infty$. Каждое множество e_j разобьем на m попарно непересекающихся частей e_{js} $(s = 1, \ldots, m)$ равной меры и положим

$$y_s(t) = \sum_{j=1}^\infty x_j \chi_{e_{js}}(t).$$

Тогда

$$x(t) = \sum_1^m y_s(t) \quad \text{и} \quad (\sigma_m y_s)^*(t) = x^*(t).$$

Поэтому

$$\|\sigma_m x\|_E \leqslant \sum_{1}^{m} \|\sigma_m y_s\|_E = m\|x\|_E. \tag{4.14}$$

Так как счетнозначные функции плотны в E и операторы σ_τ непрерывны в $S(0, \infty)$, то предельным переходом неравенство (4.14) устанавливается для любого $x \in E$.

Теорема 4.5. *Функция* $\|\sigma_\tau\|_E$ *полумультипликативна и квазивогнута.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно:

$$\|\sigma_{\tau_1\tau_2}\|_E \leqslant \|\sigma_{\tau_1}\|_E \|\sigma_{\tau_2}\|_E.$$

Для доказательства второго утверждения рассмотрим снова функцию вида (4.13) из E и построим функции

$$z_s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \chi_{e_j \setminus e_{js}}(t).$$

Тогда функция $z_s(t)$ равноизмерима с функцией $\sigma_{\frac{n-1}{n}} x(t)$ и

$$\sum_{1}^{n} z_s(t) = (n-1)\, x(t).$$

Отсюда

$$(n-1)\|x\|_E = \left\| \sum_{1}^{n} z_s \right\|_E \leqslant \sum_{1}^{n} \|z_s\|_E = n \|\sigma_{\frac{n-1}{n}} x\|_E. \tag{4.15}$$

Предельным переходом неравенство устанавливается для всех $x \in E$. Пусть y — любая функция из E. Положим $x = \sigma_{n/m} y$. Из (4.15) тогда получаем

$$\frac{m}{n} \|\sigma_{\frac{n}{m}} y\|_E \leqslant \frac{m}{n-1} \|\sigma_{\frac{n-1}{m}} y\|_E.$$

Отсюда вытекает, что для любых рациональных чисел

$$\frac{1}{r''} \|\sigma_{r''}\|_E \leqslant \frac{1}{r'} \|\sigma_{r'}\|_E,$$

если $r'<r''$. Для произвольных τ_1 и τ_2 с $\tau_1<\tau_2$ строим последовательности рациональных чисел $r_n'\uparrow\tau_1$ и $r_n''\downarrow\tau_2$. Тогда

$$\frac{1}{\tau_2}\|\sigma_{\tau_2}\|_E \leqslant \frac{r_n''}{\tau_2}\frac{1}{r_n''}\|\sigma_{r_n''}\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_n''}{\tau_2}\frac{1}{r_n'}\|\sigma_{r_n'}\|_E \leqslant \frac{r_n''}{\tau_2}\frac{\tau_1}{r_n'}\frac{1}{\tau_1}\|\sigma_{\tau_1}\|_E.$$

Переход к пределу при $n\to\infty$ дает неравенство

$$\frac{1}{\tau_2}\|\sigma_{\tau_2}\|_E \leqslant \frac{1}{\tau_1}\|\sigma_{\tau_1}\|_E.$$

Следствие 1. *Справедливо неравенство*

$$\|\sigma_\tau\|_E \leqslant \max\{1, \tau\} \qquad (\tau>0). \tag{4.16}$$

Это вытекает из того, что $\|\sigma_1\|_E=1$.

Следствие 2. *Симметричное пространство E обладает свойством: если $y\in E$ и выполнено неравенство*

$$n_{|x|}(\tau) \leqslant Cn_{|y|}(\tau), \tag{4.17}$$

то $x\in E$ и $\|x\|_E\leqslant\max\{1, C\}\|y\|_E$.

Действительно, неравенство (4.17) эквивалентно неравенству

$$x^*(t) \leqslant y^*(C^{-1}t) = \sigma_C y^*(t),$$

и требуемое неравенство непосредственно следует из (4.16).

Замечание. Из доказательства теоремы 4.5 видно, что функция $\|\sigma_\tau y\|_E$ квазивогнута при любом $y\in E$.

Непосредственно проверяется, что $\|\sigma_\tau\|_{L_p}=\tau^{1/p}$. В § 5 будут детально изучены пространства Лоренца Λ_ψ и Марцинкевича M_ψ. Если $\psi(t)$ — вогнутая функция и $\psi(0)=0$, то

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty x^*(t)\,d\psi(t).$$

Вычисляем

$$\|\sigma_\tau x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty x^*(\tau^{-1}t)\,d\psi(t) = \int_0^\infty x^*(s)\,d\psi(\tau s).$$

По свойству 18° перестановок

$$\|\sigma_\tau x\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \sup_{s>0} \frac{\psi(\tau s)}{\psi(s)} \int_0^\infty x^*(s)\, d\psi(s) = M_\psi(\tau) \|x\|_{\Lambda_\psi}. \tag{4.18}$$

С другой стороны,

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} \geqslant \sup_{t>0} \frac{\|\sigma_\tau \chi_{(0,t)}\|_{\Lambda_\psi}}{\|\chi_{(0,t)}\|_{\Lambda_\psi}} = \sup_{t>0} \frac{\psi(\tau t)}{\psi(t)} = M_\psi(\tau). \tag{4.19}$$

Неравенства (4.18) и (4.19) показывают, что

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = M_\psi(\tau). \tag{4.20}$$

Если $\psi(t)$ — квазивогнутая функция и $\psi(0)=0$, то

$$\|x\|_{M_\psi} = \sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s)\, ds.$$

Аналогичный подсчет показывает, что

$$\|\sigma_\tau\|_{M_\psi} = \tau \sup \frac{\psi(t/\tau)}{\psi(t)} = \tau M_\psi\left(\frac{1}{\tau}\right) = M_{\psi_*}(\tau), \tag{4.21}$$

где $\psi_*(t)=t/\psi(t)$.

Определение. Верхний и нижний показатели растяжения функции $\|\sigma_\tau\|_E$ будем называть *верхним* и *нижним показателями растяжения пространства* E и обозначать их через β_E и α_E.

Если обозначить $s(\tau) = \|\sigma_\tau\|_E$, то в силу полумультипликативности этой функции $M_s(\tau) = s(\tau)$. Действительно, $M_s(\tau) = \sup\limits_{t>0} \frac{s(t\tau)}{s(t)} \leqslant s(\tau)$ и $M_s(\tau) \geqslant \frac{s(1\cdot\tau)}{s(1)} = s(\tau)$. Поэтому формулы для определения верхних и нижних показателей растяжения принимают вид

$$\alpha_E = \lim_{\tau\to 0} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau} \quad \text{и} \quad \beta_E = \lim_{\tau\to\infty} \frac{\ln\|\sigma_\tau\|_E}{\ln\tau}. \tag{4.22}$$

Замечание. Если $s(\tau)$ $(\tau>0)$ — полумультипликативная, квазивогнутая функция и $s(1)=1$, то существует симметричное пространство E, для которого $s(\tau) = \|\sigma_\tau\|_E$.

Действительно, за E можно принять пространство Марцинкевича $M_{t/s(t)}$. По формуле (4.21)

$$\|\sigma_\tau\|_E = \tau \sup_{t>0} \frac{s(t)}{\tau s(t/\tau)} = M_s(\tau) = s(\tau).$$

Сейчас мы имеем возможность уточнить неравенство (4.11) в условиях теоремы 4.3. Пусть T — оператор, действующий в L_1 и L_∞. Тогда при любом $\tau > 0$

$$\|T\sigma_\tau\|_{L_1\to L_1} \leqslant \tau\|T\|_{L_1\to L_1} \quad \text{и} \quad \|T\sigma_\tau\|_{L_\infty\to L_\infty} \leqslant \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}.$$

Воспользовавшись представлением $T = T\sigma_\tau\sigma_{1/\tau}$, мы получим обратные неравенства, т. е.

$$\|T\sigma_\tau\|_{L_1\to L_1} = \tau\|T\|_{L_1\to L_1} \quad \text{и} \quad \|T\sigma_\tau\|_{L_\infty\to L_\infty} = \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}.$$

Выберем

$$\tau_0 = \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\|T\|^{-1}_{L_1\to L_1}. \tag{4.23}$$

Тогда по теореме 4.3

$$\|T\sigma_{\tau_0}x\|_E \leqslant \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\|x\|_E.$$

Заменяя $\sigma_{\tau_0} x$ на y, получаем

$$\|Ty\|_E \leqslant \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\|\sigma_{1/\tau_0}y\|_E,$$

откуда

$$\|T\|_{E\to E} \leqslant \|T\|_{L_\infty\to L_\infty}\|\sigma_{1/\tau_0}\|_E. \tag{4.24}$$

В силу формулы (4.16) из этого неравенства следует неравенство 4.11. Неравенство (4.24) является точным в том смысле, что оно переходит в равенство для оператора σ_{1/τ_0}.

Т е о р е м а 4.6. *Для того чтобы промежуточное между L_1 и L_∞ пространство E было нормально интерполяционным типа α между L_1 и L_∞, необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялись условие теоремы 4.3 и равенство $\|\sigma_\tau\|_E = \tau^\alpha$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если последнее равенство выполнено, то в силу (4.23) и (4.24)

$$\|T\|_{E\to E} \leqslant \|T\|^{1-\alpha}_{L_1\to L_1}\|T\|^{\alpha}_{L_\infty\to L_\infty}. \tag{4.25}$$

Обратно, неравенство (4.25), примененное к оператору σ_τ, дает неравенство $\|\sigma_\tau\|_E \leqslant \tau^\alpha$. С другой стороны, $\|\sigma_\tau\| \geqslant \|\sigma_{1/\tau}\|^{-1} \geqslant (1/\tau)^{-\alpha} = \tau^\alpha$, т. е. $\|\sigma_\tau\|_E = \tau^\alpha$.

В дальнейшем часто будет использоваться

Лемма 4.7. *Пусть $\psi(t)$ — непрерывная возрастающая функция. Тогда для любой функции $x \in E$, где E — симметричное пространство, справедливо неравенство*

$$\left\| \int_0^\infty \sigma_\tau x^* d\psi(\tau) \right\|_E \leqslant \int_0^\infty \|\sigma_\tau x\|_E d\psi(\tau). \tag{4.26}$$

Доказательство. Функция $\sigma_\tau x^*(t)$ возрастает по τ, поэтому для любого $\lambda > 1$

$$\int_0^\infty \sigma_\tau x^*(t) d\psi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\lambda^k}^{\lambda^{k+1}} \sigma_\tau x^*(t)\, d\psi(\tau) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\lambda^{k+1}} x^*(t)\, [\psi(\lambda^{k+1}) - \psi(\lambda^k)].$$

В силу полноты пространства E в нем можно применять неравенство треугольника для бесконечных сумм, поэтому

$$\left\| \int_0^\infty \sigma_\tau x^* d\psi(\tau) \right\|_E \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \|\sigma_{\lambda^{k+1}} x\|_E\, [\psi(\lambda^{k+1}) - \psi(\lambda^k)] \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \sum_{-\infty}^{\infty} \|\sigma_{\lambda^k} x\|_E\, [\psi(\lambda^{k+1}) - \psi(\lambda^k)]$$

(мы воспользовались неравенством (4.16)).

С другой стороны, в силу монотонности функции $\|\sigma_\tau x\|_E$,

$$\int_0^\infty \|\sigma_\tau x\|_E d\psi(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\lambda^k}^{\lambda^{k+1}} \|\sigma_\tau x\|_E d\psi(\tau) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \|\sigma_{\lambda^k} x\|_E\, [\psi(\lambda^{k+1}) - \psi(\lambda^k)].$$

Таким образом,

$$\left\| \int_0^\infty \sigma_\tau x^* d\psi(\tau) \right\|_E \leqslant \lambda \int_0^\infty \| \sigma_\tau x \|_E d\psi(\tau).$$

В силу произвольности $\lambda > 1$ отсюда следует (4.26).

Замечание. Интеграл в левой части (4.26) понимается как интеграл Стилтьеса при каждом t. Мы не могли для получения оценки (4.26) использовать теорию абстрактного интегрирования, так как функция $\sigma_\tau x^*(t)$, как абстрактная функция от τ со значениями в пространстве E, вообще говоря, не является сепарабельнозначной и, следовательно, неизмерима.

4. Фундаментальная функция. Из определения симметричного пространства вытекает, что норма характеристической функции $\chi_e(t)$ измеримого множества $e \subseteq (0, \infty)$ зависит только от меры множества e. Таким образом, для симметричного пространства E определена функция $\varphi_E(t)$ $(0 < t < \infty)$ формулой

$$\| \chi_e \|_E = \varphi_E(\operatorname{mes} e).$$

Очевидно, что $\varphi_E(0) = 0$.

Функция $\varphi_E(t)$ называется *фундаментальной функцией* пространства E.

Нетрудно проверить, что

$$\varphi_{L_p}(t) = t^{1/p}, \quad \varphi_{L_M^*}(t) = \frac{1}{M^{-1}(1/t)} \quad \text{(см. [12])}. \tag{4.27}$$

Для пространств Лоренца и Марцинкевича, о которых говорилось в предыдущем пункте,

$$\varphi_{\Lambda_\psi}(t) = \psi(t) \quad \text{и} \quad \varphi_{M_\psi}(t) = \frac{t}{\psi(t)} = \psi_*(t). \tag{4.28}$$

Теорема 4.7. *Для того чтобы функция $\varphi(t)$ была фундаментальной функцией некоторого симметричного пространства, необходимо и достаточно, чтобы она была квазивогнутой.*

Доказательство. Если E — симметричное пространство, то

$$\varphi_E(\tau) = \| \chi_{(0,\tau]} \|_E = \| \sigma_\tau \chi_{(0,1]} \|_E,$$

поэтому квазивогнутость $\varphi_E(\tau)$ следует из замечания к теореме 4.5.

Если $\varphi(t)$ — квазивогнутая функция, то в силу (4.28) она будет фундаментальной для пространства $M_{t/\varphi(t)}$. Теорема доказана.

Между функциями $\|\sigma_\tau\|_E$ и $\varphi_E(\tau)$ имеется соотношение

$$\|\sigma_\tau\|_E \geqslant \sup_t \frac{\|\sigma_\tau \chi_{(0,t]}\|_E}{\|\chi_{(0,t]}\|_E} = \sup_t \frac{\varphi_E(\tau t)}{\varphi_E(t)} = M_{\varphi_E}(\tau). \qquad (4.29)$$

Для пространств L_p $\|\sigma_\tau\|_{L_p} = \varphi_{L_p}(\tau) = \tau^{1/p}$. Как видно из формул (4.20) и (4.28), для пространств Лоренца и Марцинкевича неравенство (4.29) переходит в равенство. Имеются примеры пространств, для которых в (4.29) имеется строгое неравенство.

Обозначим через γ_E и δ_E нижний и верхний показатели растяжения функции M_{φ_E}. Из неравенства (4.29) следует, что

$$\alpha_E \geqslant \gamma_E \quad \text{и} \quad \beta_E \geqslant \delta_E. \qquad (4.30)$$

5. Сепарабельные симметричные пространства. Так как всякое симметричное пространство E является идеальной структурой, то из сказанного во введении (стр. 64) следует, что E будет сепарабельным тогда и только тогда, когда оно будет правильным, т. е. когда норма любого элемента из E абсолютно непрерывна. Сепарабельность E является также необходимым и достаточным условием совпадения ассоциированного к нему пространства E^1 со всем сопряженным пространством E'. В этом случае пространство E естественным образом изометрично вкладывается в пространство E^{11}.

Отметим еще некоторые свойства сепарабельных симметричных пространств.

Функция $\chi_{(0,a)}$ принадлежит E при любом $a>0$. Поэтому при $\tau<a$

$$\varphi(\tau) = \|\chi_{(0,\tau)}\|_E = \|\chi_{(0,a)}\chi_{(0,\tau)}\|_E \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to 0$$

в силу абсолютной непрерывности нормы функции $\chi_{(0,a)}$. Таким образом, в сепарабельном симметричном пространстве $\varphi_E(+0)=0$.

Для любой измеримой функции $x(t)$ назовем *верхней срезкой* функцию $x^N(t) = x(t)$, если $|x(t)| \leqslant N$ и

$x^N(t)=N\operatorname{sign} x(t)$, если $|x(t)|>N$. *Правой срезкой* назовем функцию $x_N(t)=x(t)\chi_{(0,N)}(t)$. Если норма $x(t)\in E$ абсолютно непрерывна, то, поскольку $\operatorname{mes} e_N\to 0$, где $e_N=\{t: |x(t)|>N\}$, в силу принадлежности x к пространству L_1+L_∞ получаем

$$\|x-x^N\|_E\leqslant\|x\chi_{e_N}\|_E\to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$

При этих же условиях

$$\|x-x_N\|_E=\|x\chi_{(N,\infty)}\|_E\to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Таким образом, в сепарабельном пространстве E каждая функция является пределом своих верхних и правых срезок.

Каждую ограниченную функцию с конечным носителем можно равномерно аппроксимировать последовательностью конечнозначных функций. Эта последовательность будет сходиться в норме пространства $L_1\cap L_\infty$, а значит, и в норме E. Поскольку двусторонние срезки x_M^N функции $x\in E$ являются ограниченными функциями с конечным носителем, то из предыдущего следует, что в сепарабельном симметричном пространстве плотны конечнозначные функции.

Обратно, если конечнозначные функции плотны в E, то каждая функция $x\in E$ является пределом своих верхних и правых срезок. Действительно, пусть $y(t)$ — такая конечнозначная функция, что $\|x-y\|_E<\varepsilon$. При $N>\|y\|_{L_\infty}$ имеем $\|x^N-y\|_E\leqslant\|x-y\|_E$, поэтому $\|x-x^N\|_E<2\varepsilon$. Далее, если интервал $(0, N)$ содержит в себе носитель функции $y(t)$, то $\|x_N-y\|_E=\|(x-y)\chi_{(0,N)}\|_E<\varepsilon$ и, следовательно, $\|x-x_N\|_E<2\varepsilon$.

Наконец, если выполнено условие $\varphi_E(+0)=0$ и конечнозначные функции плотны в E, то пространство сепарабельно. Действительно, для каждой конечнозначной функции $y(t)$ с носителем на $(0, N)$ (N — целое) при любом $\tau>0$ по теореме Лузина можно построить такую непрерывную функцию $z_\tau(t)$, что $|z_\tau(t)|\leqslant|y(t)|$ и $\operatorname{mes} e_\tau<\tau$, где $e_\tau=\{t: y(t)\neq z_\tau(t)\}$. Тогда

$$\|y-z_\tau\|_E\leqslant 2\sup|y(t)|\,\|\chi_{e_\tau}\|_E=2\|y\|_{L_\infty}\varphi(\tau)\to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to 0.$$

Непрерывную функцию $z_\tau(t)$ на отрезке $[0, N]$ можно равномерно аппроксимировать многочленом с рациональными коэффициентами. Таким образом, счетное множество функций $p(t)\chi_{(0,N)}$, где $p(t)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, а $N=1, 2, \ldots$, плотно в пространстве E.

Мы установили утверждение.

Теорема 4.8. *Если E — сепарабельное симметричное пространство, то*

1) $\varphi_E(+0)=0$; 2) *каждая функция из E является пределом в E своих верхних срезок и правых срезок*; 3) *конечнозначные функции плотны в E.*

Если выполнены условия 1) *и* 2) *или* 1) *и* 3), *то пространство E сепарабельно.*

6. Пространство, ассоциированное к симметричному. Пусть E — симметричное пространство и E^1 — ассоциированное к нему пространство. Пространство E^1 состоит из всех измеримых функций $u(t)$, для которых

$$\|u\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^\infty x(t)\,u(t)\,dt < \infty. \tag{4.31}$$

С помощью теоремы Леви нетрудно убедиться в том, что sup можно вычислять только по конечнозначным финитным функциям $x(t)$ из E.

Пусть $u^*(t)$ — перестановка функции $u(t)$. Тогда для финитной конечнозначной функции $x(t)$

$$\int_0^\infty u^*(t)\,x(t)\,dt \leqslant \int_0^\infty u^*(t)\,x^*(t)\,dt = \sum_{k=1}^N \alpha_k \int_0^{\theta_k} u^*(t)\,dt.$$

Воспользовавшись рассуждениями, проведенными при доказательстве свойства 7° перестановок, можно построить систему измеримых множеств $e_{\theta_k}^{\varepsilon}$ так, что

а) $\operatorname{mes} e_{\theta_k}^{\varepsilon} = \theta_k$;

б) $e_{\theta_1}^{\varepsilon} \subset e_{\theta_2}^{\varepsilon} \subset \ldots \subset e_{\theta_N}^{\varepsilon}$;

в) $\displaystyle\int_0^{\theta_k} u^*(t)\,dt \leqslant \int_{e_{\theta_k}^{\varepsilon}} |u(t)|\,dt + \varepsilon.$

Тогда

$$\int_0^\infty u^*(t)\,x(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \int_{e^{\varepsilon}_{\theta_k}} u(t)\,dt + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \alpha_k =$$

$$= \int_0^\infty u(t)\,x_\varepsilon(t)\,dt + \varepsilon \sum_{k=1}^{N} \alpha_k,$$

где $x_\varepsilon(t) = \sum \alpha_k \chi_{e^{\varepsilon}_{\theta_k}}(t)$ — функция, равноизмеримая с $x(t)$. В силу произвольности ε и того, что $\|x_\varepsilon\|_E = \|x\|_E \leqslant 1$,

$$\sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \int_0^\infty u^*(t)\,x(t)\,dt \leqslant \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \int_0^\infty u(t)x(t)dt = \|u\|_{E'}.$$

Это неравенство показывает, что $u^*(t) \in E^1$ и $\|u^*\|_{E'} \leqslant \|u\|_{E'}$. Обратно, так, как $\|x^*\|_E = \|x\|_E$, то

$$\|u\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \int_0^\infty u(t)\,x(t)\,dt \leqslant \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \int_0^\infty u^*(t)\,x^*(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \int_0^\infty u^*(t)\,x(t)\,dt = \|u^*\|_{E^1}.$$

Отсюда вытекает, что все функции, равноизмеримые с $u(t)$ из E^1, входят в E^1 и имеют такую же норму.

Очевидно, что пространство E^1 обладает свойством 1) определения симметричного пространства.

Мы пришли к утверждению: *пространство, ассоциированное к симметричному, само является симметричным.*

Симметричное пространство называется *максимальным симметричным*, если E изометрично E^{11}. Так как всегда $E^1 = E^{111}$, то класс максимальных симметричных пространств совпадает с классом пространств, ассоциированных к симметричным.

Примерами максимальных симметричных пространств являются пространства Орлича, Марцинкевича, Лоренца. Примером немаксимального симметричного пространства может служить пространство $M_0(\psi)$ (см. § 5, п. 4).

Теорема 4.9. *Всякое максимальное симметричное пространство E^1 является интерполяционным между L_1 и L_∞ с интерполяционной константой единица.*

Доказательство. Пусть $v \in E^1$, и для $u \in L_\infty + L_1$ выполнено неравенство

$$\int_0^t u^* ds \leqslant \int_0^t v^* ds.$$

В силу свойства 18° перестановок для любой измеримой функции $y(t)$:

$$\int_0^\infty u^*(t)\, y^*(t)\, dt \leqslant \int_0^\infty v^*(t)\, y^*(t)\, dt.$$

Переходя в этом неравенстве к sup по всем $y \in E$ с $\|y\|_E \leqslant 1$, получаем $\|u\|_{E^1} \leqslant \|v\|_{E^1}$. В силу теоремы 4.3 пространство E^1 — интерполяционное между L_1 и L_∞, и выполнено (4.11).

Из теоремы 4.5 получается важная

Теорема 4.10. *Если $L_1 \cap L_\infty$ плотно в симметрическом пространстве E, то это пространство является интерполяционным между L_1 и L_∞.*

Доказательство. Пусть x и y — измеримые функции, $y \in E$ и

$$\int_0^\tau x^*(t)\, dt \leqslant \int_0^\tau y^*(t)\, dt.$$

Для доказательства теоремы нужно в силу теоремы 4.3 показать, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. Из предыдущей теоремы вытекает, что $\|x\|_{E^{11}} \leqslant \|y\|_{E^{11}} = \|y\|_E$. Остается лишь проверить, что $x \in E$. По теореме 3.4 существует оператор $T_0 \in \Sigma$ такой, что $x = T_0 y$. Рассмотрим последовательность $y_n \in L_1 \cap L_\infty$, сходящуюся в E к y. Тогда, в силу интерполяционности E^{11}, $T_0 y_n \to T_0 y = x$ в E^{11}. Оператор T_0 действует в $L_1 \cap L_\infty$, поэтому $T_0 y_n \in L_1 \cap L_\infty \subset E$. В силу изометричности вложения E в E^{11} последовательность $T_0 y_n$ фундаментальна в E и, следовательно, $x \in E$.

Следствие. *Если симметричное пространство сепарабельно, то оно является интерполяционным между L_1 и L_∞.*

Рассмотрим операторы растяжения σ_τ в ассоциированном пространстве. Из (4.31) получаем

$$\|\sigma_\tau u\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^\infty x(t)\,\sigma_\tau u(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \tau \int_0^\infty \sigma_{1/\tau} x(t)\,u(t)\,dt \leqslant \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_E \|u\|_{E^1}.$$

Таким образом,

$$\|\sigma_\tau\|_{E^1} \leqslant \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_E. \tag{4.32}$$

В силу того, что $E^1 = E^{111}$,

$$\|\sigma_\tau\|_{E^{111}} = \|\sigma_\tau\|_{E^1} \leqslant \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_{E^{11}}. \tag{4.33}$$

Применяя неравенство (4.32) к пространству E^1, получим

$$\|\sigma_\tau\|_{E^1} = \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_{E^{11}}. \tag{4.34}$$

Нам еще понадобится величина $\|\sigma_\tau\|_{E \to E^{11}}$. Имеем

$$\|\sigma_\tau\|_{E \to E^{11}} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|\sigma_\tau x\|_{E^{11}} \leqslant \sup_{\|x\|_{E^{11}} \leqslant 1} \|\sigma_\tau x\|_{E^{11}} = \|\sigma_\tau\|_{E^{11}} = \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_{E^1}$$

С другой стороны,

$$\tau \|\sigma_{1/\tau} v\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \tau \int_0^\infty x(t)\,\sigma_{1/\tau} v(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^\infty \sigma_\tau x(t)\,v(t)\,dt \leqslant \|\sigma_\tau\|_{E \to E^{11}} \|v\|_{E^1}.$$

Таким образом,

$$\|\sigma_\tau\|_{E \to E^{11}} = \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_{E^1} = \|\sigma_\tau\|_{E^{11}}. \tag{4.35}$$

Если пространство E изометрически вложено в E^{11}, то из этого равенства следует, что

$$\|\sigma_\tau\|_E = \tau \|\sigma_{1/\tau}\|_{E^1} = \|\sigma_\tau\|_{E^{11}}. \tag{4.36}$$

Теорема 4.11. *Для ассоциированного пространства E^1 к симметричному пространству E выполнено* *неравенство* (4.32) *и неравенства*

$$\alpha_{E^1} \leqslant 1-\beta_E, \qquad \beta_{E^1} \leqslant 1-\alpha_E. \tag{4.37}$$

Если естественное вложение E в E^{11} изометрично, то справедливы равенства (4.36) *и*

$$\alpha_{E^1} = 1-\beta_E, \qquad \beta_{E^1} = 1-\alpha_E. \tag{4.38}$$

Неравенства (4.37) и равенства (4.38) непосредственно следуют из неравенства (4.32) и равенств (4.36) и формулы (4.22) для вычисления нижних и верхних показателей растяжения.

Перейдем теперь к вычислению фундаментальной функции ассоциированного пространства. Имеем

$$\varphi_{E^1}(t) = \|\chi_{(0,t]}\|_{E^1} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^\infty x(s)\chi_{(0,t]}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^\infty x^*(s)\chi_{(0,t]}(s)\,ds = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \int_0^t x^*(s)\,ds.$$

Воспользуемся неравенством (4.6). Тогда

$$\varphi_{E^1}(t) \leqslant \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \frac{t}{\|\chi_{(0,t]}\|_E}\|x^*\chi_{(0,t]}\|_E \leqslant \frac{t}{\varphi_E(t)}.$$

С другой стороны,

$$\varphi_{E^1}(t) \geqslant \int_0^\infty \frac{\chi_{(0,t]}(s)}{\|\chi_{(0,t]}\|_E}\chi_{(0,t]}(s)\,ds = \frac{t}{\varphi_E(t)}.$$

Таким образом,

$$\varphi_{E^1}(t) = t/\varphi_E(t). \tag{4.39}$$

Далее вычисляем

$$M_{\varphi_{E^1}}(\tau) = \sup_{t>0} \frac{\varphi_{E^1}(\tau t)}{\varphi_{E^1}(t)} = \sup_{t>0} \frac{\tau\varphi_E(t)}{\varphi_E(\tau t)} = \tau M_{\varphi_E}\left(\frac{1}{\tau}\right). \tag{4.40}$$

Теорема 4.12. *Для ассоциированного пространства E^1 к симметричному пространству справедливы равенства* (4.39), (4.40) *и равенства*

$$\gamma_{E^1} = 1-\delta_E, \qquad \delta_{E^1} = 1-\gamma_E.$$

Сравним еще равенство (4.40) с неравенствами (4.29) и (4.32). Имеем

$$\tau\|\sigma_{1/\tau}\|_E \geqslant \|\sigma_\tau\|_{E^1} \geqslant M_{\varphi_{E^1}}(\tau) = \tau M_{\varphi_E}\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Отсюда видно, что если неравенство (4.29) превращается в равенство, то знак равенства будет и в неравенстве (4.32).

§ 5. Пространства Лоренца и Марцинкевича

1. Пространство Лоренца. Пусть $\psi(t)$ $(\not\equiv 0)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0, \infty)$ и $\psi(0)=0$, а $b(t)$ — убывающая на $(0, \infty)$ неотрицательная функция. Мы будем рассматривать интеграл

$$\int_0^\infty b(t)\,d\psi(t),$$

понимая под ним следующее: если $\psi(+0)\neq 0$, то

$$\int_0^\infty b(t)\,d\psi(t) = \psi(+0)\,b(+0) + \int_{+0}^\infty b(t)\,d\psi(t),$$

где второе слагаемое есть несобственный интеграл Стилтьеса или, что то же,

$$\int_0^\infty b(t)\,d\psi(t) = \psi(+0)\,b(+0) + \int_0^\infty b(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

где второе слагаемое — интеграл Лебега. Если $\psi(+0) = 0$, то

$$\int_0^\infty b(t)\,d\psi(t) = \int_{+0}^\infty b(t)\,d\psi(t) = \int_0^\infty b(t)\,\psi'(t)\,dt.$$

Рассмотрим теперь совокупность Λ_ψ всех измеримых на $(0, \infty)$ функций, для которых

$$\int_0^\infty x^*(t)\,d\psi(t) < \infty. \tag{5.1}$$

Если $\psi(+0)\neq 0$, то в силу предыдущего из (5.1) следует, что $x^*(+0)=\|x\|_{L_\infty}<\infty$ и

$$\int_0^\infty x^*(t)\,d\psi(t)=\psi(+0)\|x\|_{L_\infty}+\int_0^\infty x^*(t)\psi'(t)\,dt. \qquad (5.2)$$

Из неравенства (5.1) вытекает, что $x\in L_1+L_\infty$. Действительно, если $\psi'(t)\equiv 0$, то $\Lambda_\psi=L_\infty\subset L_1+L_\infty$. Если $\psi'(t_0)>0$ при некотором t_0, то

$$\int_0^{t_0} x^*(t)\,dt\leqslant \frac{1}{\psi'(t_0)}\int_0^{t_0} x^*(t)\psi'(t)\,dt<\infty.$$

Так как функция $\int_0^{t_0} x^*(s)\,ds$ вогнута, то

$$\|x\|_{L_1+L_\infty}=\int_0^1 x^*(t)\,dt\leqslant \max\left\{\frac{1}{t_0},\,1\right\}\int_0^{t_0} x^*(t)\,dt<\infty,$$

откуда и следует наше утверждение.

На свойствах пространства Λ_ψ существенно сказывается поведение функции $\psi(t)$ в нуле и на бесконечности. Из предыдущего следует, что $\Lambda_\psi\subset L_\infty$, если $\psi(+0)\neq 0$. Далее, если $\psi(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)<\infty$, то всякая ограниченная функция принадлежит Λ_ψ, т. е. $\Lambda_\psi\supset L_\infty$. Таким образом, если $\psi(+)\neq 0$ и $\psi(\infty)<\infty$, то $\Lambda_\psi=L_\infty$.

Если $\psi(\infty)=\infty$, то для любой функции $x\in\Lambda_\psi$ величина $n_{|x|}(\tau)<\infty$ при всех $\tau>0$. Действительно, если при некотором τ_0 множество $e=\{t:|x(t)|>\tau_0\}$ имеет бесконечную меру, то $x^*(t)>\tau_0$ при всех $t>0$ и

$$\int_0^\infty x^*(t)\psi'(t)\,dt\geqslant \tau_0\int_0^\infty \psi'(t)\,dt=\infty.$$

Получим еще одно выражение для величины (5.2). Функция $\psi'(t)$ убывает и, как производная вогнутой функции, локально суммируема, поэтому $\psi'\in L_1+L_\infty$. Тогда в силу теоремы 3.2 справедлива формула

$$\int_0^\infty x^*(t)\psi'(t)\,dt=\sup_{T\in\Sigma_0}\int_0^\infty x(t)\,T\psi'(t)\,dt.$$

Из этой формулы и равенства (5.2) вытекает, что величина (5.1) обладает свойствами нормы. Таким образом, пространство Λ_ψ является нормированным относительно нормы

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty x^*(t)\, d\psi(t).$$

Очевидно, что из соотношений $|y(t)| \leqslant |x(t)|$, $x \in \Lambda_\psi$, следует, что $y \in \Lambda_\psi$ и $\|y\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \|x\|_{\Lambda_\psi}$.

Докажем полноту пространства Λ_ψ. Для этого достаточно показать, что из неравенства $\sum\limits_{k=1}^\infty \|x_k\|_{\Lambda_\psi} = C < \infty$ $(x_k \in \Lambda_\psi)$ вытекает принадлежность $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k(t)|$ к Λ_ψ. В силу вложения Λ_ψ в $L_1 + L_\infty$:

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|_{L_1+L_\infty} < \infty,$$

и, следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty |x_k(t)|$ сходится почти всюду к функции $x(t) \in L_1 + L_\infty$. Далее, при $T \in \Sigma_0$ из теоремы 3.2 и (5.2) вытекает, что

$$\int_0^\infty \sum_{k=1}^N |x_k(t)|\, T\psi'(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^N \int_0^\infty x_k^*(t)\, \psi'(t)\, dt \leqslant C.$$

Тогда по теореме Леви

$$\int_0^\infty x(t)\, T\psi'(t)\, dt \leqslant C.$$

Беря sup по всем $T \in \Sigma_0$, получаем

$$\int_0^\infty x^*(t)\, \psi'(t)\, dt \leqslant C.$$

Если $\psi(+0)\neq 0$, то из конечности $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_{\Lambda_\psi}$ следует конечность $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_{L_\infty}$ и неравенство $\|x\|_{L_\infty}\leqslant\infty$. Таким образом, $x\in\Lambda_\psi$. Банаховость пространства Λ_ψ доказана.

Из определения ясно, что пространство Λ_ψ симметрично, и его фундаментальная функция равна $\psi(t)$. По теореме 4.1 получаем, что

$$L_1\cap L_\infty\subset\Lambda_\psi\subset L_1+L_\infty$$

(оба вложения легко проверяются непосредственно).

Пространство Λ_ψ является интерполяционным между L_1 и L_∞. Действительно,

$$\|Tx\|_{\Lambda_\psi}=\psi(+0)\|Tx\|_{L_\infty}+\int\limits_0^\infty (Tx)^*(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

и, если $T\in\Sigma$, то в силу неравенства (3.16) и свойства 18° (см. стр. 100) имеем

$$\|Tx\|_{\Lambda_\psi}\leqslant\psi(+0)\|x\|_{L_\infty}+\int\limits_0^\infty x^*(t)\,\psi'(t)\,dt=\|x\|_{\Lambda_\psi}.$$

Для дальнейшего будет необходимо утверждение о предельном переходе в пространстве Λ_ψ.

Теорема 5.1 (о предельном переходе). *Пусть $y\in\Lambda_\psi$, $n_{|y|}(\tau)<\infty$ при всех $\tau>0$ и $|x_n(t)|<|y(t)|$. Если выполнено одно из условий:*

а) $\psi(+0)=0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$ *почти всюду*;

б) $\psi(+0)\geqslant 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)$ *равномерно, то* $\|x-x_n\|_{\Lambda_\psi}\to 0$.

Доказательство. Очевидно, что $x\in\Lambda_\psi$ и $n_{|x|}(\tau)<\infty$ при $\tau>0$. Из свойства перестановок 12° следует, что $(x-x_n)^*(t)\to 0$ при $n\to\infty$ и любом $t>0$. Тогда, если $\psi(+0)=0$, то

$$\|x-x_n\|_{\Lambda_\psi}=\int\limits_0^\infty (x-x_n)^*(t)\,\psi'(t)\,dt\to 0$$

в силу неравенства $(x-x_n)^*(t)\psi'(t)\leqslant 2y^*(t)\psi'(t)$ и теоремы Лебега.

Если $\psi(+0)>0$, то

$$\|x-x_n\|_{\Lambda_\psi}=\|x-x_n\|_{L_\infty}\psi(+0)+\int_0^\infty (x-x_n)^*(t)\psi'(t)\,dt\to 0$$

в силу предыдущего и равномерной сходимости $x_n(t)$ к $x(t)$.

Следствие 1. *Если $\psi(+0)=0$ и $\psi(\infty)=\infty$, то из $|x_n(t)|\leqslant y(t)$ $(y\in\Lambda_\psi)$ и $x_n(t)\to x(t)$ почти всюду вытекает, что $\|x-x_n\|_\psi\to 0$.*

В условиях следствия 1 каждая функция из Λ_ψ является пределом своих двусторонних срезок. Эти условия являются необходимыми для выполнения этого свойства. Действительно, если $\psi(\infty)<\infty$, то $\chi_{[0,\infty)}(t)\in\Lambda_\psi$, и срезки $\chi_{[0,N]}(t)$ находятся от $\chi_{[0,\infty)}$ на постоянном расстоянии $\psi(\infty)$. Если $\psi(+0)>0$, то для функции $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\chi_{[n,n+1/n^2]}(t)$ срезки $\sum\limits_{n=1}^{N}\chi_{[n,n+1/n^2]}(t)$ удалены от нее не менее, чем на величину $\psi(+0)$.

Следствие 2. *Всякая функция $x\in\Lambda_\psi$ является пределом в Λ_ψ своих верхних срезок x^N.*

Действительно, если $\psi(+0)>0$, то $\Lambda_\psi\subset L_\infty$ и $x^N(t)\equiv x(t)$ при достаточно больших N.

Пусть теперь $\psi(+0)=0$. Существует $\tau_0>0$ такое, что $n_{|x|}(\tau_0)<\infty$. Тогда при $N>\tau_0$ $|x(t)-x^N(t)|\leqslant|x(t)-x^{\tau_0}(t)|$, причем $n_{|x-x^{\tau_0}|}(\tau)<\infty$ при всех $\tau>0$. Из теоремы 5.1 следует, что $\|x-x^N\|_{\Lambda_\psi}\to 0$ при $N\to\infty$.

Следствие 3. *Если $\psi(\infty)=\infty$ $(\psi(\infty)<\infty)$, то конечнозначные (обобщенно конечнозначные) функции плотны в Λ_ψ.*

В силу следствия 2 функцию $x(t)\in\Lambda_\psi$ можно с любой точностью приблизить ограниченной функцией, при этом, если $\psi(\infty)=\infty$, то эту функцию можно считать финитной. Финитную ограниченную функцию можно представить как предел равномерно сходящейся последовательности конечнозначных функций, не превосходящих ее, поэтому в случае $\psi(\infty)=\infty$ наше утверждение следует из пункта б) теоремы о предельном переходе. Всякую ограниченную функцию можно представить как предел равномерно сходящейся последовательности обобщенно конечнозначных функций; в случае $\psi(\infty) < \infty$ отсюда будет следовать сходимость этой последовательности в Λ_ψ.

Лемма 5.1. *Пространство Λ_ψ сепарабельно тогда и только тогда, когда*

$$\psi(+0) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(\infty) = \infty. \tag{5.3}$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы 4.8 о сепарабельных симметричных пространствах и изложенного на стр. 149.

Для дальнейшего необходимо еще одно выражение для нормы в пространстве Лоренца. Имеет место формула

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty \psi(n_{|x|}(\tau))\,d\tau. \tag{5.4}$$

Левая и правая части этого равенства не изменяются при переходе от функции к ее модулю и к равноизмеримой с ним функции. Поэтому можно считать, что $x(t) = x^*(t)$. Если такая функция является счетнозначной:

$$x(t) = \sum_1^\infty \Delta_k \chi_{(0,t_k)} \quad (\infty = t_1 > t_2 > \ldots > 0, \quad \Delta_k \geqslant 0), \tag{5.5}$$

то непосредственное вычисление показывает, что обе части в (5.4) равны $\sum_1^\infty \Delta_k \psi(t_k)$. Любую функцию $x \in \Lambda_\psi$ $(x = x^*)$ можно равномерно аппроксимировать возрастающей последовательностью функций $x_n(t)$ вида (5.5). В силу теоремы 5.1 $\|x\|_{\Lambda_\psi} = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_{\Lambda_\psi}$. Функции $n_{x_n}(\tau)$ при каждом $\tau > 0$ будут сходиться к функции $n_x(\tau)$, и, следовательно, $\psi(n_{x_n}(\tau)) \to \psi(n_x(\tau))$ при всех $\tau > 0$. По теореме Леви

$$\int_0^\infty \psi(n_x(\tau))\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \psi(n_{x_n}(\tau))\,d\tau.$$

Отсюда и из предыдущего следует (5.4).

Выпуклый функционал на пространстве Лоренца. Пусть $\Phi(x)$ — выпуклый функционал на пространстве Λ_ψ, т. е. функционал со свойствами

$$\Phi(x+y) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y),$$
$$\Phi(\lambda x) = |\lambda| \Phi(x).$$

Предполагается, что $\Phi(x)$ может принимать и бесконечное значение.

Лемма 5.2. *Если выпуклый функционал ограничен на всех характеристических функциях измеримых множеств, то он ограничен на всех обобщенно конечнозначных функциях из* Λ_ψ.

Доказательство. Пусть выполнено неравенство

$$\Phi(\chi_e) \leqslant C \|\chi_e\|_{\Lambda_\psi} = C\psi(\operatorname{mes} e).$$

Если $x(t)$ — неотрицательная обобщенно конечнозначная функция, принадлежащая пространству Λ_ψ, то ее можно представить в виде

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{e_k}(t),$$

где $e_1 \subset e_2 \subset \ldots \subset e_N$ и $\Delta_k > 0$. Тогда

$$\Phi(x) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \Phi(\chi_{e_k}) \leqslant C \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \psi(\operatorname{mes} e_k). \tag{5.6}$$

С другой стороны, как указано на стр. 84,

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{[0, \operatorname{mes} e_k]}(t)$$

и, следовательно,

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{[0, \operatorname{mes} e_k]}(t)\, d\psi(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \psi(\operatorname{mes} e_k). \tag{5.7}$$

Объединяя (5.6) и (5.7), получаем

$$\Phi(x) \leqslant C \|x\|_{\Lambda_\psi}.$$

Если теперь обобщенно конечнозначная функция $x(t)$ из Λ_ψ имеет значения произвольного знака, то

$$\Phi(x) = \Phi(x_+ - x_-) \leqslant \Phi(x_+) + \Phi(x_-) \leqslant \\ \leqslant C(\|x_+\|_{\Lambda_\psi} + \|x_-\|_{\Lambda_\psi}) \leqslant 2C\|x\|_{\Lambda_\psi}.$$

Следствие 1. Пусть функционал $\Phi(x)$ имеет вид $\Phi(x) = \|Ax\|_E$, где E — некоторое банахово пространство, вложенное в отделимое линейное топологическое пространство $\mathfrak{A}$, A — линейный оператор на Λ_ψ, непрерывно действующий в $\mathfrak{A}$ (если $Ax \notin E$, полагается $\Phi(x) = \infty$). Если функционал $\Phi(x)$ ограничен на всех характеристических функциях из Λ_ψ, то оператор A ограниченно действует в пространстве E.

Действительно, пусть $x \in \Lambda_\psi$, и x_n — аппроксимирующая ее последовательность обобщенно конечнозначных функций. Тогда по лемме 5.2 $\|A(x_n - x_m)\| \leqslant 2C\|x_n - x_m\|_{\Lambda_\psi}$, и значит, последовательность Ax_n фундаментальна в E. Так как в пространстве $\mathfrak{A}$ она сходится к Ax, то таким же будет ее предел в E, т. е.

$$Ax \in E \text{ и } \|Ax\|_E \leqslant 2C\|x\|_{\Lambda_\psi}.$$

2. Пространство Марцинкевича. Выясним структуру сопряженного пространства к сепарабельному пространству Λ_ψ.

Теорема 5.2. *Всякий линейный функционал f на сепарабельном пространстве Λ_ψ имеет вид*

$$f(x) = \int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt, \tag{5.8}$$

где $y(t)$ — измеримая функция на $[0, \infty)$ и

$$\|f\| = \sup_{0<h<\infty} [\psi(h)]^{-1} \int_0^h y^*(s)\,ds < \infty. \tag{5.9}$$

Доказательство. Покажем, что формула (5.8) при выполнении неравенства (5.9) определяет линейный функционал на Λ_ψ. Заметим, что из неравенства (5.9) и условия $\psi(+) = 0$ следует, что $\int_0^h y^*(s)\,ds \leqslant C\psi(h) \to 0$

при $h \to 0$. Пусть $x(t)$ — ступенчатая функция; тогда

$$x^*(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{[0,h_k]}, \qquad \Delta_k > 0.$$

Оцениваем

$$|f(x)| = \left| \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty x^*(t)\, y^*(t)\, dt = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \int_0^{h_k} y^*(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<h<\infty} \left\{ [\psi(h)]^{-1} \int_0^h y^*(t)\, dt \right\} \Sigma\, \Delta_k \psi(h_k) =$$

$$= \sup_{0<h<\infty} \left\{ [\psi(h)]^{-1} \int_0^h y^*(t)\, dt \right\} \| x \|_{\Lambda_\psi}.$$

Как было указано при доказательстве леммы 5.1, ступенчатые функции плотны по норме Λ_ψ в множестве ограниченных финитных функций, поэтому неравенство

$$|f(x)| \leqslant \int_0^\infty |x(t)|\, |y(t)|\, dt \leqslant \sup_{0<h<\infty} \left\{ [\psi(h)]^{-1} \int_0^h y^*(t)\, dt \right\} \| x \|_{\Lambda_\psi} \tag{5.10}$$

предельным переходом устанавливается для любой финитной ограниченной функции. Для любой функции $x \in \Lambda_\psi$, в силу следствий из теоремы 5.1, модуль $|x(t)|$ является пределом в Λ_ψ своих двусторонних срезок, поэтому с помощью леммы Фату неравенство (5.10) переносится на любые функции из Λ_ψ. Из этого следует, что $f \in \Lambda_\psi'$ и

$$|f(x)| \leqslant \sup_{0<h<\infty} \left\{ [\psi(h)]^{-1} \int_0^h y^*(t)\, dt \right\} \| x \|_{\Lambda_\psi}. \tag{5.11}$$

Пусть теперь f — произвольный линейный функционал на Λ_ψ. Тогда $|f(x)| \leqslant \|f\|\, \|x\|_{\Lambda_\psi}$. Если $x = \chi_e$ — характеристическая функция измеримого множества e конечной меры, то для функции $\alpha(e) = f(\chi_e)$

$$|\alpha(e)| \leqslant \|f\|\, \|\chi_e\|_{\Lambda_\psi} = \|f\|\, \psi(\operatorname{mes} e).$$

В силу того, что $\psi(+0)=0$, функция $\alpha(e)$ абсолютно непрерывна, и по теореме Радона — Никодима

$$\alpha(e)=f(\chi_e)=\int_0^\infty \chi_e(t)\,y(t)\,dt, \tag{5.12}$$

где $y(t)$ — локально суммируемая функция. Из (5.12) вытекает, что

$$f(x)=\int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt \tag{5.13}$$

для любой конечнозначной функции $x(t)$.

Далее,

$$\left\| \operatorname{sign} y(t)\frac{\chi_e(t)}{\psi(\operatorname{mes} e)}\right\|_{\Lambda_\psi}=1,$$

поэтому

$$[\psi(\operatorname{mes} e)]^{-1}\int_e |y(t)|\,dt=f\left(\operatorname{sign} y\,\frac{\chi_e}{\psi(\operatorname{mes} e)}\right)\leqslant \|f\|.$$

В силу свойства перестановок 7°, тогда

$$\sup_{0\leqslant h<\infty}[\psi(h)]^{-1}\int_0^h y^*(t)\,dt\leqslant \|f\|. \tag{5.14}$$

Распространение формулы (5.13) на все функции из Λ_ψ проводится рассуждениями, как и в доказательстве первой половины теоремы. Из неравенств (5.11) и (5.14) вытекает (5.9). Теорема доказана.

Пространство всех измеримых функций $y(t)$, для которых выполнено неравенство (5.9), называется *пространством Марцинкевича* M_ψ. Мы доказали, что *пространство Марцинкевича* M_ψ *изометрично пространству, сопряженному к сепарабельному пространству Лоренца* Λ_ψ. Аналогичными рассуждениями можно показать, что для произвольного пространства Лоренца Λ_ψ пространство M_ψ совпадает с ассоциированным к Λ_ψ пространством. Из этого вытекает, что пространство M_ψ является банаховым. Очевидно, оно симметрично.

Пространство M_ψ является интерполяционным между L_1 и L_∞ с интерполяционной константой 1.

Действительно, если $T\in\Sigma$, то в силу неравенства (3.16)

$$\|Tx\|_{M_\psi}=\sup\,[\psi(h)]^{-1}\int_0^h (Tx)^*(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant \sup\,[\psi(h)]^{-1}\int_0^h x^*(t)\,dt=\|x\|_{M_\psi}.$$

Иногда удобно рассматривать пространства M_ψ, построенные по квазивогнутой функции $\psi(t)$. При этом для фундаментальной функции справедливо равенство: $\varphi_{M_\psi}(t)=t/\psi(t)$.

Норма (5.9) имеет, конечно, смысл при любой положительной при $t>0$ функции $\psi(t)$, однако, можно показать, что если полученное пространство имеет ненулевые элементы, то норма совпадает с нормой, вычисленной по формуле (5.9) с некоторой квазивогнутой функцией (наибольшей квазивогнутой минорантой функции $\psi(t)$).

Лемма 5.3. *Пусть $\psi(t)$ — возрастающая вогнутая функция. Для того чтобы $\psi(t)/t\in M_\psi$, необходимо и достаточно, чтобы было $M_\psi(s_0^{-1})<1$ при любом $s_0>1$.*

Доказательство. Если $M_\psi(s_0^{-1})=1$, то в силу леммы 1.3 $M_\psi(s^{-1})\equiv 1$ при $s\geqslant 1$. Тогда для любого целого $n>1$ существует точка t_n такая, что $\psi(nt_n)\leqslant\leqslant(1+\varepsilon)\psi(t_n)$. Функция $\psi(t)/t$ убывает, поэтому

$$\left\|\frac{\psi(t)}{t}\right\|_{M_\psi}\geqslant[\psi(nt_n)]^{-1}\int_0^{nt_n}\frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau\geqslant[\psi(nt_n)]^{-1}\int_{t_n}^{nt_n}\frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau\geqslant$$

$$\geqslant[\psi(nt_n)]^{-1}\psi(t_n)\int_{t_n}^{nt_n}\frac{d\tau}{\tau}\geqslant\frac{1}{1+\varepsilon}\ln n.$$

В силу произвольности n получаем, что $\psi(t)/t\notin M_\psi$. Таким образом, для принадлежности $\psi(t)/t$ к M_ψ необходимо, чтобы было $M_\psi(s_0^{-1})<1$ $(s_0>1)$. Пусть теперь это условие выполнено; тогда, в силу следствия 2 из леммы 1.4,

$$\left\|\frac{\psi(t)}{t}\right\|_{M_\psi}=\sup\frac{1}{\psi(t)}\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{\tau}\,d\tau\leqslant C.$$

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функционал

$$F(x)=\sup_{0<t<\infty}\frac{t}{\psi(t)}x^*(t).$$

Очевидно $F(x)>0$, если $x(t)\not\equiv 0$ и $F(\lambda x)=|\lambda|F(x)$. Однако, вообще говоря, этот функционал не обладает свойствами нормы.

Справедливо неравенство

$$\|x\|_{M_\psi}=\sup_{0<h<\infty}\frac{\int\limits_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)}\geqslant\sup_{0<h<\infty}\frac{hx^*(h)}{\psi(h)}=F(x).\qquad(5.15)$$

Из этого неравенства и леммы 5.3 следует

Теорема 5.3. *Для того чтобы функционал $F(x)$ был эквивалентен норме $\|x\|_{M_\psi}$, необходимо и достаточно, чтобы было* $M_\psi(s^{-1})<1\ (s>1)$.

Доказательство. Необходимость. Так как функция $\psi(t)/t$ убывает, то $F(\psi(t)/t)=1$. Если функционал $F(x)$ эквивалентен норме в пространстве M_ψ, то из этого равенства следует, что $\psi(t)/t\in M_\psi$, и в силу леммы 5.3 $M_\psi(s^{-1})<1$ при $s>1$.

Достаточность. Пусть $F(x)\leqslant 1$; тогда $x^*(t)\leqslant\leqslant\psi(t)/t$ и, следовательно, $\|x\|_{M_\psi}\leqslant\left\|\frac{\psi(t)}{t}\right\|_{M_\psi}=C<\infty$. Из однородности обоих функционалов вытекает, что $\|x\|_{M_\psi}\leqslant\leqslant CF(x)$; это неравенство вместе с (5.15) доказывает теорему.

3. Пространство M_ψ^0. Считая, что $\psi(+0)=0$ и $\psi(\infty)=\infty$, обозначим через M_ψ^0 множество всех $x\in M_\psi$, для которых

$$\lim_{h\to 0,\infty}[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x^*(t)\,dt=0.\qquad(5.16)$$

Оказывается, что M_ψ^0 — подпространство M_ψ. Линейность M_ψ^0 следует из неравенства (2.17). Пусть $x_n\to x_0$ в M_ψ и $x_n\in M_\psi^0$. Тогда последовательность непрерывных функций $\alpha_n(h)=[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x_n^*(t)\,dt$ равномерно сходится к функции $\alpha_0[h]=[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x_0^*(t)\,dt$.

Действительно, в силу (3.14)

$$\left|[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x_n^*(t)\,dt-[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x_0^*(t)\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h (x_n-x_0)^*(t)\,dt\leqslant\|x_n-x_0\|_{M_\psi}.$$

Так как все функции $\alpha_n(h)$ обладают тем свойством, что $\lim\limits_{h\to 0,\infty}\alpha_n(h)=0$, то и предельная функция $\alpha_0(h)$ им обладает. Таким образом, $x_0\in M_\psi^0$.

Заметим, что для $x\in M_\psi^0$ выполнено условие $n_{|x|}(\tau)<<\infty$ при всех $\tau>0$. Действительно, если $n_{|x|}(\tau_0)=\infty$, то $x^*(t)\geqslant\tau_0$ и

$$[\psi(h)]^{-1}\int\limits_0^h x^*(t)\,dt\geqslant\tau_0\frac{h}{\psi(h)}\geqslant\frac{\tau_0}{\psi(1)}>0$$

при $h\geqslant 1$, т. е. $x\notin M_\psi^0$.

Если $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t}=k<\infty$, то пространство M_ψ^0 состоит из нуля. Действительно, если $x\in M_\psi$ и $x\not\equiv 0$, то при некотором $t_0>0$ имеем $x^*(t_0)>0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int\limits_0^h x^*(t)\,dt}{\psi(h)}\geqslant x^*(t_0)\lim_{h\to 0}\frac{h}{\psi(h)}=\frac{1}{k}x^*(t_0),$$

т. е. $x\notin M_\psi^0$.

Лемма 5.4. *При условии*

$$\lim_{t\to 0}\psi(t)/t=\infty \qquad (5.17)$$

подпространство M_ψ^0 *совпадает с замыканием множества всех финитных ограниченных функций в пространстве* M_ψ.

Доказательство. Очевидно, что при условии (5.17) любая финитная ограниченная функция принадлежит M_ψ (так как $\psi(\infty)=\infty$). Пусть $x_0 \in M_\psi^0$; тогда по любому $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что

$$[\psi(h)]^{-1}\int_0^h x_0^*(t)\,dt \leqslant \varepsilon$$

при $h\leqslant\delta$ и $h\geqslant 1/\delta$. Так как $n_{|x_0|}(\tau)<\infty$ при всех τ, то, в силу свойства перестановок 12° $(x_0-x_0^N)^*(t)$ стремится к нулю при $N\to\infty$ для всех t. Следовательно, при достаточно больших N

$$\int_0^{\delta^{-1}} (x_0-x_0^N)^*(t)\,dt \leqslant \varepsilon\psi(\delta).$$

Тогда для этих N

$$\|x_0-x_0^N\|_{M_\psi} =$$

$$= \max\left\{\sup_{h\leqslant\delta,\,h\geqslant\delta^{-1}} \frac{\int_0^h (x_0-x_0^N)^*(t)\,dt}{\psi(h)},\ \sup_{\delta\leqslant h\leqslant\delta^{-1}} \frac{\int_0^h (x_0-x_0^N)^*(t)\,dt}{\psi(h)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\sup_{h\leqslant\delta,\,h\geqslant\delta^{-1}} \frac{\int_0^h x_0^*(t)\,dt}{\psi(h)},\ \frac{\int_0^{\delta^{-1}} (x_0-x_0^N)^*(t)\,dt}{\psi(\delta)}\right\} \leqslant \varepsilon.$$

Очевидно, что пространство M_ψ^0 симметрично. Из теоремы вложения 4.1 следует, что

$$L_1 \cap L_\infty \subset M_\psi^0. \tag{5.18}$$

Любой оператор $T\in\Sigma$ переводит множество финитных ограниченных функций в $L_1\cap L_\infty$, и следовательно, в M_ψ^0. В силу плотности этого множества в M_ψ^0 и того, что пространство M_ψ является интерполяционным между L_1 и L_∞, вытекает, что $TM_\psi^0 \subset M_\psi^0$, т. е. пространство M_ψ^0 также является интерполяционным между L_1 и L_∞ с интерполяционной константой 1.

Теорема 5.4. *При условии* (5.17) *всякий линейный функционал* f *на пространстве* M_ψ^0 *может быть* *представлен в виде*

$$f(x)=\int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt, \tag{5.19}$$

где $y\in\Lambda_\psi$ *и* $\|f\|=\|y\|_{\Lambda_\psi}$.

Доказательство. Тот факт, что выражение (5.19) определяет линейный функционал на пространстве M_ψ, а значит, и на пространстве M_ψ^0, следует из неравенства (5.11), если в нем x и y поменять ролями. Оттуда же вытекает, что

$$\|f\|\leqslant\|y\|_{\Lambda_\psi}. \tag{5.20}$$

Пусть теперь f — произвольный линейный функционал на M_ψ^0. Тогда функция $\alpha(e)=f(\chi_e)$, определенная на всех множествах конечной меры, аддитивна и абсолютно непрерывна:

$$|\alpha(e)|=|f(\chi_e)|\leqslant\|f\|\,\|\chi_e\|_{M_\psi^0}=\|f\|\frac{\operatorname{mes}e}{\psi(\operatorname{mes}e)}\to 0,$$

когда $\operatorname{mes} e\to 0$ (в силу условия (5.17)). Из теоремы Радона — Никодима тогда следует существование такой локально интегрируемой функции y, что

$$f(x)=\int_0^\infty x(t)\,y(t)\,dt \tag{5.21}$$

для любой конечнозначной функции $x(t)$.

Выберем $x_e(t)=\operatorname{sign}y(t)\,\chi_e(t)$ с $\operatorname{mes}e=1$. Тогда $\|\chi_e\|_{M_\psi^0}=1/\psi(1)$. Поэтому

$$\sup_{\operatorname{mes}e=1}\int_e|y(t)|\,dt\leqslant\frac{\|f\|}{\psi(1)},$$

т. е. $y\in L_1+L_\infty$.

Любую функцию x из $L_1\cap L_\infty$ можно представить как предел последовательности конечнозначных функций, сходящейся в пространстве $L_1\cap L_\infty$, а значит, в силу вложения (5.18), и в пространстве M_ψ^0. Это позволяет распространить предельным переходом формулу (5.21) на все функции x из $L_1\cap L_\infty$.

Введем теперь в рассмотрение функции $\mu_\varepsilon \in L_1 \cap L_\infty$ $(0<\varepsilon<1)$, определенные формулой

$$\mu_\varepsilon(t) = \psi'(t)\,\chi_{[\varepsilon,1/\varepsilon]}(t).$$

Имеем $\|\mu_\varepsilon\|_{M_\psi^0} \leqslant \|\psi'\|_{M_\psi} = 1$. При любом операторе $T \in \Sigma$ функции $T\mu_\varepsilon$ принадлежат $L_1 \cap L_\infty$, и, в силу интерполяционности пространства M_ψ^0, $\|T\mu_\varepsilon\|_{M_\psi^0} \leqslant 1$. Из формулы (5.21) следует, что

$$|f(T\mu_\varepsilon)| = \left|\int_0^\infty T\mu_\varepsilon(t)\,y(t)\,dt\right| \leqslant \|f\|.$$

Из теоремы 3.2 тогда следует, что

$$\int_0^\infty \mu_\varepsilon^*(t)\,y^*(t)\,dt = \int_0^{1/\varepsilon-\varepsilon} \psi'(t+\varepsilon)\,y^*(t)\,dt \leqslant \|f\|.$$

Устремляя ε к нулю, из теоремы Леви получаем

$$\|y\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^\infty \psi'(t)\,y^*(t)\,dt \leqslant \|f\|. \tag{5.22}$$

Таким образом, $y \in \Lambda_\psi$, и в силу (5.20) и (5.22) $\|y\|_{\Lambda_\psi} = \|f\|$.

Справедливость формулы (5.19) для любого $x \in M_\psi^0$ устанавливается теперь обычными рассуждениями.

4. Вложение симметричных пространств. Пространство Λ_ψ является наиболее узким среди симметричных пространств с той же фундаментальной функцией.

Теорема 5.5. *Пусть E — симметричное пространство с фундаментальной функцией $\varphi(t)$. Тогда пространство Λ_ψ, где $\psi(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\varphi(t)$, вложено в пространство E и выполнено неравенство*

$$\|x\|_E \leqslant \|x\|_{\Lambda_\psi}.$$

Доказательство. Для любой характеристической функции χ_e имеем

$$\|\chi_e\|_E = \varphi(\operatorname{mes} e) \leqslant \psi(\operatorname{mes} e) = \int_0^{\operatorname{mes} e} d\psi(t) = \|\chi_e\|_{\Lambda_\psi}.$$

Пусть $x(t)$ — произвольная неотрицательная конечнозначная функция:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \chi_{e_k}(t),$$

где $\Delta_k > 0$ и $e_1 \subset e_2 \subset \ldots \subset e_N$. Тогда

$$\|x\|_E \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|\Delta_k \chi_{e_k}\|_E \leqslant \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \|\chi_{e_k}\|_{\Lambda_\psi} = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \psi(\operatorname{mes} e_k) = \|x\|_{\Lambda_\psi} \tag{5.23}$$

(см. (5.7)). Очевидно, что это неравенство справедливо и для произвольной обобщенно конечнозначной функции. В силу следствия 3 из теоремы 5.1 любую функцию из Λ_ψ можно представить как предел последовательности обобщенно конечнозначных. Из неравенства (5.23) будет следовать, что эта последовательность фундаментальна в E, и значит, имеет предел в E. Так как пространства E и Λ_ψ вложены в $L_1 + L_\infty$, то этот предел совпадает с исходной функцией. Таким образом, $\Lambda_\psi \subset E$. Предельным переходом неравенство (5.23) переносится на любую функцию из Λ_ψ.

Теорема 5.6. *Пусть E — симметричное пространство. Если функция $\|\sigma_{1/t}\|_{E\to E}$ принадлежит пространству Лоренца Λ_ψ, то справедливо вложение $E \subset \Lambda_\psi$.*

Доказательство. При любом $\tau \in (0, 1]$ справедливо неравенство

$$\int_0^\infty x^*(t)\, d\psi(t) \leqslant \int_0^\infty x^*(\tau t)\, d\psi(t).$$

Умножим обе части неравенства на характеристическую функцию $\chi_{[0,1]}(\tau)$ и сравним нормы полученных функций от τ. Тогда в силу леммы 4.7

$$\varphi_E(1) \int_0^\infty x^*(t)\, d\psi(t) \leqslant \left\| \chi_{[0,1]}(\tau) \int_0^\infty x^*(\tau t)\, d\psi(t) \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^\infty x^*(\tau t)\, d\psi(t) \right\|_E \leqslant \int_0^\infty \|\sigma_{1/t} x^*\|_E\, d\psi(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \|\sigma_{1/t}\|_E\, d\psi(t) \|x\|_E.$$

Таким образом, при $x \in E$

$$\|x\|_{\Lambda_\psi} \leqslant [\varphi_E(1)]^{-1} \|\|\sigma_{1/t}\|_E\|_{\Lambda_\psi} \|x\|_E.$$

Наиболее широким пространством среди симметричных пространств с той же фундаментальной функцией является пространство Марцинкевича.

Теорема 5.7. *Пусть E — симметричное пространство с фундаментальной функцией $\psi(t)$. Тогда имеет место вложение $E \subset \mathrm{M}_{\psi_*}$ и неравенство*

$$\|x\|_{\mathrm{M}_{\psi_*}} \leqslant \|x\|_E, \tag{5.24}$$

где

$$\psi_*(t) = t/\psi(t).$$

Доказательство. Пусть x — произвольная функция из E В силу неравенства (4.6)

$$\frac{\|x^*\chi_{[0,h]}\|_{L_1}}{\|x^*\chi_{[0,h]}\|_E} \leqslant \frac{h}{\psi(h)}.$$

Отсюда

$$\|x\|_E = \|x^*\|_E \geqslant \|x^*\chi_{[0,h]}\|_E \geqslant \frac{\|x^*\chi_{[0,h]}\|_{L_1}}{h/\psi(h)} = \frac{1}{\psi_*(h)} \int_0^h x^*(t)\,dt.$$

Если справа взять sup по h, то получится неравенство (5.24). Теорема доказана.

Интересно отметить, что всякое интерполяционное между L_1 и L_∞ пространство E является объединением пространств Марцинкевича. Действительно, пусть $x \in E$. Рассмотрим вогнутую функцию

$$\psi_x(\tau) = \int_0^\tau x^*(s)\,ds,$$

и построим по ней пространство Марцинкевича M_{ψ_x}. Тогда

$$\|x\|_{\mathrm{M}_{\psi_x}} = \sup_{0<\tau<\infty} \frac{\int_0^\tau x^*(s)\,ds}{\psi_x(\tau)} = 1$$

и, значит, $x \in M_{\psi_x}$. Далее, если $y \in M_{\psi_x}$, то

$$\int_0^\tau y^*(s)\,ds \leqslant \|y\|_{M_{\psi_x}} \int_0^\tau x^*(s)\,ds.$$

Из теоремы 4.3 тогда следует, что $y \in E$. Таким образом, пространство M_{ψ_x} вложено в пространство E.

Если интерполяционная константа, отвечающая пространству E, не превосходит единицы, то из последнего неравенства получается, что

$$\|y\|_E \leqslant \|y\|_{M_{\psi_x}} \|x\|_E.$$

Если положить $x = y/\|y\|_E$, то неравенство переходит в равенство, поэтому можно написать

$$\|y\|_E = \inf \|y\|_{M_\psi},$$

где $\inf$ берется по всем ψ вида ψ_x с $\|x\|_E = 1$ или, иначе, по всем ψ, для которых пространства Марцинкевича вложены в пространство E с константой вложения $\leqslant 1$.

5. Перенормировка симметричного пространства. Пусть E — симметричное пространство с фундаментальной функцией $\psi(t)$ и пусть $\psi_1(t)$ — квазивогнутая функция, эквивалентная $\psi(t)$:

$$C_1\psi(t) \leqslant \psi_1(t) \leqslant C_2\psi(t). \tag{5.25}$$

Введем в пространстве E новую норму:

$$\|x\|_E^1 = \max\left\{C_1\|x\|_E, \|x\|_{M_{\psi_{1*}}}\right\}.$$

Очевидно, что $\|x\|_E^1 \geqslant C_1\|x\|_E$. Далее, в силу неравенства (5.25) и теоремы 5.7

$$\|x\|_{M_{\psi_{1*}}} \leqslant C_2\|x\|_{M_{\psi_*}} \leqslant C_2\|x\|_E.$$

Таким образом, $\|x\|_E^1$ эквивалентна исходной норме пространства E. При $t = \operatorname{mes} e$

$$\|\chi_e\|_E^1 = \max\left\{C_1\|\chi_e\|_E, \|\chi_e\|_{M_{\psi_{1*}}}\right\} = \max\{C_1\psi(t), \psi_1(t)\} = \psi_1(t).$$

Мы пришли к утверждению:

Теорема 5.8. *Если функция $\psi_1(t)$ квазивогнута и эквивалентна фундаментальной функции $\psi(t)$ симметричного пространства E, то в пространстве E можно ввести эквивалентную норму так, что оно останется симметричным и будет иметь фундаментальной функцией функцию $\psi_1(t)$.*

Из следствия 1 теоремы 1.1 получается

Следствие. *На любом симметричном пространстве можно ввести эквивалентную норму так, что оно останется симметричным, и его фундаментальная функция будет вогнутой.*

6. Сумма и пересечение двух пространств Лоренца. Мы исследуем сумму двух пространств Лоренца в случае, когда отношение их фундаментальных функций монотонно.

Теорема 5.9. *Пусть $\varphi_0(s)$ и $\varphi_1(s)$ — две возрастающие вогнутые функции, отношение которых $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$ убывает; тогда пространство $\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}$ изометрично пространству $\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}$. Тогда в силу свойства 18° перестановок

$$\|x\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}} = \inf_{u+v=x} \{\|u\|_{\Lambda_{\varphi_0}} + \|v\|_{\Lambda_{\varphi_1}}\} \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{u+v=x} \{\|u\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}} + \|v\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}\} \geqslant \|x\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}.$$

Таким образом, $\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1} \subset \Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}$. (Здесь мы не пользовались монотонностью отношения $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$.)

Если отношение $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$ больше единицы при всех s или меньше единицы при всех s, то одна из функций $\varphi_0(s)$ и $\varphi_1(s)$ меньше другой, и соответствующее ей пространство содержит другое пространство. Сумма пространств совпадает с более широким пространством, и теорема доказана.

Пусть теперь в точке s_0

$$\varphi_0(s_0)[\varphi_1(s_0)]^{-1} = 1. \tag{5.26}$$

Тогда

$$\varphi_0(s) \begin{cases} \geqslant \varphi_1(s) & \text{при } s \leqslant s_0, \\ \leqslant \varphi_1(s) & \text{при } s \geqslant s_0. \end{cases}$$

Пусть $x \in \Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}$; обозначим $x_0 = \operatorname{sign} x(s) \times \min\{x^*(s_0), |x(s)|\}$ и $x_1 = x(s) - x_0(s)$.

Тогда $x_0^*(s)=x^*(s_0)$ при $s\leqslant s_0$ и $x_1^*(s)=0$ при $s>s_0$. Кроме того, $x^*(s)=x_0^*(s)+x_1^*(s)$, поэтому

$$\|x\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}=\|x_0^*\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}+\|x_1^*\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}=$$

$$=x^*(s_0)\min(\varphi_0(s_0),\varphi_1(s_0))+\int\limits_{s_0}^{\infty}x_0^*(s)\,d\varphi_0(s)+\|x_1^*\|_{\Lambda_{\varphi_1}}=$$

$$=\|x_0^*\|_{\Lambda_{\varphi_0}}+\|x_1^*\|_{\Lambda_{\varphi_1}}\geqslant\|x^*\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}}.$$

В силу того, что сумма симметричных пространств симметрична (лемма 4.5), $\|x^*\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}}=\|x\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}}$ и, следовательно, $\|x\|_{\Lambda_{\min(\varphi_0,\varphi_1)}}\geqslant\|x\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}}$.

Из теоремы 5.9 получаем

Следствие. *Если в условиях теоремы* 5.9 *функция x из $\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}$ финитна, то она принадлежит Λ_{φ_1}; если она ограничена, то принадлежит Λ_{φ_0}.*

Интересен случай, когда выполнено (5.26). В этом случае по теореме 5.9

$$\|x\|_{\Lambda_{\varphi_0}+\Lambda_{\varphi_1}}=\int\limits_0^{s_0}x^*(s)\,d\varphi_1(s)+\int\limits_{s_0}^{\infty}x^*(s)\,d\varphi_0(s),$$

откуда непосредственно вытекает наше утверждение.

Замечание. Вместо монотонности функции $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$ можно потребовать лишь обобщенную монотонность:

$$\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}\leqslant C\varphi_0(t)[\varphi_1(t)]^{-1}\quad\text{при}\quad t<s,$$

где C не зависит от s и t. В теореме 5.9 тогда следует изометрию заменить на изоморфизм. Утверждение следствия остается справедливым.

Рассмотрим теперь пересечение пространств Лоренца.

Теорема 5.10. *Пусть $\varphi_0(s)$ и $\varphi_1(s)$ — две возрастающие вогнутые функции; тогда пространство $\Lambda_{\varphi_0}\cap\Lambda_{\varphi_1}$ изоморфно пространству $\Lambda_{(\max(\varphi_0,\varphi_1))^\sim}$ (где $(\max(\varphi_0,\varphi_1))^\sim$ как и раньше, означает наименьшую вогнутую мажоранту функции $\max(\varphi_0,\varphi_1)$).*

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda_{\varphi_0} \cap \Lambda_{\varphi_1}$. Так как $(\max(\varphi_0, \varphi_1))^{\sim} \leqslant \varphi_0 + \varphi_1$, то в силу свойства 18°

$$\|x\|_{\Lambda_{(\max(\varphi_0,\varphi_1))^{\sim}}} = \int_0^\infty x^*(s)\, d(\max(\varphi_0, \varphi_1))^{\sim} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty x^*(s)\, d\varphi_0 + \int_0^\infty x^*(s)\, d\varphi_1 \leqslant 2 \max_{i=0,1} \|x\|_{\Lambda_{\varphi_i}} = 2\|x\|_{\Lambda_{\varphi_0} \cap \Lambda_{\varphi_1}}.$$

Таким образом, $\Lambda_{\varphi_0} \cap \Lambda_{\varphi_1} \subset \Lambda_{(\max(\varphi_0,\varphi_1))^{\sim}}$. Обратно, если $x \in \Lambda_{(\max(\varphi_0,\varphi_1))^{\sim}}$, то $\|x\|_{\Lambda_{\varphi_i}} \leqslant \|x\|_{\Lambda_{(\max(\varphi_0,\varphi_1))^{\sim}}}$, что и доказывает теорему.

7. Неинтерполяционные между L_1 и L_∞ симметричные пространства. Дадим ответ на вопрос, поставленный в § 4, п. 2, о существовании симметричных неинтерполяционных между L_1 и L_∞ пространств.

Лемма 5.5. *Пусть $\psi(t)$ — возрастающая вогнутая непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция, обладающая свойствами $\psi(0)=0$, $\psi(\infty)=\infty$ и*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1. \tag{5.27}$$

Тогда пространство Марцинкевича M_ψ содержит собственное подпространство G, являющееся симметричным пространством, содержащим функцию $\psi'(t)\chi_{(0,1]}(t)$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{G}$ совокупность всех функций из M_ψ, отличных от нуля лишь на множествах конечной меры и обладающих тем свойством, что

$$\sup_{t>0} \frac{x^*(t)}{\psi'(t)} < \infty.$$

Заметим, что при $x \in \tilde{G}$ функция $x^*(t)$ финитна.

Покажем, что множество $\tilde{G}$ линейно. Из условия (5.27) вытекает, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{\psi'(2t)}{\psi'(t)} = \frac{1}{2},$$

поэтому на каждом отрезке $[0, N]$ выполнено неравенство $\psi'(2t) \geqslant a_N \psi'(t)$. Если x_1 и x_2 принадлежат $\tilde{G}$, то

$x_i^*(t) \leqslant C_i\psi'(t)$ $(i=1, 2)$, и тогда в силу неравенства (2.23)

$$(x_1+x_2)^*(t) \leqslant x_1^*\left(\frac{t}{2}\right)+x_2^*\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant (C_1+C_2)\psi'\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant \leqslant \frac{C_1+C_2}{a_N}\psi'(t)$$

при $0 \leqslant t \leqslant N$. Если N выбрать так, чтобы носитель функции $(x_1+x_2)^*(t)$ содержался на отрезке $[0, N]$, то последнее неравенство будет справедливым при всех $t>0$. Таким образом, $x_1+x_2 \in G$.

За подпространство G причем замыкание $\bar G$ в M_ψ. Так как подмножество $\bar G$ очевидно симметрично, то в силу леммы 4.4 пространство G будет симметричным. Ясно, что $\psi'\chi_{(0,1]} \in \bar G \subset G$.

Осталось показать, что пространство G не совпадает с M_ψ. Для этого построим последовательность τ_n следующим образом: положим $\tau_0=1$ и τ_{n+1} определим по τ_n из двух условий:

$$0<\tau_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\tau_n \quad \text{и} \quad \frac{\psi(\tau_n)-\psi(\tau_{n+1})}{\psi(\tau_n-\tau_{n+1})} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Удовлетворить второму условию можно в силу того, что функция $\dfrac{\psi(\tau_n)-\psi(\tau)}{\psi(\tau_n-\tau)}$ непрерывна и стремится к 1 при $\tau \to 0$.

Покажем, что функция

$$u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\psi(\tau_n)-\psi(\tau_{n+1})}{\tau_n-\tau_{n+1}}\chi_{(\tau_{n+1},\tau_n]}(t)$$

принадлежит $M_\psi \setminus G$. Так как $\psi(t)$ возрастает и вогнута, то функция $u(t)$ убывает и, следовательно, $u(t)= =u^*(t)$. Тогда $\int\limits_0^\tau u^*(t)\,dt$ есть линейная на промежутках $[\tau_{n+1}, \tau_n]$ функция и $\int\limits_0^{\tau_n} u^*(t)\,dt=\psi(\tau_n)$. Из вогнутости функции $\psi(\tau)$ следует, что

$$\int_0^\tau u^*(t)\,dt \leqslant \psi(\tau) \quad (\tau > 0) \tag{5.28}$$

и, значит, $u \in M_\psi$.

Пусть $y \in \widetilde{G}$. Тогда $y^*(t) \leqslant C\psi'(t)$. В силу леммы 4.6 $\|u - y\|_{M_\psi} \geqslant \|u - y^*\|_{M_\psi}$. Далее

$$\|u - y^*\|_{M_\psi} \geqslant \left\|(u - y^*)\,\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi} \geqslant$$
$$\geqslant \left\|u\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi} - C\left\|\psi'\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi}.$$

По определению нормы в M_ψ и в силу выбора чисел τ_p

$$\frac{\tau_p - \tau_{p+1}}{\psi(\tau_p - \tau_{p+1})} = \|\chi_{(\tau_{p+1}, \tau_p]}\|_{M_\psi} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\chi_{\left(\tau_{p+1}, \frac{\tau_p}{2}\right]}\right\|_{M_\psi} + \left\|\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi} \leqslant 2\left\|\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi}.$$

Отсюда

$$\left\|u\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi} = \frac{\psi(\tau_p) - \psi(\tau_{p+1})}{\tau_p - \tau_{p+1}}\left\|\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\psi(\tau_p) - \psi(\tau_{p+1})}{\psi(\tau_p - \tau_{p+1})} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\|u - y\|_{M_\psi} \geqslant 1/3 - C\left\|\psi'\chi_{\left(\frac{\tau_p}{2}, \tau_p\right]}\right\|_{M_\psi}.$$

Если показать, что последнее слагаемое справа стремится к нулю при $p \to \infty$, то из этого неравенства будет следовать, что $u \notin G$. Имеем

$$\|\psi'\chi_{(\tau, 2\tau]}\|_{M_\psi} = \sup_{0 < h \leqslant \tau} \frac{\int_0^h \psi'(\tau + s)\,ds}{\psi(h)} = \sup_{0 < h \leqslant \tau} \frac{\psi(\tau + h) - \psi(\tau)}{\psi(h)}.$$

В силу вогнутости функции $\psi(t)$ величина $\psi(\tau+h)-\psi(\tau)$ убывает по τ, и поэтому $\psi(\tau+h)-\psi(\tau)\leqslant\psi(2h)-\psi(h)$. Тогда

$$\lim_{\tau\to 0}\|\psi'\chi_{(\tau,2\tau]}\|_{M_\psi}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{\tau\to 0}\sup_{0<h\leqslant\tau}\frac{\psi(2h)-\psi(h)}{\psi(h)}=\overline{\lim_{\tau\to 0}}\left(\frac{\psi(2h)}{\psi(h)}-1\right)=0.$$

Теорема 5.11. *Симметричное пространство G, построенное в лемме* 5.5, *не является интерполяционным между L_1 и L_∞.*

Доказательство. Неравенство (5.28) перепишем в виде

$$\int_0^\tau u^*(t)\,dt\leqslant\int_0^\tau[\psi'\chi_{(0,1]}]^*(t)\,dt,$$

Функция $\psi'\chi_{(0,1]}$ принадлежит G, а $u\notin G$. Таким образом, для пространства G не выполнено необходимое условие теоремы 4.3. Пространство G — не интерполяционное.

§ 6. Операторы ослабленного и слабого типа

1. Операция **. Для $x\in L_1+L_\infty$ введем обозначение

$$x^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds.$$

Очевидно, что $x^{**}(t)\geqslant x^*(t)$. Пользуясь свойством 7° перестановок (см. (2.13)), можно записать

$$x^{**}(t)=\frac{1}{t}\sup_{\operatorname{mes} e=t}\int_e|x(s)|\,ds.$$

Отсюда вытекает, что операция x^{**} удовлетворяет неравенству треугольника

$$[x_1+x_2]^{**}(t)\leqslant x_1^{**}(t)+x_2^{**}(t). \tag{6.1}$$

Заметим, что этим свойством операция x^* не обладает. Покажем, что операция x^{**} удовлетворяет неравенству треугольника и для бесконечного числа слагаемых.

Пусть ряд $\sum x_k^{**}(\tau)$ $(x_k \in L_1 + L_\infty)$ сходится. Тогда по теореме Леви для измеримого множества с $\operatorname{mes} e = \tau$ ряд $\sum x_k(s)$ почти всюду на e сходится и

$$\frac{1}{\tau}\int_e \left|\sum x_k(s)\right| ds \leqslant \frac{1}{\tau}\sum \int_e |x_k(s)|\, ds \leqslant \sum x_k^{**}(\tau).$$

Переходя слева к sup по всем e с $\operatorname{mes} e = \tau$, получаем

$$\left(\sum x_k\right)^{**}(\tau) \leqslant \sum x_k^{**}(\tau).$$

Последнее свойство позволяет с помощью операции ** по одним симметричным пространствам строить другие. Пусть $\delta(t)$ и $\varkappa(t)$ — две измеримые положительные функции на $(0, \infty)$. Для симметричного пространства E обозначим через $E_{\varkappa,\delta}$ пространство всех функций $x(t)$ из $L_1 + L_\infty$, для которых функции $\varkappa(t)x^{**}(\delta(t))$ принадлежат E. (Функция $x^{**}(\delta(t))$ измерима, так как x^{**} — монотонна, δ — измерима.) Относительно нормы

$$\|x\|_{E_{\varkappa,\delta}} = \|\varkappa(t)\, x^{**}(\delta(t))\|_E$$

это пространство будет банаховым. Чтобы это доказать, достаточно проверить, что для любой последовательности $x_k \in E_{\varkappa,\delta}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ с $\sum \|x_k\|_{E_{\varkappa,\delta}} < \infty$ ряд $\sum x_k$ сходится в $E_{\varkappa,\delta}$. По определению,

$$\sum \|x_k\|_{E_{\varkappa,\delta}} = \sum \|\varkappa(t)\, x_k^{**}(\delta(t))\|_E,$$

а так как пространство E полно, то $\sum \varkappa(t) x_k^{**}(\delta(t)) \in E$. Из неравенства треугольника тогда следует, что функция

$$\varkappa(t)\left(\sum x_k\right)^{**}(\delta(t)) \leqslant \varkappa(t) \sum x_k^{**}(\delta(t))$$

также принадлежит E. Это равносильно тому, что функция $\sum x_k(t) \in E_{\varkappa,\delta}$; при этом

$$\left\|\sum x_k\right\|_{E_{\varkappa,\delta}} \leqslant \sum \|x_k\|_{E_{\varkappa,\delta}}.$$

Отсюда обычными рассуждениями показывается, что $\sum x_k$ есть предел в $E_{\varkappa,\delta}$ частных сумм $\sum\limits_1^N x_k$.

Установим некоторые связи между операцией ** и операторами растяжения. Для характеристических функций

$$\chi^{**}_{(0,\theta]}(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0<t\leqslant\theta,\\ \theta/t & \text{при} \quad t>\theta\end{cases}$$

рассмотрим оператор усреднения

$$T_h x(t)=\frac{1}{h}\int_0^h x(s)\,ds\,\chi_{(0,h]}(t).$$

При $\tau>1$ вычисляем

$$\frac{1}{\tau\theta}\int_0^{\tau\theta}\chi^{**}_{(0,\theta]}(s)\,ds=\frac{1}{\tau\theta}\left[\int_0^{\theta}\chi^{**}_{(0,\theta]}(s)\,ds+\int_{\theta}^{\tau\theta}\chi^{**}_{(0,\theta]}(s)\,ds\right]=$$

$$=\frac{1}{\tau}(1+\ln\tau).$$

Отсюда

$$(T_{\tau\theta}\chi^{**}_{(0,\theta]})(t)=\frac{1}{\tau}(1+\ln\tau)\,\chi_{(0,\tau\theta]}(t)=\frac{1+\ln\tau}{\tau}\sigma_\tau\chi_{(0,\theta]}(t).$$

Оператор $T_{\tau\theta}$ действует с нормой единица в пространствах L_1 и L_∞, поэтому для него справедливо неравенство (3.16). Применив его, получим

$$\int_0^s\sigma_\tau\chi_{(0,\theta]}(t)\,dt\leqslant\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s\chi^{**}_{(0,\theta]}(t)\,dt\qquad(s>0).$$

Для конечнозначной функции вида

$$z(t)=\sum_{i=1}^{N}\Delta_i\chi_{(0,\theta_i]}(t),$$

где $\Delta_i>0$, $\theta_1>\theta_2>\ldots>0$, отсюда непосредственно следует, что

$$\int_0^s\sigma_\tau z(t)\,dt\leqslant\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s\sum_{i=1}^{N}\Delta_i\chi^{**}_{(0,\theta_i]}(t)\,dt=\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s z^{**}(t)\,dt.$$

Любую убывающую неотрицательную функцию $x(t)$

можно равномерно аппроксимировать возрастающей последовательностью счетнозначных функций вида

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\Delta_i\chi_{(0,\theta_i]}(t)+x(\infty),\text{ где }\Delta_i>0\text{ и }\theta_1>\theta_2>\ldots>0.$$

Из предыдущего неравенства вытекает, что

$$\int_0^s\sigma_\tau\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_i\chi_{(0,\theta_i]}(t)+x(\infty)\right]dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s\left[\sum_{i=1}^{N}\Delta_i\chi^{**}_{(0,\theta_i]}(t)+x(\infty)\right]dt\leqslant\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s x^{**}(t)\,dt.$$

Двойной переход к пределу приводит к неравенству, которое окончательно можно записать в виде

$$\int_0^s\sigma_\tau x^*(t)\,dt\leqslant\frac{\tau}{1+\ln\tau}\int_0^s x^{**}(t)\,dt\qquad(\tau\geqslant1,\quad s>0).\quad(6.1')$$

2. Операторы из пространства Лоренца в пространство Марцинкевича. Пусть $\psi(t)$ — квазивогнутая функция и $\psi_*(t)=t/\psi(t)$. Норму в пространстве Марцинкевича M_{ψ_*} можно записать с помощью операции ** в виде

$$\|y\|_{M_{\psi_*}}=\sup_{0<t<\infty}\frac{\psi(t)}{t}\int_0^t y^*(s)\,ds=\sup_{0<t<\infty}[\psi(t)\,y^{**}(t)].$$

Если теперь оператор A ограниченно действует из пространства Лоренца Λ_φ в пространство M_{ψ_*}, то это означает, что выполнено неравенство

$$\psi(t)(Ax)^{**}(t)\leqslant C\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi(s).\qquad(6.2)$$

Если $\varphi(t)$ — квазивогнутая функция, то мы будем рассматривать пространство $\Lambda_{\tilde\varphi}$, где $\tilde\varphi(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\varphi(t)$. В силу (1.7) условие ограниченности оператора из M_{ψ_*} в Λ_φ можно писать снова в виде (6.2).

Основная интерполяционная теорема, которой посвящен этот пункт, будет относиться к операторам, ограниченно действующим из банаховой пары $(\Lambda_{\tilde{\varphi}_0}, \Lambda_{\tilde{\varphi}_1})$ в банахову пару $(M_{\psi_0,*}, M_{\psi_1,*})$. Перед тем как формулировать эту теорему, введем один класс промежуточных пространств между пространствами Лоренца.

Пусть $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ — две квазивогнутые функции, для которых отношение $\varphi_0(t)[\varphi_1(t)]^{-1}$ убывает. В этом случае при $\tau>1$ выполняется неравенство

$$\varphi_0(\tau t)[\varphi_1(\tau t)]^{-1} \leqslant \varphi_0(t)[\varphi_1(t)]^{-1}$$

или

$$\varphi_0(\tau t)[\varphi_0(t)]^{-1} \leqslant \varphi_1(\tau t)[\varphi_1(t)]^{-1},$$

откуда следует, что $M_{\varphi_0}(\tau) \leqslant M_{\varphi_1}(\tau)$ при $\tau>1$. При $\tau<1$ справедливо обратное неравенство.

Рассмотрим симметричное пространство E, обладающее тем свойством, что для нормы оператора растяжения σ_t в нем выполняется неравенство

$$\int_0^1 \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, dM_{\varphi_1}(\tau) + \int_1^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, dM_{\varphi_0}(\tau) < \infty. \qquad (6.3)$$

В силу указанных выше неравенств это условие можно записать в виде

$$\int_0^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, d\min\{M_{\varphi_i}(\tau)\} < \infty, \qquad i=0,\ 1. \qquad (6.4)$$

Обозначим, как обычно, через γ_i и δ_i нижние и верхние показатели растяжения функции $\varphi_i(t)$, а через α_E и β_E нижние и верхние показатели растяжения пространства E. Тогда

$$\int_1^N \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, dM_{\varphi_0}(\tau) \geqslant \int_1^N \tau^{-\alpha_E}\, dM_{\varphi_0}(\tau) =$$

$$= \tau^{-\alpha_E} M_{\varphi_0}(\tau)\Big|_1^N + \alpha_E \int_1^N M_{\varphi_0}(\tau)\,\tau^{-\alpha_E-1}\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta_0}{\delta_0-\alpha_E}\,\tau^{\delta_0-\alpha_E}\Big|_1^N.$$

Из условия (6.3) следует, что $\alpha_E>\delta_0$. Аналогично из конечности первого слагаемого в (6.3) следует, что $\gamma_1>\beta_E$. Обратно, если $\alpha_E>\delta_0$ и $\gamma_1>\beta_E$, то $\|\sigma_{1/\tau}\|_E \leqslant C\tau^{-\alpha_E+\varepsilon}$ и $M_{\varphi_0}(\tau) \leqslant C\tau^{\delta_0+\varepsilon}$ при $\tau>1$, и $\|\sigma_{1/\tau}\|_E \leqslant C\tau^{-(\beta_E+\varepsilon)}$ и

$M_{\varphi_0}(\tau)\leqslant C\tau^{\gamma_1-\varepsilon}$ при $\tau<1$. Отсюда при достаточно малом ε следует сходимость интегралов в (6.3). Таким образом, условие (6.3) эквивалентно неравенствам

$$\gamma_1>\beta_E\geqslant\alpha_E>\delta_0. \tag{6.5}$$

Эти неравенства в свою очередь эквивалентны соотношениям

$$\|\sigma_t\|_E=o(t^{\delta_0}) \text{ при } t\to 0 \text{ и } \|\sigma_t\|_E=o(t^{\gamma_1}) \text{ при } t\to\infty. \tag{6.6}$$

Лемма 6.1. *Если выполнено одно из эквивалентных условий* (6.3)—(6.6), *то пространство E является промежуточным между пространствами Лоренца $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}$ и $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$.*

Доказательство. Функция $\|\sigma_{1/\tau}\|_E$ — убывающая, поэтому из неравенства (6.4) с помощью свойства 18° перестановок получается, что

$$\int_0^\infty\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min\{\widetilde{\varphi}_i(\tau)\}\leqslant 2\int_0^\infty\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min\{\varphi_i(\tau)\}\leqslant$$
$$\leqslant 2\max\{\varphi_i(1)\}\int_0^\infty\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min\{M\varphi_i(\tau)\}<\infty.$$

Из теоремы 5.6 тогда следует, что $E\subset\Lambda_{\min\{\widetilde{\varphi}_i\}}$. Отношение $\widetilde{\varphi}_0(t)[\widetilde{\varphi}_1(t)]^{-1}$ будет обобщено монотонным, и поэтому из замечания к теореме 5.9 следует, что пространство $\Lambda_{\min\{\widetilde{\varphi}_i\}}$ изоморфно пространству $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}+\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$. Таким образом, $E\subset\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}+\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$.

Для получения второго вложения заметим, что

$$\lambda=\int_0^\infty\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min\{M_{\varphi_i}(\tau)\}\geqslant$$
$$\geqslant\int_0^t\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min\{M_{\varphi_i}(\tau)\}\geqslant\|\sigma_{1/t}\|_E\min\{M_{\varphi_i}(t)\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\|\sigma_{1/t}\chi_{(0,1)}\|_E}{\|\chi_{(0,1)}\|_E}\min\left\{\frac{\varphi_i(1)}{\varphi_i(1/t)}\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{\varphi_E(1/t)}{\varphi_E(1)}\min\{\varphi_i(1)\}\min\left\{\frac{1}{\varphi_i(1/t)}\right\}.$$

Отсюда

$$\varphi_E(\tau)=\frac{\lambda\varphi_E(1)}{\min\{\varphi_i(1)\}}\max\varphi_i(\tau).$$

Аналогичное неравенство справедливо для $\widetilde{\varphi_E}(\tau)$ и $\widetilde{\varphi_i}(\tau)$. По теореме 5.5 $E\supset\Lambda_{\widetilde{\varphi}_E}\supset\Lambda_{c(\max\{\varphi_i\})^\sim}$, а по теореме 5.10 пространство $\Lambda_{c(\max\{\varphi_i\})^\sim}$ изоморфно пространству $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}\cap\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$. Таким образом, $E\supset\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}\cap\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$.

Теорема 6.1 (основная интерполяционная). *Пусть заданы четыре квазивогнутые функции* $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ *такие, что*

1) *функция* $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$ *убывает,*

2) *область значений функции* $\psi_0(s)[\psi_1(s)]^{-1}$ *при* $0<s<\infty$ *содержит в себе область значений функции* $\varphi_0(s)[\varphi_1(s)]^{-1}$ $(0<s<\infty)$.

Если линейный оператор A *ограниченно действует из пары* $(\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}, \Lambda_{\widetilde{\varphi}_1})$ *в пару* $(M_{\psi_0*}, M_{\psi_1*})$, *то он ограниченно действует из всякого пространства* E, *удовлетворяющего условиям* (6.3)—(6.6), *в пространство* $E_{\varkappa,\delta}$, *где* $\delta(t)$ — *некоторое измеримое положительное решение уравнения*

$$\psi_0(\delta(t))[\psi_1(\delta(t))]^{-1}=\varphi_0(t)[\varphi_1(t)]^{-1}, \tag{6.7}$$

а

$$\varkappa(t)=\psi_0(\delta(t))[\varphi_0(t)]^{-1}=\psi_1(\delta(t))[\varphi_1(t)]^{-1}. \tag{6.8}$$

Доказательство. В силу леммы 6.1 пространство E вложено в пространство $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}+\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$, и поэтому на нем оператор A однозначно определен. Пусть $x\in E\subset\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0+\widetilde{\varphi}_1}$. При фиксированном t положим $x_0(s)=\operatorname{sign}x(s)\min\{x^*(t), |x(s)|\}$ и $x_1(s)=x(s)-x_0(s)$. Тогда $x_0^*(s)=x^*(t)$ при $s\leqslant t$ и $x_1^*(s)=0$ при $s>t$. Кроме того, $x^*(s)=x_0^*(s)+x_1^*(s)$ и, следовательно, функции $x_0^*(s)$ и $x_1^*(s)$ принадлежат $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0+\widetilde{\varphi}_2}$. Из следствия теоремы 5.9 тогда получаем, что $x_0^*\in\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}$ и $x_1^*\in\Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}$.

В силу неравенства (6.1)

$$(Ax)^{**}(\delta(t))\leqslant(Ax_0)^{**}(\delta(t))+(Ax_1)^{**}(\delta(t)). \tag{6.9}$$

Согласно (6.2) из условий на оператор A следует, что

$$\psi_0(\delta(t))(Ax_0)^{**}(\delta(t))\leqslant C_0\int_0^\infty x_0^*(s)\,d\varphi_0(s)=$$

$$=C_0\left[\int_0^t x^*(t)\,d\varphi_0(s)+\int_t^\infty x_0^*(s)\,d\varphi_0(s)\right].$$

Для первого интеграла справа в силу равенства (6.7) имеем

$$C_0 x^*(t)\int_0^t d\varphi_0(s) = C_0 x^*(t)\varphi_0(t) =$$

$$= C_0 x^*(t)\frac{\varphi_1(t)\,\psi_0(\delta(t))}{\psi_1(\delta(t))} = C_0\frac{\psi_0(\delta(t))}{\psi_1(\delta(t))}\int_0^t x_0^*(s)\,d\varphi_1(s).$$

Далее,

$$\psi_1(\delta(t))(Ax_1)^{**}(\delta(t)) \leqslant C_1\int_0^\infty x_1^*(s)\,d\varphi_1(s) = C_1\int_0^t x_1^*(s)\,d\varphi_1(s).$$

Из приведенных неравенств получается, что

$$(Ax)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\left[\int_0^t x^*(s)\,d\frac{\varphi_1(s)}{\psi_1(\delta(t))} + \int_t^\infty x^*(s)\,d\frac{\varphi_0(s)}{\psi_0(\delta(t))}\right],$$

где $C=\max\{C_0, C_1\}$, и в силу (6.8)

$$\varkappa(t)(Ax)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\left[\int_0^t x^*(s)\,d\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_1(t)} + \int_t^\infty x^*(s)\,d\frac{\varphi_0(s)}{\varphi_0(t)}\right].$$

В силу условия 1) тогда

$$\varkappa(t)(Ax)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\int_0^\infty x^*(\tau t)\,d\min\frac{\varphi_i(\tau t)}{\varphi_i(t)}$$

и по свойству 18 перестановок

$$\varkappa(t)(Ax)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\int_0^\infty x^*(\tau t)\,d\min M_{\varphi_i}(\tau). \tag{6.10}$$

Из леммы 4.7 вытекает, что

$$\|\varkappa(t)(Ax)^{**}(\delta(t))\|_E \leqslant C\int_0^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_E\,d\min M_{\varphi_i}(\tau)\|x\|_E.$$

Теорема доказана.

Если $\varphi(\infty)=\infty$ ($\varphi(\infty)<\infty$), то конечнозначные (обобщенно конечнозначные) функции плотны в пространстве Λ_φ, поэтому, если линейный оператор A определен на конечнозначных функциях (соответственно на обобщенно конечнозначных функциях) и удовлетворяет условию (6.2), то он допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора из Λ_φ в M_{φ_*}. Более того, в силу леммы 5.2 условие (6.2) достаточно проверять только на характеристических функциях из Λ_φ.

3. Операторы сильного, ослабленного и слабого типов $\{E, F\}$. Пусть E и F — два симметричных пространства. Линейные операторы, ограниченно действующие из пространства E в пространство F, часто называют операторами *сильного типа* $\{E, F\}$.

Определение 6.1. Линейный оператор A, определенный на всех конечнозначных функциях, если $\varphi_E(\infty)=\infty$, и на всех обобщенно конечнозначных функциях, если $\varphi_E(\infty)<\infty$, называется *оператором ослабленного типа* $\{E, F\}$, если он является ограниченным, как оператор из $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_E}$ в $M_{(\varphi_F)_*}$.

В п. 5 § 5 было показано, что для симметричного пространства E справедливы вложения

$$\Lambda_{\widetilde{\varphi}_E}\subset E\subset M_{(\varphi_E)_*},$$

откуда следует, что оператор сильного типа $\{E, F\}$ является оператором ослабленного типа $\{E, F\}$.

Если оператор принадлежит полугруппе Σ (см. п. 4, § 4), то, как отмечалось на стр. 148 и стр. 155, он ограниченно действует во всех пространствах Лоренца и Марцинкевича. Следовательно, если оператор A имеет ослабленный тип $\{E, F\}$, то такими же будут операторы λAT и λTA при любых $T\in\Sigma$ и $\lambda\in R^1$.

Определение 6.2. Линейный оператор A, определенный на всех конечнозначных (обобщенно конечнозначных) функциях, если $\varphi_E(\infty)=\infty$ $(\varphi_E(\infty)<\infty)$, называется *оператором слабого типа* $\{E, F\}$, если выполнено неравенство

$$(Ax)^*(t)\,\varphi_F(t)\leqslant C\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi_E(s). \tag{6.11}$$

В силу неравенства $(Ax)^{**}\geqslant(Ax)^*$ всякий оператор ослабленного типа является оператором слабого типа, следовательно, всякий оператор сильного типа является оператором слабого типа.

Лемма 6.2. *Если $M_{\varphi_F}(s_0) < s_0$ при некотором $s_0 > 1$, то оператор слабого типа $\{E, F\}$ является оператором ослабленного типа.*

Доказательство. Из условия $M_{\varphi_F}(s_0) < s_0$ следует, что для функции $\varphi_{F^*}(t) = t/\varphi_F(t)$ выполнено условие $M_{\varphi_{F^*}}(s_0^{-1}) < 1$, поэтому в силу следствия 2 леммы 1.4

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dt}{\varphi_F(t)} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\varphi_{F^*}(t)}{t}\,dt \leqslant \frac{C}{\tau}\varphi_{F^*}(\tau) = \frac{C}{\varphi_F(\tau)}.$$

Из неравенства (6.11) тогда получаем

$$(Ax)^{**}(\tau) \leqslant C\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dt}{\varphi_F(t)}\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi_E(s) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varphi_F(\tau)}\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi_E(s). \quad (6.12)$$

Лемма доказана.

В качестве примера оператора слабого типа, не являющегося оператором ослабленного типа, можно привести оператор Харди — Литтльвуда:

$$Hx(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds, \quad (6.13)$$

рассматриваемый как оператор из L_1 в L_1.

В силу неравенства (2.12)

$$|Hx(t)| = \left|\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds\right| \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds.$$

Последняя функция убывает, поэтому

$$(Hx)^*(t)\,\varphi_{L_1}(t) = t\,(Hx)^*(t) \leqslant \left(\frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds\right)^* t \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,ds,$$

т. е. H является оператором слабого типа. Пусть теперь

$x(t)=\chi_{[0,h]}(t)$. Считая $t>h$, вычисляем

$$(Hx)^{**}(t)t=\int_0^t\left[\frac{1}{s}\int_0^s\chi_{[0,h]}(\tau)\,d\tau\right]^* ds=$$
$$=\int_0^t \min\left\{1,\ \frac{h}{s}\right\}ds=h+h\ln\frac{t}{h}.$$

Отсюда вытекает, что неравенство

$$(H(\chi_{[0,h)}))^{**}(t)\,t=h+h\ln\frac{t}{h}\leqslant C\int_0^\infty \chi_{[0,h)}(s)\,ds=Ch$$

невозможно.

4. Интерполяционные теоремы. Из теоремы 6.1 и того, что сказано после нее, следует

Теорема 6.1′. *Пусть оператор A является оператором ослабленных типов $\{E_0, F_0\}$ и $\{E_1, F_1\}$ одновременно и выполнены условия:*

1) *функция $\varphi_{E_0}(s)[\varphi_{E_1}(s)]^{-1}$ убывает,*

2) *область значений функции $\varphi_{F_0}(s)[\varphi_{F_1}(s)]^{-1}$ при $0<s<\infty$ содержит в себе область значений функции $\varphi_{E_0}(s)[\varphi_{E_1}(s)]^{-1}$ $(0<s<\infty)$.*

Если для симметричного пространства E

$$\int_0^1\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,dM_{\varphi_{E_1}}(\tau)+\int_1^\infty\|\sigma_{1/\tau}\|_E\,dM_{\varphi_{E_0}}(\tau)<\infty, \qquad (6.14)$$

то оператор A допускает замыкание до оператора, ограниченно действующего из пространства E в пространство $E_{\varkappa,\delta}$, где $\delta(t)$ — некоторое измеримое положительное решение уравнения

$$\varphi_{F_0}(\delta(t))\,[\varphi_{F_1}(\delta(t))]^{-1}=\varphi_{E_0}(t)\,[\varphi_{E_1}(t)]^{-1}, \qquad (6.15)$$

а

$$\varkappa(t)=\varphi_{F_0}(\delta(t))\,[\varphi_{E_0}(t)]^{-1}=\varphi_{F_1}(\delta(t))\,[\varphi_{E_1}(t)]^{-1}. \qquad (6.16)$$

Следствие 1. *Если γ_i, δ_i — нижние и верхние показатели растяжения функций φ_{E_i}, то в условиях теоремы 6.1′ оператор A ограниченно действует из всякого* *симметричного пространства E, для которого*

$$\|\sigma_t\|_E = o(t^{\delta_0}) \quad \textit{при} \quad t \to 0 \quad \textit{и} \quad \|\sigma_t\|_E = o(t^{\gamma_1}) \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \tag{6.17}$$

в пространство $E_{\varkappa,\delta}$.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 6.1′ $E_0 = F_0$ *и* $E_1 = F_1$, *то оператор A ограниченно действует из пространства E, для которого выполнено* (6.14) *или* (6.17), *в пространство* $E_{1,t}$, *т. е. в пространство с нормой* $\|x\|_{E_{1,t}} = \|x^{**}\|_E$.

Замечание. Если в условиях теоремы 6.1′ пространство E_0 совпадает с L_∞, то условие 1) автоматически выполнено, а условие (6.14) принимает вид

$$\int_0^1 \|\sigma_{1/\tau}\|_E \, dM_{\varphi_1}(\tau) < \infty \quad \text{или} \quad \|\sigma_t\| = o(t^{\gamma_1}) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{6.18}$$

Действительно, в этом случае $\varphi_{E_0}(t) = \operatorname{sign} t$ $(\operatorname{sign} 0 = 0)$.

Рассмотрим теперь оператор A, являющийся оператором слабых типов $\{E_0, F_0\}$ и $\{E_1, F_1\}$ одновременно, и предположим, что $M_{\varphi_{F_1}}(s_0) < s_0$ для некоторого $s_0 > 1$. Тогда A имеет ослабленный тип $\{E_1, F_1\}$. Для оператора A выполнены неравенства

$$(A\chi_e)^*(t)\,\varphi_{F_i}(t) \leqslant C_i \varphi_{E_i}(\operatorname{mes} e),$$

из которых следует, что при любом $\theta \in [0, 1]$

$$(A\chi_e)^*(t)\,\varphi_{F_0}^{1-\theta}(t)\,\varphi_{F_1}^{\theta}(t) \leqslant C_0^{1-\theta} C_1^{\theta} \varphi_{E_0}^{1-\theta}(\operatorname{mes} e)\,\varphi_{E_1}^{\theta}(\operatorname{mes} e). \tag{6.19}$$

Обозначим $\varphi_{E,\theta}(t) = \varphi_{E_0}^{1-\theta}(t)\,\varphi_{E_1}^{\theta}(t)$ и $\varphi_{F,\theta}(t) = \varphi_{F_0}^{1-\theta}(t)\,\varphi_{F_1}^{\theta}(t)$. Для функции $\varphi_{F,\theta}(t)$ при $\theta \in (0, 1]$ имеем

$$M_{\varphi_{F,\theta}}(s_0) \leqslant [M_{\varphi_{F_0}}(s_0)]^{1-\theta}\,[M_{\varphi_{F_1}}(s_0)]^{\theta} < s_0^{1-\theta} s_0^{\theta} = s_0.$$

Повторяя вычисление (6.12), мы из (6.19) получим, что

$$(A\chi_e)^{**}(t)\,\varphi_{F,\theta}(t) \leqslant C_\theta \varphi_{E,\theta}(\operatorname{mes} e) \leqslant C_\theta \tilde{\varphi}_{E,\theta}(\operatorname{mes} e). \tag{6.20}$$

Как отмечалось на стр. 177, из этого неравенства следует, что оператор A по линейности и непрерывности продолжается до ограниченного оператора из пространства $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_{E,\theta}}$ в пространство $M_{\varphi_{F,\theta}}$, т. е. до оператора ослабленного типа $(\Lambda_{\widetilde{\varphi}_{E,\theta}}, M_{\varphi_{F,\theta}})$. К нему теперь можно применить основную интерполяционную теорему 6.1.

Покажем предварительно, что каждое пространство E, удовлетворяющее условию (6.14), будет удовлетворять аналогичному условию относительно функций $\varphi_{E,\theta}(t)$ и $\varphi_1(t)$ при достаточно малом θ. Если обозначить через γ_θ и δ_θ нижний и верхний показатели растяжения функции $\varphi_{E,\theta}(t)$, то в силу неравенства (1.29) $\delta_\theta \leqslant \delta_0(1-\theta)+\delta_1\theta$. По условию (6.14) $\gamma_1 > \beta \geqslant \alpha > \delta_0$, поэтому при достаточно малом θ будет выполняться неравенство $\gamma_1 > \beta \geqslant \alpha > \delta_\theta$.

Аналогичные рассуждения можно провести в случае, когда $M_{\varphi_{F_0}}(s_0) < s_0$ при некотором $s_0 > 1$.

Мы пришли к следующему утверждению:

Теорема 6.2. *Если к условиям теоремы* 6.1′ *добавить условие*

$$M_{\varphi_{F_1}}(s_0) < s_0 \quad \text{или} \quad M_{\varphi_{F_0}}(s_0) < s_0 \tag{6.21}$$

при некотором $s_0 > 1$, *то всякий оператор слабых типов* $\{E_0, F_0\}$ *и* $\{E_1, F_1\}$ *одновременно допускает замыкание до оператора, ограниченно действующего из пространства* E, *удовлетворяющего условию* (6.14), *в пространство* $E_{\varkappa,\delta}$.

Замечание. В определениях операторов ослабленного и слабого типов фигурируют фундаментальные функции пространств. Можно было бы дать аналогичные определения, заменив фундаментальные функции на нормы операторов растяжения. Для таких операторов останутся справедливыми теоремы 6.1′ и 6.2, если в их формулировках заменить функции $\varphi_{E_i}(t)$ и $\varphi_{F_i}(t)$ на функции $\|\sigma_t\|_{E_i}$ и $\|\sigma_t\|_{F_i}$ соответственно. При этом следует заметить, что в силу полумультипликативности нормы оператора σ_t функции $M_{\varphi_{E_i}}(\tau)$ заменятся на функции $\|\sigma_\tau\|_{E_i}$.

5. Оптимальные интерполяционные тройки. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — две квазивогнутые функции; введем оператор

$$Sx(t) = \frac{1}{\psi(t)} \int_0^\infty x(s)\, d\widetilde{\varphi}(s).$$

В силу вогнутости функции $\widetilde{\varphi}(t)$ и свойств перестановок имеем:

$$(Sx)^*(t) = \frac{1}{\psi(t)}\left|\int_0^\infty x(s)\,d\widetilde{\varphi}(s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\psi(t)}\int_0^\infty x^*(s)\,d\widetilde{\varphi}(s) \leqslant \frac{2}{\psi(t)}\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi(s)$$

Таким образом, для оператора S выполнено неравенство вида (6.11). Если $M_\varphi(s_0) < s_0$ при некотором $s_0 > 1$ то, согласно лемме 6.2, для него будет выполняться и неравенство (6.2).

Пусть теперь даны две пары квазивогнутых функций $\varphi_0(t)$, $\psi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$. Рассмотрим оператор

$$S_{01}x(t) = \int_0^\infty x(s)\,d\min_i\{\widetilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\}. \tag{6.22}$$

По свойству 13° перестановок

$$|S_{01}x(t)| \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,d\min_i\{\widetilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\}.$$

В силу 18° справа стоит монотонная функция, поэтому

$$(S_{01}x)^*(t) \leqslant \int_0^\infty x^*(s)\,d\min_i\{\widetilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \min_i\left\{\int_0^\infty x^*(s)\,d\widetilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\min_i\left\{\frac{1}{\psi_i(t)}\int_0^\infty x^*(s)\,d\varphi_i(s)\right\}. \tag{6.23}$$

Таким образом, оператор S_{01} удовлетворяет неравенству типа (6.11) как относительно пары φ_0, ψ_0, так и относительно пары φ_1, ψ_1.

Лемма 6.3. *Пусть функции* $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i=0, 1)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 6.1 *и, кроме того*:

а) $M_{\varphi_i}(s_0)<s_0$ $(i=0, 1)$ *при некотором* $s_0>1$ *и*

б) $M_{\varphi_i}(s_1^{-1})<1$ *при некотором* $s_1>1$. *Если для любого оператора* A, *удовлетворяющего условиям теоремы* 6.1, *функция* $\varkappa(t)\,(Ax)^{**}(\delta(t))$ *принадлежит пространству* E, *то и* $x\in E$.

Доказательство. Согласно теореме 3.4 существует оператор $T\in\Sigma$ такой, что $Tx=x^*$. В силу (6.23) и условия а) оператор S_{01} ограниченно действует из пространства $\Lambda_{\widetilde{\varphi}_i}$ в пространство M_{ψ_i} $(i=0, 1)$, поэтому таким же свойством обладает оператор $S_{01}T$. По условию леммы тогда функция $\varkappa(t)\,(S_{01}Tx)^{**}(\delta(t))$ принадлежит E и, тем более, $\varkappa(t)\,(S_{01}Tx)^{*}(\delta(t))\in E$. Как отмечалось выше, функция $S_{01}Tx=S_{01}x^*$ убывает и, следовательно, $(S_{01}Tx)^*=S_{01}x^*$. Согласно (6.22)

$$\varkappa(t)(S_{01}x^*)(\delta(t))=$$
$$=\varkappa(t)\int_0^\infty x^*(s)\,d\min\{\widetilde{\varphi}_i(s)\,[\psi_i(\delta(t))]^{-1}\}\geqslant$$
$$\geqslant\varkappa(t)\int_0^\infty x^*(s)\,d\min\{\varphi_i(s)\,[\psi_i(\delta(t))]^{-1}\}.$$

Из уравнений (6.8) тогда следует, что

$$\varkappa(t)(S_{01}x^*)(\delta(t))\geqslant\int_0^\infty x^*(s)\,d\min\{\varphi_i(s)\,[\varphi_i(t)]^{-1}\}\geqslant$$
$$\geqslant\int_{t/s_1}^{t} x^*(s)\,d\min\{\varphi_i(s)\,[\varphi_i(t)]^{-1}\}\geqslant$$
$$\geqslant[1-\min\{\varphi_i(t/s_1)\,[\varphi_i(t)]^{-1}\}]\,x^*(t)\geqslant$$
$$\geqslant[1-\min\{M_{\varphi_i}(s_1^{-1})\}]\,x^*(t).$$

В силу условия 1) теоремы 6.1 $M_{\varphi_0}(s_1^{-1})\geqslant M_{\varphi_1}(s_1^{-1})$ и, следовательно,

$$x^*(t)\leqslant[1-M_{\varphi_1}(s_1^{-1})]^{-1}\varkappa(t)(S_{01}x^*)(\delta(t))\in E.$$

Лемма 6.4. *Пусть функции* $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i=0, 1)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 6.1 *и условию* а) *леммы* 6.3. *Предположим, что функция* $\delta(t)$, *найденная* *из* (6.7), *непрерывна и строго возрастает, и обозначим* $\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(\tau))=\nu_i(\tau)$. *Если* $M_{\nu_i}(\tau^{-1})<1$ *при* $\tau>1$, *то для всякой функции* $y\in E_{\varkappa,\delta}$ *найдутся такой оператор* A, *ограниченно действующий из пары* $\{\Lambda_{\tilde{\varphi}_0}, \Lambda_{\tilde{\varphi}_1}\}$ *в пару* $\{M_{\psi_{0*}}, M_{\psi_{1*}}\}$, *и такая функция* $x\in E$, *что* $Ax=y$.

Доказательство. Обозначим $x(t)=\varkappa(t)y^{**}(\delta(t))$ и применим к этой функции оператор S_{01}. Тогда

$$S_{01}x(t)=\int_0^\infty \varkappa(s)\,y^{**}(\delta(s))\,d\min\{\tilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\}.$$

Пользуясь равенствами (6.8) при $j=0, 1$, получаем для $\tau_0>1$:

$$S_{01}x(t)\geqslant$$
$$\geqslant\int_{\delta^{-1}(t)}^{\delta^{-1}(\tau_0 t)} \psi_j(\delta(s))[\varphi_j(s)]^{-1}y^{**}(\delta(s))\,d\min\{\tilde{\varphi}_i(s)[\psi_i(t)]^{-1}\}\geqslant$$
$$\geqslant\psi_j(t)[\tilde{\varphi}_j(\delta^{-1}(\tau_0 t))]^{-1}y^{**}(\tau_0 t)[\min\{\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(\tau_0 t))[\psi_i(t)]^{-1}\}-$$
$$-\min\{\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(t))[\psi_i(t)]^{-1}\}].$$

В силу непрерывности функций $\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(t))$, можно выбрать так индекс j и число $\tau_0>1$, что

$$\min\{\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(t))[\psi_i(t)]^{-1}\}\quad \text{и}\quad \min\{\tilde{\varphi}_i(\delta^{-1}(\tau_0 t))[\psi_i(t)]^{-1}\}$$

достигаются при этом индексе j. Тогда

$$S_{01}x(t)\geqslant y^{**}(\tau_0 t)\{1-\tilde{\varphi}_j(\delta^{-1}(t))[\tilde{\varphi}_j(\delta^{-1}(\tau_0 t))]^{-1}\}.$$

Так как

$$y^{**}(\tau_0 t)=\frac{1}{\tau_0 t}\int_0^{\tau_0 t} y^*(s)\,ds\geqslant\frac{1}{\tau_0 t}\int_0^t y^*(s)\,ds=\frac{1}{\tau_0}y^{**}(t)$$

и

$$\nu_j(t)[\nu_j(\tau_0 t)]^{-1}\leqslant M_{\nu_j}(\tau_0^{-1})<1,$$

то

$$\tau_0[1-M_{\nu_j}(\tau_0)]^{-1}S_{01}x(t)\geqslant y^{**}(t)\geqslant y^*(t).$$

В силу леммы 3.4 существует оператор $T\in\Sigma$ такой, что $y=\tau_0[1-M_{\nu_j}(\tau_0)]^{-1}TS_{01}x$. В силу условия а) леммы

6.3, **оператор** $\tau_0[1-M_{\nu_j}(\tau_0)]^{-1}TS_{01}$ будет ограниченно действовать из пары $\{\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}, \Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}\}$ в пару $\{M_{\psi_0 *}, M_{\psi_1 *}\}$.

Замечание. Если в условиях леммы 6.4 функция $\delta(t)$ строго убывает, то утверждение леммы остается в силе, если $M_{\nu_i}(\tau)<1$ при $\tau>1$. Доказательство аналогично.

Леммы 6.3 и 6.4 приводят к утверждению.

Теорема 6.3. *Пусть функции* $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ $(i=0, 1)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 6.1 *и условиям*: 1) $M_{\psi_i}(s_0)<s_0$ $(i=0, 1)$ *при некотором* $s_0>1$; 2) $M_{\varphi_i}(s_1^{-1})<1$ *при некотором* $s_1>1$; 3) *функция* $\delta(t)$, *найденная из* (6.7), *непрерывна и строго возрастает* (*убывает*) *и* $M_{\nu_i}(\tau^{-1})<1$ $(M_{\nu_i}(\tau)<1)$ *при* $i=0, 1$ *и* $\tau>1$, *где* $\nu_i(t)=\varphi_i(\delta^{-1}(t))$.

Тогда тройка $\{\Lambda_{\widetilde{\varphi}_0}, \Lambda_{\widetilde{\varphi}_1}, E\}$ *является оптимальной интерполяционной по отношению к тройке* $\{M_{\psi_0 *}, M_{\psi_1 *}, K_{\mu, \lambda}\}$ *при любом пространстве* E, *удовлетворяющем условиям* (6.3)—(6.6).

6. Операторы ослабленных типов $\{L_\infty, L_\infty\}$ **и** $\{L_1, L_1\}$. Фундаментальная функция пространства L_1 равна t, а пространства L_∞ — $\operatorname{sign} t$, поэтому каждый оператор ослабленного типа (L_∞, L_∞) и ослабленного типа (L_1, L_1) одновременно является определенным на всех обобщенно конечнозначных функциях линейным оператором, для которого выполнены условия:

$$(Ax)^{**}(t)\leqslant C_0x^*(0)=C_0\|x\|_{L_\infty},$$

$$t(Ax)^{**}(t)\leqslant C_1\int_0^\infty x^*(t)\,dt=C_1\|x\|_{L_1}.$$

Из первого условия вытекает, что $(Ax)^*(t)\leqslant C_0\|x\|_{L_\infty}$ (слабый тип), откуда в свою очередь получается, что $\|Ax\|_{L_\infty}=(Ax)^*(+0)\leqslant C_0\|x\|_{L_\infty}$, т. е. оператор A является оператором сильного типа $\{L_\infty, L_\infty\}$. Второе условие дает неравенство $\int_0^t (Ax)^*(t)\,dt\leqslant C_1\|x\|_{L_1}$, откуда следует, что $\|Ax\|_{L_1}\leqslant C_1\|x\|_{L_1}$. Таким образом, операторы ослабленного типа $\{L_\infty, L_\infty\}$, $\{L_1, L_1\}$ совпадают с операторами сильного типа $\{L_\infty, L_\infty\}$, $\{L_1, L_1\}$.

Следствие 2 и замечание к теореме 6.1′ приводят к утверждению.

Теорема 6.4. *Если линейный оператор A ограниченно действует в пространствах L_∞ и L_1, то он ограниченно действует из любого симметричного пространства E, обладающего тем свойством, что*

$$\|\sigma_t\|_E = o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{6.24}$$

в пространство $E_{1,t}$, т. е.

$$\|(Ax)^{**}\|_E \leqslant C\|x\|_E. \tag{6.25}$$

Утверждение теоремы 6.4 сильнее, чем утверждение интерполяционной теоремы 4.3, в связи с чем на пространство E наложено условие (6.24). Оказывается, что для справедливости этого утверждения условие (6.24) необходимо.

Теорема 6.5. *Для ограниченности единичного оператора, как оператора из симметричного пространства E в пространство $E_{1,t}$, необходимо условие* (6.24).

Доказательство. Если единичный оператор действует и ограничен из E в $E_{1,t}$, то для любой функции $x \in E$ выполняются неравенства

$$\|x\|_E \leqslant \left\| \frac{1}{s}\int_0^s x^*(t)\,dt \right\|_E \leqslant C\|x\|_E. \tag{6.26}$$

Воспользуемся неравенством (6.1′). Тогда

$$\|\sigma_\tau x\|_E \leqslant \left\| \frac{1}{s}\int_0^s \sigma_\tau x^*(t)\,dt \right\|_E \leqslant \frac{\tau}{1+\ln\tau}\left\| \frac{1}{s}\int_0^s x^{**}(t)\,dt \right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\tau}{1+\ln\tau}\|x^{**}\|_E \leqslant \frac{C^2\tau}{1+\ln\tau}\|x\|_E. \tag{6.27}$$

Отсюда $\|\sigma_\tau\|_E = o(\tau)$ при $\tau \to \infty$.

Замечание. Если условие (6.24) выполнено для пространства E, то оно выполнено и во всяком его симметричном подпространстве, поэтому всякое подпространство симметричного пространства E с условием (6.24) является интерполяционным между L_1 и L_∞. В § 5 п. 7 было показано, что в пространствах M_ψ с условием $\lim\limits_{t\to 0} \psi(2t)/\psi(t)=1$ существуют неинтерполяционные подпространства. Если теперь $\inf \psi(2t)/\psi(t)>1$, то в силу формулы (4.21) $\|\sigma_2\|_{M_\psi}<2$, откуда вытекает условие (6.24), и для таких пространств M_ψ все подпространства являются интерполяционными.

7. Операторы Харди — Литтльвуда и Гильберта. Оператором Харди — Литтльвуда называется линейный оператор

$$Hx(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t x(s)\,ds. \tag{6.28}$$

Он совпадает с оператором S_{01}, построенным по фундаментальным функциям пары пространств (L_∞, L_∞) и (L_1, L_1), и является оператором сильного типа $\{L_\infty, L_\infty\}$ и слабого типа $\{L_1, L_1\}$. Пространство L_1 не удовлетворяет условию леммы 6.2, и, как показано на стр. 170, оператор H не является оператором ослабленного типа $\{L_1, L_1\}$. Однако если симметричное пространство удовлетворяет условию (6.24), то оператор H действует в нем. Действительно, в силу леммы 4.7

$$\|Hx\|_E=\left\|\int\limits_0^1 x(ts)\,ds\right\|_E\leqslant\int\limits_0^1\|\sigma_{1/s}\|_E\,ds\,\|x\|_E, \tag{6.29}$$

и интеграл справа конечен при условии (6.24). Этот факт вместе с теоремой 6.5 приводит нас к следующему важному утверждению:

Теорема 6.6. *Для того чтобы оператор Харди — Литтльвуда* (6.28) *ограниченно действовал в симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (6.24).

Из неравенства (6.29) следует, что

$$\|x\|_E\leqslant\|x^{**}\|_E=\|Hx^*\|_E\leqslant\int\limits_0^1\|\sigma_{1/s}\|\,ds\,\|x\|_E. \tag{6.30}$$

Введем теперь сопряженный к H оператор H_1:

$$H_1y(t)=\int\limits_t^\infty\frac{y(\tau)}{\tau}\,d\tau.$$

Для неотрицательных функций $x(t)$ и $y(t)$ по теореме Фубини

$$\int_0^\infty Hx(\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(s)\,ds\,y(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty x(s)\int_s^\infty \frac{y(\tau)}{\tau}\,d\tau\,ds = \int_0^\infty x(s)\,H_1 y(s)\,ds. \quad (6.31)$$

Предположим теперь, что оператор H действует из пространства E в пространство E^{11}. Тогда при $x\in E$ и $y\in E^1$ получим

$$\int_0^\infty x(s)\,H_1 y(s)\,ds \leqslant \|Hx\|_{E^{11}}\|y\|_{E^1} \leqslant \|H\|_{E\to E^{11}}\|x\|_E\|y\|_{E^1}.$$

Откуда $\|H_1 y\|_{E^1} \leqslant \|H\|_{E\to E^{11}}\|y\|_{E^1}$. В силу положительности операторов H и H_1 их ограниченность достаточно проверять на неотрицательных функциях, поэтому из последнего неравенства следует, что оператор H_1 действует в E^1 и $\|H_1\|_{E^1\to E^1} \leqslant \|H\|_{E\to E^{11}}$.

Обратно, если оператор H_1 действует в E^1, то из (6.31) следует, что

$$\int_0^\infty Hx(t)\,y(t)\,dt \leqslant \|H_1\|_{E^1\to E^1}\|x\|_E\|y\|_{E^1},$$

откуда $\|Hx\|_{E^{11}} \leqslant \|H_1\|_{E^1\to E^1}\|x\|_E$, т. е. оператор H действует из E в E^{11} и $\|H\|_{E\to E^{11}} \leqslant \|H_1\|_{E^1\to E^1}$.

Таким образом, оператор H действует из E в E^{11} тогда и только тогда, когда оператор H_1 действует в E^1, причем $\|H\|_{E\to E^{11}} = \|H_1\|_{E^1\to E^1}$. (Заметим, что при доказательстве этого положения мы не пользовались спецификой операторов H и H_1, и оно справедливо для двух произвольных положительных сопряженных интегральных операторов.)

Меняя ролями операторы H и H_1, учитывая, что $E^1 = E^{111}$, мы можем прийти к выводу, что оператор H тогда и только тогда действует в E^1, когда H действует в E^{11}. Таким образом, оператор H действует из E в E^{11} в том и только том случае, когда он действует в E^{11}.

Теорема 6.7. *Если оператор Харди-Литтльвуда ограниченно действует из пространства E в пространство E^{11}, то*

$$\|\sigma_t\|_{E\to E^{11}} = o(t) \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{6.32}$$

Доказательство. Как показано выше, оператор H действует в E^{11}, поэтому из (6.1′), так же как (6.27), получается неравенство

$$\|\sigma_\tau x\|_{E^{11}} \leqslant \frac{C^2\tau}{1+\ln\tau}\|x\|_E.$$

Следствие. Если E изометрически вложено в E^{11}, то из того, что оператор H ограниченно действует из E в E^{11}, следует выполнение условия (6.24).

Из рассуждений, основанных на тождестве (6.31), следует, что оператор H_1 действует из E в E^{11} тогда и только тогда, когда оператор H действует в E^1, а для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\|\sigma_t\|_{E^1} = o(t) \quad \text{при} \quad t\to\infty. \tag{6.33}$$

В силу (4.35) условие (6.33) эквивалентно условию

$$\|\sigma_\tau\|_{E\to E^{11}} = o(1) \quad \text{при} \quad \tau\to 0. \tag{6.34}$$

Мы доказали вторую часть следующего утверждения:

Теорема 6.8. *Для того чтобы сопряженный оператор H_1 ограниченно действовал в симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|\sigma_\tau\|_E = o(1) \quad \text{при} \quad \tau\to 0. \tag{6.35}$$

Для того чтобы он действовал из E в E^{11}, необходимо и достаточно выполнения условия (6.34), *а если E изометрически вложено в E^{11}, то условия* (6.35).

Доказательство 1-й части. По лемме 4.7

$$\|H_1 y\|_E = \left\|\int_\tau^\infty y(s)\frac{ds}{s}\right\|_E = \left\|\int_1^\infty y(t\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\|_E \leqslant \int_1^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_E \frac{d\tau}{\tau}\|y\|_E.$$

Если выполнено условие (6.35), то интеграл справа конечен.

Покажем необходимость условия (6.35). При $\tau<1$ имеем

$$\left\|\int_t^\infty x^*(s)\frac{ds}{s}\right\|_E \geqslant \left\|\int_t^{t/\tau} x^*(s)\frac{ds}{s}\right\|_E \geqslant \left\|x^*\left(\frac{t}{\tau}\right)\int_t^{t/\tau}\frac{ds}{s}\right\|_E = \ln\frac{1}{\tau}\|\sigma_\tau x^*\|_E.$$

Отсюда

$$\|\sigma_\tau x\|_E = \|\sigma_\tau x^*\|_E \leqslant (\ln(1/\tau))^{-1}\|H_1 x^*\|_E \leqslant \leqslant (\ln(1/\tau))^{-1}\|H_1\|_{E\to E}\|x\|_E,$$

и следовательно, выполнено условие (6.35). Теорема доказана.

С оператором Харди—Литтльвуда и его сопряженным тесно связан оператор Гильберта

$$\Gamma x(t) = \int_0^\infty \frac{x(s)}{t+s}\,ds. \tag{6.36}$$

Этот интегральный оператор имеет положительное ядро, поэтому достаточно его изучить на неотрицательных функциях. Если $x(t)\geqslant 0$, то

$$\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{x(s)\,ds}{s} \leqslant 2\int_0^t \frac{x(s)\,ds}{t+s} + 2\int_t^\infty \frac{x(s)\,ds}{t+s} = 2\int_0^\infty \frac{x(s)\,ds}{t+s}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^\infty \frac{x(s)\,ds}{t+s} = \int_0^t \frac{x(s)\,ds}{t+s} + \int_t^\infty \frac{x(s)\,ds}{t+s} \leqslant \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds + \int_t^\infty \frac{x(s)\,ds}{s}.$$

Таким образом, при $x(t)\geqslant 0$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2}(H+H_1)x \leqslant \Gamma x \leqslant (H+H_1)x.$$

Отсюда и из теорем 6.6—6.8 следует

Теорема 6.9. *Для того чтобы оператор Гильберта (6.36) ограниченно действовал в симметричном про-*

странства E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\|\sigma_t\|_E = o(1) \quad \textit{при} \quad t\to 0 \quad \textit{и} \quad \|\sigma_t\|_E = o(t) \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \tag{6.37}$$

С оператором Харди — Литтльвуда связано понятие мажорантной функции. Положим

$$\theta_1(t;\ x) = \max_{0\leqslant\tau<t} \frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t x(s)\,ds. \tag{6.38}$$

Установим важное неравенство:

$$\theta_1^*(t;\ x) \leqslant x^{**}(t) \qquad (x\in L_1+L_\infty).$$

Так как $|\theta_1(t;\ x)|\leqslant\theta_1(t;\ |x|)$, неравенство достаточно доказать для неотрицательных функций.

Пусть $\theta_1^*(t_0;\ x) = p > \theta_1^*(\infty;\ x)$.

Выберем $\varepsilon < p - \theta_1^*(\infty;\ x)$ и рассмотрим множество $e = \{t\colon \theta_1(t;\ x) > p-\varepsilon\}$. Оно имеет конечную меру. Согласно (6.38) e состоит из тех точек t, для которых найдутся такие точки $\tau\in(0,\ t)$, что

$$\int_0^t x(s)\,ds - (p-\varepsilon)t > \int_0^\tau x(s)\,ds - (p-\varepsilon)\tau.$$

Функция

$$g(t) = \int_0^t x(s)\,ds - (p-\varepsilon)t$$

непрерывна, поэтому множество e открыто и, следовательно, состоит из системы интервалов. Пусть $(\alpha_k,\ \beta_k)$ — интервал из e, концы которого уже не принадлежат e. Покажем, что на отрезке $[\alpha_k,\ \beta_k]$ функция $g(t)$ достигает минимума в точке α_k. Действительно, если бы минимум достигался в точке $t'\in(\alpha_k,\ \beta_k)$ и выполнялось неравенство $g(\alpha_k) > g(t')$, то на интервале $(\alpha_k,\ t')$ не было бы точки τ, где $g(\tau) < g(t')$. Такой точки не было бы и на $(0,\ \alpha_k]$, так как из того, что $\alpha_k\notin e$, следует, что $g(\tau)\geqslant g(\alpha_k) > g(t')$ при $\tau\in(0,\ \alpha_k]$. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что $t'\in e$. В частности, из сказанного следует, что $g(\beta_k) \geqslant g(\alpha_k)$ или

$$(p-\varepsilon)(\beta_k-\alpha_k) \leqslant \int_{\alpha_k}^{\beta_k} x(s)\,ds.$$

Суммируя эти неравенства по всем интервалам из e получаем

$$(p-\varepsilon)\operatorname{mes} e \leqslant \int_e x(s)\,ds \leqslant \int_0^{\operatorname{mes} e} x^*(s)\,ds.$$

По определению множества e $\operatorname{mes} e \geqslant t_0$, поэтому

$$p-\varepsilon \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} e}\int_0^{\operatorname{mes} e} x^*(s)\,ds \leqslant \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} x^*(s)\,ds = x^{**}(t_0).$$

В силу произвольности ε

$$\theta_1^*(t_0;\, x) \leqslant x^{**}(t_0). \tag{6.39}$$

Пусть теперь $\theta_1^*(t_0;\, x) = p = \theta_1^*(\infty;\, x) > 0$. Множество e, определенное так же, как и выше, по $\varepsilon \in (0, p)$, имеет бесконечную меру и может содержать интервал вида (α, ∞). На этом интервале функция $g(t)$ также достигает минимума в точке α. Поэтому при $t > \alpha$

$$\int_0^t x(s)\,ds - (p-\varepsilon)t \geqslant \int_0^\alpha x(s)\,ds - (p-\varepsilon)\alpha.$$

Разделив обе части на t и устремив t к ∞, получим

$$p-\varepsilon \leqslant \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds \leqslant \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x^*(s)\,ds = x^{**}(\infty) \leqslant x^{**}(t_0).$$

Таким образом, и в этом случае получается неравенство (6.39).

Можно ввести функцию

$$\theta_2(t;\, x) = \sup_{\tau>t}\frac{1}{\tau-t}\int_t^\tau x(s)\,ds,$$

и аналогичными рассуждениями для нее **получить** неравенство

$$\theta_2^*(t;\, x) \leqslant x^{**}(t).$$

Наконец, для мажорантной функции

$$\theta(t;\, x) = \sup_{|t-\tau|>0} \frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t x(s)\, ds$$

имеем

$$\theta(t;\, x) = \max\{\theta_1(t;\, x),\ \theta_2(t;\, x)\},$$

поэтому

$$\theta^*(t;\, x) \leqslant \max\{\theta_1^*(t;\, x),\ \theta_2^*(t;\, x)\} \leqslant x^{**}(t).$$

Если симметричное пространство E обладает тем свойством, что в нем ограниченно действует оператор Харди — Литтльвуда, то при $x \in E$

$$\|\theta(t;\, x)\|_E = \|\theta^*(t,\, x)\|_E \leqslant \|x^{**}\|_E \leqslant C\|x\|_E.$$

Заметим, что для убывающей неотрицательной функции x

$$\theta(t;\, x) = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds = Hx,$$

поэтому из неравенства

$$\|\theta(t;\, x)\|_E \leqslant C\|x\|_E \tag{6.40}$$

следует, что оператор Харди — Литтльвуда действует в E и имеет норму, не превосходящую C.

Пользуясь теоремой 6.6, приходим к утверждению:

Теорема 6.10. *Условие* (6.24) *является необходимым и достаточным для выполнения неравенства* (6.40) *в симметричном пространстве E.*

Нам понадобится еще изучить оператор Харди — Литтльвуда в симметричных пространствах с весом. Пусть E — симметричное пространство и $\rho(t)$ — положительная на $(0, \infty)$ функция. Рассмотрим идеальную структуру $E_{\rho(t)}$, т. е. пространство всех измеримых на $(0, \infty)$ функций, для которых

$$\|x\|_{E_{\rho(t)}} = \|x\rho\|_E < \infty.$$

Теорема 6.11. *Если $\rho(t)$ — полумультипликативная функция и выполнено условие*

$$\int_0^1 \|\sigma_{1/s}\|_E \rho(s^{-1})\,ds < \infty, \tag{6.41}$$

то оператор Харди ограниченно действует из пространства $E_{\rho(t)}$ в пространство $E^{11}_{\rho(t)}$.

Доказательство. Имеем

$$\left|\frac{\rho(t)}{t}\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_0^1 |x(ts)|\,\rho(t)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 (\sigma_{1/s}|x|\rho)(t)\,\rho(s^{-1})\,ds. \tag{6.42}$$

По обобщенному неравенству Минковского (0.5)

$$\|\rho Hx\|_{E^{11}} \leqslant \int_0^1 \|(\sigma_{1/s}|x|\rho)(t)\|_E \rho(s^{-1})\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|\sigma_{1/s}\|_E \rho(s^{-1})\,ds\,\|x\rho\|_E. \tag{6.43}$$

Теорема доказана.

Замечание. 1. Если вес $\rho(t)$ — убывающий, то оператор Харди ограниченно действует в самом пространстве $E_{\rho(t)}$.

Действительно, из (6.42) следует, что

$$|\rho(t)\,Hx(t)| \leqslant \int_0^1 (\sigma_{1/s}x^*\rho)(t)\,\rho(s^{-1})\,ds$$

и тогда по лемме 4.7

$$\|\rho Hx\|_E \leqslant \int_0^1 \|\sigma_{1/s}x^*\rho\|_E \rho(s^{-1})\,ds \leqslant \int_0^1 \|\sigma_{1/s}\|_E \rho(s^{-1})\,ds\,\|\rho x\|_E.$$

Замечание 2. Неравенство (6.41) эквивалентно тому, что $\delta_E+\beta_\rho<1$.

Замечание 3. Если $E=L_p$ и $\rho(t)=t^\gamma$, то условие (6.41) принимает вид $\gamma p'<1$, а неравенство (6.42) переходит в известное неравенство Харди

$$\|t^{\gamma} Hx\|_{L_p} \leqslant \frac{p'}{1-\gamma p'} \|t^{\gamma} x\|_{L_p},$$

которое является точным (см. [24]).

Следствие 1. *Если* $\gamma p' < 1$, *то справедливы неравенства*

$$\int_0^{\infty} t^{\gamma p} |x^*(t)|^p dt \leqslant \int_0^{\infty} t^{\gamma p} |x^{**}(t)|^p dt \leqslant$$

$$\left(\frac{p'}{1-\gamma p'}\right)^p \int_0^{\infty} t^{\gamma p} |x^*(t)|^p dt.$$

Следствие 2. *Оператор Харди — Литтльвуда вида*

$$H_l x(t) = \frac{1}{t^{l+1}} \int_0^t s^l x(s)\, ds$$

ограничен в пространствах L_p *с весом* t^{γ} *при условии* $(\gamma - l)p' < 1$.

Действительно,

$$\|t^{\gamma} H_l x\|_{L_p} = \|t^{\gamma - l} H(s^l x)\|_{L_p} \leqslant \frac{p'}{1-(\gamma-l)p'} \|t^{\gamma} x\|_{L_p}.$$

8. Операторы ослабленных и слабых типов $\{L_{p_i}, L_{q_i}\}$. Рассмотрим тот случай, когда пространства E_i совпадают с пространствами L_{p_i}, а F_i — с пространствами L_{q_i} ($i=0, 1$). Вычисляем: $\varphi_{E_i}(t) = t^{1/p_i}$ и $\varphi_{F_i}(t) = t^{1/q_i}$. Из уравнений (6.15) и (6.16) находим, что

$$\delta(t) = t^{\frac{1/p_1 - 1/p_0}{1/q_1 - 1/q_0}} = t^{\mu} \quad \text{и} \quad \varkappa(t) = t^{\frac{1/p_1 q_0 - 1/p_0 q_1}{1/q_1 - 1/q_0}} = t^{\nu}.$$

Для выполнения условия 1) теоремы 6.1′ следует предположить, что $p_1 < p_0$. Условие 2) выполнено, если $q_0 \neq q_1$. При выполнении этого неравенства хотя бы одно из чисел q_i больше 1, поэтому выполнено условие (6.21) теоремы 6.2. Условие (6.14) на промежуточное пространство E в силу (6.6) может быть записано в виде

$$\|\sigma_t\|_E = o(\tau^{1/p_1}) \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{и} \quad \|\sigma_t\|_E = o(t^{1/p_0}) \quad \text{при} \quad t \to 0. \tag{6.44}$$

Из теоремы 6.2 непосредственно вытекает

Теорема 6.12. *Пусть* $1 \leqslant p_1 < p_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_0$, $q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$ *и* A — *оператор слабых типов* $\{L_{p_i}, L_{q_i}\}$ *т. е. выполнены неравенства*

$$t^{1/q_i}(Ax)^*(t) \leqslant c\int_0^\infty \tau^{1/p_i-1}x^*(\tau)\,d\tau \quad (i=0, 1) \tag{6.45}$$

для всех характеристических функций множеств конечной меры, если $p_0 < \infty$, *и для всех характеристических функций, если* $p_0 = \infty$. *Тогда оператор* A *допускает расширение до линейного ограниченного оператора, действующего из всякого симметричного пространства, удовлетворяющего условиям* (6.44), *в пространство* E_{t^ν, t^μ} *с нормой*

$$\|x\|_{E_{t^\nu, t^\mu}} = \|t^\nu x^{**}(t^\mu)\|_E.$$

Заметим, что условия (6.45) заведомо будут выполненными, если справедливы неравенства

$$t^{1/q_i}(Ax)^*(t) \leqslant C\|x\|_{L_{p_i}}$$

(см. теорему вложения 5.5).

Из теоремы 6.3 получается

Теорема 6.13. *Если* $1 \leqslant p_1 < p_0 < \infty$, $1 < q_0, q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$, *то тройка пространств* $\{\Lambda_{t^{1/p_0}}, \Lambda_{t^{1/p_1}}, E\}$ *при условии* (6.44) *является оптимальной интерполяционной по отношению к тройке* $\{M_{t^{1-1/q_0}}, M_{t^{1-1/q_1}}, E_{t^\nu, t^\mu}\}$.

Рассмотрим теперь тот случай, когда пространство E является пространством L_p, где $1/p = (1-\lambda)/p_0 + \lambda/p_1$ $(0 < \lambda < 1)$. Так как $\|\sigma_t\|_{L_p} = t^{1/p}$, то условия (6.44) выполнены. Пространство E_{t^ν, t^μ} в этом случае будет состоять из всех функций из $L_1 + L_\infty$, для которых

$$\int_0^\infty (x^{**}(t^\mu)\, t^\nu)^p dt < \infty.$$

Сделаем замену $t^\mu = \tau$. Тогда получим

$$\int_0^\infty (x^{**}(\tau))^p \tau^{p/q-1}\,d\tau < \infty,$$

где $1/q=(1-\lambda)/q_0+\lambda/q_1$. Мы пришли к пространствам, которые принято обозначать через $L_{r,p}$. В этих пространствах норма вводится по формуле

$$\|x\|_{L_{r,p}}=\left\{r^{-2}(r-1)\int_0^\infty [x^{**}(t)]^p t^{p/r-1}\,dt\right\}^{1/p}.$$

Таким образом, в условиях теоремы 6.12 оператор A действует из пространства L_p в пространство $L_{q,p}$ ($1/p=(1-\lambda)/p_0+\lambda/p_1$, $1/q=(1-\lambda)/q_0+\lambda/q_1$, $0<\lambda<1$).

Лемма 6.5. *Если $1<r<\infty$ и $p<p_1$, то пространство $L_{r,p}$ вложено в пространство L_{r,p_1}.*

Доказательство. Так как функция $x^{**}(t)$ убывает, то

$$(r-1)r^{-2}\int_0^\infty [x^{**}(s)]^p s^{p/r-1}\,ds\geqslant$$

$$\geqslant(r-1)r^{-2}\int_0^t [x^{**}(s)]^p s^{p/r-1}\,ds\geqslant(r-1)(rp)^{-1}[x^{**}(t)]^p t^{p/r}.$$

Возводя в степень $(p_1-p)/p>0$, получаем

$$\|x\|_{L_{r,p}}^{p_1-p}\geqslant\left(\frac{r-1}{rp}\right)^{\frac{p_1-p}{p}}[x^{**}(t)]^{p_1-p}\,t^{\frac{p_1-p}{r}},$$

откуда

$$[x^{**}(t)]^{p_1}\,t^{\frac{p_1}{r}-1}\leqslant\left(\frac{rp}{r-1}\right)^{\frac{p_1-p}{p}}[x^{**}(t)]^p\,t^{\frac{p}{r}-1}\|x\|_{L_{r,p}}^{p_1-p}.$$

Интегрируя по t от 0 до ∞, окончательно получаем

$$\|x\|_{L_{r,p_1}}\leqslant\left(\frac{rp}{r-1}\right)^{1/p-1/p_1}\|x\|_{L_{r,p}}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что при $p=r>1$ пространство $L_{r,p}$ совпадает с пространством L_p. Действительно,

$$\|x\|_{L_p}=\left\{\int_0^\infty [x^*(t)]^p dt\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\int_0^\infty [x^{**}(t)]^p dt\right\}^{1/p}=\left(\frac{p^2}{p-1}\right)^{1/p}\|x\|_{L_{p,p}}.$$

С другой стороны, так как $\|\sigma_t\|_{L_p}=t^{1/p}$, то выполнено условие (6.24) и оператор ** ограничен в L_p, т. е. (см. (6.30))

$$\|x\|_{L_{p,p}}=\left(\frac{p-1}{p^2}\right)^{1/p}\|x^{**}\|_{L_p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{p-1}{p^2}\right)^{1/p}\int_0^1\tau^{-1/p}\,d\tau\,\|x\|_{L_p}=\frac{p^{1-r/p}}{(p-1)^{1-1/p}}\|x\|_{L_p}.$$

Таким образом, нормы в $L_{p,p}$ и L_p — эквивалентны. Из леммы 6.5 следует, что при $p\leqslant q$ $(1<q<\infty)$ пространство $L_{q,p}$ вложено в пространство $L_{q,q}=L_q$.

Возвращаясь теперь к нашей интерполяционной теореме 6.12, мы видим, что при $p<q$ оператор A действует из пространства L_p в пространство $L_{q,p}$, более узкое, чем пространство L_q.

Теорема 6.14. *Тройка пространств $\{L_{p_0}, L_{p_1}, L_p\}$ является оптимальной интерполяционной относительно тройки пространств $\{L_{q_0}, L_{q_1}, L_{q,p}\}$, если $1<p_i\leqslant q_i<\infty$.*

Доказательство. Всякий оператор, ограниченно действующий из L_{p_i} в L_{q_i} $(i=0, 1)$, является оператором ослабленных типов $\{L_{p_i}, L_{q_i}\}$, поэтому, как показано выше, такой оператор действует из L_p в $L_{q,p}$ и, следовательно, первая тройка пространств является интерполяционной относительно второй.

В силу того, что $1<p_i$, $q_i<\infty$, можно найти такие два числа $\lambda_0<0$ и $\lambda_1>1$, что выполнены неравенства

$$0<\frac{1}{p_j'}=\frac{1-\lambda_j}{p_0}+\frac{\lambda_j}{p_1}<1 \quad \text{и} \quad 0<\frac{1}{q_j^*}=\frac{1-\lambda_j}{q_0}+\frac{\lambda_j}{q_1}<1$$
$$(j=0, 1).$$

Всякий оператор слабых типов $\{L_{p_j'}, L_{q_j'}\}$ будет по теореме 6.12 действовать из пространств L_{p_i} в пространства L_{q_i,p_i}, и в силу неравенства $p_i\leqslant q_i$ будет действовать в пространства L_{q_i}. Оптимальность тройки $\{L_0, L_1, L_p\}$ относительно тройки $\{L_{q_0}, L_{q_1}, L_{q,p}\}$ вытекает тогда из теоремы 6.13. Теорема доказана.

Операторы, действующие из L_{p_i} в L_{q_i} при $p_i\leqslant q_i$ естественно называть «улучшающими». Теорема 6.14

дает для «улучшающих» операторов уточнение классической теоремы М. Рисса — Торина (см. гл. I, § 4, п. 2).

Рассмотрим теперь тот случай, когда пространство E является пространством $L_{r,p}$, где $p_1<r<p_0$. Подсчетом проверяем, что $\|\sigma_t\|_{L_{r,p}}=t^{1/r}$, поэтому условие 6.44 выполнено.

Пространство E_{t^ν, t^μ} в этом случае будет состоять из всех функций из L_1+L_∞, для которых

$$\int_0^\infty [(x^{**}(t^\mu)\, t^\nu)^{**}]^p t^{p/r-1}\, dt < \infty.$$

Так как $(1/r-1/p)p'<1$, то можно применить следствие 1 из теоремы 6.11 с $\gamma=1/r-1/p$. Из него вытекает, что величина, стоящая слева, эквивалентна величине

$$\int_0^\infty [(x^{**}(t^\mu)\, t^\nu)^*]^p t^{p/r-1}\, dt.$$

Если воспользоваться свойствами 21° и 22° перестановок, то получим, что последняя величина эквивалентна

$$\int_0^\infty [x^{**}(t^\mu)]^p t^{p\nu+p/r-1}\, dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty [x^{**}(t)]^p t^{p\frac{\nu+1/r}{\mu}-1}\, dt.$$

Мы пришли к утверждению:

Теорема 6.15. *Если выполнены условия теоремы 6.12, то оператор A допускает расширение до линейного оператора, ограниченно действующего из пространства $L_{r,p}$ $(p_1<r<p_0)$ в пространство $L_{s,p}$, где*

$$s=\frac{r\mu}{r\nu+1},\quad \mu=\frac{1/p_1-1/p_0}{1/q_1-1/q_0},\quad \nu=\frac{1/(p_1q_0)-1/(p_0q_1)}{1/q_1-1/q_0}.$$

9. Оператор свертки. Для функций на полуоси $(0,\infty)$ оператор свертки определяется формулой

$$x*y\,(t)=\int_0^t x(s)\, y(t-s)\, ds. \tag{6.46}$$

Непосредственно проверяется, что этот билинейный оператор ограниченно действует из пространства $L_1\times L_\infty$

в пространство L_∞ и из пространства $L_1 \times L_1$ в пространство L_1. Если зафиксировать первый множитель $x \in L_1$, то полученный линейный оператор ограниченно действует в пространствах L_1 и L_∞, а значит, он действует в каждом интерполяционном между L_1 и L_∞ пространстве G (см. теорему 4.3 и далее). Итак, оператор свертки ограниченно действует из $L_1 \times G$ в G.

Пусть G^1 — ассоциированное пространство с G. Тогда при $x \in G^1$, $y \in G$

$$|x * y(t)| = \left| \int_0^t x_*(s)\, y_*(t-s)\, ds \right| = \left| \int_0^\infty x_*(s)\, z_t^*(s)\, ds \right| \leqslant \|x\|_{G^1} \|z_t\|_G,$$

где

$$z_t(s) = \begin{cases} y(t-s) & \text{при } s \leqslant t, \\ 0 & \text{при } s > t. \end{cases}$$

Очевидно, что $z_t \in G$ и $\|z_t\|_G \leqslant \|y\|_G$. Поэтому

$$\|x * y\|_{L_\infty} \leqslant \|x\|_{G^1} \|y\|_G.$$

Это означает, что оператор свертки ограниченно действует из $G^1 \times G$ в L_∞.

Зафиксируем теперь второй множитель $y \in G$. Тогда получается линейный оператор, ограниченно действующий из пространства G^1 в пространство L_∞ и из пространства L_1 в G. Применим к нему интерполяционную теорему 6.1′, полагая $E_0 = G^1$, $E_1 = L_1$, $F_0 = L_\infty$ и $F_1 = G$. В этом случае

$$\varphi_{E_0}(s)\,[\varphi_{E_1}(s)]^{-1} = \varphi_{F_0}(s)\,[\varphi_{F_1}(s)]^{-1} = [\varphi_G(s)]^{-1},$$

и поэтому условия 1) и 2) этой теоремы выполнены. Условие (6.24) на промежуточное пространство E в силу формулы (4.40) принимает вид

$$\int_0^1 \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, d\tau + \int_1^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_E\, d\left[\tau M_{\varphi_G}\left(\frac{1}{\tau}\right)\right] < \infty.$$

Пользуясь эквивалентностью (6.3) и (6.6), можно это условие записать в виде

$$\|\sigma_t\|_E = o\left(t^{1-\nu_{\varphi_G}}\right) \text{ при } t \to 0 \quad \text{и} \quad \|\sigma_t\|_E = o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6.47}$$

Функции δ и $\varkappa$, найденные из уравнений (6.1) и (6.6), будут такими: $\delta(t)\equiv t$ и $\varkappa(t)=\frac{1}{t}\varphi_G(t)$. Следовательно, норма в пространстве $F=E_{\varkappa,\delta}$ определяется формулой

$$\|z\|_F=\left\|z^{**}(t)\,\frac{\varphi_G(t)}{t}\right\|_E. \tag{6.48}$$

Из теоремы 6.1′ теперь следует, что *оператор свертки ограниченно действует из всякого пространства $E\times G$ (где G — интерполяционное между L_∞ и L_1 пространство, а симметричное пространство E удовлетворяет условию* (6.47)) *в пространство F с нормой* (6.48).

Заметим, что в условие (6.47) и в выражение для нормы (6.48) входит лишь фундаментальная функция пространства G. Поэтому для пространств с заданной фундаментальной функцией $\varphi(t)$ предыдущее утверждение будет наиболее сильным тогда, когда пространство G будет наиболее широким. В силу теоремы вложения 5.7, оно будет таковым, если G совпадает с пространством Марцинкевича с той же фундаментальной функцией. Тогда наше утверждение примет следующий вид:

Теорема 6.16. *Пусть $\varphi(t)$ — произвольная квазивогнутая функция. Оператор свертки ограниченно действует из пространства $E\times M_{\varphi^*}$, где пространство E удовлетворяет условиям*

$$\|\sigma_t\|_E=o\left(t^{1-\gamma_\varphi}\right) \text{ при } t\to 0 \text{ и } \|\sigma_t\|_E=o(t) \text{ при } t\to\infty, \tag{6.49}$$

в пространство F с нормой

$$\|z\|_F=\|z^{**}(t)\,t^{-1}\varphi(t)\|_E. \tag{6.50}$$

Справедливо неравенство

$$\|x*y\|_F\leqslant C\|x\|_E\|y\|_{M_{\varphi_*}}, \tag{6.51}$$

где $\varphi_*=t/\varphi(t)$.

Из сформулированного ранее утверждения следует неравенство $\|x*y\|_F\leqslant C(x)\|y\|_{M_{\varphi_*}}$, из которого неравенство (6.51) вытекает в силу принципа равномерной ограниченности.

Рассмотрим частный случай, когда $\varphi(t)=t^{1/q}$, а $E=L_p$. Условие (6.49) будет выполненным, если $p>1$ и $1/p+1/q>1$. Норма (6.50) будет вычисляться по формуле

$$\|z\|_F^p=\int_0^\infty [z^{**}(t)]^p t^{p/q-p}\,dt=\int_0^\infty [z^{**}(t)]^p t^{p(1/p+1/q-1)-1}\,dt$$

и, следовательно, пространство F совпадает с пространством $L_{r,p}$, где $1/r=1/p+1/q-1$.

Теорема 6.17. *Если* $p>1$ *и* $1/p+1/q-1>0$, *то справедливо неравенство*

$$\|x*y\|_{L_{r,p}}\leqslant C\|x\|_{L_p}\|y\|_{M_{t^{1-1/q}}}, \tag{6.52}$$

где $1/r=1/p+1/q-1$.

Это утверждение является усилением при $p>1$ известного неравенства Юнга. Действительно, пространство $M_{t^{1-1/q}}$ шире, чем пространство L_q (см. теорему 5.7), а пространство $L_{r,p}$ вложено в пространство L_r (см. лемму 6.5), поэтому из (6.52) следует неравенство Юнга

$$\|x\times y\|_{L_r}\leqslant C\|x\|_{L_p}\|y\|_{L_q}. \tag{6.53}$$

Классическим примером оператора типа свертки является интеграл дробного порядка Римана — Лиувилля

$$\mathcal{J}_\alpha x=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)\,ds. \tag{6.54}$$

Если $0<\alpha<1$, то функция $t^{\alpha-1}$ принадлежит пространству Марцинкевича M_{t^α}. Из теоремы 6.16 тогда следует

Теорема 6.18. *Оператор дробного интегрирования (6.54) ограниченно действует из пространства* E, *удовлетворяющего условию* $\|\sigma_t\|_E=o(t^\alpha)$ *при* $t\to0$ *и* $\|\sigma_t\|_E=o(t)$ *при* $t\to\infty$ *в пространство* F *с нормой*

$$\|x\|_F=\|x^{**}(t)\,t^{-\alpha}\|_E.$$

В частности, если $p>1$ *и* $1/p-\alpha>0$, *то оператор* $\mathcal{J}_\alpha$ *действует из пространства* L_p *в пространство* $L_{r,p}$, *где* $1/r=1/p-\alpha$.

§ 7. Сингулярный оператор Гильберта

В этом параграфе мы будем рассматривать функции $x(t)$, определенные на всей оси $(-\infty, \infty)$. Сингулярный оператор Гильберта определяется формулой

$$Sx(t) = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{|t-s| \geqslant \delta} \frac{x(s)}{t-s} ds = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{t-s} ds. \quad (7.1)$$

Если $x(t) \equiv \chi_{[a,b]}(t)$, то

$$S\chi_{[a,b]}(t) = \ln \left| \frac{t-a}{t-b} \right|. \quad (7.2)$$

Отсюда видно, что оператор не действует ни в пространстве L_∞, ни в пространстве L_1. На функции $\chi_{[a,\infty]}(t)$ оператор S не определен, так как правая часть в (7.1) тождественно равна $-\infty$. В связи с этим возникает задача о выделении класса функций, для которых интеграл в (7.1) существует почти при всех значениях t. Оказывается, что таким классом может служить пространство $L_1(-\infty, \infty)$. Для доказательства этого глубокого факта установим три леммы.

Лемма 7.1. *Для функции* $x(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{t-a_j}$, *где* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ *и* $\mu_j > 0$, *справедливо равенство*

$$n_{|x|}(\tau) = \frac{2}{\tau} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \quad (\tau > 0).$$

Доказательство. Рассмотрим множество e тех точек, где $x(t) > \tau$. Функция $x(t)$ убывает на каждом из интервалов $(-\infty, a_1)$, (a_1, a_2), ..., (a_n, ∞) и отрицательна на интервале $(-\infty, a_1)$. Поэтому значение τ она принимает один раз на каждом из интервалов (a_1, a_2), ..., (a_n, ∞) в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, $\operatorname{mes} e = \sum(\alpha_i - a_i) = \sum \alpha_i - \sum a_j$. Числа α_j являются корнями уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu}{t-a_j} = \tau$$

или уравнения

$$\tau\prod_{j=1}^{n}(t-a_j)-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\prod_{i\neq j}(t-a_i)=0.$$

По теореме Виета

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{\tau\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{j=1}^{n}\mu_j}{\tau}.$$

Отсюда получаем, что $\operatorname{mes} e=\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n}\mu_j$. Аналогично показывается, что мера множества точек, на которых $x(t)<-\tau$, равна тому же числу. Лемма доказана.

Обозначим

$$S_\delta x(t)=\int\limits_{|t-s|\geqslant\delta}\frac{x(s)}{t-s}\,ds.$$

Очевидно, что оператор S_δ определен на каждой функции $x\in L_1(-\infty,\infty)$.

Лемма 7.2. *Пусть выполнены неравенства*

$$S_{\delta_i}x(t_i)>\tau>0\qquad(i=1,\,2,\,\ldots,\,n),\tag{7.3}$$

где отрезки $I_i=[t_i-\delta_i,\ t_i+\delta_i]$ не пересекаются. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\leqslant\frac{8}{\tau}\|x\|_{L_1}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x(t)\geqslant0$. В интеграле

$$S_{\delta_i}x(t_i)=\int\limits_{|s-t_i|\geqslant\delta_i}\frac{x(s)}{t_i-s}\,ds$$

заменим функцию $\frac{1}{t_i-s}$ кусочно постоянной функцией. Выберем точки $s_i^{(1)},\ldots,s_i^{(N_i)}$ вне отрезка I_i так, что для любой системы точек $(s^{(1)},\ldots,s^{(N)})$, содержащей эти точки,

$$\left|\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{t_i - s^{(j)}} \int_{s^{(j)}}^{s^{(j+1)}} x(s)\,ds - S_{\delta_i} x(t_i)\right| < \varepsilon. \tag{7.4}$$

Объединим все точки $s_i^{(j)}$ $(i=1, \ldots, n,\ j=1, \ldots, N_i)$ в одну систему точек, расположенную в порядке возрастания: $\sigma = (s_1, \ldots, s_N)$ и обозначим через σ_k совокупность тех точек из σ, которые попадают в интервал $(t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$. Рассмотрим функции

$$y_i(t) = \sum_{s_j \notin \sigma_i} \frac{\mu_j}{t - s_j}, \quad z_j(t) = \sum_{s_j \in \sigma_j} \frac{\mu_j}{t - s_j}, \quad z(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{t - s_j},$$

где $\mu_j = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} x(s)\,ds$. Очевидно, что $z(t) = y_i(t) + z_i(t)$.

Если выбрать ε так, что $\varepsilon < S_{\delta_i}(t_i) - \tau$ $(i = 1, \ldots, n)$, то в силу (7.4)

$$y_i(t_i) > S_{\delta_i} x(t_i) - \varepsilon > \tau. \tag{7.5}$$

Функция $y_i(t)$ убывает на каждом из интервалов, где она определена, поэтому из неравенства (7.5) следует, что $y_i(t) > \tau$ при $\tau \in [t_i - \delta_i, t_i]$. Тогда для этих τ либо $z(t) > \tau/2$, либо $z_i(t) < -\tau/2$. Обозначим множество всех t, где выполнено неравенство $z(t) > \tau/2$, через e_0, а тех t, где $z_i(t) < -\tau/2$, — через e_i. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{n} [t_i - \delta_i, t_i] \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} e_i.$$

Из доказательства леммы 7.1 получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} \operatorname{mes} e_i = \frac{2}{\tau} \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j + \frac{2}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \sigma_i} \mu_j \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\tau} \sum_{j=1}^{N-1} \mu_j \leqslant \frac{4}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,ds.$$

Аналогично, для неотрицательной функции $x(t)$ показывается, что из неравенств $S_\delta x(t_i) < -\tau$ следует, что $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \frac{4}{\tau} \|x\|_{L_1}$.

Для произвольной функции $x \in L_1$:

$$S_{\delta_i} x(t) = S_{\delta_i} x_+(t) - S_{\delta_i} x_-(t).$$

Из неравенства (7.3) вытекает, что либо $S_{\delta_i} x_+(t_i) > \tau/2$, либо $S_\delta{}^i x_-(t_i) < -\tau/2$. Если индексом k обозначить те номера, при которых выполнено первое неравенство, а индексом k' те, для которых — второе, то

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_i \leqslant \sum \delta_k + \sum \delta_{k'} \leqslant \frac{8}{\tau} \|x_+\|_{L_1} + \frac{8}{\tau} \|x_-\|_{L_1} = \frac{8}{\tau} \|x\|_{L_1}.$$

Замечание. Если в точках t_i выполнены неравенства

$$|S_{\delta_i} x(t_i)| > \tau > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \leqslant \frac{16}{\tau} \|x\|_{L_1}. \tag{7.6}$$

Лемма 7.3. *Для $x \in L_1$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{mes} \{t : \overline{\lim_{\delta \to 0}} |S_\delta x(t)| > \tau\} < \frac{64}{\tau} \|x\|_{L_1}. \tag{7.7}$$

Доказательство. Мера множества e, о котором идет речь, есть точная верхняя грань мер содержащихся в нем компактов. Поэтому достаточно доказать неравенство $\operatorname{mes} K < \frac{64}{\tau} \|x\|_{L_1}$ для любого компакта K, в точках которого $\overline{\lim_{\delta}} |S_\delta x(t)| > \tau$. Для каждого $t \in K$ при некотором δ выполняется неравенство $|S_\delta x(t)| > \tau$, поэтому интервалы $(t-\delta, t+\delta)$ покрывают K. Выберем из этого покрытия конечное покрытие $(t_1-\delta_1, t_1+\delta_1), \ldots, (t_N-\delta_N, t_N+\delta_N)$ так, чтобы в этой системе интервалов пересекались только соседние. Тогда интервалы с четными, и с нечетными номерами образуют две системы непересекающихся интервалов. По крайней мере одна из них (например, с четными номерами) содержит часть K с мерой, не меньшей чем $\frac{1}{2}\operatorname{mes} K$. Таким образом, $\frac{1}{2}\operatorname{mes} K \leqslant \leqslant \sum 2\delta_{i_k}$. Из неравенства (7.6) вытекает, что $\operatorname{mes} K \leqslant \leqslant \frac{64}{\tau}\|x\|_{L_1}$.

Из леммы 7.3 следует, что

$$\operatorname{mes}\{t: \overline{\lim_{\delta,\delta'\to 0}} |S_\delta x(t) - S_{\delta'} x(t)| > \tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\left\{t: \overline{\lim_{\delta\to 0}} |S_\delta x(t)| > \frac{\tau}{2}\right\} \leqslant \frac{128}{\tau}\|x\|_{L_1}.$$

Теорема 7.1. *Если $f \in L_1$, то предел в (7.1) существует почти всюду. Оператор S является оператором слабого типа из L_1 в L_1, т. е. выполнено неравенство*

$$t(Sx)^*(t) \leqslant C\|x\|_{L_1}. \tag{7.8}$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Представим функцию $x_1(t)$ в виде суммы кусочно постоянной финитной функции $x_1(t)$ и функции $x_2(t)$ с достаточной малой нормой в L_1. Тогда

$$\overline{\lim_{\delta,\delta'\to 0}} |S_\delta x(t) - S_{\delta'} x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\delta,\delta'\to 0}} |S_\delta x_1(t) - S_{\delta'} x_1(t)| + \overline{\lim_{\delta,\delta'\to 0}} |S_\delta x_2(t) - S_{\delta'} x_2(t)|.$$

В точках непрерывности функции $x_1(t)$ первое слагаемое равно нулю, так как $S_\delta x_1(t) = S_{\delta'} x_1(t)$ при достаточно малых δ и δ'. Мера того множества, где второе слагаемое больше τ, не превосходит число $\frac{128}{\tau}\|x_2\|_{L_1}$. Таким образом, левая часть не превосходит τ всюду, за исключением множества меры $\frac{128}{\tau}\|x_2\|_{L_1}$. Так как $\|x_2\|_{L_1}$ может быть сделана сколь угодно малой, то в силу произвольности τ

$$\overline{\lim_{\delta,\delta'\to 0}} |S_\delta x(t) - S_{\delta'} x(t)| = 0$$

почти всюду. Из признака Коши вытекает первое утверждение теоремы.

Из неравенства (7.7) следует, что почти всюду

$$\operatorname{mes}\{t : |Sx(t)| > \tau\} < \frac{64}{\tau}\|x\|_{L_1},$$

а это эквивалентно неравенству (7.8).

Из неравенства (7.8) вытекает

Следствие 1. *Если последовательность функций x_n сходится в L_1 к функции x, то Sx_n сходится по мере к Sx.*

Следствие 2. *Если $x \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то предел (7.1) существует почти всюду.*

Действительно, $x(t) = x(t)\chi_{(-a,a)}(t) + x(t)(1 - \chi_{(-a,a)}(t))$. Первое слагаемое принадлежит L_1, и поэтому $Sx\chi_{(-a,a)}(t)$ определен почти всюду. Для второго слагаемого при $t \in (-a, a)$ соответствующий интеграл абсолютно сходится. Таким образом, $S_\delta x(t)$ определено для почти всех t на $(-a, a)$, а значит, и при почти всех t на $(-\infty, \infty)$.

Лемма 7.4. *Если последовательность функций $x_n(t)$ сходится в L_p к функции $x(t)$, то $Sx_n(t)$ сходится по мере к $Sx(t)$ на каждом множестве конечной меры.*

Доказательство. Имеем $x_n(t) = x_n(t)\chi_{(-2a,2a)}(t) + x_n(t)(1 - \chi_{(-2a,2a)}(t))$. Последовательность первых слагаемых сходится к $x(t)\chi_{(-2a,2a)}(t)$ в L_1 и, следовательно, в силу следствия 1 сходится по мере. Вторые слагаемые на интервале $(-a, a)$ сходятся равномерно:

$$|Sx_n(1 - \chi_{(-2a,2a)})(t) - Sx(1 - \chi_{(-2a,2a)})(t)| =$$

$$= \left|\int\limits_{|s| \geqslant 2a} \frac{x_n(s) - x(s)}{t - s}\, ds\right| \leqslant \left\{\int\limits_{|s| \geqslant 2a} |x_n(s) - x(s)|^p ds\right\}^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{|s| \geqslant 2a} \frac{ds}{|t - s|^{p'}}\right\}^{1/p'} \leqslant \left\{\int\limits_a^\infty \frac{ds}{s^{p'}}\right\}^{1/p'} \|x_n - x\|_{L_p}.$$

Лемма 7.5. *Пусть e — измеримое множество конечной меры; тогда*

$$(S\chi_e)^*(t) = \operatorname{arcsh} \frac{2 \operatorname{mes} e}{t}. \tag{7.9}$$

Доказательство. В силу следствия 1 из теоремы 7.1 и свойства 11° перестановок равенство (7.9) достаточно доказать для множества e, состоящего из конечного числа непересекающихся отрезков $[a_i, b_i]$ $(a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n)$. Тогда в силу (7.2)

$$S\chi_e(t) = \sum_{j=1}^{n} \ln\left|\frac{t-a_j}{t-b_j}\right|.$$

Рассмотрим уравнение

$$S\chi_e(t) = \tau > 0. \tag{7.10}$$

Это уравнение имеет по крайней мере один корень в каждом интервале (a_j, b_j), (b_j, a_{j+1}) и в интервале (b_n, ∞). Таким образом, оно имеет не менее, чем $2n$ корней. Для $t \in e$ наше уравнение эквивалентно уравнению

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{t-a_j}{t-b_j} = -e^{\tau},$$

а для $t \notin e$ — уравнению

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{t-a_j}{t-b_j} = e^{\tau}.$$

Каждое из этих уравнений имеет n корней, поэтому наше уравнение имеет ровно $2n$ корней. Аналогичный подсчет справедлив и при $\tau < 0$. Отсюда вытекает, что функция $S\chi_e(t)$ монотонна в каждом интервале, где она непрерывна. Обозначим через α_j корень уравнения (7.10) в интервале (a_j, b_j) и через β_j — в интервале (b_j, a_{j+1}) $(a_{n+1} = \infty)$. Тогда при $\tau > 0$

$$\operatorname{mes}(t : S\chi_e(t) > \tau) = \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

По теореме Виета

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \frac{\sum a_j + e^{\tau} \sum b_j}{1 + e^{\tau}} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \frac{\sum a_j - e^{\tau} \sum b_j}{1 - e^{\tau}}.$$

Отсюда

$$\operatorname{mes}(t : S\chi_e(t) > \tau) = \frac{2\left(\sum a_j - \sum b_j\right) e^{\tau}}{1 - e^{2\tau}} = \frac{\operatorname{mes} e}{\operatorname{sh} \tau}.$$

Аналогично

$$\operatorname{mes}(t: S\chi_e(t) < -\tau) = \operatorname{mes} e/\operatorname{sh}\tau.$$

Таким образом,

$$n_{|S\chi_e|}(\tau) = 2\operatorname{mes} e/\operatorname{sh}\tau,$$

что эквивалентио равенству (7.9).

Теорема 7.2. *Для того чтобы сингулярный оператор Гильберта ограниченно действовал в симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\|\sigma_t\|_E = o(1) \quad \textit{при} \quad t \to 0 \quad \textit{и} \quad \|\sigma_t\|_E = o(t) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \tag{7.11}$$

Доказательство. Для всякого $p \in (1, \infty)$ из неравенства (7.9) следует, что

$$t^{1/p}(S\chi_e)^*(t) = t^{1/p}\operatorname{arcsh}\frac{2\operatorname{mes} e}{t} \leqslant$$

$$\leqslant (\operatorname{mes} e)^{1/p}\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{1/p}\operatorname{arcsh}\frac{2}{\tau} = C_p\int_0^\infty \chi_e^*(t)\,dt^{1/p}.$$

Таким образом, оператор S является оператором слабого типа $\{L_p, L_p\}$ $(1<p<\infty)$, а значит, в силу леммы 6.4, и оператором ослабленного типа $\{L_p, L_p\}$. Из условий (7.11) и теоремы 1.3 о полумультипликативных функциях следует существование таких чисел $\nu_0 > 1/p_0$ и $\nu_1 > 1-1/p_1$, что $\|\sigma_t\|_E = o(t^{\nu_0})$ при $t \to 0$ и $\|\sigma_t\|_E = o(t^{1-\nu_1})$ при $t \to \infty$, где p_0 и p_1 — некоторые числа из $(1, \infty)$. Тогда для пространства E и пространств $E_0 = L_{p_0}$ и $E_1 = L_{p_1}$ выполнено условие (6.5). Из теоремы 6.1 вытекает, что сужéние оператора S на конечнозначные функции допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора, действующего в пространстве E. В силу леммы 7.4 это расширение будет совпадать с самим оператором S.

Покажем теперь, что условия теоремы необходимы для того, чтобы оператор S действовал в симметричном пространстве E. Рассмотрим произвольную функцию $x \in E$, равную нулю на отрицательной полуоси. Тогда функция $x(-t)$ принадлежит также E:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(-s)}{t-s}\, ds = \text{v. p.} \int_{0}^{\infty} \frac{x(s)}{t+s}\, ds \in E.$$

Если ограничиться рассмотрением $t>0$, то видно, что

$$\chi_{(0,\infty)}(t) \int_{0}^{\infty} \frac{x(s)}{t+s}\, ds \in E.$$

Если ввести симметричное пространство $E(0, \infty)$ функций на полуоси, состоящее из сужений функций из E на $(0, \infty)$, то из предыдущего видно, что в этом пространстве действует оператор Гильберта Г. В силу теоремы 6.8 пространство $E(0, \infty)$, а значит, и пространство E, обладают свойствами (7.11).

§ 8. Интерполяционные теоремы для пространств с различными мерами

1. Операторы П и R. Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство с σ-конечной мерой μ. Аналогично тому, как это сделано в § 2, можно ввести понятие функции распределения для любой неотрицательной измеримой функции $u(m)$ $(m \in \mathfrak{M})$:

$$n_u(\tau) = \mu(m : u(m) > \tau) \qquad (\tau > 0).$$

Предположим, что определено линейное взаимно однозначное непрерывное отображение П пространства $S(\mathfrak{M}, \mu)$ в пространство $S(0, \infty)$, обладающее свойством

$$n_{|u|}(\tau) = n_{|\Pi u|}(\tau) \qquad (\tau > 0). \tag{8.1}$$

Так же как в § 2, перестановкой $u^*(t)$ функции $u(m)$ называется функция

$$u^*(t) = \inf\{\tau : n_{|u|}(\tau) < t\}.$$

Эта функция определена на полуоси $(0, \infty)$. Если оператор П обладает свойством (8.1), то

$$(\Pi u)^*(t) = u^*(t) \qquad (0 < t < \infty). \tag{8.2}$$

(Отметим, что слева и справа операция $*$ применяется в функциональных пространствах разной природы.)

Нетрудно проверить, что

$$\int |u(m)|\,d\mu = \int_0^\infty u^*(t)\,dt \quad \text{и} \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{m\in\mathfrak{M}} |u(m)| = \operatorname*{vrai\,sup}_{0<t<\infty} u^*(t). \tag{8.3}$$

Пусть $E(0, \infty)$ — симметричное пространство функций на полуоси $(0, \infty)$. Обозначим через $E(\mathfrak{M})$ полный прообраз пространства $E(0, \infty)$ при отображении Π. Очевидно, $E(\mathfrak{M})$ — линейное многообразие в $S(\mathfrak{M}, \mu)$. В нем можно ввести норму по формуле

$$\|u\|_{E(\mathfrak{M})} = \|\Pi u\|_{E(0,\infty)} = \|(\Pi u)^*\|_{E(0,\infty)} = \|u^*\|_{E(0,\infty)}. \tag{8.4}$$

При этом определении оператор Π будет осуществлять изометрическое вложение пространства $E(\mathfrak{M})$ в пространство $E(0, \infty)$. Из равенств (8.3) непосредственно следует, что пространства $L_1(\mathfrak{M})$ и $L_\infty(\mathfrak{M})$ будут совпадать с обычно определяемыми пространствами L_1 и L_∞ на пространствах с мерой.

Пространство $E(\mathfrak{M})$ — банахово. Действительно, если последовательность u_n фундаментальна в $E(\mathfrak{M})$, то последовательность Πu_n фундаментальна в $E(0, \infty)$ и, следовательно, сходится к элементу v. В силу теоремы 4.1 последовательность Πu_n сходится к v в пространстве $L_1(0, \infty)+L_\infty(0, \infty)$, а следовательно, последовательность u_n сходится к некоторому элементу u в $L_1(\mathfrak{M})+$ $+L_\infty(\mathfrak{M})$. В силу предположенной непрерывности оператора Π получается, что $v=\Pi u$ и, следовательно, $v\in E(\mathfrak{M})$. Так как $\Pi u_n \to \Pi u$ в $E(0, \infty)$, то $u_n \to u$ в $E(\mathfrak{M})$.

Полезно отметить, что для построения пространства $E(\mathfrak{M})$ достаточно знать лишь о существовании оператора Π с указанными свойствами, а не его конкретный вид. В самом деле, пространство $E(\mathfrak{M})$ можно определить как совокупность всех измеримых на $\mathfrak{M}$ функций u, для которых $u^*\in E(0, \infty)$, с нормой $\|u\|_{E(\mathfrak{M})} = \|u^*\|_{E(0,\infty)}$. Действительно, если $u^*\in E(0, \infty)$, то по свойству (8.2) $(\Pi u)^* \in E(0, \infty)$, и в силу симметричности пространства $E(0, \infty)$ и $\Pi u\in E(0, \infty)$, т. е. $u\in \Pi^{-1}E(0, \infty) = E(\mathfrak{M})$. Обратно, если $u\in E(\mathfrak{M})$, то в силу (8.4) $u^*\in E(0, \infty)$ и норма и определяется по указанной формуле.

Предположим теперь, что сужение оператора П на пространство $L_1(\mathfrak{M})+L_\infty(\mathfrak{M})$ имеет левый обратный линейный оператор R, отображающий пространство $L_1(0, \infty)+L_\infty(0, \infty)$ на пространство $L_1(\mathfrak{M})+L_\infty(\mathfrak{M})$, действующий с нормой единица из пространства $L_1(0, \infty)$ в пространство $L_1(\mathfrak{M})$ и из пространства $L_\infty(0, \infty)$ в пространство $L_\infty(\mathfrak{M})$.

Приведем наиболее важные для нас примеры пространств с мерой и операторов П и R.

1) Взаимно однозначный образ полуоси. Предположим, что существует взаимно однозначное, сохраняющее меру отображение $\omega(m)$ пространства $\mathfrak{M}$ с мерой μ на полуось с мерой Лебега. Тогда оператор П определяется так: $\Pi u(t)=u(\omega^{-1}(t))$. Этот оператор обладает всеми нужными свойствами и имеет обратный оператор $Rx(m)=x(\omega(m))$.

В частности, если $\mathfrak{M}=(-\infty, \infty)$ с мерой Лебега, то за ω можно принять отображение, передвигающее интервалы $[k, k+1)$ $(k\geqslant 0)$ на интервалы $[2k, 2k+1)$, а интервалы $[-k, -k+1)$ $(k\geqslant 1)$ на интервалы $[2k-1, 2k)$.

Если $\mathfrak{M}$ представляет собой полуось $(0, \infty)$ с инвариантной относительно растяжений мерой μ $(d\mu=ds/s)$, то функция $\omega(\ln s)$, где функция $\omega(t)$ — такая же, как и выше, будет обладать требуемыми свойствами.

2) Интервал $(0, 1)$ с мерой Лебега. Обозначим через П оператор, ставящий в соответствие функции $u\in S(0, 1)$ функцию

$$\Pi u(t)=\begin{cases} u(t), & 0<t<1, \\ 0, & t\geqslant 1, \end{cases}$$

а через R — оператор сужения функций на полуоси на интервал $(0, 1)$. Все свойства очевидно выполнены.

3) Пространства последовательностей. Пусть $\mathfrak{M}$ состоит из счетного числа точек с мерами, равными единице. Функции на $\mathfrak{M}$ естественно отождествляются с последовательностями $\{u_m\}_1^\infty$. Поставим в соответствие последовательности $u=\{u_m\}$ ступенчатую функцию $\Pi u(t)=u_m$ при $m-1\leqslant t<m$. Оператор Πu обладает требуемыми свойствами. Левый обратный к нему

оператор определим как оператор усреднения

$$Rx = \left\{ \int_{m-1}^{m} x(s)\,ds \right\}.$$

Очевидно, что оператор R имеет норму, равную единице, как оператор из пространства $L_1(0, \infty)$ $(L_\infty(0, \infty))$ в пространство $l_1(l_\infty)$, которое в нашем случае совпадает с $L_1(\mathfrak{M})$ $(L_\infty(\mathfrak{M}))$.

2. Интерполяционная теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — два пространства с мерами, для которых существуют операторы Π, R и Π', R' соответственно с указанными выше свойствами. Если оператор V отображает функции на $\mathfrak{M}$ в функции на $\mathfrak{M}'$, то оператор $T = \Pi' V R$ будет переводить функции на $(0, \infty)$ в функции на $(0, \infty)$. Если оператор $T = \Pi' V R$ ограниченно действует из симметричного пространства $E(0, \infty)$ в симметричное пространство $F(0, \infty)$, то оператор V ограниченно действует из пространства $E(\mathfrak{M})$ в пространство $F(\mathfrak{M}')$ и имеет не бо́льшую норму. Действительно, из неравенства $\|\Pi' V R x\|_{F(0, \infty)} \leqslant C \|x\|_{E(0, \infty)}$ следует, что при $u \in E(\mathfrak{M})$ и $x = \Pi u$:

$$\|Vu\|_{F(\mathfrak{M}')} = \|\Pi' V u\|_{F(0,\infty)} = \|\Pi' V R \Pi u\|_{F(0,\infty)} \leqslant \\ \leqslant C \|\Pi u\|_{E(0,\infty)} = C \|u\|_{E(\mathfrak{M})}.$$

Обратное утверждение будет справедливо, если оператор R имеет норму единица как оператор из $E(0, \infty)$ в $E(\mathfrak{M})$. В самом деле, тогда

$$\|\Pi' V R x\|_{F(0,\infty)} = \|V R x\|_{F(\mathfrak{M}')} \leqslant c \|Rx\|_{E(\mathfrak{M})} \leqslant c \|x\|_{E(0,\infty)}.$$

Обозначим через $\Sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ совокупность всех линейных операторов, действующих с нормой, не превосходящей единицы, из пространства $L_1(\mathfrak{M})$ в пространство $L_1(\mathfrak{M}')$ и из пространства $L_\infty(\mathfrak{M})$ в пространство $L_\infty(\mathfrak{M}')$.

Из интерполяционной теоремы 4.3 получается

Теорема 8.1. *Для того чтобы пространства $(L_1(\mathfrak{M})$, $L_\infty(\mathfrak{M}), E)$ образовывали интерполяционную тройку относительно тройки пространств $(L_1(\mathfrak{M}'), L_\infty(\mathfrak{M}'), F)$ с интерполяционной константой единица, необходимо и достаточно, чтобы из неравенства*

$$\int_0^t v^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t u^*(\tau)\,d\tau \qquad (0 < t < \infty) \tag{8.5}$$

для $u \in E$ *и* $v \in L_1(\mathfrak{M}') + L_\infty(\mathfrak{M}')$ *следовало, что* $v \in F$ *и* $\|v\|_F \leqslant \|u\|_E$.

Доказательство. Необходимость. Из неравенства (8.5) и равенства (8.2) вытекает, что

$$\int_0^t (\Pi' v)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \int_0^t (\Pi u)^* (\tau)\, d\tau.$$

По теореме 3.4 тогда $\Pi' v = T\Pi u$, где $T \in \Sigma$. Тогда $v = R'T\Pi u$. Оператор $R'T\Pi$ очевидно принадлежит $\Sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, и поэтому из интерполяционных свойств пространств E и F следует, что $v \in F$ и $\|v\|_F = \|R'T\Pi u\|_F \leqslant \leqslant \|u\|_E$.

Достаточность. Пусть $V \in \Sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. Тогда оператор $\Pi' V R \in \Sigma$, и в силу (3.16) при $x \in L_1(0, \infty) + + L_\infty(0, \infty)$

$$\int_0^t (\Pi' V R x)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \int_0^t x^* (\tau)\, d\tau.$$

Для $u \in E$ положим $x = \Pi u$. Тогда

$$\int_0^t (\Pi' V u)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \int_0^t (\Pi u)^* (\tau)\, d\tau,$$

или в силу 8.2

$$\int_0^t (V u)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \int_0^t u^* (\tau)\, d\tau.$$

Из свойства пространств E и F получается, что $Vu \in F$ и $\|Vu\|_F \leqslant \|u\|_E$.

3. Соответствие между интерполяционными пространствами. Из общих соображений, изложенных в п. 6 § 4 гл. I, следует, что, если пространство $E(0, \infty)$ является интерполяционным с константой единица между $L_1(0, \infty)$ и $L_\infty(0, \infty)$, то пространство $E(\mathfrak{M})$ обладает тем же свойством относительно пространств $L_1(\mathfrak{M})$ и $L_\infty(\mathfrak{M})$. (Действительно, если $V \in \Sigma(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$, то $\Pi V R \in \Sigma$ и, следовательно, действует в $E(0, \infty)$, а тогда V действует в $E(\mathfrak{M})$ с не большей нормой.)

В п. 6, § 4 гл. I приведена схема, согласно которой по всякому интерполяционному между $L_1(\mathfrak{M})$ и $L_\infty(\mathfrak{M})$ пространству G можно построить пространство E_G (в обозначениях п. 6 $E(G)$), интерполяционное между $L_1(0, \infty)$ и $L_\infty(0, \infty)$. Это пространство состоит из всех функций x, для которых $RTx \in G$ при любом операторе $T \in \Sigma$. Норма в E_G вводится по формуле

$$\|x\|_{E_G} = \sup_{T \in \Sigma} \|RTx\|_G. \tag{8.6}$$

При некотором условии на оператор R эту норму можно вычислить явно. Будем говорить, что оператор R удовлетворяет условию А), если существует множество $e_R \subset (0, \infty)$, обладающее двумя свойствами:

1) при $t \in e_R$ и $x \in L_1(0, \infty) + L_\infty(0, \infty)$

$$\int_0^t (Rx^*)^*(\tau)\,d\tau = \int_0^t x^*(\tau)\,d\tau; \tag{8.7}$$

2) если для $u, v \in L_1(\mathfrak{M}) + L_\infty(\mathfrak{M})$ неравенство

$$\int_0^t u^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t v^*(\tau)\,d\tau$$

выполняется при $t \in e_R$, то оно выполняется и при всех $t \in (0, \infty)$.

Предполагая выполненным условие А), перейдем к вычислению нормы (8.6). В силу (3.16) при $T \in \Sigma$

$$\int_0^t (Tx)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t x^*(\tau)\,d\tau. \tag{8.8}$$

Проекционный оператор ΠR также принадлежит Σ, поэтому

$$\int_0^t (\Pi Ry)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t y^*(\tau)\,d\tau. \tag{8.9}$$

Полагая $y = Tx$ и объединяя (8.9) и (8.8), получаем

$$\int_0^t (\Pi RTx)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t (Tx)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t x^*(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда в силу (8.2) и (8.7) при $t \in e_R$

$$\int_0^t (RTx)^*(\tau)\,d\tau \leqslant \int_0^t (Rx^*)^*(\tau)\,d\tau.$$

По условию 2) тогда это неравенство выполнено при всех $t>0$. Без ограничения общности можно считать интерполяционную константу пространства G равной единице; тогда из теоремы 8.1 вытекает, что

$$\|RTx\|_G \leq \|Rx^*\|_G.$$

С другой стороны, по теореме 3.4 найдется такой оператор $T_0 \in \Sigma$, что $x^* = T_0 x$ и поэтому $RT_0 x = Rx^*$. Отсюда и из предыдущего следует, что

$$\|x\|_{E_G} = \|Rx^*\|_G. \tag{8.10}$$

Попутно мы доказали, что пространство E_G состоит из всех функций из $L_1(0, \infty) + L_\infty(0, \infty)$, для которых $Rx^* \in G$.

Заметим, что из равенства (8.7), примененного к $x = \Pi u$, с учетом (8.2) вытекает, что при $t \in e_R$

$$\int_0^t (Ru^*)^*(\tau)\, d\tau = \int_0^t u^*(\tau)\, d\tau,$$

и, следовательно, это равенство выполнено при всех t. Тогда по теореме 8.1

$$\|Ru^*\|_G = \|u\|_G.$$

Из последнего следует, что пространство $E_G(\mathfrak{M})$ изометрически совпадает с пространством G. Действительно,

$$\|u\|_{E_G(\mathfrak{M})} = \|u^*\|_{E_G} = \|Ru^*\|_G = \|u\|_G. \tag{8.11}$$

Рассмотрим еще следующую ситуацию: пусть $E(0, \infty)$ — интерполяционное между $L_1(0, \infty)$ и $L_\infty(0, \infty)$ пространство с интерполяционной константой единица, по нему строится пространство $E(\mathfrak{M}) = G$, а затем — пространство E_G. Вычислим норму в пространстве E_G. Имеем

$$\|x\|_{E_G} = \|Rx^*\|_G = \|Rx^*\|_{E(\mathfrak{M})} = \|\Pi Rx^*\|_{E(0,\infty)}.$$

Так как $\Pi R \in \Sigma$, то $\|\Pi Rx^*\|_{E(0,\infty)} \leq \|x\|_{E(0,\infty)}$ и, следовательно, пространство E_G в этом случае шире, чем исходное пространство $E(0, \infty)$.

В примерах 1)—3) условие А) на оператор R выполнено. В примере 1) $e_R = (0, \infty)$ и $(Rx^*)^*(t) = x^*(t)$. В примере 2) $e_R = (0, 1)$ и $(Rx^*)^*(t) = x^*(t)$ при $t \in (0, 1)$. Свойство 2) очевидно выполнено. В примере 3) множество e_R состоит из всех натуральных чисел, $(Rx^*)^*(t) \equiv \Pi Rx^*(t)$ и

$$\int_0^n \Pi Rx^*(\tau)\,d\tau = \int_0^n \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} x^*(s)\,ds\,\chi_{[m-1,m)}(\tau)\,d\tau = \\ = \sum_{m=1}^{n} \int_{m-1}^{m} x^*(s)\,ds = \int_0^n x^*(\tau)\,d\tau.$$

Свойство 2) также выполнено.

4. Операторы ослабленного типа. Если $E(\mathfrak{M})$ и $F(\mathfrak{M}')$ — симметричные пространства, то линейный оператор V, определенный на всех конечнозначных функциях на $\mathfrak{M}$, если $\varphi_{E(0,\infty)}(\infty) = \infty$, и на всех обобщенно конечнозначных функциях, если $\varphi_{E(0,\infty)}(\infty) < \infty$, называется *оператором ослабленного типа* $\{E(\mathfrak{M}), F(\mathfrak{M}')\}$, если $Vu \in S(\mathfrak{M}')$ и выполнено неравенство

$$(Vu)^{**}(t)\,\varphi_{F(0,\infty)}(t) \leqslant C \int_0^{\infty} u^*(t)\,d\varphi_{E(0,\infty)}(t). \tag{8.12}$$

Рассмотрим оператор $\Pi' VR$, предполагая, что оператор R переводит конечнозначные (обобщенно конечнозначные) функции на $(0, \infty)$ снова в конечнозначные (обобщенно конечнозначные) функции на $\mathfrak{M}$. Для конечнозначной (обобщенно конечнозначной) функции $x(t)$ на $(0, \infty)$ тогда получим:

$$(\Pi' VRx)^{**}(t)\,\varphi_{F(0,\infty)}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (\Pi' VRx)^*(\tau)\,d\tau\,\varphi_{F(0,\infty)}(t) = \\ = \frac{1}{t}\int_0^t (VRx)^*(\tau)\,d\tau\,\varphi_{F(0,\infty)}(t) \leqslant C \int_0^{\infty} (Rx)^*(t)\,d\varphi_{E(0,\infty)}(t) = \\ = C\int_0^{\infty} (\Pi Rx)^*(t)\,d\varphi_{E(0,\infty)}(t).$$

Оператор ΠR принадлежит Σ, поэтому для него выполнено неравенство (3.16), и в силу свойства 18°

перестановок тогда

$$(\Pi' VRx)^{**}(t)\,\varphi_{F(0,\infty)}(t) \leqslant C\int_0^\infty x^*(t)\,d\varphi_{E(0,\infty)}(t).$$

Таким образом, оператор $\Pi' VR$ является оператором ослабленного типа $\{E(0,\infty), F(0,\infty)\}$. Теорема 6.1′ позволяет тогда получить следующее утверждение:

Теорема 8.2. *Пусть E_0, F_0, E_1, F_1 — симметричные пространства функций на полуоси, для которых выполнены условия теоремы* 6.1′, *а оператор V является оператором ослабленных типов $\{E_0(\mathfrak{M}), F_0(\mathfrak{M}')\}$ и $\{E_1(\mathfrak{M}), F_1(\mathfrak{M}')\}$ одновременно. Тогда оператор V допускает замыкание до ограниченного оператора, действующего из пространства $E(\mathfrak{M})$ в пространство $E_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')$, где $E(0,\infty)$ и $E_{\varkappa,\delta}(0,\infty)$ — пространства, описанные в теореме* 6.1′.

Доказательство. Для оператора $\Pi' VR$ будут выполнены условия теоремы 6.1′, поэтому он будет допускать замыкание до ограниченного оператора из $E(0,\infty)$ в $E_{\varkappa,\delta}(0,\infty)$, но тогда, как описано выше, оператор V будет допускать замыкание до ограниченного оператора из $E(\mathfrak{M})$ в $E_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')$. Теорема доказана.

Для симметричного пространства $E(\mathfrak{M})$ можно ввести понятие фундаментальной функции, полагая $\varphi_{E(\mathfrak{M})}(\mu(e)) = \|\chi_e\|_{E(\mathfrak{M})}$. По определению пространства $E(\mathfrak{M})$ отсюда следует, что $\varphi_{E(\mathfrak{M})}(\mu(e)) = \|\chi_{(0,\mu(e))}\|_{E(0,\infty)} = \varphi_{E(0,\infty)}(\mu(e))$.

Таким образом, на всех значениях, принимаемых мерой μ на $\mathfrak{M}$, функции $\varphi_{E(\mathfrak{M})}$ и $\varphi_{E(0,\infty)}$ совпадают. Обозначим через e_μ замыкание на $(0,\infty)$ множества всех значений меры μ, и будем считать функцию $\varphi_{E(\mathfrak{M})}$ расширенной по непрерывности на множество e_μ. Она будет совпадать с сужением функции $\varphi_{E(0,\infty)}$ на множество e_μ. Функция распределения любой измеримой функции на $\mathfrak{M}$ не принимает значений из смежных интервалов множества e_μ, поэтому перестановка любой измеримой функции постоянна на этих интервалах. Это позволяет несколько видоизменить условие (8.12).

Пусть (t_1, t_2) — смежный интервал множества e_μ, и пусть выполнены неравенства

$$(Vu)^{**}(t_i)\,\varphi_{F(0,\infty)}(t_i) \leqslant Q \qquad (i = 1, 2)$$

или

$$\int_0^{t_i} (Vu)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \frac{t_i}{\varphi_{F(0,\infty)}(t_i)} Q \leqslant \psi(t_i) Q, \qquad (8.13)$$

где $\psi(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта квазивогнутой функции $\dfrac{t}{\varphi_{F(0,\infty)}(t)}$. Из предыдущего следует, что функция $\int_0^t (Vu)^* d\tau$ линейна на отрезке $[t_1, t_2]$, поэтому из неравенств (8.13) вытекает, что она меньше вогнутой функции $Q\psi(t)$ на всем этом отрезке. Следовательно в силу неравенства (1.7),

$$\int_0^t (Vu)^* (\tau)\, d\tau \leqslant \psi(t) Q \leqslant 2 \frac{t}{\varphi_{F(0,\infty)}(t)} Q \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Применяя эти соображения к неравенству (8.12), мы приходим к выводу, что оно будет выполнено, если выполнено неравенство

$$(Vu)^{**}(t)\, \varphi_{F(\mathfrak{M}')}(t) \leqslant C_1 \int_0^\infty u^*(\tau)\, d\varphi_{E(\mathfrak{M})}(\tau) \qquad (t \in e_{\mu'}), \quad (8.14)$$

где $C_1 = C/2$, и функция $\varphi_{E(\mathfrak{M})}$ в интеграле произвольно доопределена (например, линейно) в смежных интервалах множества e_μ. Таким образом, условие того, что оператор имеет ослабленный тип $\{E(\mathfrak{M}), F(\mathfrak{M}')\}$, нуждается в проверке лишь в точках $t \in e_{\mu'}$ и выражается через фундаментальные функции этих пространств.

Теорема 8.2 сформулирована в терминах пространств функций на полуоси. Мы получим несколько другое утверждение, формулируемое в терминах пространств функций на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. При этом мы несколько ослабим требования на пространство E, но получим более грубое неравенство для операторов ослабленного типа. Пусть G — интерполяционное между $L_1(\mathfrak{M})$ и $L_\infty(\mathfrak{M})$ пространство с интерполяционной константой 1 и E_G — пространство, построенное в п. 3. Из доказательства теоремы 6.1 видно, что при ее условиях для любой конечнозначной (обоб щенно конечнозначной) функции справедливо неравенство (0.10), которое в нашем случае примет вид

$$\varkappa(t)(\Pi' VRx)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\int_0^\infty x^*(t\tau)\,d\min\{M_{\varphi_{E_i}}(\tau)\}.$$

Для функции $x = \Pi u$ отсюда следует, что

$$\varkappa(t)(\Pi' Vu)^{**}(\delta(t)) \leqslant C\int_0^\infty \sigma_{1/\tau}u^*(t)\,d\min\{M_{\varphi_{E_i}}(\tau)\}.$$

По лемме 4.7 и равенству (8.10) тогда

$$\|\varkappa(t)(\Pi' Vu)^{**}(\delta(t))\|_{E_G} \leqslant C\int_0^\infty \|\sigma_{1/\tau}u^*\|_{E_G}\,d\min\{M_{\varphi_{E_i}}(\tau)\} =$$

$$= C\int_0^\infty \|R\sigma_{1/\tau}u^*\|_G\,d\min\{M_{\varphi_{E_i}}(\tau)\}.$$

Сделаем теперь предположение:

Для $u \in L_1(\mathfrak{M}) + L_\infty(\mathfrak{M})$ справедливо равенство

$$\Pi Ru^* = u^*. \tag{8.15}$$

Это свойство эквивалентно тому, что функция u^* принадлежит образу отображения Π.

При выполнении (8.15) в силу (8.11) имеем

$$\|R\sigma_{1/\tau}u^*(t)\|_G = \|R\sigma_{1/\tau}\Pi Ru^*\|_G \leqslant$$

$$\leqslant \|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G\|Ru^*\|_G = \|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G\|u\|_G.$$

Таким образом,

$$\|\varkappa(t)(\Pi' Vu)^{**}(\delta(t))\|_{E_G} \leqslant C\int_0^\infty \|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G\,d\min\{M_{\varphi_{E_i}}(\tau)\}\|u\|_G, \tag{8.16}$$

и если

$$\int_0^1 \|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G\,dM_{\varphi_{E_1}} + \int_1^\infty \|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G\,dM_{\varphi_{E_0}} < \infty, \tag{8.17}$$

то оператор V ограниченно действует из пространства G в пространство $(E_G)_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')$.

Рассмотрим оператор $R\sigma_{1/\tau}\Pi$ в примерах 1)—3). В примере 1) этот оператор имеет вид $R\sigma_{1/\tau}\Pi u(m) = u(\omega^{-1}(\tau\omega(m)))$. Преобразование $\omega^{-1}(\tau\omega(m))$ может иметь достаточно сложную структуру, однако оно обладает тем свойством, что мера образа любого измеримого множества в τ раз больше меры самого множества. В силу симметричности пространства G любое взаимно однозначное отображение $\zeta_\tau(m)$ пространства $\mathfrak{M}$ на себя, обладающее тем же свойством, будет порождать оператор $\tilde{\sigma}_{1/\tau}u(m) = u(\zeta_\tau(m))$, имеющий ту же норму в пространстве G. Поэтому в условии (8.17) можно оператор $R\sigma_{1/\tau}\Pi$ заменить на оператор $\tilde{\sigma}_{1/\tau}$. Например, для $\mathfrak{M} = (-\infty, \infty)$ с мерой Лебега естественно положить $\tilde{\sigma}_{1/\tau}u(m) = u(\tau m)$. В случае полуоси с мерой $d\mu = ds/s$ можно положить $\tilde{\sigma}_{1/\tau}u(s) = u(s^\tau)$. Пользуясь этим, получаем:

1) *Условие* (8.17) *для* $\mathfrak{M} = (-\infty, \infty)$ *с мерой Лебега выполнено, если*

$$\int_0^1 \|\tilde{\sigma}_{1/\tau}\|_G \, dM_{\varphi_{E_1}}(\tau) + \int_1^\infty \|\tilde{\sigma}_{1/\tau}\|_G \, dM_{\varphi_{E_0}}(\tau) < \infty, \tag{8.18}$$

где $\tilde{\sigma}_{1/\tau}u(m) = u(\tau m)$.

Операторы $\tilde{\sigma}_t$ образуют полугруппу, и следовательно, функция $\|\tilde{\sigma}_t\|_G$ — полумультипликативна. Поэтому условие (8.18) эквивалентно условию:

$$\|\tilde{\sigma}_t\|_G = o(t^{\beta_0}) \text{ при } t \to 0 \quad \text{и} \quad \|\tilde{\sigma}_t\|_G = o(t^{\alpha_1}) \text{ при } t \to \infty, \tag{8.19}$$

где α_1 — нижний показатель растяжения функции φ_{E_1}, а β_0 — верхний показатель растяжения функции φ_{E_0}.

В примере 2) оператор $\tilde{\sigma}_{1/\tau} = R\sigma_{1/\tau}\Pi$ задается формулой

$$\tilde{\sigma}_{1/\tau}u(t) = \begin{cases} u(\tau t), & \text{если } 0 \leqslant \tau t \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } \tau t > 1 \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{8.20}$$

Операторы $\tilde{\sigma}_t$ в этом случае не всегда коммутируют друг с другом. Однако если $t_1 < t_2$, то $\tilde{\sigma}_{t_1 t_2} = \tilde{\sigma}_{t_2}\tilde{\sigma}_{t_1}$, поэтому функция $\|\tilde{\sigma}_t\|_G$ снова полумультипликативна. Итак,

2) *Условие* (8.17) *для* $\mathfrak{M}=(0, 1)$ *с мерой Лебега выполнено, если для оператора* (8.20) *выполнено* (8.18) *или* (8.19).

В примере 3) естественно описываются операторы $\tilde{\sigma}_{1/\tau}=R\sigma_{1/\tau}\Pi$ при $\tau=\ldots, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, \ldots$ Легко проверить, что при $u=\{u_k\}$

$$\tilde{\sigma}_n u=\{\underbrace{u_1, \ldots, u_1}_{n}, \underbrace{u_2, \ldots, u_2}_{n}, \ldots, \underbrace{u_k, \ldots, u_k}_{n}, \ldots\}, \tag{8.21}$$

$$\tilde{\sigma}_{1/n} u=\left\{\frac{u_1+\ldots+u_n}{n}, \frac{u_{n+1}+\ldots+u_{2n}}{n}, \ldots\right. \\ \left.\ldots, \frac{u_{(k-1)n+1}+\ldots+u_{kn}}{n}, \ldots\right\}. \tag{8.22}$$

Величина $\|R\sigma_{1/\tau}\Pi\|_G$ будет убывающей функцией τ, поэтому, огрубляя условие (8.17), приходим к выводу:

3) *Условие* (8.17) *для* $\mathfrak{M}=\{1, 2, \ldots\}$ *с* $\mu(n)=1$ *выполнено, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\tilde{\sigma}_{n+1}\|_G\left[M_{\varphi_{E_1}}\left(\frac{1}{n}\right)-M_{\varphi_{E_1}}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\|\tilde{\sigma}_{1/n}\|_G\left[M_{\varphi_{E_0}}(n+1)-M_{\varphi_{E_0}}(n)\right]<\infty, \tag{8.23}$$

где операторы $\tilde{\sigma}_n$ *и* $\tilde{\sigma}_{1/n}$ *определены формулами* **(8.21)** *и* (8.22).

Перейдем теперь к описанию пространства $(E_G)_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')$, в которое действует оператор V. Согласио определениям,

$$\|v\|_{(E_G)_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')}=\|\varkappa(t)(\Pi'v)^{**}(\delta(t))\|_{E_G}= \\ =\|R[\varkappa(t)(\Pi'v)^{**}(\delta(t))]^{*}\|_G. \tag{8.24}$$

Иногда удобно неравенство

$$\|Vu\|_{(E_G)_{\varkappa,\delta}(\mathfrak{M}')}\leqslant C\|u\|_G \tag{8.25}$$

заменять более грубым, пользуясь следующим рассуждением: если мы научимся заменять функцию $\varkappa(t)(\Pi'v)^{**}(\delta(t))$ меньшей функцией вида $\Pi\tilde{v}$, где

$\tilde{v} \in L_1(\mathfrak{M}) + L_\infty(\mathfrak{M})$, то в силу (8.11) и (8.2) мы получим:

$$\|\tilde{v}\|_G = \|R\tilde{v}^*\|_G = \|R(\Pi\tilde{v})^*\|_G = \|\Pi\tilde{v}\|_{E_G} \leqslant \|v\|_{(E_G)\varkappa,\delta(\mathfrak{M}')}.$$

Таким образом, из неравенства (8.25) будет следовать неравенство

$$\|\widetilde{Vu}\|_G \leqslant C\|u\|_G. \tag{8.26}$$

Продемонстрируем это на случае, когда $\mathfrak{M} = \{1, 2, \ldots\}$. Обозначим $\delta_n = \sup\limits_{n-1 \leqslant t \leqslant n} \delta(t)$ и $\varkappa_n = \inf\limits_{n-1 \leqslant t \leqslant n} \varkappa(t)$. Тогда, пользуясь монотонностью функции $(\Pi'v)^{**}(t)$, функцию $\varkappa(t)(\Pi'v)^{**}(\delta(t))$ можно заменить меньшей функцией, принимающей на интервале $(n-1, n]$ постоянное значение $\varkappa_n(\Pi'v)^{**}(\delta_n)$. Неравенство (8.26) тогда примет следующий вид:

$$\|\{\varkappa_n(\Pi'Vu)^{**}(\delta_n)\}\|_G \leqslant C\|\{u_n\}\|_G. \tag{8.27}$$

Если $\mathfrak{M}' = \{1, 2, \ldots\}$, то функция $\Pi'v$ постоянна на интервалах $(n-1, n]$, и функция $(\Pi'v)^*$ обладает тем же свойством. Обозначим через v_n^* значение этой функции на $(n-1, n]$. Функцию $(\Pi'v)^{**}$ удобнее также заменить меньшей, принимающей на интервале $(n-1, n]$ значения

$$v_n^{**} = \frac{1}{n}\sum_1^n v_k^*.$$

Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' = \{1, 2, \ldots\}$, то из неравенства (8.27) будет следовать неравенство

$$\|\{\varkappa_n v_{\nu(n)}^{**}\}\|_G \leqslant C\|\{u_n\}\|_G, \tag{8.28}$$

где $\{v_n\} = V\{u_n\}$ и $\nu(n)$ — целое число, не меньшее, чем δ_n.

Заметим, что выражение для нормы (8.24) значительно упрощается, если $E_0 = F_0$ и $E_1 = F_1$. Тогда $\varkappa(t) \equiv 1$ и $\delta(t) \equiv t$. Поэтому

$$\|v\|_{(E_G)\varkappa,\delta(\mathfrak{M}')} = \|R(\Pi'v)^{**}\|_G. \tag{8.29}$$

Мы не будем формулировать теоремы, которые получаются из теоремы 8.2 в различных случаях. Изложенные выше соображения позволят нам в конкретных ситуациях такие теоремы применять.

5. Пространства измеримых функций на $(0, \infty)$ с мерой, инвариантной относительно растяжения. Рассмотрим на $(0, \infty)$ меру, определенную дифференциальной формой dt/t. Эта мера инвариантна относительно растяжения. Пространства $L_p((0, \infty), dt/t)$, построенные по этой мере, будем обозначать через $L_{p,*}$ (при $p=\infty$ очевидно $L_{p,*}=L_p$, но мы будем писать $*$ для единообразия). Нас будут интересовать интерполяционные между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$ пространства E. Из того, что сказано в п. 2, вытекает, что такими будут, например, пространства $L_{p,*}$.

Рассмотрим простейшие операторы, действующие в интерполяционных пространствах E.

1) Оператор растяжения $\sigma_\tau\varphi(\tau)=\varphi(t/\tau)$ действует в пространствах $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$ и имеет там норму 1; поэтому

$$\|\sigma_\tau\varphi\|_E \leqslant k_E \|\varphi\|_E,$$

где k_E — интерполяционная константа пространства E относительно пары $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$.

2) Степенное преобразование $T_\lambda\varphi(t)=\varphi(t^\lambda)$ действует в пространстве $L_{\infty,*}$ с нормой 1 и в пространстве $L_{1,*}$ с нормой $|\lambda|^{-1}$, поэтому

$$\|T_\lambda\varphi\|_E = \|\varphi(t^\lambda)\|_E \leqslant k_E \max\{1, |\lambda|^{-1}\} \|\varphi\|_E. \tag{8.30}$$

3) Преобразование мультипликативной свертки (ср. § 6, п. 9). Если $\psi\in L_{1,*}$, то при $\varphi\in L_{\infty,*}$

$$\left\| \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)\varphi(s)\frac{ds}{s} \right\|_{L_{\infty,*}} \leqslant \|\psi\|_{L_{1,*}} \|\varphi\|_{L_{\infty,*}},$$

если же $\varphi\in L_{1,*}$, то

$$\left\| \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)\varphi(s)\frac{ds}{s} \right\|_{L_{1,*}} \leqslant \|\psi\|_{L_{1,*}} \|\varphi\|_{L_{1,*}}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\left\| \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)\varphi(s)\frac{ds}{s} \right\|_E \leqslant k_E \|\psi\|_{L_{1,*}} \|\varphi\|_E, \tag{8.31}$$

которое мы будем называть *неравенством Юнга.*

4) Операторы типа оператора Харди—Литтльвуда

$$H_l\varphi(t) = \frac{1}{t^{1+l}} \int_0^t s^l \varphi(s)\, ds \tag{8.32}$$

можно выразить через свертку

$$H_l\varphi(t) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^{-(l+1)} \chi_{(1,\infty)}\left(\frac{t}{s}\right) \varphi(s)\, \frac{ds}{s}. \tag{8.33}$$

Функция $t^{-(l+1)}\chi_{(1,\infty)}(t)$ принадлежит $L_{1,*}$ при $l>-1$, и ее норма в $L_{1,*}$ равна $1/(1+l)$, поэтому из (8.31) получаем *неравенство Харди*:

$$\left\| \frac{1}{t^{1+l}} \int_0^t s^l \varphi(s)\, ds \right\|_E \leqslant \frac{k_E}{1+l} \|\varphi\|_E \tag{8.34}$$

при $l>-1$.

Оператор усреднения построим по формуле

$$T_{\text{уср}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \chi_{(e^n, e^{n+1}]}(t) \int_{e^n}^{e^{n+1}} \varphi(s)\, \frac{ds}{s}. \tag{8.35}$$

Легко проверить, что этот оператор действует и имеет норму 1 в пространствах $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$ (см. аналогично § 3, п. 2), поэтому его норма в пространстве E не превосходит числа k_E.

В дальнейшем нам понадобятся пространства со степенными весами, порожденные интерполяционным между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$ пространством E. Мы будем обозначать через E_{t^α} или, короче, E^α пространство с нормой $\|x\|_{E^\alpha} = \|t^\alpha x\|_E$. Рассмотрим, как в таких пространствах действуют описанные выше операторы.

Оператор растяжения:

$$\|\sigma_\tau\varphi\|_{E^\alpha} = \|t^\alpha\varphi(\tau^{-1}t)\|_E = \tau^\alpha \|(\tau^{-1}t)^\alpha \varphi(\tau^{-1}t)\|_E \leqslant k_E \tau^\alpha \|\varphi\|_{E^\alpha}. \tag{8.36}$$

Степенное преобразование: в силу (8.30) имеем

$$\|t^{\alpha\lambda}\varphi(t^{\lambda})\|_E \leqslant k_E \max\{1, |\lambda|^{-1}\}\, \|t^{\alpha}\varphi(t)\|_E,$$

поэтому

$$\|T_{\lambda}\varphi\|_{E^{\alpha\lambda}} \leqslant k_E \max\{1, |\lambda|^{-1}\}\, \|\varphi\|_{E^{\alpha}}. \tag{8.37}$$

Преобразование мультипликативной свертки. Из (8.31) получаем

$$\left\| t^{\alpha}\int_0^{\infty} \psi\left(\frac{t}{s}\right)\varphi(s)\,\frac{ds}{s}\right\|_E = \left\| \int_0^{\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha}\psi\left(\frac{t}{s}\right)s^{\alpha}\varphi(s)\,\frac{ds}{s}\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \|t^{\alpha}\psi(t)\|_{L_{1,*}}\, \|\varphi\|_{E^{\alpha}}. \tag{8.38}$$

Таким образом, оператор свертки действует в пространстве E^{α}, если $\|t^{\alpha}\psi\|_{L_{1,*}} < \infty$.

Операторы типы оператора Харди — Литтльвуда. Напишем выражение для оператора в еще более общей форме

$$H_{l,m}\varphi(t) = \frac{1}{t^{1+m}}\int_0^t s^{l}\varphi(s)\,ds. \tag{8.39}$$

Имеем

$$t^{m+\alpha-l}H_{l,m}\varphi(t) = \frac{1}{t^{1+l-\alpha}}\int_0^t s^{l-\alpha}s^{\alpha}\varphi(s)\,ds.$$

Предполагая, что $l > \alpha - 1$, из (8.34), получаем

$$\|H_{l,m}\varphi\|_{E^{m+\alpha-l}} \leqslant \frac{k_E}{1+l-\alpha}\, \|\varphi\|_{E^{\alpha}}. \tag{8.40}$$

Аналогично можно рассмотреть сопряженный оператор

$$H^1_{l,m}\varphi(t) = t^{l}\int_t^{\infty}\varphi(s)\,\frac{ds}{s^{1+m}}.$$

Имеем

$$t^{m-l+\alpha}H^1_{l,m}\varphi(t) = \int_0^{\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha+m}\chi_{(0,1]}\left(\frac{t}{s}\right)s^{\alpha}\varphi(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Функция $t^{\alpha+m}\chi_{(0,1)}(t)$ принадлежит $L_{1,*}$, если $\alpha+m>0$, и норма ее в $L_{1,*}$ равна $1/(\alpha+m)$. При этом условии

$$\|H^1_{l,m}\varphi\|_{E^{m-l+\alpha}} \leqslant \frac{k_E}{\alpha+m}\|\varphi\|_{E^\alpha}. \tag{8.41}$$

Оператор усреднения. При $e^n<t\leqslant e^{n+1}$ имеем

$$|t^\alpha T_{\text{уср}}\varphi(t)| \leqslant \int\limits_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{t^\alpha}{s^\alpha} s^\alpha |\varphi(s)| \frac{ds}{s} \leqslant e^{|\alpha|} \int\limits_{e^n}^{e^{n+1}} s^\alpha |\varphi(s)| \frac{ds}{s}.$$

Таким образом, при всех t

$$|t^\alpha T_{\text{уср}}\varphi(t)| \leqslant e^{|\alpha|} T_{\text{уср}}(t^\alpha|\varphi(t)|).$$

Тогда

$$\|T_{\text{уср}}\varphi\|_{E^\alpha} \leqslant k_E e^{|\alpha|}\|\varphi\|_{E^\alpha}. \tag{8.42}$$

Без ограничения общности (см. гл. I, § 4, п. 6) можно считать, что пространство E построено по пространствам $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$ с помощью некоторого интерполяционного функтора. Это позволяет по любой банаховой паре (A, B) строить промежуточное между A и B пространство F так, что тройка $(L_{1,*}, L_{\infty,*}, E)$ является интерполяционной относительно тройки (A, B, F). Мы применим это соображение к тривиальному случаю, когда $A=B=\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). Интегралы

$$\int\limits_0^a t^\beta\varphi(t)\frac{dt}{t}\ (a>0),\ \int\limits_b^\infty t^{-\beta}\varphi(t)\frac{dt}{t}\ (b>0) \text{ и } \int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$$

при $\beta>0$ конечны для функций из $L_{1,*}$ и для функций из $L_{\infty,*}$, поэтому они представляют собой линейные ограниченные операторы из этих пространств в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). Отсюда вытекает, что эти операторы ограниченно действуют из пространства E в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). В частности, все функции из E локально суммируемы. Если $\varphi\in E^\alpha$, то

$$\int\limits_0^a t^{-\beta}\varphi(t)\frac{dt}{t} \leqslant C\|\varphi\|_{E^\alpha} \quad \text{при} \quad \beta>\alpha, \tag{8.43}$$

$$\int\limits_b^\infty t^{-\beta}\varphi(t)\frac{dt}{t} \leqslant C\|\varphi\|_{E^\alpha} \quad \text{при} \quad \beta>-\alpha. \tag{8.44}$$

6. Операторы в пространствах измеримых функций на отрезке [0, 1]. Оператор сопряжения. Рассмотрим оператор Харди — Литтльвуда на отрезке [0, 1]. Он задается той же формулой

$$Hx(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds.$$

Так же, как в п. 6 и 7, § 6 с использованием неравенств (6.1′) и (6.29) показывается, что *для того, чтобы оператор H действовал в симметричном пространстве функций E, необходимо и достаточно, чтобы* $\|\widetilde{\sigma}_t\|_E = o(t)$ *при* $t\to\infty$. Сопряженный оператор принимает вид

$$H_1x(t) = \int_t^1 x(s)\,\frac{ds}{s} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Так же, как на стр. 188, проверяется, что $\|H\|_{E\to E''} = \|H_1\|_{E'\to E'}$ и показывается, что *в случае, когда оператор H действует из E в E'',* $\|\widetilde{\sigma}_t\|_{E\to E''} = o(t)$ *при* $t\to\infty$.

Для ограниченного действия оператора H_1 в симметричном пространстве E необходимо и достаточно, чтобы $\|\widetilde{\sigma}_t\|_E = o(t)$ *при* $t\to 0$. Повторим доказательство необходимости. При $0 < t \leqslant \tau \leqslant 1$ имеем

$$\int_t^1 x^*(s)\,\frac{ds}{s} \geqslant \int_t^{t/\tau} x^*(s)\,\frac{ds}{s} \geqslant \ln\frac{1}{\tau}\,x^*\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Интеграл слева $\geqslant 0$ при $t > \tau$, поэтому, пользуясь определением операторов $\widetilde{\sigma}_t$ (стр. 222), можно записать, что

$$\int_t^1 x^*(s)\,\frac{ds}{s} \geqslant \ln\frac{1}{\tau}\,\widetilde{\sigma}_\tau x^*(t).$$

Отсюда при $\tau < 1$

$$\|\widetilde{\sigma}_\tau x\|_E = \|\widetilde{\sigma}_\tau x^*\|_E \leqslant \frac{1}{\ln\tau^{-1}}\|H_1x^*\|_E \leqslant \frac{1}{\ln\tau^{-1}}\|H_1\|_E\|x\|_E.$$

Утверждение доказано.

Аналогично проверяется, что условия

$$\|\widetilde{\sigma}_t\|_E = o(1) \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{и} \quad \|\widetilde{\sigma}_t\|_E = o(t) \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{8.45}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы оператор

$$\Gamma x(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{t+s}\,ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

действовал в симметричном пространстве E.

Рассмотрим теперь сингулярный оператор Гильберта

$$Sx(t) = \text{v. p.}\int_0^1 \frac{x(s)}{t-s}\,ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{8.46}$$

Из равенства (7.9) непосредственно следует неравенство

$$(S\chi_e)^*(t) \leqslant \operatorname{arcsh}\frac{2\operatorname{mes} e}{t} \qquad (0 < t \leqslant 1,\ e \subset [0, 1]).$$

Из этого неравенства снова вытекает, что оператор S является оператором ослабленного типа $\{L_p, L_p\}$ при любом $p \in (1, \infty)$. Если выполнены условия (8.45), то, повторив рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 7.2 (пользуясь полумультипликативностью $\|\widetilde{\sigma}_t\|_E$), мы можем применить интерполяционную теорему, описанную в § 8. Из неравенства (8.16) тогда получим, что $\|Sx\|_E \leqslant C\|x\|_E$.

Покажем теперь, что условия (8.45) необходимы для ограниченности оператора Гильберта.

Формулу (8.46) можно переписать в виде

$$Sx\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = \text{v. p.}\int_{-1}^1 \frac{x\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)}{\tau-\sigma}\,d\sigma \qquad (-1 \leqslant \tau \leqslant 1). \tag{8.47}$$

На отрезке $[-1, 1]$ введем симметричное пространство функций $E(-1, 1)$ с нормой $\|y\|_{E(-1,1)} = \|y(2t-1)\|_E$. Если сингулярный оператор действует в пространстве E, то в силу (8.47) он действует и в пространстве $E(-1, 1)$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 7.2, мы получим отсюда, что оператор Г действует в пространстве $\tilde{E}$ (0, 1), состоящем из сужений функций из E (—1, 1) на (0, 1). Отсюда будет следовать, что условия (8.45) выполнены для пространства $\tilde{E}$ (0, 1), а значит, и для E (—1, 1). При изометрическом соответствии между пространствами E (—1, 1) и E оператору растяжения в E (—1, 1) соответствует оператор растяжения в E относительно центра 1/2 с тем же коэффициентом растяжения. Легко проверить, что последний оператор имеет ту же норму, что и оператор растяжения относительно центра 0. Таким образом, условие (8.45) выполнено для пространства E.

Итак, *условие* (8.45) *является необходимым и достаточным, чтобы сингулярный оператор ограниченно действовал в пространстве* E.

В теории тригонометрических рядов важную роль играет оператор сопряжения, т. е. оператор перехода к сопряженной функции (см. [2], [8]). Его можно записать в виде

$$Qx(t) = \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(s)}{2\operatorname{tg}\frac{t-s}{2}}\, ds.$$

Пусть симметричное пространство функций на $[0, 2\pi]$ обладает свойством (8.45). Тогда в нем ограниченно действует сингулярный оператор

$$\frac{1}{\pi} Sx(t) = \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x(s)}{t-s}\, ds.$$

Рассмотрим подпространство E_1 пространства E, состоящее из функций с носителем на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. На таких функциях оператор Q принимает вид

$$Qx(t) = \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{x(s)}{2\operatorname{tg}\frac{t-s}{2}}\, ds.$$

Величина $\frac{t-s}{2}$ при этом пробегает отрезок $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. На этом отрезке функция $\frac{1}{t-s}$ отличается от функции

$\dfrac{1}{2\operatorname{tg}\dfrac{t-s}{2}}$ на ограниченную функцию. Поэтому оператор Q на подпространстве E_1 отличается от сингулярного оператора $\frac{1}{\pi}S$ на оператор, отображающий E_1 в $L_\infty \subset E$. Отсюда следует, что оператор Q ограниченно действует из пространства E_1 в пространство E.

Рассмотрим дополнительное к E_1 подпространство E_2. Оно состоит из функций с носителями на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. На E_2

$$Qx(t) = \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{x(s)}{2\operatorname{tg}\frac{t-s}{2}}\,ds + \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{x(s)}{2\operatorname{tg}\frac{t-s}{2}}\,ds.$$

Если функцию $x(t)$ считать продолженной периодически с периодом 2π, то

$$Qx(t) = \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{x(z-\pi)}{2\operatorname{tg}\frac{t-z+\pi}{2}}\,dz + \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x(z+\pi)}{2\operatorname{tg}\frac{t-z-\pi}{2}}\,dz =$$

$$= \text{v. p.}\, \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{x(z-\pi)}{2\operatorname{tg}\frac{t-z+\pi}{2}}\,dz = Qy(t+\pi),$$

где функция

$$y(z) = x(z-\pi)$$

имеет носитель на $[\pi/2, 3\pi/2]$. Тогда

$$\|Qx\|_E = \|Qy\|_E \leqslant \|Q\|_{E_1\to E}\|y\|_{E_1} = \|Q\|_{E_1\to E}\|x\|_E.$$

Таким образом, оператор Q ограниченно действует из E в E.

Обратно, если оператор Q ограничен, то он действует из E_1 в E и из E_2 в E. Из предыдущего следует, что оператор $\frac{1}{\pi}S$ также действует из E_1 в E. Рассмотрим этот оператор на пространстве E_2. Пусть носитель функции

$x(t)$ содержится в $[0, \pi/2]$; тогда

$$Sx(t) = \text{v. p.} \int_0^{\pi/2} \frac{x(s)}{t-s}\, ds = \text{v. p.} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x(\sigma - \pi/2)}{t - \sigma + \pi/2}\, d\sigma =$$

$$= \text{v. p.} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{y(\sigma)}{t - \sigma + \pi/2}\, d\sigma,$$

где $y(\sigma) = x(\sigma - \pi/2)$ при $\sigma \in [\pi/2, \pi]$ и $y(\sigma) = 0$ при $\sigma \notin [\pi/2, \pi]$. Функция y равноизмерима с функцией x. При $0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$ $Sx(t) = Sy(t + \pi/2)$, а при $\frac{3}{2}\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$|Sx(t)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} |y(\sigma)|\, d\sigma,$$

поэтому

$$\|Sx\|_E \leqslant \|\chi_{\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]} Sx\|_E + \|\chi_{\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]} Sx\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \|Sy\|_E + \frac{1}{\pi}\|y\|_{L_1} \leqslant \left(\|S\|_{E_1 \to E} + \frac{1}{\pi}\right)\|y\|_E \leqslant C\|x\|_E.$$

Аналогично устанавливается такое же неравенство для функций из E с носителем на $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$. Таким образом, сингулярный оператор действует в E и, следовательно, выполнены условия (8.45). Мы пришли к утверждению:

Теорема 8.3. *Для того чтобы оператор сопряжения действовал в симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (8.45).

§ 9. Приложения к теории ортогональных рядов

1. Обобщенная теорема Пэли. Предположим, что на отрезке $[0, 1]$ задана ортонормированная система функций $u_n(t)$. Обозначим через $\{c_n\}$ коэффициенты Фурье функции $x(t) \in L_1(0, 1)$:

$$c_n = \int_0^1 x(t)\, u_n(t)\, dt. \tag{9.1}$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_1^\infty c_n^2 \leqslant \|x\|_{L_2}^2.$$

Оператор Фурье $Vx = \{c_n\}$ будет линейным ограниченным оператором из $L_2(0, 1)$ в l_2.

Пусть $H(0, \infty)$ — некоторое симметричное пространство на полуоси и $H(0, 1)$ — соответствующее ему пространство на отрезке $[0, 1]$. Предположим, что дополнительно известна ограниченность системы $\{u_n\}$ в пространстве $H(0, 1)$: $\|u_n\|_H \leqslant C$. Тогда для коэффициентов Фурье получается оценка

$$|c_n| = \left| \int_0^1 x(t)\, u_n(t)\, dt \right| \leqslant C \|x\|_{H'(0,1)}.$$

Отсюда вытекает, что оператор Фурье V ограниченно действует из пространства $H'(0, 1)$ в пространство l_∞. Обозначим через $\varphi(t)$ фундаментальную функцию пространства $H'(0, \infty)$ и предположим, что она обладает свойствами: $\varphi(1) = 1$, функция $\varphi(t)/\sqrt{t}$ возрастает и $\varphi(t)/\sqrt{t} \to 0$ при $t \to 0$. Мы находимся в условиях, при которых справедливо утверждение теоремы 8.2. В нашем случае $\varphi_{E_0}(t) = \sqrt{t}$, $\varphi_{E_1}(t) = \varphi(t)$, $\psi_{F_0}(t) = \sqrt{t}$, $\psi_{F_1}(t) = \operatorname{sign} t$. Поэтому $\delta(t) = t/\varphi^2(t)$ и $\varkappa(t) = 1/\varphi(t)$.

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 8.2, рассмотрим оператор $\Pi' VR$, где R — оператор сужения функции, заданной на полуоси, на отрезок $[0, 1]$, а $\Pi'\{c_n\}$ — функция, равная c_n на интервале $(n-1, n]$. Оператор $\Pi' VR$ будет ограниченно действовать из $L_2(0, \infty)$ в $L_2(0, \infty)$ и из $H'(0, \infty)$ в $L_\infty(0, \infty)$. Применяя к нему теорему 6.1′, получим, что

$$\left\| \frac{1}{\varphi(t)} (\Pi' VRx)^{**} \left(\frac{t}{\varphi^2(t)} \right) \right\|_{E(0,\infty)} \leqslant C \|x\|_{E(0,\infty)}.$$

Если $x(t) \equiv 0$ при $t > 1$, то

$$\left\| \frac{1}{\varphi(t)} (\Pi' \{c_n\})^{**} \left(\frac{t}{\varphi^2(t)} \right) \right\|_{E(0,\infty)} \leqslant C \|x\|_{E(0,1)}.$$

Если через $\overset{*}{c}_n$ обозначить перестановку последовательности $|c_n|$ в убывающем порядке, то $(\Pi' \{c_n\})^*(t) =$

$=\sum_{1}^{\infty} c_n^* \chi_{(n-1, n]}(t)$. Функцию $(\Pi' \{c_n\})^{**}(t)$ можно заменить меньшей:

$$\sum_{1}^{\infty} c_n^{**} \chi_{(n-1, n]}(t), \qquad \text{где } c_n^{**} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k^*. \tag{9.2}$$

Если теперь обозначить через a_n решение уравнения $\frac{t}{\varphi^2(t)} = n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то из последнего неравенства следует, что

$$\left\| \frac{1}{\varphi(t)} \sum_{1}^{\infty} c_n^{**} \chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t) \right\|_{E(0,\infty)} \leqslant C \|x\|_{E(0,1)}.$$

Это неравенство можно еще огрубить, заменяя $1/\varphi(t)$ на интервалах $(a_n, a_{n-1}]$ на $1/\varphi(a_{n-1})$ и норму в $E(0, \infty)$ на норму в $E(0, 1)$. Тогда

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} \frac{c_n^{**}}{\varphi(a_{n-1})} \chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t) \right\|_{E(0,1)} \leqslant C \|x\|_{E(0,1)}. \tag{9.3}$$

Функции $\chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t)$ образуют ортогональную систему на $[0, 1]$. Иногда удобно их нормировать, т. е. разделить на $\sqrt{a_{n-1} - a_n}$.

Так как $\frac{a_n}{\varphi^2(a_n)} = n$, то

$$(n-1) a_{n-1} - n a_n = \frac{a_{n-1}^2}{\varphi^2(a_{n-1})} - \frac{a_n^2}{\varphi^2(a_n)} \geqslant 0$$

в силу квазивогнутости функции $\varphi(t)$. Отсюда

$$\frac{\sqrt{a_{n-1} - a_n}}{\varphi(a_{n-1})} = \sqrt{\frac{(n-1)(a_{n-1} - a_n)}{a_{n-1}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{n(a_{n-1} - a_n)}{a_{n-1}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому из неравенства (9.3) следует неравенство

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t) \right\|_{E(0,1)} \leqslant C \|x\|_{E(0,1)}. \quad (9.4)$$

Мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 9.1. *Пусть $\{u_n\}$ — ортонормированная последовательность на отрезке $[0, 1]$, ограниченная по норме некоторого симметричного пространства $H(0, \infty)$, фундаментальная функция $\varphi_H(t)$ которого обладает свойствами:*

1) $\varphi_H(1) = 1$, 2) *функция* $\sqrt{t}/\varphi_H(t)$ *возрастает и* 3) $\sqrt{t}/\varphi_H(t) \to 0$ *при* $t \to 0$.

Если $E(0, \infty)$ — симметричное пространство, для которого

$$\|\sigma_t\|_E = o(\sqrt{t}) \text{ при } t \to 0 \text{ и } \|\sigma_t\|_E = o(t^{1-\delta_H}) \text{ при } t \to \infty, \quad (9.5)$$

где δ_H — верхний показатель растяжения функции $\varphi_H(t)$, то справедливо неравенство (9.4), где c_n^{**} вычисляются по формуле (9.2) и a_n — решения уравнений $\frac{1}{t} \varphi_H^2(t) = n$.

По формулировке мы воспользовались соотношением (4.39): $\varphi(t) = t/\varphi_H(t)$.

Рассмотрим частные случаи теоремы 9.1. Предположим, что $E = L_p$. Условия (9.5) будут выполнены, если $\frac{1}{2} < \frac{1}{p} < 1 - \delta_H$. Тогда получим

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]} \right\|_{L_p} =$$

$$= \left\{ \sum_{2}^{\infty} (c_n^{**})^p (a_{n-1} - a_n)^{1-p/2} \right\}^{1/p} \leqslant C \|x\|_{L_p}. \quad (9.6)$$

В случае пространства Лоренца $\Lambda_\varphi = E$ условия (9.5) выполнены, если

$$1/2 < \gamma_\varphi \leqslant \delta_\varphi < 1 - \delta_H,$$

и тогда

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]} \right\|_{\Lambda_\psi} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t)\, d\psi(t) =$$

$$= \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} [\psi(a_{n-1}) - \psi(a_n)].$$

Поэтому

$$\sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} [\psi(a_{n-1}) - \psi(a_n)] \leqslant C \| x \|_{\Lambda_\psi}. \quad (9.7)$$

Наконец, для пространства Марцинкевича M_ψ

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]} \right\|_{M_\psi} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\psi(a_k)} \int_0^{a_k} \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{-1/2} \chi_{(a_n, a_{n-1}]}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\psi(a_k)} \sum_{2}^{k} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{1/2}.$$

Поэтому при $1/2 < 1 - \delta_\psi \leqslant 1 - \gamma_\psi < 1 - \delta_H$ получаем неравенство

$$\sup_k \frac{1}{\psi(a_k)} \sum_{2}^{k} c_n^{**} (a_{n-1} - a_n)^{1/2} \leqslant C \| x \|_{M_\psi}.$$

Рассмотрим еще тот частный случай, когда последовательность $u_n(t)$ равномерно ограничена, т. е. ограничена в L_∞. Тогда $\varphi_H(t) = \operatorname{sign} t$ и $\varphi_H^2(t)/t = 1/t$. Отсюда $a_n = 1/n$. Неравенство (9.4) принимает тогда вид

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} [n(n+1)]^{1/2} \chi_{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]} \right\|_{E(0,1)} \leqslant C \| x \|_{E(0,1)},$$

или эквивалентный вид

$$\left\| \sum_{2}^{\infty} c_n^{**} n \chi_{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right]} \right\|_{E(0,1)} \leqslant C \| x \|_{E(0,1)}.$$

Для пространств L_p с $1<p\leqslant 2$ получается неравенство

$$\left\{ \sum_{2}^{\infty} (c_n^{**})^p n^{p-2} \right\}^{1/p} \leqslant C \| x \|_{L_p}.$$

Если заменить c_n^{**} меньшей величиной c_n^*, то полученное неравенство составит содержание классической теоремы Пэли.

2. Обобщенная теорема Харди — Литтльвуда. Для рядов по тригонометрической системе функций с убывающими коэффициентами предыдущие утверждения допускают существенные уточнения.

Теорема 9.3. *Пусть $u_n(t) = \cos \pi n t$ и пространство $G(0, 1)$ обладает свойствами*

$$\|\tilde{\sigma}_t\|_G = o(1) \text{ при } t \to 0 \text{ и } \|\tilde{\sigma}_t\|_G = o(t) \text{ при } t \to \infty.$$

Если последовательность c_n убывает и стремится к нулю, то для того, чтобы функция $x(t) = \sum\limits_{1}^{\infty} c_n \cos \pi n t$ принадлежала пространству G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{1}^{\infty} k c_k \chi_{(1/(k+1), 1/k)} \right\|_G < \infty, \tag{9.8}$$

или неравенство

$$\left\| \sum_{1}^{\infty} c_k \chi_{(0, 1/k)} \right\|_G < \infty. \tag{9.9}$$

Доказательство. Мы воспользуемся некоторыми неравенствами для тригонометрической системы функций (см. [9], стр. 194). Первое из них утверждает, что

$$c_n \leqslant B \int_0^{1/n} |x(s)|\, ds.$$

Отсюда в силу монотонности функции $x^{**}(t)$

$$\sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)}(t) \leqslant B \sum_1^\infty k \int_0^{\frac{1}{k}} |x(s)|\, ds \chi_{(1/(k+1),1/k)}(t) \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_1^\infty k \int_0^{1/k} x^*(s)\, ds\, \chi_{(1/(k+1),1/k)}(t) \leqslant B \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s)\, ds.$$

Оператор Харди — Литтльвуда непрерывно действует в пространстве G (теорема 6.4), поэтому

$$\left\| \sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)} \right\|_G \leqslant C \|x\|_G.$$

Для доказательства обратного утверждения воспользуемся неравенством

$$|x(t)| \leqslant B \sum_1^n c_k \quad \text{при} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}$$

(см. [9], стр. 194). Тогда

$$|x(t)| \leqslant B \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+1),1/n)}(t). \tag{9.10}$$

Вычислим значение сопряженного оператора H_1 к оператору Харди — Литтльвуда на функции $y(t) = \sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)}(t)$.

Имеем при $1/(n+1) < t < 1/n$

$$H_1 y(t) = \int_t^1 \frac{\sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)}(s)}{s}\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \int_{1/n}^1 \frac{\sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)}(s)}{s}\, ds =$$

$$= \sum_1^{n-1} k c_k \ln(1+1/k) \geqslant \ln 2 \sum_1^{n-1} c_k,$$

т. е.

$$H_1 y(t) \geqslant \ln 2 \sum_1^\infty \left(\sum_1^{n-1} c_k \right) \chi_{(1/(n+1),1/n)}(t) =$$

$$= \ln 2 \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+2),1/(n+1))}(t).$$

Тогда

$$H_1 y\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant \ln 2 \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+2),1/(n+1))}\left(\frac{t}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \ln 2 \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+1),1/n)}(t). \qquad (9.11)$$

Таким образом,

$$\|x\|_G \leqslant B \left\| \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+1),1/n)} \right\|_G \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B}{\ln 2} \left\| H_1 y\left(\frac{t}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{B}{\ln 2} \|H_1\|_G \|\sigma_2\|_G \|y\|_G.$$

Мы установили неравенства

$$\|x\|_G \leqslant B \left\| \sum_1^\infty \left(\sum_1^n c_k \right) \chi_{(1/(n+1),1/n)} \right\|_G \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\| \sum_1^\infty k c_k \chi_{(1/(k+1),1/k)} \right\|_G \leqslant C_2 \|x\|_G.$$

Так как $\sum\limits_{1}^{\infty}\left(\sum\limits_{1}^{n} c_k\right)\chi_{(1/(n+1),1/n)}(t) = \sum\limits_{1}^{\infty} c_n\chi_{(0,1/n)}(t)$, то теорема доказана.

3. Базисы. Напомним, что **базисом** в сепарабельном банаховом пространстве E называется такая система элементов $\{u_k\}_1^{\infty}$, что каждый элемент $x\in E$ представим единственным образом в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{1}^{\infty} c_k u_k.$$

Если $\{u_k\}$ — полная минимальная система (см. [22]), а $\{f_k\}$ — биортогональная ей система линейных функционалов, то определены ограниченные операторы

$$S_n x = \sum_{1}^{n} f_k(x)\, u_k.$$

Для того чтобы система $\{u_k\}$ образовывала базис, необходимо и достаточно, чтобы операторы S_n были ограничены в совокупности.

Базис называется безусловным, если он остается базисом при любой перестановке его элементов. Для того чтобы базис был безусловным, необходимо и достаточно, чтобы были равномерно ограничены операторы вида

$$\sum_{i=1}^{n} f_{k_i}(x)\, u_{k_i} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, проверка того, что полная минимальная система является базисом или безусловным базисом, сводится к оценке норм некоторых операторов. Отсюда следует, что, если $E_0\supset E_1$, пространство E является интерполяционным между E_0 и E_1, E_1 плотно в E и элементы $\{u_k\}$ из E_1 образуют базис (безусловный базис) в E_0 и в E_1, то они образуют базис (безусловный базис) и в E.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ ортонормированную систему функций Хаара, определяемую равенствами

$$h_0^0(t) \equiv 1; \qquad h_0^{(1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0\leqslant t < 1/2, \\ -1, & 1/2 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

и

$$h_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leqslant t < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n/2}, & \frac{2k-1}{2^{n+1}} \leqslant t \leqslant \frac{2k}{2^{n+1}} \\ (k=1, 2, 3, \ldots, 2^n), & \\ 0 \text{ для остальных значений } t. & \end{cases}$$

Функции $h_n^k(t)$ располагаются в простую последовательность $u_m(t)$ $(m=0, 1, \ldots)$ в порядке возрастания номера n, а при одинаковом n в порядке возрастания k. Нетрудно проверить, что ядра $Q_N(t, s)$ операторов S_N, отвечающих частным суммам ряда Фурье по функциям $h_n^{(k)}$, неотрицательны. Поэтому

$$\int_0^1 |Q_N(t, s)|\, ds = \int_0^1 \sum_{m=0}^N u_m(t)\, u_m(s)\, ds = \int_0^1 u_0(t)\, u_0(s)\, ds = 1.$$

Аналогично

$$\int_0^1 |Q_N(t, s)|\, dt = 1.$$

Эти равенства говорят о том, что операторы S_N равномерно ограничены в пространствах L_1 и L_∞. В силу следствия из интерполяционной теоремы 4.6, эти операторы будут равномерно ограничены единицей в любом сепарабельном симметричном пространстве E. Известно, что система Хаара является базисом в L_1. Отсюда, в частности, вытекает, что эта система полна в E. Действительно, в противном случае нашлась бы ненулевая функция из $E'=E^1\subset L_1$, ортогональная ко всем функциям $u_m(t)$, что противоречит базисности системы $\{u\}_m$ в L_1.

Мы пришли к утверждению:

Теорема 9.4. *Ортогональная система Хаара является базисом в любом сепарабельном симметричном пространстве.*

Рассмотрим теперь тригонометрическую систему функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 9.5. *Для того чтобы тригонометрическая система была базисом в сепарабельном симметричном пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы* *выполнялись условия*

$$\|\tilde{\sigma}_\tau\|_E = o(\tau) \text{ при } \tau \to \infty \text{ и } \|\tilde{\sigma}_\tau\|_E = o(1) \text{ при } \tau \to 0. \tag{9.12}$$

Доказательство. Обозначим через $S_n x$ частную сумму ряда Фурье функции $x(t)$. Для этой суммы справедлива формула (см. [2])

$$S_n x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\frac{\sin n(t-s)}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-s}{2}}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\cos n(t-s)\,ds =$$

$$= -\cos nt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x(s)\sin ns}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-s}{2}}\,ds + \sin nt\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x(s)\cos ns}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{t-s}{2}}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(s)\cos n(t-s)\,ds.$$

Если выполнены условия (9.12), то оператор перехода к сопряженной функции ограничен в пространстве E (см. теорему 8.3), поэтому

$$\|S_n x\|_E \leqslant C(\|x(s)\sin ns\|_E + \|x(s)\cos ns\|_E + \|x\|_{L_1}) \leqslant C_1\|x\|_E.$$

Достаточность условий (9.12) доказана.

Предположим теперь, что тригонометрическая система является базисом в E. Тогда $\|S_n x\|_E \leqslant C(E)\|x\|_E$ для любой функции $x \in E$. Предположим сначала, что $x(t)$ — тригонометрический многочлен. Тогда для сопряженной функции $\tilde{x}(t)$ справедливо тождество

$$S_{2n}\tilde{x}(t) = -2\cos nt\cdot S_n(-x\sin nt) + 2\sin nt\cdot S_n(x\cos nt),$$

которое элементарно проверяется для функций $\sin kt$ и $\cos kt$. Из этого тождества следует, что

$$\|S_{2n}\tilde{x}\|_E \leqslant 4C(E)\|x\|_E.$$

Но при большом n будет $S_{2n}\tilde{x} = \tilde{x}$, поэтому

$$\|\tilde{x}\|_E \leqslant 4C(E)\|x\|_E. \tag{9.13}$$

Пусть теперь $x(t)$ — произвольная функция из E. По условию $S_N x \to x$ в E при $N \to \infty$. Из неравенства (9.13) следует тогда, что последовательность $\widetilde{S_N x} = S_N\tilde{x}$ фундаментальна в E и, следовательно, сходится к функции $y \in E$. Из того, что $x \in E \subset L_1$, следует, как известно (см. [2], стр. 597), что $S_N \tilde{x} \to \tilde{x}$ в L_p с $p < 1$, поэтому $y = \tilde{x}$. Предельным переходом отсюда получается, что неравенство (9.13) справедливо при всех $x \in E$. Таким образом, оператор сопряжения ограниченно действует в E, и в силу теоремы 8.3 выполнены условия (9.12).

4. Безусловные базисы.

Теорема 9.6. *Для того чтобы система Хаара была безусловным базисом в сепарабельном симметричном пространстве E, необходимо и достаточно выполнение условий* (9.12).

Доказательство. Как отмечалось выше (см. § 6, п. 6), из условий (9.12) вытекает, что пространство E является интерполяционным между некоторыми пространствами L_{p_0} и L_{p_1} $(1 < p_0 < p_1 < \infty)$. В силу сказанного в п. 3 система Хаара будет безусловным базисом в E.

Для доказательства необходимости рассмотрим подсистему системы Хаара, состоящую из функций $u_0(t) \equiv 1$ и $u_n(t) = h_{2n-1}^{(1)}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Ядром интегрального оператора, отвечающего частичной сумме $S_N x$ по системе $\{u_n\}$, будет функция

$$K_N(t, s) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t)\, u_n(s).$$

Зафиксируем t в интервале $(2^{-2k-1}, 2^{2k})$. Тогда $\varphi_n(t) = 2^{\frac{2n-1}{2}}$ при $n \leqslant k$ и $\varphi_n(t) = 0$ при $n > k$, и

$$K_N(t, s) = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{n=1}^{k} 2^{2n-1}, & 0 < s < 2^{-2k}, \\ 1 + \sum\limits_{n=1}^{j-1} 2^{2n-1} - 2^{2j-1}, & 2^{-2j} < s < 2^{-2j+1} \quad (j = k, k-1, \ldots, 1), \\ 1 + \sum\limits_{n=0}^{j} 2^{2n-1}, & 2^{-2j-1} < s < 2^{-2j} \quad (j = k-1, k-2, \ldots, 1), \\ 0, & 2^{-1} < s < 1. \end{cases}$$

Функция $K_N(t, s)$ при изменении s принимает поочередно положительные, а затем отрицательные значения на интервалах $(0, 2^{-2k})$, $(2^{-2k}, 2^{-2k+1})$, ..., $(2^{-2}, 2^{-1})$ и равна нулю на интервале $(2^{-1}, 1)$. Ее неопределенный интеграл по s

$$\int_0^\tau K_N(t, s)\,ds$$

будет непрерывной функцией, имеющей локальные минимумы в точках 2^{-2j+1} $(j=k, \ldots, 1)$. Первый из них равен

$$\left(1+\sum_{n=1}^{k} 2^{2n-1}+1+\sum_{n=1}^{k-1} 2^{2n-1}-2^{2k-1}\right)2^{-2k}=\frac{2}{3}(1+2^{2k-1})\,2^{-2k}.$$

Далее, интеграл от $K_N(t, s)$ по интервалу $(2^{-2j-1}, 2^{-2j+1})$ равен

$$\left(1+\sum_{n=1}^{j} 2^{2n-1}\right)2^{-2j-1}+\left(1+\sum_{n=1}^{j-1} 2^{2n-1}-2^{2j-1}\right)2^{-2j}>0$$
$$(j=k-1, \ldots, 1),$$

поэтому все локальные минимумы больше первого.

Рассмотрим функцию $\widetilde{K}_N(t,s)=\frac{1}{3}(1+2^{2k-1})\,\chi_{(0,2^{-2k+1})}(s)$. По построению

$$\int_0^\tau K_N(t, s)\,ds\geqslant\int_0^\tau \widetilde{K}_N(t, s)\,ds \quad (0<\tau\leqslant 1).$$

В силу свойства 18° перестановок тогда при $x=x^*$

$$S_N x(t)=\int_0^t K_N(t, s)\,x(s)\,ds\geqslant\int_0^1 K_N(t, s)\,x(s)\,ds=$$
$$=\frac{1}{3}(1+2^{2k-1})\int_0^{2^{-2k+1}} x(s)\,ds\geqslant\frac{1}{12}\,\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds$$
$$(-2^{-2k+1}<t<2^{-2k}).$$

Отсюда

$$S_N x(t) > \frac{1}{12}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\,ds\left(\sum_{k=1}^{N}\chi_{(2^{-2k+1},2^{-2k})}(t)\right).$$

В силу того, что система Хаара по условию является безусловным базисом, частные суммы, отвечающие ее подсистеме, равномерно ограничены $\|S_N x\|_E \leqslant C\|x\|_E$. Тогда

$$\left\|Hx\sum_{k=1}^{N}\chi_{(2^{-2k-1},2^{-2k})}\right\|_E \leqslant 12C\|x\|_E,$$

где H — оператор Харди — Литтльвуда.

Рассуждая аналогично тому, как при доказательстве теоремы, можно перейти к пределу при $N\to\infty$ и получить неравенство

$$\left\|Hx\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(2^{-2k-1},2^{-2k})}\right\|_{E''} \leqslant 12C\|x\|_E.$$

Очевидно, что $\sigma_2\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(2^{-2k-1},2^{-2k})} = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(2^{-2k},2^{-2k+1})}$. Далее функция $Hx(t)$ убывает, поэтому

$$Hx(t)\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(2^{-2k},2^{-2k+1})}(t) \leqslant \sigma_2\left[Hx\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(2^{-2k-1},2^{-2k})}\right](t).$$

Отсюда

$$\|Hx\chi_{(0,1/2)}\|_{E''} \leqslant 36C\|x\|_E.$$

Аналогично предыдущему

$$Hx \leqslant \sigma_2[Hx\chi_{(0,1/2)}].$$

Поэтому

$$\|Hx\|_{E''} \leqslant 72C\|x\|_E.$$

Так как $|Hx| \leqslant Hx^*$, то это неравенство справедливо при любом $x\in E$. В силу теоремы 6.7 и сказанного в п. 6 § 8, выполнено условие $\|\sigma_\tau\|_E = o(\tau)$ при $\tau\to\infty$. Ядра $K_N(t, s)$ симметричны, поэтому

$$\|S_N\|_E = \|S_N\|_{E'}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\sigma_\tau\|_{E^1} = o(\tau) \quad \text{при} \quad \tau \to \infty.$$

Так как E сепарабельно, то вложение E в E^{11} изометрично. Тогда в силу (4.36)

$$\tau\|\sigma_{1/\tau}\|_E = o(\tau) \text{ при } \tau \to \infty, \text{ т. е. } \|\sigma_\tau\|_E = o(1) \text{ при } \tau \to 0.$$

Теорема доказана.

В работе [127] анонсировано утверждение о том, что, если в симметричном пространстве имеется безусловный базис, то безусловный базис в нем образует и система Хаара. Таким образом, условия (9.12) являются необходимыми и достаточными для существования безусловного базиса в симметричном пространстве.

5. Ряды по системе Радемахера. Системой Радемахера на отрезке $[0, 1]$ называется ортонормированная система функций $r_k(t) = \operatorname{sign}\sin 2^{k-1}\pi t$. По каждой последовательности чисел $u = \{u_n\} \in l_2$ построим функцию

$$v(t) = Vu = \sum_{k=1}^{\infty} u_k r_k(t). \tag{9.14}$$

(Напомним, что при $\{u_n\} \in l_2$ ряд (9.14) сходится почти всюду, а при невыполнении этого условия — почти всюду расходится, см. [8]).

Таким образом, получается оператор из пространств последовательностей в пространства функций.

Теорема 9.7. *Пусть G — симметричное пространство последовательностей, удовлетворяющее условиям*

$$\|\tilde{\sigma}_n\|_G = o(n), \ \|\tilde{\sigma}_{1/n}\|_G = o(1/\sqrt{n}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9.15}$$

Если $u = \{u_n\} \in G$, то $\left\{\frac{v^{**}(e^{-n})}{n}\right\} \in G$ и

$$\left\|\left\{\frac{v^{**}(e^{-n})}{n}\right\}\right\|_G \leqslant C\|u\|_G. \tag{9.16}$$

Доказательство. Так как $|r_k(t)| \leqslant 1$, то

$$\|Vu\|_{L_\infty} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \|u\|_{l_1}.$$

Если $u \in l_2$, то согласно неравенству Хинчина функции Vu принадлежит всем пространствам L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, и более того (см. [8], т. I, стр. 342) при $\|u\|_{l_2}\leqslant 1$

$$\int_0^1 e^{\left(\frac{Vu(t)}{\lambda}\right)^2} dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{2k}$$

при любом $\lambda>0$. Так как $e^k \geqslant \frac{k^k}{k!}$, то при $\lambda_0=\sqrt{8e}$!

$$\int_0^1 e^{\left(\frac{Vu(t)}{\lambda_0}\right)^2} dt \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4e}{\lambda_0^2}\right)^k = 2.$$

Это неравенство означает, что в норме Люксембурга в пространстве Орлича L_H^*, построенном по N-функции $M(u)=e^{u^2}-1$ (см. [11]),

$$\|Vu\|_{L_M^*} \leqslant \sqrt{8e}.$$

Таким образом, оператор V ограниченно действует из l_1 в L_∞ и из l_2 в L_M^*. Применим теорему 8.2. В нашем случае

$$M_{\varphi_{E_0}}(t)=\sqrt{t} \quad \text{и} \quad M_{\varphi_{E_1}}(t)=t.$$

Поэтому из условий (9.15) вытекает, что пространство G удовлетворяет условию (8.17). Согласно формуле (4.27)

$$\varphi_{L_M^*}(t)=[\ln(1+1/t)]^{-1/2},$$

а $\varphi_{L_\infty}=\operatorname{sign} t$. Следовательно, уравнения (6.7)—(6.8) для определения функций $\varkappa(t)$ и $\delta(t)$ принимают вид

$$1=\varkappa(t)\,t \quad \text{и} \quad \delta(t)=(e^t-1)^{-1},$$

откуда $\varkappa(t)=t^{-1}$ и $\delta(t)=(e^t-1)^{-1}$. Вычисляем $\varkappa_n=\inf\limits_{n-1\leqslant t\leqslant n}\varkappa(t)=n^{-1}$ и $\delta_n=\sup\limits_{n-1\leqslant t\leqslant n}(e^t-1)^{-1}=(e^{(n-1)}-1)^{-1}$. Из неравенства (8.27) получаем, что

$$\left\|\left\{\frac{v^{**}((e^n-1)^{-1})}{n+1}\right\}\right\|_G \leqslant C\|\{u_n\}\|_G. \tag{9.17}$$

Пользуясь тем, что $V^{**}(at)\geqslant\frac{1}{a}V^{**}(t)$ при $a\geqslant 1$, из неравенства (9.17), получаем неравенство (9.16).

Утверждение теоремы 9.7 является точным в следующем смысле.

Теорема 9.8. *В предположениях* (9.15) *для всякой функции вида* (9.14) *справедливо неравенство*

$$\|\{u_n\}\|_G \leqslant \left\|\left\{\frac{v^{**}(e^{-n})}{n}\right\}\right\|_G.$$

Доказательство. Мы воспользуемся тем фактом (не приводя его доказательство), что функции

$$v_m(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k r_k(t) \quad \text{и} \quad y_m(t) = \sum_{k=1}^{m} \overset{*}{u}_k r_k(t)$$

равноизмеримы и, следовательно, $\overset{*}{v}_m(t) = \overset{*}{y}_m(t)$. Пользуясь свойством 11^0 перестановок, получаем, что $v^*(t) = y^*(t)$, где $y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \overset{*}{u}_k r_k(t)$. Отсюда, в частности, вытекает, что любая функция $v(t)$ вида (9.14) равноизмерима с функцией $-v(t)$ и, следовательно, $\operatorname{mes}\{t: v(t) \geqslant 0\} \geqslant 1/2$.

Функцию $y(t)$ представим в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^{i} \overset{*}{u}_k r_k(t) + \sum_{k=i+1}^{\infty} \overset{*}{u}_k r_k(t).$$

Первое слагаемое равно $\sum_{k=1}^{i} u_k^*$ на интервале $(0, 1/2^{i-1})$. Второе слагаемое периодично с периодом $1/2^{i-1}$, поэтому оно неотрицательно на множестве меры не меньше, чем $1/2^i$ на интервале $(0, 1/2^{i-1})$. Таким образом, $y(t) \geqslant \sum_{k=1}^{i} u_k^*$ на множестве меры не меньше, чем $1/2^i$. Тогда

$$v^*(t) = y^*(t) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \overset{*}{u}_k \chi_{(0,2^{-k}]}(t).$$

Вычисляем

$$v^*(2^{-n}) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \overset{*}{u}_k \geqslant n\overset{*}{u}_n.$$

Поэтому

$$\left\|\left\{\frac{v^{**}(e^{-n})}{n}\right\}\right\|_G \geqslant \left\|\left\{\frac{v^{**}(2^{-n})}{n}\right\}\right\|_G \geqslant \left\|\left\{\frac{v^{*}(2^{-n})}{n}\right\}\right\|_G \geqslant$$

$$\geqslant \|\{\overset{*}{u}_n\}\|_G = \|u\|_G.$$

ГЛАВА III

ШКАЛЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. Шкалы банаховых пространств. Родственные пространства

1. Шкала банаховых пространств

Определение 1.1. Семейство банаховых пространств E_α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta_0)$ называется *шкалой банаховых пространств*, если

1) при $\beta > \alpha$ пространство E_β плотно вложено в пространство E_α и, следовательно,

$$\|x\|_{E_\alpha} \leqslant C(\alpha, \beta) \|x\|_{E_\beta};$$

2) существует функция $C(\alpha, \beta, \gamma)$, конечная во всех точках области $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant \beta_0$ такая, что

$$\|x\|_{E_\beta} \leqslant C(\alpha, \beta, \gamma) \|x\|_{E_\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|x\|_{E_\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \tag{1.1}$$

для любого $x \in E_\gamma$.

Шкала пространств называется *компактной*, если вложение E_β в E_α при $\beta > \alpha$ компактно.

Если семейство E_α обладает свойством 1) и при $\alpha < \beta < \gamma$ пространство E_β является интерполяционным между E_α и E_γ типа $\mu = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ (см. гл. I, § 4, п. 3), то эти пространства образуют шкалу. Действительно, пусть f_0 — функционал из E'_{α_0}. Тогда (см. гл. I, § 2, п. 1) $f_0 \in E_\alpha'$ при всех $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$. Пусть $x \in E_\gamma$. Рассмотрим оператор $T_x u = f_0(u) x$, действующий в E_γ и во всех пространствах E_θ при $\theta < \gamma$. Найдем норму оператора T_x в пространствах E_θ при $\theta < \gamma$:

$$\|T_x\|_{E_\theta} = \sup_{u \in E_\theta} \frac{\|f_0(u) x\|_{E_\theta}}{\|u\|_{E_\theta}} = \|x\|_{E_\theta} \|f_0\|_{E'_\theta}. \tag{1.2}$$

Так как пространство E_β является интерполяционным типа μ между E_α и E_β, то

$$\|T_x\|_{E_\beta \to E_\beta} \leqslant C_1(\alpha, \beta, \gamma) \|T_x\|_{E_\alpha \to E_\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|T_x\|_{E_\gamma \to E_\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Подставляя в это неравенство выражение (1.2) для норм оператора T_x, получим неравенство (1.1).

В дальнейшем для сокращения обозначаем

$$\mu = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}; \tag{1.3}$$

при этом $\mu+\nu=1$ и $\mu\alpha+\nu\gamma=\beta$.

Неравенство (1.1) запишется в виде

$$\|x\|_{E_\beta} \leqslant C(\alpha, \beta, \gamma) \|x\|_{E_\alpha}^{\mu} \|x\|_{E_\gamma}^{\nu}.$$

2. Свойства шкал банаховых пространств. 1°. Если в шкале E_α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta_0)$ заменить индекс α на индекс α' по формуле $\alpha = k\alpha' + \theta$, где $k>0$, то пространства $F_{\alpha'} = E_{k\alpha'+\theta}$ будут образовывать шкалу по отношению к индексу α' на отрезке $\left[\frac{\alpha_0-\theta}{k}, \frac{\beta_0-\theta}{k}\right]$.

В связи с этим можно без ограничения общности считать $\alpha_0=0$ и $\beta_0=1$.

2°. Если в пространствах шкалы E_α ввести эквивалентные нормы, то после этого они также будут образовывать шкалу.

3°. Пусть на отрезке $[\alpha_0, \beta_1]$ дано семейство банаховых пространств E_α, образующих шкалу на отрезках $[\alpha_0, \beta_0]$ и $[\beta_0, \beta_1]$ $(\alpha_0 < \beta_0 < \beta_1)$. Для того чтобы пространства E_α образовывали шкалу на всем отрезке $[\alpha_0, \beta_1]$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $\alpha < \beta_0$ и $\gamma > \beta_0$ выполнялось неравенство

$$\|x\|_{E_{\beta_0}} \leqslant C(\alpha, \beta_0, \gamma) \|x\|_{E_\alpha}^{\mu} \|x\|_{E_\gamma}^{\nu}.$$

4°. Если дано семейство нормированных пространств, удовлетворяющих условиям 1) и 2) определения 1.1 и хотя бы одно из пространств является неполным, то будем говорить, что дана неполная шкала пространств. Рассмотрим пополнения $\bar{E}_\alpha$ пространств E_α. Пусть выполнено условие:

л) если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность из E_β и $\|x_n\|_{E_{\alpha_0}}\to 0$ при $n\to\infty$, то и $\|x_n\|_{E_\beta}\to 0$.

Тогда пространства $\{\bar{E}_\alpha\}$ при естественных вложениях $\bar{E}_\beta\subset\bar{E}_\alpha$ $(\alpha<\beta)$ образуют шкалу.

Часто встречается тот частный вид неполных шкал, когда все пространства E_α совпадают как множества: $E_\alpha=M$ $(\alpha_0<\alpha<\beta_0)$, но различаются нормами. Такую неполную шкалу называют *неполной шкалой с базой M*. Всякую шкалу $\{E_\alpha\}$ $(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\beta_0)$ можно получить пополнением неполной шкалы с базой E_{β_0} и нормами пространств E_α.

3. Нормальные шкалы.

Определение 1.2. Шкала банаховых пространств E_α $(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\beta_0)$ называется *нормальной*, если можно положить $C(\alpha,\beta)=C(\alpha,\beta,\gamma)\equiv 1$, т. е., если выполнены условия

1) $\|x\|_{E_\alpha}\leqslant\|x\|_{E_\beta}$ $(\alpha<\beta,\ x\in E_\beta)$;

2) $\|x\|_{E_\beta}\leqslant\|x\|^\mu_{E_\alpha}\|x\|^\nu_{E_\gamma}$.

Последнее неравенство говорит о том, что функция $\varphi_x(\beta)=\|x\|_{E_\beta}$ $(x\in E_\gamma)$ является логарифмически выпуклой на отрезке $[\alpha_0,\gamma]$.

Пусть $\{E_\alpha\}$ — неполная нормальная шкала с базой M, т. е. линейное пространство M, на котором задано семейство норм $\|x\|_{E_\alpha}$ $(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\beta_0)$, удовлетворяющее предыдущим неравенствам 1) и 2). Логарифмически выпуклая функция $\varphi_x(\alpha)=\|x\|_{E_\alpha}$ $(x\in M)$ непрерывна на отрезке $[\alpha_0,\beta_0]$, за исключением, быть может, его конца β_0. Если норму с индексом β_0 заменить на новую, положив

$$\|x\|^*_{E_{\beta_0}}=\lim_{\beta\to\beta_0}\|x\|_{E_\beta},\tag{1.4}$$

то снова получится нормальная шкала.

Из неравенств 1), 2) вытекает, что для всех $\beta<\beta_0$ выполнено условие л). Пространства, полученные пополнением множества M по нормам $\|x\|_{E_\alpha}$, образуют нормальную шкалу на всяком отрезке $[\alpha_0,\beta_1]$ с $\beta_1<\beta_0$, а если норма с индексом β_0 определена соотношением (1.4), то и на всем отрезке $[\alpha_0,\beta_0]$.

Определение 1.3. Нормальная шкала $\{E_\alpha\}$ $(\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\beta_0)$, для которой функция $\varphi_x(\alpha)=\|x\|_{E_\alpha}$

($x \in E_{\beta_0}$) непрерывна на отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$, называется *непрерывной нормальной шкалой.* При этом говорят, что шкала $\{E_\alpha\}$ соединяет пространства E_{α_0} и E_{β_0}.

4. Родственные пространства.

Определение 1.4. Банаховы пространства E_0 и E_1 называются *родственными*, если E_1 нормально вложено в E_0 и существует непрерывная нормальная шкала на отрезке $[0, 1]$, соединяющая эти пространства.

Лемма 1.1. *Если $\{E_\alpha\}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — нормальная шкала, то при $x \in E_1$ справедливо неравенство*

$$\lim_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_{01}}, \tag{1.5}$$

где E_{01} — пополнение пространства E_1 относительно пространства E_0.

Доказательство. По определению нормы в пространстве E_{01} существует такая последовательность элементов $x_n \in E_1$, что $\|x_n\|_{E_1} \to \|x\|_{E_{01}}$ и $x_n \to x$ в E_0. Тогда $\|x - x_n\|_{E_\alpha} \leqslant \|x - x_n\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x - x_n\|_{E_1}^{\alpha} \leqslant (\|x\|_{E_1} + \|x\|_{E_{01}})^\alpha \|x - x_n\|_{E_0}^{1-\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. В частности, $\|x_n\|_{E_\alpha} \to \|x\|_{E_\alpha}$. Выберем α так, что $\|x\|_{E_\alpha} \geqslant \lim\limits_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha} - \varepsilon$, а затем n настолько большим, что

$$\|x\|_{E_{01}} = \|x_n\|_{E_1} \geqslant \|x_n\|_{E_\alpha} \geqslant \|x\|_{E_\alpha} - \varepsilon \geqslant \lim_{\alpha \to 1} \|x\|_{E_\alpha} - 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε неравенство (1.5) доказано.

Следствие. *При $\beta < 1$ пространство E_β изометрически вложено в свое пополнение относительно пространства E_0.*

Действительно, для $x \in E_1$ функция $\|x\|_{E_\alpha}$ непрерывна при $\alpha < 1$, поэтому

$$\|x\|_{E_{0\beta}} \geqslant \lim_{\alpha \to \beta - 0} \|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{E_\beta}.$$

Всегда справедливо противоположное неравенство, следовательно, $\|x\|_{E_{0\beta}} = \|x\|_{E_\beta}$. Так как E_1 плотно в E_β, то это равенство распространяется на все элементы из E_β.

Теорема 1.1. *Пусть пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0. Для того чтобы пространство E_0 было родственным с пространством E_1, необходимо и достаточно, чтобы пространство E_1 было изометрически* *вложено в свое пополнение относительно пространства* E_0.

Доказательство необходимости. Если пространство E_0 родственно с пространством E_1, то существует непрерывная нормальная шкала $\{E_\alpha\}$, соединяющая эти пространства. По лемме 1.1 тогда $\|x\|_{E_1}= = \lim\limits_{\alpha\to 1} \|x\|_{E_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_{01}}$, и так как всегда справедливо обратное неравенство, то нормы пространств E_1 и E_{01} на E_1 совпадают.

Доказательство достаточности. Введем в линейном пространстве E_1 семейство норм по формуле

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_{f\in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_0'}^{1-\alpha}\,\|f\|_{E_1'}^{\alpha}}. \tag{1.6}$$

Величина $\|x\|_{E_\alpha}$, очевидно, обладает всеми свойствами нормы. Далее, при каждых $x\in E_1$ и $f\in E_0'$ функция

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_0'}^{1-\alpha}\,\|f\|_{E_1'}^{\alpha}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_0'}}\left(\frac{\|f\|_{E_0'}}{\|f\|_{E_1'}}\right)^{\alpha} \tag{1.7}$$

непрерывна и логарифмически выпукла по α на отрезке $[0, 1]$. Так как $\|f\|_{E_1'}\leqslant\|f\|_{E_0'}$ $(f\in E_0')$, то функция (1.7) является возрастающей функцией от α. Тогда sup всех функций (1.7) по $f\in E_0'$, т. е. $\|x\|_{E_\alpha}$, является непрерывной возрастающей логарифмически выпуклой функцией от α. Множество E_1 с нормами (1.6) является непрерывной неполной нормальной шкалой пространств с базой E_1. Далее, при $\alpha=0$

$$\|x\|_{E_{\alpha=0}} = \sup_{f\in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_0'}} = \|x\|_{E_0},$$

и в силу плотности E_1 в E_0 по норме E_0, пополнение E_1 по норме $\|x\|_{E_0}$ отождествляется с пространством E_0.

Из условий теоремы (1.1) и теоремы 2.1 гл. I вытекает, что множество E_0' является нормативным в пространстве E_1'. Поэтому

$$\|x\|_{E_{\alpha=1}} = \sup_{f\in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_1'}} = \|x\|_{E_1}.$$

Таким образом, пополнение пространства E_1 по нормам $\|x\|_{E_\alpha}$ дает непрерывную нормальную шкалу E_α, соединяющую пространство E_0 с пространством E_1.

Теорема доказана.

В силу теоремы 2.1 гл. I условие теоремы 1.1 допускает различные эквивалентные формулировки. Собирая их вместе, можно прийти к утверждению:

Теорема 1.2. *Для того чтобы нормально вложенное в пространство E_0 пространство E_1 было с ним родственным, необходимо и достаточно выполнение одного из эквивалентных условий:*

1°. *Условие теоремы* 1.1.

2°. *Пространство E_0' является нормативным для пространства E_1.*

3°. *Шар пространства E_1 замкнут в топологии, индуцируемой топологией пространства E_0.*

Учитывая лемму 1.3 гл. I, получаем

Следствие 1. *Если пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0, то пополнение E_{01} пространства E_1 относительно E_0 родственно с E_0.*

Следствие 2. *Если пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0 и полно относительно него, то пространства E_0 и E_1 родственны. В частности, рефлексивное пространство E_1 родственно с любым пространством, в которое оно вложено.*

Лемма 2.4 гл. I приводит к утверждению:

Следствие 3. *Если пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0 и сопряженное пространство E_0' плотно вложено в сопряженное пространство E_1', то пространства E_0 и E_1 родственны.*

Из теоремы 2.2 гл. I вытекает:

Следствие 4. *В условиях следствия 3 пространства E_0' и E_1' родственны.*

Следствие 5. *Пусть E_2 нормально вложено в E_1, а E_1 нормально вложено в E_0. Если E_0 и E_2 родственны, то E_1 и E_2 также родственны.*

Следствие 6. *Пусть E_2 родственно с E_1 и вложено в E_1 компактно, а E_1 нормально вложено в E_0. Тогда E_0 и E_2 являются родственными.*

5. Уплотнение нормальной шкалы с помощью относительного пополнения. Рассмотрим нормальную шкалу банаховых пространств E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Построим семейство пространств $E_{0\alpha}$, представляющих собой пополнение пространств E_α относительно содержащего их пространства E_0, и установим ряд свойств этого семейства.

1°. *При $\alpha<\gamma$ пространство $E_{0\gamma}$ вложено в пространство $E_{0\alpha}$ с константой вложения* 1.

Действительно, если $x\in E_{0\gamma}$, то существует такая последовательность $x_n\to x$ в E_0, что $\|x_n\|_{E_\gamma}=\|x\|_{E_{0\gamma}}$. Тогда $\|x_n\|_{E_\alpha}\leqslant\|x_n\|_{E_\gamma}=\|x\|_{E_{0\gamma}}$, откуда следует, что $x\in E_{0\alpha}$ и $\|x\|_{E_{0\alpha}}\leqslant\|x\|_{E_{0\gamma}}$.

2°. *Пополнение $E_{\alpha\gamma}$ пространства E_γ относительно пространства E_α $(\alpha<\gamma)$ совпадает с пространством $E_{0\gamma}$.*

Пусть $x\in E_{\alpha\gamma}$. Тогда найдется последовательность $x_n\to x$ в E_α такая, что $\|x_n\|_{E_\gamma}=\|x\|_{E_{\alpha\gamma}}$. В силу вложения $E_\alpha\subset E_0$ последовательность x_n сходится к x в E_0, поэтому $x\in E_{0\gamma}$ и $\|x\|_{E_{0\gamma}}\leqslant\|x\|_{E_{\alpha\gamma}}$. Обратно, если $x\in E_{0\gamma}$, то можно построить последовательность $x_n\to x$ в E_0 так, что $\|x_n\|_{E_\gamma}=\|x\|_{E_{0\gamma}}$. Воспользуемся теперь тем, что пространства E_α образуют нормальную шкалу. Имеем

$$\|x_n-x_m\|_{E_\alpha}\leqslant\|x_n-x_m\|_{E_0}^{1-\alpha/\gamma}\|x_n-x_m\|_{E_\gamma}^{\alpha/\gamma}\leqslant$$
$$\leqslant\|x_n-x_m\|_{E_0}^{1-\alpha/\gamma}(2\|x\|_{E_{0\gamma}})^{\alpha/\gamma}.$$

Таким образом, последовательность x_n фундаментальна в пространстве E_α, и в силу вложения $E_\alpha\subset E_0$ сходится в E_α к тому же элементу x. Это означает, что $x\in E_{\alpha\gamma}$ и $\|x\|_{E_{\alpha\gamma}}\leqslant\|x\|_{E_{0\gamma}}$ Из ранее доказанного обратного неравенства следует равенство $\|x\|_{E_{\alpha\gamma}}=\|x\|_{E_{0\gamma}}$.

Из свойства 2° и свойств относительного пополнения непосредственно вытекает

3°. *Пространство $E_{0\gamma}$ вложено в каждое пространство E_α при $\alpha<\gamma$ и не совпадает с ним (если не совпадали пространства E_α и E_γ).*

Отсюда получаем:

4°. *Если пространство E_α не полно относительно пространства E_0, т. е. $E_\alpha\neq E_{0\alpha}$, то пространства $E_{0\gamma}$ при $\alpha<\gamma$ вложены не плотно в пространство $E_{0\alpha}$.*

Действительно, пространство E_α родственно с пространством E_0, поэтому, если оно не полно относительно E_0, то в силу теоремы 1.2 оно является собственным подпространством пространства $E_{0\alpha}$. Но $E_{0\gamma} \subset E_\alpha$ при $\alpha < \gamma$, следовательно, $E_{0\gamma}$ не плотно в $E_{0\alpha}$.

5°. *При $\alpha < \beta < \gamma$ справедливо неравенство*

$$\|x\|_{E_{0\beta}} \leqslant \|x\|^{\mu}_{E_{0\alpha}} \|x\|^{\nu}_{E_{0\gamma}} \qquad (x \in E_{0\gamma}).$$

Пусть $x \in E_{0\gamma}$, $x_n \to x$ в E_0 и $\|x_n\|_{E_\gamma} = \|x\|_{E_{0\gamma}}$. Тогда

$$\|x_n\|_{E_\beta} \leqslant \|x_n\|^{\mu}_{E_\alpha} \|x_n\|^{\nu}_{E_\gamma} = \|x_n\|^{\mu}_{E_\alpha} \|x\|^{\nu}_{E_{0\gamma}}. \tag{1.8}$$

При доказательстве свойства 2° было показано, что $x_n \to x$ в E_α. Из теоремы 1.1 следует, что E_α изометрически вложено в $E_{0\alpha}$, поэтому $x_n \to x$ в $E_{0\alpha}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n будем иметь $\|x_n\|_{E_\alpha} \leqslant \leqslant \|x\|_{E_{0\alpha}} + \varepsilon$. Из (1.8) тогда следует, что

$$\|x\|_{E_{0\beta}} \leqslant (\|x\|_{E_{0\alpha}} + \varepsilon)^{\mu} \|x\|^{\nu}_{E_{0\gamma}},$$

и в силу произвольности ε

$$\|x\|_{E_{0\beta}} \leqslant \|x\|^{\mu}_{E_{0\alpha}} \|x\|^{\nu}_{E_{0\gamma}}.$$

Таким образом, семейство пространств $E_{0\gamma}$ обладает всеми свойствами нормальной шкалы, за исключением плотности вложения пространств друг в друга.

§ 2. Максимальные и минимальные нормальные шкалы

1. Максимальные нормальные шкалы банаховых пространств. Пусть пространство F_1 нормально вложено в пространство F_0. Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ все неполные непрерывные нормальные шкалы E_α с базой F_1 такие, что

$$\|x\|_0 \leqslant \|x\|_{F_0}, \qquad x \in F_1, \tag{2.1}$$

$$\|x\|_{E_1} \leqslant \|x\|_{F_1}, \qquad x \in F_1. \tag{2.2}$$

Заметим, что одна такая шкала всегда существует. Это — тривиальная шкала, для которой $\|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{F_0}$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$.

Введем теперь на F_1 семейство норм $\|x\|_\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ по формуле

$$\|x\|_\alpha = \sup\|x\|_{E_\alpha} \qquad (x\in F_1), \tag{2.3}$$

где sup берется по всем шкалам с описанным выше свойством. При фиксированной шкале E_α и заданном $x\in F_1$ функция $\|x\|_{E_\alpha}$ является возрастающей, логарифмически выпуклой и непрерывно зависящей от α на $[0, 1]$. Совокупность этих функций при заданном x равномерно ограничена:

$$\|x\|_{E_\alpha}\leqslant\|x\|_{E_1}\leqslant\|x\|_{F_1},$$

поэтому sup $\|x\|_{E_\alpha}$ этой совокупности функций будет функцией возрастающей, логарифмически выпуклой и непрерывной на $[0, 1]$. Пополнения пространства F_1 по нормам $\|x\|_{E_\alpha}$ будут образовывать на $[0, 1]$ непрерывную нормальную шкалу пространств $E_\alpha^{\max}$. Из (2.1), (2.3) и замечания о тривиальной шкале $\|x\|_{E_\alpha}=\|x\|_{F_0}$ следует, что $\|x\|_0 = \|x\|_{F_0}$ и, следовательно, пространства $E_0^{\max}$ и F_0 совпадают. Полученную шкалу $E_\alpha^{\max}$ назовем *максимальной нормальной шкалой*, построенной по пространствам F_0 и F_1 на отрезке $[0, 1]$.

Таким образом, максимальная нормальная шкала, построенная по нормально вложенным пространствам F_1 и F_0, обладает следующими свойствами: 1) $E_0^{\max}=F_0$ 2) пространство F_1 нормально вложено в пространство $E_1^{\max}$; 3) если для какой-либо непрерывной шкалы E_α на $[0, 1]$ пространство F_1 нормально вложено в E_1 и выполнено (2.1), то справедливо неравенство

$$\|x\|_{E_\alpha}\leqslant\|x\|_{E_\alpha^{\max}} \qquad (x\in F_1,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1). \tag{2.4}$$

Из последнего свойства очевидно, что максимальная нормальная шкала определяется единственным образом.

Если F_0 и F_1 родственны, то максимальная нормальная шкала, построенная по пространствам F_0 и F_1, соединяет эти пространства. Более сильным является утверждение:

Лемма 2.1. *Если пространство F_1 нормально вложено в пространство F_0, то пространство $E_1^{\max}$ совпадает с замыканием F_1 в его пополнении F_{01} относительно пространства F_0.*

Доказательство. В силу следствия 1 из теоремы 1.2 пространство F_{01} родственно с пространством F_0. Если $F_{0\alpha}$ — непрерывная нормальная шкала, соединяющая F_{01} с F_0 $(F_{00}=F_0)$, то, так как $\|x\|_{F_{01}}\leqslant\|x\|_{F_1}$ $(x\in F_1)$, для нее выполнены свойства (2.1) и (2.2). Поэтому $\|x\|_{F_{01}}\leqslant\|x\|_{E_1^{\max}}$.

Пусть теперь E_α — произвольная непрерывная нормальная шкала, обладающая свойством (2.2), и такая, что $E_0=F_0$. Для любого элемента $x\in F_1$ существует такая последовательность $x_n\to x$ в F_0, что $\|x_n\|_{F_1}=\|x\|_{F_{01}}$.

Тогда $\|x_n\|_{E_1}\leqslant\|x_n\|_{F_1}=\|x\|_{F_{01}}$. Это означает, что $\|x\|_{E_{01}}\leqslant\|x_n\|_{F_{01}}$. Пространство E_1 родственно с пространством E_0, поэтому в силу теоремы 1.2 E_1 изометрично вложено в E_{01}. Отсюда следует, что $\|x\|_{E_1}\leqslant\|x\|_{F_{01}}$ $(x\in F_1)$. Принимая теперь за E_α шкалу $E_\alpha^{\max}$ и учитывая ранее найденное неравенство, получаем равенство $\|x\|_{E_\alpha^{\max}}=$ $=\|x\|_{F_{01}}$ $(x\in F_1)$, которое и доказывает лемму.

Лемма 2.2. *Предположим, что пространство F_1 нормально вложено в пространство F_0, и на F_1 определен функционал $\Phi(x, \alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$, являющийся полунормой при фиксированном α и логарифмически выпуклой функцией от α при фиксированном x, для которого $\Phi(\chi, \alpha)\neq0$. Если $\Phi(\chi, 0)\leqslant\|\chi\|_{F_0}$ и $\Phi(\chi, 1)\leqslant\|\chi\|_{F_1}$, то*

$$\Phi(x, \alpha)\leqslant\|x\|_{E_\alpha^{\max}} \quad (x\in F_1,\ 0\leqslant\alpha\leqslant1). \tag{2.5}$$

Доказательство. Определим функционал $\Psi(x, \alpha)=\sup\limits_{\alpha_1<\alpha}\Phi(x, \alpha_1)$, $\Psi(x, 0)=\Phi(x, 0)$. Этот функционал является также полунормой при фиксированном α и непрерывной возрастающей логарифмически выпуклой функцией от α при фиксированном x. Кроме того, $\Psi(x, 0)\leqslant\|x\|_{F_0}$ и $\Psi(x, 1)\leqslant\|x\|_{F_1}$. Построим неполную непрерывную нормальную шкалу с нормой $\max\{\Psi(x, \alpha), \|x\|_{E_\alpha^{\max}}\}$. Эта шкала будет обладать свойствами (2.1), (2.2) и, следовательно, для нее справедливо неравенство (2.4), откуда вытекает (2.5).

Теорема 2.1. *Максимальная нормальная шкала $E_\alpha^{\max}$, построенная на отрезке* $[0, 1]$ *по пространствам* F_0 *и* F_1, *на всяком внутреннем отрезке* $[\alpha_1, \beta_1]$ *является максимальной шкалой, построенной по пространствам* $E_{\alpha_1}^{\max}$ *и* $E_{\beta_1}^{\max}$.

Доказательство. Пусть H_α — максимальная шкала, построенная по пространствам $E_{\alpha_1}^{\max}$ и $E_{\beta_1}^{\max}$ на отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$. Тогда

$$\|x\|_{E_\alpha^{\max}} \leqslant \|x\|_{H_\alpha} \quad \text{при} \quad x \in H_{\beta_1}^{\max} \quad \text{и} \quad \alpha \in (\alpha_1, \beta_1), \tag{2.6}$$

и $\|x\|_{E_\alpha^{\max}} = \|x\|_{H_\alpha}$ при α, равном α_1 и β_1. Построим на $[0, 1]$ семейство пространств E_α таких, что $E_\alpha = E_\alpha^{\max}$ при $\alpha \notin [\alpha_1, \beta_1]$ и $E_\alpha = H_\alpha$ при $\alpha \in [\alpha_1, \beta_1]$. В силу сказанного в п. 2 § 1 пространства E_α будут образовывать на $[0, 1]$ нормальную шкалу. Кроме того, эта шкала непрерывна и обладает свойствами (2.1) и (2.2), поэтому справедливо (2.4).

При $\alpha \in [\alpha_1, \beta_1]$ неравенство (2.4) в нашем случае переходит в неравенство

$$\|x\|_{H_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_\alpha^{\max}} (x \in F_1). \tag{2.7}$$

Так как $F_1 \subset E_1^{\max} \subset E_{\beta_1}^{\max}$, то из (2.6) и (2.7) следует, что $\|x\|_{H_\alpha} = \|x\|_{E_\alpha^{\max}}$ при $x \in F_1$ и $\alpha \in [\alpha_1, \beta_1]$. Но пространство F_1 плотно вложено как в пространства $E_\alpha^{\max}$, так и в пространства H_α, поэтому $H_\alpha = E_\alpha^{\max}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим два семейства банаховых пространств E_α и $F_{\alpha'}$, зависящих соответственно от параметров $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$ и $\alpha' \in [\alpha_0', \beta_0']$ и обладающих тем свойством, что при $\alpha < \beta$ пространство E_β плотно вложено в E_α (при $\alpha' < \beta'$ пространство $F_{\beta'}$ плотно вложено в $F_{\alpha'}$).

Определение 2.1. Будем говорить, что семейство E_α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta_0)$ обладает:

1) *интерполяционным свойством* по отношению к семейству банаховых пространств $F_{\alpha'}$, если тройка банаховых пространств $(E_{\alpha_0}, E_{\beta_0}, E_\alpha)$ $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \beta_0)$ будет интерполяционной по отношению к тройке $(F_{\alpha_0'}, F_{\beta_0'}, F_{\alpha'})$

где α' удовлетворяет равенству

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}=\frac{\alpha'-\alpha_0'}{\beta_0'-\alpha_0'}; \tag{2.8}$$

2) *нормально интерполяционным свойством* по отношению к семейству банаховых пространств $F_{\alpha'}$, если тройка банаховых пространств $(E_{\alpha_0}, E_{\beta_0}, E_\alpha)$ является нормально интерполяционной типа $\theta=\frac{\alpha-\alpha_0}{\beta_0-\alpha_0}$ по отношению к тройке $(F_{\alpha_0'}, F_{\beta_0'}, F_{\alpha'})$;

3) *строго интерполяционным свойством* по отношению к семейству $F_{\alpha'}$ $(\alpha'\leqslant\alpha'\leqslant\beta_0')$, если всякая его часть, состоящая из пространств, индекс которых пробегает любой отрезок $[\alpha_1, \beta_1]\subset[\alpha_0, \beta_0]$, обладает нормально интерполяционным свойством по отношению к соответствующей части семейства пространств $F_{\alpha'}$. Соответствие задается соотношением (2.8).

Теорема 2.2. *Максимальная нормальная шкала обладает строго интерполяционным свойством по отношению к любой нормальной шкале.*

Доказательство. Пусть $E_\alpha^{\max}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ — максимальная шкала, F_α $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ — произвольная нормальная шкала, и пусть A — линейный оператор, отображающий пространство $E_1^{\max}$ в F_1 для которого справедливы неравенства

$$\|Ax\|_{F_1}\leqslant C_1\|x\|_{E_1^{\max}} \qquad (x\in E_1^{\max}),$$

$$\|Ax\|_{F_0}\leqslant C_0\|x\|_{E_0^{\max}} \qquad (x\in E_1^{\max}).$$

Функция $C_0^{\alpha-1}C_1^{-\alpha}\|Ax\|_{F_\alpha}=\Phi(x, \alpha)$ обладает свойствами, указанными в лемме 2.2. Тогда из (2.5) следует неравенство $\Phi(x, \alpha)\leqslant\|x\|_{E_\alpha^{\max}}$ или

$$\|Ax\|_{F_\alpha}\leqslant C_0^{1-\alpha}C_1^{\alpha}\|x\|_{E_\alpha^{\max}}.$$

Таким образом, доказано, что шкала $E_\alpha^{\max}$ обладает на отрезке $[0, 1]$ нормально интерполяционным свойством по отношению к F_α. Так как $E_\alpha^{\max}$ является максимальной на любом отрезке $[\alpha_1, \beta_1]\subset[0, 1]$, то отсюда следует, что она обладает строго интерполяционным свойством.

2. Правильные шкалы. Пусть E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — семейство банаховых пространств таких, что E_β плотно вложено в E_α при $\alpha < \beta$. Введем на пространстве E_0', сопряженном к E_0, семейство норм $\|f\|_{E'_\alpha}$. Пополнение пространства E_0' по норме $\|f\|_{E'}$ обозначим через $\tilde{E}_\alpha$. Семейство $\{\tilde{E}_\alpha\}$ назовем *сопряженным* к семейству E_α. Подчеркнем, что пространства $\tilde{E}_\alpha$ сопряженного семейства могут не совпадать с пространствами E_α', сопряженными к E_α, если E_0' не плотно в E_α'. Пространство $\tilde{E}_\alpha$ является подпространством E_α'.

Заметим, что $\tilde{E}_\alpha \subset \tilde{E}_\beta$ при $\alpha < \beta$. Это непосредственно следует из конструкции пространства $\tilde{E}_\alpha$ и того, что E_α' вложено в E_β' при $\alpha < \beta$.

Определение 2.2. Непрерывная нормальная шкала E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ называется *правильной*, если норма в сопряженных пространствах E_α' является логарифмически выпуклой функцией от α, т. е. при $\alpha < \beta < \gamma$ и $f \in E_\alpha'$

$$\|f\|_{E'_\beta} \leqslant \|f\|^{\mu}_{E'_\alpha} \|f\|^{\nu}_{E'_\gamma}, \tag{2.9}$$

где $\mu = (\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)^{-1}$, $\nu = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)^{-1}$.

Правильную шкалу представляет семейство пространств $L_p(0, 1)$ $(1 \leqslant p_0 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty)$. В самом деле, семейство пространств $L_p(0, 1)$ $(p_0 \leqslant p \leqslant p_1)$ является нормальной шкалой E_α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$, если положить $\alpha = 1 - 1/p$. Норма в сопряженных пространствах $E_\alpha' = L_{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ будет в силу неравенства Гёльдера логарифмически выпуклой функцией от α.

Если пространства E_α образуют правильную шкалу, то пространства $\tilde{E}_\alpha$ представляют нормальную шкалу относительно индекса $\sigma = 1 - \alpha$ $(0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$. Эта шкала будет непрерывной. Действительно, функция

$$\varphi(\sigma) = \sup_{x \in E_1} \frac{f(x)}{\|x\|_{E_{1-\sigma}}} = \|f\|_{\tilde{E}_{1-\sigma}}$$

непрерывна слева в точке $\sigma = 1$, как sup возрастающих непрерывных функций от σ. Шкалу $\tilde{E}_{1-\sigma}$ $(\sigma = 1 - \alpha)$ будем называть *сопряженной шкалой*.

Очевидно, что шкала $\widetilde{E}_{1-\sigma}$ будет соединять пространства E_1' и E_0' при условии, что E_0' плотно вложено в E_1'.

Теорема 2.3. *Максимальная нормальная шкала правильна.*

Доказательство. Пусть $\alpha<\beta<\gamma$ и $f\in(E_\alpha^{\max})'$, где $E_\alpha^{\max}$ — максимальная шкала, соединяющая пространства E_0 и E_1. Так как $(E_\alpha^{\max})'\subset(E_\gamma^{\max})'$, то для всякого элемента $x\in E_\gamma^{\max}$ определен функционал

$$\Phi(x,\beta)=\frac{|f(x)|}{\|f\|^{\mu}_{(E_\alpha^{\max})'}\,\|f\|^{\nu}_{(E_\gamma^{\max})'}}\qquad(\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma),$$

где $\mu=(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)^{-1}$, $\nu=(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^{-1}$. Этот функционал является полунормой при фиксированном β и возрастающей логарифмически выпуклой функцией β при фиксированном x, для которого $\Phi(x,\beta)\not\equiv 0$. Кроме того,

$$\Phi(x,\alpha)\leqslant\|x\|_{E_\alpha^{\max}}\quad\text{и}\quad\Phi(x,\gamma)\leqslant\|x\|_{E_\gamma^{\max}}.$$

Так как шкала $E_\beta^{\max}$ является максимальной шкалой, соединяющей пространство $E_\alpha^{\max}$ с $E_\gamma^{\max}$, то на основании леммы 2.2 для функционала $\Phi(x,\beta)$ справедливо неравенство

$$\Phi(x,\beta)=\frac{|f(x)|}{\|f\|^{\mu}_{(E_\alpha^{\max})'}\,\|f\|^{\nu}_{(E_\gamma^{\max})'}}\leqslant\|x\|_{E_\beta^{\max}}\qquad(x\in E_\gamma^{\max}).$$

Пространство $E_\gamma^{\max}$ плотно в $E_\beta^{\max}$, поэтому из последнего неравенства следует, что

$$\|f\|_{(E_\beta^{\max})'}\leqslant\|f\|^{\mu}_{(E_\alpha^{\max})'}\,\|f\|^{\nu}_{(E_\gamma^{\max})'}.$$

3. Минимальная шкала пространств. При доказательстве теоремы 1.1, содержащей критерий родственности двух пространств E_0 и E_1, была построена непрерывная нормальная шкала пространств, полученных пополнением пространства E_1 по системе норм

$$\|x\|_{E_\alpha}=\sup_{f\in E_0'}\frac{|f(x)|}{\|f\|^{1-\alpha}_{E_0'}\,\|f\|^{\alpha}_{E_1'}}.\tag{2.10}$$

Если пространства E_0 и E_1 родственны, то эта шкала соединяет их. Назовем эту шкалу минимальной и обозначим ее пространства через $E_\alpha^{\min}$.

Теорема 2.4. *Пусть $E_1 \subset E_0$ и $F_1 \subset F_0$ — две пары родственных пространств. Минимальные шкалы $E_\alpha^{\min}$ и $F_\alpha^{\min}$ обладают нормально интерполяционным свойством по отношению друг к другу.*

Доказательство. Если линейный оператор A удовлетворяет условию

$$\|Ax\|_{F_0} \leqslant C_0 \|x\|_{E_0}, \quad \|Ax\|_{F_1} \leqslant C_1 \|x\|_{E_1} \quad (x \in E_1), \tag{2.11}$$

то сопряженный оператор A^* отображает пространство F_0' в E_0' и F_1' в E_1', причем справедливы неравенства

$$\|A^* f\|_{E_0'} \leqslant C_0 \|f\|_{F_0'}, \quad \|A^* f\|_{E_1'} \leqslant C_1 \|f\|_{F_1'}.$$

Пусть элемент $x \in E_1$; тогда

$$\|Ax\|_{F_\alpha^{\min}} = \sup_{f \in F_0'} \frac{|f(Ax)|}{\|f\|_{F_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{E_1'}^{\alpha}} = \sup_{f \in F_0'} \frac{|A^* f(x)|}{\|f\|_{F_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{F_1'}^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^{1-\alpha} C_1^{\alpha} \sup_{f \in F_0'} \frac{|A^* f(x)|}{\|A^* f\|_{E_0'}^{1-\alpha} \|A^* f\|_{E_1'}^{\alpha}} \leqslant C_0^{1-\alpha} C_1^{\alpha} \sup_{g \in E_0'} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{E_0'}^{1-\alpha} \|g\|_{E_1'}^{\alpha}} =$$

$$= C_0^{1-\alpha} C_1^{\alpha} \|x\|_{E_\alpha^{\min}}. \tag{2.12}$$

Определение 2.3. Пусть E_α $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$ и $\bar{E}_\alpha$ $(\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1)$ — две нормальные шкалы банаховых пространств, соединяющие пространство E_{α_0} с пространством E_{α_1}. Говорят, что *шкала E_α мажорирует шкалу $\bar{E}_\alpha$*, если для всякого элемента $x \in E_{\alpha_1}$ справедливо неравенство

$$\|x\|_{\bar{E}_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_\alpha} \quad (x \in E_{\alpha_1}, \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1).$$

Теорема 2.5. *Пусть E_0 и E_1 — два родственных пространства. Минимальная шкала $E_\alpha^{\min}$, построенная по пространствам E_0 и E_1, мажорируется любой правильной шкалой E_α, соединяющей пространства E_0 и E_1.*

Доказательство. Пусть $x \in E_1$. Пространства E_α и E_0 родственны, поэтому

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_\alpha'}}$$

(см. теорему 1.2). В силу правильности шкалы E_α

$$\|f\|_{E_\alpha'} \leqslant \|f\|_{E_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{E_1'}^{\alpha} \qquad (f \in E_0').$$

Тогда

$$\|x\|_{E_\alpha} \geqslant \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{E_1'}^{\alpha}} = \|x\|_{E_\alpha^{\min}}. \tag{2.13}$$

Замечание. При доказательстве теоремы 2.5 свойство (2.9) правильности шкалы было использовано лишь при $\alpha=0$ и $\gamma=1$.

Из теорем 2.4 и 2.5 следует, что всякая правильная шкала E_α обладает нормально интерполяционным свойством по отношению к любой минимальной шкале. Действительно, из неравенств (2.11) с помощью (2.12) и (2.13), получаем, что

$$\|Ax\|_{F_\alpha^{\min}} \leqslant C_0^{1-\alpha} C_1^{\alpha} \|x\|_{E_\alpha} \qquad (x \in E_1), \tag{2.14}$$

откуда следует наше утверждение. Справедлива более общая (см. [91])

Теорема 2.6. *Для того чтобы непрерывная нормальная шкала обладала строго интерполяционным свойством относительно любой минимальной шкалы, необходимо и достаточно, чтобы она была правильной.*

Следующее утверждение устанавливает связь между понятиями минимальной и максимальной шкалы.

Теорема 2.7. *Пусть $E_\alpha^{\min}$ — минимальная шкала, соединяющая пространства E_0 и E_1 рефлексивной пары. Если сопряженное к ней семейство $\widetilde{E}_{1-\sigma}^{\min}$ ($0 \leqslant \sigma \leqslant 1$) образует нормальную шкалу, то эта шкала является максимальной нормальной шкалой, соединяющей пространства $F_0 = \widetilde{E}_1$ и $F_1 = \widetilde{E}_0 = E_0'$.*

Доказательство. Пространства $\widetilde{E}_1$ и E_0' родственны. Пусть F_σ — какая-либо нормальная шкала, соединяющая пространства F_0 и F_1. Из плотного вложения $F_\sigma \subset F_0 = \tilde{E}_1$ следует вложение $(\tilde{E}_1)' \subset F_\sigma'$. Всегда имеется естественное вложение $E_1 \subset (\tilde{E}_1)'$, и, значит, $E_1 \subset F_\sigma'$. Тогда, пользуясь плотностью $F_1 = E_0'$ в F_σ при $x \in E_1$, получаем

$$\|x\|_{F_\sigma^*} = \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{F_\sigma}} \geqslant \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{F_0}^{1-\sigma} \|f\|_{F_1}^{\sigma}} =$$
$$= \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_1'}^{1-\sigma} \|f\|_{E_0'}^{\sigma}} = \|x\|_{E_{1-\sigma}^{\min}} \quad (x \in E_1). \qquad (2.15)$$

Далее пространства F_0 и F_σ родственны, поэтому множество $F_0' = (\tilde{E}_1)'$ является нормативным для F_σ. По условию теоремы $(\tilde{E}_1)' = E_1$ и, следовательно,

$$\|f\|_{F_\sigma} = \sup_{x \in (\tilde{E}_1)'} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{F_\sigma'}} = \sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{F_\sigma'}} \leqslant \sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_{1-\sigma}^{\min}}} .$$

Если теперь $f \in E_0'$, то величина, стоящая справа, будет равна $\|f\|_{\tilde{E}_{1-\sigma}}$. В силу того, что E_0' плотно в $\tilde{E}_{1-\sigma}$, из предыдущего неравенства следует вложение $\tilde{E}_{1-\sigma} \subset F_\sigma$ и неравенство

$$\|f\|_{F_\sigma} \leqslant \|f\|_{\tilde{E}_{1-\sigma}} \quad (f \in \tilde{E}_{1-\sigma}).$$

Если теперь F_σ — максимальная шкала, соединяющая пространства E_0' и $\tilde{E}_1$, то на E_0' выполнено противоположное неравенство, поэтому пространства F_σ и $\tilde{E}_{1-\sigma}$ совпадают.

Следствие. *Если минимальная шкала, соединяющая пространства рефлексивной пары E_0 и E_1,— правильна, то сопряженная к ней шкала является максимальной нормальной шкалой, соединяющей пространства $\tilde{E}_1$ и E_0'.*

В некотором смысле двойственным к теореме 2.7 является утверждение:

Теорема 2.8. *Пусть E_α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — непрерывная нормальная шкала и $\tilde{E}_\alpha$ сопряженное к ней семейство. Если для любого $f \in E_0'$ выполнено неравенство*

$$\|f\|_{\tilde{E}_\alpha} \leqslant \sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x\|_{E_1}^{\alpha}}, \qquad (2.16)$$

то E_α является максимальной нормальной шкалой, соединяющей пространства E_0 и E_1.

Доказательство. Если $E_\alpha^{\max}$ — максимальная нормальная шкала, построенная по пространствам E_0 и E_1, то $\|x\|_{E_\alpha} \leqslant \|x\|_{E_\alpha^{\max}}$. Отсюда следует, что $\|f\|_{(E_\alpha^{\max})'} \leqslant \|f\|_{\widetilde{E}_\alpha}$ при любом $f \in E_0'$. С другой стороны, в силу (2.16)

$$\|f\|_{(E_\alpha^{\max})'} = \sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_\alpha^{\max}}} \geqslant \sup_{x \in E_1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x\|_{E_1}^{\alpha}} \geqslant \|f\|_{\widetilde{E}_\alpha}.$$

Из полученных неравенств следует равенство: $\|f\|_{(E_\alpha^{\max})'} = \|f\|_{\widetilde{E}_\alpha}$ $(f \in E_0')$. Так как пространства E_0 и $E_\alpha^{\max}$ родственны, то

$$\|x\|_{E_\alpha^{\max}} = \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{(E_\alpha^{\max})'}} = \sup_{f \in E_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E_\alpha'}} = \|x\|_{E_\alpha} \qquad (x \in E_1).$$

§ 3. Шкала пространств Гёльдера

Основные понятия теории шкал хорошо иллюстрируются на классических примерах функциональных пространств, из которых мы выбираем лишь пространства Гёльдера. Для простоты рассматриваются функции на отрезке [0, 1].

1. Пространство Гёльдера. Пространства Гёльдера $C_{0,\alpha}(0, 1)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ являются промежуточными между пространством $C(0, 1)$ всех непрерывных на [0, 1] функций и пространством $C_1(0, 1)$ всех непрерывно дифференцируемых функций на [0, 1]. Они состоят из всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателями α:

$$|x(t) - x(\tau)| \leqslant c\,|t - \tau|^\alpha$$

при любых $t, \tau \in [0, 1]$. Норма в пространстве $C_{0,\alpha}(0, 1)$ определяется формулой

$$\|x\|_{C_{0,\alpha}} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + \sup_{0 \leqslant t, \tau \leqslant 1} \frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha}. \qquad (3.1)$$

Можно вводить эквивалентную норму по формуле

$$\|x\|_{C_{0,\alpha}} = |x(0)| + \sup_{0\leqslant t,\tau\leqslant 1} \frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}. \tag{3.2}$$

Если в пространстве C_1 вводить норму

$$\|x\|_{C_1} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|,$$

то пространство $C_{0,\alpha}$ с нормой (3.1) будет вложено в пространство C и в него будет вложено пространство C_1 с константами вложения 1: $C_1 \overset{1}{\subset} C_{0,\alpha} \overset{1}{\subset} C$.

Наличие в нормах (3.1) и (3.2) двух слагаемых приводит к некоторым неудобствам, поэтому мы будем рассматривать фактор-пространство пространства $C_{0,\alpha}$ по одномерному подпространству, состоящему из констант. Это фактор-пространство будем обозначать через H_α. Если в пространстве $C_{0,\alpha}$ ввести норму (3.2), то это фактор-пространство изометрично подпространству всех функций из $C_{0,\alpha}$, обращающихся в нуле в нуль. Таким образом, пространство H_α состоит из классов функций, отличающихся на константу, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка α, с нормой

$$\|x\|_{H_\alpha} = \sup_{0\leqslant t,\tau\leqslant 1} \frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \quad (0\leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{3.3}$$

Отметим, что пространство H_0 будет изометрически совпадать с факторизацией пространства C по подпространству констант, если в пространстве C ввести норму $\|x\|_C = |x(0)| + \max\limits_{0\leqslant t,\,\tau\leqslant 1} |x(t)-x(\tau)|$.

Очевидно, что при $\beta>\alpha$ пространство H_β вложено в пространство H_α. При $\alpha>0$ это вложение не будет плотным. Действительно, функция $x_0(t)=t^\alpha \in H_\alpha$, однако $\|x_0-x\|_{H_\alpha} \geqslant 1$ при всех $x\in H_\beta$. Конечно, все пространства H_α плотно вложены в пространство H_0.

Норма фиксированной функции $x\in H_1$ согласно формуле (3.3) будет непрерывной логарифмически выпуклой функцией от α, как sup непрерывных логарифмически выпуклых функций. Однако семейство H_α не образуют в нашем смысле шкалу пространств, так как они не вложены плотно друг в друга. Можно рассмотреть неполную нормальную шкалу с базой H_1 и нормами (3.3) и пополнить ее.

2. Шкала Гёльдера. Обозначим через $\overset{0}{H}_\alpha$ пополнение пространства H_1 по норме (3.3) пространства H_α. В силу того, что сказано в п. 3, § 1, пространства $\overset{0}{H}_\alpha$ образуют непрерывную нормальную шкалу, соединяющую пространства H_0 и H_1. Эту шкалу назовем *шкалой Гёльдера*.

Теорема 3.3. *Пространство* $\overset{0}{H}_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ *состоит из всех функций* (*классов*) *из* H_α, *для которых*

$$\lim_{|t-\tau|\to 0} \frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} = 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Все функции из H_1 очевидно обладают свойством (3.4). Пусть теперь $x_n \in H_1$ и $\|x - x_n\|_{H_\alpha} \to 0$. Для функции $x(t)$ имеем

$$\frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \leqslant \frac{|x(t)-x_n(t)-[x(\tau)-x_n(\tau)]|}{|t-\tau|^\alpha} + \\ + \frac{|x_n(t)-x_n(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \leqslant \|x-x_n\|_{H_\alpha} + \|x_n\|_{H_1} |t-\tau|^{1-\alpha}.$$

Выбирая сначала n так, чтобы было сколь угодно малым первое слагаемое, а затем $|t-\tau|$ так, чтобы таким же было второе слагаемое, получаем, что левая часть сколь угодно мала при достаточно малой величине $|t-\tau|$. Таким образом, всякая функция $x \in H_\alpha$ обладает свойством (3.4).

Пусть теперь x — произвольная функция из H_α, обладающая свойством (3.4). Покажем, что она принадлежит $\overset{0}{H}_\alpha$. Рассмотрим функции

$$x_n(t) = n \int_t^{t+1/n} x(\tau)\,d\tau - n \int_0^{1/n} x(\tau)\,d\tau \qquad (n = 1, 2),$$

полагая при этом $x(t) = x(1)$, если $t > 1$. Функции $x_n(t)$ непрерывно дифференцируемы и, следовательно, принадлежат H_1. Производя в первом интеграле замену переменной $\tau = \theta + t$, получаем

$$x_n(t) = n \int_0^{1/n} [x(t+\theta) - x(\theta)]\,d\theta.$$

Отсюда

$$x_n(t)-x(t)=n\int_0^{1/n}[x(t+\theta)-x(\theta)-x(t)]\,d\theta.$$

Обозначим $[x_n(t+h)-x(t+h)]-[x_n(t)-x(t)]=$ $=\Psi(x_n-x,\ h)$. При этом обозначении

$$\|x_n-x\|_{H_\alpha}=\sup_{0\leqslant t+h\leqslant 1}\frac{|\Psi(x_n-x,\ h)|}{h^\alpha}.$$

В силу условия (3.4) для всякого $\varepsilon>0$ можно выбрать такое $h_0>0$, что при $h\leqslant h_0$ выполнено неравенство $h^{-\alpha}|x(t+h)-x(t)|\leqslant\varepsilon/2$ для всех t. Тогда при $h\leqslant h_0$ и $n\geqslant 1$

$$h^{-\alpha}|\Psi(x_n-x,\ h)|=$$

$$=h^{-\alpha}n\left|\int_0^{1/n}[x(t+\theta+h)-x(t+h)-x(t+\theta)+x(t)]\,d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant n\int_0^{1/n}\left[\frac{|x(t+h+\theta)-x(t+\theta)|}{h^\alpha}+\frac{|x(t+h)-x(t)|}{h^\alpha}\right]d\theta\leqslant$$

$$\leqslant n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon.$$

Пусть теперь $h_0\leqslant h\leqslant 1$. В этом случае

$$h^{-\alpha}|\Psi(x_n-x,\ h)|\leqslant$$

$$\leqslant n\int_0^{1/n}\frac{\theta^\alpha}{h^\alpha}\left[\frac{|x(t+h+\theta)-x(t+h)|}{\theta^\alpha}+\frac{|x(t+\theta)-x(t)|}{\theta^\alpha}\right]d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 2n\|x\|_{H_\alpha}\int_0^{1/n}\frac{\theta^\alpha}{h^\alpha}\,d\theta\leqslant\frac{2\|x\|_{H_\alpha}}{(1+\alpha)h_0^\alpha n^\alpha},$$

и при достаточно большом n снова $h^{-\alpha}|\Psi(x_n-x,\ h)|\leqslant\varepsilon$. Таким образом, $\|x-x_n\|_{H_\alpha}<\varepsilon$ при достаточно большом n, т. е. $x\in H_\alpha^0$.

Лемма 3.1. *При $\beta>\alpha$ пространство H_β^0 компактно вложено в пространство H_α^0.*

Доказательство. Пусть x_n — ограниченная последовательность из H_β^0. Будем считать, что $x_n(0)=0$. Тогда последовательность $x_n(t)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна и, значит, компактна в C. Пусть $x_{n'}(t)$ — равномерно сходящаяся подпоследовательность. Покажем, что она фундаментальна в H_α^0. Действительно,

$$\frac{|x_{n'}(t)-x_{m'}(t)-x_{n'}(\tau)+x_{m'}(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}=$$

$$=|t-\tau|^{\beta-\alpha}\left|\frac{x_{n'}(t)-x_{n'}(\tau)}{|t-\tau|^\beta}-\frac{x_{m'}(t)-x_{m'}(\tau)}{|t-\tau|^\beta}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|t-\tau|^{\beta-\alpha}\left(\|x_{n'}\|_{H_\beta^0}+\|x_{m'}\|_{H_\beta^0}\right)<\varepsilon \qquad (3.5)$$

при $|t-\tau|<\left(\dfrac{\varepsilon}{2\max\limits_n\|x_n\|_{H_0^\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}=h$. В случае $|t-\tau|>h$ выражение слева в (3.5) может быть сделано меньше ε при достаточно больших m' и n' в силу равномерной сходимости последовательности $x_{n'}(t)$. При таких m' и n' $\|x_{n'}-x_{m'}\|_{H_\alpha^0}<\varepsilon$.

Замечание. То же доказательство показывает, что утверждение леммы справедливо и для пространств H_α.

Шкалу Гёльдера H_α^0 мы получили с помощью пополнения неполной шкалы с нормами пространств H_α. Семейство пространств H_α можно восстановить по шкале H_α^0 с помощью пополнения пространств H_α^0 относительно пространства H_0, описанного в п. 5 § 1.

Установим сначала одно вспомогательное утверждение. Пусть $0=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $x_N(t)$ — непрерывная функция, линейная на каждом отрезке $[t_{k-1}, t_k]$. Эта функция очевидно принадлежит пространству H_1.

Лемма 3.2. *Для непрерывной кусочно-линейной функции справедлива формула*

$$\|x_N\|_{H_\alpha}=\max_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}}\frac{|x_N(t_i)-x_N(t_j)|}{|t_i-t_j|^\alpha}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Обозначим правую часть в (3.6) через $\theta(x)$. Очевидно, что

$$\|x_N\|_{H_\alpha} = \sup_{0\leqslant t,\tau\leqslant 1} \frac{|x_N(t)-x_N(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \geqslant \max_{0\leqslant i,j\leqslant N} \frac{|x_N(t_i)-x_N(t_j)|}{|t_i-t_j|^\alpha} = \theta(x).$$

Если точки t и τ принадлежат отрезку $[t_{k-1}, t_k]$, где функция $x_N(t)$ линейна, то

$$\frac{|x_N(t)-x_N(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} = \\ = \left|\frac{x_N(t_k)-x_N(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right| |t-\tau|^{1-\alpha} \leqslant \frac{|x_N(t_k)-x_N(t_{k-1})|}{|t_k-t_{k-1}|^\alpha} \leqslant \theta(x).$$

Пусть для точек $\bar{t}$, t_{k-1} и t_k, где $\bar{t}\notin[t_{k-1}, t_k]$, доказано, что

$$\frac{|x_N(\bar{t})-x_N(t_{k-1})|}{|\bar{t}-t_{k-1}|^\alpha} \leqslant \theta(x) \quad \text{и} \quad \frac{|x_N(\bar{t})-x_N(t_k)|}{|\bar{t}-t_k|^\alpha} \leqslant \theta(x). \tag{3.7}$$

Покажем, что

$$\frac{|x_N(\bar{t})-x_N(t)|}{|\bar{t}-t|^\alpha} \leqslant \theta(x), \tag{3.8}$$

где $t=\lambda t_{k-1}+(1-\lambda)t_k$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ — произвольная точка отрезка $[t_{k-1}, t_k]$. Действительно, в силу линейности $x_N(t)$ на $[t_{k-1}, t_k]$ и неравенств (3.7)

$$\frac{|x_N(\bar{t})-x_N(t)|}{|\bar{t}-t|^\alpha} = \\ = \frac{|\lambda[x_N(\bar{t})-x_N(t_{k-1})]+(1-\lambda)[x_N(\bar{t})-x_N(t_k)]|}{|\lambda(\bar{t}-t_{k-1})+(1-\lambda)(\bar{t}-t_k)|^\alpha} \leqslant \\ \leqslant \frac{\lambda|\bar{t}-t_{k-1}|^\alpha+(1-\lambda)|\bar{t}-t_k|^\alpha}{|\lambda(\bar{t}-t_{k-1})+(1-\lambda)(\bar{t}-t_k)|^\alpha}\theta(x) \leqslant \theta(x).$$

Последнее неравенство следует из вогнутости степенной функции с показателем α $(0<\alpha\leqslant 1)$.

Пусть теперь $\tau\in[t_{i-1}, t_i]$, а $t\in[t_{k-1}, t_k]$. Неравенства (3.7), очевидно, справедливы при $\bar{t}=t_{i-1}$ и $\bar{t}=t_i$. Из предыдущего тогда следует, что для этих значений $\bar{t}$ справедливо неравенство (3.8). Отсюда по тем же соображениям следует неравенство

$$\frac{|x_N(\tau)-x_N(t)|}{|\tau-t|^{\alpha}}\leqslant\theta(x).$$

Таким образом, $\|x_N\|_{H_\alpha}\leqslant\theta(x)$, а значит, выполнено (3.6).

Теорема 3.4. *Пополнение пространства H относительно пространства H_0 совпадает с пространством H_α.*

Доказательство. Пусть $x\in H_\alpha$. Построим последовательность кусочно-линейных функций $x_N(t)$, равномерно сходящуюся на $[0, 1]$ к функции $x(t)$ при $N\to\infty$ так, что графики функций $x_N(t)$ вписаны в график функции $x(t)$. Тогда по лемме 3.2

$$\|x_N\|_{H_\alpha^0}=$$

$$=\max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}}\frac{|x_N(t_i)-x_N(t_j)|}{|t_i-t_j|^{\alpha}}=\max_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant N\\ i\neq j}}\frac{|x(t_i)-x(t_j)|}{|t_i-t_j|^{\alpha}}\leqslant\|x\|_{H_\alpha}.$$

Последовательность x_N принадлежит $H_1\subset H_\alpha^0$, сходится в H_0 к x и ограничена в H_α^0, поэтому x принадлежит пополнению H_α^0 относительно H_0. Обратно, если $x_n\to x$ в H_0 и $\|x_n\|_{H_\alpha^0}\leqslant M$, то при каждых t, $\tau\in[0, 1]$

$$\frac{|x_n(t)-x_n(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}}\leqslant M,$$

и в силу равномерной сходимости $x_n(t)$ к $x(t)$

$$\frac{|x(t)-x(\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}}\leqslant M,$$

т. е. $x\in H_\alpha$. Теорема доказана.

Таким образом, пространства H_α^0 не полны относительно пространства H_0 и в соответствии с тем, что сказано в п. 5 § 1, пространства H_α не плотно вложены друг в друга.

Для выяснения интерполяционных свойств шкалы Гёльдера нам придется изучить некоторые свойства сопряженных пространств к пространствам H_α. Мы обнаружим сначала эти свойства на конечномерных аналогах пространств Гёльдера. При фиксированном разбиении $0=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1$ отрезка $[0, 1]$ совокупность непрерывных кусочно-линейных функций, о которых говорилось в лемме 3.2, образует N-мерное подпространство пространства H_α, которое обозначим через H_α^N. Норма в пространстве H_α^N задается правой частью равенства (3.6). Обозначим через G_α^N сопряженное пространство к H_α^N. Этому пространству принадлежат функционалы

$$g_{t_i t_j} = x(t_i) - x(t_j).$$

Как это следует из (3.6), норма $\|g_{t_i t_j}\|_{G_\alpha^N} \leqslant \|g_{t_i t_j}\|_{H_\alpha'} \leqslant |t_i - t_j|^\alpha$. Пусть $t_i < t_j$; рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant t_i, \\ (t - t_i)\,|t_i - t_j|^{\alpha-1}, & \text{если } t_i \leqslant t \leqslant t_j, \\ |t_i - t_j|^\alpha, & \text{если } t_j \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Для нее $\|x_0\|_{H_\alpha} = \|x_0\|_{H_\alpha^N} = 1$ и $|g_{t_i t_j}(x_0)| = |t_i - t_j|^\alpha$. Таким образом,

$$\|g_{t_i t_j}\|_{G_\alpha^N} = |t_i - t_j|^\alpha. \tag{3.9}$$

Обозначим $f_{ij}(x) = |t_i - t_j|^{-\alpha} g_{t_i t_j}(x)$. Тогда $\|f_{ij}\|_{G_\alpha^N} = 1$, и формулу (3.6) для нормы в пространстве H_α^N можно записать в виде

$$\|x\|_{H_\alpha^N} = \max_{\substack{1 \leqslant i,\, j \leqslant N \\ i \neq j}} |f_{ij}(x)|. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что единичный шар пространства G_α^N совпадает с выпуклой оболочкой функционалов f_{ij}. Действительно, если f не принадлежит этой выпуклой оболочке, то найдется такой элемент $\bar{x} \in H_\alpha^N$, что $f(\bar{x}) > |f_{ij}(\bar{x})|$; но тогда в силу (3.10) $f(\bar{x}) > \|\bar{x}\|_{H_\alpha^N}$, т. е. $\|f\|_{G_\alpha^N} > 1$. Таким образом, все крайние точки единичного шара в G_α^N находятся среди функционалов f_{ij}.

Пусть S — некоторая грань единичной сферы в G_α^N. Это означает, что найдется такой элемент x_S с $\|x_S\|_{H_\alpha^N}=1$, что $f(x_S)=1$ при всех $f\in S$. Если функционал $f_{ij}\in S$, то никакой функционал вида f_{ki} не принадлежит S. Действительно, если $f_{ki}\in S$, то

$$f_{kj}(x_S)=\frac{x_S(t_k)-x_S(t_j)}{|t_k-t_j|^\alpha}=\frac{x_S(t_k)-x_S(t_i)}{|t_k-t_j|^\alpha}+\frac{x_S(t_i)-x_S(t_j)}{|t_k-t_j|^\alpha}=$$

$$=f_{ki}(x_S)\frac{|t_k-t_i|^\alpha}{|t_k-t_j|^\alpha}+f_{ij}(x_S)\frac{|t_i-t_j|^\alpha}{|t_k-t_j|^\alpha}=$$

$$=\frac{|t_k-t_i|^\alpha+|t_j-t_i|^\alpha}{|t_k-t_j|^\alpha}>1,$$

что противоречит тому, что $\|f_{kj}\|_{G_\alpha^N}=1$.

Таким образом, для системы функционалов $\{f_{ij}\}$, лежащих на грани S, множество первых индексов не пересекается с множеством вторых индексов.

Пусть теперь f — произвольный функционал с $\|f\|_{G_\alpha^N}=$ $=1$. Тогда он принадлежит некоторой грани S единичной сферы в G_α^N и, следовательно,

$$f=\sum_{i,j}\alpha_{ij}f_{ij}\qquad(f_{ij}\in S),$$

где $\alpha_{ij}\geqslant 0$ и $\sum\limits_{i,j}\alpha_{ij}=1$. Вычислим норму функционала f в пространстве G_0^N. Имеем

$$\|f\|_{G_0^N}\leqslant\sum_{i,j}\alpha_{ij}\|f_{ij}\|_{G_0^N}=\sum_{i,j}\alpha_{ij}|t_i-t_j|^{-\alpha}.$$

Рассмотрим теперь непрерывную кусочно-линейную функцию $\bar{x}\in H_\alpha^N$, равную 1 при тех t_i, для которых $\alpha_{ij}>0$, и нулю при остальных t_i. В силу того, что множества первых и вторых индексов, для которых $\alpha_{ij}>0$, не пересекаются, это определение функции $\bar{x}(t)$ не противоречиво. Очевидно, что $\|\bar{x}\|_{H_0^N}=1$ и

$$f(\bar{x})=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\frac{\bar{x}(t_i)-\bar{x}(t_j)}{|t_i-t_j|^\alpha}=\sum_{i,j}\alpha_{ij}|t_i-t_j|^{-\alpha}.$$

Мы показали, что

$$\|f\|_{G_0^N} = \sum_{i,j} a_{ij} |t_i - t_j|^{-\alpha}. \tag{3.11}$$

Пусть теперь $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Вычисляем

$$\|f\|_{G_\beta^N} \leqslant \sum_{i,j} a_{ij} \|f_{ij}\|_{G_\beta^N} = \sum_{i,j} a_{ij} |t_i - t_j|^{\beta-\alpha} =$$
$$= \sum_{i,j} (a_{ij}^{-1/\alpha} |t_i - t_j|)^{-(\alpha-\beta)} a_{ij}^{\beta/\alpha}.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\alpha/(\alpha-\beta)$ и α/β и учитывая (3.11), получаем

$$\|f\|_{G_\beta^N} \leqslant \left(\sum_{i,j} a_{ij} |t_i - t_j|^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \left(\sum_i a_{ij}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} = \|f\|_{G_0^N}^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}.$$

Напомним, что $\|f\|_{G_\alpha^N} = 1$. Для любого $f \in G_\alpha^N$ тогда получим неравенство

$$\|f\|_{G_\beta^N} \leqslant \|f\|_{G_0^N}^{(\alpha-\beta)/\alpha} \|f\|_{G_\alpha^N}^{\beta/\alpha}. \tag{3.12}$$

Мы подготовили материал для доказательства утверждения:

Лемма 3.3. *Для любого функционала $f \in H_0'$ справедливо неравенство*

$$\|f\|_{(H_\beta^0)'} \leqslant \|f\|_{H_0'}^{(\alpha-\beta)/\alpha} \|f\|_{(H_\alpha^0)'}^{\beta/\alpha}. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть $f \in H_0'$. Обозначим через x^0 функцию из H_β^0 с $\|x^0\|_{H_\beta^0} = 1$, для которой $f(x^0) > \|f\|_{(H_\beta^0)'} - \varepsilon$. Эту функцию можно сколь угодно точно приблизить в норме пространства H_0 непрерывной кусочно-линейной функцией $x_N^0(t)$, график которой вписан в график $x^0(t)$. Так как f непрерывен в пространстве H_0, то можно выбрать x_N^0 так, что $f(x_N^0) > \|f\|_{(H_\beta^0)'} - \varepsilon$; при этом, как показано при доказательстве теоремы 3.4, $\|x_N^0\|_{H_\beta^0} \leqslant 1$. Если через $\tilde{f}$ обозначить сужéние функционала f на подпространство H_β^N, то из предыдущего вытекает, что $\|\widetilde{f}\|_{G_\beta^N} > \|f\|_{(H_\beta^0)'} - \varepsilon$.

Из неравенства (3.13) тогда следует, что

$$\|f\|_{(H_\beta^0)'} - \varepsilon \leqslant \|\widetilde{f}\|_{G_\beta^N} \leqslant \|\widetilde{f}\|_{G_0^N}^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \|\widetilde{f}\|_{G_\alpha^N}^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqslant \|f\|_{(H_0)'}^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} \|f\|_{(H_\alpha^0)'}^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ лемма доказана.

Теорема 3.5. *Шкала Гёльдера H_α^0 является минимальной шкалой, соединяющей пространства H_0 и H_1.*

Доказательство. С помощью теоремы 2.5 показывается, что из неравенства (3.13) при $\alpha = 1$ следует, что шкала Гёльдера мажорирует минимальную шкалу, построенную по пространствам H_0 и H_1, т. е. $\|x\|_{H_\alpha^{\min}} \leqslant \|x\|_{H_\alpha^0}$ $(x \in H_1,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Докажем обратное неравенство. Напомним, что

$$\|x\|_{H_\alpha^{\min}} = \sup_{f \in H_0'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{H_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{H_1'}^{\alpha}}.$$

Как и выше, показывается, что для функционала $g_{\tau\tau'} = x(\tau) - x(\tau')$ норма $\|g_{\tau\tau'}\|_{H_\alpha} = |\tau - \tau'|^\alpha$. Поэтому

$$\|x\|_{H_\alpha^{\min}} \geqslant \sup_{0 \leqslant \tau, \tau' \leqslant 1} \frac{|g_{\tau\tau'}(x)|}{\|g_{\tau\tau'}\|_{H_0'}^{1-\alpha} \|g_{\tau\tau'}\|_{H_1'}^{\alpha}} =$$

$$= \sup_{0 \leqslant \tau, \tau' \leqslant 1} \frac{|x(\tau) - x(\tau')|}{|\tau - \tau'|^\alpha} = \|x\|_{H_\alpha^0}.$$

Из теорем 2.4 и 2.6 следует

Теорема 3.6. *Всякая минимальная шкала обладает нормально интерполяционным свойством относительно шкалы Гёльдера. Всякая правильная шкала обладает строго интерполяционным свойством относительно шкалы Гёльдера.*

В силу леммы 4.4 гл. I и теоремы 3.4 из того, что шкала Гёльдера представляет собой нормально интерполяционное семейство, вытекает, что семейство пространств H_α также является нормально интерполяционным.

ГЛАВА IV
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Введение

1. Пространства сильно измеримых функций со значениями в банаховом пространстве. Напомним (см. [26]), что функция $x(t)$, определенная на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ и принимающая значения в банаховом пространстве A, называется *сильно измеримой*, если существует последовательность конечнозначных функций на $\mathfrak{M}$, сходящаяся почти всюду к функции $x(t)$. Совокупность $S(\mathfrak{M}, \mu, A)$ всех сильно измеримых функций (классов) очевидно является линейным пространством. Это пространство метризуемо с помощью метрики

$$\rho(x, y) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{\|x(t) - y(t)\|_A}{1+\|x(t) - y(t)\|_A} \nu(t)\, d\mu(t), \ \nu(t)>0, \ \nu\in L_1(\mathfrak{M}, \mu).$$

Пространство $S(\mathfrak{M}, \mu, A)$ полное.

Для функций из $S(\mathfrak{M}, \mu, A)$ справедлив аналог теоремы Егорова, а из него выводится

Лемма 1. *Всякая сильно измеримая функция является пределом равномерно сходящейся последовательности измеримых счетнозначных функций.*

Для конечнозначной функции $x(t)$, принимающей ненулевые значения x_i на множествах e_i, определяется интеграл по формуле

$$\int x(s)\, d\mu = \sum x_i \mu(e_i).$$

Функция $x(t)$ называется *интегрируемой* (по Бохнеру), если существует последовательность конечнозначных функций $x_n(t)$, сходящаяся почти всюду к $x(t)$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int \|x(s) - x_n(s)\|\, d\mu = 0.$$

Интегралом от функции $x(s)$ называется предел

$$\lim_{n\to\infty}\int x_n(s)\,d\mu=\int x(s)\,d\mu.$$

Для того чтобы функция $x(t)$ была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно измеримой и чтобы

$$\|x\|\equiv\int\|x(s)\|\,d\mu<\infty. \tag{1}$$

Пространство всех интегрируемых функций с нормой (1) является банаховым и обозначается через $L_1(A)$.

Пусть E — идеальная структура функций на $\mathfrak{M}$. Обозначим через $E(A)$ совокупность всех сильно измеримых функций $x(t)$ со значениями в A, для которых функция $\|x(t)\|_A\in E$. Нетрудно проверить, что пространство $E(A)$ линейно.

Лемма 2. *Пространство $E(A)$ относительно нормы*

$$\|x\|_{E(A)}=\|\,\|x(t)\|_A\,\|_E$$

является банаховым.

Доказательство. Пусть $x_n\in E(A)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{E(A)}<$ $<\infty$. В силу полноты пространства E ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n(t)\|_A$ сходится в E, следовательно, его сумма почти всюду конечна. Из полноты пространства A вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x_n(t)$ почти всюду сходится к функции (сильно измеримой) $x(t)$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n(t)\|_A\geqslant\|x(t)\|_A. \tag{2}$$

Так как E — идеальная структура, то из этого неравенства следует, что

$$\|x\|_{E(A)}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_{E(A)}<\infty.$$

Таким образом, $x \in E(A)$. Применяя неравенство (2) к функции $x(t) - \sum_{n=1}^{N} x_n(t) = \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n(t)$, получим, что

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_n \right\|_{E(A)} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \| x_n \|_{E(A)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Лемма доказана.

Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 1 гл. II, устанавливается, что пространство $E(A)$ вложено в $S(\mathfrak{M}, \mu, A)$.

Лемма 1 допускает следующее уточнение:

Лемма 3. *Если $x \in S(\mathfrak{M}, \mu, A)$, а $\rho(t)$ — положительная на носителе x измеримая функция, то существует измеримая счетнозначная функция $\tilde{x}(t)$ такая, что $\|x(t) - \tilde{x}(t)\|_A \leqslant \rho(t)$ $(t \in \mathfrak{M})$.*

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}_n = \{t \in \mathfrak{M} : 2^n < \rho(t) \leqslant 2^{n+1}\}$. По лемме 1 существует счетнозначная функция $x_n(t)$ с носителем в $\mathfrak{M}_n$ такая, что $\|x(t) - x_n(t)\|_A < 2^n < \rho(t)$ при $t \in \mathfrak{M}_n$. Тогда функция $\tilde{x}(t) = x_n(t)$ при $t \in \mathfrak{M}_n$ и равная нулю вне носителя x обладает требуемыми свойствами.

Следствие. *В пространстве $E(A)$ плотно множество счетнозначных функций из $E(A)$.*

Действительно, если $x \in E(A)$, то, выбирая положительную на носителе E функцию $\rho(t)$ так, что $\|\rho\|_E \leqslant \varepsilon$, строим по лемме 3 такую счетнозначную функцию $\tilde{x}(t)$, что $\|x(t) - \tilde{x}(t)\|_A \leqslant \rho(t)$, откуда следует, что $\|x - \tilde{x}\|_{E(A)} \leqslant \|\rho\|_E \leqslant \varepsilon$ и что

$$\tilde{x} = x + (\tilde{x} - x) \in E(A).$$

Лемма 4. *Если структура E — правильная, то в пространстве $E(A)$ плотно множество конечнозначных функций из $E(A)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что любую счетнозначную функцию из $E(A)$: $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{e_k}(t)$ $(x_k \in A,\ e_i \cap e_j = \varnothing,\ i \neq j)$, можно аппроксимировать последовательностью конечнозначных. Полагаем $x_n(t)=\sum_{k=1}^{n} x_k\chi_{e_k}(t)$. Пересечение убывающих множеств $\tilde{e}_n=\bigcup_{k=n+1}^{\infty} e_k$ пусто, поэтому из абсолютной непрерывности нормы в E следует, что

$$\|x-x_n\|_{E(A)}=\|x\chi_{\tilde{e}_n}\|_{E(A)}=\|\chi_{\tilde{e}_n}(t)\|x(t)\|_A\|_E\to 0$$

при $n\to\infty$.

Нам понадобится некоторое видоизменение леммы 4.

Лемма 5. *Если $\mathfrak{M}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$, где измеримые множества $\mathfrak{M}_n$ не пересекаются и имеют конечные меры, то в $E(A)$ плотна совокупность конечнозначных функций, носители которых накрываются конечным числом множеств $\mathfrak{M}_n$.*

Доказательство. Пусть $x\in E(A)$. Тогда функция $x_N(t)=x(t)\chi_N(t)$, где $\chi_N(t)$ — характеристическая функция множества $\bigcup_{n=1}^{N}\mathfrak{M}_n$, сходится в $E(A)$ к x в силу абсолютной непрерывности нормы в E. Функция x_N по предыдущему может быть аппроксимирована конечнозначными функциями с носителем в $\bigcup_{n=1}^{N}\mathfrak{M}_n$.

2. Сопряженные пространства к пространствам $E(A)$. Естественно предполагать, что сопряженное пространство $(E(A))'$ должно совпадать с пространством $E'(A')$ в двойственности

$$\int\langle x(t), x'(t)\rangle\, d\mu,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — значение функционала из A' на элементе из A. Однако в общем случае это не верно. Например, такого совпадения нет в случае, когда $A=l_1$ и $E=L_2(0, 1)$ *). Мы укажем класс идеальных структур, для которых указанное совпадение имеет место.

Предположим, что $\mathfrak{M}=N_+=\{1, 2, \ldots\}$ и $\mu(\{n\})=\mu_n>0$.

*) См. Gretsky N. E., Uhe J. J. Jr., Bounded linear operators on Bangeh function spaces of vector-valued functions, Trans. Am. Math. Soc. **167** (1972), 263—274.

Теорема 1. *Если E — правильная структура на $\mathbf{N}_+$ (с носителем $=\mathbf{N}_+$), то пространство $(E(A))'$ изометрически изоморфно пространству $E'(A')$.*

Доказательство. Пусть $f \in [E(A)]'$. Рассмотрим числовую последовательность $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \in E$ и элемент $x_0 \in A$. Тогда последовательность $\varphi x_0 = \{\varphi_1 x_0, \varphi_2 x_0, \ldots\} \in E(A)$ и

$$|f(\varphi x_0)| \leqslant \|f\|_{(E(A))'} \|\varphi x_0\|_{E(A)} = \|f\|_{(E(A))'} \|\varphi\|_E \|x_0\|_A. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что функционал $f(\varphi x_0)$ является линейным ограниченным функционалом на E, и следовательно, в силу правильности E, существует числовая последовательность $\varphi'(x_0) = \{\varphi_1'(x_0), \varphi_2'(x_0), \ldots\} \in E'$, такая, что $f(\varphi x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n \varphi_n'(x_0) \mu_n$. Из единственности последовательности $\varphi'(x_0)$ следует, что она линейно зависит от $x_0 \in A$. Определим на A линейные функционалы $\langle x_0, f_n \rangle = \varphi_n'(x_0)$ $(x_0 \in A)$. Полагая в (3) $\varphi = \psi_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots)$, получаем

$$|\langle x_0, f_n \rangle| = |\varphi_n'(x_0)| = \mu_n^{-1} |f(\psi_n x_0)| \leqslant \mu_n^{-1} \|f\|_{E(A)'} \|\psi_n\|_E \|x_0\|_A,$$

откуда вытекает, что функционал φ_n' ограничен на A. Из определения получаем равенство

$$f(\varphi x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \langle x_0, f_n \rangle \mu_n.$$

Любая финитная последовательность $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots) \in E(A)$ представима в виде $\sum\limits_{k=1}^{N} \psi_k x_k$ и поэтому

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} f(\psi_k x_k) = \sum_{k=1}^{N} \langle x_k, f_k \rangle \mu_k. \qquad (4)$$

Возьмем теперь $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \geqslant 0$ из E и подставим в равенство (4) вместо x_k элементы $\varphi_k y_k$, где $\|y_k\|_A \leqslant 1$. Последовательность $x = \{\varphi_1 y_1, \varphi_2 y_2, \ldots, \varphi_N y_N, 0, \ldots\} \in E(A)$ и ее норма в $E(A)$ не превосходит $\|\varphi\|_F$ и, следовательно, $|f(x)| \leqslant \|f\|_{(E(A))'} \|\varphi\|_E$. Заставляя y_k независимо пробегать единичный шар пространства A, мы можем правую часть (4) сделать сколь угодно близкой к величине $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \|f_k\|_{A'_k}\mu$. Отсюда следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi_k \| f_k \|_{A'} \mu_k \leqslant \| f \|_{(E(A))'} \| \varphi \|_E.$$

Устремляя N к ∞, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \| f_k \|_{A'} \mu_k \leqslant \| f \|_{(E(A))'} \| \varphi \|_E.$$

Из неравенства вытекает, что последовательность $\tau f = \{f_1, f_2, \ldots\}$ принадлежит $E'(A')$ и

$$\| \tau f \|_{E'(A')} \leqslant \| f \|_{(E(A))'}. \tag{5}$$

Рассмотрим на пространстве $E(A)$ функционал

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k \rangle \mu_k. \tag{6}$$

Имеем

$$|\tilde{f}(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k \rangle \mu_k \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|_A \| f_k \|_{A'} \mu_k \leqslant \| x \|_{E(A)} \| \tau f \|_{E'(A')}.$$

Таким образом,

$$\| \tilde{f} \|_{(E(A))'} \leqslant \| \tau f \|_{E'(A')} \leqslant \| f \|_{(E(A))'}. \tag{7}$$

Ограниченные линейные функционалы f и $\tilde{f}$ в силу (4) и (6) совпадают на финитных последовательностях из $E(A)$, которые в силу леммы 4 плотны в $E(A)$. Следовательно, $f = \tilde{f}$.

Итак, каждому функционалу $f \in [E(A)]'$ отвечает функционал $\tau f = (f_1, f_2, \ldots) \in E'(A')$, причем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k \rangle \mu_k. \tag{8}$$

Из неравенств (5) и (7) следует, что $\|f\|_{(E(A))'}= \|\tau f\|_{E'(A')}$. Из построения видно, что оператор τ линеен.

Отметим, что равенство (8) однозначно определяет последовательность $\{f_k\}$, в чем можно убедиться, подставляя вместо x последовательности, имеющие лишь один ненулевой элемент.

Если теперь $\{f_k\}$ — произвольная последовательность из $E'(A')$, то, как показано ранее, формула (8) задает линейный функционал на $E(A)$. Из сказанного выше следует, что $\tau f=\{f_k\}$. Таким образом, отображение $f\to\tau f$ сюръективно, т. е. оператор τ осуществляет изометрический изоморфизм пространств $(E(A))'$ и $E'(A')$.

Теорема доказана.

Для случая структур на пространствах с непрерывными мерами положение осложняется. Приведем без доказательства одну частную теорему, которая будет использована в дальнейшем (см. [28], стр. 807).

Теорема 2. *Пусть $E=L_1$ на оси $(-\infty, \infty)$ с лебеговой мерой; тогда для любого линейного функционала F на пространстве $E(A)=L_1(A)$ найдется функция $\psi(t)$ со значениями в пространстве A', ограниченная по норме пространства A' и такая, что функция $\langle x, \psi(t)\rangle$ измерима при любом $x\in E$ и*

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle x(t), \psi(t)\rangle\,dt$$

для $x(t)=L_1(A)$. При этом $\|F\|_{(L_1(A))'}=\operatorname{vrai\,sup}\|\psi(t)\|_{A'}$.

§ 1. Комплексный метод интерполяции

1. Скалярные гармонические и аналитические функции в полосе. Напомним, что непрерывная гармоническая в единичном круге комплексной плоскости комплекснозначная функция $u(\zeta)$ $(|\zeta|\leqslant 1)$ представима через свои граничные значения с помощью интеграла Пуассона

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(e^{i\theta})\operatorname{Re}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta. \qquad (1.1)$$

Если $\varphi(\theta)$ — произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция, то формула

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta \tag{1.2}$$

определяет гармоническую внутри круга функцию, непрерывную в замкнутом круге и совпадающую с функцией $\varphi(\theta)$ на его границе (в точках $e^{i\theta}$).

Формула (1.2) сохраняет смысл и для любой ограниченной измеримой функции $\varphi(\theta)$. В этом случае функция $u(\zeta)$ также гармонична внутри круга и ограничена в нем; при этом для почти всех точек окружности по любому некасательному к окружности пути существует предельное значение функции $u(\zeta)$, равное $\varphi(\theta)$. Если это предельное значение обозначить через $u(e^{i\theta})$ (полагая эту величину произвольной в тех точках, где нет предельного значения), то для ограниченной гармонической функции остается справедливой формула Пуассона (1.1) (см., например, [5]).

Частным случаем формулы (1.2) является утверждение теоремы о среднем

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\,d\theta. \tag{1.3}$$

Возникает вопрос о том, когда формула (1.2) порождает аналитическую внутри круга функцию? Для этого необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты Фурье функции $\varphi(\theta)$ с отрицательными номерами равнялись нулю, т. е. чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)e^{in\theta}\,d\theta = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Эти условия можно формулировать в более компактной форме: для того, чтобы функция (1.2) была аналитической в круге, необходимо и достаточно, чтобы для любой аналитической внутри круга и непрерывной в замкнутом круге функции $\psi(\zeta)$, равной нулю при $\zeta=0$, выполнялось равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\,\psi(\theta)\,d\theta = 0. \tag{1.5}$$

Необходимость этого условия следует из того, что произведение $u(\zeta)\psi(\zeta)$ будет аналитической функцией и, следовательно, по формуле (1.3) интеграл равен $2\pi u(0)\psi(0)=0$. Это условие достаточно, так как из него вытекают условия (1.4) (при $\psi_n(\zeta)=\zeta^n$).

При конформном отображении единичного круга на какую-либо область гармонические функции переходят в гармонические и аналитические — в аналитические. Поэтому для каждой такой области имеется своя формула Пуассона с аналогичными, описанными выше, свойствами. Хорошо известна формула Пуассона для полуплоскости

$$u(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(s)\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{s-\zeta}\,ds. \tag{1.6}$$

Нас будут интересовать гармонические и аналитические функции внутри полосы $\Pi: 0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1$. Отображение $\zeta = e^{-\pi i z}$ конформно отображает эту полосу на полуплоскость. Делая соответствующие замены в интеграле (1.6), придем к формуле Пуассона вида

$$u(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u(i\tau)\,\frac{\sin \pi s}{\mathrm{ch}\,\pi(\tau - t) - \cos \pi s}\,d\tau + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u(1+i\tau)\,\frac{\sin \pi s}{\mathrm{ch}\,\pi(\tau - t) + \cos \pi s}\,d\tau,$$

где $z = s + it$. Ядра

$$\mu_0(z, \tau) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin \pi s}{\mathrm{ch}\,\pi(\tau - t) - \cos \pi s}$$

и

$$\mu_1(z, \tau) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin \pi s}{\mathrm{ch}\,\pi(\tau - t) + \cos \pi s}$$

неотрицательны и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau = 1 - \alpha, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau = \alpha. \tag{1.7}$$

Критерий аналитичности функции, представимой в виде

$$u(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau)\, \mu_0(z, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau)\, \mu_1(z, \tau)\, d\tau, \tag{1.8}$$

где функции $g_0(\tau)$ и $g_1(\tau)$ непрерывны и ограничены на $(-\infty, \infty)$, получается из критерия аналитичности для круга, сформулированного выше в следующей форме: для аналитичности функции $u(z)$ вида (1.8) внутри полосы необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $h(z)$, непрерывной в замкнутой полосе, аналитической внутри полосы, имеющей пределы при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$ и обращающейся в нуль в точке $z=\alpha$, выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(i\tau)\, g_0(\tau)\, \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(1+i\tau)\, g_1(\tau)\, \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau = 0.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}$ пространство всех функций, аналитических внутри полосы П, непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе, наделенное нормой,

$$\|u\|_{\mathfrak{F}} = \max\{\sup_{\tau} |u(i\tau)|,\ \sup_{\tau} |u(1+i\tau)|\}.$$

Из принципа максимума легко следует полнота этого пространства. Очевидно, что произведение двух функций из $\mathfrak{F}$ снова принадлежит $\mathfrak{F}$, поэтому пространство $\mathfrak{F}$ представляет собой банахову алгебру.

2. Абстрактные аналитические функции в полосе. Пусть A — комплексное банахово пространство. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{F}(A)$ всех функций со значениями в пространстве A, аналитических внутри полосы П, непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе. Если функция $f \in \mathfrak{F}(A)$, то для нее справедливо представление

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(i\tau)\, \mu_0(z, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(1+i\tau)\, \mu_1(z, \tau)\, d\tau. \tag{1.9}$$

Для доказательства этой формулы достаточно применить формулу (1.8) для скалярных функций $\varphi(f(z))$, где $\varphi \in A'$, и воспользоваться тем, что интегралы в (1.9) сходятся в пространстве A в силу ограниченности функции $f(z)$ и интегрируемости функций $\mu_0(z, \tau)$ и $\mu_1(z, \tau)$.

В пространстве $\mathfrak{F}(A)$ вводится норма

$$\|f\|_{\mathfrak{F}(A)} = \max\{\sup_\tau \|f(i\tau)\|_A, \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_A\},$$

после чего оно становится банаховым. (Напомним, что принцип максимума остается справедливым и для абстрактных аналитических функций (см. [26], стр. 114).) Пространство $\mathfrak{F}(A)$ является модулем над банаховой алгеброй $\mathfrak{F}$.

3. Пространство $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Пусть теперь A_0 и A_1 — банахова пара комплексных пространств. Через $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ обозначим линейное пространство, состоящее из всех функций $f(z)$, определенных в полосе $\Pi: 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, со значениями в пространстве A_0+A_1, обладающих свойствами:

1) функция $f(z)$ непрерывна и ограничена по норме пространства A_0+A_1 в замкнутой полосе Π;

2) функция $f(z)$ аналитична относительно нормы в пространстве A_0+A_1 внутри полосы;

3) функция $f(i\tau)$ принимает значения в пространстве A_0, непрерывна и ограничена по норме этого пространства, а функция $f(1+i\tau)$ принимает значения в A_1, непрерывна и ограничена по норме пространства A_1.

Линейное пространство $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ снабдим нормой

$$\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} = \max\{\sup_\tau \|f(i\tau)\|_{A_0}, \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{A_1}\}. \quad (1.10)$$

Заметим, что в силу принципа максимума для аналитической функции при $f \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$

$$\|f(z)\|_{A_0+A_1} \leqslant \max\{\sup_\tau \|f(i\tau)\|_{A_0+A_1}, \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{A_0+A_1}\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\sup_\tau \|f(i\tau)\|_{A_0}, \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{A_1}\} = \|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}. \quad (1.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что $f(z)=0$, если $\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}=0$.

Докажем полноту пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Пусть f_n — фундаментальная последовательность из $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Из неравенства (1.11) получается, что $\|f_n(z)-f_m(z)\|_{A_0+A_1}\leqslant \leqslant\|f_n-f_m\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}$ и, значит, последовательность $f_n(z)$ равномерно сходится в полосе Π по норме пространства A_0+A_1. Ее предел $f(z)$ будет функцией, обладающей свойствами 1) и 2). Функции $f_n(j+i\tau)$ $(j=0, 1)$ равномерно сходятся в норме пространства A_j, и в силу вложения $A_j\subset A_0+A_1$ их пределом будет функция $f(j+i\tau)$, непрерывная и ограниченная по норме A_j. Таким образом, $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и $\|f-f_n\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\to 0$ при $n\to\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ подпространство пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$, состоящее из всех функций $f(z)$, для которых $f(j+i\tau)$ стремятся к нулю при $|\tau|\to\infty$ в норме пространства A_j $(j=0, 1)$.

Если функция $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$, то, очевидно, функция

$$f_\delta(z)=e^{\delta z^2}f(z) \tag{1.12}$$

принадлежит $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ при любом $\delta>0$. Нетрудно проверить, что при $f\in\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ функции $f_\delta(z)$ при $\delta\to 0$ стремятся к $f(z)$ в норме пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$.

Для дальнейшего нам понадобится ряд свойств пространств $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$.

Лемма 1.1. *Если $f\in\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$, последовательность функций $g_n\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ ограничена в $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и обладает тем свойством, что функции $g_n(j+i\tau)$ равномерно сходятся на каждом ограниченном множестве изменения τ к функции $f(j+i\tau)$ в норме пространства A_j $(j=0, 1)$, то найдется такая последовательность положительных чисел s_n, что функции $e^{s_n z^2}g_n(z)$ сходятся в $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ к функции $f(z)$.*

Доказательство. Как было сказано выше, при $s_n\to 0$ функции $e^{s_n z^2}f(z)$ сходятся в $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ к функции $f(z)$, поэтому достаточно выбрать последовательность s_n так, что $s_n\to 0$ и $e^{s_n z^2}(g_n(z)-f(z))\to 0$ в пространстве $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_k(t)=\max_{j=0,1}\{\sup_{\substack{|\tau|\leqslant t\\ n\geqslant k}}\|f(j+i\tau)-g_n(j+i\tau)\|_{A_j}\}.$$

Функции $\varphi_k(t)$ возрастают по t, убывают по k и по условию леммы стремятся к нулю при $k\to\infty$ и каждом $t\geqslant 0$. Наконец, последовательность $\varphi_k(t)$ равномерно ограничена $\sup\limits_{0\leqslant t<\infty}\varphi_k(t)\leqslant C$.

Обозначим через $[0, a_n]$ максимальный отрезок, на котором $t\varphi_n(t) \leqslant 1$. Очевидно, $a_n \leqslant a_{n+1}$. Далее, $a_n \to \infty$, ибо в противном случае $a_n < a < \infty$ и $\varphi_n(a) \geqslant 1/a$, что противоречит тому, что $\varphi_n(a) \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем теперь $s_n = a_n^{-1}$. Тогда $s_n \to 0$ и

$$\| e^{s_n z^2} (g_n - f) \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} =$$

$$= \max_{j=0,1} \{ \sup_{\tau} e^{-s_n \tau^2 + j s_n} \| f(j + i\tau) - g_n(j + i\tau) \|_{A_j} \} \leqslant$$

$$\leqslant e^{s_1} \varphi_n(a_n) + e^{s_1} e^{-a_n} \max_{j=0,1} \{ \sup_{|\tau| \geqslant a_n} \| f(j + i\tau) - g_n(j + i\tau) \|_{A_j} \} \leqslant$$

$$\leqslant e^{s_1} a_n^{-1} + e^{s_1} e^{-a_n} (\| f \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} + \| g_n \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Лемма 1.2. *Для всякой функции $f \in \mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ можно построить последовательность функций $g_n \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$, удовлетворяющую условиям леммы* 1.1 *и состоящую из периодических по τ функций.*

Доказательство. Лемму достаточно доказать для функций вида (1.12), где $f \in \mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$. Определим функции

$$g_T(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\delta(z + ikT) \qquad (T \geqslant 1). \tag{1.13}$$

Для исследования сходимости этого ряда рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\delta(\tau + kT)^2}.$$

Сумма этого ряда периодически зависит от τ с периодом T, поэтому достаточно изучить сходимость ряда на отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Для таких τ имеем

$$\sum_0^\infty e^{-\delta(\tau + kT)^2} + \sum_1^\infty e^{-\delta(\tau - kT)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_0^\infty e^{-\delta k^2 T^2} + \sum_1^\infty e^{-\delta(k-1)^2 T^2} \leqslant 2 \sum_0^\infty e^{-\delta k^2} = C(\delta) < \infty.$$

Из неравенства

$$\| f_\delta (z + ikT) \| \leqslant e^{\delta\sigma^2 - \delta(\tau+kT)^2} \| f \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}, \qquad z = \sigma + i\tau,$$

справедливого, когда слева стоит норма пространства $A_0 + A_1$ при z внутри П, норма пространства A_j при $z = j + i\tau$ ($j = 0, 1$), следует сходимость ряда (1.13) в пространстве $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ к функции $g_T \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Более того, $\| g_T \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \leqslant e^\delta c(\delta) \| f \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}$. Очевидно, что функции $g_T(z)$ периодичны по τ с периодом T.

Покажем теперь, что функции $g_T(j + i\tau)$ при $T \to \infty$ сходятся к функциям $f_\delta(j + i\tau)$ по норме A_j равномерно на каждом ограниченном множестве изменения τ. Пусть $|\tau| \leqslant M$. Выберем $T \geqslant 2M$. Тогда

$$\| g_T (i\tau) - f_\delta (i\tau) \| A_0 \leqslant \sum e^{-\delta(\tau+kT)^2} \| f (i\tau + ikT) \|_{A_0} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{1}^{\infty} e^{-\delta(kT - T/2)^2} \| f \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 e^{-\frac{1}{4}\delta T^2} \sum_{1}^{\infty} e^{-\delta k(k-1)T^2} \| f \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \to 0 \quad \text{при } T \to \infty.$$

Лемма 1.3. *Если функция $h \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$ периодична по τ с периодом T, то она может быть представлена как предел в $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ функций вида*

$$h_N (z) = \sum_{k=-N}^{N} x_k e^{2\frac{k\pi}{T} z},$$

где $x_k \in A_0 \cap A_1$.

Доказательство. При каждом σ разложим функцию $h(\sigma + i\tau)$ в ряд Фурье по τ,

$$h (\sigma + i\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (\sigma) e^{i\frac{2k\pi}{T}\tau},$$

где

$$b_k (\sigma) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h (\sigma + i\tau) e^{-i\frac{2k\pi}{T}\tau} d\tau.$$

Обозначив $a_k(\sigma)=b_k(\sigma)e^{-\frac{2k\pi}{T}\sigma}$, получим

$$h(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\sigma)e^{\frac{2k\pi}{T}z}, \tag{1.14}$$

где

$$a_k(\sigma)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(\sigma+i\tau)e^{-\frac{2k\pi}{T}(\sigma+i\tau)}d\tau. \tag{1.15}$$

Последнюю формулу благодаря периодичности подынтегральной функции, можно еще записать так:

$$a_k(\sigma)=\frac{1}{mT}\int_{-mT/2}^{mT/2} h(\sigma+i\tau)e^{-\frac{2k\pi}{T}(\sigma+i\tau)}d\tau. \tag{1.16}$$

Покажем, что в действительности коэффициенты $a_k(\sigma)$ не зависят от σ. Пусть $0\leqslant\sigma_0\leqslant\sigma_1\leqslant 1$; обозначим через Γ_m контур, образованный отрезками $\{\sigma_0\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant\sigma_1,\ \operatorname{Im}z=\pm mT/2\}$ и $\{\operatorname{Re}z=\sigma_j\ (j=0,\ 1),\ |\operatorname{Im}z|<mT/2\}$. Интеграл от функции $h(z)e^{\frac{2k\pi}{T}z}$ по этому контуру равен нулю в силу ее аналитичности и непрерывности вплоть до границы полосы Π по норме пространства A_0+A_1. Тогда

$$-\frac{i}{mT}\int_{-mT/2}^{mT/2} h(\sigma_0+i\tau)e^{-\frac{2k\pi}{T}(\sigma_0+i\tau)}d\tau+$$

$$+\frac{i}{mT}\int_{-mT/2}^{mT/2} h(\sigma_1+i\tau)e^{-\frac{2k\pi}{T}(\sigma_1+i\tau)}d\tau+$$

$$+\frac{1}{mT}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} h\left(\sigma-i\frac{mT}{2}\right)e^{-\frac{2k\pi}{T}\left(\sigma-i\frac{mT}{2}\right)}d\sigma-$$

$$-\frac{1}{mT}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} h\left(\sigma+i\frac{mT}{2}\right)e^{-\frac{2k\pi}{T}\left(\sigma+i\frac{mT}{2}\right)}d\sigma=0.$$

Функция $h(z)e^{-\frac{2k\pi}{T}z}$ ограничена в полосе $0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1$ по норме пространства A_0+A_1, поэтому два последних слагаемых стремятся к нулю при $m\to\infty$. Первые два интеграла согласно (1.15) и (1.16) не зависят от m. Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим, что $a_k(\sigma_0)=a_k(\sigma_1)=a_k$. В частности,

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(i\tau)\,e^{\frac{-2ik\pi}{T}\tau}\,d\tau=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(1+i\tau)\,e^{-\frac{2k\pi}{T}(1+i\tau)}\,d\tau.$$

Так как функция $h(i\tau)$ непрерывна в топологии A_0, то значение первого интеграла принадлежит A_0. Аналогично, значение второго интеграла принадлежит A_1, поэтому $a_k\in A_0\cap A_1$.

Составим теперь для ряда (1.14) суммы Чезаро:

$$h_N(z)=\sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right)a_k e^{\frac{2k\pi}{T}z}=\sum_{k=-N}^{N} x_k e^{\frac{2k\pi}{T}z}.$$

Так как функции $h(i\tau)$ и $h(1+i\tau)$ непрерывны в топологиях пространств A_0 и A_1 соответственно, то в силу теоремы Фейера функции $h_N(i\tau)$ и $h_N(1+i\tau)$ при $N\to\infty$ равномерно по τ стремятся к функциям $h(i\tau)$ и $h(1+i\tau)$ в нормах A_0 и A_1. Таким образом,

$$\|h_N-h\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\to 0.$$

Объединение доказанных лемм приводит к следующему важному утверждению.

Теорема 1.1. *В пространстве $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ плотно множество функций вида*

$$g(z)=e^{\delta z^2}\sum_{n=1}^{N} x_n e^{\lambda_n z}, \tag{1.17}$$

где $x_n\in A_0\cap A_1$, λ_n — вещественны и $\delta>0$.

Замечание. Очевидно, что элементы x_n можно выбирать также из произвольного плотного в $A_0\cap A_1$ множества M.

4. Интерполяционный функтор $[A_0, A_1]_\alpha$. Обозначим через $[A_0, A_1]_\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ совокупность всех элементов $x\in A_0+A_1$, представимых в виде $x=f(\alpha)$ при некоторых функциях $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Эта совокупность линейна. Введем в ней норму

$$\|x\|_{[A_0,A_1]_\alpha}=\|x\|_\alpha=\inf_{f(\alpha)=x}\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}. \tag{1.18}$$

Обозначим через N_α линейное многообразие всех функций из $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$, обращающихся в нуль при $z=\alpha$. Из неравенства (1.11) следует, что N_α — замкнутое подпространство пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Определение нормы в $[A_0, A_1]_\alpha$ показывает, что это пространство изометрично фактор-пространству пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ по подпространству N_α, и следовательно, пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ — банахово.

Из неравенства (1.11) для функции $f(z)$ с $f(\alpha)=x$ получаем

$$\|x\|_{A_0+A_1}=\|f(\alpha)\|_{A_0+A_1}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)},$$

поэтому для $x\in[A_0, A_1]_\alpha$

$$\|x\|_{A_0+A_1}\leqslant\inf_{f(\alpha)=x}\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}=\|x\|_{[A_0,A_1]_\alpha}.$$

Отсюда следует, что пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ вложено в пространство A_0+A_1 с константой вложения 1.

Пространство $A_0\cap A_1$ вложено в $[A_0, A_1]_\alpha$. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим произвольный элемент $x\in A_0\cap A_1$ и функцию $f_x(z)=x$. Тогда $f_x\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и

$$\|x\|_\alpha\leqslant\|f_x\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}=\max\{\|x\|_{A_0}, \|x\|_{A_1}\}=\|x\|_{A_0\cap A_1}.$$

Таким образом, $A_0\cap A_1\overset{1}{\subset}[A_0, A_1]_\alpha\overset{1}{\subset}A_0+A_1$, и пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ оказывается промежуточным между A_0 и A_1.

Отметим, что отображение $f(z)\to f(1-z)$ является изометрией пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ на пространство $\mathfrak{F}(A_1, A_0)$, поэтому $[A_1, A_0]_\alpha=[A_0, A_1]_{1-\alpha}$.

Теорема 1.2 (интерполяционная). *Пусть A_0, A_1 и B_0, B_1 — две банаховы пары. Тогда тройка банаховых пространств $(A_0, A_1, [A_0, A_1]_\alpha)$ является нормально интерполяционной типа α по отношению к тройке пространств $(B_0, B_1, [B_0, B_1]_\alpha)$.*

Доказательство. Пусть оператор $T\in\pi(A_0, A_1; B_0, B_1)$. Рассмотрим элемент $x\in[A_0, A_1]_\alpha$. Для любого

$\varepsilon>0$ найдется $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ такая, что $f(\alpha)=x$ и $\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)}\leqslant\|x\|_\alpha+\varepsilon$.

Функция $g(z)=\|T\|^{z-1}_{A_0\to B_0}\ \|T\|^{-z}_{A_1\to B_1}\ T(f(z))$ принадлежит пространству $\mathfrak{F}(B_0, B_1)$. Далее,

$$\|g\|_{\mathfrak{F}(B_0,B_1)}=\max\{\sup_\tau\|g(i\tau)\|_{B_0}, \sup_\tau\|g(1+i\tau)\|_{B_1}\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\{\sup_\tau\|T\|^{-1}_{A_0\to B_0}\|T\|_{A_0\to B_0}\|f(i\tau)\|_{A_0},$$

$$\sup_\tau\|T\|^{-1}_{A_1\to B_1}\|T\|_{A_1\to B_1}\|f(1+i\tau)\|_{A_1}\}=\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant\|x\|_\alpha+\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\|x\|_\alpha+\varepsilon\geqslant\|g\|_{\mathfrak{F}(B_0,B_1)}\geqslant\|g(\alpha)\|_{[B_0,B_1]_\alpha}=$$

$$=\left\|\|T\|^{\alpha-1}_{A_0\to B_0}\|T\|^{-\alpha}_{A_1\to B_1}T(f(\alpha))\right\|_{[B_0,B_1]_\alpha}=$$

$$=\|T\|^{\alpha-1}_{A_0\to B_0}\|T\|^{-\alpha}_{A_1\to B_1}\|Tx\|_{[B_0,B_1]_\alpha}.$$

В силу произвольности ε

$$\|Tx\|_{[B_0,B_1]_\alpha}\leqslant\|T\|^{1-\alpha}_{A_0\to B_0}\|T\|^{\alpha}_{A_1\to B_1}\|x\|_{[A_0,A_1]_\alpha}.$$

Замечание 1. При вычислении нормы $\|x\|_{[A_0, A_1]_\alpha}$ по формуле (1.18) inf можно брать лишь по функциям из $\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$.

В самом деле, если $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и $f(\alpha)=x$, то функция $f_1(z)=e^{\delta(z^2-\alpha^2)}f(z)\in\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ и $f_1(\alpha)=x$ при любом $\delta>0$. Пусть теперь $\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant\|x\|_\alpha+\varepsilon$. При достаточно малом δ имеем $\|f_1\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}+\varepsilon$. Поэтому

$$\|x\|_\alpha=\inf_{\substack{\varphi\in\mathfrak{F}(A_0,A_1)\\ \varphi(\alpha)=x}}\|\varphi\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant\|f_1\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant\|x\|_\alpha+2\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

Замечание 2. Если $x\in A_0\cap A_1$ и $0<\alpha<1$, то при вычислении нормы по формуле (1.18) inf можно брать лишь по функциям вида $\sum_1^N a_k(z)x_k$, где $x_k\in A_0\cap A_1$.

Действительно, по предыдущему замечанию выберем функцию $f\in\mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ так, что $f(\alpha)=x$ и $\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant$

$\leqslant \|x\|_\alpha + \varepsilon$. Пусть $r(z)$ — функция, конформно отображающая полосу $0 < \operatorname{Re} z < 1$ на единичный круг так, что $r(\alpha) = 0$. Тогда $|r(i\tau)| = |r(1+i\tau)| = 1$, и поэтому функция

$$\frac{f(z) - e^{\delta(z-\alpha)^2}x}{r(z)} \in \mathfrak{F}_0(A_0, A_1).$$

По теореме 1.1 существует функция $g(z)$ вида (1.17) такая, что $\|[f(z) - e^{\delta(z-\alpha)^2}x]\, r^{-1}(z) - g(z)\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} < \varepsilon$. Положим $f_1(z) = e^{\delta(z-\alpha)^2}x + r(z) g(z)$. Эта функция имеет требуемый вид, $f_1(\alpha) = x$ и

$$\|f_1\|_{\mathfrak{F}(A_0 A_1)} \leqslant \|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} + \|f - f_1\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \leqslant \|x\|_\alpha + 2\varepsilon.$$

Теорема 1.3. *Пространство $A_0 \cap A_1$ плотно вложено в любое пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $x \in [A_0, A_1]_\alpha$ и $f \in \mathfrak{F}_0(A_0, A_1)$ с $f(\alpha) = x$. По теореме 1.1 при любом $\varepsilon > 0$ можно построить функцию $g(z)$ вида (1.17) так, что $\|f - g\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} < \varepsilon$. Тогда

$$\|x - g(\alpha)\|_{[A_0, A_1]_\alpha} = \|f(\alpha) - g(\alpha)\|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant \|f - g\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} < \varepsilon$$

и, поскольку функция $g(z)$ принимает значения в $A_0 \cap A_1$, теорема доказана.

Замечание 2 и теорема 1.3 показывают, что пространства $[A_0, A_1]_\alpha$ можно было бы определить следующим образом: рассмотреть пространство $\mathfrak{F}(A_0 \cap A_1)$, на элементах $x \in A_0 \cap A_1$ ввести норму

$$\|x\|_\alpha = \inf_{\substack{g(\alpha) = x \\ g \in \mathfrak{F}(A_0 \cap A_1)}} \|g\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)},$$

и пополнить пространство $A_0 \cap A_1$ по этой норме.

Рассмотрим, что представляют собой крайние пространства $[A_0, A_1]_0$ и $[A_0, A_1]_1$. Если $x \in [A_0, A_1]_0$, то $f(0) = x$ для некоторой $f \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Но $f(i\tau) \in A_0$ при всех τ, поэтому $f(0) = x \in A_0$. Кроме того,

$$\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} = \max\{\sup_\tau \|f(i\tau)\|_{A_0}, \sup_\tau \|f(1+i\tau)\|_{A_1}\} \geqslant$$
$$\geqslant \|f(0)\|_{A_0} = \|x\|_{A_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x\|_{[A_0,A_1]_0} \geqslant \|x\|_{A_0}. \tag{1.19}$$

С другой стороны, на основании теоремы 1.3 для $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_1 \in A_0 \cap A_1$ такой, что $\|x - x_1\|_{[A_0, A_1]_0} < \varepsilon$. Построим функции $f_n(z) = e^{z^2 - nz} x_1 \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$. Имеем $f_n(0) = x_1$ и

$$\|f_n\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)} = \max\{\|x_1\|_{A_0}, e^{1-n}\|x_1\|_{A_1}\}.$$

Следовательно,

$$\|x_1\|_{[A_0,A_1]_0} \leqslant \max\{\|x_1\|_{A_0}, e^{1-n}\|x_1\|_{A_1}\}.$$

Устремляя n к ∞, получаем, что $\|x_1\|_{[A_0, A_1]_0} \leqslant \|x_1\|_{A_0}$. В силу неравенства (1.19) $\|x - x_1\|_{A_0} \leqslant \|x - x_1\|_{[A_0, A_1]_0} < \varepsilon$ и поэтому

$$\|x\|_{[A_0, A_1]_0} \leqslant \|x_1\|_{[A_0, A_1]_0} + \varepsilon \leqslant \|x_1\|_{A_0} + \varepsilon \leqslant \|x\|_{A_0} + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε из этого неравенства и (1.19) вытекает равенство

$$\|x\|_{[A_0,A_1]_0} = \|x\|_{A_0}$$
$$(x \in [A_0, A_1]_0).$$

Таким образом, пространство $[A_0, A_1]_0$ изометрически совпадает с некоторым подпространством $\bar{A}_0$ пространства A_0.

Аналогично показывается, что пространство $[A_0, A_1]_1$ является подпространством $\bar{A}_1$ пространства A_1. Из теоремы 1.3 следует, что $[A_0, A_1]_j = \bar{A}_j$ $(j=0, 1)$ совпадает с замыканием $A_0 \cap A_1$ по норме пространства A_j. В частности, если $A_0 \cap A_1$ плотно в A_j, то $[A_0, A_1]_j = A_j$.

Из приведенного выше эквивалентного определения пространств $[A_0, A_1]_\alpha$ следует, что $[A_0, A_1]_\alpha = [\bar{A}_0, \bar{A}_1]_\alpha$, поэтому без ограничения общности всегда можно считать, что пересечение исходных пространств плотно в каждом из них.

Установим еще важные свойства пространства $[A_0, A_1]_\alpha$.

Лемма 1.4. *Для* $f \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$ *и* $\alpha \in (0, 1)$ *справедливы неравенства*

$$\ln \| f(\alpha) \|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} [\ln \| f(i\tau) \|_{A_0}] \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} [\ln \| f(1 + i\tau) \|_{A_1}] \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau, \tag{1.20}$$

$$\| f(\alpha) \|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(i\tau) \|_{A_0} \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau \right]^{1-\alpha} \times \\ \times \left[\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(1 + i\tau) \|_{A_1} \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau \right]^{\alpha}, \tag{1.21}$$

$$\| f(\alpha) \|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant \\ \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \| f(i\tau) \|_{A_0} \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \| f(1 + i\tau) \|_{A_1} \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau. \tag{1.22}$$

Доказательство. Выберем ограниченные бесконечно дифференцируемые на $(-\infty, \infty)$ функции $\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$ так, что $\varphi_0(\tau) \geqslant \ln \| f(i\tau) \|_{A_0}$ и $\varphi_1(\tau) \geqslant \ln \| f(1+i\tau) \|_{A_1}$. Построим аналитическую внутри Π функцию $\Phi(z)$, вещественная часть которой ограничена и непрерывна в замкнутой полосе, причем $\operatorname{Re} \Phi(i\tau) = \varphi_0(\tau)$ и $\operatorname{Re} \Phi(1 + i\tau) = \varphi_1(\tau)$. Для $\operatorname{Re} \Phi(z)$ получаем формулу

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\tau) \mu_0(z, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\tau) \mu_1(z, \tau)\, d\tau.$$

Из дифференцируемости функций $\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$ вытекает, что функция $\Phi(z)$ непрерывна в замкнутой полосе Π. Поэтому $e^{-\Phi(z)} f(z) \in \mathfrak{F}(A_0, A_1)$, и так как

$$\| e^{-\Phi(i\tau)} f(i\tau) \|_{A_0} = e^{-\varphi_0(\tau)} \| f(i\tau) \|_{A_0} \leqslant 1,$$

$$\| e^{-\Phi(1+i\tau)} f(1 + i\tau) \|_{A_1} = e^{-\varphi_1(\tau)} \| f(1 + i\tau) \|_{A_1} \leqslant 1,$$

то

$$\| e^{-\Phi(z)} f(z) \|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \leqslant 1$$

и, следовательно,

$$\| e^{-\Phi(\alpha)} f(\alpha) \|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\ln \| f(\alpha) \|_{[A_0, A_1]_\alpha} \leqslant \operatorname{Re} \Phi(\alpha) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\tau) \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\tau) \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau. \qquad (1.23)$$

Выбирая теперь убывающие последовательности функций $\varphi_0(\tau)$ и $\varphi_1(\tau)$, стремящиеся соответственно к $\ln \| f(i\tau) \|_{A_0}$ и $\ln \| f(1+i\tau) \|_{A_1}$ и переходя к пределу, получаем из (1.23) неравенство (1.20).

Из выпуклости функции e^t и равенств (1.7) вытекают неравенства

$$\exp\left[\frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [\ln \| f(i\tau) \|_{A_0}]\, \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(i\tau) \|_{A_0} \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau, \qquad (1.24)$$

$$\exp\left[\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [\ln \| f(1+i\tau) \|_{A_1}]\, \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau\right] \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \| f(1+i\tau) \|_{A_1} \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau. \qquad (1.25)$$

Умножая и деля первый и второй члены в правой части неравенства (1.20) на $1-\alpha$ и α соответственно, потенцируя и используя (1.24) и (1.25), получим неравенство (1.21). Наконец, если в неравенстве

$$\exp(a+b) = \exp[(1-\alpha) a (1-\alpha)^{-1} + \alpha b \alpha^{-1}] \leqslant \\ \leqslant (1-\alpha)\, e^{a(1-\alpha)^{-1}} + \alpha e^{b\alpha^{-1}} \qquad (1.26)$$

принять за a и b первое и второе слагаемые справа в (1.20) и снова воспользоваться неравенствами (1.24) и (1.25), то получится неравенство (1.22).

Лемма 1.5. *Пусть последовательность $f_n(z)$ ограничена в пространстве $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и сходится при каждом $i\tau$ из некоторого множества e положительной меры на мнимой полуоси в норме пространства A_0; тогда последовательность $f_n(\alpha)$ сходится в пространстве $[A_0, A_1]_\alpha$ $(0<\alpha<1)$.*

Доказательство. Применяя неравенство (1.20), имеем

$$\ln\|f_n(\alpha)-f_m(\alpha)\|_{[A_0,A_1]_\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant\int_e[\ln\|f_n(i\tau)-f_m(i\tau)\|_{A_0}]\,\mu_0(\alpha,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{\mathbf{R}\setminus e}[\ln\|f_n(i\tau)-f_m(i\tau)\|_{A_0}]\,\mu_0(\alpha,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[\ln\|f_n(1+i\tau)-f_m(1+i\tau)\|_{A_1}]\,\mu_1(\alpha,\tau)\,d\tau. \qquad (1.27)$$

Первый интеграл по условию стремится к $-\infty$ при $n, m\to\infty$, а вторые два ограничены сверху в силу ограниченности в $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ последовательности f_n и интегрируемости функций $\mu_0(\alpha, \tau)$ и $\mu_1(\alpha, \tau)$. Поэтому левая часть в (1.27) стремится к $-\infty$ и, следовательно, $\|f_n(\alpha)-f_m(\alpha)\|_{[A_0,A_1]_\alpha}\to 0$ при $n, m\to\infty$.

5. Условия рефлексивности пространства $[A_0, A_1]_\alpha$.

Теорема 1.4. *Если пространство A_0 рефлексивно, то пространства $[A_0, A_1]_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ также рефлексивны.*

Доказательство. В силу теоремы Л. Алаоглу достаточно показать, что единичный шар пространства $[A_0, A_1]_\alpha$ компактен в слабой топологии, а по теореме В. Л. Шмульяна шар будет обладать этим свойством, если всякая последовательность вложенных выпуклых замкнутых его подмножеств $Q_n\supset Q_{n+1}$ имеет непустое пересечение (см. [6], стр. 469). Выберем в каждом Q_n произвольный элемент x_n. Так как $\|x_n\|_{[A_0,A_1]_\alpha}\leqslant 1$, то существуют такие функции $f_n\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$, что $f_n(\alpha)=x_n$ и $\|f_n\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}\leqslant 2$. Рассмотрим сужения функций $f_n(z)$ на какой-либо отрезок I мнимой оси как элементы пространства $L_2(A_0)$. По теореме Р. Филлипса (см. [26]) это пространство рефлексивно, и поэтому всякий его шар компактен в слабой топологии. Так как указанная последовательность элементов $L_2(A_0)$ ограничена, то из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность с номерами n'. Тогда существует последовательность выпуклых комбинаций этих элементов, сходящаяся по норме пространства $L_2(A_0)$. Таким образом, из последовательности $f_{n'}(z)$ строится последовательность

$$g_k(z) = \sum_{n'>k} a_k^{(n')} f_{n'}(z)$$

($a_k^{(n')} \geqslant 0$, $\sum_{n'} a_k^{(n')} = 1$, и лишь конечное число коэффициентов $a_k^{(n')} \neq 0$ при фиксированном k), обладающая тем свойством, что суже́ния функций $g_k(z)$ на I сходятся в пространстве $L_2(A_0)$ и, следовательно, сходятся на I по мере. Тогда можно найти подпоследовательность $g_{k_i}(z)$, которая сходится почти всюду на I по норме пространства A_0. По построению $\|g_{k_i}\|_{\mathfrak{F}(A_0, A_1)} \leqslant 2$, поэтому по лемме 1.5 последовательность $g_{k_i}(\alpha) = \sum_{n'>k_i} a_{k_i}^{(n')} f_{n'}(\alpha) = \sum_{n'>k_i} a_{k_i}^{(n')} x_{n'}$ сходится в пространстве $[A_0, A_1]_\alpha$ к элементу y. В силу выпуклости множеств Q_n элемент $g_{k_i}(\alpha) \in Q_{k_i}$, а в силу их замкнутости элемент y принадлежит всем Q_n.

6. Пополнение пространств $[A_0, A_1]_\alpha$. Пространства $[A_0, A_1]_\alpha$ вложены в пространство A_0+A_1, поэтому можно рассмотреть их пополнения $[\widetilde{A_0, A_1}]_\alpha$ относительно этого пространства. Из интерполяционной теоремы 1.2 и леммы 4.5 гл. I непосредственно следует

Т е о р е м а 1.5. *Тройка банаховых пространств $(A_0, A_1, [\widetilde{A_0, A_1}]_\alpha)$ является нормально интерполяционной типа α по отношению к тройке пространств $(B_0, B_1, [\widetilde{B_0, B_1}]_\alpha)$.*

Можно привести пример, показывающий, что пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ может не быть полным относительно пространства A_0+A_1. Рассмотрим пространство $A_0 = L_\infty(0, 1)$ с нормой $\|x\|_0$ и пространство A_1, состоящее из всех функций с конечной нормой $\|x\|_1 = \operatorname{vrai\,sup} t^{-1}|x(t)|$. В п. 9 будет показано, что пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ в этом случае состоит из всех функций, для которых $\|x\|_\alpha = \text{vrai sup}\, t^{-\alpha}|x(t)|$ и $t^{-\alpha}|x(t)|\to 0$ при $t\to 0$. Пополнение же пространства $[A_0, A_1]_\alpha$ относительно A_0 (здесь $A_0 \supset A_1$), будет состоять из всех функций с конечной нормой $\|x\|_\alpha$. Действительно, если для такой функции положить $x_n(t) = \chi_{(1/n,\,1]}(t)x(t)$, то $x_n \in [A_0, A_1]_\alpha$,

$$\|x_n\|_{[A_0,A_1]_\alpha} \leqslant \|x\|_\alpha,$$

$$\|x_n - x\|_{A_0} = \text{vrai} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1/n} |x(t)| \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \|x\|_\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

7. Двойственность. Предположим, что $A_0 \cap A_1$ плотно в пространствах A_0 и A_1. Тогда сопряженные пространства A_0' и A_1' образуют банахову пару, вложенную в пространство $(A_0\cap A_1)'$, и на ней определен функтор $[A_0', A_1']_\alpha$. По теореме 1.3 пространство $A_0\cap A_1$ плотно в $[A_0, A_1]_\alpha$, поэтому имеет место вложение $([A_0, A_1]_\alpha)' \subset (A_0\cap A_1)'$. Таким образом, оба пространства $[A_0', A_1']_\alpha$ и $([A_0, A_1]_\alpha)'$ вложены в пространство $(A_0\cap A_1)'$, и можно ставить вопрос об их взаимном расположении в $(A_0\cap A_1)'$.

Лемма 1.6. *Имеет место вложение*

$$[A_0', A_1']_\alpha \overset{1}{\subset} ([A_0, A_1]_\alpha)'. \tag{1.28}$$

Доказательство. Пусть $u\in[A_0', A_1']_\alpha$. Это означает, что найдется такая функция $\psi\in\mathfrak{F}(A_0', A_1')$, что $\psi(\alpha) = u$. Функция $\psi(z)$ аналитична внутри П и непрерывна в замкнутой полосе по норме пространства $A_0' + A_1'$. Но по теореме 3.1 гл. II пространство $A_0'+A_1'$ изометрически совпадает с пространством $(A_0\cap A_1)'$, поэтому функция $\psi(z)$ аналитична в П и непрерывна в замкнутой полосе как функция со значениями в $(A_0\cap A_1)'$. Если теперь $f\in\mathfrak{F}(A_0\cap A_1)$, то скалярная функция $\langle f(z), \psi(z)\rangle$ аналитична в П и по принципу максимума

$$|\langle f(z), \psi(z)\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\sup|\langle f(i\tau), \psi(i\tau)\rangle|, \sup|\langle f(1+i\tau), \psi(1+i\tau)\rangle|\}.$$

Пусть $x\in A_0\cap A_1$. Для функции $f_1\in\mathfrak{F}(A_0\cap A_1)$ с $f_1(\alpha) = x$, отсюда следует, что

$$|\langle x, u\rangle| = |\langle f_1(\alpha), \psi(\alpha)\rangle| \leqslant \|f_1\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)} \|\psi\|_{\mathfrak{F}(A_0',A_1')}.$$

Беря inf по f_1 и ψ, получим (в силу замечания 2), что

$$|\langle x, u\rangle| \leqslant \|x\|_{[A_0,A_1]_\alpha}\|u\|_{[A_0',A_1']_\alpha} \qquad (x \in A_0 \cap A_1).$$

Это неравенство говорит о том, что функционал u как элемент пространства $(A_0 \cap A_1)'$ принадлежит множеству $([A_0, A_1]_\alpha)'$ и

$$\|u\|_{[A_0,A_1]_\alpha'} \leqslant \|u\|_{[A_0',A_1']_\alpha}.$$

Следствие. *По теореме* 2.2 *гл.* I *пространство* $([A_0, A_1]_\alpha)'$ *полно относительно пространства* $(A_0 \cap A_1)'$. *Поэтому из вложения* (1.28) *вытекает вложение*

$$\widetilde{[A_0', A_1']_\alpha} \overset{1}{\subset} ([A_0, A_1]_\alpha)', \tag{1.29}$$

где $\sim$ знак пополнения относительно $(A_0 \cap A_1)'$.

Нашей дальнейшей целью является доказательство того, что в этом включении имеется знак равенства.

Лемма 1.7. *Предположим, что функции* $\psi(z)$ $(0<\mathrm{Re}\, z<1)$, $\psi_0(\tau)$, $\psi_1(\tau)$ $(-\infty<\tau<\infty)$ *со значениями в пространстве* $A_0'+A_1'$ *обладают свойствами*:

1) *функция* $\psi(z)$ *аналитична и ограничена внутри* Π;

2) *для любого* $x \in A_0 \cap A_1$ *функция* $\langle x, \psi(z)\rangle$ *имеет граничные значения при* $z=i\tau$ *и* $z=1+i\tau$, *совпадающие со значениями функций* $\langle x, \psi_0(\tau)\rangle$ *и* $\langle x, \psi_1(\tau)\rangle$ *соответственно*;

3) $$\psi_j(\tau) \in A_j' \quad \textit{и} \quad \|\psi_j(\tau)\|_{A_j'} \leqslant c \quad (j=0, 1). \tag{1.30}$$

Тогда

$$\psi(\alpha) \in \widetilde{[A_0', A_1']_\alpha} \quad \textit{и} \quad \|\psi(\alpha)\|_{\widetilde{[A_0',A_1']_\alpha}} \leqslant c. \tag{1.31}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \int_{1/2}^{z} \psi(\xi)\, d\xi \qquad (0 < \mathrm{Re}\, z < 1).$$

Из ограниченности функции $\psi(z)$ следует, что функция $\varphi(z)$ может быть непрерывно по норме $A_0'+A_1'$ (или, что то же, по норме $(A_0 \cap A_1)'$) продолжена на замкнутую полосу. Далее, при $x \in A_0 \cap A_1$

$$\langle x, \varphi(z+ih)\rangle - \langle x, \varphi(z)\rangle = \int_z^{z+ih} \langle x, \psi(\xi)\rangle\, d\xi =$$

$$= i \int_0^h \langle x, \psi(z+i\tau)\rangle d\tau \qquad (0 < \operatorname{Re} z < 1).$$

Полагая $z = s + it$ и устремляя s к нулю, получаем

$$\langle x, \varphi(it+ih)\rangle - \langle x, \varphi(it)\rangle = i \int_0^h \langle x, \psi_0(t+\tau)\rangle\, d\tau.$$

В силу (1.30) выражение справа задает непрерывный линейный функционал на A_0, норма которого не превосходит величины ch. Следовательно,

$$\varphi(it+ih) - \varphi(it) \in A_0' \quad \text{и} \quad \left\| \frac{1}{h} [\varphi(it+ih) - \varphi(it)] \right\|_{A_0'} \leqslant c.$$

Аналогично показывается, что

$$\left\| \frac{1}{h} [\varphi(1+it+ih) - \varphi(1+it)] \right\|_{A_1'} \leqslant c.$$

Из последних неравенств вытекает, что функция $\Phi_h(z) = \frac{1}{h}[\varphi(z+ih) - \varphi(z)]$ принадлежит $\mathfrak{F}(A_0', A_1')$ и $\|\Phi_h\|_{\mathfrak{F}(A_0', A_1')} \leqslant c$. Отсюда следует, что

$$\Phi_h(\alpha) \in [A_0', A_1']_\alpha \quad \text{и} \quad \|\Phi_h(\alpha)\|_{[A_0', A_1']_\alpha} \leqslant c,$$

с другой стороны, $\Phi_h(\alpha) \to \psi(\alpha)$ при $h \to 0$ в пространстве $(A_0 \cap A_1)'$, поэтому выполнено (1.31).

Теорема 1.6. *Если пространство $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и A_1, то сопряженное пространство $([A_0, A_1]_\alpha)'$ изометрически совпадает с пространством $[\widetilde{A_0'}, \widetilde{A_1'}]_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $u \in ([A_0, A_1]_\alpha)'$. Поскольку пространство $[A_0, A_1]_\alpha$ определялось как фактор-пространство пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ по подпространству N_α, то функционал u индуцирует на $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ линейный функционал $\bar{u}$ с той же нормой, равный нулю на N_α.

Рассмотрим теперь отображение θ пространства $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ в пространство $L_1(A_0)\times L_1(A_1)$, определяемое формулой

$$\theta(f) = \{f(i\tau)\mu_0(\alpha, \tau), f(1+i\tau)\mu_1(\alpha, \tau)\}.$$

Это отображение линейно и взаимно однозначно. На его образе зададим линейный функционал λ по формуле

$$\langle\theta(f), \lambda\rangle = \langle f, \bar{u}\rangle.$$

В силу неравенства (1.21)

$$|\langle\theta(f), \lambda\rangle| = |\langle f, \bar{u}\rangle| = |\langle f(\alpha), u\rangle| \leqslant \|f(\alpha)\|_{[A_0, A_1]_\alpha}\|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'} \leqslant$$

$$\leqslant \|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\|f(i\tau)\|_{A_0}\mu_0(\alpha, \tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\|f(1+i\tau)\|_{A_1}\mu_1(\alpha, \tau)\,d\tau\right] =$$

$$= \|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'}\|\theta(f)\|_{L_1(A_0)\times L_1(A_1)}. \tag{1.32}$$

Таким образом, на образе отображения θ функционал λ является ограниченным по норме пространства $L_1(A_0)\times \times L_1(A_1)$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на все пространство $L_1(A_0)\times L_1(A_1)$. По теореме об общем виде линейного функционала на пространствах $L_1(A)$ (см. введение, теорема 2) найдутся две ограниченные функции $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ со значениями в пространствах A_0' и A_1' соответственно такие, что

$$\langle f, \bar{u}\rangle = \langle\theta(f), \lambda\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\langle f(i\tau)\mu_0(\alpha, \tau), \psi_0(\tau)\rangle d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}\langle f(1+i\tau)\mu_1(\alpha_0, \tau), \psi_1(\tau)\rangle d\tau. \tag{1.33}$$

При этом в силу неравенства (1.32)

$$\max_j\{\operatorname{vrai\,sup}\|\psi_j(\tau)\|_{A_j'}\} \leqslant \|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'}. \tag{1.34}$$

Пусть $x \in A_0 \cap A_1$. Рассмотрим функцию $\psi(x, z)$, определенную интегралом Пуассона:

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_0(\tau)\rangle \mu_0(z, \tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \langle x, \psi_1(\tau)\rangle \mu_1(z, \tau)\, d\tau. \tag{1.35}$$

Эта функция при фиксированном z линейно зависит от x, и в силу (1.34)

$$|\psi(x, z)| \leqslant \max_j \{\operatorname{vrai\,sup} |\langle x, \psi_j(\tau)\rangle|\} \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_{A_0 \cap A_1} \|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'}. \tag{1.36}$$

Поэтому существует функционал $\psi(z) \in (A_0 \cap A_1)'$ такой, что $\psi(x, z) = \langle x, \psi(z)\rangle$. Из (1.36) следует, что функция $\psi(z)$ ограничена в П. Покажем, что она аналитична внутри П. Для этого возьмем скалярную функцию $h(z)$, аналитическую внутри П, непрерывную в замкнутой полосе, имеющую пределы на $\pm i\infty$ и такую, что $h(\alpha) = 0$, и положим в (1.33) $f(z) = h(z)x$. Тогда

$$0 = \langle h(\alpha)x, u\rangle = \langle f(\alpha), u\rangle = \langle f, \bar{u}\rangle =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(i\tau)\langle x, \psi_0(\tau)\rangle \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} h(1 + i\tau)\langle x, \psi_1(\tau)\rangle \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau.$$

В силу сказанного в п. 1 отсюда следует, что функция $\langle x, \psi(z)\rangle$ аналитична при любом $x \in A_0 \cap A_1$, и значит, функция $\psi(z)$ аналитична по норме пространства $(A_0 \cap A_1)'$.

Функции $\psi(z)$, $\psi_0(z)$ и $\psi_1(z)$ удовлетворяют условиям леммы 1.7, поэтому $\psi(\alpha) \in \widetilde{[A_0', A_1']}_\alpha$ и

$$\|\psi(\alpha)\|_{\widetilde{[A_0', A_1']}_\alpha} \leqslant \|u\|_{([A_0, A_1]_\alpha)'}.$$

Полагая в равенстве (1.33) $f(z) \equiv x \in A_0 \cap A_1$, получаем в силу (1.35), что

$$\langle x, u\rangle = \psi(x, \alpha) = \langle x, \psi(\alpha)\rangle,$$

т. е. $\psi(\alpha)=u$ как элемент пространства $(A_0\cap A_1)'$, и следовательно, $u\in\widetilde{[A_0', A_1']}_\alpha$ и

$$\|u\|_{\widetilde{[A_0',A_1']}_\alpha}\leqslant\|u\|_{([A_0,A_1]_\alpha)'}.$$

В силу вложения (1.28) теорема доказана.

Замечание. Если пространство A_0 рефлексивно, то пространства $[A_0, A_1]_\alpha'$ и $\widetilde{[A_0', A_1']}_\alpha$ изометрически совпадают.

Действительно, это непосредственно вытекает из теорем 1.6, 1.4 и теоремы 2.3 гл. I.

8. Теорема о реитерации. По банаховой паре A_0, A_1 построим пространства $A_\alpha=[A_0, A_1]_\alpha$ и $A_\beta=[A_0, A_1]_\beta$ $(0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1)$. Эти два пространства снова образуют банахову пару, вложенную, например, в пространство A_0+A_1. Поэтому можно построить пространство $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$ $(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$.

Лемма 1.8. *Пространство* $[A_0, A_1]_s$, *где* $s=(1-\sigma)\alpha+\sigma\beta$, *вложено в пространство* $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$ *с константой вложения, не превосходящей единицы.*

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{F}(A_0, A_1)$ и $f(s)=x\in[A_0, A_1]_s$. Введем функцию $g(z)=f((1-z)\,\alpha+z\beta)$. Тогда $g(\sigma)=f(s)=x$ и $g(i\tau)=f(\alpha+i(\beta-\alpha)\tau)$ и $g(1+i\tau)=f(\beta+i(\beta-\alpha)\tau)$. Функция $f_\tau(z)=f(z+i(\beta-\alpha)\tau)$ при каждом фиксированном τ принадлежит $\mathfrak{F}(A_0, A_1)$, поэтому $g(i\tau)\in A_\alpha$ и $g(1+i\tau)\in A_\beta$. Далее

$$\|g(i\tau)\|_{A_\alpha}\leqslant\|f_\tau\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}=\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}.$$

Аналогично $\|g(1+i\tau)\|_{A_\beta}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}$. Отсюда следует, что $x\in[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$ и

$$\|x\|_{[A_\alpha,A_\beta]_\sigma}\leqslant\max\{\sup\|g(i\tau)\|_{A_\alpha},\ \sup\|g(1+i\tau)\|_{A_\beta}\}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(A_0,A_1)}.$$

Переходя к inf по f, получим, что

$$[A_0, A_1]_s\overset{1}{\subset}[A_\alpha, A_\beta]_\sigma. \tag{1,37}$$

Нас будут интересовать условия, когда имеется обратное к (1.37) включение. Для этого мы исследуем вопрос о вложении сопряженных пространств к тем, которые рассмотрены в лемме. Однако если пространство

$[A_0, A_1]_s$ не плотно в пространстве $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$, то сопряженные пространства не будут вложенными. В связи с этим сделаем дополнительное предположение о том, что пространство $A_0\cap A_1$ плотно в пространствах A_0, A_1 и в пространстве $A_\alpha\cap A_\beta$. В силу теоремы 1.3 пространство $A_\alpha\cap A_\beta$ плотно вложено в $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$, поэтому пространство $A_0\cap A_1$, а значит, и пространство $[A_0, A_1]_s$, плотно вложено в $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$.

Благодаря сделанному предположению пространства, сопряженные ко всем упомянутым пространствам, можно рассматривать как множества в пространстве $(A_0\cap A_1)'=A_0'+A_1'$.

Лемма 1.9. *При сделанном предположении пространства* $([A_0, A_1]_s)'$ *и* $([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'$ *совпадают.*

Доказательство. Из вложения (1.37) непосредственно следует вложение $([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'\overset{1}{\subset}([A_0, A_1]_s)'$.

По теореме 1.6 пространство $([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'$ изометрически совпадает с пространством $\widetilde{[A_\alpha', A_\beta']_\sigma}^{\alpha\beta}$, где $\sim\alpha\beta$ означает пополнение относительно пространства $A_\alpha'+A_\beta'$. Это последнее пространство вложено в $A_0'+A_1'$, а пространство $([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'$ по теореме 2.2 гл. I полно относительно пространства $(A_0\cap A_1)'=A_0'+A_1'$. Мы находимся в ситуации, рассмотренной в следствии 2 из леммы 1.6 гл. I, в силу которого $([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'=\widetilde{[A_\alpha', A_\beta']_\sigma}$, где здесь и в дальнейшем $\sim$ означает пополнение относительно пространства $A_0'+A_1'$.

Согласно лемме 1.8 имеется вложение $[A_0', A_1']_s\overset{1}{\subset}$ $\overset{1}{\subset}[[A_0', A_1']_\alpha, [A_0', A_1']_\beta]_\sigma$. Далее из теоремы 1.6 получаем $[A_0', A_1']_\alpha\overset{1}{\subset}\widetilde{[A_0', A_1']_\alpha}=A_\alpha'$ и $[A_0', A_1']_\beta\overset{1}{\subset}\widetilde{[A_0', A_1']_\beta}=A_\beta'$, поэтому $[A_0', A_1']_s\overset{1}{\subset}[A_\alpha', A_\beta']_\sigma$.

Переходя к пополнениям относительно пространства $A_0'+A_1'$, получаем, что $\widetilde{[A_0', A_1']_s}\overset{1}{\subset}\widetilde{[A_\alpha', A_\beta']_\sigma}$ или, что то же, $([A_0, A_1]_s)'\overset{1}{\subset}([A_\alpha, A_\beta]_\sigma)'$.

Мы получили два взаимно обратных вложения. Лемма доказана.

Из лемм 1.8 и 1.9 непосредственно вытекает

Теорема 1.7. *Если пространство $A_0\cap A_1$ плотно вложено в пространства A_0, A_1 и $A_\alpha\cap A_\beta$, то пространства*

$[A_0, A_1]_s$, *где* $s=(1-\sigma)\alpha+\sigma\beta$, *и* $[A_\alpha, A_\beta]_\sigma$ $(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$ *изометрически совпадают.*

9. Связь с теорией шкал. Рассмотрим семейство пространств $[E_0, E_1]_\alpha$, когда пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0. В этом случае пространство $E_0\cap E_1$ изометрически совпадает с пространством E_1, а пространство E_0+E_1 — с пространством E_0. По принципу максимума для функции $f\in\mathfrak{F}(E_0, E_1)$ получаем неравенство

$$\|f(z)\|_{E_0}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}. \tag{1.38}$$

Покажем, что при $\alpha<\beta$ пространство $E_\beta=[E_0, E_1]_\beta$ нормально вложено в пространство $E_\alpha=[E_0, E_1]_\alpha$. Пусть функция $f\in\mathfrak{F}(E_0, E_1)$ такова, что $\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}\leqslant\|x\|_{E_\beta}+\varepsilon$ и $f(\beta)=x$. Рассмотрим функцию $\Phi(z)=f\left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}z+\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right)$. Она аналитична внутри полосы Π и непрерывна в замкнутой полосе. Далее в силу (1.38)

$$\sup_\tau\|\Phi(i\tau)\|_{E_0}=\sup_\tau\left\|f\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}+i\,\frac{1-\beta}{1-\alpha}\tau\right)\right\|_{E_0}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}$$

и

$$\sup_\tau\|\Phi(1+i\tau)\|_{E_1}=\sup_\tau\left\|f\left(1+i\,\frac{1-\beta}{1-\alpha}\tau\right)\right\|_{E_1}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}.$$

Следовательно, $\Phi\in\mathfrak{F}(E_0, E_1)$ и $\|\Phi\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}$. Наконец, $\Phi(\alpha)=f(\beta)=x$. Это означает, что $x\in E_\alpha$ и

$$\|x\|_{E_\alpha}\leqslant\|\Phi\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}\leqslant\|x\|_{E_\beta}+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε $\|x\|_{E_\alpha}\leqslant\|x\|_{E_\beta}$ $(x\in E_\beta)$ и в силу плотности E_1 во всех пространствах E_α (теорема 1.3) пространство E_β нормально вложено в пространство E_α.

Пространства $[E_0, E_1]_j$ $(j=0, 1)$ совпадают с пространствами E_j.

Докажем, что функция $\|x\|_{E_\alpha}$ $(x\in E_1)$ логарифмически выпукло зависит от α. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\left(\frac{\|x\|_{E_0}}{\|x\|_{E_1}}\right)^{z-\alpha}x.$$

Очевидно, что $\varphi \in \mathfrak{F}(E_0, E_1)$ и

$$\sup_\tau \|\varphi(i\tau)\|_{E_0} = \|x\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x\|_{E_1}^{\alpha},$$

$$\sup \|\varphi(1+i\tau)\|_{E_1} = \|x\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x\|_{E_1}^{\alpha}.$$

Далее, $\varphi(\alpha) = x$, поэтому

$$\|x\|_{E_\alpha} \leqslant \|\varphi\|_{\mathfrak{F}(E_0, E_1)} = \|x\|_{E_0}^{1-\alpha} \|x\|_{E_1}^{\alpha}. \qquad (1.39)$$

Пусть теперь $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant 1$; по теореме о реитерации 1.7 пространство E_β изометрически совпадает с пространством $[E_\alpha, E_\gamma]_\sigma$, где $\sigma = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$. Применяя неравенство (1.39) к пространствам E_α и E_γ, получим при $x \in E_\gamma$

$$\|x\|_{E_\beta} \leqslant \|x\|_{E_\alpha}^{1-\sigma} \|x\|_{E_\gamma}^{\sigma} = \|x\|_{E_\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \|x\|_{E_\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Таким образом, пространства $\{E_\alpha\}$ образуют нормальную шкалу.

Пространства $[E_0', E_1']_\alpha$ также будут образовывать нормальную шкалу (напомним, что пространством $[E_0', E_1']_1$ будет замыкание пространства E_0' по норме пространства E_1'). По теореме 1.6 пространства E_α' совпадают с пополнениями пространств $[E_0', E_1']_\alpha$ относительно пространства E_1' или, что то же, относительно его подпространства $[E_0', E_1']_1$. Таким образом, семейство E_α' совпадает с уплотнением нормальной шкалы $[E_0', E_1']_\alpha$ (см. гл. III, § 1, п. 5). Из свойств 1° и 5° уплотнения нормальной шкалы следует, что функция $\|f\|_{E_\alpha'}$ будет убывающей логарифмически выпуклой по α. В частности, она непрерывна при $\alpha = 1$. Это обстоятельство позволяет получить свойства шкалы $\{E_\alpha\}$ при $\alpha \to 1$. Действительно, пусть $x \in E_1$; тогда в силу равенства (2.1) гл. I

$$\|x\|_{E_{01}} = \sup_{f \in E_0'} \frac{f(x)}{\|f\|_{E_1'}}.$$

Выберем $f_0 \in E_0'$ так, что

$$\|x\|_{E_{01}} \leqslant \frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|_{E_1'}} + \varepsilon.$$

Пользуясь непрерывностью функции $\|f_0\|_{E'_\alpha}$ при $\alpha=1$, выберем α настолько близким к единице, что

$$\|x\|_{E_{01}} \leqslant \frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|_{E'_\alpha}} + 2\varepsilon \leqslant \|x\|_{E_\alpha} + 2\varepsilon.$$

Из этого неравенства вытекает, что $\|x\|_{E_{01}} \leqslant \varliminf\limits_{\alpha\to 1}\|x\|_{E_\alpha}$. По лемме 1.1 гл. III справедливо обратное неравенство, поэтому

$$\lim_{\alpha\to 1}\|x\|_{[E_0, E_1]_\alpha} = \|x\|_{E_{01}} \qquad (x\in E_1).$$

Предыдущие рассмотрения приводят к утверждению:

Теорема 1.8. *Если пространства E_0 и E_1 родственны, то семейство $[E_0, E_1]_\alpha$ образует правильную нормальную шкалу.*

Следствие. *Если пространства E_0 и E_1 родственны, то шкала $[E_0, E_1]_\alpha$ обладает строго интерполяционным свойством относительно любой минимальной шкалы.*

Введем теперь понятие аналитической шкалы пространств. Пусть M — некоторое линейное нормированное пространство, в котором действует семейство линейных операторов $T(z)$, удовлетворяющее условиям:

1°. При каждом $x\in M$ функция $T(z)x$ является целой функцией комплексного переменного z.

2°. Функция $\|T(z)x\|_M$ ограничена на каждой прямой, параллельной мнимой оси.

3°. $T(0)x = x$.

4°. $\sup\limits_{\mu,\nu}\|T(\alpha+i\mu)\,T(\beta+i\nu)\|_M \leqslant \sup\limits_{\tau}\|T(\alpha+\beta+i\tau)\,x\|_M$.

5°. $T(i\mu)\,\dfrac{T(z+\Delta z)\,x - T(z)\,x}{\Delta z} \to T(i\mu)\,(T(z)\,x)'$

при $\Delta z\to 0$ равномерно по μ (свойство 5° вытекает из свойства 1°, если операторы $T(i\mu)$ равномерно ограничены по норме).

Введем в пространстве M семейство норм

$$\|x\|_\alpha = \sup_{-\infty<\tau<\infty}\|T(\alpha+i\tau)\,x\|_M,$$

и пополним по каждой из этих норм пространство M до банахова пространства E_α. Семейство банаховых пространств E_α $(-\infty<\alpha<\infty)$ будем называть *аналитической шкалой пространств.*

В силу теоремы о трех прямых для логарифмически субгармонической функции $\|T(z)x\|_M$ (см. [18]), функция $\|x\|_\alpha$ будет логарифмически выпуклой функцией от α. Если при этом $\|x\|_\alpha$ $(x\in M)$ является возрастающей функцией от α, то аналитическая шкала будет непрерывной нормальной шкалой на любом отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$.

Свойство 4° можно записать в таком виде:

$$\|T(\beta+i\nu)x\|_{E_\alpha}\leqslant\|x\|_{\alpha+\beta}. \tag{1.40}$$

Наконец, из свойства 3° следует, что

$$\|x\|_M=\|T(0)x\|_M\leqslant\|x\|_{E_0}. \tag{1.41}$$

Приведем пример аналитической шкалы. Рассмотрим множество всех непрерывных функций на отрезке [0, 1], равных нулю в окрестности нуля (каждая в своей). На этом множестве зададим семейство операторов $T(z)x(t)=t^{-z}x(t)$. Операторы $T(z)$ будем рассматривать как линейные операторы в пространстве M, наделенном нормой пространства $L_p(0, 1)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. Построенную по этим операторам шкалу пространств обозначим через L_p^α $(-\infty<\alpha<\infty)$. Пространство L_p^α состоит из измеримых функций, для которых

$$\|x\|_{L_p^\alpha}=\left\{\int_0^1|t^{-\alpha}x(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}<\infty,$$

если $p<\infty$, и

$$\|x\|_{L_\infty^\alpha}=\operatorname{vrai\,sup}|t^{-\alpha}x(t)|<\infty,$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant\tau}|t^{-\alpha}x(t)|\to0\qquad(\tau\to0)$$

при $p=\infty$.

Теорема 1.9. *Пусть E_α — аналитическая шкала пространств и пространство E_1 нормально вложено в пространство E_0. Тогда пространство E_α $(0\leqslant\alpha\leqslant1)$ изометрически совпадает с пространством $[E_0, E_1]_\alpha$.*

Доказательство. Пусть x принадлежит множеству M, по которому построена шкала E_α.

По свойству 5° функция $f(z)=T(\alpha-z)x$ будет аналитической относительно нормы пространства E_0. Далее, в силу 4° при $0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1$

$$\|f(z)\|_{E_0}=\|T(\alpha-z)x\|_{E_0}=\sup_{\tau}\|T(i\tau)T(\alpha-z)x\|_M\leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\mu}\|T(\alpha-\operatorname{Re} z+i\mu)x\|_M\leqslant \max\{\|x\|_{E_\alpha},\|x\|_{E_{\alpha-1}}\},$$

и, следовательно, функция $\|f(z)\|_{E_0}$ ограничена в полосе П.

На границах полосы П согласно (1.40)

$$\|f(i\tau)\|_{E_0}=\|T(\alpha-i\tau)x\|_{E_0}\leqslant \|x\|_{E_\alpha},$$
$$\|f(1+i\tau)\|_{E_0}=\|T(\alpha-1-i\tau)x\|_{E_1}\leqslant \|x\|_{E_\alpha}.$$

Наконец, по свойству 3° $(\alpha)=T(0)x=x$. Значит, $x\in[E_0,E_1]_\alpha$ и $\|x\|_{[E_0,E_1]_\alpha}\leqslant\|x\|_{E_\alpha}$.

Докажем обратное неравенство. В силу замечания к теореме 1.1 и доказательства замечания 2 п. 4 для $x\in M$ можно построить функцию $f(z)=\sum\limits_{1}^{N}a_k(z)x_k$ такую, что $a_k\in\mathfrak{F}(\mathbf{C})$, $x_k\in M$, $f(\alpha)=x$ и

$$\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}\leqslant\|x\|_{[E_0,E_1]_\alpha}+\varepsilon. \tag{1.42}$$

Рассмотрим функцию $\Psi(z)=T(z+i\mu)f(z)$, где μ — фиксированное вещественное число. Эта функция аналитична в E_0 внутри полосы П, непрерывна и ограничена в замкнутой полосе. Далее,

$$\|\Psi(i\tau)\|_{E_0}\leqslant \sup_{t,\tau}\|T(it)f(i\tau)\|_{E_0}\leqslant\sup_{\tau}\|f(i\tau)\|_{E_0}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)},$$
$$\|\Psi(1+i\tau)\|_{E_0}\leqslant\sup_{t,\tau}\|T(1+it)f(1+i\tau)\|_{E_0}\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\tau}\|f(1+i\tau)\|_{E_1}\leqslant\|f\|_{\mathfrak{F}(E_0,E_1)}.$$

По принципу максимума, учитывая (1.42), получим

$$\|\Psi(\alpha)\|_{E_0}=\|T(\alpha+i\mu)f(\alpha)\|_{E_0}=\|T(\alpha+i\mu)x\|_{E_0}\leqslant$$
$$\leqslant\|x\|_{[E_0,E_1]_\alpha}+\varepsilon.$$

Наконец, из (1.41) вытекает, что

$$\|x\|_{E_\alpha} = \sup_\mu \|T(\alpha+i\mu)x\|_M \leqslant$$
$$\leqslant \sup_\mu \|T(\alpha+i\mu)x\|_{E_0} \leqslant \|x\|_{[E_0,E_1]_\alpha} + \varepsilon.$$

Таким образом, $\|x\|_{E_\alpha} = \|x\|_{[E_0,E_1]_\alpha}$ на M, но так как M плотно во всех пространствах E_α и в силу теоремы 1.3 в пространстве $[E_0, E_1]_\alpha$, то теорема доказана.

Из интерполяционной теоремы 1.2 и теоремы о реитерации 1.7 вытекает

Теорема 1.10. *Две аналитические шкалы, соединяющие две пары нормально вложенных пространств, обладают строго интерполяционным свойством друг относительно друга.*

Замечание. Из теоремы вытекает, что пространства $L_p^\alpha(0, 1)$, рассмотренные выше, получаются комплексным методом из пространств $L_p(0, 1)$ и $L_p^1(0, 1)$.

10. Гильбертовы шкалы. В приложениях важную роль играют гильбертовы шкалы, образующие частный класс аналитических шкал.

Пусть H_0 — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, в котором задан неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор j с областью определения $D(j)$ и такой, что

$$\|x\|_{H_0} \leqslant \|jx\|_{H_0} \qquad (x \in D(J)). \tag{1.43}$$

Обозначим через E_λ спектральное разложение единицы, отвечающее оператору j, и рассмотрим плотное в H_0 множество M всех элементов, представимых в виде $x = \int_1^N \lambda\, dE_\lambda x$ при некотором $N<\infty$. На этом множестве определены операторы $T(z) = j^z$:

$$j^z x = \int_1^N \lambda^z\, dE_\lambda x.$$

Нетрудно проверить, что эти операторы обладают свойствами 1°—5°, необходимыми для построения по ним аналитической шкалы. Введем на M нормы

$$\|x\|_\alpha = \sup_{-\infty<\tau<\infty} \|j^{\alpha+i\tau}x\|_{H_0} = \left\{\int_1^N \lambda^{2\alpha}(dE_\lambda x, x)\right\}^{1/2} = \|j^\alpha x\|_{H_0}.$$

Пополнения H_α пространства M по этим нормам, являющиеся гильбертовыми пространствами, образуют аналитическую шкалу, которая и называется *гильбертовой шкалой*. В силу условия (1.43) норма $\|x\|_\alpha$ будет возрастающей функцией α и поэтому шкала $\{H_\alpha\}$ $(-\infty<\alpha<<\infty)$ будет непрерывной нормальной шкалой на любом отрезке.

При $\alpha>0$ пространство $H_\alpha \subset H_0$ и представляет собой область определения $D(j^\alpha)$ оператора j^α. При $\alpha<0$ пространство H_α содержит уже по отношению к исходному пространству обобщенные (идеальные) элементы. Пусть $-\alpha=\beta>0$. Выясним структуру пространства H_α', сопряженного к H_α. Если $\varphi \in H_\alpha'$, то на элементах из M

$$|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{H_\alpha'} \|x\|_\alpha = \|\varphi\|_{H_\alpha'} \|j^{-\beta}x\|_0.$$

Сделаем замену $j^{-\beta}x=y$; тогда $|\varphi(j^\beta y)| \leqslant \|\varphi\|_{H_\alpha'} \|y\|_0$, т. е. функционал $\varphi(j^\beta y)$ является ограниченным в норме H_0 на множестве $j^{-\beta}M$. В силу плотности этого множества в H_0 этот функционал допускает единственное представление вида $\varphi(j^\beta y)=(y, z)$, где $z \in H_0$. Делая обратную замену, получаем

$$\varphi(x) = (j^{-\beta}x, z) = (x, j^{-\beta}z) = (x, u),$$

где $u=j^{-\beta}z \in D(j^\beta)=H_\beta$. Обратно, всякий функционал (x, u) при $u \in H_\beta$ является линейным функционалом на M, ограниченным по норме H_α:

$$|(x, u)| = |(j^{-\beta}x, j^\beta u)| \leqslant \|u\|_{H_\beta} \|x\|_{H_\alpha},$$

и поэтому может быть по непрерывности расширен до функционала из H_α'. Из последнего неравенства следует, что $\|\varphi\|_{H_\alpha'} \leqslant \|u\|_{H_\beta}$. Покажем, что здесь имеет место равенство. Пусть u_n — последовательность элементов из M такая, что $u_n \to u$ в H_β. Положим $x_n=j^{2\beta}u_n$. Имеем

$$(x_n, u) = (j^{2\beta}u_n, u) = (j^\beta u_n, j^\beta u) \to \|u\|_\beta^2.$$

При любом $\varepsilon>0$ и достаточно большом n тогда

$$\varphi(x_n) = (x_n, u) \geqslant (1-\varepsilon)\|u\|_\beta^2 \geqslant$$
$$\geqslant (1-2\varepsilon)\|u_n\|_\beta\|u\|_\beta = (1-2\varepsilon)\|x_n\|_\alpha\|u\|_\beta.$$

Отсюда и из предыдущего вытекает, что $\|\varphi\|_{H'_\alpha}=\|u\|_\beta$. Мы доказали, что пространство H_α' изометрично пространству $H_\beta=H_{-\alpha}$, изометрическое соответствие задается равенством $\varphi(x)=(x, u)$ $(\varphi\in H_\alpha', u\in H_{-\alpha}, x\in M)$. В дальнейшем все значения функционала $\varphi(x)$ будут обозначаться через (x, u) $(x\in H_\alpha, u\in H_{-\alpha})$.

В силу рефлексивности гильбертовых пространств пространство H_α изометрично пространству $H_{-\alpha}'$.

Теорема 1.10 показывает, что две гильбертовы шкалы обладают строго интерполяционным свойством друг относительно друга. Рассмотрим частный случай этого утверждения.

Теорема 1.11. *Пусть в гильбертовом пространстве H_0 заданы два самосопряженных положительно определенных оператора j и j_1, обладающие свойством* (1.43). *Если $D(j_1)\supset D(j)$ и*

$$\|j_1x\|_{H_0}\leqslant\|jx\|_{H_0}, \tag{1.44}$$

то при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ $D(j_1^\alpha)\supset D(j^\alpha)$ и

$$\|j_1^\alpha x\|_{H_0}\leqslant\|j^\alpha x\|_{H_0} \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1, \quad x\in D(j^\alpha)).$$

Доказательство. Построим гильбертовы шкалы H_α и H_α^1, порожденные операторами j и j_1 соответственно. Неравенство (1.44) говорит о том, что единичный оператор I (оператор вложения) является ограниченным оператором из H_1 в H_1^1 с нормой $\leqslant 1$. Очевидно, I ограничен как оператор из H_0 в H_0. По интерполяционной теореме тождественный оператор действует из пространства H_α в пространство H_α^1 и имеет нормы $\leqslant 1$. Это и дает утверждение теоремы.

Теорема 1.12. *Если гильбертово пространство H_1 нормально вложено в пространство H_0, то существует единственная гильбертова шкала, соединяющая эти пространства.*

Доказательство. При фиксированном $y \in H_0$ функционал (y, x) в силу неравенства

$$|(x, y)_{H_0}| \leqslant \|y\|_{H_0} \|x\|_{H_0} \leqslant \|y\|_{H_0} \|x\|_{H_1}$$

является ограниченным на H_1, поэтому существует однозначно определенный элемент $z \in H_1$ такой, что $(x, y)_{H_0} = (x, z)_{H_1}$ $(x \in H_1)$. Обозначим $z = Vy$. Тогда

$$(x, y)_{H_0} = (x, Vy)_{H_1} \qquad (x \in H_1). \tag{1.45}$$

При этом $\|z\|_{H_1} = \|Vy\|_{H_1} \leqslant \|y\|_{H_0}$. Оператор V линеен, определен на всем H_0 и ограничен $\|Vy\|_{H_0} \leqslant \|Vy\|_{H_1} \leqslant \leqslant \|y\|_{H_0}$. Оператор V самосопряжен и неотрицателен. Действительно, в силу (1.45) при $x, y \in H_0$

$$(Vx, y)_{H_0} = (Vx, Vy)_{H_1} = \overline{(Vy, Vx)}_{H_1} = \overline{(Vy, x)}_{H_0} = (x, Vy)_{H_0}$$

и $(Vy, y)_{H_0} = (Vy, Vy)_{H_1} \geqslant 0$. Далее, если $Vy = 0$, то $(x, y)_{H_0} = 0$ при любом $x \in H_1$, и в силу плотности H_1 $y = \theta$. Таким образом, оператор V положителен. Обозначим $V^{-1} = U$. Тогда $D(U) = R(V) \subset H_1$, и равенство (1.45) запишется в виде

$$(Uz, x)_{H_0} = (z, x)_{H_1}. \tag{1.46}$$

Введем в рассмотрение оператор $j = U^{1/2}$. Область определения оператора $U^{1/2}$ можно получить замыканием области определения $D(U)$ по норме

$$\|U^{1/2} z\|_{H_0} = \sqrt{(Uz, z)_{H_0}} = \sqrt{(z, z)_{H_1}} = \|z\|_1. \tag{1.47}$$

Таким образом, $D(j)$ принадлежит H_1 и замкнута в нем. Покажем, что $D(j)$ совпадает с H_1. В противном случае найдется $x_0 \in H_1$ такой, что $(z, x_0)_{H_1} = 0$ при всех $z \in D(j)$ и, в частности, при всех $z \in D(U)$. Тогда из (1.46) следует, что $(Uz, x_0) = 0$ $(z \in D(U))$ и, следовательно, $x_0 = 0$, так как $R(U) = H_0$. Наконец, из (1.47) следует, что $\|jz\|_{H_0} = \|z\|_{H_1}$ $(z \in H_1)$.

Гильбертова шкала, порожденная самосопряженным оператором j, соединяет пространства H_0 и H_1.

Покажем единственность гильбертовой шкалы, соединяющей пространства H_0 и H_1. Если бы были две такие шкалы H_α и H'_α, то для порождающих их операторов j и j_1 выполнялись бы соотношения $D(j) = H_1 = D(j_1)$ и

$\|jx\|_{H_0}=\|j_1x\|_{H_0}$. По теореме 1.11 тогда $D(j^{1/2})=D(j_1^{1/2})$ и $\|j^{1/2}x\|_{H_0}=\|j_1^{1/2}x\|_{H_0}$. В частности, при $x\in H_1$ $(jx, x)_{H_0}=(j_1x, x)_{H_0}$. Из равенства квадратичных форм вытекает равенство билинейных форм $(jx, y)_{H_0}=(j_1x, y)_{H_0}$ $(x, y\in H_1)$. В силу плотности H_1 в H_0 отсюда следует, что $jx=j_1x$ $(x\in H_1)$ и, следовательно, шкалы H_α и H_α^1 совпадают. Теорема доказана.

Установим теперь с помощью интерполяции одно важное в теории операторов неравенство.

Теорема 1.13. *Пусть в гильбертовом пространстве H_0 определены два самосопряженных положительно определенных оператора j и j_1, нормированных условием* (1.43), *и линейный оператор T с $D(T)\supset D(j)$. Если при любых $x\in D(j)$ и $y\in D(j_1)$ выполнены неравенства*

$$(Tx, y)\leqslant\|jx\|_{H_0}\|y\|_{H_0} \quad \text{и} \quad (Tx, y)\leqslant\|x\|_{H_0}\|j_1y\|_{H_0}, \tag{1.48}$$

то справедливы неравенства

$$(Tx, y)\leqslant\|j^\alpha x\|_{H_0}\|j_1^{1-\alpha}y\|_{H_0} \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1). \tag{1.49}$$

Доказательство. Обозначим через H_α и H_α^1 гильбертовы шкалы, порожденные операторами j и j_1. Из первого неравенства (1.48) вытекает, что $\|Tx\|_{H_0}\leqslant\|jx\|_{H_0}$ и, следовательно, оператор T ограниченно действует из пространства H_1 в пространство H_0 с нормой $\leqslant 1$. Второе неравенство из (1.48) можно записать в виде $(j_1^{-1}Tx, j_1y)\leqslant\|x\|_{H_0}\|j_1y\|_{H_0}$, откуда следует, что $\|j_1^{-1}Tx\|_{H_0}\leqslant\|x\|_{H_0}$. Иначе можно сказать, что оператор T, определенный на плотном в H_0 множестве $D(j)$, ограниченно действует из пространства H_0 в пространство H_{-1}^1 с нормой $\leqslant 1$. По непрерывности оператор T расширяется до оператора $\tilde{T}$, определенного на всем пространстве H_0 с той же нормой. Применяя к оператору $\tilde{T}$ интерполяционную теорему, получим, что он действует из любого пространства H_α в пространство $H_{\alpha-1}^1$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ с нормой $\leqslant 1$, т. е. $\|\tilde{T}x\|_{H_{\alpha-1}^1}\leqslant\|x\|_{H_\alpha}$.

Если теперь $x\in D(j)$ и $y\in D(j_1)$, то

$$(Tx, y)=(j_1^{\alpha-1}Tx, j_1^{1-\alpha}y)\leqslant$$
$$\leqslant\|j_1^{\alpha-1}Tx\|_{H_0}\|j_1^{1-\alpha}y\|_{H_0}\leqslant\|j^\alpha x\|_{H_0}\|j_1^{1-\alpha}y\|_{H_0}.$$

Замечание. Условие (1.43) было наложено на операторы j и j_1 лишь для сокращения изложения. Умножение этих операторов на нормирующие множители и повторение предыдущих рассуждений приводит снова к выводу, что из (1.48) следует (1.49). Более того, предельным переходом этот вывод можно распространить на тот случай, когда операторы j и j_1 только положительны.

11. Комплексный метод интерполяции в идеальных структурах. Пусть E_0, E_1 — пара идеальных структур функций на пространстве $\mathfrak{M}$ с σ-конечной мерой μ. Во введении к этой главе было описано, как строятся банаховы пространства $E_0(A)$ и $E_1(A)$, где A — произвольное банахово пространство. Мы рассмотрим тот простейший случай, когда пространство A совпадает с полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, и обозначим $E_0(\mathbf{C})=X_0$ и $E_1(\mathbf{C})=X_1$. Эти пространства мы также будем называть идеальными структурами комплекснозначных функций.

Рассмотрим пространство $[X_0, X_1]_\alpha$. Оказывается, что оно также является идеальной структурой. Действительно, пусть $x\in[X_0, X_1]_\alpha$ и $|y(t)|\leqslant|x(t)|$. Рассмотрим функцию $\alpha(t)=y(t)/x(t)$, считая, что $\alpha(t)=0$, если $x(t)=0$. Очевидно, что $|\alpha(t)|\leqslant 1$, поэтому оператор умножения на функцию $\alpha(t)$ будет действовать в идеальных структурах и имеет там норму, не превосходящую единицы. В силу интерполяционной теоремы 1.2 этот оператор будет действовать и в пространстве $[X_0, X_1]_\alpha$ с нормой $\leqslant 1$. Тогда $y\in[X_0, X_1]_\alpha$ и

$$\|y\|_{[X_0,X_1]_\alpha}=\|\alpha x\|_{[X_0,X_1]_\alpha}\leqslant\|x\|_{[X_0,X_1]_\alpha}.$$

Установим ряд свойств идеальной структуры $[X_0, X_1]_\alpha$.

Если $x\in X_0\cap X_1$, то в силу замечания 2 п. 4 найдется функция

$$g(t, z)=\sum_1^N a_k(z)\,x_k(t)$$

такая, что $x_k\in X_0\cap X_1$, $a_k\in\mathfrak{F}(\mathbf{C})$,

$$g(t, \alpha)=x(t)\quad\text{и}\quad\|g\|_{\mathfrak{F}(X_0,X_1)}\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|_{[X_0,X_1]_\alpha}. \tag{1.50}$$

При фиксированном t применим к скалярной функции $g(t, z)$ неравенства (1.21).

Тогда

$$|x(t)| = |g(t, \alpha)| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, i\tau)| \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau\right]^{1-\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, 1+i\tau)| \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau\right]^{\alpha}. \qquad (1.51$$

Рассмотрим функции

$$y_0(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, i\tau)| \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau$$

и

$$y_1(t) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, 1+i\tau)| \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau.$$

Правые части этих равенств можно понимать каı интегралы Римана от функций со значениями в X_0 и X соответственно, поэтому

$$\|y_0\|_{X_0} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(t, i\tau)\|_{X_0} \mu_0(\alpha, \tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\tau} \|g(t, i\tau)\|_{X_0} \leqslant (1+\varepsilon) \|x\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \qquad (1.52$$

(последнее в силу (1.50)) и

$$\|y_1\|_{X_1} \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(t, 1+i\tau)\|_{X_1} \mu_1(\alpha, \tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup \|g(t, 1+i\tau)\|_{X_1} \leqslant (1+\varepsilon) \|x\|_{[X_0, X_1]_\alpha}. \qquad (1.53$$

Неравенство (1.51) принимает вид

$$|x(t)| \leqslant [y_0(t)]^{1-\alpha} [y_1(t)]^{\alpha}.$$

Если теперь обозначить $x_0(t) = [\|y_0\|_{X_0}]^{-1} y_0(t)$ ı $x_1(t) = [\|y_1\|_{X_1}]^{-1} y_1(t)$, то в силу (1.52) и (1.53) получим что

$$|x(t)| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_{[X_0,X_1]_\alpha}[x_0(t)]^{1-\alpha}[x_1(t)]^\alpha, \qquad (1.54)$$

где $\|x_0\|_{X_0}=1$ и $\|x_1\|_{X_1}=1$.

Интересно выяснить вопрос о том, когда функции вида правой части в (1.54) принадлежат пространству $[X_0, X_1]_\alpha$.

Лемма 1.10. *Если $x_0 \in X_0$ и $x_1 \in X_1$ и положительные значения функций $|x_0(t)|$ и $|x_1(t)|$ имеют конечные положительные нижнюю и верхнюю грани, то функция $|x_0(t)|^{1-\alpha}|x_1(t)|^\alpha \in [X_0, X_1]_\alpha$ и*

$$\||x_0|^{1-\alpha}|x_1|^\alpha\|_{[X_0,X_1]_\alpha} \leqslant \|x_0\|_{X_0}^{1-\alpha}\|x_1\|_{X_1}^\alpha. \qquad (1.55)$$

Доказательство. Пусть сначала $\|x_0\|_{X_0}=\|x_1\|_{X_1}=1$. Обозначим $x_\alpha(t)=|x_0(t)|^{1-\alpha}|x_1(t)|^\alpha$ и пусть e — носитель функции $x_\alpha(t)$. Характеристическая функция χ_e множества e принадлежит пространству $X_0 \cap X_1$. Действительно, функции $|x_0(t)|$ и $|x_1(t)|$ имеют на e положительные нижние грани m_0 и m_1, поэтому $\chi_e(t) \leqslant \frac{1}{m_0}|x_0(t)| \in X_0$ и $\chi_e(t) \leqslant \frac{1}{m_1}|x_1(t)| \in X_1$.

Рассмотрим функцию

$$f(t, z) = |x_0(t)|^{1-z}|x_1(t)|^z.$$

Так как функции $|x_0(t)|$ и $|x_1(t)|$ ограничены числами M_0 и M_1, то при каждом z $|f(t, z)| \leqslant M_0^{1-\operatorname{Re} z}M_1^{\operatorname{Re} z}\chi_e(t) \in X_0 \cap X_1$. При фиксированном $t \in e$ функция $f(t, z)$ является целой, при этом

$$\frac{1}{\Delta z}[f(t, z+\Delta z) - f(t, z)] \to f_z'(t, z)$$

равномерно по t. Так как в последнем соотношении все члены равны нулю при $t \notin e$, то можно написать неравенство

$$\left|\frac{1}{\Delta z}[f(t, z+\Delta z) - f(t, z)] - f_z'(t, z)\right| \leqslant \eta(\Delta z)\chi_e(t),$$

где $\eta(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Отсюда следует, что функция $f(t, z)$ является целой, как функция со значениями в $X_0 \cap X_1$. Из предыдущего вытекает, что она ограничена в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. Далее

$$\|f(t, i\tau)\|_{X_0} = \|x_0\|_{X_0} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \|f(t, 1+i\tau)\|_{X_1} = \|x_1\|_{X_1} \leqslant 1.$$

Наконец, $f(t, \alpha) = x_\alpha(t)$. Отсюда следует, что

$$x_\alpha \in [X_0, X_1]_\alpha \quad \text{и} \quad \|x_\alpha\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \leqslant 1.$$

Если теперь x_0 и x_1 — любые функции из X_0 и X_1, т

$$\| |x_0(t)|^{1-\alpha} |x_1(t)|^\alpha \|_{[X_0, X_1]_\alpha} =$$

$$\|x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \|x_1\|_{X_1}^\alpha \left\| \left| \frac{x_0(t)}{\|x_1\|_{X_0}} \right|^{1-\alpha} \left| \frac{x_2(t)}{\|x_1\|_{X_1}} \right|^\alpha \right\|_{[X_0, X_1]_\alpha} \leqslant \|x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \|x_1\|_X^\alpha$$

Следствие. *Если пространство* $[X_0, X_1]_\alpha$ *обладае свойством Фату* (см. введение), *то неравенство* (1.55 *справедливо при любых* $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$.

Действительно, обозначим через e_m множество всех для которых $\frac{1}{m} \leqslant |x_0(t)| \leqslant m$ и $\frac{1}{m} \leqslant |x_1(t)| \leqslant m$. Объеди нение всех множеств e_m $(m = 1, 2, \ldots)$ дает носител функции $x_\alpha(t)$, поэтому $\chi_{e_m}(t) x_\alpha(t) \to x_\alpha(t)$ почти всюду В силу леммы

$$\| \chi_{e_m} |x_0|^{1-\alpha} |x_1|^\alpha \|_{[X_0, X_1]_\alpha} = \| [\chi_{e_m} |x_0|]^{1-\alpha} [\chi_{e_m} |x_1|]^\alpha \|_{[X_0, X_1]_\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \|\chi_{e_m} x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \|\chi_{e_m} x_1\|_{X_1}^\alpha \leqslant \|x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \|x_1\|_{X_1}^\alpha$$

Благодаря свойству Фату из этого неравенства сле дует (1.55).

Неравенство (1.55) является дальнейшим обобщени ем неравенства Гёльдера.

Установленные свойства наводят на мысль о введе нии следующего пространства: при фиксированном $\alpha \in$ $\in (0, 1)$ обозначим через X класс всех таких комплексно значных функций $x(t)$ на $\mathfrak{M}$, что

$$|x(t)| \leqslant \lambda |x_0(t)|^{1-\alpha} |x_1(t)|^\alpha \tag{1.56}$$

при некоторых $\lambda > 0$, $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$ с $\|x_0\|_{X_0} \leqslant 1$, $\|x_1\|_{X_1} \leqslant 1$ Пространство X — линейно. Действительно, если для выполнено (1.56), а $|y(t)| \leqslant \mu |y_0(t)|^{1-\alpha}$ $|y_1(t)|^\alpha$

$\|y_0\|_{X_0} \leqslant 1$ и $\|y_1\|_{X_1} \leqslant 1$, то

$$|x(t)+y(t)| \leqslant \lambda |x_0(t)|^{1-\alpha} |x_1(t)|^{\alpha} + \mu |y_0(t)|^{1-\alpha} |y_1(t)|^{\alpha},$$

и по неравенству Гёльдера с весами λ и μ

$$\begin{aligned}|x(t)+y(t)| &\leqslant (\lambda |x_0(t)| + \mu |y_0(t)|)^{1-\alpha} \times \\ &\times (\lambda |x_1(t)| + \mu |y_1(t)|)^{\alpha} = (\lambda+\mu) \times \\ &\times \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} |x_0(t)| + \frac{\mu}{\lambda+\mu} |y_0(t)|\right)^{1-\alpha} \times \\ &\times \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} |x_1(t)| + \frac{\mu}{\lambda+\mu} |y_1(t)|\right)^{\alpha}. \qquad (1.57)\end{aligned}$$

Функции, стоящие в скобках, принадлежат единичным шарам пространств X_0 и X_1 соответственно, поэтому $x+y \in X$. Очевидно $cx \in X$, если $x \in X$. Введем в пространстве X норму по формуле

$$\|x\|_X = \inf \lambda, \qquad (1.58)$$

где inf берется по всем λ, удовлетворяющим неравенству (1.56) при некоторых x_0 и x_1. Из неравенства (1.57) вытекает, что величина (1.58) удовлетворяет неравенству треугольника. Очевидно, что $\|cx\|_X = |c| \, \|x\|_X$. Пусть теперь $\|x\|_X = 0$. Это означает, что существуют такие последовательности чисел $\lambda_n \to +0$ и функций $x_{0n} \in X_0$ и $x_{1n} \in X_1$ с $\|x_{0n}\|_{X_0} \leqslant 1$ и $\|x_{1n}\|_{X_1} \leqslant 1$, что $|x(t)| \leqslant \lambda_n |x_{0n}(t)|^{1-\alpha} |x_{1n}(t)|^{\alpha}$. Последовательности $\lambda_n^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} |x_{0n}|$ и $\lambda_n^{\frac{1}{2\alpha}} |x_{1n}|$ сходятся к нулю в X_0 и X_1 соответственно. Так как пространства X_0 и X_1 вложены в пространство $S(\mathfrak{M}, \mu)$, то эти последовательности сходятся к нулю по мере на каждом множестве конечной меры. Тогда таким же свойством обладают последовательности функций $\sqrt{\lambda_n} |x_{0n}|^{1-\alpha}(t)$ и $\sqrt{\lambda_n} |x_{1n}|_{\alpha}(t)$. Так как $|x(t)|$ не превосходит произведения этих функций, то почти всюду $|x(t)| = 0$. Таким образом, величина (1.58) обладает всеми свойствами нормы.

Очевидно, что если $|u(t)| \leqslant |x(t)|$ и $x \in X$, то $u \in X$ и $\|u\|_X \leqslant \|x\|_X$.

Докажем полноту пространства X. Пусть $x_n \in X$ и $\sum \|x_n\|_X < \infty$. По любому $\varepsilon > 0$ для каждой функции x_n найдем число λ_n и функции $x_{0n} \in X_0$, $x_{1n} \in X_1$ с $\|x_{0n}\|_{X_0} \leqslant 1$ и $\|x_{1n}\|_{X_1} \leqslant 1$ так, что

$$\lambda_n \leqslant \|x_n\|_X + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{и} \quad |x_n(t)| \leqslant \lambda_n |x_{0n}(t)|^{1-\alpha} |x_{1n}(t)|^{\alpha}.$$

Тогда $\sum \lambda_n < \infty$ и рассуждая так же, как при выводе неравенства (1.57), получаем при почти всех t неравенство

$$\sum_1^\infty |x_n(t)| \leqslant \sum \lambda_n \left[\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{\Sigma\lambda_n} |x_{0n}(t)|\right]^{1-\alpha} \left[\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{\Sigma\lambda_n} |x_{1n}(t)|\right]^{\alpha}. \tag{1.59}$$

В силу следствия 2 из теоремы 1 гл. II функции, стоящие в квадратных скобках, почти всюду определены и принадлежат единичным шарам X_0 и X_1. Отсюда вытекает, что функция $\sum\limits_1^\infty |x_n(t)|$ принадлежит X. Обозначим $x(t) = \sum\limits_1^\infty x_n(t)$. Тогда $|x(t)| \leqslant \sum\limits_1^\infty |x_n(t)|$ и, следовательно, $x \in X$. Из неравенства (1.59) следует, что $\|x\|_X \leqslant \| \sum |x_n| \|_X \leqslant \sum \lambda_n$, и в силу произвольности ε

$$\|x\|_X \leqslant \sum_1^\infty \|x_n\|_X.$$

Применяя это неравенство к функции $x(t) - \sum\limits_1^N x_n(t) = \sum\limits_{N+1}^\infty x_n(t)$, получаем

$$\left\| x - \sum_1^N x_n \right\|_X \leqslant \sum_{N+1}^\infty \|x_n\|_X \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Полнота пространства X доказана. Таким образом, пространство X является идеальной структурой. Эту структуру обозначим через $X_0^{1-\alpha} X_1^{\alpha}$.

Пространство $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ является промежуточным между пространствами X_0 и X_1. Действительно, если $x \in X_0 \cap X_1$, то

$$|x(t)| = |x(t)|^{1-\alpha}|x(t)|^{\alpha} = \|x\|_{X_0}^{1-\alpha}\|x\|_{X_1}^{\alpha}\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{X_0}}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{|x(t)|}{\|x\|_{X_1}}\right)^{\alpha},$$

откуда следует, что $x \in X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ и

$$\|x\|_{X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}} \leqslant \|x\|_{X_0}^{1-\alpha}\|x\|_{X_1}^{\alpha} \leqslant \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\}.$$

Далее, если $x \in X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$, то из неравенства (1.56) следует, что

$$|x(t)| \leqslant \lambda((1-\alpha)|x_0(t)| + \alpha|x_1(t)|)$$

и, следовательно, $x \in X_0 + X_1$ и

$$\|x(t)\|_{X_0+X_1} \leqslant \lambda[(1-\alpha)\|x_0\|_{X_0} + \alpha\|x_1\|_{X_1}] \leqslant \lambda.$$

Таким образом, $\|x\|_{X_0+X_1} \leqslant \|x\|_{X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}}$.

Из неравенства (1.54), справедливого для любой функции $x \in X_0 \cap X_1$, теоремы 1.3 и определения нормы в $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ вытекает, что пространство $[X_0, X_1]_{\alpha}$ вложено в пространство $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ с константой вложения, не превосходящей единицы.

При известных условиях справедливо обратное вложение.

Теорема 1.14. *Если пространство $X = X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ правильно (обладает абсолютно непрерывной нормой), то оно изометрически совпадает с пространством $[X_0, X_1]_{\alpha}$.*

Доказательство. Обозначим через U_{ε} совокупность всех функций x из X, для которых выполняется неравенство

$$|x(t)| \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_X x_0^{1-\alpha}(t)\, x_1^{\alpha}(t) \text{ с } \|x_0\|_{X_0} \leqslant 1 \text{ и } \|x_1\|_{X_1} \leqslant 1,$$

причем ненулевые значения функций $x_0(t)$ и $x_1(t)$ имеют конечные положительные верхнюю и нижнюю грани. В силу леммы 1.10 и того, что $[X_0, X_1]_{\alpha}$ — идеальная структура,

$$\|x\|_{[X_0, X_1]_{\alpha}} \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_X \quad (x \in U_{\varepsilon}). \qquad (1.60)$$

Покажем, что множество U_ε плотно в X. Пусть $y \in X$, e — носитель y и

$$|y(t)| \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\|y\|_X |y_0(t)|^{1-\alpha} |y_1(t)|^\alpha,$$

где $\|y_0\|_{X_0} \leqslant 1$ и $\|y_1\|_{X_1} \leqslant 1$. Обозначим через e_m множеств всех t, где $|y(t)|>0$, $1/m \leqslant |y_0(t)| \leqslant m$, $1/m \leqslant |y_1(t)| \leqslant$ $\leqslant m$. Тогда функции $z_m(t)=\chi_{e_m}(t)y(t)$ почти всюду сходятся к $y(t)$, причем в силу абсолютной непрерывност нормы в X

$$\|z_m - y\|_X = \|\chi_{e \setminus e_m} y\|_X \to 0.$$

В частности, $\|z_m\|_X \to \|y\|_X$, поэтому при достаточн больших m

$$|z_m(t)| \leqslant (1+\varepsilon/2)\|y\|_X |\chi_{e_m}(t) y_0(t)|^{1-\alpha} |\chi_{e_m}(t) y_1(t)|^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\|z_m\|_X |\chi_{e_m}(t) y_0(t)|^{1-\alpha} |\chi_{e_m}(t) y_1(t)|^\alpha$$

Отметим, что $\|\chi_m y_0\|_{X_0} \leqslant 1$ и $\|\chi_m y_1\|_{X_1} \leqslant 1$, поэтому z принадлежит множеству U_ε.

Теперь мы можем применить лемму 3.4 из гл. I, и которой будет следовать, что в силу (1.60) пространств X вложено в пространство $[X_0, X_1]_\alpha$ с константой вложе ния, не превосходящей $1+\varepsilon$.

В виду произвольности ε теорема доказана.

Замечание. Условие теоремы выполнено пр $0<\alpha<1$, если хотя бы одно из пространств X_0 или X обладает абсолютно непрерывной нормой.

Действительно, пусть этим свойством обладает пр странство X_0. Если e_n — убывающая последователь ность множеств с пустым пересечением и $x \in X$, то из не равенства (1.56) получаем

$$|\chi_{e_n}(t)x(t)| \leqslant \lambda |\chi_{e_n}(t) x_0(t)|^{1-\alpha} |\chi_{e_n}(t) x_1(t)|^{1-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \|\chi_{e_n} x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \left| \frac{\chi_{e_n}(t) x_0(t)}{\|\chi_{e_n} x\|_{X_0}} \right|^{1-\alpha} |x_1(t)|^\alpha$$

Отсюда $\|\chi_{e_n} x\|_X \leqslant \lambda \|\chi_{e_n} x_0\|_{X_0}^{1-\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим, что в общем случае пространство $X_0^{1-\alpha}, X$ может не совпадать с пространством $[X_0, X_1]_\alpha$. Более тогс пространство $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ может не быть интерполяционным между пространствами X_0 и X_1 (см. литературные указания). Однако если линейный оператор T положителен и ограничено действует в пространствах X_0 и X_1, то он действует и в пространстве $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$. Действительно, если $x(t) \geqslant 0$ и $x \in X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$, то в силу (1.56)

$$Tx(t) \leqslant \lambda T(|x_0|^{1-\alpha}|x_1|^{\alpha})(t).$$

Отсюда аналогично тому, как это делалось в п. 1 введения к гл. II (см. свойство 6°), показывается, что

$$Tx(t) \leqslant \lambda (T|x_0|)^{1-\alpha}(t)(T|x_1|)^{\alpha}(t),$$

и так как $T|x_0| \in X_0$ и $T|x_1| \in X_1$, то $Tx \in X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$. Для любых вещественных функций утверждение следует из равенства $Tx = Tx_+ - Tx_-$, для комплексных — из равенства $Tx = T(\operatorname{Re} x) + iT(\operatorname{Im} x)$.

Если $X_0 = L_{p_0}$ и $X_1 = L_{p_1}$ $(1 \leqslant p_0 \leqslant \infty)$, то пространство $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ изометрически совпадает с пространством L_p, где $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}$. Действительно, из неравенства (1.56) и неравенства Гёльдера следует, что для $x \in X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$

$$\int |x(t)|^p d\mu \leqslant \lambda^p \left[\int |x_0(t)|^{p_0} d\mu\right]^{\frac{(1-\alpha)p}{p_0}} \left[\int |x_1(t)|^{p_1} d\mu\right]^{\frac{\alpha p}{p_1}} \leqslant \lambda^p,$$

откуда вытекает, что $x \in L_p$ и $\|x\|_{L_p} \leqslant \|x\|_{L_{p_0}^{1-\alpha}L_{p_1}^{\alpha}}$. Обратно, для любой функции из L_p справедливо представление

$$|x(t)| = \|x\|_{L_p} \left(\frac{|x(t)|^{p/p_0}}{\||x|^{p/p_0}\|_{L_{p_0}}}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{|x(t)|^{p/p_1}}{\||x|^{p/p_1}\|_{L_{p_1}}}\right)^{\alpha}$$

$\left(\text{мы воспользовались тем, что } \frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{p_0} + \frac{\alpha}{p_1}\right)$, поэтому

$$x \in L_{p_0}^{1-\alpha}L_{p_1}^{\alpha} \quad \text{и} \quad \|x\|_{L_{p_0}^{1-\alpha}L_{p_1}^{\alpha}} \leqslant \|x\|_{L_p}.$$

Норма хотя бы в одном из пространств L_{p_i} абсолютно непрерывна (если $p_0 \neq p_1$), поэтому в силу теоремы 1.4

имеется изометрическое равенство

$$L_{p_0}^{1-\alpha}L_{p_1}^{\alpha}=[L_{p_0},\ L_{p_1}]_{\alpha}=L_p \qquad \left(\frac{1}{p}=\frac{1-\alpha}{p_0}+\frac{\alpha}{p_1}\right). \tag{1.61}$$

Интерполяционная теорема 1.2 приводит нас, в частности, к доказательству теоремы М. Рисса — Торина, сформулированной в гл. I, § 4, п. 2.

§ 2. Метод констант и средних ($\mathscr{K}$- и $\mathscr{J}$-методы)

1. Метод констант. Напомним, что если A — банахово пространство, а E — идеальная структура на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ, то через $E(A)$ обозначается банахово пространство всех функций (классов) $u(t)$ со значениями в A, сильно измеримых в A и таких, что $\|u(t)\|_A\in E$, с нормой $\|u\|_{E(A)}=\|\|u(t)\|_A\|_E$. Это пространство вложено в линейное метрическое пространство $S(\mathfrak{M},\ \mu,\ A)$ всех сильно измеримых функций со значениями в пространстве A.

Пусть теперь A_0 и A_1 — банахова пара, а E_0 и E_1 — две идеальные структуры на одном и том же пространстве с мерой. Пространство $E_i(A_i)$ вложено в пространство $E_i(A_0+A_1)$, а эти пространства, как сказано выше, вложены в пространство $S(\mathfrak{M},\ \mu,\ A_0+A_1)$. Поэтому пространства $E_0(A_0)$ и $E_1(A_1)$ образуют банахову пару. Обозначим через $(A_0,\ A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$ часть пространства $E_0(A_0)+E_1(A_1)$, состоящую из всех почти всюду постоянных функций. Из вложения $E_0(A_0)+E_1(A_1)\subset S(\mathfrak{M},\ \mu,\ A_0+A_1)$ легко следует, что $(A_0,\ A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$ — замкнутое подпространство суммы $E_0(A_1)+E_1(A_1)$. Его можно идентифицировать с банаховым пространством всех тех элементов $x\in A_0+A_1$, для которых существуют такие функции $u_i=u_i(t)\in E_i(A_i)$ $(i=0,\ 1)$, что

$$x=u_0(t)+u_1(t) \tag{2.1}$$

с нормой

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}}=\inf_{x=u_0(t)+u_1(t)}\left(\|u_0\|_{E_0(A_0)}+\|u_1\|_{E_1(A_1)}\right). \tag{2.2}$$

Пространство $(A_0,\ A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$ может содержать ненулевые элементы лишь в случае, когда $e\in E_0+E_1$, где $e=$

$=e(t)\equiv 1$. Действительно, если $x\neq 0$, $x\in(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$, то найдутся $u_i(t)\in E_i(A_i)$ такие, что $u_0(t)+u_1(t)=x$. По определению нормы в пространстве A_0+A_1 $0<\|x\|_{A_0+A_1}\leqslant \leqslant\|u_0(t)\|_{A_0}+\|u_1(t)\|_{A_1}$. Отсюда следует, что функции

$$e_i(t)=\frac{\|u_i(t)\|_{A_i}}{\|u_0(t)\|_{A_0}+\|u_1(t)\|_{A_1}}\leqslant\frac{\|u_i(t)\|_{A_i}}{\|x\|_{A_0+A_1}}\in E_i.$$

Тогда $e(t)=e_0(t)+e_1(t)\in E_0+E_1$.

В дальнейшем всегда предполагается, что $e\in E_0+E_1$.

Лемма 2.1. *Пространства* $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$ *являются промежуточными между* A_0 *и* A_1.

Доказательство. Пусть $x\in A_0\cap A_1$. Если $e(t)= =e_0(t)+e_1(t)$, где $e_i(t)\in E_i$, то положим $u_i(t)=e_i(t)x$. Тогда $x=u_0(t)+u_1(t)$ и $\|u_i(t)\|_{A_i}=|e_i(t)|\,\|x\|_{A_i}\in E_i$, следовательно, $x\in(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$ и

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}}\leqslant\|e_0\|_{E_0}\|x\|_{A_0}+\|e_1\|_{E_1}\|x\|_{A_1}\leqslant$$
$$\leqslant(\|e_0\|_{E_0}+\|e_1\|_{E_1})\|x\|_{A_0\cap A_1}.$$

Учитывая то, что $\inf\limits_{e=e_0+e_1}(\|e_0\|_{E_0}+\|e_1\|_{E_1})=\|e\|_{E_0+E_1}$, получаем

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}}\leqslant\|e\|_{E_0+E_1}\|x\|_{A_0\cap A_1},$$

т. е. $A_0\cap A_1\subset(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$.

Пусть теперь $x\in(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}$. Равенство $x=u_0(t)+ +u_1(t)$, $u_i(t)\in E_i(A_i)$, влечет неравенство $\|x\|_{A_0+A_1}\leqslant \leqslant\|u_0(t)\|_{A_0}+\|(u_1(t)\|_{A_1}$. Вычисляя норму в E_0+E_1 левой и правой части, имеем

$$\|x\|_{A_0+A_1}\|e\|_{E_0+E_1}\leqslant\big\|\|u_0(t)\|_{A_0}+\|u_1(t)\|_{A_1}\big\|_{E_0+E_1}\leqslant$$
$$\leqslant\|u_0\|_{E_0(A_0)}+\|u_1\|_{E_1(A_1)}.$$

Отсюда получается, что

$$\|x\|_{A_0+A_1}\leqslant\frac{1}{\|e\|_{E_0+E_1}}\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}},$$

т. е. $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0,E_1}\subset A_0+A_1$.

Теорема 2.1 (интерполяционная). *Пуст* A_0, A_1 *и* B_0, B_1 — *две банаховы пары. Тройка пространст* A_0, A_1, $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ *является интерполяционной относи тельно тройки* B_0, B_1, $(B_0, B_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$

Доказательство. Если $x \in (A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ и $T \in \pi(A_0$ $A_1; B_0, B_1)$, то $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $u_i \in E_i(A_i)$, откуд $Tx = v_0(t) + v_1(t)$, где $v_i(t) = Tu_i(t)$. При этом $\|v_i(t)\|_{B_i} \leqslant$ $\leqslant \|T\|_{A_i \to B_i} \|u_i(t)\|_{A_i}$. Следовательно, $v_i \in E_i(B_i)$ и

$$\|Tx\|_{(B_0,B_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}} \leqslant \|v_0\|_{E_0(B_0)} + \|v_1\|_{E_1(B_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \|T\|_{A_0 \to B_0} \|u_0\|_{E_0(A_0)} + \|T\|_{A_1 \to B_1} \|u_1\|_{E_1(A_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\|T\|_{A_i \to B_i}\} (\|u_0\|_{E_0(A_0)} + \|u_1\|_{E_1(A_1)})$$

Переходя к inf по всевозможным представлениям (2.1), получаем, что

$$\|T\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1} \to (B_0,B_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}} \leqslant \|T\|_{\pi(A_0,A_1;B_0,B_1)}.$$

Теорема 2.1 показывает, что нами определен интер поляционный функтор $(\ ,\ )^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$.

Замечание. Если $e \in E_0 \cap E_1$, то $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ изо морфно $A_0 + A_1$. В самом деле, если $x \in A_0 + A_1$, т $x = x_0 + x_1$, $x_i \in A_i$. Положим $u_i(t) = e(t)x_i$. Тогд $\|u_i\|_{E_i(A_i)} = \|e\|_{E_i} \|x_i\|_{A_i}$. Таким образом, $x \in (A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ и

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}} \leqslant \|e\|_{E_0} \|x_0\|_{A_0} + \|e\|_{E_1} \|x_1\|_{A_1}.$$

Перейдя к inf справа, получим

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}} \leqslant \|e\|_{E_0 \cap E_1} \|x\|_{A_0+A_1}.$$

2. Метод средних. В обозначениях предыдущег пункта предположим, что $e \in E_0^1 + E_1^1$, где E_i^1 — ассоци ированная идеальная структура к пространству E_i.

Лемма 2.2. *Для любой функции $u \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ существует интеграл $\int u(t)\,d\mu$ в A_0+A_1. Отображение $\mathcal{I}\colon u \to \int u(t)\,d\mu$ является линейным непрерывным оператором из $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ в A_0+A_1.*

Доказательство. Пусть $e(t)=e_0(t)+e_1(t)$, где $e_i \in E_i^1$. Без ограничения общности можно считать, что функции $e_i(t)$ — неотрицательны. Имеем

$$\int \|u(t)\|_{A_0+A_1}\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int e_0(t)\,\|u(t)\|_{A_0}\,d\mu + \int e_1(t)\,\|u(t)\|_{A_1}\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \|e_0\|_{E_0^1}\|u\|_{E_0(A_0)} + \|e_1\|_{E_1^1}\|u\|_{E_1(A_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|e_0\|_{E_0^1} + \|e_1\|_{E_1^1}\right)\|u\|_{E_0(A_0)\cap E_1(A_1)}.$$

Переходя к inf по всевозможным представлениям $e(t)=e_0(t)+e_1(t)$, получаем, что

$$\left\|\int u(t)\,d\mu\right\|_{A_0+A_1} \leqslant \|e\|_{E_0^1+E_1^1}\|u\|_{E_0(A_0)\cap E_1(A_1)}.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Нуль-пространство $N(\mathcal{I})$ оператора $\mathcal{I}$ есть замкнутое подпространство пространства $E_0(A_0) \cap \cap E_1(A_1)$.*

Обозначим через $(A_0, A_1)^{\mathcal{I}}_{E_0,E_1}$ фактор-пространство $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)/N(\mathcal{I})$, которое можно идентифицировать с банаховым пространством всех элементов $x \in A_0+A_1$, представимых в виде

$$x = \int u(t)\,d\mu, \tag{2.3}$$

где $u \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ с нормой

$$\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{I}}_{E_0,E_1}} = \inf_{x=\int u(t)\,d\mu} \|u\|_{E_0(A_0)\cap E_1(A_1)}. \tag{2.4}$$

Пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{I}}_{E_0,E_1}$ может содержать ненулевые элементы лишь в случае, когда $E_0 \cap E_1 \neq \{0\}$. Действительно, если $x \neq 0$, $x = \int u(t)\,d\mu$, $\|u(t)\|_{A_i} \in E_i$, то

$u\neq 0$, и функция $\min(\|u(t)\|_{A_0}, \|u(t)\|_{A_1})$ принадлежит $E_0\cap E_1$ и отлична от нуля, ибо функции $\|u(t)\|_{A_0}$ и $\|u(t)\|_{A_1}$ обращаются в 0 одновременно.

В дальнейшем считаем, что $E_0\cap E_1\neq\{0\}$.

Лемма 2.3. *Пространства* $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$ *являются промежуточными между* A_0 *и* A_1.

Доказательство. Непрерывность вложения $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}\subset A_0+A_1$ вытекает из предыдущей леммы и определения нормы в пространстве $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$.

Пусть теперь $x\in A_0\cap A_1$. Возьмем функцию $\psi=\psi(t)$ так, чтобы $\psi = E_0\cap E_1$ и $\int\psi(t)\,d\mu=1$. Положим $u(t)=$ $=\psi(t)x$. Имеем $u=u(t)\in E_0(A_0)\cap E_1(A_1), x=\int u(t)\,d\mu$.

Итак $x\in(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$ и $\|x\|^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}\leqslant\|\psi\|_{E_0\cap E_1}\|x\|_{A_0\cap A_1}$, что и означает вложение $A_0\cap A_1\subset(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$.

Теорема 2.2 (интерполяционная). *Пусть* A_0, A_1 *и* B_0, B_1 — *две банаховы пары. Тройка пространств* A_0, A_1, $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$ *является интерполяционной относительно тройки* B_0, B_1, $(B_0, B_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$.

Доказательство. Если $x\in(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$, то $x=\int u(t)\,d\mu$, $u\in E_0(A_0)\cap E_1(A_1)$. Оператор $T\in\pi(A_0, A_1; B_0, B_1)$ действует из A_0+A_1 в B_0+B_1, поэтому $Tx=$ $=\int Tu(t)\,d\mu=\int v(t)\,d\mu$. Далее $\|v\|_{E_i(B_i)}\leqslant\|T\|_{A_i\to B_i}\|u\|_{E_i(A_i)}$. Отсюда

$$\|v\|_{E_0(B_0)\cap E_1(B_1)}\leqslant\max\{\|T\|_{A_i\to B_i}\}\|u\|_{E_0(A_0)\cap E_1(A_1)}.$$

По определению (2.4)

$$\|Tx\|_{(B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}}\leqslant\|v\|_{E_0(B_0)\cap E_1(B_1)}\leqslant$$
$$\leqslant\|T\|_{\pi(A_0,A_1;B_0,B_1)}\|u\|_{E_0(A_0)\cap E_1(A_1)}.$$

Беря inf по всем представлениям (2.3), получаем

$$\|T\|_{(B_0,B_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}\to(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}}\leqslant\|T\|_{\pi(A_0,A_1;B_0,B_1)}.$$

Таким образом, определен интерполяционный функтор $(\ ;\ )^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$.

Иногда при построении пространств $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ и $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$ удобно предварительно произвести дискретизацию структур E_0, E_1 (см. гл. II, введение, п. 2). Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ — разбиение $\mathfrak{M}$ на непересекающиеся множества конечной положительной меры μ_n и такое, что $\chi_{\mathfrak{M}_n} \in \in E_0 \cap E_1$ (такое разбиение существует, если носители E_0 и E_1 совпадают с $\mathfrak{M}$). Предположим, что оператор усреднения T, построенный по этому разбиению, ограниченно действует в пространствах E_i. Тогда он отображает пространства E_i на подпространства E_i^c функций, постоянных на множествах $\mathfrak{M}_n$. Для получения величины, эквивалентной норме пространства $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$, можно рассматривать в (2.2) лишь те представления $x = u_0(t) + u_1(t)$, в которых функции $u_i(t)$ постоянны на множествах $\mathfrak{M}_n$. В самом деле, если $x = v_0(t) + v_1(t)$, где $v_i \in E_i(A_i)$, то положим $u_i(t) = Tv_i(t)$. Тогда $x = Tx = u_0(t) + u_1(t)$ и

$$\|u_i\|_{E_i(A_i)} = \| \|Tv_i\|_{A_i} \|_{E_i} \leqslant \|T(\|v_i\|_{A_i})\|_{E_i} \leqslant \|T\|_{E_i \to E_i} \|v\|_{E_i(A_i)}.$$

Таким образом inf в (2.2), вычисленный лишь по функциям, постоянным на множествах $\mathfrak{M}_n$, не более чем в $\max\{\|T\|_{E_i \to E_i}\}$ раз превосходит норму (2.2). Аналогичный факт имеет место и для пространств $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$.

В терминах, введениых в п. 2 введения к гл. II, полученные утверждения можно сформулировать так:

Замечание 2.1. Если оператор усреднения, отвечающий разбиению $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$, ограничен в пространствах E_i, то с точностью до изоморфизма

$$(A_0, A_1)^{\mathcal{K}(\mathcal{J})}_{E_0,E_1} = (A_0, A_1)^{\mathcal{K}(\mathcal{J})}_{dE_0,dE_1}.$$

3. Методы констант и средних для пространств со степенными весами. В этом пункте пространством $\mathfrak{M}$ будет служить полуось $(0, \infty)$ с мерой, определяемой дифференциальной формой dt/t. Пространства L_p, построенные по этой мере, будем обозначать $L_{p,*}$. Пусть α_0, α_1 — два действительных параметра, причем $\alpha_0 < 0$ и $\alpha_1 > 0$, а E_0,

E_1 — две идеальные структуры, являющиеся промежуточными пространствами между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$. Рассмотрим пространства с весами $E_{i,t^{\alpha_i}} = E_i^{\alpha_i}$ ($i = 0, 1$). Покажем, что функция $e(t) \equiv 1$ принадлежит пространству $E_0^{\alpha_0} + E_1^{\alpha_1}$. Действительно, $e(t) = \chi_{(1,\infty)}(t) + \chi_{(0,1)}(t)$. Далее, $t^{\alpha_0}\chi_{(1,\infty)}(t) \in L_{1,*} \cap \cap L_{\infty,*} \subset E_0$ и $t^{\alpha_1}\chi_{(0,1)}(t) \in L_{1,*} \cap L_{\infty,*} \subset E_1$, что и требовалось показать. Отсюда следует, что пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ будет промежуточным между пространствами A_0 и A_1.

Будем предполагать, что каждое из пространств E_0 и E_1 содержит некоторые почти всюду положительные функции. Тогда $E_0 \cap E_1 \neq \{0\}$. Ассоциированные пространства E_0^1 и E_1^1 будут идеальными структурами на $(0, \infty)$. Легко видеть, что они будут также промежуточными пространствами между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$. Далее, ассоциированными пространствами с $E_i^{\alpha_i}$ будут пространства $(E_i^{\alpha_i})^1 = E_i^{1(-\alpha_i)}$. Тем же рассуждением, что и выше, показывается, что $e \in (E_0^{\alpha_0})^1 + (E_1^{\alpha_1})^1$. Поэтому можно определить промежуточное пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$.

Предположим теперь, что структуры E_0 и E_1 являются интерполяционными пространствами между пространствами $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$. Напомним, что в § 8 п. 5 гл. II были рассмотрены некоторые операторы, действующие в пространствах E_i, и получены оценки для их норм.

Для оператора растяжения

$$\|\sigma_{1/\tau}\varphi\|_{E_i} = \|\varphi(\tau t)\|_{E_i} \leqslant k_i \|\varphi\|_{E_i}, \tag{2.5}$$

где k_i — интерполяционные константы пространств E_i.

Для степенного преобразования

$$\|T_\lambda\varphi\|_{E_i} = \|\varphi(t^\lambda)\|_{E_i} \leqslant k_i \max\{1, |\lambda|^{-1}\} \|\varphi\|_{E_i}. \tag{2.6}$$

Для преобразования свертки справедливо неравенство Юнга

$$\left\| \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right) \varphi(s) \frac{ds}{s} \right\|_{E_i} \leqslant k_i \|\psi\|_{L_{1,*}} \|\varphi\|_{E_i}. \tag{2.7}$$

Наконец, был рассмотрен специальный оператор усреднения

$$T_1\varphi(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\chi_{(e^n,e^{n+1}]}(t)\int_{e^n}^{e^{n+1}}\varphi(s)\frac{ds}{s}, \qquad (2.8)$$

для нормы которого получены оценки

$$\|T_1\varphi\|_{E_i^{\alpha_i}}\leqslant k_i e^{|\alpha_i|}\|\varphi\|_{E_i}.$$

Из замечания 2.1 и последнего утверждения вытекает

Замечание 2.2. Для получения величины, эквивалентной норме пространства $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_1^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$, можно рассматривать в (2.2) лишь представления вида $x=u_0(t)+ +u_1(t)$, где функции $u_i(t)$ постоянны на интервалах $(e^n, e^{n+1}]$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Аналогичное замечание справедливо и для пространства $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_1^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$.

Теорема 2.3. *Если идеальные структуры E_0 и E_1 являются интерполяционными пространствами между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$, то пространства $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ и $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ совпадают.*

Доказательство. Пусть $x\in(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$. Это означает, что существует представление

$$x=\int_0^{\infty}u(t)\frac{dt}{t}, \qquad (2.9)$$

где $u\in E_0^{\alpha_0}(A_0)\cap E_1^{\alpha_1}(A_1)$. Рассмотрим функции

$$v_0(t)=\int_0^t u(s)\frac{ds}{s} \quad \text{и} \quad v_1(t)=\int_t^{\infty}u(s)\frac{ds}{s}. \qquad (2.10)$$

Тогда $x=v_0(t)+v_1(t)$. Функция $v_0(t)$ принимает значения в пространстве A_0. Действительно,

$$\int_0^t \|u(s)\|_{A_0}\frac{ds}{s}\leqslant\int_0^t s^{-\alpha_0}(s^{\alpha_0}\|u(s)\|_{A_0})\frac{ds}{s}\leqslant$$

$$\leqslant\|s^{-\alpha_0}\chi_{(0,t]}(s)\|_{E_0^1}\|s^{\alpha_0}\|u(s)\|_{A_0}\|_{E_0}. \qquad (2.11)$$

Так как $\alpha_0<0$, то функция $s^{-\alpha_0}\chi_{(0,t]}(s)\in L_{1,*}\cap L_{\infty,*}\subset\subset E_0^1$, поэтому из (2.11) следует, что первый интеграл в (2.10) сходится в норме пространства A_0 и, значит, $v_0(t)\in A_0$.

Аналогично проверяется, что $v_1(t)\in A_1$.

Покажем, что $v_i\in E_i^{\alpha_i}(A_i)$. Пользуясь неравенством Юнга (2.7), получаем

$$\|t^{\alpha_0}\|v_0(t)\|_{A_0}\|_{E_0}\leqslant\left\|t^{\alpha_0}\int_0^t\|u(s)\|_{A_0}\frac{ds}{s}\right\|_{E_0}=$$

$$=\left\|\int_0^\infty\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha_0}\chi_{(1,\infty)}\left(\frac{t}{s}\right)s^{\alpha_0}\|u(s)\|_{A_0}\frac{ds}{s}\right\|_{E_0}\leqslant$$

$$\leqslant k_0\int_0^\infty t^{\alpha_0}\chi_{(1,\infty)}(t)\frac{dt}{t}\|s^{\alpha_0}\|u(s)\|_{A_0}\|_{E_0}=-\frac{k_0}{\alpha_0}\|u\|_{E_0^{\alpha_0}(A_0)} \qquad (2.12)$$

Аналогично проверяется, что

$$\|t^{\alpha_1}\|v_1(t)\|_{A_1}\|_{E_1}\leqslant\frac{k_1}{\alpha_1}\|u\|_{E_1^{\alpha_1}(A_1)}. \qquad (2.13)$$

Из представления $x=v_0(t)+v_1(t)$ и неравенств (2.12) и (2.13) вытекает, что $x\in(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0^{\alpha_0},E_1^{\alpha_1}}$, и следовательно, справедливо вложение

$$(A_0,A_1)^{\mathscr{J}}_{E_0^{\alpha_0},E_1^{\alpha_1}}\subset(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0^{\alpha_0},E_1^{\alpha_1}}.$$

Для доказательства обратного вложения рассмотрим $x\in(A_0,A_1)^{\mathscr{K}}_{E_0^{\alpha_0},E_1^{\alpha_1}}$. Тогда $x=v_0(t)+v_1(t)$, где $t^{\alpha_i}v_i\in E_i(A_i)$

($i=0, 1$). Мы покажем, что в этом представлении элемента x функции $v_0(t)$ и $v_1(t)$ можно считать гладкими. Для этого рассмотрим неотрицательную бесконечно дифференцируемую финитную на $(0, \infty)$ функцию $\psi(t)$, такую, что $\int\limits_0^\infty \psi(t)\frac{dt}{t}=1$. Положим $\widetilde{v}_i(t)=\int\limits_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)v_i(s)\frac{ds}{s}$. Функции $\widetilde{v}_i(t)$ так же, как и функции $v_i(t)$, принимают значения в A_i; они бесконечно дифференцируемы и $x=\widetilde{v}_0(t)+\widetilde{v}_1(t)$. Далее,

$$t^{\alpha_i}\|\widetilde{v}_i(t)\|_{A_i}\leqslant\int\limits_0^\infty\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha_i}\psi\left(\frac{t}{s}\right)s^{\alpha_i}\|v_i(s)\|_{A_i}\frac{ds}{s}$$

и по неравенству Юнга (2.7)

$$\|\widetilde{v}_i\|_{E_i^{\alpha_i}(A_i)}\leqslant\left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha_i}\psi(t)\frac{dt}{t}\right)\|v_i\|_{E_i^{\alpha_i}(A_i)}.$$

Положим теперь

$$u(t)=t\widetilde{v}_0'(t)=-t\widetilde{v}_1'(t).$$

Тогда имеем

$$t^{\alpha_0}u(t)=t^{\alpha_0+1}\widetilde{v}_0'(t)=\int\limits_0^\infty\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha_0+1}\psi'\left(\frac{t}{s}\right)s^{\alpha_0}v_0(s)\frac{ds}{s},$$

и по неравенству Юнга (2.7)

$$\|u\|_{E_0^{\alpha_0}(A_0)}\leqslant\left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha_0+1}\psi'(t)\frac{dt}{t}\right)\|v_0\|_{E_0^{\alpha_0}(A_0)}.$$

Аналогично

$$\|u\|_{E_1^{\alpha_1}(A_1)}\leqslant\left(\int\limits_0^\infty t^{\alpha_1+1}\psi'(t)\frac{dt}{t}\right)\|v_1\|_{E_1^{\alpha_1}(A_1)}.$$

Таким образом, $u\in E_0^{\alpha_0}(A_0)\cap E_1^{\alpha_1}(A_1)$. Наконец,

$$\int\limits_0^t u(s)\frac{ds}{s}=\int\limits_0^t\widetilde{v}_0'(s)ds=\widetilde{v}_0(t)-\widetilde{v}_0(+0)=\widetilde{v}_0(t), \qquad (2.14)$$

$$\int_t^\infty u(s)\frac{ds}{s} = -\int_t^\infty \tilde{v}_1'(s)\,ds = -[\tilde{v}_1(\infty) - \tilde{v}_1(t)] = \tilde{v}_1(t), \quad (2.15)$$

и, значит, $x = \int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s}$. При вычислении (2.14) и (2.15) мы воспользовались тем, что

$$\|\tilde{v}_i(t)\|_{A_i} \leqslant \int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)\|v_i(s)\|_{A_i}\frac{ds}{s} \leqslant \left\|s^{-\alpha_i}\psi\left(\frac{t}{s}\right)\right\|_{E_i'}\|v_i\|_{E_i^{\alpha_i}(A_i)}.$$

Функция $\left(\frac{s}{t}\right)^{-\alpha_i}\psi\left(\frac{t}{s}\right)$ получается из функции $s^{\alpha_i}\psi(s)$ с помощью степенного преобразования T_{-1} и растяжения σ_t. Из (2.5) и (2.6) следует, что эти операторы действуют в пространствах E_i' и имеют там норму k_i. Поэтому

$$\|\tilde{v}_i(t)\|_{A_i} \leqslant k_i t^{-\alpha_i}\|s^{\alpha_i}\psi(s)\|_{E_i'}\|v_i\|_{E_i^{\alpha_i}(A_i)} \to 0$$

при $i=0$, $t\to 0$ и при $i=1$, $t\to\infty$.

В дальнейшем при выполнении условий теоремы 2.3 мы будем опускать буквы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{J}$ в обозначениях наших пространств и, определяя их с точностью до изоморфизма, обозначать через $(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$.

Оказывается, что число вещественных параметров, описывающих эти пространства, можно сократить до одного.

Лемма 2.4. *В условиях теоремы* 2.3 *при* $\lambda\neq 0$

$$(A_0, A_1)_{E_0^{\lambda\alpha_0}, E_1^{\lambda\alpha_1}} = (A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$$

с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Если $x \in (A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$, то $x = v_0(t) + v_1(t)$, где $t^{\alpha_i}v(t) \in E_i(A_i)$. Но тогда $x = v_0(t^\lambda) + v_1(t^\lambda)$, и в силу (2.6) функции $t^{\alpha_i\lambda}v_i(t^\lambda) \in E_i(A_i)$. Это означает, что $x \in (A_0, A_1)_{E_0^{\lambda\alpha_0}, E_1^{\lambda\alpha_1}}$. При этом

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0^{\lambda\alpha_0}, E_1^{\lambda\alpha_1}}} \leqslant \| t^{\alpha_0\lambda} \| v_0(t^\lambda) \|_{A_0} \|_{E_0} + \| t^{\alpha_1\lambda} \| v_1(t^\lambda) \|_{A_1} \|_{E_1} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{1, \frac{k_0}{|\lambda|}, \frac{k_1}{|\lambda|}\right\} (\| t^{\alpha_0} \| v_0(t) \|_{A_0} \|_{E_0} + \| t^{\alpha_1} \| v_1(t) \|_{A_1} \|_{E_1}).$$

Отсюда следует, что

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0^{\lambda\alpha_0}, E_1^{\lambda\alpha_1}}} \leqslant \max\left\{1, \frac{k_0}{|\lambda|}, \frac{k_1}{|\lambda|}\right\} \|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}}.$$

Аналогично устанавливается обратное неравенство с заменой константы λ на $1/\lambda$.

Следствие. *Если выбрать* $\lambda = 1/(\alpha_1 - \alpha_0)$ *и обозначить* $\theta = -\alpha_0/(\alpha_1 - \alpha_0)$, *то с точностью до изоморфизма*

$$(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} = (A_0, A_1)_{E_0^{-\theta}, E_1^{1-\theta}} \equiv (A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Важным частным случаем рассмотренных пространств является тот, когда пространства E_0 и E_1 совпадают. Оказывается, что общий случай всегда может быть сведён к этому частному (см. [63]). Для пространств $E_i = L_{p_i}$ это показано в п. 7.

Приведем еще одно свойство пространств $(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}$.

Лемма 2.5. *Имеет место неравенство*

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}} \leqslant k_0^{1-\theta} k_1^\theta \inf \|u\|^{1-\theta}_{E_0^{\alpha_0}(A_0)} \|u\|^\theta_{E_1^{\alpha_1}(A_1)},$$

где $\theta = -\alpha_0/(\alpha_1 - \alpha_0)$ *и* inf *берется по всем* $u \in E_0^{\alpha_0}(A_0) \cap \cap E_1^{\alpha_1}(A_1)$, *дающим представление* (2.9).

Доказательство. Пусть $u \in E_0^{\alpha_0}(A_0) \cap E_1^{\alpha_1}(A_1)$ и $x = \int\limits_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$. Если $\tau > 0$, то функция $u_\tau(t) = u(\tau t)$ принадлежит $E_0^{\alpha_0}(A_0) \cap E_1^{\alpha_1}(A_1)$ и $x = \int\limits_0^\infty u_\tau(t) \frac{dt}{t}$.

В силу (2.5) имеем

$$\|x\|^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \leqslant \max(\|t^{\alpha_0}u_\tau\|_{E_0(A_0)}, \|t^{\alpha_1}u_\tau\|_{E_1(A_1)}) \leqslant$$
$$\leqslant \max(k_0\tau^{-\alpha_0}\|t^{\alpha_0}u\|_{E_0(A_0)}, k_1\tau^{-\alpha_1}\|t^{\alpha_1}u\|_{E_1(A_1)}).$$

Полагая в этом неравенстве

$$\tau = \left(\frac{k_1\|u\|_{E_1^{\alpha_1}(A_1)}}{k_0\|u\|_{E_0^{\alpha_0}(A_1)}}\right)^{1/(\alpha_1-\alpha_0)},$$

получаем

$$\|x\|^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \leqslant k_0^{1-\theta}k_1^{\theta}\|u\|^{1-\theta}_{E_0^{\alpha_0}(A_0)}\|u\|^{\theta}_{E_1^{\alpha_1}(A_1)}.$$

Следствие. *Существует $C=C(\theta, E_0, E_1)$ такая, что*

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}} \leqslant C\|x\|^{1-\theta}_{A_0}\|x\|^{\theta}_{A_1}$$

для всех $x \in A_0 \cap A_1$.

Действительно, в представлении (2.9) элемента x можно взять $u(t)=\psi(t)x$. Тогда

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}} \leqslant C_1\|t^{\alpha_0}\psi(t)x\|^{1-\theta}_{E_0(A_0)}\|t^{\alpha_1}\psi(t)x\|^{\theta}_{E_1(A_1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\max(\|t^{\alpha_0}\psi\|^{1-\theta}_{E_0}, \|t^{\alpha_1}\psi\|^{\theta}_{E_1})\|x\|^{1-\theta}_{A_0}\|x\|^{\theta}_{A_1}.$$

Из леммы 2.5 вытекает такое уточнение интерполяционной теоремы для нашего случая.

Теорема 2.4 (интерполяционная). *Пусть A_0, A_1 и B_0, B_1 — две банаховы пары, а структуры E_0 и E_1 удовлетворяют условиям теоремы 2.3. Тогда тройка пространств A_0, A_1, $(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}$ является интерполяционной типа θ относительно тройки пространств B_0, B_1, $(B_0, B_1)_{\theta, E_0, E_1}$.*

Доказательство. Пусть $x \in (A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}$ и $T \in \pi(A_0, A_1; B_0, B_1)$. Тогда из представления (2.9) получаем, что

$$Tx = \int_0^\infty Tu(t)\frac{dt}{t}.$$

По лемме 2.5

$$\|Tx\|_{(B_0,B_1)_{\theta,E_0,E_1}} \leqslant C\|Tu\|^{1-\theta}_{E_0^{-\theta}(B_0)}\|Tu\|^{\theta}_{E_1^{1-\theta}(B_1)} \leqslant$$

$$\leqslant C\|T\|^{1-\theta}_{A_0\to B_0}\|T\|^{\theta}_{A_1\to B_1}\|u\|^{1-\theta}_{E_0^{-\theta}(A_0)}\|u\|^{\theta}_{E_1^{1-\theta}(A_1)} \leqslant$$

$$\leqslant C\|T\|^{1-\theta}_{A_0\to B_0}\|T\|^{\theta}_{A_1\to B_1}\|u\|_{E_0^{-\theta}(A_0)\cap E_1^{1-\theta}(A_1)}.$$

Переходя к inf по u, дающим представление (2.9), получаем, что

$$\|T\|_{(A_0,A_1)_{\theta,E_0,E_1}\to(B_0,B_1)_{\theta,E_0,E_1}} \leqslant C\|T\|^{1-\theta}_{A_0\to B_0}\|T\|^{\theta}_{A_1\to B_1}.$$

З а м е ч а н и е 2.3. Как видно из доказательств утверждений этого пункта, интерполяционное свойство структур E_0 и E_1 использовалось лишь по отношению к четырем конкретным операторам ((2.5)—(2.8)). Тот факт, что эти операторы, действуют в E_0 и E_1, часто удается проверить непосредственно без установления общих интерполяционных свойств пространств E_0 и E_1. В этом случае все утверждения этого пункта остаются справедливыми.

4. Теоремы вложения, теорема о реитерации. Пусть заданы четыре идеальные структуры E_0, E_1, F_0, F_1 на полуоси $(0, \infty)$ с мерой dt/t, интерполяционные между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$. Предположим, что существуют еще две идеальные структуры G_0 и G_1, содержащие все финитные функции и такие, что для оператора свертки справедливы неравенства

$$\left\|\int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)\varphi(s)\,\frac{ds}{s}\right\|_{F_i} \leqslant k_i\|\psi\|_{G_i}\|\varphi\|_{E_i} \tag{2.16}$$

(см. гл. II, § 6, п. 9).

Т е о р е м а 2.5 (в л о ж е н и я). *Если выполнено условие* (2.16), *то пространство* $(A_0, A_1)_{\theta,E_0,E_1}$ *вложено в пространство* $(A_0, A_1)_{\theta,F_0,F_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in (A_0, A_1)_{\theta,E_0,E_1}$. С помощью неотрицательной гладкой финитной функции $\psi(t)$ с $\int_0^\infty \psi(t)\,dt = 1$ перейдем от представления (2.9) к представлению

$$x=\int_0^\infty v(t)\,\frac{dt}{t}, \quad \text{где } v(t)=\int_0^\infty \psi\left(\frac{t}{s}\right)u(s)\,\frac{ds}{s}. \tag{2.17}$$

Тогда

$$\|t^{-\theta}v\|_{F_0(A_0)}\leqslant\left\|\int_0^\infty\left(\frac{t}{s}\right)^{-\theta}\psi\left(\frac{t}{s}\right)s^{-\theta}\|u(s)\|_{A_0}\frac{ds}{s}\right\|_{F_0}\leqslant$$

$$\leqslant\|t^{-\theta}\psi\|_{G_0}\,\|s^{-\theta}\|u(s)\|_{A_0}\|_{E_0}.$$

Аналогично

$$\|t^{1-\theta}v\|_{F_1(A_1)}\leqslant\|t^{1-\theta}\psi\|_{G_1}\,\|s^{1-\theta}\|u(s)\|_{A_1}\|_{E_1}.$$

Из этих неравенств и (2.17) вытекает, что

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,F_0,F_1}}\leqslant\max\{\|t^{-\theta}\psi\|_{G_0},\ \|t^{1-\theta}\psi\|_{G_1}\}\,\|u\|_{E_0^{-\theta}(A_0)\cap E_1^{1-\theta}(A_1)}.$$

Переходя к inf по всевозможным $u(t)$, дающим представление (2.9), получаем требуемое вложение:

$$(A_0,A_1)_{\theta,E_0,E_1}\subset(A_0,A_1)_{\theta,F_0,F_1}.$$

Следствие. *Справедливы вложения*

$$(A_0,A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}\subset(A_0,A_1)_{\theta,E_0,E_1}\subset(A_0,A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}. \tag{2.18}$$

Действительно, первое вложение вытекает из теоремы и неравенств (2.7), второе — из того, что неравенства (2.16) справедливы при $F_i=L_{\infty,*}$ и $G_i=E_i'$.

Определение 2.1. Промежуточное между пространствами A_0 и A_1 пространство B *имеет тип* θ $(0<\theta<1)$, если

$$(A_0,A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}\subset B\subset(A_0,A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}.$$

Из предыдущего следует, что пространство $(A_0,A_1)_{\theta,E_0,E_1}$ $(0<\theta<1)$ имеет тип θ.

Лемма 2.6. *Пусть B — промежуточное пространство между A_0 и A_1. Для того чтобы пространство $(A_0,A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}$ было вложено в B, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x\in A_0\cap A_1$ выполнялось* *неравенство*

$$\|x\|_B \leqslant C\|x\|_{A_0}^{1-\theta}\|x\|_{A_1}^{\theta}, \tag{2.19}$$

где C не зависит от x.

Доказательство. Пусть $B \supset (A_0, A_1)_{\theta, L_{1,*}, L_{1,*}}$; тогда существует константа C_1 такая, что $\|x\|_B \leqslant C_1\|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}}$ для всех $x \in (A_0, A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}$. По следствию из леммы 2.4

$$\|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}} \leqslant C_2\|x\|_{A_0}^{1-\theta}\|x\|_{A_1}^{\theta}.$$

Объединяя неравенства, получаем (2.19).

Обратно, пусть выполнено (2.19). Если $x \in (A_0, A_1)_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}$, то справедливо представление (2.9), где $u \in L_{1,*}^{-\theta}(A_0) \cap L_{1,*}^{1-\theta}(A_1)$. Из (2.19) получаем, что $\|u(t)\|_B \leqslant C\|u(t)\|_{A_0}^{1-\theta}\|u(t)\|_{A_1}^{\theta}$. Из этого и неравенства Гёльдера следует, что

$$\|x\|_B \leqslant \int_0^\infty \|u(t)\|_B \frac{dt}{t} \leqslant C\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\|u(t)\|_{A_0}\right)^{1-\theta}\left(t^{1-\theta}\|u(t)\|_{A_1}\right)^{\theta}\frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant C\|u\|_{L_{1,*}^{-\theta}(A_0)}^{1-\theta}\|u\|_{L_{1,*}^{1-\theta}(A_1)}^{\theta}.$$

Следовательно, $x \in B$ и $\|x\|_B \leqslant C\|x\|_{\theta,L_{1,*},L_{1,*}}$.

Лемма 2.7. *Для того чтобы промежуточное между A_0 и A_1 пространство B было вложено в пространство $(A_0, A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа C такая, что для каждого $x \in B$ и для каждого s можно выбрать $x_i = x_i(s) \in A_i$ так, что $x = x_0 + x_1$ и*

$$\|x_0\|_{A_0} \leqslant Cs^{\theta}\|x\|_B, \qquad \|x_1\|_{A_1} \leqslant Cs^{\theta-1}\|x\|_B. \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть $B \subset (A_0, A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}$, и, следовательно, существует константа C_1 такая, что $\|x\|_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}^{\mathscr{K}} \leqslant C_1\|x\|_B$ $(x \in B)$. Как показано при доказательстве теоремы 2.3, найдутся гладкие функции $v_0(s)$ и

$v_1(s)$ такие, что $x = v_0(s) + v_1(s)$ и $\|s^{-\theta}v_0\|_{L_{\infty,*}(A_0)} + \|s^{1-\theta}v_1\|_{L_{\infty,*}(A_1)} \leqslant C_2\|x\|^{\mathscr{K}}_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}$. Полагая $x_0 = v_0(s)$ и $x_1 = v_1(s)$, мы из двух последних неравенств получим, что $\|x_0\|_{A_0} \leqslant C_1C_2s^{\theta}\|x\|_B$ и $\|x_1\|_{A_1} \leqslant C_1C_2s^{\theta-1}\|x\|_B$.

Обратно, пусть выполнены условия (2.20). Пусть $x \in B$ и $s_0 > 0$. Найдутся $x_0 \in A_0$ и $x_1 \in A_1$ такие, что

$$x = x_0 + x_1, \quad \|x_0\|_{A_0} \leqslant Cs_0^{\theta}\|x\|_B, \quad \|x_1\|_{A_1} \leqslant Cs_0^{\theta-1}\|x\|_B.$$

В некотором интервале I, содержащем s_0, будут выполнены неравенства $\|x_0\|_{A_0} \leqslant 2Cs^{\theta}\|x\|_B$, $\|x_1\|_{A_1} \leqslant 2Cs^{\theta-1}\|x\|_B$. Теперь ясно, что полуось $(0, \infty)$ можно разбить на интервалы I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что для каждого n существуют $x_0^n \in A_0$ и $x_1^n \in A_1$ такие, что $x = x_0^n + x_1^n$ и при $s \in I_n$ $\|x_0^n\|_{A_0} \leqslant 2Cs^{\theta}\|x\|_B$, $\|x_1^n\|_{A_1} \leqslant 2Cs^{\theta-1}\|x\|_B$. Для завершения доказательства остается положить $v_i(s) = x_i^n$ при $s \in I_n$ $i = 0, 1)$, откуда будет следовать, что

$$x \in (A_0, A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}} \quad \text{и} \quad \|x\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}} \leqslant 2C\|x\|_B.$$

Замечание. Нетрудно видеть, что в лемме 2.6 можно требовать лишь, чтобы $B \supset A_0 \cap A_1$, а в лемме 2.7,— чтобы $B \subset A_0 + A_1$.

Теорема 2.6. *Пусть* $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$. *Если пространства* $(A_0, A_1)_{\theta_i,L_{1,*},L_{1,*}}$ *вложены в промежуточные между* A_0 *и* A_1 *пространства* B_i $(i = 0, 1)$, *то справедливо вложение*

$$(A_0, A_1)_{\theta,E_0,E_1} \subset (B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1},$$

где $\theta' = \dfrac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$, *а* $F_i = E_0^{1-\theta_i}E_1^{\theta_i}$ — *пространства кальдероновой шкалы, соединяющей структуры* E_0 *и* E_1 (см. § 1, п. 10).

Доказательство. Если $x \in (A_0, A_1)_{\theta,E_0,E_1}$, то для него существует представление (2.9) с $u \in E_0^{-\theta}(A_0) \cap E_1^{1-\theta}(A_1)$. В силу леммы 2.6

$$\|u(t)\|_{B_i} \leqslant C_i\|u(t)\|_{A_0}^{1-\theta_i}\|u(t)\|_{A_1}^{\theta_i}.$$

Отсюда при $i=0$ вытекает, что

$$t^{-(\theta-\theta_0)}\|u(t)\|_{B_0}\leqslant C_0\left(t^{-\theta}\|u(t)\|_{A_0}\right)^{1-\theta_0}\left(t^{1-\theta}\|u(t)\|_{A_1}\right)^{\theta_0}.$$

Из этого неравенства следует, что функция, стоящая слева, принадлежит пространству $F_0=E_0^{1-\theta_0}E_1^{\theta_0}$ и

$$\|t^{-(\theta-\theta_0)}u(t)\|_{F_0(B_0)}\leqslant C_0\|u\|^{1-\theta_0}_{E_0^{-\theta}(A_0)}\|u\|^{\theta_0}_{E_1^{1-\theta}(A_1)}. \tag{2.21}$$

Аналогично получается неравенство

$$\|t^{\theta_1-\theta}u(t)\|_{F_1(B_1)}\leqslant C_1\|u\|^{1-\theta_1}_{E_0^{-\theta}(A_0)}\|u\|^{\theta_1}_{E_1^{1-\theta}(A_1)}. \tag{2.22}$$

Из неравенств (2.21) и (2.22) вытекает, что $u\in F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)\cap F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)$, и так как $a^{1-\theta_i}b^{\theta_i}\leqslant\max\{a, b\}$, то

$$\|u\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)\cap F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)}\leqslant\max\{C_0, C_1\}\|u\|_{E_0^{-\theta}(A_0)\cap E_1^{1-\theta}(A_1)}.$$

Таким образом, $x\in(B_0, B_1)_{F_0^{-(\theta-\theta_0)},F_1^{\theta_1-\theta}}$, но по лемме 2.4 последнее пространство совпадает с пространством $(B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1}$ с точностью до эквивалентных норм.

Теорема 2.7. *Пусть* $0<\theta_0<\theta<\theta_1<1$. *Если промежуточные между* A_0 *и* A_1 *пространства* B_i *вложены в пространства* $(A_0, A_1)_{\theta_i,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}$ $(i=0, 1)$, *то справедливо вложение*

$$(A_0, A_1)_{\theta,E_0,E_1}\supset(B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1},$$

где $\theta'=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$, *а* $F_i=E_0^{1-\theta_i}E_1^{\theta_i}$ — *пространства кальдероновой шкалы, соединяющей структуры* E_0 *и* E_1.

Доказательство. Пусть $x\in(B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1}$. Воспользуемся снова тем, что по лемме 2.3 $x\in(B_0, B_1)_{F_0^{-(\theta-\theta_0)},F_1^{\theta_1-\theta}}$. Тогда существует представление $x=v_0(t)+v_1(t)$, где $t^{-(\theta-\theta_0)}\|v_0(t)\|_{B_0}\in F_0$ и $t^{\theta_1-\theta}\|v_1(t)\|_{B_1}\in F_1$. Согласно замечанию 2.2 функции $v_i(t)$ можно считать ступенчатыми. Так как $v_0(t)\in B_0$, то по лемме 2.7 для каждого $s>0$ имеет место разложение $v_0(t)=v_{00}(t, s)+v_{01}(t, s)$, где

$$\|v_{00}(t, s)\|_{A_0}\leqslant C_0s^{\theta_0}\|v_0(t)\|_{B_0}$$

и

$$\|v_{01}'(t, s)\|_{A_1} \leqslant C_0 s^{\theta_0-1} \|v_0(t)\|_{B_0}.$$

Функции $v_{00}(t, s)$ и $v_{01}(t, s)$, как видно из доказательства леммы 2.7, можно считать ступенчатыми по s для каждого t, причем, очевидно, не зависящими от t на каждом промежутке постоянства функции $v_0(t)$. Оцениваем:

$$t^{-\theta} \|v_{00}(t, s)\|_{A_0} \leqslant C_0 t^{-\theta_0} s^{\theta_0} \left(t^{-(\theta-\theta_0)} \|v_0(t)\|_{B_0}\right), \qquad (2.23)$$

$$t^{1-\theta} \|v_{01}(t, s)\|_{A_1} \leqslant C_0 t^{1-\theta_0} s^{\theta_0-1} \left(t^{-(\theta-\theta_0)} \|v_0(t)\|_{B_0}\right). \qquad (2.24)$$

Функция, стоящая в скобках, принадлежит пространству $F_0 = E_0^{1-\theta_0} E_1^{\theta_0}$, поэтому найдутся функции $\varphi_{00} \in E_0$ и $\varphi_{01} \in E_1$ с $\|\varphi_{0i}\|_{E_i} \leqslant 1$ такие, что

$$t^{-(\theta-\theta_0)} \|v_0(t)\|_{B_0} \leqslant 2 \|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} |\varphi_{00}(t)|^{1-\theta_0} |\varphi_{01}(t)|^{\theta_0}.$$

Объединяя это неравенство с (2.23) и (2.24), получим

$$t^{-\theta} \|v_{00}(t, s)\|_{A_0} \leqslant 2C_0 \|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} t^{-\theta_0} s^{\theta_0} |\varphi_{00}(t)|^{1-\theta_0} |\varphi_{01}(t)|^{\theta_0},$$

$$t^{1-\theta} \|v_{01}(t, s)\|_{A_1} \leqslant$$
$$\leqslant 2C_0 \|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} t^{1-\theta_0} s^{\theta_0-1} |\varphi_{00}(t)|^{1-\theta_0} |\varphi_{01}(t)|^{\theta_0}.$$

Выберем теперь $s = s_0(t)$ из равенства

$$s_0(t) = t \frac{|\varphi_{00}(t)|}{|\varphi_{01}(t)|}.$$

Тогда

$$t^{-\theta} \|v_{00}(t, s_0(t))\|_{A_0} \leqslant 2C_0 \|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} |\varphi_{00}(t)|,$$

$$t^{1-\theta} \|v_{01}(t, s_0(t))\|_{A_1} \leqslant 2C_0 \|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} |\varphi_{01}(t)|.$$

Аналогично функцию $v_1(t)$ можно разложить на две части,

$$v_1(t) = v_{10}(t, s_1(t)) + v_{11}(t, s_1(t)),$$

так, что

$$t^{-\theta}\|v_{10}(t, s_1(t))\|_{A_0} \leqslant 2C_1\|v_1\|_{F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)}|\varphi_{10}(t)|,$$

$$t^{1-\theta}\|v_{11}(t, s_1(t))\|_{A_1} \leqslant 2C_1\|v_1\|_{F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)}|\varphi_{11}(t)|,$$

где $\varphi_{10}\in E_0$, $\varphi_{11}\in E_1$ и $\|\varphi_{1i}\|_{E_i}\leqslant 1$.

Положим

$$\bar v_0(t) = v_{00}(t, s_0(t)) + v_{10}(t, s_1(t)),$$

$$\bar v_1(t) = v_{01}(t, s_0(t)) + v_{11}(t, s_1(t)).$$

Функции $\bar v_0(t)$ и $\bar v_1(t)$ сильно измеримы в A_0 и A_1 соответственно, в силу ступенчатости функций $v_{ij}(t, s)$. По построению $x=\bar v_0(t)+\bar v_1(t)$. Наконец, в силу предыдущих неравенств

$$t^{-\theta}\|\bar v_0(t)\|_{A_0} \leqslant 2\max\{C_0, C_1\}\,(\|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} + \|v_1\|_{F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)})\max(|\varphi_{00}(t)|, |\varphi_{10}(t)|),$$

$$t^{1-\theta}\|\bar v_1(t)\|_{A_1} \leqslant 2\max\{C_0, C_1\}\,(\|v_0\|_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}(B_0)} + \|v_1\|_{F_1^{\theta_1-\theta}(B_1)})\max(|\varphi_{01}(t)|, |\varphi_{11}(t)|).$$

Правые части этих неравенств принадлежат E_0 и E_1 соответственно, поэтому $x\in(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}$ и

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}} \leqslant 8\max\{C_0, C_1\}\|x\|_{(B_0, B_1)_{F_0^{-(\theta-\theta_0)}, F_1^{\theta_1-\theta}}}.$$

Объединяя теоремы 2.6 и 2.7, мы приходим к весьма важному утверждению.

Теорема 2.8 (о реитерации). *Если промежуточные между A_0 и A_1 пространства B_0 и B_1 имеют типы θ_0 и θ_1 соответственно* $(0<\theta_0<\theta_1<1)$, *то при* $\theta_0<\theta<\theta_1$ $(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}$ *изоморфно пространству* $(B_0, B_1)_{\theta', F_0, F_1}$, *где* $\theta' = \dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$, *а* $F_i = E_0^{1-\theta_i}E_1^{\theta_i}$ *— пространства кальдероновой шкалы, соединяющей пространства E_0 и E_1.*

Замечание 1. Операторы (2.5), (2.6), (2.8) положительны, а оператор свертки (2.7) при доказательстве теоремы 2.3 применялся в том случае, когда ядро его было положительным. Пространства E_0 и E_1 являются интерполяционными относительно $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$, поэтому операторы (2.5)—(2.8) действуют в них и, в силу их положительности, согласно сказанному на стр. 327 и в § 1, п. 10 будут действовать и в пространствах F_0 и F_1. По замечанию 2.3 теорема 2.3 будет справедлива для этих пространств, т. е. пространства $(B_0, B_1)^{\mathcal{K}}_{\theta', F_0, F_1}$ и $(B_0, B_1)^{\mathcal{J}}_{\theta', F_0, F_1}$ совпадают, чем мы и пользовались при доказательстве теорем 2.6—2.8.

Замечание 2. Доказательство теоремы о реитерации проходит и в том случае, когда $B_0 = A_0$ $(B_1 = A_1)$, если положить $\theta_0 = 0$ $(\theta_1 = 1)$.

Теорема о реитерации позволяет описывать промежуточные интерполяционные пространства между пространствами «сложной природы» B_0 и B_1 с помощью пространств, построенных по «более простым» пространствам A_0 и A_1. При этом интересным является тот факт, что для этого описания необходимо знать лишь тип пространств B_0 и B_1.

5. Построение пространств с помощью функционалов $\mathcal{K}(t, x)$ и $\mathcal{J}(t, x)$. В некоторых случаях вычисление нормы в промежуточных пространствах, построенных по методу констант или средних, удобнее делать с помощью функционала $\mathcal{K}(t, x)$, определенного для $x \in A_0 + A_1$ по формуле

$$\mathcal{K}(t, x) = \inf_{x = x_0 + x_1} (\|x_0\|_{A_0} + t\|x_1\|_{A_1}), \tag{2.25}$$

или $\mathcal{J}(t, x)$, определенного для $x \in A_0 \cap A_1$ равенством

$$\mathcal{J}(t, x) = \max\{\|x\|_{A_0}, t\|x\|_{A_1}\}. \tag{2.26}$$

Очевидно, что при фиксированном t функционалы $\mathcal{K}(t, x)$ и $\mathcal{J}(t, x)$ эквивалентны нормам пространств $A_0 + A_1$ и $A_0 \cap A_1$ соответственно.

При фиксированном x $\mathcal{K}(t, x)$, как inf линейных функций от t, будет непрерывной возрастающей вогнутой функцией от t. Функция $\mathcal{J}(t, x)$ кусочно-линейна и выпукла по t.

Пусть теперь $x \in (A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E, E_{\rho(t)}}$, где $\rho(t)$ — непрерывный почти всюду положительный вес. По определению это означает, что существует представление $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $u_0 \in E(A_0)$ и $u_1 \in E_{\rho(t)}(A_1)$. Тогда

$$\mathscr{K}(\rho(t), x) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{A_0} + \rho(t)\|x_1\|_{A_1}) \leqslant$$
$$\leqslant \|u_0(t)\|_{A_0} + \rho(t)\|u_1(t)\|_{A_1}.$$

Оба слагаемые справа принадлежат пространству E, поэтому $\mathscr{K}(\rho(t), x) \in E$ и

$$\|\mathscr{K}(\rho(t), x)\|_E \leqslant \|\|u_0(t)\|_{A_0}\|_E + \|\rho(t)\|u_1(t)\|_{A_1}\|_E.$$

Переходя справа к inf по всем представлениям (2.1), получим, что

$$\|\mathscr{K}(\rho(t), x)\|_E \leqslant \|x\|_{(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{E, E_\rho}}.$$

Обратно, если $\mathscr{K}(\rho(t), x) \in E$, то при фиксированном t_0 найдутся элементы $x_0 \in A_0$ и $x_1 \in A_1$ такие, что $x = x_0 + x_1$ и

$$\|x_0\|_{A_0} + \rho(t_0)\|x_1\|_{A_1} < 2\mathscr{K}(\rho(t_0), x).$$

В силу непрерывности по t функций справа и слева неравенство

$$\|x_0\|_{A_0} + \rho(t)\|x_1\|_{A_1} < 2\mathscr{K}(\rho(t), x)$$

будет выполнено в окрестности I точки t_0. Отсюда ясно, что полуось $(0, \infty)$ можно разбить на интервалы I_n так, что при $t \in I_n$ существует разложение $x = x_0^n + x_1^n$ такое, что

$$\|x_0^n\|_{A_0} + \rho(t)\|x_1^n\|_{A_1} < 2\mathscr{K}(\rho(t), x).$$

Положим $u_0(t) = x_0^n$ и $u_1(t) = x_1^n$ при $t \in I_n$. Тогда $x = u_0(t) + u_1(t)$ и

$$\|u_0(t)\|_{A_0} + \rho(t)\|u_1(t)\|_{A_1} < 2\mathscr{K}(\rho(t), x).$$

Отсюда $\|u_0\|_{E(A_0)} \leqslant 2\|\mathscr{K}(\rho(t), x)\|_E$ и $\|u_1\|_{E_\rho(A_1)} < 2\|\mathscr{K}(\rho(t), x\|_E$ и, следовательно,

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{E, E_\rho}} \leqslant 4\|\mathscr{K}(\rho(t), x)\|_E.$$

Мы доказали утверждение.

Лемма 2.8. *Пространство* $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E,E_\rho}$ *состоит из всех элементов* x, *для которых* $\mathcal{K}(\rho(t), x) \in E$ *и норма пространства эквивалентна величине* $\|\mathcal{K}(\rho(t), x)\|_E$.

Аналогично устанавливается

Лемма 2.9. *Пространство* $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E,E_\rho}$ *состоит из всех элементов* x, *представимых в виде* (2.9), *для которых* $\mathcal{J}(\rho(t), u(t)) \in E$ *и норма пространства эквивалентна величине* $\inf \|\mathcal{J}(\rho(t), u(t))\|_E$, *где* inf *берется по всем представлениям* (2.9).

Проверку этого простого факта предоставляем читателю.

Отметим, что пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E,E_\rho}$ может содержать ненулевые элементы лишь при условии, что $e(t) \equiv 1 \in E + E_\rho$. Это условие выполнено, если функция $\varphi(t) = \min\{1, \rho(t)\} \in E$. Действительно, $e(t) \equiv \chi_1(t) + \chi_2(t)$, где $\chi_1(t)$ — характеристическая функция того множества, где $\rho(t) \leqslant 1$. Тогда $\rho(t)\chi_1(t) \leqslant \varphi(t) \in E$ и $\chi_2(t) \leqslant \varphi(t) \in E$, и следовательно, $e \in E + E_\rho$. Обратно, если $\varphi \notin E$, то, так как $\varphi(t) = \rho(t)\chi_1(t) + \chi_2(t)$, одна из функций $\rho(t)\chi_1(t)$ или $\chi_2(t)$ не принадлежит E. Утверждается, что тогда одна из функций $\chi_1(t)$ или $\chi_2(t)$ не принадлежит $E + E_\rho$. В самом деле, если $\chi_2(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t)$, $\mu_1 \in E$ и $\mu_2 \in E_\rho$, то можно считать, что $\mu_1(t) \geqslant 0$ и $\mu_2(t) \geqslant 0$, и функции μ_1 и μ_2 имеют тот же носитель, что и χ_2. Поэтому из $\rho\mu_2 \in E$ следует, что $\mu_2 \in E$, но тогда $\chi_2 = \mu_1 + \mu_2 \in E$. Если $\chi_1(t) = \nu_1(t) + \nu_2(t)$, $\nu_1 \in E$, $\nu_2 \in E_\rho$, то при тех же оговорках, $\rho\nu_1 \in E$ и поэтому $\rho\chi_1 = \rho\nu_1 + \rho\nu_2 \in E$. Таким образом, либо $\chi_1 \notin E + E_\rho$, либо $\chi_2 \notin E + E_\rho$, а значит, $e = \chi_1 + \chi_2 \notin E + E_\rho$.

Итак, для того *чтобы пространство* $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E,E_\rho}$ *было нетривиальным, необходимо, чтобы* $\min\{1, \rho(t)\} \in E$.

При построении пространств $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0,E_1}$ мы пользовались тем, что $e \in E_0^1 + E_1^1$. Поэтому пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E,E_\rho}$ определено, если $e \in E^1 + (E_\rho)^1 = E^1 + E^1_{\rho^{-1}}$, что в силу предыдущего равносильно тому, что функция $\min(1, \rho^{-1}(t)) \in E^1$.

При условии совпадения методов констант и средних получается

Теорема 2.9. *Если E — идеальная структура, являющаяся интерполяционным пространством между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$, то пространство $(A_0, A_1)_{\theta,E,E}$ состоит из всех тех элементов x, для которых $\mathscr{K}(t, x) \in E^{-\theta}$, а также из всех элементов x, представимых в виде* (2.9) *с* $\mathscr{J}(t, u(t)) \in E^{-\theta}$. *Норма пространства $(A_0, A_1)_{\theta,E}$ эквивалентна нормам*

$$\|\mathscr{K}(t, x)\|_{E^{-\theta}} \quad \text{и} \quad \inf \|\mathscr{J}(t, u(t))\|_{E^{-\theta}},$$

где inf *берется по всем представлениям* (2.9).

Применим эту теорему для получения еще одного варианта теоремы о реитерации.

Теорема 2.10. *Пусть F_0, F_1, G_0, G_1 — идеальные структуры, интерполяционные между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$, $B_0 = (A_0, A_1)_{\theta,G_0,G_0}$ и $B_1 = (A_0, A_1)_{\theta,G_1,G_1}$; тогда с точностью до изоморфизма*

$$(B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1} = (A_0, A_1)_{\theta,H,H},$$

где

$$H = (G_0, G_1)_{\theta',F_0,F_1} \qquad (0 < \theta, \theta' < 1).$$

Доказательство. Пусть $x \in (B_0, B_1)_{\theta',F_0,F_1}$, тогда

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \quad t^{-\theta'}\|u(t)\|_{B_0} \in F_0, \quad t^{1-\theta'}\|u(t)\|_{B_1} \in F_1. \tag{2.27}$$

Для вычисления норм в пространствах B_0 и B_1 применим теорему 2.9; тогда получим, что

$$t^{-\theta'}\|s^{-\theta}\mathscr{K}(s, u(t))\|_{G_0} \in F_0 \quad \text{и} \quad t^{1-\theta'}\|s^{-\theta}\mathscr{K}(s, u(t))\|_{G_1} \in F_1. \tag{2.28}$$

Из представления (2.9) следует, что

$$s^{-\theta}\mathscr{K}(s, x) \leqslant \int_0^\infty s^{-\theta}\mathscr{K}(s, u(t))\frac{dt}{t}.$$

В силу (2.28) функция от s, стоящая справа, принадлежит пространству $H = (G_0, G_1)_{\theta',F_0,F_1}$, значит, этому пространству принадлежит и функция $s^{-\theta}\mathscr{K}(s, x)$. По теореме 2.9 отсюда следует, что $x \in (A_0, A_1)_{\theta,H,H}$.

Обратно, если $x \in (A_0, A_1)_{\theta,H,H}$, то по теореме 2.9 существует представление

$$x = \int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s}, \qquad s^{-\theta}\mathcal{J}(s, u(s)) \in H = (G_0, G_1)_{\theta', F_0, F_1}. \tag{2.29}$$

По определению пространства H тогда можно построить разложение

$$s^{-\theta}\mathcal{J}(s, u(s)) = s^{-\theta}\varphi_0(s, t) + s^{-\theta}\varphi_1(s, t),$$

$$t^{-\theta'}\|s^{-\theta}\varphi_0(s, t)\|_{G_0} \in F_0, \quad t^{1-\theta'}\|s^{-\theta}\varphi_1(s, t)\|_{G_1} \in F_1. \tag{2.30}$$

Положим

$$v_0(t) = \int_0^\infty \frac{\varphi_0(s, t)}{\mathcal{J}(s, u(s))}u(s)\frac{ds}{s},$$

$$v_1(t) = \int_0^\infty \frac{\varphi_1(s, t)}{\mathcal{J}(s, u(s))}u(s)\frac{ds}{s}. \tag{2.31}$$

Пользуясь снова теоремой 2.9, вычислим норму $v_0(t)$ и $v_1(t)$ в пространствах B_0 и B_1. Имеем

$$\|v_0(t)\|_{B_0} \leqslant C_0\left\|s^{-\theta}\mathcal{J}\left(\frac{\varphi_0(s, t)}{\mathcal{J}(s, u(s))}u(s)\right)\right\|_{G_0} = C_0\|s^{-\theta}\varphi_0(s, t)\|_{G_0},$$

$$\|v_1(t)\|_{B_1} \leqslant C_1\left\|s^{-\theta}\mathcal{J}\left(\frac{\varphi_1(s, t)}{\mathcal{J}(s, u(s))}u(s)\right)\right\|_{G_1} = C_1\|s^{-\theta}\varphi_1(s, t)\|_{G_1}.$$

Из (2.30) тогда следует, что $t^{-\theta'}\|v_0(t)\|_{B_0} \in F_0$, $t^{1-\theta'}\|v_1(t)\|_{B_1} \in F_1$. Наконец, в силу (2.29)—(2.31) $x = v_0(t) + v_1(t)$, т. е. $x \in (B_0, B_1)_{\theta', F_0, F_1}$.

6. Промежуточные пространства между L_1 и L_∞. Как и в основной части гл. II, мы будем рассматривать пространства $L_1(0, \infty)$ и $L_\infty(0, \infty)$ с лебеговой мерой. Построим пространство $(L_1, L_\infty)_{\theta, L_{p,*}, L_{p,*}}$. Согласно теореме 2.9 эквивалентную норму в этом пространстве можно считать с помощью функционала $\mathcal{K}(t, x)$. Для этого функционала в гл. II, § 3, п. 1 была получена формула

$$\mathcal{K}(t, x) = \int_0^t x^*(\tau)\,d\tau = tx^{**}(t).$$

Тогда для нормы получаем формулу

$$\|x\|_{(L_1, L_\infty)_{0, L_{p,*}, L_{p,*}}} = \left\{\int_0^\infty (t^{1-0} x^{**}(t))^p \frac{dt}{t}\right\}^{1/p}.$$

С точностью до константы получается норма пространств, рассмотренных в гл. II, § 6, п. 8 с $1/r = 1-0$. Таким образом, с точностью до изоморфизма

$$(L_1, L_\infty)_{1/r', L_{p,*}, L_{p,*}} = L_{r,p} \quad (1 < r < \infty, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty). \quad (2.32)$$

В частных случаях получаем

$$(L_1, L_\infty)_{1/p', L_{p,*}, L_{p,*}} = L_{p,p} = L_p,$$

$$(L_1, L_\infty)_{1/r', L_{\infty,*}, L_{\infty,*}} = M_{t^{1/r'}} \quad \text{(пространства Марцинкевича)},$$

$$(L_1, L_\infty)_{1/r', L_{1,*}, L_{1,*}} = \Lambda_{t^{1/r}} \quad \text{(пространства Лоренца)}.$$

Из (2.32) следует, что пространство $L_{r,p}$ имеет тип $1/r'$ относительно пространств L_1 и L_∞. Рассмотрим два числа r_0 и r_1 $(1 < r_0 < r_1 < \infty)$ и применим теорему о реитерации 2.8 к пространствам L_{r_0,p_0} и L_{r_1,p_1}. Тогда при $1/r_0' < \theta < 1/r_1'$ пространство $(L_1, L_\infty)_{0, L_{p,*}, L_{p,*}}$ изоморфно пространству $(L_{r_0,p_0}, L_{r_1,p_1})_{\theta', L_{p,*}, L_{p,*}}$, где $\theta' = \dfrac{\theta - 1/r_0'}{1/r_1' - 1/r_0'}$,

Учитывая (2.32), получим с точностью до изоморфизма, что

$$(L_{r_0,p_0}, L_{r_1,p_1})_{\theta', L_{p,*}, L_{p,*}} = L_{r,p}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta'}{r_0} + \frac{\theta'}{r_1}. \quad (2.33)$$

Пользуясь интерполяционной теоремой 2.4, мы можем получить с помощью найденных соотношений ряд конкретных интерполяционных теорем. Например, полагая $r_0 = p_0 = 1/\alpha_0$, $r_1 = p_1 = 1/\alpha_1$, $r = p = 1/\alpha$, где $\alpha = (1-\theta')\alpha_0 + \theta'\alpha_1$, а затем $r_0 = p_0 = 1/\beta_0$, $r_1 = p_1 = 1/\beta_1$, $r = 1/\beta$, где $\beta = (1-\theta')\beta_0 + \theta'\beta_1$, мы получим интерполяционные друг относительно друга тройки пространств $(L_{1/\alpha_0}, L_{1/\alpha_1}, L_{1/\alpha})$ и $(L_{1/\beta_0}, L_{1/\beta_1}, L_{1/\beta, 1/\alpha})$, о которых шла речь в теореме 6.14 гл. II.

Полагая снова $r_0=p_0=1/\alpha_0$, $r_1=p_1=1/\alpha_1$, $r=p=1/\alpha$, где $\alpha=(1-\theta')\alpha_0+\theta'\alpha_1$, а затем $r_0=1/\beta_0$, $p_0=\infty$, $r_1=1/\beta_1$, $p_1=\infty$, $r=1/\beta$, где $\beta=(1-\theta')\beta_0+\theta'\beta_1$, получим, что тройка пространств $(L_{1/\alpha_0}, L_{1/\alpha_1}, L_{1/\alpha})$ является интерполяционной типа θ' относительно тройки $(M_{t^{1-1/\beta_0}}, M_{t^{1-1/\beta_1}}, L_{1/\beta, 1/\alpha})$. Если теперь считать, что $\beta_i\leqslant\alpha_i$, то $1/\beta>1/\alpha$, и пространство $L_{1/\beta, 1/\alpha}$ вложено в пространство $L_{1/\beta, 1/\beta}=L_{1/\beta}$. Мы пришли к утверждению:

Теорема Марцинкевича. *Если* $0<\beta_i\leqslant\alpha_i<1$, *то тройка пространств* $(L_{1/\alpha_0}, L_{1/\alpha_1}, L_{1/\alpha})$ *является интерполяционной типа* θ *относительно тройки* $(M_{t^{1-1/\beta_0}}, M_{t^{1-1/\beta_1}}, L_{1/\beta})$, *где*

$$\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1, \qquad \beta=(1-\theta)\beta_0+\theta\beta_1.$$

Как мы видели выше, имеет место более точное утверждение, в котором $L_{1/\beta}$ нужно заменить на $L_{1/\beta, 1/\alpha}$.

7. Промежуточные пространства между абстрактными пространствами L^p с весом. В этом пункте мы рассмотрим более общую ситуацию, чем в предыдущем. Пусть A_0 и A_1 — банахова пара. Введем в рассмотрение пространства $L_{p_0}^{w_0}(A_0)$ и $L_{p_1}^{w_1}(A_1)$ функций, заданных на полуоси $(0, \infty)$ со значениями в пространствах A_0 и A_1, где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — веса, положительные измеримые функции на $(0, \infty)$.

Теорема 2.11. *Если хотя бы один из индексов* p_0, p_1 *конечен, то с точностью до изоморфизма*

$$(L_{p_0}^{w_0}(A_0), L_{p_1}^{w_1}(A_1))_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}),$$

где $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$.

Доказательство. Пусть функция $x(s)$ принадлежит пространству $(L_{p_0}^{w_0}(A_0), L_{p_1}^{w_1}(A_1))_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$. Тогда существует представление

$$x=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t},$$

где $u\in L_{p_0,*}^{-0}(L_{p_0}^{w_0}(A_0))\cap L_{p_1,*}^{1-\theta}(L_{p_1}^{w_1}(A_1))$, и $u(t)$ постоянна в каждом из промежутков (e^n, e^{n+1}), $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$, а интеграл берется в $L_{p_0}^{\omega_0}(A_0)+L_{p_1}^{\omega_1}(A_1)$. Абстрактная функция $u(t)$ при каждом $t>0$ есть функция из $L_{p_0}^{\omega_0}(A_0)\cap\cap L_{p_1}^{\omega_1}(A_1)$; обозначим ее через $u(s,t)$ и будем считать, что $u(s,t)\equiv u(s,t')$, при $e^n<t,t'\leqslant e^{n+1}$ $(n=0,\pm 1,\ldots)$. При фиксированном s функция $u(s,t)$ от t является ступенчатой (а следовательно, и сильно измеримой в $A_0\cap A_1$) и, кроме того, принадлежит (как мы увидим ниже при применении теоремы Фубини) пространству $L_{p_0,*}^{-\theta}(A_0)\cap L_{p_1,*}^{1-\theta}(A_1)$. Значит, в A_0+A_1 интеграл $\int\limits_0^\infty u(s,t)\frac{dt}{t}$ существует и представляет собой элемент пространства $(A_0,A_1)_{0,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}$. Далее, поскольку $\int\limits_{e^{-n}}^{e^n}u(t)\frac{dt}{t}$ и $\int\limits_{e^{-n}}^{e^n}u(s,t)\frac{dt}{t}$, очевидно, совпадают как фукции от s, то последозательность функций $x_n(s)=\int\limits_{e^{-n}}^{e^n}u(s,t)\frac{dt}{t}$ $(n=1,2,\ldots)$ сходится в $L_{p_0}^{\omega_0}(A_0)+L_{p_1}^{\omega 1}(A_1)$ к $x(s)$, откуда вытекает равенство

$$x(s)=\int\limits_0^\infty u(s,t)\frac{dt}{t}.$$

Теперь из леммы 2.5 имеем

$$\|x(s)\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}}\leqslant C\left\{\int\limits_0^\infty\left(t^{-\theta}\|u(s,t)\|_{A_0}\right)^{p_0}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1-\theta}{p_0}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^\infty\left(t^{1-\theta}\|u(s,t)\|_{A_1}\right)^{p_1}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{\theta}{p_1}}.$$

Заметим, что функция $x(s)$ сильно измерима в $(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}$. Это утверждение является следствием того, что последовательность функций $x_n(s)$, сильно измеримых в $A_0\cap A_1$, сходится почти всюду в $(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}$ к

$x(s)$ ввиду неравенства

$$\|x(s)-x_n(s)\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}}\leqslant$$

$$\leqslant C\|(1-\chi_{(e^{-n},e^n)})u(s,\cdot)\|_{L^{-\theta}_{p_0,*}(A_0)}\|(1-\chi_{(e^{-n},e^n)})u(s,\cdot)\|_{L^{1-\theta}_{p_1,*}(A_1)}$$

и конечности одного из индексов p_0, p_1. Далее имеем

$$(w_0^{1-\theta}(s)\,w_1^{\theta}(s)\,\|x(s)\|_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}})^p\leqslant$$

$$\leqslant C^p\left\{\int_0^\infty(t^{-\theta}w_0(s)\,\|u(s,t)\|_{A_0})^{p_0}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1-\theta}{p_0}p}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty(t^{1-\theta}w_1(s)\,\|u(s,t)\|_{A_1})^{p_1}\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{\theta}{p_1}p}.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по s и применяя справа неравенство Гёльдера и теорему Фубини (функция $\|u(s,t)\|_{A_i}$, очевидно, измерима по совокупности переменных), получаем

$$\|x\|_{L_p^{w_0^{1-\theta}w_1^{\theta}}((A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}})}\leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\int_0^\infty\int(t^{-\theta}w_0(s)\,\|u(s,t)\|_{A_1})^{p_0}\,ds\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1-\theta}{p_0}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^\infty\int(t^{1-\theta}w_1(s)\,\|u(s,t)\|_{A_1})^{p_1}\,ds\,\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{\theta}{p_1}}=$$

$$=C\,\|u\|^{1-\theta}_{L^{-\theta}_{p_0,*}(L^{w_0}_{p_0}(A_0))}\,\|u\|^{\theta}_{L^{1-\theta}_{p_1,*}(L^{w_1}_{p_1}(A_1))}.$$

Обратно, пусть $x\in L_p^{w_0^{1-\theta}w_1^{\theta}}((A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}})$.

Пусть счетнозначные функции $\overline{w}_0(s)$, $\overline{w}_1(s)$ таковы, что $\overline{w}_i(s)\leqslant w_i(s)\leqslant 2\overline{w}_i(s)$. Будем считать функцию $x(s)$ конечнозначной и с носителем, содержащимся в объединении конечного числа таких множеств, на которых каждая из функций $\overline{w}_0(s)$, $\overline{w}_1(s)$ постоянна.

При каждом s имеется представление

$$x(s) = \int_0^\infty u(s, t) \frac{dt}{t},$$

где $u(s, \cdot) \in L^{-\theta}_{p_0,*}(A_0) \cap L^{1-\theta}_{p_1,*}(A_1)$ и постоянна для $e^n < t \leqslant e^{n+1}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$ Можно считать, во-первых, что если $x(s) = x(s')$, то $u(s, t) \equiv u(s', t)$, во-вторых, что

$$\max\left(\left\| t^{-\theta} \| u(s, t) \|_{A_0} \right\|_{L_{p_0,*}}, \left\| t^{1-\theta} \| u(s, t) \|_{A_1} \right\|_{L_{p_1,*}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \| x(s) \|_{(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}}.$$

Рассмотрим функцию

$$v(s, t) = u(s, \overline{w}_0^{\lambda}(s)\, \overline{w}_1^{\mu}(s) \| x(s) \|^{\nu}_{(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}} t),$$

где показатели λ, μ, ν будут подобраны ниже ($v(s, t) = 0$ при $x(s) = 0$). При каждом фиксированном t функция $v(s, t)$ от s является конечнозначной со значениями в $A_0 \cap A_1$. Легко также понять, что v как абстрактная функция от t со значениями в пространстве сильно измеримых функций от s, принимающих значения в $A_0 \cap A_1$, является ступенчатой. Действительно, носитель функции $x(s)$ можно представить в виде $\bigcup_{n=1}^{N} M_n$, где измеримые множества M_n попарно не пересекается и функции $x(s)$, $\overline{w}_0(s)$, $\overline{w}_1(s)$ постоянны на каждом M_n. Положив

$$r_n = \overline{w}_0^{\lambda}(s)\, \overline{w}_1^{\mu}(s) \| x(s) \|^{\nu}_{(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}} \quad \text{и} \quad u_n(t) = u(s, r_n t),$$

при $s \in M_n$ будем иметь равенство

$$v(s, t) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) \chi_{M_n}(s).$$

Требуемое утверждение вытекает теперь из того, что функция $u_n(t)$, $n = 1, \ldots, N$, постоянна в промежутках $e^m r_n^{-1} < t \leqslant e^{m+1} r_n^{-1}$, $m = 0, \pm 1, \ldots$

Далее,

$$\| v \|^{p_0}_{L^{-\theta}_{p_0,*}(L^{w_0}_{p_0}(A_0))} = \int_0^\infty \int (t^{-\theta} w_0(s) \| v(s,t) \|_{A_0})^{p_0} ds \frac{dt}{t} =$$

$$= \int (w_0(s) \overline{w}_0^{\lambda\theta}(s) \overline{w}_1^{\mu\theta}(s) \| x(s) \|^{\nu\theta}_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}})^{p_0} \times$$

$$\times \int_0^\infty (t^{-\theta} \| u(s,t) \|_{A_0})^{p_0} \frac{dt}{t} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(|\lambda|+|\mu|)\theta p_0 + p_0} \int w_0^{(1+\lambda\theta)p_0}(s) w_1^{\mu\theta p_0}(s) \| x(s) \|^{(\nu\theta+1)p_0}_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}} ds.$$

Аналогично

$$\| v \|^{p_1}_{L^{1-\theta}_{p_1,*}(L^{w_1}_{p_1}(A_1))} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{(|\lambda|+|\mu|)(1-\theta)p_1 + p_1} \int w_0^{-\lambda(1-\theta)p_1}(s) w_1^{-\mu(1-\theta)p_1+p_1}(s) \times$$

$$\times \| x(s) \|^{-\nu(1-\theta)p_1+p_1}_{(A_0,A_1)_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}} ds.$$

Естественно попытаться подобрать λ, μ, ν так, чтобы

$$(1+\lambda\theta) p_0 = (1-\theta)p, \quad \mu\theta p_0 = \theta p, \quad (\nu\theta + 1) p_0 = p$$

и

$$-\lambda(1-\theta) p_1 = (1-\theta)p, \quad -\mu(1-\theta) p_1 + p_1 = \theta p,$$

$$-\nu(1-\theta) p_1 + p_1 = p.$$

Оказывается, это можно сделать: $\lambda = -pp_1^{-1}$, $\mu = pp_0^{-1}$, $\nu = p(p_0^{-1} - p_1^{-1})$.

Таким образом, в $L^{w_0}_{p_0}(A_0) + L^{w_1}_{p_1}(A_1)$ интеграл от v существует и является элементом $\bar{x}$ пространства $(L^{w_0}_{p_0}(A_0), L^{w_1}_{p_1}(A_1))_{\theta,L_{p_0,*},L_{p_1,*}}$. Но так как

$$\int_0^\infty v(s,t) \frac{dt}{t} = x(s) \quad \text{в} \quad A_0 + A_1, \text{ то } \bar{x} = x.$$

Кроме того,

$$\|x\|_{(L_{p_0}^{w_0}(A_0),\, L_{p_1}^{w_1}(A_1))_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}} \leqslant$$

$$\leqslant C' \|v\|^{1-\theta}_{L^{1-\theta}_{p_0,*}(L_{p_0}^{w_0}(A_0))} \|v\|^{\theta}_{L^{1-\theta}_{p_1,*}(L_{p_1}^{w_1}(A_1))} \leqslant$$

$$\leqslant C' \|x\|^{(1-\theta)p/p_0}_{L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}})} \times$$

$$\times \|x\|^{\theta p/p_1}_{L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}})} =$$

$$= C' \|x\|_{L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}})}.$$

Наконец, легко видеть, что конечнозначные функции x рассматривавшегося вида плотны в пространстве $L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}})$. Справедливость этого факта вытекает из правильности пространства $L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}$ $(p < \infty)$ и леммы 5 введения.

Следовательно, имеет место непрерывное вложение

$$L_p^{w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}) \subset (L_{p_0}^{w_0}(A_0),\, L_{p_1}^{w_1}(A_1))_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}.$$

Следствие. *С точностью до изоморфизма*

$$(L_{p_0}(A_0),\, L_{p_1}(A_1))_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = L_p((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}),$$

где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Из этого следствия, например, вытекает следующая интерполяционная

Теорема 2.12. *Тройка пространств* $(L_{p_0}(A_0),\, L_{p_1}(A_1),\, L_p((A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}))$ *при* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *является интерполяционной типа* θ *относительно тройки* $(L_{p_0}(B_0),\, L_{p_1}(B_1),\, L_p((B_0, B_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}))$, *где* A_0, A_1 *и* B_0, B_1 — *две произвольные банаховы пары пространств.*

Теорема 2.11 позволяет упростить построение пространств $(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$.

Теорема 2.13. *С точностью до изоморфизма*

$$(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = (A_0, A_1)_{\theta, L_{p,*}, L_{p,*}},$$

где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Доказательство. Выберем θ_0 и θ_1 так, чтобы $0<\theta_0<\theta<\theta_1<1$. Обозначим $(1-\theta_i)/p_0+\theta_i/p_1=1/\rho_i$ и введем пространства $(A_0, A_1)_{\theta_i, L_{\rho_i,*}, L_{\rho_i,*}}$, имеющие согласно следствию из теоремы 2.5 типы θ_i.

По теореме 2.8 о реитерации

$$(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = \\ = ((A_0, A_1)_{\theta_0, L_{\rho_0,*}, L_{\rho_0,*}}, (A_0, A_1)_{\theta_1, L_{\rho_1,*}, L_{\rho_1,*}})_{\theta', F_0, F_1}, \tag{2.37}$$

где $\theta' = \dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$, $F_i = (L_{p_0,*})^{1-\theta_i}(L_{p_1,*})^{\theta_i} = L_{\rho_i,*}$.

Пусть теперь $x \in (A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$; тогда в силу равенства (2.37), согласно теореме 2.9

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}, \quad t^{-\theta'}s^{-\theta_0}\mathscr{K}(s, u(t)) \in L_{\rho_0,*}(L_{\rho_0,*})$$

и (2.38)

$$t^{1-\theta'}s^{-\theta_1}\mathscr{K}(s, u(t)) \in L_{\rho_1,*}(L_{\rho_1,*}).$$

Отсюда

$$\mathscr{K}(s, x) \leqslant \int_0^\infty \mathscr{K}(s, u(t))\frac{dt}{t}.$$

Функция, стоящая справа, а значит, и функция $\mathscr{K}(s, x)$, в силу (2.38) принадлежит пространству $(L_{\rho_0,*}^{-\theta_0}, L_{\rho_1,*}^{-\theta_1})_{\theta', L_{\rho_0,*}, L_{\rho_0,*}}$, которое по теореме 2.11 изоморфно пространству $L_\rho^{-\theta''}$, где $\theta'' = (1-\theta')\theta_0 + \theta'\theta_1 = \theta$ и $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1-\theta'}{\rho_0} + \dfrac{\theta'}{\rho_1} = (1-\theta')\left(\dfrac{1-\theta_0}{p_0}+\dfrac{\theta_0}{p_1}\right) + \theta'\left(\dfrac{1-\theta_1}{p_0}+\dfrac{\theta_1}{p_1}\right) = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1} = \dfrac{1}{p}$. Таким образом, $\mathscr{K}(s, x) \in L_p^{-\theta}$, и значит, $x \in (A_0, A_1)_{\theta, L_{p,*}, L_{p,*}}$.

Обратно, из последнего включения следует, что

$$x=\int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s},\quad\text{где}\quad s^{-\theta'}\mathcal{Y}(su(s))\in L_{p,*}.$$

Учитывая, что $L_{p,*}^{-\theta} = (L_{p_0,*}^{-\theta_0}, L_{p_1,*}^{-\theta_1})_{\theta', L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$, получаем существование разложения

$$s^{-\theta}\mathcal{Y}(s, u(s)) = s^{-\theta}\varphi_0(s,t) + s^{-\theta}\varphi_1(s,t),$$

где $t^{-\theta'}s^{-\theta_0}\varphi_0(s,t)\in L_{p_0,*}(L_{p_0,*})$, $t^{1-\theta'}s^{-\theta_1}\varphi_1(s,t)\in L_{p_1,*}(L_{p_1,*})$. Функции $\varphi_0(s,t)$ и $\varphi_1(s,t)$ можно считать неотрицательными. Положим

$$v_i(t)=\int_0^\infty \frac{\varphi_i(s,t)}{\mathcal{Y}(s,u(s))}u(s)\frac{ds}{s}.$$

Тогда

$$v_0(t)+v_1(t)=\int_0^\infty u(s)\frac{ds}{s}=x. \tag{2.39}$$

Далее,

$$t^{-\theta'}s^{-\theta_0}\mathcal{Y}\left(s, \frac{\varphi_0(s,t)}{\mathcal{Y}(s,u(s))}u(s)\right) = t^{-\theta'}s^{-\theta_0}\varphi_0(s,t)\in L_{p_0,*}(L_{p_0,*}),$$

$$t^{1-\theta'}s^{-\theta_1}\mathcal{Y}\left(s, \frac{\varphi_1(s,t)}{\mathcal{Y}(s,u(s))}u(s)\right) = t^{1-\theta'}s\varphi_1(s,t)\in L_{p_1,*}(L_{p_1,*}),$$

поэтому по теореме 2.9

$$\|v_0(t)\|_{(A_0,A_1)_{\theta_0,L_{p_0,*},L_{p_0,*}}}\in L_{p_0,*}^{-\theta'}$$

и

$$\|v_1(t)\|_{(A_0,A_1)_{\theta_1,L_{p_1,*},L_{p_1,*}}}\in L_{p_1,*}^{1-\theta'}.$$

В силу (2.39) и равенства (2.37) это означает, что $x\in(A_0, A_1)_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$.

8. Интерполяционный функтор $(A_0, A_1)_{\theta,p}$. В приложениях чаще всего встречается интерполяционный функтор $(A_0, A_1)_{\theta, L_{p,*}, L_{p,*}}$ $(0<\theta<1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, который сокращенно обозначается через $(A_0, A_1)_{\theta,p}$. Для удобства читателя мы выпишем основные свойства этого функтора, доказанные ранее в более общих ситуациях.

1°. С точностью до изоморфизма

$$(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = (A_0, A_1)^{\mathscr{I}}_{\theta, L_{p_0,*}, L_{p_1,*}} = (A_0, A_1)_{\theta, p},$$

где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_0$ (теоремы 2.3, 2.13).

2°. Пространство $A_0 \cap A_1$ плотно вложено в пространство $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ при $1 \leqslant p < \infty$ (см. ниже, лемма 2.14).

3°. При $p < q$ справедливо вложение $(A_0, A_1)_{\theta,p} \subset \subset (A_0, A_1)_{\theta,q}$ (теорема 2.5 и неравенство Юнга).

4°. Если пространства B_i имеют типы θ_i $(\theta_0 < \theta_1)$, то с точностью до изоморфизма при $\theta_0 < \theta < \theta_1$

$$(B_0, B_1)_{\theta', p} = (A_0, A_1)_{\theta, p},$$

где $\theta' = \dfrac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$ (теорема 2.8).

При этом пространство B имеет тип θ, если

$$(A_0, A_1)_{\theta, 1} \subset B \subset (A_0, A_1)_{\theta, \infty}.$$

Пространство $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ в силу 3° имеют тип θ.

5°. Эквивалентные нормы в пространстве $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ могут вычисляться по формулам $\|t^{-\theta}\mathscr{K}(t, x)\|_{L_{p,*}}$ или $\inf \|\mathscr{I}(t, u(t))\|_{L_{p,*}}$, где $\inf$ берется по всем представлениям (2.9) (теорема 2.9).

6°. С точностью до изоморфизма

$$((A_0, A_1)_{\theta,p_0}, (A_0, A_1)_{\theta,p_1})_{\theta',p} = (A_0, A_1)_{\theta,p}, \tag{2.40}$$

где $1/p = (1-\theta')/p_0 + \theta'/p_1$.

Действительно, по свойству 1°

$$((A_0, A_1)_{\theta,p_0}, (A_0, A_1)_{\theta,p_1})_{\theta',p} = \\ = ((A_0, A_1)_{\theta,p_0}, (A_0, A_1)_{\theta,p_1})_{\theta', L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}.$$

По теореме 2.10 эти пространства совпадают с пространством $(A_0, A_1)_{\theta,H,H}$, где $H = (L_{p_0,*}, L_{p_1,*})_{\theta', L_{p_0,*}, L_{p_1,*}}$. По теореме 2.11, с учетом того, что $L_{p,*} = L_p^{-1}$, получаем, что $H = L_{p,*}$, где $1/p = (1-\theta')/p_0 + \theta'/p_1$. Это и доказывает равенство (2.40).

9. Исследование крайних пространств. Рассмотрим пространство $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{0, L_\infty, L_\infty}$. Так как $e(t) \equiv 1 \in L_\infty$, то это пространство является промежуточным между A_0 и A_1. Более того, пространство A_0 вложено в это пространство, так как при $x \in A_0$ равенство $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $u_0(t) \equiv x$ и $u_1(t) \equiv 0$, показывает, что $x \in (A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{0, L_\infty, L_\infty}$ и

$$\|x\|_{(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{0, L_\infty, L_\infty}} \leqslant \sup \|u_0(t)\|_{A_0} + \sup t \|u_1(t)\|_{A_1} = \|x\|_{A_0}.$$

Пусть теперь x является произвольным элементом из $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{0, L_\infty, L_\infty}$. Тогда $x = u_0(t) + u_1(t)$, где $\sup \|u_0(t)\|_{A_0} + \sup t \|u_1(t)\|_{A_1} \leqslant (1+\varepsilon) \|x\|_{(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{0, L_\infty, L_\infty}}$. Отсюда вытекает, что $\|u_1(t)\|_{A_1} \to 0$ при $t \to \infty$ и поэтому $u_0(t) \to x$ при $t \to \infty$ в норме пространства A_1, а значит, и в норме пространства $A_0 + A_1$. Вспоминая определение пополнения одного пространства относительно объемлющего его другого пространства (см. гл. I, § 1, п. 4), мы приходим к выводу, что x принадлежит пополнению $\tilde{A}_0$ пространства A_0 относительно пространства $A_0 + A_1$, причем $\|x\|_{\tilde{A}_0} \leqslant \sup \|u_0(t)\|_{A_0} \leqslant (1+\varepsilon) \|x\|^{\mathscr{K}}_{(A_0, A_1)_0, L_\infty, L_\infty}$.

Обратно, пусть $x \in \tilde{A}_0$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $x_n \in A_0$ такая, что $\|x_n\|_{A_0} = \|x\|_{\tilde{A}_0}$ и $\|x - x_n\|_{A_0 + A_1} < \varepsilon/n$. Последнее означает, что $x - x_n = y_n + z_n$, где $\|y_n\|_{A_0} + \|z_n\|_{A_1} < \varepsilon/n$. Положим $v_0(t) = x_n + y_n$ при $n-1 < t \leqslant n$ и $v_1(t) = x - v_0(t)$. Тогда при $n - 1 < t \leqslant n$ $\|v_0(t)\|_{A_0} \leqslant \|x_n\|_{A_0} + \|y_n\|_{A_0} \leqslant \|x\|_{\tilde{A}_0} + \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \|x\|_{\tilde{A}_0} + \varepsilon$. Далее, $t \|v_1(t)\|_{A_1} \leqslant t \|z_n\|_{A_1} \leqslant \frac{t}{n} \varepsilon \leqslant \varepsilon$. Из полученных неравенств следует, что $x \in (A_0, A_1)_{0, L_\infty, L_\infty}$ и $\|x\|_{(A_0, A_1)_{0, L_\infty}, L_\infty} \leqslant \|x\|_{\tilde{A}_0} + 2\varepsilon$.

Мы доказали при $i = 0$ утверждение:

Лемма 2.10. *Пространство* $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{i, L_\infty, L_\infty}$ $(i = 0, 1)$ *изометрически совпадает с пополнением пространства* A_i *относительно пространства* $A_0 + A_1$.

Заметим, что пространства $(A_0, A_1)^{\mathscr{K}}_{i, L_{1,*}, L_{1,*}}$ $(i = 0, 1)$ состоят только из нулевых элементов, так как функция $\min\{1, t\}$ не принадлежит ни пространству $L_{1,*}$, ни пространству $L^{-1}_{1,*}$. По той же причине не рассматриваются пространства $(A_0, A_1)^{\mathscr{J}}_{i, L_\infty, L_\infty}$.

Рассмотрим пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{0,L_{1,*},L_{1,*}}$. Оно является промежуточным между пространствами A_0 и A_1. Более того, это пространство содержится в пространстве A_0. В самом деле, если

$$x = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t},$$

где $\|u(t)\|_{A_0} \in L_{1,*}$ и $t\|u(t)\|_{A_1} \in L_{1,*}$, то интеграл сходится в пространстве A_0, и, следовательно, $x \in A_0$ и $\|x\|_{A_0} \leqslant \leqslant \|u\|_{L_{1,*}(A_0)} \leqslant \|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{0,L_{1,*},L_{1,*}}}$. Если теперь $x \in A_0 \cap A_1$, то рассмотрим функцию $u(t) = [\ln(1+1/\varepsilon)]^{-1}\chi_{(\varepsilon,1+\varepsilon)}(t)\,x$. Очевидно, что $x = \int\limits_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$. Далее

$$\|u(t)\|_{L_{1,*}(A_0)} = \|x\|_{A_0} \quad \text{и} \quad \|tu(t)\|_{L_{1,*}(A_1)} = [\ln(1+1/\varepsilon)]^{-1}\|x\|_{A_1}.$$

Выберем ε столь малым, чтобы было $[\ln(1+1/\varepsilon)]^{-1}\|x\|_{A_1} \leqslant \leqslant \|x\|_{A_0}$. Тогда $\|x\|_{(A_0,A_1)^{\mathcal{J}}_{0,L_{1,\infty},L_{1,\infty}}} \leqslant \|x\|_{A_0}$. Полученные два неравенства показывают, что на $A_0 \cap A_1$ нормы пространств A_0 и $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{0,L_{1,*},L_{1,*}}$ совпадают. Ниже доказывается лемма 2.14, из которой следует, что $A_0 \cap A_1$ плотно в $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{0,L_{1,*},L_{1,*}}$. Мы приходим к утверждению:

Лемма 2.11. *Пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{i,L_{1,*},L_{1,*}}$ $(i = 0, 1)$ изометрически совпадает с замыканием множества $A_0 \cap A_1$ в пространстве A_i.*

10. Двойственность методов констант и средних. Предполагая выполненными условия замечания 2.2, будем считать, что E_0 и E_1 — две идеальные структуры функций (последовательностей) на $\mathbf{N}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ с мерой $\mu(\{n\}) = \mu_n > 0$.

Лемма 2.12. *Если структуры E_0, E_1 правильны, и для банаховой пары A_0, A_1 пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и в A_1, то множество $A_0 \cap A_1$-значных финитных функций плотно в $E_i(A_i)$ $(i=0, 1)$.*

Доказательство. Норма в $E_i(A_i)$ абсолютно непрерывна, поэтому в этом пространстве плотны финитные последовательности со значениями в A_i. Каждую такую последовательность можно в $E_i(A_i)$ сколь угодно хорошо приблизить $A_0 \cap A_1$-значной финитной последовательностью.

Следствие. *Пространство $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ плотно в $E_0(A_0)$ и в $E_1(A_1)$, и, следовательно, пространства $[E_0(A_0)]'$ и $[E_1(A_1)]'$ образуют банахову пару.*

По теореме 1 для правильных структур E_0 и E_1 справедливы изометрические изоморфизмы $[E_i(A_i)]' = E_i'(A_i')$. Эти изоморфизмы $\tau_i f^i = \{f_1^i, f_2^i, \ldots\}$ ($f^i \in (E_i(A_i))'$, $f_k^i \in A_i'$) таковы, что выполнено соотношение (8):

$$f^i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k^i \rangle \mu_k \quad (x = \{x_1, x_2, \ \ldots\} \in E_i(A_i)).$$

Рассмотрим пересечение $(E_0(A_0))' \cap (E_1(A_1))'$. Пус ть принадлежит этому пересечению и $x \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ Имеем $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k^0 \rangle \mu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, f_k^1 \rangle \mu_k$. Из этого равенства следует, что функционалы f_k^0 и f_k^1 совпадают на пересечении $A_0 \cap A_1$, которое, по предположению, плотно в A_i. Из этого в свою очередь вытекает, что функционалы f_k^0 и f_k^1, как элементы пространства $(A_0 \cap A_1)' = A_0' + A_0'$, одинаковы: $f_k^0 = f_k^1 = f_k$. Так как $\{\|f_1^i\|_{A_i'}, \|f_2^i\|_{A_i'}, \ldots\} \in E_i'$, то $\{\|f_1\|_{A_i'}, \|f_2\|_{A_i'}, \ldots\} \in E_i'$, и, следовательно $\{f_1, f_2, \ \ldots\} \in E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')$. Мы получили отображение $\tau f = \{f_k\}$ пространства $(E_0(A_0))' \cap (E_1(A_1))'$ в пространство $E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')$. Это отображение изометрично

$$\|\tau f\|_{E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')} = \max \|\tau f\|_{E_i'(A_i')} =$$
$$= \max \|f\|_{(E_i(A_i))'} = \|f\|_{(E_0(A_0))' \cap (E_1(A_1))'}.$$

Сюръективность отображения τ проверяется так же, как и при доказательстве теоремы 1.

Аналогично можно показать, что $(E_0(A_0))' + (E_1(A_1))'$ изометрически изоморфно $E_0'(A_1') + E_1'(A_1')$.

Если воспользоваться теоремой 3.1 гл. I, то можно прийти к утверждению:

Лемма 2.13. *Если структуры E_0, E_1 правильны и пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в пространствах банаховой пары A_0, A_1, то существуют изометрические изоморфизмы:*

$$[E_0(A_0) + E_1(A_1)]' = E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')$$

и

$$[E_0(A_0) \cap E_1(A_1)]' = E_0(A_0') + E_1'(A_1').$$

Определение. Будем говорить, что структуры E_0 и E_1 *обладают свойством* D) относительно пары A_0, A_1, если $A_0 \cap A_1$ плотно в $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0, E_1}$.

Теорема 2.14. *Если пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в пространствах банаховой пары A_0, A_1, а правильные структуры E_0 и E_1 на $\mathbf{N}_+$ обладают свойством D) относительно A_0, A_1 и $E_0 + E_1 \supset e$, то пространство $[(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}]'$ изометрически изоморфно пространству $(A_0', A_1')^{\mathcal{J}}_{E_0', E_1'}$.*

Доказательство. Заметим, что, в силу включения $(E_0')^1 + (E_1')^1 \supset E_0^1 + E_1 \supset e$, пространство $(A_0', A_1')^{\mathcal{J}}_{E_0', E_1'}$ определено.

Пространство $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}$ является подпространством пространства $E_0(A_0) + E_1(A_1)$, состоящим из последовательностей вида $\{x_0, x_0, \ldots\}$, где $x_0 \in A_0 + A_1$. В силу леммы 2.13 пространством, сопряженным к $E_0(A_0) + E_1(A_1)$, является $E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')$. По теореме Хана — Банаха всякий функционал $f \in [(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}]'$ является сужением $S\tilde{f}$ функционала $\tilde{f}$ из $(E_0(A_0) + E_1(A_1))'$, имеющего вид $\tilde{f} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ $(f_k \in A_0' \cap A_1')$ и $\|f\|_{[(A_0,A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0,E_1}]'} =$
$= \inf\limits_{S\tilde{f}=f} \|\tilde{f}\|_{E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')}$.

Всякий функционал φ из пространства $(A_0', A_1')^{\mathcal{J}}_{E_0', E_1'}$ получается по определению этого пространства из функционала $\tilde{f} = \{f_1, f_2, \ldots\} \in E_0'(A_0') \cap E_1'(A_1')$ с помощью оператора $\mathcal{J}\tilde{f}=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\mu_k=\varphi$ и $\|\varphi\|_{(A_0',A_1')^{\mathcal{J}}_{E_0',E_1'}}=\inf_{\mathcal{J}\tilde{f}=\varphi}\|\tilde{f}\|_{E_0'(A_0')\cap E'(A_1')}$.

Если теперь ввести соответствие $S\tilde{f}=f\leftrightarrow\mathcal{J}\tilde{f}=\varphi$, то для его корректности следует проверить, что ядра отображений S и $\mathcal{J}$ совпадают. Пусть $S\tilde{f}=0$ и $x=\{x_0, x_0, \ldots\}$, где $x_0\in A_0\cap A_1$. Тогда в силу формулы (8),

$$\tilde{f}(x)=\sum f_k(x_0)\mu_k=0$$
$$(x_0\in A_0\cap A_1). \tag{2.40'}$$

Так как ряд $\mathcal{J}\tilde{f}=\Sigma f_k\mu_k$ сходится по лемме 2.2 в $A_0'+A_1'=(A_1\cap A_1)'$, то отсюда следует, что $\mathcal{J}\tilde{f}=0$.

Обратно, если $\mathcal{J}\tilde{f}=0$, то справедливо (2.40′), что означает, что функционал $S\tilde{f}$ равен нулю на плотном в $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0, E_1}$ множестве $A_0\cap A_1$. Откуда следует, что $Sf=0$. Изометричность соответствия $f\leftrightarrow\varphi$ следует из формул для вычисления норм.

Следствие. *Если условия теоремы выполнены для двух структур E_0 и E_1, определенных на произвольном пространстве с мерой, и таких, что в них действует общий оператор усреднения, то пространство $[(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0, E_1}]'$ изоморфно пространству $(A_0', A_1')^{\mathcal{J}}_{E_0', E_1'}$.*

Следствие непосредственно вытекает из теоремы и замечания 2.1.

Близкими рассуждениями устанавливается

Теорема 2.15. *Если пересечение $A_0\cap A_1$ плотно в пространствах банаховой пары A_0, A_1, а правильные структуры E_0, E_1 на $\mathbf{N}_+$ таковы, что E_0' и E_1' обладают свойством D) и $E_0'+E_1'\supset e$, то пространство $[(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0, E_1}]'$ изометрически изоморфно пространству $(A_0', A_1')^{\mathcal{K}}_{E_0', E_1'}$.*

Следствие. *Если условия теоремы выполнены для структур E_0 и E_1, определенных на произвольном множестве с мерой и таких, что в них действует оператор усреднения, то пространство $[(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0, E_1}]'$ изоморфно пространству $(A_0', A_1')^{\mathcal{K}}_{E_0', E_1'}$.*

Проверка условия D) упрощается в тех случаях, когда пространства, построенные по методам констант и средних, изоморфны. Действительно, справедлива

Лемма 2.14. *Если E_0 и E_1 — правильные структуры, состоящие из функций, суммируемых на каждом множестве конечной меры, то пересечение $A_0 \cap A_1$ плотно в пространстве $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0, E_1}$.*

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность измеримых множеств $\mathfrak{M}_n$ таких, что $\mu(\mathfrak{M}_n) < \infty$ и $\mathfrak{M}_n \uparrow \mathfrak{M}$. Пусть $x \in (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0, E_1}$. Тогда $x = \int\limits_{\mathfrak{M}} u(t)\, d\mu$, где $u \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$. Обозначим $x_n = \int\limits_{\mathfrak{M}_n} u(t)\, d\mu$. Можно показать, что функция $u(t)$ сильно измерима как функция со значениями в пересечении $A_0 \cap A_1$ (предоставляем это читателю). Кроме того,

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_n} \| u(t) \|_{A_0 \cap A_1} d\mu = \int\limits_{\mathfrak{M}_n} \max\{\| u(t) \|_{A_0}, \| u(t) \|_{A_1}\}\, d\mu < \infty,$$

по условию теоремы. Поэтому функция $u(t)$, как функция со значениями в $A_0 \cap A_1$, интегрируема на $\mathfrak{M}_n$ и, значит, $x_n \in A_0 \cap A_1$. Далее,

$$x - x_n = \int u(t)\, [1 - \chi_{\mathfrak{M}_n}(t)]\, d\mu,$$

поэтому

$$\| x - x_n \|_{(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0, E_1}} \leqslant \max \| u(1 - \chi_{\mathfrak{M}_n}) \|_{E_i(A_i)} \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу правильности структур E_i.

Напомним, что по теореме 2.3 пространства $(A_0, A_1)^{\mathcal{K}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ и $(A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ совпадают, если E_0 и E_1 — идеальные структуры, интерполяционные между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$. Кроме того, если структуры E_0 и E_1 правильны, то правильны и структуры $E_0^{\alpha_0}$ и $E_1^{\alpha_1}$. Сопряженными пространствами к $E_0^{\alpha_0}$ и $E_1^{\alpha_1}$ тогда будут пространства $(E_0')^{-\alpha_0}$ и $(E_1')^{-\alpha_1}$.

Объединяя перечисленные факты с предыдущими результатами, мы приходим к утверждению:

Теорема 2.16. *Если E_0 и E_1 — правильные структуры, интерполяционные между $L_{1,*}$ и $L_{\infty,*}$, и пересечение $A_0 \cap A_1$ пространств банаховой пары A_0, A_1 плотно в каждом из этих пространств, то пространство, сопряженное к $(A_0, A_1)_{E_0, E_1^{\alpha_1}}$, изоморфно пространству $(A_0', A_1')_{(E_0')^{-\alpha_0}, (E_1')^{-\alpha_1}}$ или, иначе,*

$$[(A_0, A_1)_{\theta, E_0, E_1}]' = (A_0', A_1')_{\theta, E_0', E_1'} \quad (0<\theta<1),$$

с точностью до изоморфизма.

Замечание. Как показано недавно в [61], свойство D) всегда выполнено, если структуры E_0 и E_1 правильны и не содержат функцию, тождественно равную единице.

11. Почти интерполяционные свойства шкал пространств. Теория пространств, построенных по методам констант и средних, связана с теорией шкал пространств, не являющихся нормальными шкалами.

В этом пункте всюду предполагается, что пространство A_1 вложено в пространство A_0.

Лемма 2.15. *Если $0<\alpha<\beta<1$, то всякое промежуточное между A_0 и A_1 пространство B_1 типа β вложено в любое промежуточное пространство B_2 типа α.*

Доказательство. По условию, имеется вложение $(A_0, A_1)_{\alpha, L_{1,*}, L_{1,*}} \subset B_2$. По замечанию к теореме 2.8 о реитерации пространство $(A_0, A_1)_{\alpha, L_{1,*}, L_{1,*}}$ изоморфно пространству $(A_0, B_1)_{\alpha/\beta, L_{1,*}, L_{1,*}}$ и состоит из тех же элементов. Поэтому:

$$B_1 \subset (A_0, B_1)_{\alpha/\beta, L_{1,*}, L_{1,*}} \subset B_2.$$

Лемма 2.16. *Если $0<\alpha<\beta<\gamma<1$ и промежуточные между A_0 и A_1 пространства B_α, B_β, B_γ имеют типы α, β, γ соответственно, то справедливо неравенство:*

$$\| x \|_{B_\beta} \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma} \| x \|_{B_\alpha}^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \| x \|_{B_\gamma}^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}. \tag{2.41}$$

Доказательство. По условию, $(A_0, A_1)_{\beta, L_{1,*}, L_{1,*}} \subset \subset B_\beta$. По теореме 2.8 о реитерации $(A_0, A_1)_{\beta, L_{1,*}, L_{1,*}} =$

$= (B_\alpha, B_\gamma)_{\theta, L_{1,*}, L_{1,*}}$, где $\theta = \dfrac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$. Тогда $(B_\alpha, B_\gamma)_{\theta, L_{1,*}, L_{1,*}} \subset \subset A_\beta$, и по лемме 2.6 справедливо неравенство (2.41).

Леммы 2.15 и 2.16 в соответствии с определением 1.2, § 1, гл. III приводят к утверждению:

Теорема 2.17. *Пусть $\{A_\alpha\}$ — семейство банаховых пространств, обладающее тем свойством, что пространства A_α $(0<\alpha<1)$ являются промежуточными между A_0 и A_1 пространствами типов α. Тогда семейство $\{\hat{A}_\alpha\}$, состоящее из замыканий $\hat{A}_\alpha$ пространства A_1 по нормам пространств A_α, образует шкалу пространств.*

Шкалы пространств, о которых идет речь в теореме, будем называть *шкалами средних.*

Пример шкалы средних дает семейство пространств $(A_0, A_1)_{\alpha, L_{1,*}, L_{1,*}}$. При этом согласно лемме 2.11 $(A_0, A_1)_{1, L_{1,*}, L_{1,*}} = (A_0, A)^{\mathcal{J}}_{1, L_{1,*}, L_{1,*}} = A_1$ и пространство $(A_0 A_1)_{0, L_{1,*}, L_{1,*}} = (A_0, A_1)^{\mathcal{J}}_{0, L_{1,*}, L_{1,*}} = \hat{A}_0$ совпадает с замыканием A_1 в A_0. По лемме 2.14 A_1 плотно в пространствах, $(A_0, A_1)_{\alpha, L_{1,*}, L_{1,*}}$ при $0<\alpha<1$. Полученную таким образом шкалу естественно назвать максимальной шкалой средних в силу следующего свойства:

Лемма 2.17. *Максимальная шкала средних вложена в любую шкалу пространств $\{B_\alpha\}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$, где $B_1 = A_1$ и $B_0 = \hat{A}_0$.*

Доказательство. При $x \in A_1$ по свойствам шкалы $\|x\|_{B_\alpha} \leqslant C \|x\|^{1-\alpha}_{A_0} \|x\|^{\alpha}_{A_1}$, откуда в силу леммы 2.6 следует вложение $(A_0, A_1)_{\alpha, L_{1,*}, L_{1,*}} \subset B_\alpha$.

Важное свойство шкал средних дает

Лемма 2.18. *Любая шкала средних вложена в минимальную шкалу, построенную по пространствам A_0 и A_1.*

Доказательство. Для любой шкалы средних $\{\hat{A}_\alpha\}$ справедливы вложения $\hat{A}_\alpha \subset A_\alpha \subset (A_0, A_1)_{\alpha, L_\infty, L_{\infty,*}}$. Для $x \in A_1$ рассмотрим представление

$$x = \int_0^\infty u(t)\, \frac{dt}{t},$$

где $u \in L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)$. Далее, при $f \in A_0'$

$$|f(u(t))| \leqslant \|f\|_{A_0'} t^{\alpha} \| t^{-\alpha} u(t) \|_{A_0} \leqslant t^{\alpha} \|f\|_{A_0'} \|u\|_{L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)}$$

и

$$|f(u(t))| \leqslant \|f\|_{A_1'} t^{\alpha-1} \| t^{1-\alpha} u(t) \|_{A_1} \leqslant$$
$$\leqslant t^{\alpha-1} \|f\|_{A_1'} \|u\|_{L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)}.$$

Тогда

$$|f(x)| \leqslant \int_0^\infty |f(u(t))| \frac{dt}{t} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^N t^{\alpha} \|f\|_{A_0'} \frac{dt}{t} + \int_N^\infty t^{\alpha-1} \|f\|_{A_1'} \frac{dt}{t} \right) \|u\|_{L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\alpha} N^{\alpha} \|f\|_{A_0'} + \frac{1}{1-\alpha} N^{\alpha-1} \|f\|_{A_1'} \right) \|u\|_{L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)}$$

Минимизируя правую часть по N, получаем

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{A_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{A_1'}^{\alpha} \|u\|_{L_{\infty,*}^{-\alpha}(A_0) \cap L_{\infty,*}^{1-\alpha}(A_1)}.$$

Отсюда

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{A_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{A_1'}^{\alpha} \|x\|_{(A_0, A_1)(\alpha, L_{\infty,*}, L_{\infty,*})}.$$

Тогда

$$\|x\|_{A_\alpha^{\min}} = \sup \frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{A_1'}^{\alpha}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|x\|_{(A_0, A_1)(\alpha, L_{\infty,*}, L_{\infty,*})} \leqslant \frac{C}{\alpha(1-\alpha)} \|x\|_{A_\alpha};$$

в силу плотности A_1 в пространстве $\hat{A}_\alpha$ отсюда вытекает вложение $\hat{A}_\alpha \subset A_\alpha^{\min}$.

В леммах 2.17 и 2.18 мы пользовались первой частью определения:

Определение 2.2. Если $\{A_\alpha\}$ и $\{B_\alpha\}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ — два семейства банаховых пространств таких, что $A_\beta\subset A_\alpha$ и $B_\beta\subset B_\alpha$ при $\alpha<\beta$, то говорят, что первое семейство *вложено* во второе, если $A_\alpha\subset B_\alpha$ при каждом α и что первое семейство *почти вложено* во второе, если $A_\beta\subset B_\alpha$ при каждом α и $\beta>\alpha$.

Напомним, что в п. 2, § 2, гл. III для семейства пространств $\{A_\alpha\}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$, для которого A_β плотно вложено в A_α при $\alpha<\beta$, было введено сопряженное семейство $\tilde{A}_\alpha$, состоящее из замыканий пространства A_0' в пространствах A_α'. Пусть теперь $\{A_\alpha\}$ — произвольная шкала. Так как A_1 плотно в A_α, то согласно лемме 2.17 $(A_0, A_1)_{\alpha,L_{1,*},L_{1,*}}$ плотно вложено в A_α. Тогда по теореме 2.16 $A_\alpha'\subset(A_0', A_1')_{\alpha,L_{\infty,*},L_{\infty,*}}$. Если, кроме того, выполнено неравенство

$$\|f\|_{A_\alpha'}\leqslant C\|f\|_{A_0'}^{1-\alpha}\|f\|_{A_1'}^{\alpha} \qquad (f\in A_0'), \tag{2.42}$$

то по лемме 2.6 $(A_0', A_1')_{\alpha,L_{1,*},L_{1,*}}\subset A_\alpha'$. Следовательно, пространство A_α' имеет тип α относительно пары A_0', A_1' и тип $1-\alpha$ относительно пары A_1', A_0'. Теорема 2.17 приводит к утверждению:

Теорема 2.18. *Пусть* $\{A_\alpha\}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ — *произвольная шкала банаховых пространств; для того, чтобы сопряженное семейство пространств* $\{\tilde{A}_{1-\sigma}\}$ $(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$ *образовало шкалу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (2.42).

Замечание. При условии (2.42) шкала $\{\tilde{A}_{1-\sigma}\}$ будет шкалой средних относительно пространств A_1' и A_0'.

Следствие. *Сопряженное семейство к минимальной шкале образует шкалу.*

Действительно, для минимальной шкалы неравенство (2.42) установлено в лемме 2.3 гл. III.

Заметим, что из условия (2.42) следует, что шкала $\{A_\alpha\}$ вложена в минимальную. В самом деле, при $x\in A_1$

$$\|x\|_{A_\alpha}=\sup_{f\in A_\alpha'}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_\alpha'}}\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{f\in A_0'}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_\alpha'}}\geqslant\frac{1}{C}\sup_{f\in A_0'}\frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_0'}^{1-\alpha}\|f\|_{A_1'}^{\alpha}}=\frac{1}{C}\|x\|_{A_\alpha^{\min}},$$

откуда следует вложение

$$A_\alpha' \subset A_\alpha^{\min}.$$

Обратно, если шкала $\{A_\alpha\}$ вложена в шкалу $\{A_\alpha^{\min}\}$, то $(A_\alpha^{\min})' \subset A_\alpha'$, и поэтому по лемме 2.3 гл. III

$$\|f\|_{A_\alpha'} \leqslant C\|f\|_{(A_\alpha^{\min})'} \leqslant C_1 \|f\|_{A_0'}^{1-\alpha} \|f\|_{A_1'}^{\alpha}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.19. *Условие* (2.42) *является необходимым и достаточным для того, чтобы шкала $\{A_\alpha\}$ была вложена в минимальную шкалу, построенную по пространствам A_0 и A_1.*

Лемма 2.19. *Минимальная шкала $\{A_\alpha^{\min}\}$ почти вложена во всякую вложенную в нее шкалу $\{A_\alpha\}$.*

Доказательство. По предыдущему пространства A_α' и $(A_\alpha^{\min})'$ имеют тип $1-\alpha$ относительно пространств A_1' и A_0'. По лемме 2.15 тогда при $\alpha<\beta$ $(A_\alpha)' \subset \subset (A_\beta^{\min})'$. Тогда при $x \in A_1$

$$\|x\|_{A_\alpha} = \sup_{f \in A_\alpha'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_\alpha'}} \leqslant \sup_{f \in (E_\beta^{\min})'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{A_\alpha'}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C} \sup_{f \in (E_\beta^{\min})'} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{(A_\beta^{\min})'}} = \frac{1}{C}\|x\|_{A_\beta^{\min}},$$

где C — константа вложения A_α' в $(A_\beta^{\min})'$. Из полученного неравенства вытекает вложение $A_\beta^{\min} \subset A_\alpha$.

Теорема 2.20. *Минимальная шкала $\{A_\alpha^{\min}\}$ почти вложена во всякую шкалу $\{A_\alpha\}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть шкалу $\{\bar{A}_\alpha\}$, составленную из замыканий E_1 в пересечениях $A_\alpha^{\min} \cap A_\alpha$. Она вложена в $A_\alpha^{\min}$. Поэтому при $\alpha<\beta$ согласно лемме 2.19 $A_\beta^{\min} \subset \bar{A}_\alpha \subset A_\alpha$.

Определение 2.3. Семейство банаховых пространств $\{A_\alpha\}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, обладает *почти интерполяционным свойством* относительно свойства банаховых пространств $\{B_\alpha\}$, если из того, что линейный оператор ограниченно действует из A_0 и B_0 и из A_1 в B_1 следует, что он действует из всякого пространства A_β в пространство B_α с $\alpha<\beta$.

Теорема 2.21. *Пусть* $\{B_\alpha\}$ — *произвольная шкала, а* $\{A_\alpha\}$ — *шкала, удовлетворяющая условию* (2.42). *Тогда* $\{A_\alpha\}$ *обладает почти интерполяционным свойством относительно* $\{B_\beta\}$.

Доказательство. Пусть оператор T ограниченно действует из A_0 в B_0 и из A_1 в B_1. По теореме 2.3 гл. III оператор T действует из пространства $A_\beta^{\min}$ в пространство $B_\beta^{\min}$ (при доказательстве теоремы 2.3 не использовалась родственность пространств). По теореме 2.19 он тогда действует из A_β в $B_\beta^{\min}$ и по теореме 2.20 из A_β в B_α при $\alpha<\beta$.

Следствие 1. *Минимальная шкала обладает почти интерполяционным свойством относительно любой шкалы.*

Следствие 2. *Любая шкала средних обладает почти интерполяционным свойством относительно любой шкалы.*

Действительно, шкала средних по теореме 2.18 вложена в минимальную, поэтому для нее выполнено в силу теорема 2.19 условие (2.42).

Следствие 3. *Всякая правильная шкала обладает почти интерполяционным свойством относительно любой шкалы.*

12. Связь с комплексным методом. Рассмотрим пространства $[A_0, A_1]_\alpha$, построенные по комплексному методу по банаховой паре A и B.

Приведем без доказательств следующие утверждения.

Лемма 2.20. *Пространство* $[A_0, A_1]_\alpha$ *имеет тип* α *относительно пространств* A_0 *и* A_1.

Теорема 2.22. *Семейство пространств* $[A_0, A_1]_\alpha$, *обладает почти интерполяционным свойством относительно любой шкалы пространств.*

Теорема 2.22. *Семейство пространств* $[A_0, A_1]_\alpha$, *об- где* $0<\alpha<\beta<1$, $0<\gamma<1$, *изоморфно пространству* $(A_0, A_1)_{\gamma', E_0, E_0}$, *где* $\gamma'=(1-\gamma)\alpha+\gamma\beta$.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ И БИБЛИОГРАФИЯ

ГЛАВА I

§ 1. Как отмечалось в предисловии, впервые понятие вложения банаховых пространств возникло в работах С. Л. Соболева [152]. Важное понятие относительного пополнения неявно использовалось в работе С. Г. Крейна и Ю. И. Петунина [89]; оно было явно введено Е. Гальярдо [240] и детально изучено Н. Ароншайном и Е. Гальярдо [171].

§ 2. Леммы 2.1—2.3, теорема 2.3 содержатся в [171], теорема 2.1 — в [89], теорема 2.2 приведена в книге Г. Бернса [30].

§ 3. Промежуточные пространства для банаховой пары пространств впервые рассматривались Ж. Л. Лионсом [273]. Формула 3.6 и следствия из нее принадлежат А. А. Седаеву [140]. Лемма 3.4 взята из работы А. П. Кальдерона [78]. Сопряженные пространства к сумме и пересечению пространств изучены Н. Ароншайном и Е. Гальярдо [171] (см. также [108]), ими же введены сумма и пересечение семейств банаховых пространств.

§ 4. Понятия интерполяционных троек и интерполяционных пространств в том или ином виде вводилось во всех работах, посвященных абстрактной теории интерполяции линейных операторов. Наиболее важные результаты § 4 принадлежат Н. Ароншайну и Е. Гальярдо [171]. В связи с п. 4, 5. см. работу [339]. Важные теоремы 4.9 и 4.10 получены в [171].

ГЛАВА II

Введение. Идеальные банаховы структуры иначе называются функциональными банаховыми пространствами или банаховыми решетками, их свойства описаны в [37], [7] (см. также [204], [93], [22], [4]). О пространствах Лебега см. [131].

§ 1. Теорема 1.1 получена Ж. Петре [337] (о неравенстве (1.7) см. [66]). Лемму 1.1 см. в [160]. О логарифмически выпуклых функциях подробнее см. в книге [18]. Лемма 1.4 получена в [44].

§ 2. Теорема 2.1 получена С. Г. Крейном и Е. М. Семеновым [96]. О перестановках измеримых функций много сведений содержится в книгах [8], [24], [31]. Ряд свойств перестановок установлен в работах [49], [50], [78], [81], [161], [351]. Неравенство (2.40) публикуется впервые.

§ 3. Формулы 3.4 и 3.5 получены Ж. Петре [315], [314] (см. также Е. Т. Оклендер [307]). Важное неравенство (3.14) установлено Г. Г. Лоренцем и Т. Шимогаки [293]. Орбиты полугруппы сжимающих операторов исследованы Ж. В. Рифф'ом [350].

§ 4. Симметричные пространства с дополнительным предположением о полунепрерывности нормы под названием перестановочно инвариантные пространства были введены Г. Г. Лоренцем в книге [36] (см. также В. А. Ж. Люксембург [295]). Без этого предположения они исследовались Е. М. Семеновым [143]; им получены основные результаты п. 1. Основная теорема, описывающая все интерполяционные пространства между L_1 и L_∞, была доказана А. П. Кальдероном [205] другим методом. Она имеет большую историю: для интегральных операторов в пространствах Орлича она была доказана В. Орличем [312], для интегральных операторов в перестановочно-инвариантных пространствах — Г. Г. Лоренцем [36], для произвольных операторов в сепарабельных или сопряженных к сепарабельным симметричных пространствах — в работе [113] (см. теоремы (4.9), (4.10)). Теорема обобщена на случай нелинейных операторов, удовлетворяющих условию Липшица в [313], [293], [369]. Отметим, что Ф. Е. Браудером [199] получена общая теорема позволяющая получать интерполяционные теоремы для липшицевых операторов из интерполяционных теорем для линейных операторов.

Условие теоремы 4.3 можно сформулировать так: из того, что $y \in E$, $x \in L_1 + L_\infty$ и $K(t, x) \leqslant K(t, y)$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$. В связи с этим появилась следующая гипотеза: пусть (A_0, A_1) и (B_0, B_1) — две банаховы пары: для того чтобы тройка (A_0, A_1, E) была интерполяционной относительно тройки (B_0, B_1, F), необходимо и достаточно, чтобы из того, что $y \in E$, $x \in B_0 + B_1$ и $K(t, x, B_0, B_1) \leqslant K(t, y, A_0, A_1)$, следовало, что $x \in F$ и $\|x\|_F \leqslant C \|y\|_E$. Эта гипотеза была подтверждена для пар: 1) (L_q, L_∞), (L_q, l_∞) (Г. Г. Лоренц, Т. Шимогаки [294], А. А. Седаев [138]); 2) $(l_1^{a_0}, l_1^{a_1})$, $(l_1^{a_0}, l_1^{a_1})$ (a_0 и a_1 — веса) (А. А. Седаев, Е. М. Семенов [137]); 3) $(L_p^{w_0}, L_p^{w_1})$, $(L_p^{w_0}, L_p^{w_1})$ (А. А. Седаев [138]); 4) (A_0, A_1), $(L_\infty^{w_0}, L_\infty^{w_1})$ (Ж. Петре [339]), А. А. Седаев [140]); 5) $(\Lambda_\varphi, L_\infty)$, (L_1, L_∞) (В. И. Дмитриев [62]); 6) $(L_1^{w_0}, L_1^{w_1})$, (L_1, L_∞) (В. И. Дмитриев [63]); 7) $(L_{p_0}^{w_0}, L_{p_1}^{w_1})$, $(L_{p_0}^{w_0}, L_{p_1}^{w_1})$ (Г. Спарр [372]). В общем случае гипотеза не подтвердилась (см. [339], [62]). В. И. Дмитриев [64], [65] выделил общий класс пар пространств (разностные пары), для которых гипотеза верна.

Действие операторов растяжения в симметричных пространствах изучалось [368], [370], [46]. В терминах нормы оператора растяжения в [368] решен вопрос об интерполяции свойства полной непрерывности линейных операторов в промежуточных пространствах для пары (L_1, L_∞). Верхние и нижние показатели растяжения симметричных пространств под названием верхние и нижние индексы введены Д. В. Бойдом [197]. Лемма 4.7 принадлежит Е. М. Семенову и играет важную роль в дальнейшем. Понятие фундаментальной функции введено в [143]. Имеются примеры пространств, когда неравенство (4.29) является строгим и, более того, левая и правая части имеют различную асимптотику на бесконечности (см. [370]).

§ 5. Пространства Лоренца введены им в [291], там же установлено, что сопряженными к ним являются пространства Марцинкевича. Некоторые свойства пространств Лоренца были получены в [95]. Пространства M_ψ^0 рассмотрены Е. М. Семеновым в [142]. Теоремы вложения получены в [143]. Теорема 5.9 при других предположениях содержится в [362].

Первый пример не интерполяционного симметричного пространства построен Г. И. Руссу [132].

§ 6. Неравенство (6.0) фактически содержится в работе [367]. Основные интерполяционные теоремы 6.1 и 6.1′ являются развитием теоремы Ж. Марцинкевича [296], доказательство которой опубликовано А. Зигмундом [410]. Обобщением этой теоремы занимались многие авторы [55], [95], [178], [189], [203], [205], [215], [260], [261], [285], [307], [315], [362], [382], [409] и др. Здесь изложены теоремы С. Г. Крейна и Е. М. Семенова из [97]. Для случая пространств L_p аналог теоремы 6.1 приведен в работе [146], при этом условия на пространство E давались в терминах фундаментальной функции φ_E. Однако доказательство содержало ошибку и было верным лишь в том случае, когда норма оператора растяжения $\|\sigma_\tau\|_E$ совпадает с M_{φ_E} (о неравенстве (4.29) см. выше). Исправление и усиление этого результата изложены в § 6 (см. [97]). Первые теоремы об оптимальности интерполяционных троек конкретных симметричных пространств были получены В. А. Дикаревым и В. И. Мацаевым [57], А. П. Кальдероном [205]. Идеи А. П. Кальдерона лежат в основе доказательств теорем об оптимальности из [97].

Операторы Харди — Литтльвуда, Гильберта и мажорантные функции для симметричных пространств изучались в [144], [367], [311], [245], [195], [104]. Обобщение неравенства Харди (6.41) получено Е. А. Павловым.

Пространства $L_{p,r}$ являются частным видом пространств Лоренца $\Lambda_{p,\psi}$ [291]. Интерполяционные теоремы для них содержатся в [205]. Теоремы 6.12, 6.13 являются новыми. Приложения теоремы 6.1 к оператору свертки указаны в [98]. Теорема 6.17 является усилением результата О'Нейла [309].

§ 7. При изложении свойств сингулярного оператора Гильберта мы следовали книге А. Зигмунда [43]. Основная формула (7.9) принадлежит Е. Стейну и Г. Вейсу [382]. Теорема 7.2 доказана Д. В. Бойдом [195].

§ 8. Носит вспомогательный характер. Оператор сопряжения в симметричных пространствах исследовался в [145], [233], [245], [310].

§ 9. Классическую теорему Пэли см. в книге [8]. Ее обобщение в приведенном виде публикуется впервые. Обобщению теоремы Харди и Литтльвуда о рядах с монотонными коэффициентами с помощью интерполяционных теорем посвящены работы [145], [353], [352], [355]. О свойствах системы функций Хаара см. в [10]. Теорема 9.5 для пространства L_p доказана Ф. Риссом (см. [2], [8]), для симметричных пространств — Е. М. Семеновым [145]. Теорема 9.6 для пространств L_p получена Ж. Марцинкевичем [297], для пространств Орлича — В. Ф. Гапошкиным, для симметричных пространств — Е. М. Семеновым [148]*). О теореме 9.8 см. [349].

ГЛАВА III

§ 1. Свойства шкал банаховых пространств изложены в статье [91]. Понятие нормальной шкалы было введено и изучено С. Г. Крейном [86]. Вопрос о родственных банаховых пространствах исследо-

*) Относительно [145] и [148] следует учесть замечания к § 6.

ван С. Г. Крейном и Ю. И. Петуниным в [89]. Уплотнение нормальной школы с помощью относительного пополнения здесь рассмотрено впервые.

§ 2. Максимальные шкалы исследовались в [86], минимальные и правильные — в [90]; подробно их свойства изложены в [91].

§ 3. Шкала пространств Гёльдера детально рассмотрена в [91], однако, как нам любезно указал В. Фридрих; там имелись неточности, которые здесь устранены. Новое изложение интерполяционных свойств шкалы Гёльдера основано на работе Ю. И. Петунина, А. Н. Пличко [128]. Отметим, что подробное изложение в более общем случае свойств гёльдеровой шкалы и ее сопряженной с применением к задаче о перевозках содержится в книге В. Фридриха [32].

ГЛАВА IV

Введение. Теорема 1 получена В. И. Дмитриевым [61].

§ 1. Комплексный метод интерполяции в том виде, как он изложен, был предложен независимо А. П. Кальдероном [204] и Ж. Л. Лионсом [275]. Основные результаты пп. 3, 4 содержатся в работе А. П. Кальдерона [204], полезное замечание 2 сделано Ж. Д. Стафни [376]. Теорема 1.4 также принадлежит А. П. Кальдерону [204], но ее доказательство несколько упрощено И. Я. Шнейбергом. В работе [204], кроме пространств $[A_0, A_1]_\alpha$, введено еще интерполяционное семейство пространств $[A_0, A_1]^\alpha$; рассматривается пространство $\overline{\mathfrak{F}}(A_0, A_1)$ функций в полосе Π, обладающих свойствами: 1) $\|f(z)\|_{A_0+A_1} \leqslant C(1+|z|)$; 2) $f(z)$ — непрерывна по норме A_0+A_1 в $\overline{\Pi}$; 3) $f(z)$ — аналитична в Π; 4) разность $f(1+it_2)-f(1+it_1)$ принадлежит A_1, а разность $f(it_2)-f(it_1) \in A_0$, причем

$$\max\left\{\sup\left\|\frac{f(it_2)-f(it_1)}{t_2-t_1}\right\|_{A_0}, \sup\left\|\frac{f(1+it_2)-f(1+it_1)}{t_2-t_1}\right\|_{A_1}\right\} = \|f\|_{\overline{\mathfrak{F}}} < \infty.$$

Пространство $[A_0, A_1]^\alpha$ состоит из всех $x \in A_0+A_1$, для которых $x=f'(\alpha)$, $f \in \overline{\mathfrak{F}}(A_0, A_1)$, причем

$$\|x\|_{[A_0, A_1]^\alpha} = \inf_{f'(\alpha)=x} \|f\|_{\overline{\mathfrak{F}}}.$$

Оказывается [204], что $([A_0, A_1]_\alpha)'$ изометрически изоморфно пространству $[A_0', A_1']$ (если $A_0 \cap A_1$ плотно в A_0 и A_1). В п. 6 двойственное пространство к $[A_0, A_1]_\alpha$ описывается в терминах относительно пополнения (теорема 1.6, И. Я. Шнейберг). Из сказанного вытекает равенство $[A_0', A_1']^\alpha = [\widetilde{A_0'}, \widetilde{A_1'}]_\alpha$. В доказательство теоремы 1.7 А. П. Кальдерона о реитерации также внесены некоторые изменения. Отметим, что в работе [358] указывается, что условие плотности $A_0 \cap A_1$ в $A_\alpha \cap A_\beta$ является излишним, однако доказательство этого факта содержит неточность.

Понятие аналитической шкалы пространств было введено С. Г. Крейном [85]; им же установлена связь этого понятия с комплексным методом интерполяции [91].

Теория гильбертовых шкал пространств была (в разных терминах) построена независимо Ж. Л. Лионсом [271] и С. Г. Крейном [85]. Важную роль играют семейства линейных топологических пространств, получаемых из гильбертовой шкалы с помощью проективных и индуктивных пределов. С их помощью был исследован ряд тонких свойств пространств аналитических функций.

Теоремы 1.11 и 1.13 были получены из других соображений Е. Гайнцем и уточнены Т. Като (см. [12], [13]). Справедливо более общее, чем (1.49), неравенство Гайнца, в котором дробная степень операторов j и j_1 заменяется более общими функциями. Рассматривается класс положительных на полуоси $[0, \infty)$ функций, допускающих аналитическое продолжение на комплексную плоскость с выброшенной отрицательной полуосью до функции, отображающей верхнюю полуплоскость в себя. Пусть функция $\varphi(t)$ такова, что $\varphi^2(t^{1/2})$ принадлежит описанному классу; тогда в условиях теоремы 1.13 справедливо неравенство

$$(Tx, y) \leqslant \|\varphi(j)x\|_{H_0} \|\varphi_*(j_1)y\|_{H_0}, \text{ где } \varphi_*(t) = t/\varphi(t).$$

С помощью функций указанного класса решена задача об описании всех интерполяционных пространств с интерполяционной константой 1 между парой гильбертовых пространств (Ч. Фойяш и Ж. Л. Лионс [234], В. Ф. Донохью [221]; см. также [259]).

Шкала пространств $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ была введена и исследована А. П. Кальдероном [204]. Здесь не изложена ее связь с гипершкалами (см. [93]). Г. Я. Лозановский [107] построил пример, в котором тройки идеальных структур $(X_0, X_1, X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha})$ и $(Y_0, Y_1, Y_0^{1-\alpha}Y_1^{\alpha})$ не являются интерполяционными. В. А. Шестаков [163], [164] показал, что в общем случае $[X_0, X_1]_\alpha$ является замыканием $X_0 \cap X_1$ в пространстве $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ и, следовательно, является его замкнутым подпространством. Дальнейшее исследование семейства $X_0^{1-\alpha}X_1^{\alpha}$ см. в [67], [106].

Отметим, что М. Шехтер [358], [357] построил обобщение комплексного метода интерполяции, основанное на том, что промежуточное пространство конструируется не из значений функций, аналитических в полосе, или их производных, а из значений некоторой обобщенной функции с компактным носителем на этих функциях.

Интересные результаты о корректной разрешимости линейных уравнений и спектре линейных операторов в семействе пространств $[A_0, A_1]_\alpha$, получены И. Я. Шнейбергом [166], [167] и Ж. Д. Стафни [377].

§ 2. Методы констант и средних берут начало от работы Ж. Л. Лионса и Ж. Петре [285], где они построены для случая, когда пространства E_0 и E_1 являются пространствами L_p со степенными весами. Обобщение этих методов на случай произвольных идеальных структур, изложенное здесь, было предложено Ж. Петре в [39], [317] и развито в работах В. И. Дмитриева [59], [61], [63]. Неожиданным было появление в теореме 2.8 о реитерации пространств кальдероновой шкалы (В. И. Дмитриев [59]).

$\mathcal{K}$- и $\mathcal{J}$-методы в случае, когда E есть пространство L_p со степенным весом (см. п. 8), были предложены Ж. Петре [315] и получили наибольшее распространение среди вещественных методов интерполяции. Обобщение этих методов на случай более общих идеальных структур было проделано Ж. Петре [39], К. Беннетом [181] и другими авторами. Частный случай теоремы 2.10 см. [315], [188].

Теоремы 2.11—2.12 доказаны Ж. Л. Лионсом и Ж. Петре в [285].

Теорема 2.13 о числе параметров получена Ж. Петре [314]; она обобщена В. И. Дмитриевым [63] на случай произвольных идеальных структур E_0 и E_1.

Исследование крайних пространств (п. 9) было проведено К. Хайакавой [256].

Двойственность методов констант и средних (в простейшем случае, когда они совпадают) была изучена Ж. Л. Лионсом и Ж. Петре [285]. Здесь изложены результаты В. И. Дмитриева [61].

Методы констант и средних в применении к квазинормированным пространствам изучались [75], [257].

Связь между методами констант и средних и теорией шкал и почти интерполяционные свойства шкал были изучены Ю. И. Петуниным [91].

Лемма 2.20 и теорема 2.23 были получены Ж. Л. Лионсом и Ж. Петре [285]. Вопрос об условиях коммутируемости функторов, отвечающих методу средних и комплексному методу, исследовался П. Griваром [253].

МОНОГРАФИИ

1. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., «Наука», 1966.
2. Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
3. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., ИЛ, 1959.
4. Вулих Б. З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
5. Гофман К., Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
6. Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, М., ИЛ, 1962.
7. Забрейко П. П., Нелинейные интегральные операторы, Труды семинара по функц. анализу ВГУ, 8 (1966).
8. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965.
9. Иосида К., Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.
10. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
11. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
12. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., «Наука», 1966.
13. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1967.
14. Лионс Ж. Л. и Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., «Мир», 1971.
15. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., Физматгиз, 1962.
16. Наймарк М. А., Нормированные кольца, М., «Наука», 1968.
17. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., «Наука», 1969.

18. Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., ОНТИ, 1937.
19. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
20. Стейн И. и Вейс Г., Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., «Мир», 1974.
21. Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
22. Функциональный анализ, под общей редакцией С. Г. Крейна, М., «Наука», 1972.
23. Халмош П., Теория меры, М., ИЛ., 1953.
24. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е. и Полиа Г., Неравенства, М., ИЛ, 1948.
25. Хёрмандер Л., Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.
26. Хилле Э. и Филлипс Р. М., Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.
27. Шилов Г. Е., Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
28. Эдвардс Р., Функциональный анализ, М., «Мир», 1969.
29. Butzer P. E., Berens H., Semi-groups of Operators and Approximation, Grundl. d. math. Wiss., Bd. 145, Berlin, 1967.
30. Berens H., Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximation Processen auf Banach raumen, Lect. notes Math. **64**, Springer-Verlag (1968).
31. Chong K. H., Rice N. M., Equimeasurable rearrangement of functions, Qeen's papers Pure Appl. Math. **28**, Canada, 1971.
32. Friedrich V., Stetige Transportoptimierung, ihre Beziehungen zur Theorie des höldersteigen Funktionen un einige ihrer Anwendungen, Berlin, VEB Deutscher Verlag Wiss., 1972.
33. Katznelson Y., An Introduction to Harmonic Analisis, New York, Willey, 1968.
34. Lindenstrauss J., Tzafriri L., Classical Banach spaces, Berlin, Springer-Verlag, 1973.
35. Lions J. L., Magenes E., Problemes aux limites non homogenes et application, Paris, Dunod, I—1968, II—1968, III—1970.
36. Lorenz G. G., Bernstein Polinomials, Toronto, Univ. of Toronto Press, 1953.
37. Luxemburg W. A., Banach Function Spaces, Van Gorcum and C. Assen, 1955.
38. Oklander E. T., Interpolacion, Espacios de Lorentz y Teorema Marcinkiewicz, Cursos y seminarios Fasc. 20, Universidad da Buenos Aires, 1965.
39. Peetre J., A theory of interpolation of normed spaces, Notes Universidad de Brazilia, 1963.
40. Peetre J., Interpolation i abstrakta rum, Vorlesungs-ausarbeitung, Lund, 1966.
41. Pietsch A., Theorie der Operatorenideale, Jena, Friedrich-Schiller Universität, 1972.
42. Schatten R., Norm ideals of completely continuous operators, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
43. Zygmund A., Integrales singulieres, Berlin, Springer — Verlag, 1971.

ЖУРНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

44. Бари Н. К. и Стечкин С. Б., Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды Моск. матем. о-ва 5 (1956), 484—521.
45. Бесов О. В., Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. Труды матем. ин-та Стеклова 60 (1961), 42—81.
46. Браверман М. Ш., О геометрических свойствах симметричных пространств, Сиб. матем. ж. 15, 3 (1974), 675—679.
47. Браверман М. Ш. и Семенов Е. М., Изометрии симметричных пространств, ДАН СССР, 217, 2 (1974), 257—259.
48. Брудный Ю. А., Пространства, определяемые с помощью локальных приближений, Труды Моск. матем. о-ва 24 (1971), 69—132.
49. Брудный Ю. А., О перестановке гладкой функции, УМН 27, 2 (1972), 165—166.
50. Брудный Ю. А., Модули непрерывности и перестановки, «Матем. заметки» 18, 1 (1975), 63—66.
51. Брудный Ю. А. и Шалашов В. К., Липшицевы пространства функций, ДАН СССР 197, 1 (1971), 18—20.
52. Брудный Ю. А., Шалашов В. К., Липшицевы пространства функций, Сб.: «Метрические вопросы теории функций и отображений», «Наукова думка», Киев, IV (1973), 3—60.
53. Васильева О. А., Семенов Е. М., Метод интерполяции линейных операторов в задаче о множителях, УМН 26, 3 (1971).
54. Вентцель Т. Д., О функциях интерполяции, «Вестн. МГУ», сер. матем, 5 (1969).
55. Головкин К. К., Об одном обобщении интерполяционной теоремы Марцинкевича, Труды Матем. ин-та Стеклова 102 (1967).
56. Головкин К. К., Параметрически-нормированные пространства и нормированные массивы, Труды Матем. ин-та Стеклова 106 (1969), 3—134.
57. Дикарев В. А. и Мацаев В. И., Точная интерполяционная теорема, ДАН СССР 168, 5 (1966), 986—988.
58. Дмитриев А. А., Об интерполяции одномерных операторов, Труды НИИ матем. ВГУ 11 (1973), 31—43.
59. Дмитриев В. И., О методе Лионса—Петре построения интерполяционных пространств, ДАН СССР 198, 4 (1971), 747—750.
60. Дмитриев В. И., Обобщение интерполяционного метода следов, Труды НИИ матем. ВГУ, 3 (1971).
61. Дмитриев В. И., Двойственность интерполяционных методов констант и средних, ДАН СССР 214, 1 (1974).
62. Дмитриев В. И., К интерполяционной теореме, ДАН СССР 215, 3 (1974), 518—521.
63. Дмитриев В. И., Теоремы о параметрах для интерполяционного метода констант, ДАН СССР 216, 2 (1974), 257—258.
64. Дмитриев В. И., Интерполяционные пространства между $L_1^{\omega_0}$, $L_1^{\omega_1}$ и L_1, L_∞, «Матем. заметки» 17, 5 (1975), 727—736.
65. Дмитриев В. И., О методах построения и описания интерполяционных пространств, Автореферат канд. диссертации, Воронеж, 1975.

66. Ефимов А. В., Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, «Матем. сб.» **54**, 1 (1961), 51—90.
67. Забрейко П. П., Об одной интерполяционной теореме для линейных операторов, «Матем. заметки», 2, 6 (1967), 593—598.
68. Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Об интерполяции свойства полной непрерывности линейного оператора, Учен. зап. Казанского ун-та **124**, кн. 6 (1964) 114—118.
69. Захарюта В. П., О базисах и изоморфизме пространств функций, аналитических в выпуклых областях многих переменных, «Теория функций и функц. анализ» **5**, Харьков (1967), 5—12.
70. Захарюта В. П., О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал, ДАН СССР **180**, 4 (1968).
71. Захарюта В. П., Экстремальные плюрисубгармонические функции, гильбертовы шкалы и изоморфизм пространств аналитических функций многих переменных, «Теория функций и функц. анализ», I — **19** (1974), 133—157; II — **21** (1974), 68—83.
72. Кадампатта С. Н., Шкалы пространств аналитических функций, Изв. Сев.-Кавк. научн. центра высшей школы **4** (1975).
73. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш., Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах, ДАН СССР **115**, 6 (1957), 1058—1061.
74. Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш., Об одном пространстве вполне аддитивных функций, «Вестн. ЛГУ» **7** (1958).
75. Караджов Г. Е., Об интерполяционном методе «средних» для квазинормированных пространств, ДАН СССР **209**, 1 (1973).
76. Караджов Г. Е., О коммутативности двух интерполяционных функторов, ДАН СССР **223**, 2 (1975), 292—294.
77. Караджов Г. Е., О применении теории интерполяционных пространств к оценкам сингулярных чисел интегральных операторов, Сб.: «Проблемы матем. анализа», ЛГУ **4** (1973), 37—45.
78. Кальдерон А. П., Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод, Сб. переводов «Математика» **9**: 3 (1965), 56—129.
79. Кальдерон А. П., Бенедек А., Панцоне Р., Операторы свертки на функциях со значениями в банаховом пространстве, Сб. переводов «Математика» **7**: 5 (1963), 121—131.
80. Климов В. С., К теоремам вложения для симметричных пространств, «Матем. сб.» **82**, 3 (1970), 371—386.
81. Климов В. С., О перестановках дифференцируемых функций, «Матем. заметки», **9**, 6 (1971), 629—638.
82. Климов В. С., Теоремы вложения для симметричных пространств, «Матем. сб.» **79**, 2 (1969), 171—178.
83. Климов В. С., Теоремы вложения и промежуточные пространства Кальдерона, «Функц. анализ.» **8**, 1 (1974), 79.
84. Красносельский М. А., Об одной теореме М. Рисса, ДАН СССР **131**, 2 (1960), 246—248.
85. Крейн С. Г., Об одной интерполяционной теореме в теории операторов, ДАН СССР **130**, 3 (1960), 491—494.
86. Крейн С. Г., О понятии нормальной шкалы пространств, ДАН СССР **132**, 3 (1960), 510—513.
87. Крейн С. Г., Интерполяция линейных операторов и свойства решений эллиптических уравнений, Elliptische Differentialgleichungen, B. II, Akad.-Verlag, Berlin, 1971, 155—166.

88. Крейн С. Г., Кучмент П. А., Об одном подходе к задаче интерполяции, Труды НИИ матем. ВГУ **3** (1971), 54—60.
89. Крейн С. Г. и Петунин Ю. И., Критерий родственности двух банаховых пространств, ДАН СССР **139**, 6 (1961).
90. Крейн С. Г. и Петунин Ю. И., О понятии минимальной шкалы пространств, ДАН СССР **154**, 1 (1964), 30—33.
91. Крейн С. Г. и Петунин Ю. И., Шкалы банаховых пространств. УМН **21**: 2 (1966), 89—169.
92. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Гипершкалы банаховых структур, ДАН СССР **170** (1966), 265—267.
93. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Шкалы банаховых структур измеримых функций, Труды Моск. матем. о-ва, **17** (1967), 293—322.
94. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Теоремы вложения и интерполяция линейных операторов. Теоремы вложения и их приложения, Труды симп. по теоремам вложения. Баку, 1966, М., «Наука», 1970, 127—131.
95. Крейн С. Г., Семенов Е. М., Об одной шкале пространств, ДАН СССР **138**, 4 (1961), 763—766.
96. Крейн С. Г., Семенов Е. М., Об одном свойстве равноизмеримых функций, Труды НИИ матем. ВГУ, **5** (1972), 70—74.
97. Крейн С. Г., Семенов Е. М., Интерполяция операторов ослабленного типа, «Функц. анализ» **7**, 2 (1973), 89—90.
98. Крейн С. Г., Семенов Е. М., О некоторых интерполяционных теоремах теории линейных операторов и их приложениях. Теоремы вложения и их приложения. Труды Всесоюзного симпозиума, «Наука» Каз. ССР, Алма-Ата, 1976, 64—68.
99. Круглов А. А. и Соломяк М. З., Интерполяция операторов в пространствах V_p, «Вестн. ЛГУ», сер. матем. **3** (1971).
100. Кузнецов А. И., О структуре пространства L_1+L_∞, Сб. трудов асп. ВГУ (1972), 34—37.
101. Курицын Ю. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М., Неравенства чебышевского типа в симметричных пространствах, «Матем. заметки» **10**, 2 (1971), 195—206.
102. Лизоркин П. И., О преобразованиях Фурье в пространствах Бесова. Нулевая шкала $B^0_{p,\theta}$, ДАН СССР **163**, 6 (1965).
103. Лизоркин П. И., (L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР **152**, 4 (1963), 808—811.
104. Лизоркин П. И., О функциональной характеристике интерполяционных пространств $(L_p(\Omega), W^1_p(\Omega))_{\theta, p}$, Труды Матем. ин-та Стеклова, **134** (1975), 180—203.
105. Лизоркин П. И., Интерполяция пространств L_p с весом, ДАН СССР **222**, 1 (1975), 32—35.
106. Лозановский Г. Я., О банаховых структурах Кальдерона, ДАН СССР **172**, 5 (1967), 1018—1020.
107. Лозановский Г. Я., Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона, «Функц. анализ» **6**, 4 (1972), 89—90.
108. Лузин В. И., Рутицкий Я. Б., О суммах и пересечениях банаховых пространств, Труды НИИ матем. ВГУ **3** (1971), 84—87.
109. Любич Ю. И., О неравенствах между степенями линейного оператора, Изв. АН СССР, сер. матем. **24**, 6 (1960), 825—864.

110. Мадженес Э., Интерполяционные пространства и уравнеиия в частных производных, УМН **21**, 2 (1966), 169—218.
111. Меклер А. А., О свойствах Харди — Литтльвуда в пространствах Марцинкевича, Изв. вузов, матем. **3** (154) (1975), 104—106.
112. Мирошин Н. В., Некоторые свойства интерполяционных пространств вполне непрерывных операторов, «Матем. заметки» **17**, 2 (1975), 293—300.
113. Митягин Б. С., Интерполяционная теорема для модулярных пространств, «Матем. сб.» **66**. 4 (1965), 473—482.
114. Митягин Б. С., Нормированные идеалы промежуточного типа, Изв. АН СССР, сер. матем. **28**, 4 (1964), 819—832.
115. Наймарк М. А., Фомин С. В., Непрерывные прямые суммы гильбертовых пространств, УМН **10**, 2 (1955), 111—112.
116. Овчинников В. И., Симметричные пространства измеримых операторов, ДАН СССР **191**, 4 (1970), 769—771.
117. Овчинников В. И., О s-числах измеримых операторов, «Функц. анализ» **4**, 3 (1970), 78—85.
118. Овчинников В. И., Симметричные пространства измеримых операторов, Труды НИИ матем. ВГУ 3 (1971), 88—107.
119. Овчинников В. И., Пространства измеримых операторов и интерполяция, Автореферат канд. диссерт., Воронеж, 1971.
120. Олевский А. М., Ряды Фурье и функции Лебега, УМН **22**, 2 (1967), 237—239.
121. Петунин Ю. И., Родственность трех банаховых пространств, ДАН СССР **170**, 3 (1966), 516—519.
122. Петунин Ю. И., Об одной нелинейной задаче в теории шкал банаховых пространств, УМН, **21**, 1 (1966), 161—166.
123. Петунин Ю. И., Предъядерные отображения в шкалах банаховых и гильбертовых пространств, ДАН СССР **173**, 1 (1967), 40—43.
124. Петунин Ю. И., Двумерные шкалы банаховых пространств, Труды сем. функц. ан. ВГУ **9** (1967), 125—144.
125. Петунин Ю. И., Преобразование нормы в шкале банаховых пространств, Труды сем. функц. ан. ВГУ **10** (1968), 92—100.
126. Петунин Ю. И., Факторизация шкал банаховых пространств, «Функц. анализ» **4**, 4 (1970), 81—82.
127. Петунин Ю. И., Проблема интерполяции между фактор-пространствами, Укр. матем. ж. **23** (1971), 157—167.
128. Петунин Ю. И., Пличко А. Н., Интерполяционность шкалы Гёльдера, Труды VI зимней школы по матем. программированию и смежн. вопросам, М., ЦЭМИ, 1975, 229—235.
129. Пустыльник Е. И., Интерполяционные теоремы для пространств L_p при $p<1$, Сиб. матем. ж. **4**, 2 (1963).
130. Ротфельд С. Ю., Аналоги интерполяционных теорем Митягина и Семенова для операторов в ненормированных симметричных пространствах, Сб. «Проблемы матем. анализа», ЛГУ **4** (1973).
131. Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, «Матем. сб.», **25**, 1 (1949), 107—150.
132. Руссу Г. И., Симметричные пространства функций, не обладающие свойством мажорантиости, «Матем. исследования» **4** (1969), 82—93.

133. Рутицкий Я. Б., Шкалы пространств Орлича и интерполяционные теоремы, Труды сем. функц. ан. ВГУ 7 (1963), 112—129.
134. Рутицкий Я. Б., Шкалы пространств Орлича и интерполяционные теоремы, ДАН СССР **149**, 1 (1963) 32—35.
135. Рутицкий Я. Б., Некоторые замечания к теории шкал пространств Орлича, Труды сем. функц. ан. ВГУ **10** (1968), 109—113.
136. Седаев А. А., Об операторах, действующих в интерполяционной паре банаховых пространств, Труды НИИ матем. ВГУ 3 (1971).
137. Седаев А. А., Семенов Е. М., О возможности описания интерполяционных пространств в терминах K-метода Петре, «Оптимизация» **4** (1971), 98—114.
138. Седаев А. А., Описание интерполяционных пространств пары $(L_{p_0}^{a}, L_{a_1}^{p})$ и некоторые родственные вопросы, ДАН СССР **209** 4 (1973), 798—800.
139. Седаев А. А., О слабой и сильной сходимости в интерполяционных пространствах, Труды VI зимней школы по матем. программированию и смежн. вопросам, М., ЦЭМИ, 1975, 245—267.
140. Седаев А. А., Интерполяция линейных операторов и геометрии банаховых пространств. Автореферат канд. диссерт., Воронеж, 1973.
141. Седаев А. А., Об операторе Харди в пространствах L_p с весом, Сб. трудов асп. ВГУ, Воронеж, 1972, 48—53.
142. Семенов Е. М., Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством, ДАН СССР **148**, 5 (1963), 1038—1041.
143. Семенов Е. М., Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций, ДАН СССР **156**, 6 (1964).
144. Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах, ДАН СССР **164**, 4 (1965), 746—749.
145. Семенов Е. М., Интерполяция линейных операторов и оценки коэффициентов Фурье, ДАН СССР **176**, 6 (1967), 1251—1254.
146. Семенов Е. М., Одна новая интерполяционная теорема, «Функц. анализ» **2**, 2 (1968), 68—80.
147. Семенов Е. М., Уплотненные шкалы банаховых пространств, Труды сем. функц. ан. ВГУ **10** (1968), 130—141.
148. Семенов Е. М., Об одном методе получения интерполяционных теорем в симметричных пространствах, ДАН СССР **185**, 6 (1969), 1243—1246.
149. Семенов Е. М., О некоторых числовых характеристиках симметричных пространств, Труды НИИ матем. ВГУ **1** (1970), 137—144.
150. Семенов Е. М., Васильева О. А., L_2-мультипликаторы, Труды матем. ф-та ВГУ **11** (1973), 42—53.
151. Семенов Е. М., Обзор по теории интерполяции линейных операторов, Труды VI зимней школы по матем. программированию и смежн. вопросам, М., ЦЭМИ, 1975.
152. Соболев С. Л., Об одной теореме функционального анализа, «Матем. сб.» 4 (1938), 471—497.
153. Соболевский П. Е., О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденных неограниченным оператором, УМН **19**, 6 (1964), 511—513.

154. Соболевский П. Е., Интерполяционная теорема для дробных пространств, порожденных неограниченными позитивными операторами с несравнимыми областями определения, Труды матем. ф-та ВГУ **9** (1973), 142—161.
155. Соболевский П. Е., Интерполяционные теоремы для дробных степеней операторов, действующих в банаховых пространствах, Труды матем. ф-та ВГУ **13** (1974), 51—64.
156. Соболевский П. Е., Некоторые свойства решений дифференциальных уравнений в дробных пространствах, Труды НИИ матем. ВГУ **14** (1974), 68—73.
157. Симоненко И. Б., Интерполяция и экстраполяция в пространствах Орлича, «Матем. сб.» **63**, 4 (1964), 536—563.
158. Трибель Х., Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева — Бесова, «Матем. сб.» **98**, 1 (1975), 27—41.
159. Томин Н. Г., Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам, ДАН СССР **212**, 5 (1973), 1074—1077.
160. Чубурин Ю. П., Об одном свойстве перестановок, Сб. Трудов асп. ВГУ, Воронеж, 1972, 72—76.
161. Шалашов В. К., Липшицевы пространства и интерполяция, УМН **27**, 6 (1972), 255—256.
162. Шварц Д., Замечания о неравенствах типа Кальдерона — Зигмунда для функций со значениями в векторном пространстве, Сб. переводов: «Математика» 7; 4 (1963), 57—70.
163. Шестаков В. А., О комплексной интерполяции, «Вестн. ЛГУ», сер. матем. 4 (1974), 64—68.
164. Шестаков В. А., Об интерполяции линейных операторов в пространствах измеримых функций, «Функц. анализ» 8, 3 (1974), 91—92.
165. Шлензак Г., Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств, «Вест. МГУ», сер. матем. **1**, 4 (1974), 48—58.
166. Шнейберг И. Я., О разрешимости линейных уравнений в интерполяционных семействах банаховых пространств, ДАН СССР **212** (1973).
167. Шнейберг И. Я., Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств, «Матем. исследования» 9 (1974), 214—229.
168. Aranda P. I., Cattaneo E. P., Sur les espaces de Lorentz avec poids, C. R. Acad. Sci., Paris, **A 264**, (1967), 109—112.
169. Arduini P., Sull'equivalenza di certi funzionali della teoria dell'interpolazione tra spazi di Banach, Rich. Mat. **11**, 1 (1962).
170. Aronszajn N., Associated spaces, interpolation theorems and the regularity of solutions of differential problems, Proc. Sump. Pure Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence (1961), 23—32.
171. Aronszajn N., Gagliardo E., Interpolation spaces and interpolation methods, Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4, **68** (1965) 51—117.
172. Artola M., Sur un Théorème d'Interpolation, Journ. Math. An. and Appl. **41**, 1 (1973), 148—163.

173. Baiocchi C., Un teorema di interpolazione applicationi ai prol lemi ai limiti per le equazioni differenziali a derivate parziali, Anı Mat. Pura Appl. ser 4, 73 (1966), 233—255.
174. Baouendi M. S., Goulaouic Ch., Commutation de l'intei section et des foncteuers d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Pari 265 (1967), 313—315.
175. Benedeck A., Panzone R., The spaces L_p with mixed norn Duke Math. J. 28, 4 (1961), 301—324.
176. Bennet C., A pair of indices for function space on the circl Trans. Amer. Math. Soc. 174 (1972), 289—304.
177. Bennet C., A Hausdorff—Young theorem for rearrangement-invariant spaces, Pacif. J. Math. 47, 2 (1973), 311—328.
178. Bennet C., Estimates for weak-type operators, Bull. Amer. Matl Soc. 79, 5 (1973), 933—935.
179. Bennet C., Intermediate spaces and the class $L \log^+ L$, Ark Mat. 11 (1973), 215—228.
180. Bennet C., Banach Function Spaces and Interpolation Methods I. The Abstract Theory, J. Funct. An. 17 (1974), 409—440.
181. Bennet C., Banach function spaces and interpolation methods II. Interpolation of weak-type operaters. Linear Operaters and Ap proximation II, Proc. Conf. Oberwolffach Math. Res. Inst., Blacl Forest, 1974.
182. Bennet C., Banach function spaces and interpolation method III. Hausdorff — Young estimates, J. Approx. Theory. 13, 3 (1975)
183. Berens H., Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren ir intermediaren Räumen, Schr. Math. Inst. Univ. Münster 32 (1964).
184. Berens H., Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory, Nederl. Akad. Wetensch. Indog. Math. 68, 3 (1965), 497—512.
185. Berens H., Butzer P. L., Approximation theorems for semigroup operators in intermediate spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 70, 5 (1964), 689—692.
186. Berens H., Butzer P. L., Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen, Math. Ann. 163, 3 (1966), 204—211.
187. Berens H., Butzer P. L., Westphal U., Representation of fractional powers of infinitesimal generators of semi-groups, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 191—196.
188. Berenstein C. A., Kerzman N., Sur la réiteration dans les espaces moyennes, C. R. Acad. Sci. Paris, 263 (1966).
189. Berenstein C. A., Cotlar M., Kerzman N., Kree P., Some remarks on the Marcinkiewics convexity theorem in the upper triangle, Studia Math. 29, 1 (1967), 79—95.
190. Bergh J., On the interpolation of normed linear spaces — a necessary condition, Technical report, Lund, 1971.
191. Bergh J., A generalization of Steffensen's inequality, J. Math. Anal. and Appl. 41, 1 (1973), 187—191.
192. Boas R. P., Bochner S., On a theorem of M. Riesz for Fourier series, J. London Math. Soc. 14, 1 (1939), 62—73.
193. Boyd D. W., The Hilbert transform on rearrangement-invariant space, Can. J. Math. 19, 3 (1967) 599—616.
194. Boyd D. W., Space between a Pair of Reflexive Lebesgue spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 18, 2 (1967), 215—219.

195. Boyd D. W., The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, Can. J. Math. **19**, 3 (1967), 599—616.
196. Boyd D. W., The Spectral Radius of Averaging Operators, Pacific J. Math. **24**, 1 (1968), 19—28.
197. Boyd D. W., Indices of function spaces and their relationship to interpolation, Canad. J. Math. **21**, 5 (1969), 1245—1254.
198. Boyd D. W., Indices for Orlicz spaces, Pacific. J. Math. **39**, 2 (1971), 315—323.
199. Browder F. E., Remarks on non-linear interpolation in Banach spaces, J. Funct. Analysis **4**, 3 (1969), 390—403.
200. Butzer P. L., Sur la theorie des demi-gropups et classes de saturation de certaines integrales singulieres, C. R. Acad. Sci. Paris **243** (1956), 1470—1475.
201. Butzer P. L., Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale, Math. Ann. **133**, 5 (1957), 410—425.
202. Calderon A. P., Lebesgue space of differentiable functions and distributions, Proc. Symp. Pure Math. 4, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc. Providence (1961), 33—92.
203. Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, Studia Math. Ser. Specjalna **I** (1963), 31—34.
204. Calderon A. P., Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math **24**, 2 (1964), 113—190.
205. Calderon A. P., Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz, Studia Math. **26** (1966), 273—299.
206. Calderon A. P., Zygmund A., A note on the interpolation of linear operations, Studia Math. **12** (1951), 194—204.
207. Calderon A. P., Zygmund A., A note on the interpolation of sublinear operations, Amer. J. Math. **78**, 2 (1956).
208. Campanato S., Teoremi di interpolazione per transformazioni che applicano L^p in $C^{n,\alpha}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **18**, 3 (1964), 345—360.
209. Campanato S., Su un teorema di interpolazione di G. Stampacchia, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20**, 3 (1966), 649—651.
210. Campanato S., Maggiorazioni interpolatorie negli spazi $H_\lambda^{m,p}(\Omega)$, Ann. Mat. Pure Appl. **75** (1967), 261—276.
211. Campanato S. and Murthy M. K. V., Una generalizzazione del tezremi di Riesz — Thorin, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19**, 1 (1965), 87—100.
212. Chersi E., Ricerche per una teoria generale dell'interpolazione tra spazi lineare topologici, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **34** (1964).
213. Cotlar M., A general interpolation theorem for linear operations, Rev. mat. Guyana **I**, 1 (1955), 57—84.
214. Cotlar M., Some generalizations of the Hardy — Littlewood maximal theorem, Rev. mat. Guyana **I**, 1 (1955), 85—104.
215. Cotlar M., Brushi M., On the convexity theorems of Riesz—Thorin and Marcinkiewicz, Rev. Un. Mat. Argentina **5** (1957), 162—172.
216. Cwikel M., On $(L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))_{\theta,q}$, Proc. Amer. Math. Soc. **44**, 2 (1974), 285—292.

217. D a y P. W., Decreasing rearrangements and double stochastic operators, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 383—392.
218. D e u t s h N., Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques lacalement convexes, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963).
219. D e u t s h N., Interpolation dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes, Bull. Soc. France, Suppl. Mem. **13**, 1 (1968).
220. D i x m i e r J., Formes lineares sur un anneau d'operateurs, Bull. Soc. Math. France **81**, 1 (1953), 9—39.
221. D o n o g h u e W. F., The interpolation of quadratic norms, Acta Math. **118**, 3—4 (1967), 251—270.
222. D u f f G. F. D., Integral Inequalities for Equimeasurable Rearrangements, Can. J. Math. **22**, 2 (1970), 408—430.
223. F a v i n i A., Sulla teoria della interpolazione nagli spaci vettoriali topologici, Rend. Matem. Ser. VI, 3 (1970), 361—390.
224. F a v i n i A., Alcuni risultati sulla interpolazione non-lineare, Boll. Unione Matem. Italiana, Ser. IV, **4**, 6 (1971), 918—936.
225. F a v i n i A., Su un metodo di interpolazione, Boll. Unione Matem. Italiana Ser. IV, **4**, 5 (1971), 677—686.
226. F a v i n i A., Sulla interpolazione di operatori compatti, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **45** (1971), 279—304.
227. F a v i n i A., Sulla interpolazione degli spaci $K(M_p)$, Boll. Unione Matem. Italiana, ser IV, **6**, 3 (1972), 440—449.
228. F a v i n i A., Sulla interpolazione multilineare: una precisezione, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **49** (1973), 353—354.
229. F a v i n i A., Sulla interpolazione di certi spaci di Sobolev con peso, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **50** (1973), 223—249.
230. F e f f e r m a n C., R i v i e r e N. M. and S a g h e r J., Interpolation between H^p spaces: the real method, Trans. Amer. Math. Soc. **191**, 1 (1974), 76—81.
231. F e h e r F., Approximationssätze auf Rearrangement-invarianten Banach — Räumen über dem Torus. Linear Operators and Approximation II. Proc. Conf. Oberwolfaach Math. Res. Inst., Black Forest, 1974.
232. F e h e r F., G a s p a r P. and J o h n e n H., Normkonvergenz von Fourierreihen in rearrangement invarianten Banach—Räumen, J. Funct. Ann. **13**, 4 (1973), 417—434.
233. F e h e r F., G a s p a r P. and J o h n e n H., Der Konjugiertenoperator auf rearrangement-invarianten Funktionenräumen, Math. Zeitschr. **134**, ser IV, 2 (1973), 129—141.
234. F o i a s C., L i o n s J. L., Sur certains théorémes d'interpolation, Acta Scient. Math. Szeged **22**, 3—4 (1961), 269—282.
235. F r e i t a g D., Reele Interpolation zwischen Banachideallen von beschränkten linearen Operatoren. Dissertation, Jena, 1971.
236. F r e m l i n D. H., Stable subspáces of L^1+L^∞, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64**, 3 (1968), 625—643.
237. G a g l i a r d o E., Interpolation d'espaces de Banach et applications. I—III. C. R. Acad. Sci. Paris **248** (1959), 1912—1914, 3388—3390, 3517—3518.
238. G a g l i a r d o E., Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni Sci., Genova, 1959.
239. G a g l i a r d o E., Interpolazione di spazi di Banach e applicazioni, Ricerche Mat. **9** (1960), 58—81.

240. Gagliardo E., Una structura unitaria in diverse familie di spazi funsionali I. Richerche Mat. **10** (1961), 244—281.
241. Gagliardo E., A common structure in various families of functional spaces. Quasilineare interpolation spaces. II. Ricerche Mat. **12** (1963), 87—107.
242. Gagliardo E., Caratterizzasione construttiva di tutti gli spazi die interpolazione tra spazi di Banach., Symposia Math.v. **II** (INDAM, Rem) (1968), 95—106.
243. Gapaillard C., Caratérisation des espaces d'interpolation entre S^0 et S^∞, C. R. Acad. Sci. Paris **A 279** (1974), 53—55.
244. Gapaillard C., Pham The Lai, Remarque sur les propriétés d dualité et d'interpolation des idéaux de R. Schatten, C. R. Acad. Sci. Paris, **A 274** (1972), 1794—1797.
245. Gaspar D., Johnen H., Über eine Klasse von Rearrangement—invarianten Banach-Räumen. Lineare Operatoren und Approximation. II. Proc. Conf. Oberwolfach Math. Res. Inst., Black Forest, 1974.
246. Gilbert J. E., Interpolation between weighted L_p spaces. Ark. Mat. **10**, 2 (1972), 235—249.
247. Gilbert J. E., Counter-examples in interpolation space theory from harmonic analysis. Lineare Operatoren und Approximation II. Proc. Conf. Oberwolfach Math. Res. Inst., Black Forest, 1974.
248. Girardeau J. P., Sur l'interpolation entre un ésp ce localement convexe et son dual, Rev. Faculdada de ciencias de Lisboa, 2°, Ser. A, II, 1 (1965), 165—186.
249. Goulaouic Ch., Interpolation entre des espaces L_p avec poids, C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 333—336.
250. Goulaouic Ch., Prolongements de Foncteurs d'Interpolation et Applications. Annales de l'Inst. Fourier **18**, 1 (1968), 1—98.
251. Goulaouic Ch., Interpolation entre des espaces localement convexes définis a l'aide de semi-groupes; cas des êspaces de Gevrey. Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble **19**, 2 (1970), 269—278.
252. Grisvard P., Identité's entre espaces de traces, Math. Scand, **13**, 1 (1963), 70—74.
253. Grisvard P., Commutativité de deux Focteurs d'Interpolation et applications, J. Math. Pures et Appl. **45**, 2 (1966), 143—290.
254. Grisvard P., Spazi di trace e applicazioni, Rend. Mat. **5**, 4 (1972), 657—724.
255. Grothendieck A., Rearrangement de Fonctions e Inégalités de Convexité dans les Algebras de von Neumann Munies D'une Trace, Séminaire Bourbaki, March 1955, 1—13.
256. Hayakawa K., Interpolation by the real method preserves compactness of operators, J. Math. Soc. Japan **21**, 2 (1969), 189—199.
257. Holmstedt T., Interpolation of Quasi—Normed Spaces, Math. Scand. **26**, 1 (1970), 177—199.
258. Holmstedt T. and Peetre J., On Certain Functionals Arising in the Theory of Interpolation Spaces, J. Funct. An. **4**, 1 (1969), 86—94.
259. Hughes E., A short proof of an interpolation theorem, Canad. Math. Bull. **17**, I (1974), 127—128.
260. Hunt R. A., An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 6 (1964),

261. H u n t R. A., The Marcinkiewicz interpolation theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 996—998.
262. H u n t R. A., On $L(p, q)$ spaces, L'Ens. Math. **12** (1966).
263. J u b e r s R. K., Measure of non-compactness and interpolation of compactness for a class of integral transformations, Duke Math. J. **41**, 3 (1973), 511—526.
264. K o i z u m i S., Contributions to the theory of interpolation of operation, Osaka J. Math. **8**, 1 (1971), 135—149.
265. K o i z u m i S., A theorem about interpolation of operations on intermediate spaces, Tôhoku Math. J. **24**, 2 (1972), 245—249.
266. K o m a t s u H., I. Fractional powers of operators, Pacific J. Math. **19**, 2 (1966), 285—346; II. Interpolation spaces, Pacific J. Math. **21**, 2 (1967), 89—111; III. Nrgative powers, J. Math. Soc. Japan **21**, 1 (1969), 205—220; IV. Potential operators. J. Math. Soc. Japan **21**, 2 (1966), 221—228; V. Dual operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, **17**, 1—2 (1970), 373—398; VI. Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA **19**, 1 (1972), 1—63.
267. K r e e P., Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normès, ni complets. Application, Ann. Inst. Fourier **17**, 2 (1968), 137—174.
268. K u n z e R. A., L_p Fourier transforms on locally compact unimodilar groups. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 2 (1958), 519—540.
269. L a c r o i x M.-T., Espaces de traces des éspaces de Sobolev — Orlicz, J. Math. pure appl. **53**, 4 (1974).
270. de L e e u w K., Banach spaces of Lipschitz functions, Studia Math. **21**, 1 (1961), 55—66.
271. L i o n s J. L., Espaces intermediares entre espaces hilbertiens et applications, Bull. Math. Soc. Math. Phys. R. P. Roumanie 2, 4 (1958), 419—432.
272. L i o n s J. L., Un theoreme de trace; applications, C. R. Acad. Sci. Paris **249** (1959), 2259—2261.
273. L i o n s J. L., Theoremes de trace et d'interpolation, I. Ann. Scuola Norm, Sup. Pisa **13**, 4 (1959), 389—403; II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **14**, 4 (1960), 317—331; III. J. Math. Pures et Appl. 42 (1963), 195—203; IV. Math. Ann. **151** (1963), 42—56; V An. Acad. Brasileira Cien. **35** (1963), 1—10.
274. L i o n s J. L., Sur certains theoremes d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris **250** (1960), 2104—2106.
275. L i o n s J. L., Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris **251**, 3 (1960), 1853—1856.
276. L i o n s J. L., Sur les espaces d'interpolation; dualite, Math. Scand. **9**, 16 (1961), 147—177.
277. L i o n s J. L., On a trace problem, Rend. Sem. Mat. Un., Padova **31**, 1 (1961), 232—242.
278. L i o n s J. L. Properties of some interpolation spaces, J. Math. Mechanics **11**, 6 (1962), 969—977.
279. L i o n s J. L. Remarques sur les espaces d'interpolation et les problems aux limites, Coll. C. N. R. S., Les equations aux derivees partielles, 254 (1962) 75—86.
280. L i o n s J. L., Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'operateurs, J. Math. Soc. Japan **14**, 2 (1962).
281. L i o n s J. L., Une propriete de stabilite par interpolation; applications, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 855—857.

282. Lions J. L., Derivees intermediares et espaces intermediares, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 4343—4345.
283. Lions J. L., Magenes E., Problems aux limites non homogenes (Problemi ai limiti non omogenei). I. Ann. Scuola Norm. Supà Pisa **14**, 3 (1960), 269—308; II. Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble **II**. (1961), 137—178; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15**, (1961), 39—101;IV. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **15**, **4** (1961), 311—326; V Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **16**, 1 (1962), 1—44; VI. J. d'Analyse Math. **II** (1963), 165—188; VII. *Ann.* Mat. Pura Appl. **63** (1963), 201—224.
284. Lions J. L., Peetre J., Proprietes d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris **253** (1961), 1747—1749.
285. Lions J. L., Peetre J., Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **19**, 19 (**1964**), 5—68.
286. Littman W., Multipliers in L^p and interpolation, Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 5 (1965), 764—766.
287. Löfström J., Some Theorems on Interpolation Spaces with Applications to Approximation in L_p, Math. Ann. **172**, 3 (1967), 176—196.
288. Löfström J., On certain Interpolation Spaces related to generalized Semi Groups, Mat. Scand. **16**, 1 (1965), 41—54.
289. Loomis L. H., A note on the Hilbert transform, Bull. Ann. Math. Soc. **52**, 12 (1946), 1082—1086.
290. Lorentz G. G., Some new functional space, Ann. of Math. **51**, 1 (1950), 37—55.
291. Lorentz G. G., On the theory of spaces Λ, Pacific J. Math. **I**, 3 (1950), 411—429.
292. Lorentz G. G., Majorants in spaces of integrable functions, Am. J. Math. **77** (1965), 482—492.
293. Lorentz G. G., Shimogaki T., Interpolation theorems for operators in function spaces, J. Funct. Anal. **2**, 1 (1968), 31—51.
294. Lorentz G. G. and Shimogaki T., Interpolation theorems for the pairs of spaces (L^p, L^∞) and (L^1, L^q), Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 207—221.
295. Luxemburg W. A. J., Rearrangement — invariant Banach function spaces, Queen's Papers Pure Appl. Math. **10** (1967), 83—144.
296. Marcinkiewicz J., Sur l'interpolation d'operations, C. R. Acad. Sci. Paris **208** (1939), 1272—1273.
297. Marcinkiewicz J., Quelques theoremes sur les series orthogonal. Ann. Soc. Pol. Math. **16** (1937), 84—96.
298. Mérucci C., Pham The Lai, Caracterisation par interpolation des ideaux de R. Schatten, C. R. Acad. Sci. Paris **A 274** (1972), A 1912—1914.
299. Mills S. E., Normed Köthe spaces as intermediate spaces of L_1 and L_∞ Pacific J. Math. **52**, 1 (1974), 157—173.
300. Miranda C., Sul teorema di Riesz — Thorin, Ann. Mat. Pura Appl. 84, 1 (1970), 61—71.
301. Mitjagin B. S., Sur l'équivalence des bases unconditionelles dans les échelles de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris **A 269** (**1969**), 426—428.
302. Moon K. H., On restricted weak type (l, l), Proc. Amer. Math. Soc. 42, 1 (1974), 148—152.

303. Muramatu T., On imbedding theorems for Sobolev spaces an some of their generalizations, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyot Univ. Ser. A **3**, 3 (1968), 393—416.
304. Muramatu T., Products of fractional powers of operators J. Sci. Univ. Tokyo Sec. I. A. Math. **17**, 3 (1970), 581—590.
305. Muramatu T., On Besov spaces of functions defined in general regions, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **6**, 3 (1970/71) 515—543.
306. Nikolsky S. M., Lions J. L., Lizorkin P. I., Integra representation and isomorphism properties of some classes o functions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci, Fis. Mat. Sec. III **19**, 2 (1965), 127—176.
307. Oklander E. T., L_{pq} interpolation and the theorem of Marcinkiewicz, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 1 (1966), 49—53.
308. Oloff R., Interpolation zwischen den Klassen von Operatorer in Hilberträumen, Math. Nachr. **46** (1970), 209—218.
309. O'Neil R., Convolution Operators and $L(p, q)$ Spaces, Duke Math. J. **30**, 1 (1963), 129—142.
310. O'Neil R., Les fonctions conjuguees et les intégrales fractionnaires de la classe L $(\log^+ L)^\alpha$, C. R. Acad. Sci. Paris, A **262** (1966), 463—466.
311. O'Neil R., Weiss G., The Hilbert transform and rearrangement of functions, Studia Math. **23**, 2 (1963), 189—198.
312. Orlicz W., Ein Satz über die Erweiterung von Linearen Operationen, Studia Math. **5** (1934), 127—140.
313. Orlicz W., On a class of operations over the space of integrable functions, Studia Math. **14** (1953—54), 302—309.
314. Peetre J., Sur le nombre de paramètres dans la definition de certain éspaces d'interpolation, Ricerche Mat. **12** (1963), 248—261.
315. Peetre J., Nouvelles propriétés d'éspaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 1424—1426.
316. Peetre J., On an interpolation theorem of Foias and Lions, Acta Scient. Math. Szeged **25**, 3—4 (1964), 255—265.
317. Peetre J., Espaces d'interpolation, generalisations, applications, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **34** (1964), 83—92.
318. Peetre J., Applications de la theorie de espaces d'interpolation aux developpements orthogonaux, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **37** (1967), 113—145.
319. Peetre J., On interpolation functions, Acta Scient. Math. Szeged **27**, 3—4 (1966), 167—171.
320. Peetre J., Relations entre deux methods d'interpolation, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **29** (1968), 305—309.
321. Peetre J., Espace d'interpolation et theoreme de Soboleff, Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble **16**, 1 (1966), 279—317.
322. Peetre J., Applications de la théorie des espaces d'interpolation dans l'Analyse Harmonique, Rich. Mat. **15** (1966), 1—36.
323. Peetre J., Sur les espaces de Besov. C. R. Acad. Sci Paris **264** (1967), 281—283.
324. Peetre J., On interpolation of L_p spaces with weight function, Acta Scient. Math. Szeged, **28**, 1—2 (1967), 61—69.
325. Peetre J., On interpolation functions. II. Acta Scient. Math. Szeged, **29** (1968), 91—92; III. Acta Scient. Math. Szeged, **30**, 3—4 (1969), 235—239.

326. Peetre J., ε-entropie, ε-capacite et espaces d'interpolation, Ricerche Mat. **17** (1968), 216—220.
327. Peetre J., Sur la transformation de Fourier des fonctions a valeurs vectorielles, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **42** (1969), 15—26.
328. Peetre J., Exact interpolation theorems for Lipschitz continuous functions, Ricerche Mat. **18** (1969), 1—21.
329. Peetre J., On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory, Proc. Conf. Constr. Theory Funct. (Budapest, 1969), Akademiai Kiado Budapest 1971.
330. Peetre J., Approximation of linear operators. Proc. Int. Conf. Constr. Funct. Theory, Varna, 1970, Publ. House Bulg. Acad. Sci, Sofia, 1972, 245—263.
331. Peetre J., Interpolation functions and Banach couples, Actes, Cengrés, intern. Math. 1970, 2 (1971), 373—378.
332. Peetre J., Interpolationsräume. Ellipt. Differentialgleichungen I. Schriftenreihe Inst. Math. Akad. Wiss. Berlin, Heft 7, Akademie Verl. Berlin, 1970, 93—101.
333. Peetre J., Zur Interpolation von Operatorenraümen, Archiv Math. **21**, 6 (1970), 601—608.
334. Peetre J., Non-commutative interpolation, Le Matematiche **25**, 2 (1970), 1—15.
335. Peetre J., Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces, Mathematica **12** (35), 2 (1970), 325—334.
336. Peetre J., A new approach in interpolation spaces, Studia Math. 34, 1 (1970), 23—42.
337. Peetre J. Concave majorants of positive functions, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **21**, 3—4 (1970), 327—333.
338. Peetre J., Sur l'utilisation des suites inconditionellement sommables dans la theorie des espaces d'interpolation, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **46** (1971), 173—190.
339. Peetre J., Banach couples, I. Elementary theory. Technical repert, Lund, 1971.
340. Peetre J., Sparr G., Interpolation of normed Abelian groups. Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 4 **92** (1972), 217—262.
341. Peetre J., Sparr G., Interpolation and Non-Commutative Integration, Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 4 **104** (1975), 187—207.
342. Peetre J., Thomee V., On the rate of convergence for discrete initial-value problems, Math. Scand. **21** (1967), 159—176.
343. Persson A., Compact linear mappings between interpolation spaces, Arkiv Mat. **5**, 3 (1964), 215—219.
344. Pietsch A., Gegenbeispiele zur interpolationstheorie der nuklearen und absolutsummierenden Operatoren, Archiv Math. **20**, 1 (1969), 65—71.
345. Pietsch A., Interpolationsfunktoren, Folgenideale und operatorenideale, Czechosl. Math. J. **21**, 4 (1971), 644—652.
346. Pietsch A., Triebel H., Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen operatoren, Studia Math. **31**, 1 (1968), 95—109.
347. Riesz M., Sur les maxima des formes bilineares et sur les fonctionalles lineaires, Acta Math. **49** (1926), 465—497.

348. Riviere N. M. and Sagher J., Interpolation between L^∞ and H^1, the Real Method, J. Funct. An. **14**, 4 (1973), 401—409.
349. Rodin V. A. and Semyonov E. M., Rademacher series in simmetric spaces, Analysis Mathematica **1**, 4 (1975), 207—222.
350. Ryff J. V., Orbits of L_1 Functions Under Doubly Stochastic Transformations, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 92—100.
351. Ryff J. V., Measure preserving Transformation and rearrangement, J. Math. Analysis and Appl. **31**, 2 (1970), 449—458.
352. Sagher Y., Some Remarks on Interpolation of Operators and Fourier Coefficients, Studia Math. **44**, 3 (1972), 239—252.
353. Sagher Y., An application of interpolation theory to Fourier series, Studia Math. **41**, 2 (1972), 169—181.
354. Sagher Y., On analytic families of operators, Israel J. Math., sec. F. **7** (1969), 350—356.
355. Sagher Y., Norm inequalities on Fourier coefficients and Interpolation theory, Linear Operators and Approximation II. Proc. Conf. Oberwolfach Math. Res. Inst., Black Forest, 1974.
356. Schechter M., On L^p Estimates and Regularity, I. Amer. J. Math. **85**, 1 (1963), 1—13; II. Math. Scand. **13**, 1 (1963), 47—69. III. Ric. Mat. **13**, 1 (1964), 1—15.
357. Schechter M., Interpolation spaces by complex methods, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 3 (1966), 526—533.
358. Schechter M., Complex interpolation, Compositio Math. **18** (1967), 117—147.
359. Schreisser H., Triebel H., Anisotropic spaces I. Math. Nachr. **282** (1975).
360. Seeley R., Interpolation in L^p with boundary conditions, Studia Math. **44**, 1 (1972), 47—60.
361. Segal I. E., A non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math. **57**, 3 (1953), 401—457.
362. Sharpley R., Spaces $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation, J. Funct. Anal. **11**, 4 (1972), 479—513.
363. Sharpley R., Interpolation theorems for compact operators, Indiana Univ. Math. J. **22**, 10 (1973), 965—984.
364. Sharpley R., Interpolation of operators for Λ-spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **80**, 2 (1974), 259—261.
365. Sharpley R., Characterization of intermediate spaces of spaces, Linear Operators and Approximation II. Proc. Conf. Oberwolfach Math. Res. Inst., Black Forest, 1974.
366. Sharpley R., Interpolation of n pairs and counter-examples employing indices, J. Approx. Theory **13**, 2 (1975), 117—127.
367. Shimogaki T., Hardy — Littwood majorants in function spaces, J. Math. Soc. Japan **17**, 4 (1965), 365—375.
368. Shimogaki T., On the complete continuity of operators in an interpolation theorem, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **20** (1968) 109—114.
369. Shimogaki T., An interpolation theorem on Banach function spaces, Studia Math. **31**, 3 (1968), 233—240.
370. Shimogaki T., A note on norms of compession operators on function spaces, Proc. Japan Akad. **46** (1970), 239—242.
371. Spanne S., Sur l'interpolation entre les espaces $L_k^{p\Phi}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20**, 3 (1966), 625—648.

372. Sparr G., Interpolation des espaces L^r_ω, C. R. Acad. Sci. Paris, A 278 (1974).
373. Sparr G.. Interpolation of several Banach spaces, Ann. Mat. Pura Appl. Ser, **99**, 2 (1974), 247—316.
374. Stampacchia G. $L^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation, Comm. Pure Appl. Math. **17**, 3 (1964), 293—306.
375. Stampacchia G., The spaces $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19**, 3 (1965), 443—462.
376. Stafney J. D. Analitic interpolation of certain multiplier spaces, Pacific J. Math. **32**, 1 (1970), 241—248.
377. Stafney J. O., The spectrum of an operator on an interpolation space, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), 333—349.
378. Stein E. M., Interpolation of Linear operators, Trans Amer. Math. Soc. 83, 2 (1956), 482—492.
379. Stein E. M., Interpolation in polynomial classes and Markoff's Inequality Duke Math. J. **24**, 3 (1957), 467—476.
380. Stein E. M., On limits of sequences of operators, Ann. Math. 74, 1 (1961), 140—170.
381. Stein E. M. and Weiss G., Interpolation of operators with change of measure, Trans. Amer. Math. Soc. **87**, 1 (1958), 159—172.
382. Stein E. M. and Weiss G., An Extension of a Theorem of Marzinkiewicz and some of its Applications, J. Math. Mech. **8**, 2 (1959).
383. Stein E. M. and Weiss G., On the interpolation of analytics families of operators acting on H^p spaces, Tôhoku Math. J. ser. 2 **9**, 3 (1957), 318—339.
384. Taibleson M. H., Lipschitz classes of functions and distributions in E_n, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 4 (1963), 487—493.
385. Taibleson M. H., On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space; I. Principal properties; II. Translation invariant operators, duality and interpolation; III. Smoothness and integrability of Fourier transforms, smoothness of convolution kernels, J. Math. Mech. **13**, 3 (1964), 407—479; **14**, 5 (1965), 821—839; **15**, 6 (1966), 973—981.
386. Tartar L., Théorème d'interpolation non lineare et' applications, C. R. Acad. Sci. Paris **A 270** (1970), 1729—1731.
387. Thorin G. O., An extension of convexity theorem due to M. Riesz, Comm. Sem. Math. Univ. Lund **4** (1939), 1—5.
388. Thorin G. O., Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications, Comm. Sem. Math. Univ. Lund **9** (1948), 1—58.
389. Triebel H., Zur Interpolation von Normidealen in Hilberträumen, Wiss. Zeitschr. Univ. Jena, Math. naturwiss. Reihe **18** (1969), 263—267.
390. Triebel H., Singuläre elliptische differentialgleichungen und Interpolationssätze für Sobolev—Slobodeckij—Räume mit Gewichtfunktionen, Arch. Rat. Mech. Analysis **32**, **2** (1969).
391. Triebel H., Über die verteilung der Approximationszahlen von Integral-operatoren in Sobolev — Besov — Räumen, J. Math. Mech. **19**, **9** (1970), 783—796.
392. Triebel H., **Singuläre elliptische** Differentialgleichungen und **Interpolationssatze für Besov — Räume mit Gewichtsfunktionen.**

Ellipt. Differentialgleichungen. I. Schriftenreihe Inst. Math. Aka Wiss. Berlin, H. 7, Akad.-Verl., Berlin, 1970, 159—164.
393. Triebel H., Interpolationseigenschaften von Entropie- u Durch-messer — idealen Kompakter operatoren, Studia Math. 34, (1970), 89—107.
394. Triebel H., Eine Bemerkung zur Interpolation von Bana Räumen, Beiträge zur Analysis 2, 1 (1971), 51—55.
395. Triebel H., Spaces of distributions of Besov type on Euclide n-space. Duality, Interpolation. Arkiv für Math. 11, 1 (1973 13—64.
396. Triebel H., Interpolation theory for function spaces of Besc type defined in domains. I. Math. Nachr. 57, 1—6 (1973) 51—8 II. Math. Nachr. 58 (1973), 63—86.
397. Triebel H., Über die Existenz von Schauderbasen in Sobolev-Besov — Räumen. Isomorphiebeziehungen, Studia Math. 46, (1973), 83—100.
398. Umegaki H., Conditional expectation in an operator algebr Tohoku Math. J., 6, 2—3 (1954), 177—181.
399. Weiss G., An interpolation theorem for sublinear operators o H_p spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1 (1957) 92—99.
400. Westphal U., Ein Kalkül fur gebrochene Potenzen infinites maler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, I Halbgruppenerzeuger, Compositio Math. 22, 1 (1970), 67—103.
401. Williams V., Generalized interpolation spaces, Trans. Amer Math. Soc. 156 (1971), 309—334.
402. Yoshikawa A., Remarks on the theory of interpolation spaces J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 15, 2 (1968), 209—251.
403. Yoshikawa A., Sur la theorie d'espaces d'interpolation — le espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach, J. Fac. Sci Univ. Tokyo 16, 3 (1970), 407—468.
404. Yoshikawa A., Abstract formulation of Sobolev type imbed ding theorems. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 17, 3 (1970), 543—558
405. Yoshikawa A., An operator theoretical remark on the Hardy—Littlewood—Sobolev inequality, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 17, (1971), 335—362.
406. Yoshikawa A., Fractional powers of operators, interpolation theory and imbedding theorems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 18, (1971), 335—362.
407. Yoshinaga K., On a generalization of the interpolation met hod, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. 17, 1 (1970), 1—23.
408. Young R. M., Interpolation in a classical Hilbert space of entire functions, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974), 97—114.
409. Zippin M., Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant function spaces, J. Funct. An. 7, 2 (1971) 267—284.
410. Zygmund A., On a Theorem of Marcinkiewicz Concerning Interpolation of Operations, J. Math. Pures Appl. 35, 2 (1956), 223—248.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ