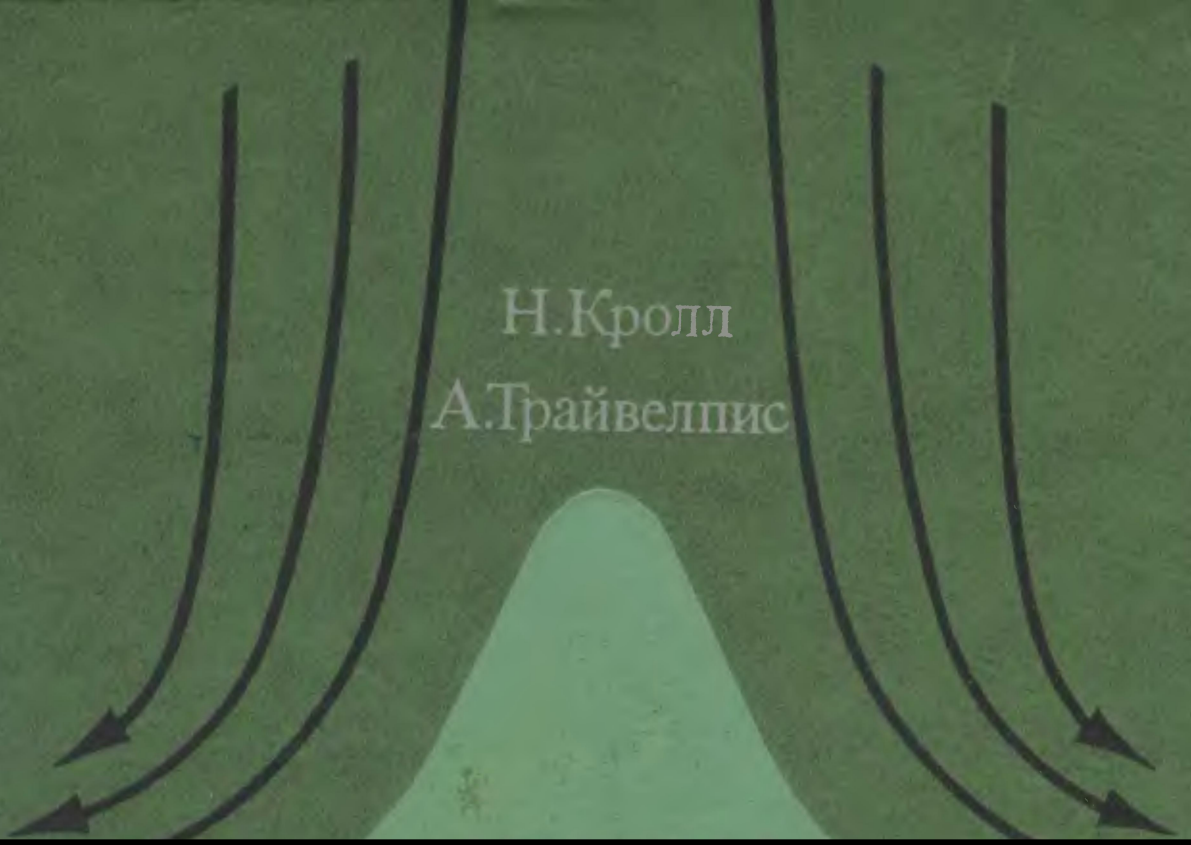


Н. Кролл
А. Трайвелпис

И ПЛАЗМЫ

Н. Кролл
А. Трайвелпис



PRINCIPLES OF PLASMA PHYSICS

NICHOLAS A. KRALL

Professor of Physics
University of Maryland

ALVIN W. TRIVELPIECE

Professor of Physics
University of Maryland

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

New York St. Louis San Francisco Düsseldorf Johannesburg Kuala Lumpur London Mexico
Montreal New Delhi Panama Rio de Janeiro Singapore
Sydney Toronto

1973

Н.Кролл
А.Трайвелпис

ОСНОВЫ
ФИЗИКИ
ПЛАЗМЫ

Перевод с английского
кандидатов физ.-мат. наук
Л. А. БОЛЬШОВА и Ю. А. ДРЕЙЗИНА

Под редакцией
доктора физ.-мат. наук, профессора
А. М. ДЫХНЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва

1975

Книга известных американских специалистов Н. Кролла и А. Трайвел-писа представляет собой учебник по физике плазмы. Она характеризуется широким охватом материала, систематичностью изложения и разумным сочетанием теоретических представлений и экспериментальных данных, хотя основное внимание уделяется теории. Книга снабжена большим количеством задач, призванных помочь лучшему усвоению содержания. Для чтения учебника достаточно знаний по физике (механике, статистической физике и теории поля) и математике в объеме первых трех курсов физических вузов.

Книга предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей. Она полезна также широкому кругу специалистов по физике плазмы и смежным областям.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Повышенный интерес, который проявляют ученые последнюю четверть века к физике плазмы, обусловлен главным образом исследованиями космоса и перспективой получения управляемых термоядерных реакций. Среди других приложений следует отметить плазменные ускорители и генераторы, газоразрядные приборы, плазменную электронику, в том числе с использованием плазменных эффектов в твердых телах и т. п. Уже из этого перечисления видно, что плазма, которая оказывается в поле зрения исследователей, обладает огромным разнообразием численных значений параметров, в некоторых случаях различающихся на много порядков. Естественно, что в таких условиях на передний план выступают совершенно различные явления. Глубокое их изучение приводит к большому накоплению информации и к увеличению специализации исследователей. В результате такой специализации ученые, работающие в разных областях физики плазмы, начинают с трудом понимать друг друга. Еще большие трудности возникают перед новичком, который намерен изучить физику плазмы и активно работать в одной из ее областей. В такой ситуации, на наш взгляд, разумно построить обучение по двухступенчатому принципу. Первая ступень содержит основы физики плазмы. В нее включаются устоявшиеся представления и результаты, носящие общий характер. Она должна обеспечить возможность углубленного изучения избранной узкой области (второй ступени), а также свободное чтение любой литературы по физике плазмы.

Если по второй ступени обучения имеется обширная литература — учебники, монографии, обзоры, журнальные статьи, то в общих курсах ощущается явный дефицит. Это утверждение относится как к отечественной, так и к переводной литературе. В таких известных и очень удачных книгах, как книги Л. Спитцера «Физика полностью ионизованного газа», изд-во «Мир», 1965, Д. А. Франк-Каменецкого «Лекции по физике плазмы», Атомиздат, 1962 и К. Лонгмайра «Физика плазмы», Атомиздат, 1966, ввиду их краткости опущен ряд важных результатов, носящих общий характер, большинство же других книг являются узкоспециальными.

Решение трудной задачи — написания достаточно полного, но не перегруженного деталями введения в физику плазмы — до некоторой степени удалось авторам книги, русский перевод которой предлагается читателю.

В учебнике Кролла и Трайвелписа собраны результаты, носящие фундаментальный характер и представляющие интерес для различных областей физики плазмы. В то же время для подготовки узкого специалиста, например, по физике ионосферы или термоядерным исследованиям этого учебника недостаточно. Изложение в книге ведется живо и физически наглядно. Наряду

с теорией излагаются наиболее важные экспериментальные результаты. В понимании отдельных вопросов существенно помогает иллюстративное описание ряда установок для получения и исследования плазмы, а также некоторых экспериментальных методов. Книга хорошо иллюстрирована. Авторы снабдили ее значительным количеством задач. Первоначально было задумано привести решения этих задач в русском переводе. Однако от этого замысла пришлось отказаться в связи с тем, что большинство задач, к сожалению, носит все же характер технических упражнений и поэтому не нуждается в физических разъяснениях.

Первая глава призвана заполнить терминологический пробел у начинающего изучать литературу по физике плазмы. Нужно заметить, что в книге широко используется (не всегда оправданно) научный жаргон. Так, например, для плазмы, описываемой в приближении бесстолкновительного кинетического уравнения Власова, используется термин «власовская жидкость». Мы старались освободиться в переводе от жаргонных выражений, тем более, что в литературе на русском языке распространены другие жаргонные выражения, с которыми мы также не решились знакомить читателя. Недостаточно полно, по нашему мнению, представлены в книге такие разделы, как частично ионизованная плазма, плазма твердых тел.

При написании книги авторы стремились не к лаконизму, а к подробному разбору принципиальных вопросов, что иногда приводило к повторам, не всегда оправданным. В отдельных случаях мы считали целесообразным опустить их. В частности, это относится к изложению термодинамического подхода в проблеме устойчивости плазмы.

Книга написана известными специалистами по физике плазмы, принимавшими непосредственное участие в разработке многих из изложенных в ней вопросов. Надеемся, что она принесет большую пользу не только студентам и аспирантам, специализирующимся по физике плазмы, преподавателям физики плазмы, но и будет небезынтересна для специалистов, работающих в этой области.

Гл. 1—6 переведены Л. А. Большовым, гл. 7—11, предисловие и приложения — Ю. А. Дрейзиным.

А. М. Дыгне

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Этот учебник был написан для аспирантов Мэрилендского университета, изучающих физику и астрономию, и содержит последовательное изложение двухсеместрового курса физики плазмы. Курс рассчитан на аспирантов второго года обучения, прослушавших на первом году аспирантуры курс лекций по классической и статистической механике, электродинамике и математическим методам. Книга не предполагает у читателя знакомства с основами физики плазмы и может служить введением в эту науку. Хотя мы предназначаем данный учебник для аспирантов, его можно также использовать с соответствующим отбором материала в лекциях для студентов старших курсов.

Изложение основного материала мы начинаем с точного статистического описания системы многих тел, из которого выводятся затем различные приближенные способы рассмотрения свойств плазмы. Прежде всего мы даем самое упрощенное описание плазмы с помощью гидродинамической, или макроскопической, теории, которая позволяет анализировать широкий круг плазменных явлений и решать задачи о равновесии плазмы, волнах и неустойчивостях. Как правило, в данном курсе лекций изучение гидродинамических свойств плазмы и явлений переноса (гл. 6) занимает первый семестр.

Далее в книге мы приводим менее упрощенную теорию плазмы, основанную на уравнении Власова и называемую кинетической, или микроскопической, теорией. Она оперирует с непрерывной функцией распределения частиц по координатам и скоростям. В рамках этой теории мы снова рассматриваем вопросы равновесия плазмы, распространения в ней волн и возникновения неустойчивостей, а также изучаем нелинейное взаимодействие волн и частиц. На основе уравнений Власова и Максвелла выявляются свойства, зависящие от деталей функции распределения по скоростям, такие, например, как затухание Ландау, кинетические неустойчивости, диффузия в пространстве скоростей и т. д. Результаты кинетического и более простого гидродинамического (рассмотренного в предыдущих главах) подходов сравниваются между собой.

Корреляции, флуктуации и излучение плазмы — явления, которые обусловлены взаимодействием отдельных частиц, не могут быть изучены ни в рамках гидродинамической, ни в рамках основанной на уравнении Власова кинетической теории. Для их изучения применяют метод пробных частиц. Другие дискретные свойства плазмы, для которых существенно взаимодействие отдельных частиц, могут быть получены с помощью приближения более высокого порядка к точным статистическим уравнениям. Эти методы приводят

к уравнениям Фоккера — Планка или Ленарда — Балеску. Используя эти уравнения, можно вычислить коэффициенты переноса плазмы.

Поскольку мы стремились к более полному рассмотрению, то в приложении привели теорию движения отдельных заряженных частиц в постоянных и переменных электрическом и магнитном полях. Тем не менее нам не удалось найти достаточно много места в данном учебнике, чтобы обсудить довольно простой и хорошо изложенный в легкодоступной литературе материал.

Особенностью книги является обширная гл. 1, в которой читатель обучается необходимому словарю-минимуму. Мы обнаружили, что незнание такого словаря сильно мешает студенту, начинающему изучать физику плазмы. Большинство наших студентов достаточно подготовлены по математике и классической физике, но не знакомы с понятиями и терминами физики плазмы, а это порождает искусственные трудности.

Первая глава представляет собой краткий вводный курс (три или четыре лекции), в котором даны необходимые понятия и терминология физики плазмы. Ознакомление с ней полезно каждому, кто желает иметь качественное представление о физике плазмы.

Другая особенность настоящей книги состоит в том, что мы поместили в ней главу, посвященную равновесной статистической механике плазмы (гл. 2). Она призвана дать читателю правильное представление о плазме как статистической системе и о соотношении между физикой плазмы и общей статистической теорией. В этой главе наряду с вычислением термодинамических свойств равновесной плазмы закладывается основа для рассмотрения многих практически важных явлений, свойственных неравновесной плазме.

Ссылки на литературу, приводимые в тексте, даны в основном на те книги или обзорные статьи, которые мы считали наиболее полезными для студентов. По нашему мнению, при изучении физики не нужно придерживаться исторической последовательности, и исторические аспекты играют второстепенную роль.

Успехи последних лет в использовании вычислительных машин для моделирования плазменных процессов позволили лучше разобраться в этих процессах. В книге приведен ряд данных, полученных при таком моделировании, которые позволяют лучше понять свойства плазмы или существенно дополнить отдельные теоретические результаты.

В каждой главе приведено много различных по трудности задач. В одних требуется проделать обычные алгебраические выкладки, чтобы прийти к хорошо известным результатам, в других обсуждаются нетривиальные вопросы, ответ на которые поможет студентам, готовящимся к исследовательской работе по физике плазмы, лучше почувствовать тонкости этой многообразной и захватывающей науки.

В книге использована гауссова система единиц СГС, широко распространенная в научной литературе по физике плазмы. В приложении III мы привели таблицу для перевода из гауссовой системы единиц СГС в систему СИ таких величин, как сопротивление, емкость, напряженность электрического

поля и т. д. Кроме того, в этом приложении помещен список наиболее часто употребляемых в учебнике обозначений (таких, как плазменная и циклотронная частоты и пр.).

В создание такой большой книги, как эта, естественно, внесли свой вклад многие люди.

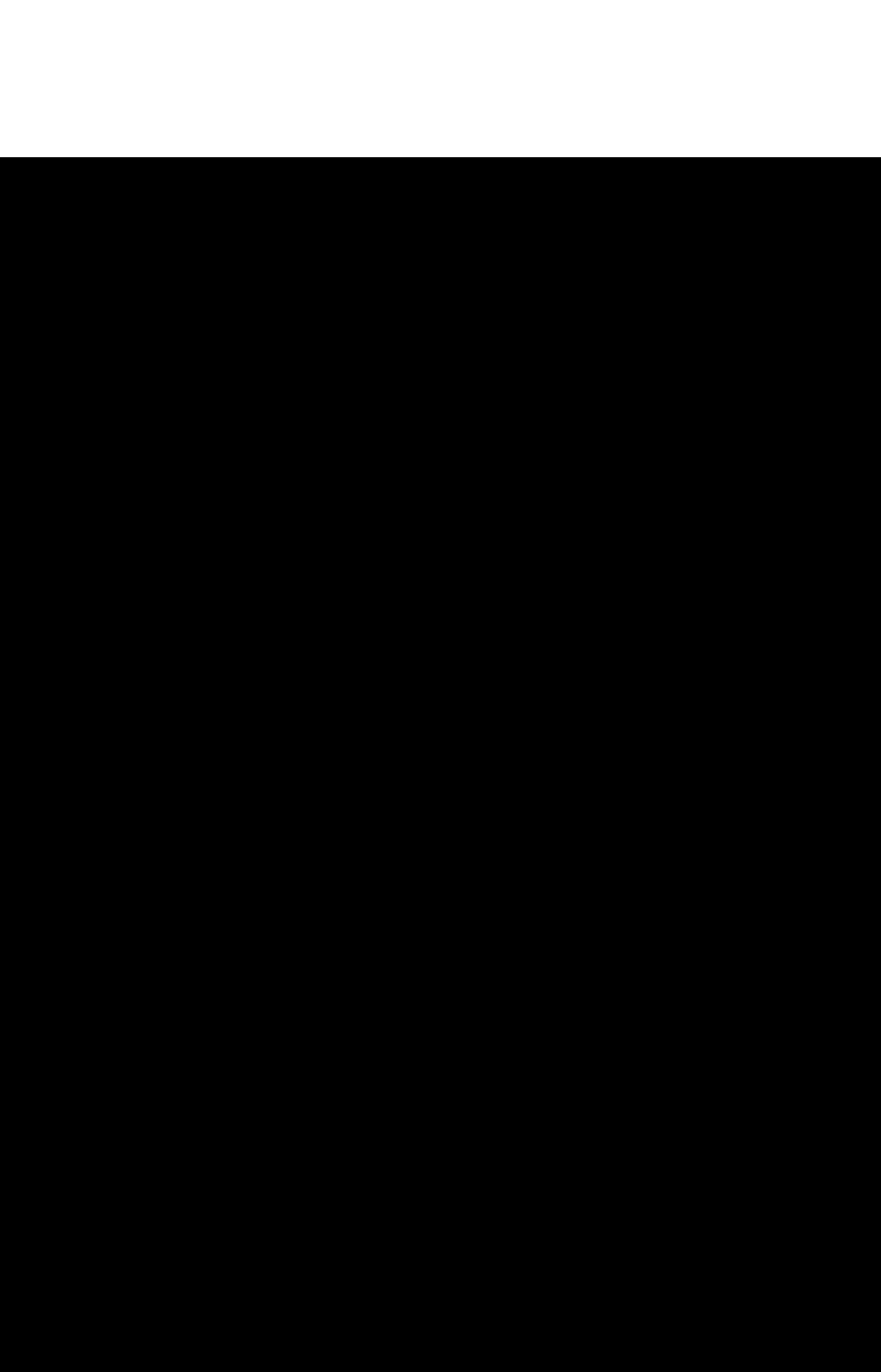
Мы благодарим наших друзей и коллег по физике плазмы, с которыми вместе работали и изучали этот предмет. Мы признательны тем студентам, которые слушали курс физики плазмы в Мэрилендском университете в то время, когда писалась настоящая книга. Их добросовестная помощь и советы относительно структуры курса лекций и учебника были для нас весьма ценны. Особенно благодарим Теда Нортропа, Дерека Тидмана и Аллана Кауфмана за предложения и советы о методах преподавания физики плазмы аспирантам. Их опыт преподавания физики плазмы пошел нам на пользу. Мы высоко ценим советы и ободряющую поддержку наших коллег по Мэрилендскому университету, в особенности Ганса Грима, Рона Девидсона и Боба Пекачека. Выражаем благодарность нашему декану Говарду Ластеру. Благодаря его поддержке мы смогли сконцентрировать наши усилия на преподавании и отработке курса лекций по физике плазмы, на основе которого написана данная книга.

Авторы признательны лицам, прочитавшим отдельные части рукописи, Р. Девидсону, А. де Сильва, С. Хамасаки, Дж. Хею, У. Джонсу, К. Капетанакос, Х. Клейну, П. Ливер, М. Шварцу, Дон Сперо, Д. Тидману и М. Залес-Капони.

Особой благодарности заслуживают миссис Мэри Энн Ферг и миссис Клара Родригес, напечатавшие рукопись, и миссис Барбара Горнади, составившая именную и предметный указатели.

Мы благодарны нашим женам Терри Кролл и Шерли Трайвелпис за проявленные ими понимание и терпение в период написания этой книги.

*Николас А. Кролл
Алвин У. Трайвелпис*



ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ

В физике плазмы изучается поведение достаточно большого коллектива заряженных частиц, статистические свойства которого определяются дальнедействующими кулоновскими силами, но плотность которого настолько мала, что сила взаимодействия с соседними частицами много меньше кулоновского взаимодействия с большим числом далеких частиц. Иными словами, рассматривается ионизованный газ малой плотности. Термин *плазма* для коллектива заряженных частиц был впервые употреблен Тонксом и Ленгмюром в 1929 г. [1], изучавшими колебания в электрических разрядах. Однако наиболее характерное свойство плазмы — существование коллективных движений, связанных с дальнедействующим характером кулоновского взаимодействия, — было известно еще раньше и, по-видимому, впервые было описано Рэлеем в 1906 г. [2] при изучении электронных колебаний в томсоновской модели атома.

Нередко плазму называют *четвертым состоянием вещества*. Это понятие ввел Крукс в 1879 г. [3] для описания ионизованной среды газового разряда. Происхождение его видно из следующих рассуждений. Твердое вещество при нагревании переходит в новое состояние, обычно в жидкое. В свою очередь жидкость при нагревании превращается в газ. Дальнейший нагрев ведет к ионизации атомов газа. При температуре выше 100 000 К вещество сильно ионизовано. Это ионизованное состояние вещества и называется *четвертым состоянием*¹⁾. Плазма может существовать при температуре и ниже 100 000 К, если происходит ионизация газа и если в силу достаточно малой плотности газа рекомбинация замедлена.

Хотя 99,9% видимой Вселенной находятся в плазменном состоянии, на Земле из-за низкой температуры и высокой плотности земного вещества и нижних слоев атмосферы естественной плазмы почти нет. Поэтому для изучения свойств плазмы мы должны создавать ее в экспериментальных условиях. Однако в верхних слоях атмосферы (в ионосфере) существует плазма, возникшая за счет фотоионизации разреженной атмосферы. Еще выше — очень разреженная плазма, захваченная магнитным полем Земли. Плазма движется к Земле от Солнца (солнечный ветер), а также заполняет многие области межзвездного пространства, образуя среду, через которую мы наблюдаем космос.

Физика плазмы опирается в основном на такие хорошо изученные разделы физики, как классическая механика, электродинамика, нерелятивистская статистическая механика. Специфика физики плазмы основана на том, что многие свойства плазмы определяются дальнедействующим кулоновским взаимодействием и поэтому являются коллективными свойствами, связанными с одновременным взаимодействием многих частиц.

¹⁾ Когда говорят о состоянии вещества, обычно предполагают, что оно может равновесно сосуществовать с другими состояниями того же вещества. В этом смысле плазма фактически не является новым состоянием. — *Прим. ред.*

В простейшем случае плазма состоит из протонов и электронов, плотность которых настолько мала, что парными (короткодействующими) взаимодействиями можно пренебречь. Изучение свойств такой среды — одна из задач теории многих тел. В равновесном состоянии система электронов или протонов может быть описана методами равновесной статистической механики с помощью ансамбля Гиббса. Однако большая часть интересных свойств плазмы проявляется в неравновесных ситуациях.

В США интерес к физике плазмы возродился в 1952 г. в связи с секретной тогда программой, направленной на разработку управляемого термоядерного реактора, известной под названием «Проект Шервуд» [4]. Примерно в это же время были начаты аналогичные работы в Англии, во Франции и в СССР. С тех пор эти работы были основательно расширены, и сейчас многие страны ведут обширные исследования в данной области. Хотя разработка управляемого термоядерного реактора представляет собой одно из наиболее заманчивых практических применений физики плазмы, это только одна из многих областей, в которых физика плазмы играет существенную роль. Физика плазмы сыграла большую роль в развитии ряда разделов современной физики, и знание ее весьма важно при изучении многих проблем астрофизики, атомной и молекулярной физики, химии, биологии, физики атмосферы и магнитогидродинамических методов генерации электроэнергии.

В физике плазмы приходится иметь дело с большим числом специальных понятий и терминов. В настоящей главе мы дадим элементарный обзор основных понятий физики плазмы, определим многие из используемых терминов и приведем некоторые методы получения плазмы в лаборатории и измерения ее параметров (диагностики).

А. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

§ 1. РАВНОВЕСИЕ И КВАЗИРАВНОВЕСИЕ

Термин *равновесие* часто не вполне точно используется в физике плазмы для описания квазистационарного состояния плазмы, которое было бы вполне стационарным в отсутствие столкновений частиц друг с другом. Обычно изучается поведение плазмы при малых отклонениях от такого *квазиравновесного* состояния.

Термодинамическое равновесие означает, что как ионы, так и электроны описываются максвелловским распределением, характеризуемым одной и той же температурой. При этом среда находится в равновесии со своим окружением и скорости излучения и поглощения энергии одинаковы. Спектр излучения при этом соответствует излучению *черного тела*.

Существует много интересных теоретических и экспериментальных ситуаций, когда ионы и электроны в плазме имеют разные температуры и не находятся в термодинамическом равновесии с окружающим их веществом. Термин *квазиравновесие* используется для описания состояний, которые изменяются во времени только вследствие парных столкновений.

§ 2. ДЕБАЕВСКИЙ РАДИУС ЭКРАНИРОВАНИЯ

Электростатический потенциал отдельной частицы с зарядом q есть

$$\varphi = \frac{q}{r}. \quad (1.2.1)$$

В плазме электроны в некоторой окрестности иона притягиваются к нему и экранируют его электростатическое поле. Точно так же «неподвижный» электрон отталкивает другие электроны и притягивает ионы. Благодаря это-

му эффекту поле вокруг заряженной частицы изменяется. Поле заряда, покоящегося в плазме, описывается потенциалом

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (1.2.2)$$

где λ_D — дебаевский радиус экранирования, впервые введенный в теории электролитов Дебая — Хюккеля. Для электрон-протонной плазмы

$$\lambda_D = \left(\frac{\kappa T}{8\pi n e^2}\right)^{1/2} = 4,9 \left(\frac{T}{n}\right)^{1/2}; \quad (1.2.3)$$

здесь n — концентрация электронов (или ионов), выраженная в см^{-3} ; T — температура в кельвинах; κ — постоянная Больцмана ($\kappa = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К). Дебаевский радиус определяет сферу влияния выделенного пробного заряда в плазме и в общем случае зависит от скорости движения пробного заряда относительно плазмы.

§ 3. ПАРАМЕТР НЕИДЕАЛЬНОСТИ ПЛАЗМЫ

Параметр неидеальности плазмы ¹⁾ характеризует число частиц, находящихся в дебаевской сфере, и определяется следующим образом:

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3}. \quad (1.3.1)$$

Для дебаевского экранирования (и возможности статистического описания плазмы) число частиц в дебаевской сфере должно быть большим; это означает, что $g \ll 1$. На этом неравенстве основано так называемое *плазменное приближение*. Параметр неидеальности определяет также отношение средней энергии взаимодействия между частицами плазмы к их средней кинетической энергии. В идеальном газе энергия взаимодействия между частицами равна нулю. В большинстве случаев параметр неидеальности мал и плазму можно рассматривать как идеальный газ заряженных частиц, иными словами, как газ, в котором могут существовать электрическое поле и пространственный заряд, но в котором никакие две *отдельные* частицы не взаимодействуют. Чтобы величина $n\lambda_D^3$ была большой, концентрация электронов должна быть *низкой*, поскольку

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \sim \frac{n^{1/2}}{T^{3/2}}.$$

Так как частота столкновений уменьшается с понижением концентрации n и ростом температуры T , условие $g \rightarrow 0$ соответствует исчезновению столкновений.

Задача 1.3.1. Покажите, что если отношение средней кинетической энергии к средней энергии взаимодействия между частицами велико, т. е.

$$\frac{\langle \text{Кинетическая энергия} \rangle}{\langle \text{Потенциальная энергия} \rangle} \gg 1,$$

то дебаевское число $N_D = (4\pi/3) n\lambda_D^3 \gg 1$.

Параметр неидеальности g представляет собой один из наиболее важных безразмерных параметров плазмы; он показывает, в какой степени плазменные, или коллективные, эффекты преобладают над одночастичными эффектами.

¹⁾ В отечественной литературе по физике плазмы в качестве меры неидеальности обычно употребляется обратная величина — дебаевское число $N_D = (4\pi/3) n\lambda_D^3$, т. е. число частиц в дебаевской сфере. — *Прим. ред.*

Характерное различие в описании плазмы и нейтрального газа методами статистической механики состоит в том, что в плазме отклонение от идеальности (описываемое параметром g) мало, если одновременно взаимодействуют *много* частиц, поскольку объем области взаимодействия $\sim \lambda_D^3$; в нейтральном же газе размер области взаимодействия порядка атомного радиуса R и отклонение от идеальности (пропорциональное nR^3) мало, если одновременно взаимодействует *небольшое* число частиц. Плазма является почти идеальным газом, *несмотря* на большое число взаимодействующих частиц; причина этого, как видно из задачи 1.3.1, состоит в слабости взаимодействия отдельных частиц.

§ 4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Наиболее подробное описание плазмы дается набором изменяющихся во времени координат и скоростей всех частиц. Для реальной плазмы достичь такого уровня описания невозможно. Исключение составляют некоторые последние «эксперименты» с применением вычислительных машин, с помощью которых удастся проследить за положением и скоростью большого числа ионов и электронов. Поэтому обычно для описания плазмы пользуются функцией распределения f , представляющей собой число частиц в единичном объеме шестимерного фазового пространства. Из Н-теоремы Больцмана [5] следует, что под действием парных столкновений идеальный газ релаксирует к максвелловской функции распределения по скоростям

$$\bar{n}f(v) = \bar{n} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}; \quad (1.4.1)$$

здесь $\bar{n} = N/V$, где N — число частиц одного сорта (например, ионов или электронов) в системе, а V — объем системы. Хотя лабораторная плазма, вероятно, никогда в точности не достигает максвелловского распределения, она может быть близка к нему, и во многих случаях при теоретическом исследовании полезно считать, что плазма описывается максвелловским распределением по скоростям.

Поскольку в течение промежутков времени, меньших времени электрон-ионных столкновений, поведение электронов и ионов может сильно различаться, обычно необходимо определять для частиц каждого сорта α свою функцию распределения

$$\bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \begin{array}{l} \text{Число частиц сорта } \alpha \text{ в элементе} \\ \text{объема } d\mathbf{x} d\mathbf{v} \text{ с центром в точке } \mathbf{x}, \mathbf{v} \end{array}$$

с нормировкой

$$\int \bar{n}_\alpha f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = N_\alpha^- = \text{Полное число частиц сорта } \alpha \text{ в системе}$$

§ 5. ТЕМПЕРАТУРА И ДРУГИЕ МОМЕНТЫ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Плазма, подчиняющаяся максвелловскому распределению, характеризуется определенной температурой T :

$$\frac{3}{2} n k T = \frac{1}{2} \int \bar{n} m v^2 f d\mathbf{v} \quad (1.5.1)$$

Если даже лабораторная плазма не подчиняется точно максвелловскому распределению, ее функцию распределения приближенно считают максвелловской и температуру T определяют соотношением (1.5.1). Когда функция распределения сильно отличается от максвелловской, одной температуры недостаточно для описания системы. В этом случае, чтобы полностью описать

систему, необходимо либо точно определить саму функцию распределения, либо все ее моменты:

$$n_\alpha = \bar{n}_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} \quad (\text{плотность}), \quad (1.5.2)$$

$$\mathbf{V}_\alpha = \frac{\int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}}{\int f_\alpha d\mathbf{v}} \quad (\text{средняя скорость}), \quad (1.5.3)$$

$$\mathbf{P}_\alpha = \frac{n_\alpha m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) f_\alpha d\mathbf{v}}{\int f_\alpha d\mathbf{v}} \quad (\text{тензор давления}), \quad (1.5.4)$$

.....

Эти моменты связаны с соответствующими макроскопическими параметрами системы: плотностью, средней скоростью, давлением и т. д. Заметим, что для изотропной покоящейся системы тензор давления сводится к скаляру

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix},$$

где $p = n_\alpha k T_\alpha$.

§ 6. МАГНИТНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Часто плазма находится в магнитном поле, которое либо проникает в глубь нее, либо окружает снаружи. В статическом магнитном поле на поверхность, ограничивающую магнитный поток, действует давление $B^2/8\pi$ дин/см². Обычно плазма диамагнитна, поэтому она выталкивает приложенное к ее поверхности магнитное поле. Это означает, что магнитное давление $B^2/8\pi$ может уравновесить кинетическое давление плазмы $p = nkT$ на границе плазма — магнитное поле. При $B^2/8\pi > p$ плазму можно сжать до большей плотности и тем самым увеличить ее температуру.

В тех случаях, когда магнитное поле проникает в плазму, часто пользуются параметром β (*плазменная бета*), равным отношению локальных значений давления плазмы и магнитного поля:

$$\beta = \frac{n_i k T_i + n_e k T_e}{B^2/8\pi}. \quad (1.6.1)$$

(Не следует путать β с релятивистским фактором $\beta = v/c$.) В равновесном переходном слое на плоской границе плазма — магнитное поле условие постоянства давления имеет вид

$$\nabla \left(nkT + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (1.6.2)$$

Задача 1.6.1. Чему равно давление магнитного поля 100 кГс, выраженное в атмосферах? Какое поле требуется для удержания плазмы плотностью $n = 10^{12}$ см⁻³ при кинетической температуре 100 кэВ, если $\beta = 0,01$?

§ 7. ДРЕЙФ ЧАСТИЦ

Большинство свойств плазмы, как упоминалось выше, обусловлено коллективными эффектами. Однако некоторые свойства можно определить, рассматривая движение отдельной частицы в изменяющихся во времени и пространстве электрическом, магнитном и гравитационном полях. При отсутствии столкновений заряженная частица в однородном магнитном поле дви-

жется по спиральной траектории. В плоскости, перпендикулярной полю, частица вращается с циклотронной частотой $\omega_c = eB/mc$ по окружности радиуса $a_L = v_{\perp}/\omega_c$, который называется *ларморовским радиусом*¹⁾ или *гирорадиусом*. Движение вдоль магнитного поля остается неизменным. Циклотронная частота измеряется в рад/с. Например, для электронов

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} = 1,76 \cdot 10^7 B \text{ рад/с}, \quad (1.7.1)$$

где B измеряется в гауссах.

Задача 1.7.1. Найдите траекторию частицы с зарядом q и массой m , начинающей движение из состояния покоя в скрещенных электрическом и магнитном полях. Разложите движение частицы на циклотронное вращение и дрейф. Покажите, что скорость дрейфа равна $V_{DE} = cE/B$, а также что кинетическая энергия распределяется поровну между вращательным и дрейфовым движением.

Циклотронное вращение — это основной тип движения заряженной частицы в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Однако присутствие других полей приводит к искажению такого движения. Например, совместное действие постоянных электрического и магнитного полей вызывает $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф²⁾ заряженной частицы. Частица дрейфует в направлении, перпендикулярном \mathbf{E} и \mathbf{B} , со скоростью

$$\mathbf{V}_{DE} = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.7.2)$$

Дрейф не зависит от массы и заряда частицы и накладывается на циклотронное вращение. Часто скорость вращения оказывается большей по сравнению со скоростью дрейфа. При этом движение частицы хорошо описывается траекторией центра круговой орбиты (*ведущего центра*)³⁾, \mathbf{V}_{DE} — скорость ведущего центра. Скорость дрейфа в скрещенных магнитном и гравитационном полях равна

$$\mathbf{V}_{DG} = \frac{mc}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.7.3)$$

Другое, важное в физике плазмы дрейфовое движение возникает из-за неоднородности магнитного поля (градиентный дрейф). Градиентный дрейф также накладывается на циклотронное вращение. При малых градиентах ($\nabla B/B \ll 1/a_L$) дрейфовая скорость ведущего центра (перпендикулярная \mathbf{B} и ∇B) равна

$$\mathbf{V}_{D, \text{grad}} = \frac{w_{\perp} c}{qB^2} \nabla_{\perp} B, \quad (1.7.4)$$

где $w_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$ — кинетическая энергия движения в направлении, перпендикулярном \mathbf{B} . Более подробно теория движения частиц рассматривается в приложении I, где рассмотрены также центробежный дрейф, связанный с кривизной магнитных полей, и другие типы дрейфового движения⁴⁾.

¹⁾ Радиус вращения в согласии с обычной терминологией следовало бы называть циклотронным радиусом, однако в современной литературе по физике плазмы наиболее часто употребляется термин «ларморовский радиус».

²⁾ Этот дрейф называется также электрическим. — *Прим. ред.*

³⁾ Понятие ведущего центра для движения заряженной частицы впервые ввел Альфвен в 1940 г. в теории магнитных бурь и северных сияний. Основные свои идеи и результаты работы он изложил в книге [6]; в 1970 г. Альфвен получил Нобелевскую премию за свою пионерскую работу по физике плазмы.

⁴⁾ См. также работы советских авторов [44*, 45*]. — *Прим. ред.*

§ 8. ПЛАЗМЕННАЯ ЧАСТОТА

Из-за наличия дальнедействующих сил между частицами плазмы в некоторых условиях плазма ведет себя как система связанных осцилляторов. Характерная частота этих осцилляторов, плазменная частота ω_p , определяется формулой

$$\omega_p = 2\pi f_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2} \text{ рад/с,}$$

для электронов

$$f_p \approx 10^4 \sqrt{n} \text{ Гц;} \quad (1.8.1)$$

здесь n — число частиц в 1 см^3 , а m — масса электрона.

По плазменной частоте можно судить о плотности электронов в плазме, а также определить время, за которое электрон (ион), движущийся с тепловой скоростью, проходит расстояние, равное дебаевскому радиусу.

Если группу электронов в двухкомпонентной плазме сдвинуть из их равновесного положения x_0 , то на электроны будет действовать возвращающая сила. В момент, когда электроны проходят положение равновесия, кинетическая энергия электронов равна потенциальной энергии их начального смещения. Поэтому они будут двигаться дальше, пока их кинетическая энергия не перейдет в потенциальную. Частота такого простого гармонического движения равна ω_p , т. е. плазменной частоте. Этот вид движения называется *плазменными колебаниями*.

§ 9. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

В системе связанных осцилляторов с таким большим числом степеней свободы, как плазма, имеется много всевозможных типов колебаний; в плазме могут распространяться волнообразные возмущения, например, электрического поля $E = E_0 \exp [i(k \cdot x - \omega t)]$. Частота ω и волновое число k таких колебаний связаны дисперсионным уравнением, получаемым из уравнений движения плазмы. Для описания свойств плазмы необходимо знать дисперсионную кривую $\omega(k)$. Фазовая скорость волны равна $v_\phi = \omega/k$, а групповая скорость $v_{gr} = \partial\omega/\partial k$.

В плазме могут распространяться как линейные, так и нелинейные волны. К *линейным* относятся волны, которые описываются в приближении малой амплитуды. К *нелинейным* относятся ударные волны и другие возмущения большой амплитуды, не описываемые линейным приближением.

Ниже мы рассмотрим четыре вида линейных волн (ионно-звуковые, электромагнитные, дрейфовые и плазменные волны).

9.1. Ионно-звуковые волны

Звуковые волны в идеальном газе — это продольные волны без дисперсии, частота которых меньше частоты столкновений и которые распространяются со скоростью звука $V_s = (\gamma \kappa T / m)^{1/2}$. В плазме также могут распространяться низкочастотные акустические, или *ионно-звуковые*, волны. Возникающее в них из-за разделения зарядов поле согласует движение ионов и электронов. Скорость распространения таких волн

$$C_s = \left(\frac{Z\gamma_e \kappa T_e + \gamma_i \kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2}; \quad (1.9.1)$$

здесь γ_e и γ_i — обычное отношение удельных теплоемкостей ¹⁾, а Z — заря-

¹⁾ В рассматриваемом случае, когда столкновения несущественны, это отношение теплоемкостей соответствует одномерному движению и равно 3. — *Прим. ред.*

довое число ионов. В отличие от звука в обычном газе ионно-звуковые волны слабо затухают лишь тогда, когда их частота много больше частоты столкновений, а температура электронов значительно превышает температуру ионов. При выполнении указанных выше условий такие продольные волны распространяются как акустические. В этом волновом движении инерция определяется ионами, а возвращающая сила электронным давлением.

9.2. Электромагнитные волны

В диэлектрической среде однородные плоские электромагнитные волны распространяются с дисперсией, определяемой уравнением

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2}. \quad (1.9.2)$$

Диэлектрическая проницаемость холодной однородной и изотропной плазмы, состоящей из подвижных электронов и неподвижных ионов, на высоких частотах имеет вид

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.9.3)$$

Задача 1.9.1. Выведите выражение (1.9.3) для диэлектрической проницаемости плазмы, состоящей из холодных электронов и покоящихся ионов, путем вычисления поля, возникающего при смещении электронов.

Соответствующее дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в плазме запишется следующим образом:

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}. \quad (1.9.4)$$

Если частота волн ω меньше плазменной частоты ω_p , то волновой вектор чисто мнимый и волны суть неоднородные. Волны с частотами выше плазменной ($\omega > \omega_p$) распространяются в плазме; при очень высоких частотах свободные электроны плазмы оказывают лишь слабое влияние на электромагнитную волну. На распространение волн существенное влияние оказывают конечные размеры, постоянное магнитное поле или неоднородности плазмы.

9.3. Волны в замагниченной или неоднородной плазме

В плазме, находящейся в однородном постоянном магнитном поле, могут существовать многие другие волны. Например, при частотах ниже ионной циклотронной частоты в плазме распространяется медленная электромагнитная волна без дисперсии (магнитогидродинамическая волна), называемая *альфвеновской*, со скоростью

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_m}}, \quad (1.9.5)$$

где $\rho_m = nm_i$ — массовая плотность.

Кроме того, в неоднородной плазме распространяются дрейфовые волны, обусловленные дрейфом частиц и возникновением токов, связанных с градиентами плотности. Дополнительная степень свободы, возникающая благодаря градиенту плотности, способствует образованию нового типа волн,

распространяющихся с частотой

$$\omega \approx \frac{\kappa T}{m} \frac{1}{\omega_c} \frac{\nabla n_0}{n_0} k, \tag{1.9.6}$$

где T — температура.

9.4. Плазменные волны

Эти волны называются также *волнами пространственного заряда, электростатическими* или *ленгмюровскими волнами*. Они распространяются лишь в том случае, если имеется распределение электронов по скоростям или если электроны обладают средней скоростью в системе наблюдателя. Это не что иное, как описанные выше плазменные колебания с частотой ω_p , обусловленные начальным смещением зарядов. Закон дисперсии для этих волн с частотой $\omega = \omega_r + i\omega_i$ имеет вид

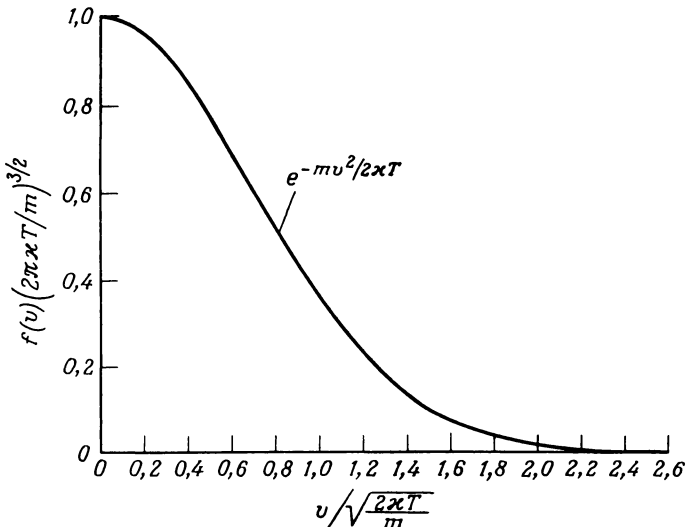
$$\omega_r^2 = \omega_p^2 + \frac{3\kappa T}{m} k^2, \tag{1.9.7}$$

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(k\lambda_{De})^3} \exp\left[-\frac{1}{2}(k\lambda_{De})^{-2} - \frac{3}{2}\right];$$

здесь $\lambda_{De} = (\kappa T_e / 4\pi n e^2)^{1/2}$. Таким образом, при конечной температуре в среде возникает дисперсия и поглощение. Дисперсия следует из первого уравнения (1.9.7). Второе уравнение указывает на наличие поглощения, исчезающего при $T \rightarrow 0$. Уравнения (1.9.7) применимы только в случае слабого поглощения, т. е. когда $\omega_i \ll \omega_r$.

§ 10. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ

Учет теплового разброса по скоростям в теории плазменных волн приводит к новому физическому явлению, с которым связано наличие мнимой частоты ω_i в (1.9.7). Это явление называется *затуханием Ландау*, или *бесстолкновительным затуханием*. Оно выражается в том, что возмущение в плазме затухает по мере распространения от точки возникновения, несмотря на отсутствие парных столкновений. Такое затухание становится понятным, если мы заметим, что при равновесном распределении электронов по скоростям (фиг. 1) при любой фазовой скорости волны ($v = \omega/k$) число электро-



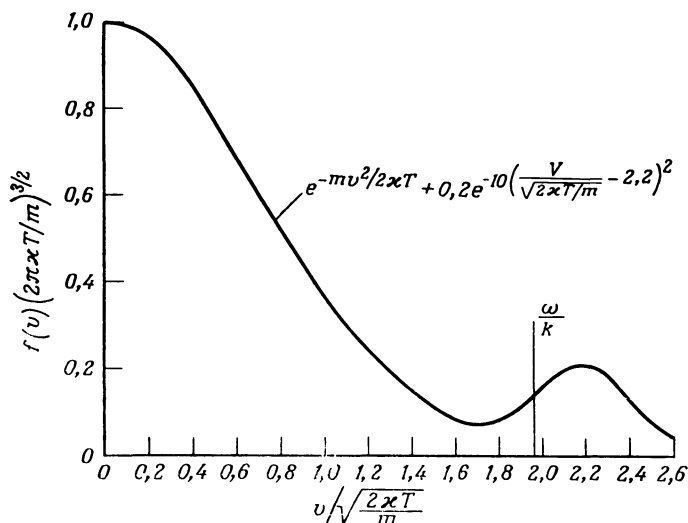
Фиг. 1. Функция распределения Максвелла — Больцмана $f(v)$ для изотропной плазмы.

нов плазмы, слегка отстающих от волны, больше числа электронов, немного опережающих волну. Электроны, опережающие волну, отдают ей энергию, в то время как электроны, отстающие от волны, отбирают у нее энергию. В плазме, функция распределения которой монотонно спадает со скоростью, всегда больше электронов, отбирающих энергию у волны, чем отдающих ей энергию. Следовательно, волна затухает.

§ 11. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ И УПРАВЛЯЕМЫЙ ТЕРМОЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ

То же самое рассуждение, которое использовалось для объяснения затухания Ландау, приводит к более удивительным заключениям в случае неравновесной функции распределения, такой, например, как показано на фиг. 2. Волна, распространяющаяся со скоростью $\omega/k = v_0$, «видит» большее число электронов, слегка обгоняющих ее, чем отстающих от нее. Следовательно, отбирая у быстрых электронов больше энергии, чем она отдаст медленным, волна должна усиливаться. Это нарастание ленгмюровских волн в плазме с немаквелловским распределением (фиг. 2) — один из примеров характерного для плазмы явления, называемого *неустойчивостью*. Неустойчивость представляет собой процесс нарастания со временем малых возмущений квазиравновесного состояния плазмы. Вообще говоря, в неустойчивости проявляется способность плазмы релаксировать благодаря коллективным процессам из не полностью равновесного состояния за время, которое много меньше времени между парными столкновениями. Практически же неустойчивость часто означает способность плазмы выйти из области с такой конфигурацией полей, в которой одна заряженная частица находилась бы неограниченно долго.

Целью многих исследований был поиск конфигураций полей, обеспечивающих удержание плотной высокотемпературной плазмы в течение времени, достаточного для того, чтобы энергия, выделившаяся в прошедших реакциях синтеза, превысила энергию, затраченную на создание и удержание плазмы. Неустойчивости приводят к разрушению ограниченных плазменных образований. Поэтому исследования устойчивости плазмы начались почти сразу же после первых экспериментов по удержанию плазмы. Если бы



Фиг. 2. Функция распределения неравновесной плазмы с электронным пучком на хвосте максвелловского распределения

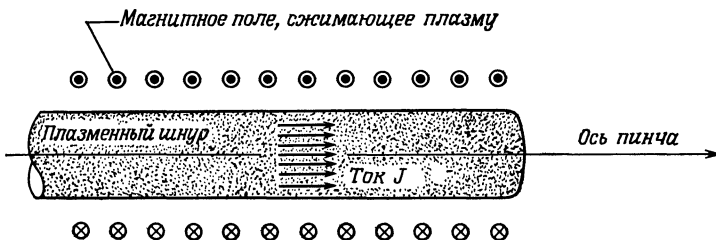
не плазменные неустойчивости, возможно, что проблема управляемого термоядерного синтеза была бы быстро решена. Так, электрический ток, проходящий через ионизованную смесь дейтерия и трития, создает сильное магнитное поле, вызывающее сжатие столба газа с током (так называемый *пинч-эффект*). При этом температура и плотность плазмы повышаются и могли бы достигнуть уровня, требуемого для осуществления термоядерных реакций.

Первые эксперименты, однако, показали, что плазма по каким-то причинам просачивается сквозь магнитное поле быстрее, чем можно было бы предположить, исходя из известной частоты парных столкновений, даже быстрее, чем происходит нагрев в процессе сжатия. Это говорит о том, что плазме в магнитном поле присуща внутренняя неустойчивость с очень небольшим временем нарастания. Поэтому теория устойчивости занимает центральное место в плазменных исследованиях.

В течение последнего десятилетия были достигнуты успехи в понимании механизмов неустойчивостей и найдены способы их подавления. Теллер образно сравнивал попытки удержания плазмы с попытками удержать шар из студня в корзине, состоящей из растянутых резиновых жгутов. Студень, конечно же, окажется снаружи корзины. Такое состояние соответствует более низкому энергетическому уровню. То же самое относится и к плазме, удерживаемой в пространстве при помощи магнитного поля, поскольку системе плазма — магнитное поле соответствует более низкое значение потенциальной энергии, когда плазма находится снаружи. Плазменные неустойчивости можно подразделить на два типа. Один из них связан с пространственной неоднородностью плазмы, другой — с неравновесностью распределения по скоростям. Другими словами, можно сказать, что плазма локализована неоптимальным образом либо в конфигурационном пространстве, либо в пространстве скоростей.

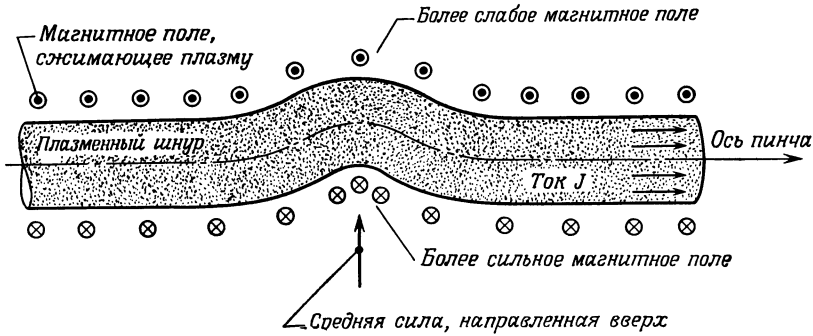
11.1. Неустойчивости пространственно-неоднородной плазмы

Неустойчивость, связанная с пространственной неоднородностью плазмы, имеет место в пинче, который схематически показан на фиг. 3. Пинч — это плазменный шнур с током, окруженный магнитным полем, которое уравновешивает давление плазмы и удерживает ее. Такая конфигурация неустойчива по отношению к разнообразным возмущениям границы раздела плазмы и магнитного поля. Эти возмущения или деформации границы раздела экспоненциально нарастают со временем, и плазма вскоре выбрасывается на стенки, обязательно существующие в эксперименте. Потенциальная энергия такого конечного состояния меньше, чем энергия исходного состояния. Фиг. 4 иллюстрирует змейковую неустойчивость («kink»-instability). Поскольку механизм, приводящий к развитию подобной неустойчивости, обусловлен локализацией плазмы в конфигурационном пространстве, такие



Фиг. 3. Схема пинча.

Если магнитное давление, сжимающее плазменный шнур, превышает кинетическое давление частиц, то шнур сжимается до меньшего радиуса.



Фиг. 4. Схема пинча, демонстрирующая механизм змейковой неустойчивости

неустойчивости называются *неустойчивостями пространственно-неоднородной плазмы*.

11.2. Неустойчивости пространственно-однородной плазмы ¹⁾

В начале данного параграфа мы описали одну из неустойчивостей пространственно-однородной плазмы (аналог затухания Ландау). Другим простым примером служит неустойчивость, возникающая в холодной плазме, когда в нее впрыскивают пучок моноэнергетических электронов.

Высокочастотная диэлектрическая проницаемость электронного газа, компенсированного однородным ионным фоном, определяется выражением (1.9.3). При рассмотрении пучковой неустойчивости следует видоизменить выражение для высокочастотной диэлектрической проницаемости, учитывая при этом, что в плазме имеются две группы электронов: покоящиеся и движущиеся со средней скоростью дрейфа V . Диэлектрическая проницаемость движущихся электронов получается из исходной, если частоту ω в ней заменить на доплер-сдвинутую частоту $\omega - kV$. Диэлектрическая проницаемость всей системы движущихся и покоящихся электронов принимает вид

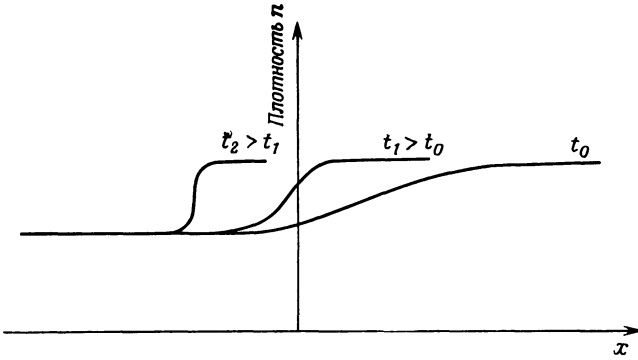
$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - kV)^2} - \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} \quad (1.11.1)$$

где ω_{p1} — плазменная частота движущейся группы электронов, а ω_{p2} — плазменная частота покоящейся группы электронов. Приравняв диэлектрическую проницаемость нулю, мы получаем дисперсионное уравнение для продольных электростатических волн. Решая это уравнение при действительных значениях ω и считая k комплексным числом, получаем для мнимой части k , т. е. для пространственного инкремента, следующее выражение:

$$k_i = \frac{\omega_{p1}}{V} \frac{\text{Im} \omega}{\sqrt{\omega_{p2}^2/\omega^2 - 1}} \quad (1.11.2)$$

Поскольку возмущение нарастает с расстоянием как $\exp(k_i z)$, можно ожидать сильного увеличения сигнала или шума на физически малых расстояниях при частотах, немного меньших плазменной. Разумеется, энергия подобных возмущений не может превысить первоначальный уровень энергии

¹⁾ В отечественной литературе наряду с упомянутой здесь классификацией неустойчивостей употребляется также разделение неустойчивостей на гидродинамические и кинетические, описываемые соответственно уравнениями гидродинамики и кинетическим уравнением. Неустойчивости пространственно-неоднородной плазмы большей частью относятся к гидродинамическим, а неустойчивости однородной плазмы — к кинетическим. Однако эти классификации не полностью совпадают. Например, такая неустойчивость, как рассматриваемая здесь двухпоточковая, может быть описана гидродинамически, но связана тем не менее с неравновесностью распределения по скоростям и должна быть отнесена в класс неустойчивостей однородной плазмы. — *Прим. ред.*



Фиг. 5. Схематическое представление ударной волны, распространяющейся справа налево в различные моменты времени t_0, t_1, t_2 . Крутизна фронта волны со временем увеличивается.

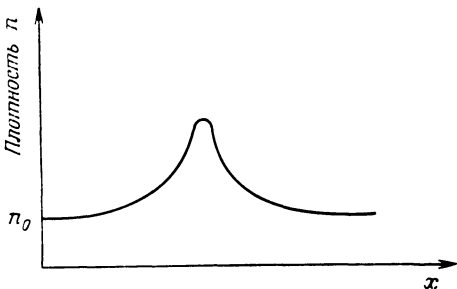
в неравновесной части распределения (в нашем случае $W = 1/2 n_1 m V^2$). Кроме того, линеаризованные уравнения плазмы, использованные для вывода дисперсионного уравнения, становятся неприменимыми при больших амплитудах волн.

§ 12. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОНЫ

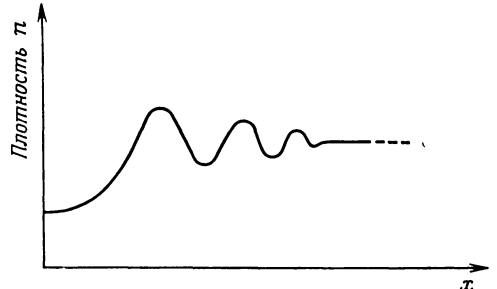
Как и в обычном газе, волны большой амплитуды могут распространяться в плазме со скоростью, большей скорости звука. По мере распространения таких волн они становятся круче и происходит образование ударных волн, т. е. движущихся тонких слоев — фронтов, разделяющих области с разной плотностью и температурой (фиг. 5). В нейтральном газе скорость звука является универсальной величиной, процесс увеличения крутизны волн уравнивается диффузией поперек фронта, а изменение состояния вещества при прохождении через фронт происходит благодаря парным столкновениям. В плазме же существуют различные «звуковые» волны, и плазменная ударная волна может образоваться на любой из них. Увеличение крутизны волн в плазме может быть уравновешено наряду с диффузией также и дисперсией волн: более короткие волны, необходимые для образования более узкого фронта, распространяются медленнее и отстают от ударной волны. Например, для звуковой волны $p = p_0 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, превратившейся в ударную волну, эта возможность осуществляется при

$$\frac{\omega}{k} = V(1 - k^2 a^2).$$

Волны, в которых увеличение крутизны волн уравнивается дисперсией, называются солитонами, или уединенными волнами. Они распространяются



Фиг. 6. Солитон в плазме.



Фиг. 7. Бесстолкновительная ударная волна в плазме.

в плазме наподобие локализованных возмущений конечной амплитуды (фиг. 6). Состояние плазмы после прохождения через нее солитона может измениться вследствие парных столкновений, затухания Ландау, развития неустойчивостей или захвата и отражения частиц волной. При этом структура солитона напоминает структуру ударной волны (фиг. 7).

§ 13. СТОЛКНОВЕНИЯ

В плазме происходят как упругие, так и неупругие столкновения между частицами. В частично ионизованном газе, например, имеют место столкновения электронов с электронами, электронов с ионами и нейтральными частицами и т. д. Столкновительные процессы удобно описывать, используя понятие поперечного сечения. Однако при этом нужно проявлять осторожность, поскольку поперечные сечения некоторых процессов изменяются в присутствии плазмы. Например, для свободных частиц при рассеянии электрона или протона на электроне или протоне поперечное сечение (называемое *резерфордским сечением*) логарифмически расходится на больших прицельных расстояниях. Эта расходимость обусловлена дальнедействующим характером кулоновских сил. В плазме такой логарифмической расходимости нет, поскольку потенциал около каждой заряженной частицы убывает как $1/r$ лишь на расстояниях, меньших дебаевского радиуса, спадая далее с расстоянием по экспоненциальному закону [см. (1.2.2)]. В интеграле для полного сечения по прицельным расстояниям верхний предел обычно заменяется дебаевским радиусом; сечение, полученное в результате такой процедуры, называется *кулоновским*. Оно, тем не менее гораздо больше сечения ядерных реакций [7] (например, реакций $D + D \rightarrow p + T$ и т. д., которые представляют интерес для проблемы управляемого термоядерного синтеза). Кулоновское сечение рассеяния на 90° благодаря совокупности последовательных рассеяний на малый угол описывается приближенно следующим выражением:

$$\sigma_{90^\circ} \approx \frac{2,6 \cdot 10^{-18}}{W^2} \text{ см}^2, \quad (1.13.1)$$

где W измеряется в кэВ. Это сечение много больше сечения слияния двух дейтронов, равного

$$\sigma_{D+D} = 10^{-26} \text{ см}^2 \text{ при } W = 100 \text{ кэВ.}$$

То, что сечение реакции намного меньше сечения рассеяния, означает, что частицы плазмы выходят из ловушки до того, как они вступают в ядерные реакции. Дальнедействующий характер кулоновских сил приводит к тому, что частицы отклоняются на 90° благодаря совокупности большого числа рассеяний на малые углы с большей вероятностью, чем за счет одного рассеяния на большой угол. С поперечным сечением связаны такие часто употребляемые понятия, как средняя длина свободного пробега и частота столкновений. Пусть сечение столкновения есть σ , тогда перед столкновением частица пройдет расстояние

$$l = \frac{1}{n\sigma}, \quad (1.13.2)$$

называемое *средней длиной свободного пробега*. Если скорость налетающей частицы относительно покоящейся частицы равна v , то она пройдет расстояние, равное средней длине свободного пробега, за время τ_c . Величина, обратная этому интервалу времени, называется частотой столкновений

$$\nu_c = n\sigma v. \quad (1.13.3)$$

Как правило, сечение зависит от скорости v , а рассеивающие частицы имеют тепловое распределение по скоростям. Эффективная частота столкно-

вений определяется тогда средним значением произведения сечения на скорость, т. е.

$$v_c = n \langle \sigma(v) v \rangle. \quad (1.13.4)$$

Так определяется частота столкновений для одной частицы. Если налетающих частиц много, полное число столкновений в одном кубическом сантиметре за одну секунду равно

$$R = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{1,2}. \quad (1.13.5)$$

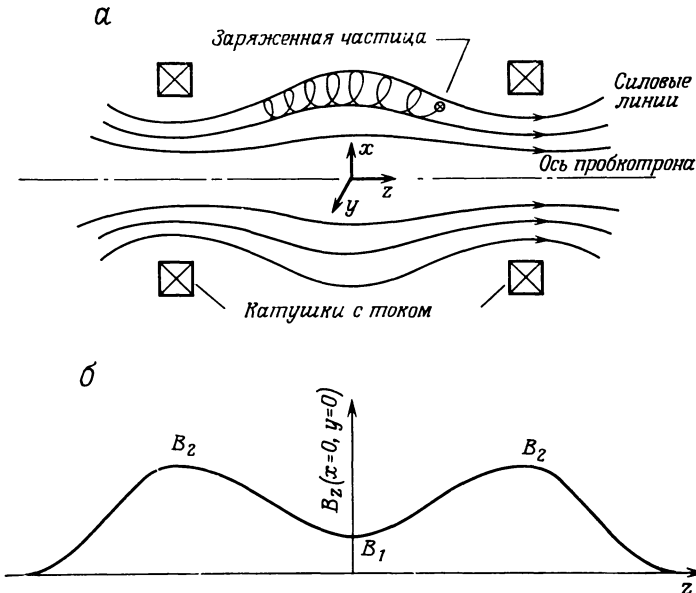
Задача 1.13.1. Покажите, что электропроводность σ полностью ионизованного газа выражается через частоту столкновений и плазменную частоту следующим образом:

$$\sigma = \frac{\omega_p^2}{4\pi\nu_c}. \quad (1.13.6)$$

§ 14. КЛАССИЧЕСКАЯ И БОМОВСКАЯ ДИФФУЗИЯ

Если в нейтральном газе создается градиент плотности, то может возникнуть поток частиц, стремящийся уменьшить этот градиент. Такой процесс называется *диффузией*, причем в нейтральном газе этому процессу *препятствуют* столкновения. Наоборот, в плазме столкновения иногда могут *способствовать* диффузии. В плазме для ограничения свободного движения частиц (которое и приводит к диффузии в неоднородных нейтральных газах) часто используют магнитные поля. На фиг. 8 показана подобная конфигурация магнитного поля. Однако теперь столкновения между частицами приводят к их смещению поперек магнитного поля и, таким образом, *способствуют* диффузии.

Поток частиц Γ через единичную площадь в единицу времени равен произведению плотности частиц на их среднюю скорость. Поток частиц, вызванный наличием градиента плотности, пропорционален коэффициенту



Фиг. 8. Конфигурация магнитного поля в пробкотроне, используемом для удержания плазмы.

a — схема расположения катушек и конфигурация магнитного поля; показана часть траектории захваченной частицы, *б* — изменение магнитного поля вдоль оси пробкотрона.

диффузии D , определяемому следующим образом:

$$\Gamma = n \langle v \rangle = -D \frac{\partial n}{\partial x}. \quad (1.14.1)$$

Задача 1.14.1. Покажите, что классический коэффициент диффузии газа нейтральных частиц равен

$$D \approx \frac{\kappa T}{m \nu_c} = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{\nu_c}. \quad (1.14.2)$$

В силу электрических свойств плазмы коэффициент диффузии плазмы, состоящей из ионов и электронов, даже в отсутствие магнитных полей отличается от классического коэффициента диффузии газа. Например, при диффузии редкой плазмы в плотном нейтральном газе более подвижные электроны стараются опередить ионы. При этом возникает электрическое поле, связанное с разделением зарядов, которое тормозит диффузию электронов и увеличивает диффузию ионов, поддерживая зарядовую нейтральность. Увеличенная диффузия ионов совместно с электронами называется *амбиполярной диффузией*. Коэффициент амбиполярной диффузии плазмы с одинаковой температурой электронов и ионов в два раза превышает коэффициент свободной диффузии одних ионов, т. е.

$$D_A \approx 2D_i = \frac{2}{3} \frac{\langle v_i^2 \rangle}{\nu_c}; \quad (1.14.3)$$

здесь ν_c — частота столкновений ионов с нейтральными частицами.

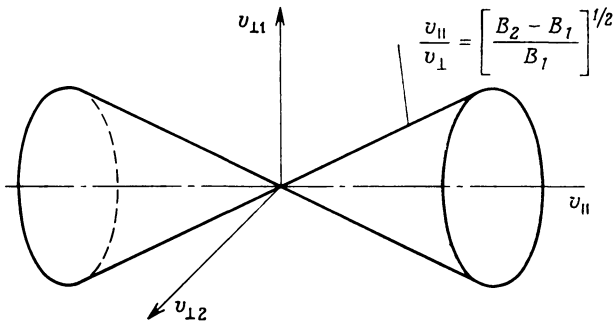
Постоянное магнитное поле заставляет заряженные частицы двигаться по винтовым траекториям. Если имеется поперечный градиент плотности частиц в магнитном поле, то в результате столкновений между собой электроны и ионы будут диффундировать поперек магнитного поля. Коэффициент диффузии в этом случае имеет вид

$$D_{\perp} = D \frac{\nu_c^2}{\omega_c^2}. \quad (1.14.4)$$

Это выражение показывает, что коэффициент свободной диффузии уменьшается пропорционально $1/B^2$ и возрастание частоты столкновений приводит к *увеличению* диффузии. Уменьшение диффузии поперек силовых линий магнитного поля, пропорциональное $1/B^2$, позволяет предположить, что сильные магнитные поля дадут возможность удерживать плазму в течение длительного времени. К сожалению, большинство экспериментов по магнитному удержанию плазмы указывает на то, что скорость диффузии превышает значение, предсказываемое выражением (1.14.4), если ν_c определяется через сечение парных столкновений. Более того, эксперименты показывают, что коэффициент диффузии даже не пропорционален $1/B^2$. Диффузия плазмы с коэффициентом, пропорциональным $1/B$, получила название *бомовской диффузии* по имени американского физика Бомы, который предположил, что коллективные процессы в плазме, такие, как неустойчивости, могут привести к диффузии с коэффициентом

$$D_B \approx \frac{ckT}{16eB}. \quad (1.14.5)$$

Это выражение для коэффициента диффузии было *предположено*, а не выведено теоретически. Однако можно сказать, сравнивая (1.14.2) и (1.14.4), что скорость ухода заряженных частиц поперек магнитного поля максимальна при $\nu_c \approx \omega_c$. Считая, что ν_c принимает это оптимальное значение, мы получаем бомовскую диффузию. Бом, по-видимому, предполагал, что увеличение эффективной частоты столкновений вплоть до этого значения вызы-



Фиг. 9. Конус потерь в пространстве скоростей для частиц в срединной плоскости пробкотрона.

Частицы, скорости которых находятся внутри конуса потерь, не захватываются пробкотроном, частицы с любыми другими скоростями захватываются пробкотроном!

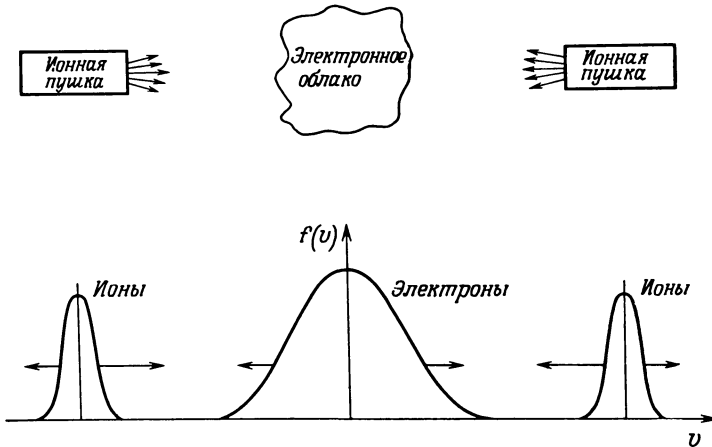
вается наличием неустойчивости. Когда $v_c = \omega_c$, частица благодаря столкновениям в среднем проходит поперек магнитного поля за каждый циклотронный период расстояние, равное ее ларморовскому радиусу ($a_L = v/\omega_c$). В тех работах, которые касаются экспериментов по магнитному удержанию плазмы, время удержания приводят в единицах бомовского времени, т. е. экспериментальное значение коэффициента диффузии делится на коэффициент бомовской диффузии.

Помимо только что описанной диффузии в конфигурационном пространстве, имеется также диффузия в пространстве скоростей. Диффузия подобного рода также происходит вследствие столкновений частиц друг с другом и направлена в сторону уменьшения любой анизотропии или других характеристик функции распределения по скоростям, невыгодных с точки зрения энтропии. Например, диффузия в пространстве скоростей происходит в плазме, помещенной в магнитное поле пробкотрона (фиг. 8 и 9). Частицы захватываются в этой конфигурации магнитных полей, если их скорости лежат вне конуса потерь пробкотрона, т. е. в срединной плоскости ловушки:

$$\frac{v_{||0}}{v_{\perp 0}} \leq \left(\frac{B_2 - B_1}{B_1} \right)^{1/2}$$

Частицы, скорости которых находятся внутри конуса потерь, проходят насквозь через область максимального магнитного поля, в то время как частицы со скоростями вне конуса потерь захватываются. При отсутствии столкновений они могли бы оставаться захваченными в ловушке бесконечно долго ¹⁾. В результате столкновений координаты каждой данной частицы в пространстве скоростей меняются со временем случайным образом. Траектория случайного блуждания такой частицы в пространстве скоростей приводит ее в конце концов внутрь конуса потерь. При следующем попадании в область B_2 частица выходит из ловушки. В этом примере частицы не диффундируют поперек силовых линий, но за счет изменения своей скорости выходят из пробкотрона, оставаясь на одной и той же силовой линии. Неустойчивости также могут вызвать диффузию в пространстве скоростей. Например, рассмотрим функцию распределения для встречных пучков частиц, такую, как показано на фиг. 10. Эта функция распределения неустойчива, в результате чего в плазме возбуждаются различные типы волн, что приводит к диффузии частиц в пространстве скоростей в направлениях,

¹⁾ Это утверждение не является точным. В определенных условиях частицы могут покидать область ловушки и при отсутствии столкновений, попадая в конус потерь вследствие накопления поворотов в магнитном поле. — *Прим. ред.*



Фиг. 10. Схематическое представление плазмы со встречными потоками и соответствующая начальная функция распределения.

Стрелками указаны направления диффузии, вызванной слабой турбулентностью, обусловленной неустойчивостью плазмы.

указанных стрелками на фиг. 10, т. е. в направлении более устойчивой функции распределения. Если энергия волн остается малой, процесс, вызывающий такую диффузию, называется *слабой турбулентностью*¹⁾. Слабая турбулентность широко изучалась, причем оказалась доступной достаточно глубокому анализу.

§ 15. ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ

В плазме существует несколько механизмов испускания и поглощения излучения. Их можно разбить на два типа: 1) излучение атомов и 2) излучение ускоренно движущихся свободных зарядов. Излучение плазмы представляет интерес прежде всего потому, что оно может быть использовано для определения параметров плазмы. Кроме того, излучение удерживаемой плазмы приводит к потере энергии, которая должна учитываться при рассмотрении энергетического баланса термоядерного реактора.

15.1. Тормозное излучение

Строго говоря, термин «тормозное излучение» пригоден для большинства источников излучения. В физике плазмы этот термин, как правило, применяется для излучения при свободно-свободных переходах, т. е. когда одна частица сталкивается с другой и резко меняет направление движения. Интенсивность такого излучения из единицы объема в водородной плазме равна

$$P_B = 5,35 \cdot 10^{-24} n^2 T^{1/2} \text{ эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с}), \quad (1.15.1)$$

где T измеряется в кэВ. Эта формула определяет наименьший возможный поток излучения из плазмы²⁾; при выводе ее предполагается, что плазма не поглощает собственного излучения. Подобный поток излучения привел бы к незначительной потере энергии удерживаемой термоядерной плазмы. Другими словами, энергия, выделяющаяся в единицу времени в плазме с температурой 100 кэВ за счет реакций синтеза, превышает мощность потерь на тормозное излучение.

¹⁾ Этот термин был введен советским физиком А. А. Ведыновым [46*]. — Прим. ред.

²⁾ Данное утверждение относится к оптически тонкой плазме. — Прим. ред.

15.2. Излучение черного тела

Если бы плазма находилась в термодинамическом равновесии, она излучала бы согласно закону Стефана — Больцмана:

$$P_{\text{черн. тело}} = \alpha T^4 \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}); \quad (1.15.2)$$

здесь $\alpha = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4$. В противоположность тормозному излучению¹⁾ при температурах плазмы, представляющих интерес для термоядерного реактора, потери на черное излучение во много раз превышали бы энерговыделение, получаемое за счет реакций синтеза. Приведенное рассмотрение не имеет отношения к лабораторной плазме, поскольку, чтобы излучать как черное тело, плазма должна обладать огромными размерами: $R_{\text{черн. тело}} \geq 10^{23} T^{1/2}/(Z^2 n_i n_e)$ (здесь T измеряется в кельвинах).

Задача 1.15.1. Сравните интенсивности тормозного излучения и черного излучения из плазмы диаметром 3 см, температурой 10 эВ и плотностью частиц 10^{14} см^{-3} . Какую часть полной энергии плазмы ежесекундно уносит излучение? Чему равен минимальный радиус сгустка плазмы, излучающей как черное тело?

15.3. Примесное излучение

Излучение возбужденных атомов или ионов в частично ионизованной плазме представляет собой промежуточный случай между тормозным и черным излучением. Возбужденные атомы или ионы почти всегда присутствуют в лабораторной плазме и называются *примесями*, поэтому их излучение называется *примесным излучением*. Это излучение часто представляет интерес для диагностики плазмы, поскольку позволяет измерить температуру и концентрацию электронов. Хотя примесное излучение вызывает значительные потери энергии, их можно уменьшить путем улучшения вакуумной технологии. Поэтому такое излучение не рассматривается как преграда для управляемого термоядерного синтеза.

15.4. Синхротронное или циклотронное излучение

Любая заряженная частица, движущаяся по круговой орбите, такая, например, как электрон в магнитном поле, излучает на циклотронной частоте и ее гармониках. В плазме, удерживаемой магнитным полем, при термоядерных температурах электроны являются субрелятивистскими, поэтому максимум излучения приходится на n -ю гармонику циклотронной частоты, вычисленной по массе покоя электрона ($n \approx \gamma^2$, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$). Суммарная энергия излучения всех гармоник больше энергии излучения на основной частоте. Полная энергия потерь при циклотронном излучении из плазмы с магнитным удержанием обычно превышает энерговыделение термоядерного синтеза, если температуры электронов и ионов одинаковы. Эта проблема до сих пор не решена, но имеются схемы удержания плазмы, в которых электроны холоднее ионов

15.5. Черенковское излучение

Если заряженная частица движется со скоростью, большей скорости света в среде, она теряет энергию, которая передается среде в виде излучения, называемого *черенковским*. При этом возбуждаются плазменные и электромагнитные волны. Плазменные волны возбуждаются, когда скорость частицы превосходит скорость²⁾ плазменных волн.

¹⁾ При сравнении формул (1.15.1) и (1.15.2) следует учесть, что первая из них описывает интенсивность излучения из единицы объема плазмы, а вторая — с единицы поверхности. — *Прим. ред.*

²⁾ Имеется в виду фазовая скорость $v = \omega/k$. — *Прим. ред.*

Б. СОЗДАНИЕ ПЛАЗМЫ

Экспериментальное изучение плазмы осложняется тем обстоятельством, что плазму прежде всего необходимо создать, так как она не существует на Земле как нормальное состояние вещества. Способы создания лабораторной плазмы весьма разнообразны, и в зависимости от способа создания плазма может быть плотной или редкой, горячей или холодной, стационарной или распадающейся, устойчивой или неустойчивой и т. д. Поэтому характер исследований, которые могут быть проведены с лабораторной плазмой, зависит в большой степени от способа, которым была создана плазма. Аналогично для понимания задач при теоретическом изучении плазмы необходимо иметь представление о проблемах, с которыми сталкиваются при создании и измерениях в плазме.

Прежде чем описывать некоторые эксперименты, связанные с изучением плазмы, мы опишем кратко некоторые из успешных практических применений плазмы.

Наиболее широко распространено применение плазмы для освещения. Дуговые лампы используются в кинотеатрах, уличных фонарях, прожекторах и т. д. Флуоресцентные лампы основаны на электрическом разряде в плазме низкого давления с холодным катодом. При этом испускается значительное количество ультрафиолетового излучения, которое возбуждает флуоресцирующее покрытие внутренней поверхности разрядной трубки. Неоновые и другие аналогичные лампы основаны на разряде с холодным катодом, в котором испускается свет с линейчатым спектром за счет столкновительного возбуждения нейтральных атомов или ионов с последующим их излучением. Электросварочные аппараты — это плазменные устройства, предназначенные для сварки различных металлов. Игнитроны, тиратроны и т. п. устройства — это слабо- или сильноточные переключатели, используемые для управления различными устройствами (моторами, аппаратами для точечной сварки, емкостными накопителями энергии и т. д.) практически в любом промышленном процессе. Перечень применения плазменных устройств велик и многообразен. Читатель может сам легко его продолжить.

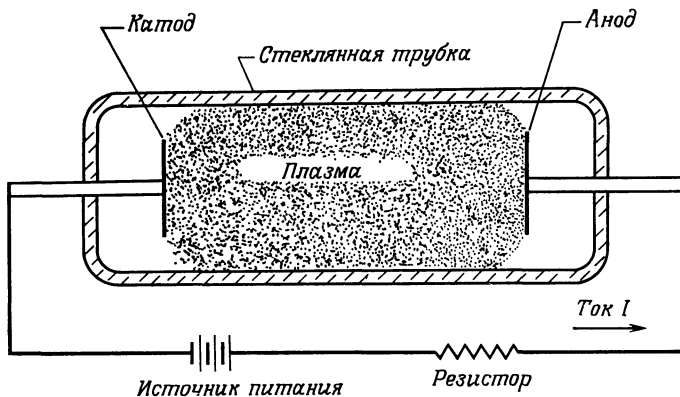
В следующих параграфах описаны некоторые схемы создания плазмы для лабораторных исследований. Помимо способов создания плазмы, описанных в этих параграфах и других разделах настоящей книги, существует много других.

Тема для обсуждения. Для каждого из приведенных ниже видов плазмы составьте краткое описание принципа действия, преимуществ, ограничений и характерных особенностей схем, используемых для создания плазмы.

1. Плазма в ударных трубах [8].
2. Разряд Пеннинга в магнитном электроразрядном манометре [9].
3. Несамостоятельный разряд с электронным пучком [10].
4. Лазерная плазма [11].

§ 16. РАЗРЯД НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ С ХОЛОДНЫМ КАТОДОМ

Стационарный (или импульсный) дуговой разряд низкого давления можно создать и поддерживать в предварительно откачанном сосуде, если с помощью электродов приложить напряжение, как показано на фиг. 11. При этом образуется редкая ($n \approx 10^{10}$ см⁻³) и холодная ($T_e < 5000$ К)



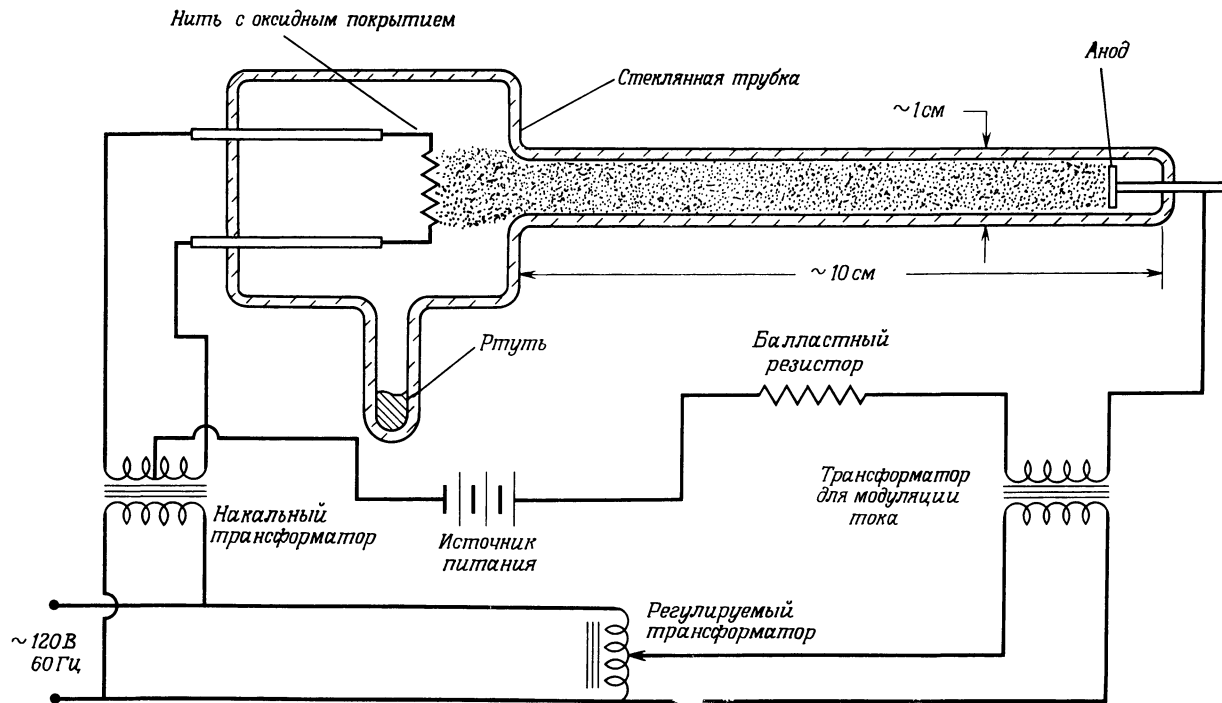
Фиг. 11. Схема разряда низкого давления с холодным катодом и соответствующая электрическая цепь.

плазма. Такие приборы использовались на ранних этапах изучения плазмы и в атомной спектроскопии. Они обладают многими интересными особенностями [12] и до сих пор применяются во многих плазменных исследованиях. Приборы с тлеющим разрядом (маленькие неоновые трубки) используются для освещения, стабилизации напряжения и т. д.

§ 17. ТЕРМОЭМИССИОННЫЙ ДУГОВОЙ РАЗРЯД

С целью исследования лабораторной плазмы лучше использовать не разряд с холодным катодом, а разряд, в котором источником электронов для разрядной трубки служит термоэмиссионный катод с оксидным покрытием. Конструкция такого устройства схематически показана на фиг. 12. В этом газоразрядном приборе обычно используются насыщенные пары ртути при комнатной температуре (давление 10^{-3} мм рт. ст.). Плазма, создаваемая в такой разрядной трубке диаметром 1 см и длиной от 10 до 20 см, имеет плотность частиц $n = 10^9 - 10^{13}$ см $^{-3}$. Трубка изготавливается с помощью обычной стеклодувной технологии. В трубку вводится капля ртути, а катод активируется после откачки вакуумным насосом до давления ниже 10^{-6} мм рт. ст. Чтобы удержать ртуть во время откачки и активации катода, ее помещают в небольшом отростке трубки и охлаждают до температуры жидкого азота (77 К). Эта процедура позволяет удержать давление паров ртути во время активации в приемлемых пределах.

Схема электрического питания такой разрядной трубки показана на фиг. 12. Напряжение накала к термоэмиссионному катоду или к независимой нити накала подводится от трансформатора по изолированным проводникам, способным выдержать приложенное напряжение. Хотя для поддержания разряда требуется падение напряжения вдоль трубки всего в несколько вольт на сантиметр, для зажигания разряда обычно приходится прикладывать высокое напряжение. Чтобы создать начальную концентрацию электронов для зажигания разряда, иногда приходится применять катушку Теслы. Внешнее сопротивление стабилизирует ток разряда, который без стабилизации возрастал бы до очень больших значений (определяемых лишь внутренним сопротивлением источника питания). Другими словами, дуговой разряд имеет отрицательное дифференциальное сопротивление (падающую вольтамперную характеристику). С помощью специального трансформатора (фиг. 12) можно модулировать ток. Поскольку плотность плазмы пропорциональна разрядному току, таким образом можно изменять плазменную частоту, оставляя все прочие параметры постоянными. В гл. 4 при обсуждении резонансов в плазме мы увидим, насколько полезен рассмотрен-



Фиг. 12. Схема термоэмиссионного дугового разряда с соответствующей электрической цепью.

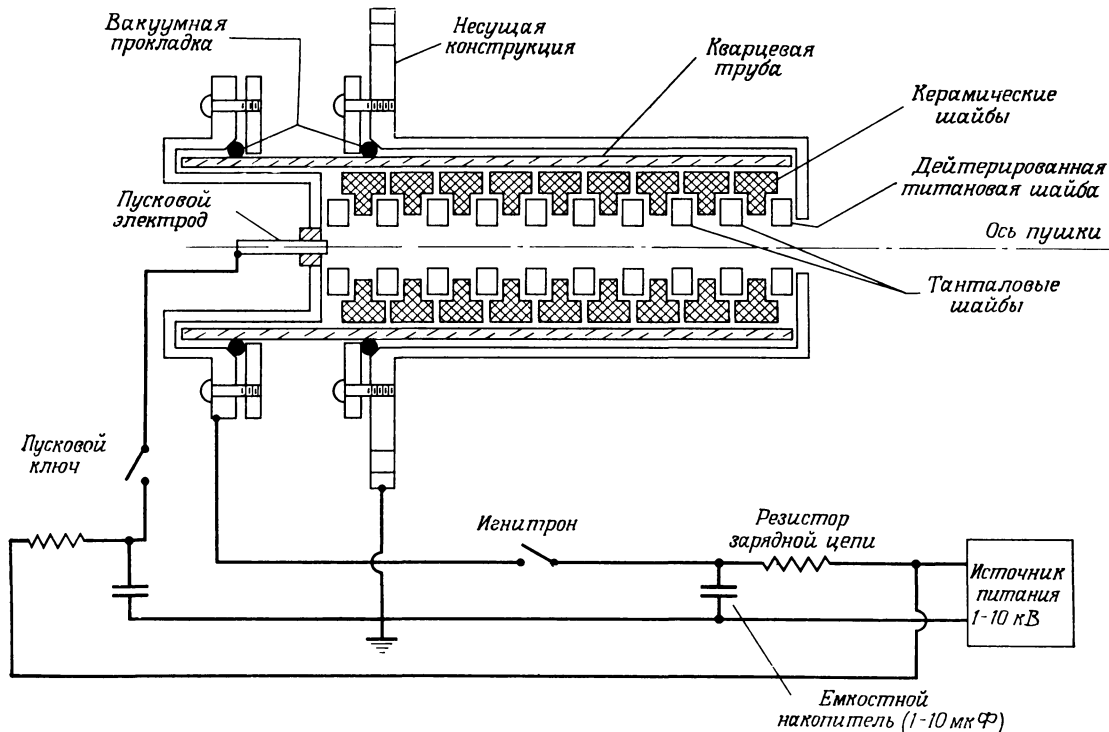
ный метод изменения плотности плазмы. Плотность и температура плазмы в таком термоэмиссионном разряде давно и подробно исследованы Клярфельдом [13]. Его полезные исследования позволили создавать в разряде лабораторную плазму с известными параметрами. Разрядные трубки подобного типа использовались также в экспериментах по исследованию плазменных волн и осцилляций в плазме ограниченных размеров [14, 15].

С помощью небольшого механического видоизменения рассмотренной разрядной трубки в нее можно вводить электронный пучок малого диаметра (1 мм) с энергией от 100 до 1000 эВ вдоль оси разрядной трубки. Система пучок — плазма подобного рода применялась Бойдом, Филдом и Гоулдом [16], а также Гоулдом и Трайвелписом [17] при исследовании пучковой неустойчивости.

§ 18. ПЛАЗМЕННЫЕ ПУШКИ

Во многих экспериментах с плазмой желательно инжектировать плазму в ту область, в которой хотят измерить ее параметры. Существует несколько методов, посредством которых плазма может быть создана в одном месте и транспортирована в другое.

Несмотря на отсутствие полного понимания принципа действия, широко используется подобного рода источник под названием *источник с дейтерированной шайбой*, или *источник Бостика*. Этот источник был доведен до его теперешнего усовершенствованного вида почти полностью эмпирически, методом проб и ошибок [18]. На фиг. 13 показан один из вариантов этой плазменной пушки, а также основные элементы электрической цепи, предназначенной для питания установки. Принцип действия такого источника плазмы основан на свойстве металлического титана, нагретого в атмосфере



Фиг. 13. Схема плазменной пушки с дейтерированной шайбой и электрическая цепь. Пусковой ключ обычно замыкается одновременно с игнитроном

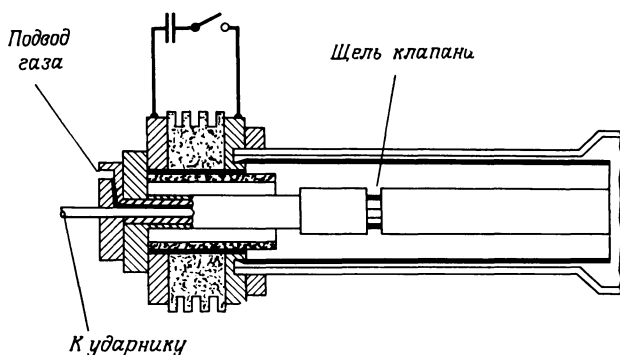
водорода или дейтерия до 1000°C , образовывать гидрид титана в результате экзотермической реакции. Этот процесс, проводимый с ограниченным количеством водорода, приводит к насыщению титановой шайбы водородом вплоть до концентрации примерно в один атом водорода на каждый атом титана. Хотя титан может поглотить водород в концентрации, большей, чем 1:1, при существенно больших концентрациях он теряет прочность и легко разрушается.

Титановая шайба, насыщенная водородом, размещается в приборе, как показано на фиг. 13. Небольшой поджигающий электрод в задней части пушки поставляет начальное количество электронов, которые затем ускоряются электрическим полем поперек оси пушки до энергии > 1 кэВ. Часть электронов сталкивается с дейтерированной шайбой, выделяя мощность порядка $1 \text{ МВт}/\text{см}^2$ в течение времени ~ 1 мкс. Это энерговыделение приводит к нагреву поверхности титана и испусканию поглощенного водорода или дейтерия, которые затем ионизируются в разряде. Созданная таким образом плазма ускоряется (возможно, на скачке потенциала, образованного предшествующими электронами) при выходе через отверстие в шайбе и попадает в область, где должен проводиться эксперимент. Эти источники дают ступок плазмы с числом частиц 10^{17} в течение времени от 2 до 10 мкс и температурой ионов около 1 кэВ. Свойства плазмы, создаваемой этими источниками, продолжают изучаться.

Плазменные пушки подобного рода используются во многих экспериментах по сжатию плазмы магнитным полем в пробкотронах. Источник обычно помещают на оси пробкотрона за одной из магнитных пробок. Инжекция происходит на ранней стадии сжатия, когда магнитное поле мало и нарастает со временем.

Эти же источники используются и в других экспериментах по инжекции, в устройствах типа мультиполей, когда хотят исследовать уход плазмы из ловушки после ее инжекции в область удержания. Одним из преимуществ таких источников является возможность использования их в высоковакуумных системах, поскольку разряд в них может быть зажжен в отсутствие начальной концентрации газа (газ хранится в дейтерированной шайбе). Кроме того, это означает, что вместе с плазмой в экспериментальную установку попадает небольшое количество нейтрального газа.

На фиг. 14 приведена схема плазменной пушки другого типа. Этот источник с коаксиальным ускорением плазмы называется пушкой Маршалла [19, 20]. Принцип действия здесь следующий: между изолированными коаксиальными проводниками прикладывается напряжение от батареи конденсаторов. Небольшое количество (10^{18} атомов) нейтрального газа впрыскивается в промежуток между проводниками. Когда напряжение превышает



Фиг. 14. Схема коаксиальной плазменной пушки (пушки Маршалла) и соответствующая электрическая цепь.

напряжение пробоя данного газа, образуется дуга. Ток дуги создает магнитное поле за дугой. Это магнитное поле оказывает давление на частицы дуги, разгоняя их вдоль оси коаксиальной системы по направлению к открытому концу плазменной пушки. В результате плазма выстреливается из пушки со скоростью около 10^4 см/с. Эти источники использовались в экспериментах по инъекции плазмы в основном так же, как и источники с дейтерированными шайбами. Их преимущество состоит в том, что эти пушки позволяют создавать плазмы других газов, помимо водорода и дейтерия, а также плазму высокой плотности и температуры. Одним из недостатков является высокая концентрация нейтрального газа, поступающего вместе с плазмой.

§ 19. ПЛАЗМА ПАРОВ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ. Q-МАШИНЫ

Термин *Q-машина* используется для обозначения класса установок, в которых создается плазма с очень низкой кинетической температурой. Первоначально считалось, что такая плазма является «спокойной» (отсюда название *Q-машина*) ¹⁾, однако последующие исследования показали, что данная плазма вовсе не такая спокойная и богата различными явлениями, включая некоторые интересные неустойчивости.

Хотя различные схемы для создания плазмы паров щелочных металлов методом поверхностной ионизации использовались в других экспериментах [21], начало их широкому применению в фундаментальных плазменных исследованиях было положено экспериментами в Принстоне [22]. На фиг. 15 показана соответствующая экспериментальная установка.

Основной принцип действия этого устройства состоит в том, что при столкновении атома какого-либо щелочного металла, например цезия, с нагретой вольфрамовой пластиной происходит поверхностная ионизация. Атом цезия, сталкиваясь с поверхностью вольфрама, отлетает от нее в виде иона. Если температура вольфрамовой пластины достаточно высокая (~ 2300 К), такая, что происходит эмиссия электронов, то на каждый ион цезия приходится в среднем один электрон, испущенный с поверхности вольфрама.

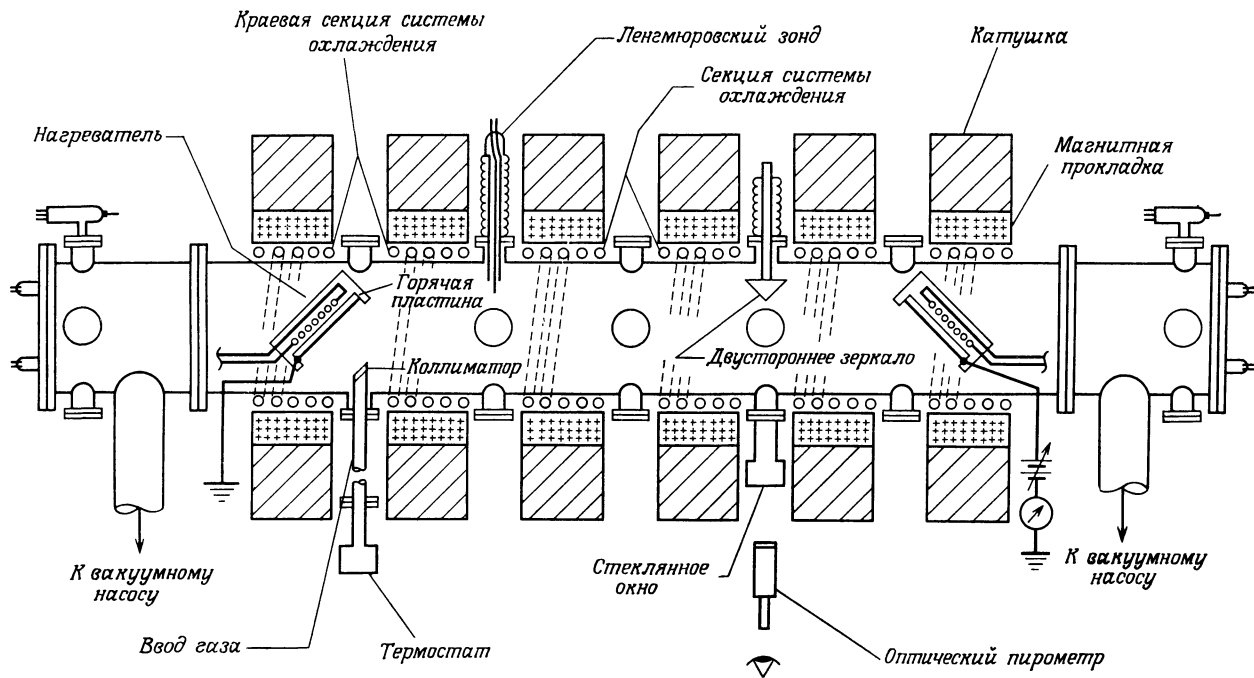
Таким образом, небольшой стационарный поток атомов цезия, попадающий на горячую пластину, помещенную в левой части экспериментальной установки (фиг. 15), преобразуется в мощный поток плазмы, ограниченный продольным магнитным полем. Горячая пластина на другом конце установки отражает плазму. Диаметр плазмы, образующейся в таких установках, обычно равен нескольким сантиметрам, а длина изменяется от 10 см до 2 м в разных экспериментах.

Плотность плазмы может меняться от 10^9 до 10^{13} см⁻³. Типичное значение температуры плазмы в *Q-машинах* порядка 1000 К. Одним из важных свойств плазмы, создаваемой *Q-машинами*, является 99%-ная степень ионизации. *Q-машины* получили широкое распространение со времени проведения первых экспериментов, и многие важные вопросы теории плазмы, такие, как дрейфовые волны, диффузия, электропроводность, пучковая неустойчивость и влияние кожуха, были изучены с их помощью.

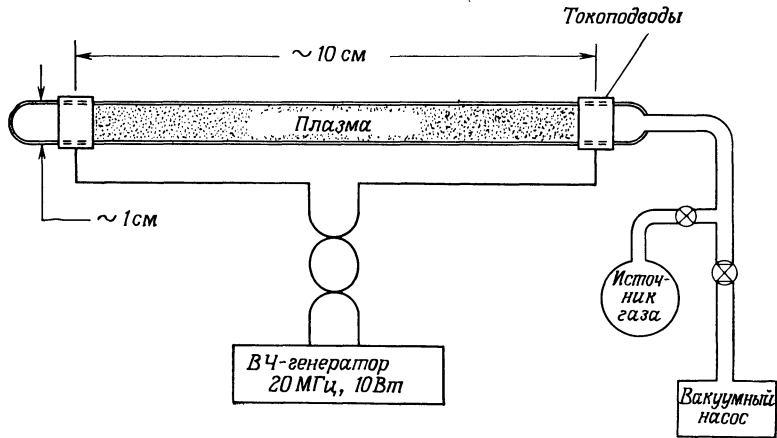
§ 20. ПЛАЗМА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА

Под действием постоянного электрического поля в газе низкого давления происходит пробой. Пробой и образование плазмы имеют место и в том случае, если приложенное электрическое поле меняется во времени. Такая

¹⁾ Здесь *Q* произошло от английского *quiescent plasma* — спокойная плазма.—
Прим. ред.

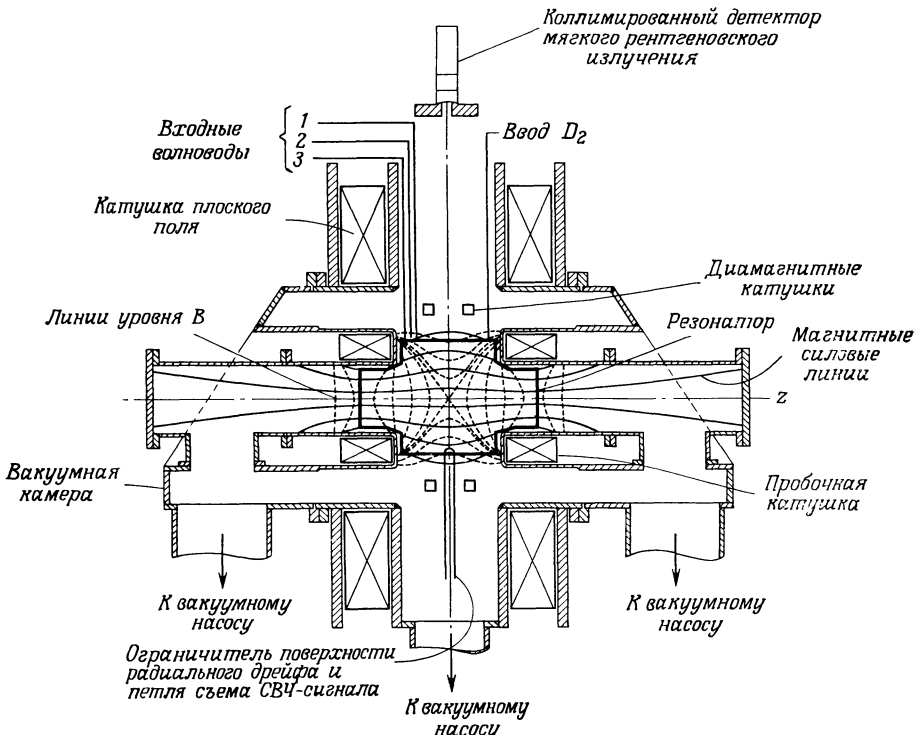


Фиг. 15. Схема Q-машины (Q-1) [23].



Фиг. 16. Схематическое представление установки для получения плазмы высокочастотного разряда.

схема зажигания и поддержания разряда обладает некоторыми преимуществами. Одно из них — возможность осуществления безэлектродного разряда, как показано на фиг. 16. Переменное электрическое поле свободно проникает через диэлектрические стеклянные стенки сосуда и ускоряет электроны внутри сосуда до энергий выше потенциала ионизации газа. «Стационарная» плотность плазмы определяется процессами ионизации и рекомби-



Фиг. 17. Схема установки ЭЛМО в Окриджской национальной лаборатории для получения плазмы с нагревом на циклотронном резонансе до средней энергии электронов 0,5 МэВ и выше [25].

Через входные волноводы в резонатор подается непрерывное СВЧ-излучение мощностью 3 кВт на частоте 10,6 ГГц (1), 1 кВт на частоте 35 ГГц (2) и 5 кВт на частоте 55 ГГц (3).

нации и составляет обычно лишь несколько процентов плотности нейтрального фона. Типичное значение плотности плазмы порядка 10^{10} см⁻³ [24].

Иногда плазму высокочастотного разряда создают в присутствии магнитного поля. При этом можно получить значительно более горячую плазму, чем в отсутствие магнитного поля. Такая плазма называется плазмой с нагревом на циклотронном резонансе, когда частота приложенного ВЧ-поля совпадает с циклотронной частотой электронов. Даже с умеренной для СВЧ-источников мощностью (например, для импульсных магнетронов с длиной волны 3 см и мощностью 10 кВт) таким методом можно получить плазму с электронной температурой порядка 20 кэВ. В различных лабораториях проводились более сложные эксперименты¹⁾, в которых была сделана попытка не только получить плазму с нагревом на циклотронном резонансе, но и найти ограничения на максимальную температуру плазмы и энергозатрат. В установках использовались мощные СВЧ-источники (> 100 кВт), энергия которых накапливалась в полых резонаторах (для усиления электрического поля и увеличения связи СВЧ-поля с плазмой). Была создана плазма со средней энергией электронов в мегаэлектронвольтовой области и с плотностью порядка 10^{11} см⁻³ в таких установках, как ЭЛМО в Окриджской национальной лаборатории. Аналогичные исследования были проведены в Сакле (Франция). Окриджский вариант установки показан на фиг. 17. В этой установке создается плазма объемом 2 л в магнитном поле 20 кГс с применением СВЧ-источника мощностью 0,8 кВт, работающего на длине волны 8 мм. Плазма, образованная в результате высокочастотного пробоя водорода, состоит из трех компонент: 1) холодного фона ($n_0 \approx 10^{12}$ см⁻³), 2) холодных электронов ($n_e \approx 2 \cdot 10^{11}$ см⁻³) с температурой $T_e < 100$ эВ и 3) горячих электронов ($n_e \approx 3 \cdot 10^{12}$ см⁻³) со средней энергией 0,5 МэВ. Горячая электронная плазма, находящаяся в области толщиной 4 см, со средним диаметром 9 см и длиной 10 см, создает магнитную яму за счет собственного поля.

§ 21. ПЛАЗМЕННЫЙ ФОКУС

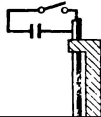
На фиг. 18 приведена схема установки, использованной в Лос-Аламосской научной лаборатории для изучения свойств очень плотной ($n_e \approx 5 \cdot 10^{19}$ см⁻³) короткоживущей (полуширина импульса ≈ 100 нс) дейтериевой плазмы с довольно высокой температурой ($T_e \approx 3-4$ кэВ), достаточной для получения существенного нейтронного выхода (10^{11} нейтронов за импульс).

В этой установке соединены черты коаксиальной плазменной пушки и магнитное сжатие плазмы в пинче. Плазма сначала формируется в виде радиальной дуги в кольцевой области около фланца. Эта дуга разгоняется магнитным давлением по коаксиальному промежутку до того места, где коаксиальные проводники оканчиваются. Затем дуга отгибается углом и превращается в схлопывающийся в радиальном направлении пинч, максимальные параметры которого в конечном состоянии приведены выше. На фиг. 19 представлены фотографии видимого света, испускаемого плазменным фокусом для двух значений магнитного поля $B = 0$ и $B = 600$ Гс, создаваемого электромагнитом, как показано на фиг. 18. Можно заметить, что свойства плазмы резко зависят от величины этого магнитного поля, которое помогает фокусировке плазмы при отгибании угла. Помимо применений в плазменных исследованиях, плазменный фокус представляет собой простой способ создания импульсного источника нейтронов²⁾.

¹⁾ Интересные оригинальные исследования плазмы высокочастотного разряда проводились в Институте физических проблем П. Л. Капицей с сотр. [47*].— *Прим. ред.*

²⁾ В Советском Союзе существенные результаты по исследованию плазменного фокуса были получены в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова [48*].— *Прим. ред.*

Вакуумный
клеточ



Держатель
кабеля

Анод

Катод

§ 22. СОЛНЕЧНАЯ ПЛАЗМА

Солнце ставит ряд интересных проблем, связанных с равновесием плазмы, ее неустойчивостями, излучением и т. д., которые изучаются путем наблюдений за солнечными пятнами и бурями и с помощью спектроскопических исследований солнечной хромосферы в диапазонах рентгеновского и видимого излучения. Солнце генерирует плазму — солнечный ветер, который распространяется за пределы Солнца. Эта естественная плазма изучается с помощью спутников, оснащенных приборами для исследования свойств солнечного ветра и его взаимодействия с Землей и Луной. Изучаются такие явления, как стоячая ударная волна (*головной скачок*), которая образуется при взаимодействии магнитного поля Земли с солнечным ветром.

В табл. 1 дан перечень плазменных параметров солнечного ветра на расстоянии 1 астрономической единицы длины (1 а.е. = $1,5 \cdot 10^{13}$ см и приблизительно равна среднему расстоянию между Землей и Солнцем) от Солнца.

§ 23. ЛАЗЕРНАЯ ПЛАЗМА

Для лабораторных исследований удержания и устойчивости плазмы можно получить плотную, изолированную и горячую плазму, используя сфокусированное излучение мощных лазеров с модулированной добротностью при облучении либо твердых мишеней, либо сжатого газа. Линлор [26] облучал сфокусированным светом лазера с пиковой мощностью 5 МВт металлические мишени в вакууме и показал, что в области облучения образуется облако плотной плазмы, а ионы металла вылетают из этой области с энергиями около 1 кэВ. Хот и Полк [11] создали высокотемпературную плазму (100 эВ), облучая таблетки из гидрида лития диаметром от 10 до 20 мкм, подвешенные в откачанной камере с помощью переменных полей, сфокусированным потоком излучения 20 МВт-го рубинового лазера с модулированной добротностью. Недавно проведенные исследования (1972 г.) лазерной плазмы посвящены вопросу нагрева плазмы лазерным излучением до такой температуры и такой плотности, чтобы в ней шли термоядерные реакции [28] ¹⁾. Подобные исследования стали возможными с разработкой лазеров, способных давать до 1 кДж энергии в выходном импульсе. Эти лазеры использовались для получения плазмы с температурой около 5 кэВ.

В. ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ

Как только плазма создана (или даже в процессе ее создания) в лабораторных или естественных условиях, желательно, как правило, иметь возможность для измерения ее многочисленных параметров.

Лишь небольшая часть разновидностей лабораторной плазмы ведет себя с самого начала так, как предполагали ее создатели. Огромное количество степеней свободы плазмы приводит к тому, что практически невозможно учесть все существенные параметры в теории или при постановке эксперимента. Некоторая доля соглашательства присуща многим плазменным экспериментам. Порою основой для конструирования плазменной установки служит какое-либо теоретическое построение, либо правдоподобное физическое соображение. Установка может работать и так, как было предсказано, но обычно этого не происходит. Такое расхождение между предсказанными и действительными результатами экспериментов было одной из основных движущих сил в плазменных исследованиях. Зачастую результаты проведенного эксперимента приводили к созданию новых теоретических моделей, или к открытию новых явлений, которые можно было изучать в дальнейшем.

¹⁾ См. также исследования советских физиков, посвященные этому вопросу [49*]. — *Прим. ред.*

Таблица 1

ПАРАМЕТРЫ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА (СОЛНЕЧНАЯ ПЛАЗМА НА
РАССТОЯНИИ 1 А.Е.Д.) [27]

Частота появления Степень ионизации	Присутствует постоянно Считается, что ионизация полная, но поток нейтральных частиц до сих пор не измерен	
Состав	Основная компонента — водород, несколько процентов гелия; следы более тяжелых элементов не обнаружены	
Направление потока	Радиальный разлет в пределах экспериментальной ошибки $\pm 10^\circ$ как в плоскости эклиптики, так и перпендикулярно ей	
	Спокойный период	Период возмущений
Плотность	3—10 пар ионов/см ³	20—40 пар ионов/см ³
Средняя скорость плазмы	300—400 км/с	800 км/с
Температура ионов	$\sim 8 \cdot 10^4$ К	$\sim 3 \cdot 10^5$ К
Энергия направленного движения протонов	~ 600 эВ	~ 3000 эВ
Энергия направленного движения электронов	$\sim 0,3$ эВ	$\sim 1,5$ эВ
Напряженность магнитного поля	$(3-8) \cdot 10^{-5}$ Гс	$(10-30) \cdot 10^{-5}$ Гс
Направление магнитного поля	В среднем под углом 45° к оси Солнце—Земля в направлении к Солнцу или от Солнца; силовые линии — спирали	
Электронная циклотронная частота	—	~ 500 с ⁻¹
Протонная циклотронная частота	—	$\sim 0,3$ с ⁻¹
Плотность энергии магнитного поля	60 эВ/см ³ (поле 5γ)	1000 эВ/см ³ (поле 30γ)
Плотность тепловой энергии	40—150 эВ/см ³	500—1500 эВ/см ³
Плотность энергии направленного движения	6000—10 000 эВ/см ³	100 000 эВ/см ³
Поток энергии	$\sim 0,5$ эрг/см ² ·с	~ 15 эрг/см ² ·с
Альфвеновская скорость	30—70 км/с	70—120 км/с
Отношение средней скорости плазмы к альфвеновской скорости	5 : 14	4 : 7

Расчетные параметры в типичных условиях

Дебаевский радиус	10 м
Плазменная частота	10^5 с ⁻¹
Время между электрон-электронными столкновениями	$4 \cdot 10^5$ с
Средняя длина свободного пробега (электроны и протоны)	$7 \cdot 10^9$ м

Плазма как состояние вещества представляет собой сложное образование, поэтому измерение ее характеристик в явном и однозначном виде — сложная задача. Например, определение местоположения твердого тела, жидкости или обычного газа — обычно тривиальная задача; однако определить положение плазмы с желаемой степенью точности иногда просто невозможно. Так, например, в импульсном пробкотроне плазма низкого давления захватывается слабым магнитным полем, а затем сжимается нарастающим магнитным полем до более высокой плотности и температуры вдали от стенок вакуумной камеры, в которой плазма первоначально образовалась. Плазма может существовать лишь в течение нескольких микросекунд: за это время невозможно поместить зонды в область, занятую плазмой, и определить ее форму и положение. С другой стороны, расположение плазмы термоэмиссионного дугового разряда низкого давления (§ 17) хорошо известно, так как эта стационарная плазма ограничена стеклянными стенками разрядной трубки.

Кроме формы и местоположения, к измеряемым параметрам плазмы относятся плотность, температура, теплопроводность, тензор диэлектрической проницаемости, интенсивность излучения, коэффициент поглощения излучения, частота столкновений, сопротивление (в нормальном и аномальном режимах), коэффициенты диффузии в обычном и фазовом пространстве, функция распределения и устойчивость либо неустойчивость плазмы. Разумеется, некоторые из этих параметров взаимосвязаны, и измерение одного из них позволяет определить другой или несколько других параметров. Существует множество методов измерения характеристик плазмы. В настоящей книге мы сможем описать лишь некоторые из них. Читателю мы рекомендуем обратиться к полезным монографиям [29—32], содержащим обширную библиографию по диагностике плазмы¹⁾.

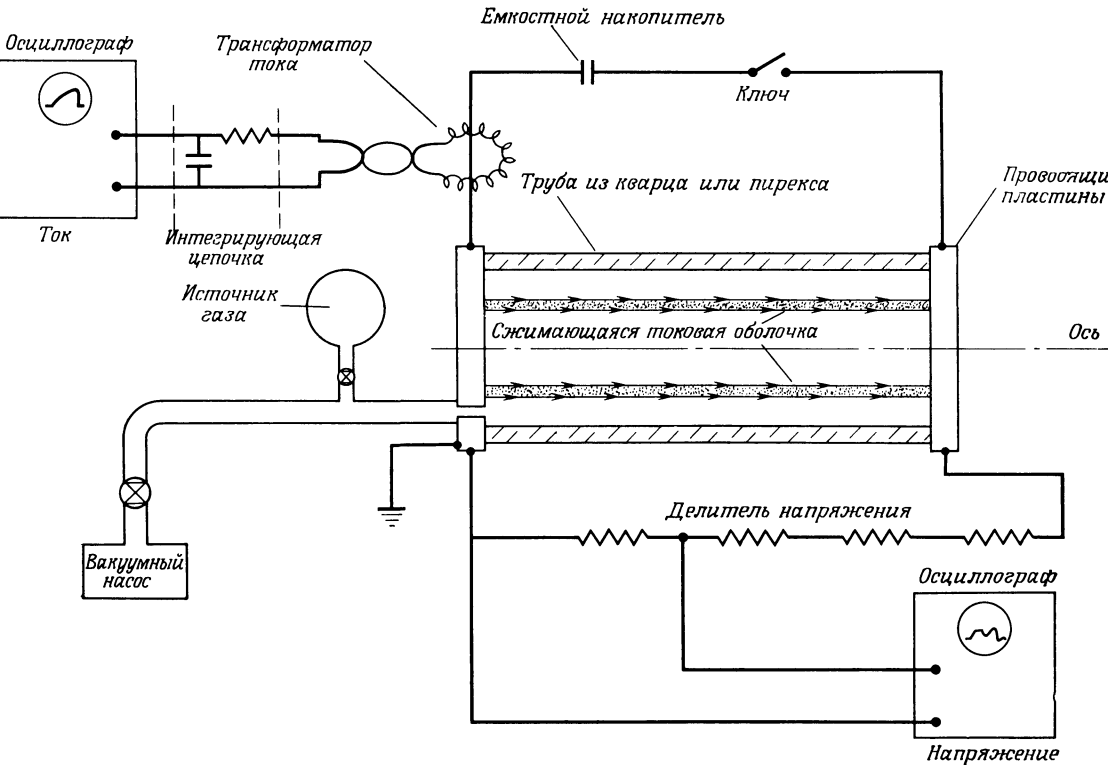
Плазменные измерения делятся на пассивные и активные в зависимости от применяемой методики. В процессе *пассивных* измерений, например при измерении собственного излучения, в плазму не вносятся никаких возмущений. При *активном* измерении плазма непосредственно вовлекается в процесс измерения, как, например, при зондировании плазмы СВЧ-излучением для определения ее плотности. При этом в плазму могут быть внесены возмущения, вызванные измерениями, что приводит к дополнительным ошибкам.

§ 24. ИЗМЕРЕНИЕ ТОКА И НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАЗМЕ

Поскольку плазма состоит из подвижных ионов и электронов, под действием внешнего электрического поля, приложенного к плазме, заряженные частицы приходят в движение и возникает электрический ток. Отношение напряженности электрического поля к плотности тока есть удельное сопротивление плазмы. Удельное сопротивление представляет собой один из коэффициентов переноса и зависит в простых моделях от частоты столкновений и плотности плазмы. Поэтому, сравнивая измеренные на опыте значения удельного сопротивления с теоретическими, можно проверить или изучить параметры плазмы.

В некоторых случаях измерение тока или напряжения во внешней электрической цепи устройства, используемого для создания плазмы, может дать полезную информацию о состоянии плазмы. Примером такого эксперимента является динамический пинч, рассматриваемый в § 11 гл. 3. В этом эксперименте (фиг. 20) напряжение к торцевым электродам прикладывается с помощью быстрого высокопоточного переключателя (игнитрона) одновременно с поджиганием разряда в тонкой цилиндрической оболочке у внешней вакуумной стенки. Магнитное поле оболочки с током, управляемым приложенным напряжением, создает силу, направленную внутрь оболочки и раз-

¹⁾ На русском языке по диагностике плазмы см. [50*—52*].— *Прим. ред.*



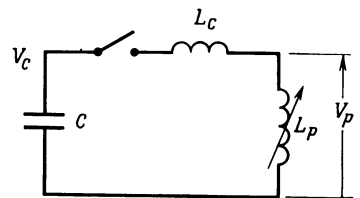
Фиг. 20. Схема эксперимента по динамическому пинчу, иллюстрирующая метод измерения тока и напряжения, связанных с разрядом.

гоняющую ее к оси. Из модели снежного плуга (snow-plow) (см. § 11 гл. 3) следует, что скорость схлопывания оболочки и время достижения ею оси зависят от таких параметров, как начальное давление газа и приложенное напряжение. Если бы плазма вела себя в соответствии с этой моделью, ее можно было бы рассматривать как тонкий идеальный проводник, движущийся к оси, согласно уравнению движения (3.11.4), решение которого представлено на фиг. 43.

Что касается внешних электрических характеристик, плазму пинча можно заменить переменной индуктивностью, значение которой зависит от радиуса токовой оболочки. В некоторых случаях время схлопывания пинча много меньше периода собственных колебаний цепи емкостного накопителя, поэтому приложенное напряжение не меняется (при условии, что ток через пинч не слишком велик) во время эксперимента. Кроме того, активное сопротивление внешней цепи пренебрежимо мало, поэтому эквивалентная схема динамического пинча имеет вид, показанный на фиг. 21. Индуктивность L_c складывается из индуктивностей переключателя, подводящей линии и всех прочих элементов внешней цепи, вносящих вклад в индуктивность.

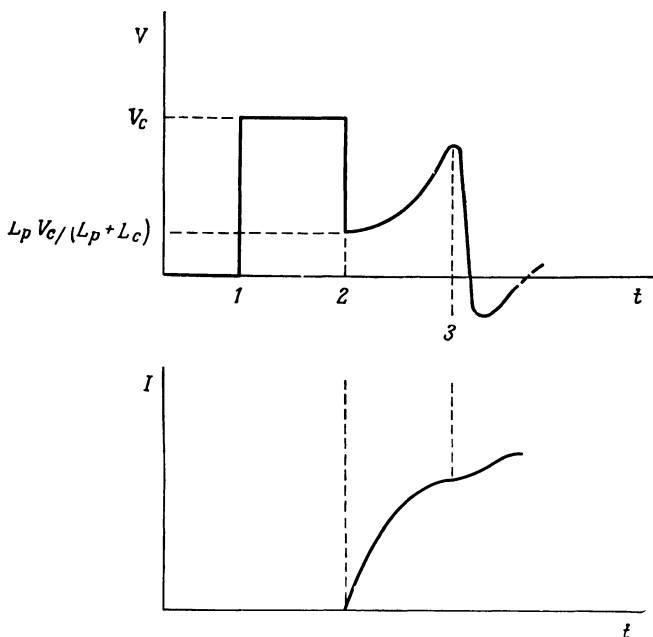
Индуктивность L_p соответствует плазме и зависит от ее радиуса. Если ток разряда медленно меняется, как это должно быть при $L_c \gg L_p$, то напряжение, падающее на плазме, на конечной стадии схлопывания имеет вид

$$V_p \approx I \frac{dL_p}{dt}.$$



Фиг. 21. Эквивалентная схема динамического пинча.

Следовательно, резкое торможение плазмы при



Фиг. 22. Зависимость напряжения V и тока I от времени в динамическом Z-пинче. 1 — момент включения напряжения; 2 — момент зажигания разряда; 3 — момент времени, когда разряд достигает оси.

достижении ею оси приводит к большому значению dL_p/dt и соответственно к большому изменению напряжения. Таким образом, измеряют время, за которое разряд достигает оси. Это время можно сравнить с теоретически предсказанным временем схлопывания. Зависимости напряжения и тока для типичного пинча ¹⁾ приведены на фиг. 22.

Ток в плазменном разряде обычно измеряется с помощью трансформатора тока с воздушным, ферритовым или железным сердечниками, используемыми в зависимости от экспериментальных требований к структуре фронта. Трансформатор тока генерирует напряжение, пропорциональное скорости изменения тока, проходящего через виток. Напряжение с трансформатора можно либо непосредственно записать с помощью осциллографа и затем графически проинтегрировать, либо еще перед записью проинтегрировать его с помощью пассивной (или активной) интегрирующей цепочки.

Трансформатор тока с воздушным сердечником вместе с пассивной интегрирующей цепочкой схематически показан на фиг. 20.

Задача 1.24.1. Во многих случаях ток в электрической цепи измеряется при помощи малого сопротивления, вводимого в цепь, с последующим измерением падения напряжения на нем. Обсудите, какие ошибки возникали бы при измерении тока таким способом в эксперименте с короткими сильноточными импульсами.

Задача 1.24.2. Какие искажения вероятнее всего ограничивают точность высокочастотных измерений с помощью трансформатора тока (т. е. в случае коротких импульсов)?

¹⁾ Более подробное обсуждение эквивалентной схемы плазменного пинча см. в книге [7], гл. 7.

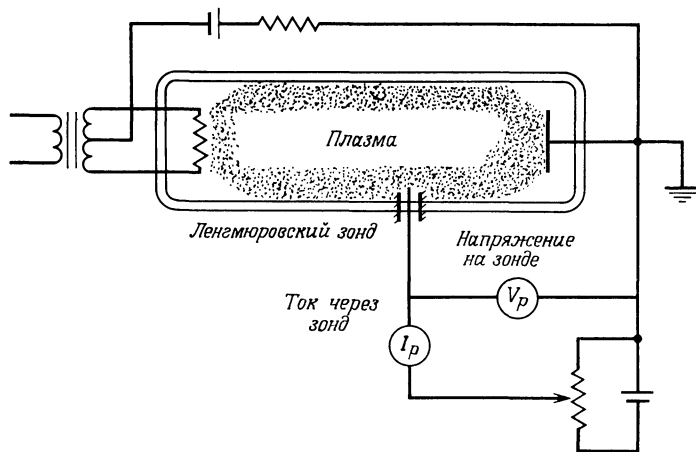
§ 25. ПЛАЗМЕННЫЕ ЗОНДЫ

Существует множество зондов, используемых для измерения свойств плазмы. Все они характеризуются тем, что вводятся внутрь плазмы для измерения ее локальных параметров в некоторой области. Большинство зондов так или иначе искажают плазму, в связи с чем нужно специально проверять, что измеренные зондом параметры плазмы не меняются при внесении в нее зонда. Простейшие зонды, применяемые в плазменных исследованиях, — это электростатический (ленгмюровский) и магнитный зонды.

25.1. Электростатические (ленгмюровские) зонды

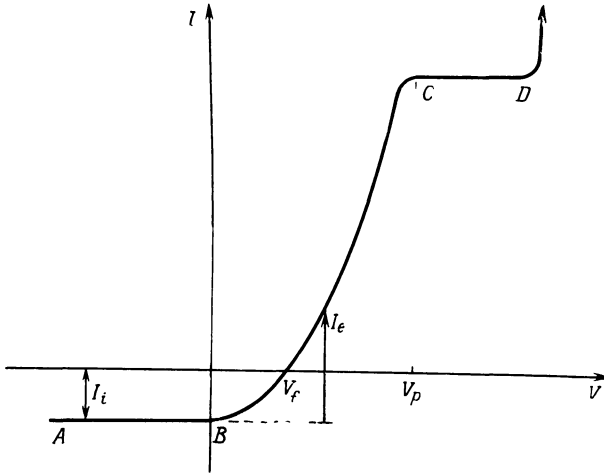
На фиг. 23 показана схема эксперимента, используемого для измерения параметров плазмы электростатическим зондом, а также электрической цепи, необходимой для подачи на зонд различных напряжений относительно плазмы во время измерения тока, отбираемого зондом. Ленгмюр и Мотт-Смит в работе [33] развили теорию таких зондов и показали, что они могут применяться для измерений плотности электронов n_e , плотности ионов n_i , температуры электронов T_e , потенциала плазмы V_p , плавающего потенциала плазмы V_f (т. е. потенциала зонда в отсутствие среднего тока) и плотности электронного и ионного флуктуационных токов J_{er} , J_{ir} . Именно эта работа привела к тому, что рассматриваемые зонды стали называться ленгмюровскими. В течение последующих лет в конструкцию зондов и оснащение их электроникой были внесены многие усовершенствования, связанные со спецификой их использования (в статье [34] дан хороший обзор теории и применения электростатических зондов)¹⁾. До сих пор они остаются простым и широко распространенным орудием исследования лабораторной плазмы.

Обычно ленгмюровский зонд представляет собой изолированную вольфрамовую проволочку малого диаметра с небольшим открытым участком на конце для отбора из плазмы электронов или ионов в зависимости от потенциала зонда относительно плазмы. На фиг. 24 представлена типичная вольтамперная характеристика, полученная с помощью ленгмюровского зонда в немагнитиченной плазме. Если потенциал зонда много больше локального потенциала плазмы, зонд притягивает электроны и отталкивает ионы,



Фиг. 23. Схема измерения параметров плазмы термоэмиссионного дугового разряда низкого давления ленгмюровским электростатическим зондом с соответствующей электрической цепью.

¹⁾ Обзор на русском языке по теории и применению электростатических зондов содержится в книге [51*]. — *Прим. ред.*



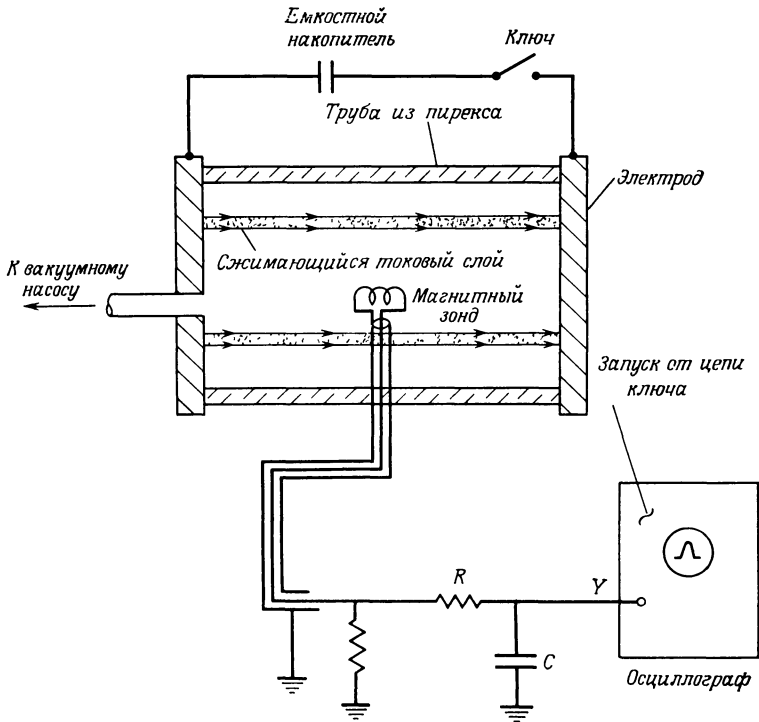
Фиг. 24. Вольтамперная характеристика зонда в плазме дугового разряда низкого давления.

Масштаб на графике не соблюден, так как максимальный электронный ток (в точке *C*) обычно в 1000 раз больше максимального ионного тока (в точке *A*).

что приводит к образованию вокруг зонда слоя, обогащенного электронами. Толщина этого слоя равна нескольким дебаевским радиусам. Возникает он по той же причине, что и экранирование данной заряженной частицы в плазме, а именно, радиус действия поля (потенциала) данной частицы ограничен в силу того, что вокруг нее стремятся собраться частицы противоположного знака. Таким образом, влияние зонда на плазму происходит лишь на расстоянии от зонда порядка дебаевского радиуса. Область *AB* на фиг. 24 соответствует ионному току насыщения для зонда, к которому приложено отрицательное напряжение относительно плавающего потенциала плазмы. Кривая *BC* соответствует чисто электронному току, так как при разности потенциалов, большей потенциала в точке *B*, зонд уже не отталкивает электроны. В области *CD* кривая почти горизонтальна, поскольку при напряжении, соответствующем этому участку, зонд собирает весь флуктуационный электронный ток, втекающий в приэлектродный слой вокруг зонда. При потенциалах выше потенциала в точке *D* падение напряжения на этом слое больше потенциала ионизации; электроны, идущие к зонду, ионизируют остаточный газ, что приводит к дуговому режиму у зонда.

25.2. Магнитные зонды

Магнитные зонды используются для измерения магнитных полей внутри или вне плазмы. Обычно зонд состоит из нескольких витков провода, собранных в катушку диаметром 1 мм и больше в зависимости от требований эксперимента. Принцип действия магнитных зондов состоит в том, что переменное во времени магнитное поле наводит в такой катушке э. д. с. Измеряя наведенную э. д. с., можно определить магнитное поле. Подобные магнитные зонды, позволяющие измерить компоненту магнитного поля в заданном направлении, наиболее часто используются в экспериментах по быстрому сжатию плазмы (например, в экспериментах по динамическому пинчу). На фиг. 25 показана возможная схема использования магнитного зонда для измерений в динамическом пинче. Если зонд ориентирован так, чтобы чувствовать θ -компоненту магнитного поля, сигнал, снимаемый с зонда, равен нулю до тех пор, пока токовый слой в сжимающейся плазме не пересечет места положения зонда. Магнитное поле в области зонда быстро нарастает



Фиг. 25. Схема эксперимента по динамическому пинчу, иллюстрирующая использование магнитного зонда для определения момента времени, в который сжимающаяся плазма достигает фиксированной точки.

до значения, определяемого током разряда. С помощью достаточно маленького и подвижного зонда можно определить зависимость положения токовой оболочки от времени и сравнить результаты с теоретически предсказанной скоростью сжатия.

Использование магнитных зондов затруднено тем обстоятельством, что зонды генерируют э. д. с., пропорциональную величине dB/dt , а не B . Эту трудность обычно обходят путем интегрирования сигнала с зонда посредством пассивной интегрирующей цепочки, как показано на фиг. 25. Напряжение V (в вольтах) на выходе электрической цепи зонда (фиг. 25) равно

$$V = \frac{nA}{RC} B \cdot 10^{-8} \text{ вольт,}$$

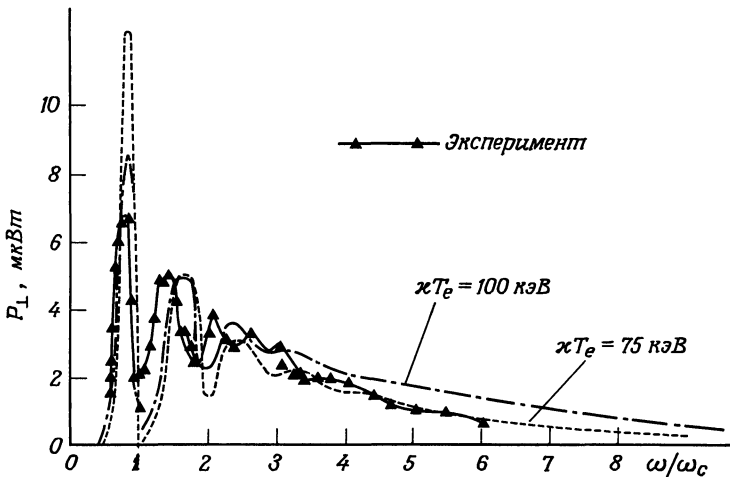
где n — число витков в катушке, A — площадь витка (см^2), B — магнитная индукция (Гс), R — сопротивление (Ом) и C — емкость (Ф).

Нужно особенно внимательно следить за электростатическим экранированием магнитных зондов, чтобы не регистрировать одновременно электрические поля, связанные с разрядом. Такое экранирование ограничивает максимальную частоту флуктуаций магнитного поля, которые могут быть измерены зондовыми системами. Во избежание ошибок при использовании магнитных зондов необходимо усвоить многие другие детали, касающиеся их работы ¹⁾.

Задача 1.25.1. Рассмотрите источники ошибок при использовании магнитных зондов для измерения полей в быстром и медленном разрядах. Какие ошибки вносит пассивная интегрирующая цепочка?

¹⁾ Обзор по теории и применению магнитных зондов см. в статье [35].





Фиг. 27. Сравнение спектра синхротронного излучения, испускаемого плазмой горячих электронов в магнитном поле 50 кГс с теоретическими спектрами плазмы, описываемой двумерным максвелловским распределением с температурами 75 и 100 кэВ [38].

P_{\perp} — мощность, излучаемая в телесный угол 0,1 ср в интервале частот $\Delta\omega = 0,1\omega$.

мониках. Это излучение можно зарегистрировать при помощи обычной супергетеродинной схемы, состоящей из смесителя, гетеродина и усилителя промежуточной частоты, или при помощи фотосопротивления из антимонода индия с криогенным охлаждением и системой сеточных фильтров [37]. Последнее устройство работает лучше всего в области длин волн от 8 до 0,1 мм, а супергетеродинная схема в области длин волн больше чем 4 мм.

Лихтенберг и др. [38] применили схему с охлажденным фотосопротивлением для исследования спектрального распределения синхротронного излучения из плазмы с магнитным удержанием. На фиг. 27 приведен график зависимости абсолютной интенсивности синхротронного излучения от частоты, снятой при помощи схемы с охлажденным фотосопротивлением.

Существует много других методов измерения электромагнитного излучения, испускаемого плазмой. Эта область физики плазмы активно изучается теоретически и экспериментально¹⁾.

26.3. Корпускулярные измерения

Плазма, удерживаемая магнитным полем, испускает заряженные или нейтральные частицы, количество которых зависит от температуры и плотности плазмы, а также от давления окружающего газа. Например, в экспериментах с магнитными ловушками (гл. 5) частицы за счет диффузии в пространстве скоростей попадают в конус потерь и, таким образом, вылетают из ловушки вдоль силовых линий магнитного поля. Эти частицы можно собрать после выхода из ловушки, найти распределение по энергиям и полное их число при помощи различных устройств, таких, как квадрупольные масс-спектрометры, кристаллические детекторы, умножители частиц и т. д. Свойства вышедших из ловушки частиц могут быть связаны с параметрами плазмы, оставшейся внутри ловушки.

При определенных условиях плазма может испускать нейтральные частицы. Вообще говоря, этим условиям удовлетворяет плазма низкой плотности с горячими ионами, образующаяся в хорошем вакууме. Быстрые нейтральные частицы возникают в процессе резонансной перезарядки быстрых

¹⁾ Прекрасный обзор работ по излучению, поглощению и рассеянию электромагнитных волн в плазме сделан в книге [39].

ионов при столкновении с медленными нейтральными частицами. Эти две частицы обмениваются электроном, образуя быструю нейтральную частицу и медленный ион. Если длина свободного пробега быстрой нейтральной частицы больше размеров системы, нейтральные частицы будут выходить из системы и можно найти распределение по энергиям и их полное число. Описанный процесс перезарядки вызывает потери энергии, поэтому в любом реакторе этот процесс следует сводить к минимуму, однако в настоящее время на нем основана распространенная методика измерений.

Хотя интерпретация свойств плазмы, извлекаемых из корпускулярных измерений, требует некоторого искусства, эти методы, вообще говоря, имеют важное значение и широко используются ¹⁾.

26.4. Нейтроны

В горячей плазме дейтерия или других термоядерных ионов могут возникать высокоэнергетические нейтроны [41]. Эти нейтроны могут нести информацию о реакциях синтеза, а моменты их испускания, полный выход и распределение по энергиям можно использовать для определения плотности и температуры ионов плазмы. К сожалению, известно, что нейтроны возникают также вследствие неустойчивостей плазмы, в результате которых некоторое число дейтронов ускоряется до больших энергий, а затем ударяется о стенки экспериментальной камеры, производя нейтроны. Нейтроны иногда возникают также в процессе фотораспада в плазме с горячими электронами ($T_e > 1$ МэВ), создаваемой методом циклотронного резонанса.

26.5. Рассеяние света

Изобретение и последующее развитие лазеров большой мощности привело к созданию новых методов измерения плотности и температуры плазмы. Эти новые методы основаны на рассеянии электромагнитных волн свободными электронами. Интенсивность электромагнитного излучения, рассеянного свободным электроном при падении электромагнитной волны малой амплитуды ($eE\lambda/2\pi m_0 c^2 \ll 1$), определяется томсоновским сечением $\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2$ ²⁾. Если рассеивающий электрон движется с малой скоростью ($v \ll c$), рассеянное излучение сдвигается за счет эффекта Доплера по частоте в ту или другую сторону в зависимости от направления наблюдения. Допплеровский сдвиг частоты рассеянного излучения используется для измерения температуры или распределения электронов по скоростям в плотной и не очень горячей ($T_e < 1,0$ кэВ) плазме ³⁾ (например, путем измерения доплеровского уширения лазерной линии после рассеяния светового пучка плазмой). Плазма с максвелловским распределением дает гауссову форму линии в рассеянном излучении, ширина которой пропорциональна температуре плазмы.

Если электронная температура плазмы больше 10 кэВ, спектр рассеянного излучения не обладает гауссовой формой, он довольно асимметричен и смещен в область более коротких волн. Длина волны излучения, рассеянного каким-либо отдельно взятым электроном с высокой энергией в данном направлении, зависит только от скорости этого электрона. Однако в плазме с горячими электронами ($T_e > 10$ кэВ), размеры которой ограничены лабораторными масштабами, электроны проходят через всю область рассеяния за время наблюдения. Поэтому при вычислении распределения электронов по скоростям нужно вносить поправку в интенсивность рассеянного излучения [43].

¹⁾ Хорошее описание полезных методов определения свойств плазмы путем измерения параметров отдельных частиц приведено в статье Ошера [40].

²⁾ Здесь $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона. — Прим. ред.

³⁾ Хороший обзор методов диагностики плазмы с помощью лазеров приведен в статье [42].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

1. *Tonks L., Langmuir I.*, Phys. Rev., **33**, 195 (1929).
2. *Rayleigh*, Phil. Mag., **11**, 117 (1906).
3. *Crookes W.*, Phil. Trans., **1**, 135 (1879).
4. *Bishop A. S.*, Project Sherwood, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958 (см. перевод: А. Бишон, Проект Шервуд, Атомиздат, 1961).
5. *Chapman S., Cowling T. G.*, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, London, 1952 (см. перевод: С. Чепмен, Т. Дж. Коулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
6. *Alfven H.*, Cosmical Electrodynamics, Oxford, N.Y., 1950 (см. перевод: Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1953).
7. *Glasstone S., Lovberg R. H.*, Controlled Thermonuclear Reactions, Van Nostrand, New York, 1960.
8. *Kolb A. C., Greim H. R.*, High Temperature Shock Waves в книге «Atomic and Molecular Processes», Academic, New York, 1962, ch. 5.
9. *Helmer J. C., Jepsen R. L.*, Proc. IRE, **49**, 1920 (1961) [см. перевод: ТИРИ, **12**, 2203 (1961)].
10. *Getty W. D., Smullin L. D.*, Journ. Appl. Phys., **34**, 3421 (1963).
11. *Haught A. F., Polk D. II.*, Phys. Fluids, **9**, 2047 (1966).
12. *Loeb B.*, Fundamental Processes of Electrical Discharges in Gases, Wiley, New York, 1955 (см. перевод первого издания: Л. Леб, Основные процессы электрических разрядов в газах, ИЛ, 1950).
13. *Клярфельд Б.*, Journ. Phys. (USSR), **5**, 155 (1941).
14. *Trivelpiece A. W.*, Slow Wave Propagation in Plasma Waveguides, San Francisco Press, San Francisco, 1967.
15. *Vandenplas P. E.*, Electron Waves and Resonances in Bounded Plasma, Wiley, New York, 1968.
16. *Boyd G. D., Field L. M., Gould R. W.*, Phys. Rev., **109**, 1393 (1958).
17. *Gould R. W., Trivelpiece A. W.*, A New Mode of Propagation on Electron Beams, Electric Waveguides Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, 1958.
18. *Coensgen F. H., Cummins W. F., Sherman A. E.*, Phys. Fluids, **2**, 350 (1959).
19. *Marshall J.*, Phys. Fluids, **3**, 135 (1960).
20. Proc. of an Intern. Symp. on Plasma Guns, Phys. Fluids, **7**, SI—S74 (1964).
21. *Wada J. Y., Knechtli R. C.*, Proc. IRE, **49**, 1926 (1961) [см. перевод: ТИРИ, **49**, 1926 (1961)].
22. *Rynn N., D'Angelo N.*, Rev. Sci. Instrum., **31**, 1326 (1960).
23. *Rynn N.*, Rev. Sci. Instrum., **35**, 40 (1964).
24. *Brown S. C.*, Basic Data of Plasma Physics, Wiley, New York, 1967.
25. *Dandl R. A. et al.*, Phys. Fluids, **9**, 1498 (1966).
26. *Linor W. I.*, Appl. Phys. Letters, **3**, 210 (1963).
27. *Anderson K. A.*, Ann. Rev. Nucl. Sci., **16**, 291 (1966).
28. *Lubin M. J., Fraas A. P.*, Sci. Amer., **224**, 21 (1971).
29. Plasma Diagnostic Techniques (eds. R. H. Huddleston and S. L. Leonard), Academic, New York, 1965 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).
30. *Heald M. A., Wharton C. B.*, Plasma Diagnostics with Microwaves, Wiley, New York, 1965 (см. перевод: М. Хилд, С. Уортон, Микроволновая диагностика плазмы, Атомиздат, 1967).
31. *Griem H. R.*, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, New York, 1964.
32. Methods of Experimental Physics: Plasma Physics (eds. Griem H. R. and Lovberg R. H.), part A, Academic, New York, 1970.
33. *Langmuir I., Mott-Smith H.*, Gen. Elec. Rev., **27**, 449, 538, 616, 762, 810 (1924).
34. *Chen F. F.*, в книге «Plasma Diagnostic Techniques» (eds. R. H. Huddleston and S. L. Leonard), Academic, New York, 1965, p. 113—200 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).
35. *Lovberg R. H.*, в книге «Plasma Diagnostic Techniques» (eds. R. M. Huddleston and S. L. Leonard), Academic, New York, 1965, p. 69—112 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).
36. *Albares D., Krall N. A., Oxley C. L.*, Phys. Fluids, **4**, 1031 (1961).
37. *Putley E. H.*, Appl. Opt., **4**, 649 (1965).
38. *Lichtenberg A. J., Sesnic S., Trivelpiece A. W.*, Phys. Rev. Letters, **13**, 387 (1964).
39. *Bekefi G.*, Radiation Processes in Plasmas, New York, 1966 (см. перевод: Дж. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд-во «Мир», 1971).
40. *Osher J. E.*, в книге «Plasma Diagnostic Techniques» (eds. R. H. Huddleston and S. L. Leonard), New York, 1965 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).

¹⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена при переводе.— Прим. ред.

41. *Goensgen F. H., Cummins W. F., Ellis R. E., Nexen W. E.*, в книге «Proceedings of the Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Research», vol. II, Новосибирск, 1968, p. 225.
42. *Kunze H. J.*, в книге «Plasma Diagnostics» (ed. W. Lochte-Holtgreven), North Holland, Amsterdam, 1968.
43. *Ward G., Pechacek R. E., Trivelpiece A. W.*, Phys. Rev., A3, 1721 (1971).
- 44*. *Сивухин Д. В.*, В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 3.
- 45*. *Морозов А. И., Соловьев Л. С.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Атомиздат, 1963, стр. 177.
- 46*. *Веденов А. А.*, Атомная энергия, 13, 5 (1962); в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1963, стр. 203.
- 47*. *Капица П. Л.*, ЖЭТФ, 57, 1801 (1969); 58, 377 (1970).
- 48*. *Петров Д. П., Филиппов Н. В., Филиппова Т. И., Храбров В. А.*, в книге «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», под ред. М. А. Леонтовича, т. IV, изд-во АН СССР, 1958.
- 49*. *Басов Н. Г., Крохин О. И.*, Труды Международной конференции по квантовой электронике, Париж, 1963, ЖЭТФ, 45, 171 (1964).
- 50*. *Подгорный И. М.*, Лекции по диагностике плазмы, Атомиздат, 1968.
- 51*. *Диагностика плазмы* (под ред. С. Ю. Лукьянова), Атомиздат, 1973.
- 52*. *Лукьянов С. Ю.*, в книге «Диагностика плазмы» (под ред. С. Ю. Лукьянова), Атомиздат, 1973.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Chandrasekhar S.*, Plasma Physics, Univ. Chicago Press., Chicago, 1960.
- Cowling T. G.*, Magnetohydrodynamics, Interscience, New York, 1957 (см. перевод: *Т. Каулинг*, Магнитная гидродинамика, ИЛ, М., 1959).
- Delcroix C. L.*, Introduction to the Theory of Ionized Gases, Interscience, New York, 1962.
- Longmire C. L.*, Elementary Plasma Physics, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: *К. Лонгмайр*, Физика плазмы, Атомиздат, 1966).
- Post R. F.*, The Forth State of Matter — Plasma, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California, Publication 41-5M, 1964.
- Rose D. J.*, Science, 172, 797 (1971).
- Simon A.*, An Introduction to Thermonuclear Research, Pergamon, New York, 1959.
- Spitzer L., Jr.*, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York, 1962 (см. перевод: *Л. Спитцер*, Физика полностью ионизованного газа, изд-во «Мир», 1965).
- См. также популярные статьи в Scientific American:
- Bowers R.*, «Plasma in Solids», No. 11, 46 (1963).
- Cahill L. J., Jr.*, «The Magnetosphere», No. 3, 58 (1965).
- Chen F. F.*, «The Leakage Problem of Fusion Reactors», No. 7, 76 (1967).
- Eastlund B. J.*, «The Fusion Torch: Unique Applications of Ultra High Temperature Plasmas», No. 8, 1970.
- Fowler T. K., Post R. F.*, «Progress toward Fusion Power», No. 12, 23 (1966).
- Gough W. C., Eastlund B. J.*, «The Prospects of Fusion Power», No. 2, 50 (1971).
- Haerendel G., Lüst R.*, «Artificial Plasma Clouds in Space», No. 11, 80 (1968).
- O'Brien B. J.*, «Radiation Belts», No. 5, 84 (1963).
- Parker E. N.*, «The Solar Wind», No. 4, 66 (1964).

ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ

Плазма представляет собой совокупность большого числа заряженных частиц. Совокупность большого числа частиц обычно рассматривают статистически как систему многих тел. Простейшим примером системы многих тел является набор невзаимодействующих точечных частиц, т. е. идеальный газ. Равновесная статистическая механика идеального газа позволяет получить уравнение состояния

$$p = nkT \quad (2.1)$$

(где n — плотность частиц, p — давление, T — температура, k — постоянная Больцмана) и среднюю внутреннюю энергию, приходящуюся на степень свободы частицы,

$$W = \frac{kT}{2}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что разреженный реальный газ можно рассматривать как идеальный газ, поскольку взаимодействия между частицами происходят редко, среднее расстояние между ними много больше атомных размеров и продолжительность столкновения гораздо меньше времени между столкновениями. Уравнение состояния реального газа обычно выражается в виде степенного ряда по плотности:

$$p = nkT [1 + nB(T) + n^2C(T) + \dots]; \quad (2.3)$$

здесь второй член учитывает взаимодействие пар молекул и т. д. Коэффициенты B, C, \dots называются *вириальными коэффициентами*.

Плазма также очень похожа на идеальный газ. Это не столь очевидно, поскольку электростатический потенциал каждой заряженной частицы простирается на расстояние порядка дебаевского радиуса λ_D , который много больше среднего расстояния между частицами $n_0^{-1/3}$; следовательно, частицы взаимодействуют друг с другом постоянно, а не только в течение короткого промежутка времени при столкновении. Несмотря на это, плазма во многих отношениях подобна идеальному газу. Хотя все частицы плазмы постоянно взаимодействуют между собой, средняя энергия их взаимодействия $\langle W_{ij} \rangle$ настолько мала, что термодинамические функции плазмы могут быть представлены в виде вириального разложения относительно термодинамических функций идеального газа по малому параметру $\langle W_{ij} \rangle / kT$.

В настоящей главе мы выясним, в чем состоят отличия плазмы от идеального газа. Эти отличия возникают благодаря корреляции между частицами плазмы, что вносит вклад во внутреннюю энергию, а также отражается на свободной энергии и уравнении состояния. Понятие корреляции, грубо говоря, означает, что частицы с одинаковым зарядом стремятся проводить как можно меньше времени вблизи друг друга, а частицы с противоположным зарядом стремятся сгруппироваться вместе. В идеальном газе частицы не коррелированы, так как каждая частица не чувствует своих соседей; в реальных же газах частицы хотя и слабо, но коррелированы.

Всюду в данной книге мы будем предполагать, что плазма является объектом классического рассмотрения, т. е. подчиняется Больцмановской статистике. Это означает, что отсутствует вырождение, а движение частиц можно описывать в рамках классической механики. Частицы взаимодействуют друг с другом посредством кулоновских сил ($F_{12} = -\nabla W_{12}$), причем потенциальная энергия кулоновского взаимодействия частиц 1 и 2 записывается в виде

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{|x_2 - x_1|}. \quad (2.4)$$

Для классического рассмотрения требуется, чтобы длина волны де Бройля λ была меньше среднего расстояния между частицами $n_0^{-1/3}$, а также меньше среднего расстояния наибольшего сближения кулоновских частиц в газе с кинетической энергией, соответствующей температуре T . Среднее расстояние наибольшего сближения $\sim e^2/\kappa T$. Поэтому условия

$$\lambda = \frac{h}{mv} \ll n_0^{-1/3}, \quad \lambda \ll \frac{e^2}{\kappa T} \quad (2.5)$$

представляют собой критерий применимости классического рассмотрения. Входящая в первое неравенство величина mv есть импульс частицы. Если выполняется первое условие, вырождение несущественно и можно пользоваться Больцмановской статистикой вместо статистики Ферми — Дирака или статистики Бозе — Эйнштейна¹⁾. Если выполнено второе неравенство, взаимодействие ближайших соседних частиц (например, парное столкновение) можно описывать классически²⁾.

§ 1. ПАРАМЕТР НЕИДЕАЛЬНОСТИ

Практически невозможно определить термодинамические свойства неидеальной системы, если не существует малого параметра, который можно использовать при описании отклонения свойств неидеальной системы от идеальной. В плазме таким малым параметром является отношение среднего расстояния наибольшего сближения к среднему расстоянию между частицами.

Параметр неидеальности, связанный с этим отношением, определяется следующим образом:

$$g = \left(\frac{8\pi e^2}{\kappa T} \right)^{3/2} n_0^{1/2}. \quad (2.1.1)$$

Выражение (2.1.1) можно переписать, используя дебаевский радиус $\lambda_D = (\kappa T/8\pi n e^2)^{1/2}$:

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3}. \quad (2.1.2)$$

Эта запись позволяет понять, почему плазменное приближение соответствует наличию большого числа частиц в дебаевской сфере (дебаевского числа). Когда дебаевское число велико, g мало и средняя потенциальная энергия частицы в плазме много меньше ее средней кинетической энергии. Если в плазме можно пренебречь энергией взаимодействия, она ведет себя как идеальный газ, и ее термодинамические функции могут быть разложены по степеням параметра неидеальности g . Покажем теперь, что именно этот параметр служит мерой отклонения термодинамических функций плазмы от термодинамических функций идеального газа.

¹⁾ Реально речь может идти лишь о фермиевском (для электронов), а не о бозевском вырождении. — *Прим. ред.*

²⁾ Второе неравенство приводит к появлению большого безразмерного параметра $e^2/\hbar v \gg 1$, играющего важную роль в физике кулоновских систем. — *Прим. ред.*

Задача 2.1.1. Покажите, что классическое рассмотрение неприменимо как при высоких, так и при низких температурах. В какой области температур (в электронвольтах) справедливо классическое рассмотрение плазмы с плотностями n , равными 10^{10} , 10^{13} и 10^{18} см $^{-3}$?

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим плазму, состоящую из N частиц, $N/2$ ионов и $N/2$ электронов. Если эта плазма находится в тепловом равновесии с термостатом при температуре T , вероятность нахождения N частиц в точках $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ дается распределением Гиббса

$$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\sum_k \sum_{i>k} W_{ik}}{\kappa T}\right); \quad (2.2.1)$$

здесь W_{ik} — потенциальная энергия, равная

$$W_{ik} = \frac{q_i q_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|} + \Phi_{\text{внеш}},$$

а

$$Z = \int \exp\left(-\frac{\sum_k \sum_{i>k} W_{ik}}{\kappa T}\right) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_N$$

— конфигурационный интеграл; $\Phi_{\text{внеш}}$ представляет собой потенциальную энергию, связанную с внешними источниками, например гравитационную энергию. Величина D есть плотность вероятности, характеризующая состояние полной системы частиц. Плотность вероятности нахождения частицы I в точке \mathbf{x}_1 дается выражением

$$F_1(\mathbf{x}_1) = \int D d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N. \quad (2.2.2)$$

В отсутствие внешних сил положения всех частиц должны быть равновероятны, т. е. F_1 — постоянная величина, равная

$$F_1 = \frac{1}{V},$$

где V — объем системы.

Аналогично плотность вероятности нахождения частицы I в точке \mathbf{x}_1 и частицы 2 в точке \mathbf{x}_2 определяется двухчастичной функцией распределения

$$F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int D d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \dots d\mathbf{x}_N. \quad (2.2.3)$$

Выражение для s -частичной функции распределения имеет вид

$$F_s(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s) = \int D d\mathbf{x}_{s+1} \dots d\mathbf{x}_N. \quad (2.2.4)$$

Функции распределения F_1, F_2, \dots, F_s (при $s < N$) называются *приведенными*. Плотность совместной вероятности $F_{s>1}$ учитывает эффекты взаимодействия частиц. Когда $W_{ik} \rightarrow 0$, присутствие частицы в точке \mathbf{x}_2 не влияет на вероятность нахождения частицы в точке \mathbf{x}_1 . В этом случае

$$F_s \xrightarrow{W_{ik} \rightarrow 0} F_1(\mathbf{x}_1) F_1(\mathbf{x}_2) \dots F_1(\mathbf{x}_s) = V^{-s}.$$

Групповое разложение Майера [1, 2] функций распределения F_s выделяет в явном виде эффекты взаимодействия частиц:

$$\begin{aligned} F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= [1 + P_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] F_1(\mathbf{x}_1) F_1(\mathbf{x}_2), \\ F_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= [1 + P_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + P_{12}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \\ &\quad + P_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) + T_{123}] F_1(\mathbf{x}_1) F_1(\mathbf{x}_2) F_1(\mathbf{x}_3), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

.....

Функция $P_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ называется *двухчастичной корреляционной функцией*. Она обращается в нуль при исчезновении взаимодействия и содержит информацию о том, что отталкивающиеся частицы имеют меньшую вероятность находиться вблизи друг друга, чем притягивающиеся. Поскольку кулоновские силы являются центральными,

$$P(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = P(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|).$$

В плазменном приближении взаимодействие слабое; это позволяет предположить следующую схему приближений:

$$T_{123} \ll P_{12} \ll 1.$$

Эта схема лежит в основе существующих теорий плазменного состояния вещества.

Полное распределение Гиббса зависит от пространственных координат и скоростей:

$$\begin{aligned} D^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \\ = \frac{1}{Z^*} \exp\left(-\frac{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\kappa T}\right) \exp\left(-\frac{\sum_{i>k} \sum_k W_{ik}}{\kappa T}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, однако, что скорости всех N частиц распределены независимо, т. е. распределение D^* можно представить в виде

$$D^* = \frac{\prod_i \exp(-m v_i^2 / 2\kappa T)}{[\int d\mathbf{v}_1 \exp(-m v_1^2 / 2\kappa T)]^N} D(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

Отсюда следует, что корреляции в пространстве скоростей отсутствуют, поэтому приведенные функции распределения, определяемые выражениями (2.2.2) — (2.2.4), записываются в виде

$$\begin{aligned} F_1^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) &= f_1(\mathbf{v}_1) F_1(\mathbf{x}_1), \\ F_2^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= f_1(\mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{v}_2) F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

здесь

$$f_1(\mathbf{v}_1) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v_1^2}{2\kappa T}\right).$$

Таким образом, нерелятивистская плазма с точки зрения распределения по скоростям представляет собой идеальный газ, и отклонения от идеального газа определяются пространственными корреляциями $F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$; именно по этой причине равновесная статистическая теория плазмы строится на языке функций распределения $D(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Заметим, что в релятивистской плазме нельзя пренебречь магнитными полями, создаваемыми движущимися зарядами, и в энергии взаимодействия появляется член, зависящий от скорости, что приводит к возникновению корреляций в пространстве скоростей¹⁾.

§ 3. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ В РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Корреляционные функции P_{12} могут быть вычислены в явном виде для ансамбля Гиббса в предположении $T_{123} \ll P_{12}$, если при вычислении функции распределения более высокого порядка F_3 учитывать лишь двухчастичные корреляции. Цепочка дифференциальных уравнений для F_s

¹⁾ Читателя, более подробно интересующегося распределением Гиббса, мы отсылаем к книге [3].

получается дифференцированием выражения (2.2.4):

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_1} = -\frac{1}{\kappa T} \sum_{k=2}^s F_s \frac{\partial W_{1k}}{\partial x_1} - \frac{1}{\kappa T} \sum_{\alpha} N_{\alpha} \int \frac{\partial W_{1\alpha}}{\partial x_1} F_{s+1}(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}^{\alpha}) dx_{s+1}^{\alpha}; \quad (2.3.1)$$

здесь \sum_{α} берется по всем сортам зарядов (частица α может быть ионом или электроном), а N_{α} — число частиц каждого сорта. Частица, обозначенная индексом $k = s + 1$, неотличима от других частиц того же сорта. Следовательно, имеется $N_{\alpha} - s$ одинаковых интегралов по dx_{s+1} . Интегрирование по $dx_{s+2} \dots dx_N$ дает F_{s+1} . Таким образом, тождественность частиц одного сорта позволяет заменить сумму \sum_{s+1}^N на $\sum_{\alpha} N_{\alpha}$ в предположении $N \gg s$. Если система имеет $N/2$ ионов и $N/2$ электронов, то $N_{\alpha} = N/2$ и \sum_{α} состоит просто из двух членов, в одном из которых $(s + 1)$ -я частица является ионом, а в другом — электроном. В общем случае система состоит из $N/2$ электронов, но ионы могут быть разных сортов.

При $s = 2$ ($N_{\alpha} - s$ заменено на N_{α}) соответствующее уравнение из цепочки (2.3.1) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{1}{\kappa T} F_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|} + \frac{1}{\kappa T} \sum_{\alpha} N_{\alpha} \int F_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{q_1 q_{\alpha}}{|x_1 - x_{\alpha}|} dx_{\alpha} = 0. \quad (2.3.2)$$

Уравнение (2.3.2) легко обобщить на случай ионов разных сортов, введя величину N_{α} — число частиц сорта α . Используя для функций F_2 и F_3 групповое разложение (2.2.5) и приближение $T_{123} \ll P_{12} \ll 1$, уравнение (2.3.2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{\kappa T} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{q_1 q_2}{|x_2 - x_1|} + \frac{1}{\kappa T} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int [P_{12}(x_2, x_{\alpha}) + P_{12}(x_1, x_{\alpha})] \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{q_1 q_{\alpha}}{|x_1 - x_{\alpha}|} dx_{\alpha} = 0; \quad (2.3.3)$$

здесь $\bar{n}_{\alpha} = N_{\alpha}/V$ — средняя плотность частиц плазмы с зарядом сорта α . Уравнение (2.3.3) решается методом преобразования Фурье. Вследствие центрального характера сил корреляционная функция зависит только от расстояния $|x_1 - x_2|$ между частицами. В этом случае фурье-образ парной корреляционной функции можно записать в виде

$$P_{12}^k \equiv \int \exp [ik \cdot (x_2 - x_1)] P_{12}(|x_1 - x_2|) dx_1.$$

Если предположить, что корреляционные функции разных пар зарядов (электрон — ион, ион — ион или электрон — электрон) совпадают по абсолютной величине, т. е.

$$P_{12} = -\frac{q_1 q_2 |P_{12}|}{|q_1 q_2|}, \quad (2.3.4)$$

то $|P_{12}|$ можно вынести за знак суммы по разным сортам частиц. Это предположение является разумным, по крайней мере в низшем порядке по g , поскольку P_{12} должна быть положительной для разноименных зарядов и отрицательной для одноименных. Кроме того, выражение (2.3.4) предполагает симметрию корреляций, которая может быть проверена после вычисления в том порядке по малому параметру, в котором проводится это вычис-

ление. После преобразования Фурье уравнение (2.3.3) принимает вид

$$P_{12}^k + 4\pi \frac{1}{\kappa T} \frac{q_1 q_2}{k^2} + 4\pi P_{12}^k \frac{1}{k^2 \kappa T} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 = 0.$$

Для зарядово-нейтральной плазмы $\sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} = 2n_e$, где n_e — концентрация электронов. Обратное преобразование Фурье дает

$$P_{12}(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) = -\frac{q_1 q_2}{\kappa T} \frac{\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}{\lambda_D}\right)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}; \quad (2.3.5)$$

здесь $\lambda_D = (\kappa T / 8\pi n_e e^2)^{1/2}$ — дебаевский радиус¹⁾. Выражение (2.3.5) с λ_D , определяемым формулой (2.3.5а), дает двухчастичную корреляционную функцию и радиус экранирования для многокомпонентной плазмы.

Можно выразить корреляционные функции через параметр неидеальности g и тем самым проверить, что групповое разложение в плазме проводится именно по этому параметру:

$$P_{12} = -\frac{q_1 q_2}{q^2} \frac{g}{8\pi} \frac{\exp(-|R|/\lambda_D)}{|R|/\lambda_D}; \quad (2.3.6)$$

здесь $R \equiv \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$.

Из (2.3.6) следует, что корреляции слабы, когда g мало [точнее говоря, $P_{12} \approx O(g)$]. Из этого выражения также видно, что корреляция между частицами пропорциональна знаку их взаимодействия и что корреляции исчезают либо при $n \rightarrow 0$, либо при $T \rightarrow \infty$. В выражении (2.3.6) опущены члены порядка g^2 , но с точностью до g величина P_{12} симметрична, т. е. одинакова для одноименно и разноименно заряженных частиц с равными зарядами; это подтверждает предположение (2.3.4).

Следовательно, вероятность нахождения частицы 1 в \mathbf{x}_1 и частицы 2 в \mathbf{x}_2 равна

$$F_2 = \frac{1}{V^2} \left[1 - \frac{q_1 q_2}{\kappa T} \frac{\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}{\lambda_D}\right)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \right]. \quad (2.3.7)$$

Выражение (2.3.7) несправедливо, если P_{12} порядка единицы. Из (2.3.6), однако, следует, что $|P_{12}| > 1$ лишь в объеме $R^3 \approx g^3 \lambda_D^3$, который мал по сравнению с объемом области взаимодействия λ_D^3 . Для последовательного вычисления термодинамических функций необязательно знать точное значение P_{12} в этой области.

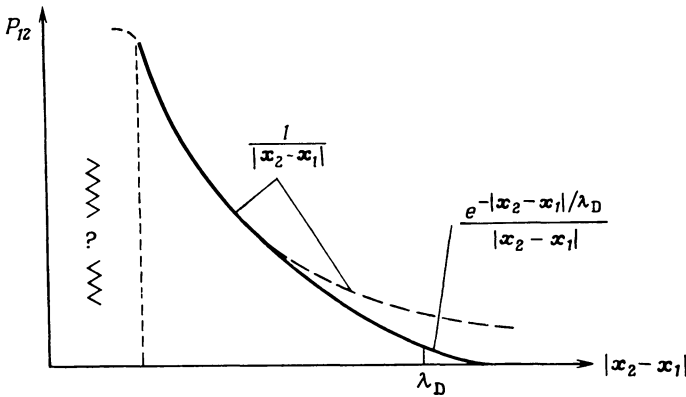
Корреляционная функция P_{12} обладает следующими свойствами:

- 1) $P_{12} > 0$, когда заряды частиц 1 и 2 противоположны;
- 2) $P_{12} < 0$, когда заряды частиц 1 и 2 одного знака;
- 3) P_{12} экспоненциально мала, когда расстояние между частицами больше дебаевского радиуса;
- 4) приближение $P_{12} \ll 1$ выполняется, пока $R/\lambda_D > g$.

Первые два свойства попросту напоминают нам, что разноименные заряды притягиваются, а одноименные отталкиваются. Третье свойство связано с дебаевским экранированием. На расстояниях, много больших λ_D , частица 2 имеет распределение, независимое от частицы 1. Это происходит потому, что все другие частицы плазмы скоррелированы с частицей 1, которая окружена облаком радиуса λ_D , имеющим заряд $q = -q_1$.

¹⁾ Можно обобщить выражение для дебаевского радиуса на случай, когда электроны и ионы подчиняются распределению Гиббса, но их температуры неодинаковы. В этом случае

$$\lambda_D \equiv \left(\sum_{\alpha} \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{\kappa T_{\alpha}} \right)^{-1/2}. \quad (2.3.5a)$$



Фиг. 28. Двухчастичная корреляционная функция P_{12} в зависимости от относительного расстояния между частицами в плазме
Штриховая кривая — график функции $1/|x_2 - x_1|$.

Приближения, использованные при обрыве группового разложения Майера ($P_{12} \ll 1$), заведомо справедливы вне дебаевской сферы. Если параметр неидеальности g мал, корреляции остаются слабыми и разложение Майера применимо, даже если $|x_1 - x_2|/\lambda_D \ll 1$. Внутри достаточно большой области корреляции малы, но не экспоненциально малы:

$$P_{12} = -\frac{q_1 q_2}{\kappa T |x_2 - x_1|}, \quad |x_2 - x_1| \ll \lambda_D.$$

Корреляции велики на расстоянии $|x_2 - x_1|$, меньшем среднего расстояния x_0 наибольшего сближения в газе кулоновских частиц при температуре T , $x_0 = e^2/\kappa T$; в этом случае приближения, использованные при вычислении P_{12} , не выполняются. Иерархия масштабов показана на фиг. 28.

§ 4. СВОБОДНАЯ ЭНЕРГИЯ ПЛАЗМЫ

Работа, совершенная над газом при бесконечно малом изотермическом изменении его состояния, равна приращению ΔF величины F , называемой *свободной энергией*, или *энергией Гельмгольца*. Свободная энергия связана с другими термодинамическими функциями следующим образом:

$$F = W - TS;$$

здесь W — внутренняя энергия, T — температура, S — энтропия системы. В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия минимальна.

Свободную энергию плазмы можно выразить через свободную энергию идеального газа с учетом поправок, пропорциональных двухчастичной корреляционной функции. Свободная энергия на единицу объема статистической системы, описываемой распределением Гиббса, равна [3]

$$F(\lambda) = -\frac{\kappa T}{V} \ln \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\kappa T} \sum_k \sum_{i>k} W_{ik}\right) dx_1 \dots dx_N, \quad (2.4.1)$$

где λ — параметр, обращающийся в единицу при полностью включенном взаимодействии в плазме. Введение λ позволяет представлять кулоновское взаимодействие включенным адиабатически.

Дифференцируя выражение (2.4.1) по λ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{Z(\lambda)V} \int \sum_k \sum_{i>k} W_{ik} \exp\left(-\frac{\lambda}{\kappa T} \sum_k \sum_{i>k} W_{ik}\right) dx_1 \dots dx_N = \\ &= \frac{1}{2V} \int \sum_{\alpha, \gamma} N_\alpha N_\gamma W_{\alpha\gamma}(|x_\gamma - x_\alpha|) F_2^{(\lambda)}(x_\alpha, x_\gamma) dx_\alpha dx_\gamma; \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

остающаяся сумма здесь берется по сортам зарядов; частица сорта α , так же как и частица сорта γ , может быть либо ионом, либо электроном; F_2 — двух-частичная функция распределения [формула (2.2.3)]. Поскольку $\sum_{\alpha, \gamma} W_{\alpha\gamma} = 0$, очевидно, что

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{\alpha, \gamma} \frac{\bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma}{2V} \int W_{\alpha\gamma} P_{12}^{(\lambda)}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\gamma) d\mathbf{x}_\alpha d\mathbf{x}_\gamma; \quad (2.4.3)$$

здесь $P_{12}^{(\lambda)} = - (q_1 q_2 \lambda / \kappa T | \mathbf{x} |) \exp(-\sqrt{\lambda} | \mathbf{x} | / \lambda_D)$. Поскольку $W_{\alpha\gamma}$ и P_{12} зависят только от расстояния $| \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\gamma |$, правая часть (2.4.3) имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \gamma} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma \int W(\mathbf{x}) P_{12}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Свободную энергию F получаем, интегрируя (2.4.3) по λ от 0 до 1. Заметим, что $F(\lambda = 0) = F_0$ есть свободная энергия идеального газа, поскольку при $\lambda = 0$ взаимодействие отсутствует. Таким образом,

$$F = F_0 + \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda \sum_{\alpha, \gamma} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma \int W_{\alpha\gamma} P_{12}^{(\lambda)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.4.4)$$

Интеграл в (2.4.4) можно вычислить, воспользовавшись полученным выше выражением для P_{12} (2.3.5), которое справедливо лишь при $| \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\gamma | > e^2 / \kappa T$. Однако относительный вклад в интеграл $\int W(\mathbf{x}) P_{12}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ от области $| \mathbf{x} | < e^2 / \kappa T$ пропорционален отношению объема $(e^2 / \kappa T)^3$ к объему области эффективного взаимодействия λ_D^3 ; это отношение представляет собой параметр неидеальности g^1). Поэтому интегрирование (2.4.4) дает

$$F = F_0 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^3 n_0^{3/2}}{\sqrt{\kappa T}}. \quad (2.4.5)$$

В случае газа с короткодействующими силами взаимодействия (например, для нейтрального газа) свободная энергия $F = F_0 - An^2$. В случае плазмы поправка к свободной энергии идеального газа пропорциональна более низкой степени плотности. Эта добавка к свободной энергии в газе с дальнедействующим взаимодействием (плазме), пропорциональная $n^{3/2}$, называется *дебаевской поправкой*.

Задача 2.4.1. Вычислите интеграл в выражении (2.4.4) и проверьте формулу (2.4.5).

Задача 2.4.2. Покажите, что следующая поправка к свободной энергии плазмы пропорциональна n^2 .

Задача 2.4.3. Оцените поправку к свободной энергии для типичной межзвездной плазмы с температурой $T_e = 1$ эВ и концентрацией электронов $n_e = 1$ см⁻³.

§ 5. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ

Для идеального газа уравнение состояния имеет вид $p = nkT$, где p — давление. Уравнение состояния плазмы можно получить, воспользовавшись теоремой вириала:

$$\langle K \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i \right\rangle; \quad (2.5.1)$$

¹⁾ Точнее, g в третьей степени. — Прим. ред.

здесь $KЭ$ — кинетическая энергия частиц системы, F_i — произвольные силы, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю, т. е.

$$\langle A \rangle \equiv \int AD_N dx_1 \dots dx_N. \quad (2.5.2)$$

Вириал включает в себя работу как сил взаимодействия, так и сил давления, оказываемого на частицы стенками сосуда:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i = \sum_l \sum_{k>l} \frac{\partial W_{kl}}{\partial |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|} \cdot |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l| + 3pV; \quad (2.5.3)$$

здесь $x_{kl} = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|$, а V — объем системы. Кинетическая энергия определяется выражением

$$\langle KЭ \rangle = \frac{3}{2} \left(\sum_{\alpha} N_{\alpha} \right) \kappa T, \quad (2.5.4)$$

где сумма берется по всем сортам частиц. Очевидно [см. вывод (2.4.3)], что уравнение состояния плазмы записывается в виде

$$p = 2n\kappa T - \sum_{\alpha, \gamma} \frac{n^2}{6} \int \mathbf{x}_{\alpha\gamma} \cdot \frac{\partial W_{\alpha\gamma}}{\partial \mathbf{x}_{\alpha\gamma}} P_{12}(|\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\gamma}|) d\mathbf{x}^{\alpha\gamma}. \quad (2.5.5)$$

Задача 2.5.1. Найдите уравнение состояния плазмы и покажите, что

$$p = 2n\kappa T \left(1 - \frac{g}{48\pi} \right).$$

Задача 2.5.2. Прочтите работу О'Нейла и Ростокера [4] и покажите, что следующая поправка в уравнении состояния есть $O(g^2 \ln g)$. Эта поправка связана с учетом *трехчастичных* корреляций.

§ 6. ПЛАЗМА КАК ЖИДКОСТЬ

Если параметр неидеальности g мал, то корреляции в системе незначительны и ими можно пренебречь. Во многих случаях, рассматриваемых в физике плазмы, параметр g мал и корреляциями пренебрегают. Однако пренебрежение корреляциями не означает, что взаимодействие вообще не учитывается. Потенциал Φ в точке \mathbf{x}_i внутри плазмы должен включать в себя, помимо всех внешних полей, потенциал Φ_p , создаваемый в точке \mathbf{x}_i всеми частицами системы, т. е.

$$\Phi_p = \sum_j \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.6.1)$$

Рассмотрим теперь небольшой объем $d\mathbf{x}_j$, такой, что $d\mathbf{x}_j \gg 1/n_{\alpha}$. Этот объем содержит большое число частиц, которые, как мы считаем, распределены в нем равномерно с точностью до первого порядка по g . Пусть концентрация частиц сорта α в точке \mathbf{x}_j равна $n_{\alpha}(\mathbf{x}_j)$. Среднее значение электрического потенциала в точке \mathbf{x}_i , создаваемого частицами, находящимися в элементе объема $d\mathbf{x}_j$ вблизи \mathbf{x}_j , определяется выражением

$$\langle d\Phi_i \rangle = \sum_{\alpha} \frac{d\mathbf{x}_j q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|}, \quad (2.6.2)$$

а полный потенциал в точке \mathbf{x}_i

$$\Phi_p(\mathbf{x}_i) = \sum_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{x}_j q_{\alpha} n_{\alpha}(\mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.6.3)$$

Выражения (2.6.2) и (2.6.3) не являются точными, поскольку не все частицы $n_\alpha(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j$ внутри объема $d\mathbf{x}_j$ находятся именно в точке \mathbf{x}_j , как считалось в (2.5.2) и (2.5.3). Тем не менее, если внутри $d\mathbf{x}_j$ находится много частиц, а $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \gg (d\mathbf{x}_j)^{1/3}$, усредненные потенциалы (2.6.2) и (2.6.3) представляют собой хорошие приближения к истинным потенциалам. Возможность перехода к непрерывному описанию дискретной системы связана с предположением о большом числе частиц в дебаевской сфере ($n\lambda_D^3 \gg 1$). В терминах этого усредненного потенциала распределение Гиббса принимает вид

$$D = \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{\sum_i q_i \varphi(\mathbf{x}_i) + W}{kT} \right);$$

здесь φ — полный электростатический потенциал

$$\varphi(\mathbf{x}_i) = \varphi_p(\mathbf{x}_i) + \varphi_{\text{внеш}}(\mathbf{x}_i),$$

а в W включены потенциалы прочих полей, например гравитационного. Потенциал $\varphi_{\text{внеш}}$ содержит электростатические потенциалы, создаваемые другими источниками, не включенными в статистическое рассмотрение (например, пластинами конденсатора, пробными частицами и т. д.). Плотность частиц сорта α в точке \mathbf{x}_i дается следующей формулой:

$$n_\alpha(\mathbf{x}_i) = n_\alpha \exp \left(- \frac{q_\alpha \varphi_p + q_\alpha \varphi_{\text{внеш}} + W}{kT} \right). \quad (2.6.4)$$

Выражение (2.6.4) справедливо в плазменном приближении, когда пренебрегают дискретностью плазмы, но учитывают характерное для плазмы явление экранирования голых частиц.

§ 7. ИДЕАЛЬНАЯ ПЛАЗМА

Плазменное приближение (т. е. учет взаимодействия без корреляций) соответствует в точности идеализированной плазме, которая может быть мысленно построена из реальной. Представьте, что каждая частица реальной плазмы поделена на P равных частей. Если реальные частицы имеют плотность n_0 , заряд q_0 , массу m_0 и температуру T_0 , система после деления обладала бы следующими свойствами:

$$n^* = P n_0, \quad q^* = \frac{1}{P} q_0, \quad m^* = \frac{m_0}{P}, \quad T^* = \frac{T_0}{P}.$$

Такие характеристики системы, как дебаевский радиус экранирования, плазменная частота, параметр неидеальности, корреляционная функция, свободная энергия и уравнение состояния, при делении меняются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_D^* &= \lambda_{D0}, \\ \omega_p^* &= \omega_{p0}, \\ g^* &= g_0 \frac{1}{P}, \\ P_{12}^* &= (P_{12})_0 \frac{1}{P}, \\ \rho^* &= \text{Плотность зарядов} = \rho_0, \\ F^* &= F_0 - \frac{1}{P} \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q_0^3}{\sqrt{kT_0}} n_0^{3/2}, \quad p = 2n\kappa T \left[1 + O\left(\frac{1}{P}\right) g_0 \right]. \end{aligned}$$

Если повторить такую процедуру много раз (так что $P \rightarrow \infty$), корреляционная функция, параметр неидеальности, поправка к свободной энергии

и поправка к уравнению состояния обращаются в нуль. Все эти параметры характеризуют одночастичные свойства плазмы. Коллективные же характеристики (плазменная частота, дебаевский радиус, плотность заряда) не меняются в процессе деления. Взаимодействия в этой системе связаны лишь со средними полями, корреляции же или какие-либо другие проявления дискретности отсутствуют. Такая система является идеальной проводящей жидкостью.

В описанном выше процессе деления частиц плазмы исчезают корреляции между отдельными частицами, но сохраняется взаимодействие между большими группами частиц. Если, наоборот, ослаблять взаимодействие, полагая $q \rightarrow 0$, все отличительные свойства плазмы пропадут (т. е. $\lambda_D \rightarrow \infty$, $\omega_p \rightarrow 0$ и т. д.).

§ 8. ПОТЕНЦИАЛ ПРОБНОГО ЗАРЯДА В ПЛАЗМЕ

Экранирующие свойства плазмы, непосредственно следующие из вида двухчастичных корреляционных функций, в гидродинамическом приближении проявляются при вычислении электростатического потенциала, создаваемого зарядом q_T , помещенным в точку $\mathbf{x} = 0$. Плотность заряда в плазме

$$\rho_q = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha},$$

причем концентрация $n_{\alpha}(\mathbf{x})$ из-за наличия пробного заряда q_T теперь отлична от постоянной ($= N/V$) и определяется выражением

$$n_{\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{N_{\alpha}}{V} \exp\left(-\frac{q_{\alpha}\varphi}{kT_{\alpha}}\right), \quad (2.8.1)$$

где φ — электростатический потенциал ($= q_T/x + \langle \varphi_p \rangle$) в точке \mathbf{x} , возникший при внесении пробного заряда. Обозначив $n_{\alpha} = N_{\alpha}/V$, запишем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi q_T \delta(\mathbf{x}) - 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \exp\left(-\frac{q_{\alpha}\varphi}{kT_{\alpha}}\right).$$

в котором, если пробный заряд не очень велик, экспоненту можно записать в виде

$$\exp\left(-\frac{q_{\alpha}\varphi}{kT_{\alpha}}\right) \approx 1 - \frac{q_{\alpha}\varphi}{kT_{\alpha}} + \dots$$

Таким образом, уравнение Пуассона

$$[\nabla^2 \varphi = -4\pi q_T \delta(\mathbf{x}) + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2 \varphi}{kT_{\alpha}}],$$

имеет решение

$$\varphi = \frac{q_T}{|\mathbf{x}|} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|}{\lambda_D}\right), \quad (2.8.2)$$

где λ_D совпадает с дебаевским радиусом экранирования, полученным при вычислении двухчастичных корреляций:

$$\lambda_D^{-2} = 4\pi \sum_{\alpha} \frac{n_{0\alpha} q_{\alpha}^2}{kT_{\alpha}}.$$

Вблизи пробного заряда потенциал совпадает с потенциалом изолированного заряда $q_T/|\mathbf{x}|$. На более далеких расстояниях потенциал равен $\varphi_{\text{проб}} + \langle \varphi_p \rangle$, где $\langle \varphi_p \rangle = (q_T/|\mathbf{x}|) [\exp(-x/\lambda_D) - 1]$ — потенциал поляризованного заряда, образованного облаком вокруг пробного заряда.

Задача 2.8.1. Обратите внимание, что $F_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, т. е. совместная вероятность нахождения частицы 1 в элементе объема dx_1 вблизи точки x_1 и частицы 2 в элементе объема dx_2 вблизи точки x_2 , определяется выражением

$$F_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = F_1(x_1) dx_1 F_c(x_2 | x_1) dx_2,$$

где F_c — условная вероятность найти частицу в элементе dx_2 вблизи x_2 при условии, что есть частица в элементе объема dx_1 вблизи x_1 . Используя выражение (2.8.2) для потенциала заряда, помещенного в точке $x_1 = 0$, покажите, что

$$F_2(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_1(x_2) \exp \left[-\frac{q_1 q_2 \exp(-|x_2 - x_1|/\lambda_D)}{\kappa T |x_2 - x_1|} \right],$$

и таким образом выведите выражение

$$P_{12} = -1 + \exp \left[-\frac{q_1 q_2}{\kappa T |x_2 - x_1|} \exp \left(-\frac{|x_2 - x_1|}{\lambda_D} \right) \right], \quad (2.8.3)$$

которое является лучшим приближением для двухчастичной корреляционной функции, чем выражение (2.3.7) ¹⁾. Обратите внимание, что (2.8.3) близко к (2.3.7) в большей области значений $|x_2 - x_1|$, но дает $P_{12} = -1$ при $|x_2 - x_1| \rightarrow 0$ для корреляции между двумя электронами.

В точках, расположенных вблизи пробного заряда,

$$\Phi_{\text{близ}} = \frac{q_T}{|x - x_0|} - \frac{q_T}{\lambda_D}.$$

Первый член — это потенциал изолированного пробного заряда, второй связан с поляризацией плазмы. Вдали от пробного заряда $\Phi \rightarrow 0$, в чем опять проявляется эффект экранирования.

Очевидно, что потенциал плазмы $\Phi - \Phi_{\text{проб}}$ равен

$$\langle \Phi_p \rangle = \frac{q_T}{|x|} \left[\exp \left(-\frac{|x|}{\lambda_D} \right) - 1 \right]$$

и полный поляризационный заряд

$$q_p = \int_0^{\infty} 4\pi R^2 \left(\frac{\nabla^2 \Phi_p}{-4\pi} \right) dR = -q_T.$$

В качестве *пробного заряда* q_T можно теперь рассмотреть *одну* из частиц плазмы. Проведенное вычисление показывает, что каждая частица плазмы окружена дебаевским облаком радиуса λ_D с зарядом, равным по величине и противоположным по знаку заряду частицы. Плазму можно представлять себе как набор таких «одетых» пробных частиц.

Задача 2.8.2. Прочтите работу Фримена и Бука [5] и обсудите, как им удалось учесть ближайшее окружение и получить формулу

$$P_{12} = -1 + \exp \left(-\frac{\lambda_D}{r} \frac{g}{8\pi} \right) + \frac{\lambda_D}{r} \frac{g}{8\pi} \left[1 - \exp \left(-\frac{r}{\lambda_D} \right) \right]. \quad (2.8.4)$$

Разберитесь, чем фактически отличаются друг от друга выражения (2.3.7), (2.8.3) и (2.8.4).

Задача 2.8.3. Распределение в (2.8.1) неправильно нормировано, поскольку пробный заряд не был включен в статистическую сумму. Оцените связанную с этим ошибку.

¹⁾ Это утверждение не совсем точное. Для разноименных зарядов на малых расстояниях выражение (2.8.3) экспоненциально велико. — *Прим. ред.*

§ 9. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАЗМЫ

Зная зависимость n_α от φ , можно замкнуть уравнения равновесия и получить следующую систему незацепляющихся уравнений равновесного состояния:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{\text{полн}} &= -4\pi \rho_{\text{внеш}} - 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(x), \\ \varphi_{\text{полн}} &= \langle \varphi \rangle + \varphi_{\text{внеш}}, \\ n_{\alpha}(x) &= \bar{n}_{\alpha} \exp \left(-\frac{q_{\alpha} \langle \varphi \rangle + q_{\alpha} \varphi_{\text{внеш}} + W}{\kappa T} \right). \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

Величина W может означать потенциальную энергию частиц, находящихся, например, в поле силы тяжести. При получении этой системы уравнений предполагалось, что 1) $\bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2$ и 2) плазма находится в термодинамическом равновесии.

Существует множество простых задач, которые можно решить с помощью уравнений (2.9.1), но только с использованием дальнейших упрощений. При любом способе построения теории плазмы встречаются одни и те же трудности. С двумя из них мы уже столкнулись, а именно:

1. Уравнения зацепляются [в результате мы имеем цепочку уравнений типа (2.3.2)].

2. Уравнения нелинейные (каждое звено в цепочке нелинейное).

В системе уравнений (2.9.1) удалось справиться с первой трудностью теории, устремив $P_{12} \rightarrow 0$. Вторая трудность (нелинейность) преодолевается посредством приближения слабой связи путем разложения по потенциалу взаимодействия, так же как и в случае пробного заряда, а именно

$$\exp \left(-\frac{q\varphi}{\kappa T} \right) \approx 1 - \frac{q\varphi}{\kappa T} + \dots$$

При этом получаем

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho_{\text{внеш}} - 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha 0} \left(1 - \frac{q_{\alpha} \varphi}{\kappa T_{\alpha}} - \frac{W}{\kappa T_{\alpha}} \right). \quad (2.9.2)$$

Если плазма нейтральна, т. е. $\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} = 0$, то линейное уравнение (2.9.2) в ряде случаев может быть решено. Характерным масштабом длины в уравнении (2.9.2) опять является

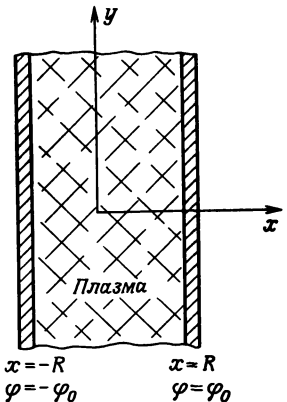
$$\lambda_D = \left(\frac{8\pi q^2 n_0}{\kappa T} \right)^{-1/2}.$$

9.1. Плазменный конденсатор

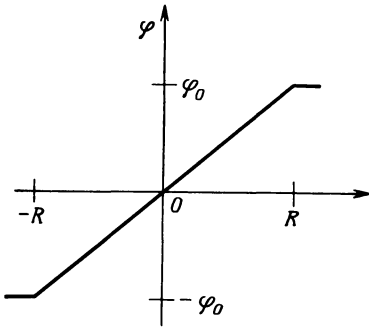
Рассмотрим плазму во внешнем электрическом поле (фиг. 29). Внутри плазмы $\rho_{\text{внеш}} = 0$, потенциалы других сил W отсутствуют. Кроме того, будем предполагать, что число электронов в плазме равно числу ионов. Тогда решение уравнения (2.9.2) с $\varphi = \varphi_p + \varphi_0$ имеет вид

$$\varphi = A e^{x/\lambda_D} + B e^{-x/\lambda_D}.$$

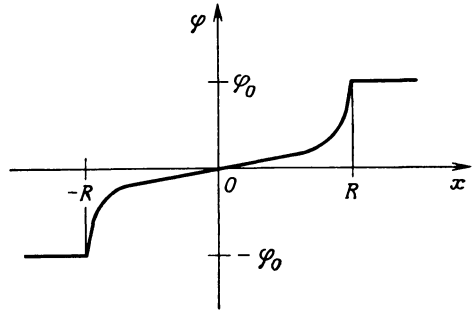
Выберем $x = 0$ в средней плоскости; тогда из соображений симметрии следует, что $\varphi(x = 0) = 0$, откуда имеем $A = -B$. Учтя граничное условие



Фиг. 29. Схематическое представление плазменного конденсатора.



Фиг. 30. Распределение потенциала в плазменном конденсаторе при $R \ll \lambda_D$.



Фиг. 31. Распределение потенциала в плазменном конденсаторе при $R \gg \lambda_D$.

$\varphi(x=R) = \varphi_0$, получаем решение в виде

$$\varphi = \varphi_0 \frac{e^{x/\lambda_D} - e^{-x/\lambda_D}}{e^{R/\lambda_D} - e^{-R/\lambda_D}}. \quad (2.9.3)$$

Если пластины конденсатора расположены близко одна от другой ($R \ll \lambda_D$), то потенциал равен (фиг. 30)

$$\varphi_{R < \lambda_D} = \varphi_0 \frac{x}{R}.$$

В этом пределе экранирование отсутствует.

Если пластины находятся далеко друг от друга ($R \gg \lambda_D$), то

$$\varphi_{R \gg \lambda_D} = \varphi_0 \frac{e^{x/\lambda_D} - e^{-x/\lambda_D}}{e^{R/\lambda_D}}.$$

В последнем случае потенциал очень мал всюду, кроме точек $x = \pm R$. Действительно, в остальных точках $\varphi \approx \varphi_0 e^{-R/\lambda_D}$, что мало (фиг. 31), когда

$$R \gg \lambda_D.$$

Следовательно, в бесстолкновительную плазму (в отсутствие корреляций) внешнее поле проникает лишь на глубину порядка дебаевского радиуса от границы плазмы. Если же электрическое поле, приложенное к плазме большого объема, вызывает равномерное по всему объему падение потенциала или течение тока, внутри системы обязательно должны существовать какие-либо корреляции (столкновения) или другие неравновесные процессы (неустойчивость, турбулентность). Такая способность плазмы экранировать внешние потенциалы в отсутствие нетепловых флуктуаций иногда используется для диагностики. Если электрическое поле проникает в бесстолкновительную плазму, это указывает на наличие в плазме больших флуктуаций относительно среднего состояния, т. е. плазма далека от теплового равновесия.

9.2. Электрическое поле в ионосфере, вызванное силой тяжести

Рассмотрим изотермическую плазму, находящуюся в поле силы тяжести, и в уравнении (2.9.2) положим $\rho_{\text{внеш}} = \varphi_0 = 0$, а $W = -m_\alpha g R_3^2/x$, где m_α — масса частицы сорта α , R_3 — радиус Земли, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Начало системы координат выберем

в центре Земли. Тогда уравнение (2.9.2) запишется в виде

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi - \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} g R_3^2}{x q_{\alpha} \lambda_{D\alpha}^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dx' \exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\lambda_D)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} g R_3^2}{g_{\alpha} \lambda_{D\alpha}^2 |\mathbf{x}'|};$$

здесь $\lambda_{D\alpha}^2 = 4\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2 / \kappa T_{\alpha}$. Поскольку теперь $x > R_3 \gg \lambda_D$, существенный вклад в подинтегральное выражение дает лишь небольшая область объема $\approx \lambda_D^3$ вблизи точки \mathbf{x} . Таким образом, напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} g R_3^2}{2q_{\alpha} x^2} \hat{\mathbf{i}}_x. \quad (2.9.4)$$

Электрическое поле в плазме, находящейся в поле силы тяжести, возникает благодаря разделению зарядов. Если в плазме $n_e = n_i$, поле \mathbf{E} направлено от Земли. Дело в том, что ионы благодаря своей большей массе опускаются сильнее, образуя положительный заряд возле Земли. У поверхности Земли напряженность электрического поля равна

$$\mathbf{E} = -\frac{m_i g}{2e} \hat{\mathbf{i}}_x.$$

§ 10. КУЛОНОВСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПЛАЗМЫ

Примеры, приведенные выше (плазменный конденсатор, потенциал пробного заряда, плазма в поле силы тяжести), поучительны, однако все результаты можно было бы получить, рассматривая плазму как покоящуюся жидкость с плотностью заряда $n(x)$. Статистическая теория нам была нужна только для того, чтобы выяснить, в каком приближении можно пренебречь корреляциями в плазме.

Плазма обладает свойствами, которые не имеют аналога в гидродинамической модели: одним из примеров служит кулоновская энергия плазмы. Это *корреляционное* явление. Если бы равные числа электронов и ионов были распределены равномерно, они не обладали бы кулоновской энергией, так как для удаления частицы плазмы на бесконечность из такой нейтральной некоррелированной плазмы не требовалось бы никакой энергии. (В подобной системе любой электрон находился бы в среднем на таком же расстоянии от другого электрона, как и от иона.) В действительности, однако, даже в нейтральной плазме каждый электрон находится в среднем ближе к притягивающему его иону, чем к отталкивающему электрону (корреляция), и поэтому необходимо затратить энергию для того, чтобы удалить электрон из эффективной потенциальной ямы. Кулоновская энергия (коллективная энергия плазмы) будет отрицательной. Этот результат приведет, например, к изменению энергии ионизации нейтральных атомов в плазме.

Чтобы вычислить энергию, необходимую для разрушения плазмы, выберем опять какую-либо частицу плазмы в качестве пробного заряда q_T в точке $x = 0$. Потенциал вблизи этого заряда

$$\varphi_T = q_T \frac{1}{x} e^{-x/\lambda_D}.$$

Чтобы удалить частицу j , расположенную в точке x_j , из поля действия этого потенциала, необходимо затратить энергию

$$W_{cj} = q_j q_T \int_{x_j}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{x} e^{-x/\lambda_D} \right) dx.$$

Условная вероятность нахождения частицы j в точке x_j при условии, что в точке $x = 0$ находится заряд q_T , имеет вид (как следует из задачи 2.8.1)

$$P_c(x_j | 0) = \left(1 - \frac{q_j q_T}{x_j \kappa T} e^{-x_j/\lambda_D}\right) \frac{1}{V}. \quad (2.10.1)$$

Задача 2.10.1. Проверьте, что вклад в кулоновскую энергию от области с размерами порядка $e^2/\kappa T$ мал и что выражение (2.10.1) «почти» правильно нормировано. (Обратите внимание на то, что $\int_{\Delta V} P_c(x_1 | x_2) dx_2 \ll 1$ для любого объема ΔV .)

Энергия, необходимая для удаления частицы j на бесконечность из поля действия потенциала пробного заряда и усредненная по возможным положениям пробного заряда, равна

$$W_{cj} = q_j q_T \int P_c(x_j | 0) dx_j \int_{x_j}^{\infty} \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{|R|} e^{-R/\lambda_D} \right) dR. \quad (2.10.2)$$

Поскольку интегралы в (2.10.2) сходятся при $x = 0$ и поскольку объем области $[r_0^3 \ll (\lambda_D/n\lambda_D^3)^3]$, в которой точный вид P_{12} не известен, много меньше объема области взаимодействия λ_D^3 , мы с хорошей точностью можем расширить область интегрирования, включив в нее точку $x = 0$. Интегралы берутся непосредственно, и мы получаем

$$W_{cj} = \frac{q_j q_T}{V} \left(4\pi\lambda_D^2 - \frac{4\pi q_j q_T}{\kappa T} \frac{\lambda_D}{2} \right) = \frac{4\pi\lambda_D^2}{V} q_j q_T \left(1 - \frac{q_j}{q_T} \frac{1}{16\pi n\lambda_D^3} \right). \quad (2.10.3)$$

В качестве частицы j , удаляемой из поля частицы q_T , можно было бы взять любую из N частиц, и любую из N частиц можно было бы выбрать в качестве пробной. Поэтому полная кулоновская энергия и кулоновская энергия единицы объема нейтральной плазмы имеют вид

$$W_C = \text{Энергия} = \frac{1}{2} 4\pi \sum_{\alpha} N_{\alpha} q_{\alpha} \sum_{\gamma} N_{\gamma} q_{\gamma} \frac{\lambda_D^2}{V} \left(1 - \frac{q_{\alpha}}{q_{\gamma}} \frac{1}{n\lambda_D^3 16\pi} \right), \quad (2.10.4)$$

$$\frac{W_C}{V} = \text{Плотность энергии} = -\frac{n_0 e^2}{2\lambda_D} \quad (2.10.5)$$

(множитель $1/2$ возник потому, что каждая частица учитывалась дважды); здесь $n_0 = N/V$ и сумма берется по ионам и электронам. Заметим, что при $n_i = n_e$ основной вклад в (2.10.4) исчезает при суммировании по ионам и электронам, а остающаяся часть кулоновской энергии W_C есть корреляционная энергия. По сравнению с первым второй член мал (порядка $1/n\lambda_D^3$), но не исчезает при суммировании. Кулоновская энергия плазмы с большим избытком зарядов какого-либо одного сорта положительна, в то время как энергия нейтральной плазмы отрицательна.

Снова мы видим, что отношение электростатической энергии к тепловой в нейтральной плазме равно параметру неидеальности:

$$\frac{W_C}{n_0 \kappa T} = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} = g.$$

Хотя в области взаимодействия находится много частиц, энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению с кинетической энергией частиц.

Задача 2.10.2. Вычислите (или напишите) кулоновскую энергию для системы с $\lambda_D \ll q^2/\kappa T$, например, для системы без экранировки.

Задача 2.10.3. При какой плотности плазмы ион H^- , помещенный в плазму с термодинамической температурой 10^5 эВ, начинает распадаться?

§ 11. ОБСУЖДЕНИЕ

Плазма как в лабораторных, так и в природных условиях редко находится в равновесном состоянии. Тем не менее приведенное здесь рассмотрение теории равновесной статистической механики для описания свойств дает определенную информацию в том смысле, что вскрывает некоторые свойства плазмы, которые отражаются на всем ее поведении. Во-первых, тот факт, что физика плазмы представляет собой одну из проблем многих тел с далекодействующими силами взаимодействия, отчетливо проявляется в задаче о равновесии плазмы и, кроме того, лежит в основе рассмотрения более сложных ее состояний. Во-вторых, представление о плазме как об идеальном газе проводится наряду с представлением о плазме как о жидкости. Из рассмотрения задачи о равновесии плазмы следует, что оба эти представления справедливы. По своим термодинамическим свойствам (уравнение состояния, свободная энергия и т. д.) плазма превращается в идеальный газ в пределе

$$n\lambda_D^3 \rightarrow \infty.$$

В этом же пределе, однако, плазма в смысле динамики аналогична идеальной жидкости, причем средние поля в каждой точке пространства определяют движение (большого числа) частиц плазмы, находящихся в малом элементе объема. В-третьих, вычисление корреляционной функции было проведено *только* в случае равновесной плазмы. *Предполагается*, что корреляции остаются малыми в большинстве неравновесных ситуаций.

В последующих главах мы сохраним общий статистический подход, но посредством подходящих процедур усреднения он будет *сведен* к системе уравнений, описывающих разнообразные свойства динамического поведения, которые допустимы для вещества в плазменном состоянии.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer J. E., Mayer M. G., Statistical Mechanics of Fluids, New York, 1940 (см. перевод: Дж. Майер, М. Геннепт-Майер, Статистическая механика, ИЛ, 1952).
2. Green H. S., Nucl. Fusion, 1, 69 (1961).
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
4. O'Neil T., Rostoker N., Phys. Fluids, 8, 1109 (1965).
5. Frieman E. A., Book D. L., Phys. Fluids, 6, 1700 (1963).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Balescu R., Statistical Mechanics of Charged Particles, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, изд-во «Мир», 1967).
- Боголюбов Н. И., Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
- Callen H. B., Thermodynamics, New York, 1960.
- Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, 2nd ed., Cambridge, London, 1958 (см. перевод: С. Чепмен, Т. Дж. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
- Kittel C., Thermal Physics, Wiley, New York, 1969.
- Ter Haar D., Elements of Statistical Mechanics, New York, 1954.
- Tolman R. C., Principles of Statistical Mechanics, New York, 1938.
- Веденов А. А., в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 280.

Для точного описания состояния системы многих тел, строго говоря, необходимо знать положение и скорость всех частиц системы, тем не менее многие свойства системы можно описать, пользуясь макроскопическими величинами, такими, как плотность, температура, средняя скорость и давление. Эти величины связаны законами сохранения и динамическими законами переноса импульса и энергии. Цель настоящей главы состоит в определении этих величин и установлении связи между ними, исходя из точного многочастичного описания, и последующего решения полученных уравнений для объяснения некоторых свойств плазмы. Макроскопические величины и макроскопические уравнения соответствуют неполному описанию плазмы, т. е. в них содержится меньше информации, чем в точном многочастичном описании. Поэтому они не в состоянии дать представление о некоторых свойствах плазмы (таких, как затухание Ландау и кинетические неустойчивости; см. гл. 1). Но они *вполне* достаточны для исследования широкого круга плазменных явлений и приложений.

Макроскопические переменные плазмы определяются через моменты по скоростям от функции распределения $f(x, v, t)$, которая используется для статистического описания системы. Соотношения между этими макроскопическими переменными выводятся из дифференциального уравнения для функции распределения.

§ 1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Полное статистическое описание системы N частиц дается функцией распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_N, v_1, v_2, \dots, v_N, t), \quad (3.1.1)$$

причем $\int F dx_1 \dots dx_N dv_1 \dots dv_N = 1$. Для плазмы, состоящей из $N/2$ ионов и $N/2$ электронов, в термодинамическом равновесии $F = D$, где D — функция распределения Гиббса, рассмотренная в гл. 2. Для плазмы, не находящейся в термодинамическом равновесии, функция F в принципе должна быть найдена путем анализа движения всех N частиц. Однако практически невозможно ни вычислить, ни даже оценить F . Вместо этого плазма в общем случае описывается неполным образом с помощью более простых величин, полученных из F . Эти приведенные величины часто поддаются вычислению, т. е. обычно можно определить, как система эволюционирует от заданного начального состояния. Как правило, можно задать разумные начальные условия для переменных, используемых при достаточно упрощенном описании плазмы. Наиболее детальное описание плазмы, которое еще поддается рассмотрению, дает, по-видимому, *одночастичное распределение*. Интегрирование F по скоростям и координатам всех частиц сорта α , кроме одной, и умножение на число частиц N_α данного сорта α приводит к выра-

жению для одночастичной функции распределения частиц сорта α :

$$\begin{aligned} \bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) = \\ = N_\alpha \int F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N, t) d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_N; \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

здесь $\bar{n}_\alpha = N_\alpha/V$, а V — объем системы. Величина $\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$ представляет собой число частиц сорта α в элементе объема $d\mathbf{x}_1 d\mathbf{v}_1$ в момент времени t вблизи $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1$. Для плазмы в тепловом равновесии $f_\alpha^{(1)}$ является максвелловским распределением. В других случаях часто оказывается возможным предположить правдоподобные начальные условия для $f_\alpha^{(1)}$, и, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, многие плазменные явления качественно не зависят от точной формы $f_\alpha^{(1)}$.

Зная F , можно определить полный набор приведенных распределений. Например, интегрирование выражения (3.1.1) по координатам и скоростям всех частиц, кроме двух, дает двухчастичную функцию распределения

$$\begin{aligned} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma f_{\alpha\gamma}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) = \\ = N_\alpha N_\gamma \int F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N) d\mathbf{x}_3 d\mathbf{x}_4 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_3 d\mathbf{v}_4 \dots d\mathbf{v}_N, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

в которой индексы α и γ могут соответствовать либо одному сорту частиц, либо разным сортам. Эволюция приведенных распределений описывается уравнениями, которые можно получить из уравнения для F , с помощью процедуры, аналогичной (3.1.2) и (3.1.3). Многочастичная функция распределения (3.1.1) подчиняется уравнению Лиувилля [1]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{v}_i + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_i} \cdot \mathbf{a}_i^T \right) = 0; \quad (3.1.4)$$

здесь \mathbf{a}_i^T — полное ускорение i -й частицы за счет внешних сил и сил взаимодействия между частицами. Хорошо известное из статистической механики уравнение Лиувилля можно записать в виде $dF/dt = 0$. Это уравнение можно интерпретировать как уравнение движения гиперчастицы с координатами $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ в фазовом гиперпространстве под действием заданных сил, зависящих от координат и скоростей. Значение F , т. е. плотности вероятности, сохраняется вдоль траектории гиперчастицы. Это, разумеется, не означает, что F постоянно во времени в любой фиксированной точке $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N)$ или не меняется в пространстве от точки к точке.

Дифференциальное уравнение для одночастичной функции распределения получается из уравнения Лиувилля (3.1.4) интегрированием по координатам и скоростям всех частиц, кроме одной, т. е.

$$\frac{\partial \bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)} + N_\alpha \int \mathbf{a}_1^T \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_1} d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_N = 0; \quad (3.1.5)$$

здесь предположено, что

$$\int d\mathbf{x}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} \cdot \int \mathbf{v}_2 F d\mathbf{v}_2 = 0.$$

Последнее выражение представляет собой средний поток частиц через границы системы. Поскольку, согласно предположению, N_α — постоянная величина, этот поток равен нулю. Аналогично $\int (\partial F / \partial \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_2 = 0$ вследствие условия $F(v = \infty) = 0$. Если на i -ю частицу действуют только внешние силы,

т. е. если ускорение i -й частицы

$$\mathbf{a}_i = \frac{q_i}{m_i} \mathbf{E} + \frac{q_i}{m_i} \frac{[\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}]}{c}, \quad (3.1.6)$$

третий член в уравнении (3.1.5) принимает вид

$$N_\alpha \int \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_1} dx_2 \dots dx_N dv_2 \dots dv_N = \frac{q_1}{m_1} \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}]}{c} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}. \quad (3.1.7)$$

В частном случае отсутствия взаимодействия между частицами кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} f_\alpha^{(1)} + \mathbf{a}^E \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} f_\alpha^{(1)} = 0. \quad (3.1.8)$$

Так же как и уравнение Лиувилля, уравнение (3.1.8) показывает, что в отсутствие взаимодействия плотность частиц в фазовом пространстве сохраняется вдоль траектории одной частицы сорта α , движущейся под действием внешней силы $\mathbf{F}^{(E)} = m_\alpha \mathbf{a}^E$.

В действительности на i -ю частицу наряду с внешними силами действуют также силы со стороны других частиц, т. е.

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{q_i}{m_i} \mathbf{E} + \frac{q_i}{m_i} \frac{[\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}]}{c} + \sum_j \mathbf{a}_{ij}, \quad (3.1.9)$$

где \mathbf{a}_{ij} — ускорение под действием сил межчастичного взаимодействия. В этом случае третий член в уравнении (3.1.5) имеет вид

$$\mathbf{a}_1^E \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} (\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}) + \int \sum_j N_\alpha \mathbf{a}_{1j} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_1} dx_2 \dots dx_N dv_2 \dots dv_N. \quad (3.1.10)$$

Но, поскольку все частицы одного сорта β тождественны, отсюда следует, что

$$\sum_j \int \mathbf{a}_{1j} F dx_2 \dots dx_N dv_2 \dots dv_N = \sum_\beta N_\beta \int \mathbf{a}_{1\beta} F dx_2 \dots dx_N dv_2 \dots dv_N;$$

здесь $\mathbf{a}_{1\beta}$ — ускорение, приобретаемое частицей 1 под действием силы со стороны некоторой частицы сорта β . Используя определение $f_{\alpha\beta}^{(2)}$, выражение (3.1.10) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{a}_1^E \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} (\bar{n}_\alpha f_\alpha^{(1)}) + \sum_\beta \int \mathbf{a}_{1\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_\beta, t) dx_\beta dv_\beta. \quad (3.1.11)$$

Отсюда следует, что соотношение (3.1.5) не является замкнутым уравнением относительно $f^{(1)}$ и для его решения требуется знать $f^{(2)}$. Ряд теоретических исследований по физике плазмы посвящен поиску путей, позволяющих в действительности избежать вычисления $f^{(2)}$, прибегая вместо этого к какому-либо методу оценки второго члена в (3.1.11) из физических соображений. Метод приближенного вычисления второго члена в уравнении (3.1.11) зависит от природы сил взаимодействия между частицами. Например, если силы взаимодействия велики и имеют малый радиус действия, этот член в основном определяется изменением во времени одночастичной функции распределения в процессе парных столкновений. Тогда уравнение (3.1.5) можно приближенно записать в следующем виде:

$$\frac{df_\alpha^{(1)}}{dt} \equiv \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} f_\alpha^{(1)} + \mathbf{a}_1^E \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} f_\alpha^{(1)} = \left. \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} \right|_{\text{столк}},$$

здесь

$$\left. \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} = - \sum_{\beta} \bar{n}_{\beta} \int \mathbf{a}_{1\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} f_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{\beta}, t) d\mathbf{x}_{\beta} d\mathbf{v}_{\beta}. \quad (3.1.12)$$

Однако в плазме взаимодействие между частицами дальнодействующее и сила, действующая на частицу, может быть разбита приближенно на две части: одна часть — это средняя сила, действующая на частицу со стороны большого числа относительно удаленных частиц, другая часть связана с ближайшими соседними частицами. В разреженной плазме таких близких частиц мало и средняя сила со стороны удаленных частиц в общем случае значительно превосходит силу, создаваемую ближайшими соседями. Удобно объединить усредненные силы межчастичного взаимодействия с внешними силами, вводя ускорение $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{внеш}} + \langle \mathbf{a}_{\text{внутр}} \rangle$. Это полезно сделать, поскольку средняя сила со стороны удаленных частиц не зависит от их точного местоположения, а зависит только от локальной плотности этих частиц. Силы, не зависящие от точного расположения всех частиц, похожи на *внешние* силы. Сила, действующая со стороны ближайшей частицы, вызывает следующее изменение функции распределения (происходящее по существу с частотой парных столкновений):

$$\left. \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} = - \sum_{\beta} \int (\mathbf{a}_{1\beta} - \langle \mathbf{a}_{1\beta}^{\text{внутр}} \rangle) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} f_{\alpha\beta}^{(2)} d\mathbf{x}_{\beta} d\mathbf{v}_{\beta}. \quad (3.1.13)$$

Таким образом, кинетическое уравнение, пригодное для изучения плазмы, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha}^{(1)} + \mathbf{v}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} f_{\alpha}^{(1)} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}]}{c} \right\rangle \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} f_{\alpha}^{(1)} = \left. \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial t} \right|_{\text{столк}}; \quad (3.1.14)$$

здесь $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{B} \rangle$ равны сумме внешних и усредненных внутренних полей, они удовлетворяют усредненным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle &= 4\pi \langle \rho_q \rangle, \\ \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle &= \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{J} \rangle. \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (3.1.14) связана с влиянием лишь очень небольшого числа близких частиц. Если положить $\partial f / \partial t|_{\text{столк}} = 0$, т. е. пренебречь парными столкновениями, уравнение (3.1.14) превратится в кинетическое уравнение плазмы, называемое *уравнением Власова* или *бесстолкновительным уравнением Больцмана*. Начиная с гл. 7, мы дадим систематическое построение цепочки статистических уравнений, первым звеном которой является уравнение Власова. Свойства плазмы, следующие из решений уравнения Власова, описаны в гл. 7—10.

В настоящей главе кинетическое уравнение (3.1.14) используется только для построения упрощенного описания плазмы в рамках макроскопических переменных и для установления связи между ними.

§ 2. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛАЗМЫ

Одночастичная функция распределения (3.1.2) дает неполное описание состояния плазмы, однако и она не является измеримой макроскопической переменной, характеризующей поведение либо плазмы, либо нейтрального газа. Макроскопически наблюдаемые величины связаны с различными моментами по скоростям одночастичной функции распределения.

2.1. Плотность

Плотность частиц сорта α в точке \mathbf{x} конфигурационного пространства в момент времени t дается выражением

$$n_\alpha(\mathbf{x}, t) = \int \bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.2.1)$$

где f_α — одночастичная функция распределения (3.1.2) и $\bar{n}_\alpha = N_\alpha/V$. Поскольку в данной главе используется только одночастичная функция распределения, индекс 1 опущен. Массовая плотность $\rho_{m\alpha}$ и плотность заряда $\rho_{q\alpha}$ определяются таким же образом, т. е.

$$\rho_{m\alpha}(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_\alpha m_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (3.2.2)$$

$$\rho_{q\alpha}(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.2.3)$$

2.2. Поток частиц и средняя скорость

Поток частиц сорта α , пересекающих единичную площадку в конфигурационном пространстве в единицу времени вблизи точки \mathbf{x} в момент времени t , записывается в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \\ &= n_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}, t); \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

здесь \mathbf{V}_α — средняя скорость частиц сорта α , определяемая выражением

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{\bar{n}_\alpha}{n_\alpha(\mathbf{x}, t)} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.2.5)$$

2.3. Плотность тока

Плотность электрического тока, создаваемого заряженными частицами сорта α в точке \mathbf{x} в момент времени t , равна

$$\mathbf{J}_\alpha(\mathbf{x}, t) = q_\alpha \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} = q_\alpha \Gamma_\alpha(\mathbf{x}, t) = q_\alpha n_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (3.2.6)$$

2.4. Поток тепла

Поток кинетической энергии частиц сорта α , пересекающих единичную площадку в единицу времени в точке \mathbf{x} в момент времени t , записывается следующим образом:

$$\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \bar{n}_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.2.7)$$

2.5. Тензор давления

Тензор давления частиц сорта α в точке \mathbf{x} в момент времени t записывается в виде

$$\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_\alpha m_\alpha \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (3.2.8)$$

В случае сферически-симметричного распределения по скоростям он сводится к диагональному тензору давления

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} p_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & p_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & p_\alpha \end{bmatrix}, \quad (3.2.9)$$

где p_α — скалярное давление,

$$p_\alpha = \frac{m_\alpha \bar{n}_\alpha}{3} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)^2 f_\alpha d\mathbf{v} = n_\alpha k T_\alpha. \quad (3.2.10)$$

Нарушение сферической симметрии тензора давления часто бывает связано с процессами релаксации [2] (например, с *вязкостью жидкостей*), и поэтому тензор давления обычно разбивают на два тензора. Один тензор имеет след, равный нулю, другой является диагональным, т. е. $\mathbf{P}_\alpha = \Pi + \rho$ [величина ρ определяется выражением (3.2.10)]. Следовательно,

$$\Pi = \int \bar{n}_\alpha m_\alpha f_\alpha \left[(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) - \frac{1}{3} |(\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{V}_\alpha)| \right] d\mathbf{v}.$$

Иногда оказываются полезными и другие моменты функции распределения. Однако простой физический смысл имеют лишь те моменты, которые мы привели выше.

Задача 3.2.1. Докажите, что \mathbf{P}_α — диагональный тензор, если функция f_α сферически-симметрична по \mathbf{v} . При каких условиях тензор \mathbf{P}_α является диагональным, но с $p_1 \neq p_2 \neq p_3$?

§ 3. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ (ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ) УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМЫ

Подобно тому как моменты функции распределения дают макроскопические параметры, моменты (по скоростям) кинетического уравнения (3.1.14) дают уравнения для макроскопических переменных и, таким образом, описывают эволюцию плазмы во времени с макроскопической точки зрения. Поскольку полученные этим путем уравнения совпадают с гидродинамическими уравнениями для сплошной среды, теории, использующие макроскопические уравнения, называются *гидродинамическими*.

3.1. Уравнение непрерывности

Проинтегрируем уравнение (3.1.14) по всему пространству скоростей:

$$\int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right\rangle \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v} = \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} d\mathbf{v}; \quad (3.3.1)$$

здесь $f_\alpha \equiv f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Правая часть и третий член в левой части этого уравнения исчезают после интегрирования, так как оба они описываются выражением

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \cdot \int \mathbf{a}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) F d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_N d\mathbf{v}_2 \dots d\mathbf{v}_N \right] d\mathbf{v}_1, \quad (3.3.2)$$

которое равно нулю, поскольку $F(v_1 = \pm \infty) = 0$. Это показывает, что столкновения изменяют скорости частиц в системе, но не влияют непосредственно на пространственную плотность. Уравнение (3.3.1) есть уравнение непрерывности, которое после интегрирования по $d\mathbf{v}$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot n_\alpha(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}_\alpha(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.3.3)$$

Заметим, что оператор $\nabla \equiv \partial/\partial \mathbf{x}$, фигурирующий в этом макроскопическом уравнении, следует из преобразования

$$\int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} = \nabla \cdot n \mathbf{V}.$$

Уравнение непрерывности отражает закон сохранения числа частиц. В правой части уравнения (3.3.3) могут быть члены, соответствующие источникам и стокам и связанные с ионизацией и рекомбинацией. Уравнение сохранения массы получается из уравнения (3.3.3) путем умножения его на массу частицы m_α :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\alpha}) + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{V}_\alpha) = 0; \quad (3.3.4)$$

здесь $\rho_{m\alpha} (=n_\alpha m_\alpha)$ — массовая плотность. Уравнение сохранения заряда получается из уравнения (3.3.3) почленным умножением его на заряд частицы q_α :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{q\alpha}) + \nabla \cdot (\rho_{q\alpha} \mathbf{V}_\alpha) = 0, \quad (3.3.5)$$

где $\rho_{q\alpha} (=n_\alpha q_\alpha)$ — плотность заряда.

Задача 3.3.1. Как разрешить следующий парадокс? Хотя равенство $\int (\partial f_\alpha / \partial t) |_{\text{столк}} dv = 0$ означает, что парные столкновения не меняют плотности плазмы, тем не менее только при наличии столкновений в системе с градиентом плотности $n = n(x)$ и анизотропным давлением $p_x = 0$, $p_y \neq 0$ возможна диффузия, приводящая к изменению $n(x)$.

3.2. Уравнение движения

Интеграл от произведения кинетического уравнения (3.1.14) на импульс $m_\alpha \mathbf{v}$ частицы сорта α по всему пространству скоростей выглядит следующим образом:

$$\int m_\alpha \mathbf{v} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right\rangle \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v} = \int m_\alpha \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} d\mathbf{v}. \quad (3.3.6)$$

С помощью уравнения непрерывности и пользуясь введенными выше макроскопическими параметрами, уравнение (3.3.6) можно свести к уравнению движения частиц сорта α :

$$\begin{aligned} n_\alpha m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V}_\alpha) + n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{V}_\alpha - n_\alpha q_\alpha \left\langle \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}}{c} \right\rangle + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha = \\ = m_\alpha \int \bar{n}_\alpha \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} d\mathbf{v} \approx - \sum_\beta n_\alpha m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \langle v_{\alpha\beta} \rangle, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

где $\langle v_{\alpha\beta} \rangle$ — средняя частота столкновений (приводящих к релаксации импульса) с частицами плазмы сорта β . В силу закона сохранения импульса правая часть (3.3.6) обращается в нуль в случае столкновений между одинаковыми частицами; это выражение описывает, например, торможение группы быстрых частиц при столкновениях с более медленно движущимися частицами. Правая часть уравнения (3.3.7) часто является хорошим приближением для члена, описывающего трение. В уравнении (3.3.7) \mathbf{P}_α — тензор давления, а усредненные поля $\langle \mathbf{E} \rangle$ и $\langle \mathbf{B} \rangle$ связаны со средними параметрами плазмы n_α , \mathbf{V}_α и т. д. через уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle &= \sum_\alpha 4\pi n_\alpha q_\alpha + 4\pi \rho_{\text{внеш}}, \\ \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle &= \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{V}_\alpha + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{внеш}}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Задача 3.3.2. Восстановите промежуточные выкладки при выводе уравнения (3.3.7) из (3.3.6).

[Указание: $\nabla \cdot n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \mathbf{V}_\alpha = n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{V}_\alpha + \mathbf{V}_\alpha (\nabla \cdot n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha)$.]

Задача 3.3.3. Покажите, что уравнение переноса энергии, которое можно получить из (3.1.14) путем умножения на $1/2 \bar{n}_\alpha m_\alpha v^2$ и интегрирования по пространству скоростей, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_\alpha m_\alpha V_\alpha^2}{2} + \frac{3n_\alpha k T_\alpha}{2} \right) - n_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{V}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{H}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_\alpha m_\alpha V_\alpha^2}{2} \right) \Big|_{\text{столк}}. \quad (3.3.9)$$

Первые два члена в уравнении (3.3.7) вместе образуют «сопутствующую» производную (т. е. $\partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \partial/\partial \mathbf{x} \equiv D/Dt$). Их сумма представляет собой изменение импульса жидкой частицы, движущейся со скоростью \mathbf{V}_α , в единицу времени, пересчитанное на единицу объема. Следующий член описывает изменение импульса в единицу времени на единицу объема под действием сил, вызываемых усредненными полями. Дивергенция тензора давления дает изменение импульса в единицу времени на единицу объема за счет пространственных неоднородностей. В этом члене учитывается влияние вязких сил. Если столкновения между частицами происходят достаточно часто, связанный с давлением член сводится к градиенту скалярного давления (т. е. $\nabla \cdot \mathbf{P} \rightarrow \nabla p$). Это приближение очень распространено.

Выведенные выше уравнения для моментов функции распределения представляют собой законы сохранения числа частиц, их импульса и энергии. Они применимы отдельно для каждой компоненты плазмы, для которой применимо кинетическое уравнение (3.1.14). Эти уравнения не образуют замкнутой системы, поскольку в уравнение для каждого из моментов входят члены, содержащие более высокие моменты функции распределения. Для полного описания требуются все моменты: какая-либо система конечного числа уравнений не может полностью описать поведения плазмы. Чтобы извлечь полезную информацию из системы лишь небольшого числа уравнений, необходимо каким-нибудь образом замкнуть цепочку уравнений. Требуется связать посредством уравнения состояния высшие моменты, такие, допустим, как давление, температуру, с низшими моментами, например с плотностью. Эта проблема аналогична той, которая возникает при нахождении одночастичной функции распределения. Первоначальное описание плазмы посредством уравнения Лиувилля содержит информацию о поведении всей системы N частиц. Кинетическое уравнение (3.1.14) дает ограниченное описание системы, оно содержит информацию только об одночастичном распределении и представляет собой первое звено бесконечной цепочки уравнений, связывающих $f^{(1)}$ с $f^{(2)}$, $f^{(2)}$ с $f^{(3)}$ и т. д. Цепочка может быть оборвана на любом звене, если пренебречь более высокими корреляциями. Приближение, рассматриваемое в настоящей главе, состоит в том, чтобы оборвать цепочку на уравнении для одночастичной функции распределения, заменяя учет корреляций столкновительным членом $\partial f/\partial t \Big|_{\text{столк}}$ с конечной целью отбросить его или учесть в модели эффективной частоты столкновений. Аналогичным образом макроскопическое описание содержит менее полную информацию, поскольку отражает поведение системы только в конфигурационном пространстве. Такое неполное описание также соответствует бесконечной цепочке уравнений, которые связывают n с \mathbf{V} , \mathbf{V} с \mathbf{P} и т. д. Эту цепочку можно оборвать, если пренебречь более высокими моментами или ввести дополнительное предположение о связи между p и n , т. е. дополнить ее уравнением состояния. Выбор того или иного способа обрыва цепочки макроскопических уравнений означает выбор определенной модели плазмы. Иногда используется изотермическое или адиабатическое уравнение состояния, а иногда хорошим предположением является $p = 0$. Однако для реше-

ния некоторых плазменных задач были построены и более сложные модели. Например, формальное разложение одночастичной функции распределения вблизи локального максвелловского распределения приводит к схеме замыкания Чепмена — Энскога [3]. В данной книге используются только простые схемы замыкания, но даже они приводят к значительным сложностям. Следует помнить, что успех применения гидродинамической теории, несмотря на ее широкое распространение, сильно зависит от искусства, которым владеет исследователь.

Очевидно, что выбор как можно более простой схемы замыкания имеет существенное преимущество. Однако выбор модели определяет совокупность свойств плазмы, которые могут быть изучены, поскольку используемые приближения исключают из рассмотрения некоторые особенности поведения плазмы.

Не конкретизируя даже определенной схемы замыкания, можно указать два общих подхода к макроскопическому описанию плазмы. В первом электроны и ионы рассматриваются как две раздельно существующие, но взаимодействующие жидкости, каждая из которых описывается своей системой уравнений и обладает определенными свойствами. В другом подходе плазма описывается как *одна* жидкость со средней плотностью, скоростью и током в каждой точке. Хотя оба эти подхода формально одинаковы, они нередко связаны с различными приближениями.

§ 4. ДВУХЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ ¹⁾

Уравнения двухжидкостной гидродинамики описывают электроны и ионы как две проводящие жидкости, связанные друг с другом силой трения и электромагнитными полями. Переменными в этой теории являются плотность, скорость и давление каждой компоненты, определяемые согласно (3.2.1), (3.2.5) и (3.2.8) и связанные между собой уравнениями непрерывности и движения.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\alpha} + \nabla \cdot n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = 0. \quad (3.4.1)$$

Уравнение движения

$$n_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_{\alpha} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}_{\alpha} = n_{\alpha} q_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_{\alpha} \times \mathbf{B}}{c} \right) - \nabla \cdot \Pi - \nabla p_{\alpha} - \int \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v} \left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} d\mathbf{v}. \quad (3.4.2)$$

Уравнения Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}, \quad (3.4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}; \quad (3.4.4)$$

здесь

$$\Pi_{\alpha} = P_{\alpha} - pI. \quad (3.4.5)$$

В случае сферически-симметричного распределения по скоростям $\Pi_{\alpha} = 0$. Часто используется приближение

$$\bar{n}_{\alpha} \int m \mathbf{v} \left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} d\mathbf{v} \approx - \sum_{\beta} n_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}_{\beta}) \nu_{\alpha\beta}. \quad (3.4.6)$$

¹⁾ Теорию двухжидкостной гидродинамики плазмы превосходно изложил С. И. Брагинский в работе [13*]. — *Прим. ред.*

Для замыкания системы требуются либо уравнения состояния для каждой жидкости, либо какие-то другие связи. Например, предположение о характере теплового потока во время протекания плазменного процесса приводит либо к изотермическому уравнению состояния

$$p = An, \tag{3.4.7}$$

либо к адиабатическому

$$p = An^{5/3}, \tag{3.4.8}$$

либо даже к уравнению

$$p = 0, \tag{3.4.9}$$

которое иногда хорошо описывает плазму при наличии сильных магнитных полей ($B^2/8\pi \gg p$). В случае частично ионизованной плазмы имеется также нейтральная компонента, которая удовлетворяет уравнению движения и связана с электронами и ионами силами трения¹⁾, но не связана с ними электромагнитными полями. Для описания нейтральной жидкости также требуется свое уравнение состояния. В некоторых задачах, например связанных с проблемой магнитогидродинамических (МГД) генераторов энергии²⁾, весьма существенным является движение нейтральной компоненты.

Задача 3.4.1. Найдите ссылки на литературу, в которой устанавливается связь между Π и частотой столкновений а) для плазмы без внешних полей и б) для плазмы, удерживаемой магнитным полем. Цель этого задания состоит, в частности, в том, чтобы привлечь читателя к изучению дополнительной литературы по физике плазмы.

§ 5. ОДНОЖИДКОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ

Комбинируя уравнения для плотности и скорости электронов и ионов, можно получить уравнения для таких величин, как *полная* массовая плотность, скорость центра масс, электрический ток и плотность зарядов. Полученная таким образом одножидкостная теория является более простой отправной точкой, с которой можно начинать исследование многих проблем. Эту модель мы изучим подробно.

5.1. Переменные одножидкостной теории

Массовая плотность жидкости определяется следующим образом:

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} = n_e m_e + n_i m_i. \tag{3.5.1}$$

Плотность зарядов имеет вид

$$\rho_q(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = e(n_i - n_e). \tag{3.5.2}$$

Скорость центра масс дается выражением

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{n_e m_e + n_i m_i}. \tag{3.5.3}$$

Полная плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \sum q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha},$$

¹⁾ В этом случае существенной часто бывает также связь в уравнениях непрерывности, обусловленная процессами ионизации и рекомбинации.— *Прим. ред.*

²⁾ Библиографический список статей по МГД-генераторам имеется в книге [4].

а давление электронов и ионов в с. ц. м.

$$P_{\alpha}^{п.м.} = \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) f_{\alpha} dv, \quad (3.5.4)$$

$$P = \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{п.м.}. \quad (3.5.5)$$

Следует обратить внимание на то, что величина \mathbf{V} , входящая в выражение для $P_{\alpha}^{п.м.}$, есть средняя скорость центра масс (3.5.3), а не V_{α} .

5.2. Уравнения одножидкостной теории

Дифференциальные уравнения для переменных одножидкостной теории можно получить, складывая и вычитая гидродинамические уравнения (3.4.1) — (3.4.5), которые описывают поведение электронов и ионов по отдельности.

Из уравнения (3.4.1) нетрудно получить уравнения непрерывности для массовой и зарядовой плотностей. Умножение (3.4.1) на m_{α} и сложение уравнений для электронов и ионов дают

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = 0, \quad (3.5.6)$$

а умножение (3.4.1) на q_{α} и последующее сложение уравнений дают

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_q + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.5.7)$$

Аналогично сложение уравнений (3.4.2) для электронов и ионов дает уравнение движения в одножидкостной модели (см. задачу 3.5.1)

$$\rho_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + \rho_m (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \rho_q \mathbf{E} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (3.5.8)$$

Задача 3.5.1. Выведите уравнение (3.5.8). Обратите внимание на то, что:

1. $\sum_{\alpha} P_{\alpha}^{п.м.} = P$; здесь тензор $P_{\alpha}^{п.м.}$ определен в с. ц. м. жидкости согласно выражению (3.5.4).
2. Столкновительный член обращается в нуль в силу закона сохранения импульса, если только *нет нейтральных частиц*, т. е. если плазма полностью ионизована.
3. Наиболее просто можно вывести уравнение (3.5.8), если начать с уравнения (3.3.6), а затем использовать уравнение непрерывности (3.5.6) для массовой плотности в одножидкостной модели.

Задача 3.5.2. Как выглядят аналоги уравнений (3.5.8) и (3.5.9) в слабоионизованном газе? Предположите, что более плотный нейтральный фон покоится, а электронно-ионная жидкость описывается одножидкостной моделью.

Как выглядят аналоги уравнений (3.5.8) и (3.5.9) для ионизованного газа, в котором относительно небольшое число нейтралов увлекается электронно-ионной жидкостью? Сначала запишите систему двухжидкостных уравнений (пусть одна жидкость состоит из нейтралов, другая — из электронов и ионов). Затем запишите системы одножидкостных уравнений для плазмы, состоящей из электронов, ионов и нейтралов.

Четвертое уравнение для переменных одножидкостной модели получается путем умножения уравнения движения (3.4.2) на q_{α} , деления на m_{α} и сложения уравнений для ионов и электронов [суммирование уравнений (3.4.2) по сортам зарядов дает уравнения для $d(\rho_m \mathbf{V})/dt$; цель теперь

состоит в том, чтобы получить уравнение для $\partial \mathbf{J} / \partial t$. Искомое уравнение для плазмы, состоящей из ионов и электронов, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{V}\rho_q) = & \left(\sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \right) \mathbf{E} + \left(\frac{e^2}{m_e c} + \frac{e^2}{m_i c} \right) \frac{\rho_m [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]}{m_e + m_i} - \\ & - \left(\frac{em_i}{cm_e} - \frac{em_e}{cm_i} \right) \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{m_e + m_i} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \left(\mathbf{P}_i^{\text{ц. м.}} \frac{m_e}{m_i} - \mathbf{P}_e^{\text{ц. м.}} \right) + \\ & + \sum_{\alpha} \int q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \mathbf{v} \left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} dv. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Это уравнение называется *обобщенным законом Ома* для плазмы, поскольку оно связывает ток с напряженностью электрического поля. Столкновительный член, т. е. $(\partial \mathbf{J} / \partial t) |_{\text{столк}}$, часто вычисляется в линейном приближении:

$$\sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} \left. \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right|_{\text{столк}} dv \approx -\nu \mathbf{J}, \quad (3.5.10)$$

где ν — средняя частота столкновений. Удельное сопротивление η и электропроводность σ выражаются через ν следующим образом:

$$\eta = \frac{\nu m_e}{n e^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\eta}. \quad (3.5.11)$$

При этом уравнение (3.5.9) сводится к закону Ома, т. е. $\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}$ при $\mathbf{V} = 0$ в статическом случае при постоянном давлении.

Уравнения (3.5.6) — (3.5.10) образуют систему уравнений для переменных одножидкостной модели, однако, разумеется, эта система также *не замкнута*, т. е. неизвестных больше, чем уравнений. Замкнуть систему не удастся и при добавлении уравнений для более высоких моментов функции распределения, следующих из кинетического уравнения (3.1.14), поскольку каждое новое уравнение содержит дополнительную неизвестную переменную. Замыкание системы уравнений (3.5.6) — (3.5.10) достигается в общем случае использованием какого-либо уравнения состояния, как и в системе (3.4.7) — (3.4.9). Иногда выбор определенного уравнения состояния вполне оправдан. В любом случае выбор того или иного уравнения состояния сильно влияет на результаты, следующие из гидродинамических уравнений, и он не может быть сделан произвольным образом.

§ 6. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОДНОЖИДКОСТНОЙ ТЕОРИИ

Даже после выбора какого-либо уравнения состояния уравнения одножидкостной теории имеют довольно громоздкий вид. Практически пользуются более простыми уравнениями, которые получаются после ряда допущений, справедливых для широкого круга явлений. Так как эти допущения ограничивают область применимости уравнений, важно выяснить характер ограничений, прежде чем записать уравнения одножидкостной модели плазмы в их обычно используемом виде. Рассмотрим по порядку эти допущения. Начнем с условия квазинейтральности

$$\rho_{qe} = \rho_{qi}. \quad (3.6.1)$$

Предположение о равенстве нулю плотности зарядов ($\rho_q = 0$) приводит к значительному упрощению. Однако, поскольку плотность зарядов в действительности *не* равна нулю, предположение $n_e = Z n_i$ является приближением и ведет к потере информации. Но так как плазма в целом нейтральна ($N_e = Z N_i$), должен существовать масштаб, на котором выполняется условие квазинейтральности (3.6.1). Этот масштаб представляет собой дебаевский

радиус экранирования: покоящийся избыточный заряд экранируется зарядом, равным по величине и противоположным по знаку, на расстоянии λ_D . Следовательно, при изучении медленных движений элементов жидкости с размерами, большими дебаевского радиуса, можно считать, что $n_e = n_i$, т. е.

$$\frac{n_e - n_i}{n_e} \ll 1, \quad \text{если} \quad \frac{\omega_p^2}{\kappa T/m} L^2 \gg 1;$$

здесь L — характерный масштаб длины в задаче. Если систему нужно исследовать с пространственным разрешением выше λ_D или если в изучаемом явлении существенны пространственные изменения с масштабом порядка λ_D , то предположение о квазинейтральности неверно. Заметим, что в общем случае условие (3.6.1) приводит также к условию

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.6.2)$$

Часто используется еще одно приближение

$$ne \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = 0, \quad (3.6.3)$$

т. е.

$$\nabla \cdot (\mathbf{J}\mathbf{V}) = 0.$$

Эти упрощения справедливы для широкого круга явлений. Например, в задачах о возмущениях начального состояния со скоростью $\mathbf{V} = 0$ в некоторой системе отсчета члены $\mathbf{V} \cdot \nabla$ представляют собой величины *второго порядка* малости по возмущениям в той же системе отсчета.

Тривиальное приближение состоит в пренебрежении величиной m_e/m_i , поскольку

$$\frac{m_e}{m_i} \ll 1. \quad (3.6.4)$$

Однако когда это приближение используется в связи с условием (3.6.1), оно приводит к тому, что

$$\rho_m = n_i m_i. \quad (3.6.5)$$

Во многих примерах рассматривают лишь явления, протекающие с малыми частотами ω и с пространственными изменениями на больших масштабах L . В этих случаях, поскольку из уравнений Максвелла следует, что $\mathbf{J} = (c/4\pi) [\nabla \times \mathbf{B}]$, в законе Ома пренебрегают членами $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ и $\partial \mathbf{J} / \partial t$ ¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{J}|} \frac{1}{\omega_p} \frac{d\mathbf{J}}{dt} &\approx \frac{\omega}{\omega_p} \ll 1, \\ \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} &\approx \frac{B^2}{L} \ll ne \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{e}. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

Разумеется, в некоторых случаях градиенты давления значительно больше электрических полей и член $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ оказывается существенным (см., например, § 12 гл. 6).

Другим часто используемым приближением является допущение об изотропности давления:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha = \nabla p_\alpha. \quad (3.6.7)$$

Здесь не учитываются эффекты вязкости, и это приближение заведомо справедливо при достаточно большой частоте столкновений между частицами. Сформулировать это утверждение в виде неравенства нельзя, не привлекая какой-либо теории столкновительных эффектов. Если частота ион-ионных столкновений больше циклотронной частоты или любых других частот. рассматриваемых в задаче, одна частная модель, а именно теория Навье —

¹⁾ Существуют и другие соотношения между параметрами, позволяющие сделать указанные пренебрежения, например $\omega \ll \nu$. — *Прим. ред.*

Стокса, дает в качестве критерия для пренебрежения недиагональными членами в тензоре давления следующее неравенство:

$$R \equiv LV_0 \frac{m_i}{\kappa T} v_{ii} \gg 1; \quad (3.6.8)$$

здесь R — число Рейнольдса, L — характерная длина, V_0 — характерная скорость среды в рассматриваемой задаче. Приближение (3.6.7) вследствие простоты употребляется при исследовании почти бесстолкновительной плазмы, где неравенство (3.6.8) не выполняется. К счастью, уравнения для плазмы в приближении $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p$ согласуются с большой совокупностью экспериментальных данных, несмотря на отсутствие четких оснований для такого приближения. Предполагается, что плазменная частота ω_p играет роль эффективной частоты столкновений, приводя к исчезновению недиагональных элементов тензора давления.

Если пренебречь сразу всеми членами $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, $\partial \mathbf{J} / \partial t$ и ∇p , то закон Ома примет простой вид

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), \quad (3.6.9)$$

где σ определяется согласно (3.5.11). Даже такой простой вид закона Ома приводит к ряду интересных следствий при рассмотрении движения плазмы в сильном магнитном поле, которые мы обсудим в § 9 настоящей главы. При обсуждении справедливости упрощенного закона Ома следует заметить, что один лишь анализ размерности показывает, что членом $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ можно пренебречь, когда характерная длина изменения поля достаточно велика. Критерий справедливости (3.6.9) можно выразить явно через характерные длину L и скорость V_0 , представляющие интерес в рассматриваемой задаче. Выпишем условия, которые часто выполняются при рассмотрении одножидкостной модели плазмы и которые позволяют пренебречь в законе Ома следующими членами:

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nc}, \quad \text{если} \quad \frac{L\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \frac{V_0}{c^2} \gg 1, \quad (3.6.10)$$

$$\frac{m_e}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad \text{если} \quad \frac{L^2\omega_{pe}^2}{c^2} \gg 1, \quad (3.6.11)$$

$$\nabla p_e, \quad \text{если} \quad \frac{LV_0\omega_{ce}}{\kappa T_e/m_e} \gg 1. \quad (3.6.12)$$

В некоторых случаях отсутствие у \mathbf{P} недиагональных элементов связано с пренебрежением конечностью ларморовского радиуса, т. е. того, что электроны и ионы, находясь на орбитах разного радиуса, испытывают воздействие различных средних сил. Условие, при котором можно пренебречь поправками из-за конечного ларморовского радиуса, имеет вид

$$\frac{L\omega_{ci}}{\sqrt{\kappa T_i/m_i}} \gg 1. \quad (3.6.13)$$

Все указанные выше условия справедливы только при очень медленных изменениях свойств плазмы во времени. Если же изменения происходят быстро, требуется выполнение значительно более сложной совокупности неравенств, чтобы получить упрощенную форму закона Ома. Следует отметить, что достаточно перейти к пределу $L \rightarrow \infty$, чтобы все приведенные неравенства выполнялись и выражение (3.6.9) было справедливо; в других же предельных случаях, например при $\mathbf{B} \rightarrow \infty$ или $\langle v \rangle \rightarrow 0$, некоторые из неравенств ослабляются, а другие усиливаются. Таким образом, привычная форма закона Ома (3.5.9) справедлива только в ограниченной области параметров. Закон Ома принял бы еще более простую форму, если бы проводи-

мость была бесконечной. В этом приближении можно пренебречь членом

$$\frac{4\pi\mathbf{J}}{\sigma} \quad \text{если} \quad R_M \equiv \frac{4\pi\sigma L V_0}{c^2} \gg 1; \quad (3.6.14)$$

здесь R_M — магнитное число Рейнольдса. Если $R_M \gg 1$, то закон Ома примет вид ¹⁾

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = 0. \quad (3.6.15)$$

§ 7 УПРОЩЕННЫЕ ОДНОЖИДКОСТНЫЕ И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ (МГД) УРАВНЕНИЯ

Упрощенную систему одножидкостных уравнений можно получить, рассматривая крупномасштабные явления в плазме ($L \rightarrow \infty$). Из предыдущего параграфа следует, что приближение $n_i = n_e$ справедливо на крупных масштабах. Кроме того, градиентные члены (например, ∇p , ∇B , $\nabla \cdot \mathbf{V}$ и т. д.) можно рассматривать как малые по сравнению с полевыми членами (например, \mathbf{B} , \mathbf{E} , \mathbf{J} , \mathbf{V} и т. д.). В этих приближениях и в пренебрежении отношением m_e/m_i по сравнению с единицей одножидкостные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = 0, \quad (3.7.1)$$

$$\rho_m \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla (p_i + p_e) - [\nabla \cdot \mathbf{P}_i + \nabla \cdot \mathbf{P}_e - \nabla (p_i + p_e)], \quad (3.7.2)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = \eta \mathbf{J} + \frac{m_e}{ne^2} \frac{D\mathbf{J}}{Dt}, \quad (3.7.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}, \quad (3.7.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

вместе с дополнительным условием ²⁾

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.7.5)$$

и определением сопутствующей производной

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla. \quad (3.7.6)$$

Пренебрежение ∇p по сравнению с $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]$ в законе Ома (3.7.3) не противоречит его удержанию в уравнении движения (3.7.2). Дело в том, что все члены в правой части уравнения (3.7.2) пропорциональны градиентам физических величин (поскольку $4\pi\mathbf{J}/c \approx [\nabla \times \mathbf{B}]$). В уравнение же (3.7.3) входят члены, не пропорциональные градиентам. Они считаются *большими*, а градиентными членами по сравнению с ними пренебрегают.

Если ограничиться рассмотрением не только крупномасштабных, но, кроме того, *низкочастотных* процессов, то гидродинамические уравнения можно еще упростить. Рассматривая низкочастотные процессы, часто предполагают, что столкновения в случае коллективных эффектов происходят достаточно часто, чтобы в любой момент времени система находилась в изотропном состоянии. Уравнения, получаемые при этих предположениях, называются *магнитогидродинамическими (МГД) уравнениями*, справедливыми в пределе $\omega \rightarrow 0$, $L \rightarrow \infty$ и $\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p$.

¹⁾ Это называется приближением идеально проводящей жидкости. — *Прим. ред.*

²⁾ Обратите внимание, что жидкость не должна подчиняться дополнительному уравнению $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Например, оно не выполняется для воля сжатия. Дело в том, что условие $n_e = n_i$ уже было использовано и, как указывалось выше, является хорошим приближением при $L \gg \lambda_D$. Если определить \mathbf{E} из уравнений (3.7.1) — (3.7.6), для нахождения разности $n_e - n_i$ и проверки ее малости можно использовать уравнение Пуассона.

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = 0. \quad (3.7.7)$$

Уравнение движения

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p. \quad (3.7.8)$$

Закон Ома

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = \eta \mathbf{J}. \quad (3.7.9)$$

Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Система уравнений (3.7.7)–(3.7.10) замыкается уравнением состояния или каким-либо другим модельным соотношением, связывающим давление с плотностью. Стандартным приближением магнитогидродинамики является использование либо одного из следующих предположений:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \quad (\text{несжимаемая жидкость}), \\ \frac{c}{dt} p \rho_m^{-\gamma} &= 0 \quad (\text{адиабатическая жидкость}), \\ \frac{d}{dt} \frac{p}{\rho_m} &= 0 \quad (\text{изотермическая жидкость}), \end{aligned}$$

либо какого-то другого дополнительного соотношения (иногда оказывается установленным некоторое другое свойство системы, например $J = \text{const}$).

При рассмотрении динамики плазмы с помощью МГД-теории предполагается определенное упорядочение пространственных и временных масштабов. Точная природа такого упорядочения не очевидна из самих уравнений, ясно только, что уравнения *заведомо* несправедливы, если частота слишком высока или длина волны слишком мала. Пренебрежение пространственным разделением зарядов сразу ограничивает область применимости МГД-уравнений длинами волн $\lambda \gg \lambda_D$. Тот факт, что $n_e = n_i$, который свидетельствует о совместном движении электронов и ионов, налагает дополнительное ограничение на временные масштабы МГД-процессов, а именно $T \gg \omega_{ci}^{-1}$. Это неравенство следует из того, что при столь быстром движении, как циклотронное, электроны и ионы движутся по-разному. Предположение о скалярном характере давления

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \nabla p$$

оказывается более тонким. Оно заведомо справедливо, если столкновения в системе играют доминирующую роль. Однако в случае временных масштабов, меньших времени между столкновениями в плазме, находящейся в магнитном поле, не ясно, какими должны быть пространственные и временные масштабы, чтобы это приближение было оправдано. По этой причине наряду с МГД-моделью для решения некоторых проблем были развиты специальные гидродинамические модели. Было показано (задача 3.7.1), что для плазмы в магнитном поле МГД-теория предполагает наряду с неравенством $L \gg \lambda_D$ следующее упорядочение временных и пространственных параметров:

$$\left(\frac{a_i}{L}\right)^2 \ll \frac{1}{T\omega_{ci}} \ll 1 \quad (\text{МГД-упорядочение}),$$

где a_i — ларморовский радиус иона. Для изучения движений плазмы с другим соотношением параметров была построена гидродинамическая модель, называемая *магнитогидродинамикой с конечным ларморовским радиусом* (КЛР). В частности, если

$$\frac{1}{T\omega_{ci}} \ll \left(\frac{a_i}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{КЛР-упорядочение}),$$

то тензор давления меняет форму и не является даже диагональным. (См. также § 10 настоящей главы, где рассматривается еще один вариант гидродинамических уравнений.)

Задача 3.7.1. Прочтите статью [5] в качестве введения и обзора работ по магнитогидродинамике с конечным ларморовским радиусом.

§ 8. СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОДНОЖИДКОСТНОЙ И МГД-ТЕОРИЯМИ

Многие свойства плазмы поддаются простому описанию с помощью одножидкостных уравнений.

8.1. Изобарические поверхности

Для плазмы в стационарном состоянии уравнение движения (3.7.2) принимает вид

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = \nabla p, \quad (3.8.1)$$

причем в стационарном состоянии производные по времени и недиагональные элементы тензора давления равны нулю. Из последнего уравнения следует, что направления как тока, так и магнитного поля перпендикулярны градиенту давления:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbf{J} \cdot \nabla p &= 0. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

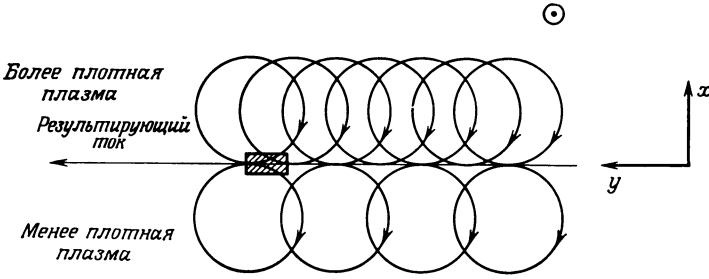
Это означает, что поверхности постоянного давления совпадают с магнитными поверхностями, т. е. могут быть составлены из магнитных силовых линий. Ни одна из магнитных силовых линий *не пересекает* изобарическую поверхность, и плазма не стремится расширяться вдоль магнитного поля. Следует заметить, что утверждение о совпадении изобарической поверхности с магнитной не означает, что величина B^2 постоянна на этой поверхности, а говорит лишь о том, что силовые линии ее не пересекают. Действительно, поскольку в стационарном состоянии (в силу уравнения $\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J}/c$)

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}}{4\pi} = \nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}, \quad (3.8.3)$$

должно выполняться соотношение

$$\nabla \frac{B^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi} = \nabla p, \quad (3.8.4)$$

т. е. $\mathbf{n} \times [\nabla B^2/8\pi - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/4\pi] = 0$ (здесь \mathbf{n} — нормаль к изобарической поверхности). Если силовые линии где-либо являются прямыми, например $\mathbf{B} = Bz$, то в силу уравнения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ изобарическая поверхность должна быть также поверхностью постоянного магнитного давления $B^2 = \text{const}$. Это утверждение не верно, если силовые линии изогнуты.



Фиг. 32. Возникновение среднего тока в плазме с градиентом давления. Показано, что ток не связан с переносом частиц. \odot магнитное поле направлено к читателю, перпендикулярно плоскости фигуры.

Перепишав уравнение (3.8.1) в виде

$$\mathbf{J}_\perp = \frac{\mathbf{V} \times \nabla p}{B^2} c, \tag{3.8.5}$$

мы видим, что в одножидкостной модели, которая предполагает зарядовую нейтральность, никакие токи не могут течь поперек магнитного поля в плазме, пока в ней отсутствует градиент давления ¹⁾.

Полезно заметить, что наличие тока не обязательно связано с переносом частиц поперек магнитного поля. Электрическое поле и градиент магнитного поля вызывают дрейф частиц, но градиент *давления* не может вызвать дрейфа частиц. Ток \mathbf{J}_\perp в (3.8.5) возникает не из-за движения отдельных частиц, а из-за градиента плотности (или скорости) частиц, вращающихся в магнитном поле. Как показано на фиг. 32, ток J_y вызван тем, что в каждой данной точке x больше частиц движется влево, чем вправо, хотя каждая отдельная частица вращается вокруг неподвижного центра и в действительности в среднем совсем не смещается влево.

Задача 3.8.1. Ток, определяемый выражением (3.8.5), приводит к возникновению градиента магнитного поля, который действительно вызывает дрейф частиц со скоростью v_D [см. (1.7.4) и приложение I]. Покажите, что v_r мала по сравнению со скоростью $V_e \equiv J/ne$, если $\beta = nkT/(B^2/8\pi) \ll 1$.

Если плазма находится в электрическом поле, то даже при постоянном давлении и равном нулю токе имеется поток массы, так как закон Ома (3.7.3) в стационарной бестоковой плазме постоянного давления дает

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = 0. \tag{3.8.6}$$

После векторного умножения (3.8.6) на \mathbf{B} получим

$$\mathbf{V}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c. \tag{3.8.7}$$

Наоборот, движение плазмы поперек магнитного поля приводит к возникновению электрического поля, перпендикулярного векторам \mathbf{V} и \mathbf{B} . Это может быть использовано для преобразования кинетической энергии потока плазмы в электрическую энергию (гл. 6).

¹⁾ Конфигурации плазмы в которых отсутствует градиент давления, а токи текут вдоль магнитных силовых линий, называют бессильными. — Прим. ред.

8.2. Магнитное давление

Если в плазме имеется градиент давления, то в условиях статического равновесия должен существовать и градиент магнитного давления. Исключая \mathbf{J} так же, как это было сделано в (3.8.3), получаем соотношение между градиентом магнитного поля и градиентом давления в виде

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi}.$$

Если силовые линии магнитного поля — параллельные прямые, то это соотношение сводится к простому уравнению баланса давлений:

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0. \quad (3.8.8)$$

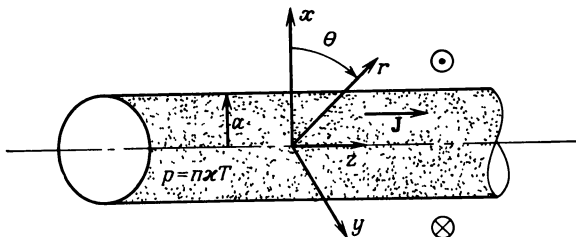
Отсюда ясно видно, что магнитное поле оказывает давление на плазму; величина $B^2/8\pi$ называется магнитным давлением. Однако любые системы, для которых справедливо соотношение (3.8.8), не могут быть статическими. Из закона Ома следует, что при наличии столкновений в плазме (т. е. конечной проводимости) градиент магнитного поля B будет изменяться со временем за счет диффузии магнитного поля в плазму. Условие $\sigma \rightarrow \infty$ называют *пределом бесконечной проводимости*.

8.3. Самоудержание. Равновесный пинч ¹⁾

Простым примером плазмы, находящейся в равновесии, является пинч, в котором токи, текущие в плазме, создают магнитное давление, которое в свою очередь удерживает плазму. Пинч-эффект впервые изучался Беннетом [6] в связи с проблемой самофокусировки сгустка быстрых электронов, выбрасываемых при солнечной вспышке, в разреженную межпланетную плазму. Пинч-эффект имеет место, когда магнитное давление $B^2/8\pi$ превышает кинетическое давление nkT . Возможны два режима: 1) магнитное поле успевает диффундировать в плазму и 2) граница плазмы не пропускает магнитного поля и движется так, чтобы кинетическое давление плазмы возрастало. Первый из них называется *диффузией магнитного поля*, а второй — *динамическим пинч-эффектом* ²⁾. Резистивную диффузию мы рассмотрим в следующем параграфе.

Баланс кинетического и магнитного давлений в плазме возможен на временах, меньших времени диффузии магнитного поля в плазму. Состояние плазмы, при которой имеет место такой баланс, называется *равновесным пинчем*. Для описания равновесного пинча можно использовать стационарные одножидкостные МГД-уравнения.

Рассмотрим плазменный цилиндр, показанный на фиг. 33. Радиус цилиндра $r = a$, и никаких полей в нем, кроме созданных самой плазмой, нет.



Фиг. 33. Схема токонесящего плазменного столба, иллюстрирующая пинч-эффект в плазме. Ток в плазме \mathbf{J} создает магнитное поле B_0 , компенсирующее давление плазмы nkT . Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости фигуры к читателю (⊙) и от читателя (⊗).

¹⁾ Гидромагнитное равновесие пинчей подробно освещено в обзоре В. Д. Шафранова [14*]. — *Прим. ред.*

²⁾ Альтернативными терминами являются соответственно нескинированный и скинированный пинчи. — *Прим. ред.*

Внутри плазмы течет ток с однородной плотностью $J = J_z \hat{z}$ при $r < a$ и, разумеется, $J = 0$ при $r > a$.

Если плазма достигает стационарного состояния, одножидкостные уравнения (3.7.1)–(3.7.4) для этого случая цилиндрической симметрии принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \rho_m V_r = 0, \quad (3.8.9)$$

$$-\frac{J_z B_\theta}{c} = \frac{dp}{dr}, \quad (3.8.10)$$

$$E_r - \frac{V_z B_\theta}{c} = \frac{1}{ne} \frac{dp_i}{dr}, \quad E_\theta = 0, \quad E_z = \eta J_z, \quad (3.8.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \frac{4\pi}{c} J_z. \quad (3.8.12)$$

В уравнении (3.8.11) сохранен член dp_i/dr , опущенный в упрощенном одножидкостном уравнении (3.7.3). Дело в том, что в линейном пинче градиент кинетического давления ионов может не быть малым по сравнению с E_r . Важно отметить для последующего изложения, что общая динамика линейного пинча не зависит от уравнений (3.8.11) (см., однако, обсуждение в п. 8.4, когда величина dp/dx играет существенную роль).

Заметим, что для определения поля \mathbf{B} и давления p через (заданный по предположению) аксиальный ток J_z требуются лишь два уравнения: (3.8.10) и (3.8.12). Решая эти уравнения, можно найти распределение давления и радиус равновесного пинча, не зависящие от V_r , E_r и т. д. Единственным ограничением, наложенным на решения, является азимутальная симметрия $(\partial/\partial\theta)(\mathbf{B}, \mathbf{V}, p, \dots) = 0$. Поскольку $J_z = \text{const}$, нетрудно проинтегрировать уравнение (3.8.12) и получить магнитное поле

$$B_\theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{c} J_z r, & r \leq a, \\ \frac{2\pi}{c} J_z \frac{a^2}{r}, & r > a, \end{cases} \quad (3.8.13)$$

а интегрируя (3.8.10), находим распределение давления

$$p(r) = \begin{cases} \frac{\pi J_z^2}{c^2} (a^2 - r^2), & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad (3.8.14)$$

Последние два выражения описывают *равновесный пинч* и показывают, что радиус такой плазмы определяется давлением на оси (стремящимся увеличить a) и током (создающим поле B_θ , которое стремится уменьшить a), причем радиус равновесного пинча записывается в виде

$$a = \sqrt{\frac{c^2 p(r=0)}{\pi} \frac{1}{J_z}}. \quad (3.8.15)$$

Следует заметить, что преобразование (на основании того, что $B_\theta/r = \text{const}$ при $r \leq a$)

$$-\frac{B_\theta}{c} J_z = -\frac{B_\theta}{c} \left(\frac{c}{4\pi r} \frac{d}{dr} r B_\theta \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} B_\theta^2$$

приводит к условию баланса давлений в пинче

$$p + \frac{B_\theta^2}{4\pi} = \text{const}, \quad (3.8.16)$$

которое к тому же совпадает с общим условием равновесия

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{4\pi},$$

поскольку $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = -\mathbf{r} (B_0^2/r)$ для азимутального поля $\mathbf{B} = B_0(r) \hat{\theta}$.

Задача 3.8.2. Докажите, что

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = -\frac{B_0^2}{r} \hat{r} = -\frac{d}{dr} \frac{B_0^2}{2},$$

если поле B_0 создается током с постоянной плотностью $\mathbf{J} = J_z \hat{z}$.

Полное давление на оси $p(0) = n_e k T_e + n_i k T_i$, а полный ток $I = J_z \pi a^2$ выражается через полное число электронов или ионов N на единицу длины (в случае $T_i = T_e$) следующим образом:

$$\begin{aligned} I^2 &= (2N_e k T) c^2 \pi a^2, \\ I [A] &= 5,7 \cdot 10^{-4} N^{1/2} T^{1/2} \text{ [кэВ]}. \end{aligned} \quad (3.8.17)$$

Равновесное состояние, удовлетворяющее уравнениям (3.8.13)—(3.8.15), допускает еще некоторый произвол в определении параметров, поскольку из этих уравнений нельзя найти радиальное электрическое поле, скорость жидкости или распределение *плотности* (определено только произведение $n k T$). Эти свободные параметры определяются не условиями равновесия пинча, а историей создания плазмы.

Так, если предположить, что ток в основном переносится электронами ($\mathbf{J} = -neV_e$), то изменение плотности плазмы с радиусом, согласно уравнению (3.8.14), должно сопровождаться изменением с радиусом либо плотности тока, либо средней скорости электронов. В разобранный выше примере предполагалось, что $\mathbf{J} = \text{const}$, но в зависимости от способа создания тока более правдоподобным может оказаться условие $V_e = \text{const}$, $T_e = \text{const}$, $T_i = \text{const}$. В этом случае из уравнений (3.8.10) и (3.8.12) следует

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{e^2 V_e^2 n}{\kappa(T_e + T_i)}. \quad (3.8.18)$$

Решение этого дифференциального уравнения с граничным условием $dn/dr = 0$ при $r = 0$ имеет вид

$$n(r) = \frac{n(0)}{(1 + br^2)^2}; \quad (3.8.19)$$

здесь

$$b = \frac{\pi}{2} \frac{e^2 V_e^2}{c^2} \frac{n(0)}{\kappa(T_e + T_i)}.$$

Следует заметить еще раз, что при выводе мы *предположили* $T = \text{const}$. Известно, что гидродинамические уравнения необходимо замыкать с помощью некоторого предположения о виде уравнения состояния. В данном случае условие $T = \text{const}$ заменяет уравнение состояния.

Задача 3.8.3. Какой величины ток требуется для удержания плазмы, имеющей температуру 10 кэВ, диаметр 1 см и плотность 10^{14} см⁻³?

Задача 3.8.4. По плазменному цилиндру радиусом a течет ток вдоль оси с постоянной плотностью J_z . Если плазма нейтральна, она будет удерживаться в радиальном направлении ($\partial n/\partial t = 0$, $V_r = 0$) током $J_z = (c/a) \sqrt{p(0)/\pi}$ [$p(0)$ — полное давление плазмы на оси]. Пользуясь аналогичными соображениями, определите: а) плотность одно-

родного тока J_z , требуемого для радиального удержания заряженной плазмы, состоящей из N электронов и RN ионов одинаковой температуры, равномерно распределенных в цилиндре радиусом a и длиной L ($R < 1$); б) могут ли электроны самоудерживаться при физически реальных плотностях тока J_z , если $R = 0$?

Задача 3.8.5. Убедитесь в правильности уравнений (3.8.18) и (3.8.19).

8.4. Изотермическая атмосфера

Изотермическая атмосфера, рассмотренная в гл. 2 в качестве примера применения статистического подхода, может быть также изучена с помощью стационарных одножидкостных уравнений. Рассмотрим плазму, в которой имеется сила тяжести $\mathbf{F}_g = -\mathbf{g}$ в расчете на единицу массы. Уравнение движения для плазмы в стационарном состоянии имеет вид

$$\nabla p = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \rho_m \mathbf{g} \quad (3.8.20)$$

а соответствующий закон Ома для плазмы в поле силы тяжести с учетом dp_i/dx записывается следующим образом:

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} = \eta \mathbf{J} + \frac{1}{n_e e} (\rho_m \mathbf{g} + \nabla p_i). \quad (3.8.21)$$

Если магнитное поле B мало, а также если $p_i = p_e = p/2$, то, исключая давление из (3.8.20) и (3.8.21), имеем

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J} + \frac{m_i}{2e} \mathbf{g} \quad (3.8.22)$$

В отсутствие токов на границе атмосферы электрическое поле определяется выражением!

$$e \mathbf{E}_{\max} = \frac{m_i}{2} \mathbf{g}. \quad (3.8.23)$$

Это означает, что вертикальная составляющая электрического поля уменьшает среднюю силу, действующую на каждый ион, в два раза по сравнению с силой тяжести (т. е. ионы в плазменной атмосфере как бы *легче*, чем в атмосфере нейтрального газа) и тянет вниз каждый электрон с силой, которая тянет вниз ионы. Эта сила, тянущая вниз каждый электрон, значительно превосходит действующую на него силу тяжести (как если бы электрон был лишь в два раза легче иона) и равна $m_i g/2$.

Задача 3.8.6. Проверьте уравнения (3.8.20) и (3.8.21) с точки зрения правильности учета силы тяжести в одножидкостных уравнениях.

Задача 3.8.7. Каково распределение плотности в изотермической атмосфере? Оправдано ли пренебрежение магнитным полем B в уравнении (3.8.21), если под \mathbf{v} и \mathbf{F}_g подразумевать их значения для Земли?

§ 9. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОДНОЖИДКОСТНОЙ И МГД-ТЕОРИЯМИ

Получить решения системы МГД-уравнений (3.7.1) — (3.7.6) совместно с уравнением состояния для плазмы, не находящейся в равновесии, вообще говоря, трудно. Однако эти уравнения можно решить в рамках принятых выше приближений, что позволяет описать многие свойства плазмы. Используя уравнения Максвелла, можно выразить скорость жидкости через \mathbf{v}

и ∇p :

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}}{4\pi} - \nabla p. \quad (3.9.1)$$

В этом уравнении не учитывается только ток смещения $(1/c) (\partial \mathbf{E} / \partial t)$, что оправдано при $V_0^2 \ll c^2$, и его вид не зависит от частоты столкновений. Второе уравнение, связывающее \mathbf{B} и \mathbf{V} , можно получить, взяв почленно ротор от уравнения, представляющего закон Ома, и исключив величину \mathbf{J} с помощью преобразования $\nabla \times \mathbf{J} = (c/4\pi) \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$. В результате, отбрасывая члены $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ и $\partial \mathbf{J} / \partial t$, а также замечая, что $\nabla \times \nabla p = 0$, мы имеем

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.9.2)$$

Уравнение для электрического поля можно получить, продифференцировав по времени закон Ома и воспользовавшись уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t},$$

чтобы затем выразить $\eta \mathbf{J}$ через \mathbf{E} . В результате получаем следующее уравнение:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (3.9.3)$$

Независимо от того, как мы выбрали уравнение состояния, первые два уравнения (3.9.1) и (3.9.2) образуют систему совместных уравнений для магнитного поля и скорости жидкости.

9.1. Диффузия магнитного поля и вмороженность силовых линий

Простым примером применения гидродинамических уравнений для исследования неравновесных процессов служит диффузионное проникновение магнитного поля в покоящуюся ($\mathbf{V} = 0$) плазму. Это задача аналогична задаче о вихревых токах в электродинамике, за исключением того, что проводящей средой здесь является жидкость, а не жесткий проводник. Время диффузии магнитного поля превосходит любые характерные времена, которые можно ожидать в ситуациях, когда магнитное поле удерживает плазму или перемещает ее как целое. Например, внутри Земли, Солнца или в межзвездной материи движение магнитных силовых линий может описываться диффузионным уравнением.

Уравнение диффузии магнитного поля [согласно (3.9.2)] записывается следующим образом:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3.9.4)$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$B \sim e^{-t/\tau_m};$$

здесь $\tau_m = 4\pi\sigma L^2/c^2$ (L — характерный масштаб изменения магнитного поля в проводнике). Для земной коры $\tau_m \approx 10^4$ лет; для медного шара диаметром 1 м $\tau_m \approx 10$ с. Вводя характерные скорость плазмы V_0 и масштаб градиентов L , уравнение (3.9.2) можно записать, как это часто делается, в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t_n} = \nabla_n \times \mathbf{V}_n \times \mathbf{B} + \frac{1}{R_M} \nabla_n^2 \mathbf{B},$$

где $t_n = tV_0/L$, $V_n = V/V_0$, $\nabla_n = L\nabla$, а величина $R_M = 4\pi\sigma LV_0/c^2$ — магнитное число Рейнольдса. Если R_M мало, то поле свободно проскальзывает через плазму. В случае бесконечной проводимости ($R_M \rightarrow \infty$) магнитное поле не диффундирует в среде. Силовые линии «вморожены» в жидкую среду и движутся вместе с жидкостью. Напомним, что это утверждение ограничено приближениями, сделанными при упрощении закона Ома. Уравнение, описывающее временную эволюцию магнитного поля \mathbf{B} в случае *вмороженных силовых линий*, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (3.9.5)$$

Задача 3.9.1. Покажите, что изменение магнитного поля \mathbf{B} со временем в каждом элементе жидкости связано с изменением плотности этого элемента следующим уравнением:

$$\frac{D}{Dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho} = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{V},$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla.$$

9.2. Волны малой амплитуды. Альфвеновские и ионно-звуковые волны

Волны — это широко распространенное неравновесное явление в плазме. Можно найти решения одножидкостных уравнений, соответствующие различным типам волн. Эти решения мы подробно рассмотрим в гл. 5. Здесь мы приведем несколько простых примеров в качестве еще одной иллюстрации магнитогидродинамических свойств плазмы. Одной из хорошо известных волн, распространяющихся в плазме, является альфвеновская волна. В 1942 г. Альфвен обнаружил, что в идеально проводящей несжимаемой жидкости, которая находится в сильном постоянном магнитном поле, может распространяться волна, причем роль упругой силы играет магнитное давление, а инерционные свойства определяются плотностью жидкости. Чтобы показать это, рассмотрим случай $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, $p = 0$, $\sigma = \infty$ и, кроме того, пренебрежем в законе Ома членами $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ и $\partial \mathbf{J} / \partial t$. В результате получим

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}}{4\pi}, \quad (3.9.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (3.9.7)$$

При решении уравнений (3.9.6) и (3.9.7) предположим, что магнитное поле состоит из постоянной и однородной части \mathbf{B}_0 и малой осциллирующей части \mathbf{B}_1 (т. е. $|\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_0|$). Средняя скорость жидкости $\mathbf{V}^0 = 0$, а возмущение скорости равно \mathbf{V}_1 . Пренебрегая членами, содержащими произведения возмущенных величин, получаем следующие уравнения:

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} [\nabla \times \mathbf{B}_1] \times \mathbf{B}_0, \quad (3.9.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1. \quad (3.9.9)$$

Для простоты примем, что ось z направлена вдоль постоянного магнитного поля. Одно из самосогласованных решений уравнений (3.9.8) и (3.9.9) содержит магнитное поле и скорость, которые имеют только x - и y -компоненты,

не зависящие от x и y . В результате уравнения (3.9.8) и (3.9.9) принимают вид

$$\rho_m \frac{\partial V_{1x, y}}{\partial t} = \frac{B_0}{4\pi} \frac{\partial B_{1x, y}}{\partial z} \quad (3.9.10)$$

$$\frac{\partial B_{1x, y}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial V_{1x, y}}{\partial z} \quad (3.9.11)$$

Преобразование этих уравнений дает волновое уравнение для какой-либо компоненты скорости или магнитного поля

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\begin{matrix} B_{1x, y} \\ V_{1x, y} \end{matrix} \right] = 0, \quad (3.9.12)$$

где $V_A = B_0 / \sqrt{4\pi\rho_m}$. Решение волнового уравнения (3.9.12), которое можно записать в виде

$$B_{1x} = \bar{B} \sin(kz - \omega t), \quad (3.9.13)$$

описывает поперечную волну, распространяющуюся вдоль магнитного поля в несжимаемой проводящей жидкости с возмущениями магнитного поля, перпендикулярными B_0 , и со скоростью $V_A = \omega/k$, не зависящей от частоты. Эта волна называется *альфвеновской волной*, а скорость волны — *альфвеновской скоростью*, которая равна

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_m}} \quad (3.9.14)$$

Альфвеновские волны и их свойства подробно изучаются в гл. 4. Цель настоящего краткого анализа — показать, каким образом используются одножидкостные МГД-уравнения для описания неравновесных процессов. Примером проводящей несжимаемой жидкости является жидкая ртуть. Однако наличие альфвеновских волн характерно не только для несжимаемых жидкостей, но и для обычной плазмы (§ 10).

Задача 3.9.2. При получении решения, соответствующего альфвеновской волне, пренебрегалось как давлением, так и омическими потерями, хотя $p \rightarrow 0$ при $T \rightarrow 0$, а $\eta \rightarrow 0$, когда $T \rightarrow \infty$. Определите диапазон частот, в котором можно пренебречь удельным сопротивлением η для плазмы, плотность и температура которой соответствуют ионосфере. Проверьте также правомерность пренебрежения давлением в той же области параметров, считая магнитное поле B_0 равным магнитному полю Земли B_3 .

Примером неравновесного явления, когда существенно давление плазмы, является ионно-звуковая волна. Если в однородную плазму, в которой отсутствуют внешние поля ($E_0 = B_0 = \nabla p_0 = V_0 = 0$), внести возмущение, допустим, слегка сжать ее, то это возмущение будет развиваться во времени, согласно предсказаниям одножидкостных уравнений. Как и в предыдущем случае, если возмущения предполагаются слабыми, можно пренебречь производными возмущающих величин. Тогда уравнения (3.7.1)–(3.7.6) принимают вид

$$\rho_{m0} \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\nabla p_1, \quad (3.9.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{m1} = -\rho_{m0} \nabla \cdot V_1. \quad (3.9.15b)$$

Для простоты рассмотрим одномерные возмущения $\rho_{m1} = \rho_{m1}(x)$, $\nabla p = dp/dx$, $V_1 = V_1 \hat{x}$. Чтобы решить уравнения (3.9.15), необходимо иметь уравнение состояния, иначе число уравнений (два) меньше числа неизвест-

ных (три). Запишем уравнение состояния в общем виде

$$p = \frac{\rho_0 \rho_m^\gamma}{\rho_{m0}^\gamma}. \quad (3.9.16)$$

в этом уравнении постоянная γ еще не определена. То же уравнение для возмущенных величин имеет вид

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{\rho_{m1}}{\rho_{m0}}. \quad (3.9.17)$$

Постоянная γ должна определяться из посторонних соображений, не связанных с гидродинамическими уравнениями. Из (3.9.15) получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 \rho_{m1}}{i t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_{m0}} \frac{\partial^2 \rho_{m1}}{\partial x^2}. \quad (3.9.18)$$

Решением этого уравнения является волна сжатия

$$\rho_{m1} = \bar{\rho}_{m1} \sin(kx - \omega t),$$

распространяющаяся со скоростью

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_{m0}} \right)^{1/2} = \left(\kappa \frac{\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (3.9.19)$$

В гл. 8 показано, что, если не выполнено условие $T_e \gg T_i$, волна (3.9.19) не распространяется вследствие сильного затухания Ландау. Постоянную γ можно найти, если принять во внимание, что при $T_e \gg T_i$ волна (3.9.19) распространяется со скоростью, много меньшей тепловой скорости электронов, т. е.

$$\frac{\omega}{k} = \left(\gamma_e \frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \ll \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, за один период волны ω^{-1} тепловой электрон проходит расстояние $(m_i/m_e)^{1/2} k^{-1}$, которое много больше длины волны. Это означает, что электронная температура должна быть постоянной в пределах многих длин волн, т. е. процесс изотермический, а для изотермического сжатия $\gamma_e = 1$. Волна с законом дисперсии

$$\omega = k \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}} k C_s \quad (3.9.20)$$

называется ионно-звуковой волной, а величина C_s — скоростью ионно-звуковой волны.

9.3. Несжимаемость как свойство плазмы

В качестве дополнительного условия при рассмотрении альфвеновской волны использовалось уравнение $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, причем было сделано утверждение, что это уравнение справедливо для несжимаемой жидкости. Хотя и существуют проводящие несжимаемые жидкости (например, жидкая ртуть), трудно допустить, что *плазма* является несжимаемой. Действительно, если бы при выводе ионно-звуковой волны использовалось условие $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, эта волна отсутствовала бы [из (3.9.15б) следовало бы $\partial \rho_{m1}/\partial t = 0$, из (3.9.17) мы имели бы $p_1 = 0$, а из (3.9.15а) — $\mathbf{V}_1 = 0$]. У читателя может возникнуть вопрос, какое отношение к поведению плазмы имеет альфвеновская волна в несжимаемой жидкости. Дело в том, что, во-первых, альфвеновские волны действительно распространяются в плазме и свойства их в точности описываются уравнениями (3.9.12)—(3.9.14) и, во-вторых, условие $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, при котором рассмотрение сильно упрощается, справедливо для многих типов возмущений в плазме. Суть дела не в том, что плазма несжимаема, а скорее

в том, что существуют возмущения, которые не меняют плотности плазмы. Поэтому упрощения, сделанные при выводе альфвеновской волны, справедливы даже в (сжимаемой) плазме при возмущениях

$$\begin{aligned} V_{1x} &= V_{1x}(z), \\ \rho_1 &= 0, \end{aligned}$$

которые не связаны с изменением плотности плазмы. В этом случае $V_{1x}(z)$ порождает возмущение электрического поля $E_y(z)$, согласно закону Ома (член $\mathbf{V} \times \mathbf{B}_z$). Электрическое поле в свою очередь, согласно уравнению $\nabla \times \mathbf{E} = -(1/c) (\partial \mathbf{B} / \partial t)$, порождает магнитное поле $\mathbf{B}_{1x}(z)$ и ток $\mathbf{J}_{1y} = (c/4\pi) \nabla \times \mathbf{B}$. Уравнение движения связывает силу $\mathbf{J}_1 \times z\mathbf{B}_0$ с изменением импульса $\rho \partial V_{1x} / \partial t$. Таким образом, возмущение $V_{1x}(z)$ не вызывает движения со скоростью $V_{1z}(z)$ и уравнение $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ является согласованным. Следует отметить, что при выводе ионно-звуковой волны возмущение было выбрано в виде $\mathbf{V}_1 = V_1(x) \hat{x}$, а вычисление привело к волне сжатия. При выводе альфвеновской волны вместо использования уравнения $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ можно было бы выбрать возмущение в виде $\mathbf{V}_1 = V_1(z) \hat{x}$, что привело бы к тому же ответу. Итак, утверждение, что плазма несжимаема, т. е. $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, которое часто встречается в теоретических работах, в действительности есть краткий способ отразить нечто значительно более сложное.

9.4. Солитоны и ударные волны ионно-звукового типа ¹⁾

Ионно-звуковая волна служит отправной точкой в теории бесстолкновительных ударных волн в отсутствие магнитного поля; эта теория показывает, к чему придут учет членов, отброшенных в упрощенных одножидкостных уравнениях (3.7.1)–(3.7.6), а именно $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ и $(n_e - n_i)/n_e$.

Рассмотрим однородную плазму в отсутствие внешних полей ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = \nabla p_0 = \mathbf{V}_0 = 0$), состоящую из горячих электронов и холодных ионов. Пусть в ней произошло возмущение плотности. Тогда двухжидкостные уравнения, описывающие развитие возмущения [возмущение предполагается одномерным, т. е. все величины зависят только от одной координаты x , возмущенная скорость, соответствующая ионно-звуковой волне, направлена также по x , т. е. $\mathbf{V}_1 = V_1(x) \hat{x}$], имеют вид

$$\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} + \frac{\partial n_{i,e} V_{i,e}}{\partial x} = 0, \quad (3.9.21)$$

$$\frac{\partial V_{i,e}}{\partial t} + V_{i,e} \frac{\partial V_{i,e}}{\partial x} = -\frac{q_{i,e}}{m_{i,e}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{(nm)_{i,e}} \frac{\partial p_{i,e}}{\partial x}, \quad (3.9.22)$$

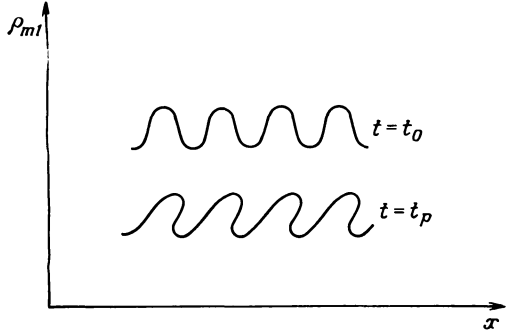
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi e (n_i - n_e). \quad (3.9.23)$$

Если принять приближения $n_e = n_i$ и $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0$, эти уравнения сводятся к одножидкостным уравнениям, которые имеют решения $V_1, \rho_1 \approx \sin k(x - C_s t)$. Если положить $n_e = n_i$, но не считать $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \neq 0$, решение уравнений (3.9.21)–(3.9.23) соответствует волне вида $\sin k(x, t)(x - C_s t)$, профиль которой укручается до тех пор, пока градиенты ρ_1 и V_1 не обратятся за конечное время в бесконечность, после чего профили $\rho_1(x)$ и $V_1(x)$ становятся двузначными [8], как показано на фиг. 34, и решение уравнений (3.9.21)–(3.9.23) в виде волны далее не существует. Это явление называется опрокидыванием волны.

Задача 3.9.3. Методом последовательных приближений покажите, что член $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ приводит к увеличению градиентов со временем.

¹⁾ Исчерпывающее исследование этого и других типов ударных волн приведено в книге [7].

Задача 3.9.4. Покажите, что линеаризованные *двухжидкостные* уравнения предсказывают при $T_i = 0$ существование ионно-звуковых волн с частотой $\omega = = kC_s (1 + k^2\lambda_{De}^2)^{-1/2}$,



Фиг. 34. Профили возмущения плотности для двух различных моментов времени. Видно, как ударная волна становится «двухзначной» перед «опрокидыванием».

Если отказаться от ограничения $n_e = n_i$, то, как мы покажем ниже, для волны малой амплитуды укрупнение профиля в конце концов уравновешивается дисперсией. Укрупнение профиля волны связано с тем, что благодаря нелинейным членам в волновом уравнении наряду с исходной волной (k, ω) возникают высшие гармоники $(2k, 2\omega)$. Если более высокие гармоники распространяются со скоростью основной волны, связь между гармониками сильная. Появление более коротких длин волн и означает укрупнение профиля. Если более высокие гармоники распространяются медленнее (или быстрее), чем основная волна, связь ослабевает и *укрупнение прекращается*. В случае ионно-звуковых волн, когда их длина волны приближается к значению дебаевского радиуса, на распространение волны влияет разделение зарядов ($n_e \neq n_i$), причем более короткие волны распространяются медленнее¹⁾. Это называется *дисперсией*. Ниже мы покажем, что конкуренция между укрупнением и дисперсией приводит к решению, в котором ρ_1 и V_1 постоянны в системе координат, движущейся со скоростью $U \sim C_s$.

Уравнение движения электронов (3.9.22) вследствие малости их массы можно записать в приближенном виде

$$0 = en_e \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial p_e}{\partial x}. \tag{3.9.24}$$

Приближение $T_e = \text{const}$, как отмечалось выше, справедливо, поскольку электроны движутся быстро по сравнению с ионными волнами. В таком случае решение уравнения (3.9.24) имеет вид

$$n_e = n_0 e^{e\varphi/kT_e}.$$

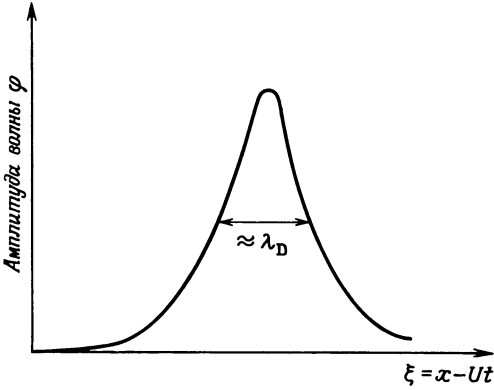
Динамика ионов описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial x} &= - \frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n_i V_i &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_0 e^{e\varphi/kT_e}). \end{aligned} \tag{3.9.25}$$

Задача 3.9.5. В случае уравнений (3.9.25) предположение о том, что $n_e = n_i$ и $\varphi = 0$, теперь не приводит к ионно-звуковым волнам. Почему?

Если в системе координат, движущейся со скоростью U , достигается стационарное состояние, все величины должны быть функциями от $\xi = x - Ut$.

¹⁾ Тот факт, что это происходит на масштабе длины $L \approx \lambda_D$, не должен вызывать удивления [см., например, обсуждение после (3.5.1)]; для ионных волн явная зависимость ω/k от длины волны будет вычислена в гл. 8.



Фиг. 35. Зависимость амплитуды солитона от расстояния в системе координат, относительно которой волна находится в покое.

Решение уравнения (3.9.26) в виде волны, показанной на фиг. 35, можно получить разными способами. Например, если под φ понимать «координату» частицы, уравнение (3.9.26) запишется в форме

$$-\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2},$$

что соответствует уравнению движения (ξ — «время») частицы в потенциальной яме.

Задача 3.9.6. Покажите, разложив уравнение (3.9.26) для малых φ , что его решение $\varphi = \varphi_{\text{макс}} \text{ch}^{-1}(\xi/\Delta)$. Найдите l и выразите Δ и U через амплитуду волны $\varphi_{\text{макс}}$ при малых φ .

Задача 3.9.7. Покажите, что из (3.9.26) непосредственно следует

$$U = - \left(\frac{\kappa T_e}{2m_i} \right)^{1/2} \frac{1 - e^{e\varphi m/\kappa T_e}}{(e^{e\varphi m/\kappa T_e} - 1 - e\varphi m/\kappa T_e)^{1/2}}.$$

(Указание: $d\varphi/d\xi = 0$ при $\varphi = \varphi_m$.)

На фиг. 36 приведены графики $V(\varphi)$ при различных значениях скорости U . «Частица» начинает двигаться при $\varphi = 0$, и решение имеет такой же вид, как показано на фиг. 35, если

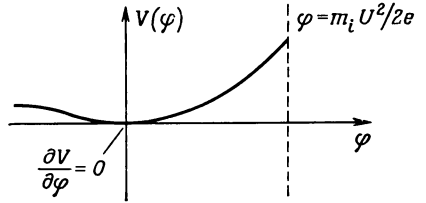
$$\sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}} < U < 1,6 \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}}.$$

Скорость U растет с увеличением амплитуды солитона $\varphi_{\text{макс}}$ (см. задачу 3.9.6, а также фиг. 36 или задачу 3.9.7), причем эта волна не существует, если амплитуда слишком велика. В действительности физическая ситуация предопределяет либо

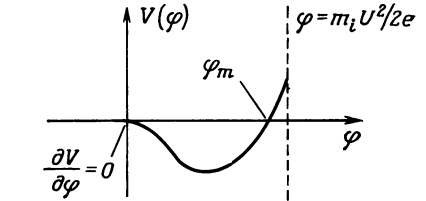
Это приводит сразу же к стационарному уравнению для φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = -4\pi e \left(\frac{n_0}{\sqrt{1 - 2e\varphi/m_i U^2}} - n_0 e^{e\varphi/\kappa T_e} \right). \quad (3.9.26)$$

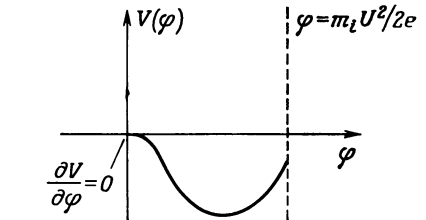
Для малых $e\varphi/\kappa T_e$ данное уравнение имеет решение в виде волны, амплитуда которой в зависимости от расстояния приведена на фиг. 35. Эта волна, распространяющаяся через плазму, имеет конечную амплитуду. Она называется *солитоном*. Существуют аналогичные волны, соответствующие другим типам плазменных волн с дисперсией $\omega = kV$.



а



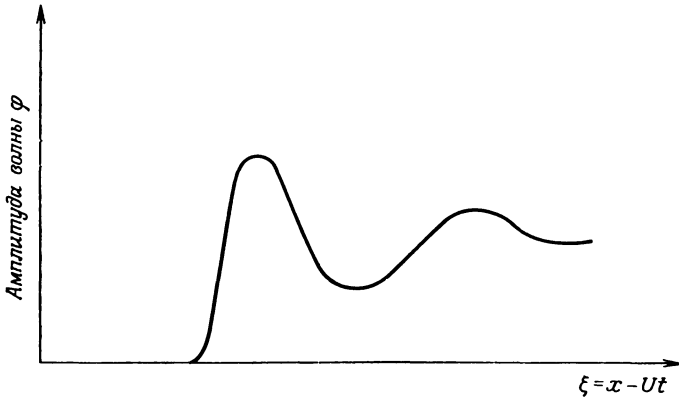
б



в

Фиг. 36. Потенциал $V(\varphi)$ при различных значениях скорости U .

Решение получено: а — при $U^2 < \kappa T_e/m_i$; б — при $2,56\kappa T_e/m_i > U^2 > \kappa T_e/m_i$; в — при $U^2 > 2,56\kappa T_e/m_i$.

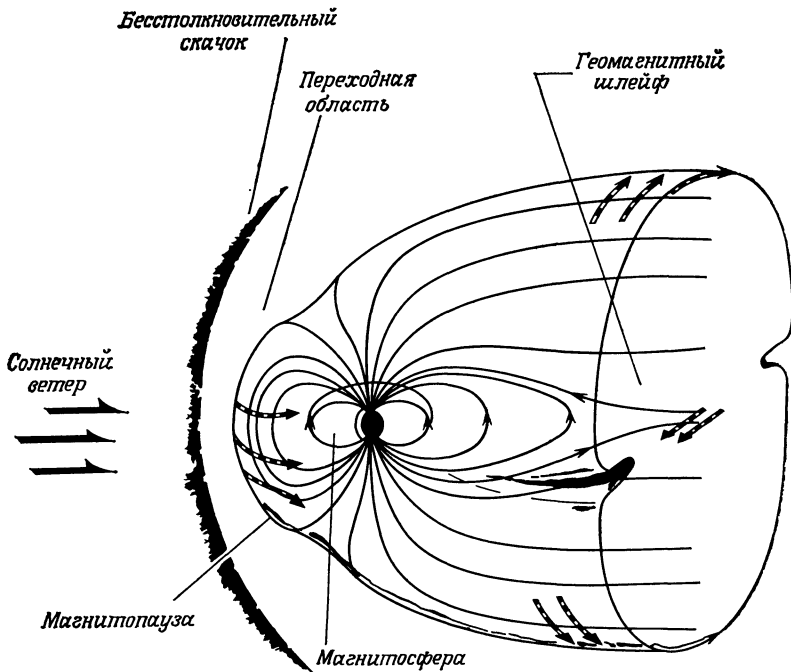


Фиг. 37. Зависимость амплитуды бесстолкновительной ударной волны от расстояния.

U , либо $\varphi_{\text{макс}}$. Соотношение $U = \sqrt{\kappa T_e / m_i} \mathcal{M}$ определяет число Маха \mathcal{M} . Из фиг. 36 видно, что решение отсутствует при $\mathcal{M} < 1$ и $\mathcal{M} > 1,6$.

Если учесть влияние редких столкновений или отражения ионов высокой энергии $E_i \approx e\varphi$ от потенциального барьера φ , симметрия решения нарушится и оно будет иметь вид, показанный на фиг. 37. (Представьте себе φ как затухающие осцилляции в потенциальной яме.)

Рассмотренное изменение состояния плазмы, происходящее на расстоянии λ_D , в то время как $\lambda_{\text{столк}} \gg \lambda_D$ называется *бесстолкновительной* ударной волной. При вхождении солнечного ветра в земную магнитосферу он пре-



Фиг. 38. Схематическое представление эффектов вторжения солнечного ветра в магнитное поле Земли (показана область головного скачка).

Магнитопауза (устойчивость M -слоя, отсутствие желобковой неустойчивости, аномальная диффузия); *бесстолкновительный скачок* (диссипация в скачке, нелинейное нарастание волн, стохастическое ускорение, двухпотоковая неустойчивость, область применимости МГД-теории); *переходная область* (турбулентность плазмы, неравновесные явления); *геомагнитный шлейф* (устойчивость к пинчеванию, пересоединение силовых линий); *магнитосфера* (неустойчивости: конусная, анизотропного распределения по скоростям, желобковая, двухпотоковая; ускорение, диффузия, удержание).

вращается из холодного потока с одним направлением движения частиц в горячую плазму с хаотическим направлением их движения на расстоянии λ , которое много меньше средней длины свободного пробега частиц по отношению к столкновениям. Переходный слой, показанный на фиг. 38, называется *головным скачком*. Головной скачок у Земли [9] обладает свойствами, которые связаны с описанными здесь явлениями.

9.5. Заряженная плазма. Электронный газ, удерживаемый магнитным полем

Система, в которой даже для определения равновесных свойств необходимо учитывать член $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ и то, что $\bar{n}_e \neq \bar{n}_i$, — это заряженный электронный газ. Электронейтральность $\bar{n}_e = \bar{n}_i$ предполагалась с целью упрощения математических выкладок в одножидкостной модели плазмы. Однако плазма может состоять из зарядов одного знака. Равновесные свойства электронного газа в однородном постоянном магнитном поле можно продемонстрировать с помощью уравнения движения (3.4.2) для электронов без учета градиента давления и столкновений:

$$m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) + e\mathbf{E} + \frac{e\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = 0, \quad (3.9.27)$$

а также уравнения непрерывности (3.4.1) для электронов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{V} = 0 \quad (3.9.28)$$

и уравнений Максвелла с $\bar{n}_i = 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi en, \quad (3.9.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{4\pi e}{c} n\mathbf{V}. \quad (3.9.30)$$

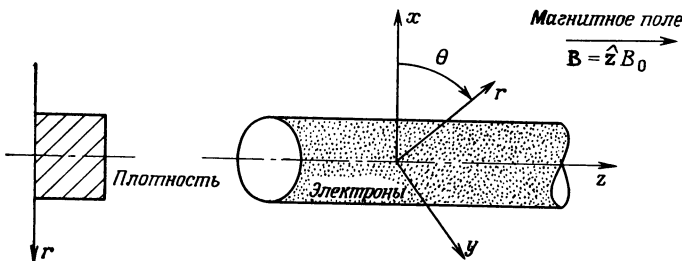
В приведенных уравнениях мы опустили индексы, считая все величины относящимися к электронам. Используя эти уравнения, можно исследовать систему, схематически показанную на фиг. 39. В цилиндрических координатах r , θ и z написанные выше уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} V_r - \frac{V_\theta^2}{r} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_r = -\frac{e}{m} E_r - \omega_c V_\theta, \quad (3.9.31)$$

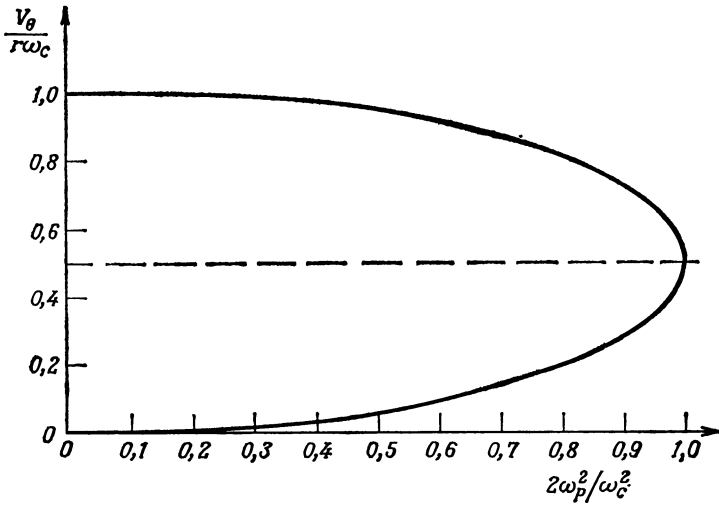
$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{2V_r V_\theta}{r} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) V_\theta = -\frac{eE_\theta}{m} + \omega_c V_r, \quad (3.9.32)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta = -4\pi en, \quad (3.9.33)$$

здесь $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота. Можно получить стационарное ($\partial/\partial t \rightarrow 0$) решение этих уравнений, не зависящее от угла ($\partial/\partial \theta \rightarrow 0$), при



Фиг. 39. Облако электронов, вращающееся как твердое тело в однородном аксиальном магнитном поле.



Фиг. 40. Зависимость угловой скорости нескомпенсированного однородного облака электронов, вращающегося в однородном магнитном поле как твердое тело, от плотности зарядов.

Верхняя ветвь соответствует быстрой, или циклотронной, моде, нижняя — медленной, или дрейфовой, моде.

постоянной плотности ($n = \text{const}$). В случае постоянной плотности радиальное электрическое поле

$$E_r = -2\pi n e r. \tag{3.9.34}$$

Постоянство B_z ($\partial B_z / \partial t = 0$) означает, что $E_\theta = 0$ и поэтому уравнение (3.9.32) удовлетворяется при $V_r = 0$. Исходя из этих предположений, уравнение (3.9.31) можно записать следующим образом:

$$\frac{V_\theta^2}{r} + \frac{2\pi n_0 e^2}{m} r - \omega_c V_\theta = 0. \tag{3.9.35}$$

Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$\frac{V_\theta}{r} = \frac{\omega_c}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega_c^2} \right)^{1/2} \right], \tag{3.9.36}$$

где $\omega_p = (4\pi n e^2 / m)^{1/2}$ — плазменная частота. Отсюда мы видим, что имеются два равновесных решения, соответствующих вращению плазмы как целого. Эти решения приведены на фиг. 40.

При низких плотностях ($\omega_p^2 / \omega_c^2 \ll 0,5$) одно равновесие соответствует вращению с частотой, почти совпадающей с циклотронной, другое — вращению с низкой угловой частотой. Для обоих равновесных решений соблюдается баланс центробежных и электростатических сил, направленных от оси, и силы Лоренца, направленной к оси. При $\omega_p^2 = \omega_c^2 / 2$ оба решения сливаются в одно с угловой частотой вращения $\omega_c / 2$. Это равновесное решение ($\omega_p^2 = \omega_c^2 / 2$) называется *бриллюэновским потоком*. Оно соответствует минимальному магнитному полю, которое обеспечивает равновесный поток электронов заданной плотности. Равновесное решение не является самосогласованным, поскольку оно не удовлетворяет уравнению (3.9.30), т. е. электронные токи генерируют магнитное поле, которое в свою очередь должно менять распределение плотности по радиусу. Это диамагнитное поле пренебрежимо мало, если электростатическая энергия плазмы много меньше плотности энергии, связанной с массой покоя, $E^2 / 8\pi \ll n m_0 c^2$, что как раз выполняется для нерелятивистских электронных пучков, часто используемых в лаборатории. В настоящее время осуществлено несколько экспериментов,

в которых изучались равновесие и устойчивость заряженной плазмы. В одном из этих экспериментов [10] создавалась заряженная электронная плазма в форме кольца с плотностью 10^{11} см $^{-3}$, со средней энергией 0,5 МэВ в импульсном поле пробкотрона величиной 15 кГс. Захваченная плазма сохранялась в течение времени более 15 мс. Описанные выше эффекты играют важную роль также в других экспериментах, в которых изучаются сильноточные (170 кА) короткоимпульсные электронные пучки высокой энергии (14 МэВ) с целью развития методов коллективного ускорения.

§ 10. ТЕОРИЯ ЧУ — ГОЛДБЕРГЕРА — ЛОУ

Одножидкостные МГД-уравнения вместе с уравнениями Максвелла и соответствующим предположением с целью замыкания цепочки уравнений для моментов функции распределения правильно описывают свойства невязкой идеально проводящей квазинейтральной плазмы в магнитном поле, если столкновения в плазме достаточно часты, чтобы поддерживать ее изотропность, и если характерные частоты много меньше ионной циклотронной частоты.

Если же магнитное поле велико, а столкновения редки, предположение об изотропности не выполняется и свойства плазмы вдоль и поперек магнитного поля оказываются различными. Чу, Голдбергер и Лоу [11] предположили, что тепловой поток вдоль магнитного поля пренебрежимо мал и разложили уравнение Власова по степеням $1/B$, чтобы получить систему уравнений для макроскопических переменных одножидкостной теории, справедливую в тех случаях, когда фазовая скорость возмущений в плазме больше средней тепловой скорости частиц плазмы, т. е. $\omega/k \gg v_T$. Полная система уравнений, описывающая плазму в рамках этой модели, записывается следующим образом:

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = 0. \quad (3.10.1)$$

Уравнение движения

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (3.10.2)$$

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.10.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (3.10.4)$$

Закон Ома (в предположении $\sigma \rightarrow \infty$)

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = 0. \quad (3.10.5)$$

В теории Чу — Голдбергера — Лоу (ЧГЛ) давление предполагается локально-изотропным в плоскости, перпендикулярной магнитному полю; давление в направлении локального магнитного поля может иметь независимое значение p_{\parallel} . Другими словами, в системе координат с осью z , направленной вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 в данной точке x_0 , тензор давления имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (3.10.6)$$

В общем случае магнитное поле искривлено, и ни в какой фиксированной лабораторной системе отсчета \mathbf{V} не совпадает с какой-либо координатной осью. В произвольной системе отсчета тензор давления (3.10.6) преобразуется к виду

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_x b_x & (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_x b_y & (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_x b_z \\ (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_y b_x & p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_y b_y & (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_y b_z \\ (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_z b_x & (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_z b_y & p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_z b_z \end{bmatrix}; \quad (3.10.7)$$

здесь $\mathbf{b} = \mathbf{V}/|V|$ — единичный вектор вдоль направления магнитного поля. Тензор (3.10.7) можно записать также следующим образом:

$$\mathbf{P} = p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b},$$

здесь \mathbf{I} — единичный тензор. Для искривленного поля $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x})$, поэтому величина $\nabla \cdot \mathbf{P}$ содержит информацию не только об изменении p_{\perp} и p_{\parallel} от точки к точке, но также и об изменении направления магнитного поля (единичного вектора \mathbf{b}) от точки к точке.

Если магнитное поле однородно и направлено почти вдоль прямой, т. е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1(\mathbf{x})$, как это имеет место в случае волн малой амплитуды, распространяющихся в сильном магнитном поле, то $\nabla \cdot \mathbf{P}$ упрощается за счет линеаризации по \mathbf{V}_1 . Например, если $\mathbf{V}_0 = V_0 \hat{\mathbf{z}}$, мы имеем

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} = & \left[\frac{\partial}{\partial x} p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_x \right] \hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{\partial}{\partial y} p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_y \right] \hat{\mathbf{y}} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial x} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_x + \frac{\partial}{\partial y} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_y + \frac{\partial}{\partial z} p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (p_{\parallel} - p_{\perp}) b_z^2 \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

Задача 3.10.1. Покажите, что в общем случае

$$(\nabla \cdot \mathbf{P})_{\perp} = \nabla_{\perp} p_{\perp} - (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$$

и

$$(\nabla \cdot \mathbf{P})_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{b}.$$

При рассмотрении давления любая гидродинамическая теория сталкивается с двумя проблемами. Во-первых, это вопрос об изотропности и возможности замены $\nabla \cdot \mathbf{P}$ на ∇p . Именно здесь МГД-теория наиболее сильно расходится с теорией ЧГЛ. Во-вторых, опять-таки необходимо выбрать уравнение состояния для связи p и ρ , чтобы число неизвестных не превышало числа уравнений. В теории ЧГЛ требуются два уравнения состояния — одно для p_{\perp} , а другое для p_{\parallel} . В случае адиабатических процессов в бесстолкновительном газе, который является изотропным в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и в котором отсутствует связь между продольным и поперечным движениями (см. задачу 3.10.2), имеет место следующее уравнение состояния:

$$\frac{p_{\perp}^2 p_{\parallel}}{\rho_m^2} = \text{const}. \quad (3.10.9)$$

Второе уравнение, связывающее p_{\perp} , p_{\parallel} и ρ_m , выводится при рассмотрении динамики отдельных заряженных частиц, находящихся в магнитном поле, которое медленно меняется в пространстве и времени. В приложении I показано, что магнитный момент $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ почти равен интегралу движения. Это позволяет (поскольку $v_{\perp}^2 \approx p_{\perp}/\rho_m$) использовать уравнение

$$\frac{p_{\perp}}{\rho_m B} = \text{const} \quad (3.10.10)$$

в качестве второго «уравнения состояния», необходимого для замыкания уравнений теории ЧГЛ.

Задача 3.10.2. Покажите, что, если в идеальном бесстолкновительном газе движение в плоскости (\perp) происходит независимо от движения в третьем направлении (\parallel), адиабатическое уравнение состояния имеет вид $p_{\perp}^2 p_{\parallel} \rho_m^{-5} = \text{const}$.

Используя снова уравнение $\mathbf{J} \times \mathbf{V}/c = [\nabla \times \mathbf{V}] \times \mathbf{V}/4\pi$, чтобы исключить ток из (3.10.2), и уравнение $\nabla \times \mathbf{E} = -(1/c) (\partial \mathbf{B}/\partial t)$, чтобы исключить \mathbf{E} , а также используя результаты задачи 3.10.1, можно получить следующую систему уравнений, обычно называемую теорией ЧГЛ (или дважды адиабатической теорией):

$$\begin{aligned} \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right)_{\perp} + \nabla_{\perp} \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi} \left(\frac{p_{\perp} - p_{\parallel}}{B^2/8\pi} + 1 \right) &= 0, \\ \rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right)_{\parallel} + \nabla_{\parallel} p_{\parallel} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) \left(\frac{\nabla B}{B} \right)_{\parallel} &= 0, \\ \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} &= 0, \end{aligned} \quad (3.10.11)$$

включающую уравнения (3.10.9) и (3.10.10) в качестве уравнений состояния.

Поскольку движение плазмы поперек магнитного поля в некотором смысле не связано с движением вдоль него, теория ЧГЛ является вполне подходящей для описания такого рода эффектов.

Из одножидкостных МГД-уравнений мы получили низкочастотные (альфвеновские) волны. Теория ЧГЛ позволяет дать более подробное описание свойств этих волн, что служит хорошим примером эффективности приближения с использованием двух адиабатических уравнений состояния. При этом метод исследования полностью совпадает с методом, примененным при анализе одножидкостных МГД-уравнений. Все величины, за исключением скорости, представляются в виде суммы стационарного значения и небольшого волнового возмущения, зависящего от времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \hat{\mathbf{V}}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \\ \rho_m &= \rho_{m0} + \hat{\rho}_{m1} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \\ p_{\perp} &= p_{\perp 0} + \hat{p}_{\perp 1} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \\ p_{\parallel} &= p_{\parallel 0} + \hat{p}_{\parallel 1} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \hat{\mathbf{B}}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]. \end{aligned}$$

Все уравнения линеаризуются в пренебрежении произведением возмущенных величин. Считая $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, в результате получаем дисперсионное уравнение (квадратное относительно ω^2) с корнями

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{k^2}{2\rho_{m0}} \left\{ \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} + 2p_{\parallel} \cos^2 \theta + p_{\perp} \sin^2 \theta \right) \pm \right. \\ &\left. \pm \left[\left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} (1 + \sin^2 \theta) - 4p_{\parallel} \cos^2 \theta \right)^2 + 4p_{\perp}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.10.12)$$

где θ — угол между направлениями распространения волны и магнитного поля (ось z).

При распространении волны вдоль магнитного поля ($\theta = 0$) из (3.10.12) получаем два решения

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_{m0}} \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) \quad (3.10.13)$$

и

$$\omega^2 = \frac{3k^2}{\rho_{m0}} p_{\parallel}. \quad (3.10.14)$$

Первое решение описывает гидродинамические волны в редкой плазме, находящейся в сильном магнитном поле. Если $p_{\perp} = p_{\parallel}$, то соотношение (3.10.13) сводится к закону дисперсии альфвеновской волны, рассмотренному в § 9 при анализе МГД-уравнений. Если $p_{\perp} \neq p_{\parallel}$, скорость альфвеновской волны изменяется. В случае $p_{\parallel} > p_{\perp} + B^2/4\pi$ возникает новое явление: ω^2 отрицательно, т. е. возмущение экспоненциально возрастает или затухает со временем: $\mathbf{V}_1 \sim \exp(\pm \omega_i t)$, где $\omega_i = \text{Im}(\omega)$. Альфвеновская волна разбивается на две ветви, одна из которых затухает со временем, а другая нарастает. Из этого рассмотрения следует, что гидродинамические волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, неустойчивы в том смысле, что небольшое возмущение V_1 около стационарного значения V_0 нарастает со временем. Эта неустойчивость, называемая *шланговой неустойчивостью*, представляет собой лишь один из многих примеров (подробно рассмотренных в гл. 5 и 9) того, как плазма может релаксировать из состояния, не являющегося термодинамически равновесным, за времена, меньшие времени между столкновениями.

Второе решение (3.10.14) описывает ионно-звуковые волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля.

При распространении волны поперек магнитного поля ($\theta = \pi/2$) из (3.10.12) имеем одно решение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2}{\rho_{m0}} \left(\frac{B_0^2}{8\pi} + p_{\perp} \right). \quad (3.10.15)$$

Эта волна называется *магнитозвуковой волной*.

Если давление мало, то $\omega^2 = k^2 B^2/4\pi\rho$ при распространении волны под любым углом к направлению магнитного поля. Эта волна представляет собой смесь магнитозвуковой и альфвеновской волн.

Задача 3.10.3. Покажите, что существуют неустойчивые моды при распространении волн под любым углом θ , меньшим θ_c , где критический угол θ_c определяется из уравнения

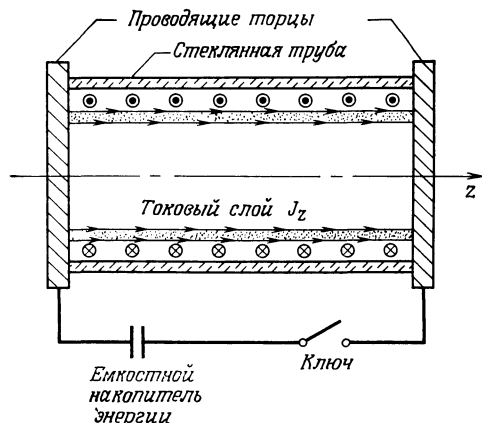
$$\frac{B_0^2}{4\pi} + p_{\perp} (1 + \sin^2 \theta_c) = \frac{p_{\perp}^2}{3p_{\parallel}} \sin^2 \theta_c + p_{\parallel} \cos^2 \theta_c. \quad (3.10.16)$$

§ 11. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПИНЧ ¹⁾

Равновесный пинч служит поучительным примером применения стационарных МГД-уравнений. Однако он не отражает ситуации, которая имеет место в лабораторных экспериментах по удержанию плазмы с помощью пинч-эффекта. В типичном лабораторном эксперименте с пинчем разреженная плазма подвергается быстрому сжатию путем пропускания большого разрядного тока в течение времени порядка нескольких микросекунд. За это время производится несколько отдельных операций. Сначала редкая ($\sim 10^{14}$ см⁻³) холодная ($\sim 1-10$ эВ) плазма создается в вакуумной камере с помощью высокочастотного разряда, который прекращается перед началом стадии сжатия.

Затем в случае Z-пинча (фиг. 41) к концам плазменного столба мгновенно прикладывается высокое напряжение, а в случае θ -пинча (фиг. 42) у поверх-

¹⁾ Подробное описание процессов, протекающих в динамическом пинче, приведено в работе [15*]. — *Прим. ред.*



Фиг. 41. Схема быстрого линейного пинча, или Z-пинча.

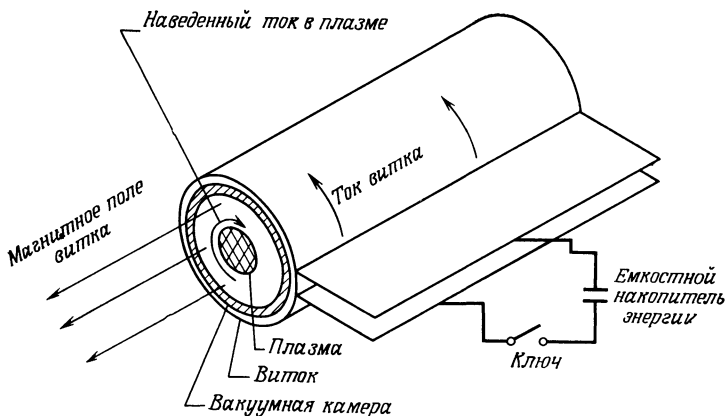
ности плазменного столба мгновенно создается большое аксиальное магнитное поле. Буквы Z и θ в названии пинчей означают направления, по которым течет ток в плазме. В обеих конфигурациях магнитное поле, сжимающее плазму, быстро нарастает и $B^2/8\pi \gg p$. При быстром нарастании поля B и тока J закон Ома в предположении высокой проводимости имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(B - \frac{c^2}{\omega_p^2} \frac{d^2 B}{dx^2} \right) = 0.$$

Величина c/ω_p , имеющая размерность длины, называется *бесстолкновительной глубиной проникновения*¹⁾. Предполагается, что в начальном состоянии

проводимость редкой плазмы велика и что глубина проникновения соответственно значительно меньше радиуса плазменного столба. Таким образом, ток течет по тонкому слою вблизи поверхности плазмы. Этот токовый слой ускоряется по направлению к оси вследствие действия сил магнитного давления, и, как предполагается, он подхватывает и несет с собой все частицы, которые встречает на пути своего движения к оси. Такое представление соответствует так называемой модели «снежного плуга» («snow-plow»), которую используют для предсказания многих наиболее важных характеристик пинча, но которая, как следует помнить, является лишь приближенной моделью. Экспериментальные и теоретические исследования показали, что такая модель является разумным приближением в случае многих экспериментов с плазменным пинчем. При взрыве или схлопывании часть запасенной электрической энергии преобразуется в кинетическую энергию радиального движения, направленного к оси. Когда сжимающаяся плазменная оболочка достигает оси столба, плазма термализуется, возможно за счет отраженной ударной волны, которая возникает при приближении оболочки к оси.

Наконец, образующуюся сжатую ($n_e \approx 10^{17}$ см⁻³) горячую ($T_e = 100-1000$ эВ) плазму пинча исследуют с целью нахождения распре-



Фиг. 42. Схема быстрого θ -пинча.

¹⁾ Величину c/ω_p называют также высокочастотной глубиной проникновения.—
Прим. ред.

деления плотности и температуры в ней, оценки устойчивости, скорости выхода излучения и других свойств.

Плазма, образующаяся в пинче, сыграла большую роль в развитии одной из областей исследований по управляемому термоядерному синтезу, и до сих пор активно ведется большое число экспериментов с использованием пинчей. Пинчи также возбудили интерес теоретиков к физике плотной горячей плазмы; существует, однако, множество ситуаций, когда схлопывающаяся плазма оказывается турбулентной и модель «снежного плуга» не в состоянии описать наблюдаемые явления.

Экспериментальные исследования последних лет показали, что сильно-точные релятивистские пучки (до 270 кА при 14 МэВ) могут самофокусироваться за счет пинч-эффекта и транспортироваться на многие метры без существенных потерь.

Чтобы проиллюстрировать метод исследования ситуации, когда силы сжатия много больше сил давления, рассмотрим Z-пинч, показанный на фиг. 41. Полный анализ схлопывания токовой оболочки в Z- или θ -пинче требует учета параметров электрической цепи, поскольку ток в плазме зависит от индуктивности цепи, которая в свою очередь зависит от положения токовой оболочки. По указанной причине уравнения для плазмы и для электрической цепи оказываются связанными. Здесь этой проблемы мы избегаем благодаря предположению о том, что ток в плазме пропорционален времени $[I(t) = I_m t]$.

В случае Z-пинча предполагается, что приложенное напряжение мгновенно возрастает до своего пикового значения. Если считать, что плазма является идеальным проводником на таких масштабах времени, то возникающий в плазме ток течет в тонком слое у поверхности плазмы. На внешней стороне этого токового слоя создается магнитное поле B_θ . Магнитное поле внутри предполагается равным нулю. Удобно пренебречь кинетическим давлением плазмы внутри токовой оболочки во время сжатия. Это приближение обычно хорошо выполняется, так как $B^2/8\pi \gg p$ вплоть до самого конца процесса схлопывания.

Магнитное давление снаружи плазмы действует так, чтобы ускорять массу плазмы, по мере того как токовая оболочка движется радиально к оси.

Запишем одножидкостные уравнения (3.5.8) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho_m \mathbf{V} + \rho_m \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p, \quad (3.11.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c}. \quad (3.11.2)$$

Согласно модели «снежного плуга», все частицы в тонкой оболочке движутся с одинаковой скоростью $V_r(t)$. Полный ток в оболочке

$$I = \int_0^\infty J_z 2\pi r dr.$$

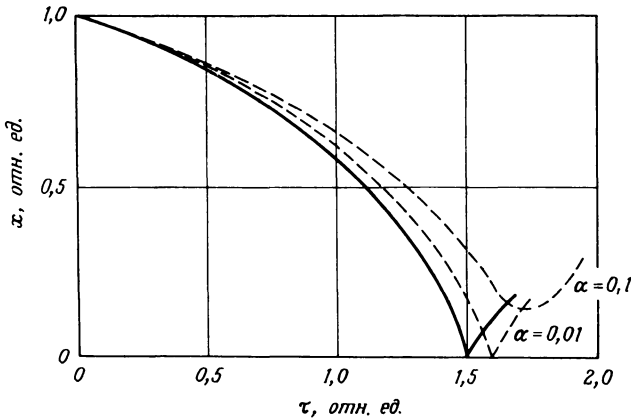
Из (3.11.2) следует, что магнитное поле вне токовой оболочки

$$B = \frac{2I}{rc}.$$

Полная масса плазмы (на длине l) равна

$$M = \rho_m(0) \pi (a^2 - R^2) l,$$

где R — радиус оболочки в момент t и a — начальный радиус при $t = 0$. Если радиус токовой оболочки равен R , то гидродинамическая скорость



Фиг. 43. Зависимость безразмерного радиуса плазмы в динамическом пинче от относительного времени, показывающая сжатие плазмы или пинч-эффект (сплошная кривая). Штриховые кривые иллюстрируют влияние давления нейтрального газа на сжатие плазмы.

(всюду вне оболочки $V = 0$) определяется следующим образом:

$$V = \frac{dR}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \rho_m(R) \frac{dR}{dt} = \frac{J_z B_\theta}{c}.$$

Объем токовой оболочки равен $2\pi R l \cdot \Delta R$, и поэтому $\rho_m(R) = M/\text{объем}$, а $J_z = I/(2\pi R \Delta R)$. Уравнение движения оболочки имеет вид

$$\frac{d}{dt} M \frac{dR}{dt} = \frac{IB}{c}. \quad (3.11.3)$$

В модели «снежного плуга» уравнение движения токовой оболочки в безразмерных переменных в предположении линейного нарастания тока $[I(t) = (dI/dt)_0 t]$ записывается в виде

$$\left| \frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] \right| = -\frac{\tau^2}{x}; \quad (3.11.4)$$

здесь используются безразмерные переменные

$$x = \frac{r}{a} = \frac{\text{Радиус}}{\text{Начальный радиус}},$$

$$\tau = \frac{t}{t_1} = \frac{\text{Время}}{\text{Характерное время сжатия}},$$

где $t_1 = [ac/(dI/dt)_0]^{1/2} M_0^{1/4}$, $M_0 = \pi a^2 \rho_m$ — полная масса на единицу длины плазмы в начале сжатия. Начальные условия таковы: $x(0) = 1$ и $(dx/d\tau)_0 = 0$.

С этими начальными условиями уравнение (3.11.4) можно численно проинтегрировать и получить результат, представленный на фиг. 43. Радиус плазмы обращается в нуль при $\tau = 1,5$, и, следовательно, время сжатия составляет

$$t_c = 1,5 \left[\frac{ac}{(dI/dt)_0} \right]^{1/2} M_0^{1/4}. \quad (3.11.5)$$

Задача 3.11.1. Проверьте, можно ли получить уравнение движения (3.11.3) из динамики токовой оболочки (в рамках модели «снежного плуга») без использования уравнений гидродинамики.

Очевидно, что приближение, в котором пренебрегается кинетическим давлением плазмы, перестает выполняться вблизи конца схлопывания.

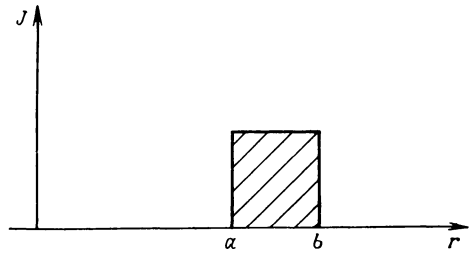
Пренебрегая такими эффектами, как ударная волна, излучение, джоулев нагрев и ионизация, и принимая адиабатическое уравнение состояния одноатомного газа ($pV^{5/3} = \text{const}$), можно учесть давление в уравнении движения токовой оболочки, оставаясь в рамках модели «снежного плуга». Таким образом, уравнение движения можно записать в виде

$$\frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = -\frac{\tau^2}{x} + \alpha x^{-7/3}, \quad (3.11.6)$$

где $\alpha = 2p_0 t_1^2 / a^2 \rho_{m0}$ — безразмерная константа, определяемая начальным давлением внутри оболочки. Для этого уравнения начальными условиями являются $x = 1$ и $dx/d\tau = 0$ при $\tau = \sqrt{\alpha}$, поскольку начальное давление задерживает начало сжатия до тех пор, пока правая часть (3.11.6) не изменит знак. На фиг. 43 приведены кривые для двух различных значений α . Этот грубый анализ опирается на несколько слабо обоснованных предположений, однако он показывает, что время схлопывания, предсказываемое для $\alpha = 0$, мало изменяется при учете кинетического давления плазмы. Итак, при $\alpha > 0$ плазменный столб сжимается до некоторого минимального радиуса, причем давление в этот момент достигает максимального значения. Давление оказывается большим, чем в случае равновесного пинча с таким же током, поскольку наряду с магнитным давлением оно включает в себя кинетическую энергию, связанную с радиальным движением плазмы в процессе схлопывания¹⁾.

В настоящем изложении мы не касались вопроса об устойчивости. Описанный здесь быстрый пинч неустойчив по отношению к ряду возмущений. Устойчивость плазмы в пинчах рассматривается в гл. 4.

Задача 3.11.2. Пусть плотность тока J в равновесном пинче такова, как показано на фиг. 44, и пусть при $r > b$ плазма отсутствует. Найдите $B(r)$ и $p(r)$ во всем пространстве. Покажите, что если $a \rightarrow b$, то $B^2/8\pi$ при $r = b$ совпадает с p при $r = 0$; если же $a \rightarrow 0$, то $B^2/4\pi$ при $r = b$ совпадает с p при $r = 0$.



Фиг. 44. Распределение тока в равновесном линейном пинче.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ter Haar D.*, Elements of Statistical Mechanics, New York, 1954.
2. *Thompson W. B.*, An Introduction to Plasma Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962, p. 227, 228.
3. *Chapman S., Cowling T. G.*, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, 2nd ed., Cambridge, London, 1952 (см. перевод: С. Чепмен, Т. Дж. Коулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960).
4. Plasma Physics in Theory and Application (ed. W. B. Kunkel), McGraw-Hill, New York, 1966, ch. 11.
5. *Roberts K. V., Taylor J. B.*, Phys. Rev. Letters, 8, 197 (1962).
6. *Bennett W. H.*, Phys. Rev., 45, 890 (1934).
7. *Tidman D. A., Krall N. A.*, Shock Waves in Collisionless Plasma, Wiley, New York, 1971.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
9. Introduction to Space Science (ed. W. M. Hess), New York, 1965, p. 363.
10. *Trivelpiece A. W., Pechacek R. E., Kapetanakis C. A.*, Phys. Rev. Letters, 21, 1436 (1968).

¹⁾ Хороший обзор работ по этому вопросу, включая экспериментальные результаты, приведен в книге Л. А. Арцимовича [12].

11. *Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E.*, Proc. Roy. Soc. (London), A236, 112 (1956).
12. *Арцимович Л. А.*, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.
- 13*. *Брагинский С. И.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 183.
- 14*. *Шафранов В. Д.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Атомиздат, 1963, стр. 92.
- 15*. *Дьяченко В. Ф., Имшенник В. С.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5, Атомиздат, 1967, стр. 394.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Anderson J. E.*, Magnetohydrodynamic Shock Waves, MIT, Cambridge, Mass., 1968.
- Brown Sanborn C.*, Basic Data of Plasma Physics, MIT and Wiley, New York, 1959.
- Cambel Ali Bulent*, Plasma Physics and Magnetofluidmechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- Cowling T. G.*, Magnetohydrodynamics, Interscience, 1959 (см. перевод: *Т. Каулинг*, Магнитная гидродинамика, ИЛ, 1959).
- Green H. S.*, Phys. Fluids, 2, 341 (1959).
- Longmire C. L.*, Elementary Plasma Physics, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: *К. Лонгмайр*, Физика плазмы, Атомиздат, 1966).
- Ratcliffe J. A.*, The Magneto-ionic Theory and Its Applications to the Ionosphere, Cambridge, N.Y., 1959 (см. перевод: *Дж. А. Ратклиф*, Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере, ИЛ, 1962).
- Shkarofsky I. P., Johnston T. W., Bachynski M. P.*, The Particle Kinetics of Plasmas, Addison-Wesley, Reading, 1966.
- Tidman D., Krall N. A.*, Shock Waves in Collisionless Plasmas, Wiley, New York, 1971.
- Волков Т. Ф.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 3.

ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Хотя плазма прежде всего является газом и к тому же почти идеальным, она обладает многими общими свойствами проводящей жидкости, обнаруживая когерентные движения, т. е. волны, в которых во многом проявляется природа плазменного состояния. Смысл гидродинамического приближения, подробно рассмотренный в гл. 3, кратко состоит в том, что если на все частицы, находящиеся в малом объеме, действуют одинаковые в первом приближении силы, то частицы будут совершать одинаковые движения, даже если они и не связаны с ближайшими соседями посредством столкновений. Если тепловые скорости некоторой группы частиц распределены в широком интервале, то, разумеется, эти частицы не будут двигаться вместе как жидкий элемент; результаты гидродинамического описания плазмы обычно применимы к таким явлениям, как волны в *холодной* плазме. Плазменные волны в тех условиях, когда тепловое движение оказывается важным, мы рассмотрим в гл. 8 с микроскопической точки зрения, невозможной при гидродинамическом подходе. Несмотря на это обстоятельство, гидродинамические модели позволяют провести удивительно подробный анализ плазменных волн.

Плазменное состояние, как мы покажем в настоящей главе, обладает огромным богатством волновых процессов, в связи с чем предлагалось множество способов классификации плазменных волн [1, 22*]. В настоящей главе проведено лишь грубое разбиение плазменных волн, определяемое состоянием плазмы, в которой распространяется данный тип волн (например, волны в плазме в отсутствие внешних магнитных полей, волны в замагниченной плазме и т. д.), поскольку на собственные моды колебаний сильно влияет конфигурация плазмы и магнитных полей.

Мы рассмотрим только волны малой амплитуды. Смысл этого ограничения заключается в том, что гидродинамические уравнения в этом случае можно *линеаризовать* по волновым переменным. Не следует, однако, забывать о важности нелинейных эффектов. Действительно, значительная часть теории бесстолкновительных ударных волн в плазме [2, 23*], основывается на нелинейных членах в гидродинамических уравнениях (§ 9 гл. 3).

§ 1. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ОТСУТСТВИИ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ ($E_0 = B_0 = 0$)

Плазма напоминает в некотором смысле систему связанных осцилляторов. Она обладает спектром собственных колебаний, определяемых как силами связи между частицами, так и инерцией частиц. Однако поскольку плазма обладает электрическими свойствами, характерными для диспергирующей диэлектрической среды, силы связи между частицами носят электрический характер. Поэтому как механические, так и диэлектрические свойства плазмы могут быть описаны с помощью ее диэлектрической проницаемости. Плазменные волны всегда связаны с электрическими полями, изменяющимися во времени и в пространстве, причем условия распространения этих

полей определяются диэлектрическими свойствами плазмы, которые в свою очередь зависят от значений постоянного магнитного и электрического полей в плазме. Плазма может быть неоднородной и анизотропной, что существенно сказывается на ее диэлектрических свойствах.

Диэлектрическая проницаемость *холодной плазмы* может быть вычислена с помощью гидродинамических уравнений, выведенных в гл. 3. Предполагая, что возмущенные значения (считаем их малыми) полей и токов имеют гармоническую зависимость от времени в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \hat{\mathbf{E}}_1 e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{V}_1 &= \hat{\mathbf{V}}_1 e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

из линеаризованных гидродинамических уравнений можно установить связь плотности зарядов и токов в плазме с электрическим и магнитным полями в ней. Это позволяет записать уравнения Максвелла следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla \times \hat{\mathbf{V}}_1 &= -\frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{J}}_1 = \\ &= -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1, \\ \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_1 &= \frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{B}}_1, \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}}_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 &= 0.\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости. Решение этих уравнений для заданной величины $\boldsymbol{\varepsilon}$, определяемой в условиях равновесия плазмы, позволяет найти нормальные колебания или волны при этих условиях равновесия.

С помощью двухжидкостных уравнений (3.4.1)—(3.4.4) можно вычислить тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы. В простом случае, когда в *стационарном состоянии внешние поля и средняя по времени скорость частиц равны нулю*, гидродинамические уравнения имеют решения относительно малых отклонений от стационарного состояния:

$$\begin{aligned}n_\alpha &= n_{\alpha 0} + \hat{n}_{\alpha 1}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{V}_\alpha &= \hat{\mathbf{V}}_{\alpha 1}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{B}}_1(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

В этом случае *линеаризованные* (в пренебрежении членами типа $\mathbf{V}_1 \mathbf{B}_1$ и т. д.) двухжидкостные уравнения записываются следующим образом:

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0 \Rightarrow -i\omega \hat{n}_{\alpha 1} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \hat{\mathbf{V}}_{\alpha 1} = 0.\tag{4.1.3}$$

Уравнение движения

$$n_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} = \frac{n_\alpha q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}}{c} \right) \Rightarrow -i\omega n_{\alpha 0} \hat{\mathbf{V}}_{\alpha 1} = \frac{n_{\alpha 0} q_\alpha}{m_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_1.\tag{4.1.4}$$

Уравнение Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} \Rightarrow \nabla \times \hat{\mathbf{B}}_1 = -\frac{i\omega}{c} \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} n_{\alpha 0} q_\alpha \hat{\mathbf{V}}_{\alpha 1}.\tag{4.1.5}$$

С помощью (4.1.4) можно выразить $\hat{V}_{\alpha 1}$ через \hat{E}_1 и записать (4.1.5) в виде

$$\nabla \times \hat{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2 (1 + Zm_e/m_i)}{\omega^2} \right] \hat{E}_1, \quad (4.1.6)$$

где $\omega_p^2 \equiv 4\pi n_e e^2/m_e$, а $q_i = Ze$ — заряд иона. В рассматриваемом случае плазмы в отсутствие внешних полей диэлектрическая проницаемость является скаляром

$$\varepsilon(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (4.1.7)$$

(здесь мы пренебрегаем величиной Zm_e/m_i по сравнению с единицей).

Из (4.1.6), используя $\nabla \times \hat{E}_1 = (i\omega/c) \hat{B}_1$, получаем уравнение

$$\nabla \times \nabla \times \hat{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \hat{E}_1, \quad (4.1.8)$$

которое определяет волновые свойства *холодной плазмы в отсутствие полей*.

Основным предположением, сделанным при выводе уравнения (4.1.8), было *приближение холодной плазмы*. Это приближение оправдано, если выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}} \ll \frac{\omega}{k}, \quad (4.1.9)$$

где $k^{-1} \equiv |(1/E) dE/dx|^{-1}$ — характерная длина, на которой изменяются поля; другими словами, приближение холодной плазмы означает, что тепловые скорости частиц настолько малы, что частицы не успевают сместиться на расстояние порядка длины волны за один период. Поскольку диэлектрическая проницаемость обращается в нуль при

$$\omega = \omega_p \sqrt{1 + \frac{Zm_e}{m_i}}, \quad (4.1.10)$$

плазменная частота есть резонансная частота плазмы, и электростатические колебания ($\nabla \times \nabla \times \hat{E}_1 = 0$) на этой частоте представляют собой собственные колебания. Следует обратить внимание на то, что не существует *отдельного* резонанса на *ионной* плазменной частоте $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_i}$; инерция ионов до некоторой степени проявляется в эффективном уменьшении массы, входящей в выражение для ω_p . (В случае *горячей* плазмы учет ω_{pi} при вычислении ε приведет, разумеется, к резонансу на частоте $\omega = kC_s$, соответствующей ионно-звуковым волнам [см. (3.9.14) и далее].)

Решения уравнения (4.1.8), соответствующие волнам в плазме, мы рассмотрим в следующих параграфах.

Задача 4.1.1. Покажите, что в уравнение (4.1.6) действительно должно входить отношение Zm_e/m_i .

Задача 4.1.2. Можно ли вывести уравнения (4.1.6)—(4.1.8) из одножидкостных уравнений (3.7.1)—(3.7.4)? Попробуйте их вывести или сразу покажите, что это невозможно. Положите $Z = 1$.

§ 2. ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Уравнение (4.1.8), полученное из гидродинамических уравнений холодной плазмы, описывает эволюцию во времени и пространстве небольших электрических полей в плазме. Его фурье-преобразование $\int \exp(-ik \cdot x) dx$

дает уравнение для фурье-компоненты $\tilde{\mathbf{E}} \equiv \int \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$:

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tilde{\mathbf{E}}. \quad (4.2.1)$$

Выбрав систему координат так, что $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$ (выбор системы координат не ведет к потере общности рассмотрения), уравнение (4.2.1) можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{pmatrix} = 0. \quad (4.2.2)$$

Очевидно, что это уравнение имеет три решения. Два из них, которые мы рассмотрим в § 5, соответствуют электромагнитным волнам. Третье решение для каждой моды с данным \mathbf{k} имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x = \tilde{E}_y = 0, \\ E_z = \tilde{E}_z \exp(ikz - i\omega t), \\ \omega^2 = \omega_p^2. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Это решение соответствует электромеханическим колебаниям с плазменной частотой. Такие колебания фигурируют под разными названиями: *ленгмюровские колебания*, *плазменные колебания* или *волны пространственного заряда* — три одинаково часто встречающихся термина. Не забывая о том, что проведенное вычисление основано на *приближении холодной плазмы*, полезно перечислить свойства этих колебаний.

1. В холодной плазме они не обладают дисперсией, т. е. собственная частота ленгмюровских колебаний $\omega = \omega_p$ не зависит от длины волны.

2. Ленгмюровские колебания не *распространяются* в покоящейся холодной плазме, в чем можно убедиться, заметив, что групповая скорость $v_{гр} = \partial\omega/\partial k = 0$, поскольку $\omega = \omega_p$ не зависит от длины волны. Но хотя рассматриваемые колебания и не распространяются, они имеют фазовую скорость $v_\phi = \omega/k = \omega_p/k$. (Если длина волны $\lambda = 2\pi/k$ слишком мала, приближение холодной плазмы не выполняется.)

3. В процессе ленгмюровских колебаний происходит обмен энергией между электрическим полем и кинетической энергией движущихся частиц. Энергия магнитного поля этих колебаний равна нулю, поскольку вызванные токи смещения и конвективные токи компенсируют друг друга, так что средний ток в плазме равен нулю.

4. Ленгмюровские колебания представляют собой возмущение пространственного заряда. Их частота может быть определена из следующих физических соображений.

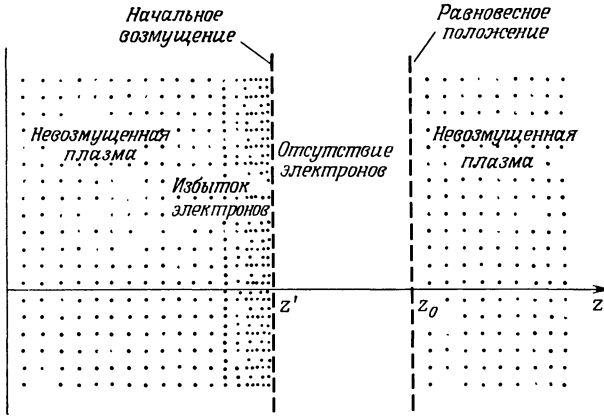
Представьте себе, что все электроны в тонком слое внезапно смещены таким образом (фиг. 45), что все электроны, находившиеся в промежутке между z' и z_0 , оказались слева от z' . Избыточный заряд, приходящийся на 1 см^3 слева от z' , равен

$$Q = -n_0 e (z_0 - z'); \quad (4.2.4)$$

здесь n_0 — средняя плотность электронов, $n_0 e$ — плотность заряда в области, освобожденной от электронов. Электрическое поле в точке $z = z'$, стремящееся возратить сдвинутые электроны в их равновесное положение, равно

$$E_z(z = z') = 4\pi n_0 e (z' - z_0),$$

[это выражение получено интегрированием величины $dE/dz = 4\pi n_0 e$ по z от z_0 (где $E = 0$) до z']. Движение электрона под действием силы $F = -eE_z$,



Фиг. 45. Начальное смещение электронов относительно компенсирующего фона неподвижных ионов в холодной плазме.

Освобожденные затем электроны колеблются с частотой $\omega_p = (4\pi n_0 e^2/m)^{1/2}$.

первоначально находившегося в z' , описывается уравнением

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} (z_0 - z'). \quad (4.2.5)$$

Полагая $\xi = z' - z_0$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \xi = 0. \quad (4.2.6)$$

Решением уравнения (4.2.6) является функция

$$\xi = \hat{\xi} e^{\pm i\omega_p t},$$

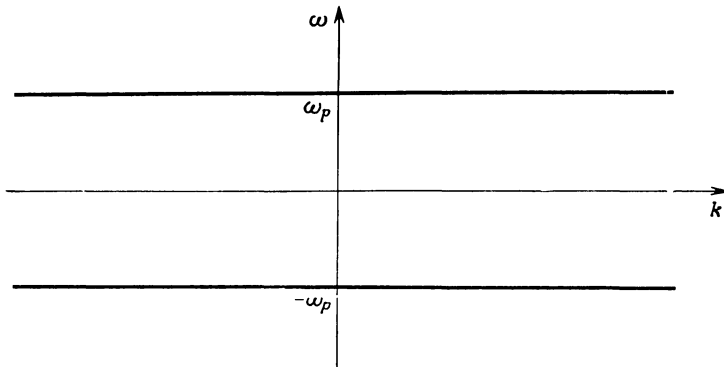
где

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}.$$

Таким образом, группа смещенных электронов в плазме совершает простое гармоническое движение с плазменной частотой.

Различные типы плазменных волн удобно описывать с помощью графика зависимости их собственной частоты от волнового вектора \mathbf{k} . Для ленгмюровских волн в холодной плазме эта зависимость выглядит особенно простой (фиг. 46).

Влияние столкновений на свойства плазменных волн можно описать феноменологически, сохраняя столкновительный член в уравнении движе-



Фиг. 46. Дисперсионная кривая ленгмюровских колебаний в холодной бесстолкновительной неограниченной плазме с неподвижными ионами.

ния электронов. Если этот столкновительный член имеет вид

$$\int \mathbf{v} \left. \frac{\partial f_e}{\partial t} \right|_{\text{столк}} d\mathbf{v} \approx \nu \mathbf{V}_e, \quad (4.2.7)$$

то вместо уравнения (4.1.4) из (3.4.2) получаем

$$-i\omega \hat{\mathbf{V}}_1 = -\frac{e}{m} \hat{\mathbf{E}}_1 - \nu \hat{\mathbf{V}}_1. \quad (4.2.8)$$

Решение последнего уравнения относительно $\hat{\mathbf{V}}_1$ дает

$$\hat{\mathbf{V}}_1 = \frac{(e/m_e) \hat{\mathbf{E}}_1}{i(\omega + i\nu)}. \quad (4.2.9)$$

Соответствующая диэлектрическая проницаемость становится комплексной, т. е.

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \quad (4.2.10)$$

Таким образом, плазменные волны $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{E}}_1 e^{(\pm i\omega_p - \nu)t}$ *затухают за счет столкновений.*

Несмотря на то что феноменологические модели [такие, как учет столкновений с помощью (4.2.7)] неубедительны, они иногда позволяют получить решение в ситуациях, которые трудно проанализировать с помощью полной теории, и, следовательно, показывают, в каких областях выгодно применять эту полную теорию. Феноменологические модели иногда полезны также для анализа экспериментов, в которых осложнения, связанные с конфигурацией эксперимента, делают полный анализ невозможным. В любом случае к использованию таких моделей и к заключениям, полученным с их помощью, следует относиться осторожно.

§ 3. ПЛАЗМЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

Во многих прикладных задачах рассматривается плазма, движущаяся относительно сеток или других покоящихся объектов. Если в такую движущуюся среду вносятся возмущения пространственного заряда, некоторые их свойства оказываются отличными от случая покоящейся плазмы и изучение этих свойств позволяет познакомиться с некоторыми общими чертами волн в плазме.

Рассмотрим однородную плазму в отсутствие внешних полей и с однородным компенсирующим фоном неподвижных ($m_i \rightarrow \infty$) ионов. Пусть плазма движется с постоянной скоростью в направлении оси z . Предположим, что электроны «холодные» в том смысле, как это обсуждалось в предыдущем параграфе.

Плазменные колебания в этом случае исследуются также с помощью одномерного уравнения непрерывности для электронов ($V_z \equiv V_{ez}$)

$$\frac{\partial}{\partial t} n_e + \frac{\partial}{\partial z} n_e V_z = 0, \quad (4.3.1)$$

одномерного уравнения движения электронов (в пренебрежении столкновениями)

$$\frac{\partial}{\partial t} V_z + V_z \frac{\partial}{\partial z} V_z = -\frac{e}{m_e} E_z \quad (4.3.2)$$

и одномерного уравнения Пуассона

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}. \quad (4.3.3)$$

Снова предположим, что возмущения плотности, скорости и электрического поля малы, но в отличие от предыдущего параграфа, поскольку $V_0 \neq 0$, мы сохраним в (4.3.2) член $V_z \partial V_z / \partial z$. Уравнения (4.3.1) — (4.3.3) можно решить, если пренебречь членами второго порядка по возмущенным величинам и предположить гармоническую зависимость возмущений от времени. Запишем плотность, скорость и электрическое поле в виде

$$\begin{aligned} n_e &= n_0 + \hat{n}_1 e^{i(kz - \omega t)}, & n_1 &\ll n_0, \\ V_z &= V_0 + \hat{V}_1 e^{i(kz - \omega t)}, & V_1 &\ll V_0, \\ E_z &= \hat{E}_1 e^{i(kz - \omega t)}, \\ n_i &= n_0 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

(здесь буквами с крышками обозначены комплексные величины).

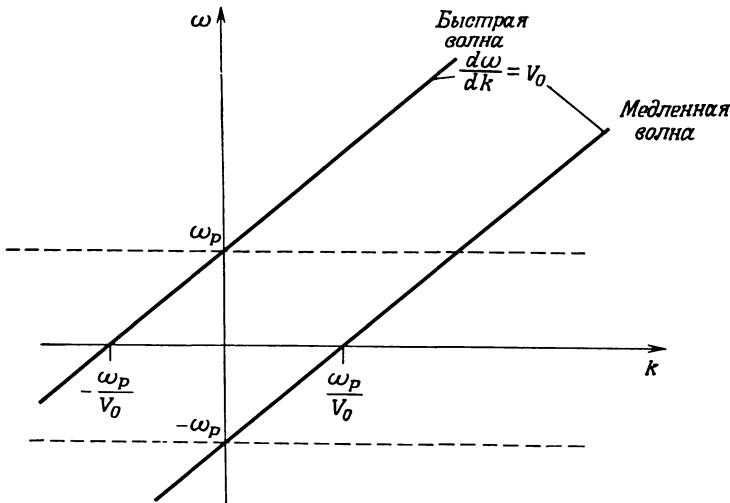
Пренебрегая произведениями возмущений как величинами второго порядка малости, уравнения (4.3.1) — (4.3.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{n}_1 + ik(n_0 \hat{V}_1 + \hat{n}_1 V_0) &= 0, \\ -i\omega \hat{V}_1 + ikV_0 \hat{V}_1 &= -\frac{e}{m_e} \hat{E}_1, \\ ik \hat{E}_1 &= -4\pi e \hat{n}_1. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Эти уравнения представляют собой систему трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных. Такая система имеет нетривиальное решение, только если детерминант, составленный из коэффициентов, равен нулю. Приравнявая нулю детерминант системы, получаем дисперсионное уравнение для плазменных волн или волн пространственного заряда в потоке плазмы или в электронном пучке:

$$(\omega - kV_0)^2 = \omega_p^2. \tag{4.3.6}$$

Преобразование координат типа $z \rightarrow z' - V_0 t'$ и $t \rightarrow t'$ показывает, что частота и волновой вектор преобразуются по закону $\omega \rightarrow \omega' + k'V_0$ и $k \rightarrow k'$, так что в системе координат (z', t') имеем $(\omega')^2 = \omega_p^2$. Таким образом,



Фиг. 47. Дисперсионная кривая плазменных колебаний в движущейся холодной бесстолкновительной плазме.

Волна, распространяющаяся с фазовой скоростью, большей, чем средняя скорость электронов, называется быстрой волной пространственного заряда; волна, распространяющаяся с меньшей скоростью, обладает отрицательной энергией и называется медленной волной пространственного заряда. Штриховые прямые — дисперсия плазменных колебаний в системе отсчета, в которой электроны в среднем покоятся.

в системе покоя электронов частота возмущений равна плазменной частоте, т. е. частоте ленгмюровских колебаний покоящейся плазмы: плазменные колебания в одномерном потоке представляют собой обычные ленгмюровские колебания, которые переносятся потоком с дрейфовой скоростью.

Закон дисперсии (4.3.6) показан на фиг. 47. Соответствующие ему плазменные колебания распространяются в виде волн с групповой скоростью, равной дрейфовой скорости ($\partial\omega/\partial k = V_0$), и, следовательно, они переносят энергию. Волны пространственного заряда, связанные с движущимися электронами, ответственны за многие плазменные явления, относящиеся к нарастанию волн или к неустойчивостям. Медленная волна пространственного заряда обладает отрицательной энергией (см. ниже). Это одно из интересных свойств таких волн в движущейся плазме. Наличие отрицательной энергии у медленной волны пространственного заряда лежит в основе действия многих электронных приборов, таких, как клистроны, лампы бегущей волны и т. д., которые генерируют или усиливают высокочастотное ($f > > 1000$ МГц) электромагнитное излучение [3].

3.1. Энергия волны и диэлектрическая проницаемость

Понятие волны с отрицательной энергией означает просто, что если в системе возбуждается волна с энергией W_1 , то система, первоначально находящаяся в состоянии с энергией W_0 , переходит в состояние с энергией $W (= W_0 + W_1)$, которая *меньше* W_0 . Полная энергия системы, разумеется, никогда не бывает отрицательной; энергия волны складывается из ее электромагнитной энергии $(E^2 + B^2)/8\pi$, а также из поляризационной энергии W_p . В случае отрицательной величины W_p энергия волны иногда может стать отрицательной. Чтобы понять, почему величина W_p может быть отрицательной, рассмотрим малое возмущение V_1 (скажем, под действием удара, направленного влево) скорости локализованной группы электронов, т. е.

$$V_1 = -V_1 \hat{z}, \quad (4.3.7)$$

которое вызвано, например, электрическим полем волны. Если бы электроны первоначально покоились, приращение энергии W_p было бы положительным:

$$\Delta W \equiv W_p = \frac{1}{2} m_e V_1^2 \quad (V_0 = 0). \quad (4.3.8)$$

Если же электроны до того, как произошло возмущение, двигались со скоростью $V_0 = V_0 \hat{z}$, *приращение* энергии, вызванное возмущением (4.3.7), будет *отрицательным*, поскольку

$$\Delta W \equiv W_p = \frac{1}{2} m_e (V_0 - V_1)^2 - \frac{1}{2} m_e V_0^2 \approx -m_e V_0 V_1. \quad (4.3.9)$$

«Отрицательная энергия» связана с наличием у электронов скорости V_0 ; в общем случае волны с отрицательной энергией существуют в плазме, если в ней имеется движение частиц или пучок.

В принципе энергию волны можно вычислить непосредственно, так как гидродинамические уравнения связывают V_1 и E_1 . Однако проще воспользоваться общим результатом теории волн, распространяющихся в диспергирующей среде [4], а именно тем, что усредненная по времени энергия волны (кинетическая плюс электростатическая) может быть выражена через диэлектрическую проницаемость следующим образом:

$$\overline{W_E} = \frac{\overline{E_1^2}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \epsilon); \quad (4.3.10)$$

здесь $\overline{W_E}$ — энергия, усредненная по периоду колебаний (волна электростатическая, т. е. $\nabla \cdot \epsilon E_1 = 0$, $\nabla \times E_1 = 0$), а $\overline{E_1^2}$ — среднее по периоду значе-

ние E_1^2 (если $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$, то $\overline{E_1^2} = 1/2 E_0^2$). В случае линейно-поляризованной однородной плоской волны соответствующее выражение для энергии имеет вид

$$\overline{W_T} = \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \left(\varepsilon - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right) \frac{\overline{E_1^2}}{8\pi} \quad (4.3.11)$$

(при выводе этой формулы было учтено, что $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$, т. е. волна чисто поперечная).

Для того чтобы применить это представление к волнам, распространяющимся в движущейся плазме, следует заметить, что если с помощью (4.3.5) выразить n_1 и V_1 через E_1 , а также использовать $\mathbf{J}_1 = -(n_0 e V_1 + n_1 e V_0)$, то диэлектрическую проницаемость плазмы в пределе высоких частот (поскольку мы воспользовались приближением покоящихся ионов $m_i \rightarrow \infty$) и больших длин волн (поскольку мы воспользовались приближением холодной плазмы) можно записать в виде

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kV_0)^2} \quad (\text{высокочастотная диэлектрическая проницаемость холодной плазмы, движущейся со скоростью } V_0). \quad (4.3.12)$$

С помощью этого выражения можно получить как положительно-, так и отрицательно-энергетическую ветви волны пространственного заряда в движущейся плазме.

Задача 4.3.1. Используя выражение (4.3.10), укажите на фиг. 47 волны с положительной и отрицательной энергиями.

3.2. Волны с положительной и отрицательной энергиями в движущейся плазме

Для непосредственного доказательства того, что одна из волн, распространяющихся в движущейся плазме, обладает отрицательной кинетической энергией, полезно вывести закон сохранения энергии для этих волн.

Закон сохранения энергии для волн пространственного заряда и электромагнитных волн следует из уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (4.3.13)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi \mathbf{J}_1}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}. \quad (4.3.14)$$

Умножая скалярно слева уравнение (4.3.13) на \mathbf{B}_1 , а (4.3.14) на \mathbf{E}_1 , вычитая из первого уравнения второе и используя тождество

$$-\mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}],$$

получаем уравнение

$$-\nabla \cdot \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1] = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_1^2}{8\pi} + \frac{B_1^2}{8\pi} \right). \quad (4.3.15)$$

Величина $\mathbf{P} = c [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1]/4\pi$, называемая *вектором Пойнтинга*, есть поток энергии (эрг/см²·с) распространяющейся волны. Величины $W_E = E_1^2/8\pi$ и $W_M = B_1^2/8\pi$ представляют собой зависящие от времени плотности энергии электрического и магнитного полей, связанных с распространяющимися волновыми возмущениями. Член $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1$ определяет скорость, с которой электроны отбирают энергию от поля. Если ограничить движение электронов одним направлением по оси z (например, приложив сильное магнитное поле

B_z), то член $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1$ можно выразить через поток и плотность кинетической энергии, связанной с возмущениями, распространяющимися в движущейся плазме или электронном пучке. Из (4.3.2) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1 &= -\frac{m_e}{e} \left(\frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + V_{0z} \frac{\partial}{\partial z} V_{1z} \right) J_{1z} = \\ &= -\frac{m_e}{e} \left[J_{1z} \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (V_{0z} V_{1z} J_{1z}) - V_{0z} V_{1z} \frac{\partial J_{1z}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Используя выражение для возмущенной плотности тока

$$J_{1z} = -e (V_{0z} n_1 + n_0 V_{1z}),$$

можно переписать (4.3.16) следующим образом:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1 = m_e \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n_0 V_{1z}^2}{2} \right) + V_{0z} n_1 \frac{\partial V_{1z}}{\partial t} - \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial z} (V_{0z} V_{1z} J_{1z}) + V_{0z} V_{1z} \frac{\partial n_1}{\partial t} \right].$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_1 = \frac{\partial}{\partial z} P_K + \frac{\partial}{\partial t} W_K, \quad (4.3.17)$$

где

$$W_K = m_e \left(\frac{n_0 V_{1z}^2}{2} + V_{0z} V_{1z} n_1 \right) \quad (4.3.18)$$

— плотность кинетической энергии возмущения, а

$$P_K = -\frac{m_e}{e} V_{0z} V_{1z} J_{1z} \quad (4.3.19)$$

— поток кинетической энергии вдоль оси z , связанный с распространением возмущения [ср. (4.3.19) и (4.3.9)]. Воспользовавшись этим определением, уравнение (4.3.15) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} + \mathbf{P}_K) + \frac{\partial}{\partial t} (W_E + W_M + W_K) = 0. \quad (4.3.20)$$

В одномерной задаче, когда ни одна из величин не зависит от поперечной координаты, закон сохранения энергии сводится к уравнению

$$\frac{\partial P_K}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (W_K + W_E) = 0, \quad (4.3.21)$$

так как возмущения магнитного поля отсутствуют. Для возмущенных величин E_{1z} , V_{1z} и n_1 , гармонически зависящих от времени, т. е. вида $n_1 = \hat{n}_1 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$, средние по времени значения потока кинетической энергии, плотности кинетической и электрической энергий равны

$$\begin{aligned} \bar{P}_K &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [m_e V_{0z} \hat{V}_{1z} (n_0 \hat{V}_{1z}^* + V_{0z} \hat{n}_1^*)], \\ \bar{W}_K &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[m \left(n_0 \frac{\hat{V}_{1z} \hat{V}_{1z}^*}{2} + V_{0z} \hat{n}_1 \hat{V}_{1z}^* \right) \right], \\ \bar{W}_E &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\hat{E}_1 \hat{E}_1^*}{8\pi} \right) \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

(звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины). Уравнение (4.3.20) справедливо для пучков с конечным поперечным сечением при условии, что электроны движутся в одном направлении — по оси z . Поток электромагнитной энергии обычно пренебрежимо мал по сравнению с потоком кинетической энергии, а плотность энергии магнитного поля обычно мала по сравнению с плотностью энергии электрического поля.

Используя дисперсионное уравнение для волн пространственного заряда (4.3.6), можно записать величины (4.3.22) в виде

$$\begin{aligned}\bar{P}_{K\pm} &= \pm \frac{|\hat{E}_1^2|}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} V_{oz}, \\ \bar{W}_{E\pm} &= \frac{|\hat{E}_1^2|}{16\pi}, \\ \bar{W}_{K\pm} &= \frac{|\hat{E}_1^2|}{16\pi} - \frac{|\hat{E}_1^2|}{8\pi} \left(1 \pm \frac{\omega}{\omega_p}\right)\end{aligned}\quad (4.3.23)$$

(верхний знак относится к быстрым, а нижний — к медленным волнам пространственного заряда). Из этих уравнений видно, что среднее по времени значение потока кинетической энергии равно произведению дрейфовой скорости на сумму средних по времени значений плотности кинетической и электрической энергий, запасенных в плазме, т. е.

$$\bar{P}_K = V_{oz} (\bar{W}_K + \bar{W}_E). \quad (4.3.24)$$

Очевидно, что у медленной волны пространственного заряда в движущейся плазме или электронном пучке средний по времени поток кинетической энергии \bar{P}_K и средняя плотность энергии $\bar{W}_K + \bar{W}_E$ отрицательны. Все это означает, что полная энергия движущихся электронов уменьшается, когда в пучке возбуждается медленная волна пространственного заряда.

Задача 4.3.2. а) Покажите, что кинетическая энергия, связанная с быстрой волной пространственного заряда, положительна при $\omega > \omega_p$.

б) Найдите частоту, начиная с которой кинетическая энергия, связанная с быстрой волной, становится отрицательной.

в) Определите частоту, начиная с которой полная (электрическая плюс кинетическая) энергия становится отрицательной.

Задача 4.3.3. Если одномерный поток плазмы пересекает близко расположенные друг к другу сетки, между которыми приложено синусоидальное напряжение, в плазме возбуждаются и распространяются одновременно быстрая и медленная волны пространственного заряда. Линейная комбинация решений, соответствующих быстрой и медленной волнам, удовлетворяет уравнению (4.3.5), поэтому за возбуждающими сетками

$$V_1(z) = \hat{A}_f \exp\left[-\frac{i(\omega + \omega_p)z}{V_0}\right] + \hat{A}_s \exp\left[-\frac{i(\omega - \omega_p)z}{V_0}\right];$$

здесь \hat{A}_f и \hat{A}_s — амплитуды быстрой и медленной волн пространственного заряда. Найдите \hat{A}_f и \hat{A}_s при условии $\omega L/V_0 \ll 1$ (L — расстояние между сетками), налагая граничные условия на возмущение скорости и плотности зарядов при $z = 0$. Покажите, что при таком способе возбуждения происходит «бунчировка», т. е. плотность зарядов имеет максимумы, расположенные периодически за сетками. Определите расстояние до первого максимума. Объясните полученный результат на языке траекторий электронов.

§ 4. ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ

Вычисления, проделанные в предыдущих двух параграфах, показали, что в покоящейся холодной плазме могут существовать нераспространяющиеся колебания с частотой, равной плазменной частоте, и что эти колебания

распространяются, когда плазма движется с постоянной скоростью. Естественно возникает вопрос: каковы свойства этих мод, если электроны обладают тепловым разбросом по скоростям? Полного анализа этой проблемы невозможно провести, оставаясь в рамках гидродинамики, до тех пор, пока мы не установим вида функции $p(n)$ (уравнения состояния). Для этого необходимо использовать уравнение Власова (гл. 8). Но даже и после выбора уравнения состояния явления, связанные с особенностями функции распределения по скоростям, такие, как затухание Ландау, разумеется, ускользают при гидродинамическом рассмотрении. Тем не менее некоторые общие свойства волн пространственного заряда можно установить с помощью уравнений гидродинамики.

Рассмотрим опять однородную покоящуюся плазму без внешних полей, но предположим теперь, что электроны обладают конечной температурой. Чтобы замкнуть уравнения гидродинамики, следует предположить, что давление изотропно и связано с плотностью уравнением состояния (для электронов) $p/\rho^\gamma = \text{const}$. Уравнения непрерывности для возмущений плотности и скорости в случае ионов и электронов имеют вид

$$\begin{aligned} i\omega n_{i1} - in_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{i1} &= 0, \\ i\omega n_{e1} - in_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{e1} &= 0, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

а уравнения движения для возмущенных величин с учетом давления электронов (поскольку $p_1 = p_0 \gamma \rho_{m1} / \rho_{m0}$, $\rho_m = nm$) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{V}_{i1} &= \frac{e}{m_i} \mathbf{E}_1, \\ -i\omega \mathbf{V}_{e1} &= -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1 + \frac{ik\gamma p_0}{n_0 m_e} \frac{n_{e1}}{n_0}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Уравнение Пуассона служит третьим соотношением между n_1 , \mathbf{V}_1 и \mathbf{E}_1 :

$$ik \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi e (n_{e1} - n_{i1}). \quad (4.4.3)$$

Исключая скорости \mathbf{V}_{i1} и \mathbf{V}_{e1} из (4.4.1) и (4.4.2), подставляя затем n_{i1} и n_{e1} в (4.4.3), получаем уравнение ($p = nkT$)

$$\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{k^2 \gamma k T_e}{\omega^2 m_e}} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \quad (4.4.4)$$

в котором величина γ еще не определена. Например, разумно было бы выбрать $\gamma = 3$ для одномерного адиабатического сжатия (высокие частоты) или $\gamma = 1$ для изотермических процессов (низкие частоты). Из (4.4.4) следует, что эффективная диэлектрическая проницаемость плазмы, состоящей из горячих электронов и холодных ионов, имеет вид

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{1}{1 - \frac{k^2 \gamma k T_e}{\omega^2 m_e}} \right). \quad (4.4.5)$$

Используя вместо уравнения Пуассона уравнения (4.4.1), (4.4.2) и уравнение Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

получаем

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}_1. \quad (4.4.6)$$

Скалярное умножение последнего уравнения на \mathbf{k} дает (4.4.4), т. е. уравнение для электростатической волны ($\mathbf{B}_1 = 0$). Кроме того, уравнение (4.4.6) содержит электромагнитные волны ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$) (§ 5 настоящей главы).

Решения уравнения $\varepsilon = 0$ имеют две особенности, связанные с учетом давления. Первая из них связана с тем, что возникает поправка к частоте колебаний $\omega = \omega_p$. Частота колебаний теперь записывается в виде

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \frac{\chi T_e}{m_e}; \quad (4.4.7)$$

здесь мы пренебрегли величиной m_e/m_i по сравнению с единицей.

В горячей плазме ленгмюровские колебания обладают дисперсией (ω зависит нелинейным образом от волнового вектора) и распространяются с групповой скоростью

$$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\chi T_e}{m_e} \frac{k}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2 \chi T_e / m_e}}.$$

Постоянная γ должна быть определена либо из физических соображений, либо непосредственно из решения уравнения Власова. Поскольку вычисления проводятся для установления поправок к теории холодной плазмы, разумно предположить, что электроны смещаются меньше чем на длину волны за один период $2\pi\omega^{-1}$, и сжатие поэтому должно быть адиабатическим. В случае одномерного адиабатического сжатия значение $\gamma = 3$. Таким образом, дисперсионное уравнение (4.4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_p^2 + 3 \frac{\chi T_e}{m_e} k^2, \\ \omega &= \omega_p \left(1 + 3 \frac{\chi T_e}{m_e \omega_p^2} k^2 \right)^{1/2} = \omega_p (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{De}^2 \equiv \frac{\chi T_e}{4\pi n e^2}.$$

Точно такое дисперсионное уравнение будет получено из решения уравнения Власова (гл. 8).

Задача 4.4.1. Найдите четыре корня уравнения (4.4.4), т. е. уравнения $\varepsilon(\omega) = 0$. Покажите, что один из корней близок к $\omega = kc_s / \sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$, где $\lambda_{De}^2 = \chi T_e / 4\pi n e^2$, и соответствует ионно-звуковой волне.

Полученное выше дисперсионное уравнение справедливо только для длинноволновых возмущений, т. е. когда $k^2 (\chi T_e / m_e) \ll \omega_p^2$ (что эквивалентно $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$). Следовательно, скорость распространения

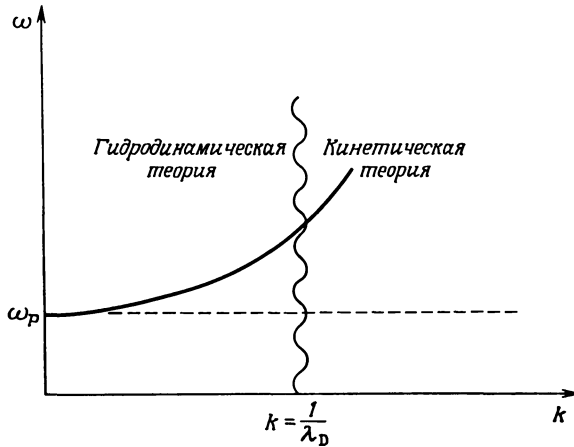
$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \approx \frac{3\chi T_e}{m_e \omega_{pe}} k = 3k \lambda_{De} \left(\frac{\chi T_e}{m_e} \right)^{1/2} \quad (4.4.8)$$

много меньше тепловой скорости электронов. Это обстоятельство подчеркивает тот факт, что волна распространяется *через* плазму в отличие от холодной движущейся плазмы, в которой «скорость» волны в действительности была дрейфовой скоростью плазмы.

В данном случае волна распространяется даже в системе координат, в которой плазма покоится. На фиг. 48 представлен закон дисперсии (4.4.7) для ленгмюровских колебаний в горячей плазме с указанием области, в которой справедливо вычисление при $\gamma = 3$.

Если $k\lambda_{De} \gg 1$, многие электроны успевают пройти за один период колебания расстояние в одну длину волны и больше, вследствие чего сжатие перестает быть адиабатическим.

Вторая особенность волн, распространяющихся в горячей плазме, состоит в следующем. В холодной плазме без внешних полей существует только одна характерная частота [$\varepsilon(\omega) = 0$] при $\omega = \omega_p \sqrt{1 + m_e/m_i}$,



Фиг. 48. Дисперсионная кривая ленгмюровских колебаний в горячей бесстолкновительной плазме.

Показана область, в которой макроскопическая гидродинамическая теория для $\gamma = 3$ дает тот же ответ, что и микроскопическая теория плазменных волн, основанная на уравнении Власова.

а самостоятельный резонанс на ионной плазменной частоте отсутствует. В случае горячих электронов имеется отдельный отклик на ионной плазменной частоте, как видно из низкочастотного решения уравнения $\varepsilon = 0$, причем ε определяется выражением (4.4.5). Гидродинамические уравнения позволяют продемонстрировать свойства низкочастотных резонансов. Решение уравнения (4.4.4) в пределе низких частот ($\omega^2 \ll \omega_{pe}^2$) дает ионно-звуковую волну

$$\omega^2 = \frac{k^2 \gamma \kappa T_e / m_i}{1 + \gamma k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (4.4.9)$$

где

$$\lambda_{De}^2 = \frac{\kappa T_e}{4\pi n e^2}.$$

Значение γ можно установить, заметив, что, поскольку ионно-звуковая волна имеет низкую частоту, электроны заведомо успевают пройти за один период расстояние, большее длины волны. Это говорит о том, что ионно-звуковая волна является *изотермической* и правильный выбор γ соответствует $\gamma = 1$ (решение этой задачи в гл. 8 с помощью уравнения Власова подтверждает правильность такого выбора). Выбирая $\gamma = 1$, соотношение (4.4.9) можно записать в виде

$$\omega = \frac{k \sqrt{\kappa T_e / m_i}}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}}. \quad (4.4.10)$$

Ионно-звуковая волна распространяется со скоростью (называемой ионно-звуковой скоростью C_s)

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \approx C_s = \left(\frac{\kappa T_e}{m_i} \right)^{1/2} \ll \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (4.4.11)$$

Значение этой скорости находится в промежутке между значениями тепловой скорости ионов и тепловой скорости электронов. В этой волне энергия запасена в виде энергии электрического поля E^2 и механической энергии частиц плазмы, колеблющихся под действием низкочастотного поля E . Используя выражение (4.3.10) для энергии волны, распространяющейся в диэлектрике, можно вычислить долю механической и электрической энергии. Поскольку

при $\omega = kC_s / (1 + k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}$ величина $\partial(\omega\varepsilon) / \partial\omega$, входящая в (4.3.10), равна

$$\frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2} \right), \quad (4.4.12)$$

энергия ионно-звуковой волны [согласно (4.3.10)] записывается в виде

$$\bar{W} = 2 \left(1 + \frac{1}{k^2\lambda_{De}^2} \right) \frac{\bar{E}^2}{8\pi} = \frac{\bar{E}^2}{8\pi} + \frac{\bar{E}^2}{8\pi} \left(1 + \frac{2}{k^2\lambda_{De}^2} \right) = \bar{W}_{\text{электр}} + \bar{W}_{\text{мех}}$$

и сосредоточена в основном в механической энергии колебаний частиц при низких частотах, когда $k^2\lambda_{De}^2 \ll 1$.

Проведенное изучение ионно-звуковой волны правильно в рассмотренных пределах. Однако в горячей плазме всегда найдется *некоторое* число частиц, движущихся со скоростью, сравнимой со скоростью волны, и эти резонансные частицы могут повлиять на поведение волны во времени. Указанные эффекты не могут быть описаны в рамках гидродинамических теорий и рассматриваются в микроскопическом (кинетическом) приближении в гл. 8 и 9. Как будет там показано, приближение холодных ионов, принятое в настоящем рассмотрении, является обязательным и условие

$$T_e \gg T_i \quad (4.4.13)$$

необходимо для того, чтобы ионно-звуковые волны не были сильно затухающими.

§ 5. ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Для волны $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}_1 e^{-i\omega t}$ в холодной плазме гидродинамические уравнения дают

$$\nabla \times \hat{\mathbf{V}}_1 = -\frac{i\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \hat{\mathbf{E}}_1. \quad (4.5.1)$$

В случае распространения ленгмюровских волн $\hat{\mathbf{V}}_1 = 0$; существует второе решение, соответствующее распространению в плазме электромагнитных волн. Используя уравнение $\nabla \times \hat{\mathbf{E}}_1 = i\omega \hat{\mathbf{V}}_1 / c$, преобразуем (4.5.1) к виду

$$\frac{c^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla \times \hat{\mathbf{E}}_1 = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \hat{\mathbf{E}}_1. \quad (4.5.2)$$

Решение для электростатической волны получается путем скалярного умножения уравнения (4.5.2) на волновой вектор \mathbf{k} , а решение, соответствующее электромагнитной волне, — после векторного умножения уравнения (4.5.2) на \mathbf{k} . Это то же самое, что искать решение уравнения (4.5.2) в виде однородной плоской волны при условии, что электрическое поле волны перпендикулярно направлению распространения, т. е.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_1(\omega, \mathbf{x}) &= \tilde{\mathbf{E}}_1 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

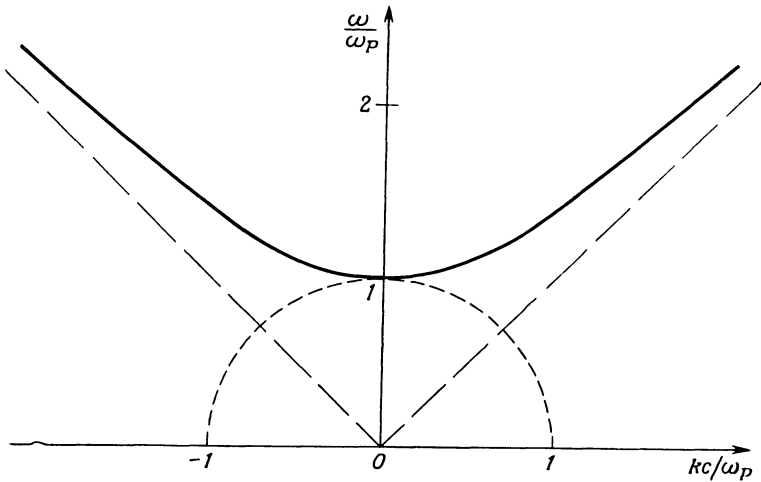
Иначе говоря, уравнение (4.5.2) сводится к уравнению

$$(k^2 c^2 + \omega_p^2 - \omega^2) \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 = 0. \quad (4.5.4)$$

Условие существования нетривиального решения этого уравнения ($\tilde{\mathbf{E}}_1 \neq 0$) дает дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2. \quad (4.5.5)$$

Волны этого типа распространяются в плазме в любом направлении, а в отсутствие плазмы ($\omega_p^2 \sim n \rightarrow 0$) переходят в световые волны ($\omega = kc$). На фиг. 49



Фиг. 49. Дисперсионная кривая поперечных электромагнитных волн в холодной бесстолкновительной плазме.

При $\omega < \omega_p$ волны в плазме не распространяются, причем пространственный коэффициент затухания равен радиусу полуокружности, показанной на фигуре. Наклон штриховой линии равен скорости света.

приведена $\omega - k$ -диаграмма поперечных волн в холодной изотропной однородной плазме. Из фигуры видно, что поперечные волны распространяются в плазме, только если их частота выше плазменной частоты. Вблизи $\omega = \omega_p$ длина волн становится очень большой, и можно ожидать, что граничные условия существенно влияют на закон дисперсии электромагнитных волн. При очень высоких частотах ($\omega \gg \omega_p$) электроны не успевают откликаться на изменение поля и влияние их на распространение волны уменьшается.

Таким образом, рассмотренные волны представляют собой электромагнитные волны, распространяющиеся в диэлектрической среде. Их свойства существенно отличаются от свойств волн пространственного заряда и служат основой для целого ряда практических применений данной моды плазменных колебаний. Рассмотрим эти свойства.

1. *Перенос энергии.* Электромагнитные волны переносят энергию даже через холодную и покоящуюся плазму, как видно из выражения для вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{P} = \frac{c\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1}{4\pi} = \frac{kc^2}{4\pi\omega} E_1^2. \quad (4.5.6)$$

2. *Групповая скорость.* Скорость, с которой электромагнитные волны переносят информацию, дается формулой

$$v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{kc^2}{\omega} = \frac{c}{(1 + \omega_p^2/k^2c^2)^{1/2}} < c. \quad (4.5.7)$$

Групповая скорость меньше скорости света и совпадает со скоростью переноса энергии.

3. *Фазовая скорость.* Из выражения

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{k^2c^2} \right)^{1/2} = \frac{c}{(1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}} > c \quad (4.5.8)$$

следует, что фазовая скорость электромагнитных волн в плазме больше, чем в вакууме. Тем не менее энергия переносится со скоростью, меньшей c .

4. *Вакуумный предел.* При понижении плотности плазмы $\omega_p \rightarrow 0$ и дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega = kc,$$

т. е. волны соответствуют плоским электромагнитным волнам в вакууме.

5. *Порог со стороны высокой плотности.* Из (4.5.5) ясно, что волны распространяются только при $\omega > \omega_p$. Это позволяет использовать их для диагностики плазмы, как описано в § 6 настоящей главы.

6. *Распределение энергии в волнах.* Усредненная по времени энергия рассматриваемых волн распределена между электрической, магнитной и механической энергиями:

$$\overline{W} = \frac{\overline{E}_1^2}{8\pi} + \frac{\overline{B}_1^2}{8\pi} + \frac{1}{2} nm\overline{V}_1^2.$$

Задача 4.5.1. Покажите, что

$$\frac{\overline{E}_1^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \overline{W}; \quad \frac{\overline{B}_1^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \overline{W} \left| 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right|; \quad \frac{1}{2} nm\overline{V}_1^2 = \frac{1}{2} \overline{W} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

5.1. Отражение электромагнитных волн от границы плазмы

В плазменных исследованиях часто встречается ситуация, когда электромагнитные волны падают на границу плазмы. Отражение плоской волны от плоской границы плазмы можно рассмотреть на примере, приведенном на фиг. 50. Пусть электрические и магнитные поля падающей, отраженной и прошедшей волн даются следующими выражениями:

Падающая волна

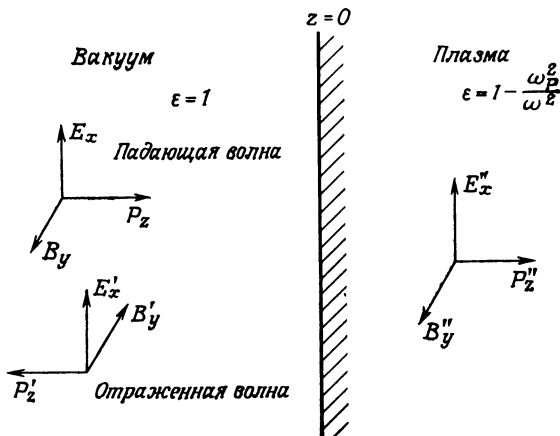
$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}e^{ikh_0z}, \\ B_y &= E_{x0}e^{ikh_0z}. \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Отраженная волна

$$\begin{aligned} E'_x &= RE_{x0}e^{-ikh_0z}, \\ B'_y &= RE_{x0}e^{-ikh_0z}. \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Прошедшая волна

$$\begin{aligned} E_x'' &= TE_{x0}e^{ikh_0z}, \\ B_y'' &= T \frac{E_{x0}k_0pc}{\omega} e^{ikh_0z}, \end{aligned} \tag{4.5.11}$$



Фиг. 50. Прохождение и отражение плоской электромагнитной волны, падающей на границу холодной бесстолкновительной плазмы, занимающей полупространство $z > 0$.

причем

$$k_0^2 c^2 = \omega^2$$

и

$$k_p^2 c^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right);$$

здесь R — коэффициент отражения, T — коэффициент прохождения, E_{x0} — амплитуда падающей волны. Необходимым и достаточным условием полной непрерывности электромагнитного поля на незаряженной границе без тока является условие непрерывности тангенциальных компонент векторов поля. Из этого условия находят коэффициенты отражения и прохождения для плоской границы (в случае однородной изотропной холодной плазмы):

$$R = \frac{k_0 - k_p}{k_0 + k_p}, \quad (4.5.12)$$

$$T = \frac{2k_0}{k_0 + k_p}. \quad (4.5.13)$$

Для высокочастотных волн ($\omega \gg \omega_p$) коэффициент отражения R очень мал, и $T = 1$. Для низкочастотных волн ($\omega \gtrsim \omega_p$) некоторая доля падающего сигнала отражается.

При $\omega = \omega_p$ имеем $R = 1$ и $T = 2$. При $\omega \ll \omega_p$ получаем $R = -1$, а $T = 0$, т. е. плазма отражает волны, частоты которых ниже плазменной частоты, причем амплитуда и фаза отраженной волны такие же, как и в случае отражения волны от идеального проводника.

5.2. Высокочастотная глубина скин-слоя

Если частота падающей волны много меньше плазменной частоты, то волновое число оказывается мнимым и волна быстро затухает от границы в глубь плазмы. Действительно,

$$\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)_{\omega \ll \omega_p} \Rightarrow -\frac{\omega_p^2}{c^2} \quad (4.5.14)$$

и

$$k_p \Rightarrow \pm i \frac{\omega_p}{c}. \quad (4.5.15)$$

Электрическое поле спадает в глубь плазмы с расстоянием по закону

$$E_x(z) = E_x(0) e^{ikz} = E_x(0) e^{-\omega_p z/c}. \quad (4.5.16)$$

Глубина плазменного (высокочастотного) скин-слоя δ определяется как расстояние, на котором поле уменьшается в e раз (т. е. $\omega_p \delta/c = 1$). Следовательно, высокочастотная или бесстолкновительная глубина скин-слоя в плазме равна

$$\delta = \frac{c}{\omega_p}. \quad (4.5.17)$$

Ее можно назвать реактивной глубиной проникновения по той причине, что волны отражаются от среды, которая в отсутствие столкновений представляет собой диэлектрическую среду без потерь.

Задача 4.5.2. Найдите зависимость интенсивности прошедшей волны от частоты. Противоречит ли результат $T = 2$ при $\omega = \omega_p$ закону сохранения энергии? Начертите кривую зависимости модуля и фазы θ коэффициента отражения $R = |R| e^{i\theta}$ от частоты при $\omega \leq \omega_p$. Чему соответствует фаза θ ?

Тема для обсуждения. Решение $k_p = \pm i\omega_p/c$ для низкочастотных волн, соответствующее входящей в плазму волне на границе плазма — вакуум, могло бы означать, что поле в плазме E пропорционально $E_{x0}e^{+\omega_p z/c}$, а не $e^{-\omega_p z/c}$. Как показать, что первое решение неприемлемо в отличие от второго?

Задача 4.5.3. Вычислите глубину скин-слоя в сантиметрах для редкой плазмы ($n = 10^9 \text{ см}^{-3}$) и плотной плазмы ($n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$). При отражении электромагнитных волн от плазмы они должны передавать импульс плазме и, следовательно, создавать объемную силу вблизи границы плазма — вакуум. Какой поток энергии электромагнитных волн необходим для компенсации сил давления плазмы с температурой 10 кэВ и плотностью 10^{14} см^{-3} ? Велик или мал этот поток согласно современным представлениям? Сравните это значение с потоком энергии от рубинового лазера, излучающего $6 \cdot 10^7$ эрг за время $20 \cdot 10^{-9}$ с на площадь порядка $0,1 \text{ см}^2$.

Задача 4.5.4. Покажите, что при отражении электромагнитной волны с $\omega \ll \omega_p$ от границы плазмы не происходит потерь энергии, несмотря на то что волна затухает по мере распространения ее в глубь от границы плазмы.

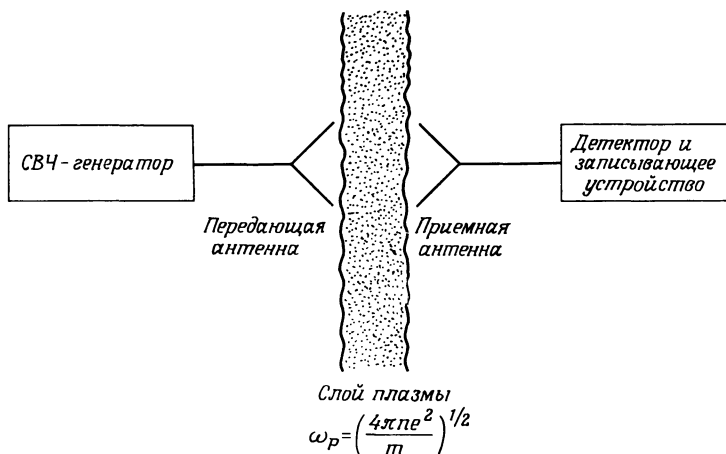
§ 6. СВЧ-ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ

Плотность лабораторной плазмы удобно определять, измеряя сдвиг фазы электромагнитной волны при прохождении ее через плазму. Поскольку плотность типичной лабораторной плазмы составляет $10^{10}—10^{16} \text{ см}^{-3}$, плазменные частоты в таких экспериментах находятся в диапазоне $10^9—10^{13}$ Гц. Эта область частот относится к СВЧ- и миллиметровому диапазонам электромагнитного излучения. Вследствие практических соображений, связанных с масштабами эксперимента и доступностью источников электромагнитного излучения, рассматриваемый метод ограничен диапазоном длин волн от 3 см до 2 мм; он называется *микроволновой (СВЧ-)диагностикой плазмы*¹⁾.

За исключением источника излучения, частота которого выбирается обычно равной или немного больше максимальной ожидаемой плазменной, в этом методе измерения плотности плазмы применяются в общем один и тот же набор аппаратуры и одна и та же схема эксперимента. Существует много остроумных тонких усовершенствований экспериментальной аппаратуры, которые позволяют улучшить обработку и интерпретацию результатов экспериментов, однако здесь мы опишем методику лишь в общих чертах.

На фиг. 51 приведена схема экспериментальной установки для СВЧ-диагностики плазмы; с ее помощью измеряется плотность плазмы путем определения частоты, при которой интенсивность прошедшего сигнала обращается в нуль. При измерениях со стационарной плазмой изменяют частоту источника сигналов и определяют пороговую частоту, при измерениях же с нестационарной плазмой определяют момент времени (или *любой* другой подходящий параметр), при котором прекращается прохождение сигнала. В любом случае плотность плазмы вычисляется путем приравнивания известной частоты f источника сигнала к пороговой частоте (частоте отсечки), при которой прекращается прохождение сигнала, $f_{\text{отс}} = f_p \approx 10^4 \sqrt{n}$. Эта простая схема страдает тем недостатком, что отсечка происходит, как только плотность плазмы в каком-либо месте на пути распространения волн пре-

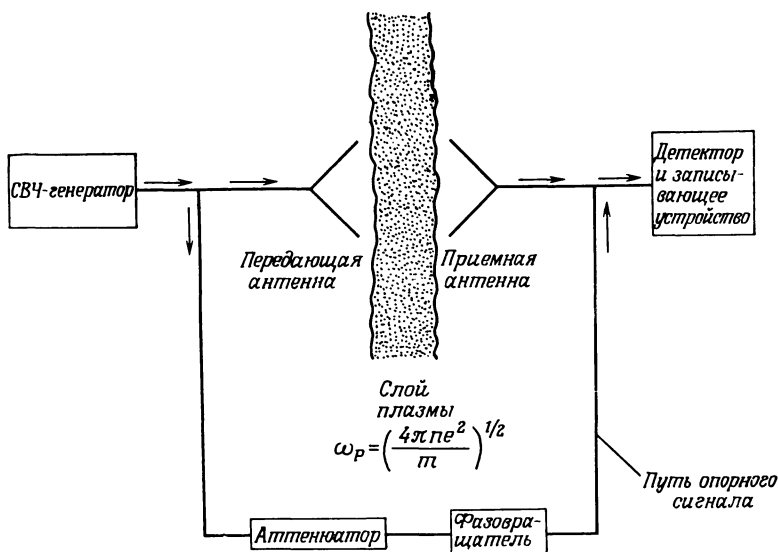
¹⁾ По диагностике плазмы мы рекомендуем две книги [5, 6]. (Можно рекомендовать также две книги по СВЧ-диагностике советских авторов [24*, 25*]. — *Прим. ред.*)



Фиг. 51. Блок-схема простой СВЧ-установки, применяемой для измерения плотности плазмы по отсечке СВЧ-сигнала при $\omega = \omega_p$.

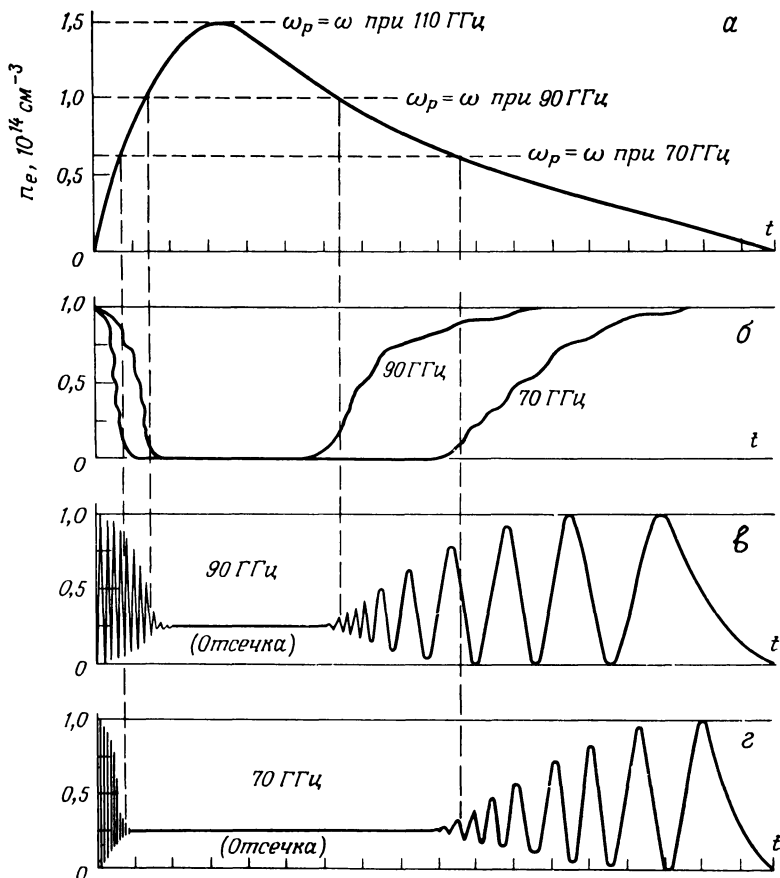
вышает критическую. Таким образом, плотность плазмы может быть низкой всюду, за исключением малой центральной области.

На фиг. 52 представлена блок-схема усовершенствованной установки, позволяющей измерять плотность плазмы при частотах СВЧ-сигнала выше плазменной частоты. Часть энергии сигнала отводится в опорный канал, в котором установлено устройство, позволяющее регулировать амплитуду и фазу опорной волны. Эта опорная волна складывается с волной, прошедшей через плазму после того, как последняя принята приемной антенной. Амплитуда и фаза опорной волны подбираются таким образом, чтобы в отсутствие плазмы сигнал на детекторе был равен нулю, т. е. чтобы волна, прошедшая через область, в которой должна находиться плазма, погасалась опорной волной. Если в этой области появляется плазма, фаза прошедшей волны изменяется и она уже не компенсируется сигналом, прошедшим по опорному



Фиг. 52. Блок-схема СВЧ-интерферометра.

Установка применяется для определения плотности плазмы путем измерения фазового сдвига волны, прошедшей через плазму.

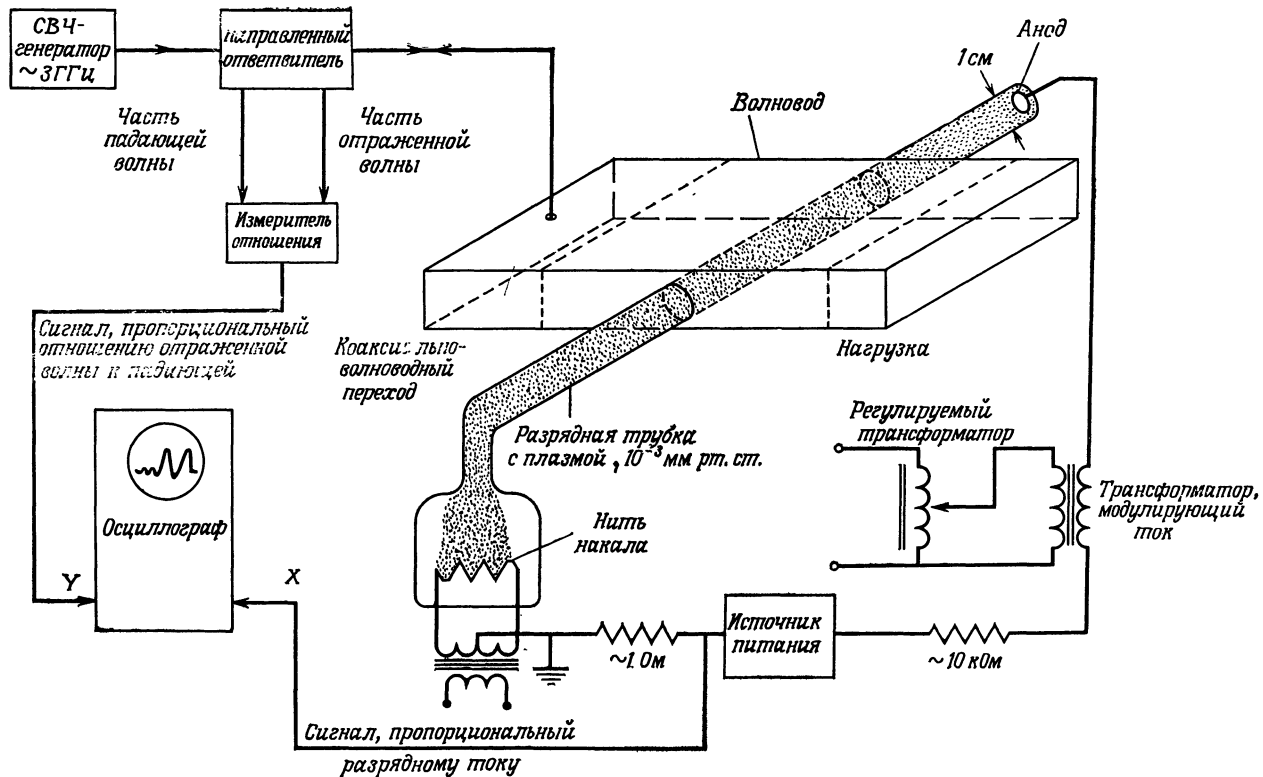


Фиг. 53. Результаты измерения плотности электронов в нестационарной плазме [5]. Приведены записи СВЧ-сигналов, прошедших через плазму (б), а также на выходе квадратичного видеодетектора в схеме интерферометра на частотах 90 ГГц (в) и 70 ГГц (г). Приведена зависимость (а) плотности электронов от времени, вычисленная по этим измерениям.

каналу, поэтому на детекторе возникает сигнал. Когда фазовый сдвиг в первоначально скомпенсированной системе достигает π , сигналы усиливают друг друга. Когда при дальнейшем возрастании фазовый сдвиг волны, прошедшей через плазму, достигает 2π , сигналы снова погашают друг друга. Это повторяется через каждый фазовый сдвиг на π и 2π , пока не происходит отсечка. Система описанного типа называется *СВЧ-интерферометром* и весьма удобна для определения изменения плотности нестационарной плазмы. На фиг. 53 представлены типичные результаты измерений для нестационарной плазмы. По мере увеличения плотности плазмы сигнал на выходе детектора проходит через последовательные нули всякий раз, как фазовый сдвиг волны, прошедшей через плазму, возрастает на 2π . Фазовый сдвиг волны, распространяющейся в плазме, определяется диэлектрической проницаемостью плазмы, которая зависит от ее плотности. В слое однородной плазмы толщиной L зависимость фазового сдвига от плотности имеет вид

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{c} \left[1 - \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] L. \quad (4.6.1)$$

Подставляя в это соотношение измеренный фазовый сдвиг и разрешая его относительно плазменной частоты, можно найти плотность плазмы.



Фиг. 54. Блок-схема экспериментальной установки для измерений отражения электромагнитных волн от плазменного столба в условиях резонанса.

Следует заметить, что, когда плотность плазмы возрастает до критического значения ($\omega = \omega_p$), прошедший сигнал обращается в нуль и суммарный сигнал на выходе детектора остается постоянным и равным опорному сигналу. Это обстоятельство обеспечивает контрольную точку при измерениях плотности. Когда плотность плазмы падает ниже критической, опять появляется прошедший сигнал и разворачивается та же картина с относительным фазовым сдвигом.

Такой метод диагностики плазмы применяется также для плазмы, находящейся в магнитном поле, однако в этом случае при вычислении фазового сдвига с помощью соответствующего закона дисперсии следует учитывать тензорную структуру диэлектрической проницаемости (§ 9).

§ 7. РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЕННОГО СТОЛБА

В качестве простого эксперимента, который может быть объяснен на языке диэлектрической проницаемости плазмы, можно взять исследование собственных дипольных (или мультипольных более высокого порядка) резонансных колебаний плазменного столба. Такой эксперимент впервые был поставлен Тонксом [7], который изучал свойства плазменных газоразрядных столбов. В последнее время этот эксперимент был повторен многими исследователями и оказался очень полезным для стимулирования работ, которые привели к подтверждению дисперсионного уравнения для длинноволновых колебаний в горячей плазме [$\omega^2 = \omega_p^2 + (3kT/m) k^2$], известного как *дисперсионное уравнение Бома — Гросса* [8]¹⁾.

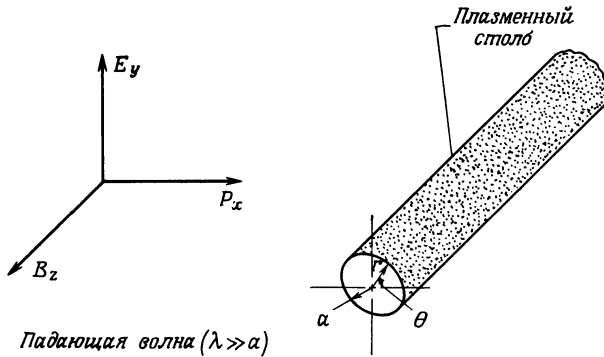
На фиг. 54 представлена схема этого эксперимента. Сигнал от СВЧ-генератора поступает в волновод с критической длиной волны 10 см. Столб термоэмиссионного дугового разряда (диаметром ~ 1 см) располагается под прямым углом к вектору электрического поля волны, входящей в волновод. Два направленных ответвителя отбирают часть энергии падающей и отраженной волн. В волноводе после разрядного столба имеется согласованная нагрузка для исключения паразитных отражений. В эксперименте измеряется отношение мощности отраженной от плазмы волны к мощности падающей волны в зависимости от плотности плазмы. Это отношение называется *коэффициентом отражения*. В типичном эксперименте разрядный столб создается за счет термоэмиссионного разряда в парах ртути при таком давлении (10^{-3} мм рт. ст.), при котором плотность электронов в плазме пропорциональна полному току разряда $I_{\text{разр}}$. В этом режиме средняя длина свободного пробега электронов в плазме много больше диаметра области разряда, поэтому плазма ведет себя так, как будто в ней отсутствуют столкновения. Следовательно, можно измерить коэффициент отражения при фиксированной частоте падающей волны в зависимости от плазменной частоты ($\omega_p^2 \sim n_e \sim I_{\text{разр}}$).

Для получения теоретически возможных результатов эксперимента удобно идеализировать эксперимент, предположив, что электрическое поле падающей волны не меняется вдоль плазменного столба и что разрядный столб не ограничен стенками стеклянной трубки, которая должна быть в лабораторном эксперименте. Идеализированная модель плазменного столба показана на фиг. 55.

Если длина падающей волны много больше радиуса плазменного столба ($\lambda \gg a$), электрическое поле вблизи столба почти потенциальное (т. е. $\text{rot } \mathbf{E} \approx 0$) и распределение поля можно найти с помощью скалярного потенциала:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (4.7.1)$$

¹⁾ Это уравнение было получено А. А. Власовым в 1945 г. [26*].— *Прим. ред.*



Фиг. 55. Идеализированная модель плазменного столба для изучения рассеяния на нем электромагнитных волн в условиях резонанса.

Предполагается, что длина волны падающего излучения много больше радиуса столба.

Скалярный потенциал должен удовлетворять уравнению Пуассона, которое в отсутствие зарядов имеет вид

$$\varepsilon \nabla^2 \Phi = 0,$$

где ε — эффективная диэлектрическая проницаемость, которая предполагается не зависящей от координат. Таким образом, потенциал Φ не зависит от z и должен удовлетворять уравнению Лапласа как внутри, так и вне плазмы. Общее решение уравнения $\nabla^2 \Phi = 0$ в цилиндрической системе координат есть линейная комбинация функций

$$\Phi_n = (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta);$$

здесь n — произвольное натуральное число. Условие ограниченности Φ при $r = 0$ означает, что все $B_n = 0$ внутри плазменного столба, а из геометрических соображений (см. фиг. 55, откуда видно, что потенциал при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ должен быть одним и тем же) получаем $C_n = 0$. Следовательно, внутри плазменного столба потенциал имеет вид

$$\Phi_{\text{внутр}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta. \quad (4.7.2)$$

Аналогично, вне плазменного столба потенциал при $r \rightarrow \infty$ должен совпадать с потенциалом падающего поля. Таким образом,

$$\Phi_{\text{внеш}} = \sum_n B_n r^{-n} \sin n\theta + E_{\text{пад}} r \sin \theta. \quad (4.7.3)$$

Коэффициенты B_n и A_n определяются из граничных условий на поверхности плазмы. Условия на границе раздела плазма — вакуум состоят в требовании непрерывности нормальной компоненты вектора электрической индукции ($\mathbf{D} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$) и тангенциальной компоненты вектора электрического поля. Эти условия удовлетворяются, если (граница плазмы при $r = a$)

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \Phi_{\text{внутр}}}{\partial r} \Big|_a = \frac{\partial \Phi_{\text{внеш}}}{\partial r} \Big|_a \quad \varepsilon E_r \text{ непрерывно при } r = a, \quad (4.7.4)$$

$$\Phi_{\text{внутр}}(a) = \Phi_{\text{внеш}}(a) \quad E_\theta \text{ непрерывно при } r = a. \quad (4.7.5)$$

Отсюда можно выразить A_n и потенциал внутри плазмы через амплитуду и частоту падающей волны:

$$A_1 = \frac{2E_{\text{пад}}}{1 + \varepsilon},$$

$$(1 + \varepsilon) A_n = 0, \quad n \geq 2. \quad (4.7.6)$$

Таким образом, поле в плазме возрастает (резонансным образом) при частоте, когда $1 + \varepsilon = 0$, или

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}. \quad (4.7.7)$$

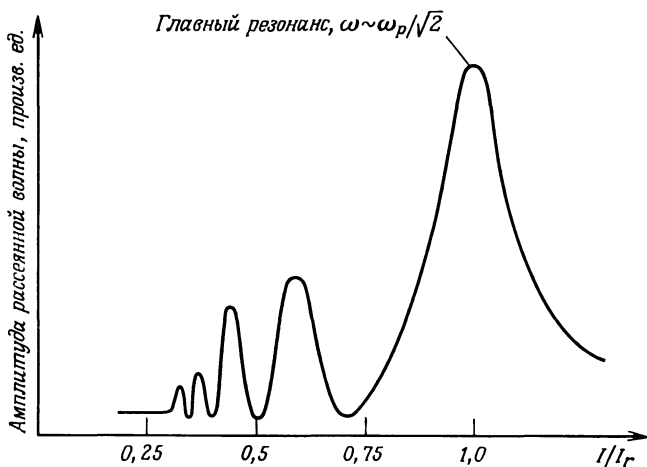
Наличие резонанса в плазме при $\varepsilon = -1$, а не при $\varepsilon = 0$ есть следствие цилиндрической геометрии (см. задачу 4.7.2).

Поскольку плазменный столб резонирует на данной частоте, электроны в столбе колеблются под действием вынуждающего электрического поля. При этом движении происходит переизлучение или рассеяние падающего поля в виде цилиндрических волн. В связи с тем, что в случае резонанса амплитуда колебаний электронов максимальна, рассеиваемая мощность при резонансе имеет максимум. Если плазменный столб расширяется поперек волновода, как показано на фиг. 54, коэффициент отражения проходит через максимум при резонансе.

Задача 4.7.1. Покажите, что (в цилиндрической системе координат) условие непрерывности E_θ налагает также условие непрерывности на ϕ .

Задача 4.7.2. Покажите, что при тех же предположениях, которые были рассмотрены выше, плазменный шар имеет собственную моду с $\omega_{\text{рез}} = \omega_p/\sqrt{3}$.

На фиг. 56 представлены результаты подобного эксперимента. Можно заметить, что имеется несколько резонансов. Многие авторы пытались объяснить дополнительные пики как множественные резонансы, связанные с диэлектрической проницаемостью. Тем не менее множественные резонансы оставались нерешенной проблемой в течение длительного времени. Резонанс при $\omega \approx \omega_p/\sqrt{2}$ (называемый *главным резонансом*) хорошо соответствует максимальному пику рассеяния. В 1959 г. [9, 10] остальные пики в рассеянии были объяснены как следствие тепловой дисперсии плазменных волн, которые в горячей однородной плазме удовлетворяют закону дисперсии Бома — Гросса (4.4.7): $\omega^2 = \omega_p^2 + (3kT/m_e)k^2$. Влияние тепловой дисперсии



Фиг. 56. Зависимость амплитуды волны, отраженной плазменным столбом при резонансе, от тока разряда I (т. е. от плотности плазмы).

Главный резонанс происходит при $\omega \approx \omega_p/\sqrt{2}$. Остальные резонансы обусловлены рассеянием на волнах, существующих при конечной температуре плазмы (I_r — ток разряда, соответствующий главному резонансу, т. е. максимальной интенсивности отраженной волны).

на рассеяние волн плазменным столбом можно исследовать с помощью гидродинамических уравнений с учетом электронного давления. При этом рассматриваются двухжидкостные уравнения, причем ионы считаются слишком тяжелыми, чтобы смещаться под действием электрического поля ($V_i = 0$). Движение электронов определяется следующими уравнениями:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{V} = 0, \quad (4.7.8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{e}{m} \nabla \varphi - \frac{1}{nm} \nabla p, \quad (4.7.8b)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e (n_i - n), \quad (4.7.9)$$

$$p = \frac{p_0}{n_0^\gamma} n^\gamma. \quad (4.7.10)$$

Здесь переменные без индексов относятся к *электронам*. Эти уравнения линеаризуются способами, аналогичными указанным в предыдущих параграфах, и комбинирование их приводит к уравнению для возмущения скалярного потенциала

$$\nabla^2 (\nabla^2 + k^2) \varphi_1(r, \theta) = 0; \quad (4.7.11)$$

здесь

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\gamma \kappa T / m} = \frac{1}{3\lambda_D^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right). \quad (4.7.12)$$

Значение $\gamma = 3$ взято из тех же соображений, которые обсуждались в параграфе, посвященном волнам в горячей плазме, а именно потому, что волны соответствуют одномерному адиабатическому сжатию электронов.

Решения дифференциального уравнения для потенциалов, ограниченных на оси цилиндра и обладающих свойством $\varphi(\theta = 0) = \varphi(\theta = \pi)$ (фиг. 55), записываются следующим образом:

$$\varphi_{\text{внутр}}(\mathbf{r}, \theta) = \sum_n \left[A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n + B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \right] \sin n\theta. \quad (4.7.13)$$

Вне плазмы решение имеет вид

$$\varphi_{\text{внеш}} = \sum_n C_n r^{-n} \sin n\theta + E_{\text{пад}} r \sin \theta. \quad (4.7.14)$$

В отличие от рассеяния на *холодной* плазме теперь для нахождения частного решения недостаточно двух граничных условий, следующих из уравнений Максвелла, поскольку необходимо определить три константы: A_n , B_n и C_n . В рамках этих уравнений невозможно однозначно определить нужные константы. Для ответа на этот вопрос необходимо знать детали взаимосвязи волн и частиц плазмы, а это требует микроскопического рассмотрения [11]. Что можно сделать на данном этапе, так это рассмотреть различные решения уравнений, соответствующие определенным видам движения плазмы, оставив для микроскопического рассмотрения решение вопроса о том, какие движения легче всего возбуждаются падающей волной. Например, рассмотрим такие возмущения, при которых добавка к радиальному току равна нулю всюду на границе, т. е. $J_{1r}(a) = n_0 e V_{1r} |_{r=a} = 0$. Подставляя это условие в (4.7.8б), получаем условие для φ_1 :

$$\frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 \Big|_{r=a} - \frac{3\kappa T}{m\omega_p^2} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \varphi_1) \Big|_{r=a} = 0, \quad (4.7.15)$$

которое в свою очередь дает соотношение между A_n и B_n . Потенциал внутри плазменного столба для каждой гармоники n записывается в виде

$$\varphi_n(r, \theta) = B_n \left[\frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} - \frac{ka}{n} \left(1 + \frac{(3\kappa T/m) k^2}{\omega_p^2} \right) \frac{J'_n(ka)}{J_n(ka)} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right] \sin n\theta. \quad (4.7.16)$$

Снова использованы электростатические граничные условия на поверхности раздела плазма — вакуум. Условие $V_{1r} = 0$, согласно уравнению непрерывности (4.7.8а), требует отсутствия поверхностных зарядов на границе, в силу чего электростатические граничные условия теперь состоят в непрерывности φ и $\partial\varphi/\partial r$ на границе плазма — вакуум. Последнее требование приводит к тому, что амплитуда n -й гармоники может быть отлична от нуля, только если

$$\frac{n}{ka} \frac{J_n(ka)}{J'_n(ka)} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right); \quad (4.7.17)$$

здесь

$$ka = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{a}{\lambda_D} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (4.7.18)$$

Это соотношение дает частоты, при которых в горячей плазме могут быть возбуждены моды, удовлетворяющие условию $V_{1r} = 0$. Вследствие произвольности ограничения $V_{1r} = 0$ нельзя утверждать, что в плазме не существует *других* мод, которые также могли бы возбуждаться. Уравнение (4.7.17) можно решить (графически или численно) для больших значений a/λ_D . Главный резонанс при $n = 0$ имеет место на той же частоте, что и в холодной плазме, т. е.

$$\omega_0^2 \approx \frac{\omega_p^2}{2}. \quad (4.7.19)$$

Кроме того, имеется ряд резонансов на плазменной частоте и на более высоких частотах, определяемых выражением

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + \frac{3\lambda_D^2}{a^2} x_n^2 \right), \quad (4.7.20)$$

где $x_1 \approx 5,3$, $x_2 \approx 8,5$ и т. д. В отличие от холодной плазмы, резонирующей на единственной частоте, учет тепловых эффектов в плазме приводит к возникновению серии резонансов.

Задача 4.7.3. Покажите, что, если плазма граничит не с вакуумом, а с какой-либо средой (например, со стеклом), имеющей диэлектрическую проницаемость K_e , резонансы возникают, когда выполняется соотношение

$$\frac{n}{ka} \frac{J_n(ka)}{J'_n(ka)} = K_e \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} - 1 \right) + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}, \quad (4.7.20a)$$

откуда следует

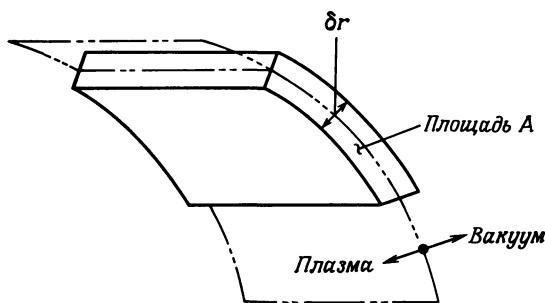
$$\omega_0^2 = \frac{\omega_p^2}{1 + 1/K_e}.$$

Нужно отметить, что, хотя проведенный анализ предсказывает существование главного резонанса при $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$, он не говорит о том, что характер движения плазмы в данном собственном колебании такого же типа, что и раньше. Расчет главного резонанса в холодной плазме дает поле дипольного типа

$$\varphi_1 \approx \bar{E}r \sin \theta + \sum_{n>1} E_n r^n \sin n\theta, \quad \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}},$$

Тогда как расчет для горячей плазмы с *граничным условием* $V_{1r}(r = a) = 0$ дает

$$\varphi_1 \approx J_0(kr), \quad \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}.$$



Фиг. 57. Элемент поверхности раздела плазма—вакуум.

Показана область интегрирования, используемая при вычисления скачка электрического поля на границе плазма—вакуум с помощью теоремы Гаусса.

жен течь ток, пропорциональный V_{1r} , т. е.

$$-i\omega V_{1r} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}.$$

Из уравнения (4.7.8а) следует, что поскольку вне плазмы $V_{1r} = 0$, то при $r = a$ должен возникать возмущенный поверхностный заряд. Этим и отличаются колебания плазмы с $V_{1r}(a) = 0$ от колебаний, описываемых уравнениями (4.7.2) — (4.7.8). Результаты, полученные при рассмотрении плазмы как диэлектрика, можно было бы воспроизвести другим путем, используя уравнение Пуассона для выражения скачка радиальной компоненты поля E_r на границе через поверхностный заряд, как показано на фиг. 57, а именно

$$A \left(\frac{\partial \varphi_{\text{внутр}}}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_{\text{внеш}}}{\partial r} \right) = \int_{\text{По объему}} 4\pi n_1 e dx = \\ = \frac{4\pi e}{i\omega} n_0 V_{1r}(r=a) A = \frac{4\pi n_0 e^2}{m\omega^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} A; \quad (4.7.21)$$

здесь использована теорема Гаусса при преобразовании

$$\int_{\text{По объему}} \nabla \cdot \mathbf{V}_1 dx = \int_A V_{1r} da = AV_{1r}(r=a).$$

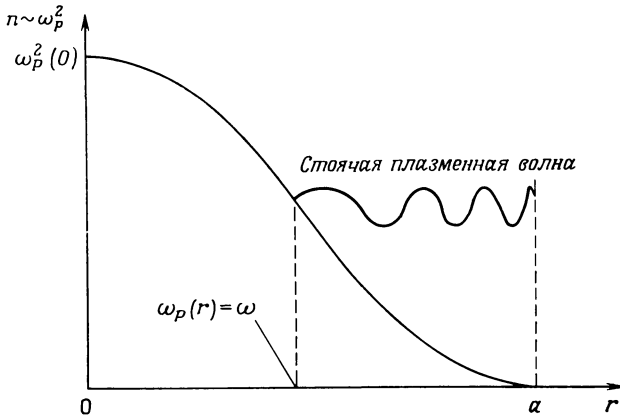
Поскольку вне плазмы $V_{1r} = 0$, выражение (4.7.21), очевидно, эквивалентно условию (4.7.4).

Хотя проведенное рассмотрение описывает дополнительные резонансы, оно не дает правильного объяснения их относительного расположения, наблюдаемого в эксперименте. Измеренные промежутки между резонансными частотами оказались такими, как если бы эффективный радиус столба был меньше его истинного размера. Вопрос был решен с помощью предположения о наличии распределения плотности по радиусу в плазменном столбе, т. е. считается, что плазменная частота обращается в нуль вне плазмы, равна $\omega_p(0)$ на оси и принимает промежуточные значения между этими точками. Тогда волны с частотами, значения которых меньше плазменной частоты на оси, распространяются во внешней области, где $\omega > \omega_p$. Это показано схематически на фиг. 58. Таким образом, для полного рассмотрения проблемы в гидродинамическую модель необходимо включить тепловую дисперсию и неоднородность плотности. Паркер, Никл и Гоулд [10] сравнили результаты теории с экспериментом, используя уравнения, приведенные в задаче 4.7.4, причем они учитывали радиальное распределение плотности в тех плазменных разрядных столбах, которые применялись ими в экспериментах.

Разница между этими двумя ответами связана с разницей в граничном условии, налагаемом на возмущенное поле, а не с учетом теплового движения в плазме. Чтобы убедиться в этом, вместо условия $V_{1r}(r=a) = 0$ можно наложить условие $n_1 = 0$ внутри плазмы. Такое условие означает $\nabla^2 \varphi_{\text{внутр}} = 0$, откуда следует, что в (4.7.13) нужно положить

$$B_n = 0.$$

Если внутри плазмы $n_1 = 0$, то, согласно (4.7.8), в плазме долж-

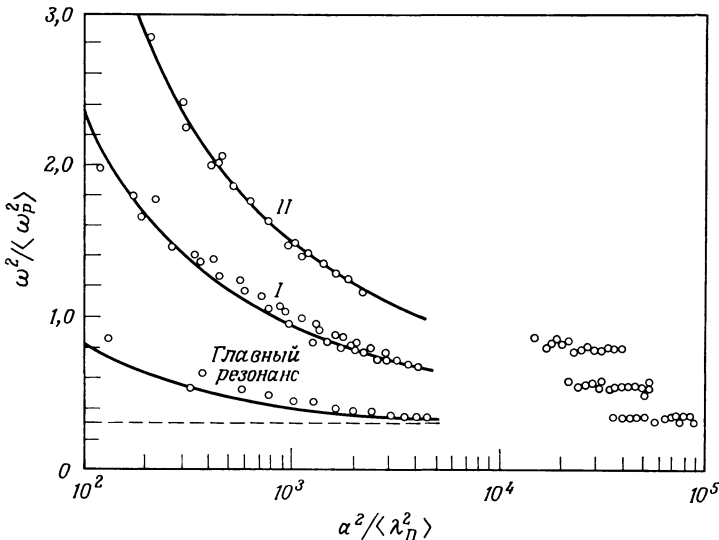


Фиг. 58 Распределение плотности плазмы n по радиусу столба. Показана стоячая плазменная волна, расположенная между стенкой разрядной трубки и тем местом в плазме, где $\omega = \omega_p$.

Задача 4.7.4. Используя линеаризованные гидродинамические уравнения и предполагая, что электрическое поле потенциальное и справедливо одномерное (в радиальном направлении) адиабатическое уравнение состояния $p/n^\gamma = \text{const}$ с $\gamma = 3$, покажите, что дифференциальное уравнение для столба горячей неоднородной плазмы имеет вид

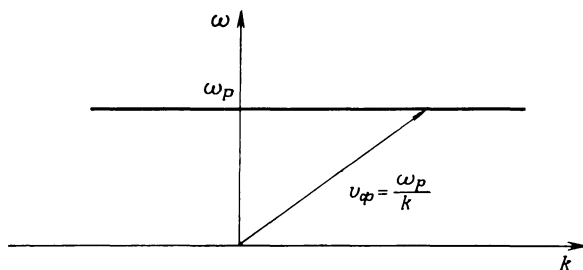
$$\nabla^4 \varphi_1 - \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\nabla n_0}{n_0} \cdot \nabla \right] \nabla^2 \varphi_1 + \left\{ \frac{1}{\gamma \lambda_D^2(0)} \left[\frac{\omega^2}{\omega_p^2(0)} - \frac{n_0(r)}{n_0(0)} \right] - \frac{1}{\gamma} \nabla \frac{\nabla n_0}{n_0} \right\} \nabla^2 \varphi_1 - \frac{1}{\gamma \lambda_D^2(0)} \frac{\nabla \varphi_1 \cdot \nabla n_0}{n_0(0)} = 0. \quad (4.7.22)$$

Здесь $\lambda_D(0)$ — дебаевский радиус экранирования на оси плазменного столба, $n_0(r)$ — радиальное распределение плотности, $\omega_p(0)$ — плазменная частота на оси столба. Покажите также, что условие $V_{1r}(a) = 0$



Фиг. 59. Сравнение экспериментальных значений частот дипольных резонансов плазменного столба с теоретическими, полученными в рамках макроскопической гидродинамической теории [10].

Сравнение теоретических кривых (сплошные линии) с экспериментальными точками проведено для главного и двух дополнительных резонансов (I и II).



Фиг. 60. Дисперсионная кривая плазменных волн в холодной бесстолкновительной плазме. Наклон прямой со стрелкой равен фазовой скорости v_{φ} .

приводит к следующему ограничению на потенциал при $r = a$:

$$\frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \varphi_1) - \frac{1}{\gamma} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dr} \nabla^2 \varphi_1 - \frac{n_0(r)}{n_0(0)} \frac{1}{\gamma \lambda_D^2(0)} \frac{\partial}{\partial r} \varphi_1 = 0. \quad (4.7.23)$$

На фиг. 59 представлены результаты типичного эксперимента. Как можно видеть, имеется превосходное согласие между теорией и экспериментом. Болдвин [11] провел микроскопическое рассмотрение, необходимое для правильного учета тепловых эффектов, специально рассмотрев затухание Ландау, которое не может вытекать из гидродинамической теории. Во всяком случае, следует отметить, что в этих «простых» экспериментах по рассеянию волн выявляются некоторые важные черты плазмы. Во-первых, холодной плазме присущи диэлектрические свойства, на основании которых можно предсказать резонанс, обнаруженный при $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$. Во-вторых, существуют тепловые эффекты, которые приводят к возникновению продольных волн с тепловой дисперсией, описываемых дисперсионным уравнением Бома — Гросса: $\omega^2 = \omega_p^2 + (3kT/m_e) k^2$. В-третьих, хотя это и не следует явно из приведенного здесь рассмотрения, с продольными волнами связано затухание Ландау.

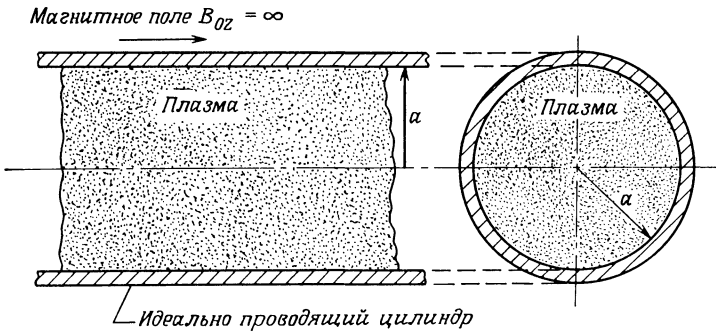
§ 8. ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

В предыдущем параграфе мы показали, что в отличие от бесконечной однородной плазмы, резонирующей при частоте $\omega = \omega_p$, резонанс в цилиндрическом столбе возникает при $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$, а в шаре при $\omega = \omega_p / \sqrt{3}$. Конечный размер плазмы может и по-другому влиять на плазменные колебания. Например, рассмотрим зависимость ω от k для ленгмюровских колебаний, приведенную на фиг. 60. Эта зависимость показывает, что фазовая скорость может быть как больше, так и меньше скорости света. При $k = 0$ имеем $v_{\varphi} = \infty$ и волна будет «чувствовать» даже удаленные границы; можно ожидать, что влияние конечного размера будет сказываться на результатах экспериментального исследования длинноволновых колебаний в плазме. В настоящем параграфе мы рассмотрим два случая распространения плазменных волн в ограниченных системах.

8.1. Волны пространственного заряда в плазменном цилиндре, помещенном в бесконечное продольное магнитное поле

Рассмотрим идеально проводящий цилиндр радиусом a , заполненный холодной плазмой и помещенный в бесконечное аксиальное магнитное поле (фиг. 61).

В этом случае магнитное поле ограничивает движение электронов так, что они движутся лишь в направлении оси z и потому не могут взаимодей-



Фиг. 61. Цилиндрический волновод, заполненный плазмой и помещенный в бесконечное аксиальное магнитное поле.

ствовать с модами, которые имеют только поперечные компоненты электрического поля. Это означает, что в данном случае волноводные TE -моды не искажаются из-за присутствия плазмы. В TM -модах *имеется* компонента электрического поля, направленная вдоль постоянного магнитного поля, и в присутствии плазмы волноводные TM -моды искажаются.

Для описания плазмы снова используем тензор диэлектрической проницаемости ϵ . В случае такой анизотропной среды уравнения Максвелла для возмущенных величин записываются следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1, \tag{4.8.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \cdot \mathbf{E}_1, \tag{4.8.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \tag{4.8.3}$$

$$\nabla \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \tag{4.8.4}$$

причем при $B_0 \rightarrow \infty$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix}. \tag{4.8.5}$$

Вид тензора ϵ (4.8.5) должен быть понятен, поскольку при движениях поперек вектора \mathbf{B}_0 плазма ведет себя подобно вакууму, а при движениях вдоль \mathbf{B}_0 она проявляет свойства диэлектрика, рассмотренные в предыдущих параграфах настоящей главы.

Применение операции ротора к уравнению (4.8.1) и исключение [с помощью (4.8.2)] члена $\nabla \times \mathbf{B}_1$ дает

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_1) - \nabla^2 \mathbf{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \cdot \mathbf{E}_1, \tag{4.8.6}$$

$$\nabla^2 E_z + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) E_z - [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}_1)]_z = 0. \tag{4.8.7}$$

Из уравнения (4.8.4) и выражения для ϵ (4.8.5) следует'

$$\nabla \cdot \epsilon \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left[\hat{r} E_r + \hat{\theta} E_\theta + \hat{z} E_z \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] = \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial z} E_z \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0. \tag{4.8.8}$$

Таким образом, мы имеем

$$[\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E})]_z = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}. \tag{4.8.9}$$

Задача 4.8.1. Выведите выражение (4.8.5) для тензора \mathbf{e} из гидродинамических уравнений в частном случае $B_0 \rightarrow \infty$.

Предполагая зависимость волны от координат и времени в виде

$$E_z(r, \theta, z, t) = \hat{E}_z(r, \theta, k, \omega) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (4.8.10)$$

уравнение (4.8.7) можно записать так:

$$\left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right] E_z = 0, \quad (4.8.11)$$

где ∇_T^2 — лапласиан по поперечным координатам (в рассматриваемом здесь примере в цилиндрической системе координат). Решение дифференциального уравнения (4.8.11), ограниченное при $r = 0$, находится методом разделения переменных и имеет вид

$$E_z = \hat{A} J_n(Tr) \exp[i(kz - \omega t - n\theta)], \quad (4.8.12)$$

здесь

$$T^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (4.8.13)$$

— константа разделения. Граничное условие на стенке идеально проводящего волновода состоит в обращении в нуль тангенциальной компоненты электрического поля, т. е. $E_z(r = a) = 0$. Таким образом,

$$J_n(Ta) = 0, \quad (4.8.14)$$

где $Ta = p_{nv}$ есть v -й корень функции Бесселя первого рода n -го порядка. Из (4.8.13) и (4.8.14) следует дисперсионное уравнение для рассматриваемых волн:

$$(ka)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} - \frac{p_{nv}^2}{1 - \omega_p^2/\omega^2}. \quad (4.8.15)$$

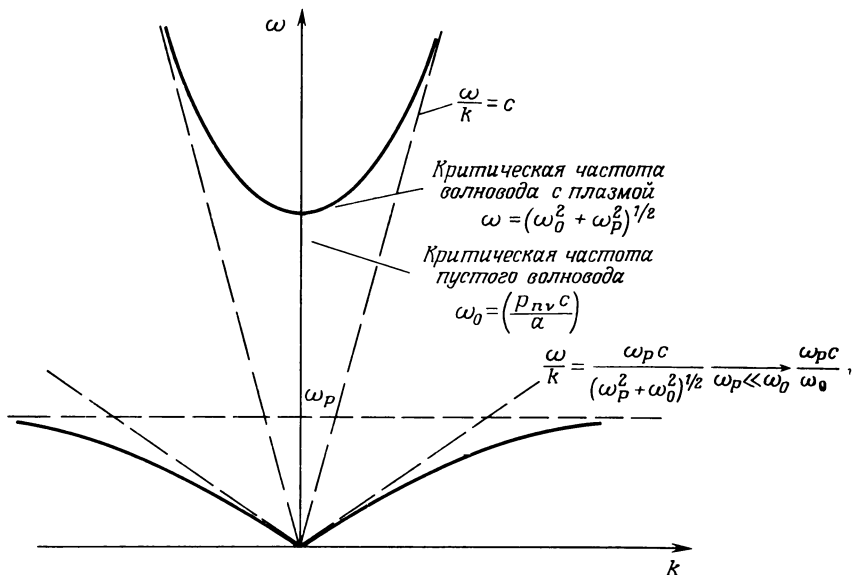
Задача 4.8.2. Покажите, что дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в плазме, состоящей из горячих электронов и неподвижных ионов и помещенной в цилиндрический волновод радиусом a , к которому приложено бесконечное аксиальное магнитное поле, имеет вид

$$k^2 a^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} - \frac{p_{nv}^2}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - (3kT/m)k^2}}. \quad (4.8.16)$$

Начертите зависимость ω от k для случаев, когда в эксперименте используется цилиндр радиусом $a \ll \lambda_D$ или $a \gg \lambda_D$.

На фиг. 62 представлен закон дисперсии (4.8.15). Верхняя ветвь на фиг. 62 соответствует волноводным модам, которые еще распространяются в отсутствие плазмы. Основное влияние плазмы на эту моду состоит в том, что критическая частота волновода смещается в сторону более высоких частот. Действительно, если в пустом волноводе критическая частота $\omega = p_{nv}c/a$, то в волноводе с плазмой, находящейся в бесконечном продольном магнитном поле, критическая частота $\omega = [(p_{nv}c/a)^2 + \omega_p^2]^{1/2}$, так что порог каждой волноводной моды сдвигается вверх.

Задача 4.8.3. При низких частотах в выражении для диэлектрической проницаемости плазмы необходимо учитывать движение ионов. Выведите дисперсионное уравнение для тех же условий, что заданы в задаче 4.8.2, но с учетом движения ионов. Начертите дисперсионные кривые для всех частот.



Фиг. 62. Дисперсионные кривые для *ТМ*-мод в заполненном плазмой волноводе с бесконечным аксиальным магнитным полем [12].

Нижняя ветвь, расположенная между $\omega = 0$ и $\omega = \omega_p$, связана с присутствием плазмы и представляет собой плазменные колебания в ограниченной плазме. Наличие границ, находящихся на конечном расстоянии, приводит к возникновению дисперсии в системе и к распространению ленгмюровских волн, которые не распространялись в отсутствие равномерного дрейфового движения или теплового распределения электронов. Появление новой степени свободы, связанной с наличием конечных границ, приводит, в частности, к тому, что ток частиц и ток смещения перестают взаимно уничтожаться. Таким образом возникает среднее возмущение тока, которое в свою очередь возмущает магнитное поле, и поэтому с этими возмущениями связан реальный поток электромагнитной мощности.

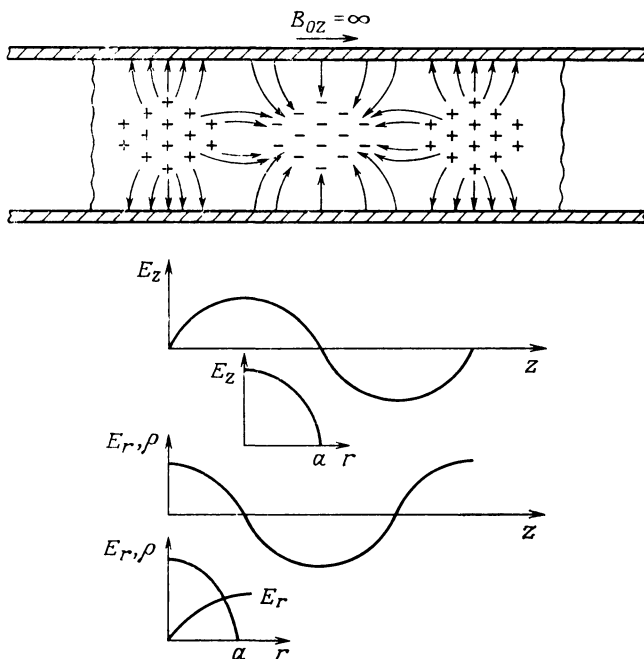
Максимальная фазовая скорость волн пространственного заряда имеет место на низких частотах и равна

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} v_{\phi} = \frac{c}{(1 + p_{nv}^2 c^2 / a^2 \omega_p^2)^{1/2}} \quad (4.8.17)$$

Следует отметить одно обстоятельство, связанное с выражением (4.8.17), а именно низкочастотные волны пространственного заряда, распространяющиеся в ограниченной плазме, имеют предельную фазовую скорость, которая меньше скорости света, в отличие от ситуации в неограниченной плазме, где фазовая скорость возрастает как k^{-1} при $k \rightarrow 0$. Распределение полей в волнах пространственного заряда показано на фиг. 63.

Задача 4.8.4. Вычислите поток мощности и распределение плотности электрической, магнитной и кинетической энергий, связанные с низкочастотными волнами пространственного заряда в холодной однородной плазме, заполняющей волновод и помещенной в бесконечное продольное магнитное поле.

Задача 4.8.5. В отличие от волноводных мод, каждая из которых имеет свою критическую частоту, моды плазменных колебаний все имеют полосу пропускания частот от 0 до ω_p при различных радиальных или



Фиг. 63. Распределение электрических полей и зарядов в основной азимутально-симметричной моде волн пространственного заряда в заполненном плазмой волноводе с бесконечным аксиальным магнитным полем.

Через четверть периода E и ρ равны нулю, а распределение электронов по скоростям пропорционально E_z .

азимутальных зависимостях. Определите амплитуды распространяющихся мод, если при $z = 0$ электрическое поле $E_z(r, \theta, 0, t) = E_0 \sin \omega t$.

Задача 4.8.6. Возмущения электрического поля в компенсированном электронном пучке радиусом a , заполняющем трубу с бесконечным постоянным продольным магнитным полем, имеют вид

$$E_{iz} = AJ_n \left(\frac{p_{nv} r}{a} \right) \exp [i(kz - n\theta - \omega t)].$$

При этом дисперсионное уравнение для волн пространственного заряда (возмущения малой амплитуды) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{p_{nv}}{a} \right)^2 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kV_{0z})^2} \right),$$

где p_{nv} — корни уравнения $J_n(p_{nv}) = 0$. Исходя из уравнений Максвелла, покажите, что указанное выше решение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + r^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left[1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - kV_{0z})^2} \right] + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0,$$

причем нужно учесть, что решение ищется в виде

$$E_{iz} = R(r) \Theta(\theta) \exp [i(kz - n\theta - \omega t)].$$

8.2. Поверхностные волны в столбе немагнитиченной плазмы

В отсутствие постоянного магнитного поля тензор диэлектрической проницаемости сводится к скалярной величине, вычисленной в § 1 настоящей главы,

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.8.18)$$

Рассмотрим столб немагнитиченной плазмы радиусом a , расположенный в проводящем цилиндре радиусом b (фиг. 64). Диэлектрическая проницаемость плазмы определяется выражением (4.8.18). Дифференциальные уравнения для мод, распространяющихся в этой системе, полученные из уравнений Максвелла, записываются в виде

$$\begin{cases} \left\{ \nabla_T^2 + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) - k^2 \right] \right\} \begin{bmatrix} E_{1z} \\ B_{1z} \end{bmatrix} = 0, & 0 < r < a, \\ \left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{bmatrix} E_{1z} \\ B_{1z} \end{bmatrix} = 0, & a < r < b; \end{cases} \quad (4.8.19)$$

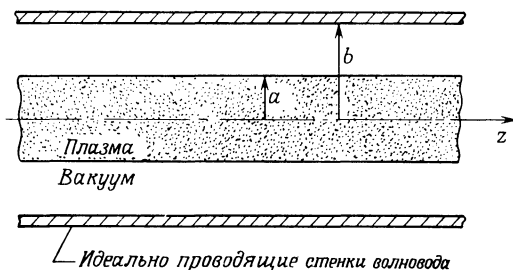
здесь ∇_T^2 — лапласиан по поперечным координатам:

$$\nabla_T^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (\text{в цилиндрических координатах}).$$

Задача 4.8.7. Проверьте, правильно ли записаны уравнения (4.8.19).

Задача 4.8.8. Покажите, что в цилиндрической системе (фиг. 64) все поперечные компоненты полей выводятся из продольных компонент E_{1z} и B_{1z} . Каковы эти компоненты полей в изучаемой системе?

Волны, связанные с решением дифференциальных уравнений для E_{1z} , называются *E-модами*, а волны, связанные с B_{1z} , — *B-модами*¹⁾. Хотя E_{1z} и B_{1z} удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям, собственные решения для них оказываются разными в силу различных граничных условий на поверхности раздела плазма — вакуум и на проводящей стенке. Граничные условия на поверхности раздела плазма — вакуум не связывают *E-* и *B-* моды, обладающие азимутальной симметрией, в то время как моды с зависимостью от азимутального угла преобразуются друг в друга на этой границе. В последнем случае, чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо брать линейные комбинации *E-* и *B-* мод. Для простоты мы рассмотрим только азимутально-симметричные моды.



Фиг. 64. Цилиндрический волновод, частично заполненный холодной немагнитиченной плазмой

¹⁾ В теории волноводов приняты соответственно названия *TM-* или *E-* волны и *TE-* или *H-* волны (поперечно-магнитные и поперечно-электрические). Отметим, что приводимые здесь дисперсионные уравнения могут быть получены из известных уравнений теории волноводов с диэлектрическими вставками путем подстановки в них выражения для диэлектрической проницаемости плазмы. — *Прим. ред.*

Задача 4.8.9. Каковы свойства азимутально-симметричных B -мод в системе, показанной на фиг. 64?

Решение уравнения (4.8.19) для азимутально-симметричных E -мод, распространяющихся со скоростью, меньшей скорости света ($k^2 > \omega^2/c^2$), имеет вид

$$E_{1z} = \begin{cases} A \frac{I_0(\tau r)}{I_0(\tau a)} e^{i(kz - \omega t)}, & 0 < r < a, \quad (4.8.20) \end{cases}$$

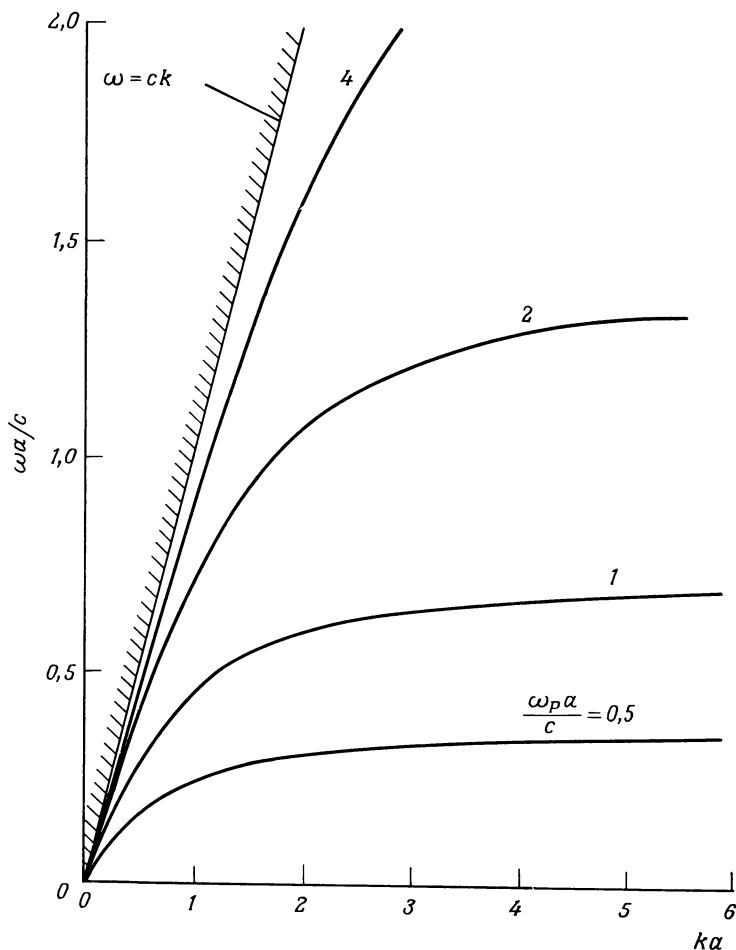
$$\begin{cases} A \frac{I_0(\tau_0 r) K_0(\tau_0 b) - I_0(\tau_0 b) K_0(\tau_0 r)}{I_0(\tau_0 a) K_0(\tau_0 b) - I_0(\tau_0 b) K_0(\tau_0 a)} e^{i(kz - \omega t)}, & a < r < b; \quad (4.8.21) \end{cases}$$

здесь

$$\tau_0^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (4.8.22)$$

$$\tau^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}, \quad (4.8.23)$$

а I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Решение выбрано таким образом, чтобы поле E_{1z} было ограниченным на оси ($r = 0$), непрерывным на границе плазмы ($r = a$) и равным нулю на про-



Фиг. 65. Дисперсионные кривые поверхностной волны в столбе неазагнеченной плазмы радиусом a при различных значениях параметра $\omega_p a/c$ [12].

водящей стенке ($r = b$). Тангенциальная компонента магнитного поля ($B_{1\theta}$) также должна быть непрерывной на границе плазмы. Из последнего условия следует дисперсионное уравнение для этих волн

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{1}{\tau a} \frac{I'_0(\tau a)}{I_0(\tau a)} = \frac{1}{\tau_0 a} \times \frac{I'_0(\tau_0 a) K_0(\tau_0 b) - I_0(\tau_0 b) K'_0(\tau_0 a)}{I_0(\tau_0 a) K_0(\tau_0 b) - I_0(\tau_0 b) K_0(\tau_0 a)}, \quad (4.8.24)$$

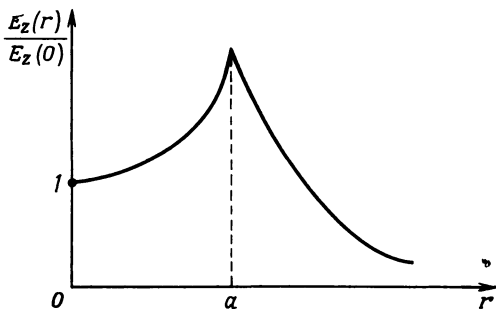
где штрихом обозначена производная по аргументу.

Задача 4.8.10. Покажите, что выражение (4.8.24) получено правильно.

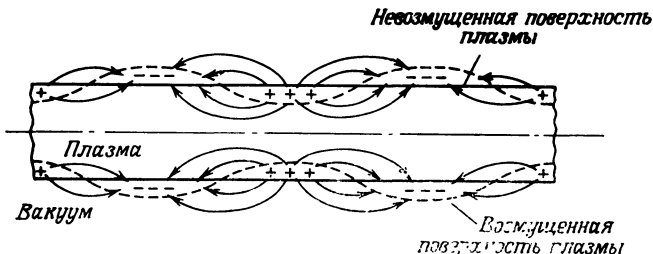
Решение уравнения (4.8.24) в случае $b/a \rightarrow \infty$ при различных значениях $\omega_p a/c$ приведено на фиг. 65, а компонента E_{1z} как функция радиуса изображена на фиг. 66. Величина $\omega_p a/c$ есть отношение радиуса плазменного столба к высокочастотной глубине проникновения $\delta = c/\omega_p$ для волн в холодной плазме. Когда $\omega_p a/c \ll 1$, поле проникает в глубь плазмы, и при низких частотах $\omega \ll \omega_p$ волны распространяются без дисперсии с фазовой скоростью, много меньшей скорости света. С увеличением $\omega_p a/c$ поле все более концентрируется в приповерхностном слое и распространяется с большей скоростью, которая приближается к скорости света при $\omega_p a/c \gg 1$. В последнем случае поля не проникают заметно в глубь плазмы и плазма ведет себя почти так же, как хороший проводник. Отношение E_{1z}/E_{1r} вне плазмы становится малым, и мода весьма напоминает поперечную электромагнитную волну, распространяющуюся в коаксиальной линии. Поскольку все компоненты поля максимальны на границе плазма — вакуум и затухают вдали от нее, волны эти называются *поверхностными волнами*.

Поверхностные волны не связаны с каким-либо возмущением плотности заряда. Распространение их напоминает перистальтику, а распределение полей показано на фиг. 67.

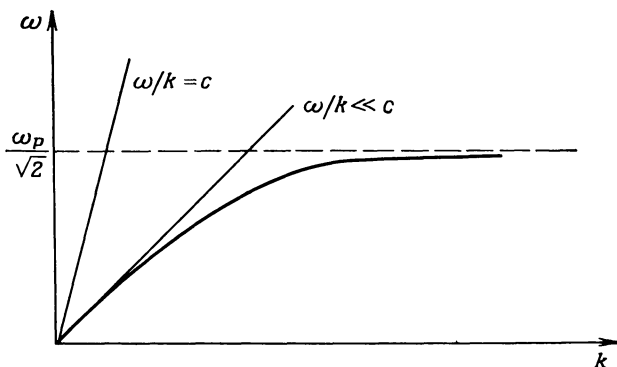
Задача 4.8.11. Волны, рассмотренные выше, представляют собой медленные волны в том смысле, что их фазовая скорость много меньше скорости света. Это означает, что для них $\nabla \times \mathbf{E} \approx 0$ и их свойства можно исследовать с помощью скалярного потенциала ϕ , удовлетворяющего уравнению $\nabla^2 \phi = 0$. Покажите, что дисперсионное уравнение



Фиг. 66. Распределение электрического поля азимутально-симметричной поверхностной волны, распространяющейся в столбе немагнитной плазмы радиусом a , расположенном в свободном пространстве.



Фиг. 67. Структура электрического поля азимутально-симметричной поверхностной волны, распространяющейся в столбе немагнитной плазмы, расположенном в свободном пространстве.



Фиг. 68. Дисперсионная кривая волн, распространяющихся в столбе немагнитизированной плазмы, расположенном в свободном пространстве. Результат получен с помощью квазистатического рассмотрения.

для поверхностных волн в плазменном столбе радиусом a , расположенном в свободном пространстве, имеет вид

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \frac{I_0(ka) K'_0(ka)}{I'_0(ka) K_0(ka)}.$$

Решите это уравнение и покажите, что закон дисперсии таких поверхностных волн по виду совпадает с представленным на фиг. 68. Обсудите свойства этих волн и сравните их закон дисперсии с дисперсионным уравнением, полученным из полной системы уравнений Максвелла.

§ 9. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ХОЛОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ ($E_0 = 0$, $B_0 = B_0 \hat{z}$)

Если плазма помещена в постоянное однородное магнитное поле, то ее эффективная диэлектрическая проницаемость больше не является скалярной функцией частоты, выражение для которой было получено в начале настоящей главы.

Диэлектрические свойства замагнитизированной плазмы определяются из двухжидкостных уравнений (3.4.1) — (3.4.6) с учетом магнитного поля. [При изучении волновых явлений имеет смысл пользоваться двухжидкостными, а не одножидкостными уравнениями (см. также обсуждение волн пространственного заряда), поскольку высокочастотные колебания воздействуют на электроны в большей степени, чем на ионы; это приводит к образованию областей с локальной плотностью зарядов ρ_q , что делает неудобным использование точной системы одножидкостных уравнений и неправильным использование приближенной системы.] Рассмотрим однородную покоящуюся плазму с плотностью электронов n_0 в отсутствие электрических полей и токов, расположенную в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}_0$. Будем считать далее, что это состояние слегка возмущено:

$$n = n_0 + n_1 e^{-i\omega t}, \quad n_1 \ll n_0.$$

Вычислим возмущенные величины \mathbf{V}_1 , \mathbf{E}_1 и \mathbf{V}_1 , используя гидродинамические уравнения и пренебрегая всеми членами, включающими в себя произведения возмущенных величин (т. е. нелинейными членами). Запишем эти уравнения.

Уравнение непрерывности

$$-i\omega n_{\alpha 1} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \mathbf{V}_{\alpha 1} = 0. \quad (4.9.1)$$

Уравнение движения

$$-i\omega \mathbf{V}_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{V}_{\alpha 1} \times \mathbf{B}_0}{c} \right). \quad (4.9.2)$$

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1, \quad (4.9.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}_1 + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha 0} \mathbf{V}_{\alpha 1}. \quad (4.9.4)$$

В результате простого, но громоздкого вычисления уравнения Максвелла можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_1 &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1, \\ \nabla \times \mathbf{B}_1 &= -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1; \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

здесь использован тензор диэлектрической проницаемости

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & +i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (4.9.6)$$

компоненты которого записываются следующим образом:

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}, \quad (4.9.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}, \quad (4.9.8)$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}. \quad (4.9.9)$$

Обобщение компонент тензора диэлектрической проницаемости на многокомпонентную плазму очевидно из этих выражений. Обратите внимание, что, согласно определению, ω_{ce} и ω_{ci} — положительные величины.

Для многих приложений выражения (4.9.7) — (4.9.9) могут быть упрощены. Например, диэлектрическая проницаемость неограниченной холодной бесстолкновительной плазмы, помещенной в постоянное однородное магнитное поле, для высокочастотных возмущений определяется тензором (4.9.6) с компонентами

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2}, \quad (4.9.10)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2}, \quad (4.9.11)$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (4.9.12)$$

Задача 4.9.1. Проверьте справедливость выражений (4.9.5) — (4.9.9).

Изучать характерные частоты и моды колебаний в случае замагниченной плазмы наиболее удобно, если рассматривать решения уравнений Максвелла для неограниченной плазмы. Поэтому следующие два параграфа мы посвятим такому рассмотрению. Уравнения (4.9.5) дают волновое урав-

нение; действительно, исключая \mathbf{V}_1 , их можно привести к виду

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1. \quad (4.9.13)$$

Решения этого уравнения записываются следующим образом:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (4.9.14)$$

Следовательно, уравнение (4.9.13) можно записать в виде

$$-\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}_1) = \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (4.9.15)$$

или

$$\hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) = \frac{1}{n^2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1; \quad (4.9.16)$$

здесь $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}\omega/v$ (v — фазовая скорость волны) и $n = c/v$ — показатель преломления. С целью упрощения алгебраических преобразований была выбрана система координат с осью z , направленной вдоль вектора постоянного магнитного поля \mathbf{B}_0 , и вектором \mathbf{k} , лежащим в плоскости yz (фиг. 69).

Задача 4.9.2. Проверьте правильность записи уравнения (4.9.16).

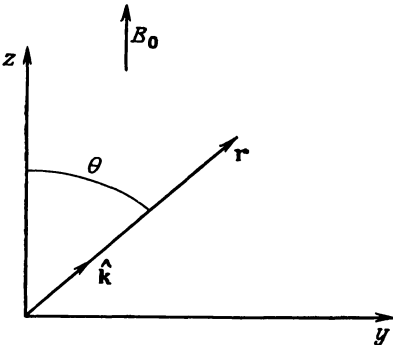
Уравнение (4.9.16) соответствует трем уравнениям для каждой компоненты электрического поля. Эти три уравнения можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\varepsilon_1}{n^2} & -\frac{i\varepsilon_2}{n^2} & 0 \\ \frac{i\varepsilon_2}{n^2} & (\cos^2 \theta - \frac{\varepsilon_1}{n^2}) & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_3}{n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_{1x} \\ \hat{E}_{1y} \\ \hat{E}_{1z} \end{bmatrix} = 0. \quad (4.9.17)$$

Данная система однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если детерминант, составленный из ее коэффициентов, обращается в нуль. Условие обращения рассматриваемого детерминанта в нуль записывается в виде

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -\frac{(1/n^2 - 1/\varepsilon_R)(1/n^2 - 1/\varepsilon_L)}{(1/n^2 - 1/\varepsilon_3)[1/n^2 - 1/2(1/\varepsilon_R + 1/\varepsilon_L)]}, \quad (4.9.18)$$

где $\varepsilon_R \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и $\varepsilon_L \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. (Как мы увидим ниже, диэлектрические проницаемости ε_R и ε_L относятся к волнам с правой и левой круговой поляризацией соответственно.)



Фиг. 69. Система координат, используемая при изучении распространения электромагнитных волн в замагниченной плазме.

Задача 4.9.3. Проверьте справедливость условия (4.9.18).

Если известна поляризация собственных векторов, то уравнения Максвелла можно записать в виде трех скалярных уравнений типа $\varepsilon_\alpha E_\alpha = 0$. В ряде книг¹⁾ величины ε_α называют диэлектрическими проницаемостями.

Уравнение (4.9.18) представляет собой дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в холодной бесстолкновительной однородной плазме, помещенной в однородное магнитное поле. Оно называется иногда уравнением Эпштона—Хартри. При заданных плазменной частоте

¹⁾ См., например, уравнения (6.76) и (6.97) в книге [13].

ω_p , циклотронной частоте ω_c , частоте волны ω и направлении распространения под углом θ к направлению магнитного поля уравнение (4.9.18) можно разрешить относительно показателя преломления n , который определяет скорость распространения волны в заданном направлении. Из результатов предыдущего рассмотрения следует, что для изучения какой-либо конкретной волны, распространяющейся в плазме в присутствии магнитного поля, необходимо задать много параметров. Наоборот, волны в плазме в отсутствие магнитного поля, как мы показали выше, определяются в основном плотностью и температурой плазмы. В следующих параграфах мы рассмотрим простейшие случаи распространения волн, а именно параллельно и перпендикулярно магнитному полю.

Задача 4.9.4. Покажите, что в случае $\theta = 0$ уравнения Максвелла (4.9.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}(n^2 - \epsilon_R) E_R &= 0, \\ (n^2 - \epsilon_L) E_L &= 0, \\ \epsilon_3 E_3 &= 0.\end{aligned}$$

а) Найдите E_R , E_L и E_3 ; б) покажите, что $\epsilon_R(\omega) = \epsilon_L(-\omega)$ и в) что

$$\begin{aligned}\epsilon_R &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})}, \\ \epsilon_L &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})}, \\ \epsilon_3 &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}.\end{aligned}$$

В последних выражениях использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\omega_{pe}^2 &= \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}, & \omega_{pi}^2 &= \frac{4\pi n_i e^2}{m_i}, \\ \omega_{ce} &= \frac{eB_0}{m_e c}, & \omega_{ci} &= \frac{eB_0}{m_i c}.\end{aligned}$$

Задача 4.9.5. Покажите, что в случае $\theta = \pi/2$ уравнения Максвелла (4.9.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\epsilon_E E_E &= 0, \\ \epsilon_0 E_0 &= 0.\end{aligned}$$

Найдите ϵ_E и ϵ_0 .

§ 10. ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО МАГНИТНОМУ ПОЛЮ ($E_0 = 0$, $B_0 = B_0 \hat{z}$)

10.1. Высоочастотные волны

Полагая в уравнениях (4.9.17) $\theta = 0$, можно получить два решения для частоты волн с заданной длиной волны, или, что эквивалентно, для показателя преломления $n = kc/\omega$. Полезно исследовать эти решения в различных диапазонах частот. В случае когда частота волн много больше циклотронной частоты ионов, т. е. $\omega \gg \omega_{ci}$, можно использовать для ϵ_1 , ϵ_2 и ϵ_3 дисперсионные уравнения (4.9.10) — (4.9.12). Тогда два решения уравнения

4.9.17), записанные для волнового числа k , имеют вид

$$k_R = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \right]^{1/2}, \quad (4.10.1)$$

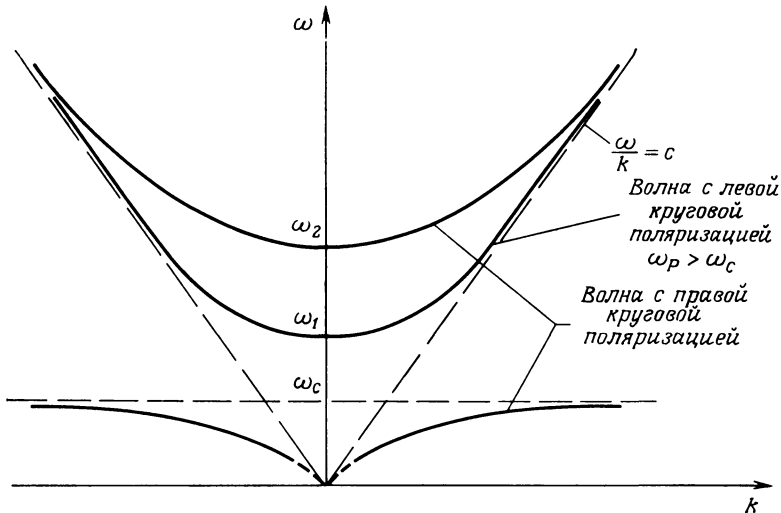
$$k_L = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \right]^{1/2}. \quad (4.10.2)$$

Решение (4.10.1) связано с полем электромагнитной волны

$$\mathbf{E}^R = \hat{E}_1 e^{i(k_R z - \omega t)} (\hat{x} + i\hat{y}), \quad (4.10.3)$$

поляризованной по кругу. Таким образом, k_R — это волновое число волны с круговой поляризацией, которая вращает электроны в направлении их циклотронного движения, т. е. волны с правой круговой поляризацией. Аналогично k_L — постоянная распространения волны с круговой поляризацией, которая пытается вращать электроны против их циклотронного движения, т. е. волны с левой круговой поляризацией. Соответствующие законы дисперсии приведены на фиг. 70 в виде зависимости ω от k (см. также фиг. 72). Кривая, пересекающая ось ω в точке $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{ce} [(1 + 4\omega_p^2/\omega_{ce}^2)^{1/2} - 1]$, представляет собой график решения (4.10.2), а кривая, которая пересекает ось ω в точке $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{ce} [(1 + 4\omega_p^2/\omega_{ce}^2)^{1/2} + 1]$, есть график решения (4.10.1). Каждое из решений имеет вторую ветвь; при $k \rightarrow \infty$ частота левополяризованной волны асимптотически стремится к $\omega = -\omega_{ce}$, а частота правополяризованной волны — к $\omega = +\omega_{ce}$. При $k \rightarrow 0$ для низкочастотных ветвей более не справедливы уравнения (4.10.1) и (4.10.2), поскольку при выводе их предполагалось, что $\omega \gg \omega_{ci}$. Зависимость (4.10.1) получена в предположении, что магнитное поле мало, т. е. $\omega_{ce} \ll \omega_p$. Характерная особенность рассматриваемой области параметров состоит в том, что существует область частот $\omega_{ce} < \omega < \omega_1$, в которой *никакие* волны не распространяются вдоль магнитного поля \mathbf{B} . Заметим, что $\omega_1 \rightarrow \omega_p$ при $\omega_p \gg \omega_{ce}$, т. е. происходит отсечка электромагнитных волн при частотах ниже плазменной частоты, которая была рассмотрена нами в § 5 настоящей главы. В отличие от плазмы без магнитного поля электромагнитные волны в замагниченной плазме вновь распространяются при частотах ниже циклотронной частоты.

Из фиг. 70 видно, что при частотах ниже циклотронной распространяется только волна с правой круговой поляризацией, в то время как в диапазоне



Фиг. 70. Дисперсионные кривые электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в холодной однородной замагниченной плазме.

$\omega_1 < \omega < \omega_2$ распространяется только волна с левой круговой поляризацией. При $\omega > \omega_2$ вдоль магнитного поля могут распространяться волны как с левой, так и с правой круговой поляризацией. Если амплитуды этих волн одинаковы, то в результате суперпозиции волн с левой и правой круговой поляризацией возникает линейно-поляризованная волна с определенной плоскостью поляризации. Поскольку волны с разными поляризациями распространяются с различными скоростями, как это ясно видно из фиг. 70, плоскость поляризации поворачивается по мере того, как волна распространяется вдоль B_0 . Это явление называют *фарадеевым вращением плоскости поляризации*. В пределе $k \rightarrow \infty$ скорости обеих волн приближаются к скорости света c , а положение плоскости поляризации по существу не меняется. Таким образом, мы снова видим, что на волны с частотой, много большей плазменной, плазма не оказывает никакого влияния и они распространяются подобно плоским волнам в вакууме.

Задача 4.10.1. Начертите график зависимости ω от k (аналогичные графикам на фиг. 70) для волн, распространяющихся в плазме при $\omega_p < \omega_{ce}$, и обсудите отсечку и прочие свойства рассматриваемых волн.

10.2. Фарадеево вращение плоскости поляризации

Линейно-поляризованную волну можно разложить на две волны с правой и левой круговой поляризациями (фиг. 71). Для плазмы это разложение вполне естественно, поскольку такие волны распространяются в ней с разными скоростями и диэлектрическая проницаемость (ϵ_R, ϵ_L) для каждой волны своя. Полагая в (4.9.17) $\hat{E}_{1z} = 0$, можно получить решение, соответствующее ϵ_R ; согласно этому решению, электрическое поле имеет компоненты x и y , связанные между собой следующим образом:

$$\left(1 - \frac{\epsilon_1}{n_R^2}\right) \hat{E}_{1xR} - i \frac{\epsilon_2}{n_R^2} \hat{E}_{1yR} = 0. \tag{4.10.4}$$

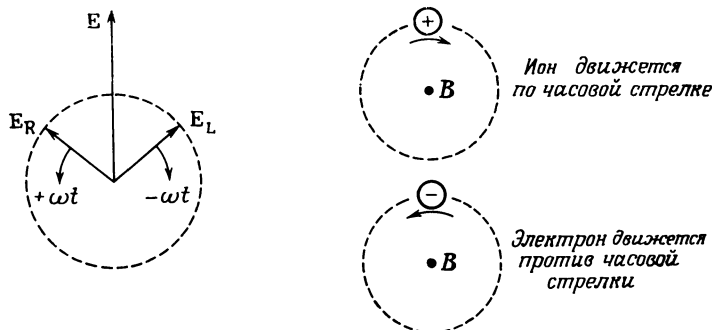
Полное электрическое поле может быть выражено через одну из этих компонент:

$$E_{1R} = (\hat{x} + i\hat{y}) E_{1R} e^{i(h_R z - \omega t)}. \tag{4.10.5}$$

В общем случае полное электрическое поле складывается из двух компонент с левой и правой круговой поляризацией:

$$E_1 = [\hat{x}(\hat{E}_{1R} e^{ih_R z} + \hat{E}_{1L} e^{ih_L z}) + i\hat{y}(\hat{E}_{1R} e^{ih_R z} - \hat{E}_{1L} e^{ih_L z})] e^{-i\omega t}. \tag{4.10.6}$$

В изотропной среде $k_R = k_L$ и отношение x - и y -компонент поля должно оставаться постоянным в разных точках в любой момент времени. Однако



Фиг. 71. Диаграмма, иллюстрирующая направление электрического поля для волн с левой и правой круговой поляризацией.

Магнитное поле B направлено к читателю перпендикулярно плоскости листа.

в магнитном поле плазма анизотропа, т. е. $k_R \neq k_L$, и из выражения (4.10.6) следует, что отношение x - и y -компонент поля имеет вид

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1 - (E_{xL}/E_{xR}) e^{i(k_L - k_R)z}}{1 - (E_{xL}/E_{xR}) e^{i(k_L - k_R)z}}. \quad (4.10.7)$$

При $E_{xL}/E_{xR} = 1$ выражение (4.10.7) сводится к

$$\frac{E_x}{E_y} = \operatorname{ctg} \frac{k_L - k_R}{2} z. \quad (4.10.8)$$

Таким образом, если в точке z_0 создается плоская волна, плоскость поляризации *поворачивается* в зависимости от расстояния в направлении распространения. Угол поворота зависит от разности двух волновых чисел, которая определяется плотностью плазмы и напряженностью магнитного поля.

Фарадеево вращение плоскости поляризации можно использовать для диагностики плазмы. В лабораторных условиях это можно осуществить, создавая линейно-поляризованную волну вдоль магнитного поля в плазме. Если положение плоскости поляризации можно определить с помощью антенного устройства, измерение угла поворота плоскости поляризации вдали от источника позволит оценить по крайней мере среднюю плотность электронов, поскольку магнитное поле обычно измеряется магнитными зондами. Используя выражения для k_R и k_L , полученные выше, угол поворота для высокочастотной ($\omega \gg \omega_p$) волны, прошедшей расстояние z вдоль направления \mathbf{B}_0 , определяется по формуле

$$\phi (\omega \gg \omega_p) = \frac{e^3 B_0}{2\pi m^2 c^2 (\omega/2\pi)^2} n_e z. \quad (4.10.9)$$

В астрофизических приложениях с помощью оптических и радиоастрономических наблюдений часто оказывается возможным определить поляризацию источника, как, например, в случае синхротронного излучения [14]; фарадеево вращение плоскости поляризации можно использовать для установления связи между плотностью электронов, магнитным полем вдоль луча зрения и расстоянием от источника. В общем случае поля и плотность распределены в пространстве неоднородно, поэтому выражение (4.10.9) следует заменить на следующее [15]:

$$\phi = \frac{e^3}{2\pi m^2 c^2} \frac{1}{f^2} \int n_e \mathbf{B} \cdot d\mathbf{z} = \frac{2,35 \cdot 10^4}{f^2} \int n_e \mathbf{B} \cdot d\mathbf{z}; \quad (4.10.10)$$

здесь f — частота излучения в герцах.

10.3. Циклотронный резонанс

На фиг. 71 показан случай, когда вектор электрического поля в электромагнитной волне с правой круговой поляризацией вращается в том же направлении, что и электроны, поэтому не удивительно наличие резонанса у этой волны. Из дисперсионного уравнения

$$k_R = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \right)^{1/2} \quad (4.10.11)$$

следует, что циклотронный резонанс на электронах происходит при $\omega = \omega_{ce}$. Когда $\omega \rightarrow \omega_{ce}$, электроны могут поглотить значительную долю энергии волны и перейти на орбиты с большим радиусом, что приведет к нарушению ограничений, использованных при выводе тензора диэлектрической проницаемости для холодной плазмы. Поглощение плазмой электромагнитных волн при электронном циклотронном резонансе можно использовать для нагрева электронов плазмы. Вопрос о нелинейном взаимодействии между волной и заряженной частицей исследуется в гл. 10.

10.4. Свистящие атмосферерики

В области частот, существенно меньших электронной циклотронной частоты ($\omega_{ci} < \omega \ll \omega_{ce}$), может распространяться только волна с правой круговой поляризацией. Дисперсионное уравнение в этой области частот ($\omega \ll \omega_{ce}$) имеет вид

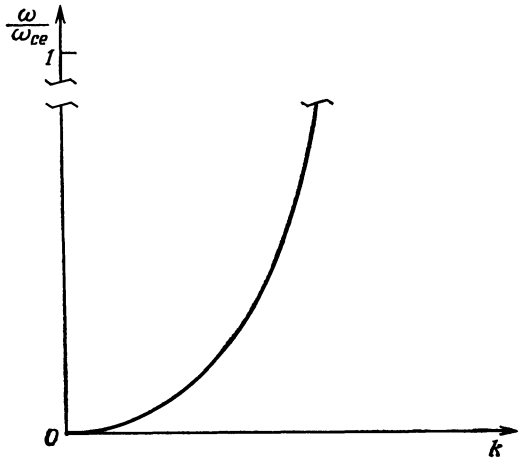
$$k_R = \frac{\omega_{pe}}{c} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{ce}}}. \quad (4.10.12)$$

На фиг. 72 приведена дисперсионная кривая для этой волны. Из вида этой кривой следует, что если в такой среде создать импульс, содержащий много частот, то высокочастотные компоненты импульса распространялись бы вдоль силовых линий быстрее, чем низкочастотные компоненты. Это означает, что широкополосный приемник, расположенный достаточно далеко от передатчика, будет принимать сначала более высокие частоты, а потом более низкие.

Описанное явление было впервые обнаружено полевыми радиооператорами во время первой мировой войны, которые пользовались системами связи, действовавшими на частоте около 10 кГц. Случалось, что они слышали короткие сигналы, частота которых вначале была высокой, а затем понижалась; предполагалось, что они слышали шум от движущихся артиллерийских снарядов, сдвигаемый по частоте из-за эффекта Доплера. Правильное объяснение этого явления (принадлежащее Стори [16]) заключается в том, что при вспышке молнии на земле генерируется импульс электромагнитных волн, содержащий много частот. Этот импульс, попадая в ионосферу, возбуждает низкочастотную моду, которая распространяется в ионосфере вдоль силовых линий магнитного поля Земли до той точки, где силовые линии выходят из ионосферы. Часть энергии волны преобразуется на границе ионосферы в электромагнитное излучение и попадает на поверхность Земли, где может наблюдаться в виде свистов (*свистящих атмосферерики*) (фиг. 73). При этом часть импульса отражается и проделывает обратный путь в то полушарие, где он возник, отражается там и снова попадает в приемник, где воспринимается как второй импульс. Иногда удается принять четыре или пять последовательно убывающих по амплитуде свистов, возникших из одного и того же начального импульса.

Волна с подобным законом дисперсии, которая распространяется в натрии при низких температурах, называется *геликоном*. Вследствие высокой плотности электронов в натрии геликон распространяется с очень малой скоростью.

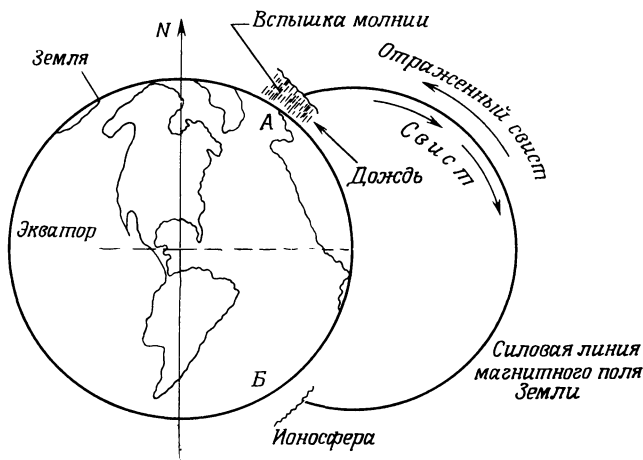
Временную задержку между прибывающими сигналами с различными частотами ω можно использовать для измерения плотности плазмы. Дисперсионное уравнение (4.10.12) позволяет получить выражение для групповой скорости свистов с определенными значениями ω и k , т. е.



Фиг. 72. Дисперсионная кривая свистов (свистящих атмосферерики).

Приведенный вид дисперсионной кривой в области $\omega \rightarrow 0$ был бы справедлив только при бесконечной массе ионов, а также если бы ионов в системе совсем не было [17].

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2kc^2}{\omega_{pe}^2} \omega_{ce}, \quad (4.10.13)$$



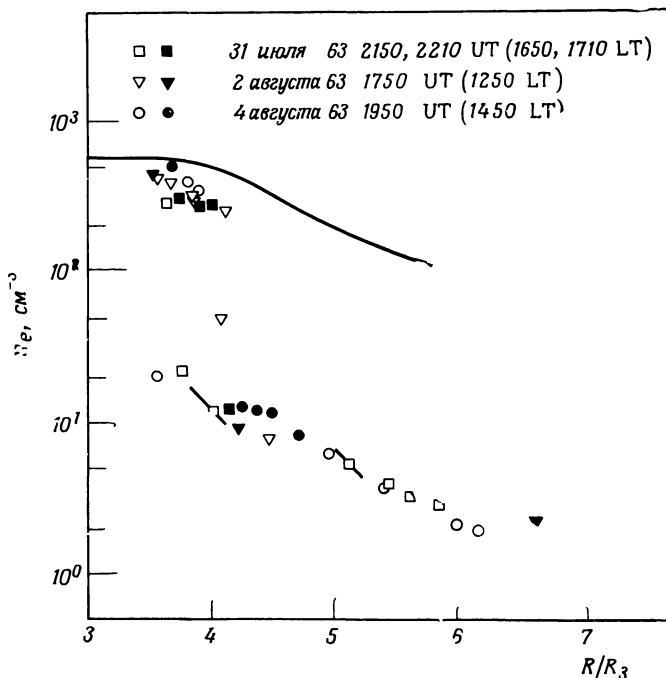
Фиг. 73. Образование свистящего атмосферика при вспышке молнии.

Волна распространяется вдоль силовой линии магнитного поля Земли до сопряженной точки в другом полушарии.

и время прибытия сигнала с частотой ω

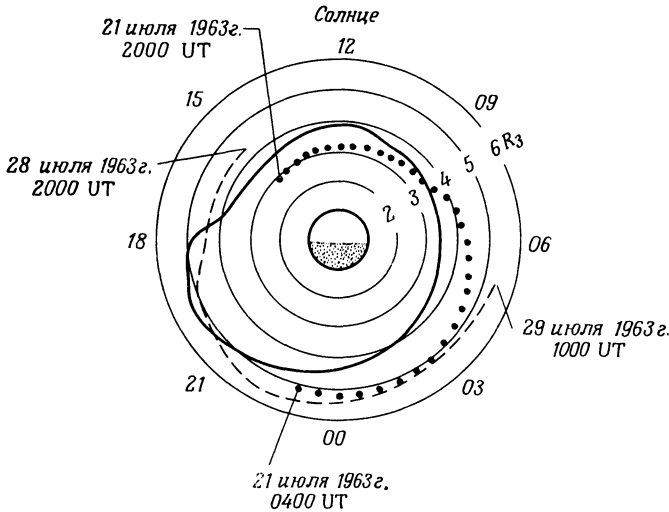
$$t = \int \frac{ds}{d\omega/dk} = \int \frac{\omega_{pe}(x)}{2c \sqrt{\omega\omega_{ce}}} ds \quad (4.10.14)$$

[здесь было использовано уравнение (4.10.12) для выражения k через ω].



Фиг. 74. Профили электронной плотности n_e в зависимости от расстояния от центра Земли в экваториальной плоскости [19].

Расстояние от центра Земли R измеряется в земных радиусах R_3 . Вблизи $4R_3$ в полдень заметен перегиб. Точки на графике, обозначенные по-разному, соответствуют различным дням лета 1963 г., получены при помощи спутника «Эксплорер-1». UT — всемирное время, LT — местное время.



Фиг. 75. Полярная диаграмма расположения перегиба в экваториальной плоскости в зависимости от местного времени [19].

Сплошной линией показано среднее положение перегиба в периоды средней стационарной геомагнитной активности ($K_p = 2-4$). Наблюдения проводились в июле и августе 1963 г. в Антарктиде. Пунктирная кривая демонстрирует случаи повышенной активности, штриховая — пониженной активности.

Интеграл в (4.10.14) берется по пути, проходимому сигналом. Если частота волны находится вблизи электронной циклотронной частоты, то выражение (4.10.14) нужно модифицировать следующим образом:

$$t = \frac{1}{2c} \int \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{\omega}} \frac{2\omega - \omega_{ce}}{(\omega_{ce} - \omega)^{3/2}} ds, \quad (4.10.15)$$

где $0 < \omega_{ce} - \omega \ll \omega_{ce}$.

Типичные профили распределения электронной плотности, которые получены методом измерения временной задержки сигнала, показаны на фиг. 74 [18]. Обратите внимание, что плотность электронов убывает на порядок на высоте около $4R_E$. Это явление получило название *колена* (перегиба) в профиле электронной плотности, а область, где это происходит, называется *плазмосаузой* (фиг. 75).

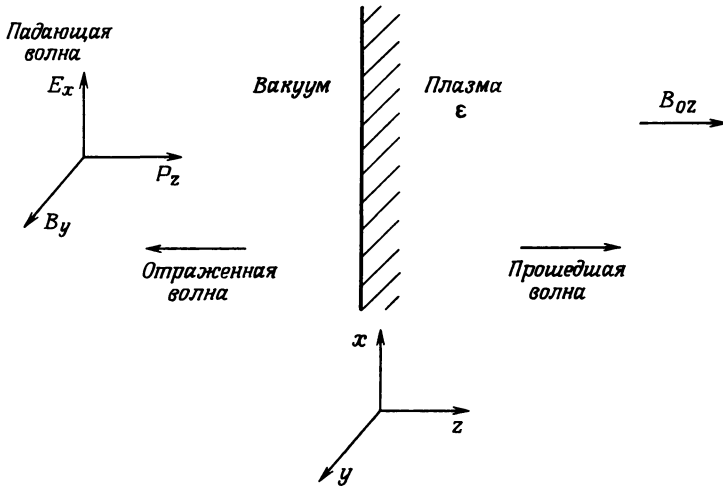
Задача 4.10.2. При исследовании отражения волн от ионосферы может возникнуть следующий вопрос: каков коэффициент отражения падающей на ионосферу линейно-поляризованной волны? Эту задачу можно идеализировать таким же образом, как при изучении отражения от изотропной плазмы, т. е. рассматривая отражение волны от полупространства, заполненного плазмой (фиг. 76). Магнитное поле предполагается направленным вдоль оси z , а волна — падающей слева. Покажите, что коэффициент отражения, величина которого теперь комплексная, имеет компоненты

$$R_x = \frac{k_R k_L - \omega^2/c^2}{(k_R + \omega/c)(k_L + \omega/c)}$$

и

$$R_y = i \frac{\omega}{c} \frac{k_R - k_L}{c(k_R + \omega/c)(k_L + \omega/c)}$$

и что коэффициент отражения такого вида приводит к эллиптически поляризованной отраженной волне. Коэффициент прохождения (единственный для каждого решения) является также комплексной величиной,



Фиг. 76. Отражение электромагнитной волны от полупространства ($z > 0$) с замагниченной плазмой.

Волна распространяется вдоль оси z параллельно постоянному магнитному полю \mathbf{B}_{0z} .

и чтобы получить вышеуказанный результат, необходимо использовать условия симметрии $T_{Rx} = -iT_{Ry}$ и $T_{Lx} = iT_{Ly}$.

Задача 4.10.3. Покажите, что фазовый сдвиг волны, прошедшей заданный путь в плазме, равен

$$\Delta\phi = - \int \left(k_p - \frac{\omega}{c} \right) dz.$$

Рассмотрите при этом незамагниченную плазму, в которой $k_p^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ при $\omega \gg \omega_p$ (т. е. при низкой плотности). Покажите, что средняя плотность в плазме на пути длиной D , т. е. $\langle n \rangle = (1/D) \int_0^D n(x) dx$, равна

$$\langle n \rangle = \frac{m\omega c}{2\pi e^2 D} \Delta\phi.$$

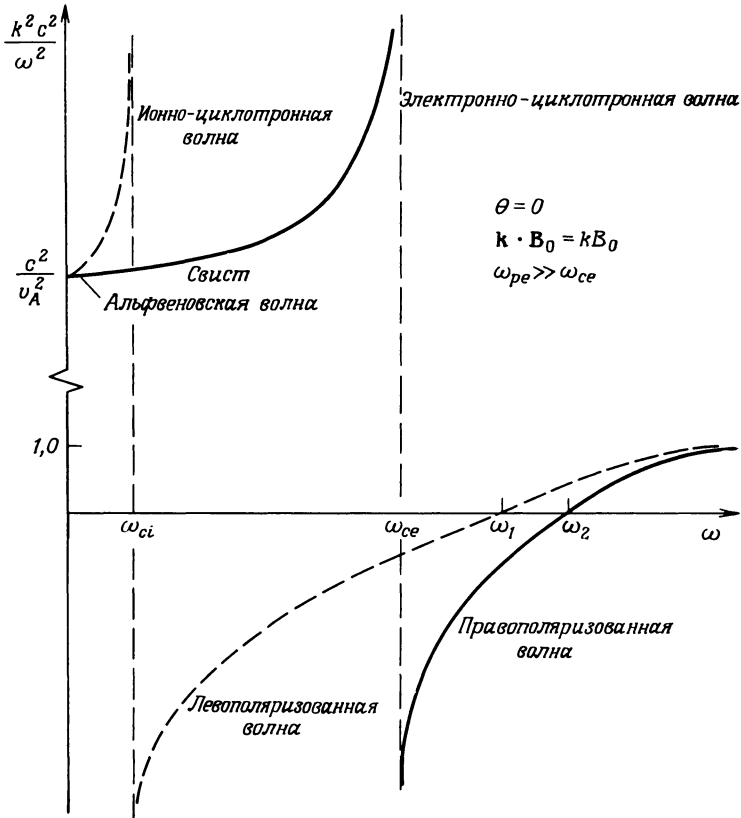
10.5. Волны промежуточной частоты, распространяющиеся вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0

При частотах, много меньших электронной циклотронной частоты, ионы могут принимать участие в движении под действием волновых полей и их движение следует учитывать при вычислении свойств таких волн.

Движение ионов усложняет структуру тензора диэлектрической проницаемости, поэтому дисперсионные характеристики также становятся более сложными. Теперь имеется резонанс на ионной циклотронной частоте; кроме того, при очень низких частотах ионы и электроны могут вместе откликаться на волновое поле (например, при возникновении альфвеновских волн).

Полагая $\theta = 0$ в выражении (4.9.13) и беря компоненты тензора диэлектрической проницаемости согласно (4.9.6) — (4.9.9) с учетом ω_{ci} , можно получить дисперсионное уравнение для волн с левой и правой круговой поляризацией:

$$k_L^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{ce})} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ci})} \right] \quad (4.10.16)$$

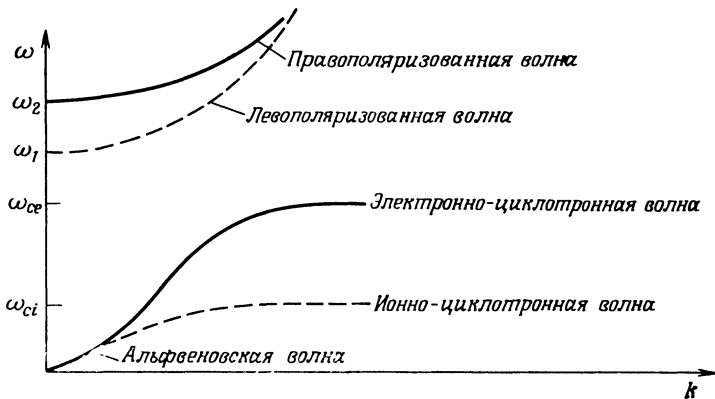


Фиг. 77а. Зависимость квадрата показателя преломления $k^2 c^2 / \omega^2$ от частоты для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в плотной плазме.

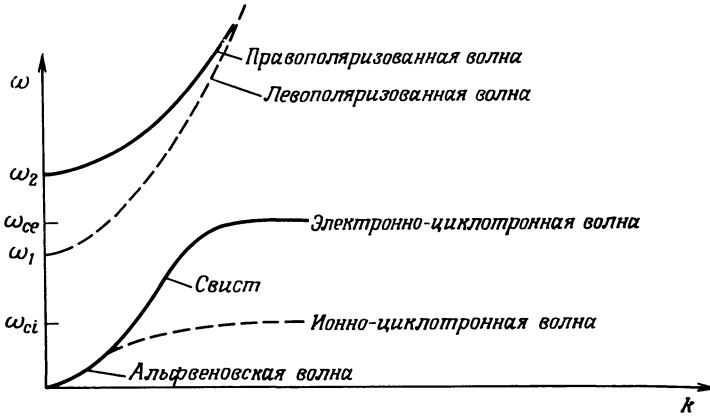
(здесь верхний знак относится к правой круговой поляризации, а нижний — к левой). Поскольку рассматриваемая здесь плазма является нейтральной, мы имеем $\pm \omega_{pe}^2 \omega_{ci} \mp \omega_{pi}^2 \omega_{ce} = 0$ и выражение (4.10.16) можно упростить:

$$k_R^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega \mp \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \right]. \quad (4.10.17)$$

Задача 4.10.4. Проверьте правильность выражения (4.10.17).

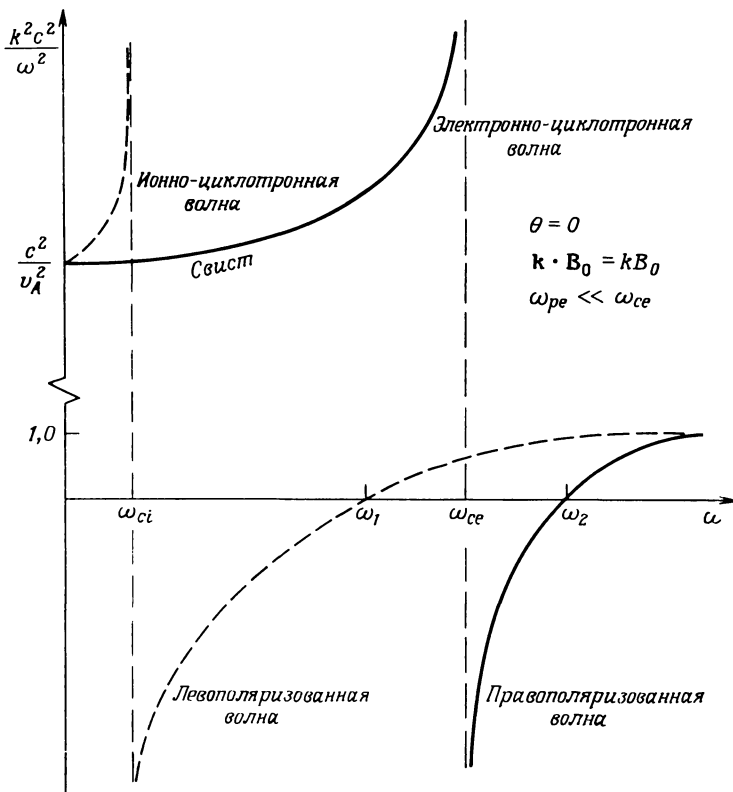


Фиг. 77б. Дисперсионные кривые волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в плотной плазме.



Фиг. 78а. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в редкой плазме.

При высоких частотах это дисперсионное уравнение совпадает с рассмотренным выше в настоящем параграфе, т. е. на очень высоких частотах это электромагнитные волны с $\omega^2 \gg \omega_p^2$, которые не чувствуют влияния плазмы; при более низких частотах ($\omega \approx \omega_p$) волны с двумя разными поляризациями отсекаются на частотах, указанных на фиг. 70. Ниже электронной циклотронной частоты вновь появляется волна с правой круговой поляризацией, которая переходит в свист при более низких частотах; однако при



Фиг. 78б. Зависимость квадрата показателя преломления k^2c^2/ω^2 от частоты для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в редкой плазме.

еще более низких частотах в соответствии с уравнением (4.10.17) проявляется эффект движения ионов. Ясно, что при $\omega \ll \omega_{ci}$ возникает *ионно-циклотронная* волна с левой круговой поляризацией и частотой много меньше, чем частота ω_1 , на которой происходит отсечка этой моды. Описанное явление иллюстрируется дисперсионными кривыми, приведенными на фиг. 77а, 77б, 78а и 78б. Кривые соответствуют *реально* распространяющимся волнам только при $k^2 c^2 / \omega^2 > 0$.

В отсутствие магнитного поля частоты ω_1 и ω_2 сливаются и определяют истинный порог (ниже этой частоты не появляются никакие волны). При возникновении новых степеней свободы в спектре плазменных волн появляются новые свойства. Так, в магнитном поле ω_1 и ω_2 — пороговые частоты лишь в том смысле, что ниже их существует область запрещенных частот, на которых волны не распространяются, но возникают вновь при частотах, соответствующих двум новым типам движения, связанным с магнитным полем, а именно электронному и ионному циклотронному вращению. Поскольку электроны и ионы вращаются в противоположных направлениях (фиг. 71), естественно, что на каждой из двух циклотронных частот резонируют волны с противоположными круговыми поляризациями.

10.6. Низкочастотные волны

Если частота волны много меньше циклотронной частоты ионов, то дисперсионное уравнение (4.10.17) значительно упрощается:

$$k_R^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{4\pi n_0 (m_e + m_i) c^2}{B^2} \right], \quad \omega \ll \omega_{ci}. \quad (4.10.18)$$

В этой области частот волны с левой и правой круговой поляризацией распространяются с одинаковыми скоростями:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\pi \rho c^2 / B^2}} = \frac{V_A}{(1 + V_A^2 / c^2)^{1/2}}; \quad (4.10.19)$$

здесь $V_A = B / \sqrt{4\pi \rho}$ — альфвеновская скорость.

Если удержать члены порядка ω / ω_{ci} , то волны с левой и правой круговой поляризацией имеют не точно одинаковые скорости. Разница между их скоростями определяется выражением

$$\frac{V_A^R - V_A^L}{V_A^R} \approx \frac{\omega}{\omega_{ci}}. \quad (4.10.20)$$

Этот результат говорит о том, что альфвеновская волна представляет собой почти линейно-поляризованную поперечную электромагнитную волну, распространяющуюся параллельно магнитному полю в холодной нейтральной замагниченной плазме. Эта волна не связана с циклотронным вращением частиц плазмы, а обусловлена движением частиц, приводящим к искривлению силовых линий магнитного поля, поскольку $\mathbf{V}_1 \perp \mathbf{B}_0$, поэтому сила со стороны \mathbf{B}_0 действует как возвращающая сила (очень похожая на силу натяжения струны). Под действием низкочастотных колебаний силовых линий частицы плазмы начинают двигаться поперек поля (как объяснялось в § 9 гл. 3), и таким образом масса плазмы определяет силу инерции, которая компенсирует возвращающую силу. Следует заметить, что скорость $V_A = B_0 / \sqrt{4\pi \rho}$ совпадает со скоростью поперечной волны, бегущей по струне с натяжением $B_0^2 / 4\pi$ и массовой плотностью ρ .

Дисперсионные кривые этих волн в области частот ниже ω_{ci} приведены на фиг. 77а, 77б, 78а и 78б.

Задача 4.10.5. Получите вместо соотношения (4.10.20) более точное выражение.

Задача 4.10.6. Вычислите вектор Пойнтинга для альфвеновских волн и покажите, что в пределе $V_A \ll c$ он совпадает с потоком мощности, вычисляемым из решений для альфвеновской волны, полученных в § 9 гл. 3 в пренебрежении электрическим полем.

[Указание: При вычислении электрического поля воспользуйтесь уравнением (3.9.3).]

§ 11. ВОЛНЫ В ХОЛОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО МАГНИТНОМУ ПОЛЮ ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$)

В плазме, удерживаемой магнитным полем, часто возбуждают и регистрируют волны, распространяющиеся перпендикулярно направлению магнитного поля. Электрический вектор падающей волны может быть поляризован либо параллельно, либо перпендикулярно магнитному полю. Такое различие в поляризациях заменяет разбиение волн на волны с правой и левой круговой поляризацией, характерное для распространения вдоль \mathbf{B}_0 . Волну, у которой вектор \mathbf{E} параллелен магнитному полю, называют *обыкновенной волной*, так как закон дисперсии для нее такой же, как и в отсутствие магнитного поля. Волну с вектором \mathbf{E} , перпендикулярным магнитному полю, называют *необыкновенной волной*. Указанная терминология, которая восходит к ранним работам по ионосфере, используется не очень последовательно при рассмотрении волн в литературе по физике плазмы.

11.1. Высокочастотные волны

Чтобы получить дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, достаточно положить $\theta = \pi/2$ в (4.9.17). В случае обыкновенной волны $\mathbf{E}_{\text{волн}} \parallel \mathbf{B}_0$ и показатель преломления равен $n = \sqrt{\epsilon_3}$. Дисперсионное уравнение для обыкновенных волн можно записать как функцию $k(\omega)$ следующим образом:

$$k_o = \pm \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2}. \quad (4.11.1)$$

Поскольку в этой волне $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, она представляет собой чисто поперечные колебания. На высоких частотах ($\omega \gg \omega_p$) плазма не влияет на волну и $k_o = \omega/c$.

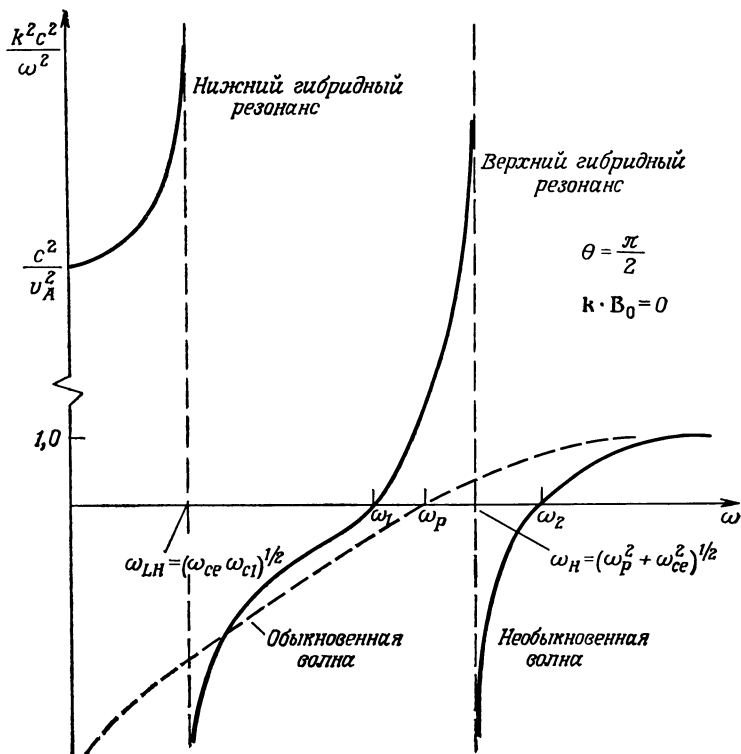
Для необыкновенной волны ($\mathbf{E}_{\text{волн}} \perp \mathbf{B}_0$) показатель преломления $n = \sqrt{2\epsilon_R \epsilon_L / (\epsilon_R + \epsilon_L)}$. Дисперсионное уравнение для необыкновенной волны как функция $k(\omega)$ имеет вид

$$k_E = \pm \frac{1}{c} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2 - \omega_{II}^2} \right]^{1/2}, \quad (4.11.2)$$

где ω_1 и ω_2 — те же пороговые частоты, что и на фиг. 70, т. е.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_{ce}}{2} \left[-1 + \left(1 + \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right], \\ \omega_2 &= \frac{\omega_{ce}}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

Из дисперсионного уравнения для необыкновенной волны следует, что при $\omega = \omega_H$ появляется новый резонанс; частота $\omega_H = (\omega_p^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$ называется *верхней гибридной частотой*.

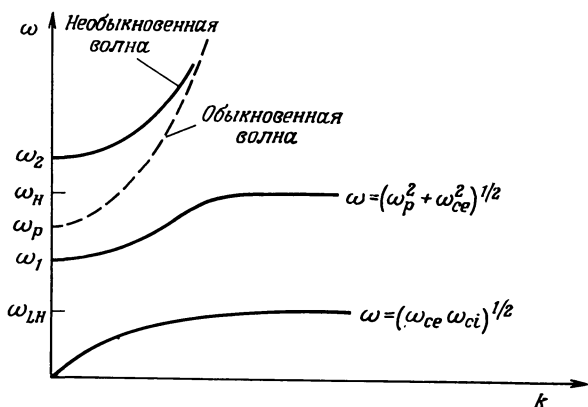


Фиг. 79а. Зависимость квадрата показателя преломления $k^2 c^2 / \omega^2$ от частоты для волн, распространяющихся поперек магнитного поля.

Разрешенные области частот, при которых эти волны существуют, приведены на фиг. 79а и 79б. Из данных фигур можно определить скорости волн. При высоких частотах имеем $\omega \rightarrow kc$ для всех мод. Существуют два разнесенных диапазона частот, в которых необыкновенная волна обладает характерными показателями преломления:

- 1) $\omega \gg \omega_H$ — электромагнитная волна, $n^2 = (kc/\omega)^2 = 1$;
- 2) $\omega \leq \omega_H$ — верхний гибридный резонанс, $n^2 \gg 1$.

Имеются также две области частот: $\omega_H < \omega < \omega_2$ и $\omega < \omega_1$, в которых данная волна не распространяется. Необыкновенная волна не является



Фиг. 79б. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся поперек магнитного поля.

чисто поперечной, за исключением отдельных частот. Из уравнения (4.9.13), выбрав ось y в качестве направления распространения, можно получить

$$\mathbf{E}_E = \hat{E}_E (\alpha \hat{x} + \hat{y}) e^{i(ky - \omega t)},$$

$$\alpha = \frac{E_x}{E_y} = \frac{\left(\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega}\right) \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}}{\frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} - \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2 - \omega^2}\right)} \quad (4.11.4)$$

Отсюда следует, например, что

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty \quad (\mathbf{E} \perp \mathbf{k}), \\ \alpha &\rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \omega_H \quad (\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}), \\ |\alpha| &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \omega_{ce} \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \approx \mathbf{E} \times \mathbf{k}), \\ |\alpha| &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \omega_{ci} \quad (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \approx \mathbf{E} \times \mathbf{k}), \\ |\alpha| &\rightarrow \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_H^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}} \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow (\omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2}. \end{aligned}$$

11.2. Низкие и промежуточные частоты

Поскольку волны, распространяющиеся поперек \mathbf{B}_0 , не могут резонировать с частицей, совершающей вращение, характерные особенности на циклотронной частоте у этих волн, когда $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, отсутствуют; вместо этого происходит сложное движение, в котором можно найти черты циклотронных колебаний и волн пространственного заряда, на что указывает структура дисперсионного уравнения вблизи верхней гибридной частоты. На более низких частотах становится важным движение ионов; дисперсионное уравнение для волн при этих частотах, т. е. в приближении $\omega \ll \omega_{ce}$, принимает вид

$$n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = - \frac{\omega_{ce}^2 (\omega_{ci}^2 - \omega^2) (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)}{\omega_H^2 \left(\omega^2 - \omega_{ce} \omega_{ci} - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce} \omega_{ci}}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \right)}, \quad (4.11.5)$$

где ε_1 и ε_2 определяются выражениями (4.9.7) и (4.9.8). Из этого уравнения следует, что необыкновенная волна вновь появляется на низкой частоте $\omega \approx (\omega_{ce} \omega_{ci})^{1/2}$, которую называют нижней гибридной частотой. При очень низких частотах ($\omega \ll \omega_{ci}$) имеем $n^2 \approx \varepsilon_1$, так что

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}, \quad (4.11.6)$$

откуда получаем

$$\omega = \pm \frac{kB}{\sqrt{4\pi n m_i}} \frac{1}{1 + B^2/4\pi n m_i c^2} = \pm \frac{kV_A}{1 + V_A^2/c^2}. \quad (4.11.7)$$

Дисперсионные кривые для этих низкочастотных ветвей приведены на фиг. 79а и 79б. Низкочастотная волна, описываемая уравнением (4.11.7), называется *магнитозвуковой волной*, и (уместно напомнить, что, согласно предположению, волна распространяется в направлении оси y) ее собственные векторы связаны следующим образом:

$$\frac{E_x}{E_y} \approx \frac{\omega}{\omega_{ci}}, \quad (4.11.8)$$

т. е. при $\omega \rightarrow 0$ имеем $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, так что это в основном *продольная волна*, распространяющаяся поперек \mathbf{B}_0 ; именно по этой причине она называется *магнитным звуком*. Ее скорость равна альфвеновской скорости. Вспомним,

что в альфвеновской волне $\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_0$, в то время как в магнитозвуковой волне приблизительно $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \perp \mathbf{V}_0$. Под произвольным углом к \mathbf{V}_0 волны распространяются с $\omega = kV_A$, а электрическое поле имеет компоненты как параллельную, так и перпендикулярную направлению распространения. Значения пороговых частот ω_1 и ω_2 , а также скорости распространения не зависят от угла между направлением распространения и направлением вектора \mathbf{V}_0 .

Задача 4.11.1. Выведите дисперсионное уравнение для магнитозвуковой волны непосредственно из одножидкостных уравнений холодной плазмы, которые должны быть справедливы при $k \rightarrow 0$. Обратите внимание на то, что условие $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ противоречит существованию магнитозвуковой волны. Не делайте этого предположения.

§ 12. ЧАСТОТЫ ВОЛН В ТИПИЧНЫХ ПЛАЗМАХ

На фиг. 70 — 79 приведены названия и дисперсионные свойства волн, существующих в холодной замагниченной плазме.

Полезно снабдить эти графики характерными численными значениями, соответствующими как естественной, так и искусственно приготовленной плазме. Основным свойством волн, описываемых этими графиками, является существование пороговых частот ω_1 и ω_2 :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &\approx \omega_p - \frac{\omega_{ce}}{2} \\ \omega_2 &\approx \omega_p + \frac{\omega_{ce}}{2} \end{aligned} \right\} \omega_p^2 \gg \omega_{ce}^2 \quad (4.12.1)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &\approx \omega_{ce} \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \\ \omega_2 &\approx \omega_{ce} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} \right) \end{aligned} \right\} \omega_p^2 \ll \omega_{ce}^2. \quad (4.12.2)$$

Кроме того, рассмотренные волны испытывают резонанс на циклотронных частотах ω_{ce} и ω_{ci} , а также на верхней гибридной частоте $\sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$ и нижней гибридной частоте

$$\omega_{LH} \equiv \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}} \sqrt{\frac{1 + B^2/4\pi n m_i c^2}{1 + B^2/4\pi n m_e c^2}}.$$

В табл. 2 собраны эти характерные частоты для обычной лабораторной плазмы, для космической плазмы и ионосферы.

Таблица 2

Тип плазмы	n_0 , см ⁻³	B , Гс	ω_p	ω_{ce}	ω_{ci}	ω_{LH}
Лабораторная	10^{12}	$2 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	10^7	$5 \cdot 10^8$
Космическая	1—10	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^4$	700	(водород) 1/3	15
Ионосфера $h=80$ км	10^3	1/3	$2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	10^2	$2 \cdot 10^4$
$h=100$ км	10^5	1/3	$2 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^6$	10^2 (O_{16}^+) (O_{16}^+)	$2 \cdot 10^4$

Итак, в ионосфере свисты могли бы возникать в области частот ниже 1 МГц в диапазоне средних или длинных волн или в еще более длинноволновом диапазоне. Было обнаружено, что грозы с молниями генерировали свисты с частотами от 30 до 300 кГц. Искусственно созданные свисты, распространявшиеся между Аннаполисом (штат Мэриленд) и мысом Горн в Южной Америке, были приняты на частоте 15,5 кГц. Характерные частоты радиозвезд составляют от 10 до 100 МГц. Как видно из таблицы, эти частоты лежат намного выше пороговых частот, что благоприятствовало прогрессу радиоастрономии. С другой стороны, в ионосфере существует слой, не пропускающий радиоволны; это обстоятельство привело к использованию ионосферы в качестве отражающей среды для наземной радиосвязи. Угол поворота при фарадеевом вращении плоскости поляризации для излучения от радиозвезды на частоте 100 МГц определяется формулой $\phi = 10^{-16}z$, где z — длина пути в сантиметрах.

§ 13. ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ОГРАНИЧЕННОЙ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЕ В ПРИСУТСТВИИ КОНЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В § 8 мы рассмотрели природу волн пространственного заряда в ограниченной плазме в случаях, когда магнитное поле отсутствует и когда плазменный цилиндр находится в бесконечном аксиальном магнитном поле. В случае бесконечного аксиального магнитного поля выкладки существенно упростились, поскольку роль магнитного поля сводилась лишь к ограничению движения электронов в одном направлении и оно не оказывало никакого влияния на динамику волн пространственного заряда.

Можно получить полное решение уравнений Максвелла и в случае определенных конечных значений постоянного магнитного поля, но вид полученных решений очень сложен и разобраться в свойствах таких волн трудно. Вместо этого достаточно заметить, что максимальная фазовая скорость волн пространственного заряда [выражение (4.8.17)] меньше скорости света, т. е. волны пространственного заряда — *медленные волны*. В тех ситуациях, когда фазовая скорость волны, соответствующая решению уравнений Максвелла, оказывается много меньше скорости света, можно иногда пренебречь магнитным полем волны, считая приближенно

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}_1 = 0. \quad (4.13.1)$$

Такое приближение позволяет определять электрическое поле с помощью скалярного потенциала и, следовательно, упрощает рассмотрение. Данное приближение излишне в случаях $B_0 = \infty$ и $B_0 = 0$, когда точное решение имеет простой вид, но оно является основным облегчающим фактором при изучении волн пространственного заряда, распространяющихся в ограниченной плазме в присутствии конечного магнитного поля.

Предполагая электрическое поле волны потенциальным, можно записать его через соответствующий потенциал φ_1 :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi_1. \quad (4.13.2.)$$

Дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять φ_1 , имеет вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi_1 = 0, \quad (4.13.3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости холодной замагниченной плазмы, определяемый выражением (4.9.6).

Предполагая снова волновой характер решения в направлении магнитного поля, уравнение (4.13.3) можно записать следующим образом:

$$\left(\nabla_T^2 - k^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right) \varphi_1(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} = 0. \quad (4.13.4)$$

Решения этого уравнения в цилиндрических координатах имеют вид

$$\varphi_1 = [C_1 J_n(Tr) + C_2 N_n(Tr)] e^{i(kz - n\theta - \omega t)}; \quad (4.13.5)$$

здесь величина T определяется выражением

$$T^2 = -k^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}. \quad (4.13.6)$$

Если рассматривается волновод, заполненный плазмой, то решения должны быть ограниченными при $r = 0$, откуда следует $C_2 = 0$. На стенке волновода $\varphi_1(r = a) = 0$, поскольку тангенциальная компонента электрического поля должна обращаться в нуль. Это условие выполняется, когда

$$J_n(Ta) = 0, \quad (4.13.7)$$

$$Ta = p_{nv};$$

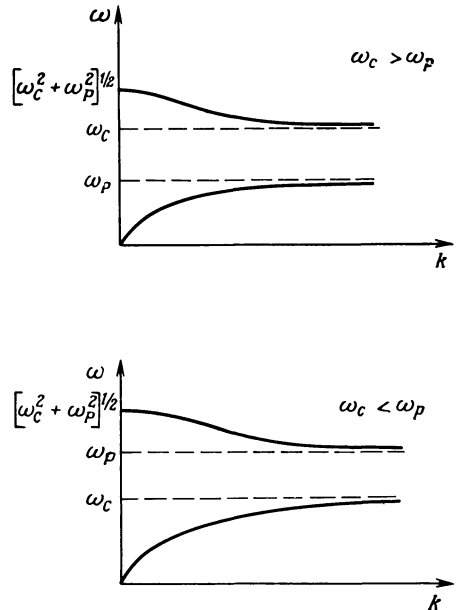
здесь p_{nv} — v -й корень функции Бесселя первого рода n -го порядка. Таким образом, величина T представляет собой число, связанное с конкретной модой и радиусом волновода.

Используя (4.13.6) и (4.13.7), можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(\frac{ka}{p_{nv}}\right)^2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} = -\frac{1 + \omega_p^2 / (\omega_{ce}^2 - \omega^2)}{1 - \omega_p^2 / \omega^2}. \quad (4.13.8)$$

Для распространения волн необходимо, чтобы выполнялось условие $k^2 > 0$, а это возможно, только если $\varepsilon_1 < 0$ или $\varepsilon_3 < 0$. На фиг. 80 приведены дисперсионные кривые, определяемые уравнением (4.13.8), при $\omega_{ce} < \omega_p$ и $\omega_{ce} > \omega_p$. В случае $\omega_{ce} > \omega_p$, кроме моды с частотой $\omega < \omega_p$, предсказываемой из рассмотрения случая $B_0 = \infty$, в плазме возникает верхняя гибридная мода с характерной частотой в диапазоне $\omega_{ce} < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$. Интересная особенность этой моды состоит в том, что она является обратной волной, т. е. ее фазовая и групповая скорости направлены навстречу друг другу ($v_{\phi} v_{gr} < 0$). По мере дальнейшего уменьшения магнитного поля ($\omega_p > \omega_{ce}$) волны, как это можно заметить, распространяются на частотах, меньших циклотронной частоты. Обратная волна в этом случае распространяется в диапазоне частот $\omega_p < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$.

Если постоянное магнитное поле обращается в нуль, то верхняя полоса пропускания сводится к плазменному резонансу на частоте ω_p , а нижняя полоса пропускания сводится к $\omega = 0$. В обоих случаях волны перестают распространяться. Следовательно, как это ни странно, волновод с плазмой не пропускает волны пространственного заряда в отсутствие магнитного поля.



Фиг. 80. Дисперсионные кривые для волн, распространяющихся в заполненном плазмой волноводе в присутствии конечного аксиального магнитного поля.

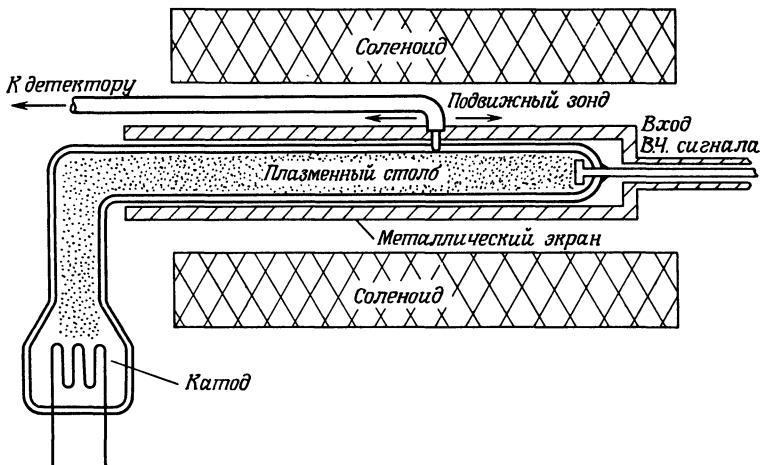
Однако в волноводе, свободном от плазмы, волна *будет* распространяться даже при $B_0 = 0$. Дело в том, что заполнение волновода плазмой препятствует распространению *поверхностных волн* (см. § 4).

Задача 4.13.1. Найдите систему связанных скалярных дифференциальных уравнений для E_{1z} и B_{1z} в случае волн в ограниченной плазме. Сравните полученный вами результат с данными, приведенными в статье [20].

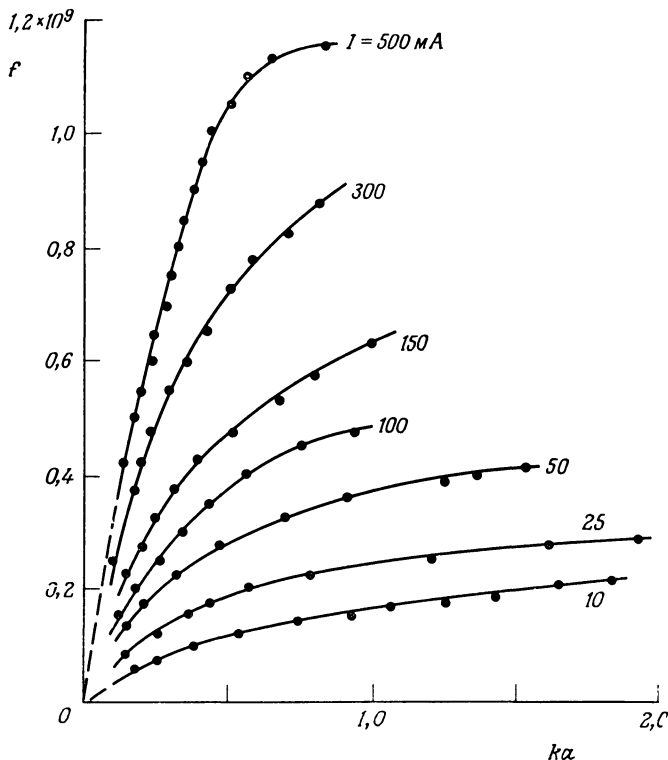
Задача 4.13.2. В рамках квазистатического приближения выведите дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в плазменном столбе радиусом a , помещенном в полый проводящий цилиндр радиусом b , в присутствии конечного аксиального магнитного поля.

Задача 4.13.3. Дисперсионная кривая (фиг. 80) для обратной волны, распространяющейся в волноводе с плазмой в диапазоне частот ($\nu_{\phi}\nu_{\text{гр}} < 0$) $\omega_p < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$ при $\omega_p > \omega_{ce}$ и в диапазоне $\omega_{ce} < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_{ce}^2}$ при $\omega_p < \omega_{ce}$, имеет область с $\nu_{\phi} > c$. Это означает, что дисперсионное уравнение в этой области, полученное в рамках квазистатического приближения ($\nu_{\phi} \ll c$), по-видимому, неверно. С помощью точного дифференциального уравнения, найденного при решении задачи 4.13.1, исследуйте порог при $k = 0$, предполагая, что критическая частота пустого волновода много больше, чем $(\omega_p^2 + \omega_{ce}^2)^{1/2}$.

Для измерения дисперсионных характеристик волн пространственного заряда в ограниченной плазме Гоулд и Трайвелпис [12, 21] использовали установку, схематически изображенную на фиг. 81. Разрядная трубка аналогична трубке, показанной на фиг. 54, и имеет аналогичную схему питания. Волны возбуждаются в плазменном столбе за счет подачи на анод трубки ВЧ-сигнала малой амплитуды с частотой, соответствующей области распространения волн в волноводе. Подвижный зонд регистрирует сигнал при его распространении по плазменному столбу. Длина волны измеряется путем сравнения фазы сигнала на зонде с фазой опорного сигнала, выдаваемого генератором сигналов, таким же примерно образом, как это показано на схеме фиг. 52, только теперь сигнал через плазму проходит не поперек, а вдоль разрядной трубки. Результаты в случае нулевого аксиального магнитного



Фиг. 81. Схема установки, предназначенной для исследования волн пространственного заряда в ограниченной плазме [12].



Фиг. 82. Результаты измерений дисперсионных характеристик волн пространственного заряда в плазменном столбе в отсутствие магнитного поля, полученные на установке, схематически показанной на фиг. 81 [12].

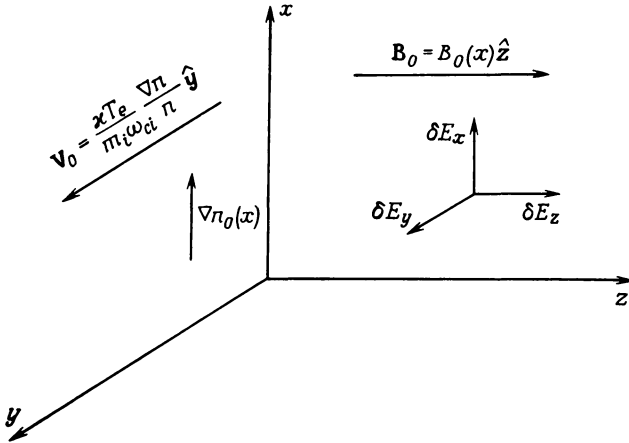
Радиус столба $a = 0,52$ см, радиус цилиндрического волновода $b = 0,62$ см. Относительная диэлектрическая проницаемость разрядной трубки $K = 4,6$. На каждой кривой указано значение разрядного тока I .

поля приведены на фиг. 82 при различных значениях разрядного тока. На этой же установке измерялись дисперсионные характеристики волн пространственного заряда в ограниченной плазме в присутствии конечного аксиального магнитного поля, причем была выявлена большая часть свойств этих волн.

§ 14. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ДРЕЙФОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

При наличии градиентов плотности или температуры в замагниченной плазме частицы совершают соответствующие дрейфовые движения (§ 7 гл. 1). Плазменные колебания могут возбуждаться и распространяться поперек поля с фазовой скоростью, равной по порядку величины дрейфовой скорости плазмы. Такие колебания называются *дрейфовыми волнами*. В настоящем параграфе мы рассмотрим эти волны на основе двухжидкостных уравнений. В гл. 9 исследуется устойчивость плазмы по отношению к возбуждению таких волн с помощью (кинетического) подхода на основе функции распределения. Важная роль этих дрейфовых волн следует из того, что в любой плазме имеются какие-либо неоднородности, благодаря которым могут возникнуть дрейфовые движения и связанные с ними дрейфовые волны.

Диэлектрические свойства плазмы изменяются в присутствии магнитного поля; не должно вызывать удивления, что они еще больше изменяются в плазме, в которой имеются градиенты давления. В качестве примера рас-



Фиг. 83. Конфигурация полей в случае ограниченной плазмы.

Удерживающее магнитное поле $B_0(x)\hat{z}$ компенсирует градиент плотности ∇n_0 и вызывает движение плазмы со скоростью дрейфа $V_0\hat{y}$. Равновесие неустойчиво по отношению к возбуждению низкочастотных дрейфовых волн с указанными здесь направлениями компонент электрического поля δE в волне.

смотрим плазму низкого давления, для которой справедливо условие

$$\frac{m_e}{m_i} \ll \frac{8\pi n \kappa T_e}{B^2} \ll 1, \quad (4.14.1)$$

в почти однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$, $\mathbf{E}_0 = 0$, и предположим, что плотность плазмы изменяется в направлении оси x , т. е. $n_0 = n_0(x)$, а температура в каждой точке одна и та же. Такая геометрия показана на фиг. 83.

Предположим для простоты, что ионы холодные. Тогда условие равновесия для электронов записывается в виде

$$0 = -e \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} - \frac{\nabla p_e}{n_e}, \quad (4.14.2)$$

откуда получаем выражение для равновесной скорости дрейфа электронной жидкости при наличии градиента давления:

$$\mathbf{V}_0 = - \frac{\kappa T_e}{m_e \omega_{ce}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \hat{y}. \quad (4.14.3)$$

Если равновесие нарушено, то возмущения развиваются согласно следующей системе гидродинамических уравнений:

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right)_\alpha = n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} \right)_\alpha - \nabla p_\alpha, \quad (4.14.4)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0, \quad (4.14.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha, \quad (4.14.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha n_\alpha q_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \quad (4.14.7)$$

Эта система состоит из 12 уравнений с 14 неизвестными и замыкается с помощью уравнений состояния. Непосредственно решить данные уравнения затруднительно, однако при соответствующих приближениях анализ значительно упрощается.

14.1. Электростатические дрейфовые волны

Если фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, мала, т. е.

$$\frac{\omega}{k_z} \ll V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_i m_i}}, \quad (4.14.8)$$

то волны не возмущают магнитное поле и с хорошей точностью

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (4.14.9)$$

В случае таких медленных волн электроны термализуются вдоль силовых линий и подчиняются линеаризованному распределению Больцмана

$$n = n_0 e^{e\varphi/\kappa T} \approx n_0 \left(1 + \frac{e\varphi}{\kappa T} \right). \quad (4.14.10)$$

Следовательно, $n_1 = n_0 e\varphi/\kappa T$.

Последнее равенство можно также получить из уравнения (4.14.4) для электронов, приняв во внимание, что масса электрона мала и что для продольных волн $[\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ ($\mathbf{B}_1 = 0$).

Дальнейшее упрощение связано с выбором всех возмущенных величин в виде $n_1 = \hat{n}_1 \exp[i(k_y y + k_z z - \omega t)]$. Это ограничивает анализ рассмотрением волн, распространяющихся в плоскости yz . Эти волны проявляют два основных свойства, обусловленных плазменным состоянием, а именно градиентный дрейф частиц в направлении оси y и свободный пролет частиц в направлении оси z вдоль магнитного поля. В рамках принятых ограничений уравнения (4.14.4) и (4.14.5) дают

$$-i\omega \mathbf{V}_i = ik\varphi \frac{e}{m_i} + \frac{e}{m_i c} [\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_0], \quad (4.14.11)$$

$$-i\omega n_i + n_0 ik \cdot \mathbf{V}_i + V_{ix} \frac{dn_0}{dx} = 0, \quad (4.14.12)$$

откуда имеем

$$\frac{n_i}{n_0} = \left(\frac{-ek_z}{m_i \omega_{ci} \omega} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} + \frac{ek_z^2}{m_i \omega^2} \right) \varphi = \left(\frac{k_z V_0}{\omega} + \frac{k_z^2 C_s^2}{\omega^2} \right) \frac{e\varphi}{\kappa T_e}$$

(здесь $C_s^2 = \kappa T_e/m_i$ — ионно-звуковая скорость).

Из уравнения Пуассона следует уравнение

$$\varepsilon(k, \omega) k^2 \varphi = 0,$$

где

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 C_s^2} \frac{\omega^2 - \omega k_y V_0 - k_z^2 C_s^2}{\omega^2}. \quad (4.14.13)$$

Корни уравнения $\varepsilon(k, \omega) = 0$ дают дисперсионное уравнение для продольных низкочастотных дрейфовых волн. Дисперсионное уравнение для длинноволновой моды $k^2 C_s^2 < \omega_{pi}^2$ имеет вид

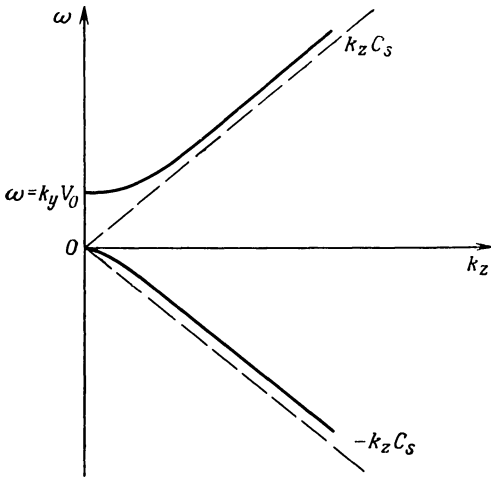
$$\omega^2 - \omega k_y V_0 - k_z^2 C_s^2 = 0. \quad (4.14.14)$$

При $V_0 \rightarrow 0$ или $k_y = 0$ эти волны переходят в ионно-звуковые волны, рассмотренные выше. При $k_z \rightarrow 0$ существуют два корня: $\omega_1 = k_y V_0$ и $\omega_2 = -k_z^2 C_s^2 / k_y V_0$. При больших значениях k_z дрейфовые волны проявляются как ускоренная и замедленная ионно-звуковые моды с частотами

$$\omega = \frac{k_y V_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_y^2 V_0^2 + 4k_z^2 C_s^2}. \quad (4.14.15)$$

Эти моды приведены на фиг. 84.

Фазовая скорость ω/k поперечной верхней моды, когда $k_z = 0$, приближается к V_0 — скорости дрейфа электронов. К влиянию неоднородности



Фиг. 84. Деформация ионно-звуковых волн при наличии градиента плотности.

Одна ветвь соответствует ускоренной ионно-звуковой волне, другая — замедленной. На очень больших длинах волн ($k_z \rightarrow 0$) ускоренная волна переходит в чисто дрейфовую волну с $\omega = k_y V_0$, не имеющую аналога в однородной плазме.

стует «несжимаемой» жидкости. Согласно уравнению (4.14.12), возмущения плотности, если $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$, имеют вид

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -V_{1x} \frac{\partial n_0}{\partial x}. \quad (4.14.17)$$

Таким образом, смещение плазмы в направлении градиента плотности приводит к изменению плотности. Изменение плотности происходит потому, что объем менее плотной плазмы за счет дрейфа в направлении $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ смещается в область с более высокой равновесной плотностью.

Задача 4.14.1. Получите выражение (4.14.15) из одножидкостных уравнений.

Задача 4.14.2. Покажите, что при $T_e = T_i$ ускоренная ионно-звуковая волна все еще распространяется ($V_{\text{волн}} > V_{Ti}$, где V_{Ti} — тепловая скорость ионов, и поэтому затухания Ландау на ионах не происходит).

14.2. Электромагнитные дрейфовые волны

При уменьшении k_z фазовая скорость ускоренной волны увеличивается до тех пор, пока не достигнет меньшей из величин V_A или $\sqrt{\kappa T_e/m_e}$. Если $8\pi n \kappa T_e/B^2 > m_e/m_i$, то альфвеновская скорость меньше, чем $\sqrt{\kappa T_e/m_e}$. Для простоты здесь мы рассмотрим только этот случай.

Когда

$$\frac{\omega}{k_z} \approx V_A, \quad (4.14.18)$$

происходит возмущение магнитного поля и приближение $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ перестает быть справедливым.

Возмущение магнитного поля дается выражением

$$\frac{i\omega}{c} \mathbf{B}_1 = (ik_y E_z - ik_z E_y) \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.14.19)$$

можно подойти следующим образом: в общем случае электрические поля, поперечные к \mathbf{B} , вызывают дрейф со скоростью

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c,$$

которая, если электрическое поле имеет вид $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ (\mathbf{k}/k), удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = ik \cdot \mathbf{V}_1 = ik \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{B}] \frac{\hat{\mathbf{E}}}{kB^2} c = 0, \quad (4.14.16)$$

где $\mathbf{V}_1 = \hat{\mathbf{V}}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$.

В однородной плазме при таком течении, когда $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$, возмущения плотности равны нулю ($\partial n_1/\partial t = -n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1$), т. е. плазма ведет себя как несжимаемая жидкость. В неоднородной плазме может происходить возмущение плотности даже в том случае, когда тип движения соответ-

Поскольку тепловая скорость электронов превышает альфвеновскую скорость при $\beta > m_e/m_i$, можно опять предположить, что электроны успевают термализоваться вдоль силовых линий, т. е. в направлении оси z . Но так как возмущение магнитного поля \mathbf{B}_1 не равно нулю, уравнение (4.14.4) для электронов в пределе $m_e \rightarrow 0$ дает

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{eE_z}{\kappa T_e ik_z} - \frac{kV_0}{\omega} \frac{e}{\kappa T_e} \left(\frac{E_z}{ik_z} - \frac{E_y}{iky} \right). \quad (4.14.20)$$

Плотность ионов по-прежнему определяется уравнением (4.14.12). Читателю предоставляется проверить, что \mathbf{B}_1 не вносит вклада в изменение плотности ионов. С помощью (4.14.12) и (4.14.20) уравнение Пуассона (4.14.6) позволяет установить одно из соотношений между возмущенными полями E_z и E_y . Второе соотношение имеет вид

$$\frac{4\pi}{c} J_z = [\nabla \times \mathbf{B}_1] \cdot \hat{z} = \frac{ck_z k_y^2}{\omega} \left(\frac{b_y}{iky} - \frac{E_z}{ik_z} \right), \quad (4.14.21)$$

где ток J_z можно найти из уравнений (4.14.3) и (4.14.5). Для длинноволновых мод, рассматриваемых в настоящем разделе, условие $n_e \approx n_i$ [см. (4.14.21) и (4.14.12)] является хорошим приближением для уравнения Пуассона. С учетом этого обстоятельства, вычитая уравнение непрерывности (4.14.5) для электронов из такого же уравнения для ионов, можно получить выражение для тока J_z :

$$ik_z J_z = -\nabla \cdot [n_0 (V_{ex} - V_{ix}) \hat{x} + n_0 (V_{ey} - V_{iy}) \hat{y}] e. \quad (4.14.22)$$

Скорости V_{ex} и V_{ix} почти одинаковы и определяются выражением

$$V_x = \frac{E_y c}{B}. \quad (4.14.23)$$

Существует небольшое различие между V_{ex} и V_{ix} . Поскольку ионы по отдельности вращаются в плоскости, перпендикулярной B_0 , с частотой ω_{ci} по орбите радиусом v_{\perp}/ω_{ci} , то среднее поле, действующее на них, несколько отличается от точного значения поля в центре орбиты. Если ионы имеют максвелловскую функцию распределения по скоростям: $f_i = (m/2\pi\kappa T) n_0 \exp(-mV_{\perp}^2/2\kappa T)$, то можно показать, что среднее поле

$$\bar{E}_y = E_y e^{-s} I_0(s); \quad (4.14.24)$$

здесь $s = k_y^2 \kappa T_i / m_i \omega_{ci}^2$, I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода, а E_y — электрическое поле в центре орбиты.

Поскольку радиус электронной орбиты гораздо меньше радиуса ионной орбиты, среднее поле, действующее на электроны, гораздо ближе к значению поля в центре орбиты.

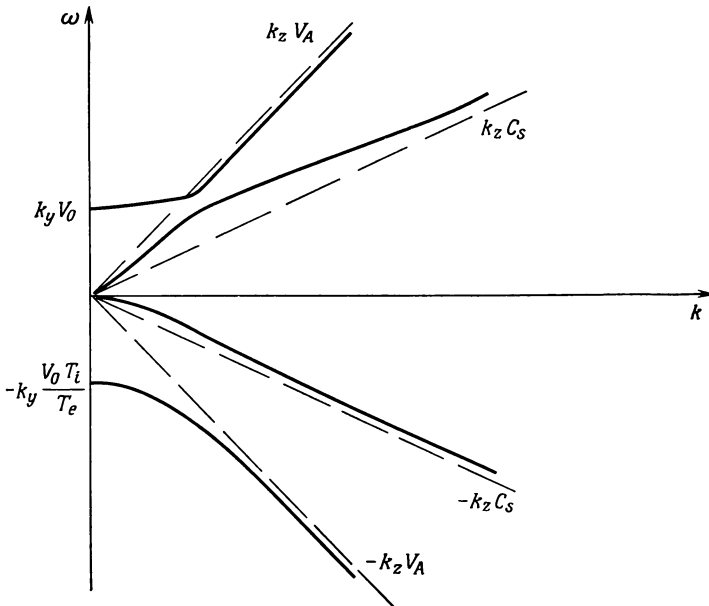
Задача 4.14.3. Докажите справедливость выражения (4.14.24).

С помощью выражений (4.14.22) — (4.14.24) можно показать, что

$$J_z = -\frac{n_0 m_i c^2}{B_0^2} \frac{k_y^2}{k_z} \frac{E_y}{iky} \left(\omega + \frac{\kappa T_i k_y}{m_i \omega_{ci}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \right).$$

Используя этот результат вместе с выражением (4.14.21), можно получить еще одну связь (кроме уравнения Пуассона) между полями E_y и E_z . Пренебрежение величиной $k_z^2 C_s^2$ по сравнению с ω/kV_0 приводит к дисперсионному уравнению для альфвеновских дрейфовых волн:

$$(\omega - k_y V_0) \left(\omega^2 + \omega k_y V_0 \frac{T_i}{T_e} - k_z^2 V_A^2 \right) = 0. \quad (4.14.25)$$



Фиг. 85. Полная картина низкочастотных колебаний в неоднородной плазме.

Сравните эти кривые с кривыми на фиг. 84, причем обратите внимание, что при $k_z \rightarrow 0$ одна из ветвей, соответствующая альфвеновской волне ($k_z V_A$), также переходит в чисто дрейфовую волну с $\omega = -k_y V_0$.

Один корень, соответствующий $\omega - k_y V_0 = 0$, представляет собой дрейфовую ветвь ионной волны, полученной выше. Другой корень,

$$\omega = -\frac{1}{2} k_y V_0 \frac{T_i}{T_e} \pm \frac{1}{2} \left[\left(k_y V_0 \frac{T_i}{T_e} \right)^2 + 4k_z^2 V_A^2 \right]^{1/2},$$

представляет собой (при $k_z \neq 0$) ускоренную и замедленную альфвеновские волны. При $V_0 \rightarrow 0$ они переходят в волны, описанные в гл. 3. Когда $k_z \rightarrow 0$, эти волны выходят на асимптотики

$$\omega_1 = -\frac{k_y V_0 T_i}{T_e},$$

$$\omega_2 = \frac{k_z^2 V_A^2}{k_y V_0 (T_i/T_e)}.$$

Кривые, приведенные на фиг. 85, отражают всю картину распространения волн. Волны с $\omega < 0$ имеют тенденцию переходить в ионные дрейфовые волны, а волны с $\omega > 0$ — в электронные дрейфовые волны. Свойство, состоящее в том, что обе моды с $\omega > 0$ не пересекаются, является результатом более подробного рассмотрения, нежели приведенное здесь.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Stix T. H., The Theory of Plasma Waves, McCraw-Hill, New York, 1962 (см. перевод: Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, 1965).
2. Tidman D. A., Krall N. A., Shock Waves in Collisionless Plasma, Wiley, New York, 1971.
3. Pierce J. R., Traveling Wave Tubes, Van Nostrand, Princeton, N.Y., 1950 (см. перевод: Дж. Пирс, Лампы бегущей волны, изд-во «Советское радио», 1957).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
5. Heald M. A., Wharton C. B., Plasma Diagnostics with Microwaves, Wiley, New York, 1965 (см. перевод: М. Хилд, С. Уортон, Микроволновая диагностика плазмы, Атомиздат, 1967).

6. Plasma Diagnostic Techniques (eds. R. H. Huddlestone and S. L. Leonard), Academic, New York, 1965 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).
7. *Tonks L.*, Phys. Rev., 37, 1458 (1931).
8. *Bohm D.*, *Gross E. P.*, Phys. Rev., 75, 1851 (1949) (см. перевод в сб. «Проблемы современной физики», вып. 11, ИЛ, 1952).
9. *Gould R. W.*, Proc. Linde Conf. Plasma Oscillations, Indianapolis, Ind., 1959.
10. *Parker J. V.*, *Nickel J. C.*, *Gould R. W.*, Phys. Fluids, 7, 1489 (1964).
11. *Baldwin D. E.*, Phys. Fluids, 12, 279 (1969).
12. *Trivelpiece A. W.*, *Gould R. W.*, Journ. Appl. Phys., 11, 1784 (1959).
13. *Longmire C.*, Elementary Plasma Physics, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: К. Лонгмайр, Физика плазмы, Атомиздат, 1966).
14. *Wentzel D.*, Ann. Rev. Astr. Astrophys., 1, 196 (1963).
15. *Allen C. W.*, Astrophysical Quantities, 2nd ed., Athlone Press, London, 1963, p. 31.
16. *Storey L. R. O.*, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), A246, 113 (1953).
17. *Davidson R. C.*, *Krall N. A.*, Phys. Fluids, 13, 1543 (1970).
18. *Shawan S. D.*, Whistlers: Use for Determination of Composition and Temperature in Low Frequency Waves and Irregularities in the Ionosphere, Springer-Verlag, New York, 1969.
19. *Angerami J. J.*, *Carpenter D. L.*, Journ. Geophys. Res., 71, 693 (1966).
20. *Suhl H.*, *Walker L.*, Bell Syst. Tech. Journ., 33, 579—659, 939—986, 1133—1194 (1954).
21. *Trivelpiece A. W.*, Slow Wave Propagation in Plasma Waveguides, San Francisco Press, San Francisco, 1967.
- 22* *Михайловский А. Б.*, Теория плазменных неустойчивостей, т. 1 и 2, Атомиздат, 1970.
- 23* *Сагдеев Р. Э.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 20.
- 24* *Голант В. Е.*, СВЧ-методы исследования плазмы, изд-во «Наука», 1968.
- 25* *Чернетский А. В.*, *Зиновьев О. А.*, *Козлов О. В.*, Аппаратура и методы плазменных исследований, изд-во «Советское радио», 1972.
- 26* *Власов А. А.*, Journ. Phys. USSR, 9, 25 (1945).]

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Allis W. P.*, *Buchsbaum S. J.*, *Bers A.*, Waves in Anisotropic Plasmas, MIT, Cambridge, Mass., 1963 (см. перевод: В. Эллис, С. Буксбаум, А. Берс, Волны в анизотропной плазме, Атомиздат, 1966).
- Anderson J. E.*, Magnetohydrodynamic Shock Waves, MIT, Cambridge, Mass., 1968.
- Brandstatter J. J.*, An Introduction to Waves, Rays and Radiation in Plasma Media, McGraw-Hill, New York, 1963.
- Budden K. G.*, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, N.Y., 1961.
- Denisse J. F.*, *Delcroix J. L.*, Plasma Waves, Interscience-Wiley, New York, 1963.
- Гинзбург В. Л.*, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд-во «Наука», 1967.
- Jancel R.*, *Kahan T.*, Electrodynamics of Plasmas, Wiley, London, 1966.
- Михайловский А. Б.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1963, стр. 141.
- Montgomery D. C.*, *Tidman D. A.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Ratcliffe J. A.*, The Magneto-ionic Theory and Its Application to the Ionosphere, University Press, Cambridge, England, 1959 (см. перевод: Дж. А. Ратклиф, Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере, ИЛ, 1962).
- Шафранов В. Д.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1963, стр. 3.
- Shkarovsky I. P.*, *Johnston T. W.*, *Bachynski M. P.*, Particle Kinetics of Plasma, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
- Spitzer L., Jr.* Physics of Fully Ionized Gases, 2nd ed., Interscience, New York, 1962 (см. перевод: Л. Спитцер, Физика полностью ионизованного газа, изд-во «Мир», 1965.)
- Vandenplas P.*, Electron Waves and Resonances in Bounded Plasma, Wiley, New York, 1968.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ; ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

А. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Статистическая система, которая находится при данной температуре в термодинамическом равновесии с окружающей средой, занимает состояние с наименьшей возможной потенциальной энергией. Если статистическая система приготовлена так, что ее состояние не является термодинамически равновесным, она эволюционирует к равновесному состоянию. В случае идеального газа невзаимодействующих молекул, находящегося в сосуде с фиксированной температурой стенок, парные столкновения молекул и столкновения их со стенками приводят к установлению максвелловского распределения с температурой, равной температуре стенок.

Достижимость этого конечного состояния за счет одних лишь парных столкновений есть следствие Н-теоремы Больцмана [1]. Оказывается, можно создать систему или воздействовать на нее таким образом, что процесс достижения термодинамического равновесия ускоряется за счет эффектов, отличных от парных столкновений (таких, как коллективные взаимодействия, турбулентность, внешние силы и т. д.); однако можно ожидать, что наибольшее время, в течение которого статистическая система находится в термодинамически неравновесном состоянии, по порядку величины равно времени между парными столкновениями.

Уравнения, соответствующие макроскопическому гидродинамическому описанию плазмы, содержат члены, пропорциональные частоте парных (т. е. короткодействующих) столкновений между заряженными частицами. Однако вследствие дальнегодействующего характера кулоновских сил в этих макроскопических уравнениях имеются члены, учитывающие влияние многих удаленных частиц. Коллективные эффекты такого типа приводят к явлениям, разыгрывающимся на временном масштабе порядка периода плазменных колебаний ($\tau_p = 2\pi/\omega_p$), который много меньше времени между парными столкновениями $\tau_c = 2\pi/v_c$, поскольку $\tau_p \approx \tau_c/n\lambda_D^3$, а *плазменное приближение* соответствует неравенству $n\lambda_D^3 \gg 1$. Таким образом, существует режим, в котором при рассмотрении плазменных явлений нужно полностью пренебречь парными столкновениями. Вместе с пренебрежением парными столкновениями в макроскопических уравнениях плазмы исчезает механизм, за счет которого статистическая система релаксирует регулярным образом к термодинамическому равновесию. Поэтому можно было бы ожидать, что любое стационарное решение макроскопических уравнений плазмы существовало бы как угодно долго. Это верно далеко не всегда. Каждое стационарное решение макроскопических уравнений должно быть исследовано с целью установления, является ли данная равновесная конфигурация или состояние плазмы устойчивым или неустойчивым, т. е. будет ли система при наличии возмущений уходить далеко от своего равновесного положения. Простейший пример, иллюстрирующий эту ситуацию, — шарик, покоящийся на вершине округлой горы. Шарик остается на вершине горы неограниченно долго, пока на него не действуют никакие возмущения. Однако стоит только немного сдвинуть его из положения равновесия, как он начнет перемещаться

в положение с меньшей потенциальной энергией, а это означает, что его кинетическая энергия увеличивается и он еще дальше уходит от первоначального положения равновесия. Подобная ситуация называется *неустойчивым равновесием*. Шарик на горизонтальной плоскости — пример *безразличного равновесия*. Шарик, находящийся на дне углубления в горизонтальной плоскости, служит примером *устойчивого равновесия*: такой шарик совершает финитное движение вблизи положения равновесия в результате первоначального смещения его из этого положения.

В настоящей главе мы будем решать макроскопические гидродинамические уравнения плазмы без учета парных столкновений для различных равновесных конфигураций и при разных условиях. Далее, используя разнообразные методы, мы исследуем полученные квазиравновесные решения с целью установления их устойчивости или неустойчивости и определения, если это возможно, скорости нарастания неустойчивости.

Хотя исследование плазменных неустойчивостей проводилось на заре развития этой области науки, оно не привлекало к себе серьезного внимания до тех пор, пока в 1952 г. не были начаты работы по исследованию управляемых термоядерных реакций [2, 20*]. Практическая цель этих работ состояла и состоит до сих пор (1972 г.) в разработке реактора, в котором энергия вырабатывается за счет самоподдерживающейся реакции слияния легких ядер. Чтобы создать условия, при которых такой реактор был бы экономически оправдан, необходимо обеспечить магнитную изоляцию дейтериевой или тритиевой плазмы от любой низкотемпературной системы, такой, например, как стенки вакуумной камеры, при кинетической температуре порядка 100 кэВ и плотности частиц порядка 10^{14} см⁻³ в течение времени по крайней мере 1 с. В такой плазме освободилось бы больше энергии в процессе ядерного синтеза, чем ее было бы потрачено на создание плазмы. При указанных выше значениях плотности и температуры парные (короткодействующие) столкновения совершенно неважны при определении свойств плазмы в течение таких коротких промежутков времени, как 1 с¹). Однако интервал времени, равный 1 с, намного больше периода плазменных колебаний, поэтому возникает важный вопрос: является ли равновесная конфигурация плазмы с магнитным удержанием устойчивой или нет? Многие из ранних попыток удержать горячую плазму магнитным полем не удалось по той причине, что равновесная конфигурация магнитного поля, использовавшаяся в эксперименте, была неустойчивой и плазма быстро (в течение 1 мкс) выбрасывалась на стенки вакуумной камеры. С помощью теоретического анализа устойчивости, основанного на макроскопических гидродинамических уравнениях, удалось объяснить такое поведение плазмы. При этом было также показано, как создать равновесные конфигурации магнитного поля, которые были бы устойчивыми, по крайней мере настолько, насколько это можно определить с помощью гидродинамических уравнений. В настоящее время эксперименты подтвердили тот факт, что наиболее опасные (разрушительные) неустойчивости, названные *гидромагнитными неустойчивостями*, могут быть подавлены, если использовать соответствующие конфигурации магнитного поля. Тем не менее подавление этих неустойчивостей не привело сразу к успешному построению термоядерного реактора. Плазменная среда оказалась дьявольски изощренной в своей способности порождать другие неустойчивости, как правило менее опасные, чем те, с которыми уже удалось справиться, но все-таки достаточно серьезные, чтобы привести к потере плазмы за времена, меньшие, чем это допустимо для термоядерного реактора с положительным энергетическим выходом.

¹) В приведенном примере время между столкновениями составляет $6 \cdot 10^{-3}$ с.—
Прим. ред.

Хотя желание создать реактор управляемого термоядерного синтеза с положительным энергетическим выходом первоначально стимулировало огромный интерес к проблеме устойчивости плазмы, который не угас и поныне, эта причина изучения устойчивости плазмы не является единственной. Часть работ по устойчивости плазмы выполнена в области астро- и космофизики, где вопросы устойчивости плазмы играют роль в таких явлениях, как головной скачок в магнитосфере Земли, связанный с солнечным ветром, происхождение и свойства солнечных пятен, радиационные пояса ван Аллена, пульсары и т. д.¹⁾

§ 1. ПРОБЛЕМА РАВНОВЕСИЯ

Уравнения для макроскопических гидродинамических переменных в случае бесстолкновительной плазмы имеют стационарные решения, которые характеризуют возможные равновесные состояния плазмы. Такие стационарные решения часто соответствуют квазиравновесным состояниям, в которых некоторые характеристики плазмы отличаются от термодинамически равновесных. Именно эти квазиравновесные состояния приходится исследовать на устойчивость.

Плазменные неустойчивости обычно изучаются с помощью теории возмущений. Применять такой подход имеет смысл только тогда, когда существует начальное квазиравновесное состояние плазмы, вблизи которого можно рассматривать малые отклонения. Если начальные возмущения нарастают, плазма называется неустойчивой. Нарастающие возмущения неизбежно изменяют свойства плазмы (плотность, температуру, степень однородности или изотропности и т. д.). Такие изменения могут привести к образованию нового равновесного состояния, которое окажется устойчивым по отношению к нарастанию моды, разрушившей исходное состояние.

Во многих плазменных экспериментах равновесное состояние никогда не устанавливается, так как промежуток времени, необходимый для создания плазмы, уже сравним с временем нарастания неустойчивости. Задача теории в таких случаях состоит в том, чтобы оценить или постулировать, каким могло бы быть равновесное состояние, если бы все неустойчивости были подавлены, а затем проанализировать устойчивость такого модельного равновесия с целью предсказания свойств, которые можно было бы наблюдать в эксперименте. Кроме того, теоретическое изучение может ответить на вопрос, нельзя ли подавить наиболее опасные неустойчивости путем модификации опробованной равновесной конфигурации.

При экспериментальном исследовании нужно понять, можно ли реализовать предложенное равновесное состояние, и если да, то определить свойства реальной плазмы в этих условиях. Такой процесс совместных теоретических и экспериментальных усилий оказался плодотворным при подавлении некоторых из наиболее опасных неустойчивостей.

Наконец, важно подчеркнуть различие между неустойчивым равновесием и чисто динамической ситуацией. Плазменный шарик, свободно падающий в поле силы тяжести поперек магнитного поля, не является неустойчивым: он просто не находится в равновесии.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПЛАЗМЕННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Для конкретизации равновесного состояния плазмы обычно приходится задавать большое число параметров. Данное равновесие может быть неустойчивым к различным типам возмущений, а данная неустойчивость может быть

¹⁾ Можно отметить многочисленные работы по устойчивости плазмы твердых тел, где неустойчивость зачастую удается использовать для генерации электромагнитных волн. — *Прим. ред.*

общей для разных равновесных состояний плазмы. Основываясь на общих признаках, плазменные неустойчивости удобно разбить на группы. Одна из простых схем классификации заключается в том, что неустойчивости делятся на две основные группы ¹⁾:

1) неустойчивости пространственно неоднородной плазмы (макронеустойчивости), или гидродинамические неустойчивости,

2) неустойчивости однородной плазмы (микронеустойчивости), или кинетические неустойчивости, и на две подгруппы:

а) электростатические неустойчивости,

б) электромагнитные неустойчивости.

2.1. Гидродинамические неустойчивости

Этим термином называются неустойчивости, связанные с отклонением макроскопических величин от их термодинамически равновесного значения. Например, если в равновесном состоянии плазма ограничена в пространстве (цилиндр, слой, полупространство и т. д.) и если она способна достигнуть состояния с меньшей потенциальной энергией путем расширения, перемещения или искривления, плазма может оказаться неустойчивой. Если теория или эксперимент подтверждают, что эта плазма неустойчива, хотя частицы плазмы распределены по скоростям вблизи средней скорости, такая неустойчивость называется *гидродинамической неустойчивостью*. Такую неустойчивость обычно изучают с помощью гидродинамических уравнений плазмы.

2.2. Кинетические неустойчивости

Этот термин приписывается неустойчивостям, связанным с отклонением функции распределения по скоростям от максвелловской ²⁾. Например, две группы электронов, движущихся с различными скоростями относительно неподвижных ионов ($m_i \rightarrow \infty$), неустойчивы по отношению к возбуждению ленгмюровских колебаний, энергия которых черпается из энергии относительного движения двух электронных потоков. Часть кинетических неустойчивостей может быть изучена с помощью гидродинамических уравнений, однако обычно используются уравнения Власова (гл. 9). Хотя кинетические неустойчивости обладают, как правило, большими скоростями нарастания, они не всегда вызывают быстрый уход плазмы поперек магнитного поля, который обычно бывает связан с гидродинамическими неустойчивостями.

2.3. Электростатические неустойчивости

Электростатическая неустойчивость — это неустойчивость, связанная со скоплением зарядов, т. е. с бунчировкой и разделением зарядов. Для изучения таких неустойчивостей можно сделать упрощающее предположение о потенциальности электрического поля. Нарастание их обычно происходит с максимальным инкрементом, и они наиболее опасны с точки зрения удержания плазмы.

2.4. Электромагнитные неустойчивости

Электромагнитная неустойчивость связана с нарастанием плотности тока, т. е. с пинч-эффектом. Ток, текущий по плазме, создает магнитное поле, которое сжимает токовый поток и приводит к увеличению плотности

¹⁾ См. примечания на стр. 22 и 190. — *Прим. ред.*

²⁾ В советской литературе употребляется термин «немасвелловость функции распределения». — *Прим. ред.*

тока и т. д. Для таких неустойчивостей $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$, и чтобы проанализировать их свойства, необходимо исследовать полную систему уравнений Максвелла.

Приведенная схема классификации полезна для объединения плазменных неустойчивостей, но в литературе по физике плазмы обычно употребляют сложный и красочный набор терминов для различных неустойчивостей, и бывает трудно понять работы по плазме, если не знать этих терминов и тех неустойчивостей, которые они обозначают.

§ 3. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Существуют три стандартных метода, обычно используемых для исследования устойчивости или свойств неустойчивостей, связанных с данным равновесным состоянием плазмы.

Простейший из них — *интуитивный подход*, согласно которому равновесное состояние подвергается возмущению, изменяющему силы, действующие на плазму. Если эти измененные силы действуют так, что увеличивают первоначальное возмущение, плазма неустойчива. Примером применения интуитивного подхода служит анализ змейковой неустойчивости, приведенный в гл. 1. Этот подход не позволяет получить количественную информацию об инкрементах, однако с его помощью удастся вскрыть механизм неустойчивости, показать, какие равновесные ситуации требуют дальнейшего анализа, а также получить информацию о том, какие моды, по-видимому, должны быть неустойчивыми.

Второй метод основан на *энергетическом принципе*. Равновесное состояние плазмы с потенциальной энергией W устойчиво, если W представляет собой минимальное значение, и неустойчиво в противном случае. Для исследования устойчивости плазмы этим методом необходимо вычислить изменение потенциальной энергии плазмы в результате данного возмущения. Плазменное равновесие устойчиво, если изменение потенциальной энергии положительно при *любых* возмущениях, не противоречащих уравнениям плазмы. Если же существует хотя бы одно допустимое возмущение, для которого приращение потенциальной энергии отрицательно, плазма неустойчива. Этот метод удобен при определении равновесных параметров в случае неустойчивого равновесия. Он не пригоден для нахождения инкремента конкретной неустойчивости.

Третий метод исследования устойчивости равновесия плазмы — *анализ собственных частот*. В этом методе предполагается, что, если исследуемое равновесное состояние подвергнуто возмущению, линеаризованные уравнения плазмы, описывающие развитие возмущения во времени, могут быть решены при соответствующих граничных условиях в предположении временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$. При этом мы получаем уравнение для ω , в которое входят равновесные параметры. Решения этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Если все решения для ω действительны, то любые переменные, описывающие возмущение, осциллируют гармонически и плазма устойчива. Если хотя бы одно из решений для ω имеет положительную мнимую часть, система неустойчива, поскольку соответствующее собственное колебание будет раскачиваться со временем.

Анализ собственных частот позволяет получить полную информацию о неустойчивостях, присущих конкретному равновесному состоянию плазмы. Развитие любого начального возмущения может быть прослежено до того предела, до которого справедливы линеаризованные уравнения. К сожалению, анализ собственных частот может быть применен лишь в тех случаях, когда равновесное состояние плазмы достаточно простое, чтобы дифференциальные уравнения плазмы могли быть решены.

§ 4. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Уравнения, используемые при анализе устойчивости равновесия плазмы, содержат определенные равновесные параметры. В большинстве случаев существует некоторое значение данного равновесного параметра (при всех прочих фиксированных), при котором система находится в состоянии безразличного равновесия. Небольшое изменение этого параметра переводит плазму в состояние устойчивого или неустойчивого равновесия. Когда какой-либо другой параметр системы изменяется, значение первого параметра, соответствующее безразличному равновесию, также изменяется. Линия точек безразличного равновесия делит плоскость этих двух переменных на области устойчивости и неустойчивости. Эта линия называется *границей устойчивости*. В задаче, в которой равновесие плазмы зависит от нескольких параметров, граница устойчивости может быть поверхностью в многомерном пространстве.

Задача 5.4.1. Рассмотрите систему, в которой линеаризованное уравнение для возмущения имеет вид

$$\ddot{x} + 2A\dot{x} + Bx = 0.$$

Определите границу устойчивости в плоскости AB и покажите, что парабола $A^2 = B$ разделяет периодические и экспоненциальные решения, соответствующие устойчивости и неустойчивости. Колебания с экспоненциально нарастающей амплитудой называют иногда колебательной неустойчивостью¹⁾. Определите область колебательной неустойчивости в плоскости AB .

Б. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ В РАМКАХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Однородная плазма, заполняющая все пространство, может быть неустойчивой, если функция распределения по скоростям каким-либо образом отклоняется от максвелловской. Свойства подобной плазмы обычно изучаются с помощью теории, основанной на уравнении Власова (гл. 9). Тем не менее часто оказывается возможным использовать также уравнения для макроскопических гидродинамических переменных, чтобы выяснить устойчивость указанных равновесных состояний плазмы. Здесь мы рассмотрим два примера. Первый из них — это двухпотоковая неустойчивость, возникающая в результате взаимодействия двух групп частиц плазмы, дрейфующих одна относительно другой. В процессе развития неустойчивости происходит нарастание электростатических волн, которые черпают энергию из кинетической энергии относительного движения. Вторым примером служит неустойчивость по отношению к нарастающим электромагнитным волнам, возникающая в результате различия температур плазмы в направлениях, параллельном и перпендикулярном магнитному полю. Обе указанные неустойчивости исследуются методом анализа собственных частот.

§ 5. ДВУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Примером кинетической неустойчивости, которая может быть исследована с помощью гидродинамических уравнений, является двухпотоковая неустойчивость. В рассматриваемом здесь равновесном состоянии два элек-

¹⁾ В отличие от аperiodической неустойчивости, соответствующей экспоненциальному нарастанию возмущений. — *Прим. ред.*

тровных пучка с плотностями $n_{\alpha 0}$ и $n_{\beta 0}$ движутся в направлении оси z с однородно распределенными скоростями $V_{\alpha 0}$ и $V_{\beta 0}$. Предположим, что поперечное сечение пучков не ограничено, а сами пучки компенсированы ионным фоном, так что в состоянии равновесия средние электрические поля равны нулю. Предположим также, что масса компенсирующих ионов бесконечна и движение последних при анализе не учитывается (это ограничивает справедливость рассмотрения областью высоких частот).

Взаимодействие волн пространственного заряда (§ 3 гл. 4) с этими двумя пучками электронов может привести к пространственному или временному нарастанию электрических полей. Инкременты определяются из дисперсионного уравнения, получаемого с помощью линеаризованных относительно возмущений макроскопических гидродинамических уравнений. Уравнения непрерывности (3.4.1) для возмущений плотности и скорости $n_{\alpha 1}(z, t) = \hat{n}_{\alpha 1} \exp[i(kz - \omega t)]$ и $V_{\alpha 1}(z, t) = V_{\alpha 1} \exp[i(kz - \omega t)]$ (причем $n_{\alpha 1} \ll n_{\alpha 0}$ и $V_{\alpha 1} \ll V_{\alpha 0}$) дают для α -пучка

$$-i\omega \hat{n}_{\alpha 1} + ik(n_{\alpha 0}V_{\alpha 1} + \hat{n}_{\alpha 1}V_{\alpha 0}) = 0 \quad (5.5.1)$$

и аналогично для β -пучка

$$-i\omega \hat{n}_{\beta 1} + ik(n_{\beta 0}V_{\beta 1} + \hat{n}_{\beta 1}V_{\beta 0}) = 0. \quad (5.5.2)$$

Уравнение движения (3.4.2) дает связь между возмущениями скорости и электрического поля:

$$-i\omega \hat{V}_{\alpha 1} + ikV_{\alpha 0}V_{\alpha 1} = -\frac{e}{m_e} \hat{E}_1, \quad (5.5.3)$$

$$-i\omega \hat{V}_{\beta 1} + ikV_{\beta 0}\hat{V}_{\beta 1} = -\frac{e}{m_e} \hat{E}_1. \quad (5.5.4)$$

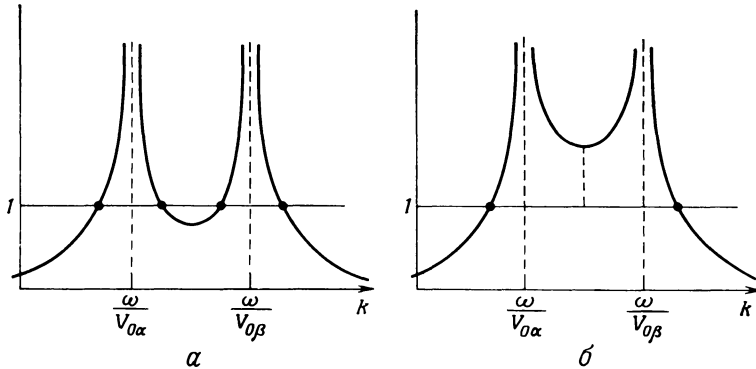
Обратите внимание, что общим для обоих движущихся потоков является одно лишь возмущение электрического поля. Возмущенное электрическое поле связано с возмущением плотности посредством уравнения Пуассона (3.4.3):

$$ik\hat{E}_1 = -4\pi e(\hat{n}_{\alpha 1} + \hat{n}_{\beta 1}). \quad (5.5.5)$$

Исключая $\hat{n}_{\alpha 1}$ и $\hat{n}_{\beta 1}$ из (5.5.5) с помощью (5.5.1) и (5.5.2) и затем исключая $\hat{V}_{\alpha 1}$ и $\hat{V}_{\beta 1}$ с помощью (5.5.3) и (5.5.4), можно получить дисперсионное уравнение для двухпотоковой неустойчивости

$$ik\hat{E}_1 \left[1 - \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kV_{\alpha 0})^2} - \frac{\omega_{p\beta}^2}{(\omega - kV_{\beta 0})^2} \right] = 0. \quad (5.5.6)$$

Для заданного равновесного состояния ($n_{\alpha 0}$, $V_{\alpha 0}$, $n_{\beta 0}$, $V_{\beta 0}$) дисперсионное уравнение (выражение в квадратных скобках) можно разрешить относительно частоты, чтобы определить ее зависимость $\omega(k)$ от волнового числа. Например, если предположить, что волновое число k — действительное число k_r (в общем случае $k = k_r + ik_i$) и разрешить дисперсионное уравнение относительно частоты, которая в общем случае может быть комплексной (т. е. $\omega = \omega_r + i\omega_i$), собственные колебания могут быть либо нарастающими во времени ($\omega_i > 0$), либо стационарными ($\omega_i = 0$), либо затухающими со временем ($\omega_i < 0$). Аналогично, если предположить, что частота ω — действительное число, и разрешить дисперсионное уравнение относительно волнового числа, которое в общем случае является комплексным, то можно получить собственные колебания, нарастающие ($k_i < 0$), однородные ($k_i = 0$) или затухающие в пространстве ($k_i > 0$). Устойчивость собственных колебаний, описываемых дисперсионным уравнением (5.5.6), удобно исследовать с помощью графиков функции, зависящей от k , как показано на фиг. 86.



Фиг. 86. Графическое решение дисперсионного уравнения (5.5.6).

Приведена зависимость от волнового числа k величины $[\omega_{p\alpha}^2/(\omega - kV_{\alpha 0})^2 + \omega_{p\beta}^2/(\omega - kV_{\beta 0})^2]$, входящей в квадратные скобки в уравнении (5.5.6) и равной единице для собственных мод. a — уравнение имеет четыре действительных корня, соответствующих устойчивому режиму с четырьмя волнами; b — уравнение имеет два действительных и два комплексных корня, т. е. одна из волн нарастает в пространстве.

Задача 5.5.1. Пользуясь выражением (5.5.6), найдите максимальный инкремент ω_i в случае, если оба электронных пучка имеют одинаковые плотности, т. е. $n_{\alpha 0} = n_{\beta 0}$, и распространяются с равными, но противоположно направленными скоростями: $V_{\alpha 0} = -V_{\beta 0}$.

Из фиг. 86, a следует, что если дрейфовые скорости пучков сильно отличаются, то для некоторой действительной частоты ω_r существуют четыре действительных значения k_r , соответствующие четырем волнам, распространяющимся в единой системе обоих пучков¹⁾. На фиг. 86, b $\omega/V_{\alpha 0} \approx \omega/V_{\beta 0}$ (для ясности масштаб на оси k увеличен). В этом случае, когда скорости дрейфа двух пучков почти одинаковы, два корня k действительные, а два комплексные. Следовательно, возможно возникновение нарастающих и затухающих в пространстве волн. Чтобы исследовать эту задачу аналитически, дисперсионное уравнение (5.5.6) для двухпотоковой неустойчивости нужно решить относительно комплексного k в предположении, что ω — действительное число. Разумеется, это можно сделать численно, однако в частном случае дисперсионное уравнение удается разрешить относительно комплексных k непосредственно. Имеется в виду случай, когда²⁾

$$\frac{\omega_{p\alpha}^2}{V_{\alpha 0}^2} = \frac{\omega_{p\beta}^2}{V_{\beta 0}^2},$$

что соответствует, в частности, пучкам с одинаковыми плотностями и одинаковыми, но противоположно направленными, скоростями ($n_{\alpha 0} = n_{\beta 0}$, $V_{\alpha 0} = -V_{\beta 0}$).

Для решения этой задачи удобно ввести среднегармоническую скорость V_0 :

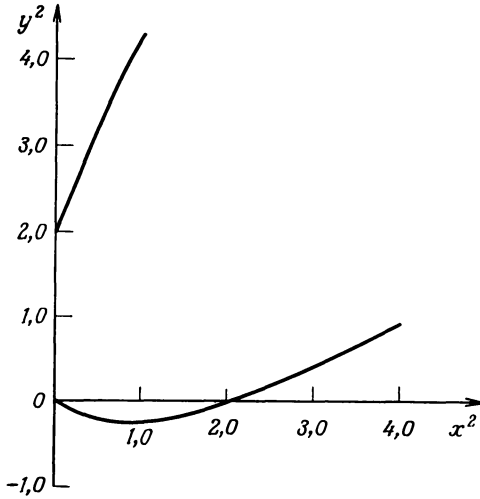
$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V_{\alpha 0}} + \frac{1}{V_{\beta 0}} \right), \quad (5.5.7)$$

среднюю плазменную частоту ω_p :

$$\frac{\omega_p^2}{V_0^2} = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{V_{\alpha 0}^2} = \frac{\omega_{p\beta}^2}{V_{\beta 0}^2} \quad (5.5.8)$$

¹⁾ Полное число корней равно четырем, поскольку (5.5.6) есть уравнение четвертого порядка относительно ω (или k). — *Прим. ред.*

²⁾ Заметим, что этому условию всегда можно удовлетворить, перейдя, например, в систему координат, движущуюся со скоростью $V = (V_{\alpha 0} - V_{\beta 0})/[1 + \omega_{p\alpha}/\omega_{p\beta}]$. — *Прим. ред.*



Фиг. 87. График функции $y^2 = (x^2 + 1) \pm (4x^2 + 1)^{1/2}$.
Видно, что $y^2 < 0$ при $x^2 < 2$, т. е. волны нарастают.

и безразмерную частоту

$$x = \frac{\omega}{\omega_p} \frac{V_{\beta 0} - V_{\alpha 0}}{V_{\beta 0} + V_{\alpha 0}}. \quad (5.5.9)$$

Удобно также выразить волновое число следующим образом:

$$k = \frac{\omega}{V_0} + y \frac{\omega_p}{V_0}. \quad (5.5.10)$$

Тогда дисперсионное уравнение (5.5.6) принимает простой вид

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 1. \quad (5.5.11)$$

Решение этого уравнения четвертой степени записывается следующим образом:

$$y^2 = x^2 + 1 \pm (4x^2 + 1)^{1/2}. \quad (5.5.12)$$

Это решение $y^2(x^2)$ графически представлено на фиг. 87¹⁾. Оно имеет две ветви. Для верхней ветви $y^2 > 0$ при всех $x^2 > 0$, и поэтому комплексные

значения k отсутствуют. Эта ветвь соответствует двум внешним действительным корням на фиг. 86. Для нижней ветви $y^2 < 0$ при $0 < x^2 < 2$, поэтому k имеет два комплексно-сопряженных корня. Эта ветвь в случае $x^2 < 2$ соответствует корням, показанным вертикальной штриховой линией на фиг. 86, б, и в случае $x^2 > 2$ — двум внутренним корням на фиг. 86, а.

В области $0 < x^2 < 2$ имеем $y^2 < 0$ и, следовательно, y — мнимая величина. Одно значение y соответствует пространственно нарастающим, а другое — затухающим волнам. Максимальная частота, при которой еще имеется пространственно нарастающая волна, равна

$$\omega_{\text{макс}} = \sqrt{2} \left(\frac{V_{\alpha 0} + V_{\beta 0}}{V_{\alpha 0} - V_{\beta 0}} \right) \omega_p; \quad (5.5.13)$$

здесь ω_p — частота, определяемая соотношением (5.5.8). В случае когда скорости пучков отличаются незначительно, максимальная частота, при которой существуют пространственно нарастающие волны, может во много раз превышать плазменную частоту. Энергия волны, генерируемая посредством описанного выше механизма, может переноситься по плазме в виде электромагнитной волны, если в плазме существует какой-нибудь механизм, связывающий рассмотренные электростатические моды с электромагнитными модами.

Максимальный пространственный инкремент имеет место на частоте

$$\omega_{\text{макс. инкр}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{V_{\alpha 0} + V_{\beta 0}}{V_{\alpha 0} - V_{\beta 0}} \right) \omega_p \quad (5.5.14)$$

и равен

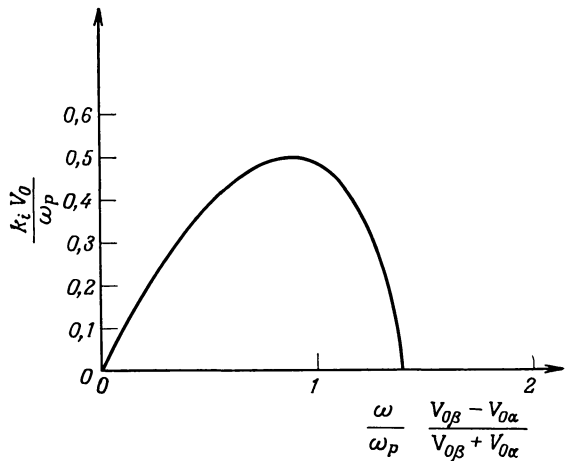
$$k_{i, \text{макс}} = -\frac{\omega_p}{2V_0} = -\left| \frac{\omega_{p\alpha}}{2V_{\alpha 0}} \right| = -\left| \frac{\omega_{p\beta}}{2V_{\beta 0}} \right|. \quad (5.5.15)$$

На фиг. 88 приведена зависимость пространственного инкремента от безразмерной частоты. Можно заметить, что эта модель взаимодействия двух потоков предсказывает наличие пространственно нарастающей волны

¹⁾ Изображенная здесь кривая является просто квадратичной параболой. — Прим-ред.

в области низкой частоты. Описанный здесь механизм двухпоточковой неустойчивости был доказан экспериментально Пирсом и Хейбенстритом [3]. Двухпоточковая неустойчивость многократно и подробно исследовалась экспериментально и теоретически¹⁾.

Рассмотренный пример двухпоточковой неустойчивости показывает, как выбор частной модели влияет на получаемые результаты. При изучении плазменных колебаний в гл. 4 было удобно считать ионы неподвижными ($m_i = \infty$), так что движение ионов не учитывалось в уравнениях. Такая простая модель может, очевидно, правильно объяснить свойства высоко-

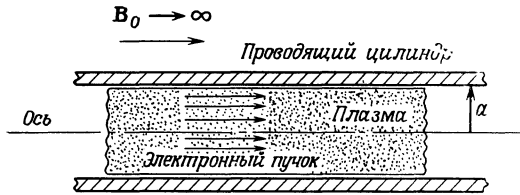


Фиг. 88. Зависимость нормированного пространственного инкремента двухпоточковой неустойчивости от безразмерной частоты.

частотных длинноволновых плазменных колебаний при условии, что ионы и электроны в среднем покоятся по отношению друг к другу. Эта же самая модель неподвижных ионов использовалась в гл. 4 для изучения волн пространственного заряда, связанных с дрейфующими электронами. То, что модель с неподвижными ионами не дает полного описания дрейфующих электронов, можно показать на основании приведенного выше анализа двухпоточковой неустойчивости. Действительно, рассмотренный выше анализ двухпоточковой неустойчивости можно было бы обобщить на случай ионов и электронов, движущихся относительно друг друга, простым переобозначением: $\omega_{p\alpha}^2 = 4\pi n_{i0} e^2 / m_i$, $V_{\alpha 0} = V_{i0}$, $\omega_{p\beta}^2 = 4\pi n_{e0} e^2 / m_e$ и $V_{\beta 0} = V_{e0}$. Учет движения ионов под действием электрического поля, созданного скоплением зарядов (считаем $V_{i0} = 0$), приводит к появлению низкочастотных пространственно-неустойчивых волн [4] с частотами ниже ионной плазменной [т. е. решение уравнения (5.5.6) дает $k_i V_{e0} = \omega \pm \omega_{pe} / \sqrt{1 - \omega_{pi}^2 / \omega^2}$], отличных от высокочастотных волн пространственного заряда, связанных с дрейфующими электронами. Предположение о неподвижности ионов ($\omega_{pi}^2 = 0$) исключает эти неустойчивые волны, потому что в рамках такого предположения вклад ионов в возмущение электрического поля равен нулю и ограничивает справедливость рассмотрения областью высоких частот. Кроме того, приближение холодной плазмы требует, чтобы выполнялось неравенство $k v_T / \omega < 1$, которое означает, что $V_{e0} \gg \sqrt{k T_e / m_e}$. Таким образом, можно было бы ожидать, что лабораторная плазма, в которой электроны движутся относительно ионов с большей скоростью, чем их тепловая скорость, неустойчива, если бы только на это не влияли какие-либо другие причины (например, конечные размеры). Дальнейшее обсуждение двухпоточковой неустойчивости мы приведем в § 3 гл. 9, уделяя при этом особое внимание временной неустойчивости.

Задача 5.5.2. Предположите, что скорость одного из пучков в выражении (5.5.6) равна нулю, и вычислите пространственный инкремент двухпоточковой неустойчивости при взаимодействии электронного пучка с покоящимся электронным облаком.

¹⁾ Теоретическое предсказание этой неустойчивости принадлежит А. И. Ахиезеру и Я. Б. Фаинбергу [21*]. — *Прим. ред.*



Фиг. 89. Схематическое представление взаимодействия с плазмой ограниченного электронного пучка.

Задача 5.5.3. Получите дисперсионное уравнение и пространственный инкремент двухпотоковой неустойчивости в ситуации, приведенной на фиг. 89. Используйте квазистатическое приближение, рассмотренное в гл. 4.

§ 6. ШЛАНГОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим холодную однородную электрически нейтральную плазму бесконечных размеров в присутствии магнитного поля. Одно из собственных колебаний такого равновесного состояния плазмы есть альфвеновская волна, которая представляет собой низкочастотную ($\omega < \omega_{ci}$) поперечную электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль магнитного поля со скоростью $V_A = B/\sqrt{4\pi\rho_m}$. Это собственное колебание при рассматриваемом равновесии устойчиво, если давление плазмы в направлении, параллельном магнитному полю, равно давлению плазмы в перпендикулярном направлении, т. е. при отсутствии температурной анизотропии. В случае плазмы низкой плотности, находящейся в сильном магнитном поле, столкновения редки и температура плазмы вдоль постоянного магнитного поля может отличаться от температуры в перпендикулярном направлении.

Для анализа собственных частот в одножидкостной модели плазменного равновесия с дополнительной степенью свободы в виде температурной анизотропии используется дважды адиабатическая теория, принадлежащая Чу, Голдбергеру и Лоу, которая позволяет замкнуть макроскопические гидродинамические уравнения. В этом методе пренебрегается тепловым потоком вдоль магнитного поля и предполагается, что фазовая скорость возмущений в плазме много больше, чем средняя тепловая скорость плазмы. Теория называется дважды адиабатической, поскольку для давлений в перпендикулярном и параллельном направлениях выбираются различные адиабатические уравнения состояния.

Дважды адиабатические уравнения и их анализ, приводящий к дисперсионному уравнению для спектра собственных частот анизотропной плазмы, приведен в § 10 гл. 3. Это дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2\rho_{m0}} \left\{ \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} + 2p_{\parallel} \cos^2 \theta + p_{\perp} \sin^2 \theta \right) + \left[\left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} (1 + \sin^2 \theta) - 4p_{\parallel} \cos^2 \theta \right)^2 + 4p_{\perp}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.6.1)$$

Угол θ отсчитывается от оси z , вдоль которой направлено магнитное поле. Это уравнение предсказывает существование магнитозвуковой и альфвеновской волн, которые являются незатухающими собственными модами системы.

Кроме того, из уравнения (5.6.1), справедливого для различных давлений вдоль и поперек магнитного поля, следует, что если $p_{\parallel} > p_{\perp} + B^2/4\pi$, то альфвеновская волна, распространяющаяся вдоль магнитного поля, неустойчива. Это можно заметить, если (5.6.1) привести к виду

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho_{m0}} \left(\frac{B^2}{4\pi} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) \quad \text{при } \theta = 0.$$

Такая неустойчивость называется *шланговой неустойчивостью*, поскольку вынуждающая сила (давление плазмы, параллельное магнитному полю) действует так, чтобы увеличить амплитуду волны аналогично тому, как это происходит при течении воды по незакрепленному шлангу. Двухпоточковая неустойчивость, описанная в предыдущем параграфе, относится к электростатическим неустойчивостям; временной масштаб ее развития сравним с периодом плазменных колебаний электронов. Электростатическая неустойчивость приводит к бунчировке зарядов в результате возмущения. Шланговая неустойчивость альфвеновской волны — это электромагнитная неустойчивость. Она вызывает самопинчевание токов плазмы, связанных с возмущением. Такая электромагнитная неустойчивость развивается медленнее, чем электростатическая: скорость ее нарастания, грубо говоря, в $k\lambda_D$ раз меньше, поскольку для двухпоточковой неустойчивости $\text{Im}(\omega) \gtrsim \omega_{pi}$, а для шланговой неустойчивости $\text{Im}(\omega) \approx k \sqrt{\kappa T/m_i}$. Таким образом, если при соответствующих условиях существуют как электростатическая, так и электромагнитная неустойчивости, следует учитывать электростатическую неустойчивость, поскольку она должна привести к изменению равновесия задолго до того, как нарастет электромагнитная неустойчивость, вызывающая пинчевание.

В. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, В РАМКАХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В разд. Б настоящей главы с помощью макроскопических гидродинамических уравнений была исследована устойчивость двух квазиравновесных состояний плазмы. В обоих случаях плазма считалась однородной, но она обладала каким-либо свойством, которое делало ее состояние отличным от термодинамически равновесного. В одном случае таким свойством было наличие дрейфового движения у электронной жидкости (двухпоточковая неустойчивость), в другом случае — температурная анизотропия (шланговая неустойчивость альфвеновской волны). Ни в одном из этих состояний равновесия плазма не рассматривалась пространственно ограниченной; устойчивость таких состояний удалось исследовать с помощью анализа собственных частот плазмы.

В данном разделе мы используем макроскопические гидродинамические уравнения для изучения устойчивости различных квазиравновесных состояний плазмы, отклонения которых от термодинамического равновесия связаны с пространственной локализацией или удержанием плазмы магнитным полем. В некоторых простых ситуациях, таких, как однородная плазма, удерживаемая магнитным полем в поле силы тяжести, удается провести полный анализ собственных частот системы. Следовательно, нарастание любого начального возмущения можно подробно рассматривать до тех пор, пока амплитуда возмущений не превысит предела, налагаемого условием применения линеаризованных уравнений.

§ 7. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

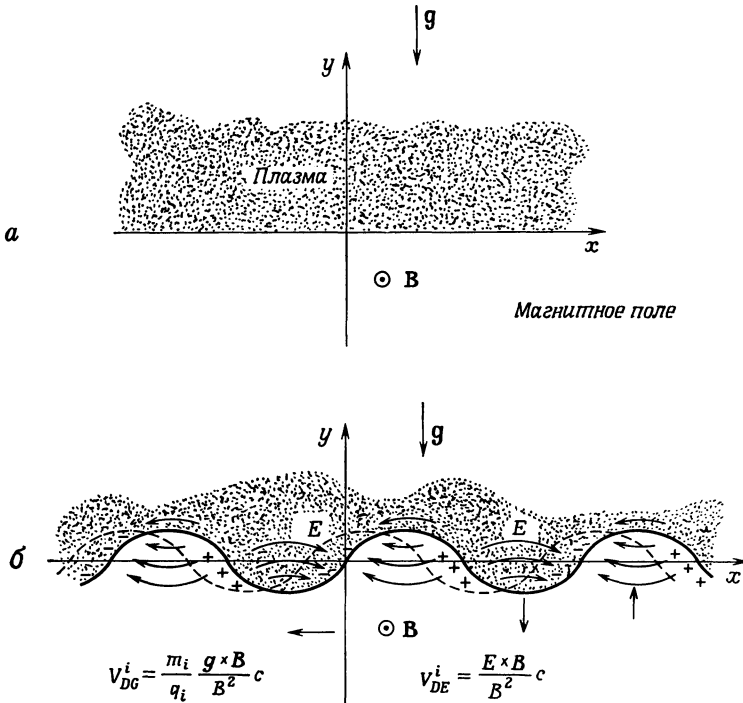
7.1. Дрейфовый анализ

Для того чтобы понять, как ограничение плазмы в пространстве может вызвать неустойчивость, полезно рассмотреть квазиравновесное состояние плазмы, как показано на фиг. 90, *а*. Редкая холодная электрически нейтральная плазма заполняет верхнее полупространство ($y > 0$). Однородное магнитное поле направлено вдоль оси z ($\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$), а сила тяжести имеет направление, обратное направлению оси y ($\mathbf{g} = -g\hat{y}$). Сила тяжести, действующая на плазму, компенсируется перепадом магнитного поля на границе плазмы. Предполагается, что давление плазмы много меньше магнитного давления, поэтому магнитные поля внутри плазмы и снаружи почти совпадают.

Представим себе, что граница плазма — вакуум возмущена так, как показано на фиг. 90, *б*. В начальном состоянии ионы и электроны дрейфуют в направлении, параллельном оси x , в результате действия гравитационной силы и магнитного поля, т. е.

$$V_{DG}^\alpha = \frac{m_\alpha}{q_\alpha} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} c.$$

Поскольку скорость дрейфа обратно пропорциональна отношению заряда к массе, ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях и скорость ионов в m_i/m_e раз больше скорости электронов. Таким образом,



Фиг. 90. Схематическое представление редкой плазмы, занимающей верхнее полупространство ($y > 0$) и удерживаемой магнитным полем в гравитационном поле.

а — равновесное состояние; *б* — возмущение границы плазма — вакуум; показано возникновение электрического поля \mathbf{E} вследствие разделения зарядов, вызванного гравитационным дрейфом ионов в направлении $\mathbf{g} \times \mathbf{B}$. Однородное магнитное поле направлено по оси z .

ионы отодвигаются от электронов, что приводит к разделению зарядов и возникновению электрического поля, как показано на фиг. 90, б. Ионы и электроны теперь дрейфуют в направлении оси y в результате действия сил со стороны электрического поля и равновесного магнитного поля; при этом скорость дрейфа равна

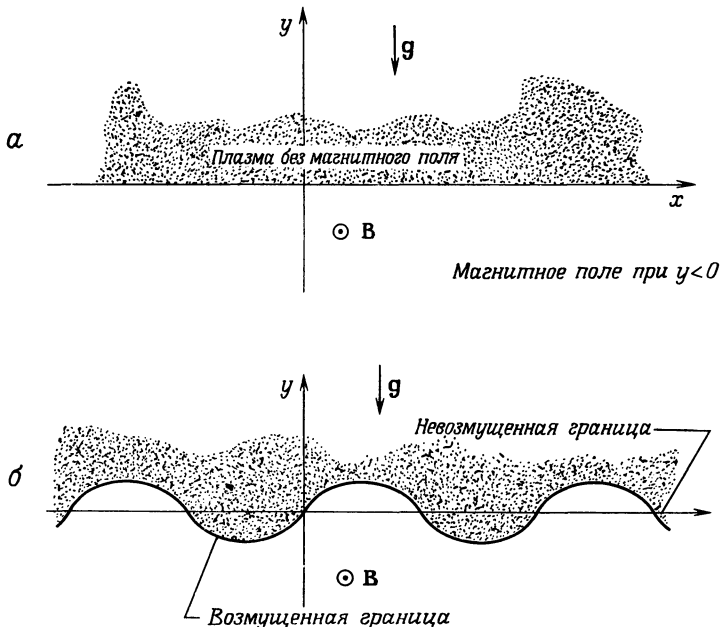
$$V_{DE}^{\alpha} = \frac{E \times B}{B^2} c.$$

Ионы и электроны движутся таким образом, что амплитуда первоначального возмущения возрастает. Следовательно, плазма, удерживаемая в поле силы тяжести, как показано на фиг. 90, а, находится в неустойчивом состоянии.

Приведенное качественное рассуждение не говорит ничего об инкременте неустойчивости, длине волны возмущения с максимальным инкрементом и т. д. Однако оно показывает, что плазма в рассмотренном состоянии равновесия, не совпадающем с термодинамическим в силу пространственного ограничения плазмы, неустойчива. Поэтому невозможно сохранить плазму в этой конфигурации, если только не найдены какие-нибудь способы, позволяющие устранить или же подавить вредные последствия неустойчивости.

7.2. Энергетическое рассмотрение

Поскольку дрейфовые движения, приводящие к неустойчивости, связаны с магнитным полем, можно надеяться, что эта неустойчивость будет устранена, если внутри плазмы будет отсутствовать магнитное поле. Для проверки такой возможности следует рассмотреть квазиравновесное состояние плазмы (фиг. 91, а). Возмущение границы плазма — вакуум показано на фиг. 91, б. Его можно выбрать таким, чтобы изменение объема области, занятой плазмой, в среднем равнялось нулю; тогда полная магнитная энергия



фиг. 91. Схематическое представление редкой плазмы, занимающей верхнее полупространство и удерживаемой магнитным полем в гравитационном поле.
 а — равновесное состояние; б — возмущение границы плазма — вакуум, приводящее к понижению потенциальной энергии системы и, следовательно, нарастающее со временем.

не меняется при возмущении. Кроме того, плазма не сжимается (и не расширяется) в процессе такого возмущения, так что запас внутренней энергии остается неизменным.

Однако плазма из области, находящейся выше невозмущенной границы, переходит теперь в область, расположенную ниже исходной границы. Это приводит к уменьшению средней потенциальной энергии плазмы. В силу закона сохранения энергии это означает, что кинетическая энергия плазмы увеличивается. Следовательно, квазиравновесное состояние плазмы, представленной на фиг. 91, *a*, также неустойчиво. Рассмотренная гидромагнитная неустойчивость¹⁾ похожа на исследованную Рэлеем [5] неустойчивость, возникающую при уравнивании тяжелой несжимаемой жидкости более легкой несжимаемой жидкостью, поэтому она получила название *рэлея-тейлоровской неустойчивости*. Нетрудно установить аналогию с плазменной ситуацией, если заметить, что магнитное поле, создающее направленное вверх давление на нижнюю границу плазмы, не имеет массы и может рассматриваться как «легкая» жидкость. Плазма в процессе описанного выше («несжимаемого») возмущения, которое не изменяет плотности, ведет себя подобно «тяжелой» жидкости.

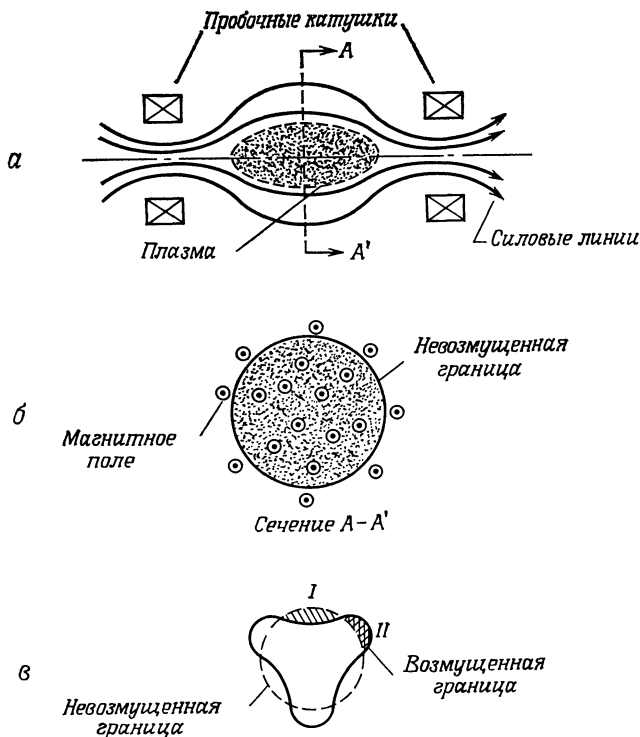
Таким образом, из простых соображений о сохранении энергии можно ожидать, что приведенная на фиг. 91, *a* плазма в квазиравновесном состоянии, когда легкая жидкость (магнитное поле) пытается поддержать тяжелую жидкость (плазму) в поле силы тяжести, неустойчива.

Описанная выше гидромагнитная неустойчивость имеет место в большинстве случаев при жидкостном описании плазмы, когда отклонение от термодинамического равновесия вызвано пространственным ограничением плазмы. Хотя сила тяжести играет незначительную роль в любом лабораторном эксперименте по удержанию плазмы, квазиравновесные состояния, приведенные на фиг. 90, *a* и 91, *a*, представляют собой удобные для анализа примеры, поскольку конфигурация плазмы в этих случаях настолько проста, что они могут быть детально изучены с помощью гидродинамических уравнений.

§ 8. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ; ЖЕЛОБКОВАЯ (ПЕРЕСТАНОВочНАЯ) НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В двух предыдущих примерах для исследования устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести, мы использовали интуитивный подход. Рассмотренная модель состояний равновесия полезна для развития качественных представлений о неустойчивости плазмы, но, очевидно, не пригодна для описания лабораторной плазмы, удерживаемой магнитным полем. С помощью термодинамической модели, оказывается, можно уточнить эти качественные представления и получить некоторые общие результаты, касающиеся устойчивости плазмы с магнитным удержанием.

¹⁾ При делении плазменных неустойчивостей на два класса: неустойчивости пространственно однородной и неоднородной плазмы (см. примечание на стр. 22), или гидродинамические и кинетические неустойчивости, гидромагнитные неустойчивости попадают в класс неустойчивостей неоднородной плазмы (или в класс гидродинамических неустойчивостей). В литературе по физике плазмы широко распространено также деление неустойчивостей на гидромагнитные и кинетические. При этом многие неустойчивости (например, потоковые или дрейфовые) выпадают из этой классификации и выделяются в отдельные классы. Поскольку в настоящее время нельзя отдать предпочтение ни одной из существующих классификаций, так как каждая из них имеет недостатки, при переводе настоящей книги мы вслед за авторами не проводили жесткого деления конкретных неустойчивостей по какой-либо одной классификации.— *Прим. ред.*



Фиг. 92. Схематическое изображение плазмы, удерживаемой магнитным полем пробкотрона.

a — сечение, проходящее через ось пробкотрона; *б* — вид исходной плазмы в срединном сечении; *в* — вид плазмы в том же сечении после развития возмущения; показана первоначальная стадия развития желобков.

Этот метод представляет собой в действительности частный случай более общего энергетического принципа, который развивается далее в настоящей главе. Здесь мы изложим этот метод отдельно, поскольку он позволяет простым образом описать наиболее опасную (желобковую) неустойчивость, присущую замкнутым магнитным конфигурациям, и предсказать способы, с помощью которых она может быть подавлена.

Рассмотрим ситуацию, схематически представленную на фиг. 92. Две разнесенные соосные катушки, плоскости которых перпендикулярны общей оси и в которых токи текут в одном и том же направлении, создают распределение магнитного поля, как показано на фиг. 92, *a*. Такая конфигурация магнитного поля называется пробкотроном¹⁾, поскольку заряженные частицы, для которых отношение перпендикулярной компоненты скорости к параллельной компоненте превышает некоторое значение, определяемое геометрией катушек и величиной тока, отражаются при подходе к каждой катушке и оказываются, таким образом, захваченными в области между катушками. В противном случае они выходят из пробкотрона вдоль силовых линий (см. § 6 приложения I).

Если плазму с изотропным распределением по скоростям поместить в пробкотрон, то некоторая часть плазменных частиц может выйти из него, что приведет к анизотропному распределению частиц по скоростям. Подобное распределение называется распределением с выеденным конусом потерь (конусным распределением) и является неустойчивым (гл. 9). Однако с точки

¹⁾ В зарубежной литературе применяется термин *magnetic mirror* — магнитное зеркало. — Прим. ред.

зрения разрушения конфигурации удерживаемой плазмы более опасна перестановочная неустойчивость. Конусная же неустойчивость становится важной для таких конфигураций, которые не подвержены перестановочной неустойчивости, но обладают анизотропным конусным распределением. Перестановочная неустойчивость называется также *желобковой неустойчивостью*. Термин этот связан с внешним видом возмущений, показанным на фиг. 92, *в*. Указанная неустойчивость является лабораторным аналогом рэлей-тейлоровской неустойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести. Как мы увидим далее, роль силы тяжести играет кривизна силовых магнитных линий.

Последующее рассмотрение основано на оригинальной работе [6]. Предполагается, что, если существует состояние с меньшей потенциальной энергией, плазма достигает этого состояния, причем освобождающаяся энергия переходит в кинетическую. Предполагается также, что уравнения движения плазмы позволяют ей эволюционировать в сторону уменьшения потенциальной энергии.

Энергия, заключенная в объеме плазмы V , складывается из магнитной энергии $VB^2/8\pi$ и внутренней энергии плазмы W_P . Рассматривая плазму как идеальный газ (гл. 2), внутреннюю энергию плазмы можно записать в виде

$$W_P = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (5.8.1)$$

Движение плазмы предполагается адиабатическим, т. е.

$$\frac{d}{dt} (pV^\gamma) = 0. \quad (5.8.2)$$

В конфигурации, показанной на фиг. 92, силовые линии магнитного поля искривлены. Давление плазмы предполагается малым [$\beta = nkT_e/(B^2/8\pi) \ll 1$], и магнитное поле в плазме почти такое же, как в вакууме. Это означает, что любое искажение поля увеличивает его энергию. Следовательно, наиболее вероятно, что плазма неустойчива к таким возмущениям, которые не изменяют магнитного поля (и которые называются желобками, потому что силовые линии не изгибаются и не перекручиваются), как показано на фиг. 92, *в*. Чтобы вычислить изменение потенциальной энергии системы в результате деформации, показанной на фиг. 92, *в*, нужно поменять местами трубки силовых линий вместе с заключенной в них плазмой из областей I и II.

Магнитная энергия, заключенная в трубке силовых линий, равна

$$W_M = \int \frac{B^2}{8\pi} dV = \int \frac{B^2}{8\pi} A dl, \quad (5.8.3)$$

где l — длина вдоль трубки, A — площадь поперечного сечения трубки, а интеграл берется вдоль силовой линии. Трубка силовых линий (трубка потока) определяется условием постоянства заключенного в ней потока, т. е.

$$\Phi = BA, \quad (5.8.4)$$

так что

$$W_M = \frac{1}{8\pi} \Phi^2 \int \frac{dl}{A}. \quad (5.8.5)$$

Изменение магнитной энергии в результате взаимной перестановки трубок из объемов $V_I (= \int A_I dl)$ и $V_{II} (= \int A_{II} dl)$ записывается следующим образом:

$$\Delta W_M = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\Phi_I^2 \int_{\text{Область II}} \frac{dl}{A} + \Phi_{II}^2 \int_{\text{Область I}} \frac{dl}{A} \right) - \left(\Phi_{II}^2 \int_{\text{Область I}} \frac{dl}{A} + \Phi_I^2 \int_{\text{Область II}} \frac{dl}{A} \right) \right]. \quad (5.8.6)$$

Наиболее неустойчивы такие деформации, которые не изменяют энергию магнитного поля, т. е. $\Delta W_M = 0$. Это условие соблюдается, если $\Phi_I = \Phi_{II}$, т. е. выбор V_I и V_{II} , соответствующий сохранению энергии магнитного поля, должен происходить так, чтобы значения площадей A_I и A_{II} выбирались, исходя из локального значения магнитного поля, согласно равенству $B_I A_I = B_{II} A_{II}$, причем A и B могут изменяться с расстоянием l , т. е. вдоль трубки потока.

Объем, заключенный в трубку потока, можно выразить через магнитное поле B :

$$V = \int A dl = \Phi \int \frac{dl}{B}. \quad (5.8.7)$$

Изменение энергии плазмы при адиабатическом процессе равно

$$\Delta W_P = \frac{1}{\gamma-1} \left(p_I \frac{V_I^\gamma}{V_{II}^\gamma} V_{II} + p_{II} \frac{V_{II}^\gamma}{V_I^\gamma} V_I - p_I V_I - p_{II} V_{II} \right). \quad (5.8.8)$$

Чтобы исследовать эффект при перестановке соседних трубок потока, давление и объем можно разложить следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{II} &= p_I + \delta p, \\ V_{II} &= V_I + \delta V. \end{aligned} \quad (5.8.9)$$

Изменение энергии плазмы (5.8.8), выраженное через δV и δp , имеет вид

$$\delta W_P = \delta p \delta V + \gamma p \frac{(\delta V)^2}{V} = V^{-\gamma} \delta (p V^\gamma) \delta V. \quad (5.8.10)$$

Для устойчивости состояния плазмы необходимо, чтобы $\delta W_P > 0$. В обычных замкнутых конфигурациях давление плазмы максимально на оси. На краю плазмы давление должно спадать до нуля, так что, если область II лежит дальше от оси, чем область I, $\delta p < 0$. Это означает, что $\delta W_P < 0$ (неустойчивость), если $\delta V > 0$. В общем случае, поскольку $\gamma p (\delta V)^2 / V$ всегда положительно,

$$\delta V \delta p > 0 \quad (\text{устойчивость}). \quad (5.8.11)$$

Это условие является достаточным для устойчивого состояния. Условие устойчивости $\delta V < 0$ в направлении убывания плотности плазмы можно выразить в виде интеграла вдоль трубки потока, т. е.

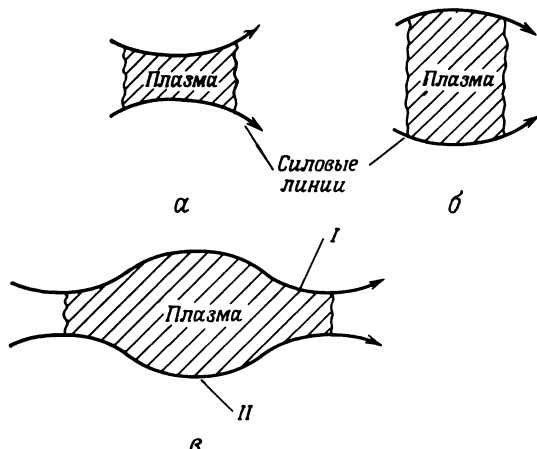
$$\delta \int A dl = \Phi \delta \int \frac{dl}{B} < 0 \quad (\text{устойчивость}). \quad (5.8.12)$$

Данное условие эквивалентно утверждению о том, что, если силовые линии магнитного поля искривлены внутрь плазмы, последняя устойчива, как показано на фиг. 93. В общем случае плазменная конфигурация может содержать области как с положительным, так и с отрицательным вкладом в $\int dl/B$, и критерий ее устойчивости будет зависеть от соотношения между этими вкладами.

Поле простого пробкотрона не удовлетворяет условию (5.8.12), и плазма в пробкотроне неустойчива по отношению к образованию желобков с точностью до ограничений, наложенных при анализе.

В магнитном поле, которое образуется при встречных токах в катушках пробкотрона ¹⁾, желобковая неустойчивость отсутствует, однако скорость

¹⁾ Такая конфигурация называется антипробкотроном.— *Прим. ред.*



Фиг. 93. Некоторые конфигурации магнитного поля, удерживающего плазму. *а* — плазма гидромагнитно устойчива; *б* — плазма гидромагнитно неустойчива; *в* — плазма устойчива или неустойчива в зависимости от значения интеграла $\int dl/B$, причем область *I* оказывает стабилизирующее, а область *II* дестабилизирующее влияние.

потери частиц недопустимо велика, из-за того что магнитное поле на оси в середине между двумя катушками обращается в нуль.

Задача 5.8.1. Прочтите статью Розенблюта и Лонгмайра [6] и, восстановив промежуточные выкладки, покажите, что в случае анизотропного давления критерий отсутствия желобковой неустойчивости, выраженный через радиус кривизны R , принимает вид

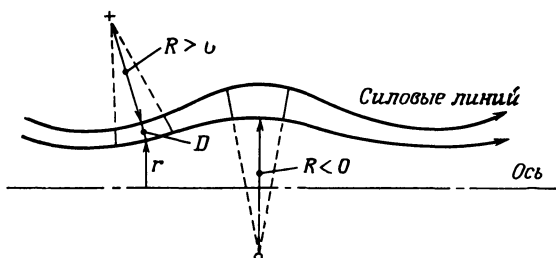
$$\int \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{RrB^2} dl > 0; \quad (5.8.13)$$

здесь r и R соответствуют обозначениям, принятым на фиг. 94.

Полезно вывести критерий устойчивости в форме, удобной для плазменных конфигураций, удерживаемых магнитным полем с замкнутыми силовыми линиями, если воспользоваться тем фактом, что объем трубки потока

$$V = \Phi \oint \frac{dl}{B}. \quad (5.8.14)$$

Плазма в объеме V , не удерживаемая внешними силами, стремилась бы расширяться. Но в той степени, в которой магнитное поле вморожено в плазму, поток Φ при таком расширении должен бы оставаться неизменным, так что с увеличением объема плазмы величина $\oint dl/B$ должна возрастать.



Фиг. 94. Система координат, в которой исследуется перестановочная неустойчивость анизотропной плазмы, удерживаемой магнитным полем.

R — радиус кривизны силовых линий.

На этом основании величину

$$W = - \oint \frac{dl}{B} \quad (5.8.15)$$

можно рассматривать как «потенциальную энергию» плазмы, так что расширение плазмы соответствует переходу в состояние с меньшей потенциальной энергией. При бесконечно малом смещении трубки потока изменение ее объема записывается в виде

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta W}{W}. \quad (5.8.16)$$

Из уравнения состояния $pV^\gamma = \text{const}$ вытекает, что изменение давления связано с изменением объема следующим образом:

$$\delta p = -\gamma p \frac{\delta V}{V} = -\gamma p \frac{\delta W}{W}. \quad (5.8.17)$$

В общем случае равновесное давление есть некоторая функция $p(W)$ и, следовательно, давление в той точке, куда переместилась трубка потока, равно

$$p(W + \delta W) = p + \frac{dp}{dW} \delta W. \quad (5.8.18)$$

Если давление плазмы в расширившейся трубке потока (5.8.17) больше, чем давление (5.8.18) окружающей плазмы, трубка продолжает расширяться, т. е. она является неустойчивой. Если давление в возмущенной трубке потока меньше, чем в окружающих трубках, на нее будет действовать сила, стремящаяся вернуть ее в равновесное положение. Сравнивая возвращающую силу $(dp/dW) \delta W$ с «расширяющей» силой (5.8.17) и замечая, что $(dp/dW) \delta W$ — отрицательная величина, можно считать, что плазма устойчива, если

$$-\gamma p \left(\frac{\delta W}{W} \right) > \frac{dp}{dW} \delta W$$

или просто (предполагая $\delta W < 0$ при расширении)

$$-\frac{\gamma p}{W} > \frac{dp}{dW} \quad (\text{устойчивость}). \quad (5.8.19)$$

Это условие тождественно условию $\delta W_p > 0$ [см. (5.8.10)], из которого имеем для устойчивости $\delta p > -\gamma p (\delta V)/V$, поскольку $W = -V/\Phi$. Отсюда опять видно, что расчет баланса сил в возмущенном состоянии дает такую же информацию об устойчивости, как и вычисление изменения энергии при возмущении. В качестве примера применимости полученного критерия устойчивости можно рассмотреть плазму, удерживаемую полем, создаваемым током, текущим по прямому длинному проводу (фиг. 95). В этом случае магнитное поле записывается в виде

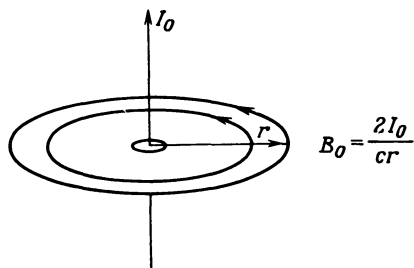
$$B_0 = \frac{2I_0}{cr}, \quad (5.8.20)$$

где I_0 — сила тока в системе СГС ($B_0 = 0,2 I_0/r$, если I_0 измеряется в амперах, а B_0 — в гауссах). Потенциальная энергия равна

$$W = - \oint \frac{dl}{B} = - \frac{\pi r^2 c}{I_0}.$$

Таким образом, критерий устойчивости принимает вид

$$2\gamma > -\frac{r}{p} \frac{dp}{dr}. \quad (5.8.21)$$



Фиг. 95. Магнитное поле прямого провода с током, рассматриваемое в качестве магнитной конфигурации для удержания плазмы.

Итак, если давление убывает с расстоянием от проводника с током I_0 быстрее, чем $r^{-10/3}$, то конфигурация на фиг. 95 будет неустойчивой по отношению к адиабатическому ($\gamma = 5/3$) расширению.

Задача 5.8.2. Покажите, что критерий отсутствия желобковой неустойчивости для плазмы с низким β , удерживаемой дипольным магнитным полем, имеет вид

$$4\gamma > \frac{r}{p_0} \frac{dp_0}{dr}.$$

Предположите, что силовые линии могут свободно перемещаться и не закреплены по отношению к диполю. Объясните смысл этого предположения. Выполняется ли это условие устойчивости для частиц, захваченных радиационными поясами Земли?

Из условия (5.8.19) вытекают интересные следствия. Ясно, что в системе, находящейся в состоянии истинного термодинамического равновесия, давление максимально в точке с наименьшей потенциальной энергией (в противном случае она расширялась бы так, чтобы уменьшалась энергия W). В течение времени, когда систему можно считать бесстолкновительной, она может изменить свое состояние (например, в сторону истинного равновесия) лишь за счет коллективных движений (неустойчивостей). Поэтому выражение (5.8.19) означает, что даже тогда, когда давление *увеличивается* в направлении от точки с наименьшим потенциалом, система может быть устойчивой только при условии, что рост функции $p(W)$ достаточно плавный. Ситуация в случае бесстолкновительных временных масштабов отличается тем, что плазма привязана к магнитному полю, по крайней мере в процессе низкочастотных движений, рассматриваемых в МГД-теории, так что поле \mathbf{B} влияет на многие движения в плазме. В случае когда играют роль *столкновительные* временные масштабы, плазма диффундирует поперек поля \mathbf{B} и достигает состояния с минимальной потенциальной энергией без необходимости «перестановки трубок потока» и пр.

§ 9. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Для изучения гидродинамической устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем, используют макроскопические гидродинамические уравнения электронейтральной изотропной плазмы с идеальной проводимостью. Несмотря на то что эти уравнения описывают плазму далеко не полностью, трудно получить их детальное решение, кроме случаев с простыми плазменными конфигурациями.

К счастью, такое неполное описание плазмы позволяет выявить и проанализировать характеристики большинства неустойчивостей, которые приводят к быстрому уходу плазмы из лабораторных ловушек. Если некоторое равновесие плазмы, согласно МГД-уравнениям, оказывается неустойчивым, учет других степеней свободы в состоянии равновесия (таких, как анизотропия давления) обычно не приводит к исчезновению неустойчивости или к существенному изменению ее свойств, а только к небольшим количественным изменениям, например изменениям инкремента. В принципе возможно, но не всегда практически целесообразно решить полную систему гидродинамических уравнений с помощью быстродействующих вычислительных машин с учетом таких эффектов, как конечная электропроводность, анизотропия давления, вязкость и т. д.

9.1. Одножидкостные МГД-уравнения

Уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad (5.9.1)$$

Уравнение движения

$$\rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p + \rho_m \mathbf{g}. \quad (5.9.2)$$

Уравнение состояния

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho_m^\gamma} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \frac{p}{\rho_m^\gamma} = 0. \quad (5.9.3)$$

Уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (5.9.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.9.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.9.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_q. \quad (5.9.7)$$

Закон Ома [в предположении идеальной проводимости и с учетом выражения (3.8.21)] записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} &= 0, \\ \mathbf{E}_\parallel &= \frac{1}{ne} (\rho_m \mathbf{g} + \nabla p)_\parallel; \end{aligned} \quad (5.9.8)$$

здесь в первом уравнении члены ∇p и $\rho_m \mathbf{g}$ отброшены, поскольку они малы по сравнению с $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$, как это обсуждалось в § 6 и 7 гл. 3.

9.2. Уравнения для равновесного состояния

Уравнения для равновесного состояния нейтральной покоящейся плазмы получаются из одножидкостных МГД-уравнений, если в приведенных выше уравнениях положить все зависящие от времени члены равными нулю ($\partial/\partial t = \mathbf{E}_0 = \mathbf{V}_0 = 0$):

$$\nabla p_0 - \frac{\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0}{c} - \mathbf{g}_0 \rho_{m0} = 0, \quad (5.9.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (5.9.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_0. \quad (5.9.11)$$

Следовательно, в равновесном состоянии одножидкостная МГД-плазма должна удовлетворять условию

$$\nabla p_0 = \frac{[\nabla \times \mathbf{B}_0] \times \mathbf{B}_0}{4\pi} + \mathbf{g}_0 \rho_{m0}. \quad (5.9.12)$$

9.3. Уравнения для возмущений

Для того чтобы определить динамическое поведение плазмы в равновесном состоянии или вычислить изменения энергии, возникающие при малом отклонении от этого состояния, одножидкостные МГД-уравнения следует линеаризовать вблизи равновесного состояния. Линеаризованные уравнения для возмущений получаются путем подстановки суммы равновесных зна-

чений переменных и соответствующих добавок к ним в одножидкостные уравнения и последующего отбрасывания членов, содержащих произведения возмущений. Возмущенные значения переменных определяются следующим образом:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.9.13)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}, t), \quad |p_1| \ll |p_0|, \quad (5.9.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_0|, \quad (5.9.15)$$

$$\rho_m(\mathbf{x}, t) = \rho_{m0}(\mathbf{x}) + \rho_{m1}(\mathbf{x}, t), \quad |\rho_{m1}| \ll |\rho_{m0}|, \quad (5.9.16)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_1(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{J}_1| \ll |\mathbf{J}_0|. \quad (5.9.17)$$

Макроскопические гидродинамические уравнения для возмущений имеют вид

$$\rho_{m0} \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{c} \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 + \rho_{m1} \mathbf{g}_0, \quad (5.9.18)$$

$$\frac{\partial \rho_{m1}}{\partial t} = -(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \rho_{m0} - \rho_{m0} \nabla \cdot \mathbf{V}_1 = -\nabla \cdot \rho_{m0} \mathbf{V}_1, \quad (5.9.19)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1, \quad (5.9.20)$$

$$\mathbf{E}_{1\perp} + \frac{\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0}{c} = 0, \quad (5.9.21)$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \left(\frac{1}{ne} \nabla p \right)_{1\parallel}, \quad (5.9.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \quad (5.9.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_1, \quad (5.9.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0. \quad (5.9.25)$$

Уравнение (5.9.20) получено комбинацией уравнений (5.9.1) и (5.9.2). Из уравнений (5.9.21), (5.9.23) и (5.9.24) можно найти возмущения магнитного поля и тока в явном виде, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0], \quad (5.9.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{J}_1}{\partial t} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times [\nabla \times [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0]]. \quad (5.9.27)$$

Таким образом можно выразить возмущения всех величин через возмущение скорости.

Дифференцирование уравнения (5.9.18) по времени и подстановка в него величин, выраженных через возмущения скорости с помощью уравнений (5.9.19), (5.9.20), (5.9.26) и (5.9.27), дают

$$\begin{aligned} \rho_{m0} \frac{\partial^2 \mathbf{V}_1}{\partial t^2} &= \nabla [(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \mathbf{V}_1)] + \frac{\mathbf{J}_0 \times [\nabla \times [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0]]}{c} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \{ \nabla \times [\nabla \times [\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0]] \} \times \mathbf{B}_0 - \\ &- [(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \rho_{m0} + \rho_{m0} (\nabla \cdot \mathbf{V}_1)] \mathbf{g}_0. \end{aligned} \quad (5.9.28)$$

Это дифференциальное уравнение для возмущения скорости вместе с соответствующими граничными и начальными условиями описывает динамическое поведение плазмы при малых отклонениях от допустимого равновесия в рамках одножидкостной МГД-теории. Приведенное выше уравнение служит отправной точкой при систематическом анализе устойчивости плазмы в одножидкостной модели. Можно ожидать, что решения уравнения описывают поведение плазмы, если выполнены следующие условия:

1. Квадратичные по возмущениям члены пренебрежимо малы. Это значит, что любая макроскопическая скорость V должна быть меньше скорости звука [т. е. $V \ll (\gamma p / \rho_m)^{1/2}$].

2. Плазма электронейтральна, $E_0 = 0$ (т. е. $\lambda_D \ll L_0$, где L_0 — характерный размер плазмы).

3. Отношение массы электрона к массе иона мало (т. е. $m_e/m_i \ll 1$).

4. Плазма изотропна. Это означает, что в течение характерного времени t_0 происходит много столкновений. В противном случае приведенные выше уравнения должны быть заменены на дважды адиабатические или какие-либо другие уравнения, вытекающие из соответствующей схемы замыкания.

5. Ток смещения пренебрежимо мал. Рассматриваемое МГД-приближение справедливо для электромагнитных волн, если альфвеновская скорость много меньше скорости света [т. е. $V_A (= B/\sqrt{4\pi\rho_m}) \ll c$]. В качестве возможного источника неустойчивости не могут рассматриваться также ленгмюровские колебания (высокочастотные волны).

6. Тепловой поток за счет теплопроводности вдоль и поперек магнитного поля пренебрежимо мал, так что справедливо адиабатическое уравнение состояния идеального газа.

7. Проводимость плазмы бесконечна, а возмущения достаточно длинноволновые, поэтому обобщенный закон Ома можно привести к виду $E_\perp + [V \text{ и } B]/c = 0$, в котором члены ∇p и т. д. отброшены, так как они малы по сравнению с E_\perp и $[V \times B]/c$, что и объяснялось в гл. 3.

9.4. Граничные условия

Если плазма должна быть изолирована от окружающих стенок магнитным полем, то наиболее вероятно, что она будет окружена вакуумной областью. Следовательно, должна существовать переходная область, в которой плотность плазмы спадает до нуля. Переход плазма — вакуум может либо иметь резкую границу, либо быть растянутым на конечное расстояние, в пределах которого свойства плазмы плавно изменяются. В любом случае для решения уравнений плазмы необходимо сшить значения величин по обе стороны от границы.

Граничные условия выражаются в виде скачка плазменных переменных при переходе через границу. Такой скачок обозначается символом $[[\]]$. Единичный вектор нормали к поверхности раздела обозначим через \hat{n} . Таким образом, выражение $\hat{n} \cdot [[V]]$ означает, что нормальные компоненты скорости по обе стороны границы равны друг другу. Скачок магнитного поля при переходе через границу связан с поверхностным током J_s , текущим вдоль границы. Представляют интерес три типа поверхностей раздела: граница плазма — плазма, плазма — вакуум и плазма — идеально проводящая твердая стенка.

Граница плазма — плазма

$$[[p + \frac{B^2}{8\pi}]] = 0 \quad \text{справедливо в случае малой кривизны,} \quad (5.9.29)$$

в противном случае см. п. 8.2 гл. 3,

$$\hat{n} \cdot [[V]] = 0 \quad \text{справедливо, если } [[\rho_m]] = 0, \text{ но неверно} \\ \text{для МГД ударных волн, для которых } \hat{n} \cdot [[\rho_m V]] = 0, \quad (5.9.30)$$

$$\hat{n} \times [[E]] = \hat{n} \times \frac{V \times [[B]]}{c}, \quad (5.9.31)$$

$$\hat{n} \cdot [[B]] = 0, \quad (5.9.32)$$

$$\hat{n} \times [[B]] = \frac{4\pi}{c} J_s. \quad (5.9.33)$$

Граница плазма — вакуум

$$\left[p + \frac{B^2}{8\pi} \right] = 0, \quad (5.9.34)$$

$$\hat{n} \cdot [\rho \mathbf{V}] = 0, \quad (5.9.35)$$

$$\hat{n} \times [\mathbf{E}] = \hat{n} \times \frac{\mathbf{V} \times [\mathbf{B}]}{c}, \quad (5.9.36)$$

$$\hat{n} \cdot [\mathbf{B}] = 0, \quad (5.9.37)$$

$$\hat{n} \times [\mathbf{B}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s. \quad (5.9.38)$$

Граница плазма — идеально проводящая твердая стенка

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.9.39)$$

$$\hat{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (5.9.40)$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (5.9.41)$$

Если на границе раздела имеется поверхностный ток, но отсутствует поверхностная плотность массы, то скалярное произведение $\hat{n} \cdot [\mathbf{B}]$ должно обращаться в нуль, так как нормальная компонента магнитного поля вызвала бы бесконечное ускорение поверхности.

§ 10. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ. АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ (ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ)

Рассмотрим конфигурацию, схематически показанную на фиг. 96. Изотропная плазма находится в магнитном поле, направленном по оси z ($\mathbf{B}_0 = \hat{z}B_0(y)$), и гравитационном поле, направленном по оси y ($\mathbf{g}_0 = -\hat{y}g_0$). Предположим, что распределение плотности плазмы и изменение магнитного поля по оси y удовлетворяют условию равновесия (5.9.12), т. е.

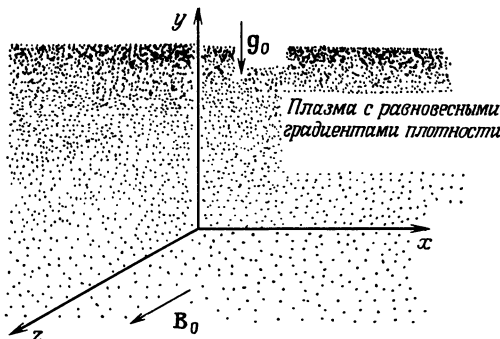
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = -\rho_{m0} g_0. \quad (5.10.1)$$

Динамика плазмы при малых отклонениях от этого равновесного состояния определяется дифференциальным уравнением (5.9.28) для скорости. Для простоты будем считать, что все величины не зависят от z и что зависимость возмущения скорости от координат и времени имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1(x, y, t) &= \hat{\mathbf{V}}_1 e^{-i\omega t} = \\ &= (\hat{x}\hat{V}_{1x} + \hat{y}\hat{V}_{1y}) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

Записывая уравнение (5.9.28) для x - и y -компонент возмущения скорости, имеем

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_{m0} \hat{V}_{1x} &= \frac{\partial}{\partial x} [(\hat{V}_{01} \cdot \nabla) P_0 + \gamma P_0 \times \\ &\times (\nabla \cdot \hat{V}_1)] - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial Q_{1z}}{\partial x} B_0(y) \end{aligned} \quad (5.10.3)$$



Фиг. 96. Система координат, используемая при исследовании устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести.

И

$$-\omega^2 \rho_{m0} \hat{V}_{1y} = \frac{\partial}{\partial y} [(\hat{V}_1 \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \hat{V}_1)] - \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} [Q_{1z} B_0(y)] + [(\hat{V}_1 \cdot \nabla) \rho_{m0} + \rho_{m0} (\nabla \cdot \hat{V}_1)] g_0. \quad (5.10.4)$$

Величина Q_{1z} представляет собой z -компоненту вектора \mathbf{Q}_1 , определяемого выражением

$$\mathbf{Q}_1 = \nabla \times [\hat{V}_1 \times \mathbf{B}_0]. \quad (5.10.5)$$

В настоящем примере вектор \mathbf{Q}_1 имеет только z -компоненту, т. е. $\mathbf{Q}_1 = \hat{z} Q_{1z}$, где

$$Q_{1z} = -\nabla \cdot \hat{V}_1 B_0 = -[(\hat{V}_1 \cdot \nabla) B_0(y) + B_0(y) \nabla \cdot \hat{V}_1]. \quad (5.10.6)$$

С учетом определения Q_{1z} [выражение (5.10.6)] и условия равновесия (5.10.1) уравнения (5.10.3) и (5.10.4) принимают вид

$$-\rho_{m0} \omega^2 V_{1x} + (\rho_{m0} g_0) \frac{\partial \hat{V}_{1y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right) (\nabla \cdot \hat{V}_1) \right] \quad (5.10.7)$$

И

$$\rho_{m0} \omega^2 \hat{V}_{1y} - \rho_{m0} g_0 \frac{\partial \hat{V}_{1y}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{4\pi} \right) (\nabla \cdot \hat{V}_1) \right] - \rho_{m0} g_0 (\nabla \cdot \hat{V}_1). \quad (5.10.8)$$

Из уравнений (5.10.7) и (5.10.8), исключая из них член $(\gamma p_0 + B_0^2/4\pi) \nabla \cdot \hat{V}_1$, имеем

$$\frac{\partial \hat{V}_{1x}}{\partial y} + \hat{V}_{1x} \frac{1}{\rho_{m0}} \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial y} - \left(1 + \frac{g_0}{\omega^2} \frac{1}{\rho_{m0}} \frac{\partial \rho_{m0}}{\partial y} \right) \frac{\partial \hat{V}_{1y}}{\partial x} = \frac{g_0}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \hat{V}_1). \quad (5.10.9)$$

Данное уравнение не может быть решено, поскольку в него входят два неизвестных. Дополнительное соотношение между \hat{V}_{1x} и \hat{V}_{1y} можно получить либо из (5.10.7), либо из (5.10.8). Однако в действительности обычно в качестве второго уравнения для (5.10.9) используют приближение $\nabla \cdot \hat{V}_1 = 0$. Оно соответствует либо предположению о несжимаемости плазмы, либо рассмотрению определенных типов возмущений, которые не меняют плотности плазмы. Это можно выяснить, разрешив уравнение (5.10.7) относительно $\nabla \cdot \hat{V}_1$, т. е. записав выражение

$$ik \tilde{V}_{1x} + \frac{\partial \tilde{V}_{1y}}{\partial y} = \frac{-\rho_{m0} \omega^2 \tilde{V}_{1x}/ik + \rho_{m0} g_0 \tilde{V}_{1y}}{\gamma p_0 + B_0^2/4\pi}; \quad (5.10.10)$$

здесь величина \tilde{V}_1 определена следующим образом:

$$\hat{V}_1(x, y) = \tilde{V}_1(y) e^{ihx}.$$

Имеются два предельных случая, когда $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 \rightarrow 0$, а именно при

- 1) $\gamma \rightarrow \infty$ (несжимаемая жидкость или возмущения с $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1 = 0$),
- 2) $B_0^2 \rightarrow \infty$.

Использование уравнения $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ для анализа гидромагнитной неустойчивости оправдано в тех случаях, когда среда, описываемая МГД-уравнениями, действительно несжимаема (например, жидкая ртуть), и в тех случаях, когда возмущения выбраны таким образом, чтобы плазма не сжималась. В этом втором случае равенство $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ не является приближенным. Третий случай, когда справедливо указанное упрощение, имеет место в плазме с низкими значениями β , причем равенство $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ часто вытекает из неравенства $p \ll B^2/8\pi$. Такое приближение необходимо проверять с помощью полученных решений, поскольку условие $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ не представляет собой общего свойства плазмы.

Подстановка выражения $ik\tilde{V}_{1x} + \partial\tilde{V}_{1y}/\partial y = 0$ в (5.10.9) приводит к дифференциальному уравнению, описывающему динамику плазмы, находящейся в состоянии равновесия (фиг. 96):

$$\frac{d^2\tilde{V}_{1y}}{dy^2} + \left(\frac{1}{\rho_{m0}} \frac{d\rho_{m0}}{dy} \right) \frac{d\tilde{V}_{1y}}{dy} - k^2 \left(1 + \frac{g_0}{\omega^2} \frac{1}{\rho_{m0}} \frac{d\rho_{m0}}{dy} \right) \tilde{V}_{1y} = 0. \quad (5.10.11)$$

Решение уравнения (5.10.11) можно получить в некоторых простых случаях.

10.1. Экспоненциальный профиль плотности $[(1/\rho_{m0})(\partial\rho_{m0}/\partial y) = \text{const}]$

В данном случае нетрудно получить ограниченное всюду решение, считая $d^2\tilde{V}_{1y}/dy^2 = d\tilde{V}_{1y}/dy = 0$; уравнение (5.10.11) принимает вид

$$k^2 \left(1 + \frac{g_0}{\omega^2} \frac{1}{\rho_{m0}} \frac{d\rho_{m0}}{dy} \right) \tilde{V}_{1y} = 0. \quad (5.10.12)$$

Нетривиальное решение ($\tilde{V}_{1y} \neq 0$) есть

$$\omega^2 = -g_0 \frac{1}{\rho_{m0}} \frac{d\rho_{m0}}{dy}. \quad (5.10.13)$$

Это решение не было бы собственным значением, если бы зависела от y величина $(1/\rho_{m0})(\partial\rho_{m0}/\partial y)$. Если $d\rho_{m0}/dy > 0$, т. е. плотность плазмы возрастает в направлении, противоположном направлению силы тяжести, то плазма неустойчива, а ее инкремент $\omega_i = [(g_0/\rho_{m0})(d\rho_{m0}/dy)]^{1/2}$. Если $d\rho_{m0}/dy < 0$, т. е. плотность плазмы возрастает в направлении гравитационной силы, то плазма устойчива. Возмущенная плазма колеблется с частотой $\omega_r = [(g_0/\rho_{m0})(d\rho_{m0}/dy)]^{1/2}$.

10.2. Плазма с резкой границей

В случае когда $\rho_{m0} = \text{const}$ при $y > 0$ и $\rho_{m0} = 0$ при $y < 0$, в плоскости $y = 0$ имеется резкая граница плазма — вакуум. Дифференциальное уравнение при $y > 0$ записывается в виде

$$\frac{d^2V_{1y}}{dy^2} - k_x^2 V_{1y} = 0. \quad (5.10.14)$$

Решение, которое стремится к нулю при $y = +\infty$, имеет вид

$$V_{1y} = \hat{V}_{1y} e^{-k_x y}.$$

Граничное условие при $y = 0$ дается выражением

$$\frac{d\rho_{m0}}{dy} = \rho_{m0} \delta(y). \quad (5.10.15)$$

При $y = 0$ дифференциальное уравнение (5.10.14) преобразуется к виду

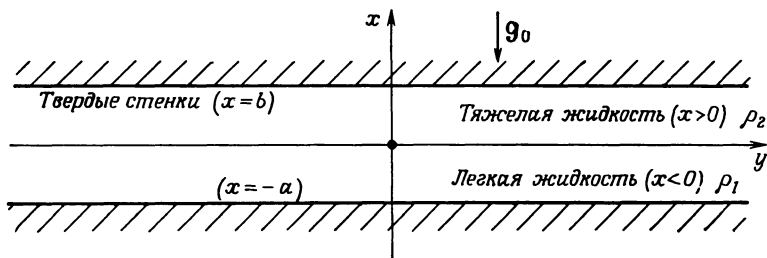
$$\frac{dV_{1y}}{dy} - \frac{k_x^2}{\omega^2} g_0 V_{1y} = 0. \quad (5.10.16)$$

Поскольку $V_{1y} = \hat{V}_{1y} e^{-k_x y}$, плазма неустойчива, а ее инкремент

$$\omega_i = \sqrt{k_x g_0}. \quad (5.10.17)$$

Инкремент зависит теперь от длины волны начального возмущения. Коротковолновые возмущения нарастают наиболее быстро.

Задача 5.10.1. Обсудите физические эффекты, которые были опущены в МГД-модели при выводе уравнения (5.10.17) и которые препятствуют неограниченному возрастанию инкремента при $k_x \rightarrow \infty$.



Фиг. 97. Схематическое представление тяжелой несжимаемой жидкости, поддерживаемой снизу в поле силы тяжести более легкой несжимаемой жидкостью.

Задача 5.10.2. Рассмотрите конфигурацию, схематически показанную на фиг. 97, при которой несжимаемая жидкость с плотностью ρ_2 поддерживается несжимаемой жидкостью с плотностью ρ_1 ($\rho_2 > \rho_1$). Покажите, исходя из гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_m \mathbf{V} = 0 \quad (5.10.18)$$

и

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p - \rho_m g_0 \hat{x}, \quad (5.10.19)$$

что

$$\omega^2 = -\frac{kg_0(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 \operatorname{cth} kb + \rho_1 \operatorname{cth} ka} \quad (5.10.20)$$

и, следовательно, инкремент $\omega_i \approx \sqrt{kg_0}$, если величины ρ_2/ρ_1 , ka и kb много больше единицы.

Задача 5.10.3. Прочтите текст в работе [7]¹⁾ и восстановите промежуточные выкладки при выводе критерия устойчивости поверхности пинча в продольном магнитном поле. В частности, покажите, что, если внешнее продольное поле B_z много больше внутреннего поля B_i , условие устойчивости бесконечно длинного пинча записывается в виде

$$\omega^2 = \frac{B_\theta^2}{4\pi a^2} \left(\frac{m^2 B_i^2}{B_z^2 + B_i^2} - m \right), \quad (5.10.21)$$

где a — радиус пинча, а азимутальная зависимость возмущения выбрана в виде $\exp(im\theta)$.

Если $B_i = B_z$, $B_{z, \text{внеш}} = B_z$, $B_{z, \text{внутр}}$, то выражение (5.10.21) показывает, что имеется неустойчивость (винтовая неустойчивость) относительно возмущения с $m = 1$ и что пинч устойчив относительно возмущений с $m \geq 2$. В пинче конечной протяженности на длине плазмы вдоль ее оси должна укладываться половина длины волны, поэтому критерий устойчивости пинча длиной L имеет вид

$$\frac{B_\theta}{B_z} < \frac{2\pi a}{L}$$

и называется *критерием Крускала — Шафранова*. Это условие является необходимым и говорит о том, что для устойчивости угол кручения силовых линий магнитного поля должен быть больше чем $L/2\pi a$.

¹⁾ См. также [22*]. — Прим. ред.

§ 11. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

В предыдущем параграфе мы изучали гидромагнитную устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести, используя метод собственных колебаний. Для рассмотренной простой конфигурации оказалось возможным решить уравнения плазмы и таким образом получить полную картину неустойчивостей, т. е. найти инкременты и модовый состав неустойчивостей. В случае более сложных конфигураций плазмы решение задачи о собственных значениях не всегда осуществимо.

Энергетический принцип представляет собой метод исследования устойчивости плазмы, удерживаемой магнитным полем, который не требует решения задачи о собственных частотах и нормальных колебаниях. Он основан на исследовании изменения потенциальной энергии, связанного с малыми отклонениями от предполагаемого состояния равновесия.

Удобно выразить малые отклонения от равновесного состояния через лагранжевы координаты смещенного элемента жидкости, как показано на фиг. 98. Координата элемента жидкости в момент времени t обозначена через $\mathbf{x}_0(t)$. Смещенное положение того же элемента обозначено через $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t), \quad |\mathbf{x}_0| \gg |\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, 0) = 0. \quad (5.11.1)$$

Скорость жидкости, выраженная через $\boldsymbol{\xi}$, имеет вид

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{x}_0, t) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{V}_1(\mathbf{x}_0, t) + \dots, \quad (5.11.2)$$

Поскольку член $(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \mathbf{V}_1$ второго порядка малости по возмущенным переменным, его можно отбросить. Тогда

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_1(\mathbf{x}_0, t). \quad (5.11.3)$$

Это означает, что в первом порядке представление Эйлера, рассматривающее движение жидкости с помощью переменной $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t)$, когда следят за изменением во времени скорости движения в данной точке пространства по мере того, как жидкие элементы проходят через эту точку, совпадает с представлением Лагранжа, когда следят за изменением во времени смещения данного жидкого элемента. Таким образом, в представлении Лагранжа

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_0, t). \quad (5.11.4)$$

На этом основании можно заменить эйлерову скорость $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t)$ в уравнениях для плазмы на лагранжеву скорость $\dot{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}_0, t)$, определенную выше.

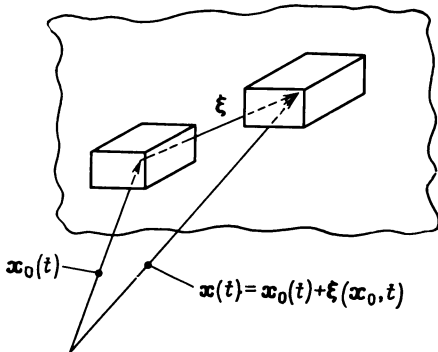
Дифференциальное уравнение движения жидкого элемента для переменной $\boldsymbol{\xi}$ (с учетом уравнения (5.9.26), приводящего к $\mathbf{B}_1 = \nabla \times [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0]$) имеет вид

$$\rho_{m0} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}); \quad (5.11.5)$$

здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = & \nabla [\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}] + \\ & + \frac{1}{4\pi} \{ [\nabla \times \mathbf{B}_0] \times \mathbf{Q} + [\nabla \times \mathbf{Q}] \times \mathbf{B}_0 \} - \\ & - \mathbf{g}_0 (\nabla \cdot \rho_{m0} \boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (5.11.6)$$

$$\mathbf{Q} = \nabla \times [\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0]. \quad (5.11.7)$$



Фиг. 98. диаграмма, иллюстрирующая определение лагранжевых координат смещения жидкого элемента.

Решение данного дифференциального уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями определяет смещение ξ , которое в свою очередь дает возмущение скорости \mathbf{v} , следовательно, зависящие от нее возмущения, а именно p_1 , ρ_{m1} , \mathbf{V}_1 , \mathbf{J}_1 и \mathbf{E}_1 .

Помимо начальных условий для ξ и $\dot{\xi} = \mathbf{V}_s$, дифференциальное уравнение (5.11.5) должно быть снабжено соответствующими граничными условиями. Наибольший общий интерес представляет равновесное состояние плазмы, когда плазма граничит с вакуумом. В общем случае вакуумная область окружена замкнутыми идеально проводящими твердыми стенками с достаточно простой топологией. Такая идеализация редко реализуется в обычной экспериментальной практике, однако она обеспечивает удобные граничные условия для математической формулировки проблемы устойчивости.

Если в эксперименте между плазмой и твердой проводящей стенкой отсутствует вакуумная область, граничные условия упрощаются и сводятся к требованию равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на стенке, т. е.

$$\hat{\mathbf{n}}_w \times \mathbf{E}_1 = 0; \quad (5.11.8)$$

здесь $\hat{\mathbf{n}}_w$ — единичный вектор внешней нормали к проводящей стенке. Тогда из закона Ома следует, что тангенциальная компонента вектора $\dot{\xi} \times \mathbf{B}_0$ также должна быть равна нулю, т. е.

$$\hat{\mathbf{n}}_w \times [\dot{\xi} \times \mathbf{B}_0] = (\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbf{B}_0) \dot{\xi} - (\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \dot{\xi}) \mathbf{B}_0 = 0. \quad (5.11.9)$$

Если \mathbf{B}_0 параллельно стенке, то $\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ и граничное условие принимает вид

$$\hat{\mathbf{n}}_w \cdot \dot{\xi} = 0. \quad (5.11.10)$$

Таким образом, нормальная компонента $\dot{\xi}$ на стенке должна обращаться в нуль.

При рассмотрении более общей конфигурации плазмы, окруженной вакуумом, предполагают, что существует равновесная поверхность S_0 , разделяющая плазму и вакуум. Предполагают также наличие поверхностных токов, текущих по этой границе раздела, так что возможен конечный скачок давления плазмы и магнитного поля при переходе через поверхность раздела. Такое рассмотрение является идеализацией тонкого переходного слоя между плазмой и вакуумом. В равновесном состоянии граница раздела совпадает с поверхностью постоянного давления, поэтому нормальная компонента равновесного магнитного поля должна быть равной нулю на поверхности S_0 . Согласно уравнению (5.9.34), полное давление при переходе через равновесную границу должно быть непрерывным, т. е.

$$p_0(\mathbf{x}_0) + \frac{B_0^2(\mathbf{x}_0)}{8\pi} = \frac{B_0'^2(\mathbf{x}_0)}{8\pi}; \quad (5.11.11)$$

здесь \mathbf{x}_0 принадлежит поверхности S_0 , а переменные со штрихом относятся к вакуумной области. Точка на возмущенной границе имеет координату $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{n}}_0 \xi_n$, где \mathbf{x}_0 — точка на невозмущенной поверхности S_0 , $\hat{\mathbf{n}}_0$ — единичный вектор внешней нормали, а $(\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \dot{\xi}) = \dot{\xi}_n$ — компонента смещения, нормальная к S_0 в точке \mathbf{x}_0 . На возмущенной границе полное давление также должно быть непрерывным:

$$p_0(\mathbf{x}) + p_1(\mathbf{x}) + \frac{1}{8\pi} [\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x})]^2 = \frac{1}{8\pi} [\mathbf{B}'_0(\mathbf{x}) + \mathbf{B}'_1(\mathbf{x})]^2. \quad (5.11.12)$$

Разлагая равновесное давление на возмущенной границе относительно его значения на равновесной границе, можно получить

$$p_0(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla p_0(\mathbf{x}_0) + \dots = p_0(\mathbf{x}_0) + \xi_n \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \nabla p_0(\mathbf{x}_0) + \dots, \quad (5.11.13)$$

поскольку $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \xi_n \hat{\mathbf{n}}_0$. Удобно ввести производную по нормали $\partial/\partial n = \hat{\mathbf{n}}_0 \nabla_{\mathbf{x}_0}$. Заменяя \mathbf{V}_1 на $\partial \xi / \partial t$ в уравнении (5.9.20) и интегрируя результат по времени, можно показать, что на возмущенной границе возмущение давления связано со смещением ξ следующим образом:

$$p_1(\mathbf{x}) = -\xi \cdot \nabla p_0(\mathbf{x}) - \gamma p_0(\mathbf{x}) \nabla \cdot \xi. \quad (5.11.14)$$

Магнитное давление с точностью до членов первого порядка малости равно

$$\mathbf{B}_0^2(\mathbf{x}) + 2[\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x})]. \quad (5.11.15)$$

Разлагая равновесное магнитное давление на смещенной границе относительно его значения на равновесной границе, можно получить

$$\mathbf{B}_0^2(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0^2(\mathbf{x}_0) + (\xi \cdot \nabla) \mathbf{B}_0^2(\mathbf{x}_0). \quad (5.11.16)$$

С точностью до членов первого порядка малости

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_0). \quad (5.11.17)$$

Одно из двух граничных условий, которым должны удовлетворять возмущенные значения переменных на равновесной границе S_0 , можно получить, подставляя разложения (5.11.13), (5.11.14) и (5.11.17) в (5.11.12) с учетом условия непрерывности (5.11.11) для полного давления на границе. Это граничное условие имеет вид

$$\begin{aligned} -\gamma p_0(\mathbf{x}_0) \nabla \cdot \xi + \frac{\mathbf{B}_0(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_0)}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{B}_0^2(\mathbf{x}_0) = \\ = \frac{\mathbf{B}'_0(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{B}'_1(\mathbf{x}_0)}{4\pi} + \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{B}_0'^2(\mathbf{x}_0), \end{aligned} \quad (5.11.18)$$

где использован тот факт, что $\partial p_0 / \partial x_{\parallel} = 0$. Второе граничное условие, которому должны удовлетворять возмущения на границе плазма — вакуум, можно получить из условия непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля на неподвижной границе. Отсюда следует, что тангенциальная компонента электрического поля \mathbf{E}'_1 должна быть непрерывной при переходе через движущуюся со скоростью \mathbf{V}_1 границу, если вектор \mathbf{E}'_2 определен в системе координат, движущейся вместе с границей со скоростью \mathbf{V}_1 . Из преобразования электрического поля в неподвижную систему координат следует непрерывность при переходе через границу величины

$$(\mathbf{E}'_1)_t = \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0}{c} \right)_t, \quad (5.11.19)$$

где \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_0 — поля в лабораторной системе координат. Закон Ома для идеально проводящей плазмы требует, чтобы

$$\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0}{c} = 0.$$

Тогда с помощью (5.11.19) можно показать, что условия

$$\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{E}'_1 = \frac{1}{c} (\mathbf{V}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_0) \mathbf{B}'_0 \quad (5.11.20)$$

должны выполняться как на возмущенной, так и на равновесной границе, поскольку величины \mathbf{E}'_1 и $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}'_0$ уже первого порядка малости по ξ . На основании уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

тангенциальную компоненту электрического поля можно выразить через нормальную компоненту магнитного поля \mathbf{B} , следовательно, уравнение

(5.11.20) можно записать также в виде

$$\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{V}'_1 = \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot [\nabla \times [\xi \times \mathbf{V}'_0]]. \quad (5.11.21)$$

Граничные условия на поверхности раздела плазма — вакуум связывают решения плазменных уравнений с решением уравнений Максвелла в вакуумной области. В вакууме электрическое и магнитное поля могут быть выражены через векторный потенциал \mathbf{A} следующим образом:

$$\mathbf{E}'_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.11.22)$$

$$\mathbf{V}'_1 = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (5.11.23)$$

здесь выбрана калибровка $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Поскольку в вакуумной области токов нет,

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (5.11.24)$$

Граничное условие (5.11.21) для векторного потенциала записывается в виде

$$\hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{A} = (\hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \xi) \mathbf{V}'_0. \quad (5.11.25)$$

На твердой проводящей стенке граничные условия для электромагнитных полей, выраженные через векторный потенциал, имеют вид

$$\hat{\mathbf{n}}_w \times \mathbf{A} = 0. \quad (5.11.26)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения жидкого элемента [согласно (5.11.5)]

$$\rho_{m0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi) \equiv -\mathbf{K} \cdot \xi; \quad (5.11.27)$$

здесь функция $\mathbf{F}(\xi)$, определяемая выражением (5.11.6), линейна по ξ и не содержит производных по времени, а \mathbf{K} — оператор, определяемый, согласно (5.11.27), функцией $\mathbf{F}(\xi)$, т. е. из (5.11.6). Собственные значения рассматриваемого дифференциального уравнения находим, предполагая, что решение имеет вид

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (5.11.28)$$

и решая затем уравнение для собственных значений

$$-\omega^2 \rho_{m0} \xi = \mathbf{F}(\xi) \quad (5.11.29)$$

с учетом соответствующих граничных условий.

Решения соответствуют собственным колебаниям плазмы и в зависимости от знака мнимой части собственной частоты эти колебания являются либо стационарными, либо затухающими, либо неустойчивыми (т. е. нарастающими во времени). В рамках гидродинамической модели плазмы оператор \mathbf{K} самосопряженный, следовательно, квадрат собственной частоты либо положителен ($\omega^2 > 0$ соответствует устойчивой моде), либо отрицателен ($\omega^2 < 0$ соответствует неустойчивой собственной моде).

Задача 5.11.1. Прочтите статью [8] и покажите, что \mathbf{K} — самосопряженный оператор. Опустите в выражении для \mathbf{K} слагаемое $\mathbf{g}_0 (\nabla \cdot \rho_{m0} \xi)$.

Поскольку оператор \mathbf{K} самосопряженный, уравнение для собственных значений

$$\omega^2 \rho_{m0} \xi = \mathbf{K} \cdot \xi \quad (5.11.30)$$

можно решить, используя вариационный принцип, т. е. считая $\delta(\omega^2) = 0$, где

$$\omega^2 = \frac{\int \xi \cdot \mathbf{K} \cdot \xi \, dx}{\int \rho_{m0} \xi \cdot \xi \, dx}. \quad (5.11.31)$$

Знаменатель выражения (5.11.31) представляет собой положительно определенную величину, поэтому знак ω^2 совпадает со знаком числителя. Для того чтобы убедиться в важности этого знака, будем считать, что уравнение (5.11.30) есть уравнение движения осциллятора с упругой константой \mathbf{K} и массой ρ_{m0} . Потенциальная энергия такого осциллятора

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \xi \cdot \mathbf{K} \cdot \xi \, dx. \quad (5.11.32)$$

Таким образом, гидромагнитную устойчивость плазмы можно определить, вычисляя изменение потенциальной энергии, возникающее в результате отклонения решения на малую величину ξ от решения, соответствующего допустимому равновесному состоянию. Если $\delta W > 0$, то плазма устойчива; если $\delta W < 0$, то плазма неустойчива.

Потенциальная энергия, связанная с малым отклонением от равновесия, допустимого с точки зрения МГД-уравнений, имеет вид [6—8].

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{2} \int_{\text{Объем плазмы}} \left\{ \gamma p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}}{4\pi} + (\xi \cdot \nabla) p_0 \nabla \cdot \xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} [\xi \times [\nabla \times \mathbf{B}_0]] \cdot \mathbf{Q} \right\} dx + \frac{1}{8\pi} \int_{\text{Объем вне плазмы}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \, dx - \\ - \frac{1}{2} \int_{\text{Поверхность плазмы}} \left(\frac{\partial p_0}{\partial n} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_0^2}{\partial n} - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial B_0'^2}{\partial n} \right) (\xi \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)^2 \, ds. \end{aligned} \quad (5.11.33)$$

Задача 5.11.2. Докажите, что уравнение (5.11.32) следует из постоянства полной энергии плазмы, а также из самосопряженности оператора \mathbf{K} , т. е.

$$\int \eta \cdot \mathbf{K} \cdot \xi \, dx = \int \xi \cdot \mathbf{K} \cdot \eta \, dx; \quad (5.11.34)$$

здесь ξ и η — малые отклонения от допустимого равновесия, которые вместе с соответствующими векторными потенциалами удовлетворяют граничным условиям (5.11.25) и (5.11.26) на границе плазма — вакуум и на проводящей стенке соответственно.

Задача 5.11.3. Проверьте равенство (5.11.34).

§ 12. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМА — МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ОСНОВАНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА

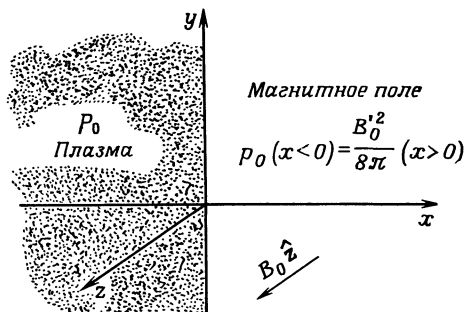
Рассмотрим равновесную плазму, как показано на фиг. 99. Плазма удерживается в полупространстве $x < 0$ магнитным полем \mathbf{B}_0 . Поле равно нулю внутри плазмы и постоянному значению $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ при $x > 0$, т. е. в вакууме. Токи в плазме текут только по поверхности, граничащей с вакуумом. Изменение потенциальной энергии в результате возмущения равновесного состояния можно вычислить из выражения (5.11.33), которое в данном случае упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \delta W = \frac{1}{2} \int_{V_p(x < 0)} \gamma p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 \, dx + \frac{1}{8\pi} \int_{V_m(x > 0)} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \, dx + \\ + \frac{1}{16\pi} \int_{S(x=0)} \frac{\partial B_0'^2}{\partial n} (\xi \cdot \hat{\mathbf{n}}_0)^2 \, ds \end{aligned} \quad (5.12.1)$$

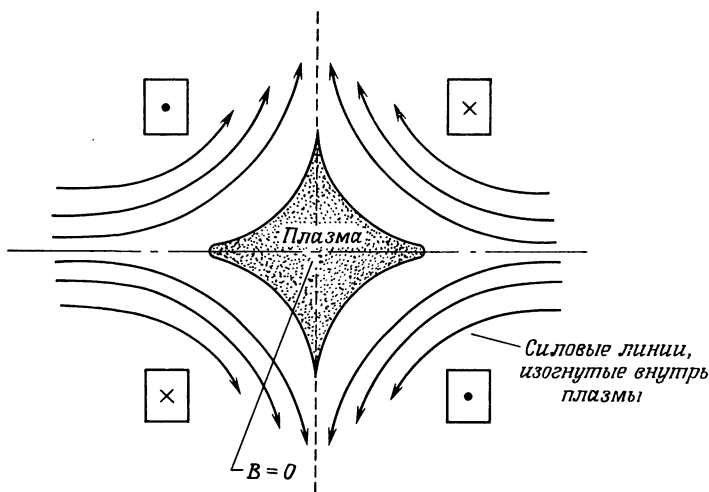
(здесь интегралы берутся по V_p — объему плазмы, по V_m — объему, занимаемому магнитным полем, и по S — поверхности раздела плазма — вакуум).

Из вида первого члена в выражении (5.12.1) ясно, что вклад в изменение потенциальной энергии, связанный с возмущением ξ внутри объема, занятого плазмой, либо положителен, либо равен нулю. Следовательно, первый интегральный член оказывает стабилизирующее влияние, за исключением таких возмущений, для которых $\nabla \cdot \xi = 0$. Эти возмущения возможны в плазме с низкими значениями β и в плазме с $\gamma \rightarrow \infty$ (§ 10). Они наиболее опасны с точки зрения устойчивости плазмы, поскольку менее значительный третий

член, оказывающий дестабилизирующее влияние, приведет к неустойчивости плазмы. Второй член в (5.12.1) всегда положителен и является стабилизирующим. Он описывает изменение запасенной магнитной энергии при возмущении вакуумного поля, связанной с удерживающим магнитным полем. Вследствие того что первые два члена в выражении (5.12.1) положительны, плазма должна обладать гидромагнитной устойчивостью в любой удерживающей конфигурации, для которой $\partial B_0^2 / \partial n > 0$, т. е. в которой величина магнитного поля возрастает по мере удаления от границы плазмы. Простым примером такой конфигурации является антипробкотрон — конфигурация с точкой нулевого поля, которая создается парой катушек, расположенных и несущих ток так, как показано на фиг. 100. В каждой точке поверхность можно рассматривать плоской, как в случае границы на фиг. 99. Силовые линии магнитного поля всюду вогнуты внутрь плазмы, поэтому напряженность поля возрастает по мере удаления от плазмы и поверхность устойчива. (По мере расширения плазма должна совершать работу по сжатию магнитного поля.) Точно к такому же заключению мы пришли при непосредствен-



Фиг. 99. Схематическое представление плазмы, которая занимает левое полупространство и удерживается магнитным полем, имеющимся в правом полупространстве.



Фиг. 100. Схематическое представление конфигурации магнитного поля в антипробкотроне.

Плазма удерживается магнитным полем, силовые линии которого изгибаются внутрь плазмы в каждой ее точке; \odot — ток направлен на читателя, \otimes — ток направлен от читателя.

вом вычислении условий существования перестановочной (желобковой) неустойчивости (§ 8), где показали, что в областях, в которых силовые линии изогнуты внутрь, плазма устойчива. Хотя антипробкотронная конфигурация обладает гидромагнитной устойчивостью, у нее имеется нежелательное свойство, состоящее в том, что магнитное поле обращается в нуль в некоторой точке на оси между двумя катушками. Область с нулевым магнитным полем ведет себя подобно дыре в магнитной бутылке, что приводит к быстрому уходу плазмы. Иоффе и др. [9] показали, что можно реализовать конфигурацию магнитного поля ¹⁾, в которой $\partial B_0'^2/\partial n > 0$ и нет области с нулевым магнитным полем, и что такое поле также подавляет гидромагнитные неустойчивости. Их эксперименты подробно обсуждаются в разд. Г настоящей главы.

Если $\partial B_0'^2/\partial n < 0$, то плазма может быть неустойчивой. Для изучения этой возможности рассмотрим конфигурацию, представленную на фиг. 99, и предположим, что возмущение границы плазма — вакуум имеет вид $[(\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{x}}), (\mathbf{B}'_0 = B'_0 \hat{\mathbf{z}})]$

$$\xi_x = \xi_0 e^{ik_y y} e^{ik_z z}. \quad (5.12.2)$$

Согласно граничному условию (5.11.24),

$$B'_{1x} = \xi_x k_z B'_0. \quad (5.12.3)$$

Уравнение (5.12.3) связывает амплитуду одной из компонент возмущения магнитного поля на границе плазма — вакуум с амплитудой смещения и невозмущенным магнитным полем в вакуумной области. Чтобы вычислить изменение энергии, связанное с возмущением магнитного поля, нужно оценить второй член в выражении (5.12.1), а именно

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dx. \quad (5.12.4)$$

Из уравнений Максвелла для вакуумной области следует, что

$$\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}_1] = 0 \quad (5.12.5)$$

и

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}_1 = 0; \quad (5.12.6)$$

здесь мы использовали предположение о том, что $\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{B}}_1 \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. Из уравнений (5.12.5) и (5.12.6) имеем

$$k_x = i \sqrt{k_y^2 + k_z^2}. \quad (5.12.7)$$

Поэтому

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = (|\hat{B}_{1x}|^2 + |\hat{B}_{1y}|^2 + |\hat{B}_{1z}|^2) \exp(-2 \sqrt{k_y^2 + k_z^2} x). \quad (5.12.8)$$

Кроме того, из уравнений (5.12.6) и $[\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}_1]_x = 0$ следует, что

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = 2 |\hat{B}_{1x}|^2 \exp(-2 \sqrt{k_x^2 + k_y^2} x) = 2 \xi_0^2 B_0'^2 k_z^2 \exp(-2 \sqrt{k_y^2 + k_z^2} x). \quad (5.12.9)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\text{Объем}} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_1 dx = \int_{\text{Поверхность}} \frac{\xi_0^2 B_0'^2 k_z^2}{8\pi \sqrt{k_y^2 + k_z^2}} ds. \quad (5.12.10)$$

Изменение потенциальной энергии на единицу площади поверхности (для возмущений с $\nabla \cdot \xi = 0$) записывается в виде

$$\delta W_s = \left(\frac{1}{8\pi} \frac{k_z^2}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} B_0'^2 + \frac{1}{16\pi} \frac{\partial B_0'^2}{\partial n} \right) \xi_0^2. \quad (5.12.11)$$

¹⁾ Соответствующая конфигурация магнитного поля носит название магнитной ямы или конфигурации с минимумом поля \mathbf{B} . — *Прим. ред.*

Если k_z мало, то \mathbf{k} перпендикулярно \mathbf{B}_0 и критерий неустойчивости сводится к неравенству $\partial B_0'^2/\partial n < 0$. Наиболее неустойчивая ситуация имеет место при $k_z = 0$, т. е. для возмущений, которые не зависят от координаты в направлении магнитного поля. При этом возмущения имеют вид желобков. Неустойчивость плазмы относительно данного возмущения при $\partial B_0'^2/\partial n < 0$ объясняется тем, что плазма перемещается в область, в которой ее давление p_0 больше магнитного давления и, следовательно, возмущение нарастает.

Таким образом, удерживаемая магнитным полем плазма обладает гидромагнитной устойчивостью, если силовые линии магнитного поля изогнуты внутрь плазмы во всем ее объеме. Если же силовые линии всюду изогнуты наружу от плазмы, то имеет место гидромагнитная неустойчивость.

§ 13. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ САМОУДЕРЖИВАЕМОЙ ПЛАЗМЫ ($\mathbf{B}_z = 0$) НА ОСНОВАНИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПРИНЦИПА

Во многих отношениях линейный пинч был бы простейшей схемой удержания плазмы, если бы его плазма была устойчивой и можно было бы справиться с проблемой торцевых электродов. Его особая простота связана с тем, что магнитное поле, удерживающее плазму, создается токами в плазме. Таким образом, нам не придется иметь дело с довольно значительными механическими силами, связанными с магнитными полями, которые создаются внешними проводниками с током. К сожалению, плазма простого пинча неустойчива по отношению к разнообразным возмущениям. Для простоты предположим, что плазма заполняет проводящий цилиндр радиусом a . Условие равновесия принимает вид

$$\frac{dp_0}{dr} = \frac{B_0}{4\pi r} \frac{d}{dr} (rB_0). \quad (5.13.1)$$

В таком равновесии по предположению отсутствуют токи вне плазмы, т. е. нет никаких внешних магнитных полей. Чтобы проверить устойчивость такого равновесия, выберем возмущение, имеющее в цилиндрических координатах следующий вид:

$$\xi(r, \theta, z) = \xi_0(r, z) e^{im\theta}. \quad (5.13.2)$$

13.1. Азимутально-симметричное возмущение ($m = 0$)

Изменение потенциальной энергии при азимутально-симметричном возмущении имеет вид

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ \gamma p_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right]^2 + \frac{1}{4\pi} \left[B_0 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (B_0 \xi_r) \right]^2 + \xi_r \frac{dp_0}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] + \xi_r \frac{dp_0}{dr} \left[\frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial r} (\xi_r B_0) \right] \right\} dx. \quad (5.13.3)$$

Подынтегральное выражение в (5.13.3) представляет собой квадратичную форму по переменным ξ_r и $\nabla \cdot \xi$. Эти переменные независимы, поскольку независимы ξ_r и ξ_z .

Квадратичная форма от нескольких переменных (такая, как $\sum a_{ij} x_i x_j$) является положительно-определенной, если все главные миноры матрицы a_{ij} положительны¹⁾. Указанный критерий, примененный к выражению (5.13.3) вместе с условием равновесия

$$\nabla p_0 + \frac{[\nabla \times \mathbf{B}_0] \times \mathbf{B}_0}{4\pi} = 0,$$

¹⁾ В данном случае это означает, что форма $a(\nabla \cdot \xi)^2 + b\xi_r(\nabla \cdot \xi) + c\xi_r^2$ является положительно-определенной, если $b^2 < 4ac$ и $a > 0$.

позволяет получить следующий критерий устойчивости:

$$-\frac{r}{p_0} \frac{dp_0}{dr} < \frac{4\gamma}{2+\gamma\beta} \quad (\text{устойчивость}), \quad (5.13.4)$$

где $\beta = p_0/(B_0^2/8\pi)$. Неравенство (5.13.4) показывает, что для устойчивости плазмы давление должно не слишком быстро убывать с радиусом. Следует отметить, что, вообще говоря, β зависит от радиуса. Уравнение (5.13.4) связывает $\beta(r)$ с $p_0(r)$. Условие равновесия (5.13.1) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{r}{p_0} \frac{dp_0}{dr} = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{r}{\beta} \frac{d\beta}{dr} - 2 \right) \quad (\text{равновесие}). \quad (5.13.5)$$

Наиболее неустойчивые моды присущи плазме с низким β . В случае низких β устойчивым является распределение плотности, при котором $p_0 \sim 1/r^{2\gamma}$. Распределение, в котором плотность быстрее спадает с радиусом, неустойчиво. Неустойчивость, возникающая при нарушении критерия (5.13.4), соответствует перестановочной моде, когда плазма поджимается радиально в некоторой точке по оси¹⁾. Поджатие плазмы приводит к локальному увеличению B_0^2 , что в свою очередь ведет к дальнейшему нарастанию возмущения.

13.2. Возмущение с азимутальной зависимостью ($m \neq 0$)

Без потери общности компоненты возмущения ξ можно записать в виде

$$\xi_r = \xi_r(r) \sin m\theta e^{ikh_z z}, \quad (5.13.6)$$

$$\xi_\theta = \xi_\theta(r) \cos m\theta e^{ikh_z z}, \quad (5.13.7)$$

$$\xi_z = \xi_z(r) \sin m\theta e^{ikh_z z}. \quad (5.13.8)$$

При таком выборе упрощается вычисление δW с помощью (5.11.33), поскольку множители $\sin^2 \theta$ и $\cos^2 \theta$, усредняясь при интегрировании, заменяются на $1/2$. Компонента смещения ξ_θ вдоль магнитного поля входит только в первый член в выражении (5.11.34), и, если $m \neq 0$, можно выбрать ξ_θ таким образом, чтобы $\nabla \cdot \xi = 0$. Для таких возмущений выражение для изменения потенциальной энергии совпадает с (5.13.3), отличаясь лишь тем, что член $\gamma p_0 (\nabla \cdot \xi)^2$ заменяется на

$$\frac{1}{4\pi} \frac{m^2 B_0^2}{r^2} (\xi_r^2 + \xi_z^2). \quad (5.13.9)$$

Компонента ξ_z входит только в член $\nabla \cdot \xi_\perp$ в виде произведения $k_z \xi_z$. Следовательно, если $k_z \rightarrow \infty$ при условии, что $k_z \xi_z = \text{const}$, то член $m^2 B_0^2 \xi_z^2 / 4\pi r^2 \rightarrow 0$. Это опять приводит к квадратичной форме от двух переменных ξ_r и $\nabla \cdot \xi_\perp$ для изменения потенциальной энергии в результате возмущения, приводящего к отклонению от равновесия. Критерий устойчивости в этом случае имеет вид

$$-\frac{r}{p_0} \frac{dp_0}{dr} < \frac{m^2}{\beta} \quad (\text{устойчивость}). \quad (5.13.10)$$

Это условие можно сравнить с условием (5.13.4), чтобы выяснить, какое из них является более жестким. Если критерий устойчивости (5.13.4) выполняется для некоторого равновесного распределения, то будет ли это распределение устойчивым по отношению к какому-либо возмущению с азимутальной зависимостью? Если выполнен критерий (5.13.4), то возмущения с $m \geq 2$ устойчивы, поскольку $\gamma > 1$. При $\beta > 2\gamma/3$ мода с $m = 1$ может быть неустойчивой, хотя распределение давления удовлетворяет условию (5.13.4). Нарастание моды с $m = 1$ называется *змеиковой неустойчивостью*. Она развивается, если магнитное давление увеличивается так, как показано на фиг. 4.

¹⁾ Такие возмущения иногда называют перетяжками.— *Прим. ред.*

Плазма с резкой границей и в отсутствие стенок неустойчива по отношению к развитию мод с любыми m . Провод с током создает в плазме поле B_θ , которое уменьшает β , и может стабилизировать неустойчивость при условии, что dp_0/dr не слишком велико.

§ 14. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗА СЧЕТ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

В § 8 было показано, что удерживаемая в пробкотроне плазма неустойчива по отношению к желобковой, или перестановочной, неустойчивости. При этом мы предполагали, что концы силовых линий могут свободно перемещаться. Однако если бы все силовые линии были вморожены в определенных местах обеих магнитных пробок, невозможно было бы переставить две трубки потока без закручивания силовых линий вблизи концов и соответствующего увеличения магнитной энергии. Таким образом, закрепление силовых линий в области магнитных пробок (либо в какой-то другой плоскости, либо в паре плоскостей) оказывает стабилизирующее влияние на плазму, удерживаемую в пробкотроне. Подобную ситуацию можно осуществить в эксперименте, если внешнюю область между пробкой и проводящей стенкой вакуумной камеры заполнить холодной плазмой, которая является более хорошим проводником, чем стенка.

Для исследования стабилизирующего воздействия, которое оказывает закрепление концов линий, рассмотрим конфигурацию магнитного поля пробкотрона, показанную на фиг. 101. В средней плоскости могут быть переставлены две смежные трубки потока. Перестановка трубок в концевых плоскостях невозможна, поскольку силовые линии закреплены в проводящих торцах. Следовательно, теперь $\nabla \cdot \xi$ отлична от нуля и приближенно равна $\xi (\nabla W/W)$, где $W = \oint dl/B$. В результате изгиба силовых линий магнитного поля

$$B_1 \approx B_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial z} \approx \frac{\pi}{L} \xi_r B_0.$$

Условие устойчивости можно получить с помощью энергетического принципа [из (5.11.33) в пренебрежении последним членом в интеграле] из выражения

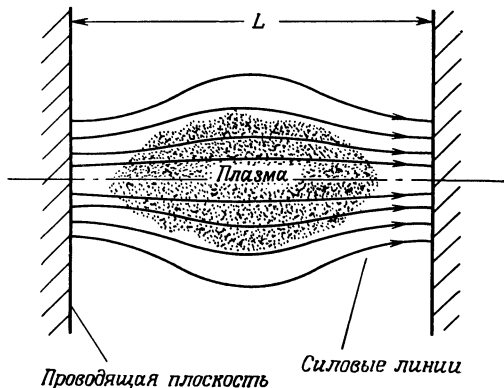
$$\delta W \approx \frac{1}{2} \int \left[\gamma p_0 \left(\frac{\nabla W}{W} \right)^2 + \frac{\pi^2 B^2}{4L^2} + \frac{|\nabla p_0| |\nabla W|}{W} \right] \xi_r^2 dx. \quad (5.14.1)$$

Отсюда условие устойчивости записывается в виде

$$-\frac{|\nabla p_0| |\nabla W|}{W} < \gamma p_0 \left(\frac{\nabla W}{W} \right)^2 + \frac{\pi B^2}{4L^2}. \quad (5.14.2)$$

Этот критерий устойчивости отличается от условия (5.8.19). С увеличением расстояния между проводящими торцами стабилизирующее влияние торцов уменьшается, и условие (5.14.2) переходит в (5.8.19).

Задача 5.14.1. Покажите, что плазма, удерживаемая полем магнитного диполя и помещенная внутрь проводящей сферы, устойчива [согласно



Фиг. 101. Плазма, удерживаемая в пробкотроне магнитным полем, концы силовых линий которого закреплены в проводящих торцах.

неравенству (5.14.2)], если

$$\frac{aB_0^2}{8\pi} + 4\gamma p > -\frac{r}{dr} \frac{dp_0}{dr} \quad (5.14.3)$$

(здесь a — константа порядка единицы).

Г. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА

Примерно в 1952 г. начались работы по отдельным частям программы, направленной на разработку реактора для управляемого термоядерного синтеза, в четырех лабораториях Комиссии по атомной энергии США; программа получила кодовое наименование «Проект Шервуд» [2]. Это были следующие лаборатории: Ливерморская лаборатория Лоуренса в Калифорнии, Лос-Аламосская научная лаборатория в Нью-Мексико, Окриджская национальная лаборатория в Теннесси и Лаборатория физики плазмы Принстонского университета в Нью-Джерси. Примерно в это же время аналогичные программы начали разрабатываться в Англии, СССР, Франции и других странах. Все эти проекты были начаты в ожидании того, что потребуются лишь незначительные усилия, чтобы продемонстрировать возможность построения термоядерного реактора. К 1958 г. стала очевидной вся трудность и сложность проблемы удержания высокотемпературной плазмы, и страны, занятые этими исследованиями, решили объединить накопленные знания для общей пользы [10].

В задачу настоящей книги не входит детальное описание большого числа экспериментов, в которых делались попытки удержать горячую плазму, однако понимание проблемы устойчивости плазмы не будет полным без некоторых сведений о взаимодействиях теории и эксперимента в этой активной области плазменных исследований.

Конечная цель всех экспериментов по удержанию плазмы заключается в том, чтобы получить положительный (превышающий затраты) выход ядерной энергии в процессе слияния ядер легких элементов, таких, как дейтерий и тритий. Чтобы такое слияние произошло, нужно заставить столкнуться указанные выше ядра с достаточно большой относительной скоростью, чтобы преодолеть кулоновские силы, связанные с электрическим зарядом ядер. Энергия в расчете на одно ядро в системе покоя центра масс, необходимая для осуществления термоядерного реактора с положительным выходом, находится в диапазоне 10—100 кэВ [11].

Лоусон [12] рассмотрел простую задачу о том, сколько энергии следует затратить, чтобы создать и удержать ансамбль легких ядер с большой энергией (плазму), и сколько энергии высвободится при реакциях синтеза между этими ядрами в зависимости от плотности и температуры. Он пришел к выводу, что произведение плотности частиц в высокотемпературной ($T > 10$ кэВ) плазме на время удержания при этой плотности должно превышать определенное значение, а именно $[n(\text{число частиц в см}^3)] \cdot [\tau(\text{время удержания в с})] \geq 10^{14}$ для D — T-реакций (для D — D-реакций $n\tau > 10^{16}$). Это неравенство известно под названием *критерия Лоусона*. Ближайшая цель исследований по управляемому синтезу заключается в создании плазмы, удовлетворяющей этому критерию. Более далекая задача состоит в экономически оправданном производстве электроэнергии и подключении огромного резервуара энергии за счет синтеза дейтерия и других распространенных в природе ядер, участвующих в термоядерных реакциях. Чтобы представить себе масштабы энергетических ресурсов за счет ядерного син-

теза, следует принять во внимание тот факт, что мировое потребление энергии в 1975 г. составит, по оценкам, $3,6 \cdot 10^{17}$ кДж в год. Энергия, освобождаемая в реакциях синтеза дейтерия, сможет удовлетворять мировые нужды в течение 10^9 лет при уровне потребления энергии, превышающем настоящий в 50 раз.

На ранней стадии в экспериментах по удержанию плазмы были достигнуты значения $n\tau \approx 10^8$ см⁻³·с. В некоторых из наиболее успешно развивающихся ныне (1972 г.) экспериментов достигают значений $n\tau \approx 10^{12}$ см⁻³·с, и, как полагают многие работающие в этой области специалисты, нет принципиальных причин, по которым нельзя было бы достичь как ближайшей, так и более далекой цели, упоминавшейся выше.

Плазма с кинетической температурой выше нескольких электронвольт не может быть удержана в контакте со стенками из вещества, так как либо стенки стали бы испаряться, либо плазма быстро бы охлаждалась при соприкосновении со стенками, находящимися при более низкой температуре. Последняя ситуация обычно и создает проблему. В настоящее время является общепризнанным, что постоянное или медленно меняющееся магнитное поле обеспечит термоизоляцию плазмы и позволит удерживать высокотемпературную плазму в термоядерном реакторе от соприкосновения с материальными стенками.

Однородное магнитное поле заставляет заряженную частицу двигаться вдоль трубки силовых линий по спиральной орбите с циклотронным радиусом $a_c (= v_{\perp}/\omega_c)$. Движение такой частицы ограничено в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, но, очевидно, не ограничено в направлении магнитного поля. Для решения задачи об ограничении движения частицы вдоль магнитного поля существуют два подхода. Один из них заключается в том, чтобы увеличить магнитное поле в двух плоскостях. Такую конфигурацию поля образует *магнитная бутылка*, называемая *пробкотроном*. Магнитное поле этой конфигурации способно захватывать отдельные заряженные частицы с определенными свойствами и удерживать их рассматриваемым ниже (§ 15) способом. Данная конфигурация называется *открытой системой* (или *открытой конфигурацией*), так как частицы, которые уходят через магнитные пробки, теряются.

Другой подход к проблеме ухода частиц вдоль силовых линий состоит в том, чтобы изогнуть силовые линии и замкнуть их в траектории, напоминающие замкнутую беговую дорожку. Такое поле создается катушками с током, намотанными на поверхность тора; магнитное поле при этом тороидальное. Пробкотроны с замкнутыми силовыми линиями называются *замкнутыми системами* (или *замкнутыми конфигурациями*). Простое тороидальное магнитное поле не удерживает отдельные частицы. Эта проблема и пути ее решения обсуждаются в § 16 настоящей главы.

Как с открытыми, так и с замкнутыми системами для удержания плазмы связана одна и та же проблема удержания плазмы в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Давление плазмы $p_{\perp} = nkT$ поперек поля должно уравниваться магнитным давлением $B^2/8\pi$. Чтобы удержать плазму при температуре выше 10 кэВ и плотности $\sim 10^{14}$ см⁻³, потребуются магнитное поле порядка 50—100 кГс. Магнитное поле в 100 кГс соответствует давлению 400 атм и плотности магнитной энергии 40 Дж/см³.

Если пренебречь потерей плазмы вдоль силовых линий магнитного поля, остается вопрос о потере плазмы поперек магнитного поля. Здесь мы также не рассматриваем потерь энергии за счет излучения из плазмы. Радиационные потери (тормозное, синхротронное и примесное излучение) мы обсудим в гл. 11. Наиболее серьезным механизмом, вызывающим потерю плазмы, являются гидромагнитные неустойчивости, описанные выше в настоящей главе. Времена нарастания этих неустойчивостей малы, а скорость,

с которой плазма выбрасывается на стенки в эксперименте по удержанию, велика. Максимальное значение $n\tau$, достигаемое в плазме с гидромагнитной неустойчивостью, порядка $10^8 \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, что заведомо далеко от значения $n\tau = 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, необходимого для осуществления управляемой термоядерной реакции.

Если бы плазма не была неустойчивой и единственным механизмом потерь была бы классическая диффузия за счет столкновений между частицами и градиента давления, то можно было бы достичь значений $n\tau$, больших лусонова значения $10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$. Гидромагнитные неустойчивости удалось подавить. То, что в настоящее время предельное значение $n\tau \approx 10^{12} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, связано в основном с кинетическими неустойчивостями, называемыми иногда микронеустойчивостями. Они, как правило, имеют более короткую длину волны и приводят к меньшим крупномасштабным перемещениям плазмы. К сожалению, средства борьбы с этими неустойчивостями, по-видимому, являются не такими простыми, как в случае гидромагнитных неустойчивостей.

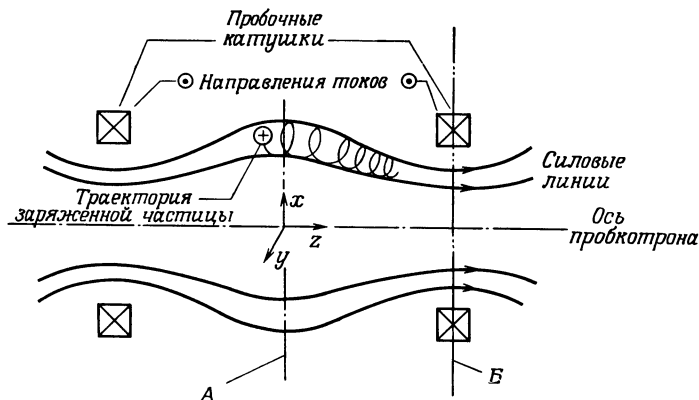
Возможно, хотя и маловероятно, что решение проблемы управляемого термоядерного синтеза лежит в стороне от всех принятых ныне направлений.

В настоящее время наряду с системами магнитного удержания изучаются лазерная плазма, турбулентный нагрев, электростатические ловушки, схемы удержания электромагнитными волнами и нейтральным газом высокого давления.

§ 15. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО УДЕРЖАНИЮ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

15.1. Пробкотронные эксперименты

Конфигурация магнитного поля, создаваемого двумя катушками с током, расположенными, как показано на фиг. 102, называется пробкотроном. Исследование движения отдельных заряженных частиц (приложение I) в таком магнитном поле обнаруживает, что частицы с определенными свойствами могут быть захвачены этим полем. В частности, частицы, удовлетворяющие условию адиабатичности (т. е. когда изменение магнитного поля за один период движения и изменение поля в масштабе орбиты много меньше самого магнитного поля), остаются захваченными между двумя пробками неограни-



Фиг. 102. Схематическое представление магнитного поля пробкотрона. Показана траектория заряженной частицы. В плоскости А магнитное поле минимально ($B_{\text{мин}}$), а в плоскости В — максимально ($B_{\text{макс}}$). Ток в катушках направлен на читателя.

ченно долго при условии, что отношение перпендикулярной составляющей скорости частицы к параллельной в средней плоскости удовлетворяет неравенству

$$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} > \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad (5.15.1)$$

где R — так называемое пробочное отношение ($B_{\text{макс}}/B_{\text{мин}}$).

Заряженные частицы, не удовлетворяющие последнему неравенству, как говорят, находятся в конусе потерь, т. е. в конусе пространства скоростей, который определяется неравенством (5.15.1) с обратным знаком. Адиабатическая теория движения заряженных частиц дала ясные и достаточно благоприятные предсказания относительно удержания заряженных частиц в пробкотронах, однако оставались некоторые сомнения (50-е годы) следующего рода, а именно не вызовут ли малые систематические изменения (связанные с возмущением магнитного поля, конечным размером катушек и т. п.) магнитного момента захваченных частиц уход их из пробкотрона за счет механизмов, не учтенных в теории.

Гибсон, Джордан и Лойер [13] экспериментально доказали, что отдельные заряженные частицы остаются захваченными в пробкотроне, что прекрасно согласуется с предсказаниями адиабатической теории. В их эксперименте стационарное магнитное поле пробкотрона создавалось внутри области высокого вакуума, в которую впрыскивался радиоактивный изотоп неон в небольшом количестве. При распаде атомов неона образуются позитроны, которые, отражаясь от пробки, в среднем 10^9 раз проходят между пробками, прежде чем они попадут в конус потерь после упругого рассеяния на атомах остаточного газа. Таким образом, теория предсказывает, а эксперимент подтверждает, что отдельные частицы удовлетворительно захватываются магнитным полем пробкотрона. Однако захват одной частицы в некоторой конфигурации поля еще не означает, что плазма находится в устойчивом равновесии или даже просто в равновесии в такой же конфигурации.

Прежде чем затрагивать коллективные аспекты удержания плазмы в пробкотроне, следует отметить, что существует проблема ухода плазмы из пробкотрона за счет упругих столкновений. Если бы в магнитном поле двигались только две захваченные заряженные частицы, они в конце концов попали бы в некоторую точку пространства, где произошло бы их упругое столкновение.

При упругом столкновении координаты частиц в пространстве скоростей изменяются случайным образом. В результате такого случайного блуждания одна из частиц попадает в конус потерь и, следовательно, выходит из пробкотрона. Если существует некоторое распределение скоростей частиц, то примерно половина частиц теряется за время порядка времени между парными, или кулоновскими, столкновениями в зависимости от того, какое из времен меньше [14, 23*]. Такая потеря заряженных частиц представляет собой достаточно серьезный механизм потери энергии, который должен быть устранен с целью успешного применения пробкотронов в термоядерных реакторах. Однако предложены уже схемы, в которых эта потеря энергии может быть восполнена. Поскольку столкновение заряженных частиц в пробкотроне приводит ко времени удержания порядка времени между кулоновскими столкновениями, произведение плотности на время удержания, $n\tau = 1/(\sigma_{90} \cdot v_i)$, не зависит от плотности, а определяется сечением рассеяния на угол 90° . В оптимальных условиях, т. е. в отсутствие гидромагнитных и кинетических неустойчивостей, теоретически возможно удовлетворить критерию Лоусона для пробкотрона, хотя в лабораторных условиях это еще не было достигнуто.

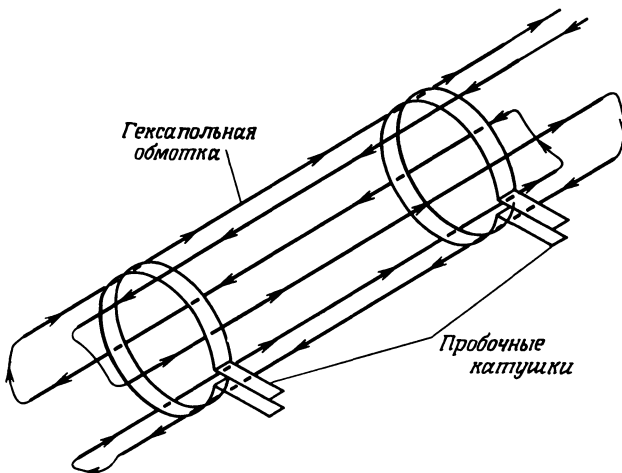
15.2. Стабилизированный пробкотрон

В экспериментах (1959 г.) обнаружилось, что плазма уходит из пробкотронов значительно быстрее, чем ожидается за счет процессов упругих соударений. В действительности скорость ухода согласуется с гидромагнитной неустойчивостью, присущей удерживаемой магнитным полем плазме и рассмотренной в § 8. Однако теория, предсказывающая неустойчивость, дает также рецепт ее подавления. В § 12 настоящей главы было показано, что плазма, удерживаемая в магнитном поле, которое возрастает всюду по мере удаления от границы плазмы, гидромагнитно устойчива.

Магнитное поле антипробкотрона (создаваемое путем изменения направления тока в одной из катушек пробкотрона на обратное) обладает указанным свойством; однако в антипробкотроне существует область с нулевым магнитным полем, что приводит к быстрой диффузии частиц в конус потерь.

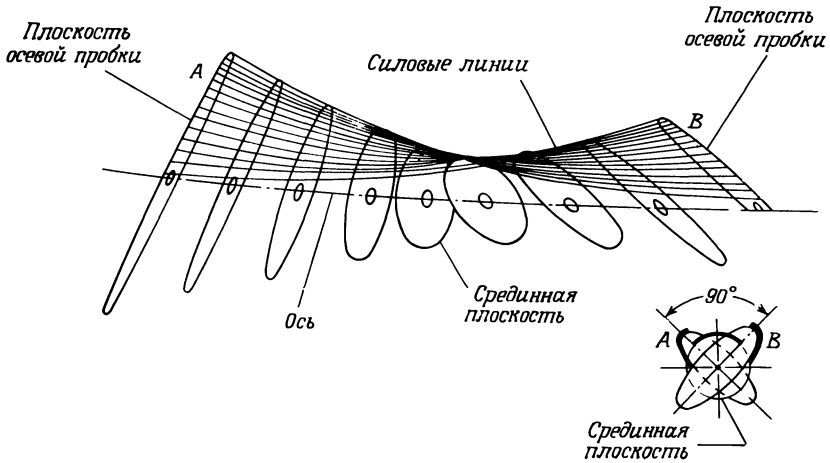
В 1962 г. Иоффе [9] впервые сообщил об экспериментах по удержанию плазмы в конфигурации магнитного поля, которая обладает той желательной особенностью, что магнитное поле возрастает в любом направлении по мере удаления от границы плазмы, но эта конфигурация свободна от неприятной области с нулевым полем внутри плазмы.

В этих экспериментах магнитное поле создается путем наложения на поле пробкотрона поля от шести проводников, параллельных оси пробкотрона и несущих ток в указанных на фиг. 103 направлениях. Две концевые петли с током создают поле пробкотрона, а шесть прямых линий тока приводят к усовершенствованию, предложенному Иоффе. В том, что такое поле обладает свойством возрастания B^2 в любом направлении при удалении от центра плазмы, можно убедиться, рассмотрев вклады от каждого из двух полей по отдельности. С одной стороны, поле пробкотрона само по себе таково, что B увеличивается с расстоянием вдоль оси от средней плоскости (стабилизация), но убывает с радиусом при удалении от оси (дестабилизация). С другой стороны, поле, создаваемое параллельными проводниками, возрастает с радиусом при удалении от оси (стабилизация) и постоянно вдоль оси пробкотрона. Подбирая должным образом комбинацию этих полей, можно добиться того, что напряженность магнитного поля будет увеличиваться в любом направлении при удалении от центра средней плоскости. При этом, как



Фиг. 103. Схематическое представление токовой конфигурации, которая создает магнитное поле, возрастающее в любом направлении при удалении от центра.

Мультиспольные обмотки получили название полос Иоффе в честь автора, который впервые применил их для подавления гидромагнитной неустойчивости в экспериментах по магнитному удержанию плазмы.

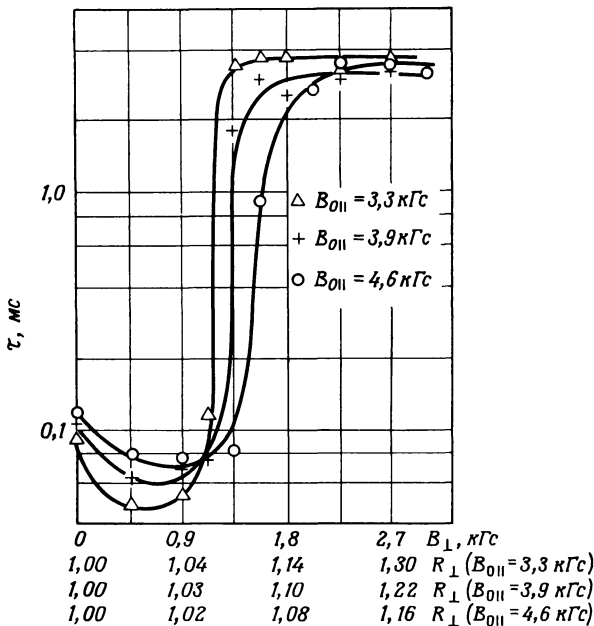


Фиг. 104. Схематическое представление магнитного поля, создаваемого комбинацией пробкотрона и гексаполя [15].

Силовые линии изогнуты внутрь области, занятой удерживаемой плазмой. Поверхность дрейфа частиц в случае квадруполь можно представить, если взять лист бумаги и скатать из него трубку, а затем сплющить ее концы во взаимно перпендикулярных направлениях.

видно из фиг. 104, образуется такая конфигурация магнитного поля, в которой силовые линии всюду вогнуты внутрь плазмы. Совокупности нитей на фиг. 104 представляют собой поверхности дрейфа частиц в магнитном поле пробкотрона и линейного квадруполь.

В Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова на установке ПР-5 (Пробкотрон-5) Иоффе с сотрудниками продемонстрировали подавление



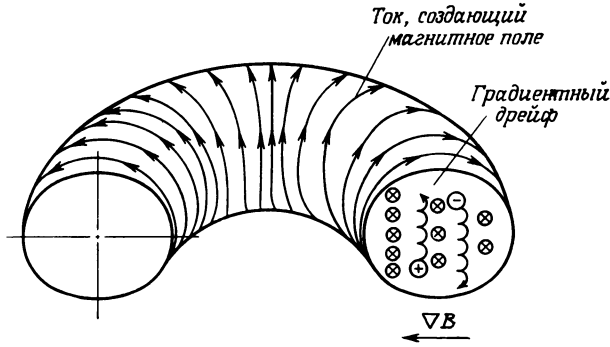
Фиг. 105. Зависимость времени удержания плазмы τ от напряженности стабилизирующего поля B_{\perp} , полученная на установке ПР-5, при различных значениях продольного поля $B_{||}$.

Давление остаточного газа $p = 1,5 \cdot 10^{-7}$ мм рт. ст. Под ось абсцисс приведены соответствующие значения пробочного отношения $R_{\perp} = (B_{||}^2 + B_{\perp}^2)^{1/2} / B_{||}$.

гидромагнитной неустойчивости в приведенной на фиг. 103 конфигурации магнитного поля. В этом эксперименте магнитное поле пробкотрона достигает 5 кГс в средней плоскости и 8,5 кГс в области пробок. Диаметр вакуум-

Сверхпроводящая
катушка

Бланкет и
интерлокатор



Фиг. 108. Схематическое представление тороидального магнитного поля.

§ 16. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО УДЕРЖАНИЮ ПЛАЗМЫ В ЗАМКНУТЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

16.1. Тороидальные магнитные поля

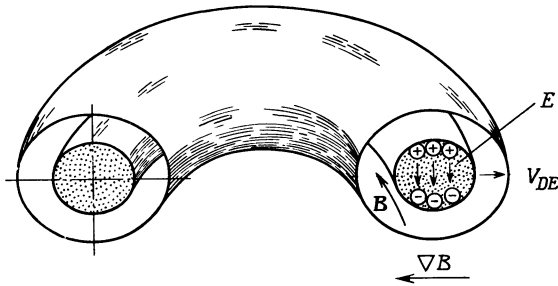
Пробкотрон с открытой конфигурацией поля обладает тем свойством, что концы силовых линий в нем не замкнуты и частицы, которые вследствие столкновений попадают в конус потерь, выходят из магнитной ловушки. Один из путей решения этой проблемы состоит в том, чтобы замкнуть силовые линии магнитного поля сами на себя в предположении, что заряженные частицы будут многократно проходить по одной и той же траектории. Конфигурацию магнитного поля с замкнутыми силовыми линиями можно создать, например, с помощью тороидальной катушки с током, как показано на фиг. 108. Хотя силовые линии магнитного поля действительно оказываются замкнутыми, данная конфигурация поля не приводит к захвату отдельных заряженных частиц. Ферми одним из первых (около 1946 г.) понял эту принципиальную слабость при использовании тороидального поля в качестве ловушки для заряженных частиц. Уход заряженных частиц из такого простого тороидального магнитного поля объясняется тем, что магнитное поле у внешней стороны тора слабее, чем у внутренней его стороны. Градиент магнитного поля вызывает дрейф частиц поперек поля и их уход. Скорость градиентного дрейфа (см. приложение I) дается выражением

$$V_{DG} = \frac{\mu}{q} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} c,$$

где $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ — магнитный момент заряженной частицы.

Скорость градиентного дрейфа дейтрона с энергией около 10 кэВ в тороидальном магнитном поле 50 кГц с большим радиусом, равным 100 см, составляет примерно 10^7 см/с. При значении малого радиуса 10 см время удержания в тороидальном магните $\tau = 10$ см/ $(10^7$ см/с) = 10^{-6} с. При типичных плотностях плазмы в тороидальных системах (редко выше $n = 10^{14}$ см $^{-3}$) произведение $n\tau \approx 10^8$, что много меньше лоусонова значения.

Теперь посмотрим, что произойдет, если в простое тороидальное магнитное поле поместить плазму. Может ли плазма оставаться в ловушке, несмотря на то что из нее могут уходить отдельные частицы? Ответ: нет, не может. Чтобы понять, как разрушается плазменное равновесие в простом тороидальном магнитном поле, заметим, что градиентный дрейф приводит к движению положительных частиц вверх, а отрицательных частиц вниз, создавая, таким образом, связанное с разделением зарядов электрическое поле, как показано на фиг. 109. Возникающий при этом электрический дрейф ($cE \times B/B^2$) не зависит от знака заряда и направлен от главной оси тора как для положительных, так и для отрицательных частиц. Таким образом, плазма дрейфует к внешней стенке снова, как было показано выше,

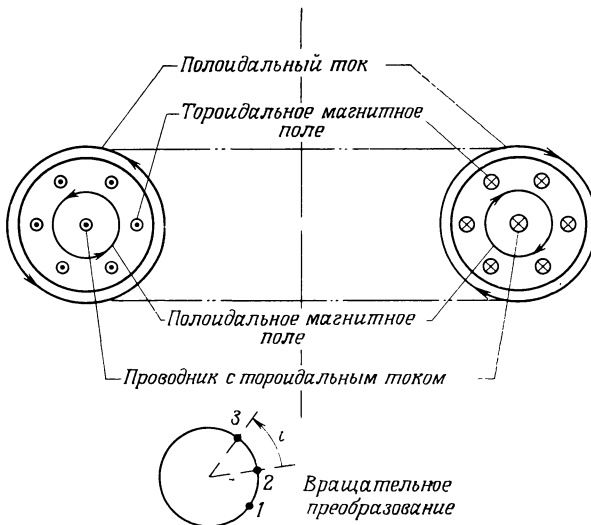


Фиг. 109. Иллюстрация механизма ухода плазмы в простом тороидальном магнитном поле. Электрическое поле E возникает вследствие разделения зарядов, вызванного градиентным дрейфом. В полях E и B плазма дрейфует к стенке со скоростью V_{DE} .

в течение времени $\sim 10^{-6}$ с. Следовательно, плазма не может быть удержана в простом тороидальном магнитном поле до тех пор, пока не будут приняты соответствующие меры.

На фиг. 110 приведена конфигурация магнитного поля, позволяющая решить проблему удержания отдельных частиц в замкнутых системах. Магнитное поле создается двумя токами. Один из токов полоидальный и создает тороидальное магнитное поле, а другой ток тороидальный и создает полоидальное магнитное поле. Общее магнитное поле, создаваемое таким распределением токов, обладает следующим свойством. Силовая линия, пересекающая плоскость перпендикулярного сечения тора в точке 1 (фиг. 110, внизу), в следующий раз (после полного обхода вокруг главной оси тора) пересечет эту же плоскость в точке 2, в следующий раз в точке 3 и т. д. Каждый последовательный обход приводит к дополнительному малому угловому смещению силовой линии, как показано на фиг. 110. Это угловое смещение называется *углом вращательного преобразования* и обозначается буквой ι (иота). Если только ι не принимает значения $2\pi/n$ (n — целое число), силовая линия всюду плотно заполняет целую поверхность. Эти магнитные поверхности вложены одна в другую в том смысле, что силовая линия, более близкая к тороидальному току, заполняет поверхность, которая целиком находится внутри поверхности, образованной более далекой силовой линией.

Остается еще градиент магнитного поля в радиальном направлении,



Фиг. 110. Замкнутая конфигурация магнитного поля с вращательным преобразованием, создаваемая комбинацией тороидального и полоидального токов.

и все еще происходит дрейф отдельных заряженных частиц. Можно убедиться в том, что этот дрейф не приводит к потере частиц. Для этого рассмотрим заряженную частицу, находящуюся в верхней точке магнитной поверхности (фиг. 110). Предположим, что локальная скорость дрейфа этой частицы направлена вверх, т. е. к стенке. Та же самая частица в результате вращательного преобразования при движении по силовой линии в конце концов окажется на дне тора. В данной точке локальная скорость дрейфа по-прежнему направлена вверх, т. е. к центру области удержания плазмы. В результате часть времени частица дрейфует по направлению к стенке, а часть времени — по направлению к центру области удержания плазмы. Для определенных групп частиц происходит компенсация дрейфов в различных направлениях (наружу и внутрь), и дрейф к наружным стенкам в среднем отсутствует. Таким образом, при достаточно большом вращательном преобразовании отдельные частицы могут быть удержаны магнитным полем, создаваемым комбинацией тороидального и полоидального токов. Эксперименты, проведенные Гибсоном с сотр. [17] в Калэмской лаборатории в Англии, показали, что отдельные заряженные частицы могут удерживаться в замкнутых магнитных конфигурациях. Поверхности дрейфа частицы не совпадают точно с магнитными поверхностями, но близки к ним.

16.2. Стелларатор

Одно из первых и крайне нетривиальных решений проблемы удержания отдельных частиц в замкнутых магнитных системах предложил Спитцер в 1951 г., когда он дал общее представление о *стеллараторе*. Предложенный им способ решения данной проблемы состоит в том, чтобы согнуть тор в «восьмерку». При этом происходит такое изменение магнитного поля, что оно приобретает конфигурацию вложенных магнитных поверхностей. В ранних экспериментах со стеллараторами в Принстонской лаборатории физики плазмы применялось скручивание тороидальной конфигурации в «восьмерку». Однако магнитное поле с аналогичными свойствами может быть получено и при соответствующем размещении проводников вне тороидальной вакуумной камеры.

Исследования показали, что плазма с низким β обладает в стеллараторе гидромагнитным равновесием и гидромагнитной устойчивостью. Устойчивость плазмы в стеллараторе связана в основном со слабой перекрещенностью (широм) силовых линий, которая препятствует нарастанию желобковых мод. Простейший метод нагрева плазмы в стеллараторе и других тороидальных устройствах состоит в возбуждении в плазме тороидального тока. Это достигается быстрым изменением магнитного поля обычно с помощью железного сердечника, проходящего через центр тора. По существу плазменное кольцо представляет собой как бы вторичную обмотку трансформатора, состоящего из одного витка. Наведенный ток разогревает плазму в процессе омического (или джоулева) нагрева за счет сопротивления плазмы. Те же токи, которые нагревают плазму, возбуждают магнитное поле, которое уменьшает стабилизирующее действие стеллараторных полей. Действительно, если токи нагрева достаточно велики, вращательное преобразование может быть нарушено и равновесие плазмы будет отсутствовать.

Можно получить критерий устойчивости для стелларатора с током нагрева, аналогичный критерию Крускала — Шафранова. Когда ток нагрева создает магнитное поле, усиливающее вращательное преобразование, условие устойчивости имеет вид

$$\frac{B_{TA}}{L} (2\pi - \iota) > \frac{2I}{cA}.$$

Если вращение ослабляется, условие устойчивости записывается следующим образом:

$$\frac{B_T A \iota}{L} > \frac{2I}{cA};$$

здесь I — ток нагрева, L — длина большой окружности тора, A — радиус плазменного шнура, B_T — компонента магнитного поля вдоль плазмы, ι — угол вращательного преобразования, связанный с магнитным полем.

Оказывается, в стеллараторе можно выполнить критерий Крускала — Шафранова и исключить наиболее разрушительный тип гидромагнитной неустойчивости; однако ему все еще свойственны, по-видимому, кинетические неустойчивости, которые приводят к аномальному уходу плазмы. Другие схемы нагрева плазмы в стеллараторах до настоящего времени не смогли преодолеть такой уход плазмы. Иной подход к проблеме удержания плазмы в тороидальной конфигурации состоит в использовании плазменных токов для создания удерживающего магнитного поля, или по крайней мере для улучшения устойчивости плазмы.

16.3. Токамаки

Советские ученые предложили и стали разрабатывать определенное направление¹⁾ в исследованиях по удержанию плазмы в тороидальных магнитных конфигурациях, которое, очевидно, решает ряд проблем равновесия и устойчивости плазмы, присущих стеллараторной конфигурации. Их подход к тороидальному равновесию и устойчивости состоит в том, чтобы вместо внешних проводников использовать токи в плазме для создания магнитного поля, которое превращает чисто тороидальное поле в тороидально-полоидальное с нужным значением угла вращательного преобразования ι .

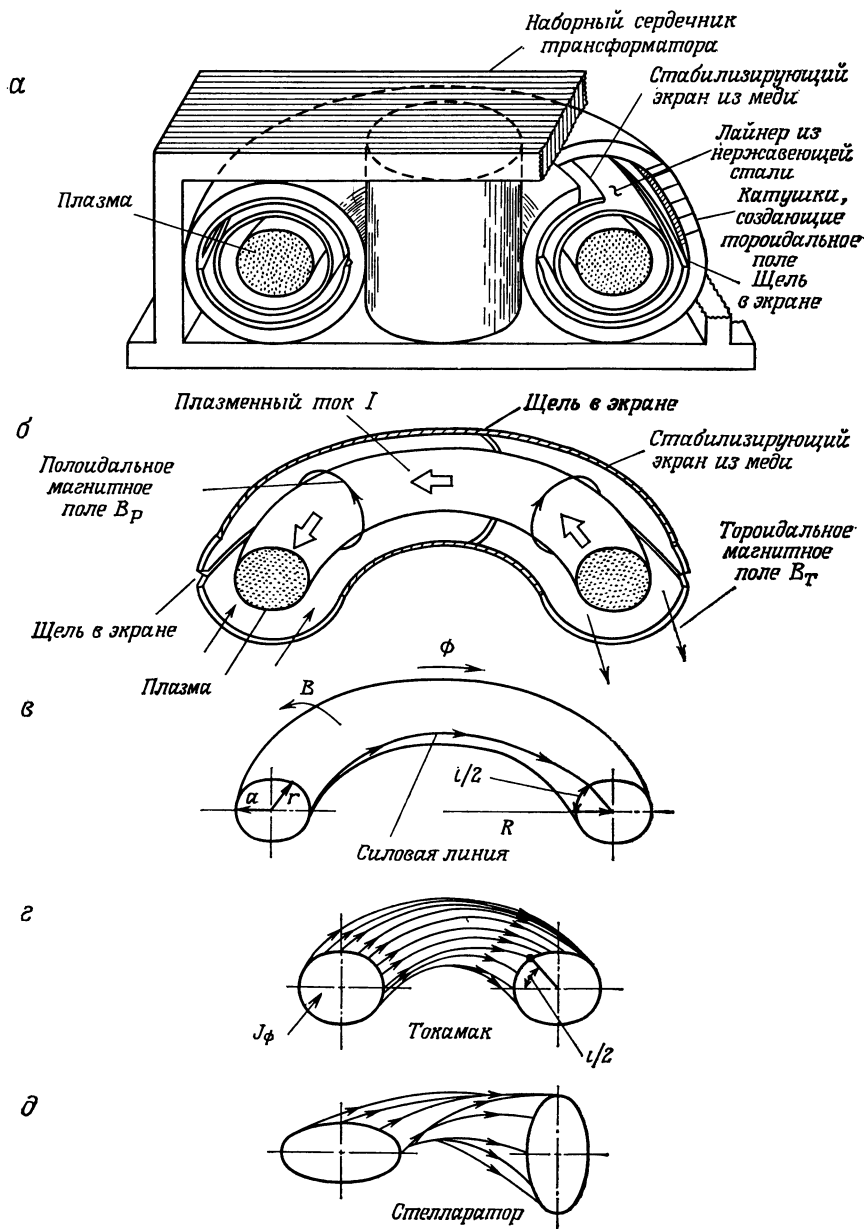
На фиг. 111 приведена схема установки *Токамак*. К тороидальному шнуру плазмы с низкой плотностью и низкой температурой прикладывается импульс сильного электрического поля в тороидальном направлении. Это электрическое поле возбуждает большой тороидальный ток, который создает полоидальное магнитное поле. На фиг. 111 проведено также сравнение магнитных полей в стеллараторе и токамаке. Конфигурация токамака имеет несколько больший шир и обладает большей внутренней симметрией, чем конфигурация стелларатора. Ток в нем нагревает плазму до относительно высокой температуры.

Результаты, полученные недавно на токамаках, вселили надежду на то, что высокотемпературную плазму можно удержать. В Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова на установке Т-3 получена плазма с плотностью $5 \cdot 10^{13}$ см⁻³, температурой ионов 600 эВ и временем удержания 20 мс [24*].

Для сравнения успехов, достигнутых в различных экспериментах по удержанию, в которых плазма уходит поперек силовых линий магнитного поля, пользуются величиной отношения экспериментального времени удержания в данном опыте к тому времени удержания, которое имело бы место при уходе плазмы за счет бомовской диффузии ($D_B \sim T/B$). Это отношение является важным параметром для экспериментов по управляемому синтезу, так как в настоящее время стало ясно, что не обязательно добиваться классической диффузии. Дело в том, что критерий Лоусона может быть удовлетворен в случае, если время удержания составляет $10^4 \tau_B$ (τ_B — время ухода за счет бомовской диффузии). На установке Т-3 достигнуто энергетическое время удержания порядка $100 \tau_B$. На базе этих успешных результатов советские ученые собираются (1972 г.) построить²⁾ установку Т-10, которая должна

¹⁾ Это направление развивалось под руководством Л. А. Арцимовича. — *Прим. ред.*

²⁾ В настоящее время произведен физический пуск установки Т-10 (см. статью Е. П. Велихова и Б. Б. Кадомцева в газете «Правда» от 4 июля 1975 г.). — *Прим. ред.*



Фиг. 111. Сравнение конфигураций магнитного поля в токамаке и стеллараторе.

a — тороидальная конструкция; *b* — распределение токов и магнитных полей в тороидальной конфигурации; *c* — тороидальная магнитная поверхность; показано кручение силовой линии; угол вращательного преобразования $\iota = IR_0^2/Ba^2$; запас устойчивости $q = 2\pi\iota > 1$; *e* — магнитная поверхность токамака; *d* — магнитная поверхность стелларатора.





ния высокотемпературной плазмы. Сначала в ней создается замкнутая магнитная конфигурация, обеспечивающая гидромагнитную устойчивость. Схема создания такого магнитного поля предусматривает инжекцию электронного пучка с энергией 4 МэВ и током 400 А на спиральные траектории поперек почти однородного магнитного поля. Пучок захватывается по принципу пробкотрона и образует оболочку длиной 10 м, называемую «*e*-слой». Если плотность электронного слоя достаточно велика, он будет действовать как токовая оболочка, создавая магнитное поле с направлением, противоположным направлению исходного поля. Когда ток в *e*-слое достаточно вырастет, внутреннее поле изменит направление на противоположное, при этом образуются силовые линии, замкнутые вокруг *e*-слоя, так что вблизи точки переключения поля имеется область с *минимумом* *B*. Как только создан *e*-слой, в установку инжектируется газообразный дейтерий (или тритий), где он будет ионизоваться и нагреваться релятивистскими электронами в *e*-слое. На фиг. 114 приведена фотография установки «Астроп», на которой видны катушки, предназначенные для создания первоначального магнитного поля, которое образует *e*-слой.

17.3. Сциллак

Некоторые свойства сильноточных разрядов обсуждались в гл. 3. В подобных разрядах образуется плотная плазма с $n > 10^{16}$ см⁻³ и температурой выше 1 кэВ. Такую плазму нельзя удержать в течение длительного времени, обычно время ее жизни около 1 мкс. Цель разработки специальных установок для термоядерных экспериментов состоит в достижении критерия Лоусона путем повышения плотности, а не в увеличении времени удержания. На сегодняшний день достигнуты значения nt около 10^{11} . Наиболее распространенный вариант таких экспериментов — θ -пинч. Хотя в θ -пинчах плазма и удерживается в радиальном направлении поперек магнитного поля, однако ей предоставляется возможность свободно вытекать на концах. В Лос-Аламосских научных лабораториях было предложено возможное решение проблемы концевых потерь путем замыкания θ -пинча в тороидальную конфигурацию ¹⁾.

17.4. DCX

Установка «DCX» в Окриджской национальной лаборатории представляет собой пробкотрон с постоянным магнитным полем. Создание плазмы происходит при инжекции пучка ионов H_2^+ с энергией 600 кэВ под прямым углом к оси пробкотрона в средней плоскости. Такие заряженные частицы, разумеется, вышли бы из статического магнитного поля, если бы они не диссоциировали при прохождении пучка через сильноточную дугу, которая зажигается вдоль магнитного поля пробкотрона. Таким путем создается плазма с огромной температурой (~ 300 кэВ), но с низкой плотностью ($\sim 10^9$ см⁻³), которая обладает очень сильной анизотропией температуры с соответствующими ограничениями, налагаемыми кинетической неустойчивостью (неустойчивостью Харриса), обсуждаемой в гл. 9.

В данной книге мы смогли описать лишь некоторые из многих экспериментов, которые были проведены в США и других странах, направленных на то, чтобы заставить плазму очутиться в той области температуры и плотности, где осуществимы экзотермические реакции ядерного синтеза.

¹⁾ Интересное решение проблемы концевых потерь предложили Г. И. Будкер с сотр. [25*]. Гофрировка магнитного поля, удерживающего плазму в радиальном направлении, должна приводить к уменьшению скорости разлета плазмы вдоль поля.— *Прим. ред.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Статистическая физика, изд-во «Наука», 1964.
2. *Bishop A. S.*, Project Sherwood. The US Program in Controlled Fusion, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958 (см. перевод: *А. Бишоп*, Проект Шервуд, Атомиздат, 1961).
3. *Pierce J. R., Heibenstein W. B.*, Bell Syst. Techn. Journ., **28**, 35 (1949).
4. *Davis J. A., Bers A.*, Proc. Symp. Turbulence of Fluids and Plasmas, Brooklyn, vol. **18**, 1968, p. 87.
5. *Rayleigh*, Phil. Mag., **32**, 529 (1916).
6. *Rosenbluth M. N., Longmire C. L.*, Ann. Phys., **1**, 120 (1957).
7. *Кадо́мцев Б. Б.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 2, Атомиздат, 1963, стр. 132.
8. *Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrad R. M.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A244**, 17 (1958).
9. *Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г.*, Nucl. Fusion, **1962**, Suppl. Part 3, 1045 (1962).
10. Proc. of the Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, vol. **31, 32**, Geneva, 1958.
11. *Rose D. J., Clark M., Jr.*, Plasma and Controlled Fusion, Wiley, New York, 1961.
12. *Lawson J. D.*, Proc. Phys. Soc. (London), **B70**, 6 (1957).
13. *Gibson G., Jordan W., Lauer E. J.*, Phys. Rev. Letters, **5**, 141 (1960).¹
14. *Judd D., MacDonald W. M., Rosenbluth M. N.*, USAEC Report WASH-289, Conf. on Controlled Thermonuclear Reactions, Calif., February 1955.
15. *Siambis J. G., Trivelpiece A. W.*, Phys. Fluids, **8**, 2047 (1965).
16. *Coensgen F. H., Cummins W. F., Ellis R. E., Nexsen W. E.*, Proc. 3rd Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., vol. **1**, Vienna, 1969, p. 225.
17. *Gibson A., Hugill J., Reid G. W.*, Phys. Rev. Letters, **21**, 1052 (1968).
18. *Damm C. C. et al.*, Proc. 3rd Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., Vienna, 1969.
19. *Beal J. W. et al.*, Proc. 3rd Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., vol. **1**, Vienna, 1969.
- 20*. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций (под ред. М. А. Леонтовича), т. I — IV, изд-во АН СССР, 1958.
- 21*. *Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б.*, ЖЭТФ, **21**, 1262 (1951).
- 22*. *Шафранов В. Д.*, Атомная энергия, **5**, 38 (1956).
- 23*. *Будкер Г. И.*, в книге «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 3, изд-во АН СССР, 1958.
- 24*. *Кадо́мцев Б. Б.*, Труды 6-й европейской конференции по физике плазмы, т. 2, М., 1973.
- 25*. *Будкер Г. И.*, Труды 6-й европейской конференции по физике плазмы, т. 2, М., 1973, стр. 136.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Арцимович Л. А.*, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, 1961.
- Lehnert B.*, Plasma Physics, **9**, 301 (1967).
- Linhart J. G.*, Plasma Physics, European Atomic Energy Commission, Euratom, 1969.
- Longmire C. L.*, Elementary Plasma Physics, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: *К. Лонгмайр*, Физика плазмы, Атомиздат, 1966).
- Montgomery D. C., Tidman D. A.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Post R. F.*, Rev. Mod. Phys., **28**, 338 (1956).
- Rose D. J., Clark M. Jr.*, Plasma and Controlled Fusion, Wiley, New York, 1961.
- Rostoker N.*, в книге Plasma Physics in Theory and Application (ed. W. B. Kunkel), McGraw-Hill, New York, 1966.
- Schmidt G.*, Physics of High Temperature Plasmas, Academic, New York, 1966.
- Simon A.*, An Introduction to Thermonuclear Research, Pergamon, New York, 1960.
- Spitzer L., Jr.*, Physics of Fully Ionized Gases, 2nd ed., Interscience, New York, 1965 (см. перевод: *Л. Спитцер*, Физика полностью ионизованного газа, ИЛ, 1957).
- Thompson W. B.*, An Introduction to Plasma Physics, Pergamon, New York, 1962.

Три обширных обзора по удержанию плазмы опубликованы в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965: *Furth H. P.*, «Experiments in Toroidal Plasma Confinement», p. 411. *Иоффе М. С.*, «Mirror Traps», p. 421. *Taylor J. B.*, «Plasma Confinement in Magnetic Wells», p. 449.

ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ

Свойства плазмы нетривиальным образом зависят от одновременного взаимодействия большого числа частиц. В предыдущих главах было показано, что для упрощения исследований плазмы можно выделить два типа взаимодействий, проявляющихся разными путями. Слабое дальнедействующее взаимодействие одновременно большого числа плазменных частиц вносит вклад в средние электрическое и магнитное поля. Сильное короткодействующее парное взаимодействие между двумя заряженными частицами входит в уравнения в виде особого оператора парных столкновений. В большинстве рассмотренных случаев этот столкновительный член отбрасывают в уравнениях на том основании, что целый ряд плазменных явлений (например, квазистационарные состояния, волны и неустойчивости) разворачивается на масштабах времени, много меньших того времени, за которое свойства плазмы смогут измениться за счет близких столкновений.

При изучении плазмы на масштабах времени, более коротких, чем время между парными столкновениями, обнаруживается целая область коллективных свойств плазмы, которые отличают ее от других состояний вещества. Важно, однако, не упускать из виду тот факт, что, если наблюдать за плазмой в течение больших промежутков времени, она в конце концов в результате столкновений приходит в состояние термодинамического равновесия со своим окружением. Например, устойчивая плазма, удерживаемая магнитным полем, в конечном счете за счет диффузии распределяется однородно в окружающем пространстве.

Макроскопические уравнения плазмы являются уравнениями переноса в том смысле, что они описывают поток импульса, энергии и т. д. Однако термин «явления переноса» употребляется в физике плазмы обычно для обозначения свойств плазмы, связанных со столкновительными эффектами, т. е. таких свойств, как электропроводность, теплопроводность, диффузия частиц поперек или вдоль магнитного поля и т. д. Во многих плазменных задачах поведение плазмы определяется влиянием нейтральных атомов или молекул. Например, диффузия электронов в редкой низкотемпературной частично ионизованной плазме определяется главным образом столкновениями электронов с нейтрами. Кроме того, разнообразные процессы в плазме происходят в результате ионизации при столкновениях и электрон-ионной рекомбинации.

В проблеме явлений переноса в плазме имеются два аспекта. Первый из них связан с вычислением различных коэффициентов переноса на основании соответствующего статистического описания и анализа механизмов, приводящих к этим явлениям. Другой аспект состоит в том, чтобы с помощью полученных коэффициентов рассчитать ожидаемую макроскопическую картину поведения плазмы при данных начальных и граничных условиях.

В настоящей главе мы рассмотрим только те явления переноса, которые связаны с истинными парными столкновениями. Важная область физики плазмы посвящена изучению аномальных процессов переноса, в которых

плазменные неустойчивости обуславливают эффекты, аналогичные в некотором роде эффектам многочастичных столкновений. Эти вопросы мы обсудим кратко в гл. 10.

Обычный подход при изучении явлений переноса в плазме заключается в том, чтобы вместо точного расчета использовать модель, которая отражает физические характеристики парного столкновения и в то же время позволяет упростить математические выкладки. В следующих параграфах мы подробно рассмотрим две такие модели. Первая из них, модель Фоккера — Планка, пригодна для расчета переноса в полностью ионизованном газе. Она основана на том, что в полностью ионизованной плазме отклонение частицы на большой угол в процессе рассеяния происходит в основном за счет последовательности малоугловых столкновений с удаленными частицами. Для обоснования этой модели, прежде чем излагать теорию Фоккера — Планка, следующие два параграфа мы посвятим изучению динамики кулоновского рассеяния. В последующих параграфах обсуждается вторая модель, более пригодная для расчета переноса в слабоионизованном газе. Согласно этой модели, заряженные частицы отклоняются в процессе единичных столкновений с нейтральными атомами, а не за счет многократного рассеяния с другими заряженными частицами. При этом справедлива больцмановская форма интеграла столкновений и последняя модель после дальнейших упрощений используется для определения кинетических свойств в слабоионизованной плазме.

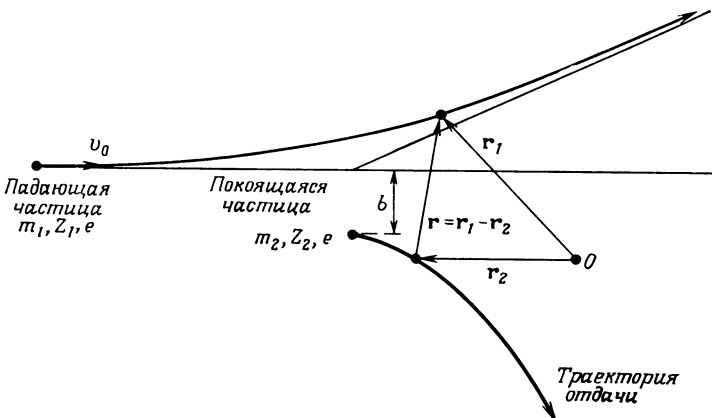
§ 1. ПАРНЫЕ КУЛОНОВСКИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

В полностью ионизованной плазме динамика нерелятивистского столкновения между любыми двумя заряженными частицами целиком определяется их зарядами Z_1e и Z_2e , массами m_1 и m_2 , относительной скоростью v_0 и прицельным параметром b этих двух частиц. Рассмотрим диаграмму столкновения, изображенную на фиг. 115, где схематически представлены траектории двух частиц с одноименным зарядом, причем частица с m_2 вначале покоится. Пусть угол рассеяния налетающей частицы равен $\Delta\theta$. Запишем нерелятивистские уравнения движения для двух заряженных частиц

$$\frac{m_1 d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (6.1.1)$$

и

$$\frac{m_2 d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (6.1.2)$$



Фиг. 115. Диаграмма столкновения двух заряженных частиц.

Эту систему уравнений можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{m_1 d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \frac{m_2 d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = (m_1 + m_2) \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0 \quad (6.1.3)$$

и

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad (6.1.4)$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Уравнение (6.1.3) означает, что центр масс (ц. м.), расположенный в точке \mathbf{R} , движется с постоянной скоростью. Уравнение (6.1.4) показывает, что вектор относительного расстояния \mathbf{r} изменяется таким же образом, как если бы он описывал движение одной частицы с приведенной массой $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ в поле неподвижного центра. Решение уравнения (6.1.4), выраженное в полярных координатах, имеет вид

$$\frac{1}{r} = B \cos(\theta + \alpha) - \frac{A}{v_0^2 b^2}, \quad (6.1.5)$$

здесь $A = Z_1 Z_2 e^2 / \mu$. Константы B и α определяются из начальных условий: $\theta_0 = \pi$, $r_0 = \infty$, $\dot{r}_0 = -v_0$, $r_0^2 \dot{\theta}_0 = -v_0 b$. Для этих начальных условий находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2 b}{A} \quad (6.1.6)$$

и

$$B = \sqrt{\frac{1 + A^2 / v_0^4 b^2}{b^2}}. \quad (6.1.7)$$

Асимптотическое значение угла рассеяния θ_c при $r = \infty$ следует из решения (6.1.5), откуда

$$B \cos(\theta_c + \alpha) = \frac{A}{v_0^2 b^2}. \quad (6.1.8)$$

Подставляя сюда начальные условия, получаем одно из решений этого уравнения, а именно $\theta_c = \pi$. Другое решение есть $\theta_c = \pi - 2\alpha$, так как $\cos(\pi + \alpha) = \cos(\pi - \alpha)$. С учетом уравнения (6.1.6) угол рассеяния в с. ц. м. при кулоновском столкновении дается выражением

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v_0^2 b}. \quad (6.1.9)$$

Следует заметить, что угол рассеяния зависит только от прицельного параметра и начальной скорости и не зависит от знака силы взаимодействия.

Все частицы, налетающие на покоящуюся частицу и пересекающие кольцо с внутренним радиусом b и внешним $b + db$, рассеиваются на угол, лежащий в пределах от θ_c до $\theta_c + d\theta_c$. Из определения дифференциального сечения рассеяния следует, что поток частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega$, равен

$$d\sigma(\theta_c) = \sigma(\theta_c) d\Omega = \sigma(\theta_c) 2\pi \sin \theta_c d\theta_c; \quad (6.1.10)$$

здесь мы учли, что $\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta_c)$. Поток налетающих частиц равен $2\pi b db$; в силу сохранения числа частиц имеем $2\pi b db = \sigma(\theta_c) 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$, откуда

$$\sigma(\theta_c) = \frac{b}{\sin \theta_c} \frac{db}{d\theta_c}. \quad (6.1.11)$$

Используя выражение (6.1.9), получаем

$$\sigma(\theta_c) = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu v_0^2 \sin^2(\theta_c/2)} \right)^2. \quad (6.1.12)$$

Последнее выражение называется формулой Резерфорда и дает дифференциальное сечение кулоновского рассеяния. В случае полностью ионизованной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, угол рассеяния электрона, движущегося со скоростью v_0 , на неподвижном однозарядном ионе, согласно (6.1.9), записывается следующим образом:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{e^2}{m_e v_0^2 b}. \quad (6.1.13)$$

Удобно определить рассеяние на большой угол, или близкое столкновение, как соударение с углом отклонения налетающей частицы на 90° и больше. Прицельный параметр, соответствующий рассеянию на 90° , равен

$$b_0 = \frac{e^2}{m_e v_0^2}, \quad (6.1.14)$$

а поперечное сечение рассеяния частицы на угол 90° и больше при одном столкновении имеет вид

$$\sigma_{90^\circ} = \pi b_0^2 = \pi \left(\frac{e^2}{m_e v_0^2} \right)^2 \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-20}}{W_{\text{кэВ}}^2} \text{ см}^2. \quad (6.1.15)$$

2. ОТКЛОНЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ КУЛОНОВСКИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Рассеяние на большой угол при одном столкновении, рассмотренное в предыдущем параграфе, в полностью ионизованной плазме значительно менее вероятно, чем среднее отклонение на большой угол за счет совокупного эффекта большого числа малоугловых рассеяний, которые испытывает электрон при своем движении вдоль траектории. Для того чтобы продемонстрировать этот эффект, сравним сечение рассеяния (6.1.15) с сечением рассеяния электрона на полный угол 90° за счет последовательности малоугловых рассеяний.

Для нахождения сечения рассеяния при многократных кулоновских столкновениях электронов с массивными ионами, обладающими зарядом Ze , рассмотрим электрон, который первоначально двигался вдоль оси z . В результате указанных выше слабых столкновений пробный электрон по мере своего продвижения через плазму набирает поперечную скорость. После N таких столкновений

$$\Delta v_x = \sum_{i=1}^N (\Delta v_x)_i. \quad (6.2.1)$$

При малоугловых столкновениях величина $\Delta(mv)$ мала по сравнению с начальным импульсом. Из (6.1.13) находим угол рассеяния при одном малоугловом столкновении (большой прицельный параметр)

$$\Delta\theta = \frac{2Ze^2}{mv_0^2 b}. \quad (6.2.2)$$

Если пробная частица движется через плазму, в которой на 1 см^3 приходится n рассеивающих центров, среднее отклонение будет равно нулю, поскольку каждое единичное отклонение по предположению носит случайный характер. Однако среднеквадратичное отклонение отлично от нуля, и мы имеем случайное блуждание по углу, уводящее от направления начального движения пробной частицы.

Рассмотрим такое движение пробной частицы, при котором она испытывает последовательность рассеяний на углы, большие некоторого минимального значения $\Delta\theta_{\text{мин}}$ и меньше некоторого максимального значения $\Delta\theta_{\text{макс}}$ (причину того, почему мы ограничились рассмотрением определенного диапазона углов рассеяния, мы объясним ниже).

Среднеквадратичное отклонение угла рассеяния пробной частицы, проникающей в плазму на глубину L , имеет вид

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle = \int_{\Delta\theta_{\text{мин}}}^{\Delta\theta_{\text{макс}}} (\Delta\theta)^2 F(\Delta\theta) d(\Delta\theta); \quad (6.2.3)$$

здесь $F(\Delta\theta) d(\Delta\theta)$ — число столкновений, приводящих к рассеянию на угол, близкий к $\Delta\theta$ в диапазоне углов $d(\Delta\theta)$. Рассматриваемые максимальное и минимальное значения угла рассеяния связаны с определенными прицельными параметрами, т. е. $\Delta\theta_{\text{макс}} = 2e^2/mv_0^2 b_{\text{мин}}$ и $\Delta\theta_{\text{мин}} = 2e^2/mv_0^2 b_{\text{макс}}$. Число столкновений, выраженное через прицельный параметр и расстояние L , пройденное пробной частицей, записывается в виде

$$F(\Delta\theta) d(\Delta\theta) = nL2\pi b db,$$

поскольку оно равно числу рассеивающих центров в цилиндрическом слое длиной L , радиусом b и толщиной db . Таким образом,

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle = \frac{8\pi nLZ^2e^4}{m_e^2v_0^4} \int_{b_{\text{мин}}}^{b_{\text{макс}}} \frac{db}{b} = \frac{8\pi nLZ^2e^4}{m_e^2v_0^4} \ln \frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}}. \quad (6.2.4)$$

Из выражения (6.2.4), которое расходится при $b_{\text{макс}} \rightarrow \infty$, можно понять, почему мы рассматривали рассеяние только на углы, находящиеся в диапазоне $\Delta\theta_{\text{макс}} > \Delta\theta > \Delta\theta_{\text{мин}}$ (что в действительности накладывает ограничение на прицельный параметр при вычислении среднеквадратичного отклонения). Такая расходимость является обычной для сечения кулоновского рассеяния на малые углы и следует из дальнедействующего характера кулоновского потенциала. В плазме данная расходимость устраняется путем следующего рассуждения: потенциал взаимодействия между пробной частицей и частицей плазмы равен не $\varphi = -e^2/r$, а $\varphi = -(e^2/r) \exp(-r/\lambda_D)$, поскольку в плазме имеется дебаевское экранирование частиц. По этой причине выражение (6.2.4) справедливо только для значений прицельного параметра, не превышающих дебаевский радиус экранирования. Для больших значений b угол рассеяния пренебрежимо мал. Следовательно, разумное приближение состоит в выборе

$$b_{\text{макс}} = \lambda_{De} = \left(\frac{\kappa T}{4\pi n e^2} \right)^{1/2}. \quad (6.2.5)$$

Хотя очевидно, что использование ответа для кулоновского потенциала φ путем обрезания последнего на λ_D есть приближение, однако оно существенно упрощает задачу [позволяя избежать расчета рассеяния, исходя из вида потенциала $\varphi = -(e^2/r) \exp(-r/\lambda_D)$]. Поскольку выражение (6.2.4) зависит от $b_{\text{макс}}$ только логарифмически, ответ мало чувствителен к точному значению выбранного $b_{\text{макс}}$. Ограничение $b > b_{\text{мин}}$ было наложено для того, чтобы, исключив самые малые значения b , можно было аппроксимировать угол рассеяния выражением $\Delta\theta/2 \approx e^2/m_e v_0^2 b$ вместо $\Delta\theta/2 = \text{arctg}(e^2/m_e v_0^2 b)$. Это приближение справедливо в случае $\Delta\theta \ll 1$, поэтому, считая грубо $(\Delta\theta/2)_{\text{макс}} = 1$ и $m_e v_0^2 = 3\kappa T$, получаем

$$b_{\text{мин}} \approx \frac{Ze^2}{m_e v_0^2} \approx \frac{Ze^2}{3\kappa T}.$$

Так как квантовые эффекты в предыдущем рассмотрении не учитывались, в качестве $b_{\text{мин}}$ в том случае, когда $e^2/m_e v_0^2$ меньше дебройлевской длины волны, следует выбрать последнюю величину. Логарифмическая зависимость $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ от $b_{\text{мин}}$ снова оправдывает такое нестрогое рассмотрение вклада в $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ рассеяний на большие углы. Использование этих оценок для $b_{\text{макс}}$ и $b_{\text{мин}}$ дает

$$\langle(\Delta\theta)^2\rangle = \left(\frac{8\pi n Z^2 e^4}{m_e^2 v_0^4} \ln \Lambda \right) L, \quad (6.2.6)$$

где ¹⁾

$$\Lambda \equiv \frac{3}{2} \left(\frac{\kappa^3 T^3}{\pi n_e} \right)^{1/2} \frac{1}{Z e^3}, \quad (6.2.7)$$

а L — расстояние, пройденное пробной частицей в плазме.

Согласно выражению (6.2.6), средний угол отклонения пробной частицы возрастает по мере проникновения ее в плазму, т.е. $\langle(\Delta\theta)^2\rangle$ растет с L . Полагая $\langle(\Delta\theta)^2\rangle = 1$, можно получить приближенное значение длины пробега пробной частицы по отношению к рассеянию за счет случайных отклонений на угол 90° :

$$L_{90^\circ} \approx \left[8\pi n \left(\frac{e^2}{m_e v_0^2} \right)^2 \ln \Lambda \right]^{-1}. \quad (6.2.8)$$

Сечение многократного кулоновского рассеяния на угол 90° определяется обычно следующим образом:

$$\sigma_{90^\circ} \equiv \frac{1}{n L_{90^\circ}} = 8\pi \left(\frac{Z e^2}{m_e v_0^2} \right)^2 \ln \Lambda. \quad (6.2.9)$$

Сравнение последнего результата с выражением (6.1.15) показывает, что многократное рассеяние превалирует над однократным в процессе среднего отклонения пробной частицы.

Отношение сечения многократного рассеяния к сечению однократного рассеяния имеет вид

$$\frac{\sigma_{90^\circ \text{М}}}{\sigma_{90^\circ \text{С}}} = 8 \ln \Lambda. \quad (6.2.10)$$

Данное отношение слабо зависит от величины Λ ; $\ln \Lambda$ сохраняет приблизительно постоянное значение в широкой области параметров. Для лабораторной плазмы в большинстве случаев значение $\ln \Lambda$ находится в пределах от 10 до 20. Для иллюстрации в табл. 3 приведены значения $\ln \Lambda$ в случае

ЗНАЧЕНИЯ $\ln \Lambda$

Таблица 3

Т, К	Плотность электронов n_e , см ⁻³								
	1	10 ³	10 ⁶	10 ⁹	10 ¹²	10 ¹⁵	10 ¹⁸	10 ²¹	10 ²⁴
10 ²	16,3	12,8	9,43	5,97	—	—	—	—	—
10 ³	19,7	16,3	12,8	9,43	5,97	—	—	—	—
10 ⁴	23,2	19,7	16,3	12,8	9,43	5,97	—	—	—
10 ⁵	26,7	23,2	19,7	16,3	12,8	9,43	5,97	—	—
10 ⁶	29,7	26,3	22,8	19,3	15,9	12,4	8,96	5,54	—
10 ⁷	32,0	28,5	25,1	21,6	18,1	14,7	11,2	7,85	4,39
10 ⁸	34,3	30,9	27,4	24,0	20,5	17,0	13,6	10,1	6,69

¹⁾ В литературе величину $\ln \Lambda$ часто называют кулоновским логарифмом. Заметим, что Λ с точностью до численного множителя совпадает с большим параметром плазменного приближения — дебаевским числом N_D , а именно $\Lambda = 24\pi \cdot N_D \gg 1$. — *Прим. ред.*

$Z = 1$. Таким образом, отклонение частицы в плазме на большой угол за счет последовательности большого числа малоугловых рассеяний, имеющих место при движении частицы сквозь плазму, происходит с вероятностью, в сто раз большей, чем вероятность отклонения вследствие одного парного столкновения.

Сечение такого многократного кулоновского рассеяния в плазме определяется приближенно следующей формулой ($\ln \Lambda = 20$, $Z = 1$):

$$\sigma_{90^\circ} \approx \frac{2,6 \cdot 10^{-18}}{W_{\text{кэВ}}^2} \text{ см}^2. \quad (6.2.11)$$

Так, в плазме с температурой 100 кэВ сечение кулоновского рассеяния составляет $2,6 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2$, что превышает сечение D — D-реакции синтеза, равное $\sigma_{\text{DD}} \approx 10^{-26} \text{ см}^2$. Следовательно, кулоновские столкновения, приводящие к потере частиц за счет диффузии, происходят чаще, чем столкновения, приводящие к реакции синтеза. При исследовании управляемого синтеза важно не только исключить неустойчивости, вызывающие быстрый уход частиц, но и понять, какую роль играют потери за счет столкновительной диффузии, поскольку избавиться от них невозможно.

Если упомыная выше плазма имела бы плотность 10^{14} см^{-3} , средняя длина свободного пробега электронов относительно столкновений составляла бы около 10^8 см и соответствующая частота столкновений была бы около 20 с^{-1} . Таким образом, столкновения электронов происходят не слишком часто в масштабах времен, намного превышающих временные масштабы современных экспериментов по удержанию редкой плазмы, поэтому использование модели «бесстолкновительной» плазмы, по-видимому, вполне разумно.

§ 3. ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ, ОСНОВАННАЯ НА УРАВНЕНИИ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Тот факт, что отклонение заряженной частицы в плазме на большой угол происходит в процессе последовательных малоугловых рассеяний, а не за счет однократного парного столкновения, позволяет построить модель диффузии, электропроводности и прочих явлений переноса в полностью ионизованной плазме. Эта теория основана на применении уравнения Фоккера — Планка. В настоящем параграфе мы дадим вывод этого уравнения, исходя из интуитивных соображений¹⁾ [1, 10*]. Строгий анализ столкновений, приводящий к уравнению Ленарда — Балеску, основан на последовательном разложении кинетических уравнений (п. 1.12 гл. 3) с учетом членов порядка $q = 1/n\lambda^3$ и представлен в § 11 гл. 11. Он приводит к уравнению Ленарда — Балеску. Там же показано, что теория, основанная на уравнении Фоккера — Планка, служит хорошим приближением и значительно проще точной теории.

Диффузия в плазме определяется не случайным блужданием одной частицы среди окружающих ее покоящихся частиц, а изменением распределения $f(\mathbf{v}, t)$ в результате многократных малоугловых рассеяний, происходящих между частицами, имеющими различные скорости, а именно те скорости, которые соответствуют распределению $f(\mathbf{v}, t)$. Если $F(\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v})$ — вероятность того, что скорость частицы \mathbf{v} за время Δt изменится на $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, то функция распределения в момент времени t выражается через функцию распределения в момент $t - \Delta t$ следующим образом:

$$f(\mathbf{v}, t) = \int f(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, t - \Delta t) F(\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}, \Delta\mathbf{v}) d(\Delta\mathbf{v}). \quad (6.3.1)$$

¹⁾ Корректный вывод интеграла столкновений в плазме с учетом малоуглового характера кулоновского рассеяния был впервые проведен Л. Д. Ландау [12*]. — *Прим. ред.*

При этом предполагают, что $f(\mathbf{v}, t)$ изменяется только за счет столкновений.

Если основной эффект при столкновениях дают малоугловые рассеяния, то можно считать, что изменение скорости $\Delta \mathbf{v}$ за малый промежуток времени Δt мало, и выражение (6.3.1) можно записать в виде следующего разложения:

$$f(\mathbf{v}, t) = \int \left\{ f(\mathbf{v}, t) F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) - \Delta t F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [f(\mathbf{v}, t) F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \Delta v_i \Delta v_k \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} [f(\mathbf{v}, t) F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})] + \dots \right\} d(\Delta \mathbf{v}). \quad (6.3.2)$$

Здесь вероятность F нормирована, т. е. $\int F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) d(\Delta \mathbf{v}) = 1$; кроме того, в выражении (6.3.2) учитывается изменение f только за счет столкновений. В силу этого (6.3.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = \frac{1}{\Delta t} \int \left(-\Delta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f F + \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \Delta v_i \Delta v_k \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} f F \right) d(\Delta \mathbf{v}). \quad (6.3.3)$$

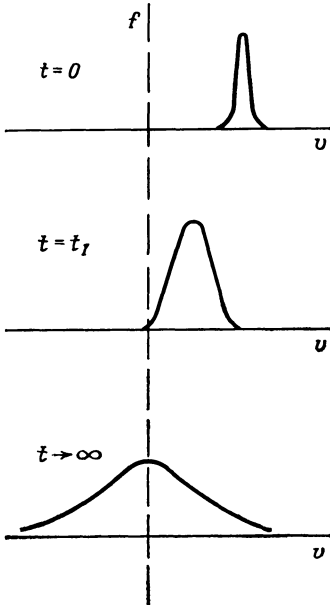
Вводя изменение моментов плотности вероятности $F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v})$ (как функции $\Delta \mathbf{v}$) в единицу времени

$$\left\langle \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \int f(\mathbf{v}, t) F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \Delta \mathbf{v} d(\Delta \mathbf{v}) \quad (6.3.4)$$

и

$$\left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_k}{\Delta t} \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \int f(\mathbf{v}, t) F(\mathbf{v}, \Delta \mathbf{v}) \Delta v_i \Delta v_k d(\Delta \mathbf{v}), \quad (6.3.5)$$

можно записать скорость изменения функции f со временем следующим образом:



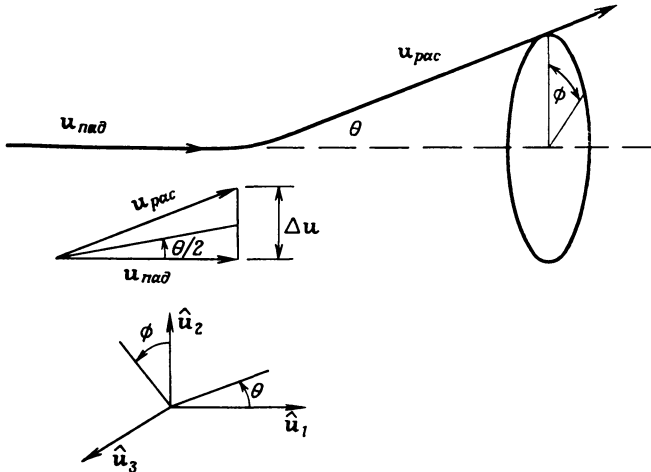
$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left\langle \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right\rangle f(\mathbf{v}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i, k} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k} \left[\left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_k}{\Delta t} \right\rangle f(\mathbf{v}, t) \right]; \quad (6.3.6)$$

здесь мы пренебрегли членами порядка $(\Delta v)^3$.

В термодинамическом равновесии система удовлетворяет уравнению $(\partial f / \partial t)_{\text{столк}} = 0$. Система, не находящаяся в состоянии равновесия, может эволюционировать двумя путями. Во-первых, может уменьшаться (или увеличиваться) скорость некоторой группы частиц. Этот эффект сродни динамическому трению. Он описывается первым слагаемым в правой части уравнения (6.3.6) и пропорционален $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle$. Во-вторых, распределение по скоростям может расширяться. Это можно было бы назвать диффузией по скоростям, которая определяется в уравнении Фоккера — Планка членом, пропорциональным $\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle$. На фиг. 116 показано, как деформировалась бы за счет столкновений функция распределения группы почти моноэнергетических пробных частиц небольшой плотности, впрыснутых в покоящуюся плазму.

Фиг. 116. Временное изменение функции распределения по скоростям пучка электронов с одинаковой начальной энергией, происходящее за счет столкновений электронов с частицами покоящейся плазмы.

Уравнение Фоккера — Планка (6.3.6) справедливо для любой системы, в которой столкновения приводят только к малым изменениям



Фиг. 117. Система координат в пространстве скоростей, используемая при вычислении изменения функции распределения при столкновениях.

скорости частиц \mathbf{v} , а существенные изменения происходят лишь в результате многих небольших изменений.

Уравнение (6.3.6) можно применить к плазме. Для этого необходимо выразить величины $\langle \Delta \mathbf{v} / \Delta t \rangle$ и $\langle \Delta v_i \cdot \Delta v_j / \Delta t \rangle$ через величины, характеризующие столкновения частиц в плазме. Это делается точно таким же способом, как и вычисление $\langle (\Delta \theta)^2 \rangle$, приведенное в предыдущем параграфе. Рассмотрим пробную частицу, движущуюся со скоростью \mathbf{v}_T среди частиц плазмы, скорость которых равна \mathbf{v} .

Чтобы найти среднюю скорость изменения \mathbf{v}_T при движении пробной частицы сквозь плазму, необходимо провести два усреднения. Во-первых, нужно рассмотреть взаимодействие этой частицы с «полевыми» частицами, движущимися с одинаковой скоростью \mathbf{v} . Эти полевые частицы могут иметь любые прицельные параметры по отношению к пробной частице. Поэтому первое усреднение взаимодействия пробной частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v}_T , с множеством полевых частиц должно быть произведено по прицельным параметрам; обозначим это среднее значение через $(\Delta v_i)_T$. Во-вторых, следует усреднить полученное среднее изменение скорости \mathbf{v}_T при взаимодействии со всеми частицами, которые движутся со скоростью \mathbf{v} , по распределению этих частиц, пользуясь тем фактом, что плотность частиц со скоростью \mathbf{v} равна $f(\mathbf{v})$, так что среднее значение изменения скорости $\Delta \mathbf{v}$, взятое по распределению полевых частиц, имеет вид (индексы i и j обозначают компоненты вектора)

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_i \rangle_T &= \int (\Delta v_i)_T n f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \\ \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_T &= \int (\Delta v_i \Delta v_j)_T n f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Вычисление таких средних легче всего проводить в с. п. м. (переходя затем обратно в лабораторную систему, чтобы получить $\langle \Delta \mathbf{v} \rangle_T$). Пусть \mathbf{u} — относительная скорость движения пробной и полевой частиц в с. п. м., а θ — угол рассеяния, как показано на фиг. 115. Вектор $\Delta \mathbf{u}$ имеет три компоненты, которые в цилиндрической системе координат с осью z , направленной вдоль начальной скорости падающей частицы $u_{пад}$, связаны с углом рассеяния θ и полярным углом ϕ (фиг. 117) при малоугловом рассеянии сле-

дующим образом:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u} = -|\Delta u| \sin \frac{\theta}{2} \approx -(u\theta) \frac{\theta}{2},$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u} = |\Delta u| \cos \frac{\theta}{2} \sin \phi \approx u\theta \sin \phi,$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \Delta \mathbf{u} = |\Delta u| \cos \frac{\theta}{2} \cos \phi \approx u\theta \cos \phi.$$

Среднее значение этих изменений скорости, получаемое усреднением по прицельным параметрам, вычисляется так же, как и в предыдущем параграфе; угол рассеяния θ связан с прицельным параметром b соотношением

$$\theta = \frac{2q_T q_F}{\mu u^2 b} \quad (6.3.8)$$

[здесь $\mu = m_T m_F / (m_T + m_F)$ — приведенная масса пробной и полевой частиц]. Число рассеивающих центров, встречаемых за время Δt (за которое пробная частица проходит расстояние $u\Delta t$) и приводящих к рассеянию на угол θ , равно

$$N = [\bar{n} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}] u \Delta t d\phi b db. \quad (6.3.9)$$

Следовательно, среднее изменение скорости ($\Delta \mathbf{u}$) пробной частицы, отнесенное к одной полевой частице, движущейся со скоростью \mathbf{v} в с. ц. м.,

$$\mathbf{u}_0 \cdot (\Delta \mathbf{u}) = \frac{4\pi \bar{n}_F q_F^2 q_T^2}{\mu^2 u^2} \Delta t \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = \frac{4\pi \bar{n}_F q_F^2 q_T^2}{\mu^2 u^2} \Delta t \ln \Lambda, \quad (6.3.10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot (\Delta \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot (\Delta \mathbf{u}) = 0. \quad (6.3.11)$$

В формуле (6.3.10)

$$\Lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{\kappa^3 T^3}{\pi n} \right)^{1/2} \frac{r_1}{Ze^3},$$

а обоснование приближения, заключающегося в замене $\int db/b$ на $\ln \Lambda$, мы обсудили в предыдущем параграфе после выражения (6.2.4). Равенство нулю выражений (6.3.11) следует из симметрии рассеяния по полярному углу ϕ .

Рассмотрим выражение (6.3.10) в лабораторной системе, что необходимо для определения изменения скорости пробной частицы $\Delta \mathbf{v}_T$. Для этого совершим следующее преобразование:

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{U} + \frac{m_F}{m_T + m_F} \mathbf{u},$$

где \mathbf{v} — скорость центра масс, m_T и m_F — массы пробной и полевой частиц соответственно. Отсюда следует, что $\Delta \mathbf{v}_T = \Delta \mathbf{u} m_F / (m_T + m_F)$ и, таким образом,

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_T}{\Delta t} = \frac{4\pi \bar{n}_F q_F^2 q_T^2 \mathbf{u}}{m_T \mu u^3} \ln \Lambda.$$

Аналогичное вычисление дает следующий результат:

$$(\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}) = (\hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \Delta \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \Delta \mathbf{u}) = \frac{4\pi \bar{n}_F q_F^2 q_T^2}{\mu^2 u} \Delta t \ln \Lambda,$$

$$(\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \Delta \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}}_j \cdot \Delta \mathbf{u}) = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

$$(\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u}) \ll (\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}) (\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}).$$

В лабораторной системе координат этот результат сводится к следующему:

$$[\Delta v_i \Delta v_k] = \frac{4\pi \bar{n}_F q_T^2 q_F^2 \Delta t}{m_T^2 u} \left(\delta_{ik} - \frac{u_i u_k}{u^2} \right) \ln \Lambda. \quad (6.3.12)$$

Задача 6.3.1. В каком приближении можно пренебречь величиной $(\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \Delta \mathbf{u})^2$ по сравнению с $(\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \Delta \mathbf{u})^2$?

Усредняя с помощью функции распределения рассеивающих частиц по скоростям, из выражения (6.3.7) определяют коэффициенты, необходимые для завершения описания столкновительных эффектов с помощью уравнения Фоккера — Планка в полностью ионизованной плазме:

$$\left\langle \frac{\Delta \mathbf{v}_T}{\Delta t} \right\rangle = - \frac{4\pi \bar{n}_\alpha q_T^2 q_\alpha^2 \ln \Lambda}{\mu m_T} \int f_\alpha(\mathbf{v}') \frac{\mathbf{v}_T - \mathbf{v}'}{|\mathbf{v}_T - \mathbf{v}'|^3} d\mathbf{v}' \quad (6.3.13)$$

и

$$\left\langle \frac{\Delta v_i \Delta v_j}{\Delta t} \right\rangle = \frac{4\pi \bar{n}_\alpha q_T^2 q_\alpha^2 \ln \Lambda}{m_T^2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \int f_\alpha(\mathbf{v}') |\mathbf{v}_T - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}'; \quad (6.3.14)$$

здесь нижний индекс α обозначает сорт полевых частиц (ионы или электроны). Кроме того, при получении выражения (6.3.14) использовалось тождество

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v_i \partial v_j} = \frac{u \delta_{ij} - u_i u_j / u}{u^2}.$$

После введения вспомогательных функций

$$g_\alpha(\mathbf{v}) = \int f_\alpha(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}',$$

$$h_\alpha(\mathbf{v}) = \frac{m_T}{\mu_\alpha} \int \frac{f_\alpha(\mathbf{v}')}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'|} d\mathbf{v}',$$

где $\mu_\alpha = m_T m_\alpha / (m_T + m_\alpha)$, уравнение Фоккера — Планка принимает стандартную форму

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = \sum_\alpha \left[- \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_T \frac{\partial h_\alpha}{\partial v_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left(f_T \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial v_i \partial v_j} \right) \right] \frac{4\pi \bar{n}_\alpha q_T^2 q_\alpha^2}{m_T^2} \ln \Lambda. \quad (6.3.15)$$

Уравнение (6.3.15) описывает изменение функции распределения пробных частиц f_T за счет столкновений с частицами всех сортов α в плазме. В самом деле, f_T можно, например, рассматривать как распределение электронов, тогда (6.3.15) описывает влияние на него электрон-ионных столкновений. Аналогично в качестве f_T можно взять распределение ионов и использовать уравнение (6.3.15) для того, чтобы найти, как изменяется f_i за счет ион-электронных столкновений.

§ 4. ВРЕМЕНА РЕЛАКСАЦИИ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

С помощью уравнения Фоккера — Планка (6.3.15) можно найти характерное время, в течение которого неравновесная плазма релаксирует к максвелловскому распределению. Однако вычислить это время можно только приближенно, поскольку ответ в действительности зависит от предыстории конкретного распределения. Не решая общей задачи об эволюции произвольного распределения плазменных частиц, рассмотрим релаксацию проходящего сквозь плазму пучка пробных частиц с плотностью n_T и функцией рас-

предела, заданной при $t = 0$, в виде

$$f_T(\mathbf{v}, t = 0) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0). \quad (6.4.1)$$

Если плотность пробных частиц мала, то столкновения их друг с другом не оказывают существенного влияния на их движение в отличие от столкновений этих частиц с электронами и ионами плазмы (плотностью n_0), которые имеют следующие распределения по скоростям:

$$\begin{aligned} f_e &= \left(\frac{m_e}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_e v^2 / 2kT}, \\ f_i &= \left(\frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m_i v^2 / 2kT}. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

В качестве пробных частиц можно рассматривать как ионы, так и электроны. Вычислив их продольное торможение и боковое отклонение, мы можем составить вполне реалистическое представление о том, каким образом в процессе столкновений плазма релаксирует к равновесному состоянию.

4.1. Продольное торможение пучка в плазме

Эволюция распределения пробных частиц от начального распределения (6.4.1) при $t = 0$ описывается уравнением (6.3.15). Диффузию пучка пробных частиц в пространстве скоростей можно определить, вычисляя моменты по скоростям от уравнения (6.3.15). Умножение этого уравнения на \mathbf{v} и интегрирование по $d\mathbf{v}$ дает

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \int n_{\alpha} \left(f_T \frac{\partial h_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v}; \quad (6.4.3)$$

здесь мы обозначили $\mathbf{U} \equiv \int f_T \mathbf{v} d\mathbf{v}$ и $\gamma_{\alpha} = 4\pi q_T^2 q_{\alpha}^2 (\ln \Lambda) / m_T^2$. Продольное торможение пучка при $t = 0$ получаем из этого уравнения после подстановки в его правую часть распределения пробных частиц при $t = 0$ и вычисления интегралов от h_{α} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{4\pi n_e e^2 q^2 \ln \Lambda}{m_T^2} \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{U} \Phi \left(U \sqrt{\frac{m_e}{2kT_e}} \right) \left(1 + \frac{m_T}{m_e} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Z}{U} \Phi \left(U \sqrt{\frac{m_i}{2kT_i}} \right) \left(1 + \frac{m_T}{m_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

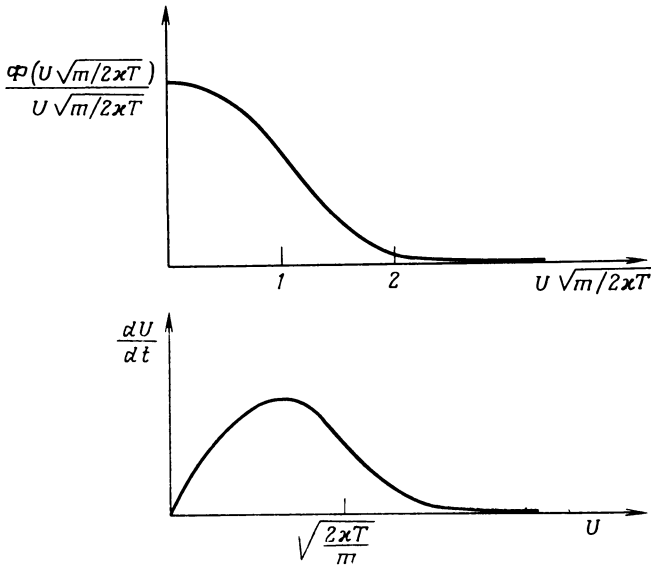
где

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

— функция ошибок. При выводе этого выражения мы и пользовались равенством $\int \{ \exp(-x^2) / |x - y| \} dx = \Phi(y) \pi^{3/2} / y$.

Первый член в правой части уравнения (6.4.4) описывает торможение пучка пробных частиц при их столкновениях с электронами плазмы, а второй — с ионами. На фиг. 118 приведен график функции Φ . Мы видим, что продольное торможение зависит от относительной скорости пучка и тепловых частиц плазмы. Если скорость пучка много больше скорости тепловых частиц, торможение совсем невелико, тогда как при $U \ll \sqrt{2kT/m}$ происходит заметное торможение пучка. Введя время торможения

$$\tau_s = -U \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^{-1},$$



Фиг. 118 Функция ошибок Φ и замедление dU/dt пробной частицы в плазме за счет столкновений с электронами в зависимости от скорости пробной частицы.

можно выделить следующие случаи, соответствующие различным скоростям пучка пробных частиц:

$$1. \quad U > \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}} \gg \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}}, \quad (6.4.5)$$

$$\tau_s \approx \frac{m_T^2 U^3}{4\pi n_e e^2 q_T^2 (2 + m_T/m_e) \ln \Lambda}.$$

- а) Торможение происходит в основном благодаря рассеянию на электронах;
- б) время торможения τ_s для тяжелых частиц больше, чем для легких;
- в) τ_s слабо зависит от температуры плазмы.

$$2. \quad U < \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}} \ll \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}, \quad (6.4.6)$$

$$\tau_s \approx \frac{3 \sqrt{\pi} m_T^2}{16\pi n_e e^2 q_T^2 \left[\left(1 + \frac{m_T}{m_e}\right) \left(\frac{m_e}{2\kappa T_e}\right)^{3/2} + Z \left(1 + \frac{m_T}{m_i}\right) \left(\frac{m_i}{2\kappa T_i}\right)^{3/2} \right] \ln \Lambda}.$$

- а) Торможение происходит в основном за счет рассеяния на ионах при условии, что $T_i/T_e > (m_i/m_e)^{1/3}$;
- б) более тяжелые пробные частицы тормозятся медленнее;
- в) торможение пучка в более горячей плазме происходит медленнее.

$$3. \quad \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}} < U < \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}, \quad (6.4.7)$$

$$\tau_s \approx \frac{m_T^2}{4\pi n_e e^2 q_T^2 \left[\frac{Z}{U^3} \left(1 + \frac{m_T}{m_i}\right) + \frac{4}{3 \sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{m_T}{m_e}\right) \left(\frac{m_e}{2\kappa T_e}\right)^{3/2} \right] \ln \Lambda}.$$

Таким образом, теория, основанная на уравнении Фоккера — Планка, позволяет получить вполне обозримые результаты в задаче о торможении пучка при взаимодействии его с частицами плазмы.

Задача 6.4.1. Выясните, в чем состоит сходство и различие между выражениями для времени торможения (6.4.5)—(6.4.7) и приближенным

выражением, соответствующим (6.2.8), для времени отклонения пробной частицы на угол 90° вследствие многократного рассеяния.

Задача 6.4.2. Сравните время нарастания двухпотоковой неустойчивости (§ 5 гл. 5) с временем торможения τ_s и объясните, в каком случае преобладает столкновительный, а в каком бесстолкновительный механизм торможения.

4.2. Рассыпание пучка в плазме

Столкновения частиц моноэнергетического пучка с частицами плазмы приводят не только к его торможению, но и к рассыпанию как за счет отклонения частиц в пучке (приводящих к изотропии), так и вследствие размывания распределения по скоростям (приводящего к равновесному распределению). Эти эффекты можно выделить, умножая уравнение Фоккера — Планка на v^2 и интегрируя результат по dv .

Рассматривая изменение U^2 отдельно в направлении, параллельном вектору начальной скорости U и перпендикулярном ему, получаем при $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{\parallel}^2) = \frac{4\pi n_e e^2 q_T^2 \ln \Lambda}{m_T^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial U_{\parallel}^2} \int (f_e + Zf_i) |U - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}' + 2U_{\parallel} \frac{\partial}{\partial U_{\parallel}} \sum_{\alpha} \left(1 + \frac{m_T}{m_{\alpha}} \right) \int d\mathbf{v}' \frac{Z_{\alpha} f_{\alpha} |\mathbf{v}'|}{|U - \mathbf{v}'|} \right] \quad (6.4.8)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{\perp}^2) \equiv \frac{\partial}{\partial t} (U_2^2 + U_3^2) = \frac{4\pi n_e e^2 q_T^2 \ln \Lambda}{m_T^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial U_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial U_3^2} \right) \int (f_e + Zf_i) |U - \mathbf{v}'| d\mathbf{v}'. \quad (6.4.9)$$

Диффузия пучка, которая приводит к его изотропии, объясняется только присутствием диффузионного члена ($\partial^2/\partial U_{\perp}^2$), в то время как расплывание по U_{\parallel} объясняется как наличием диффузионного члена, так и члена ($\partial/\partial U_{\parallel}$), описывающего динамическое трение.

Введя время бокового отклонения (время релаксации импульса)

$$\tau_D = \frac{U^2}{\partial U_{\perp}^2 / \partial t},$$

можно получить оценку времени, в течение которого пучок становится изотропным. Для пробных частиц, движущихся со скоростью больше тепловой скорости электронов ($U > \sqrt{\kappa T_e / m_e}$),

$$\tau_D \approx \frac{m_T^2 U^3}{16\pi n_e e^2 q_T^2 \ln \Lambda}. \quad (6.4.10)$$

Если пробные частицы — электроны, время отклонения сравнимо с временем торможения [см. (6.4.5)], но если пробные частицы — быстрые ионы, они тормозятся значительно быстрее, чем рассыпаются.

Другой интересный предельный случай связан с движением пробного пучка тепловых протонов в водородной плазме, для которого

$$\tau_D = \frac{\sqrt{m_i} (\kappa T_i)^{3/2}}{\sqrt{2} \pi n_e e^4 \ln \Lambda} \left[\Phi(1) + \frac{2e^{-1}}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (\text{пробные ионы}), \quad U \approx \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}}, \quad (6.4.11)$$

и с пучком пробных тепловых электронов, который рассыпается за время

$$\tau_D = \frac{\sqrt{m_e} (\kappa T_e)^{3/2}}{\sqrt{2} \pi n_e e^4 \ln \Lambda} \left[\Phi(1) + \frac{2e^{-1}}{\sqrt{\pi}} + 2 \right] \quad (\text{пробные электроны}), \quad U \approx \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}. \quad (6.4.12)$$

Задача 6.4.3. Покажите, что

$$\frac{1}{\tau_D} = \frac{4\pi n_e e^2 q_T^2 \ln \Lambda}{m_T^2 U^3} \frac{\partial}{\partial U} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{2\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{1}{U} \left[\frac{2U}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{2\kappa T_{\alpha}}} e^{-m_{\alpha} U^2 / 2\kappa T_{\alpha}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{\kappa T_{\alpha}} U^2 \right) \Phi \left(U \sqrt{\frac{m_{\alpha}}{2\kappa T_{\alpha}}} \right) \right] \right\}.$$

В табл. 4 приведены значения времен отклонения для различных типов плазмы. Из сравнения выражений (6.4.11) и (6.4.12) можно видеть, что электроны релаксируют к изотропному распределению быстрее, чем ионы в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз, т. е.

$$\tau_D, \tau_e \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \tau_D, \tau_i.$$

Кроме рассыпания, для диффузии пучка, приводящей к тепловому равновесию, характерно размывание по энергиям. Вводя величины

$$W = \frac{1}{2} m_T U^2$$

и

$$\tau_W \equiv \frac{-W}{\partial W / \partial t},$$

можно получить масштабы времени, за которые протекают три характерных процесса: релаксация нетепловых электронов и релаксация нетепловых ионов к максвелловскому распределению соответственно с температурой T_e или T_i и термализация электронов и ионов ($T_e, T_i \rightarrow T$). Эти характерные времена вычисляются путем сложения выражений (6.4.8) и (6.4.9) и соответствующего выбора пробных частиц:

1) для электронного пучка, движущегося со скоростью $U = \sqrt{2\kappa T_e/m_e}$, время, за которое электроны становятся максвелловскими с температурой T_e , записывается в виде

$$\tau_W \approx \frac{m_e^{1/2} (2\kappa T_e)^{3/2}}{8\pi n_e e^4 [\Phi(1) - 4e^{-1}/\sqrt{\pi}] \ln \Lambda};$$

2) для ионного пучка со скоростью $U = \sqrt{2\kappa T_i/m_i}$ время, в течение которого ионы становятся максвелловскими с температурой T_i , равно

$$\tau_W \approx \frac{m_i^{1/2} (2\kappa T_i)^{3/2}}{8\pi n_e e^4 [\Phi(1) - 4e^{-1}/\sqrt{\pi}] \ln \Lambda};$$

3) для ионного пучка со скоростью $U = \sqrt{2\kappa T/m_e}$ время, за которое данный ионный пучок обменивается энергией с электронами, имеет вид

$$\tau_W \approx \frac{m_i}{\sqrt{m_e}} \frac{(2\kappa T)^{3/2}}{4\pi n_e e^4 \ln \Lambda}.$$

Полученная оценка времени установления равновесия между электронами и ионами — далеко не общий результат.

Из предыдущего рассмотрения мы можем сделать вывод, что изотропизация электронов происходит быстрее, чем установление равновесия ионов друг с другом, а диффузия электронов и ионов к общему равновесию происходит еще более медленно.

Приближенные значения характерных величин для некоторых типов водородной плазмы [2]

Тип плазмы	n_0 , см ⁻³	T , К	Плазменная частота $\left(\frac{4\pi n_0 e^2}{m}\right)^{1/2}$, с ⁻¹	Дебаевский радиус $L_D = \left(\frac{kT}{8\pi n_0 e^2}\right)^{1/2}$, см	Дебаевское число $n_0 L_D^3$	Кулоновский логарифм $\ln \Lambda$	Время релаксации импульса электронов τ_D , с	Время релаксации импульса протонов τ_D , с
Межзвездный газ	1	10 ⁴	6 · 10 ⁴	5 · 10 ²	10 ⁸	22	3 · 10 ³	3 · 10 ⁵
Газовые туманности	10 ³	10 ⁴	2 · 10 ⁶	15	3 · 10 ⁶	20	3	3 · 10 ²
Солнечная корона	10 ⁶	10 ⁶	6 · 10 ⁷	5	10 ⁸	22	3	3 · 10 ²
Солнечный ветер	10	10 ⁵	2 · 10 ⁵	5 · 10 ²	10 ⁹	25	10 ⁶	10 ⁸
Солнечная атмосфера	10 ¹²	10 ⁴	6 · 10 ¹⁰	5 · 10 ⁻⁴	10 ²	9	10 ⁻⁸	10 ⁻⁶
Газовый разряд	10 ¹⁴	10 ⁴	6 · 10 ¹¹	5 · 10 ⁻⁵	12	7	10 ⁻¹⁰	10 ⁻⁸
Горячая плазма	10 ¹⁴	10 ⁵	6 · 10 ¹¹	1,5 · 10 ⁻⁴	3 · 10 ²	9	2 · 10 ⁻⁹	2 · 10 ⁻⁷
	10 ¹⁴	10 ⁶	6 · 10 ¹¹	5 · 10 ⁻⁴	10 ⁴	13	5 · 10 ⁻⁸	5 · 10 ⁻⁶
Разреженная горячая плазма	10 ¹²	10 ⁶	6 · 10 ¹⁰	5 · 10 ⁻³	10 ⁵	15	5 · 10 ⁻⁶	5 · 10 ⁻⁴
Плотная горячая плазма	10 ¹⁶	10 ⁶	6 · 10 ¹²	5 · 10 ⁻⁵	10 ³	11	6 · 10 ⁻¹⁰	6 · 10 ⁻⁸
Термоядерная плазма	10 ¹⁶	10 ⁸	6 · 10 ¹²	5 · 10 ⁻⁴	10 ⁶	18	4 · 10 ⁻⁷	4 · 10 ⁻⁵

§ 5. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели релаксацию неравновесной плазмы к равновесному состоянию. Однако теория, основанная на уравнении Фоккера — Планка, находит столь же полезное применение и в тех случаях, когда отклонение плазмы от теплового равновесия вызывается внешней силой — процесс, конкурирующий с обсуждаемыми выше механизмами релаксации. Например, электрические поля вызывают в плазме токи, затухающие вследствие трения, описываемого теориями столкновений.

5.1. Электропроводность

В случае приложенного к плазме электрического поля E может существовать стационарное состояние, при котором ускорение частиц полем E уравнивается их торможением за счет столкновений. Если достигается подобное состояние, движение ионов в системе координат, движущейся с дрейфовой скоростью *электронов*, описывается уравнением [см., например, уравнение (6.4.4)]

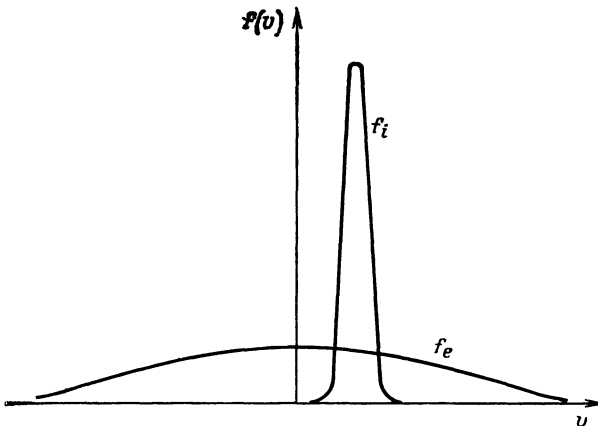
$$q_i E = - \frac{\partial}{\partial t} (m_i U_i) \Big|_{\text{столк}} = - \frac{4\pi n_e e^2 q_i^2}{m_i} \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial U} \left[\frac{1}{U} \Phi \left(U \sqrt{\frac{m_e}{2\kappa T_e}} \right) \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \right]; \quad (6.5.1)$$

здесь в качестве функции распределения для ионов f_i мы использовали распределение вида (6.4.1), т. е. считали, что ширина функции распределения равна нулю. Это ограничивает расчет теми значениями E , для которых в стационарном состоянии скорость частиц удовлетворяет неравенству [см. (6.4.7) с $m_T = m_i$]

$$U > \left(\frac{\kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/6}.$$

При не слишком сильных полях дрейфовая скорость может быть меньше тепловой скорости электронов (фиг. 119) и уравнение (6.5.1) можно приближенно записать в виде [поскольку $\Phi(x) \approx (2/\sqrt{\pi})(x - x^3/3)$ при малых x]

$$E = \frac{4\pi n_e e^2 q_i}{m_i} \left[\left(\frac{m_e}{2\kappa T_e} \right)^{3/2} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} U \right] \frac{m_i}{m_e} \ln \Lambda = \frac{n q_i U}{\sigma} = \frac{J}{\sigma}. \quad (6.5.2)$$



Фиг. 119. Функция распределения плазмы, находящейся в слабом электрическом поле. Рассмотрен случай, когда дрейфовая скорость ионов меньше тепловой скорости электронов.

Отсюда находим электрическую проводимость полностью ионизованной плазмы в слабых полях:

$$\sigma = \frac{3m_e}{(16\sqrt{\pi})Ze^2 \ln \Lambda} \left(\frac{2\kappa T}{m_e} \right)^{3/2}. \quad (6.5.3)$$

Уравнение (6.5.2) получено в предположении, что выполняются неравенства

$$\left(\frac{\kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2} < \frac{\sigma E}{nq_i} < \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (6.5.4)$$

Выражение (6.5.3) подтверждает мнение о том, что чем горячее плазма, тем *лучше* она проводит электрический ток. Проводимость не зависит от плотности носителей заряда n , поскольку при увеличении n наряду с возрастанием числа носителей заряда происходит такое же увеличение числа рассеивающих центров.

Далеко не при всех условиях плазма достигает стационарного состояния. Действительно, в случае больших полей, таких, что

$$E > \frac{ne}{\sigma} \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}},$$

уравнение (6.5.1) не имеет решения. Это связано с наличием максимума $\Phi(x)$ вблизи $x = 1$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при больших значениях аргумента функция $\Phi(U\sqrt{m_e/2\kappa T_e}) \approx 1$. Подстановка этого значения в (6.5.1) дает

$$E = \frac{4\pi n_e e^2 q_i \ln \Lambda}{m_e} \frac{1}{U^2}, \quad U > \sqrt{\frac{2\kappa T_e}{m_e}}.$$

Отсюда мы видим, что поле E *убывает* с ростом U . Последнее означает, что уравнение (6.5.1), предполагающее равенство силы со стороны приложенного поля E силе трения, не имеет решения при

$$E \gg \frac{4\pi n_e e^2 q_i \ln \Lambda}{m_e} \frac{m_e}{2\kappa T_e}.$$

Более аккуратное вычисление максимума функции

$$\frac{\partial}{\partial U} \frac{\Phi(U\sqrt{m_e/2\kappa T_e})}{U}$$

приводит к критерию

$$E > 0,43 \left(\frac{4\pi n_e e^2 q_i \ln \Lambda}{2\kappa T_e} \right) \equiv E_0$$

для поля, выше которого отсутствует равновесие между столкновениями и действующим полем. Данное явление обусловлено тем, что вследствие разгона частиц между столкновениями сечение рассеяния убывает, и при достаточно сильном ускорении частицы просто убегают¹⁾.

Дальнейшее усложнение состоит в том, что E_0 убывает с ростом температуры T_e , которая возрастает со временем в системе с трением. В конце концов даже слабое поле приведет к убеганию электронов.

Задача 6.5.1. Покажите, что E_0 по порядку величины равно полю, в котором электроны ускоряются до скорости $\sqrt{\kappa T_e/m_e}$ за время, равное времени между электрон-электронными столкновениями.

¹⁾ В литературе данное явление так и называется «убегание электронов» (*run away*).—
Прим. ред.

5.2. Диффузия поперек магнитного поля

Естественно, что плазма, в которой имеется градиент плотности, стремится диффундировать так, чтобы уменьшить этот градиент. Магнитное поле, приложенное перпендикулярно градиенту плотности, препятствует диффузии и удерживает плазму. В самом деле, гидродинамические уравнения (гл. 3) показывают, что в бесстолкновительной плазме с градиентом давления может поддерживаться стационарное состояние, если

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = \nabla p \quad (6.5.5)$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}. \quad (6.5.6)$$

Однако при наличии столкновений это стационарное состояние нарушается и частицы могут перемещаться поперек магнитных силовых линий. На фиг. 120 показана траектория иона, вращающегося в плазме с градиентом плотности dn/dx в присутствии магнитного поля $B_0\hat{z}$. Из-за наличия градиента плотности имеется $(n_{i0} + \frac{1}{2}a_i dn_{i0}/dx) \Delta V$ ионов, ведущие центры которых в точке $x_0 + a_i/2$ перемещаются со скоростью $+v_0$ через элементарный объем жидкости ΔV , сосредоточенный вблизи x_0 . Аналогично $(n_{i0} - \frac{1}{2}a_i dn_{i0}/dx) \Delta V$ ионов, вращающихся вокруг центра $x_0 - a_i/2$, проходят через ΔV со скоростью $-v_0$. Таким образом, средняя скорость ионов в этом жидком элементе равна

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n_{i0}} \frac{dn_{i0}}{dx} a_i \bar{v}_0 \hat{y} = \frac{1}{n_{i0}} \frac{dn_{i0}}{dx} \frac{\kappa T_i}{e B_0} \hat{y}. \quad (6.5.7)$$

Отсюда сила трения вдоль оси y , согласно выражению (6.4.4), записывается аналогично уравнениям (6.5.1) и (6.5.2) в виде

$$\mathbf{F}_D = - \frac{4\pi n_e e^2 q_i^2}{m_e} \left(\frac{m_e}{2\kappa T_e} \right)^{3/2} \frac{4 \langle v \rangle}{3 \sqrt{\pi}} \ln \Lambda \hat{y}. \quad (6.5.8)$$

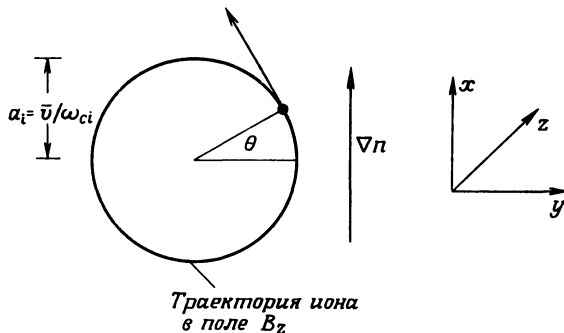
Сила трения вызывает дрейф поперек магнитного поля со скоростью

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{F}_D \times \mathbf{B}c}{eB^2} \approx \frac{-c^2 \nabla p_i}{\sigma B^2} \hat{x},$$

где

$$\sigma = \frac{3m_e}{16 \sqrt{\pi} e^2 \ln \Lambda} \left(\frac{2\kappa T_e}{m_e} \right)^{3/2}.$$

Следовательно, столкновения позволяют плазме дрейфовать в область с меньшей плотностью, т. е. вызывают пространственную диффузию. Коэффициент



Фиг. 120. Круговое движение иона в замагниченной плазме с градиентом плотности ∇n . a_i — радиус ларморовской окружности, \bar{v} — тепловая скорость ионов, ω_{ci} — циклотронная частота ионов.

диффузии D определяют обычно через поток частиц $\Gamma \equiv nU$ и градиент плотности ∇n , обуславливающий этот поток, согласно равенству

$$\Gamma = -D\nabla n,$$

где

$$D = \frac{n\kappa T c^2}{\sigma B^2}$$

— коэффициент диффузии полностью ионизованной плазмы в направлении, перпендикулярном магнитному полю. То, что коэффициент D обратно пропорционален B^2 , служит одной из причин, по которым плазменные эксперименты проводятся обычно с большими удерживающими магнитными полями. В действительности D уменьшается также ($D \sim T^{-1/2}$) по мере увеличения температуры; эти законы подобия являются основой для осуществления многих экспериментов, в которых стремятся удержать горячую плазму в течение достаточно длительного времени, необходимого для реакции синтеза. Однако во многих экспериментах обнаруживается другая зависимость D от B , а именно $D \sim 1/B$, т. е. в плазме, по-видимому, имеются другие механизмы диффузии, помимо рассмотренных здесь столкновительных (т. е. диффузия может также быть обусловлена неустойчивостью).

Нетрудно вычислить и другие коэффициенты переноса (например, тепловой поток при данном ∇T).

Задача 6.5.2. Вычислите D для плазмы с градиентом плотности в отсутствие магнитного поля.

Задача 6.5.3. Покажите, что в случае полностью ионизованной плазмы с градиентом температуры поток энергии поперек магнитного поля равен ¹⁾

$$Q = \frac{8\pi (\nabla \kappa T) m^{1/2} n^2 e^2 c^2 \ln \Lambda}{(3\kappa T)^{1/2} B^2}.$$

§ 6. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА И МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА ДЛЯ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

Теория, основанная на уравнении Фоккера — Планка, пригодна для вычисления коэффициентов переноса в полностью ионизованной плазме, в которой диффузия происходит в результате большого числа малоугловых рассеяний.

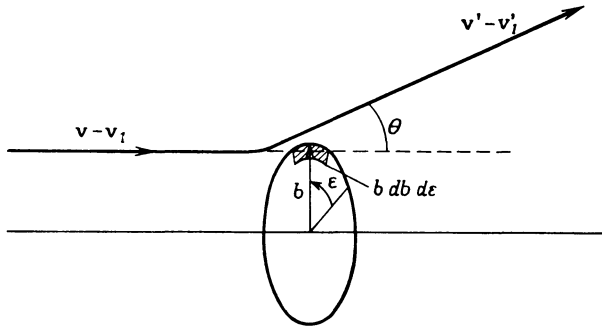
В слабоионизованной плазме ситуация совершенно иная, так как именно близкие столкновения (ионизованных) частиц плазмы с нейтральным фоном доминируют в процессах диффузии, электропроводности и т. д.

Столкновение частицы плазмы с нейтральной молекулой или атомом можно, как правило, считать упругим ²⁾. Кроме того, длительность такого взаимодействия обычно много меньше времени между столкновениями. Этот факт, а также гипотеза о «молекулярном беспорядке» служат основанием для построения статистической модели разреженного газа, описываемой кинетическим уравнением Больцмана. Система многих тел статистически описывается уравнением (как показано в гл. 3)

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{столк}}. \quad (6.6.1)$$

¹⁾ Значительно больший поток энергии направлен перпендикулярно градиенту температуры (см., например, [13*]). — *Прим. ред.*

²⁾ За исключением случаев, когда при столкновении происходит изменение внутреннего состояния одной из сталкивающихся частиц (возбуждение, излучение, ионизация и пр.). — *Прим. ред.*



Фиг. 121. Диаграмма столкновений в с. ц. м. для вычисления изменения функции распределения в результате столкновений.

Величина $(\partial f / \partial t) |_{\text{столк}}$ представляет собой скорость изменения функции распределения в результате столкновений.

Если это изменение происходит за счет одного парного столкновения, то его можно вычислить, задавшись сечением рассеяния двух частиц, обладающих определенной относительной скоростью и заданным распределением их по скоростям. Аналогично рассмотрению, проведенному в § 2 и 3, можно изучать столкновение двух частиц со скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 и массами m и m_1 . На фиг. 121 приведена диаграмма столкновения в с. ц. м. [напомним, что упрощенное рассеяние двух частиц в с. ц. м. эквивалентно рассеянию одной частицы с массой $mm_1/(m + m_1)$ и скоростью $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ на неподвижном рассеивающем центре.]

Поток частиц сорта α со скоростью \mathbf{v}_1 через площадь $b db d\epsilon$ записывается в виде

$$\bar{n}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 b db d\epsilon \quad \text{с}^{-1}, \quad (6.6.2)$$

а число рассеивающих частиц сорта γ , обладающих скоростью \mathbf{v} , равно $n_{\gamma} f_{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$. Следовательно, число таких столкновений, происходящих в 1 см^3 за 1 с , есть

$$\bar{n}_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \bar{n}_{\gamma} f_{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) b db d\epsilon d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}.$$

Выразим $b db d\epsilon$ через дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = b db d\epsilon,$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\epsilon$ — элемент телесного угла. Используя обозначения

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha}$$

и

$$f_{\gamma 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) = f_{\gamma 1},$$

можно получить число столкновений за 1 с в геометрии, показанной на фиг. 121, а именно

$$|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f_{\alpha} f_{\gamma 1} \bar{n}_{\alpha} \bar{n}_{\gamma} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (6.6.3)$$

Полная скорость, с которой функция распределения $f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ уменьшается за счет столкновений, приводящих к уходу частиц из интервала $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, находится интегрированием выражения (6.6.3) по всем скоростям \mathbf{v}_1 рассеивающих частиц:

$$\bar{n}_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Big|_{\substack{\text{при рассеянии} \\ \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'}} d\mathbf{v} = - \sum_{\gamma} \bar{n}_{\alpha} \bar{n}_{\gamma} d\mathbf{v} \int d\mathbf{v}_1 f_{\alpha} f_{\gamma 1} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (6.6.4)$$

Полная скорость, с которой $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ увеличивается за счет столкновений, обеспечивающих приход частиц в интервале скоростей $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, вычисляется аналогичным образом и равна

$$\begin{aligned} \bar{n}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{\substack{\text{при рассеянии} \\ \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}}} d\mathbf{v} = \\ = \sum_\gamma \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma d\mathbf{v}' \int |\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1| f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) f_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' d\mathbf{v}'_1. \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

Из симметрии рассеяния имеем

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' d\Omega' = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega,$$

а в силу сохранения энергии и импульса

$$|\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1| = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$$

и $d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = d\mathbf{v}' d\mathbf{v}'_1$. Поэтому уравнение (6.6.4) можно переписать следующим образом:

$$\bar{n}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Big|_{\substack{\text{при рассеянии} \\ \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}}} = \sum_\gamma \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| d\mathbf{v}_1 \int f'_\alpha f'_\gamma \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega. \quad (6.6.6)$$

Объединение уравнений (6.6.4) и (6.6.6) дает полное изменение функции f_α , обусловленное столкновениями, и тогда уравнение (6.6.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = \sum_\gamma \bar{n}_\gamma \int d\mathbf{v}_1 \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \times \\ \times [f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) f_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) - f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)]. \end{aligned} \quad (6.6.7)$$

[Следует заметить, что в уравнении (6.6.7) скорости частиц после рассеяния \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 связаны с начальными скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 посредством дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega$.]

Задача 6.6.1. Покажите, что при выборе подходящих пределов интегрирования больцмановский интеграл столкновений [правая часть уравнения (6.6.7)] можно преобразовать, используя сечение кулоновского рассеяния, таким образом, чтобы оставить только вклад от малых угловых рассеяний, в результате чего мы будем иметь уравнение типа уравнения Фоккера — Планка (см. [2, 12*]). Какие необходимо выбрать пределы?

В случае слабоионизованной плазмы уравнение (6.6.7) можно применять для изучения эволюции распределения заряженных частиц (т. е. плазмы). Эволюция функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ определяется

1) средними полями, создаваемыми заряженными частицами (учитываемыми самосогласованным образом с помощью величины $\mathbf{F} = q_\alpha \mathbf{E} + + q_\alpha [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] / c$, где поле определяется следующим образом: $\nabla \cdot \mathbf{E} = = 4\pi \sum_\alpha \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} + 4\pi \rho_{\text{внеш}}$ и т. д.);

2) произвольными внешними полями $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$, которые также учитываются величиной \mathbf{F} ;

3) столкновениями с нейтральным фоном.

Если плазма ионизована лишь в малой степени, то можно пренебречь столкновениями между заряженными частицами и заменить $\sum_\gamma n_\gamma f_\gamma$ произведе-

дением $n_{\text{нейтр}} f_{\text{нейтр}}$, а $d\sigma/d\Omega$ —сечением рассеяния заряженных частиц нейтральными атомами.

Больцмановская форма интеграла столкновений основана на предположении, которое в общем случае несправедливо для полностью ионизованной плазмы.

В этом предположении считается, что длительность столкновения много меньше времени между столкновениями. В плазме длительность столкновения совпадает со временем пролета частицей длины, равной дебаевскому радиусу экранирования. Этот интервал времени значительно превышает интервал времени между столкновениями, поскольку электрон, например, входит в дебаевскую сферу следующего иона задолго до того, как он покидает дебаевскую сферу предыдущего иона. Таким образом, в течение времени столкновения взаимодействие отнюдь не парное: электрон одновременно взаимодействует со всеми остальными частицами в дебаевской сфере, число которых велико согласно предположению.

Для того чтобы правильно учесть столкновения в плазме, необходимо построить более подходящую модель для интеграла столкновений. Уравнение Фоккера — Планка, выведенное в § 3 настоящей главы, служит примером подобной модели.

Хотя кинетическое уравнение Больцмана не дает точного описания эволюции распределения в результате столкновений в полностью ионизованной плазме, его можно использовать для вычисления коэффициентов переноса в слабоионизованной плазме, где преобладают упругие столкновения электронов с нейтральными частицами. В этой проблеме необходимо разобраться, поскольку в ряде приложений нейтральные компоненты сильно влияют на свойства плазмы. Примером может служить МГД-генератор, рассматриваемый ниже в настоящей главе.

Вследствие приближенного характера уравнения Больцмана важно понять, в каких случаях его применение физически разумно. В качестве вычислений, связанных с уравнением Больцмана, мы предлагаем следующие задачи:

Задача 6.6.2. Функция распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, имеющая физический смысл, должна быть всюду положительной. Покажите, что если $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = 0)$ всюду положительна, то, согласно уравнению Больцмана, эта функция *остается* положительной в любой момент времени.

Задача 6.6.3. Покажите, что число частиц, описываемых функциями распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, удовлетворяющими уравнению Больцмана, сохраняется постоянным, т. е. $\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ не зависит от времени.

Задача 6.6.4. Покажите, что, если

$$f_{\alpha} = \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{3/2} e^{-m_{\alpha} v^2 / 2k T_{\alpha}},$$

интеграл столкновений в уравнении Больцмана обращается в нуль. Это означает, что распределение Максвелла — Больцмана представляет собой равновесное решение уравнения Больцмана.

Задача 6.6.5. Покажите, что энтропия больцмановской системы возрастает, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int f \ln f d\mathbf{v} \geq 0,$$

если f удовлетворяет уравнению Больцмана ¹⁾.

¹⁾ Так называемая H-теорема Больцмана.— *Прим. ред.*

§ 7. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Уравнение Больцмана в форме (6.6.7) почти не поддается исследованию как вследствие его нелинейности в общем случае, так и вследствие сложного вида интеграла столкновений. Для упрощения интеграла столкновений практически приходится прибегать к какому-либо приближению. Избежать затруднений, связанных с этим интегралом, можно с помощью простого метода, связанного с введением времени свободного пробега ¹⁾. В этом методе больцмановский интеграл столкновений заменяют следующим выражением:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{столк}} = \frac{f_0 - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\tau(v)} \approx \frac{f_0 - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\tau}, \quad (6.7.1)$$

в котором $\tau(v)$ заменяют постоянным временем свободного пробега τ . Такая процедура приводит к модифицированному уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - f_{\alpha 0}}{\tau_\alpha}. \quad (6.7.2)$$

Данный подход отражает представление о том, что любое распределение релаксирует к равновесному распределению $f_{\alpha 0}$ за счет столкновений и что существует некоторое характерное время (в общем случае зависящее от скорости) между столкновениями с передачей импульса. В случае замены $\tau(v)$ на среднее время между столкновениями τ интеграл столкновений (6.7.1) становится особенно простым.

Существует несколько аспектов, связанных с аппроксимацией интеграла столкновений выражением (6.7.1), которые определяют использование такого приближения и ограничивают область его применимости:

1. Для сохранения числа частиц равновесную функцию f_0 необходимо ²⁾ выбирать в виде локального распределения Максвелла — Больцмана

$$f_{\alpha 0} = \frac{n_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\bar{n}_\alpha} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k T_\alpha} \right)^{3/2} e^{-m_\alpha v^2 / 2k T_\alpha}, \quad (6.7.3)$$

$$\frac{n_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\bar{n}_\alpha} \equiv \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

где \bar{n}_α равно отношению полного числа частиц к полному объему системы.

В необходимости такого выбора ³⁾ для сохранения числа частиц можно убедиться, проинтегрировав уравнение (6.7.2) по скоростям, что дает (так же, как и в гл. 3)

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{V} = - \int \frac{f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) - f_{\alpha 0}}{\tau_\alpha} d\mathbf{v}.$$

Поскольку член $\nabla \cdot n\mathbf{V}$ описывает изменение $n(\mathbf{x}, t)$ за счет частиц, входящих в элементный объем и покидающих его, правая часть последнего уравнения представляет собой источник или сток частиц. Выбор f_0 в виде распределения (6.7.3) гарантирует сохранение числа частиц, причем распределение сохраняется максвелловским по крайней мере локально.

2. Интеграл столкновений (6.7.1) видоизменяет распределение таким образом, что средняя скорость обращается в нуль, т. е. только в том случае, когда $\int \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 0$, выполняется равенство $(d/dt) \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} |_{\text{столк}} = 0$. Это свойство не всегда соответствует действительности, так как обязан сохраняться импульс всей системы, но в случае столкновений электронов с нейтральными частицами указанное свойство является удачным приближением,

¹⁾ Так называемое τ -приближение. — *Прим. ред.*

²⁾ На самом деле достаточно. — *Прим. ред.*

³⁾ Этот выбор является достаточным. — *Прим. ред.*

поскольку масса атомов много больше массы электронов. Модель, в которой предполагается, что электроны диффундируют за счет столкновений с рассеивающими частицами, обладающими стационарным распределением, называется *моделью Лоренца*. Эта модель может быть оправдана в случае малой степени ионизации системы, в противном случае в столкновительном члене следует учитывать электрон-электронные столкновения. Таким образом, уравнение (6.7.2) лучше всего применять для описания слабоионизованной плазмы¹⁾.

Замена τ (ν) на τ является *точной* в случае, если сила отталкивания между заряженными и рассеивающими частицами изменяется по закону $F = -A/r^5$. Такое приближение более оправданно при столкновениях между электронами и нейтралами, чем при электрон-электронных столкновениях, поскольку зависимость $1/r^5$ соответствует короткодействующей силе. Разумеется, кроме того, нужно сказать, что выбор времени τ , не зависящего от функции распределения f_α , который *линеаризует* больцмановский интеграл столкновений, возможен только тогда, когда отсутствуют столкновения между частицами того же распределения f_α .

3. Столкновительный член (6.7.1) можно интерпретировать с помощью тех же соображений, которые использовались при выводе самого уравнения Больцмана. Член f/τ описывает уход частиц, распределенных согласно $f(x, v, t)$, за счет рассеяния из элемента dv . Это напоминает процесс *поглощения*, поскольку все частицы, первоначально находившиеся в элементе dv , исчезают из данного элемента после рассеяния. Рассматриваемый член качественно совпадает с соответствующим вкладом (6.6.4) в уравнение Больцмана. Второй член описывает приход частиц в элемент dv за счет рассеяния; ему трудно найти аналогию в исходном уравнении Больцмана. Форма f_0/τ предполагает, что после каждого столкновения испускаются частицы с максвелловским распределением и локальной плотностью $n(x, t)$.

Уравнение Больцмана в виде (6.7.2) иногда называют *моделью Крука*.

§ 8. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

В настоящем параграфе мы применим модифицированное уравнение Больцмана для описания явлений переноса в слабоионизованной плазме.

8.1. Электропроводность слабоионизованной плазмы

В плазме, не подверженной воздействию каких-либо внешних полей, можно считать распределение частиц максвелловским. Например, для электронов это распределение записывается в виде

$$f_{e0} = \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{3/2} e^{-m_e v^2 / 2kT_e}. \quad (6.8.1)$$

¹⁾ Столкновительный член (6.7.1) может быть хорошим приближением в случае полностью ионизованной плазмы при более удачном выборе функции f_0 . В частности, было показано [3], что интеграл столкновений

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{столк}} = -\frac{n(x, t) f}{\sigma} + \frac{n^2}{\sigma n} \left[\frac{m}{2\pi kT(x, t)} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT(x, t)} [v - q(x, t)]^2 \right\} \quad (6.7.4)$$

сохраняет число частиц, энергию и импульс и может быть использован для описания столкновений в полностью ионизованной плазме. В формуле (6.7.4)

$$q = \frac{\bar{n}}{n(x, t)} \int v f(x, v, t) dv, \\ \frac{3kT(x, t)}{m} = \frac{\bar{n}}{n(x, t)} \int (v - q)^2 f dv$$

и \bar{n}/σ — средняя частота столкновений.

Если к плазме приложить слабое электрическое поле, то электроны начнут двигаться вдоль его направления и функция распределения больше не будет идеально максвелловской, а станет слегка анизотропной. При своем движении электроны могут соударяться с нейтралими, которые, согласно предположению, не испытывают отдачи в результате столкновения. Предположим, что вследствие большей массы ионы заметно не перемещаются в электрическом поле. В результате столкновений с нейтралими электроны не разгоняются до бесконечной скорости, а достигают определенного ее значения, которое зависит от частоты столкновений электронов с нейтралими. Следовательно, электрическое поле вызывает ток в такой слабоионизованной плазме. Отношение тока к электрическому полю дает величину проводимости.

Для того чтобы вычислить изменение функции распределения в результате приложения электрического поля $\mathbf{E} = E_z \cdot \hat{z}$, разложим функцию распределения следующим образом:

$$f_e = f_{e0} + f_{e1}, \quad \text{где } f_{e0} \gg f_{e1}; \quad (6.8.2)$$

здесь f_{e0} — сферически-симметричная максвелловская функция распределения электронов, а f_{e1} — анизотропное возмущение, вызванное приложенным электрическим полем. Добавка f_{e1} связана с приложенным полем \mathbf{E} уравнением Больцмана. С помощью описанной выше модели Крук столкновительный член записывается в виде

$$\left. \frac{\partial f_e}{\partial t} \right|_{\text{столк}} = -\nu_{me} (f_e - f_{e0}) = -\nu_{me} f_{e1}, \quad (6.8.3)$$

где $\nu_{me} \equiv 1/\tau_e$ — частота столкновений электронов с нейтралими с передачей импульса; вследствие пространственной однородности задачи

$$\frac{n(\mathbf{x}, t)}{n} = \int f d\mathbf{v} = 1.$$

В случае пространственно однородной плазмы в стационарном состоянии уравнение Больцмана (6.7.2) сводится (в пренебрежении произведением $E_z \partial f_{e1} / \partial v_z$ для слабых электрических полей) к уравнению

$$\frac{-eE_z}{m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_z} = -\nu_{me} f_{e1}, \quad (6.8.4)$$

так что полная функция распределения имеет вид

$$f_e = f_{e0} + \frac{eE_z}{m_e \nu_{me}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_z}. \quad (6.8.5)$$

Плотность тока проводимости определяется (n_e — плотность электронов) выражением

$$\mathbf{J} = -n_e e \int \mathbf{v} f_e d\mathbf{v}.$$

В настоящей задаче ток течет только в направлении z и

$$J_z = -en_e \int v_z f_e d\mathbf{v} = -\frac{e^2 E_z}{m_e \nu_{me}} n_e \int v_z \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_z} d\mathbf{v}. \quad (6.8.6)$$

Интегрирование выражения (6.8.6) по частям и использование свойства нормировки $\int f_{e0} d\mathbf{v} \approx 1$ дает

$$J_z = \frac{n_e e^2 E_z}{m_e \nu_{me}}.$$

Отсюда мы получаем отношение J_z/E_z , т. е. проводимость слабоионизованной плазмы, выраженную через частоту ν_{me} столкновений с передачей импуль-

са между электронами и нейтралами:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{me}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi \nu_{me}}. \quad (6.8.7)$$

Этот результат следует сравнить с результатом, полученным в § 5 настоящей главы. В частности, в задаче о проводимости слабоионизованного газа отсутствует проблема *убегания электронов* в отличие от случая полностью ионизованной плазмы. Дело в том, что время столкновений электронов с нейтралями почти не зависит от скорости, в то время как время кулоновских столкновений растет со скоростью пропорционально v^3 . Поскольку ν увеличивается за счет ускорения электронов (между столкновениями) полем E_z в газе, в котором ν убывает с v , в конце концов появятся частицы, движущиеся настолько быстро, что сила eE перестает компенсироваться силой торможения за счет столкновений. В случае столкновений, для которых ν не убывает с v , торможение продолжает компенсировать силу eE и в сильных полях.

Задача 6.8.1. Пусть поток кинетической энергии записывается в виде

$$\mathbf{H} = \int \bar{n} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \mathbf{v} f dv.$$

При наличии в плазме небольшого градиента температуры этот поток кинетической энергии выражается через теплопроводность κ_T следующим образом:

$$\mathbf{H} = -\kappa_T \nabla T.$$

Рассматривая градиент температуры направленным вдоль оси z и пользуясь приведенным выше методом вычисления электропроводности, покажите, что

$$H_z = -\frac{4\pi n \kappa}{3\pi^{3/2} \nu_m} \left(\frac{m}{2\kappa T_e} \right)^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial z} \int_0^\infty v^6 e^{-mv^2/2\kappa T} dv = -\frac{5}{2} \frac{n}{m} \frac{\kappa^2}{\nu_m} \frac{\partial T_e}{\partial z}.$$

Следовательно, электронная теплопроводность в слабоионизованной плазме имеет вид

$$\kappa_T = \frac{5}{2} \frac{n}{m} \frac{\kappa^2 T_e}{\nu_m}. \quad (6.8.8)$$

8.2. Коэффициент диффузии слабоионизованной плазмы

Диффузия приводит к уменьшению, а затем и к окончательному исчезновению градиентов плотности в плазме; релаксацию такого рода можно изучать тем же методом, что и электропроводность. Скорость диффузии определяется коэффициентом диффузии, который выражается через поток частиц:

$$\Gamma_\alpha = \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = -D_\alpha \nabla n; \quad (6.8.9)$$

здесь $\bar{n}_\alpha = N_\alpha/V$ — средняя плотность частиц сорта α . В случае небольших градиентов так же, как и при слабых электрических полях, удобно записать распределение в виде разложения

$$f_\alpha = f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

где $f_{\alpha 0}$ — локальное максвелловское распределение (6.7.3). Добавка $f_{\alpha 1}$ к максвелловскому распределению предполагается малой по сравнению с $f_{\alpha 0}$ и описывает поток частиц, который вызывается градиентом плотности и которому препятствуют столкновения.

Если градиенты плотности поддерживаются постоянными (например, с помощью системы источников и стоков), то достигается стационарное

состояние, в котором напор частиц из более плотных областей сдерживается столкновениями с нейтралами, причем устанавливается постоянный поток частиц. В пренебрежении любыми электрическими полями, которые могли бы при этом возникнуть (см. следующий пример), подобное стационарное состояние описывается уравнением Больцмана. Это уравнение в данном случае имеет вид (снова используем модель Крукса для столкновительного члена и пренебрегаем членом второго порядка малости $\partial f_{\alpha 1} / \partial x$)

$$v_x \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x} = -v_{m\alpha} f_{\alpha 1}. \quad (6.8.10)$$

Поскольку $\int v f_{\alpha 0} dv = 0$, поток в направлении \hat{x} равен

$$\Gamma_x = \bar{n}_{\alpha} \int v_x f_{\alpha 1} dv. \quad (6.8.11)$$

Подставляя сюда $f_{\alpha 1}$ из уравнения (6.8.10) и интегрируя, получаем выражение

$$\Gamma_x = -\frac{1}{v_{m\alpha}} \frac{d}{dx} \int \bar{n}_{\alpha} v_x^2 f_{\alpha 0} dv = \frac{1}{v_{m\alpha}} \frac{d}{dx} \frac{n_{\alpha} \kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}},$$

в котором мы использовали определение температуры (3.2.10). Сравнение последнего выражения с (6.8.9) дает

$$D_{\alpha} = \frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha} v_{m\alpha}} \quad (6.8.12)$$

— коэффициент диффузии заряженных частиц сорта α через фон нейтральных частиц.

8.3. Выбор частоты столкновений $v_{m\alpha}$

С целью использования полученных выше результатов необходимо определить значение $v_{m\alpha}$. Степень отклонения заряженной частицы нейтральным атомом зависит от скорости частицы и сечения рассеяния σ_i . Спитцер [4] для частоты столкновений приводит следующее выражение:

$$v_{m\alpha} = \frac{1}{\tau_{\alpha}} = n_n \sigma_s \left(\frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^{1/2}. \quad (6.8.13)$$

Следовательно, мы можем написать, что $\omega_{ce} \tau_e / \omega_{ci} \tau_i \approx (m_i / m_e)^{1/2}$.

Для электронов σ_s почти не зависит от скорости ($\sigma_s \approx 4 \cdot 10^{-15}$ см² при рассеянии электронов на атомах водорода в интервале температуры $T_e = 10$ —1000 К), в то время как сечение рассеяния ионов обнаруживает большие изменения ($\sigma \approx 50 \cdot 10^{-15}$ см² при $T_i = 10$ К и $\sigma = 5 \cdot 10^{-15}$ см² при $T_i = 1000$ К).

§ 9. АМБИПОЛЯРНАЯ ДИФФУЗИЯ

В слабоионизованном газе, в котором столкновения электронов и ионов с нейтральными частицами происходят чаще, чем кулоновские столкновения между электронами и ионами, возникает электрическое поле при диффузии электронов и диффузии ионов, происходящих независимо одна от другой. Электрические силы стремятся выравнять скорости диффузии электронов и ионов. При рассмотрении диффузии следует различать два основных случая:

$$L \ll \lambda_D$$

и

$$L \gg \lambda_D,$$

где L — размер системы или характерная длина, в пределах которой могут существовать градиенты плотности, температуры, давления и т.д., а λ_D — дебаевский радиус экранирования. Если $L \ll \lambda_D$, то электроны и ионы диф-

фундируют по отдельности в соответствии с их собственными коэффициентами «свободной» диффузии. Это объясняется тем, что тепловая энергия частиц плазмы $\kappa T = \lambda_D^2 (4\pi n e^2)$ в таком случае значительно превышает максимальную потенциальную энергию, которая могла бы возникнуть в системе, если бы все электроны были из нее удалены ($eE_{\text{макс}} L = ne^2 L^2$); поэтому можно пренебречь полями E , возникающими в процессе диффузии. Коэффициенты диффузии электронов и ионов в этом случае записываются в виде

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\kappa T_e}{m_e \nu_{me}}, \\ D_i &= \frac{\kappa T_i}{m_i \nu_{mi}}; \end{aligned} \quad (6.9.1)$$

здесь ν_{me} и ν_{mi} — частоты столкновений электронов и ионов с нейтралами с передачей импульса. Из выражений (6.9.1) следует, что благодаря меньшей массе электроны диффундируют быстрее, чем ионы.

В случае $L \gg \lambda_D$ нельзя более ожидать, что электроны и ионы будут диффундировать независимым друг от друга образом. Из выражений (6.9.1) ясно, что более легкие частицы — электроны — стремятся диффундировать быстрее, чем ионы. Однако уход электронов из плазмы с большей скоростью, чем уход ионов, приведет в конце концов к возникновению пространственного заряда и связанного с ним электрического поля, которое будет препятствовать избыточному уходу электронов. То же самое поле способствует увеличению скорости ухода ионов из плазмы. При достижении установившегося состояния потоки ионов и электронов совпадают. Коэффициент диффузии, возникающей в результате этого самосогласованного процесса, называется *коэффициентом амбиполярной диффузии*.

Коэффициент амбиполярной диффузии можно найти, приравняв друг другу потоки ионов и электронов, возникающие в результате совместного действия электрического поля и градиента плотности. Поток заряженных частиц, обусловленный электрическим полем, можно вычислить с помощью выражения (6.8.6), поскольку

$$\Gamma_\alpha = \frac{J_\alpha}{q_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha E}{q_\alpha}.$$

Поток частиц, вызванный электрическим полем, обычно описывается посредством подвижности μ , определяемой выражением

$$\mu_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{n_\alpha q_\alpha},$$

так что поток за счет электрического поля $\Gamma = n\mu E$. Следует заметить, что подвижность может иметь *любой* знак, в частности для электронов μ_e отрицательна.

Складывая потоки, обусловленные отдельно электрическим полем и градиентом плотности, получаем полные потоки электронов и ионов

$$\Gamma_e = n\mu_e E - D_e \nabla n \quad (6.9.2)$$

и

$$\Gamma_i = n\mu_i E - D_i \nabla n. \quad (6.9.3)$$

Приравняв потоки электронов и ионов ($\Gamma_e = \Gamma_i$) друг другу и полагая $n_e = n_i$, можно исключить электрическое поле из этих двух уравнений. Результирующий поток частиц любого сорта записывается в виде

$$\Gamma = - \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_e - \mu_i} \nabla n. \quad (6.9.4)$$

Этот поток можно выразить через коэффициент амбиполярной диффузии D_A :

$$\Gamma = -D_A \nabla n, \quad (6.9.5)$$

где

$$D_A = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e}. \quad (6.9.6)$$

Используя известное соотношение между коэффициентом диффузии и подвижностью, т. е. $\mu_\alpha = (q_\alpha / \kappa T_\alpha) D_\alpha$, выражение для коэффициента амбиполярной диффузии можно записать в виде

$$D_A = \frac{(T_e + T_i) D_i D_e}{T_i D_e + T_e D_i}. \quad (6.9.7)$$

Поскольку при почти равных температурах ионов и электронов $D_i \ll D_e$, имеем

$$D_A \approx D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right). \quad (6.9.8)$$

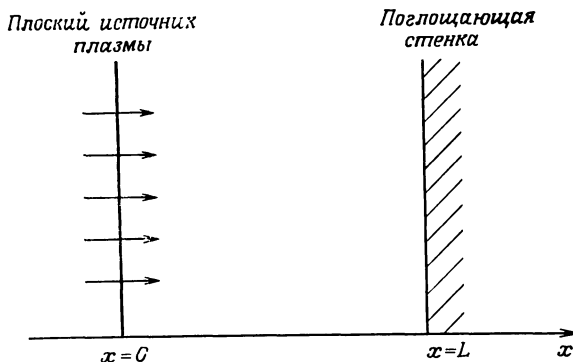
В случае плазмы, в которой температуры электронов и ионов одинаковы,

$$D_A \approx 2D_i. \quad (6.9.9)$$

Отсюда видно, что эффективный коэффициент диффузии для плазмы, в которой преобладают столкновения заряженных частиц с нейтральным фоном, примерно вдвое превышает коэффициент свободной диффузии ионов. Таким образом, электроны пытаются диффундировать быстрее, чем ионы, но им препятствует возникающее при этом поле пространственного заряда. Это же поле ускоряет диффузию ионов, и в итоге ионы и электроны диффундируют вместе с эффективным коэффициентом диффузии, который в два раза больше коэффициента диффузии частиц, диффундирующих более медленно, т. е. ионов.

9.1. Амбиполярная диффузия в слое

В качестве примера использования коэффициента амбиполярной диффузии рассмотрим ситуацию, схематически изображенную на фиг. 122. Плоский источник плазмы, расположенный в плоскости $x = 0$, испускает поток Γ_0 в направлении оси x в область слабоионизованной плазмы. В плоскости $x = L$ расположена идеально поглощающая стенка, на которой плотность как ионов, так и электронов равна нулю. Если $L \gg \lambda_D$, то стационарное распределение плотности определяется коэффициентом амбиполярной диффузии. Дифференциальное уравнение для плотности следует из уравнения



Фиг. 122. Одномерная диффузия плазмы в слабоионизованном газе.

непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{V} = 0. \quad (6.9.10)$$

Кроме того, поток $\Gamma = n\mathbf{V}$ связан с градиентом плотности посредством коэффициента амбиполярной диффузии, т.е.

$$\Gamma = -D_A \nabla n. \quad (6.9.11)$$

После подстановки соотношения (6.9.11) в уравнение непрерывности (6.9.10) последнее переходит в уравнение диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_A \nabla^2 n. \quad (6.9.12)$$

Это уравнение служит отправной точкой для вычисления условий равновесия и устойчивости, связанных со столкновительными явлениями переноса. Для стационарного состояния $\partial n / \partial t = 0$ и плотность n удовлетворяет уравнению Лапласа. В одномерном случае это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{d^2 n}{dx^2} = 0.$$

Его решение, записываемое в виде

$$n = a + bx, \quad (6.9.13)$$

должно удовлетворять граничному условию при $x = 0$, определяемому заданным потоком Γ_0 от источника плазмы. Согласно (6.9.11),

$$\Gamma_0 = -D_A \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=0} = -bD_A.$$

Граничное условие на поглощающей стенке при $x = L$ имеет вид

$$n(L) = a + bL = 0.$$

Подстановка полученных значений a и b в решение (6.9.13) дает следующую зависимость плотности от координаты:

$$n = \frac{\Gamma_0 L}{D_A} \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (6.9.14)$$

Плотность убывает с координатой x по линейному закону. Выражение (6.9.14) справедливо только при $L \gg \lambda_D$, поскольку мы предполагали, что диффузия амбиполярная. Если измерить распределение плотности по координате с помощью лентмюровского зонда, то путем сравнения с теорией можно получить коэффициент амбиполярной диффузии и, таким образом, информацию о частоте столкновений иона с нейтралами с передачей импульса.

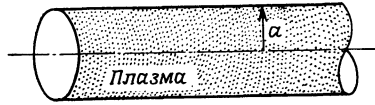
9.2. Амбиполярная диффузия от импульсного линейного источника

Коэффициент амбиполярной диффузии часто получают методом, который состоит в измерении скорости уменьшения плотности плазмы после импульсного разряда. Теория этого эксперимента служит хорошим примером применения макроскопических уравнений с учетом диффузии. Рассмотрим цилиндрическую плазму радиусом a , как показано на фиг. 123. Предположим, что начальные плотности электронов и ионов одинаковы и зависят от радиуса, т.е.

$$n_e(r, 0) = n_i(r, 0) = n(r, 0). \quad (6.9.15)$$

Предположим также, что на стенке плазменного столба плотность обеих компонент равна нулю в любой момент времени, т.е.

$$n_e(a, t) = n_i(a, t) = 0. \quad (6.9.16)$$



Фиг. 123. Плазменный столб с линейным источником, помещенным на оси, для изучения диффузии плазмы в слабоионизованном газе.

Зависимость плотности от времени и координаты определяется дифференциальным уравнением диффузии (6.9.12). В случае $L \gg \lambda_D$ в это уравнение должен входить коэффициент амбиполярной диффузии. В азимутально-симметричной цилиндрической плазме, неограниченной в осевом направлении, диффузия происходит только в радиальном направлении и уравнение (6.9.12) в цилиндрических координатах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial n(r,t)}{\partial r} \right]. \quad (6.9.17)$$

Если искать решение этого уравнения методом разделения переменных в форме

$$n(r, t) = T(t) R(r),$$

то уравнение (6.9.17) можно записать в виде

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{D_A}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dR(r)}{dr} \right]. \quad (6.9.18)$$

Таким образом, зависимость от времени выглядит как

$$T(t) = A e^{-t/\tau}. \quad (6.9.19)$$

Подставляя это решение в (6.9.18), получаем дифференциальное уравнение для радиальной зависимости

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\tau D_A} R(r) = 0. \quad (6.9.20)$$

Решение этого дифференциального уравнения, ограниченное на оси, представляет собой обычную функцию Бесселя первого рода, т. е.

$$R(r) = B J_0 \left(\frac{r}{\sqrt{\tau D_A}} \right). \quad (6.9.21)$$

Граничное условие на стенке ($r = a$) требует, чтобы

$$J_0 \left(\frac{r}{\sqrt{\tau D_A}} \right) = 0, \quad (6.9.22)$$

откуда находим величину

$$p_\nu = \frac{a}{\sqrt{\tau D_A}}, \quad (6.9.23)$$

представляющую собой ν -й корень функции Бесселя первого рода ($p_1 = 2,405$, $p_2 = 5,52$ и т. д.). Последнее соотношение связывает время затухания τ с коэффициентом диффузии и размером плазменной установки.

Произвольное начальное распределение плотности вдоль радиуса можно представить в виде разложения по полученным выше радиальным решениям:

$$n(r, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu J_0 \left(p_\nu \frac{r}{a} \right), \quad (6.9.24)$$

где коэффициенты разложения определяются выражением

$$C_\nu = \frac{2}{[J_1(p_\nu)]^2} \int_0^a n(r, 0) J_0 \left(p_\nu \frac{r}{a} \right) r dr. \quad (6.9.25)$$

Каждая мода обладает своим, отличным от других временем затухания τ . Из (6.9.23) имеем

$$\tau_v = \frac{a^2}{D_A p_v^2}. \quad (6.9.26)$$

Полное решение имеет вид

$$n(r, t) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v J_0 \left(p_v \frac{r}{a} \right) e^{-t D_A p_v^2 / a^2}. \quad (6.9.27)$$

По прошествии некоторого времени выживает только основная радиальная мода ($v = 1$), поскольку ее скорость затухания минимальна. Таким образом, плотность вдоль радиуса спадает по следующему закону:

$$n(r, t) = C_1 J_0 \left(p_1 \frac{r}{a} \right) e^{-t D_A p_1^2 / a^2}. \quad (6.9.28)$$

Если теперь с помощью ленгмюровских зондов или микроволнового рассеяния измерить в фиксированной точке плотность или какую-либо величину, пропорциональную ей, как функцию времени, то можно определить коэффициент амбиполярной диффузии по наклону графика зависимости $\ln [n(t)]$ от времени.

§ 10. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В большинстве экспериментов плазма удерживается магнитным полем; динамика плазмы определяется диффузией, проводимостью и другими явлениями переноса поперек магнитного поля. Соответствующие коэффициенты переноса можно вычислить с помощью модели столкновений, описанной в предыдущем параграфе, предполагая, что столкновения электронов и ионов с нейтралами играют более важную роль, чем электрон-ионные столкновения, и считая частоту столкновений достаточно большой, так что в отсутствие градиентов или электрических полей функции распределения электронов, ионов и нейтралов являются максвелловскими.

10.1. Подвижность

Пусть к замагниченной плазме приложено слабое электрическое поле \mathbf{E} . Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения электронов имеет вид

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_e = \frac{\partial f_e}{\partial t} \Big|_{\text{столк}}. \quad (6.10.1)$$

Столкновительный член в рассматриваемом здесь случае слабоионизованной плазмы определяется выражением

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = -\nu_{me} (f_e - f_{e0}), \quad (6.10.2)$$

где ν_{me} — частота столкновений электронов с нейтралами, а f_{e0} — функция распределения Максвелла. Если электрическое поле мало, то общая функция распределения электронов складывается из функции распределения Максвелла и малой добавки, связанной с электрическим полем \mathbf{E} , т. е.

$$f_e = f_{e0} + f_{e1}, \quad f_{e1} \ll f_{e0}. \quad (6.10.3)$$

Предполагается, что для ионов справедливо аналогичное разложение. Подвижность (и проводимость) плазмы, обусловленная компонентой электри-

ческого поля в направлении магнитного поля, совпадает со своим значением в отсутствие магнитного поля. Однако движение электронов (и ионов), обусловленное компонентами электрического поля, перпендикулярными магнитному полю, изменяется под действием магнитного поля. Кроме того, электрическое поле в направлении оси x (считаем, что магнитное поле направлено по оси z) вызовет одновременно с движением по оси x также движение, направленное по оси y ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф). Таким образом, в общем случае подвижность (и другие коэффициенты переноса) представляет собой анизотропный тензор. Тензор подвижности определяется через поток частиц точно так же, как и в более простом случае для скалярной подвижности плазмы, свободной от внешних полей:

$$n_e \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E} = n_e \mathbf{V}_e = \bar{n}_e \int \mathbf{v} f_{e1} d\mathbf{v}. \quad (6.10.4)$$

С целью вычисления подвижности электронов (или ионов) в слабоионизованной плазме в рамках τ -приближения для столкновений предположим, что достигнуто стационарное состояние, т. е. $\partial f / \partial t = 0$. Уравнение Больцмана (6.10.4) с учетом выражений (6.10.2) и (6.10.3) принимает вид

$$\frac{q\mathbf{E}}{m_e} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} + \frac{q}{m_e c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e1} = -\nu_m f_{e1}; \quad (6.10.5)$$

здесь мы опустили нижние индексы, соответствующие электронам или ионам, и использовали тот факт, что в случае максвелловской функции распределения f_0

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0. \quad (6.10.6)$$

Мы предположили, что постоянное магнитное поле направлено по оси z . Кроме того, мы отбросили члены второго порядка малости ($\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_1$). Умножая уравнение (6.10.5) на \mathbf{v} и интегрируя по скорости, имеем

$$-\frac{q\mathbf{E}}{m} - \hat{x}\omega_c V_y + \hat{y}\omega_c V_x = -\nu_m (\hat{x}V_x + \hat{y}V_y + \hat{z}V_z). \quad (6.10.7)$$

Записывая это уравнение для каждой компоненты, получаем

$$-\frac{qE_x}{m} - \omega_c V_y = -\nu_m V_x, \quad (6.10.8)$$

$$-\frac{qE_y}{m} + \omega_c V_x = -\nu_m V_y, \quad (6.10.9)$$

$$-\frac{qE_z}{m} = -\nu_m V_z. \quad (6.10.10)$$

Отсюда мы видим, что для E_z -компоненты поток nV_z пропорционален E_z , т. е.

$$nV_z = \frac{qn}{m\nu_m} E_z = \mu_0 n E_z. \quad (6.10.11)$$

Следовательно, подвижность в направлении оси z , обозначенная через μ_0 , совпадает со своим значением в отсутствие магнитного поля. Разрешая уравнения (6.10.8) и (6.10.9) относительно nV_x и nV_y , диффузию заряженных частиц в слабоионизованной плазме, вызванную небольшим внешним электрическим полем, можно записать в следующем компактном виде:

$$\boldsymbol{\Gamma} = n\mathbf{V} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}; \quad (6.10.12)$$

здесь тензор подвижности $\boldsymbol{\mu}$ дается выражением (без потери общности считаем вектор \mathbf{E} расположенным в плоскости xy)

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{\perp} & \mu_T & 0 \\ -\mu_T & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{bmatrix}. \quad (6.10.13)$$

Поперечная подвижность μ_{\perp} определяет поток $n\mathbf{V}$ в направлении вектора $(\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}/B)$, «косая» подвижность μ_T определяет поток, перпендикулярный векторам \mathbf{E} и \mathbf{V}_0 . Компоненты тензора подвижности описываются следующими выражениями

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_0 v_m^2}{v_m^2 + \omega_c^2} = \frac{q v_m}{m (v_m^2 + \omega_c^2)}, \quad (6.10.14)$$

$$\mu_T = \frac{\mu_0 \omega_c v_m}{v_m^2 + \omega_c^2} = \frac{q^2 B}{m^2 c} \frac{1}{v_m^2 + \omega_c^2}, \quad (6.10.15)$$

$$\mu_{\parallel} = \mu_0 = \frac{q}{m v_m}. \quad (6.10.16)$$

Следует заметить, что знак величины μ_0 зависит от знака носителя заряда, т. е. она положительна для ионов и отрицательна для электронов. Далее мы рассмотрим связь тензора подвижности с тензором проводимости и тензором коэффициентов диффузии в модели плазмы, обсужденной выше.

10.2. Проводимость и закон Ома

Тензор проводимости в том случае, когда ток переносится заряженными частицами одного сорта, определяется выражением

$$\boldsymbol{\sigma} = nq\boldsymbol{\mu}. \quad (6.10.17)$$

Однако поскольку дрейф $([\mathbf{E} \times \mathbf{V}]/B^2)$ c не зависит от массы, ток в направлении поля \mathbf{E} не всегда определяется подвижностью одних электронов. Проводимость плазмы, в которой имеются несколько подвижных компонент, можно найти, выразив ток через поток частиц:

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mu_{\alpha} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.10.18)$$

Тензор проводимости для плазмы, состоящей из электронов и ионов ($Z = 1$), имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & \sigma_T & 0 \\ -\sigma_T & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (6.10.19)$$

где

$$\sigma_{\perp} = \frac{ne^2}{m_e} \left(\frac{v_{me}}{v_{me}^2 + \omega_{ce}^2} + \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{mi}}{v_{mi}^2 + \omega_{ci}^2} \right), \quad (6.10.20)$$

$$\sigma_T = \frac{ne^3 B}{m_e^2 c} \left(-\frac{1}{v_{me}^2 + \omega_{ce}^2} + \frac{m_e^2}{m_i^2} \frac{1}{v_{mi}^2 + \omega_{ci}^2} \right). \quad (6.10.21)$$

В случае частых столкновений ($\omega_c/v_m \ll 1$) компонента проводимости σ_{\perp} в направлении \mathbf{E}_{\perp} значительно превышает σ_T и проводимость плазмы в основном определяется электронами. В этом случае σ_{\perp} равна своему значению в отсутствие магнитного поля. Столкновения позволяют частице случайно блуждать в направлении \mathbf{E} и препятствуют дрейфу частиц в направлении вектора $[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]$.

В случае редких столкновений ($v_m \ll \omega_c$) проводимость σ_{\perp} опять много больше σ_T . Дело в том, что скорости ионов и электронов в направлении вектора $[\mathbf{E} \times \mathbf{V}]$ почти совпадают, вот почему ток в этом направлении близок к нулю. Следует заметить, что при $\omega_c \gg v_m$ ионы вносят наибольший вклад в ток $[\sigma_{\perp}^i \approx (m_i/m_e)^{1/2} \sigma_{\perp}^e]$. Причина этого состоит в том, что ларморовский радиус ионов много больше ларморовского радиуса электронов, а при каждом столкновении частица перемещается примерно на один ларморовский радиус в направлении \mathbf{E}_{\perp} .

В гл. 3 был приведен закон Ома в виде

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}, \quad (6.10.22)$$

где $\sigma = (ne^2/m)\tau$. В отсутствие столкновений данное выражение означает, что конечный ток возможен, только если правая часть выражения (6.10.22) равна нулю, т. е. должно выполняться следующее равенство:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c}. \quad (6.10.23)$$

Чтобы записать выражение (6.10.22) в форме $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, при наличии столкновений необходимо иметь соотношение между \mathbf{V} и \mathbf{E} . Используемая здесь модель столкновений позволяет получить такое соотношение.

Альтернатива предыдущему выводу состоит в том, чтобы получить МГД-уравнения, пригодные в случае слабоионизованной плазмы. Поступая так же, как и в гл. 3, где были получены МГД-уравнения для полностью ионизованного газа, и пользуясь τ -приближением (считая среднее время столкновений не зависящим от сорта частиц), согласно которому

$$\int d\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = 0, \\ \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} = \frac{\mathbf{V}_{\alpha}}{\tau},$$

можно получить следующие МГД-уравнения для слабоионизованной плазмы (см. § 3 гл. 3):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla p - \frac{\rho \mathbf{V}}{\tau}, \quad (6.10.24)$$

$$\frac{\mathbf{J}}{\tau} = \frac{ne^2}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nec} \right). \quad (6.10.25)$$

В силу сохранения импульса последний член в уравнении (6.10.24) обращается в нуль в случае полностью ионизованной плазмы. Последнее слагаемое в скобках в уравнении (6.10.25) называется *полем Холла*.

10.3. Диффузия

Тензор коэффициентов диффузии определяют выражением

$$\mathbf{D} = \frac{\kappa T}{q} \boldsymbol{\mu}, \quad (6.10.26)$$

а плотность частиц находят из уравнения непрерывности, которое при $n\mathbf{V} = -\mathbf{D} \cdot \nabla n$ записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla) n. \quad (6.10.27)$$

Задача 6.10.1. Выведите систему магнитогидродинамических уравнений для скорости и тока электронов в слабоионизованной плазме, в которой ионы неподвижны (например, ионы могут быть закреплены в кристаллической решетке).

Задача 6.10.2. Покажите, что

$$\sigma_{\perp} = \frac{\sigma_T \mathbf{v}_{me}}{\omega_{ce}} \quad \text{при } \mathbf{v}_{me} \gg \omega_{ce}$$

и

$$\sigma_{\perp} = \frac{\sigma_T \omega_{ci}}{\mathbf{v}_{mi}} \quad \text{при } \mathbf{v}_{mi} \ll \omega_{ci}.$$

Найдите соотношение между σ_{\perp} и σ_T при $v_{me} \ll \omega_{ce}$ и $v_{mi} > \omega_{ci}$, предполагая, что электроны и ионы имеют одинаковые средние длины свободного пробега.

Задача 6.10.3. Покажите, что уравнение $\mathbf{E} = -[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]/c$ совпадает с выражением

$$\mathbf{V} = \lim_{v \rightarrow 0} \mu \cdot \mathbf{E}.$$

Задача 6.10.4. Выведите систему двухжидкостных уравнений для плазмы в слабоионизованном газе. Покажите, что в случае однородной плазмы, находящейся в слабом электрическом и сильном магнитном полях, эти уравнения приводятся к уравнениям (6.10.18)—(6.10.21).

В пределе большой частоты столкновений, как и при рассмотрении проводимости, тензор коэффициентов диффузии сводится к скаляру $D = D_0$. В сильном магнитном поле ($\omega_c \gg v_m$) уход заряженных частиц за счет диффузии поперек магнитного поля уменьшается пропорционально $1/B^2$ по сравнению с уходом частиц в отсутствие магнитного поля.

Рассмотрим случай, когда силовые линии магнитного поля являются прямыми и направлены вдоль оси z , а градиент плотности направлен вдоль оси x . Если магнитное поле сильное ($v_m \ll \omega_c$), то диффузия электронов и ионов в направлении оси y происходит с одинаковой скоростью. В направлении же градиента плотности (по оси x) скорости диффузии ионов и электронов различны. При $\omega_c^2 \gg v_m^2$, используя выражения (6.10.26) и (6.10.13), имеем для ионов

$$D_{\perp i} = \frac{D_{0i} v_{mi}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{\kappa T_e c^2}{e^2 B^2} m_i v_{mi}, \quad (6.10.28)$$

и для электронов

$$D_{\perp e} = \frac{D_{0e} v_{me}^2}{\omega_{ce}^2} = D_{\perp i} \frac{m_e v_{me}}{m_i v_{mi}} \frac{T_e}{T_i} \ll D_{\perp i}. \quad (6.10.29)$$

Таким образом, в общем случае ионы диффундируют поперек сильного магнитного поля быстрее электронов в отличие от случая нулевого магнитного поля, когда (при $L \ll \lambda_D$) быстрее диффундируют электроны. Дело в том, что в промежутке между каждым столкновением частицы перемещаются на расстояние порядка одного ларморовского радиуса, а ларморовский радиус ионов значительно больше, чем радиус электронов. При $L \gg \lambda_D$ отличие в скоростях свободной диффузии приведет к возникновению электрического поля, связанного с разделением зарядов, которое изменит коэффициенты диффузии, приводя опять к амбиполярной диффузии.

§ 11. АМБИПОЛЯРНАЯ ДИФФУЗИЯ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим плазму, удерживаемую магнитным полем $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$. Пусть для простоты плазма имеет форму слоя, неограниченного и однородного в продольных направлениях y и z , с градиентом плотности, направленным вдоль оси x . В рассматриваемой геометрии диффузия в направлениях y и z не приводит к разделению зарядов. Если толщина плазмы в направлении x меньше дебаевского радиуса, то коэффициенты свободной диффузии будут правильно описывать скорости диффузии ионов и электронов, причем ионы будут диффундировать быстрее электронов, так как $D_{\perp i} \gg D_{\perp e}$. Однако, если толщина плазмы в направлении x больше дебаевского радиуса, на диф-

фузию влияют электрические поля, возникающие при стремлении ионов оторваться от электронов. Как и в рассмотренной выше ситуации, эти электрические поля видоизменяют скорости диффузии отдельно для ионов и электронов таким образом, что результирующий поток ионов оказывается равным потоку электронов. Эти потоки имеют вид

$$\begin{aligned}\Gamma_e &= (n\mu_e \cdot \mathbf{E}) - (D_e \cdot \nabla n) = n\mu_{\perp e} \mathbf{E} - D_{\perp e} \nabla n, \\ \Gamma_i &= n\mu_{\perp i} \mathbf{E} - D_{\perp i} \nabla n.\end{aligned}$$

Полагая $\Gamma_e = \Gamma_i$, можно получить коэффициент амбиполярной диффузии поперек магнитного поля в слабоионизованной плазме, а именно

$$D_{\perp A} = \frac{\mu_{\perp i} D_{\perp e} - \mu_{\perp e} D_{\perp i}}{\mu_{\perp i} - \mu_{\perp e}}. \quad (6.11.1)$$

В случае сильного магнитного поля ($\omega_c^2 \gg \nu_m^2$) из этого выражения следует, что $\mu_{\perp i} D_{\perp e} = -(T_e/T_i) \mu_{\perp e} D_{\perp i}$ и $\mu_{\perp i} \gg \mu_{\perp e}$. Таким образом, коэффициент амбиполярной диффузии поперек сильного магнитного поля определяется выражением

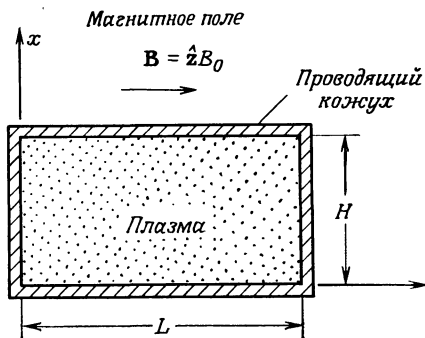
$$D_{\perp A} \approx D_{\perp e} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right). \quad (6.11.2)$$

Если температуры электронов и ионов одинаковы, то коэффициент амбиполярной диффузии поперек магнитного поля в два раза больше коэффициента свободной диффузии более медленной компоненты, в данном случае электронов. Коэффициент амбиполярной диффузии поперек магнитного поля отличается от коэффициента амбиполярной диффузии в отсутствие магнитного поля. Это отличие состоит в том, что при $\omega_c \ll \nu_m$ имеем $D_A = 2D_i$, в то время как при $\omega_c \gg \nu_m$ $D_{\perp A} = 2D_{\perp e}$.

11.1. Диффузия слабоионизованной замагниченной плазмы конечных размеров; эффект короткого замыкания

В предыдущем разделе плазма предполагалась ограниченной в направлении x и бесконечной в направлениях y и z . Рассмотрим теперь плазму, ограниченную также в направлении z , совпадающем с направлением магнитного поля B_z (фиг. 124). Пусть плазма находится в идеально проводящем кожухе высотой H и шириной L , причем L и H много больше как средней длины свободного пробега между столкновениями, так и дебаевского радиуса.

На основании предыдущего рассмотрения можно было бы ожидать, что в кожухе с $L \approx H$ плазма будет диффундировать в направлении оси x , т. е. поперек магнитного поля со скоростью, определяемой коэффициентом амбиполярной диффузии $D_{\perp A} = 2D_{\perp e}$, а вдоль оси z , т. е. вдоль магнитного поля, со скоростью, определяемой коэффициентом амбиполярной диффузии $D_A = 2D_i$. Полная диффузия должна тогда представлять сумму этих процессов. Это неверно, поскольку потоки nV_x и nV_z связаны друг с другом посредством уравнения непрерывности $\partial n / \partial t = -\nabla \cdot (nV)$. Коэффициент



Фиг. 124. Плазма, заключенная в металлический кожух и помещенная в конечное магнитное поле.

Такая геометрия удобна при анализе диффузии плазмы поперек магнитного поля в ограниченном объеме

диффузии находится из уравнения непрерывности или уравнения диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{D} \cdot \nabla) n + \nabla \cdot (n \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}),$$

которое для электронов имеет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial z^2} - \mu_e \frac{\partial}{\partial z} (n_e E_z) + D_{\perp e} \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} - \mu_{\perp e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e E_x) \quad (6.11.3)$$

и для ионов

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial z^2} - \mu_i \frac{\partial}{\partial z} (n_i E_z) + D_{\perp i} \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} - \mu_{\perp i} \frac{\partial}{\partial x} (n_i E_x). \quad (6.11.4)$$

Предполагая $E_z \sim E_x$, можно исключить E_z из этих уравнений. Членами с $\mu_{\perp e}$ и $\mu_{\perp i}$ можно пренебречь на том основании, что подвижность поперек \mathbf{B} в направлении оси x много меньше подвижности вдоль оси z вследствие того, что магнитное поле направлено по z , т. е.

$$\mu_{\perp e, i} = \frac{\mu_{e, i}}{(\omega_c / v_m)^2} \ll \mu_{e, i}. \quad (6.11.5)$$

Исключая E_z из уравнений (6.11.3) и (6.11.4), получаем уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \frac{\mu_i D_{\perp e} - \mu_e D_{\perp i}}{\mu_i - \mu_e} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (6.11.6)$$

Таким образом, коэффициенты диффузии вдоль и поперек магнитного поля не равны друг другу и отличаются от изученных в двух предыдущих случаях, где отношение размеров плазмы вдоль и поперек магнитного поля было очень большим или очень малым. В рассматриваемом случае ограниченной слабоионизованной плазмы эффективные коэффициенты диффузии записываются в виде

$$D_{\perp A}^* = \frac{\mu_i D_{\perp e} - \mu_e D_{\perp i}}{\mu_i - \mu_e} \quad (\text{поперек поля}) \quad (6.11.7)$$

и

$$D_{\parallel}^* = \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_i - \mu_e} = D_A \quad (\text{вдоль поля}). \quad (6.11.8)$$

Таким образом, эффективный коэффициент диффузии вдоль поля совпадает с коэффициентом амбиполярной диффузии в отсутствие магнитного поля. Используя неравенства $\mu_e \gg \mu_i$ и $D_{\perp i} \gg D_{\perp e}$, можно упростить выражение для эффективного коэффициента диффузии поперек поля. В результате получаем приближенное равенство

$$D_{\perp A}^* \approx D_{\perp i}, \quad (6.11.9)$$

которое показывает, что коэффициент диффузии поперек магнитного поля не равен удвоенному коэффициенту диффузии электронов, как предсказывается одномерной моделью, а совпадает с коэффициентом диффузии ионов поперек магнитного поля. Уравнение диффузии для электронов и ионов принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + D_{\perp i} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (6.11.10)$$

Такие значения коэффициентов диффузии получаются потому, что в одномерных расчетах диффузии вдоль и поперек магнитного поля требовалось, чтобы совпадали объемные потоки ионов и электронов, в то время как в только что рассмотренной ограниченной задаче требовалось, чтобы совпадали только полные потоки ионов и электронов на стенке. Это означает, что электроны могут двигаться вдоль магнитного поля под действием электрических полей, возникших в процессе ионной диффузии поперек поля. Поток

электронов на торцевые стенки экспериментальной камеры уменьшает поле пространственного заряда, которое препятствовало бы диффузии ионов в одномерной задаче. Таким образом, диффузия ионов поперек поля происходит так, как будто поле пространственного заряда отсутствует. Данное явление называется *эффектом короткого замыкания Саймона*.

11.2. Экспериментальная проверка амбиполярной диффузии

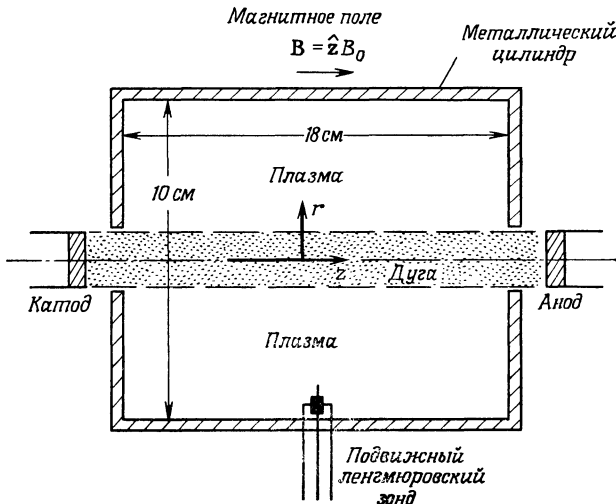
Большое число ранних экспериментов было посвящено проверке рассмотренных выше и связанных с ними идей [5, 6, 14*, 15*]. На фиг. 125 приведена схема одного из этих экспериментов. Плазма образуется в дуговом термоэмиссионном разряде, который действует как источник редкой плазмы, находящийся на оси замкнутого проводящего цилиндра, помещенного в аксиальное магнитное поле. Плазма диффундирует в радиальном и аксиальном направлениях за счет столкновений электронов и ионов с нейтралами. Плотность ионов измеряется подвижными ленгмюровскими зондами, находящимися под отрицательным потенциалом (20 В). Было найдено, что распределение плотности ионов представляет собой экспоненциально убывающую функцию радиуса. Такое распределение можно было ожидать из стационарного ($\partial n/\partial t = 0$) решения уравнения диффузии (6.11.10) в цилиндрических координатах с линейным источником на оси. Решение, полученное методом разделения радиальной и аксиальной переменных, имеет вид

$$n(r) = AK_0 \left(\frac{r}{a} \right); \quad (6.11.11)$$

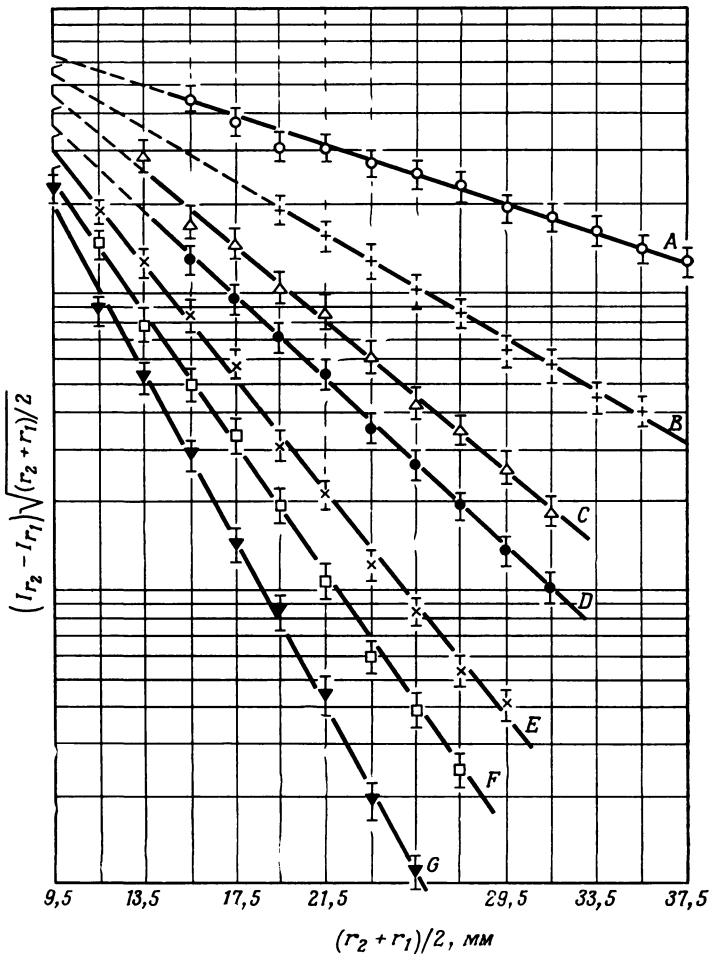
здесь K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода и

$$a = \frac{L}{\pi} \left| \frac{D_{\perp i}}{D_{\parallel A}} \right|^{1/2}. \quad (6.11.12)$$

Параметр a представляет собой характерную длину, связанную с разделением переменных в дифференциальном уравнении и определяющую радиальный размер плазмы, так как при $r \gg a$ плотность пропорциональна экспо-



Фиг. 125. Схема эксперимента, использованная Саймоном для исследования диффузии плазмы поперек магнитного поля [6].



Фиг. 126. Зависимость ионного тока $I_{r_2} - I_{r_1}$, измеренного дифференциальным радиальным зондом и умноженного на $\sqrt{(r_2 + r_1)/2}$, от радиальной координаты зонда $(r_2 + r_1)/2$ [6]. Расстояние отсчитывается от оси дуги.

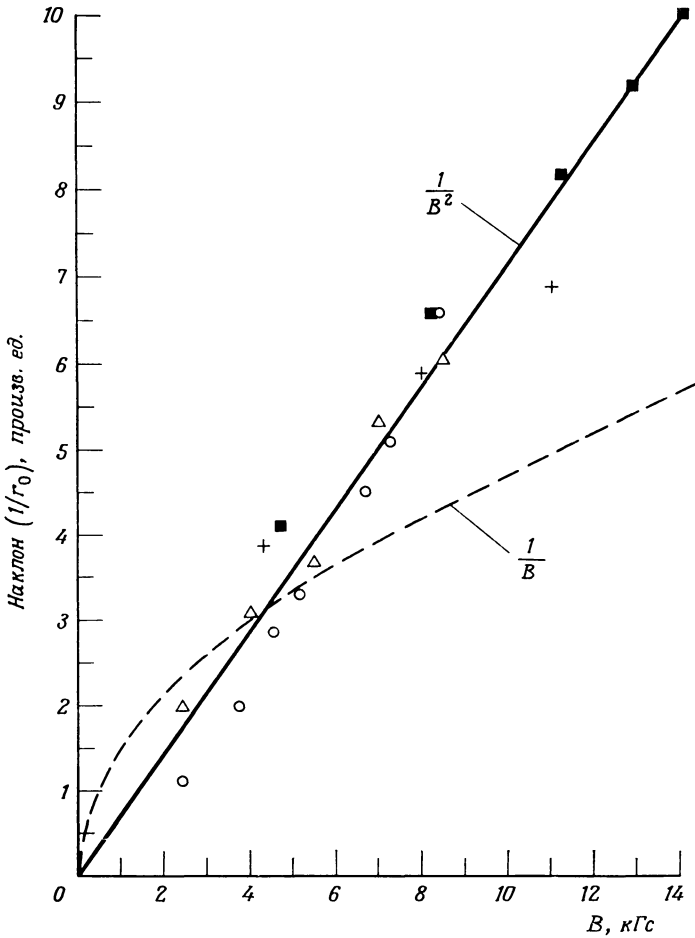
нentially затухающей функции от радиуса:

$$n(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-r/a}. \quad (6.11.13)$$

Поскольку $D_{\perp} \sim 1/B^2$, характерный радиус плазмы a должен быть пропорционален $1/B$. В эксперименте измеряется длина, на которой плотность убывает в e раз, как функция магнитного поля и давления окружающего газа. Результаты этих экспериментов, приведенные на фиг. 126, действительно подтверждают то, что коэффициент диффузии поперек магнитного поля пропорционален $1/B^2$, как показано на фиг. 127.

В некоторых условиях диффузия поперек магнитного поля могут вызывать также неустойчивости. Следует заметить, что с увеличением частоты столкновений (благодаря реально существующим парным столкновениям или неустойчивостям) коэффициент диффузии проходит через максимум при $\nu_m \approx \omega_c$, который равен

$$D_{\perp, \text{ макс}} \approx \frac{\kappa T}{eB} c,$$



Фиг. 127. Зависимость наклонов $1/r_0$ [r_0 соответствует характерной длине a в уравнении (6.11.12)] от магнитного поля B [6].

Сплошная линия соответствует зависимости $1/B^2$, штриховая кривая — зависимости $1/B$. Данные эксперимента подтверждают зависимость $1/B^2$.

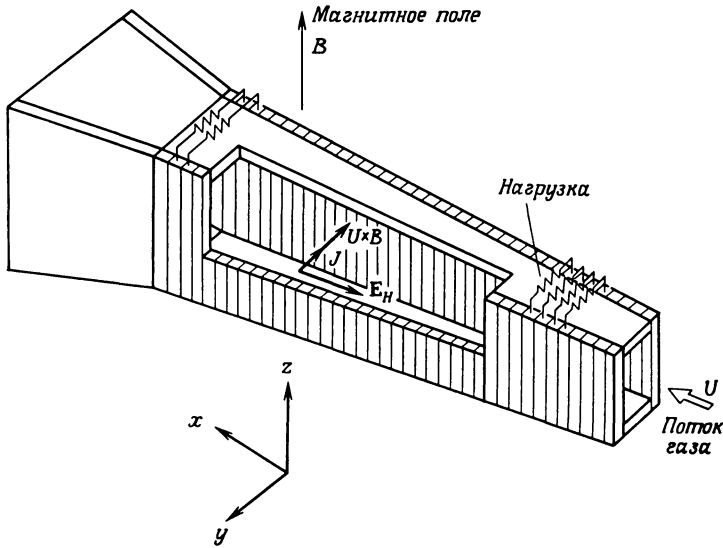
поскольку D_{\perp} пропорционален величине μ_{\perp} , определяемой выражением (6.10.14).

Коэффициент диффузии, пропорциональный $1/B$, определяет максимальную ожидаемую скорость, с которой процессы развития неустойчивостей могут разрушить удерживаемую плазму¹⁾; он называется *коэффициентом боровской диффузии*.

§ 12. МГД-ГЕНЕРАТОРЫ ЭНЕРГИИ

Явления переноса в плазме нашли важное применение в МГД-генераторе, предназначенном для преобразования энергии плазменного потока в электрическую энергию. На фиг. 128 показано, как можно осуществить идею, состоящую в том, чтобы с помощью источника тепла заставить слабоионизованную плазму расширяться в канал со скоростью $U = U\hat{x}$. Если перпендикулярно потоку плазмы включить магнитное поле $\mathbf{B} = B\hat{z}$, то

¹⁾ Это утверждение относится к тем неустойчивостям, роль которых сводится лишь к изменению эффективной частоты соударения.— *Прим. ред.*



Фиг. 128. Схематическое представление МГД-генератора, иллюстрирующее его основные особенности.

в направлении, перпендикулярном потоку плазмы и магнитному полю, возникнет электрическое поле, согласно МГД-уравнениям (6.10.24) и (6.10.25):

$$\frac{\mathbf{U} \times \mathbf{B}}{c} = -\mathbf{E} + \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{|\omega_{ce}| \tau}{B\sigma} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (6.12.1)$$

Если время между столкновениями достаточно мало, ток течет в направлении поля \mathbf{E} . Этот ток может быть снят электродами, находящимися в контакте с плазмой, и выведен на внешнюю нагрузку. В стационарном состоянии МГД-уравнение движения [см. (6.10.24)]

$$\frac{1}{2} \rho \frac{dU^2}{dx} = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{c} \quad (6.12.2)$$

показывает, что съем тока происходит за счет уменьшения энергии потока плазмы. Если генератор предназначен для съема существенной части энергии потока, то длину канала L следует выбрать такой, чтобы

$$\frac{1}{2} \rho U^2 \approx \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{c} L. \quad (6.12.3)$$

Записывая уравнения (6.12.1) (в компонентной форме) и (6.12.3) и приравнявая друг другу компоненты в направлении $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$, получаем условие

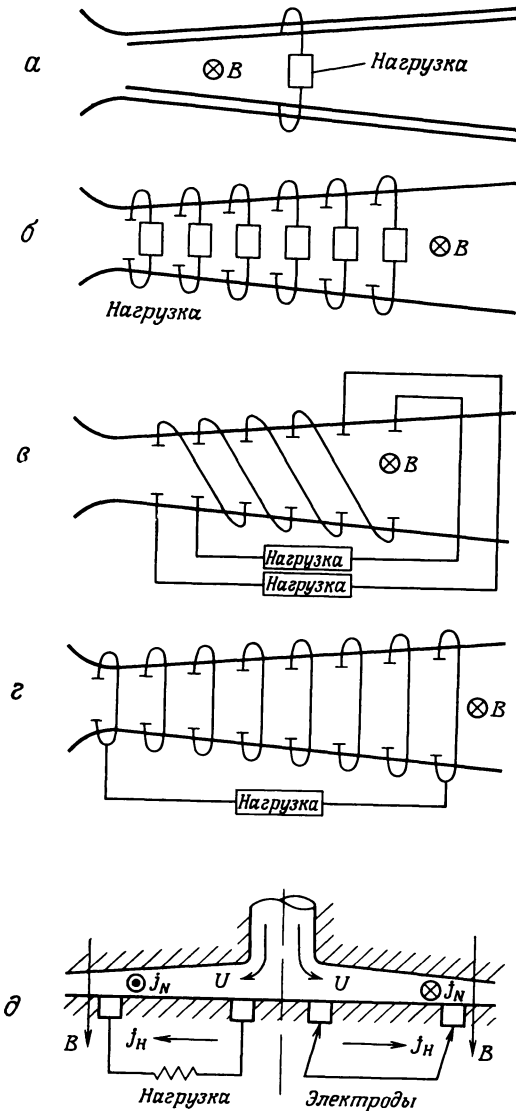
$$S \equiv \frac{\sigma B^2 L}{\rho U c^2} \approx 1, \quad (6.12.4)$$

связывающее проводимость с эффективной длиной установки. Величина S называется параметром взаимодействия и равна отношению объемной силы со стороны магнитного поля к кинетическому давлению газа.

Привлекательная черта МГД-генератора состоит в том, что естественные потери в такой системе носят поверхностный характер и в основном являются потерями на теплоотвод и трение, в то время как сам процесс преобразования (6.12.2) представляет собой *объемный* эффект. Такое устройство могло бы особенно удачно применяться на высоких уровнях мощности.

Третий (холловский) член в правой части уравнения (6.12.1) описывает эффект Холла и определяется величиной

$$R_H = \omega_{ce} \tau = \mu B,$$



Фиг. 129. Схемы некоторых конфигураций МГД-генераторов [7].

a — простой фарадеевский генератор; *б* — фарадеевский генератор с секционированными электродами; *в* — фарадеевский генератор с диагональной схемой; *г* — линейный холловский генератор; *д* — дисковый холловский генератор.

меньшей потенциалов ионизации отдельных компонент плазмы. При более высоких плотностях (давление ~ 1 атм), при которых работает МГД-генератор, термическая ионизация оказывается более практически осуществимым средством создания плазмы.

Хотя обычные газы (воздух, CO_2 и т. д.) не ионизируются вплоть до достижения очень высоких температур, добавление небольшого количества легкоионизирующегося затравочного вещества обеспечивает достаточную проводимость жидкости. В типичных условиях в качестве добавки применяются пары щелочных металлов в количестве от 0,1 до 1,1 %.

называемой холловским параметром. Эффект Холла является важным фактором, который приходится учитывать при разработке МГД-генератора. В этом можно убедиться, заметив, что если $\mathbf{U} = U_x \hat{x}$ и $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$, то ток \mathbf{J} будет течь сначала в направлении y , т. е. поперек канала. Но за счет холловского члена возникает электрическое поле, направленное навстречу потоку рабочего тела:

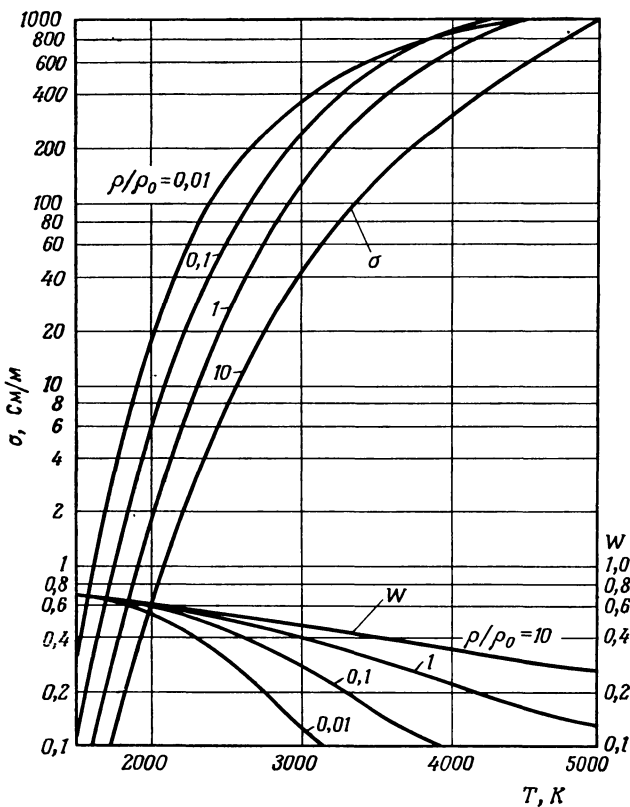
$$E_x = -\frac{\omega_{ce}\tau}{B\sigma} J_y B_z.$$

Если конструкция установки позволяет току J_x течь под действием напряжения Холла, то возникает обратная э. д. с. $(\omega_{ce}\tau/B\sigma) \times J_x B_z \hat{y}$, направленная *навстречу* э. д. с., которая генерируется при действии на рабочее тело силы $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$. Таким образом, чтобы обеспечить эффективность генератора, необходимо препятствовать возникновению этого короткого замыкания напряжения Холла. На фиг. 129 приведены различные конструкции МГД-генераторов.

Поскольку отличительная черта МГД-генератора состоит в использовании частично ионизованной электропроводящей плазмы, следует отметить условия, при которых обеспечивается необходимая проводимость плазмы.

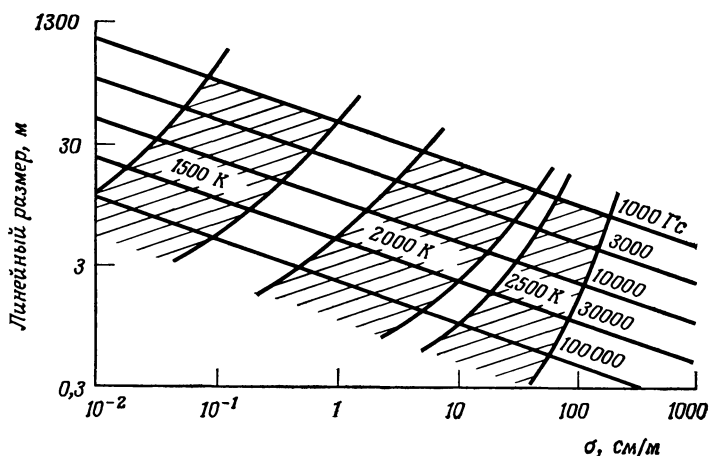
12.1. Ионизация

Ионизация редкой плазмы происходит, как правило, за счет тепловых механизмов, т. е. под действием импульсов электрического и магнитного полей, позволяющих часто получить ионизованный газ с температурой, много



Фиг. 130. Проводимость и ωT аргона с примесью до 1% паров калия [8].

Сечение, усредненное по максвелловскому распределению, принимает значение $6 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ для аргона и $3 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$ для нейтральных паров калия. Давление газа в атмосферах обозначено ρ/ρ_0 , а $\omega T = WB (\rho/\rho_0)$.



Фиг. 131. Приблизительные размеры МГД-генераторов мощностью 100 МВт в зависимости от проводимости газа и величины магнитного поля [8].

Заштрихованные области указывают приблизительно требуемые значения температуры газа.

12.2. Тепловой режим

На фиг. 130 приведены кривые проводимости аргона с примесью 1% паров калия. Эта смесь имеет вполне подходящую проводимость при температуре 2000 К. Проводимость определяет размеры генератора, необходимые для достижения заданного уровня мощности. На фиг. 131 приведены размеры генератора мощностью 100 МВт при различных значениях магнитного поля и температуры. Вследствие того что размеры машины убывают с ростом магнитного поля, условие (6.12.4) диктует выбор режима работы данного плазменного устройства в области малых магнитных чисел Рейнольдса

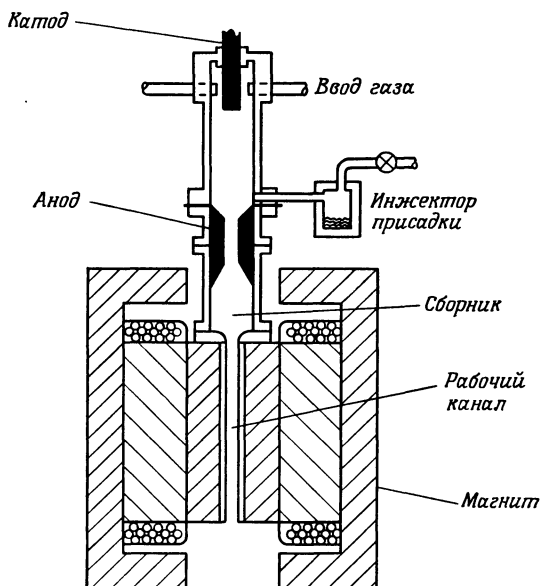
$$R_M \equiv \frac{\sigma UL}{c^2} \ll 1 \quad (6.12.5)$$

в отличие от условий, обычных для термоядерных приложений. Неравенство (6.12.5) означает, что многие коллективные аспекты поведения плазмы, в частности плазменные волны и неустойчивости, играют менее значительную роль в рассматриваемом приложении физики плазмы¹⁾.

12.3. Пример эксперимента

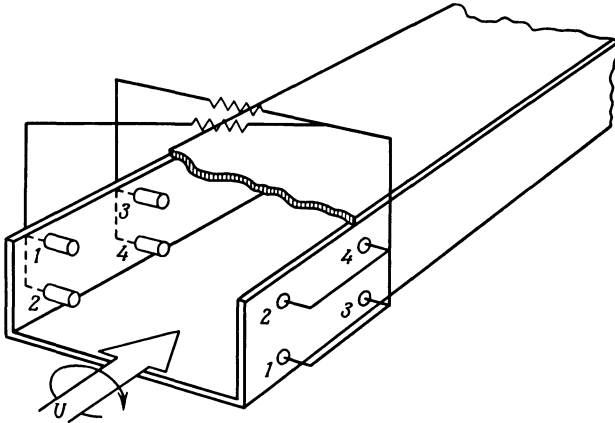
Для проверки вышеупомянутых идей был выполнен один из ранних экспериментов [8]. Этот эксперимент был направлен на моделирование крупномасштабного МГД-генератора в том смысле, что потеря давления в рабочем теле обеспечивалась на уровне примерно половины давления торможения. Схема эксперимента приведена на фиг. 132. В качестве рабочего тела используется смесь аргона с углекислым калием, которая нагревается до температуры 3000 К. Величина магнитного поля равна 14 кГс. Проводимость газа изменяется между 100 и 400 См/м в зависимости от концентрации примеси.

На фиг. 133 показан канал генератора размером $2,5 \times 7,5$ см. Результаты эксперимента воспроизведены в виде графиков на фиг. 134. Интегрируя



Фиг. 132. Схематическое представление экспериментального МГД-генератора [8].

¹⁾ Правда, в таких условиях возникает ряд специфических неустойчивостей, например, связанных с неоднородной ионизацией [16*]. — Прим. ред.



Фиг. 133. Конфигурация электродов экспериментального МГД-генератора и схема их подключения [8].

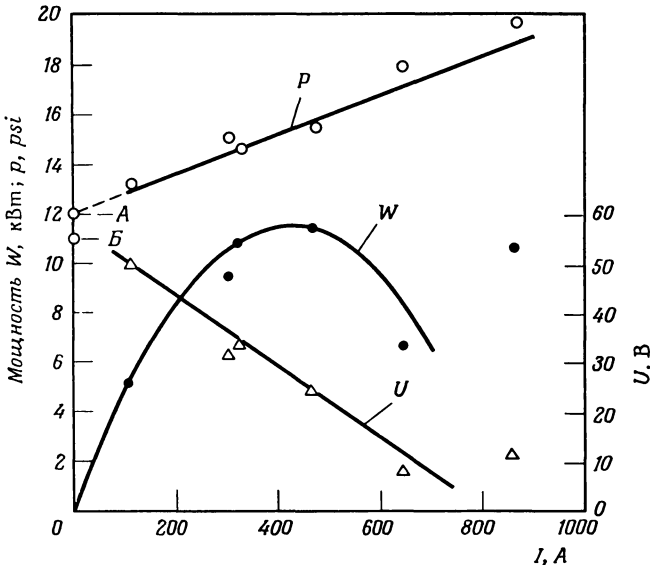
Сечение канала $2,5 \times 7,5$ см; электроды диаметром 0,16 см расположены попарно на расстоянии $\sim 1,2$ см друг от друга в два ряда. Показана только одна секция электродов, а всего их в генераторе 20. Тонкая стрелка указывает направление, в котором поток газа закручивается в камере дугового разряда.

$[J \times V]/c$ по длине установки, можно предсказать следующее падение давления:

$$\Delta p = 0,8 \cdot 10^{-2} I \text{ psi} = 5,5 \cdot 10^{-2} I \text{ кПа},$$

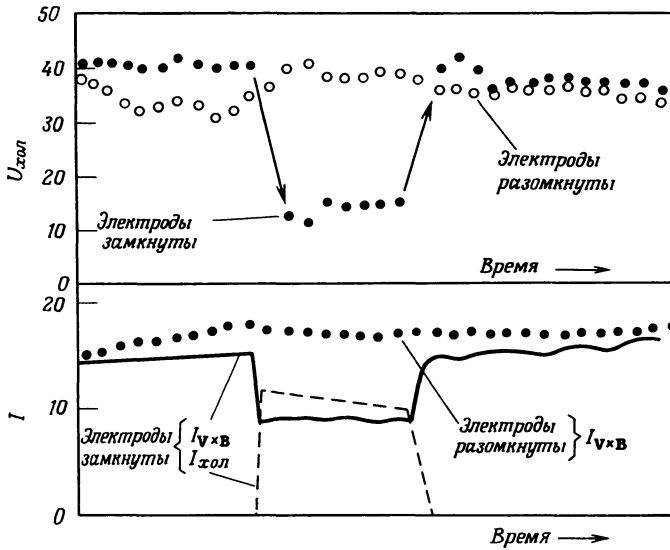
где ток I измеряется в амперах. При значении тока $I = 500$ А это падение давления составляет существенную долю давления газа на входе.

Для проверки вредного влияния токов Холла на рабочие характеристики МГД-генератора создавалась область, в которой напряжение Холла эффективно замыкалось накоротко путем соединения одного из электродов, находящегося вблизи входа, с одним из электродов, расположенным в середине канала, с помощью ключа, который можно было замыкать или размы-



Фиг. 134. Зависимость давления перед рабочим каналом p , выходной мощности W от полного снимаемого тока I [8].

Давление измерялось в psi (фунтах на кв. дюйм); в СИ $1 \text{ psi} = 6,894 \text{ кПа}$. В точке А магнитное поле включено, в точке В — выключено.



Фиг. 135. Влияние искусственного замыкания тока Холла в первой половине рабочего канала на напряжение Холла U и плотность тока I [8].

Данные, обозначенные отдельными точками, сняты с показаний щитовых приборов, фотографируемых со скоростью 10 кадров в секунду; они отражают колебания стрелок этих приборов. Сплошная и штриховая кривые соответствуют осциллограммам.

кать во время запуска. На фиг. 135 представлены результаты такого эксперимента. Из графиков хорошо видно влияние токов Холла в случае, когда они могут течь.

Описанный эксперимент подтверждает правильность магнитогидродинамической теории, на основе которой разработан МГД-генератор. С тех пор были построены большие и практически используемые генераторы, основанные на этих принципах [9, 17*].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenbluth M. N., MacDonald W. M., Judd D., Phys. Rev., **102**, 1 (1957).
2. Montgomery D. C., Tidman D. A., Plasma Kinetic Theory, New York, 1964, p. 16—20.
3. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M., Phys. Rev., **94**, 511 (1954).
4. Spitzer L., Jr., Diffuse Matter in Space, New York, 1968, p. 92.
5. Simon A., Neidigh R. V., Diffusion of Ions in a Plasma across a Magnetic Field, Oak Ridge Nat. Lab. Rep. 1890, November 1955.
6. Simon A., An Introduction to Thermonuclear Research, New York, 1959.
7. Brogan T. R., Plasma Phys., **1**, 231 (1968).
8. Rosa R. J., Phys. Fluids, **4**, 182 (1961).
9. Brogan T. R., The MHD Generator, в книге Advances in Plasma Physics (eds. A. Simon, W. B. Thompson), vol. 1, New York, 1968.
- 10*. Сивухин В. Д., в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 81.
- 11*. Трубников Б. А., в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 98.
- 12*. Ландау Л. Д., Phys. Zs. Sov., **10**, 154 (1936); см. также в Собр. тр., т. 1, изд-во «Наука», 1970, стр. 199.
- 13*. Брагинский С. И., в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 187.
- 14*. Голант В. Е., УФН, **79**, 377 (1963).
- 15*. Гуревич А. В., ЖЭТФ, **44**, 1302 (1963).
- 16*. Велихов Е. П., Голубев В. С., Дыгне А. М., Ядерный синтез, **15** (1975).
- 17*. Магнитогидродинамический метод получения электроэнергии (под ред. В. А. Кирилина и А. Е. Шейндлина), изд-во «Энергия», 1968.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Брагинский С. И.*, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 187.
- Bishop A. S.*, Project Sherwood: The US Program in Controlled Fusion, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958 (см. перевод: *А. Бишоп*, Проект Шервуд, Атомиздат, 1961).
- Ter Haar D.*, Introduction to the Physics of Many-body Systems, Interscience, New York, 1958 (см. перевод: *Д. Тер Хаар*, Введение в физику систем многих частиц, ИЛ, 1961).
- Jancel R., Kahan Th.*, Electrodynamics of Plasmas, Wiley, London, 1966.
- Plasma Physics in Theory and Application (ed. *W. B. Kunkel*), McGraw-Hill, New York, 1964, ch. 11.
- McDaniel E. W.*, Collision Phenomena in Ionized Gases, Wiley, New York, 1964.
- Montgomery D. C., Tidman D. A.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Rose D. J., Clark M., Jr.*, Plasma and Controlled Fusion, MIT and Wiley, New York, 1961.
- Van Kampen N. G., Felderhof B. U.*, Theoretical Methods in Plasma Physics, Wiley, New York, 1967.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛАЗМЫ

В теории плазмы существуют два общепринятых подхода: на основе макроскопического (термодинамического, гидродинамического) и на основе микроскопического (статистического, кинетического) описания.

Макроскопическое приближение описывает такие величины, как средняя скорость и температура, зависящие от координат и времени. Величины этого типа могут быть измерены непосредственно. При микроскопическом подходе оперируют с функцией распределения частиц плазмы по координатам и скоростям, создаваемыми ими микрополями и корреляцией между этими частицами. Микроскопические величины с трудом поддаются прямому измерению, но зачастую они играют важнейшую роль в определении макроскопических свойств плазмы. Например, как было показано в гл. 5, два электронных облака, пролетающих одно через другое с равными и противоположно направленными скоростями, неустойчивы по отношению к нарастающему ленгмюровским (электростатическим) волн. Этот результат получается согласно теории, в которой каждое облако рассматривается как отдельная жидкость. Однако если электроны в данном примере рассматривать как единую жидкость с равной нулю средней скоростью, то из гидродинамических уравнений нельзя было бы предсказать неустойчивость. Этот пример ясно показывает, что распределение частиц по скоростям существенно влияет на макроскопические свойства плазмы.

Изучение кинетической теории плазмы позволяет глубже исследовать вопросы о равновесии, волнах и устойчивости, уже рассматривавшиеся в рамках гидродинамики. Кроме того, с помощью кинетической теории можно формально обосновать тот эвристический подход, лежащий в основе гидродинамического описания плазмы, в котором учитываются средние поля, создаваемые многими частицами, и зачастую не принимается во внимание взаимодействие между ближайшими соседями. Кинетическая теория позволяет также учесть влияние столкновений между частицами плазмы и количественно описать явления переноса в полностью ионизованной плазме. Наконец, для описания рассеяния и характеристик излучения в плазме необходимо развить кинетическую теорию, которая учитывает эффекты отдельных частиц плазмы, поскольку излучение связано с дискретностью частиц.

§ 1. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Для полного описания плазмы необходимо задать координаты $\mathbf{x}_i(t)$ и скорости $\mathbf{v}_i(t)$ каждой частицы как функции времени. При этом функция

$$N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{1 \leq i \leq N_\alpha} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_i(t)] \quad (7.1.1)$$

полностью определяет микросостояние системы частиц сорта α , а

$$\lim_{dx, dv \rightarrow 0} \int N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}$$

равен единице или нулю в зависимости от того, находится ли частица в точке с координатами \mathbf{x} , \mathbf{v} в момент времени t или нет. Удобно ввести векторы шестимерного фазового пространства $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$, такие, что $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = N_\alpha(\mathbf{X}, t) = \sum_i \delta[\mathbf{X} - \mathbf{X}_i(t)]$ и $d\mathbf{X} \equiv d\mathbf{x} d\mathbf{v}$. Очевидно, величина

$\bar{N}_\alpha = \int N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{X}$ равна числу частиц сорта α в системе. Электрические и магнитные поля, создаваемые частицами, удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d\mathbf{v}, \quad (7.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^M = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^M + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} N_\alpha(\mathbf{X}, t) d\mathbf{v}, \quad (7.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^M = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}^M,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^M = 0,$$

в которых верхний индекс M означает, что рассматриваемые поля являются микроскопическими. Как и в обычной теории электромагнитного поля, уравнения $\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int N_\alpha(\mathbf{X}, t) d\mathbf{v}$ и $\nabla \cdot \mathbf{B}^M = 0$ могут рассматриваться как «начальные условия»: если они выполняются в момент $t = 0$, то они справедливы в любой момент времени $t \geq 0$ при условии, что выполнены два других уравнения Максвелла.

Уравнения движения каждой частицы

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}^M}{c} \right)' \quad (7.1.4)$$

замыкают описание системы. Штрих в (7.1.4) указывает на то, что для вычисления силы, действующей на i -ю частицу, не нужно учитывать поля, создаваемого этой частицей, т. е. $(\nabla \cdot \mathbf{E}_i^M)' = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_j)$. Записанные уравнения дают точное, хотя и не очень плодотворное описание системы большого числа частиц.

Из уравнений движения (7.1.4) нетрудно получить уравнение

$$\frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial N_\alpha(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right)' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} N_\alpha(\mathbf{X}, t) = 0, \quad (7.1.5)$$

определяющее эволюцию $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Это уравнение называется *уравнением Климонтовича — Дюпри*. Его можно записать в виде $dN_\alpha/dt = 0$, т. е. в виде условия сохранения числа частиц в фазовом пространстве. Однако $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ еще не представляет собой статистическую функцию. В ней содержится точная информация о местонахождении всех частиц. Статистическое описание мы получаем после усреднения рассмотренных микроскопических уравнений.

Задача 7.1.1. Используя уравнения движения (7.1.4) и определение функции $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, покажите, что $N_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ удовлетворяет уравнению (7.1.5).

§ 2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Микроскопическое состояние плазмы или любой другой системы многих тел полностью определяется координатами и скоростями всех частиц. Точно так же статистические свойства такой системы полностью описываются функцией распределения ее частиц (см. также гл. 3). Определим функцию распределения следующим образом. Пусть величина

$$F_N(X_{\alpha 1}, \dots, X_{\alpha \bar{N}_\alpha}; X_{\beta 1}, \dots, X_{\beta \bar{N}_\beta}; \dots, t) dX_{\alpha 1} \times \\ \times dX_{\alpha 2} \dots dX_{\alpha \bar{N}_\alpha} dX_{\beta 1} \dots dX_{\beta \bar{N}_\beta} \dots \quad (7.2.1)$$

есть вероятность того, что в момент времени t координаты и скорости частиц принимают значения $X_{\alpha 1}, X_{\alpha 2}, \dots, X_{\alpha \bar{N}_\alpha}, X_{\beta 1}, \dots, X_{\beta \bar{N}_\beta}, \dots$ в окрестности $dX_{\alpha 1} \dots dX_{\alpha \bar{N}_\alpha}, dX_{\beta 1} \dots dX_{\beta \bar{N}_\beta}$; величина $N = \sum_{\alpha} \bar{N}_\alpha$ равна полному числу частиц в системе.

Если система находится в термодинамическом равновесии, то функция F_N представляет собой распределение Гиббса D (т. е. $F_N = D$), рассмотренное в гл. 2. В общем случае F_N не равно D , поэтому основную часть излагаемого ниже материала мы посвятим неравновесным статистическим системам, изучению эволюции F_N во времени при заданной начальной функции распределения $F_N(0)$. Функцию F_N можно рассматривать как плотность распределения в $6N$ -мерном фазовом пространстве системы; она удовлетворяет уравнению Лиувилля для системы, состоящей из N частиц,

$$\frac{DF_N}{Dt} \equiv \frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial F_N}{\partial x_i} + \sum_i a_i \frac{\partial F_N}{\partial v_i} = 0,$$

которое описывает просто закон сохранения плотности распределения вдоль траекторий в фазовом пространстве. В статистической механике трудно непосредственно пользоваться уравнениями, содержащими координаты и скорости всех частиц. На этих уравнениях базируется вывод более простых методов описания плазмы, использующих приведенные функции распределения. Поскольку F_N есть плотность распределения вероятности, ее нормировка записывается в виде

$$\int F_N dX_{\alpha 1} \dots dX_{\alpha \bar{N}_\alpha} dX_{\beta 1} \dots dX_{\beta \bar{N}_\beta} \dots dX_{\gamma 1} \dots dX_{\gamma \bar{N}_\gamma} = \\ = \int F_N \prod_{\text{По всем частицам}} dX = 1.$$

Приведенные функции распределения получаются интегрированием (7.2.1) по координатам всех частиц без одной, двух, трех и т. д. Приведенные функции распределения зависят от меньшего числа переменных, чем F_N , и их проще изучать, но, конечно, в них содержится гораздо меньше информации о системе, чем в полной функции F_N .

Одночастичная функция распределения определяется как плотность частиц одного сорта в фазовом пространстве:

$$f_\alpha(x_{\alpha 1}, v_{\alpha 1}, t) = V \int F_N dX_{\alpha 2} \dots dX_{\alpha \bar{N}_\alpha} \prod_{\beta} dX_{\beta 1} \dots dX_{\beta \bar{N}_\beta}. \quad (7.2.2)$$

Здесь V — объем системы. Следовательно, величина $(1/V)f_\alpha(x, v, t) dX$ есть вероятность найти частицу сорта α в окрестности $dx dv$ точки с координатами (x, v) . Эта одночастичная функция распределения дает наиболее упрощенное описание плазмы. Ясно, например, что вероятность найти элек-

трон в точке x зависит от присутствия иона или другого электрона в точке $x' \approx x$, однако эта информация не содержится в f_α . Информация о влиянии соседних частиц содержится в менее упрощенном описании, например в двухчастичной функции распределения

$$f_{\alpha\beta}(X_{\alpha_1}, X'_{\beta_1}, t) \equiv V^2 \int F_N dX_{\alpha_2} \dots dX_{\alpha_{\bar{N}_\alpha}} \times \\ \times dX_{\beta_2} \dots dX_{\beta_{\bar{N}_\beta}} \prod_{\gamma} dX_{\gamma_1} \dots dX_{\gamma_{\bar{N}_\gamma}}. \quad (7.2.3)$$

Через двухчастичную функцию распределения можно выразить совместную вероятность того, что частица 1 сорта α находится в окрестности dX точки X , а частица 2 сорта β — в окрестности dX' точки X' :

$$\frac{1}{V^2} f_{\alpha\beta}(X, X', t) dX dX'. \quad (7.2.3a)$$

Следует заметить, что индексы α и β могут обозначать и частицы одного сорта ($\alpha = \beta$), например электроны. В этом случае величина (7.2.3a) дает вероятность того, что электрон α_1 находится в окрестности dX точки X , а другой электрон α_2 — в окрестности dX' точки X' . Это все еще упрощенное описание, но оно содержит более детальные сведения о плазме¹⁾, чем те, которые дает $f_\alpha(X)$, поскольку оно учитывает *взаимодействие* между частицами α_1 и β_1 . (Если частицы не взаимодействуют, $f_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta$.) Двухчастичное описание все еще не полно, поскольку вероятность того, что частица α_1 находится в окрестности точки X , а β_1 — в окрестности точки X' , зависит от присутствия третьей частицы (например, γ_1 в точке X'' вблизи X или X'). Эти эффекты содержатся в еще менее упрощенном описании, а именно в трехчастичной функции распределения

$$f_{\alpha\beta\gamma} = V^3 \int F_N \frac{\prod dX}{dX_{\alpha_1} dX_{\beta_1} dX_{\gamma_1}},$$

в четырехчастичной функции распределения и т. д.

Поскольку каждый член в $N_\alpha = \sum_i \delta(X - X_i)$ описывает положение частицы при известных начальных условиях, а F_N есть вероятность различных начальных условий, приведенные функции распределения могут быть выражены через средние по всем возможным начальным условиям от произведений N_α . Такое усреднение определяется формулой

$$\langle G(N_\alpha, N_\beta, \dots, N_\gamma) \rangle \equiv \int F_N G(N_\alpha, N_\beta, \dots, N_\gamma) \prod_{\text{По всем частицам}} dX.$$

В частности, через среднее значение плотности частиц в фазовом пространстве $N_\alpha(X, t)$ выражается одночастичная функция распределения (7.2.2):

$$\begin{aligned} \langle N_\alpha(X, t) \rangle &= \int F_N N_\alpha(x, v, t) \prod_{\text{По всем частицам}} dX = \\ &= \int F_N \sum_{i=1}^{\bar{N}_\alpha} \delta[x - x_{\alpha i}(t)] \delta[v - v_{\alpha i}(t)] \prod_{\text{По всем частицам}} dX = \\ &= \bar{N}_\alpha \int F_N \delta[x - x_{\alpha 1}(t)] \delta[v - v_{\alpha 1}(t)] \prod_{\text{По всем частицам}} dX = \\ &= \bar{n}_\alpha f_\alpha(x, v, t). \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

¹⁾ Так, зная равновесной двухчастичной функции распределения достаточно для построения термодинамики плазмы. — *Прим. ред.*

В этих равенствах мы использовали тождественность частиц сорта α и обозначили через $\bar{n}_\alpha = \bar{N}_\alpha/V$ среднюю плотность числа частиц.

Аналогично величина $\langle N_\alpha N_\beta \rangle$ связана с двухчастичной функцией распределения. Пользуясь для N_α явным выражением (7.1.4), можно показать, что с хорошей точностью

$$\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle = \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + \delta_{\alpha\beta} \bar{n}_\alpha \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') f_\alpha(\mathbf{X}, t). \quad (7.2.5)$$

Средние электромагнитные поля получаются усреднением микрополей, зависящих от точного расположения частиц, по распределению всех частиц:

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E}^M \rangle = \int F_N \mathbf{E}^M \prod_{\text{По всем частицам}} d\mathbf{X}. \quad (7.2.6)$$

Таким образом, уравнения Максвелла после усреднения связывают средние поля непосредственно с одночастичными функциями распределения $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

Задача 7.2.1. Вычислите $\langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) \rangle$, не делая никаких приближений, и сравните результат с выражением (7.2.5).

Полная функция распределения F_N эволюционирует согласно уравнению типа (7.1.5). Однако уравнение, связывающее $F_N(t)$ с $F_N(0)$, трудно использовать, поскольку мы не знаем, как выбрать $F_N(0)$. Зная, как приготавлилась система, часто бывает возможно выбрать вид одночастичной функции распределения $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ в начальный момент времени. Поскольку через f_α можно выразить все гидродинамические переменные системы, например

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \bar{n}_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v}, \\ n_\alpha \mathbf{V}_\alpha &= \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v}, \\ &\dots \end{aligned}$$

целесообразно найти уравнения, определяющие зависимость f_α (или f_α и $f_{\alpha\beta}$) от времени. Так как f_α выражается через среднее от N_α , усредняя непосредственно уравнение (7.1.5), получаем уравнение, описывающее изменение f_α во времени,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{\bar{n}_\alpha m_\alpha} \left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right)' \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0. \quad (7.2.7)$$

Задача 7.2.2. Выведите уравнение (7.2.7). Опущены ли при выводе какие-нибудь слагаемые?

Задача 7.2.3. Покажите, что

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

и

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha q_\alpha \bar{n}_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (7.2.8)$$

Далее, если взаимодействие между частицами исчезает, мы имеем $\langle N_\alpha N_\beta \rangle \rightarrow \langle N_\alpha \rangle \langle N_\beta \rangle = \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_\alpha f_\beta$. То, что кинетическое уравнение для f_α зависит от взаимодействия частиц, можно увидеть и яснее, записав (7.2.7)

в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \\ = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\left\langle \left(\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}^M}{c} \right)' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{N_\alpha}{n_\alpha} \right\rangle - \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} \right]. \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

Если частицы не взаимодействуют, то правая часть этого уравнения обращается в нуль.

§ 3. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КУЛОНОВСКОЙ ПЛАЗМЫ

Уравнение (7.2.7) не является замкнутым, поскольку в него входит среднее от произведения $\langle N_\alpha N_\beta \rangle$. Это совсем нетрудно показать и упростить последующее рассмотрение, если ограничиться квазистатическим приближением, в котором пренебрегается эффектами запаздывания. В таком приближении состояние системы в момент времени t описывается мгновенными координатами и скоростями заряженных частиц. Это приближение справедливо, если температура плазмы такова, что

$$v_T \ll c. \quad (7.3.1)$$

Дальнейшее упрощение состоит в пренебрежении магнитным полем:

$$\mathbf{B}^M = 0.$$

Это упрощение используется для того, чтобы сделать последующие формулы менее громоздкими. В окончательные уравнения для полноты будут снова введены связанные с магнитным полем члены. Далее, из уравнений

$$\mathbf{E}^M = -\nabla \varphi^M, \quad \nabla \times \mathbf{E}^M = 0 \quad (7.3.2)$$

и $\nabla \cdot \mathbf{E}^M = 4\pi \sum_\alpha \int N_\alpha q_\alpha d\mathbf{v}$ можно обычным путем получить

$$\varphi^M(\mathbf{x}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int \frac{N_\alpha(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'. \quad (7.3.3)$$

Уравнение (7.2.7) для f_α принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_\alpha + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}'} - \sum_\beta \bar{n}_\beta q_\beta \int f_\beta(\mathbf{X}') \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{X}' = \\ = \sum_\beta \frac{q_\alpha q_\beta}{n_\alpha m_\alpha} \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle (N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t))' - \bar{n}_\alpha f_\alpha \bar{n}_\beta f_\beta \rangle d\mathbf{X}' = \\ = \sum_\beta \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha} \bar{n}_\beta \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) - f_\alpha f_\beta) d\mathbf{X}'. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Уравнение для $f_{\alpha\beta}$ можно получить, если принять во внимание равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_\alpha N_\beta \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} \right) N_\beta + N_\alpha \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial t} \right) \right\rangle$$

и воспользоваться уравнениями (7.1.5), (7.3.2) и (7.3.3) для $\partial N_\alpha / \partial t$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \right) [\bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta f_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{X})] = \\ = \int \sum_{\mathbf{v}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{q_\gamma q_\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \frac{q_\gamma q_\beta}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \right) \times \\ \times \langle N_\alpha(\mathbf{X}, t) N_\beta(\mathbf{X}', t) N_\gamma(\mathbf{X}'', t) \rangle d\mathbf{X}'' \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \langle N_\alpha N_\beta N_\gamma \rangle = \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta \bar{n}_\gamma f_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) + \\ + \delta_{\alpha\beta} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') f_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) + \\ + \delta_{\alpha\gamma} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\beta \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}'') f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + \\ + \delta_{\beta\gamma} \bar{n}_\alpha \bar{n}_\gamma \delta(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') f_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) + \\ + \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}') \delta(\mathbf{X}' - \mathbf{X}'') f_\alpha(\mathbf{X}, t) \bar{n}_\alpha \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений (7.3.4) и (7.3.5), необходимо иметь уравнение для $f_{\alpha\beta\gamma}$. Очевидно, следуя использованному выше методу, можно получить цепочку уравнений, причем в уравнение для $(n-1)$ -частичной приведенной функции распределения будет входить n -частичная функция.

Удобно выразить многочастичные функции распределения через корреляционные функции (введенные в гл. 2 для равновесного случая) с помощью группового разложения Майера:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = f_\alpha(\mathbf{X}, t) f_\beta(\mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t), \\ f_{\alpha\beta\gamma} = f_\alpha(\mathbf{X}, t) f_\beta(\mathbf{X}', t) f_\gamma(\mathbf{X}'', t) + \\ + f_\alpha(\mathbf{X}, t) g_{\beta\gamma}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'', t) + f_\beta(\mathbf{X}', t) g_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'', t) + \\ + f_\gamma(\mathbf{X}'', t) g_{\alpha\beta}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', t) + g_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'', t), \\ \dots \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

Для системы статистически независимых частиц $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta\gamma} = 0$.

Задача 7.3.1. Воспользовавшись равенством

$$\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' = 0,$$

покажите, что последнее равенство в (7.3.4) является точным даже в том случае, когда оставлены члены, учитывающие действие на частицу ее собственного поля (символ $\langle \rangle'$ означает, что члены с «самокорреляцией» не должны учитываться).

§ 4. ЗАМЫКАНИЕ ЦЕПОЧКИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Получить решение бесконечной цепочки кинетических уравнений так же трудно, как решить точные микроскопические уравнения (7.1.1) — (7.1.4). Однако статистическое описание имеет то преимущество, что обычно цепочку уравнений можно оборвать, найдя подходящие приближения для многочастичных корреляционных функций $g_{\alpha\beta\gamma\dots}$, и получить тем самым замкнутую систему уравнений для нескольких приведенных функций распределения. Например, в разреженном газе *нейтральных* частиц радиус действия сил r_0 намного меньше среднего расстояния между частицами $n^{-1/3}$. В этом случае естественно разложить корреляционные функции по малому пара-

метру nr_0^3 (заметим, что при $nr_0^3 = 0$ частицы полностью независимы, т. е. $g_{\alpha\beta} = 0$). При этом оказывается, что трехчастичная корреляция $g_{\alpha\beta\gamma}$ много меньше двухчастичной корреляции $g_{\alpha\beta}$, которая в свою очередь меньше произведения одночастичных функций распределения $f_{\alpha}f_{\beta}$.

В случае плазмы цепочку кинетических уравнений также можно оборвать, хотя в плазме радиус действия сил $r_0 \approx \lambda_D$ гораздо больше расстояния между частицами $n^{-1/3}$ (как обсуждалось в гл. 2 и 3). Ситуация в плазме полностью противоположна ситуации в газе нейтральных частиц. Малым параметром в плазме является величина

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \ll 1. \tag{7.4.1}$$

Из равновесной статистической механики, рассмотренной в гл. 2, следует, что корреляция $g_{\alpha\beta}$ мала по сравнению с $f_{\alpha}f_{\beta}$, если параметр $g \ll 1$. Причина этого заключается в том, что совместная функция распределения $f_{\alpha\beta}$ двух частиц плазмы, находящихся в малом объеме V , который удовлетворяет неравенству

$$n^{-1} \ll V \ll \lambda_D^3, \tag{7.4.2}$$

определяется воздействием большого числа частиц, расположенных вне этого объема, а не расстоянием между рассматриваемыми двумя частицами. Поэтому функция распределения $f_{\alpha\beta}(X, X')$ с хорошей точностью не зависит от взаимодействия между выделенными двумя частицами, т. е. $f_{\alpha\beta} \approx f_{\alpha}f_{\beta}$. Это приближение становится точным при $g \rightarrow 0$. Неравенство $g_{\alpha\beta} \ll f_{\alpha}f_{\beta}$ непосредственно подтверждается после решения уравнений, использующих это неравенство.

Согласно сказанному выше, групповое разложение (7.3.7) можно рассматривать как разложение в ряд по плазменному параметру g , причем

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &\approx O(1), \\ g_{\alpha\beta} &\approx O(g), \\ g_{\alpha\beta\gamma} &\approx O(g^2), \\ &\dots \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Цепочка уравнений, первыми уравнениями которой являются (7.3.4) и (7.3.5), может быть оборвана, если пренебречь членами порядка g^2 , что приводит к замкнутой системе уравнений для $(s-1)$ -частичной функции распределения $f_{\alpha\beta\gamma\dots}^{(s-1)}$.

§ 5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ — УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Согласно выражениям (7.4.3), дающим порядок величины корреляционных функций, простейший метод замыкания цепочки уравнений (7.3.4), (7.3.5) и т. д. состоит в пренебрежении всеми членами порядка g . В этом приближении кинетическое уравнение для функции распределения плазмы имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0, \tag{7.5.1}$$

причем

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v};$$

здесь $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{x}$ и $\nabla_{\mathbf{v}} \equiv \partial/\partial\mathbf{v}$. Это замкнутое уравнение для f_{α} называется *уравнением Власова* [1], а иногда *бесстолкновительным уравнением Больц-*

мана. Взаимодействие между частицами в уравнении Власова учитывается только членом с \mathbf{E} , представляющим собой *среднее* электрическое поле, которое создается в точке \mathbf{x} частицами плазмы и которое вычисляется самоогласованным образом с помощью уравнений Максвелла. Данное приближение с самоогласованным полем возникло естественным образом из разложения точных уравнений в ряд по плазменному параметру. Его можно обобщить на случай, когда рассматриваются магнитные поля и поля от внешних источников, следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right] f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} + 4\pi \rho_{\text{внеш}}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{внеш}}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Несколько следующих глав мы посвятим методам решения уравнения Власова и изучению с его помощью поведения плазмы в течение небольших отрезков времени: $\tau_{\text{коллек}} \ll \tau_{\text{столк}}$.

§ 6. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Более полную систему уравнений по сравнению с (7.5.2) можно получить, используя оценки (7.4.3), если сохранить в цепочке члены порядка g . В этом приближении пренебрегают корреляциями $g_{\alpha\beta\gamma}$, и соответствующая цепочка кинетических уравнений первого порядка записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{\beta} \bar{n}_\beta \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\alpha} \times \\ &\times \int \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \nabla_{\mathbf{v}} g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{v}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{x}' d\mathbf{v}', \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{v}' \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} + \frac{q_\beta}{m_\beta} \mathbf{E}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} \right] g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &-- \\ &- \sum_{\gamma} \frac{\bar{n}_\gamma}{m_\alpha} \int g_{\gamma\beta}(\mathbf{X}', \mathbf{X}'') \nabla_{\mathbf{x}'} \frac{q_\alpha q_\gamma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{X}) d\mathbf{X}'' - \\ &- \sum_{\gamma} \frac{\bar{n}_\gamma}{m_\beta} \int \left(\nabla_{\mathbf{x}'} \frac{q_\beta q_\gamma}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} \right) g_{\alpha\gamma}(\mathbf{X}, \mathbf{X}'') \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_\beta(\mathbf{X}') d\mathbf{X}'' = \\ &= \left(\nabla_{\mathbf{x}} \frac{q_\alpha q_\beta}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \cdot \left[\frac{1}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha(\mathbf{X}) f_\beta(\mathbf{X}') - \frac{1}{m_\beta} \nabla_{\mathbf{v}'} f_\beta(\mathbf{X}') f_\alpha(\mathbf{X}) \right], \end{aligned} \quad (7.6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v}. \quad (7.6.3)$$

Уравнение (7.6.1) дает столкновительную поправку к уравнению Власова (7.5.2). Уравнение (7.6.2), которое выражает корреляции $g_{\alpha\beta}$ через одночастичные функции распределения f_α , является приближенным и не учитывает членов порядка g^2 , например трехчастичных корреляций $g_{\alpha\beta\gamma}$. В гл. 11 мы рассмотрим решение уравнений (7.6.1) и (7.6.2), которое приводит к так называемому уравнению Ленарда — Балеску. Оно описывает релаксацию к равновесному распределению в течение промежутков времени, больших

времени между столкновениями τ_c . До сих пор не было как следует показано, при каких обстоятельствах действительно можно пренебречь трехчастичной корреляцией [в отличие от утверждения, что $g_{\alpha\beta} \approx 0(g)$, которое было проверено непосредственно]. Из цепочки кинетических уравнений точно так же можно получить и кинетические уравнения более высокого порядка.

Цепочка кинетических уравнений для плазмы впервые была получена Боголюбовым [2], Борном и Грином [3], Кирквудом [4] и Ивоном [5] независимо друг от друга и называется *цепочкой ББГКИ*. Дальнейшие замечания по поводу предела $g \rightarrow 0$ можно найти в гл. 2.

§ 7. СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Статистическое описание плазмы на основе уравнения Власова (7.5.2) существенно упрощает точное описание с помощью уравнений (7.1.1) — (7.1.4). Теперь необходимо посмотреть на следствия принятых упрощений и исследовать свойства укороченной системы уравнений, поскольку даже наиболее очевидные свойства решений точных уравнений не всегда присущи решениям приближенных уравнений.

7.1. Сохранение числа частиц в уравнении Власова

Скорость изменения полного числа частиц равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \bar{n}_\alpha f_\alpha dx dv = 0,$$

что можно получить, интегрируя (7.5.2) по всем переменным. Этим свойством, конечно, обладают и исходные точные уравнения.

7.2. Сохранение знака функции распределения

Если в начальный момент времени распределение $f_\alpha(x, v, t = 0) > 0$ для всех x, v , то, эволюционируя согласно (7.5.2), f_α остается положительным в любой момент времени. Действительно, если бы f_α меняло знак в некоторый момент времени t_0 в точке x_0, v_0 , то для этого необходимо, чтобы производная $\partial f_\alpha / \partial t$ в данный момент времени была бы отрицательной, а ∇f_α и $\nabla_v f_\alpha$ обращались бы в нуль. Однако уравнение Власова (7.5.2) не допускает одновременного выполнения условий $\partial f_\alpha / \partial t < 0$, $\nabla f_\alpha = 0$ и $\nabla_v f_\alpha = 0$.

7.3. Существование множества равновесных решений уравнения Власова

В противоположность точным уравнениям, все решения которых, согласно Н-теореме Больцмана, за времена, сравнимые со временем между столкновениями, стремятся к единственному равновесному решению, уравнение Власова описывает множество стационарных состояний. Иными словами, существует множество решений $f_{\alpha 0}$ (7.5.2), для которых $\partial f_{\alpha 0} / \partial t = 0$. Эти состояния часто называют квазиравновесными, поскольку они равновесны только на временах, малых по сравнению со временем между столкновениями [по существу именно пренебрежение столкновениями соответствует приближению $g \rightarrow 0$, позволившему перейти от (7.2.8) к (7.5.2)]. Стационарное решение должно удовлетворять уравнению

$$\left[\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_v \right] f_{\alpha 0}(x, v) = 0. \quad (7.7.1)$$

Процедура, позволяющая получить общее решение уравнения (7.7.1), состоит в определении траектории частицы $[\mathbf{x}'(t'), \mathbf{v}'(t')]$ с зарядом q и массой m в полях \mathbf{E} и \mathbf{B} , причем траектория $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ должна проходить через точку (x, v) фазового пространства в момент времени $t' = t$. Если $a(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$

и $b(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$ представляют собой интегралы движения частицы, то

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial a}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \\ \frac{db}{dt'} &= \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial b}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} \cdot \frac{\partial b}{\partial \mathbf{v}'} = 0. \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

При этом любая функция

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}[a(\mathbf{x}', \mathbf{v}'), b(\mathbf{x}', \mathbf{v}'), \dots]$$

удовлетворяет уравнению (7.7.1) в момент времени $t' = t$, и поэтому всякая функция интегралов движения частицы

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}[a(\mathbf{x}, \mathbf{v}), b(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \dots],$$

согласно уравнению Власова, является стационарной функцией распределения для ансамбля частиц.

Во многих случаях (например, если $\int f_i d\mathbf{v} = \int f_e d\mathbf{v}$ и ток в плазме отсутствует) функция распределения f_α определяется внешними полями, и для построения стационарных состояний можно использовать интегралы движения в этих полях. Примеры некоторых таких состояний мы сейчас рассмотрим.

1. *Равновесие в отсутствие полей* ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$). В этом случае интегралами движения служат энергия

$$W = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

и импульс

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Следовательно, любая функция

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z)$$

описывает квазиравновесное состояние. Например, распределение Максвелла — Больцмана

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)_\alpha^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2kT} v^2 \right)_\alpha \quad (7.7.3)$$

— равновесное как для уравнения Власова, так и для точных уравнений, но функции распределения

$$f_{\alpha 0} = \frac{v_0}{2} \frac{1}{v^2 + v_0^2}, \quad (7.7.3a)$$

$$f_{\alpha 0} = v_0 \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z^2 - v_0^2), \quad (7.7.3b)$$

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)_\alpha^{1/2} \delta(v_x) \delta(v_y) \exp \left[-\frac{m_\alpha (v_z - v_{z0})^2}{2kT_\alpha} \right] \quad (7.7.3в)$$

описывают равновесные состояния только в случае уравнения Власова. За времена порядка времени между столкновениями они эволюционируют к распределению Максвелла — Больцмана.

Выбор какого-либо одного распределения из многих возможных решений уравнения Власова (7.7.1) диктуется посторонними соображениями. К их числу принадлежит знание способа приготовления плазмы или свойств плазменной модели. В некоторых случаях выбор диктуется соображениями математического удобства. Например, если время существования плазмы превышает время между столкновениями, в качестве f_0 нужно выбрать распределение Максвелла — Больцмана (7.7.3). Однако распределение (7.7.3a) качественно похоже на максвелловское, но обладает дополнительным преимуществом: оно аналитично в комплексной v -плоскости с выколотыми просты-

ми полюсами. Это позволяет сводить многие интегралы по скоростям к контурным. Другим примером может служить система, приготовленная путем инъекции и последующего захвата моноэнергетического пучка частиц между двумя стенками. Этот случай можно описать распределением (7.7.3б). Если же пучок обладает тепловым разбросом скоростей в направлении его инъекции, то подходит распределение (7.7.3в).

Важно отметить, что в плазме, просуществовавшей значительно дольше, чем время между парными столкновениями (τ_c), для описания поведения системы в течение коротких (по сравнению с τ_c) промежутков времени можно применять уравнение Власова. Например, максвелловская плазма в течение коротких промежутков времени проявляет полный набор плазменных эффектов, таких, как затухание Ландау и плазменные волны, которые могут возбуждаться самими столкновениями.

2. *Равновесие в параллельном магнитном поле* ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}$). Интегралами движения в этом случае являются энергия и z -компоненты импульса и момента импульса¹⁾:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m_\alpha (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \\ p_{\parallel} &= m_\alpha v_z, \\ L_z &= m_\alpha (xv_y - yv_x) - \frac{erA_\theta(\mathbf{r})}{c}. \end{aligned}$$

Дополнительными интегралами движения, особенно полезными при описании неоднородной плазмы, служат

$$\xi_y = v_y + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \int B_0(\mathbf{r}) dx$$

и

$$\xi_x = v_x - \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \int B_0(\mathbf{r}) dy.$$

Они связаны с движением ведущего центра (в постоянном поле B_0 величина $\xi/\omega_{c\alpha}$ дает положение центра орбиты частицы со скоростью \mathbf{v} , находящейся в точке \mathbf{r}). Их постоянство можно доказать, используя (7.7.1). Стационарные решения уравнения Власова описываются распределениями, зависящими от этих интегралов движения. С помощью интегралов движения можно описать широкий набор плазменных конфигураций (см. задачу 7.7.1).

Задача 7.7.1. Проверьте прямой подстановкой, что всякая функция

$$F_{\alpha 0} = F\left(v^2, v_y + \frac{qB_0}{mc}x, v_x - \frac{qB_0}{mc}y\right) \quad (7.7.4)$$

описывает стационарное (для уравнения Власова) состояние плазмы в отсутствие электрического поля, помещенной в однородное магнитное поле $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Найдите равновесные распределения, описывающие следующие состояния плазмы:

- 1) однородная изотропная плазма;
- 2) плазма, образованная инъекцией частиц поперек \mathbf{B}_0 , т. е. однородная плазма с небольшим тепловым разбросом по скоростям вдоль \mathbf{B}_0 ;
- 3) плазма, образованная дугой, горящей вдоль \mathbf{B} , т. е. цилиндрически-симметричная плазма с радиальным градиентом плотности (предполагается, что плазма очень разрежена, $n\lambda T \ll B_0^2/8\pi$).

Задача 7.7.2. Найдите равновесное распределение для плазмы, помещенной во внешнее поле $\mathbf{B} = B_0\mathbf{z}$, $\mathbf{E} = 0$, причем плазма имеет цилинд-

¹⁾ L_z — интеграл движения лишь при наличии аксиальной симметрии. — *Прим. ред.*

рическую симметрию и плотность ее спадает по радиусу. Учтите вклад плазменных токов в полное магнитное поле $B(r)\hat{z}$. Каково значение условия $n\kappa T \ll B_0^2/8\pi$, используемого в п. 3 задачи 7.7.1?

Задача 7.7.3. Найдите набор равновесных распределений для плазмы, находящейся в поле $\mathbf{E} = E_0\hat{z}$, причем $\mathbf{V} = 0$. Какие величины служат интегралами движения?

7.4. Энтропия и H-теорема для бесстолкновительной плазмы

Энтропия статистической системы определяется следующим образом:

$$S = - \sum_{\alpha} \int f_{\alpha} \ln f_{\alpha} dx dv. \quad (7.7.5)$$

В случае плазмы, описываемой уравнением Власова, мы можем записать

$$\frac{d}{dt} S = - \sum_{\alpha} \int \left(\frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha} + \frac{df_{\alpha}}{dt} \right) dx dv = 0. \quad (7.7.6)$$

Последнее равенство следует из уравнения Власова (7.5.2). Следовательно, уравнение Власова сохраняет энтропию. Это согласуется с тем, что уравнение Власова не учитывает парных столкновений, вследствие которых система, увеличивая энтропию, эволюционирует к распределению Максвелла — Больцмана.

В некоторых случаях зависимость функции распределения f_{α} от времени можно записать в виде

$$f_{\alpha}(t) = f_{\alpha 0}(t) + f_{\alpha 1}(t),$$

где $f_{\alpha 0}$ меняется медленно, а $f_{\alpha 1}$ — быстро. В таких случаях полезно ввести обобщенную энтропию

$$S^* = - \int f_{\alpha 0}(t) \ln f_{\alpha 0}(t) dx dv. \quad (7.7.7)$$

Определенная таким способом «энтропия» не постоянна, и ее можно использовать для количественного описания увеличения беспорядка (например, теплового разброса скоростей) в системе (см. гл. 10).

Задача 7.7.4. Покажите, что $dH/dt = 0$, где $H = \int \varphi(f_{\alpha}) dx dv$, а φ — произвольная функция (при условии, что f_{α} удовлетворяет уравнению Власова).

§ 8. СВОЙСТВА КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Кинетические уравнения (7.6.1) — (7.6.3) включают в первом порядке по g вклад столкновений частиц, которые наряду со средними полями \mathbf{E} приводят функцию распределения к равновесной. Это все еще не точные уравнения. В общем виде эта система уравнений не была решена. Ее приближенное решение мы приведем в гл. 11.

Задача 7.8.1. Покажите, что функции

$$f_{\alpha} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)_{\alpha}^{3/2} \exp \left(- \frac{m_{\alpha} v^2}{2\kappa T_{\alpha}} \right)$$

и $g_{\alpha\beta}$, даваемая в термодинамическом равновесии выражением (2.3.5), удовлетворяют кинетическим уравнениям первого приближения

(7.6.1) — (7.6.3), т. е. что равновесное значение

$$g_{\alpha\beta} = f_{\alpha} f_{\beta} \frac{q_{\alpha} q_{\beta}}{|x - x'|} \exp \left(- \frac{|x - x'|}{\lambda_D} \right)$$

удовлетворяет также оборванной цепочке кинетических уравнений.

Задача 7.8.2. Покажите, что при характерных временах процессов $\sim \omega_p^{-1}$ (т. е. если $\partial f / \partial t \approx \omega_p f$) и характерных расстояниях $|x - x'| \approx \lambda_D$ корреляция $g_{\alpha\beta}$, оцененная из (7.6.2), дает поправку порядка $g = 1/n\lambda_D^3$ к уравнению Власова.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А., Journ. Phys. (U.S.S.R.), 9, 25 (1945).
2. Боголюбов Н. Н., Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
3. Born M., Green H. S., A General Kinetic Theory of Liquids, Cambridge, London, 1949.
4. Kirkwood J. G., Journ. Chem. Phys., 14, 180 (1946); 15, 72 (1947).
5. Yvon J., La théorie des fluids et l'équation d'état: actualités scientifiques et industrielles, Hermann and Cie, Paris, 1935.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Dupree T. H., Phys. Fluids, 6, 1714 (1963).
 Климонтович Ю. Л., Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, изд-во МГУ, 1964.
 Montgomery D. C., Tidman D. A., Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964, ch. 4—7.
 Трубников Б. А., Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Госатомиздат, 1963.
 Van Kampen N. G., Felderhof B. U., Theoretical Methods in Plasma Physics, Wiley, New York, 1967, ch. 15.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

В теории плазмы, основанной на кинетическом уравнении Власова, создаваемые частицами микрополя заменены на среднее поле в данной точке пространства, а функция распределения частиц вычисляется таким образом, чтобы быть самосогласованной с этим средним полем. Уравнение Власова, основанное на такой модели плазмы, правильно описывает поведение плазмы в течение промежутков времени, значительно меньших времени между парными столкновениями. Наряду со стационарными или равновесными решениями, рассмотренными в гл. 7, это уравнение позволяет проанализировать множество неравновесных явлений, к которым относятся волны и неустойчивости.

В настоящей главе мы изучим свойства плазменных волн малой амплитуды, представляющих собой распространяющиеся возмущения равновесного состояния, с помощью линеаризованного уравнения Власова. Успехи в понимании свойств плазмы в значительной мере были связаны с исследованием решений этого уравнения.

§ 1. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Уравнение Власова вместе с уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = 0, \quad (8.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{v} + 4\pi \rho_{\text{внеш}}, \quad (8.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d\mathbf{v} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{внеш}}, \quad (8.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.1.4)$$

описывают на языке функции распределения $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ стационарные состояния плазмы, плазменные волны, неустойчивости и другие процессы, разыгрывающиеся в течение небольших интервалов времени ($\tau_{\text{коллек}} \ll \tau_c$). Функция распределения $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, умноженная на среднюю плотность числа частиц сорта α (т. е. на $\bar{n}_\alpha = \bar{N}_\alpha/V$), дает вероятное число частиц сорта α в элементе $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ вблизи точки \mathbf{x} , \mathbf{v} в момент времени t :

$$\bar{n}_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Использованная здесь нормировка записывается в виде

$$\bar{n}_\alpha \int f_\alpha d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \bar{N}_\alpha = \text{Полное число частиц сорта } \alpha \text{ в системе.}$$

Следует заметить, что \bar{n}_α представляет собой усредненную по объему плотность частиц, а не локальную плотность в конфигурационном пространстве.

§ 2. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Уравнение Власова (8.1.4) является нелинейным уравнением относительно f_α , поскольку поля \mathbf{E} и \mathbf{B} сами определяются функцией распределения. Поэтому решить это уравнение нелегко. Вместо вычисления точной функции распределения f_α , используя систему *линеаризованных* уравнений Власова — Максвелла, можно найти малое возмущение $f_{\alpha 1}$ некоторого равновесного состояния $f_{\alpha 0}$. Значительная часть современной теории плазмы основана на рассмотрении этих линеаризованных уравнений. Решения, полученные с помощью линеаризованных уравнений, следует всякий раз проверять, чтобы убедиться в том, что они удовлетворяют тем ограничениям, которые были необходимы для получения этих приближенных уравнений.

При выводе линеаризованных уравнений Власова — Максвелла предполагают сначала, что функция распределения f_α и поля \mathbf{E} и \mathbf{B} выражаются в виде суммы равновесных значений этих величин и возмущений:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha 0}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \varepsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (8.2.1)$$

Затем эти величины подставляют в уравнение Власова, причем нелинейные члены порядка ε^2 отбрасывают. Невозмущенное состояние плазмы $f_{\alpha 0}$ предполагается известным и удовлетворяющим уравнениям Власова и Максвелла:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 0} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (8.2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi \sum_{\alpha} q_\alpha \bar{n}_\alpha \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} + 4\pi \rho_{0, \text{внеш}},$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{0, \text{внеш}}, \quad (8.2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t}.$$

Вычитание этих равновесных уравнений из возмущенных линеаризованных уравнений дает линеаризованные уравнения Власова — Максвелла для возмущения функции распределения $f_{\alpha 1}$ и возмущенных полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{B}_1 :

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_0 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}, \quad (8.2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \quad (8.2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_{\alpha 1} d\mathbf{v}, \quad (8.2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}.$$

Задача 8.2.1. Какие члены опущены при выводе (8.2.4)?

Полученная система линеаризованных уравнений для возмущений зачастую может быть решена стандартными методами и позволяет изучать поведение плазмы в течение интервалов времени, меньших времени между парными столкновениями. В частности, эти линеаризованные уравнения можно применять для изучения плазменных волн малой амплитуды, период

колебаний которых значительно меньше времени между парными столкновениями. В этом случае функция распределения $f_{\alpha 0}$ и самосогласованные поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{V}_0 описывают некоторое стационарное состояние плазмы (такие состояния нетрудно сконструировать с помощью интегралов движения методом, описанным в гл. 7); функция распределения $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ описывает развитие начального возмущения.

Согласно гидродинамической теории, малые возмущения стационарных состояний плазмы распространяются в виде волн (гл. 4). Поскольку все результаты гидродинамической теории можно получить и из уравнения Власова, очевидно, что во многих случаях возмущения $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ также должны распространяться в виде волн. (Кроме того, уравнение Власова выявляет и другие характеристики плазмы, которые не описываются гидродинамикой.) Как и в гидродинамике, свойства плазменных волн зависят от равновесного состояния ($f_{\alpha 0}$, \mathbf{E}_0 , \mathbf{V}_0), вблизи которого рассматриваются волновые возмущения. В данной главе с помощью уравнений (8.2.4) — (8.2.6) мы будем изучать волновые возмущения малой амплитуды для различных равновесных состояний плазмы и покажем, каким богатством разнообразных явлений обладает возбужденная плазма.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА — МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНИХ ПОЛЕЙ

Уравнение Власова впервые было использовано для решения задачи об электромеханических колебаниях в плазме. Эта задача знакомит с математическими методами, используемыми для решения линеаризованного уравнения Власова, и выявляет те дополнительные свойства плазмы, которые не охватываются гидродинамикой.

Рассмотрим пространственно однородную плазму в отсутствие полей, которая описывается следующим равновесным решением уравнения Власова:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V}_0 = 0, \quad f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z). \quad (8.3.1)$$

Условие $\mathbf{E}_0 = \mathbf{V}_0 = 0$ требует, конечно, чтобы

$$\rho_q = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{пространственный заряд отсутствует}),$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{полный ток равен нулю}).$$

Пусть в момент $t = 0$ за счет смещения небольшой части заряда распределение зарядов в плазме слегка отличается от равновесного:

$$f(t=0) = f_{\alpha 0}(v_x, v_y, v_z) + \varepsilon f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t=0).$$

Предположим, что это возмущение *электростатическое*, т. е. что в результате смещения зарядов возникает лишь возмущенное электрическое, а не магнитное поле. Такое условие выполняется, если, например, возмущения плотности заряда меняются только в одном направлении и поэтому порождают только электростатическое поле. В этом случае

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_1 &= 0, \\ \mathbf{E}_1 &= -\nabla \varphi_1. \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

Уравнения (8.3.2) строго справедливы для одномерных возмущений, а для общего случая являются лишь приближенными. В *электростатическом*

приближении $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ представляет собой решение следующих уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\right) f_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}, \quad (8.3.3)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v}. \quad (8.3.4)$$

Задача 8.3.1. Напишите какие-либо явные выражения для малого (по сравнению с $f_{\alpha 0}$) возмущения $f_{\alpha 1}$ функции распределения, согласованные с условием $\mathbf{V}_1 = 0$.

Для решения системы уравнений (8.3.3), (8.3.4) удобно воспользоваться методом интегральных преобразований. Уравнения упрощаются, если использовать преобразование Фурье по координатам, а для задачи с начальными условиями — преобразование Лапласа по времени¹⁾. Эти преобразования превращают исходные дифференциальные уравнения в алгебраические, которые решаются отдельно для каждой компоненты (Фурье — Лапласа). После этого нужно провести обратное преобразование Фурье — Лапласа, чтобы получить решение в виде функций координат и времени.

Преобразование Фурье — Лапласа определяется следующими формулами:

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = f_{\alpha \mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8.3.5)$$

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi_1(\mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8.3.6)$$

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = \int_0^{\infty} f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) \exp(-pt) dt, \quad \text{Re}(p) \geq p_0. \quad (8.3.7)$$

Важно подчеркнуть, что лапласовский образ $\tilde{f}(p)$ определен только при $\text{Re } p \geq p_0$, как отмечено в (8.3.7). Константа p_0 выбирается достаточно большой, чтобы обеспечить сходимость интеграла $\int_0^{\infty} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \exp(-pt) dt$.

По найденной функции $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}$, проводя обратные преобразования, можно найти $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ и $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$:

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \exp(pt) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) \frac{dp}{2\pi i}, \quad (8.3.8)$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{k} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \exp(pt) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(p) \frac{dp}{2\pi i}.$$

Применение преобразования Фурье — Лапласа к уравнениям (8.3.3) и (8.3.4) с учетом того, что $f_{\alpha 0}$ не зависит от \mathbf{x} и t , дает

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t=0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}},$$

$$k^2 \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v}. \quad (8.3.9)$$

¹⁾ Исследование электростатических волн этим методом было впервые проведено Л. Д. Ландау [1]. — *Прим. ред.*

Исключая из этих уравнений $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$, получаем выражение для возмущенного потенциала $\Phi_{\mathbf{k}}$:

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{f_{\alpha\mathbf{k}}(t=0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}}{1 + 4\pi \sum_{\alpha} \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{ip - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}}, \quad \text{Re}(p) \geq p_0. \quad (8.3.10)$$

Хотя для получения пространственной и временной зависимости возмущения потенциала необходимо еще произвести в (8.3.10) обратное преобразование Фурье — Лапласа, это выражение для $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p)$ уже содержит полезную информацию. Знаменатель его дает диэлектрическую проницаемость плазмы (в отсутствие внешних полей) при распространении в ней электростатических волн с частотой $\omega = ip$ и волновым вектором \mathbf{k} :

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (8.3.11)$$

Задача 8.3.2. Покажите, что $D(\mathbf{k}, ip)$ действительно имеет смысл диэлектрической проницаемости.

Интегралы по скоростям в (8.3.10) и (8.3.11) можно упростить, если воспользоваться системой координат в пространстве скоростей, в которой волновой вектор \mathbf{k} направлен вдоль одной из координатных осей, и ввести интеграл $F(u)$ от $f(\mathbf{v})$ по двум другим координатам:

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v}, \quad (8.3.12)$$

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}} \equiv \int \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v}.$$

В этих обозначениях уравнения (8.3.9) — (8.3.11) принимают вид

$$\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[f_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0) + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \right], \quad (8.3.13)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) = \frac{-i}{|k|^3 D(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t=0)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, \quad (8.3.14)$$

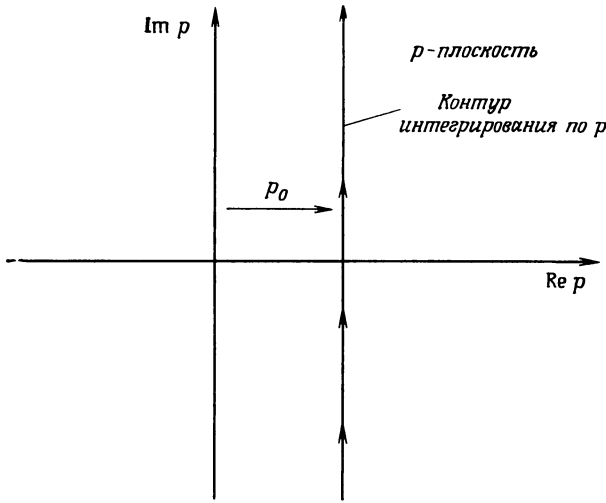
$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0}(u)/\partial u}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, \quad \text{Re}(p) \geq p_0. \quad (8.3.15)$$

Задача 8.3.3. Покажите, что

$$\int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(v^2)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}$$

для любой $f_{\alpha 0}(v^2)$ (где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$). Из данного результата следует, что в изотропной плазме произвольное возмущение можно разложить на два независимых возмущения: возмущение электростатического типа с $E_{es} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}/|\mathbf{k}|$, точно описываемое с помощью диэлектрической проницаемости (8.3.14), и электромагнитное возмущение с $\mathbf{E}_{em} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/|\mathbf{k}|$, которое мы опишем ниже в § 9.

Чтобы найти зависимость Φ_1 и $f_{\alpha 1}$ от времени, нужно обратить их лапласовские образы. Временная зависимость фурье-образа потенциала полу-



Фиг. 136. Контур интегрирования при обратном преобразовании Лапласа $\tilde{\varphi}(p)$.

Постоянная p_0 выбирается так, что полюса функции $\tilde{\varphi}(p)$ лежат левее контура интегрирования.

чается с помощью применения обратного преобразования Лапласа к $\tilde{\varphi}_k$ (8.3.14):

$$k^2 \varphi_k(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{\sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha k}(u, t=0)}{p + i|k|u} du}{D(k, ip)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (8.3.16)$$

Путь интегрирования в выражении (8.3.16) показан на фиг. 136.

Поскольку величина p_0 была выбрана такой, чтобы $\int_0^{\infty} \varphi_k(t) e^{-pt} dt$ сходился при $p > p_0$, контур интегрирования на фиг. 136 должен быть выбран лежащим правее всех полюсов функции $\tilde{\varphi}_k(p)$.

За исключением небольшого числа простых функций распределения $F_{\alpha 0}(u)$, описывающих равновесие, и простых начальных возмущений $F_{\alpha k}(u, t_0 = 0)$, интегрирование в формуле обращения (8.3.16) не может быть выполнено аналитически, поэтому аналитическое решение для $\varphi_k(t)$ отсутствует. Однако для широкого класса равновесных распределений можно получить приближенное решение для $\varphi_k(t)$ при $t \rightarrow \infty$, которое описывает поведение системы спустя большое время после действия начального возмущения. Это асимптотическое ($t \rightarrow \infty$) поведение определяется собственными колебаниями (модами, нормальными типами колебаний) плазмы, а не переходными процессами, чувствительными к деталям начального возмущения.

Задача 8.3.4. Прежде чем изучать асимптотические решения, найдите точные решения для $\varphi_k(t)$ в случае нескольких равновесных распределений и начальных возмущений:

- а) $f_{\alpha 0} = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z)$, $f_{e1} = f_{e0} \sin kx$, $f_{i1} = 0$;
- б) $f_{\alpha 0} = [A/(v_x^2 + v_{\alpha 0}^2)] \delta(v_y) \delta(v_z)$, $f_{e1} = f_{e0} \sin kx$, $f_{i1} = 0$;
- в) $f_{e0} = \delta(v_x - v_0) \delta(v_y) \delta(v_z)$, $f_{e1} = f_{e0} \sin kx$,
 $f_{i0} = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z)$, $f_{i1} = 0$.

В чем состоит основное различие решений в этих трех случаях?

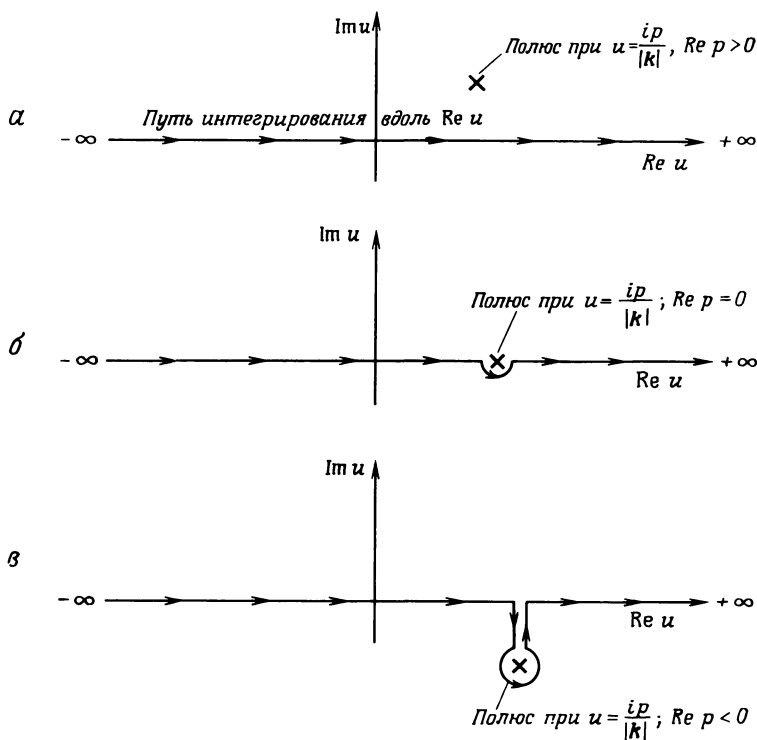
§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ $\Phi_k(t)$

Вычисление контурных интегралов можно упростить, сдвигая контур интегрирования. Этот метод можно применить для вычисления интеграла (8.3.16), взятого по контуру, показанному на фиг. 136. Прежде всего нужно вспомнить, что $\tilde{\Phi}_k(p)$ однозначно определяется выражением (8.3.14) только в области $\operatorname{Re} p \geq p_0$. Поэтому для выполнения интегрирования в (8.3.16) удобно ввести функцию $\Phi_k(p)$, совпадающую с $\tilde{\Phi}_k(p)$ при $\operatorname{Re} p \geq p_0$. Определим $\Phi_k(p)$ в области $\operatorname{Re} p < p_0$ как аналитическое продолжение функции $\tilde{\Phi}_k(p)$. [Заметим, что для вычисления $\varphi(t)$ при $t > 0$ достаточно знать $\tilde{\Phi}_k(p)$ только при $\operatorname{Re} p \geq p_0$; аналитическое продолжение на область $\operatorname{Re} p < p_0$ вводится исключительно для облегчения интегрирования.]

Из (8.3.14) ясно, что для аналитического продолжения функции $\tilde{\Phi}_k(p)$ требуется знать как аналитические свойства функций $F_{\alpha 0}$ и $\tilde{F}_{\alpha k}$, так и способ аналитического продолжения в область $\operatorname{Re} p < p_0$ интегралов по скоростям вида

$$h(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|k|} du, \quad \operatorname{Re}(p) > p_0. \quad (8.4.1)$$

Удобно ограничить рассмотрение функциями $f(u)$, аналитическими при всех $|u| < \infty$. В частности, это условие выполняется для максвелловской функции распределения. Интегрирование в (8.4.1) ведется (в комплексной плоскости u) вдоль действительной оси, и при $\operatorname{Re} p > 0$ путь интегрирования



Фиг. 137. Контур Ландау для вычисления $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{(u-ip/|k|)} du$ при различных значениях $\operatorname{Re} p$.

Такой выбор контуров гарантирует, что интеграл по u непрерывно зависит от p . а — контур Ландау для $\operatorname{Re} p > 0$; б — контур Ландау для $\operatorname{Re} p = 0$; в — контур Ландау для $\operatorname{Re} p < 0$.

лежит ниже полюса $u = ip/|\mathbf{k}|$, как показано на фиг. 137, а. Для аналитического продолжения $h(p)$ в нижнюю полуплоскость $\text{Re } p \leq 0$ необходимо, чтобы путь интегрирования по-прежнему проходил ниже полюса, как показано на фиг. 137, б, в. Контуры интегрирования, приведенные на фиг. 137, называются контурами Ландау [1], впервые применившего в 1946 г. излагаемый здесь метод при решении задачи с начальными условиями для уравнения Власова ¹⁾.

Интеграл (8.4.1), взятый вдоль контура, показанного на фиг. 137, в, можно представить в виде суммы интеграла по действительной оси и вклада от полюса, так что функция $h(p)$, определенная равенствами

$$h(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du, & \text{Re}(p) \geq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du + 2\pi i f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right), & \text{Re}(p) \leq 0, \end{cases} \quad (8.4.2)$$

$$h(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du + 2\pi i f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right), & \text{Re}(p) \leq 0, \end{cases} \quad (8.4.3)$$

аналитична ²⁾ и в нижней, и в верхней полуплоскостях ($\text{Re } p \geq 0$). Нетрудно показать, что в пределе $\text{Re } p \rightarrow 0$ интегралы (8.4.2) и (8.4.3) заменяются на

$$h(p) = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du + \pi i f\left(\frac{ip}{|\mathbf{k}|}\right), \quad \text{Re}(p) = 0, \quad (8.4.4)$$

где интеграл берется в смысле главного значения Коши:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{ip/|\mathbf{k}| - \varepsilon} + \int_{ip/|\mathbf{k}| + \varepsilon}^{\infty} \right).$$

Функция $h(p)$, определенная равенствами (8.4.2) — (8.4.4), непрерывна при переходе через ось $\text{Re } p = 0$.

Таким образом, выражение

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(p) = \frac{-i \sum_{\alpha} 4\pi n_{\alpha} q_{\alpha} \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(u, t=0)}{u - ip/|\mathbf{k}|} du}{1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - ip/|\mathbf{k}|} du} \quad (8.4.5)$$

с интегралами по скоростям, взятыми по контурам Ландау (фиг. 137) или определенными формулами Ландау (8.4.2) — (8.4.4), является аналитическим продолжением функции $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(p)$. Единственными особенностями этой продолженной функции могут быть полюса в точках, где ее знаменатель обращается в нуль, и при деформациях контура (фиг. 136) нельзя пересекать полюса, соответствующего $D(\mathbf{k}, ip) = 0$.

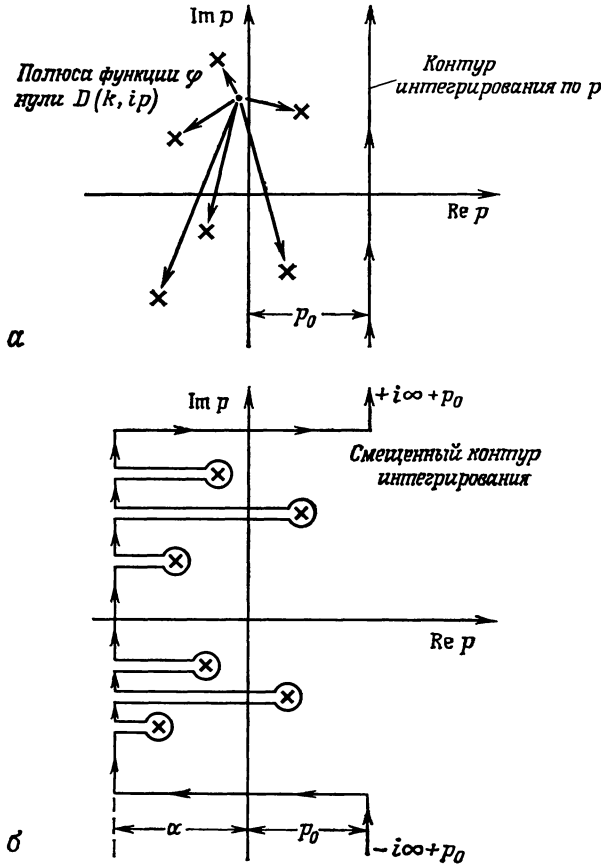
Задача 8.4.1. Используя формулы Сохоцкого — Племеля

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - y \pm i\varepsilon} = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x - y} \mp \pi i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - y) dx,$$

покажите, что из (8.4.2) и (8.4.3) в пределе $\text{Re } p \rightarrow 0$ следует (8.4.4).

¹⁾ Интегрирование по этим контурам называют также интегрированием по правилу обхода Ландау. — *Прим. ред.*

²⁾ Должны выполняться также некоторые слабые требования интегрируемости функции $f(u)$ [2].



Фиг. 138. a — контур для вычисления $\varphi(t) = (1/2\pi i) \int_{-i\infty + \rho_0}^{+i\infty + \rho_0} \varphi(p) \exp(pt) dp$; b — эквивалентный контур для вычисления $\varphi(t)$.

Основной вклад в интеграл при $t \rightarrow \infty$ дают полюса $\tilde{\varphi}(p)$, определяемые корнями дисперсионного уравнения $D(k, ip) = 0$.

Задача 8.4.2. Функция $h(p)$, определенная равенствами (8.4.2) — (8.4.4), является единственным аналитическим продолжением функции (8.4.2). Проверьте, в частности, что функция g , определенная следующим образом:

$$g(p) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{u - ip/|k|}, & \text{Re}(p) \geq 0, \\ \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u) du}{u - ip/|k|}, & \text{Re}(p) = 0 \end{cases}$$

(где \oint берется в смысле главного значения Коши), испытывает разрыв на оси $\text{Re } p = 0$. Убедитесь также, что на этой оси терпит разрыв

также функция j , определяемая выражениями

$$j = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u - ip/|k|} du, & \text{Re}(p) > 0, \\ \int_{C'} \frac{f(u) du}{u - ip/|k|}, & \text{Re}(p) \leq 0, \end{cases}$$

где контур C' проходит над полюсом. Это показывает, что ни $g(p)$, ни $j(p)$ не являются аналитическими продолжениями функции $h(p)$.

На фиг. 138, *a* показан возможный набор полюсов функции $\tilde{\varphi}_k(p)$, соответствующих нулям $D(k, ip)$, и контур интегрирования при обратном преобразовании Лапласа. На фиг. 138, *b* приведен эквивалентный контур, для которого мы можем записать функцию $\varphi_k(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) = \sum_j R_j e^{p_j(k)t} + \int_{-i\infty+p_0}^{-i\infty-\alpha} \tilde{\varphi}_k(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} + \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \tilde{\varphi}_k(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} + \\ + \int_{i\infty-\alpha}^{i\infty+p_0} \tilde{\varphi}_k(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Здесь полюса p_j функции $\tilde{\varphi}_k(p)$ определяются из условия $D(k, ip_j(k)) = 0$, а R_j есть вычет в этих полюсах, т. е.

$$R_j = \lim_{p \rightarrow p_j} (p - p_j) \tilde{\varphi}_k(p).$$

Второе и четвертое слагаемые в (8.4.6) малы, если $\varphi_k(p)$ быстро убывает при $|p| \rightarrow \infty$, а третье слагаемое

$$\int_{-i\infty-\alpha}^{i\infty-\alpha} \tilde{\varphi}_k(p) e^{pt} dp$$

становится при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально малым по сравнению с вкладом от полюсов. Если все полюса $p_j(k)$ лежат левее мнимой оси (т. е. если $\text{Re } p_j < 0$), то все слагаемые в $\varphi_k(t)$ затухают при $t \rightarrow \infty$. Если же некоторые полюса лежат правее ($\text{Re } p_j > 0$), то они приводят к нарастанию электрических полей (к неустойчивости). В обоих этих случаях асимптотическое решение линеаризованного уравнения Власова в электростатическом приближении имеет вид

$$\varphi_k(t \rightarrow \infty) = \sum_j R_j e^{p_j(k)t}.$$

Обычно это выражение для асимптотики потенциала записывают через частоту $\omega = ip$ в виде

$$\varphi_k(t) = \sum_j R_j e^{-i\omega_j t}. \quad (8.4.7)$$

В этом выражении ω_j , вообще говоря, — комплексная величина

$$\omega_j = \omega_r + i\omega_i,$$

удовлетворяющая уравнению

$$D(k, \omega) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega / |k|} du = 0, \quad (8.4.8)$$

в котором интеграл берется по контуру Ландау. Во многих случаях $\text{Re} [\omega(\mathbf{k})] \gg \text{Im} [\omega(\mathbf{k})]$ и отклик плазмы на возмущение после непродолжительных переходных процессов складывается из нескольких волновых колебаний с хорошо определенными частотами. Для этих колебаний, представляющих собой нормальные моды плазмы, диэлектрическая проницаемость обращается в нуль. В общем случае такие волновые моды обладают фазовой скоростью ω/k и групповой скоростью $\partial\omega/\partial k$.

Из изложенного ясно, что задача об определении отклика плазмы на больших временах сводится к нахождению нулей диэлектрической проницаемости. Уравнение

$$D(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = 0$$

называется *дисперсионным уравнением*. Оно позволяет найти частоту плазменной волны ω как функцию k или, наоборот, k как функцию ω . Подчеркнем, что с помощью дисперсионного уравнения описывается только асимптотическое поведение на больших временах.

§ 5. УПРОЩЕННЫЙ ВЫВОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Один из возможных методов решения системы уравнений Власова — Максвелла

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}, \quad (8.5.1)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v} \quad (8.5.2)$$

для электростатических возмущений ($\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1$) состоит в нахождении частных решений вида

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\omega t), \\ \varphi_1(\mathbf{x}, t) &= \varphi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Тогда из (8.5.1) имеем

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{(q_{\alpha}/m_{\alpha})(\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (8.5.4)$$

и, подставляя это выражение в (8.5.2), получаем уравнение

$$k^2 \varphi_{\mathbf{k}} \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} \right) = 0. \quad (8.5.5)$$

Нетривиальное решение уравнения (8.5.5) существует, если

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0. \quad (8.5.6)$$

Это дисперсионное уравнение дает зависимость $\omega(\mathbf{k})$ или $\mathbf{k}(\omega)$. С учетом этой связи возмущение потенциала записывается в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t).$$

Дисперсионное уравнение (8.5.6) нельзя использовать, не уточнив контура интегрирования по \mathbf{v} , поскольку для действительных значений $\omega(\mathbf{k})$ знаменатель обращается в нуль при интегрировании по действительной оси \mathbf{v} . Приведенный упрощенный вывод дисперсионного уравнения не дает никаких указаний, как правильно выбрать контур. Однако если рассматривается поведение плазмы после начального возмущения, то решение (8.5.6) должно

совпадать с точным решением задачи с начальными условиями (8.4.8). Эти два решения совпадают, если справедливо следующее тождество для интеграла в (8.5.6):

$$\int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} \equiv \int_L \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} : d\mathbf{v}, \quad (8.5.7)$$

где L — контур Ландау, показанный (с заменой ip на ω) на фиг. 137.

Задача 8.5.1. Покажите, что правило обхода Ландау (8.5.7) эквивалентно учету слабых столкновений. Воспользуйтесь модельным уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f - \frac{q}{m} \nabla \varphi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\text{столк}} \equiv -\nu (f - f_0),$$

учитывающим столкновения, и перейдите к пределу $\nu \rightarrow +0$.

Задача 8.5.2. Правило обхода Ландау возникает при решении задачи с начальными условиями. В какой задаче правильные результаты будет давать контур, который проходит над полюсом, в отличие от контура Ландау?

К собственным модам плазмы относятся те волновые возмущения, которые продолжают существовать долгое время после того, как затухли переходные процессы, связанные с начальным возмущением. Эти собственные моды характеризуются теми нулями функции $D(\mathbf{k}, \omega)$, для которых мнимая часть собственной частоты ω мала и отрицательна, так что ω почти действительная величина. Если же для некоторого корня мнимая часть частоты велика (и отрицательна в устойчивой плазме), то соответствующая этому корню волна затухнет за несколько периодов колебаний и не может рассматриваться как собственная мода. Для почти действительных собственных частот можно упростить вычисление интеграла по скоростям в (8.5.6), разложив его в ряд Тейлора вблизи $\omega_i = 0$ (считая $\omega = \omega_r + i\omega_i$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r - i\varepsilon} + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r - i\varepsilon} \right] + \dots \quad (8.5.8)$$

Следует заметить, что для выполнения правила обхода Ландау при действительном $\omega = \omega_r$ полюс нужно сдвинуть вверх от оси ν , записав $\omega = \omega_r + i\varepsilon$, и затем перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$.

Интегралы в (8.5.8) удобно свести к одномерным, вводя функцию

$$F_{\alpha 0}(u) = \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v}.$$

Используя тождество [3]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(u) du}{u - \omega_r/|\mathbf{k}| - i\varepsilon} = \oint \frac{G(u) du}{u - \omega_r/|\mathbf{k}|} + \pi i G\left(u = \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|}\right),$$

можно получить дисперсионное уравнение для слабозатухающих электростатических волн в плазме в отсутствие внешних полей:

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left(1 + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r}\right) \oint \left[\frac{\partial F_{\alpha 0}(u)/\partial u}{u - \omega_r/|\mathbf{k}|} du + \pi i \left[\frac{\partial F_{\alpha 0}(u)}{\partial u} \right]_{u=\omega_r/|\mathbf{k}|} \right] = 0. \quad (8.5.9)$$

Выражение для диэлектрической проницаемости, стоящее в (8.5.5) и (8.5.9), справедливо только для плазмы, в которой в равновесном состоянии $f_{\alpha 0}$ нет электрического и магнитного полей. При рассмотрении более сложных равновесных состояний диэлектрические свойства плазмы меняются. Описанный здесь метод позволяет после необходимого обобщения решать в линейном приближении большинство задач о колебаниях плазмы. Следуя этому методу, нужно сначала получить диэлектрическую проницаемость плазмы, найти ее нули и затем сопоставить этим нулям пламенные волны. В последующих параграфах получена диэлектрическая проницаемость плазмы для различных равновесных состояний и исследованы характерные для этих состояний колебания плазмы.

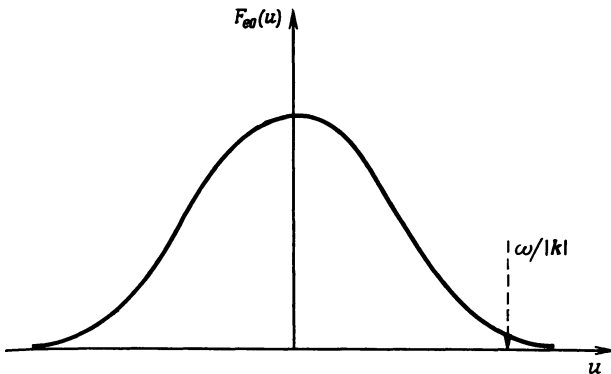
§ 6. ТЕОРИЯ ЛЕНГМЮРОВСКИХ И ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН, ОСНОВАННАЯ НА УРАВНЕНИИ ВЛАСОВА. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ ($E_0 = B_0 = 0$)

Применение уравнения Власова к теории волн малой амплитуды в плазме можно проиллюстрировать на примере ленгмюровских и ионно-звуковых волн, для которых (в отсутствие полей) легко решить дисперсионное уравнение (8.5.9). Эти волны рассматривались в гл. 5 в рамках гидродинамической модели плазмы. Дополнительные свойства этих волн, обнаруживаемые при использовании уравнения Власова, показывают, как кинетическое рассмотрение позволяет глубже понять основные процессы в плазме.

6.1. Высокочастотные электростатические волны; ленгмюровские колебания

В отсутствие внешних полей волны в плазме характеризуются волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω , которые связаны дисперсионным уравнением $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ [уравнения (8.5.6) и (8.5.9)]. Приближенные решения дисперсионного уравнения могут быть найдены для тех волн, фазовые скорости которых лежат в определенных интервалах. Например, можно решить (8.5.6) для волн, фазовая скорость которых намного больше тепловой скорости частиц плазмы, как показано на фиг. 139. При условии $\omega/k \gg v_T$ интеграл в смысле главного значения в (8.5.9) может быть вычислен разложением по u :

$$-\oint \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega/|\mathbf{k}|} du = \int \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \left[\frac{1}{\omega/|\mathbf{k}|} + \frac{u}{(\omega/|\mathbf{k}|)^2} + \frac{u^2}{(\omega/|\mathbf{k}|)^3} + \dots \right] du. \quad (8.6.1)$$



Фиг. 139. Соотношение между фазовой скоростью ленгмюровских волн $\omega/|\mathbf{k}|$ и тепловой скоростью электронов при $\omega/k \gg v_T$.

Для максвелловской функции распределения

$$F_{e0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)_e^{1/2} \exp \left(-\frac{m_e u^2}{2\kappa T_e} \right)$$

этот интеграл может быть вычислен в явном виде (ионным вкладом можно пренебречь благодаря малости m_e/m_i):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{e0}/\partial u}{u - \omega_r/|k| - i\varepsilon} du = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} + 3 \frac{\omega_{pe}^4}{\omega_r^4} k^2 \lambda_{De}^2 + \dots + \frac{\pi i \omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial u} F_{e0}(u) \Big|_{u=\omega_r/|k|}; \quad (8.6.2)$$

здесь ω_{pe} — плазменная частота и

$$\lambda_{De}^2 \equiv \frac{\kappa T_e}{4\pi n_e e^2}. \quad (8.6.3)$$

Формулы (8.6.2) и (8.6.3) можно применять и для немаксвелловского распределения $f_{\alpha 0}$, если определить его «температуру» как

$$\frac{1}{2} \kappa T_{\alpha} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_{\alpha} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}{2k^2} f_{\alpha 0} d\mathbf{v}.$$

Дисперсионное уравнение для волн с $\omega/k \gg v_T$ получаем, если подставить (8.6.2) в (8.6.1) и воспользоваться малостью величин $k\lambda_{De}$ и ω_i/ω_r :

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2), \\ \omega_r &\approx \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right), \\ \omega_i &= -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k^3 \lambda_{De}^3|} \exp \left[-\left(\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

Действительная часть ω равна частоте плазменных колебаний, рассмотренных в гл. 4, где было показано, что после начального смещения электронов в некоторой области от положений равновесия они колеблются с частотой ω_{pe} . Выражения (8.6.4) получены при рассмотрении тех же колебаний с помощью линеаризованного уравнения Власова и описывают поправки к частоте, основанные на строгом учете теплового движения; они показывают также, что колебания слабозатухающие.

Для применимости выражений (8.6.4) необходимо выполнение условия ¹⁾ $\omega/k \gg (\kappa T_e/m_e)^{1/2}$, и это условие слабого затухания удовлетворяется при $k\lambda_D \ll 1$. Последнее неравенство оправдывает приближения, сделанные при выводе (8.6.4), и если оно выполнено, то электростатические колебания с частотой $\omega \approx \omega_{pe}$ являются собственной модой однородной плазмы (в отсутствие внешних полей). Электрический потенциал колебаний с определенным \mathbf{k} равен

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = \varphi_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_r t)] \exp(\omega_i t)$$

с ω_r и ω_i из (8.6.4). Эти слабозатухающие собственные моды плазмы обычно называют ленгмювскими колебаниями; иногда их называют также плазменными волнами, плазменными колебаниями и электростатическими волнами. Поскольку это те же волны, которые анализировались в гл. 4 на основе гидродинамического описания, поучительно сравнить прежние результаты с результатами, полученными в этой главе с помощью уравнения Власова.

¹⁾ Область применимости выражений (8.6.4) для затухания Ландау ограничена со стороны малых k неравенством $\omega/k \ll c$, позволяющим не учитывать релятивистских поправок к кинетической энергии частиц. — Прим. ред.

1. *Коллективный характер.* Гидродинамическое описание с самого начала предполагало возможность описания плазмы как сплошной среды. Кинетическая теория показывает, что ленгмюровские колебания действительно похожи на волны в сплошной заряженной среде и что их частота определяется в основном «грубой» величиной — электронной плотностью.

2. *Характер распространения.* В плазме с ненулевой температурой ленгмюровские колебания, как следовало уже из гидродинамического рассмотрения, распространяются — имеют отличную от нуля групповую скорость. Для этого вывода, однако, требовалось предположение о виде уравнения состояния, связывающего давление и плотность (§ 4 гл. 4). Кинетическая теория подтверждает вывод о распространяющемся характере ленгмюровских колебаний, но для получения этого результата не потребовалось никаких необоснованных предположений об уравнении состояния. Распространение ленгмюровских волн представляет собой естественное следствие кинетической теории, причем групповая скорость оказывается равной

$$v_{гр} = 3\omega_p^2 \lambda_{De}^2 \frac{k}{\omega_r}. \quad (8.6.5)$$

3. *Уравнение состояния.* Сравнение ответов (8.6.4), полученных с помощью линеаризованного уравнения Власова, с гидродинамическими результатами (§ 4 гл. 4) показывает, что в ленгмюровских волнах электроны ведут себя как одномерная адиабатическая жидкость. Ни при выводе, ни при решении уравнения Власова не потребовалось уравнения состояния; таким образом, кинетическая теория указывает, каким уравнением состояния нужно пользоваться в гидродинамическом описании.

Ясно видно различие между информацией, содержащейся в гидродинамической и кинетической моделях плазмы. Гидродинамическая теория позволяет вычислить плотность и среднюю скорость электронов как функцию координат и времени, но для этого должна быть задана связь между температурой и плотностью.

В кинетической теории зависимость функции распределения от координат и времени может быть найдена без всяких предположений о связи между плотностью и температурой. Плотность, скорость, температура, являющиеся моментами от функции распределения, могут быть непосредственно вычислены по f_{e1} :

$$\begin{aligned} n_e &= \bar{n}_e \int f_{e1} d\mathbf{v}, \\ n_e \mathbf{V}_e &= \bar{n}_e \int \mathbf{v} f_{e1} d\mathbf{v}, \\ \frac{3}{2} n_e \kappa T_e &= \bar{n}_e \int \frac{1}{2} m_e v^2 f_{e1} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

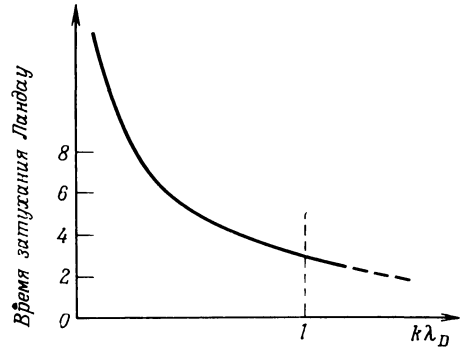
где f_{e1} задано в явном виде формулами (8.5.4), (8.6.4).

4. *Затухание Ландау.* Важным свойством ленгмюровских волн, которое предсказывает кинетическая теория (и которое полностью выпадает при гидродинамическом рассмотрении) является бесстолкновительное затухание электростатического потенциала, связанного с собственными колебаниями плазмы. Это затухание описывается малой отрицательной мнимой частью частоты собственных колебаний [см. (8.6.4)]. Электростатический потенциал затухает как $\phi_1(t) \sim \exp(\omega_i t)$, где

$$\omega_i \sim \left. \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} \right|_{u=\omega/\hbar}. \quad (8.6.7)$$

Уменьшение ϕ_1 во времени впервые было вычислено Ландау [1] и называется затуханием Ландау (или бесстолкновительным затуханием). Это затухание

носит резонансный характер, оно пропорционально производной функции распределения в области резонансных частиц — частиц, движущихся со скоростью, близкой к фазовой скорости волны (фиг. 139). Затухание Ландау можно пояснить, заметив, что для функции распределения, убывающей с ростом $|u|$, больше частиц, движущихся несколько медленнее волны, чем частиц, движущихся несколько быстрее; если медленные частицы ускоряются волной, они отбирают у волны энергию и волна затухает. Из (8.6.4) следует, что в случае длинноволновых мод ($k\lambda_D \rightarrow 0$) время затухания Ландау $1/\omega_i$ гораздо больше периода колебаний $2\pi/\omega_{pe}$ (фиг. 140). Если длина волны, уменьшаясь, приближается к дебаевскому радиусу, затухание увеличивается и колебания нельзя уже рассматривать как собственные моды плазмы.



Фиг. 140. Зависимость времени затухания Ландау в единицах $2\pi/\omega_{pe}$ от $k\lambda_D$. Как показано в тексте, теория справедлива лишь при $k\lambda_D \ll 1$.

Заметим, что весь проведенный анализ, начиная уже с приближенного вычисления $\varphi_k(t)$ по лапласовскому образу $\tilde{\varphi}_k(p)$, был основан на представлении о двух масштабах времени — времени существования быстрозатухающих переходных процессов, вызванных начальным возмущением (вычисление которых представляет собой сложную задачу), и продолжительного интервала времени, в течение которого в системе возбуждены только плазменные волны (собственные моды системы). Отклик плазмы на больших временах описывается с помощью (8.5.6). Однако моды, для которых $\omega_i/|\omega|$ не очень мало, сильно затухают за то же время, что и другие переходные процессы. Эти быстро затухающие моды следует также отнести к переходным процессам.

Нужно отметить также, что в приведенных здесь вычислениях размеры плазмы предполагались бесконечно большими. В плазме конечных размеров (гл. 4) полученные результаты можно применять только при соблюдении условий

$$R_{\text{плазма}} \gg \frac{1}{k} \gg \lambda_D. \quad (8.6.8)$$

Задача 8.6.1. Оцените ω_r и ω_i для плазмы плотностью 10^{12} см^{-3} и температурой 10^6 К . Длина волны $\lambda = 40\lambda_{De}$.

Задача 8.6.2. Найдите порядок величин, которыми мы пренебрегали в (8.6.2).

Задача 8.6.3. Почему для того, чтобы (8.6.4) было справедливо, требуется выполнение неравенства $k\lambda_{De} \ll 1$?

Задача 8.6.4. Откуда возник множитель $\exp(-3/2)$ в (8.6.4)?

Задача 8.6.5. Обсудите различие между (8.6.4) и результатами § 4 гл. 4.

Задача 8.6.6. Вычислите p_1 и ρ_1 непосредственно из функции f_1 и покажите, что для ленгмюровских колебаний p_1 и ρ_1 связаны соотношением $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$, где $\gamma = 3$.
[Указание. $\Delta(p\rho^{-\gamma}) = 0$.]

Задача 8.6.7. Небольшой осциллятор, помещенный в плазму в точке x_0 , поддерживает плазменные волны с небольшой постоянной амплитудой и заданной частотой $\omega_0 \gg \omega_p$. Найдите потенциал $\varphi_1(x, t)$ в плазме вдали от осциллятора.

(Указание. Это задача с заданными граничными условиями, а не с заданными начальными значениями.)

Задача 8.6.8. Покажите, что если искать решение в виде

$$\varphi_1(x, t) = \varphi \exp(ik \cdot x + i\omega t)$$

[а не $\exp(-i\omega t)$], то контур интегрирования по скоростям в (8.5.7) должен по-прежнему *проходить ниже полюса*.

6.2. Общий метод решения уравнения $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ при слабом затухании или усилении

Полезным методом нахождения нулей диэлектрической проницаемости $D(\mathbf{k}, \omega)$, соответствующих слабозатухающим волнам, является разложение в ряд интегралов по скоростям вблизи $\omega = \omega_r$. При $\omega_i \ll \omega_r$

$$D(\mathbf{k}, \omega) \approx D(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial \omega_r}. \quad (8.6.9)$$

Диэлектрическая проницаемость $D(\mathbf{k}, \omega_r)$ содержит комплексный член

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega_r / |\mathbf{k}| - i\varepsilon} du$$

и может быть записана в виде

$$D(\mathbf{k}, \omega_r) = D_r(\mathbf{k}, \omega_r) + iD_i(\mathbf{k}, \omega_r), \quad (8.6.10)$$

где

$$D_i = -\pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left. \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \right|_{u=\omega_r/|\mathbf{k}|} \quad (8.6.11)$$

и

$$D_r = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega_r / |\mathbf{k}|} du. \quad (8.6.12)$$

Подставляя (8.6.10) в (8.6.9) и приравнявая получившееся выражение нулю, имеем

$$\omega_i = \frac{-D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial D_r(\mathbf{k}, \omega_r) / \partial \omega_r}, \quad (8.6.13)$$

где ω_r с точностью до членов порядка $(\omega_i / \omega_r)^2$ удовлетворяет уравнению

$$D_r(\mathbf{k}, \omega_r) = 0. \quad (8.6.14)$$

Задача 8.6.9. Покажите, что (8.6.13) дает для ω_i такое же выражение, что и в (8.6.4).

6.3. Ионно-звуковые волны

Учет вклада ионов в диэлектрическую проницаемость $D(\mathbf{k}, \omega)$ приводит лишь к небольшому сдвигу частоты ленгмюровских колебаний. Иначе говоря, не существует никаких отдельных ионных ленгмюровских колебаний с частотой $\omega = \omega_{pi}$. Однако если электроны значительно горячее ионов ($T_e \gg T_i$), то низкочастотные электростатические волны, в которых движе-

ние ионов играет главную роль, становятся слабозатухающими. Фазовые скорости таких волн лежат в интервале

$$\left(\frac{\kappa T_i}{m_i}\right)^{1/2} < \frac{\omega}{k} < \left(\frac{\kappa T_e}{m_e}\right)^{1/2}. \quad (8.6.15)$$

Для исследования свойств рассматриваемых волн нужно, так же как и раньше, отыскивать нули диэлектрической проницаемости $D(\mathbf{k}, \omega)$, вычисленной для заданного равновесного состояния плазмы с учетом движения ионов. При этом снова нужно вычислять в подходящих приближениях интегралы по скоростям, предполагая, что $\omega_i \ll \omega_r$. Чтобы вычислить интегралы по скоростям для электронов и ионов, в интервале скоростей (8.6.15) необходимо использовать в каждом случае отдельные приближения:

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{i0}/\partial u}{\omega_r/|\mathbf{k}| - u} du \approx \int \frac{\partial F_{i0}}{\partial u} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega} + \frac{k^2 u}{\omega^2} + \frac{|\mathbf{k}^3| u^2}{\omega^3} + \frac{k^4 u^3}{\omega^4} \right) du \quad \text{для ионов,} \quad (8.6.16)$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{e0}/\partial u}{\omega_r/|\mathbf{k}| - u} du \approx - \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\partial F_{e0}}{\partial u^2} du \quad \text{для электронов.} \quad (8.6.17)$$

Используя эти выражения при вычислении $D_r(\mathbf{k}, \omega_r)$ и (8.6.11) для $D_i(\mathbf{k}, \omega_r)$, можно непосредственно найти ω_r, ω_i для любого частного распределения $F_{\alpha 0}(u)$. Например, если равновесные распределения максвелловские, явное решение уравнений (8.6.16) и (8.6.17) в интервале скоростей, где мнимые члены малы, таково:

$$\begin{aligned} D_r &= 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}, \\ D_i &= \pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi \kappa T_{\alpha}} \right)^{1/2} \frac{m_{\alpha}}{\kappa T_{\alpha}} \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|} \exp\left(-\frac{\omega_r^2 m_{\alpha}}{2k^2 \kappa T_{\alpha}}\right), \\ \omega_r^2 &= \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \\ \omega_i &= -\frac{D_i(\mathbf{k}, \omega_r)}{\partial D_r / \partial \omega_r} = \\ &= -\frac{|\omega_r| \sqrt{\pi/8}}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_e/T_i}{2(1 + k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \right], \\ &\left(\frac{\kappa T_i}{m_i}\right)^{1/2} < \frac{\omega}{k} < \left(\frac{\kappa T_e}{m_e}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.6.18) \quad (8.6.19)$$

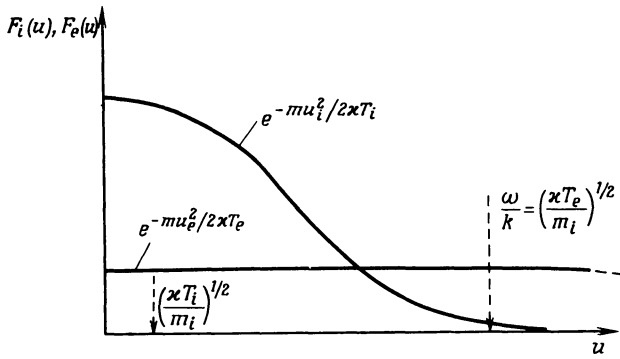
Здесь

$$C_s \equiv \left(\frac{\kappa T_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

называется ионно-звуковой скоростью.

Эти волны были также получены из гидродинамической теории в гл. 3 и 4; их называют ионно-звуковыми волнами или ионным звуком. «Звуковыми» их называют потому, что при $k\lambda_{De} \ll 1$ они распространяются с одной и той же скоростью C_s . Этим они отличаются от ленгмюровских колебаний, у которых частота не зависит от длины волны (при $k\lambda_{De} \ll 1$). Приведенное здесь кинетическое рассмотрение уточняет гидродинамическую теорию в двух отношениях:

1. Не требуется никакого предположения об уравнении состояния. Из сравнения с результатами § 4 гл. 4 видно, что предположение об изотер-



Фиг. 141. Соотношение между фазовой скоростью ионно-звуковых волн и тепловой скоростью электронов и ионов.

Производная функции F_α при $u = \omega / k$ определяет затухание этих волн благодаря частицам сорта α . Затухание (как электронное, так и ионное) мало лишь в случае $T_e \gg T_i$.

мичности электронов, используемое в гидродинамическом подходе, при кинетическом рассмотрении оправдалось.

2. Ионно-звуковые волны затухают, т. е.

$$\varphi_1 \sim e^{\omega_i t},$$

и, если неравенство $|\omega_i / \omega_r| \ll 1$ не выполняется, они не должны рассматриваться в качестве собственных мод плазмы.

Исследование неравенства (8.6.19) показывает, что условие $\omega_i \ll \omega_r$ эквивалентно требованию, чтобы температура электронов была значительно выше температуры ионов. Таким образом, для распространения ионно-звуковых волн в плазме необходимо иметь $T_e \gg T_i$.

Задача 8.6.10. Оцените члены, опущенные в дисперсионном уравнении для ионно-звуковых волн [уравнение (8.6.18) и (8.6.19)].

Задача 8.6.11. Найдите $\omega(k)$ для ионно-звуковых волн в плазме с функцией распределения вида

$$F_{\alpha 0} = \frac{A}{u^2 + \kappa T_\alpha / m_\alpha}.$$

Из (8.6.19) может показаться, что неравенство $|\omega_i / \omega_r| \ll 1$ выполняется и при $T_e / T_i \ll 1$. Однако это не так; поскольку $\omega = k C_s$, а вывод был основан на неравенстве

$$\frac{\omega}{k} \gg \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}},$$

то полученные формулы для ионно-звуковых волн справедливы, только если $T_e \gg T_i$.

Уравнения (8.6.4) и (8.6.18) описывают все типы электростатических колебаний, которые могут распространяться в изотропной плазме в отсутствие внешних полей.

Вклад электронов в затухание ионно-звуковых волн [пропорциональный $\sqrt{m_e / m_i}$ в (8.6.19)] всегда невелик. Причина этого состоит в том, что, хотя многие электроны движутся со скоростью ионно-звуковой волны, производная от функции распределения по скорости мала. Иными словами, отстающих от волны (и получающих от нее энергию) электронов почти столько же, сколько опережающих волну. Поскольку при $T_e \gg T_i$ ионно-звуковая скорость превосходит тепловую скорость ионов, лишь небольшая часть

ионов дает вклад в затухание этих низкочастотных волн. Различный характер вкладов электронов и ионов в затухание ионно-звуковых волн, зависящий от их распределения, поясняется на фиг. 141.

Задача 8.6.12. Покажите, что уравнение (8.5.6) не имеет никакого решения в области

$$\frac{\omega}{k} \ll \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}} \ll \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}.$$

Задача 8.6.13. Исследуйте ионно-звуковые волны в плазме с распределением Пуассона

$$F_{\alpha 0} = A \exp\left(-\sqrt{\frac{m_{\alpha} u^2}{2\kappa T_{\alpha}}}\right).$$

§ 7. ВОЗМУЩЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАЗМЫ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В НЕЙ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

С затуханием Ландау ленгмюровских колебаний связан интересный парадокс: куда девается энергия $E_1^2/8\pi$, запасенная в поле волны, когда волна затухает? Если эта энергия идет на нагрев частиц, то энтропия должна повышаться; это противоречит тому факту, что уравнение Власова сохраняет энтропию¹⁾. Данный парадокс можно разрешить, вычислив $f_1(t)$.

Из (8.3.9) имеем

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p) = \frac{f_{\alpha \mathbf{k}}(t=0)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{i\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(v)}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (8.7.1)$$

откуда

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p) e^{pt} dp. \quad (8.7.2)$$

Снова можно обратить преобразование Лапласа при достаточно больших временах ($t \rightarrow \infty$), применяя для интегрирования по p контур, изображенный на фиг. 138, и аналитически продолжая (8.7.1), где $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(p)$ определяется выражением (8.3.10). Полюса функции $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}(p)$ являются одновременно и полюсами $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p)$; поэтому последние по-прежнему лежат в точках $p = -i\omega$, причем ω удовлетворяет уравнению

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (8.7.3)$$

Кроме того, функция распределения $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p)$ имеет дополнительный полюс при

$$p = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}. \quad (8.7.4)$$

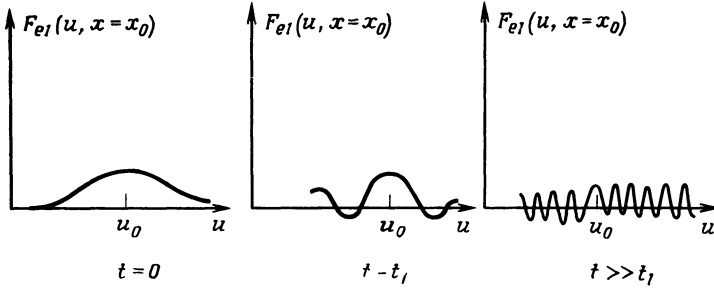
Поэтому

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(t) = \bar{f}_{\alpha B} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t) + \sum_{\omega_{\mathbf{k}}} \bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t), \quad (8.7.5)$$

где $\bar{f}_{\alpha B}$ и $\bar{f}_{\alpha \mathbf{k}}$ — не зависящие от времени амплитуды, определенные по вычетам в полюсах $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(p)$. Слагаемые суммы $\sum \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$ описывают отклик функции распределения на поле плазменной волны; они затухают, по Ландау, за то же время, что и $\varphi_1(t)$. Дополнительное слагаемое $\bar{f}_{\alpha B} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}t)$ называется *баллистическим*, или *пролетным*²⁾. Оно связано с тем, что частицы, возмущенные при $t = 0$, навсегда сохраняют «память» о возмущении. Эта «память» стирается лишь столкновениями, которые не учитываются в уравнении Власова.

¹⁾ Поскольку в уравнении Власова столкновения не учтены, энтропия обязана сохраняться. Это свойство уравнения Власова было установлено в гл. 7.

²⁾ Это слагаемое также впервые было получено в работе Ландау [1]. — *Прим. ред.*



Фиг. 142. Эволюция возмущения функции распределения при затухании электростатического потенциала в устойчивой плазме.

Таким образом, возмущение в точке (x, v, t) возникает под действием двух факторов. Первый из них — плазменные волны, которые, распространяясь по плазме, достигают точки (x, v) в момент времени t . Другим источником возмущения являются движущиеся со скоростью v частицы, оказывающиеся в этот момент времени t в точке (x, v) и приносящие с собой информацию о первоначальном возмущении.

Баллистический член

$$f_{\alpha k}(t) = \bar{f}_{\alpha v} \exp(-ik \cdot vt)$$

не уменьшается со временем (обе величины k и v вещественны), но становится быстро осциллирующим в пространстве скоростей v . Эта особенность иллюстрируется для некоторого выбранного начального возмущения $f_1(x, v, t=0)$ на фиг. 142 и 143.

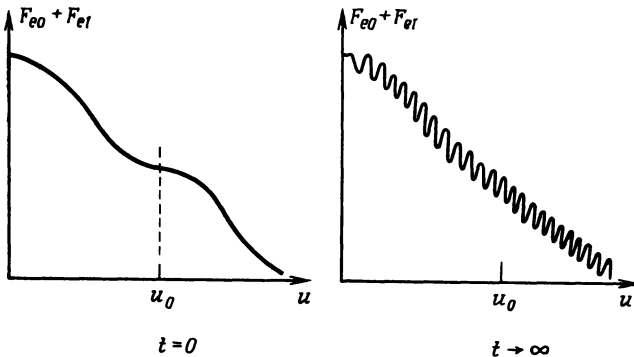
Задача 8.7.1. Вычислите с учетом всех переходных процессов $f_k(t)$ и $\Phi_k(t)$ для распределения

$$F_{e0} = \frac{A}{u^2 + u_0^2} (1 + \varepsilon \sin kx), \quad \varepsilon \ll 1, \quad k\lambda_{De} \gg 1.$$

Таким образом, возмущение функции распределения может существовать и после того, как поле волны затухло. Вклад от баллистического члена в Φ_1 имеет вид

$$k^2 \Phi_k = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \bar{f}_{\alpha v} \exp(-ik \cdot vt) dv. \quad (8.7.6)$$

При $t \rightarrow \infty$ интеграл стремится к нулю, поскольку подынтегральное выражение осциллирует со все большей частотой. Это свойство называют *переза-*



Фиг. 143. Эволюция общей функции распределения при затухании электростатического потенциала в устойчивой плазме.

мешиванием (или хаотизацией) фаз. Баллистический отклик (8.7.6) не содержится в асимптотическом решении [см. (8.4.7) и (8.5.3)] опять-таки из-за наличия двух масштабов времени, которые возникают при описании плазмы как системы осцилляторов с характерными частотами ω_k .

Двойственный характер затухания поля E был исследован в экспериментах Малмберга и Уортона [4], Гоулда, О'Нейла и Малмберга [5], Рипина и Пекачека [6]. Су и Оберман [7] подробно изучили уничтожение f_B благодаря столкновениям.

Теория затухания Ландау и плазменных волн представляет собой центральный результат кинетического приближения, и важным моментом является понимание того, чем отличается переходный процесс от асимптотического режима. Детальное обсуждение баланса энергии в процессе затухания Ландау требует нелинейного обобщения теории. Эту проблему мы рассмотрим в гл. 10.

Задача 8.7.2. Найдите функцию $f(x, t)$ с учетом баллистического слагаемого при $t \rightarrow \infty$.

Задача 8.7.3. Вычислите $f_1(x, v, t)$ для пространственной задачи с заданными граничными условиями, приведенными в задаче 8.6.7.

§ 8. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАВНОВЕСНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Основной результат предыдущего параграфа состоит в том, что поле электростатической волны в изотропной плазме в отсутствие внешних полей асимптотически зависит от времени следующим образом:

$$ik \cdot E_k(t) = \sum_{\omega_k} A_k \exp(-i\omega_k t),$$

где ω_k — нули диэлектрической проницаемости $D(k, \omega)$. Поскольку $D(k, \omega)$ полностью определяется равновесным распределением, эти нули не зависят от начального возмущения. Для получения диэлектрической проницаемости не обязательно было прибегать к преобразованию Лапласа; достаточно было *искать* решение уравнения (8.5.1) в виде $f_1(x, v, t) = \bar{f}_k(v) \exp(ik \cdot x - i\omega t)$ (записав в аналогичном виде и потенциал) и использовать правило обхода Ландау в сингулярных интегралах по скоростям.

До сих пор рассматривалась плазма в отсутствие внешних полей; в этом простейшем случае преобразованные уравнения (8.3.9) для $f_1(v)$ не были дифференциальными — в них отсутствовал член вида

$$\left(E_0 + \frac{v \times B_0}{c} \right) \cdot \nabla_v \bar{f}_k(v).$$

Если же в равновесном состоянии в плазме имеется электрическое поле (есть объемные или поверхностные заряды) или магнитное поле (например, в плазме, которая удерживается полем B_0 , создаваемым внешними проводниками), то линеаризованное уравнение Власова является дифференциальным по v :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(E_0 + \frac{v \times B_0}{c} \right) \cdot \nabla_v \right] f_{\alpha 1} = \\ = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(E_1 + \frac{v \times B_1}{c} \right) \cdot \nabla_v f_{\alpha 0}. \end{aligned} \quad (8.8.1)$$

Дифференциальные уравнения такого типа можно решать, используя метод характеристик, называемый также «интегрированием по невозмущенным

траекториям». Прежде всего с помощью уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \mathbf{v}', \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\mathbf{E}_0(\mathbf{x}', t') + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}', t')}{c} \right] \quad (8.8.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t' = t) &= \mathbf{x}, \\ \mathbf{v}'(t' = t) &= \mathbf{v} \end{aligned} \quad (8.8.3)$$

определим траектории, проходящие через точки \mathbf{x} , \mathbf{v} фазового пространства.

Искомую функцию возмущенного распределения $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ находят путем рассмотрения функции $f_{\alpha 1}[\mathbf{x}'(t'), \mathbf{v}'(t'), t']$, зависящей от времени t' , которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{df_{\alpha 1}}{dt'} &\equiv \frac{\partial f_{\alpha 1}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')}{\partial t'} + \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) = \\ &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}', t') + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}', t')}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{x}', \mathbf{v}'). \end{aligned} \quad (8.8.4)$$

Заметим, что поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 являются постоянными полями, которые определяют равновесное распределение плазмы $f_{\alpha 0}$. С учетом граничных условий (8.8.3)

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t') = f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \text{ при } t' = t.$$

Поэтому решение уравнения (8.8.4) при $t' = t$ совпадает с решением уравнения Власова. Но (8.8.4) можно непосредственно проинтегрировать, поскольку в левой части стоит полная производная. Интегрирование уравнения (8.8.4) в пределах от $t' = -\infty$ до $t' = t$ дает

$$\begin{aligned} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) &= -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{x}', t') + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}', t')}{c} \right] \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') + \\ &+ f_{\alpha 1}[\mathbf{x}'(-\infty), \mathbf{v}'(-\infty), t' = -\infty]. \end{aligned} \quad (8.8.5)$$

Задача 8.8.1. Непосредственной проверкой покажите, что выражение (8.8.5), в котором \mathbf{x}' и \mathbf{v}' определяются согласно (8.8.2) и (8.8.3), является решением уравнения Власова.

Задача 8.8.2. Найдите \mathbf{x}' и \mathbf{v}' в частном случае $\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$. Вычислите $\tilde{f}_{\alpha k}(p)$ с помощью (8.8.5) и покажите, что результат совпадает с решением уравнения (8.3.9) для $\tilde{f}_{\alpha k}$.

Следует отметить, что \mathbf{x}' и \mathbf{v}' вследствие граничных условий зависят в общем случае не только от времени $t - t'$, но и от \mathbf{x} и \mathbf{v} . По существу в описанном методе $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ находится интегрированием уравнения Власова от $-\infty$ до t по кривой в фазовом пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , которая совпадает с траекторией заряженной частицы в равновесных полях \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 . Зная $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, можно определить $n_{\alpha 1}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{V}_{\alpha 1}(\mathbf{x}, t)$ и подставить их в уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha 1}, \\ \nabla \times \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} (n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha})_1. \end{aligned}$$

Для этой системы уравнений можно так же, как и в § 4 гл. 8, решить задачу с начальными значениями. Однако подобно тому, как это было сделано в § 5 гл. 8, проще искать решение в виде $E_1(x, t) = \bar{E}_k \exp(ik \cdot x - i\omega t)$ при условии $f_{\alpha 1}(x', v', t \rightarrow -\infty) = 0$ ¹⁾. При этом

$$f_{\alpha k} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 \left(\bar{E}_k + \frac{v' \times \bar{B}_k}{c} \right) \cdot \nabla_{v'} f_{\alpha 0}(v') \exp[i(k \cdot X - \omega \tau)] d\tau, \quad \text{Im}(\omega) > 0. \quad (8.8.6)$$

Здесь $\tau = t' - t$, $X = x' - x$, а \bar{E}_k, \bar{B}_k — не зависящие от координат и времени амплитуды. При $\text{Im} \omega_k < 0$ решение для $f_{\alpha k}$ получаем аналитическим продолжением функции (8.8.6).

Задача 8.8.3. Покажите связь между допущением о том, что $f_1(x, v, t) \rightarrow 0$, и правилом обхода Ландау при вычислении резонансных интегралов по v .

Подстановка выражения (8.8.6) в преобразованные уравнения Максвелла дает в результате шесть линейных однородных уравнений для амплитуд \bar{E}_k и \bar{B}_k .

Если исключить из них \bar{B}_k , то оставшиеся линейные однородные уравнения для \bar{E}_k будут иметь (ненулевые) решения при условии, что детерминант из коэффициентов при составляющих поля E обращается в нуль и соответствующие уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{xx}E_x + D_{xy}E_y + D_{xz}E_z &= 0, \\ D_{yx}E_x + D_{yy}E_y + D_{yz}E_z &= 0, \\ D_{zx}E_x + D_{zy}E_y + D_{zz}E_z &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно записать в матричной форме $\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = 0$, где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix}. \quad (8.8.7)$$

Тензор \mathbf{D} определяет дисперсию волн; его компоненты $D_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ зависят от f_0, \mathbf{E}_0 и \mathbf{V}_0 — величин, характеризующих равновесное состояние плазмы.

§ 9. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ [$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V}_0 = 0, f_0 = f_0(v^2)$]

Свойства волн в плазме для целого ряда ее равновесных состояний можно систематически изучить с помощью линеаризованного уравнения Власова и методов, подробно излагаемых в данной главе. Отсутствие внешних полей существенно облегчает задачу, уже рассматривавшуюся в § 6. Однако описанные там электростатические, или ленгмюровские, волны не исчерпывают всех имеющихся типов волн. Здесь, используя более общие методы интегрирования по невозмущенным траекториям, мы рассмотрим и другие типы волн в изотропной плазме. В отсутствие внешних полей частицы плазмы совер-

¹⁾ Решения такого вида могут существовать лишь в случае, когда в состоянии равновесия плазма однородна, что при наличии внешних полей, вообще говоря, не так. — *Прим. ред.*

шают равномерное прямолинейное движение по траекториям

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \text{const} = \mathbf{v}, \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{v} (t' - t). \end{aligned} \quad (8.9.1)$$

Возмущенную часть функции распределения при $t - t' \equiv \tau$ можно вычислить по формуле (8.8.6), полагая $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega \tau)]$, $\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega \tau)]$ и т. д.:

$$\bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \int_{-\infty}^0 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \tau - \omega \tau)] d\tau, \quad \text{Im}(\omega) > 0.$$

Амплитуды $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ и $\bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}$ и все функции, зависящие от \mathbf{v} , вынесены из-под знака интеграла, поскольку \mathbf{v} не зависит от t' для траекторий (8.9.1) частиц в отсутствие внешних полей. [Для более сложных равновесных состояний такое утверждение не справедливо и $\nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}')$ будет зависеть от t' .]

Интегрирование в выражении для $\bar{f}_{\alpha \mathbf{k}}$ по τ дает

$$\bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \frac{1}{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}. \quad (8.9.2)$$

В случае изотропного распределения $f_{\alpha 0} [= f_{\alpha 0}(v^2)]$ имеем следующее равенство: $\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(v^2) = 0$. С помощью (8.9.2) можно вычислить плотность заряда и плотность тока по следующим формулам:

$$\rho_q = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha 1} = \sum_{\alpha} \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{k^2 m_{\alpha}} \int \frac{(\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(v^2))}{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} d\mathbf{v} \quad (8.9.3)$$

и

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (n_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha})_1 = \sum_{\alpha} \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\mathbf{v} \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \partial f_{\alpha 0}(v^2) / \partial \mathbf{v}}{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} d\mathbf{v}. \quad (8.9.4)$$

Как было показано выше, эти выражения упрощаются, если распределение по скоростям проинтегрировать по компонентам скорости, перпендикулярным \mathbf{k} . Выражения (8.9.3) и (8.9.4) можно записать через одномерную функцию распределения

$$F_{\alpha 0}(u) \equiv \int f_{\alpha 0} \delta \left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|} \right) d\mathbf{v}.$$

Для решений вида

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)],$$

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

уравнения Максвелла распадаются на уравнения для продольных и поперечных волн. Если определить амплитуды соответствующих волн $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}) / |\mathbf{k}|$ и $\bar{\mathbf{E}}_{\perp} = [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}] / |\mathbf{k}|$, то для них можно получить три однородных алгебраических уравнения, которые в компактной форме

записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \times \\ \times \int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{\omega - |\mathbf{k}|u - u} du & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \times \\ \times \int \frac{F_{\alpha 0}}{\omega - |\mathbf{k}|u} du & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \times \\ \times \int \frac{F_{\alpha 0}}{\omega - |\mathbf{k}|u} du \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_{\mathbf{k}} \\ \bar{E}_{\perp 1} \\ \bar{E}_{\perp 2} \end{bmatrix} = 0. \quad (8.9.5)$$

Эти уравнения имеют три (нетривиальных) решения. Одно из них соответствует электростатическим волнам, а два других — электромагнитным волнам, которые могут распространяться в изотропной плазме. Дисперсионные уравнения для этих типов волн записываются следующим образом:

1. Электростатические волны ($\bar{E}_{\perp} = 0$)

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{\omega - |\mathbf{k}|u - u} du = 0. \quad (8.9.6)$$

2. Электромагнитные волны ($\bar{E}_{\mathbf{k}} = 0$)

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \omega \int \frac{F_{\alpha 0}}{\omega - |\mathbf{k}|u} du. \quad (8.9.7)$$

9.1. Электростатические волны

Уравнение (8.9.6) имеет следующие решения, полученные в § 6 и 7 настоящей главы:

а. Высокочастотные ленгмюровские колебания. При выполнении неравенства $\omega/k \gg (\kappa T_e / m_e)^{1/2}$ вещественная (ω_r) и мнимая (ω_i) части собственной частоты даются выражениями

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2), \quad (8.9.8)$$

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k^3 \lambda_{De}^3|} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{3}{2}\right). \quad (8.9.9)$$

б. Ионно-звуковые волны. При $T_e \gg T_i$ и $(\kappa T_i / m_i)^{1/2} < \omega/k < (\kappa T_e / m_e)^{1/2}$ вещественная и мнимая части собственной частоты записываются в виде

$$\omega_r^2 = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \quad (8.9.10)$$

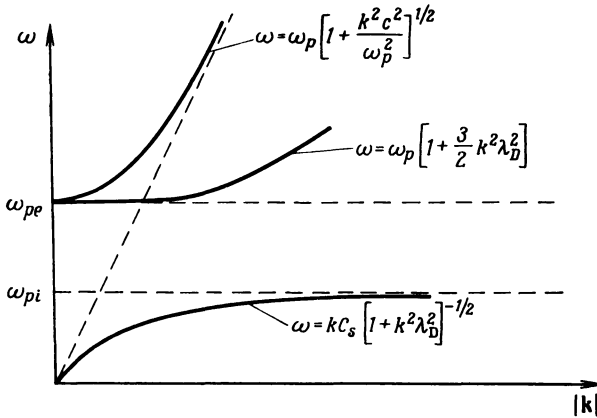
$$\omega_i = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} (1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{-3/2} |\omega_r|, \quad (8.9.11)$$

где

$$C_s \equiv \left(\frac{\kappa T_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (8.9.12)$$

— ионно-звуковая скорость. При выводе этих выражений затуханием на ионах пренебрегалось [оно мало, если $\exp(-T_e / T_i) \ll (m_e / m_i)^{1/2}$].

Задача 8.9.1. Выведите выражение для плотности тока (8.9.4) из (8.9.2).



Фиг. 144. Законы дисперсии волн в немагнитной однородной плазме.

9.2. Электромагнитные волны

Наряду с высокочастотными (ленгмюровскими) и низкочастотными (ионно-звуковыми) электростатическими волнами в изотропной плазме могут распространяться электромагнитные волны с достаточно большой частотой. Эти волны описываются полученным выше дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega F_{\alpha 0}(u)}{\omega - |k|u} du. \quad (8.9.13)$$

Решения этого уравнения существуют только при $\omega \gg k \sqrt{\kappa T_e / m_e}$, о чем говорит член $k^2 c^2$, содержащийся в правой части (8.9.13), и, следовательно, для вычисления интеграла по скоростям применимо разложение (8.6.1). В результате получаем решение

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2, \quad (8.9.14)$$

которое, в частности, совпадает с результатами вычислений, проведенных в гл. 4 исходя из гидродинамической модели. Эти «световые волны» в плазме обладают дисперсией

$$\omega = kc \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}},$$

причем показатель преломления плазмы для таких волн зависит от частоты.

Задача 8.9.2. В (8.9.14) по физическим соображениям опущен член, описывающий затухание Ландау. Что это за соображения?

Если $\omega^2 < \omega_p^2$, электромагнитная волна не является собственной модой плазмы и сильно затухает при распространении в ней. Поскольку $\omega_p \sim \sim \sqrt{n_e}$, то, измеряя границу области прозрачности $\omega \gg \omega_p$, можно найти плотность плазмы (гл. 4). На фиг. 144 приведены дисперсионные кривые $\omega(k)$ для волн в плазме в отсутствие внешних полей.

§ 10. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ОДНОРОДНО ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

$$[\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}, \mathbf{E}_0 = 0, f_{\alpha 0} = f_{0\alpha}(v_1^2, v_{||})]$$

В плазме, находящейся в состоянии равновесия в магнитном поле, частицы движутся по довольно сложным траекториям. Это приводит к возникновению новых типов волн, связанных с вращением частиц, и к измене-

нию свойств волн, присущих немагнитиченной плазме. То, что какое-либо изменение полей в равновесном состоянии или даже просто изменение распределения по скоростям может изменить всю картину и свойства плазменных колебаний, и есть тот постоянный барьер, который препятствует попытке дать «полное» описание плазмы. Большинство других систем связанных осцилляторов можно описать с помощью нескольких упругих постоянных. Например, в обычном газе модуль объемного сжатия полностью определяет свойства звуковых волн, но в двух почти идентичных плазмах свойства звуковых волн будут сильно различаться друг от друга, если в одной распределение максвелловское: $\exp(-v^2/\bar{v}^2)$, а в другой — пуассоновское: $\exp(-|v|/\bar{v})$. Такая изменчивость плазмы приводит к необходимости изучать каждый тип равновесия отдельно. К счастью, во всех случаях можно пользоваться одними и теми же методами.

Если плазма однородно замагнитичена ($\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$), линеаризованное вблизи f_0 (записываем $f = f_0 + f_1$, $\mathbf{B} = B_0 \hat{z} + \mathbf{B}_1$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$) уравнение Власова имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_{\alpha 1} = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}. \quad (8.10.1)$$

Равновесная функция распределения $f_{\alpha 0}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_{\alpha 0} = 0, \\ \rho_q &= \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{отсутствует объемный заряд}), \\ \mathbf{J} &= \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{отсутствует ток в плазме}). \end{aligned} \quad (8.10.2)$$

В случае пространственно однородной плазмы наиболее общее решение уравнений (8.10.2), которое изотропно в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B}_0 , имеет вид

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2, v_z). \quad (8.10.3)$$

В настоящем параграфе мы будем изучать волны, которые распространяются в плазме с таким равновесным распределением. Поскольку характер движения заряженных частиц вдоль и поперек магнитного поля совершенно разный, было бы неразумно ограничиваться изотропными функциями распределения $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v^2)$, рассматриваемыми при изучении волн в плазме в отсутствие внешних полей. Например, часто приходится иметь дело со следующим распределением типа (8.10.3):

$$f_0 = \frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_{\parallel}} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{m}{2\kappa} \left(\frac{v_{\perp}^2}{T_{\perp}} + \frac{v_{\parallel}^2}{T_{\parallel}} \right) \right],$$

где $v_{\parallel} = v_z$, $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Для решения уравнения Власова мы применим метод интегрирования по невозмущенным траекториям, описанный в § 8 данной главы. В рассматриваемом здесь случае ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$) траектории удобнее всего выразить в цилиндрических координатах в пространстве скоростей: $v_x = v_{\perp} \cos \phi$, $v_y = v_{\perp} \sin \phi$, $v_z = v_{\parallel}$. В этих переменных траектории $\mathbf{x}'(\tau)$ частиц можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_{\perp} \cos(\phi - \omega_c \tau), & x' &= x - \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c \tau) + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin \phi, \\ v'_y &= v_{\perp} \sin(\phi - \omega_c \tau), & y' &= y + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\phi - \omega_c \tau) - \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos \phi, \\ v'_z &= v_{\parallel}, & z' &= v_{\parallel} \tau + z. \end{aligned} \quad (8.10.4)$$

Вывод уравнений (8.10.4) дан в приложении I. Константы интегрирования здесь выбраны так, чтобы при $\tau \rightarrow 0$ $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}$ и $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$, где \mathbf{v} и \mathbf{x} — фиксированные точки фазового пространства.

Следует заметить, что равновесная функция распределения $f_0[\mathbf{x}'(\tau), \mathbf{v}'(\tau)]$ на невозмущенной траектории частицы постоянна, поскольку, как объяснялось в § 7 гл. 7, f_0 зависит только от интегралов движения.

Возмущенная часть распределения, согласно (8.8.6), записывается в виде

$$\bar{f}_{\alpha\mathbf{k}} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 \left(\bar{\mathbf{E}}_1 + \frac{\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}_1}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}') \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} - \omega\tau)] d\tau, \quad \text{Im}(\omega) > 0, \quad (8.10.5)$$

здесь $\mathbf{X} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, $\tau = t' - t$. Для изотропных функций $f_0 = f_0(v^2)$ член $[\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_1] \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_0$ исчезает. Но, как отмечалось выше, этот случай не является достаточно общим при рассмотрении замагниченной плазмы, поскольку характер движения частиц в ней вдоль и поперек магнитного поля существенно разный. Рассмотрим функцию распределения вида $f_0 = f_0(v_\perp^2, v_z)$ и выразим $\bar{\mathbf{B}}_1$ через $\bar{\mathbf{E}}_1$ с помощью уравнения Максвелла

$$i\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}_1 = i \frac{\omega}{c} \bar{\mathbf{B}}_1.$$

Градиент $\nabla_{\mathbf{v}'} f_0$ запишем следующим образом:

$$\nabla_{\mathbf{v}'} f_0 = 2(\mathbf{v} - v_z \hat{\mathbf{z}}) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} + 2v_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

Множители $\partial f_0 / \partial v_\perp^2$ и $\partial f_0 / \partial v_z$ можно вынести из-под знака интеграла, поскольку v_\perp^2 и v_z представляют собой интегралы движения. После этого остаются интегралы вида

$$\int_{-\infty}^0 (v'_x, v'_y, 1) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} - \omega\tau)] d\tau,$$

где $\mathbf{X} (= \mathbf{x}' - \mathbf{x})$, v'_x и v'_y определяются из (8.10.4). Интегралы такого типа можно вычислить с помощью тождества

$$\exp\left[i \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c} \sin(\phi - \omega_c \tau)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_c}\right) \exp[in(\phi - \omega_c \tau)], \quad (8.10.6)$$

в котором J_n — функция Бесселя первого рода. Выбирая без потери общности ось x вдоль вектора

$$\mathbf{k}_\perp \left(\equiv \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \hat{\mathbf{z}} \right)$$

и записывая

$$\mathbf{k} = k_\perp \hat{\mathbf{x}} + k_\parallel \hat{\mathbf{z}}, \quad (8.10.7)$$

можно получить для $\bar{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ следующее выражение:

$$\bar{f}_{\alpha\mathbf{k}} = \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sum_{n, l} \left[\frac{2Zv_\parallel J_l(k_\perp v_\perp / \omega_{c\alpha}) + Xv_\perp (J_{l+1} + J_{l-1}) - iYv_\perp (J_{l+1} - J_{l-1})}{i(\omega - l\omega_c - k_\parallel v_\parallel)} \right] \times \\ \times J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{c\alpha}}\right) \exp[i(n-l)\phi]. \quad (8.10.8)$$

Здесь

$$X = E_x \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}}{\omega} (k_{\parallel} E_x - k_{\perp} E_z) \left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \right),$$

$$Y = E_y \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}}{\omega} k_{\parallel} E_y \left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} - \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \right),$$

$$Z = E_z \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2}.$$

Зная $\bar{f}_{\alpha \mathbf{k}}$, можно вычислить возмущение тока $\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}}$ и подставить его в уравнения Максвелла. В результате имеем уравнение

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}_1 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}_1 + \frac{i\omega}{c^2} 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int_L \mathbf{v} f_{\alpha \mathbf{k}} dv, \quad (8.10.9)$$

где L — контур Ландау (фиг. 137 и 138). Дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (8.10.10)$$

со следующими элементами детерминанта:

$$D_{xx} = 1 - \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \sum_n \left[\frac{n^2 \omega_{c\alpha}^3}{k_{\perp}^2} J_n^2 \chi_{\alpha} \right],$$

$$D_{xy} = -\frac{2\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[\frac{n \omega_c^2 v_{\perp}}{k_{\perp}} J_n \frac{dJ_n}{d(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha})} \chi_{\alpha} \right],$$

$$D_{xz} = \frac{k_{\parallel} k_{\perp} c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[\frac{n \omega_{c\alpha}^2 v_{\parallel} J_n^2}{k_{\perp}} \Lambda_{\alpha} \right],$$

$$D_{yx} = -D_{xy},$$

$$D_{yy} = 1 - \frac{(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[\omega_{c\alpha} \left(\frac{dJ_n}{d(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha})} \right)^2 v_{\perp}^2 \chi_{\alpha} \right],$$

(8.10.11)

$$D_{yz} = \frac{2\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[\omega_{c\alpha} v_{\perp} v_{\parallel} J_n \frac{dJ_n}{d(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha})} \Lambda_{\alpha} \right],$$

$$D_{zx} = \frac{k_{\parallel} k_{\perp} c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[v_{\parallel} \frac{n \omega_{c\alpha}^2}{k_{\perp}} J_n^2 \chi_{\alpha} \right],$$

$$D_{zy} = -\frac{2\pi i}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[v_{\parallel} v_{\perp} \omega_{c\alpha} J_n \frac{dJ_n}{d(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha})} \chi_{\alpha} \right],$$

$$D_{zz} = 1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_{\alpha} \sum_n \left(\frac{\omega_p^2}{\omega_c} \right)_{\alpha} \left[v_{\parallel}^2 \omega_{c\alpha} J_n^2 \Lambda_{\alpha} \right].$$

В этих равенствах квадратные скобки представляют собой интегральные операторы, определяемые следующим образом:

$$[F(v)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{2v_{\perp} F(v_{\perp}, v_{\parallel})}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n \omega_{c\alpha} - \omega} dv_{\perp}.$$

Кроме того, использованы следующие обозначения:

$$\chi_\alpha \equiv \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp^2} \left(1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \right) + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2},$$

$$\Lambda_\alpha \equiv \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel^2} - \frac{n\omega_\alpha}{\omega} \left(\frac{\partial}{\partial v_\parallel^2} - \frac{\partial}{\partial v_\perp^2} \right) f_{\alpha 0}.$$

Все функции Бесселя, входящие в записанные выше выражения, имеют аргументом $k_\perp v_\perp / \omega_\alpha$, а интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} dv$ берутся по контурам Ландау

(фиг. 137). По сравнению с относительно простыми уравнениями (8.9.6) и (8.9.7), описывающими волны в плазме в отсутствие внешних полей, вид уравнений (8.10.10) и (8.10.11) для волн в замагниченной плазме производит гнетущее впечатление. Замагниченная плазма характеризуется следующими новыми свойствами:

1. Моды уже не распадаются на не связанные между собой продольные и поперечные: постоянное магнитное поле \mathbf{B} связывает движения частиц плазмы в различных направлениях. Иными словами, плазма становится анизотропной.

2. Отсутствует разделение мод на электростатические и электромагнитные.

3. Возникают особенности вблизи кратных частот $\omega \approx n\omega_c$. Циклотронная частота $\omega_c (= eB/mc)$, с которой частицы вращаются в магнитном поле, представляет собой наряду с плазменной частотой ω_p характерную частоту системы.

4. Резонанс, который в незамагниченной плазме существует при $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ и приводит к затуханию волны, возникает теперь при $\omega - n\omega_\alpha = k_\parallel v_\parallel$, и вклад в затухание вносят только частицы, движущиеся вдоль поля, причем затухают лишь волны с отличной от нуля проекцией волнового вектора на направление магнитного поля. Это обусловлено тем, что в однородном магнитном поле B_0 отсутствует усредненное движение частиц *поперек* поля.

5. Если в незамагниченной плазме колебательные свойства определяются единственным параметром, а именно отношением скорости волны к тепловой скорости, т. е.

$$\frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_\alpha}{\kappa T_\alpha}},$$

то в замагниченной плазме важную роль играют несколько параметров:

$$\frac{\omega}{\omega_\alpha}, \quad \frac{k}{\omega_\alpha} \sqrt{\frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha}}, \quad \frac{\omega_p}{\omega_c}, \quad \frac{\omega}{k_\parallel} \sqrt{\frac{m_\alpha}{\kappa T_\alpha}}, \quad \frac{kc}{\omega_p}.$$

Чтобы осмыслить общие результаты, следующие из дисперсионного уравнения (8.10.10) вместе с (8.10.14), полезно выделить несколько частных случаев, стараясь проследить аналогии с результатами, основанными на гидродинамической модели, и в то же время выявить новые, отличительные черты.

§ 11. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЛН В ХОЛОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Дисперсионное уравнение для волн в холодной замагниченной плазме можно получить из дисперсионного уравнения, выведенного на основе линеаризованного уравнения Власова, если в (8.10.10) перейти к пределу $T_\alpha \rightarrow 0$. В этом пределе (8.10.10) совпадает с дисперсионным уравнением (4.9.6),

полученным для холодной замагниченной плазмы с помощью гидродинамических уравнений. Отсюда следует, что гидродинамическая теория правильно описывает волны в достаточно холодной плазме, когда разброс частиц по скоростям мал, так что все частицы движутся со скоростями, слабо отличающимися от гидродинамической скорости. В предельном случае холодной плазмы нет нужды в уравнении состояния: давлением попросту пренебрегают.

Поскольку в рассматриваемом случае линеаризованное уравнение Власова приводит к тем же результатам, что и гидродинамическая теория, сравнение выводов кинетической теории для $T_\alpha \neq 0$ с результатами для $T_\alpha = 0$ выявляет те эффекты, которые при макроскопическом гидродинамическом подходе выпадают из поля зрения. Например, показано, что затухание Ландау, ионные волны и волны на кратных циклотронных частотах зависят от температуры плазмы.

Задача 8.11.1. Покажите, что при $T_\alpha \rightarrow 0$ тензор диэлектрической проницаемости в (8.10.10) совпадает с (4.9.6), причем выражения (8.10.11) сводятся к (4.9.9).

Указание. Воспользуйтесь следующим приближением:

$$J_n \xrightarrow{T_\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{k_\perp v_\perp}{2\omega_{c\alpha}} \right)^n.$$

§ 12. ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ГОРЯЧЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ ($E_0 = 0$, $B_0 = B_0 \hat{z}$). ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И БЕРНСТЕЙНОВСКИЕ МОДЫ

С целью рассмотрения волн, распространяющихся точно поперек магнитного поля в горячей плазме, положим в (8.10.10) $k_z = 0$. Эти волны не затухают, поскольку не находятся в резонансе с частицами, движущимися вдоль магнитного поля B_0 . Следует заметить, что при $k_z = 0$

$$\int_L \frac{F}{\omega - n\omega_c - k_z v_z} dv_z = \frac{1}{\omega - n\omega_c} \int_{-\infty}^{\infty} F dv_z.$$

В случае $k_z = 0$ дисперсионное уравнение (8.10.10) сильно упрощается, и его можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (8.12.1)$$

Для плазмы с изотропным распределением ($\partial f_0 / \partial v_\parallel^2 = \partial f_0 / \partial v_\perp^2$) одно из решений уравнения (8.12.1) приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$D_{zz} = 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\pi}{\omega} \sum_\alpha \sum_n \omega_{p\alpha}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^{\infty} \frac{J_n^2 f_{\alpha 0} v_\perp dv_\perp}{\omega - n\omega_{c\alpha}} = 0. \quad (8.12.2)$$

В дальнейшем рассмотрении для простоты будем считать функцию распределения плазмы изотропной. Это ограничение не играет принципиальной роли и введено для упрощения получающихся выражений. Напомним также, что по аналогичной причине выбрано $\mathbf{k}_\perp = k_x \hat{x}$.

12.1. Обыкновенная волна

Из дисперсионного уравнения (8.12.1) ясно, что решение $D_{zz} = 0$ описывает электромагнитную волну, в которой вектор электрического поля \mathbf{E} параллелен \mathbf{V}_0 и которая распространяется вдоль оси x , т. е. $\mathbf{k} = k\hat{x}$. Она называется *обыкновенной волной*, поскольку отклик электронов на E_z такой же, как и в отсутствие \mathbf{V}_0 . Обыкновенная волна была получена также и из гидродинамического расчета [см. (4.11.4)].

Решение уравнения $D_{zz} = 0$ затрудняется наличием бесконечной суммы \sum_n . Однако во многих случаях существенный вклад в эту сумму вносит лишь один член. Например, для длинноволновых мод ($k^2 a^2 \ll 1$) все слагаемые в \sum_n , кроме члена с $n = 0$, малы по параметру $k^2 a_{c\alpha}^2$. В этом случае каждый член с $n \neq 0$ нужно учитывать лишь вблизи резонанса на циклотронных гармониках ($\omega \approx n\omega_{c\alpha}$). Аналогично можно пренебречь \sum_n и в случае высоких частот ($k^2 c^2 \gg \omega_{pe}^2$), за исключением частот вблизи циклотронных гармоник $\omega \approx n\omega_{c\alpha}$. Ограничиваясь рассмотрением только волн, длина которых больше ларморовского радиуса и частота которых ω не близка к кратной циклотронной частоте, можно оставить в сумме только слагаемые с $n = 0$.

Оставляя только слагаемое с $n = 0$ и полагая $J_0(ka_{c\alpha}) = 1$, мы получаем дисперсионное уравнение, которое совпадает с найденным в гидродинамической модели, т. е.

$$\omega^2 \approx k^2 c^2 + \omega_p^2. \quad (8.12.3)$$

Кроме того, существуют и другие решения уравнения $D_{zz} = 0$, соответствующие волнам, частоты которых лежат в узких интервалах вблизи циклотронных гармоник ($n = 1, 2, 3, \dots$, а $ka_{c\alpha} < 1$):

$$\omega = n\omega_{c\alpha} \left\{ 1 + 0 \left[\frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 c^2} (ka_{c\alpha})^{2n} \right] \right\}.$$

Задача 8.12.1. Проверьте, что в тензоре (8.10.10) при $k_z = 0$ $D_{xz} = D_{yz} = D_{zx} = D_{zy} = 0$.

Два других решения уравнения (8.12.1) удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ -D_{xy} & D_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

Вектор электрического поля \mathbf{E} для этих волн перпендикулярен \mathbf{V}_0 . Особенно просто выглядит решение в случае $k^2 c^2 \gg \omega_p^2$, поскольку при этом D_{xy} пренебрежимо мало по сравнению с членом $k^2 c^2 / \omega_p^2$, входящим в D_{yy} . В таком предельном случае можно найти приближенные решения, полагая либо $D_{xx} = 0$, либо $D_{yy} = 0$. Для обоих этих решений вектор электрического поля волны \mathbf{E} перпендикулярен \mathbf{V}_0 . Ниже мы запишем дисперсионные уравнения для этих мод.

12.2. Необыкновенная волна

Поляризация необыкновенной волны определяется выражением

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \approx \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{k} \ll \mathbf{E} \times \mathbf{k}. \quad (8.12.4)$$

Дисперсионное уравнение в этом случае записывается в виде

$$k^2 c^2 - \omega^2 + 2\pi\omega \sum_{\alpha} \sum_n \omega_{p\alpha}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{v_{\perp}^2 (J'_n)^2}{n\omega_{c\alpha} - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} dv_{\perp}^2 = 0. \quad (8.12.5)$$

12.3. Бернштейновская мода

Поляризация этой моды определяется выражением

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \approx \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \mathbf{E} \times \mathbf{k} \gg \mathbf{E} \times \mathbf{k}.$$

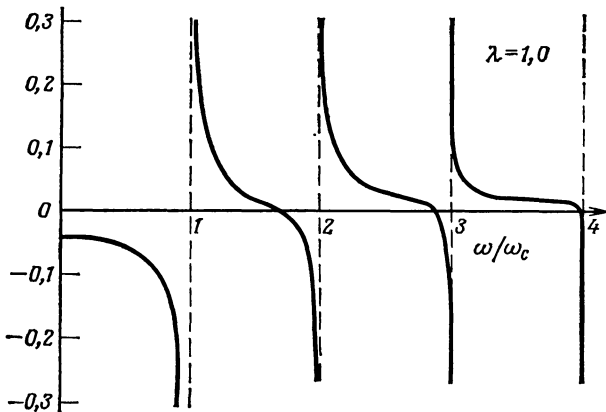
Дисперсионное уравнение имеет вид

$$k^2 + \sum_{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{p\alpha}^2 4\pi n^2 \omega_{c\alpha}^2}{\omega^2 - n^2 \omega_{c\alpha}^2} \int J_n^2 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} dv = 0. \quad (8.12.6)$$

Необыкновенная волна (8.12.5) поляризована так, что ее электрический вектор почти перпендикулярен \mathbf{k} , и (в этом смысле) с хорошей точностью она представляет собой электромагнитную волну. Обыкновенная волна (8.12.2) имеет чисто электромагнитную природу. В обеих этих модах учитывается циклотронное вращение частиц. Когда $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$, обыкновенная (8.12.2) и необыкновенная (8.12.5) волны становятся обычными электромагнитными волнами (8.9.14).

В бернштейновских модах электрический вектор почти параллелен \mathbf{k} и волна близка к продольной. Эти моды сродни волнам с $\omega = \omega_{pe}$ и с $\omega = kC_s$, существующим в плазме без магнитного поля. При $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$ они переходят в высокочастотные ленгмюровские и низкочастотные ионно-звуковые волны. Однако в отличие от колебаний в немагнитной плазме бернштейновские моды не затухают даже при $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$. Чтобы получить затухающие колебания плазмы, необходимо сначала рассмотреть случай $k_z \neq 0$, затем перейти к пределу $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$ и после этого устремить k_z к нулю. Моды с $k_z = 0$ при $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$ образуют множество колебаний нулевой меры [8].

Решения уравнения (8.12.6) для продольных плазменных волн можно найти графически, используя кривые для сумм $\sum_{\alpha} \sum_n$, построенные в зависимости от ω . Пересечения этих кривых с горизонтальной линией k^2 дают собственные частоты (фиг. 145). Частоты бернштейновских мод лежат в интервалах между гармониками циклотронной частоты. Наинизшая частота, при которой возможно распространение этих волн, лежит выше циклотронной частоты ($2\omega_{ce} > \omega > \omega_{ce}$). Точное положение частот бернштейновских мод зависит от плотности, температуры и величины магнитного поля. В качестве



Фиг. 145. Кривые, соответствующие правой части дисперсионного уравнения (8.12.7) для электростатических волн в плазме, распространяющихся поперек однородного магнитного поля [8].

Пересечение горизонтальной прямой k^2 с этими кривыми дает нули ω_k диэлектрической проницаемости.

Кривые построены для случая $\lambda = k^2 \kappa T / m \omega_c^2 = 1,0$.

примера рассмотрим плазму с максвелловским распределением. В этом случае дисперсионное уравнение (8.12.6) принимает вид

$$k^2 = \sum_n \sum_\alpha \left[\frac{2n^2 \omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}^2}{\omega^2 - n^2 \omega_{c\alpha}^2} \frac{m_\alpha}{\kappa T_\alpha} I_n \left(\frac{k^2}{\omega_{c\alpha}^2} \frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha} \right) \exp \left(- \frac{k^2}{\omega_{c\alpha}^2} \frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha} \right) \right], \quad (8.12.7)$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода, $I_n(z) = \exp(-i\pi n/2) J_n[\exp(i\pi/2)z]$. Из решения уравнения (8.12.7) следует, что между интервалами частот, в которых возможно распространение бернштейновских мод, находятся запрещенные интервалы. Это видно из фиг. 145, где отсутствуют волны с частотой, лежащей в узком интервале, например ниже частоты $2\omega_c$. Такие же щели имеются вблизи каждой гармоники.

Бернштейновские моды существуют как между гармониками ω_{ce} , так и между гармониками ω_{ci} . В случае если температура плазмы низка или рассматриваются *длинноволновые* моды (с малыми k), функцию Бесселя I_n можно разложить в ряд по степеням ka . Сдно из решений дисперсионного уравнения лежит при этом вблизи так называемой верхней гибридной частоты $\omega_H = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$. Остальные решения находятся вблизи резонансов $\omega \approx n\omega_{ce}$, поскольку для их существования необходимо, чтобы величина $(ka)^{2n-2} \omega_{pe}^2 / (\omega^2 - n^2 \omega_{ce}^2)$ была порядка единицы:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}, \\ \omega_n &= n\omega_{ce} \{1 + O[(ka)^{2n-2}]\}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (8.12.8)$$

причем $k^2 a_{ce}^2 \ll 1$.

В редкой плазме все частоты бернштейновских мод лежат очень близко к гармоникам циклотронной частоты. В этом случае можно получить решение уравнения (8.12.7) в явном виде

$$\omega^2 = n^2 \omega_{ce}^2 (1 + \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.12.9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \frac{1}{k^2 a_{ce}^2} I_n(k^2 a_{ce}^2) \exp(-k^2 a_{ce}^2), \\ a_{ce}^2 &\equiv \frac{\kappa T_e}{m_e \omega_{ce}^2}. \end{aligned}$$

Заметим здесь, что приближение редкой плазмы справедливо при выполнении неравенства $\omega_{pe}^2 \ll \omega_{ce}^2$.

На фиг. 146 приведены дисперсионные кривые $\omega(k)$ для бернштейновских мод в редкой плазме. В плотной плазме, находящейся в слабом магнитном поле, возникают колебания на верхней гибридной частоте $\omega_H > 2\omega_{ce}$. В этом случае наименьшая частота бернштейновской моды [которую можно получить, разлагая I_n в уравнении (8.12.7) и сохраняя члены с $n=1$ и $n=2$] лежит чуть *ниже* второй циклотронной гармоники:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2\omega_{ce} \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 - 3\omega_{ce}^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{3k^2}{\omega_{ce}^2} \frac{\kappa T_e}{8m_e} \right), \quad \omega_{pe}^2 > 3\omega_{ce}^2, \quad k^2 a_{ce}^2 \ll 1. \end{aligned} \quad (8.12.10)$$

Фиг. 146. Закон дисперсии бернштейновских мод (электростатических волн, распространяющихся поперек однородного магнитного поля).

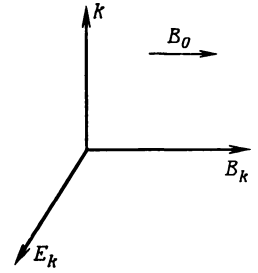
Высшие гармоники бернштейновских мод лежат вблизи циклотронных гар-

моник (выше или ниже в зависимости от плотности):

$$\omega_n = \begin{cases} n\omega_{ce} [1 - O(k^2 a_{ce}^2)^n], & \omega_{pe}^2 > (n^2 - 1)\omega_{ce}^2, \\ n\omega_{ce} [1 + O(k^2 a_{ce}^2)^n], & \omega_{pe}^2 < (n^2 - 1)\omega_{ce}^2. \end{cases}$$

Вблизи ионных циклотронных гармоник наблюдается аналогичное поведение бернштейновских мод.

Возникновение этих мод, существующих в узких частотных интервалах, находится в сильном противоречии с результатами гидродинамической теории (фиг. 79), предсказывающей для волн, распространяющихся перпендикулярно \mathbf{B}_0 , запрещенный интервал частот между $\sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$ и ω_1 . В действительности же, как показывает кинетическая теория, внутри этого интервала есть разрешенные области, в которых возможно распространение волн (фиг. 146).



Фиг. 147. Направления возмущенных полей в магнитозвуковой волне, распространяющейся под прямым углом к однородному магнитному полю.

Задача 8.12.2. Постройте дисперсионные кривые $\omega(k)$ для бернштейновских мод, распространяющихся вблизи нескольких низших электронных и ионных циклотронных гармоник.

В холодной плазме уравнения (8.12.2) и (8.12.5) имеют простой (алгебраический) вид; мы их обсуждали в гл. 4. Здесь для полноты приведена сводка результатов.

Для мод с $E_x = 0$ в уравнение (8.12.5) вносят существенный вклад только члены с $n = \pm 1$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде

$$k^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \frac{\omega^2 \omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} = 0. \tag{8.12.11}$$

Отсюда при низких частотах ($\omega^2 < \omega_{ci}^2$) имеем

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{1 + 4\pi n m_i c^2 / B^2}. \tag{8.12.12}$$

Вводя альфвеновскую скорость

$$V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi n m_i}},$$

выражение (8.12.12) можно записать следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{k^2 V_A^2}{1 + V_A^2 / c^2}. \tag{8.12.13}$$

Эта мода представляет собой магнитозвуковую волну, поскольку ее дисперсионное уравнение имеет вид $\omega = kV$. Магнитное поле такой волны $\mathbf{B}_k = B_k \hat{z}$ параллельно \mathbf{B}_0 . Магнитозвуковая волна распространяется перпендикулярно постоянному магнитному полю \mathbf{B}_0 и не искажает его силовых линий (фиг. 147). В области более высоких частот ($\omega_{ci} < \omega < \omega_{ce} < \omega_{pe}$) решение дисперсионного уравнения (8.12.5) для электромагнитной моды дает

$$\omega \approx \sqrt{\omega_{ci}\omega_{ce}}.$$

В случае $\omega_{ci} < \omega < \omega_{pe} < \omega_{ce}$ решение уравнения (8.12.2) приводит к моде с частотой

$$\omega \approx \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}.$$

§ 13. ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО МАГНИТНОМУ ПОЛЮ В ГОРЯЧЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$)

Дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля в горячей замагниченной плазме, можно получить, положив в (8.10.10) $k_{\perp} = 0$. При $k_{\perp} = 0$ дисперсионное уравнение сильно упрощается, поскольку исчезают все члены с J_n^2 при $n > 0$ и остается только член с J_0^2 [напомним, что $J_0^2(0) = 1$]. Кроме того, волны, у которых вектор электрического поля параллелен \mathbf{B}_0 , можно рассматривать отдельно от волн с вектором электрического поля, перпендикулярным \mathbf{B}_0 . Волна с $E_z \neq 0$ является электростатической ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$) и подчиняется следующему дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 \left(1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k_{\parallel}^2} \int \frac{\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}}{\omega / k_{\parallel} - v_{\parallel}} dv \right) = 0. \quad (8.13.1)$$

Уравнение (8.13.1) совпадает с дисперсионным уравнением для электростатических волн в незамагниченной плазме. Причина этого состоит в том, что в рассматриваемых волнах частицы движутся вдоль \mathbf{B}_0 и, следовательно, магнитное поле на них не влияет. Решения уравнения (8.13.1) описывают затухающие по Ландау ленгмюровские и ионно-звуковые волны.

Две другие волны являются электромагнитными (в них $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) и описываются дисперсионными уравнениями

$$\omega^2 = k^2 c^2 + 2\pi\omega \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \times \\ \times \int \frac{\left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} \right] v_{\perp}^4 dv_{\perp} dv_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + \omega_{c\alpha}} = 0 \quad (8.13.2)$$

и

$$\omega^2 = k^2 c^2 + 2\pi\omega \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \times \\ \times \int \frac{\left[\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \left(1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \right) + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} \right] v_{\perp}^3 dv_{\perp} dv_{\parallel}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega - \omega_{c\alpha}} = 0. \quad (8.13.3)$$

Для того чтобы получить дисперсионные уравнения в приближении холодной плазмы, в (8.13.2) и (8.13.3) нужно положить $v = 0$. В таком приближении затухание Ландау становится пренебрежимо малым и рассматриваемые волны сводятся при высоких частотах к электромагнитным волнам с правой и левой круговой поляризацией, при промежуточных частотах — к свистам и при низких частотах — к альфвеновским волнам. Эти волны мы обсуждали в гл. 4. При некоторых частотах в горячей плазме важную роль может играть затухание Ландау. Для оценки этого эффекта рассмотрим плазму с изотропной функцией распределения $f_0 = f_0(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)$, для которой справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}^2} = - \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}^2}.$$

Предполагая, что затухание мало, интегралы в (8.13.2) и (8.13.3) можно приближенно записать в виде ($\omega = \omega_r + i\omega_i$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(v^2)}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega \pm \omega_{c\alpha}} dv_{\parallel} \approx \oint \frac{F(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_r \pm \omega_{c\alpha}} dv_{\parallel} + \frac{\pi i}{|k_{\parallel}|} F \left[v_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega_r \mp \omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 \right]. \quad (8.13.4)$$

Уравнения (8.13.2) и (8.13.3) можно решить, если сначала в уравнении для ω_r пренебречь ω_i , а затем найти ω_i . Аналогичный метод был применен выше в п. 6.2 настоящей главы при выводе соответствующих выражений. Таким образом, мы имеем

$$\operatorname{Re} [D_{zz}(k_{\parallel}, \omega_r)] = 0,$$

$$\omega_i = - \frac{\operatorname{Im} [D_{zz}(k_{\parallel}, \omega_r)]}{(\partial/\partial\omega_r) \{ \operatorname{Re} [D_{zz}(k_{\parallel}, \omega_r)] \}}.$$

В результате для дисперсии и затухания волн получаем [используя (8.13.4) при интегрировании]

$$\omega_r^2 = k^2 c^2 - \omega_r \sum_{\alpha} 2\pi \omega_{p\alpha}^2 \oint_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{v_{\perp} f_{\alpha 0} dv_{\perp}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_r \pm \omega_{c\alpha}} \quad (8.13.5)$$

и

$$\omega_i \approx - \frac{2\pi^2 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{1}{|k_{\parallel}|} \int_0^{\infty} v_{\perp} f_{\alpha 0} \left[v_{\perp}^2 + \left(\frac{\omega_r \pm \omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}} \right)^2 \right] dv_{\perp}}{1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_r^2} - 2\pi \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{|k_{\parallel}|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\perp}) v_{\parallel} dv_{\parallel} dv_{\perp}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega_r \pm \omega_{c\alpha}}}. \quad (8.13.6)$$

Отсюда ясно видно, что декремент затухания определяется числом частиц, движущихся в направлении \mathbf{V}_0 со скоростью

$$v_{\parallel} = \frac{\omega_r \pm \omega_{c\alpha}}{k_{\parallel}}.$$

Почувительно найти затухание в нескольких конкретных случаях, полагая распределение $f_{\alpha 0}$ максвелловским.

13.1. Альфвеновские волны

В случае альфвеновских волн ($\omega \ll \omega_{ci}$) мы имеем

$$\omega_r = \frac{k_{\parallel} V_A}{\sqrt{1 + V_A^2/c^2}}$$

и

$$\omega_i = - \frac{\omega_{pi}^2}{|k_{\parallel}|} \frac{1}{1 + c^2/V_A^2} \sqrt{\frac{\pi m_i}{8\pi T_i}} \exp \left(\frac{-B^2}{8\pi n T_i} \frac{\omega_{ci}^2}{\omega_r^2} \right),$$

где $V_A = B/\sqrt{4\pi n m_i}$.

Затухание альфвеновских волн обусловлено ионами, поскольку затухание на электронах в $\exp(-\omega_{ce}^2/\omega_r^2)$ раз меньше. Таким образом, альфвеновские волны обычно слабо затухают при частотах значительно ниже ионной циклотронной частоты.

13.2. Свисты

Эти волны рассматриваются в области частот

$$\omega_{ci}^2 \ll \omega^2 \ll \omega_{ce}^2.$$

Затухание Ландау для свистов также мало:

$$\omega_i \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{|k_{\parallel}|} \sqrt{\frac{m_e}{2\kappa T_e}} \frac{1}{1+k^2 c^2/\omega_r^2} \exp\left(-\frac{\omega_{ce}^2}{k_{\parallel}^2} \frac{m_e}{2\kappa T_e}\right), \quad (8.13.7)$$

за исключением случая очень коротких длин волн ($\lambda \lesssim a_{ce}$).

13.3. Циклотронные волны

Рассматривается область частот вблизи $\omega = \pm \omega_{ce}$.

При $\omega = \omega_{ce}$ одна из высокочастотных мод может сильно затухать. Полагая в (8.13.2) $\omega \approx \omega_{ce}$, имеем

$$\omega^2 = k^2 c^2 - i \sqrt{\frac{m_e c^2}{2\pi\kappa T_e}} \omega_{pe}^2 \exp\frac{-(\omega - \omega_{ce})^2}{k_{\parallel}^2 2\kappa T_e/m_e}, \quad (8.13.8)$$

$$\omega \approx kc - i \sqrt{\frac{m_e c^2}{8\pi\kappa T_e}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}. \quad (8.13.9)$$

Из условия $\omega_r \approx \omega_{ce}$ в области затухания, а также из равенства $\omega_r^2 \approx k^2 c^2$ следует

$$k_{\parallel} = \frac{\omega_{ce}}{c}. \quad (8.13.10)$$

Таким образом, затухание этой высокочастотной моды велико лишь при одном определенном значении длины волны.

Затухание означает наличие сильной связи между частицами и волной с определенной длиной волны и частотой. В гл. 11 мы покажем, что при значениях \mathbf{k} , при которых имеется сильное затухание, наблюдается также и сильное спонтанное *излучение* волн.

В § 12 настоящей главы мы показали, что электромагнитные моды

$$\omega_r \approx \omega_{ce} \approx kc$$

не затухают при распространении поперек \mathbf{B}_0 . При распространении же вдоль \mathbf{B}_0 эти моды затухают. Можно вычислить затухание как функцию частоты и направления распространения волны.

§ 14. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИЕСЯ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ К МАГНИТНОМУ ПОЛЮ В ГОРЯЧЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$)

Для волн с частотой

$$\omega_r \approx kc$$

и с волновым вектором \mathbf{k} , почти перпендикулярным \mathbf{B}_0 (т. е. с $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$), дисперсионное уравнение отличается от (8.13.8) в основном тем, что член, описывающий затухание при $\omega_r = \omega_{ce}$, заменяется последовательностью таких членов, каждый из которых является большим вблизи соответствующей гармоники $\omega_r = n\omega_{ce}$. При произвольном направлении распространения волны и $\omega_i \ll \omega_r$ методы, использованные в предыдущих параграфах, приводят к следующим результатам.

1. Волна, вектор электрического поля которой перпендикулярен магнитному полю ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$):

$$\omega = kc + \frac{i\pi^2\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 \left[\frac{dJ_n(k_{\perp}v_{\perp}/\omega_{ce})}{d(k_{\perp}v_{\perp}/\omega_{ce})} \right]^2 \times \\ \times \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} f_{e0}(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \Big|_{v_{\parallel} = \left| \frac{\omega \pm n\omega_{ce}}{k_{\parallel}} \right|} dv_{\perp}. \quad (8.14.1)$$

2. Волна, вектор электрического поля которой параллелен магнитному полю ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$):

$$\omega = kc + \frac{i\pi^2\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2} \int_0^{\infty} v_{\perp} (\omega - n\omega_c) \times \\ \times J_n^2 \left[\frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} f_{e0}(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \right] \Big|_{v_{\parallel} = \left| \frac{\omega \pm n\omega_{ce}}{k_{\parallel}} \right|} dv_{\perp}. \quad (8.14.2)$$

Вычисленные здесь декременты затухания волн понадобятся в гл. 11 при рассмотрении излучения плазмы.

§ 15. ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ГОРЯЧЕЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ [$\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 = B_0(x)\hat{z}$, $n_0 = n_0(x)$]

15.1. Описание равновесного состояния и вывод уравнения для возмущенной функции распределения в неоднородной плазме

Для решения уравнения Власова в плазме с умеренно сложной геометрией можно применить метод интегрирования по невозмущенным траекториям (метод характеристик) [см. (8.8.1)—(8.8.5)]. Здесь этот метод мы применим к изучению волн в ограниченной плазме, удерживаемой магнитным полем. Для простоты рассмотрим плазму, которая заполняет полупространство с нерезкой границей таким образом, что плотность плазмы уменьшается в направлении оси x . Уменьшение кинетического давления за счет такого спада плотности компенсируется увеличивающимся вдоль оси x магнитным полем, как показано на фиг. 148 (см. также гл. 3), так что в равновесии магнитное давление уравновешено давлением плазмы. В случае равновесия мы имеем

$$\mathbf{B}_0 = B_0(x)\hat{z}, \\ n_0 = n_0(x), \\ p_0(x) + \frac{B_0^2(x)}{8\pi} = \text{const.} \quad (8.15.1)$$

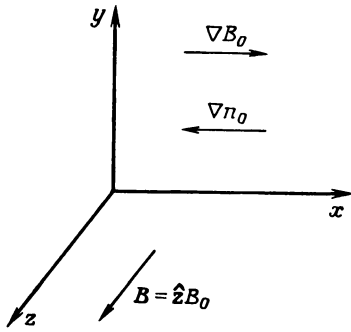
Равновесное состояние плазмы с неоднородной плотностью $n_0(x)$ описывается уравнением Власова

$$v_x \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0(x)}{c} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0. \quad (8.15.2)$$

Соответствующие уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 4\pi\rho_q = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0, \quad (8.15.3)$$

$$-\frac{dB_z}{dx} = \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int v_y f_{\alpha 0} d\mathbf{v}, \quad (8.15.4)$$



Фиг. 148. Система координат и направления градиентов поля и плотности плазмы при изучении волн в неоднородной плазме.

будем предполагать, что при равновесии в плазме электрическое поле отсутствует.

Задача 8.15.1. Покажите, что из (8.15.2) и (8.15.3) следует равенство

$$p(x) + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const.}$$

Интегралами движения, с помощью которых можно построить $f_{\alpha 0}$, являются энергия, компонента импульса, направленная вдоль \mathbf{B}_0 , и два дополнительных интеграла ¹⁾, обсуждавшихся в § 7 гл. 7:

$$\begin{aligned} W_{\perp} &= \frac{1}{2} m v_{\perp}^2, \\ p_z &= m v_z, \\ \xi_x &= m \left(v_x - \frac{q}{mc} \int B_z dy \right), \\ \xi_y &= m \left(v_y + \frac{q}{mc} \int B_z dx \right). \end{aligned} \quad (8.15.5)$$

Поскольку в описанном выше равновесном состоянии плазмы имеются градиенты только вдоль оси x , наиболее общее распределение зависит лишь от v_{\perp}^2 , v_z и ξ_y :

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0} \left(v_{\perp}^2, v_z, v_y + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} c} \int B_z dx \right). \quad (8.15.6)$$

Для неоднородной плазмы общий вид решения уравнения Власова получить довольно трудно. Однако в нескольких случаях, представляющих практический интерес, можно получить решения. Например, к таким случаям относится слабо неоднородная плазма, помещенная в слабо неоднородное магнитное поле, т. е. когда выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} a_{ci} \frac{\nabla B}{B} &\ll 1, \\ a_{ci} \frac{\nabla n_i}{n_i} &\ll 1; \end{aligned} \quad (8.15.7)$$

здесь $a_{i,t}$ — ларморовский радиус ионов.

Если градиенты магнитного поля и плотности малы, то магнитное поле и функцию распределения можно разложить в ряд Тейлора вблизи $x_0 (= 0)$

¹⁾ Поперечные компоненты обобщенного импульса.— *Прим. ред.*

где $\bar{n}_{\alpha} = N_{\alpha}/V$ — средняя плотность (N_{α} — полное число частиц сорта α , V — объем системы). Функция распределения $f_{\alpha 0}$ нормирована так, что $\int dx (1/V) \int f_{\alpha 0} dv = 1$. Уравнение (8.15.3) применимо, только если в равновесном состоянии отсутствует электрическое поле \mathbf{E}_0 . Если же, например, в плазме в равновесном состоянии есть избыток ионов, то уравнение (8.15.3) следует заменить уравнением

$$\frac{dE_0}{dx} = \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0} dv,$$

а в уравнение Власова должен быть включен член $\mathbf{E}_0 \cdot \nabla f_{\alpha 0}$. В нашем рассмотрении мы равновесии в плазме электрическое поле от-

и сохранить только члены, линейные по градиентам:

$$\mathbf{B} \approx \left(B_0 + x \frac{dB_0}{dx} \right) \hat{\mathbf{z}} \equiv B_0 (1 + \varepsilon x) \hat{\mathbf{z}} \quad (8.15.8)$$

и

$$\begin{aligned} f_{\alpha 0} &= f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2, v_z, 0) + \left(v_y + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} c} \int B_z dx \right) \frac{1}{\omega_{c\alpha}} \frac{df_{\alpha 0}}{dx} = \\ &= f_{\alpha}(v_{\perp}^2, v_z) \left[1 - \varepsilon'_{\alpha} \left(x + \frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \right] \approx \\ &\approx f_{\alpha}(v_{\perp}^2, v_z) \left[1 - \varepsilon'_{\alpha} \left(x + \frac{v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.15.9)$$

В этих разложениях параметры ε'_{α} и ε выбирают в соответствии с реальными градиентами поля и плотности, встречающимися в лабораторной и космической плазме:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\alpha} &= - \frac{1}{f_{\alpha 0}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} \Big|_{x=x_0=0}, \\ \varepsilon &= \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dx} \Big|_{x=x_0=0}, \\ \omega_{c\alpha} &= \frac{q_{\alpha} B_0}{m_{\alpha} c}. \end{aligned} \quad (8.15.10)$$

С помощью распределений такого типа можно описать разнообразные плазменные состояния. Рассмотрим следующие случаи.

Неоднородная плотность. В данном случае величину ε'_{α} можно выбрать постоянной, не зависящей от интегралов движения v_{\perp}^2 и v_z . Состояние плазмы характеризуется однородной температурой и меняющейся по линейному закону плотностью:

$$\begin{aligned} n &= \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v} = n_{\alpha 0} (1 - \varepsilon'_{\alpha} x), \\ \kappa T_{\alpha \perp} &= \frac{\bar{n}_{\alpha}}{n_{\alpha}} \int \frac{mv_{\perp}^2}{2} f_{\alpha} d\mathbf{v} = \kappa T_{\alpha 0} = \text{const.} \end{aligned} \quad (8.15.11)$$

Кроме того, поскольку равновесное электрическое поле равно нулю, плотность заряда в равновесном состоянии также должна обращаться в нуль. Следовательно, из (8.15.3) и (8.15.11) имеем

$$\varepsilon'_e = \varepsilon'_i.$$

Неоднородная плотность и неоднородная поперечная температура. Выбрав ε'_{α} зависящим от v_z^2 или v_{\perp}^2 , можно описать градиент температуры поперек \mathbf{B}_0 . Так, если $\varepsilon'_{\alpha} = \beta_{\alpha} + (\delta_{\perp} m v_{\perp}^2 / 2 \kappa T)_{\alpha}$ и функция распределения имеет вид

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \right)_{\alpha 0} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_{\parallel}} \right)_{\alpha 0}^{1/2} \exp \left(- \frac{mv_{\perp}^2}{2\kappa T_{\perp}} \right)_{\alpha 0} \exp \left(- \frac{mv_{\parallel}^2}{2\kappa T_{\parallel}} \right)_{\alpha 0},$$

где β_{α} и δ_{α} — постоянные, то в такой плазме существуют градиенты плотности n_{α} и поперечной температуры T_{α} :

$$\begin{aligned} n_{\alpha \perp} &= n_{\alpha 0} [1 - (\beta_{\alpha} + \delta_{\perp \alpha}) x], \\ T_{\alpha \perp} &= T_{\alpha 0 \perp} (1 - \delta_{\perp \alpha} x), \\ T_{\alpha \parallel} &= T_{\alpha 0 \parallel} = \text{const.} \end{aligned} \quad (8.15.12)$$

В этом случае условие $\mathbf{E}_0 = 0$ с учетом (8.15.3) приводит к равенству

$$(\beta + \delta_{\perp})_i = (\beta + \delta_{\perp})_e.$$

Неоднородная плотность и неоднородная продольная температура. Если $\varepsilon'_\alpha = \beta_\alpha + (\delta_{||} m v_{||}^2 / 2 \kappa T_{||})_\alpha$, в равновесном состоянии существуют градиенты плотности n и продольной температуры $T_{||}$, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} n_\alpha &= n_{\alpha 0} \left[1 - \left(\beta_\alpha + \frac{1}{2} \delta_{||\alpha} \right) x \right], \\ T_{\alpha ||} &= T_{\alpha 0 ||} (1 - \delta_{\alpha ||} x), \\ T_{\alpha \perp} &= T_{\alpha 0 \perp} = \text{const}, \\ \left(\beta + \frac{1}{2} \delta_{||} \right)_i &= \left(\beta + \frac{1}{2} \delta_{||} \right)_e \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (8.15.13)$$

Все эти состояния плазмы относятся к одним и тем же равновесным полям: $\mathbf{V} = B_0 (1 + \varepsilon x) \hat{z}$ и $\mathbf{E}_0 = 0$. Знание различных типов равновесных распределений, отвечающих заданным равновесным полям, позволяет описывать плазмы, полученные разными способами, при наличии градиента температуры или в его отсутствие и т. п. Такое разнообразие функций распределения $f_{\alpha 0}$ представляет интерес при изучении бесстолкновительных процессов в течение времен, малых по сравнению с временем между столкновениями, поскольку после нескольких столкновений распределение становится локально максвелловским.

Задача 8.15.2. Покажите, используя уравнение Власова, что в состоянии равновесия плазмы в полях $\mathbf{V}_0 = B_0(x) \hat{z}$ и $\mathbf{E}_0 = 0$ не может быть ни градиентов плотности, ни градиентов температуры *вдоль* \mathbf{V}_0 , т. е. dn/dz и dT/dz должны обращаться в нуль. Какими должны быть равновесные поля, чтобы существовали такие градиенты *вдоль* \mathbf{V}_0 ?

Состояние плазмы, описываемое выражениями (8.15.8) и (8.15.9) характеризуется двумя скоростями. Одна из них равна средней скорости частицы, или скорости дрейфа в неоднородном магнитном поле (градиентный дрейф, см. приложение I):

$$\mathbf{V}_D = \hat{y} \frac{v_\perp^2}{2\omega_c} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} = \frac{\varepsilon v_\perp^2}{2\omega_c} \hat{y}. \quad (8.15.14)$$

Вторая представляет собой скорость жидкого элемента и равна скорости частиц, усредненной по $f_{\alpha 0}$ из (8.15.9):

$$\mathbf{V}_\alpha = \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = -\hat{y} \frac{\varepsilon'_\alpha}{\omega_{c\alpha}} \int v_y^2 f_{\alpha 0} (v_\perp^2, v_z) d\mathbf{v} = -\frac{\varepsilon'_\alpha \langle v_\perp^2 \rangle_\alpha}{2\omega_{c\alpha}} \hat{y}; \quad (8.15.15)$$

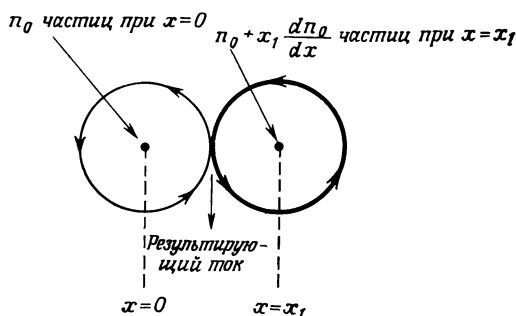
здесь $\langle v^2 \rangle_\alpha \equiv \int v^2 f_{\alpha 0} (v^2, v_z) dv$. Скорость дрейфа \mathbf{V}_D равна истинной¹⁾ скорости v_\perp частицы, в то время как гидродинамическая скорость \mathbf{V}_α получается *усреднением* по скоростям различных частиц. Гидродинамическая скорость определяет электрический ток, связанный, согласно уравнениям Максвелла, с градиентом магнитного поля:

$$\frac{4\pi}{c} \sum_{|\alpha} q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = -\frac{dB_z}{dx} \hat{y}.$$

В плазме, в которой неоднородной является только плотность, этот ток возникает за счет градиента плотности ведущих центров (фиг. 149). Так, для распределения Максвелла — Больцмана с плотностью $n = n_{\alpha 0} (1 - \varepsilon'_\alpha x)$ гидродинамическая скорость равна

$$\mathbf{V}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \frac{dn_\alpha}{dx} \left(\frac{\kappa T}{m\omega_c} \right)_\alpha \hat{y}. \quad (8.15.16)$$

¹⁾ Усредненной по времени ларморовского вращения. — *Прим. ред.*



Фиг. 149. Траектории частиц в плазме с градиентом плотности, поясняющие возникновение тока (тока намагничивания), связанного с этим градиентом.

Существуют волны, тесно связанные с этими двумя скоростями и характерные для неоднородной плазмы в магнитном поле, аналогично тому, как существуют волны, связанные с циклотронным движением и другими свойствами частиц плазмы. Волны, обусловленные дрейфовым движением в плазме, называются дрейфовыми.

Применяя к этому случаю метод характеристик, можно найти возмущенную функцию распределения $f_{\alpha 1}$ по траекториям частиц в невозмущенных полях. Эти траектории описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= v', \\ \frac{dv'}{dt'} &= \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0}{c} (1 + \epsilon x'), \\ \mathbf{x}'(t' = t) &= \mathbf{x}, \quad \mathbf{v}'(t' = t) = \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{8.15.17}$$

которые решаются по теории возмущений, поскольку (по предположению) параметр $\epsilon = (1/B) (dB/dx)$ мал. В результате громоздких, но несложных выкладок [сначала решается система уравнений (8.15.17) при $\epsilon = 0$, затем полученное нулевое приближение для $x'(t')$ подставляется в член $\epsilon x'$] имеем

$$\begin{aligned} v'_y &= v_{\perp} \sin \left[\theta - \omega_{c\alpha} \left(1 + \epsilon x + \frac{\epsilon v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \tau \right] + \frac{\epsilon v_{\perp}^2}{2\omega_{c\alpha}} \times \\ &\times [1 - 2(\cos \omega_{c\alpha} \tau) \cos^2 \theta + \cos 2(\theta - \omega_{c\alpha} \tau) - (\sin 2\theta) \sin \omega_{c\alpha} \tau], \\ v'_x &= v_{\perp} \cos \left[\theta - \omega_{c\alpha} \left(1 + \epsilon x + \frac{\epsilon v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \tau \right] + \frac{\epsilon v_{\perp}^2}{2\omega_{c\alpha}} \times \\ &\times [(\sin 2\theta) \cos \omega_{c\alpha} \tau - \sin 2(\theta - \omega_{c\alpha} \tau) + 2(\sin \omega_{c\alpha} \tau) \cos^2 \theta], \\ v'_z &= v_z; \end{aligned} \tag{8.15.18}$$

здесь $\tau \equiv t' - t$, а скорость \mathbf{v} записана в полярных координатах:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{\perp} \sin \theta, \\ v_x &= v_{\perp} \cos \theta, \\ v_{\perp} &= (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Траекторию \mathbf{x}' находят интегрированием скорости \mathbf{v}' .

Задача 8.15.3. Найдите $\mathbf{x}'(\tau)$ по \mathbf{v}' . Покажите, что уравнения (8.15.18) являются правильными. Позаботьтесь, чтобы решение удовлетворяло условиям $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{v}'(\tau = 0) = \mathbf{v}$.

15.2. Локальное приближение для возмущенной функции распределения

Возмущенная часть функции распределения, выраженная через параметры траектории с помощью (8.15.18), имеет вид

$$f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^0 \left[\mathbf{E}_1(\mathbf{x}', \tau + t) + \frac{\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}', \tau + t)}{c} \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0}(\mathbf{x}', \mathbf{v}') d\tau$$

и определяет вместе с уравнениями Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$$

поведение полей во времени. Поскольку равновесная функция распределения $f_{\alpha 0}$ зависит от x , искать поля и возмущенную часть функции распределения в виде плоских волн $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ уже нельзя. Действительно, предположение, что $\mathbf{E}_1 = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)]$, приводит к $f_{\alpha 1} \sim f_{\alpha \mathbf{k}}(x) \times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$. Поэтому уравнению Пуассона $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v}$ можно удовлетворить, только если $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ в свою очередь зависит от x . Таким образом, поле и функция распределения записываются в виде

$$\mathbf{E}_1 = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(x) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$$

и

$$f_{\alpha 1} = f_{\alpha \mathbf{k}}(x, \mathbf{v}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\omega t).$$

В рассматриваемом случае неоднородной по плотности плазмы из уравнений Максвелла нельзя вывести дисперсионного уравнения для $\omega(\mathbf{k})$ как для однородной плазмы. Однако с помощью этих уравнений можно получить сложное интегродифференциальное уравнение для амплитуд $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}(x)$. Условие, что такое интегродифференциальное уравнение должно иметь конечные решения (возмущенные поля $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ должны обращаться в нуль при $x \rightarrow \infty$), позволяет в принципе найти собственные значения $\omega(\mathbf{k})$.

К счастью, в широком классе задач, решаемых для плазмы с малыми градиентами поля и плотности, т. е. когда выполняются условия

$$\frac{1}{k} \frac{1}{n} \left| \frac{dn}{dx} \right| \ll 1$$

и

$$a_{ci} \frac{1}{n} \left| \frac{dn}{dx} \right| \ll 1,$$

можно показать, что решение интегродифференциального уравнения совпадает с результатами, полученными методом локального приближения.

В локальном приближении пространственное изменение полей и функции распределения предполагается почти гармоническим:

$$\mathbf{E}_1 \approx \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

и

$$f_1 \approx \bar{f}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t);$$

здесь $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ и $\bar{f}_{\mathbf{k}}$ — постоянные величины. Уравнения Максвелла приводят к дисперсионному уравнению типа

$$D(\mathbf{k}, \omega, x) = 0.$$

Далее, это уравнение рассматривают в точке $x = x_0$, в которой градиент плотности максимален. Если в равновесном состоянии плазмы плотности частиц и магнитное поле изменяются следующим образом:

$$n_\alpha = n_{\alpha 0} (1 - \varepsilon'_\alpha x),$$

$$\mathbf{B} = B_0 (1 + \varepsilon x) \hat{z},$$

то градиенты не зависят от x , и в дисперсионном уравнении $D(\mathbf{k}, \omega, x) = 0$ можно положить для простоты $x = 0$.

Локальное приближение представляет собой основное упрощение задачи о дрейфовых волнах, и мы будем применять его здесь без строгого доказательства, которое читатель может найти в обзорах [9, 10]. Основания для локального приближения физически ясны. Мода, локализованная в интервале, меньшем, чем характерный размер неоднородности

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{k} \ll \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right)^{-1},$$

развивается в плазме с почти постоянной скоростью дрейфа. Поскольку такие скорости являются характерными для неоднородной плазмы, необходимо их аккуратно учитывать в рассматриваемом приближении. Таким образом, если скорость дрейфа почти постоянна на протяжении многих длин волн, то, после того как мы ее учли, можно пренебречь зависимостью от x остальных равновесных величин, т. е. положить $x = 0$ в $D(\mathbf{k}, \omega, x)$.

Предполагая, что возмущения полей и функции распределения имеют пространственно-временную зависимость в виде $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$, возмущенную часть функции распределения $f_{\alpha \mathbf{k}}$ можно записать] следующим образом:

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^0 \left(\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0} \left(v_1^2, v_z, v_y + \frac{q_\alpha}{m_\alpha c} \int B_z dx \right) \times$$

$$\times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} - \omega \tau)] d\tau. \quad (8.15.19)$$

Подставляя траектории из (8.15.18), можно в явном виде вычислить интеграл в (8.15.19). Вычисление этого интеграла довольно громоздко, но его можно упростить, используя тождество

$$\exp(iR \sin \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(R) \exp(il\theta), \quad (8.15.20)$$

которое позволяет заменить $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')$ функциями, экспоненциально зависящими от времени в виде $\exp(il\omega_c \tau)$.

С помощью тождества (8.15.20) нетрудно показать, что, если градиенты плотности малы, то в выражениях для траекторий членами, содержащими высшие гармоники, можно пренебречь. В частности, $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')$ содержит осциллирующий член типа

$$\exp\left(i \frac{k\epsilon v_1^2}{\omega_c^2} \sin 2\omega_c \tau\right), \quad (8.15.21)$$

который при малых градиентах температуры, т. е. если

$$\frac{k\epsilon}{\omega_{c\alpha}^2} \frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha} \ll 1,$$

можно с достаточной точностью записать в виде

$$\exp\left(i \frac{k\epsilon v_1^2}{\omega_c^2} \sin 2\omega_c \tau\right) = 1 + i \frac{k\epsilon v_1^2}{\omega_c^2} \sin 2\omega_c \tau + \dots \approx 1$$

в силу ограниченности $\sin(2\omega_c\tau)$. С другой стороны, член $\exp(ik\varepsilon v_{\perp}^2\tau/2\omega_c)$, в котором аргумент (показатель экспоненты) не осциллирует, нельзя заменять единицей. Этот член описывает накапливающийся эффект от дрейфа частиц в неоднородном поле \mathbf{B}_0 ($\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{z}$). Положим члены типа (8.15.21) равными единице и запишем \mathbf{k} в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{k} = \hat{x} k_{\perp} \cos \psi + \hat{y} k_{\perp} \sin \psi + \hat{z} k_{\parallel}.$$

Тогда выражение для возмущения функции распределения сильно упрощается:

$$f_{\alpha k} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{l, m} \int_{-\infty}^0 \left[(\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{v}' \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}}{c}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0} \right] J_l \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) J_m \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) \times \\ \times \exp [i(l-m)(\psi - \theta)] \exp \left[i \left(k_{\parallel} v_{\parallel} + \frac{1}{2} k_y \frac{\varepsilon v_{\perp}^2}{\omega_{c\alpha}} - \omega + l\omega_{c\alpha} \right) \tau \right] d\tau. \quad (8.15.22)$$

Дальнейшее упрощение можно провести, используя равенство

$$\nabla_{\mathbf{v}'} f_{\alpha 0}(H, L) = \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial H} \nabla_{\mathbf{v}'} \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial L} \nabla_{\mathbf{v}'} \cdot \mathbf{L},$$

где H и L — интегралы движения типа использованных в (8.15.5). Если H и L — интегралы движения, то $\partial f_{\alpha 0}/\partial H$ и $\partial f_{\alpha 0}/\partial L$ также являются интегралами движения и их можно вынести из-под интеграла по τ . Это означает, что для выполнения интегрирования по траекториям не нужно знать деталей функции распределения $f_{\alpha 0}$.

Вычисленные возмущения функции распределения представляют собой отправную точку во многих расчетах свойств дрейфовых волн с разными поляризациями в различных интервалах частот [10]. Для иллюстрации того, что в (8.15.22) содержатся новые типы волн, отсутствующие в однородной плазме, полезно ограничиться электростатическим приближением, положив $\mathbf{B}_1 \rightarrow 0$, как и в § 3 гл. 8. Конечно, нельзя по своему желанию произвольно распоряжаться собственными векторами: они однозначно определяются из самосогласованных уравнений Власова — Максвелла. Однако рассмотрение полного решения подтверждает то, что при определенных условиях ($\beta_{\alpha} = 8\pi n_{\alpha} k T_{\alpha} / B^2 \ll 1$, $\omega_p^2 / k^2 c^2 \ll 1$) предположение $\mathbf{B}_1 \rightarrow 0$ действительно является хорошим приближением. Нужно отметить также, что направление распространения $\mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ можно выбрать по собственному усмотрению, и этим следует воспользоваться для дальнейшего упрощения. Хотя выбор определенного направления распространения $\mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ и облегчает решение задачи, но волны со специально выбранным направлением $\mathbf{k} / |\mathbf{k}|$ могут не обладать всеми свойствами, которые проявляются при произвольном направлении распространения волн в плазме. Ограничивая частотный интервал рассматриваемых волн, можно добиться дальнейшего упрощения. Наиболее просто изучить низкочастотный предел (ω меньше циклотронной частоты любого сорта частиц), хотя мы снова теряем часть информации о поведении плазменных волн.

Задача 8.15.4. Найдите дисперсионное уравнение для низкочастотной чисто электромагнитной дрейфовой волны, распространяющейся перпендикулярно удерживающему полю \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{k} = k\hat{y}, \quad \mathbf{E}_1 = \bar{E}_k e^{i(ky - \omega t)} \hat{z}, \quad \omega \ll \omega_{ci}.$$

§ 16. НИЗКОЧАСТОТНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Плазма с градиентом плотности (удерживаемая магнитным полем) описывается, как обсуждалось выше, функцией распределения ($\varepsilon' = \varepsilon_e = \varepsilon_i$)

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)_{\alpha}^{3/2} \exp \left(-\frac{m_{\alpha} v^2}{2k T_{\alpha}} \right) \left[1 - \varepsilon' \left(x + \frac{v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \right], \quad (8.16.1)$$

причем

$$\mathbf{B}_0 = \hat{z} B_0 (1 + \varepsilon x). \quad (8.16.2)$$

Для того чтобы $f_{\alpha 0}$ и \mathbf{B}_0 были самосогласованы, из уравнения Максвелла $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 4\pi \mathbf{J}_0 / c$ следует условие

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \frac{B^2}{4\pi \sum n_{\alpha} k T_{\alpha}} \equiv \frac{2}{\beta}. \quad (8.16.3)$$

Таким образом, в холодной плазме относительный градиент плотности больше относительного градиента магнитного поля. Низкочастотные электростатические возмущения ($\omega \ll \omega_{ci}$, $\mathbf{V}_1 \rightarrow 0$) распространяются в такой плазме в виде волн. Согласно (8.15.22), возмущенная часть функции распределения, связанная с этими волнами, имеет вид

$$f_{\alpha k} = - \sum_{l, m} \frac{q_{\alpha} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}}{m_{\alpha} k^2} f_{\alpha 0} \left(v_{\perp}^2, v_{\parallel}, x + \frac{v_y}{\omega_{c\alpha}} \right) \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{m_{\alpha}}{k T_{\alpha}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - \frac{k_y}{\omega_{c\alpha}} \varepsilon' \right) J_l J_m \times \\ \times \exp [i(l-m)(\psi - \theta)] \exp \left[i \left(k_{\parallel} v_{\parallel} + k_y \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{c\alpha}} - \omega + l\omega_{c\alpha} \right) \tau \right] d\tau;$$

здесь аргументом функций Бесселя J_l и J_m является $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha}$, а функция $f_{\alpha 0}$ вынесена из-под знака интеграла, поскольку, как было сказано выше, она зависит только от интегралов движения [$f_{\alpha}(H', L') = f_{\alpha}(H, L)$].

Электрическое поле волны определяется выражением

$$ik \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha k} d\mathbf{v} = \sum_{\alpha} 4\pi \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}}{k} \left\{ 1 + \sum_l \int \left[\omega \left(1 - \frac{l\varepsilon'}{k} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_y \frac{k T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\varepsilon'_{\alpha}}{\omega_{c\alpha}} \right] \cdot \frac{J_l^2(k_y v_{\perp} / \omega_{c\alpha}) f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2, v_{\parallel}, \xi_y) d\mathbf{v}}{k_{\parallel} v_{\parallel} + l\omega_{c\alpha} + \frac{k_y v_{\perp}^2}{2\omega_{c\alpha}} - \omega} \right\}, \quad (8.16.4)$$

при выводе которого было использовано тождество

$$\int_{-\infty}^0 ik \cdot \mathbf{v} \exp(ik \cdot \mathbf{x} - i\omega\tau) d\tau = 1 + i\omega \int_{-\infty}^0 \exp(ik \cdot \mathbf{x} - i\omega\tau) d\tau;$$

кроме того, $f_{\alpha 0}$ было взято в виде (8.16.1), а двойная сумма функций Бесселя упрощается с помощью равенства

$$\sum_{l, m} \int J_l J_m \exp [i(l-m)(\theta - \psi)] d\mathbf{v} = \\ = \sum_{l, m} \int v_{\perp} J_l J_m \exp [i(l-m)(\theta - \psi)] dv_{\perp} d\theta dv_z = \sum_l \int v_{\perp} J_l^2 dv_z d\theta dv_{\perp}.$$

Из уравнения (8.16.4) можно получить дисперсионное уравнение для электростатических дрейфовых волн (пренебрегая членами $\sim \varepsilon' / k$ из-за

малости градиентов):

$$-k^2 = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2}{\kappa T_{\alpha}} \left[1 + \sum_l \int \frac{J_l^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) \left(\omega + \frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{k_y \varepsilon'}{\omega_{c\alpha}} \right) f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2, v_{\parallel}, \xi_y)}{k_{\parallel} v_{\parallel} + k_y \varepsilon v_{\perp}^2 / 2\omega_{c\alpha} - \omega + l\omega_{c\alpha}} dv \right]. \quad (8.16.5)$$

Теперь, учитывая локальное приближение, нужно положить в (8.16.5) $x = 0$. Как видно из (8.16.5), удержаны члены первого порядка по дрейфовым и гидродинамическим скоростям. Дрейф из-за ∇B учтен в члене $k_y \varepsilon v_{\perp}^2 / \omega_c$, присутствующем в знаменателе (8.16.5). Этот член описывает резонанс $\omega \approx k_y \varepsilon v_{\perp}^2 / 2\omega_{c\alpha} = k_y V_D$ в интеграле по скоростям для волн с фазовой скоростью $v_{\Phi} = \omega/k$, равной скорости дрейфа. Гидродинамическая же скорость $[-\varepsilon' = (1/n)(dn/dx)]$

$$V_{\alpha} = \frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{c\alpha}} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$$

присутствует в числителе (8.16.5).

Задача 8.16.1. Проверьте уравнение (8.16.4). Покажите, что в этом уравнении член $l\varepsilon'/k$ происходит от интеграла $\int J_l J_m (v_y/\omega_c) d\theta$.

Дисперсионное уравнение (8.16.5) описывает как обычные ленгмюровские колебания, так и циклотронные волны (это нетрудно показать, опустив члены с ε и ε'); чтобы выявить новые свойства, внесенные дрейфами, полезно рассмотреть несколько частных случаев.

16.1. Низкочастотные дрейфовые волны, распространяющиеся поперек \mathbf{B}_0 в плазме с низким β ($\omega \ll \omega_{ci}$, $k_{\parallel} = 0$, $\mathbf{k} = k\hat{y}$)

В этом случае в уравнении (8.16.5) стоящие под знаком суммы \sum_l члены, для которых $l \neq 0$, малы по сравнению с членом при $l = 0$ (малость порядка $\omega/l\omega_{c\alpha}$), и их можно опустить. Пренебрегая также в знаменателе этого уравнения слагаемым, пропорциональным $V_D = \varepsilon v_{\perp}^2 / 2\omega_{c\alpha}$, можно найти решение, для которого $\omega/k \approx V_{\alpha} \approx (2/\beta) V_D \gg V_D$, что оправдывает пренебрежение членом $\varepsilon v_{\perp}^2 / 2\omega_{c\alpha}$. С учетом этих приближений дисперсионное уравнение записывается в виде

$$-k^2 = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{\kappa T_{\alpha}} \left[1 - I_0 \left(\frac{k^2 \kappa T_{\alpha}}{\omega_{c\alpha}^2 m_{\alpha}} \right) \exp \left(-\frac{k^2 \kappa T_{\alpha}}{\omega_{c\alpha}^2 m_{\alpha}} \right) \left(1 + \frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{k \varepsilon'}{\omega_{c\alpha} \omega} \right) \right]; \quad (8.16.6)$$

при выводе мы использовали равенство

$$\int_0^{\infty} J_0^2 \left(\frac{k v_{\perp}}{\omega_{c\alpha}} \right) \exp \left(-\frac{m v_{\perp}^2}{2\kappa T} \right) \frac{m}{\kappa T} v_{\perp} dv_{\perp} = I_0 \left(\frac{k^2 \kappa T}{\omega_{c\alpha}^2 m} \right) \exp \left(-\frac{k^2 \kappa T}{\omega_{c\alpha}^2 m} \right).$$

В пределе больших длин волн ($k^2 a^2 = k^2 \kappa T / \omega_{c\alpha}^2 m < 1$, где a — лармовский радиус) величину $I_0 \exp(-b_{\alpha})$ можно разложить в ряд: $I_0 \exp(-b_{\alpha}) \approx 1 - b_{\alpha} \approx 1$.

Таким образом, из (8.16.6) (считая $b_e \ll b_i$) получаем выражение для частоты

$$\omega = -\frac{k \left(\frac{\kappa T}{m} \frac{\varepsilon'}{\omega_c} \right)_i}{1 + B^2 / 4\pi n m_i c^2} = \frac{k V_i}{1 + B^2 / 4\pi n m_i c^2}. \quad (8.16.7)$$

Эта волна движется в направлении дрейфа ионов со скоростью, равной примерно гидродинамической скорости ионов, которая превышает скорость дрейфа частиц в $2/\beta$ раз. Затухание Ландау для этой волны мало (задача 8.16.3).

В гл. 9 показано, что рассматриваемая волна становится неустойчивой в присутствии гравитационной силы, направленной противоположно градиенту плотности. Она может стать неустойчивой и в присутствии градиента температуры, который можно учесть путем приближенного выбора функции ϵ'_α , как, например, было сделано в (8.15.12) и (8.15.13).

Вторая волна с частотой

$$\omega \approx k_y \frac{\kappa T}{m\omega_c} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$$

существует, но можно показать, что она сильно затухает, и, как всегда в таких случаях, ее нельзя считать нормальной модой.

Задача 8.16.2. Убедитесь, что решение (8.16.7) оправдывает предположение о том, что при его получении можно пренебречь членом $\epsilon v_\perp^2/2\omega_{c\alpha}$.

Задача 8.16.3. Покажите, что дрейфовая волна (8.16.7) слабо затухает, и найдите ее декремент затухания.

16.2. Низкочастотные дрейфовые волны, распространяющиеся под косым углом к B_0

Снова пренебрегая членами с $l \neq 0$ в $\sum_l J_l^2$, а также вновь решая дисперсионное уравнение для волн с $\omega > kV_D$ и опуская поэтому величину $k_y \epsilon v_\perp^2/2\omega_{c\alpha}$ в знаменателе (8.16.5), дисперсионное уравнение (8.16.5) можно записать следующим образом:

$$-k^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2}{\kappa T_\alpha} \left[1 + I_0 \left(\frac{k^2 \kappa T}{m\omega_c^2} \right) \exp \left(-\frac{k^2 \kappa T}{\omega_c^2 m} \right) \left(1 + \frac{\kappa T}{m} \frac{k_y \epsilon'}{\omega_c \omega} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\omega}{|k_{||}|} \sqrt{\frac{m}{2\kappa T}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - (\omega/|k_{||}|) \sqrt{m/2\kappa T}} \right]_\alpha. \quad (8.16.8)$$

Входящий в это уравнение интеграл

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - \xi} \quad (8.16.9)$$

довольно часто встречается в теории волн, распространяющихся в максвелловской плазме, и для него существуют таблицы [11]. В пределе больших и малых значений аргумента

$$Z(\xi) = \begin{cases} -2\xi + \frac{4}{3}\xi^2 - \dots + i\sqrt{\pi}e^{-\xi^2}, & |\xi| \ll 1, \\ -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} - \frac{3}{4\xi^5} - \dots, & |\xi| \gg 1. \end{cases} \quad (8.16.10)$$

Параметр ξ_α равен отношению фазовой скорости волны $(\omega/|k_{||}|)$, параллельной B_0 , к тепловой скорости частиц $\sqrt{2\kappa T_\alpha/m_\alpha}$. Интересный класс дрейфовых волн представляют волны с фазовыми скоростями, параллельными B_0 , значения которых меньше тепловой скорости электронов, но больше тепловой скорости ионов, т. е. $\xi_i \gg 1$, а $\xi_e < 1$.

Для этих волн из дисперсионного уравнения (8.16.8) имеем

$$\omega_r \approx \frac{\left(k_y \frac{\kappa T_e}{m_i} \frac{\varepsilon'}{\omega_{ci}}\right) I_0(b) e^{-b}}{1 + \frac{T_e}{T_i} - \frac{T_e}{T_i} I_0(b) e^{-b} + k^2 \lambda_{De}^2},$$

$$\omega_i = \left[\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) (1 - I_0 e^{-b}) + k^2 \lambda_{De}^2 \right] \frac{\sqrt{\pi} \omega_r^2 e^{-\frac{k^2}{2} \lambda_{De}^2}}{k_{\parallel} \sqrt{2\kappa T_e / m_e I_0 e^{-b}}}, \quad (8.16.11)$$

где

$$b \equiv k^2 a_{ci}^2 = \frac{k^2 \kappa T_i}{m_i \omega_{ci}^2}.$$

Заметим, что мнимая часть частоты ω возникает из-за резонансного взаимодействия этих волн с электронами.

Задача 8.16.4. Покажите, что (8.16.11) является правильным решением уравнения (8.16.8) для волн, фазовые скорости которых находятся в интервале

$$\sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}} \ll \frac{\omega}{|k_{\parallel}|} \ll \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}.$$

Задача 8.16.5. Используя приближение

$$D_r(k, \omega_r) = 0, \quad \omega_i = \frac{D_i(k, \omega_r)}{-\partial D_r / \partial \omega_r},$$

проверьте правильность решения (8.16.11) и найдите поправки от ионов.

Дрейфовые волны (8.16.11) обладают следующими свойствами:

1. Фазовая скорость ω/k_y сравнима с гидродинамической скоростью V_α .
2. Фазовая скорость, параллельная \mathbf{B}_0 , больше поперечной фазовой скорости, поскольку $\omega/|k_{\parallel}| > \sqrt{\kappa T_i/m_i}$, а $\omega/k_y < \sqrt{\kappa T_i/m_i}$ (в силу малости градиента плотности).
3. Эти волны *неустойчивы*. Из (8.16.11) видно, что мнимая часть ω положительна и волна

$$E_1 = \bar{\mathbf{E}}_k \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)] \approx \bar{\mathbf{E}}_k \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_r t) \exp(\omega_i t)]$$

нарастает с инкрементом $\sim \omega_i$.

Энергия таких волн, раскачиваемых токами частиц, существующими вследствие неоднородности равновесных величин $n(x)$ и $B(x)$, увеличивается благодаря градиенту плотности $\nabla n(x)$. Вместо затухания Ландау имеет место раскачка Ландау!

Систематическое изучение неустойчивостей мы проведем в гл. 9. Рассмотрение дрейфовых волн, которые естественным образом возникают при исследовании волновых свойств неоднородной плазмы, показывает, что не только существуют моды, отражающие специфические свойства равновесного состояния, но к тому же моды эти могут расти за счет нетермодинамических свойств квазиравновесного состояния. Поскольку в реальной плазме как в лабораторных, так и в естественных условиях всегда есть градиенты плотности, связанное с ними нарастание волн получило название *универсальной неустойчивости*.

В гл. 5 мы подробно обсудили связь между дрейфовыми, альфвеновскими и ионно-звуковыми волнами, и читатель может теперь строго на основе кинетической теории получить все результаты, начиная рассмотрение с выражений (8.15.22) для возмущенной функции распределения.

§ 17. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ (БГК-ВОЛНЫ)

Бернштейн, Грин и Крускал [12] обнаружили широкий класс равновесных распределений, в которых частицы играют главную роль при нахождении равновесных полей. Их идея состоит в том, например, что локализованный (положительный) потенциал можно согласовать с локальным избытком плотности электронов. В самом деле, если распределение частиц по кинетической энергии непрерывно, часть частиц будет заперта в ямах положительного потенциала. Выбирая число и знак заряда запертых частиц, можно найти самосогласованное распределение частиц почти для любого распределения потенциала. Даже если запертые (локализованные) частицы отсутствуют, все еще возможно найти большие потенциалы $\varphi(x)$, самосогласованные с распределением частиц, но величина потенциала будет при этом ограничена минимальной кинетической энергией частиц заданного распределения $e\varphi_{\max} < 1/2 m v_{\min}^2$. Поскольку в таких равновесных конфигурациях существуют неоднородные электростатические поля, их называют волнами, хотя этот термин является чересчур ограничительным.

Теория Бернштейна — Грина — Крускала строится в рамках уравнений Власова — Максвелла, поскольку ее основная идея состоит в том, чтобы учитывать детали функции распределения частиц. Стационарное состояние, включающее электростатические поля, можно найти, если положить $\partial f_\alpha / \partial t = 0$ и $\varphi_0 \neq 0$. В одномерном случае уравнения для $f_\alpha(x)$ и $\varphi(x)$ записываются следующим образом:

$$v_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} = 0, \quad (8.17.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi \left(\sum_\alpha |q_\alpha \bar{n}_\alpha| \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha dv_x \right). \quad (8.17.2)$$

Общее решение уравнения (8.17.1) имеет вид

$$f_\alpha = f_\alpha \left(v_x^2 + \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha} \right).$$

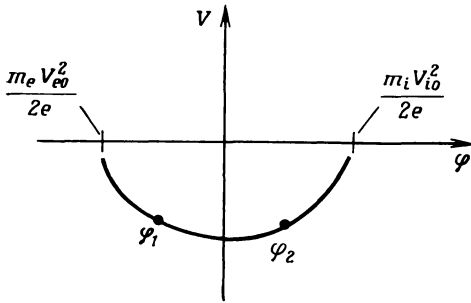
Подставляя данное решение в (8.17.2), мы видим, что последнее уравнение неявно представляет собой интегродифференциальное уравнение для φ . Поучительно решить уравнение (8.17.2) в нескольких следующих случаях.

17.1. Отсутствие запертых частиц

$$f_\alpha = V_{\alpha 0} \delta \left(v_x^2 + \frac{2q_\alpha \varphi}{m_\alpha} - V_{\alpha 0}^2 \right), \\ V_{\alpha 0}^2 \gg \left| \frac{2q_\alpha \varphi_{\max}}{m_\alpha} \right|.$$

В этом случае запертых частиц нет, поскольку кинетическая энергия частиц выбрана большей, чем максимальная потенциальная энергия. Все частицы имеют одинаковую кинетическую энергию. Уравнение (8.17.2) для φ при таком распределении (плотности электронов и ионов вдали от потенциальной ямы равны, $\bar{n}_e = \bar{n}_i = \bar{n}_0$) записывается в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi \bar{n}_0 e \left(\frac{V_{i0}}{\sqrt{V_{i0}^2 - 2e\varphi/m_i}} - \frac{V_{e0}}{\sqrt{V_{e0}^2 + 2e\varphi/m_e}} \right), \quad (8.17.3)$$



Фиг. 150. Функция $V(\varphi)$, вычисленная по формуле (8.17.4).

вид кривой $V(\varphi)$ [построенной согласно (8.17.4)]. Таким образом, существуют решения уравнения (8.17.3), в которых φ колеблется в «потенциале» $V(\varphi)$. На фиг. 150 показано, что обычно решение φ колеблется между точками φ_1 и φ_2 . На фиг. 151 приведено такое решение $\varphi(x)$. Это решение удовлетворяет условиям отсутствия захваченных частиц: $1/2 m_i V_{i0}^2 > e\varphi_2$ и $1/2 m_e V_{e0}^2 > -e\varphi_1$. Для малых φ решение можно найти в явном виде. Разложение правой части уравнения (8.17.3) по φ дает

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\bar{n}_0 e^2 \left(\frac{1}{m_i V_{i0}^2} + \frac{1}{m_e V_{e0}^2} \right) \varphi$$

или

$$\Lambda_D^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\varphi, \quad (8.17.5)$$

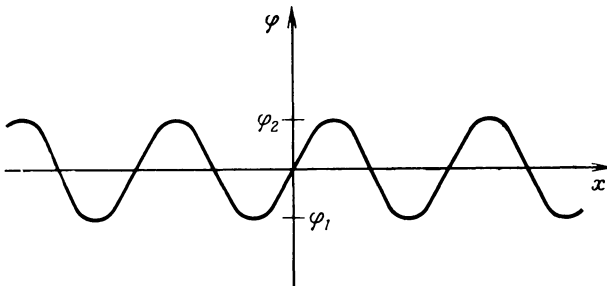
где характерный размер

$$\Lambda_D = (4\pi\bar{n}_0 e^2)^{-1/2} \left(\frac{1}{m_i V_{i0}^2} + \frac{1}{m_e V_{e0}^2} \right)^{-1/2}$$

может рассматриваться как обобщенный дебаевский радиус, в выражении для которого роль температуры играет $\int \frac{1}{2} m_\alpha v^2 f_\alpha dv$. Это уравнение описывает гармонические колебания, и его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_{\text{макс}} \sin \Lambda_D x. \quad (8.17.6)$$

Это решение соответствует стационарной во времени, но осциллирующей в пространстве равновесной конфигурации, причем электрические поля могут быть велики. В системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью U_0 , эта конфигурация воспринимается как волна с характерной длиной волны Λ_D . Вообще все результаты для равновесных конфигураций справедливы и для зависящих от времени распределений, если они стационарны в некоторой системе отсчета.



Фиг. 151. Потенциал $\varphi(x)$.

или

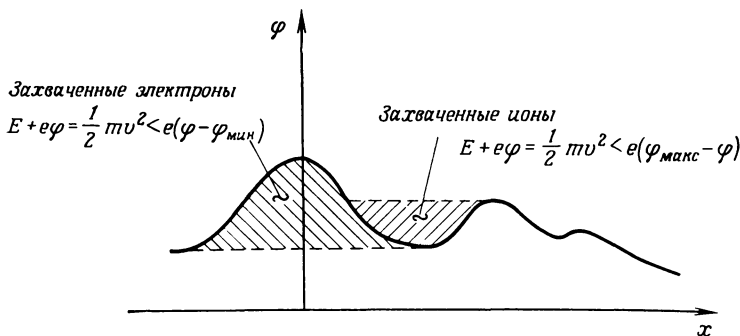
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi},$$

где

$$V(\varphi) = -4\pi\bar{n}_0 \left(V_{i0} m_i \sqrt{V_{i0}^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} + V_{e0} m_e \sqrt{V_{e0}^2 + \frac{2e\varphi}{m_e}} \right). \quad (8.17.4)$$

Отсюда видно, что φ можно рассматривать как координату частицы, движущейся в потенциальной яме $V(\varphi)$.

На фиг. 150 приведен качественный



Фиг. 152. Потенциал $\varphi(x)$ и области захваченных электронов и ионов.

17.2. Равновесие в присутствии запертых частиц

Широкий класс БГК-волн можно построить и в тех случаях, когда присутствуют частицы с энергией, меньшей максимальной потенциальной энергии, т. е. имеются частицы, запертые в потенциальной яме ($mv^2/2 < e\varphi_{\text{макс}}$).

Для построения функции распределения, соответствующей произвольному потенциалу $\varphi(x)$, удобно разделить все частицы на три группы: 1) пролетные частицы сорта α , $E > -e\varphi_{\text{мин}}$; 2) запертые частицы сорта α , $-e\varphi_{\text{мин}} > E > -e\varphi$, и 3) остальные частицы. Здесь $E = 1/2 m_\alpha v^2 + q_\alpha \varphi$. На фиг. 152, например, электроны заперты в области большого потенциала, а ионы — в области малого потенциала. Можно далее считать распределения ионов f_i и пролетных электронов f_e заданными и добиться согласования подбором функции распределения запертых электронов. Это достигается с помощью уравнения Пуассона

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\bar{n}_i e \int_{e\varphi}^{\infty} \frac{2f_i(E)}{\sqrt{2m_i(E - e\varphi)}} dE + 4\pi\bar{n}_e e \int_{-e\varphi_{\text{мин}}}^{\infty} \frac{2f_e(E)}{\sqrt{2m_e(E + e\varphi)}} dE + 4\pi\bar{n}_e e \int_{-e\varphi}^{-e\varphi_{\text{мин}}} \frac{2f_e(E)}{\sqrt{2m_e(E + e\varphi)}} dE. \quad (8.17.7)$$

Здесь было использовано равенство (напомним, что $E = 1/2 m_\alpha v^2 + q_\alpha \varphi$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv_x = 2 \int_{q_\alpha \varphi}^{\infty} \frac{f_\alpha(E)}{\sqrt{2m_\alpha(E - q_\alpha \varphi)}} dE.$$

Последнее слагаемое в правой части (8.17.7) дает плотность заряда запертых электронов и выражается через распределения ионов, пролетных электронов и потенциала.

Задача 8.17.1. Покажите, что для заданного (произвольного) распределения ионов, пролетных электронов и потенциала $\varphi(x)$ распределение запертых электронов, при котором полное распределение плотности заряда согласовано с $\varphi(x)$, дается выражением

$$2\bar{n}_e f_e(E) = \frac{\sqrt{2m_e}}{\pi} \int_{e\varphi_{\text{мин}}}^E \frac{1}{\sqrt{-V - E}} \frac{dg(V)}{dV} dV, \quad E < -e\varphi_{\text{мин}},$$

где

$$V = e\varphi,$$

$$g(V) = \frac{1}{4\pi e^2} \frac{d^2 V}{dx^2} + \bar{n}_i \int_V^\infty \frac{2f_i(E)}{\sqrt{2m_i(E-V)}} dE - \bar{n}_e \int_{-e\varphi_{\min}}^\infty \frac{2f_e(E)}{\sqrt{2m_e(E+V)}} dE$$

и $d^2 V/dx^2$ есть функция V .

Задача 8.17.2. В одномерном случае уравнение Пуассона для электростатических БГК-волн можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_0(x)}{\partial x^2} = - \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \frac{2}{m_{\alpha}} \int_{q_{\alpha} \varphi_0}^{\infty} \frac{f_{\alpha 0}(E)}{\sqrt{(2/m_{\alpha})(E - q_{\alpha} \varphi_0)}} dE, \quad (8.17.8)$$

где $E = (m_{\alpha}/2) V_x^2 + q_{\alpha} \varphi_0$ — энергия частицы, $V = e\varphi_0$, $\varphi_0(x)$ — равновесный электростатический потенциал и $f_{\alpha 0}(E)$ — равновесная функция распределения частиц сорта α .

Покажите, что если функция распределения $f_{\alpha 0}(E)$ для каждого сорта частиц является монотонно убывающей, т. е. $(\partial f_{\alpha 0}/\partial E)(E) \leq 0$, то уравнение (8.17.7) не имеет решений при периодическом потенциале $\varphi_0(x) = \varphi_0(x + L)$ [13].
(Указание. См. статью Энглемана, Фейкса и Минарди).

§ 18. СРАВНЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН С КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИЕЙ

Результаты и методы кинетической теории плазменных волн полезно сопоставить с гидродинамической теорией, изложенной в гл. 4. В кинетической теории изучают функцию распределения $f(x, v, t)$ в шестимерном фазовом пространстве, в то время как в гидродинамике — функции $n(x, t)$ или $V(x, t)$ в трехмерном конфигурационном пространстве. Что же мы выигрываем (или теряем), когда используем более сложный подход?

Гидродинамический подход проще кинетического подхода, основанного на бесстолкновительном уравнении Власова.

В гидродинамических уравнениях можно рассматривать эффекты, связанные со столкновениями частиц; например, в уравнениях движения можно учесть передачу импульса при столкновениях ионов с электронами (или ионами другого сорта, или нейтральными частицами).

Гидродинамические уравнения часто упрощаются с помощью разумных предположений. Например, произведение $\nabla \cdot \mathbf{P}$ можно заменить на ∇p , где p — скалярное давление. Столкновительный член разумно оценивать как νV , где ν — частота столкновений. Во многих случаях можно воспользоваться квазинейтральностью ($n_e \approx n_i$).

Гидродинамические уравнения не замкнуты, если нет независимого способа для вычисления давления p , поскольку имеется больше неизвестных, чем уравнений. Эти уравнения, представляющие собой уравнения для моментов, образуют бесконечную цепочку, и нужно быть проинициативным, чтобы суметь замкнуть ее на конечном числе уравнений. Иногда особая проинициативность не нужна: давление может быть положено равным нулю, если $\mu T \ll B_0^2/8\pi$. Скалярное адиабатически меняющееся давление — хорошее приближение для низкочастотных движений и т. д. Но во многих интересных случаях, когда, например, давление меняется из-за неоднородности магнитного поля или когда есть сильные равновесные электрические и магнитные поля, не удается предугадать или приближенно вычислить тензор \mathbf{P} .

В тех случаях, когда из уравнения Власова можно найти $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, моменты $\int f d\mathbf{v}$, $\int \mathbf{v}f d\mathbf{v}$, $\int v_i v_k f d\mathbf{v}$ вычисляются непосредственно. Таким образом, \mathbf{P} и уравнение состояния можно вывести из кинетического рассмотрения. Гидродинамические уравнения, выведенные таким путем, можно затем использовать для решения более сложных задач, которые трудно или невозможно решить, используя уравнение Власова. С такой последовательностью действий (решение гидродинамических уравнений с $\nabla \cdot \mathbf{P} \approx \nabla p \rightarrow$ строгое кинетическое рассмотрение \rightarrow усовершенствованные гидродинамические уравнения, согласующиеся с уравнением Власова) читатель может ознакомиться по статьям [14 — 16]. В этих статьях делается вывод, что для описания низкочастотных мод с большими длинами волн справедливы простые гидродинамические уравнения со скалярным адиабатическим давлением, если выполнены неравенства $k^2 a_{ci}^2 \ll \omega/\omega_{ci} \ll 1$, но для получения правильных результатов в случае $\omega/\omega_{ci} \ll k^2 a_{ci}^2 \ll 1$ необходимо пользоваться модифицированным анизотропным тензором давления.

В гидродинамических уравнениях теряется информация о микроструктуре (влиянии отдельных частиц плазмы на распространение волн). В гидродинамические уравнения не входят интегралы по скоростям типа

$$\int \frac{f d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}.$$

Поэтому из гидродинамической модели не следует затухания волн на частицах. Она не обнаруживает также и никаких «ландау»-неустойчивостей, обусловленных резонансным взаимодействием частиц с волнами. Эти потери информации о затухании весьма существенны. Кинетическая теория показывает, что при $T_e = T_i$ ионно-звуковая волна сильно затухает. Гидродинамика такого затухания не дает. Этот недостаток гидродинамики, возможно, объясняет трудности, с которыми сталкивались в ранних попытках наблюдать чисто ионно-звуковые волны. Еще одним не описываемым в гидродинамике эффектом, связанным с влиянием частиц в плазме, являются волны на циклотронных гармониках. Колебания с $\omega \approx \omega_c$ описывает как гидродинамическая (макроскопическая), так и кинетическая (микроскопическая) теория, поскольку на элементарный объем плазмы действует сила $q[\mathbf{V} \times \mathbf{B}]/c$. Колебания же с $\omega \approx n\omega_c$, когда $n > 1$, связаны с частицами, скорости которых отличаются от средней скорости \mathbf{V} , т. е. связаны с распределением по скоростям. Они не предсказываются гидродинамической теорией. Однако в лабораторных условиях такие колебания обнаружены.

Вообще отсутствие интегралов по скоростям свидетельствует о неспособности гидродинамической теории справиться с эффектами конечной температуры, за исключением случая низких частот и длинных волн.

То, что с помощью гидродинамической теории нельзя рассматривать неустойчивости, связанные с распределением частиц по скоростям, является существенным недостатком этой теории, поскольку во многих приложениях приходится иметь дело с удерживаемой плазмой, а удержание, как правило, влияет на распределение частиц.

§ 19. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛН

В настоящей главе мы изучали плазму, находящуюся в нескольких типичных состояниях: 1) в отсутствие полей, 2) в однородном магнитном поле \mathbf{B}_0 , 3) в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B}_0(x)$ и 4) при электростатическом удержании.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Равновесное состояние	ω_r	Характер	Замечания
В отсутствие полей	$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2\lambda_D^2\omega_p^2$ $\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2$ $\omega^2 = \frac{k^2C_s^2}{1 + k^2\lambda_D^2}$ $C_s^2 = \frac{\kappa T_e}{m_i}$	<p>Электростатический</p> <p>Электромагнитный</p> <p>Электростатический</p>	<p>Лепгмюровские колебания; плазменные волны</p> <p>Поперечные волны в диэлектрике</p> <p>Ионно-звуковые волны, сильно затухающие, кроме случая $T_e \gg T_i$. При $k\lambda_D > 1$ $\omega \rightarrow \omega_{pi}$, колебания происходят на ионной плазменной частоте</p>
$B = \text{const}$	$\omega \approx n\omega_c, \quad n \geq 1$ $\omega = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2c^2}}$ kC_s $\omega = kV_A$ $\omega = kV_A$	<p>Электростатический</p> <p>Как в отсутствие полей</p> <p>Как в отсутствие полей</p> <p>Как в отсутствие полей</p> <p>Электромагнитный</p> $V_A^2 = \frac{B^2}{4\pi n_i m_i}$ <p>Электромагнитный или смешанный</p>	<p>$k \perp B_0$, незатухающие бернштейновские моды</p> <p>$k \parallel B_0$</p> <p>$k \parallel B_0$</p> <p>$k \parallel B_0$</p> <p>Альфвеновская волна, низкочастотная $k \parallel B_0$ (не имеет аналога в случае $B \rightarrow 0$)</p> <p>$k \perp B_0$, магнитозвуковая волна</p>
$B = B_0(1 + \varepsilon x)$	$\omega = k \left(\frac{\kappa T}{m\omega_{ci}} \right) \frac{1}{B} \frac{dB}{dx}$ $\omega = k \left(\frac{\kappa T}{m\omega_{ci}} \right) \frac{1}{n} \frac{dn}{dx}$	<p>Электростатический и электромагнитный</p> <p>Электростатический и электромагнитный</p>	<p>k почти перпендикулярен B_0; в однородной плазме некоторые ветви этих волн переходят в альфвеновские или ионно-звуковые волны</p>

В каждом из этих случаев плазма вначале находилась в стационарном состоянии, т. е. распределение f_0 для электронов и ионов описывалось уравнением $\mathbf{v} \cdot \partial f_0 / \partial \mathbf{x} + (\mathbf{F}/m) \cdot (\partial f_0 / \partial \mathbf{v}) = 0$, и определенные по f_0 плотности заряда и тока соответствовали заданным полям. В задаче БГК плотность заряда получалась отличной от нуля. В плазме в постоянном магнитном поле \mathbf{B} или в отсутствие полей плотности заряда и тока равны нулю. Наконец, в удерживаемой плазме требовалось, чтобы в равновесии $4\pi \mathbf{J}/c = \nabla \times \mathbf{B}$.

Затем в каждом из этих случаев мы рассмотрели нестационарные, но близкие к стационарному состоянию функции распределения $f = f_0 + f_1(t)$, причем $f_1 \ll f_0$, и с помощью уравнения Власова показали, что они имеют волновой характер, т. е. $f_1 \approx \exp(-i\omega t) \exp(ik \cdot \mathbf{x}) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$. Из уравнения Власова получено уравнение $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k}, t = 0)$ и корни (k, ω) уравнения $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ определяли собственные колебания плазмы. В некоторых случаях частота колебаний или их скорость определялись свойствами траекторий отдельных заряженных частиц в заданных равновесных полях. Так, в замагниченной плазме частоты вращения частиц $eB/m_e c$ и $eB/m_i c$ представляют собой также частоты колебаний незатухающих электростатических и электромагнитных волн в плазме. Еще одним примером служат дрейфовые волны, распространяющиеся со скоростью дрейфа частиц или с токовой скоростью.

Другие собственные моды определяются не траекториями частиц во внешних полях, а свойствами плазмы как статистической системы заряженных частиц, связанных посредством создаваемых ими усредненных электрических (и магнитных) полей. Эта электрическая связь определяет характерные упругие свойства, которые изменяются с частотой: на высоких частотах ионы неподвижны и моды с частотой $\omega = \omega_{pe}$ и $\omega = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$ являются собственными колебаниями. При низких частотах начинают играть роль ионы и плазма ведет себя как упругий газ, в котором распространяются звуковые, точнее ионно-звуковые, волны со скоростью $\sqrt{k T_e / m_i}$ (если $T_e \gg T_i$). Если присутствуют внешние поля, то упругость плазмы может измениться, в результате чего могут возникнуть другие звуковые колебания: магнитный звук $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$, альфвеновские волны $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$ и т. п. В табл. 5 приведены частоты и другие сведения о некоторых плазменных волнах.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Journ. Phys. (U.S.S.R.), 10, 25 (1946).
2. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд-во «Наука», 1968.
3. Mathews J., Walker R. L., Mathematical Methods of Physics, 2nd ed., W. A. Benjamin, New York, 1970, p. 481.
4. Malmberg J. H., Wharton C. B., Phys. Rev. Letters, 13, 184 (1964).
5. Gould R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H., Phys. Rev. Letters, 19, 30, 219 (1967).
6. Ripin B. H., Pechacek R. E., Phys. Rev. Letters, 72, 1330 (1970).
7. Su C. H., Oberman C., Phys. Rev. Letters, 20, 427 (1968).
8. Bernstein I. B., Phys. Rev., 109, 10 (1958).
9. Михайловский А. Б., Колебания неоднородной плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1964.
10. Krall N. A., Drift Waves в книге «Advances in Plasma Physics» (eds. A. Simon, W. B. Thompson), vol. 1, Wiley, New York, 1968 (см. перевод: Н. Кролл, Дрейфовые волны, в книге «Физика высокотемпературной плазмы», изд-во «Мир», 1972).
11. Fried B. F., Conte S., The Plasma Dispersion Function, Academic, New York, 1961.
12. Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D., Phys. Rev., 108, 546 (1957).
13. Englemann F., Feix M. R., Minardi E., Phys. Fluids, 13, 535 (1971).
14. Rosenbluth M. N., Longmire C. L., Ann. Phys., 1, 120 (1957).
15. Rosenbluth M. N., Krall N. A., Rostoker N., Nucl. Fusion, Suppl., Part 1, 1962, p. 143.
16. Roberts K. V., Taylor J. B., Phys. Rev. Letters, 8, 197 (1962).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Allis W. P., Buchsbaum S. J., Bers A.*, Waves in Anisotropic Plasmas, M.I.T., Cambridge, Mass., 1963.
- Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.*, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, 1964.
- Bernstein I. B., Trehan S. K.*, Plasma Oscillations, I, Nucl. Fusion, 1, 3 (1960).
- Bernstein I. B., Trehan S. K., Weenink M. P. H.*, Plasma Oscillation, II, Nucl. Fusion, 4, 6 (1964).
- Budden K. G.*, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, N.Y., 1961.
- Гинзбург В. Л.*, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд-во «Наука», 1967.
- Силин В. П., Рухадзе А. А.*, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, 1961.
- D'Angelo N.*, Low Frequency Waves and Irregularities in the Ionosphere, Springer-Verlag, New York, 1968.
- Denisse J. F., Delcroix J. L.*, Plasma Waves, Interscience, New York, 1965.
- Gartenhaus S.*, Elements of Plasma Physics, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- Montgomery D. C., Tidman D. A.*, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964.
- Шафранов В. Д.*, Электромагнитные волны в плазме, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Госатомиздат, 1963.
- Simon A.*, Linear Oscillation of a Collisionless Plasma, в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Stix T. H.*, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York, 1962 (см. перевод: *Т. Стикс*, Теория плазменных волн, Атомиздат, 1965).

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

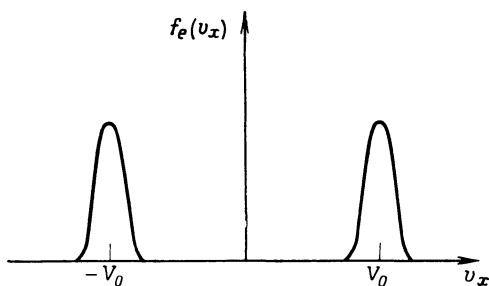
§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Власова, в котором не принимаются во внимание парные столкновения частиц плазмы, предсказывает существование различных стационарных состояний ($\partial f_0 / \partial t = 0$). Однако учитываемые в уравнении Власова коллективные взаимодействия между частицами плазмы обеспечивают механизм, благодаря которому функция распределения f_0 может релаксировать к состояниям с меньшей энергией, т. е. к термодинамическому равновесию. Этот механизм называется *неустойчивостью* и означает, что малые отклонения от начального состояния могут увеличиваться.

В гл. 7 было показано, что существуют термодинамически неравновесные состояния, которые тем не менее устойчивы; устойчиво, в частности, всякое изотропное распределение по скоростям, для которого $f_0(v^2)$ монотонно убывает, т. е. $\partial f_0 / \partial v^2 < 0$. И все же, если стационарное состояние достаточно сильно отличается от состояния термодинамического равновесия, оно будет неустойчивым; примером этому могут служить рассмотренные в § 12 гл. 8 моды неоднородной плазмы, рост которых означает неустойчивость стационарного состояния плазмы.

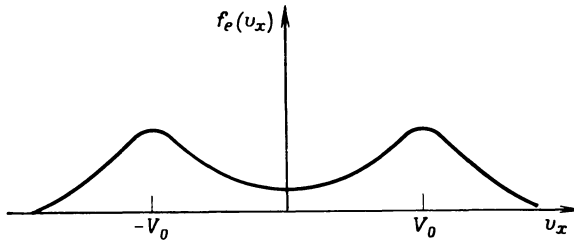
Много примеров неустойчивости пространственно ограниченной плазмы было разобрано в гл. 5, в которой динамика плазмы изучалась с помощью гидродинамических уравнений. В настоящей главе мы изучим устойчивость плазмы, в которой *распределение по скоростям* отличается от термодинамически равновесного. В этом случае почти всегда необходимо использовать уравнение Власова, поскольку в гидродинамическую теорию входят лишь моменты распределения по скоростям¹⁾. Проблема устойчивости тесно связана с общей задачей о волнах в плазме, разобранной в гл. 8. Основной вопрос таков: затухают или нарастают собственные колебания плазмы?

Волны могут стать неустойчивыми благодаря одной из двух возможностей. Первая состоит в том, что собственные колебания неустойчивой плазмы представляют собой видоизмененные собственные моды устойчивой плазмы. Ярким примером такого рода служит шланговая неустойчивость [см. (3.10.13)], а именно: собственными колебаниями однородной изотроп-



Фиг. 153. Функция распределения для двух пучков холодных электронов, относительная скорость которых превышает тепловую разброс по скоростям.

¹⁾ Однако следует отметить, что существует класс неустойчивостей, связанных с неравновесным характером распределения по скоростям, который можно рассмотреть на основе гидродинамических уравнений. Например, распределение по скоростям, приведенное на фиг. 153, можно трактовать как распределение *двух* электронных холодных жидкостей, одна из которых движется со скоростью V_0 , а другая — со скоростью $-V_0$. Такой прием был использован в § 5 гл. 5. Если же изучаются пучки горячих электронов (фиг. 154), то аккуратное рассмотрение вопроса об устойчивости соответствующего распределения провести в рамках гидродинамики уже не удастся.

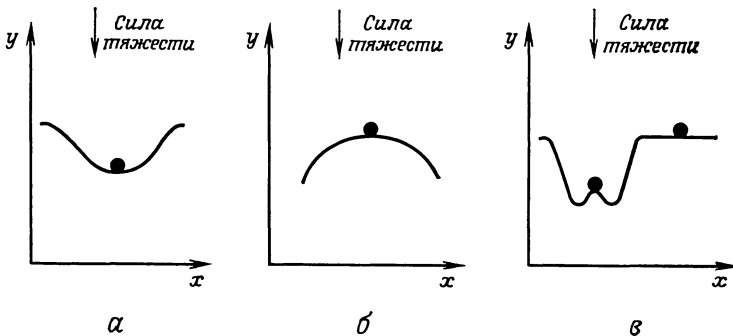


Фиг. 154. Функция распределения для двух пучков горячих электронов, относительная скорость которых меньше или порядка теплового разброса по скоростям.

ной плазмы в магнитном поле являются альфвеновские волны, которые в анизотропной плазме с $T_{\parallel B_0} > T_{\perp B_0}$ раскачиваются за счет избытка энергии частиц, движущихся параллельно магнитному полю. Другая возможность состоит в том, что в неустойчивой плазме появляются собственные колебания, *характерные* лишь для данного распределения и не имеющие аналога в однородной изотропной устойчивой плазме. Примером таких неустойчивостей служат дрейфовые волны в неоднородной замагниченной плазме. Существуют разновидности дрейфовых волн, присущие лишь неоднородной плазме, аналога которых в устойчивой однородной плазме нет. Таким образом, благодаря особенностям неоднородной плазмы в ней могут существовать волновые движения, отличные от существующих в других равновесных ситуациях, и волны эти нарастают во времени.

Поскольку как в естественных, так и в лабораторных условиях плазма, как правило, не находится в термодинамическом равновесии, значительный интерес представляет задача о том, какой величины (и какого типа) отклонения от термодинамического равновесия допустимы с точки зрения устойчивости. В этой связи следует напомнить, что уравнение Власова справедливо лишь в течение более коротких, чем τ_c , промежутков времени, так что понятие устойчивости несколько относительно: неустойчивая плазма, в которой за время τ_c рост возмущений мал, практически может рассматриваться как устойчивая. Кроме того, уровень амплитуд, до которого нарастают неустойчивые волны, определяется резервуаром энергии, питающим неустойчивость. Ситуации, в которых волны нарастают только до допустимого уровня, также могут рассматриваться как устойчивые.

Термин «устойчивость» часто используется в довольно широком смысле. Грубо говоря, если небольшие возмущения приводят к малым эффектам, например, если небольшое локальное увеличение плотности заряда не влечет за собой значительного увеличения энергии поля, система называется устойчивой. Например, положение мяча в яме устойчиво (фиг. 155, а), а на горке неустойчиво (фиг. 155, б). Положения мяча на плато или на не-



Фиг. 155. Различные виды равновесия.

а — устойчивое; б — неустойчивое; в — безразличное; неустойчивость, насыщающаяся при небольших отклонениях от равновесия.

большой кочке вблизи дна ямы могут рассматриваться как устойчивые, поскольку мяч на плато не скатится слишком быстро (скорость роста неустойчивости мала), а вблизи дна ямы его энергия изменится лишь незначительно, даже если он и скатится. Величина полей, возникших в результате неустойчивости, определяет темп процессов переноса. Амплитуды допустимых флуктуаций различны в разных конкретных ситуациях, но, как правило, устойчивость плазмы связывается с некоторым предельно допустимым уровнем полей в плазме.

При изучении устойчивости плазмы используют два подхода. Первый, прямой, подход представляет собой анализ собственных колебаний, в котором развитие во времени малого возмущения вычисляется непосредственно с помощью уравнения Власова. Этот подход позволяет найти инкременты и показывает, какого типа волны являются неустойчивыми и могут наблюдаться в эксперименте. Несмотря на сложность решения уравнения Власова для произвольных возмущений, если геометрия не предельно проста, большинство результатов классической теории устойчивости получено таким путем. Другой подход — изучение неустойчивости, рассматриваемой как результат отклонения от термодинамического равновесия. Вообще говоря, только часть энергии неустойчивой плазмы может передаваться флуктуационным полям. Эта часть называется *свободной энергией*; верхнюю границу свободной энергии можно вычислить на основе конкретных, справедливых для данной системы ограничений. От термодинамического подхода нельзя ожидать подробного анализа устойчивости, но с его помощью можно установить границу устойчивости и во многих случаях получить полезные оценки свободной энергии.

В данной главе мы будем применять при изучении одной и той же системы и анализ собственных колебаний, и термодинамический подход; это позволит сопоставить оба метода и получаемые с их помощью результаты.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ МОНОТОННО УБЫВАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. ТЕОРЕМА НЬЮКОМБА — ГАРДНЕРА [1, 2]

Оба подхода: термодинамический и метод собственных колебаний, можно использовать при решении задачи об устойчивости плазмы в отсутствие внешних полей, в которой равновесная функция распределения $f_{\alpha 0}$ по скоростям монотонно убывает.

В присутствии электростатической волны, распространяющейся в направлении \mathbf{k} , возмущенная функция распределения описывается, как было показано в гл. 8, выражением

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}(\mathbf{v}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)],$$

в котором частота ω определяется уравнением

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u - \omega/|\mathbf{k}|} \frac{\partial}{\partial u} \left[F_{e0}(u) + \frac{m_e}{m_i} F_{i0}(u) \right] du = 0. \quad (9.2.1)$$

Здесь функции $F_{\alpha 0}(u)$ представляют собой проекции распределений на направление \mathbf{k} :

$$F_{\alpha 0}(u) = \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta \left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|} \right) d\mathbf{v}.$$

Контур интегрирования проходит ниже полюса $u = \omega/|\mathbf{k}|$. Если из (9.2.1) следует, что мнимая часть ω_i собственной частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$ больше нуля ($\omega_i > 0$), то равновесная функция распределения $f_{\alpha 0}$ *неустойчива*. Если же $\omega_i < 0$, равновесие является устойчивым и стационарным в течение времен, меньших времени между парными столкновениями $\tau_{..}$. Устойчивость монотонно убывающей функции распределения можно непосредственно доказать с помощью (9.2.1).

Записывая $\omega = \omega_r + i\omega_i$ и предполагая, что $\omega_i > 0$, интегрирование по скорости в (9.2.1) можно провести вдоль действительной оси скорости u , так как полюс $u = (\omega_r + i\omega_i)/|\mathbf{k}|$ лежит выше действительной оси. Поскольку распределение $f_{\alpha 0}$ по предположению неустойчиво, ω_r и ω_i удовлетворяют равенству

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u - \omega_r/|\mathbf{k}|}{\left(u - \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|}\right)^2 + \frac{\omega_i^2}{k^2}} \frac{\partial F}{\partial u} du - \frac{i\omega_i}{|\mathbf{k}|} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial F/\partial u) du}{\left(u - \frac{\omega_r}{|\mathbf{k}|}\right)^2 + \frac{\omega_i^2}{k^2}} = 0, \quad (9.2.2)$$

где $F \equiv F_{e0} + (m_e/m_i) F_{i0}$. Приравнявая мнимую и действительную части этого уравнения нулю, мы получаем, что для любого его решения с $\omega_i > 0$ должны выполняться следующие два равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial F/\partial u) du}{(u - \omega_r/|\mathbf{k}|)^2 + \omega_i^2/k^2} = 0 \quad (9.2.3)$$

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u \partial F/\partial u}{(u - \omega_r/|\mathbf{k}|)^2 + \omega_i^2/k^2} du = 0, \quad (9.2.4)$$

поскольку в силу (9.2.3) интеграл в (9.2.2), содержащий $\omega_r/|\mathbf{k}|$, обращается в нуль. Однако, так как для всякого монотонно убывающего распределения $u \partial F/\partial u \leq 0$, интеграл в (9.2.4) отрицателен и, следовательно, (9.2.4) не может выполняться ни при каких ω_r и ω_i . Таким образом, анализ собственных колебаний приводит к следующему заключению.

Если для любого направления \mathbf{k} спроектированная на \mathbf{k} функция распределения

$$F(u) = \int \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) \left[f_{e0}(\mathbf{v}) + \frac{m_e}{m_i} f_{i0}(\mathbf{v}) \right] d\mathbf{v} \quad (9.2.5)$$

монотонно убывает по обе стороны от максимума при $u = 0$ ($u \partial F/\partial u \leq 0$), то распределение $F(u)$ устойчиво¹⁾.

Отсюда можно сделать вывод, что все *изотропные* распределения устойчивы (задача 9.2.1).

Полученный результат не зависит от системы отсчета. Если в какой-либо системе отсчета F — монотонно убывающая функция, то распределение устойчиво (задача 9.2.2).

Задача 9.2.1. Покажите, используя (9.2.4), что любое изотропное распределение $f_0(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ устойчиво, независимо от того, является f_0 монотонно убывающей функцией или нет.

Непосредственным вычислением покажите, что распределение

$$f_{i0} = f_{e0} = A\delta(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - v_0^2)$$

устойчиво. Как выглядит это распределение в пространстве скоростей для одномерного и двумерного случаев? Устойчиво ли оно?

Задача 9.2.2. Распространите теорему (9.2.5) на случай плазмы, движущейся как целое со скоростью v_0 , так что при всех u справедливо неравенство $(u - v_0) \partial F/\partial u \leq 0$.

¹⁾ Относительно рассматриваемых здесь электростатических возмущений. — Прим. ред.

С термодинамической точки зрения устойчивость монотонно убывающих распределений ¹⁾ есть следствие двух свойств: сохранения энергии и сохранения объема в фазовом пространстве [теорема Лиувилля, утверждающая, что $f(x, v, t)$ постоянна вдоль фазовой траектории, является прямым следствием уравнения Власова $Df_0/Dt = 0$]. Последнее свойство ²⁾ не связано с предположением о малости возмущений и линеаризацией уравнения Власова. Оно не зависит и от того, каким образом по распределению f находят поля, определяющие в свою очередь траектории частиц. Для иллюстрации термодинамического подхода рассмотрим одномерную модель плазмы с произвольной начальной функцией распределения $F(x, u^2, 0)$. В качестве примера на фиг. 156, а изображены линии уровня F в фазовой плоскости x, u^2 , причем величины F в областях a, b, c, d упорядочены следующим образом: $F(a) > F(b) > F(c) \dots$. Критерий устойчивости связан с вопросом: какое состояние, которое может быть достигнуто из начального, обладает наименьшей внутренней (кинетической) энергией? Иными словами, чему соответствует минимальное значение интеграла энергии

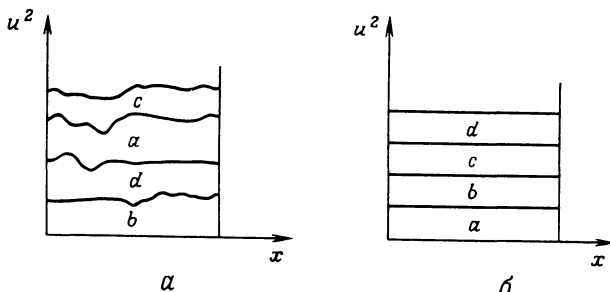
$$\int \frac{1}{2} m u^2 F(x, u^2) dx du, \tag{9.2.6}$$

совместимое с теоремой Лиувилля.

Теорема Лиувилля позволяет переставлять между собой области $F = \text{const}$ и изменять их форму, но площадь этих областей должна оставаться неизменной. Поскольку интегрирование в (9.2.6) идет с весом u^2 , ясно, что минимальное значение энергии (9.2.6) достигается, когда области наибольшей плотности F_0 лежат как можно ближе к $u^2 = 0$. Подобно смеси жидкостей с различными удельными весами, наиболее тяжелые слои идут ко «дну» ($u^2 = 0$). Это иллюстрируется расположением уровней на фиг. 156, б, где функция распределения не зависит от x и монотонно убывает по u^2 .

Если же в начальном состоянии функция распределения уже является монотонно убывающей, то приведенное рассмотрение показывает, что малые возмущения не растут. В частности, максимальное изменение кинетической энергии [и, согласно закону сохранения энергии, равное ему по величине изменение энергии полей $\int (E^2/8\pi) dx$] не может быть больше, чем начальное возмущение кинетической энергии. Распространение этих утверждений на трехмерный случай не составляет труда. Приведенное доказательство принадлежит Гарднеру [2].

Доказательство Гарднера дает пример простоты и общности, достигаемых при анализе устойчивости с помощью законов сохранения. Это доказа-



Фиг. 156. «Термодинамически» устойчивое состояние с минимальной кинетической энергией, соответствующее «термодинамически» неустойчивому начальному состоянию.

а — начальное состояние; б — состояние с минимальной кинетической энергией.

¹⁾ Здесь речь идет о монотонном убывании не спроектированных распределений. а самих f . — Прим. ред.

²⁾ Как, впрочем, и первое. — Прим. ред.

тельство имеет следующие особенности: 1) оно нелинейное (т. е. из рассмотрения не выбрасывается ни один член); 2) оно справедливо при учете как кулоновских, так и магнитных взаимодействий, поскольку предел для кинетической энергии ограничивает и полную электромагнитную энергию, $\int dx (E^2 + V^2)$; 3) может быть распространено на случаи, чересчур сложные даже для применения теории возмущений.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕМОНОТОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. ДВУХПОТОКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Если функция распределения по скоростям имеет несколько максимумов, то теорема Гарднера не дает ответа на вопрос об устойчивости.

Простым примером плазменной неустойчивости служит хорошо известная двухпотоковая неустойчивость.

Инкремент двухпотоковой неустойчивости можно получить из уравнения Власова; кроме того, существует и другой довольно общий метод анализа такой неустойчивости без прямого вычисления инкремента. В данном параграфе мы используем оба эти метода.

Двухпотоковая неустойчивость с успехом используется в усилителях бегущей волны [3]; ей же приписываются неудачи в осуществлении некоторых идей в области управляемых термоядерных реакций [4, 5].

Эта неустойчивость имеет прямое отношение к методам нагрева плазмы, в частности к *турбулентному нагреву*. В качестве первого примера рассмотрим плазму в отсутствие полей со следующей равновесной функцией распределения:

$$\begin{aligned} f_{i0} &= \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_0), \\ f_{e0} &= \delta(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

Под действием электростатического возмущения в этой системе возбуждаются колебания вида $e^{-i\omega t}$, частота которых, согласно (8.9.6), определяется нулями диэлектрической проницаемости

$$D = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega / |\mathbf{k}|} du = 0, \quad (9.3.2)$$

где распределения имеют вид

$$\begin{aligned} F_{i0} &= \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0}{|\mathbf{k}|}\right) \quad \text{для ионов,} \\ F_{e0} &= \delta(u) \quad \text{для электронов,} \end{aligned}$$

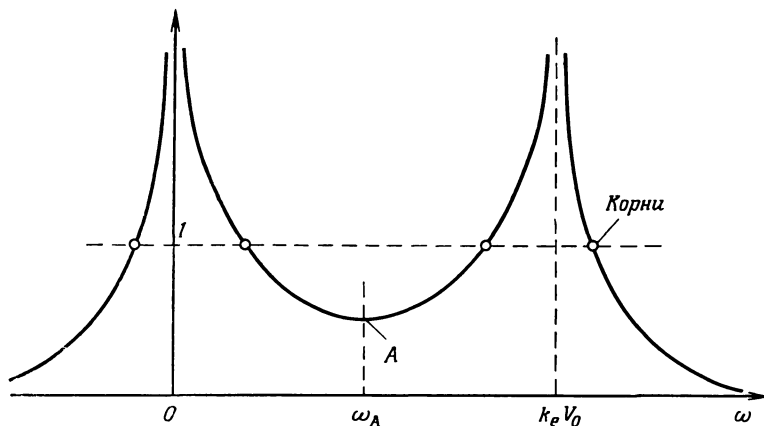
а путь интегрирования, как объяснялось в § 4 гл. 8, лежит ниже полюса $u = \omega / |\mathbf{k}|$. Интегрирование в (9.3.2) с δ -функциями проводится элементарно и приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 - \omega)^2}. \quad (9.3.3)$$

На фиг. 157 изображена зависимость правой части уравнения ¹⁾ (9.3.3) от ω . Вещественные корни определяются по пересечению кривой (фиг. 157) с горизонтальной штриховой прямой, проходящей через 1 на оси ординат. Когда ордината A локального минимума меньше 1, уравнение (9.3.3) имеет четыре вещественных корня. Если же A больше 1, имеются два вещественных и два комплексно-сопряженных корня, один из которых соответствует неустойчивости. Минимум A находится в точке

$$\omega_A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 \left[\frac{(\omega_{pe} / \omega_{pi})^{2/3}}{(\omega_{pe} / \omega_{pi})^{2/3} + 1} \right].$$

¹⁾ Исследование уравнения такого типа подробно проведено в гл. 5. — *Прим. ред.*



Фиг. 157. Графики правой и левой частей дисперсионного уравнения для колебаний в двух-потоковой плазме

$$1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(k \cdot V_0 - \omega)^2}.$$

Показана устойчивая ситуация, когда все четыре корня вещественны.

Если бы электроны и ионы имели одинаковые массы, то положение минимума A находилось бы в точке $\omega_A = 1/2 k \cdot V_0$ и при уменьшении k ($V_0 = \text{const}$) неустойчивость впервые проявилась бы для волны, скорость которой равна полусумме скоростей двух потоков. В такой формулировке этот вывод не зависит от системы отсчета, в которой наблюдается развитие неустойчивости. При произвольных массах частиц пучков скорости неустойчивых волн лежат между скоростями пучков.

Условие неустойчивости состоит в том, что при $\omega = \omega_A$ правая часть в (9.3.3) больше 1, и может быть записано в виде

$$|k \cdot V_0| < \omega_{pe} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{pe}} \right)^{2/3} \right]^{3/2} \quad (\text{критерий двухпотоковой неустойчивости}). \quad (9.3.4)$$

Поскольку здесь не важен знак заряда, критерий (9.3.4) можно также применить к двум электронным потокам на нейтрализующем фоне неподвижных ионов, если заменить ω_{pi}/ω_{pe} на $\omega_{pe1}/\omega_{pe2}$. Условие (9.3.4) можно было бы получить также и из гидродинамических уравнений.

Неравенство (9.3.4) особенно легко удовлетворяется для длинноволновых колебаний при достаточно малой скорости потока V_0 , а также если гребни волн пространственного заряда почти параллельны потоку, т. е. при $k \cdot V_0 \ll |k| V_0$. Однако, если $k \cdot V_0$ становится много меньше порогового значения, определяемого критерием (9.3.4), инкремент ω_i становится малым. Кроме того, при достаточно малой скорости V_0 становится существенным тепловой разброс скоростей. В самом деле, никакой реальный пучок не обладает распределением (9.3.1); этим распределением можно приближенно пользоваться для волн, фазовая скорость которых (в системе пучка) значительно превосходит тепловой разброс по скоростям.

Таким образом, для применимости проведенного расчета двухпотоковой неустойчивости необходимо выполнение условий

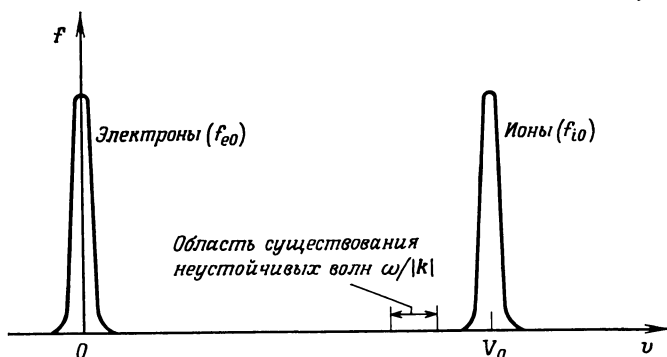
$$\left| \frac{k \cdot V}{k} - \frac{\omega}{k} \right| \gg \sqrt{\frac{\chi T_i}{m_i}} \quad \text{и} \quad V_0 \gg \sqrt{\frac{\chi T_e}{m_e}}.$$

Тепловые эффекты мы учтем в явном виде в § 6 настоящей главы.

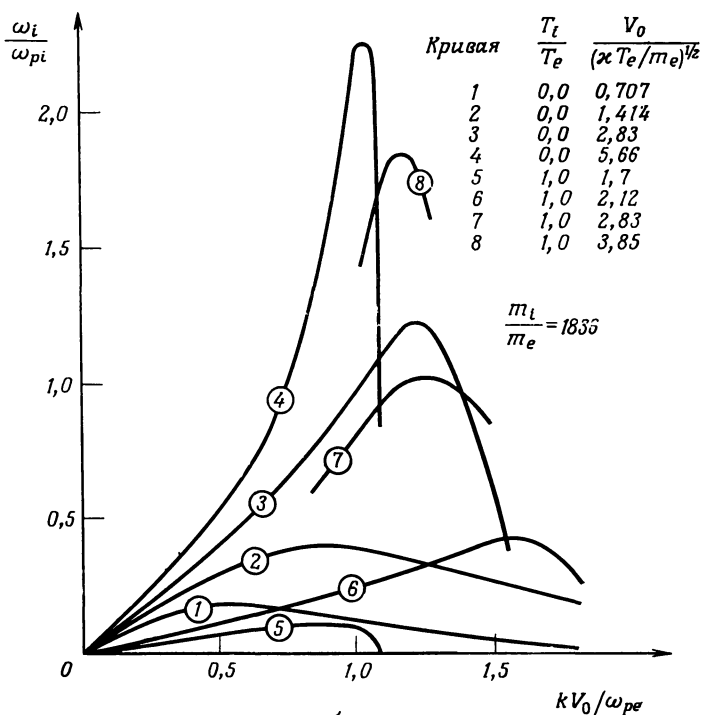
Хотя критерий устойчивости удается получить из (9.3.3) в явном виде, общее решение уравнения (9.3.3) для $\omega(\mathbf{k})$ не может быть найдено аналитически. Однако нетрудно показать¹⁾, что максимальный инкремент имеют волны с $\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 \approx \omega_{pe}$ (условие максимального инкремента электрон-ионной двухпотоковой неустойчивости). (9.3.5)

Из (9.3.1) можно видеть, что V_0 есть скорость ионного потока, так что волна движется примерно со скоростью ионов (см. также задачу 9.3.2). Решение дисперсионного уравнения для волн с максимальным инкрементом имеет вид

$$\omega \approx \omega_{pe} + e^{\pm 2\pi i/3} \left(\frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}}{2} \right)^{1/3} \approx \omega_{pe} \left[1 + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_e}{2m_i} \right)^{1/3} \right]. \quad (9.3.6)$$



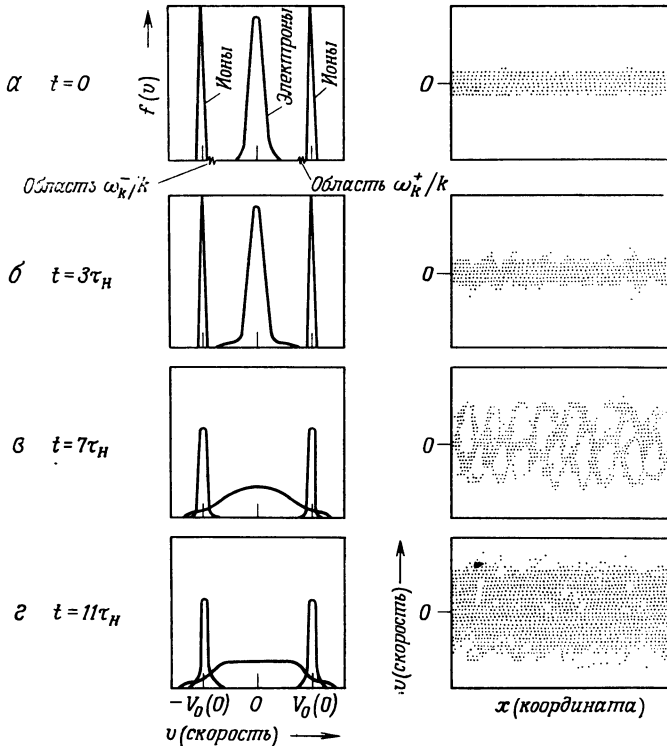
а



б

Фиг. 158. Функции распределения для холодного ионного пучка, движущегося со скоростью V_0 относительно холодных электронов (а), и кривые зависимостей инкремента от относительной скорости при различных температурах электронов и ионов (б) [5].

¹⁾ Например, разрешив (9.3.3) относительно k . — Прим. ред.



Фиг. 159. Взаимодействие пучков холодных ионов, движущихся сквозь холодную (вначале) электронную плазму, [6].

Результаты получены моделированием на ЭВМ. Показана эволюция функции распределения в процессе развития неустойчивости. Время τ_H равно обратной величине максимального инкремента, вычисленного по линейной теории. Отношение масс электронов и ионов принималось равным $m_e/m_i = 1/27$; в начальный момент времени $W_{Ke}/m_e V_0^2(0) = 1/25$.

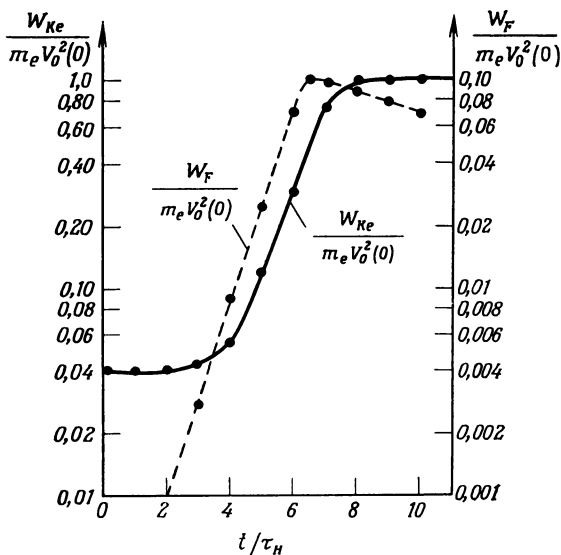
На фиг. 158, а показаны функции распределения (9.3.1) и область существования неустойчивых волн. На фиг. 158, б приведены графики зависимости инкремента ω_i от волнового числа.

Выводы кинетической теории двухпоточковой неустойчивости были детально подтверждены методом численного моделирования. В таком эксперименте ЭВМ вычисляет траектории заряженных частиц в плазме; эти траектории определяются реальным взаимодействием частиц между собой. Кинетическая теория, основанная на уравнении Власова, должна согласовываться с этими вычислениями, в которых прослеживается поведение отдельных частиц, по крайней мере в течение времен, малых по сравнению с τ_c . Как показано на фиг. 159—161, наблюдается хорошее согласие между кинетической теорией и непосредственным численным моделированием взаимодействия многих частиц.

Задача 9.3.1. Проверьте выражения (9.3.6) для частоты и инкремента наиболее быстро растущих ленгмюровских колебаний в плазме, образованной движущимися навстречу друг другу электронным и ионным потоками; покажите, что при максимальном инкременте частота ω записывается в виде $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0 / (1 - S e^{\pm i\pi/3})$, где S — вещественное число.

Задача 9.3.2. Покажите, что в системе координат, в которой ионы покоятся, имеют место соотношения $\omega_r \approx \omega_i \ll \omega_{pe}$.

На фиг. 159 (слева) показана функция распределения в различные последовательные моменты времени t , начиная с $t = 0$. Эти распределения

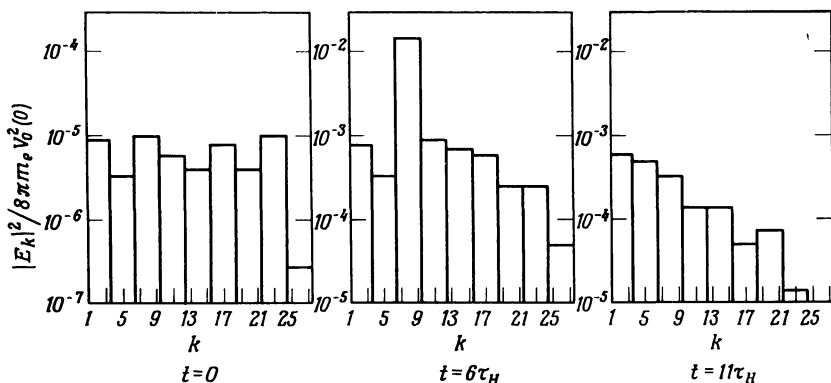


Фиг. 160. Зависимость кинетической энергии электронов W_{Ke} (сплошная кривая) и полной энергии поля W_F (штриховая кривая) от времени. Результаты получены моделированием на ЭВМ взаимодействия пучков холодных ионов с электронной плазмой (см. фиг. 159). Отношение m_e/m_i принималось равным $1/100$; в начальный момент времени $W_{Ke}/m_e V_0^2(0) = 1/25$.

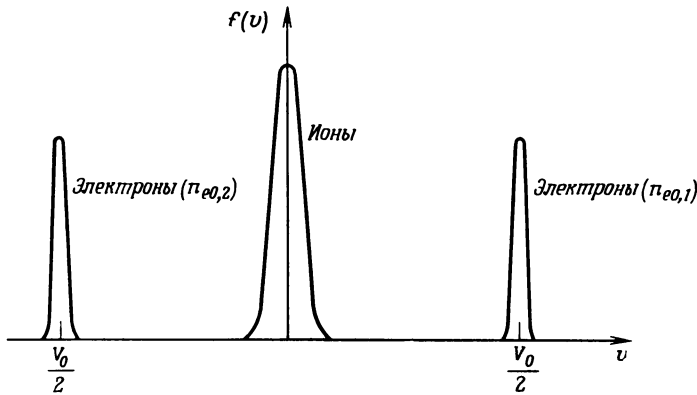
теории инкремента, из данных, приведенных на фиг. 159 и 160, следует еще один эффект, который можно было бы предсказать на основе линейной теории. С момента $t = 11\tau_H$ (фиг. 159) электрон-ионное распределение должно быть устойчивым, поскольку, хотя пики в распределении остались, функция распределения $F_0(u) = F_{e0} + (m_e/m_i) F_{i0}$ стала монотонно убывающей. Как видно из фиг. 160, электростатическая энергия к этому моменту времени перестала нарастать, как и следовало ожидать согласно теореме Гарднера (§ 2 настоящей главы). Нужно отметить, однако, что условия на функцию распределения, при которых эта теорема верна, не выполнены в более ранние моменты времени (например, в момент времени, соответствующий фиг. 159, в), поскольку распределение сильно меняется в про-

не являются δ -функциями скорости, но до тех пор, пока они не начинают перекрываться, их можно аппроксимировать выражением (9.3.1). Кинетическая теория предсказывает, что такое распределение неустойчиво. Моделирование на ЭВМ подтверждает это. Из фиг. 160 видно, что электростатическая энергия волн ($W_E = \sum_k E_k^2 / 8\pi$) возрастает с инкрементом порядка ω_i , макс (9.3.6) и что энергия электронов увеличивается с такой же скоростью. Точки на фиг. 159 (справа) обозначают положение электронов в плоскости x, v . Возбуждаются, как видно из фиг. 161, одновременно много волн с различными волновыми числами; это объясняет, почему эффективная скорость раскочки несколько меньше *максимального* инкремента.

Наряду с подтверждением существования неустойчивости и вычисленного по линейной



Фиг. 161. Зависимость энергии волн $|E_k|^2 / [8\pi m_e V_0^2(0)]$ от волнового числа k в различные моменты времени, полученная с помощью моделирования на ЭВМ (см. фиг. 159).



Фиг. 162. Функции распределения для двух холодных электронных пучков, движущихся навстречу друг другу на фоне холодных ионов.

странстве, а подменять истинную функцию распределения функцией, усредненной по пространству:

$$|f_{\alpha}(\mathbf{v}) = \int_{-L}^L f_{\alpha}(x, \mathbf{v}) \frac{dx}{2L},$$

было бы неправильно.

Частным примером двухпотоковой неустойчивости, для которого дисперсионное уравнение может быть решено точно, является неустойчивость, возникающая, когда два электронных сгустка одинаковой плотности n_0 пролетают один через другой с относительной скоростью V_0 (фиг. 162). При этом ионы, благодаря которым система остается нейтральной, считаются неподвижными (об этом пренебрежении ионными потоками в случае высокочастотных неустойчивостей говорят как о приближении бесконечно большой массы ионов, $\omega_{pi}^2 \rightarrow 0$). В этом случае дисперсионное уравнение (9.3.3) принимает вид [заметим, что $\omega_p^2 = 4\pi (n_{e1} + n_{e2})(e^2/m_e) = 2\omega_{pe1}^2 = 2\omega_{pe2}^2$]

$$1 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kV_0/2)^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega + kV_0/2)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \tag{9.3.7}$$

причем последним членом можно пренебречь, поскольку $\omega^2 \gg \omega_{pi}^2$.

Уравнение (9.3.7) является квадратным относительно ω^2 . Его решение записывается следующим образом:

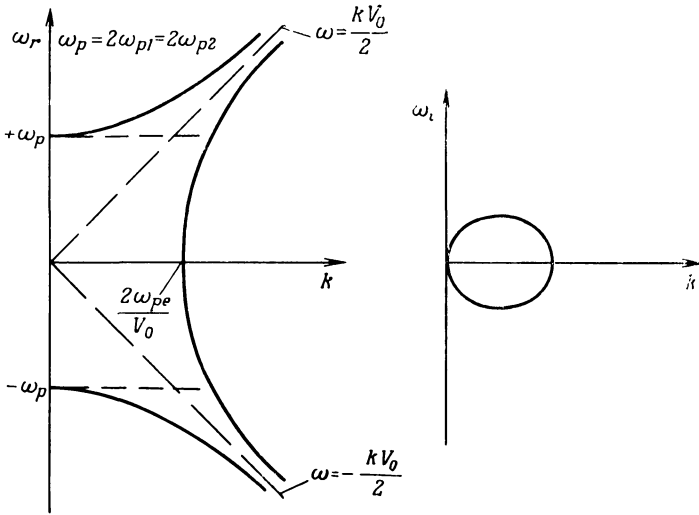
$$\omega^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{2} + \frac{k^2 V_0^2}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_{pe}^2}{2} + \frac{k^2 V_0^2}{4}\right)^2 + \frac{k^2 V_0^2}{4} \left(\omega_{pe}^2 - \frac{k^2 V_0^2}{4}\right)}. \tag{9.3.8}$$

Критерий неустойчивости, соответствующий (9.3.7) (в пренебрежении ω_{pi}^2), имеет вид

$$|kV_0| < \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(\frac{\omega_{pe1}}{\omega_{pe2}} \right)^{2/3} \right]^{3/2} = 2\omega_{pe} \text{ (для двухпотоковой неустойчивости)}. \tag{9.3.9}$$

Этот критерий можно получить так же, как (9.3.4), а можно и непосредственно из (9.3.8). Инкремент падает до нуля при $V_0 \rightarrow \infty$, а максимальный инкремент

$$\omega_{i, \text{ макс}} = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{8}} \text{ (максимальный инкремент неустойчивости двух электронных потоков)} \tag{9.3.10}$$



Фиг. 163. Зависимость частоты (ω_r) и инкремента (ω_i) плазменных волн от волнового числа k для двух холодных электронных пучков, движущихся со скоростями $\pm V_0/2$ на фоне холодных ионов.

достигается для волнового числа, удовлетворяющего равенству

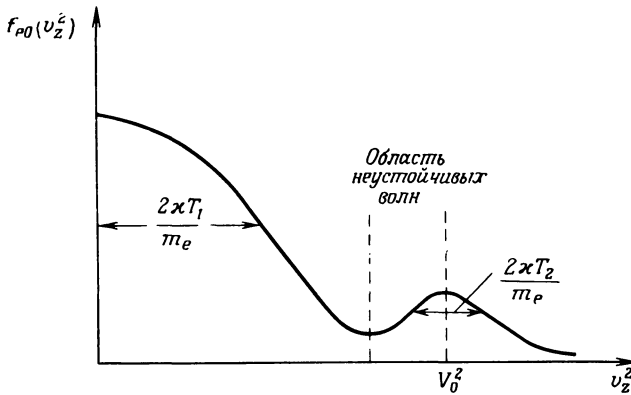
$$kV_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \omega_{pe} \quad (\text{длина волны наиболее быстро нарастающей} \quad (9.3.11) \\ \text{неустойчивости двух электронных потоков}).$$

Помимо существования длинноволновой неустойчивости ($kV_0 < \omega_{pe}$), двухпотоковая плазма отличается от обычной плазмы (без потоков) своими диэлектрическими свойствами. Это видно из дисперсионных кривых (сплошные линии на фиг. 163) для ленгмюровских колебаний в двухпотоковой плазме при сравнении их с кривыми $\omega(k)$ для случая холодной плазмы ($k\lambda_D \rightarrow 0$) с одnogорбой функцией распределения (штриховая линия на фиг. 163), в которой оба сорта частиц покоятся. Правая ветвь описывает новый класс мод с коротковолновой асимптотикой ($\omega \approx kV_0/2$), частоты которых существенны только при $|k| > 2\omega_{pe}/|V_0|$.

Задача 9.3.3. Что происходит с рассмотренными новыми модами при $V_0 \rightarrow 0$?

§ 4. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕМОНОТОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЕ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПУЧКА С ТЕПЛОВОМ РАЗБРОСОМ СКОРОСТЕЙ

Неустойчивость холодных пучков могла бы быть рассчитана в рамках гидродинамической теории. Однако возникает вопрос, при какой температуре пучков гидродинамика неприменима. Ответ нетрудно получить из фиг. 158. Когда тепловой разброс пучков по скоростям достаточно велик, мы должны учитывать влияние резонансных частиц, имеющих в области неустойчивых волн, которые движутся со скоростью волны. Это влияние описывается полюсами Ландау в интегралах по скоростям, определяющих диэлектрические свойства плазмы.



Фиг. 164. Функция распределения электронов в случае теплого электронного пучка, движущегося сквозь плазму с максвелловским распределением электронов со скоростью, превышающей тепловой разброс, $V_0^2 > 2\kappa T_e/m_e$.

В отличие от ранее рассмотренной пучковой неустойчивости рассмотрим распределение электронов, обладающее небольшим горбом в хвосте максвелловского распределения (фиг. 164) и описываемое выражением

$$f_{e0} = \frac{n_1}{n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_1} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e v^2}{2\kappa T_1} \right) + \frac{n_2}{n_e} \delta(v_x) \delta(v_y) \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[-\frac{m_e (v_z - V_0)^2}{2\kappa T_2} \right] + \exp \left[-\frac{m_e (v_z + V_0)^2}{2\kappa T_2} \right] \right\}, \quad (9.4.1)$$

$$n_e = n_1 + n_2 \gg n_2, \quad T_2 \ll T_1, \quad V_0 \gg \frac{2\kappa T_1}{m_e},$$

$$f_{i0} = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z).$$

Выбор функции f_{e0} , симметричной по v (относительно V_0), гарантирует отсутствие в равновесном состоянии плазмы токов и магнитных полей. В итоге рассматриваемая задача упрощается (задача 9.4.3).

Колебания плазмы с теплым пучком описываются нулями диэлектрической проницаемости (9.3.2). Предполагая, как это делалось при вычислении затухания Ландау (§ 6 гл. 8), что собственная частота ω почти вещественная, и разлагая $D(k, \omega)$ вблизи $\omega = \omega_r$, нули функции $D(k, \omega)$ можно найти, решая уравнения

$$D_r(k, \omega_r) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{u - \omega_r / |k|} du = 0,$$

$$D_i(k, \omega_r) = -\pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \Big|_{u=\omega_r/|k|}, \quad (9.4.2)$$

$$\omega_i = -\frac{D_i(k, \omega_r)}{\partial D_r / \partial \omega_r} \approx \frac{\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \Big|_{u=\omega_p/|k|}}{\partial D_r / \partial \omega_r}.$$

Хотя интеграл в выражении для D_r не столь прост, как в случае распределения в виде δ -функции, его можно приближенно записать для волн с $\omega/|k| \gg \sqrt{2\kappa T_1/m_e}$ следующим образом:

$$\int \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u}{\omega_r / |k| - u} du \approx \int \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \left(\frac{|k|}{\omega_r} + \frac{k^2 u}{\omega_r^2} + \frac{|k| k^2 u^2}{\omega_r^3} + \dots \right) du \quad (9.4.3)$$

(такое же разложение использовалось при вычислении затухания Ландау в гл. 8).

Вещественная часть диэлектрической проницаемости $D_r(k, \omega_r)$ дает отклик основной массы частиц плазмы на электрическое поле плазменной волны. Инкремент (или декремент) ω_i определяется влиянием группы частиц, находящихся в точном резонансе с волной.

Используя это приближение для D_r и учитывая, что $\omega_{pi}^2 \ll \omega_{pe}^2$ и $n_1 \gg n_2$, можно получить частоту собственных колебаний в плазме, описываемой распределением (9.4.1):

$$\omega_r^2 \approx \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{D1}^2).$$

Таким образом, собственные частоты в случае распределения, мало отличающегося от максвелловского, практически такие же, как для максвелловского. Различие проявляется в знаке мнимой части частоты, который определяется производной F_0 при значении скорости, равной фазовой скорости волны $u = \omega_r/|k|$, так что колебания плазмы с распределением (9.4.1) могут *нарастать*. Для рассматриваемого распределения плазмы с теплым пучком (9.4.1) нетрудно получить (по-прежнему полагая, что лишь малая доля частиц и энергии содержится в пучке, т. е. $n_1 \gg n_2$, $n_1 \kappa T_1 \gg n_2 m_e V_0^2$) следующее выражение для ω_i :

$$\omega_i \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{p1}}{|k|^3 \lambda_{D1}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{D1}^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} \frac{k^3}{k_z^3} \left(\frac{k_z V_0}{\omega_r} - 1\right) \exp\left[-\frac{T_1/T_2}{2k^2 \lambda_{D1}^2} \left(1 - \frac{k_z V_0}{\omega_r}\right)^2\right], \quad (9.4.4)$$

где $\omega_r^2 = 4\pi n_1 e^2/m_e$, $\lambda_{D1}^2 = (4\pi n_1 e^2/\kappa T_1)^{-1}$, причем предполагается, что $k\lambda_{D1} \ll 1$. Напоминаем, что пучок в плазме представляет собой дополнительную группу частиц, движущихся в z -направлении.

Задача 9.4.1. Покажите [для проверки (9.4.4)], что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \text{Im} \left\{ \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} [\delta(v_x) \delta(v_y) \exp(-m_e v_z^2/2\kappa T_e)]}{\omega_r - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} d\mathbf{v} \right\} = \frac{k^2}{k_z^2} \pi \left[\frac{d}{dv_z} \exp\left(-\frac{m_e v_z^2}{2\kappa T_2}\right) \right]_{v_z = \omega_r/|k_z|}.$$

Задача 9.4.2. Найдите $F_{e0}(u)$ и ω_i в случае теплого пучка, если функция распределения имеет вид

$$j_{e0} = \frac{n_1}{n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2\kappa T_1}\right) + \frac{n_2}{2n_e} \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_2}\right)^{3/2} \times \\ \times \left[\exp\left\{-\frac{m_e}{2\kappa T_2} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z - V_0)^2]\right\} + \exp\left\{-\frac{m_e}{2\kappa T_2} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V_0)^2]\right\} \right].$$

Первый член в выражении (9.4.4) описывает затухание Ландау, соответствующее максвелловской компоненте распределения. Оно не зависит от направления волнового вектора \mathbf{k} . Второе слагаемое связано с дополнительным горбом распределения, отвечающим пучку. Предполагалось, что в пучке существует разброс только z -компоненты скоростей, и поэтому эффект от резонансных частиц проявляется лишь при $\omega_r/k_z = u$. Если фазовая скорость волны ω_r/k_z меньше средней скорости V_0 частиц пучка, то пучок способствует нарастанию волны (распределение имеет положительный наклон). Частота $\omega_r \approx \omega_{pe}$ не чувствительна к k при $k\lambda_D \ll 1$, так что фазовая скорость ω_r/k_z определяется волновым числом k_z , т. е. $v_{\phi} \approx \omega_{pe}/k_z$. Если $\omega_r/k_z > V_0$, то частицы пучка приводят к дополнительному затуханию, наряду с имеющимся при всех v_{ϕ} затуханием, соответствующим максвеллов-

ской компоненте. Будет ли волна расти или затухать при некотором $\omega_r/k_z < V_0$, определяется тем, какое из двух слагаемых в (9.4.4) больше; если второе (при этом суммарное распределение $f_{\text{максвелл}} + f_{\text{пучка}} = f_{\alpha 0}$ имеет положительный наклон), то распределение неустойчиво относительно раскачки этой волны.

Нетрудно усмотреть, что максимальное дестабилизирующее влияние пучков оказывает при

$$\left| \frac{k_z V_0}{\omega_{pe}} \right| = 1 + \sqrt{k_z^2 \lambda_{D1}^2 \frac{T_2}{T_1}}.$$

При этом максимальное значение ω_i (условие положительности которого дает критерий неустойчивости) для плазмы с теплым пучком дается выражением

$$\omega_{i, \text{ макс }} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{k^3 \lambda_{D1}^3} \omega_{p1} \left[\frac{n_2}{n_1} \frac{T_1}{T_2} k^3 \lambda_{D1}^3 \frac{m_e V_0^2}{\kappa T_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2k^2 \lambda_{D1}^2} - \frac{3}{2}\right) \right] > 0 \quad (\text{неустойчивость теплового пучка}). \quad (9.4.5)$$

Из (9.4.5) ясно, что если пучок *слишком* размыт по скоростям, распределение плазмы устойчиво (поскольку оно монотонно убывает). Чтобы получить неустойчивость, нужно, согласно (9.4.5),

- 1) увеличить число частиц в пучке, т. е. увеличить n_2/n_1 ;
- 2) *сжать* пучок, т. е. уменьшить T_2/T_1 и сделать его распределение более похожим на δ -функцию;
- 3) увеличить скорость частиц пучка, т. е. увеличить $m V_0^2/\kappa T_1$.

Поскольку $k \lambda_{D1} < 1$, затухающий член $\exp(-1/2 k^2 \lambda_{D1}^2)$ дает минимальный вклад для волн с малыми k . Однако слагаемое, благодаря которому неустойчивость возрастает, дает вклад при $k_z \approx \omega_{p1}/V_0$; поэтому k , будучи больше k_z , не может быть меньше ω_{p1}/V_0 . Таким образом, самыми неустойчивыми оказываются волны, распространяющиеся *параллельно* движению пучка.

Сравнение (9.4.5) с (9.3.10) показывает, что неустойчивость плазмы с достаточно сильно размытым пучком развивается значительно медленнее, чем двухпотоковая неустойчивость в плазме с двумя пучками холодных электронов, поскольку

$$\begin{aligned} \omega_{i, \text{ теплый пучок}} &\approx \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{pe} e^{-1/2} \frac{n_2 m V_0^2}{n_1 \kappa T_2}, \\ \omega_{i, \text{ два холодных пучка}} &\approx \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{8}} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (9.4.6)$$

Если же неустойчивость плазмы с теплым пучком вызывается одним из трех указанных выше способов, то в конце концов неустойчивость превратится в двухпотоковую. Наиболее неустойчивыми являются системы, в которых тепловой разброс $\sqrt{\kappa T_2/m_e} \ll V_0$.

Нелинейный режим развития рассмотренной неустойчивости хорошо изучен. Соответствующие результаты мы изложим в гл. 10.

Задача 9.4.3. Почему в пределе $T_2 \rightarrow 0$ выражение для ω_i в случае теплого пучка в (9.4.6) не переходит в ω_i для двух холодных пучков?

Следует заметить, что существенный момент в нашем рассмотрении состоит в том, что мы изучали пучок на *хвосте* максвелловского распределения [интегрирование в (9.4.2) было выполнено только для волн с $\omega_r/k > \sqrt{\kappa T_1/m_e}$]. В § 6 настоящей главы мы покажем, что существование области, где $v df_0/dv > 0$, представляет собой необходимое, но вовсе не достаточное ус-

ловие неустойчивости, и небольшой горб, находящийся в пределах теплового разброса скоростей плазмы $\sqrt{\kappa T_1/m_e}$, не приводит к неустойчивости.

Задача 9.4.4. Покажите, что полученные выше результаты приближенно верны и для распределения, имеющего максимум лишь вблизи $+V_0$:

$$f_{e0} = \frac{n_1}{n_e} \left(\frac{\alpha_1}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_1 v^2} + \frac{n_2}{n_e} \left(\frac{\alpha_2}{\pi} \right)^{1/2} \delta(v_x) \delta(v_y) e^{-\alpha_2(v_z - V_0)^2}, \quad (9.4.7)$$

$$f_{i0} = \delta(v_x) \delta(v_y) \delta(v_z).$$

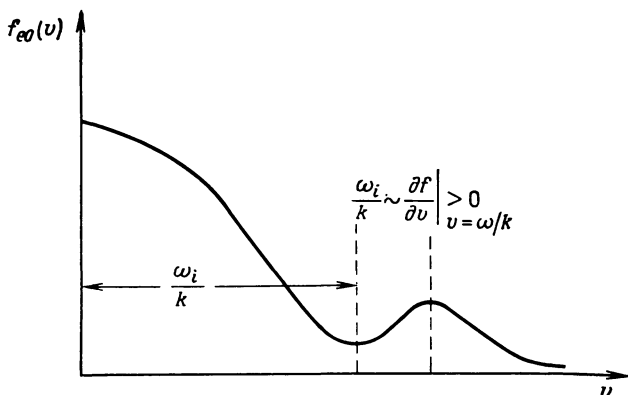
Оцените ошибки, возникающие из-за пренебрежения равновесным током и магнитным полем в (9.4.7).

§ 5. МЕХАНИЗМ ДВУХПОТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Нетрудно понять, почему плазма с функцией распределения, имеющей несколько максимумов, может быть неустойчива, если вспомнить вывод затухания Ландау, приведенный в гл. 8. Знак мнимой части ω зависит при этом от наклона функции распределения (фиг. 165).

В самом деле, затухание Ландау обусловлено тем, что в устойчивой плазме число частиц со скоростями, несколько меньшими ω_r/k , превышает число частиц со скоростями, несколько большими ω_r/k . Обратная картина наблюдается для неустойчивых волн в плазме с функцией распределения типа изображенной на фиг. 165. Представление о числе резонансных частиц при рассмотрении неустойчивости двух холодных пучков оказывается непригодным, поскольку в этом случае нет частиц, скорости которых близки фазовой скорости неустойчивой волны. Такие неустойчивости относятся к *нерезонансным*: их инкремент не пропорционален числу частиц с $v = \omega_r/k$.

Неустойчивость холодных пучков можно интерпретировать с помощью представления о бунчировке пучков, т. е. о периодической группировке заряда в пучке. Увеличение плотности заряда (например, электронов) в группировке вызывает возмущение плотности заряда в потоке, проходящем вблизи нее. Электроны пучка, которые проходят вблизи покоящегося скопления электронов, замедляются. Из уравнения непрерывности для заряда (гл. 3) следует, что замедление вызывает соответствующее *увеличение* плот-



Фиг. 165. Функция распределения с дополнительным максимумом [в «хвосте» $f_{e0}(v)$] и фазовые скорости неустойчивых волн.

ности электронов пучка вблизи группированных электронов:

$$\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} = - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Таким образом, поток *поддерживает* группирование частиц.

Для неустойчивости требуется, чтобы суммарный заряд δr_I , индуцированный во *всех* плазменных потоках, превосходил δr_0 — заряд «затравочного» возмущения.

Группирование зарядов соответствует электростатической волне. Если эта волна не нарастает и не затухает, то в системе координат, в которой волна покоится, движение пучков стационарно. В этой системе нетрудно, используя сохранение заряда и энергии, вычислить индуцированный заряд δr_I по заряду затравочного возмущения δr_0 . Условие $\delta r_I > \delta r_0$ дает критерий неустойчивости, полученный выше.

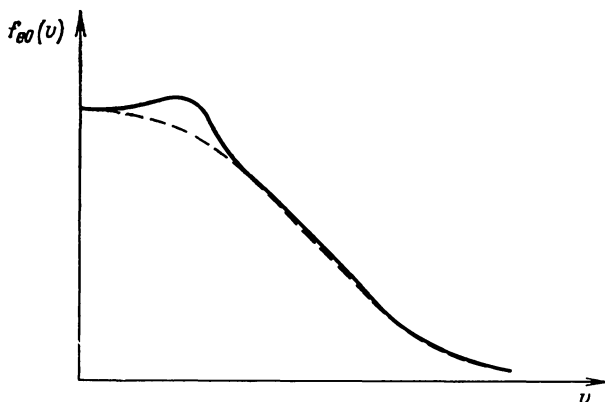
В тех случаях, когда скорости потоков и тепловые скорости оказываются одного порядка, бывает трудно выполнить интегрирование по скоростям, необходимое для прямого вычисления $D(k, \omega)$; невозможно также использовать и простое гидродинамическое описание, обсуждавшееся в данном параграфе. К счастью, существуют некоторые общие критерии устойчивости, которые могут быть применены в этих случаях; они рассмотрены в следующем параграфе.

Задача 9.5.1. Найдите, при каких условиях выполняется неравенство $\delta r_I > \delta r_0$, и покажите, что они эквивалентны условиям (9.3.4) или (9.3.9).

§ 6. МЕТОД НАЙКВИСТА И КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕНРОУЗА

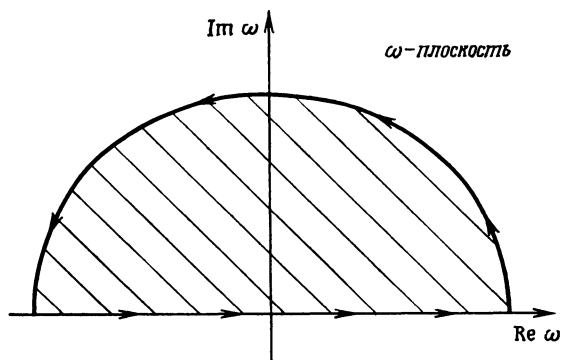
Если два потока плазмы имеют достаточно большой разброс скоростей или если пучок почти незаметен на фоне теплового распределения (фиг. 166), система может быть очень близка к устойчивому распределению с одним горбом.

Пенроуз [7] дал критерий, позволяющий определить, насколько большим должно быть отклонение от одногорбого распределения, чтобы появилась неустойчивость по отношению к электростатическим волнам.



Фиг. 166. Функция распределения с дополнительным плавным максимумом в области тепловых скоростей, соответствующим теплому пучку на фоне монотонно убывающего распределения (штриховая кривая).

Монотонно убывающее распределение устойчиво (по теореме Гарднера). Однако теорема Гарднера не позволяет ответить на вопрос об устойчивости полного распределения. Ответ дается критерием Пенроуза.



Фиг. 167. Комплексная ω -плоскость.

Показана область (заштрихованная часть), соответствующая неустойчивым волнам ω_k . Неустойчивые решения уравнения $D(k, \omega_k) = 0$ лежат в верхней полуплоскости.

Критерий Пенроуза может быть получен методом, который сам по себе полезен при определении устойчивости плазмы во многих случаях, не входящих в область применимости критерия Пенроуза, — методом Найквиста.

Проблема устойчивости состоит в определении того, имеет ли уравнение

$$D(k, \omega) = 0$$

какие-либо корни с

$$\text{Im } \omega > 0.$$

Функция $D(k, \omega)$ и, следовательно, ее корни $\omega(k)$ определяются равновесными полями и функцией распределения.

Рассмотрим некоторую функцию частоты ω , задаваемую следующим равенством:

$$G(\omega) = \frac{1}{D(k, \omega)} \frac{dD(k, \omega)}{d\omega}.$$

Предположим, что диэлектрическая проницаемость $D(k, \omega)$ является аналитической функцией от ω в верхней полуплоскости. Тогда $G(\omega)$ имеет полюса в тех точках, где $D(\omega)$ имеет нули. Далее, во всякой области, в которой D аналитична [где $D(\omega)$ имеет нули, но не имеет полюсов], справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \omega} \right) d\omega = N = \text{Число нулей функции } D \text{ внутри контура } C, \quad (9.6.1)$$

причем интеграл берется по замкнутому контуру. Если контур C окружает верхнюю полуплоскость, как показано на фиг. 167, то интеграл (9.6.1) даст число корней уравнения $D=0$ с $\text{Im } \omega > 0$, т. е. число неустойчивых мод плазмы.

В общем случае функции $f(z)$ комплексного переменного z , аналитической внутри и на контуре Γ , за исключением конечного числа полюсов внутри Γ , уравнение (9.6.1) можно заменить более общим. Это можно сделать следующим образом. Функцию f разложим в ряд Тейлора в точке z_i , в которой $f(z_i) = 0$:

$$f(z) = c_1 (z - z_i)^{m_i} + c_2 (z - z_i)^{m_i+1} + \dots;$$

здесь $c_1 \neq 0$. Отношение $f'(z)/f(z)$ вблизи z_i имеет вид

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_i}{z - z_i} + \dots$$

Таким образом, $f'(z)/f(z)$ имеет в точке z_i простой полюс с вычетом m_i , равным порядку нуля функции f .

В полюсе z_j функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \frac{d_1}{(z-z_j)^{l_j}} + \frac{d_2}{(z-z_j)^{l_j-1}} + \dots,$$

где $d_1 \neq 0$ и $l_j \geq 1$.

В точке z_j отношение f'/f можно записать так:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{l_j}{z-z_j} + \dots$$

Следовательно, $f'(z)/f(z)$ в точке z_j имеет простой полюс с вычетом, равным $-l_j$, т. е. порядка полюса функции f . Никаких других сингулярностей величина f'/f не имеет.

Поэтому

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_i m_i - \sum_j l_j \right);$$

здесь $\sum_i m_i$ — число простых нулей, а $\sum_j l_j$ — число простых полюсов функции $f(z)$.

Интегрирование (9.6.1) особенно упрощается во многих случаях, для которых справедливо условие

$$\int_0^\pi |\omega| e^{i\theta} d\theta \frac{1}{D} \frac{dD}{d\omega} \Big|_{|\omega| \rightarrow \infty} \Rightarrow 0, \tag{9.6.2}$$

где $\omega = |\omega| e^{i\theta}$. Данный интеграл описывает вклад в (9.6.1) от верхней полуокружности большого радиуса, показанной на фиг. 167. В этих случаях число неустойчивых мод может быть найдено, если проследить за изменением фазы $D(\omega)$, когда частота ω пробегает вещественную ось от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку тогда

$$\int_C \frac{1}{D} \frac{dD}{d\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D} \frac{dD}{d\omega} d\omega = \ln \frac{D(\omega \rightarrow \infty)}{D(\omega \rightarrow -\infty)},$$

так что отношение $D(\infty)/D(-\infty)$ определяет N .

Лучше всего проиллюстрировать этот метод на примерах. Согласно (9.3.2), при *вещественных* ω диэлектрическая проницаемость $D(\omega) = D_r + iD_i$ дается формулами

$$\begin{aligned} D_r(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F/\partial u}{u - \omega/|k|} du, \\ D_i(\omega) &= -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{u=\omega/|k|}, \end{aligned} \tag{9.6.3}$$

в которых

$$F(u) = \int \delta \left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|} \right) \left(f_{e0} + \frac{m_e}{m_i} f_{i0} \right) dv.$$

Отсюда видно, что D_i обращается в нуль при $\omega = \pm \infty$ (поскольку $F \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \pm \infty$), так же как и при любом другом значении ω/k , при котором $dF(\omega/k)/d(\omega/k)$ обращается в нуль. Из (9.6.3) можно видеть, что $D \approx 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ при $|\omega| \rightarrow \infty$. Поэтому мы имеем

$$|\omega| \frac{1}{D} \frac{dD}{d\omega} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\omega| \rightarrow \infty.$$

Следовательно, условие (9.6.2) выполняется, и число неустойчивых мод, соответствующих нулям $D(k, \omega)$, дается равенством

$$N = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{D(\infty)}{D(-\infty)}. \quad (9.6.4)$$

Хотя $D = 1$ при $\omega \rightarrow \pm \infty$, фаза функции D может быть выбрана произвольно лишь при $\omega = -\infty$. Выбор фазы при $\omega = -\infty$ однозначно определяет фазу на $+\infty$. Таким образом, если D при $\omega = -\infty$ выбрана так, что $D(-\infty) = 1$, то при $\omega = +\infty$

$$D(+\infty) = e^{2\pi i n},$$

здесь n — целое число, значение которого, как и $D(k, \omega)$, определяется равновесными свойствами системы. В общем случае n можно найти по $D(\omega)$, и (9.6.4) дает число неустойчивых мод

$$N = n.$$

Фаза $2\pi n$ может быть определена, если проследить за траекторией, вычерчиваемой функцией $D(\omega)$ в D -плоскости при изменении ω вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$. Целое число n определяется числом оборотов траектории вокруг точки $D = 0$. Для определения числа оборотов достаточно вычислить значения D_r в точках ω_0 , в которых $D_i(\omega_0) = 0$. Гораздо проще применить эту процедуру в конкретных случаях, чем о ней рассказывать. Ниже даны некоторые примеры.

6.1. Монотонно убывающая функция распределения $F(u)$

Пусть, как показано на фиг. 168, а, F монотонно убывает в обе стороны от максимального значения при u_0 :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right|_{u_0} < 0.$$

В этом случае интеграл по скоростям, определяющий D , удобно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(u)/du}{u - \omega/|k|} du \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[F(u) - F(\omega/|k|)]/du}{u - \omega/|k|} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d/du)[F(u) - F(\omega/|k|)]}{u - \omega/|k|} du. \quad (9.6.5)$$

Теперь вещественная и мнимая части диэлектрической проницаемости определяются при вещественных ω следующими формулами:

$$D_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(\omega/|k|)}{(u - \omega/|k|)^2} du, \quad (9.6.6)$$

$$D_i = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left. \frac{\partial F}{\partial u} \right|_{u=\omega/|k|}.$$

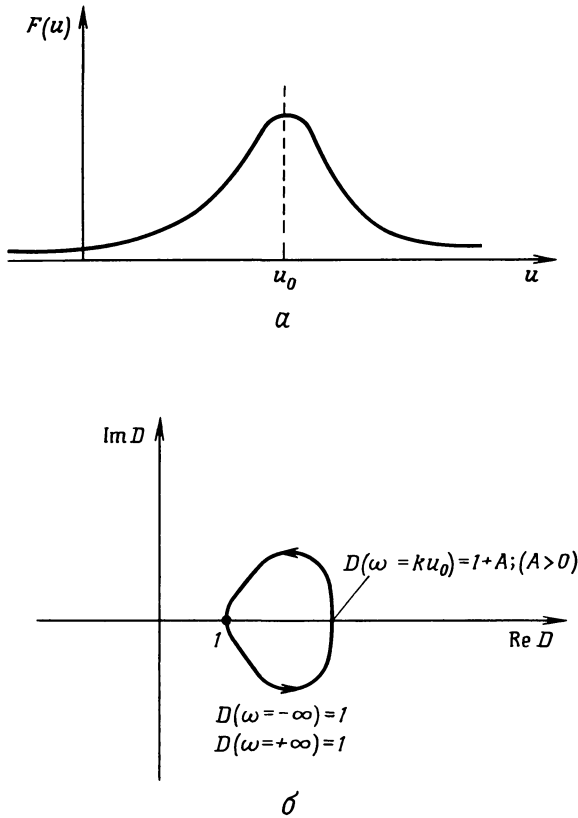
Уравнения (9.6.6) можно использовать для вычерчивания траектории $D(\omega)$ при вещественных ω . В рассматриваемом случае распределения $F(u)$ функция D_i обращается в нуль в трех точках, а именно при $\omega = +\infty$, $\omega = -\infty$ и $\omega = |k|u_0$, поскольку $F(\infty) = F(-\infty) = (\partial F/\partial u)_{u=u_0} = 0$. При этих трех значениях ω можно вычислить D_r из (9.6.6):

$$D_r(\infty) = e^{2\pi i n}$$

(где целое число n подлежит определению),

$$D_r(-\infty) = 1, \quad (9.6.7)$$

$$D_r(\omega = |k|u_0) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{F(u_0) - F(u)}{(u - u_0)^2} du > 1.$$



Фиг. 168. *a* — функция распределения $F(u)$, монотонно убывающая в обе стороны от средней скорости u_0 ; *б* — соответствующая диаграмма Найквиста.

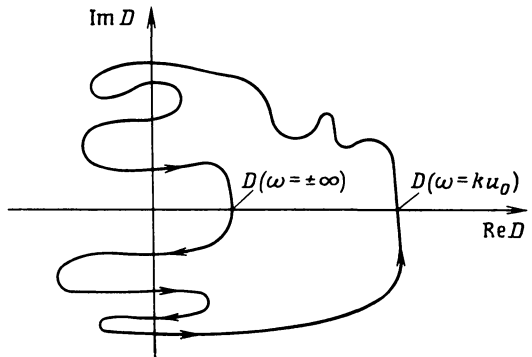
Диаграмма Найквиста свидетельствует (в полном согласии с теоремой Гарднера) об устойчивости распределения.

Последнее неравенство следует из того, что F имеет максимум при $u = u_0$, так что $F(u_0) - F(u) \geq 0$ при всех u . Таким образом, $D_i > 0$ во всех точках, где $D_i = 0$. По значениям D в этих трех точках, в которых $D_i = 0$, можно построить диаграмму Найквиста в основных чертах, как показано на фиг. 168, б. Не обязательно вычислять точное значение $D(\omega = ku_0)$; уже из положительности этой величины следует, что (с учетом фазы) $D(+\infty) = D(-\infty)$, поскольку кривая $D(\omega)$ не замыкается вокруг начала координат.

Поэтому

$$n = N = 0$$

и снова доказана устойчивость монотонно убывающего распределения — на этот раз методом Найквиста. Заметим, что поведение $D(\omega)$ во всех точках, отличных от тех, где $D_i(\omega) = 0$, не влияет на анализ устойчивости. Даже если диаграмма Найквиста ведет себя так, как



Фиг. 169. Диаграмма Найквиста.

Показано, что для определения устойчивости плазмы важен лишь знак $\text{Re } D(\omega_0)$ в точке, где $\text{Im } D(\omega_0) = 0$.

на фиг. 169 ¹⁾, она предсказывает устойчивость. Метод Найквиста является мощным средством изучения устойчивости плазмы, поскольку, используя этот метод, можно предсказать устойчивость по знаку D_r при нескольких частных значениях ω_r/k , не решая уравнения $D = 0$.

6.2. Функция $F(u)$ с одним минимумом

Пусть $F(u)$ имеет единственный минимум при $u = u_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{u=u_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \Big|_{u=u_0} > 0.$$

При таком условии $F(u)$ должна иметь два локальных максимума; в противном случае F не будет стремиться к нулю при больших значениях u , что противоречит поведению физически реализуемых распределений. Обозначая положения этих максимумов через u_1 и u_2 , причем при u_1 имеется абсолютный максимум, как показано на фиг. 170, а, и записывая D в виде

$$D_r = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(\omega/|k|)}{(u - \omega/|k|)^2} du, \quad (9.6.8)$$

$$D_i = -\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

при

$$\omega = |k| u_1, \quad \omega = |k| u_2, \quad \omega = |k| u_0, \quad \omega = \pm \infty,$$

можно построить диаграмму Найквиста, вычислив величину D_r при $\omega = (|k| u_2, |k| u_1$ и $|k| u_0)$. Очевидно,

$$D_r(\omega = |k| u_1) = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u_1) - F(u)}{(u - u_1)^2} du > 0,$$

поскольку $F(u_1)$ есть максимальное значение $F(u)$. Кроме того, справедливы, разумеется, выражения

$$\begin{aligned} D_r(-\infty) &= 1, \\ D_r(+\infty) &= e^{2\pi i n}, \end{aligned} \quad (9.6.9)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому можно сделать вывод, что $D > 0$ в рассматриваемых точках так же, как и при u_1 . В двух других точках $\omega = |k| u_0$ и $\omega = |k| u_2$ величина D_r может быть либо положительной, либо отрицательной в зависимости от $|k|$ и деталей поведения $F(u)$. Но поскольку, как это видно из фиг. 170, а, $F(\omega = |k| u_2) > F(\omega = |k| u_0)$, должно выполняться неравенство

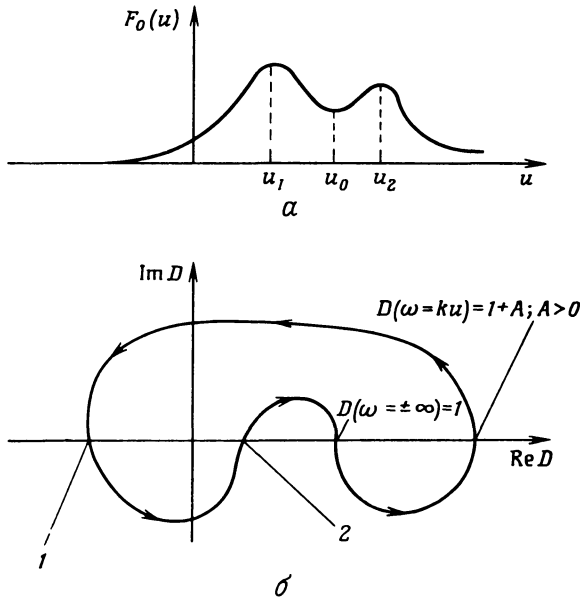
$$D_r(\omega = |k| u_0) < D_r(\omega = |k| u_2). \quad (9.6.10)$$

Поэтому диаграмма Найквиста имеет вид, изображенный на фиг. 170, б, причем без потери общности предполагалось $u_1 < u_0 < u_2$ (см. задачу 9.6.2).

Задача 9.6.1. Докажите неравенство (9.6.10).

Задача 9.6.2. Постройте диаграмму Найквиста и найдите критерий устойчивости, если абсолютный максимум, минимум и локальный максимум находятся соответственно в точках u_1, u_0 и u_2 , причем имеет место неравенство $u_2 < u_0 < u_1$.

¹⁾ Или в некоторых точках пересекает саму себя.— *Прим. ред.*



Фиг. 170. *a* — функция распределения с двумя максимумами и *б* — соответствующая диаграмма Найквиста.

Диаграмма Найквиста показывает, при каких условиях распределение $F_0(u)$ устойчиво (неустойчиво). В точке 1 $D(\omega = ku_0)$ меньше (но может быть и больше) нуля; в точке 2 $D(\omega = ku_2)$ больше (но может быть и меньше) нуля в зависимости от $F_0(u)$ и k .

Из фиг. 170 можно видеть, даже не имея каких-либо дополнительных сведений о F , что, если $D_r(\omega = |k|u_0) > 0$, плазма устойчива; если $D_r(\omega = |k|u_2) < 0$, плазма также устойчива по отношению к волне с данным k . Неустойчивые волны существуют тогда и только тогда, когда

$$P(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u_0) - F(u)}{(u - u_0)^2} du < 0 \quad (\text{неустойчивость}). \quad (9.6.11)$$

Это условие называется *критерием неустойчивости Пенроуза*, а функция $P(F)$ — *функцией Пенроуза*. Здесь функция F имеет вид

$$F = \int \delta\left(u - \frac{k \cdot v}{|k|}\right) \left(f_{e0} + \frac{m_e}{m_i} f_{i0}\right) dv.$$

Если критерий Пенроуза выполнен, то существует *некоторое* значение k , для которого $D_r(\omega = |k|u_2) > 0$ и $D_r(\omega = |k|u_0) < 0$. В этом можно убедиться, заметив, что если (9.6.11) выполнено, то

$$D_r(\omega = ku_0) \rightarrow 1 \text{ при } k \rightarrow \infty$$

и

$$D_r(\omega = ku_0) \rightarrow -\infty \text{ при } k \rightarrow 0.$$

Поэтому при некотором значении $k = k_0$ функция $D_r(\omega = |k_0|u_0)$ обращается в нуль. А поскольку $D_r(\omega = |k|u_2) > D_r(\omega = |k|u_0)$, то диаграмма Найквиста для $|k| \leq |k_0|$ имеет форму кривой, приведенной на фиг. 170, *б*, и предсказывает неустойчивость. Критерий Пенроуза (9.6.11) определяет устойчивость любых распределений с минимумом при $u = u_0$; иными словами, он определяет устойчивость многогорбых распределений. Очевидно, что критерий Пенроуза представляет собой условие, накладываемое на равновесную функцию распределения.

Если распределение удовлетворяет условию (9.6.11), то оно будет неустойчивым только в некотором интервале волновых чисел k , в котором вели-

чина D_r ($\omega = |\mathbf{k}|u_0$) < 0 , D_r ($\omega = |\mathbf{k}|u_1$) > 0 . Этот интервал может быть найден из диаграммы Найквиста:

$$\omega_{pe}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(u_2)}{(u - u_2)^2} du < k^2 < \omega_{pe}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) - F(u_0)}{(u - u_0)^2} du \quad (\text{неустойчивость}). \quad (9.6.12)$$

Критерий Пенроуза приводит к нескольким интересным выводам:

1. Если в функции распределения F имеется дырка, т. е. в некотором интервале скоростей Δu около u_0 нет частиц, то, согласно критерию Пенроуза, F неустойчива, поскольку $F(u) - F(u_0) > 0$ при всех u . Следовательно, удаление частиц даже из тонкого слоя пространства скоростей приводит к неустойчивости. Однако такая неустойчивость является слабой, а интервал фазовых скоростей неустойчивых волн $\omega_r/|\mathbf{k}| -$ узким.

2. Если (9.6.11) выполнено и, стало быть, $F(u)$ неустойчива, добавление частиц в тонкий слой пространства скоростей при $u = u_0$ не приведет к стабилизации системы. Добавляя такие частицы, можно добиться выполнения неравенства $F(u) - F(u_0) < 0$, но тогда F будет иметь минимум не в одной точке, а в двух соседних точках $u_0 \pm \varepsilon$ и система останется неустойчивой. Чтобы стабилизировать двухпотоковую неустойчивость в случае распределения, представленного на фиг. 158, а, необходимо заполнить почти весь провал в пространстве скоростей. Следует заметить, что добавление частиц в некотором интервале скоростей все же стабилизирует волны, фазовые скорости которых принадлежат этому интервалу.

3. Критерий Пенроуза есть необходимое и достаточное условие существования электростатических неустойчивостей. Поскольку диэлектрическая проницаемость (9.6.3) определяет отклик плазмы только на электростатические возмущения, критерий Пенроуза отвечает на вопрос, устойчиво или неустойчиво распределение $F_0(u)$ лишь в отношении электростатических волн. Метод Найквиста, однако, может быть использован для определения нулей любого уравнения $G(\omega) = 0$.

4. Поскольку критерий Пенроуза применяется к распределению $f_{e0} + (m_e/m_i) f_{i0}$, для создания горба (и близлежащего минимума) в случае ионного пучка требуется гораздо больше частиц (ионов), чем электронов в случае электронного пучка.

5. Распределение может быть двугорбым и все же устойчивым. Это показывает, что теорема Гарднера (об устойчивости одногорбого распределения) дает достаточное, но не необходимое условие устойчивости.

Задача 9.6.3. Покажите методом диаграмм Найквиста, что распределение F_0 с точкой перегиба $\partial F_0/\partial u|_{u_0} = \partial^2 F/\partial u^2|_{u_0} = 0$, $\partial^3 F/\partial u^3|_{u_0} < 0$, но не имеющее минимума (кроме как при $u \rightarrow \pm\infty$), устойчиво.

Полезно привести результаты применения критерия Пенроуза к некоторым конкретным распределениям. Вывод этих результатов предлагается читателю в виде задачи.

Распределение

$$F(u) = \frac{\Delta}{2\pi} \left[\frac{1}{(u-a)^2 + \Delta^2} + \frac{1}{(u+a)^2 + \Delta^2} \right] \quad (9.6.13)$$

(где Δ — тепловая скорость и a — скорость потока) устойчиво, согласно критерию Пенроуза, при $a < \Delta$. Однако $F(u)$ является одногорбым (и устойчивым по теореме Гарднера) лишь при $a < \Delta/\sqrt{3}$. Таким образом,

$a < \Delta$ (необходимое и достаточное условие для устойчивости по критерию Пенроуза),

$$a < \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \quad (\text{достаточное условие для устойчивости по теореме Гарднера}). \quad (9.6.14)$$

Задача 9.6.4. Выведите критерий устойчивости (9.6.14) для распределения (9.6.13).

В качестве второго примера использования критерия Пенроуза можно рассмотреть устойчивость смещенных относительно друг друга максвелловских распределений ионов и электронов (фиг. 171)

$$\begin{aligned} F_{e0} &= \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_e(u-u_0)^2}{2\kappa T_e} \right), \\ F_{i0} &= \left(\frac{m_i}{2\pi\kappa T_i} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_i u^2}{2\kappa T_i} \right). \end{aligned} \quad (9.6.15)$$

Результат Пенроуза состоит в том, что при $T_e = T_i$ система устойчива, если

$$u_0 < 1,3 \sqrt{\frac{\kappa T}{m_e}} \quad (\text{условие устойчивости при } T = T_e = T_i). \quad (9.6.16)$$

При таком значении u_0 распределение (9.6.15) является двугорбым. Для плазмы с $T_e \gg T_i$ критерий Пенроуза для распределения (9.6.15) приводит к совершенно иному условию:

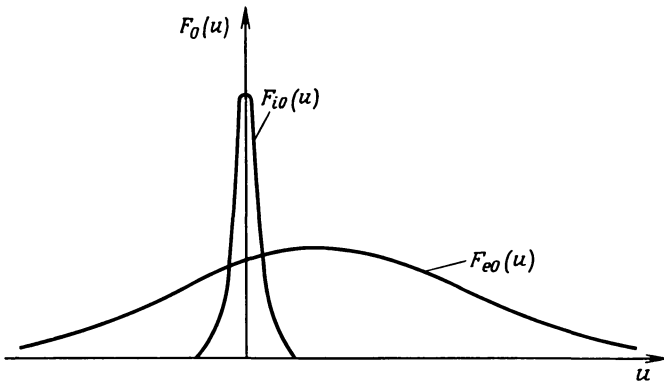
$$u_0 < \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}} \quad (\text{условие устойчивости при } T_e \gg T_i). \quad (9.6.17)$$

Задача 9.6.5. Выведите условия устойчивости (9.6.16) и (9.6.17) и покажите, что $F(u)$ при выполнении (9.6.16) может быть двугорбой.

Таким образом, плазма с распределением (9.6.15), в которой $T_e \gg T_i$, становится неустойчивой при гораздо меньшей токовой скорости, чем плазма с одинаковыми температурами электронов и ионов; критерий Пенроуза показывает, что устойчивость плазмы зависит от отношения температур электронов и ионов. Что происходит, когда условие устойчивости так резко меняется при изменении распределения (в данном случае — при изменении T_e/T_i)? Метод Найквиста не дает ответа на этот вопрос. При $T_e/T_i \gg 1$ могут быть две возможности:

- 1) в плазме возникает новая мода;
- 2) мода плазмы, устойчивая при $T_e = T_i$, становится под влиянием горячих электронов неустойчивой.

Заметим, что, если $u_0 \gg \sqrt{\kappa T_e/m_e}$, то неустойчивость, предсказываемая критерием Пенроуза, является двухпотоковой, условие существования



Фиг. 171. Функции распределения ионов и электронов, соответствующие потоку горячих электронов, движущемуся сквозь фон холодных ионов со скоростью, меньшей тепловой скорости электронов.

которой мы вывели в § 3 настоящей главы. При $T_e = T_i$ критерий Пенроуза показывает исчезновение этой моды при уменьшении u_0 . Причина того, что критическое для устойчивости значение u_0 столь чувствительно к отношению температуры T_e/T_i , может быть найдена, если продолжить анализ устойчивости собственных колебаний, начатый в § 3 настоящей главы.

§ 7. ИОННО-ЗВУКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Из анализа собственных колебаний изотропной плазмы (§ 6 гл. 8) следует, что ионно-звуковые волны распространяются в плазме с $T_e/T_i \gg 1$ почти без затухания, в то время как при $T_e = T_i$ их затухание велико. Это наводит на мысль, что ионные волны могут начать раскачиваться под влиянием довольно медленного потока электронов, если их температура T_e достаточно высока, так что затухание, обусловленное тепловым разбросом максвелловских скоростей электронов, будет мало по сравнению с нарастанием, вызываемым потоком. Чтобы показать это, нужно вычислить диэлектрическую проницаемость плазмы с распределением (9.6.15).

Действительно, для того чтобы получить неустойчивость ионно-звуковых волн, предположим, что электроны движутся со скоростью u_0 относительно ионов, распределение $F_{\alpha 0}$ дается формулой (9.6.15) и неустойчивые волны удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega_r}{k} \right| &\gg \sqrt{\frac{2\kappa T_i}{m_i}}, \\ \left| \frac{\omega_r}{k} - u_0 \right| &\ll \sqrt{\frac{2\kappa T_e}{m_e}}. \end{aligned} \quad (9.7.1)$$

В определяемом этими неравенствами интервале, с одной стороны, лежат фазовые скорости ионно-звуковых волн, а с другой стороны, фигурирующее в критерии Пенроуза распределение F имеет локальный минимум.

Поведение волн, устойчивых или неустойчивых, определяется нулями диэлектрической проницаемости

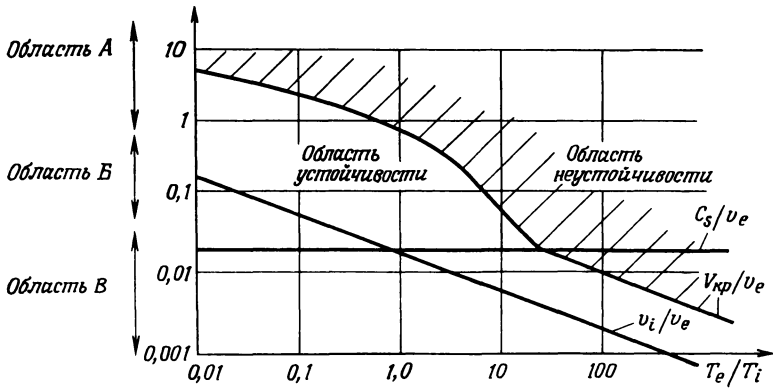
$$D(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k \partial F_{\alpha 0} / \partial u}{\omega - ku} du; \quad (9.7.2)$$

здесь $D(k, \omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы в отсутствие внешних полей. Решая (9.7.2) так же, как в § 6 гл. 8 (в предположении $\omega_i < \omega_r$), получаем

$$\begin{aligned} \omega_r^2 &= \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}, \\ \omega_i &= -|\omega_r| \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{1}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}} \left\{ \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{T_e}{2T_i (1 + k^2 \lambda_{De}^2)} \right] + \right.} \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(1 - \frac{u_0}{C_s} \sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \right) \right\}}. \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

При $u_0 = 0$ уравнение (9.7.3) переходит в дисперсионное уравнение (8.6.19) для слабо затухающих ионно-звуковых волн. Но если u_0 достаточно велико, знак ω_i изменяется и ионно-звуковые волны усиливаются. Из (9.7.1) следует, что ионно-звуковые волны неустойчивы при $T_e \gg T_i$ (так что затуханием на ионах можно пренебречь), если

$$u_0 > \frac{C_s}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} = \frac{\sqrt{\kappa T_e / m_i}}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} > \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}}. \quad (9.7.4)$$



Фиг. 172. Зависимость критической скорости потока $V_{кр}$ электронов относительно ионов, при которой начинают развиваться электростатические неустойчивости в плазме, от T_e/T_i [8].

Область А — ленгмюровские волны; область Б — переходный режим; В — ионно-звуковые волны.

Этот результат согласуется с критерием Пенроуза. Если $T_e/T_i \gg 1$, т. е. можно пренебречь затуханием, связанным с ионами, то инкремент ионно-звуковой неустойчивости пропорционален токовой скорости:

$$\omega_i = \frac{k(u_0 - |\omega_r/k|)}{(1 + k^2\lambda_{De}^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i}}.$$

Дестабилизирующее влияние u_0 проявляется в выражении для инкремента аналогично тому, как это имело место для двухпоточковой неустойчивости [см. (9.3.8)]. Вблизи порога неустойчивости результат (9.7.3), полученный методом собственных колебаний, ясно показывает, что усилению за счет электронного потока противодействует затухание на ионах. Инкременты электростатических волн можно вычислить аналитически в двух предельных случаях (в первом $u_0 \gg \sqrt{\kappa T_e/m_e}$, во втором $T_e/T_i \gg 1$), которые были рассмотрены в § 3 и 7 настоящей главы. Критерий Пенроуза (9.6.11) можно использовать для численных расчетов устойчивости смещенных относительно друг друга максвелловских распределений типа (9.6.15), позволяющих найти границу устойчивости. На фиг. 172 приведены результаты таких расчетов, полученные Фридом и Гоулдом [8].

Задача 9.7.1. Найдите конус волновых векторов \mathbf{k} , в котором ионнозвуковые волны неустойчивы, для следующих распределений электронов и ионов в плазме:

$$f_{e0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)_e^{3/2} \exp\left[-\frac{m_e}{2\kappa T_e}(v_x^2 + v_y^2 + (v_z - u_0)^2)\right],$$

$$f_{i0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)_i^{3/2} \exp\left[-\frac{m_i v^2}{2\kappa T_i}\right].$$

Покажите, что инкремент таких волн равен

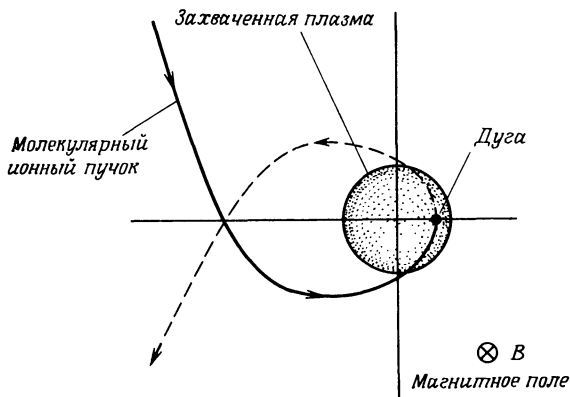
$$\omega_i = \frac{\omega_r \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_0}{\omega_r}\right)}{(1 + k^2\lambda_{De}^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i}}.$$

§ 8. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДВУХПОТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Чтобы уяснить реальный смысл представленных в настоящей главе решений задачи об устойчивости, выглядящих весьма абстрактно, полезно рассмотреть два примера того, как с помощью таких решений можно делать правдоподобные заключения об устойчивости гораздо более сложных плазменных конфигураций, действительно существующих в эксперименте.

8.1. Установка DCX

Установка DCX представляет собой одну из первых схем, использовавшихся для введения плазмы в магнитное поле [9]. Существуют различные варианты. Основная идея их состоит в том, чтобы пучок молекулярных ионов (например, однократно ионизованных молекул D_2) непрерывно инжектировался поперек магнитного поля в вакуумную область. Предоставленные сами себе, молекулы должны поворачиваться магнитным полем на 180° и двигаться назад примерно по тому же пути, по которому они влетели в магнитное поле. Однако в действительности часть молекул, пролетая через разряд низкого давления, горевший вдоль магнитного поля, успевала диссоциировать. При этом два легких дейтериевых иона, которые имели меньший ларморовский радиус, захватывались магнитным полем. Такой способ захвата плазмы схематически показан на фиг. 173. Во время работы экспериментальной установки число захваченных ионов возрастает, пока плотность их не достигнет некоторого критического значения, после чего ионы начинают быстро диффундировать из области захвата. Зонды показывают, что при этом в системе развиваются электрические шумы. Диффузия частиц и нарастание электростатических полей свидетельствуют о неустойчивости распределения частиц. Экспериментальные результаты качественно можно понять, заметив, что движение ионов носит упорядоченный характер, в то время как скорости нейтрализующих электронов имеют тепловой разброс, и применив развитую в § 3 настоящей главы теорию для вычисления устойчивости пучка ионов, движущегося со скоростью u_0 сквозь покоящийся электронный газ. Однако, поскольку эта теория строилась без учета магнитного поля, ее можно применять лишь к изучению волн, длины которых настолько малы, что циклотронным вращением в поле B_0 можно пренебречь. Иными словами, можно рассматривать неустойчивость волн с длинами,



Фиг. 173. Схематическое представление захвата плазмы магнитным полем пробкотрона, полученной с помощью высокоэнергетического (600 кэВ) пучка молекулярных ионов D_2^+ , диссоциирующих в дуговом разряде.

Такой эксперимент на установке DCX был выполнен в Окриджской лаборатории.

меньшими ларморовского радиуса ионов в поле B_0 :

$$|k| u_0 > \omega_{ci} = \frac{eB_0}{m_i c}. \quad (9.8.1)$$

Это ограничение на k наряду с условием появления двухпотоковой неустойчивости

$$|k| u_0 < \omega_{pe} \quad (9.8.2)$$

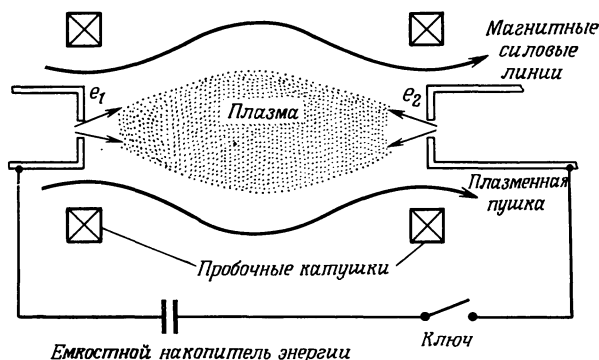
ведет к предсказанию, что плотность плазмы из-за возникновения электростатической двухпотоковой неустойчивости должна быть ограничена величиной

$$n_e < \frac{B_0^2}{4\pi m_i c^2} \frac{m_e}{m_i}. \quad (9.8.3)$$

В плазме могут также присутствовать и другие неустойчивости, но предельная плотность (9.8.3) определяет возникновение одной из неустойчивостей. Приведенная оценка предельной плотности согласуется с экспериментальными результатами, показывающими, что ниже этой плотности плазма спокойна, а выше — турбулентна.

8.2. Турбулентный нагрев при возникновении неустойчивостей

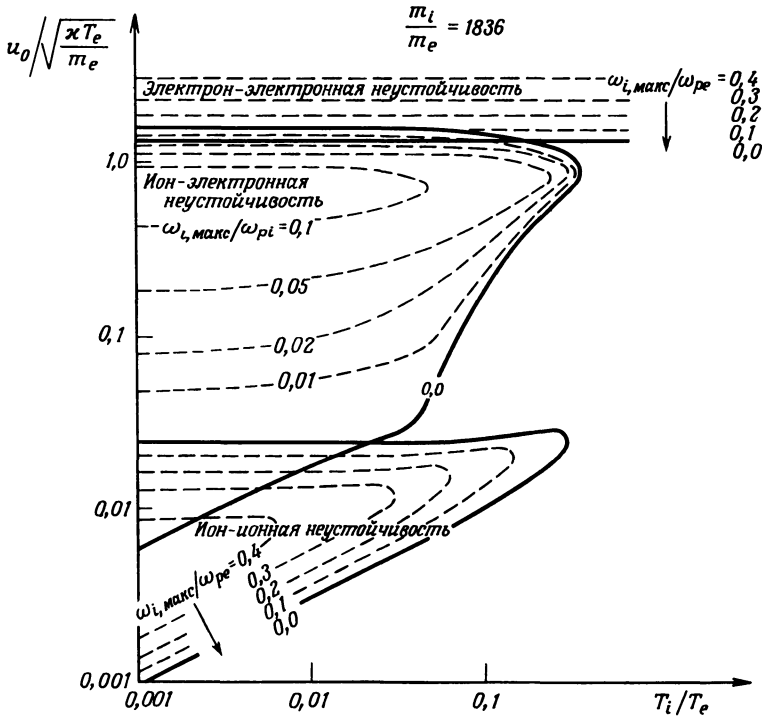
Многие схемы нагрева плазмы основаны на создании потока электронов в удерживаемой плазме за счет приложения либо электрического, либо импульсного магнитного поля. В одном из таких экспериментов [10] ¹⁾ два плазменных потока инжектируются в поле пробкотрона с противоположных его концов (фиг. 174). При таком встречном движении плазменных потоков наблюдается лишь небольшой их нагрев. Скорость относительного движения потоков гораздо ниже тепловой скорости электронов, а ионная и электронная температуры сравнимы между собой. Этот эксперимент был проведен снова, но теперь после заполнения пробкотрона плазмой между электродами e_1 и e_2 прикладывается импульсное напряжение 20 кэВ. При этом плазма за время ~ 3 мкс нагревается от температуры 50 эВ до 1000 эВ в расчете на пару электрон — ион. Такой нагрев нельзя объяснить выделением Джоулева тепла, ибо частота столкновений отдельных частиц друг с другом пренебрежимо мала. Объяснение состоит в том, что под действием сильного электрического поля электроны приобретают значительную скорость u_0 и начинает выполняться



Фиг. 174. Схема эксперимента по турбулентному нагреву.

Через плазму, находящуюся в поле пробкотрона, пропускают большой ток.

¹⁾ Экспериментальному исследованию турбулентного нагрева посвящено большое число работ группы советских физиков под руководством Е. К. Завойского (см., например, [21*]). — Прим. ред.



Фиг. 175. Максимальный инкремент неустойчивостей во встречных потоках плазмы как функция отношения относительной скорости потоков к тепловой скорости электронов $u_0 / \sqrt{k T_e / m_e}$ и отношения T_i / T_e [5].

условие (9.6.16), т. е. в плазме развивается двухпотоковая неустойчивость. Это один из многих подобных экспериментов, в которых для турбулентного нагрева плазмы используется двухпотоковая неустойчивость.

8.3. Неустойчивость встречных потоков плазмы

Электростатические неустойчивости во встречных потоках плазмы изучались Стрингером [5]. Он численно решал дисперсионное уравнение (9.3.2) для распределения, в котором учитывались встречные потоки электронов и ионов:

$$F_{i0}(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_i}{2\pi k T_i}} \left\{ \exp \left[-\frac{m_i (u - u_0)^2}{2k T_i} \right] + \exp \left[-\frac{m_i (u + u_0)^2}{2k T_i} \right] \right\}$$

и

$$F_{e0}(u) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi k T_e}} \left\{ \exp \left[-\frac{m_e (u - u_0)^2}{2k T_e} \right] + \exp \left[-\frac{m_e (u + u_0)^2}{2k T_e} \right] \right\}.$$

Возможны три типа неустойчивостей, в которых наиболее сильно проявляются электрон-электронное [(9.3.7)], электрон-ионное [(9.3.3) и (9.3.7)] и ион-ионное взаимодействия. На фиг. 175 приведены инкременты для этих трех типов неустойчивостей.

§ 9. НЕУСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ

До сих пор в настоящей главе мы рассматривали только неустойчивости, которые по своему происхождению являются электростатическими. Они возникают вследствие бунчировки плотности заряда ρ_k ; теория показывает, что при неустойчивых функциях распределения плотность заряда в скопле-

ниях и электрические поля растут. Во всех рассмотренных случаях основной причиной и резервуаром энергии неустойчивостей служит упорядоченное относительное движение частиц и критерии устойчивости по существу определяют, насколько сильное упорядоченное движение допустимо, чтобы система была устойчивой. Однако упорядоченное относительное движение частиц не единственная черта, характеризующая отклонение плазмы от термодинамического равновесия. В данном параграфе в качестве причины, вызывающей неустойчивости, мы рассмотрим анизотропию распределения плазмы по скоростям.

Анизотропия присуща многим состояниям плазмы. В плазме, удерживаемой магнитным полем, температуры, соответствующие движению параллельно и перпендикулярно магнитному полю \mathbf{B}_0 , обычно сильно различаются (для краткости будем их называть продольной и поперечной температурами). Например, при сжатии плазмы магнитным полем образуется плазма с $T_{\perp} \gg T_{\parallel}$. Даже в отсутствие внешних полей часто существуют причины того, что в разных направлениях температуры различны, например потоки частиц, двумерные структуры ударных волн, специальные методы приготовления плазмы и т. д. Благодаря кулоновским столкновениям такие распределения со временем становятся изотропными. Однако во многих случаях коллективные эффекты (неустойчивости) играют большую роль в изотропизации, нежели парные столкновения.

Методы изучения неустойчивостей, порождаемых анизотропией, те же, что уже применялись в настоящей главе. Уравнение Власова позволяет найти отклик $f_{\mathbf{k}}$ на произвольное возмущение $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ и вместе с уравнениями Максвелла дает дисперсионные уравнения для волн вида $\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$. Эти дисперсионные уравнения используются для нахождения зависимости $\omega(\mathbf{k})$, а также критериев устойчивости, инкрементов и длин неустойчивых волн.

Механизмом, вызывающим неустойчивости, при которых существенно возмущение токов, является *пинчевание*: возмущенные токи порождают самосогласованные магнитные поля, в свою очередь сжимающие эти токи. Если возмущенный ток вследствие пинчевания имеет плотность больше первоначальной, плазма неустойчива. Условие, при котором возмущение тока не будет нарастать, накладывает условие на степень изотропии распределения, требуемое для устойчивости плазмы.

§ 10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ (ПО ОТНОШЕНИЮ К ПИНЧЕВАНИЮ)

При возмущении распределения плазмы $f_{\alpha 0}$ возникают, вообще говоря, как электрические, так и магнитные силы, стремящиеся восстановить равновесие или же усилить возмущение. При изучении электростатических неустойчивостей действием магнитных сил либо пренебрегают, либо выбирают такие возмущения, при которых магнитные силы вообще отсутствуют.

В тех случаях, когда имеется электростатическая неустойчивость, часто действительно оказывается возможным пренебречь магнитными эффектами, поскольку магнитные силы, вообще говоря, меньше электрических в c^2/v^2 раз, где v — характерная скорость плазмы. Поэтому и характерные инкременты неустойчивостей, раскачиваемых магнитными силами, в c/v раз меньше, чем инкременты электростатических неустойчивостей. Под действием электростатических неустойчивостей равновесное распределение изменится раньше, чем проявятся магнитные эффекты.

Однако, поскольку существуют устойчивые по отношению к электростатическим волнам и тем не менее далекие от термодинамического равновесия состояния плазмы, за счет отсутствия термодинамического равновесия могут

нарастать возмущения, которые не изменяют плотности заряда, но *действительно* возмущают плотность тока. Наиболее заслуживающим внимания примером такого рода является анизотропная плазма, функция распределения которой монотонно убывает по v_x^2 , v_y^2 и v_z^2 . Такое распределение устойчиво по отношению к электростатическим возмущениям, но неустойчиво по отношению к электромагнитным.

Задача 9.10.1. Покажите, что собственные колебания в анизотропной плазме с распределением

$$f_{\alpha 0} = F_{\alpha 0}(v_x^2) G_{\alpha 0}(v_y^2) H_{\alpha 0}(v_z^2)$$

распадаются на электростатическую и две электромагнитные моды. С помощью критерия Пенроуза покажите, что электростатическая мода устойчива, если каждая из функций F , G и H является монотонно убывающей.

Рассмотрим плазму в отсутствие внешних полей с монотонно убывающей, но анизотропной функцией распределения $f_{\alpha 0}$. Под действием возмущающих полей $\mathbf{E}_1 = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ и $\mathbf{B}_1 = \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ возмущенную функцию распределения можно записать в виде

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1},$$

где, согласно гл. 8, возмущенная часть дается выражением

$$f_{\alpha 1} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{([\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + [\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}]/c] \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f_{\alpha 0}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \quad (9.10.1)$$

Соответствующая этому распределению плотность возмущенного тока $\mathbf{J}_1 = \bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)]$, где

$$\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}} = -\sum_{\alpha} \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\mathbf{v} [\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + [\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}_{\mathbf{k}}]/c] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} d\mathbf{v}. \quad (9.10.2)$$

Эволюция возмущений определяется уравнениями Максвелла:

$$\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}] = -\frac{\omega^2}{c^2} \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} + \frac{4\pi}{c} \frac{\omega}{ic} \bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{k}}. \quad (9.10.3)$$

Без потери общности можно выбрать систему координат с осью x вдоль вектора \mathbf{k} . В этой системе плазма может не иметь изотропного или монотонно убывающего распределения. Поскольку предполагается, что в равновесном состоянии поля отсутствуют, $f_{\alpha 0}$ удовлетворяет равенствам

$$\rho_{q0} = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0 \quad (9.10.4)$$

и

$$\mathbf{J}_0 = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d\mathbf{v} = 0. \quad (9.10.5)$$

В выбранной системе координат ($\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}}$) уравнения Максвелла (9.10.3) принимают вид

$$\left[\omega^2 - \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{v_x (\partial f_{\alpha 0} / \partial v_x)}{k_x v_x - \omega} d\mathbf{v} \right] E_x = 0, \quad (9.10.6)$$

$$\left[k_x^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{k_x v_y^2}{k_x v_x - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_x} d\mathbf{v} \right] E_y = 0, \quad (9.10.7)$$

$$\left[k_x^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{k_x v_z^2 (\partial f_{\alpha 0} / \partial v_x)}{k_x v_x - \omega} d\mathbf{v} \right] E_z = 0. \quad (9.10.8)$$

Уравнение (9.10.6) с $E_x \neq 0$ представляет собой дисперсионное уравнение для электростатических волн, которое мы исследовали в § 3—6 гл. 8. Устойчивость этих волн определяется критерием Пенроуза (9.6.1). Уравнения (9.10.7) и (9.10.8) описывают дисперсию электромагнитных волн, которые могут стать неустойчивыми вследствие анизотропии температуры, наличия пучков и т. д. Чтобы почувствовать, от чего зависит устойчивость плазмы по отношению к электромагнитным возмущениям, нужно решить уравнение (9.10.8) для нескольких состояний плазмы с различными $f_{\alpha 0}$.

10.1. Устойчивость электромагнитных возмущений в плазме без внешних полей

Как было показано в § 6 настоящей главы, изотропные распределения $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ устойчивы по отношению к электростатическим возмущениям; они устойчивы также и по отношению к электромагнитным возмущениям. Устойчивость можно доказать, либо применив метод диаграмм Найквиста, либо непосредственно показав, что при $\omega_i > 0$ ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) уравнение (9.10.8) не может быть удовлетворено. Здесь мы используем метод Найквиста. В этом методе рассматривают тождество

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{D} \frac{dD}{d\omega} d\omega,$$

где N — число корней уравнения $D(k, \omega) = 0$, которые имеют $\omega_i > 0$ (что соответствует неустойчивости); контур интегрирования C показан на фиг. 176.

Чтобы использовать диаграммы Найквиста для нахождения неустойчивых корней функции ¹⁾

$$H = k_x^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{k_x v_y^2 (\partial f_{\alpha 0} / \partial v_x)}{k_x v_x - \omega} d\mathbf{v}, \quad (9.10.9)$$

прежде всего следует отметить, что $(1/H) (dH/d\omega)$ не стремится к нулю при $|\omega| \rightarrow \infty$, как это имело место в случае электростатической неустойчивости.

Поэтому $\int_C (1/H) (dH/d\omega) d\omega$ нельзя заменять на $\int_{-\infty}^{\infty} (1/H) (dH/d\omega) d\omega$. Впрочем, это препятствие легко преодолимо: записав $\omega = R e^{i\theta}$, можно в явном виде вычислить интеграл

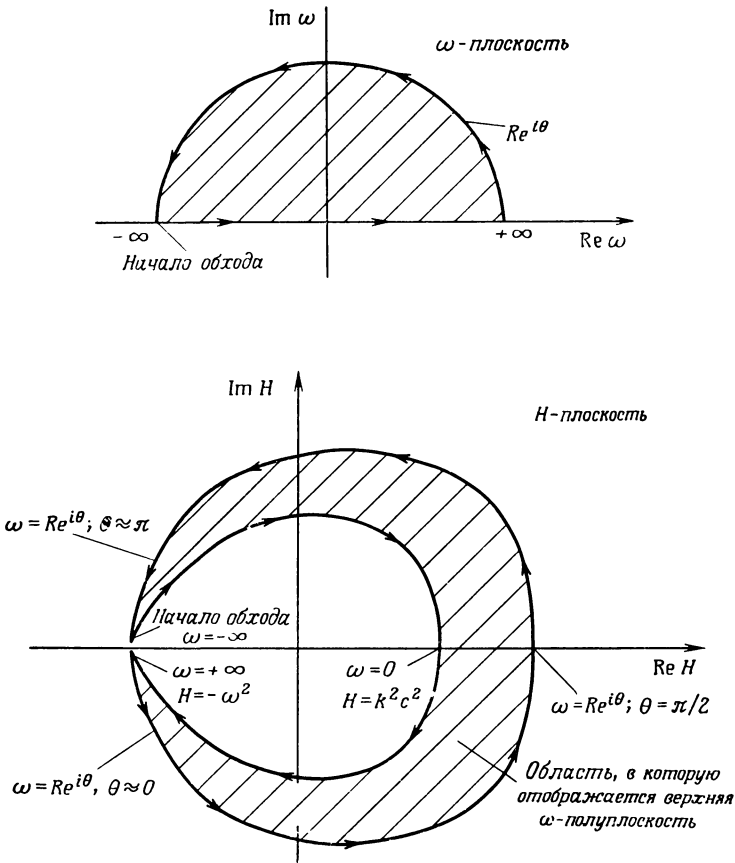
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} i R e^{i\theta} d\theta \left(\frac{1}{H} \frac{dH}{d\omega} \right).$$

Другой способ состоит в построении кривой $H(\omega)$, когда ω пробегает контур C (фиг. 176), что сразу позволяет найти N , подсчитав число оборотов H вокруг начала координат $H = 0$:

$$\int \frac{1}{H} \frac{dH}{d\omega} d\omega = \ln H(\omega).$$

Задача 9.10.3. Покажите, что изотропное распределение устойчиво относительно электромагнитных волн, доказав, что уравнение $H(k_x, \omega) = 0$ не может быть удовлетворено, если ω соответствует неустойчивой волне.

¹⁾ Нули функции $H = -\omega^2 D(k, \omega)$ совпадают с нулями диэлектрической проницаемости $D(k, \omega)$. В данном параграфе мы рассматриваем H , а не D , чтобы не иметь дела с полюсом при $\omega = 0$, который в случае электромагнитных волн имеется у D . В § 6 настоящей главы мы показали, как использовать диаграммы Найквиста для функций, имеющих полюса; читатель может убедиться, что при этом подходе получаются те же результаты.



Фиг. 176. Контур в ω -плоскости и диаграмма Найквиста в H -плоскости для электромагнитных волн в плазме с монотонно убывающей функцией распределения. Показано, что такое распределение устойчиво. Заштрихованная область внизу соответствует $\omega_i > 0$.

На части контура в ω -плоскости, где ω вещественна, для вещественной и мнимой частей функции $H(k_x, \omega) = H_r + iH_i$ мы можем записать выражения

$$\begin{aligned}
 H_r &= k_x^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \oint \frac{k_x v_y^2 (\partial f_{\alpha 0} / \partial v_x)}{k_x v_x - \omega} dv, \\
 H_i &= -\pi \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int v_y^2 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_x} \delta\left(v_x - \frac{\omega}{k_x}\right) dv,
 \end{aligned}
 \tag{9.10.10}$$

которые в случае изотропного распределения имеют вид

$$\begin{aligned}
 H_r(\omega) &= k_x^2 c^2 - \omega^2 - \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \oint \frac{\omega f_{\alpha 0}}{k_x v_x - \omega} dv, \\
 H_i(\omega) &= -\pi \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{\omega}{|k_x|} \int f_{\alpha 0} \left(v_y^2 + v_z^2 + \frac{\omega^2}{k_x^2}\right) dv_y dv_z.
 \end{aligned}
 \tag{9.10.11}$$

Здесь \oint обозначает интеграл в смысле главного значения Коши. Согласно (9.10.9), если ω пробегает значения, расположенные на верхней полуокруж-

ности контура C (т. е. $\omega = Re^{i\theta}$, $R \rightarrow \infty$, $0 < \theta < \pi$), $H(\omega) = -\omega^2$, откуда

$$\begin{aligned} H_r &= R^2 \cos 2\theta, \\ H_i &= -R^2 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad \omega = Re^{i\theta}, \quad R \rightarrow \infty. \quad (9.10.12)$$

Используя (9.10.11) и (9.10.12), нетрудно построить кривую $H(\omega)$, как показано на фиг. 176 (для удобства приведен и контур C). Направление обхода изображено стрелками; ясно, что контур H не окружает начала координат $H = 0$, когда ω проходит контур C (верхняя часть фиг. 176). Поэтому N (число корней уравнения $H = 0$, соответствующих неустойчивости) равно нулю, и, таким образом, доказано, что изотропное распределение устойчиво по отношению к электромагнитным возмущениям. Если бы вещественная часть H_r при $\omega = 0$ оказалась *отрицательной*, то диаграмма Найквиста указывала бы на неустойчивость.

Из этих соображений можно получить критерий неустойчивости плазмы с односторонним, но анизотропным распределением, аналогичный критерию Пенроуза для электростатических волн. Полагая в (9.10.10) $H_r(\omega = 0) < 1$, можно записать этот критерий в виде

$$k^2 c^2 + 2\omega_{pe}^2 \int v_y^2 \left(\frac{\partial}{\partial v_x^2} - \frac{\partial}{\partial v_y^2} \right) \left(f_{c0} + \frac{m_e}{m_i} f_{i0} \right) dv < 0 \quad (\text{неустойчивость}).$$

Ниже мы рассмотрим пример, в котором анизотропия распределения приводит к неустойчивости.

10.2. Электромагнитная неустойчивость двухтемпературной максвелловской плазмы

Пусть температура T_x в плазме отличается от температур в направлениях, перпендикулярных x . Запишем соответствующее распределение

$$f_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi k T_x} \right)_{\alpha}^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)_{\alpha} \exp \left[- \left(\frac{m}{2k T_x} \right)_{\alpha} v_x^2 - \left(\frac{m}{2k T} \right)_{\alpha} (v_y^2 + v_z^2) \right], \quad T_x \neq T. \quad (9.10.13)$$

Такое распределение может возникнуть в результате применения некоторых методов создания плазмы и существовать в течение времени $t < \tau_c$. Это распределение устойчиво по отношению к электростатическим возмущениям. Устойчивость же по отношению к электромагнитным возмущениям можно проверить, если подставить f_{α} из (9.10.13) в уравнение (9.10.10) для $H(k_x, \omega)$ и исследовать диаграмму Найквиста. Эта диаграмма аналогична приведенной на фиг. 176, поскольку для распределения (9.10.13) при вещественном ω

$$H_i(\omega) = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left(\frac{m}{k T_x} \right)_{\alpha}^{1/2} \frac{\omega}{|k_x|} \exp \left[- \frac{m_{\alpha}}{2k T_{x\alpha}} \left(\frac{\omega}{|k_x|} \right)^2 \right]$$

и обращается в нуль только при $\omega = 0$. Величина H_r при $\omega = 0$ равна

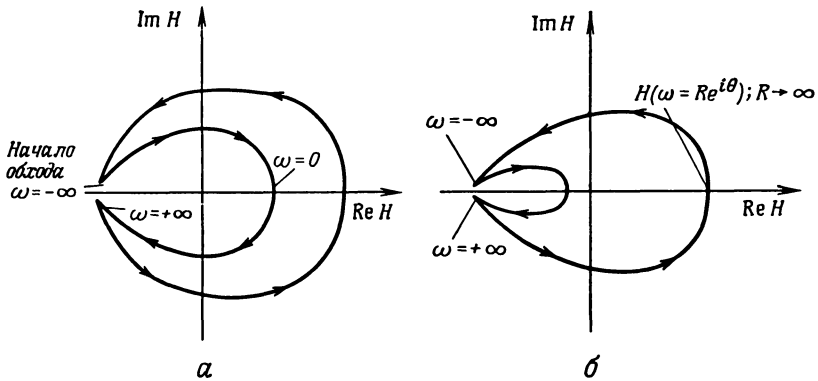
$$H_r(\omega = 0) = k_x^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_x} \right)_{\alpha},$$

и знак этого выражения определяет устойчивость распределения.

На фиг. 177 показана диаграмма Найквиста для двухтемпературного максвелловского распределения. Условие его неустойчивости по отношению к расщепке волн с волновым вектором $\mathbf{k} = k_x \hat{x}$ записывается следующим образом:

$$\left(\frac{T_{\perp}}{T_x} - 1 \right)_{\alpha} > \frac{k_x^2 c^2}{\omega_{pe}^2} \quad (\text{неустойчивость}), \quad (9.10.14)$$

$$\mathbf{E} = E_{\perp} \hat{i}_{\perp} e^{ik_x x}.$$



Фиг. 177. Диаграммы Найквиста для электромагнитных волн в двухтемпературной максвелловской плазме.

а — устойчивость, анизотропия температуры мала; $[k_x^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 (1 - T_{\perp}/T_x)] > 0$; **б** — неустойчивость, большая анизотропия температуры; $[k_x^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 (1 - T_{\perp}/T_x)] < 0$.

При выводе данного условия пренебрегалось величиной ω_{pi}^2 по сравнению с ω_{pe}^2 . Таким образом, двухтемпературное максвелловское распределение неустойчиво по отношению к волнам, распространяющимся в «холодном» направлении, электрический вектор которых ориентирован в «теплом» направлении.

Скорость, с которой нарастают эти возмущения, можно определить непосредственно, зная нули функции (9.10.10), которая имеет вид

$$H(k_x, \omega) = 1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega} \left(1 - \int_L \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} \frac{v_x f_{\alpha 0}}{v_x - \omega/|k_x|} dv \right) = 0. \quad (9.10.15)$$

Подставив сюда распределение (9.10.13), можно получить дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в двухтемпературной максвелловской плазме:

$$k_x^2 c^2 - \omega^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left(1 - \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} \right) = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} \xi_{\alpha} Z(\xi_{\alpha}), \quad (9.10.16)$$

где

$$\xi_{\alpha} = \frac{\omega}{k_x \sqrt{2\kappa T_{\alpha x}/m_{\alpha}}}$$

и

$$Z(\xi_{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2) dx}{x - \xi_{\alpha}}.$$

Функция $Z(\xi)$, часто встречающаяся в теории устойчивости плазмы, табулирована Фридом и Конте [11]. В предельных случаях она дается рядами:

$$Z(\xi) = \begin{cases} -2\xi + \frac{4}{3}\xi^3 - \dots + i\sqrt{\pi} \frac{k_x}{|k_x|} \exp(-\xi^2), & |\xi| \ll 1, \\ -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2\xi^3} - \frac{3}{4\xi^5} - \dots, & |\xi| \gg 1. \end{cases}$$

В случае $T_{\alpha\perp} = T_{\alpha x}$ и $|\xi_{\alpha}| \gg 1$ дисперсионное уравнение (9.10.16) превращается в уравнение $\omega^2 \approx \omega_p^2 + k^2 c^2$, описывающее световые волны в плазме.

Неустойчивость, вызываемая анизотропией плазмы, имеет гораздо более низкую частоту. Если $T_{\alpha\perp} \neq T_{\alpha x}$, решение уравнения (9.10.16) можно найти при $|\xi_\alpha| \ll 1$.

В пределе $\xi_\alpha \ll 1$ уравнение (9.10.16) принимает (в пренебрежении величиной $\omega^2 \ll k_x^2 c^2$) вид

$$k_x^2 c^2 + \sum \omega_{p\alpha}^2 \left(1 - \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}}\right) = \sum \omega_{p\alpha}^2 \frac{T_{\alpha\perp}}{T_{\alpha x}} \left(-2\xi_\alpha^2 + i\sqrt{\pi} \frac{k_x}{|k_x|} \xi_\alpha\right)_\alpha, \quad |\xi_\alpha| \ll 1.$$

Приближенное решение этого уравнения (в пренебрежении ионным вкладом, поскольку $m_e \ll m_i$) записывается следующим образом:

$$\omega = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} |k_x| \sqrt{\frac{\kappa T_{ex}}{m_e} \frac{T_{ex}}{T_{e\perp}} \left(\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega_{pe}^2}\right)}. \quad (9.10.17)$$

Эта мода, существующая лишь в анизотропной плазме, аperiodически либо нарастает, либо затухает. Неустойчивыми (нарастающими) являются волны, для которых выполняется условие

$$k_x^2 \ll k_0^2 \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left(\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1\right),$$

причем в силу предположения $|\xi_\alpha| \ll 1$ величина k подчиняется условию $|\omega/k_x \sqrt{\kappa T_{ex}/m_e}| \ll 1$. Инкремент обращается в нуль при $k_x = 0$ и $k_x = k_0$ и максимален при $k_x^2 = \frac{1}{3} k_0^2$ [12, 13]:

$$\omega_{i, \text{макс}} = \left(\frac{8}{27\pi}\right)^{1/2} \omega_{pe} \left(\frac{\kappa T_{ex}}{m_e c^2}\right)^{1/2} \frac{T_{ex}}{T_{e\perp}} \left(\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1\right)^{3/2}. \quad (9.10.18)$$

Задача 9.10.4. Покажите, что в изотропной плазме с $T_{e\perp} = T_{ex}$ уравнение (9.10.16) не имеет неустойчивых решений для $|\xi_\alpha| \ll 1$.

Если распределение имеет сильную анизотропию, так что $\frac{\omega_{i, \text{макс}}}{k_x \sqrt{\kappa T_{ex}/m_e}}$ определяется выражением (9.10.18), превышает величину $k_x \sqrt{\kappa T_{ex}/m_e}$, то нарушается приближение $|\xi_\alpha| \ll 1$, при котором это выражение получено. Следовательно, выражения (9.10.17) и (9.10.18) более не применимы. В случае сильной анизотропии неустойчивыми становятся волны, для которых $|\xi| \gg 1$. В этом пределе дисперсионное уравнение (9.10.16) при $T_x \ll T_\perp$ (здесь мы опустили индекс, обозначающий сорт частиц) принимает следующий вид:

$$k_x^2 c^2 + \omega_{pe}^2 = -\omega_{pe}^2 \frac{T_\perp}{T_x} k_x^2 \frac{\kappa T_x}{\omega^2 m_e},$$

$$k_x^2 \frac{\kappa T_x}{\omega^2 m_e} \ll 1.$$

Отсюда мы имеем

$$\omega = \pm i \omega_{pe} \left(\frac{T_\perp}{T_x}\right)^{1/2} \left(\frac{k_x^2 \kappa T_x / m_e}{k_x^2 c^2 + \omega_{pe}^2}\right)^{1/2}. \quad (9.10.19)$$

Следовательно,

$$\omega_{i, \text{макс}} = \omega_{pe} \left(\frac{T_\perp}{T_x}\right)^{1/2} \left(\frac{\kappa T_x}{m_e c^2}\right)^{1/2}.$$

Выполнение неравенства $|\omega| \gg |k_x| \sqrt{\kappa T_x / m_e}$, где ω определяется выражением (9.10.19), возможно лишь при сильной анизотропии

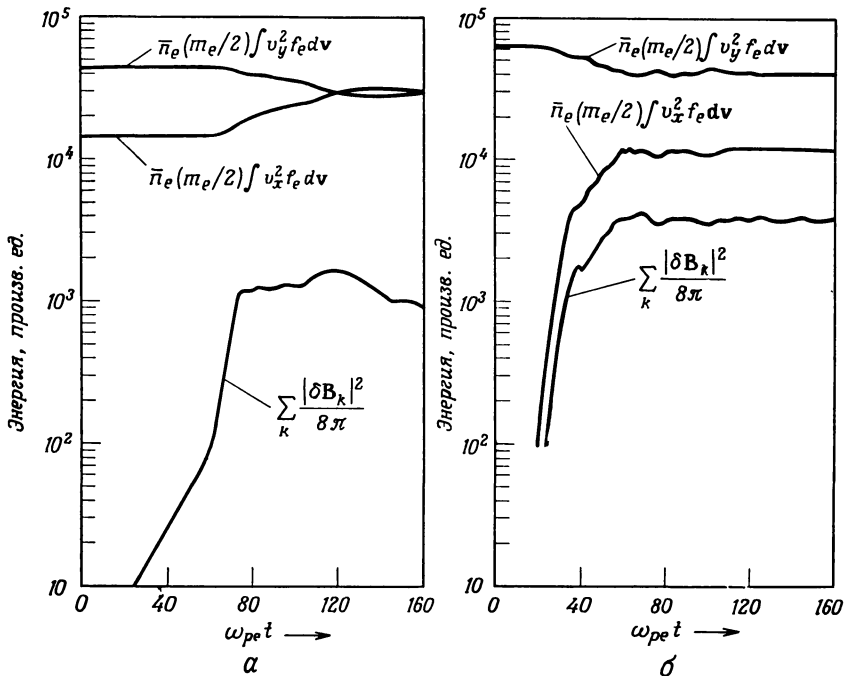
$$\frac{T_\perp}{T_x} \gg 1.$$

Эти результаты показывают, что анизотропия давления приводит к неустойчивости с максимальным инкрементом, равным $\omega_i \approx \omega_{pe} (v_T/c)$. Этот вывод справедлив не только для двухтемпературного максвелловского распределения. Результаты (9.10.16) — (9.10.19) верны и для распределения, в деталях отличающегося от двухтемпературного, но имеющего анизотропную эффективную температуру, значение которой в направлении j определяется равенством

$$\frac{1}{2} \kappa T_j = \int \frac{1}{2} m v_j^2 f dv.$$

Например, большая эффективная температура T_{\perp} может возникнуть за счет двух встречных холодных (с $T = T_x$) электронных потоков, распространяющихся со скоростью u_0 на нейтрализующем фоне. В этом случае (см. задачу 9.10.5) устойчивость определяется уравнениями (9.10.18) и (9.10.19), в которых $\kappa T_{\perp} \equiv \frac{1}{2} m u_0^2$ и $T_x = T$.

Интересные данные о существовании таких неустойчивостей были получены с помощью моделирования на ЭВМ [13], при этом удалось проследить за траекториями большого числа заряженных частиц с анизотропным начальным распределением по скоростям. Результаты показали, что в соответствии с изложенной здесь теорией электрические и магнитные поля экспоненциально нарастают, причем инкременты согласуются с (9.10.19). На фиг. 178 приведены результаты моделирования неустойчивостей на ЭВМ для двух начальных распределений плазмы. Кривые на фиг. 178, а демонстрируют неустойчивость максвелловского распределения, а на фиг. 178, б — встречных электронных потоков. Влияние неустойчивости иллюстрируется зависимостями T_x и $T_{\perp} \equiv T_y$ от времени. Заметим, что неустойчивость приводит



Фиг. 178. Результаты моделирования на ЭВМ развития электромагнитной неустойчивости в анизотропной плазме [13].

а — вначале плазма имеет двухтемпературное максвелловское распределение с $T_y > T_x$; со временем флуктуации поля δB_k растут, а температуры T_x и T_y уравниваются; б — плазма образована двумя движущимися навстречу друг другу (в направлении y) холодными электронными пучками ($T_x = 0$). Неустойчивость ведет к тому, что часть кинетической энергии направленного движения пучков переходит в тепловую энергию. В работе [13] обсуждаются также асимптотические (при $t \rightarrow \infty$) состояния.

к изотропизации распределения. Инкременты неустойчивых электромагнитных волн в плазме обычно определяются выражением (9.10.19), в то время как инкременты электростатических неустойчивостей в плазме со встречными потоками равны величине $\omega_i \approx \omega_{pe}$. Таким образом, электромагнитные неустойчивости развиваются примерно в v_T/c раз медленнее нерезонансных электростатических неустойчивостей, если выполнены условия для развития тех и других (задача 9.10.5).

Электромагнитные неустойчивости развиваются за счет избытка энергии электронов $\kappa (T_{\perp} - T_x)$, что ясно прослеживается на фиг. 178. Развитие неустойчивости ограничено избыточной энергией, соответствующей неравновесному распределению. В конечном счете описанная здесь неустойчивость может привести к установлению устойчивого распределения электронов. Распределение ионов при этом может еще оставаться анизотропным (из-за большой массы ионы слабее, чем электроны, возмущаются высокочастотными волнами с $\omega > \omega_{pi}$); в этом случае при решении (9.10.16) следует удерживать ионный вклад. Поэтому на практике часто бывает необходимым рассматривать анизотропное распределение ионов на фоне *изотропного* распределения электронов. Хотя в такой системе неустойчивости развиваются медленнее, чем в случае, обсуждавшемся выше, эти неустойчивости приводят к окончательной термализации плазмы.

Расчеты устойчивости анизотропного распределения ионов проводятся такими же методами. В качестве упражнения мы предлагаем читателю получить результаты, сформулированные в задачах 9.10.6 и 9.10.7.

Задача 9.10.5. Рассмотрите электромагнитную неустойчивость встречных электронных пучков:

$$f_{e0} = \frac{1}{2} [\delta(v_y - u_0) + \delta(v_y + u_0)] \delta(v_x) \delta(v_z),$$

$$f_{i0} = \delta(\mathbf{v}).$$

Покажите, что

$$\omega \approx \frac{i |k_x| u_0}{(1 + k_x^2 c^2 / \omega_{pe}^2)^{1/2}}.$$

Сравните полученный инкремент с инкрементом электростатических волн, также неустойчивых для рассматриваемого распределения. В каком направлении распространяются электромагнитные и электростатические неустойчивые волны?

10.3. Неустойчивость анизотропного распределения ионов на фоне горячих электронов

Задача 9.10.6. Покажите, что распределение плазмы

$$f_{i0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_x} \right)_i^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \right)_i \exp \left(- \frac{m_i}{2\kappa T_{ix}} v_x^2 \right) \exp \left[- \frac{m_i}{2\kappa T_{i\perp}} (v_y^2 + v_z^2) \right],$$

$$f_{e0} = \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_e}{2\kappa T_e} v^2 \right), \quad T_e \gg T_i,$$

неустойчиво относительно электромагнитных волн $\mathbf{E} = \bar{E} \hat{i}_{\perp} \exp(ik_x x)$, если

$$\frac{T_{i\perp}}{T_{ix}} - 1 \geq \frac{k_x^2 c^2}{\omega_{pi}^2} \quad (\text{неустойчивость}). \quad (9.10.20)$$

Покажите также, что инкремент неустойчивости электромагнитных волн $\omega_i \approx \omega_{pi} (v_T/c)$.

10.4. Электромагнитная неустойчивость анизотропного распределения ионов на фоне холодных электронов

Задача 9.10.7. Покажите, что распределение

$$f_{i0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_x} \right)_i^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_\perp} \right)_i \exp \left(-\frac{m_i}{2\kappa T_{ix}} v_x^2 \right) \exp \left[-\frac{m_i}{2\kappa T_{i\perp}} (v_y^2 + v_z^2) \right],$$

$$f_{e0} = \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e}{2\kappa T_e} v^2 \right), \quad T_e \ll T_i,$$

неустойчиво по отношению к электромагнитным волнам

$$\mathbf{E} = \bar{E}_\perp \hat{\mathbf{i}}_\perp \exp(ik_x x).$$

Найдите максимальный инкремент и интервал волновых чисел неустойчивых волн.

Задача 9.10.8. Сравните устойчивость плазмы в пределе бесконечно горячих электронов и в пределе бесконечно тяжелых ионов. Эти два приближения часто используются при изучении устойчивости плазмы.

§ 11. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПИНЧЕВАНИЮ

Сущность неустойчивостей, описанных выше, состоит в пинчевании возмущений тока, которое приводит к увеличению плотности тока в возмущении. Проще всего проследить этот механизм, изучая плазму с двумя встречными электронными потоками с поперечной температурой электронов T_e , описываемую распределением

$$f_{e0} = \frac{1}{2} \frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \exp \left[-\frac{m_e}{2\kappa T_e} (v_x^2 + v_z^2) \right] [\delta(v_y - u) + \delta(v_y + u)], \quad (9.11.1)$$

$$f_{i0} = \delta(\mathbf{v}).$$

Согласно предыдущему рассмотрению, это распределение неустойчиво по отношению к волнам, в которых поле \mathbf{E} параллельно направлениям потоков, а волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен им. Условие неустойчивости $\text{Re}[D(\omega = 0)] < 0$ (см. § 10 данной главы) имеет вид

$$k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \left(1 - \frac{m_e u_0^2}{\kappa T_e} \right) < 0 \quad (\text{неустойчивость})$$

или

$$\frac{m_e u_0^2}{\kappa T_e} > \frac{k^2 c^2}{\omega_{pe}^2} + 1 \quad (\text{неустойчивость}). \quad (9.11.2)$$

Последний критерий почти тождествен условию Беннета устойчивости пинча. Если пучок заряженных частиц ограниченного сечения проходит по нейтрализующему фону, он стремится расширяться под действием давления $n\kappa T$. Однако создаваемое на поверхности пучка магнитное давление $B^2/8\pi$ стремится сжать пучок. При $B^2 > 8\pi n\kappa T$ пучок самофокусируется. Поле B , создаваемое пучком, зависит от скорости u , плотности n и поперечных размеров пучка. Записанное условие самофокусировки пучка переходит в (9.11.2), если выбрать поперечный размер пучка порядка длины неустойчивой волны [14, 15].

Существует много других примеров соответствия между критериями электромагнитной неустойчивости и условием Беннета устойчивости пинча. Наложение внешнего магнитного поля может стабилизировать электромагнитные неустойчивости, если отношение $\beta_\perp = 8\pi n\kappa T_\perp / B^2$ достаточно мало (T_\perp — температура в направлении, перпендикулярном приложенному магнитному полю).

§ 12. УСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Неустойчивости, развивающиеся в незамагниченной плазме с анизотропным распределением частиц по скоростям, существуют и в плазме, помещенной в магнитное поле. Причем в последнем случае с ними чаще всего и приходится сталкиваться. Анизотропное распределение в замагниченной плазме возникает вследствие различных причин. Приведем некоторые из них.

1. Адиабатическое сжатие (медленное увеличение поля $| \mathbf{B}_0 |$) создает анизотропное распределение, которое, если оно было устойчивым в начальный момент времени, не разрушается в течение промежутков времени порядка τ_c .

2. Свободное расширение вдоль магнитного поля \mathbf{B}_0 .

3. Удержание плазмы в пробкотроне возможно лишь при наличии анизотропии (как показано в приложении I, от слабых магнитных пробок отражаются лишь частицы с $w_{\perp} > w_{\parallel}$).

4. Инжекция плазмы поперек магнитного поля \mathbf{B}_0 .

Все эти возможности осуществляются в лабораторной и космической плазме. Устойчивость замагниченной плазмы исследуется с помощью общего дисперсионного уравнения, полученного (для произвольных направлений \mathbf{k} и $\bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$) в гл. 8. В данном параграфе собраны некоторые *результаты* такого исследования.

В случае плазмы при отсутствии внешних полей условие неустойчивости имеет вид

$$\frac{T_{e\perp}}{T_{ex}} - 1 > \frac{k_x^2 c^2}{\omega_p^2}, \quad (9.12.1)$$

так что и при небольшой анизотропии длинные волны остаются неустойчивыми. Это означает, что волны с большими длинами легче всего становятся неустойчивыми. Магнитное поле существенно меняет свойства волн, длина которых превышает ларморовский радиус (a_{ce}) частиц плазмы, в то время как свойства волн с $k^2 a_{ce}^2 > 1$ остаются примерно такими же, как и в отсутствие поля. Поэтому можно ожидать, что полученные выше результаты окажутся применимыми, если наложить дополнительное условие $k^2 a_{ce}^2 > 1$, которое можно записать также в виде $k^2 c^2 / \omega_{pe}^2 = k^2 a_{ce}^2 / \beta_e > 1 / \beta_e$, где $\beta_e = nkT_e / (B_0^2 / 8\pi)$. Действительно, детальное исследование устойчивости замагниченной анизотропной плазмы показывает, что в поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ рассматривавшиеся выше волны ($\mathbf{E} = E_k \hat{\mathbf{z}} \exp(ik_x x)$) неустойчивы, если

$$\left(\frac{T_{\parallel B_0}}{T_{\perp B_0}} \right)_e - 1 > \frac{1}{\beta_e} \quad (\text{неустойчивость}), \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \parallel \mathbf{B}_0. \quad (9.12.2)$$

Такая неустойчивость развивается в плазме, в которой имеется сильный поток заряженных частиц вдоль силовых линий поля. Не удивительно, что при малом β эти электромагнитные неустойчивости стабилизируются, поскольку возмущения в плазме слишком слабы, чтобы изменить удерживающее поле \mathbf{B}_0 , если давление плазмы намного меньше величины $B_0^2 / 8\pi$; в то же время для электромагнитных неустойчивостей *необходимы* существенные возмущения магнитного поля \mathbf{B}_1 .

Во многих ситуациях (при адиабатическом сжатии, при удержании в магнитных ловушках) $T_{\perp} > T_{\parallel}$. Здесь неустойчивыми оказываются волны, в которых $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ и \mathbf{k} почти перпендикулярны \mathbf{B}_0 , и критерий существования неустойчивости записывается аналогично (9.12.2) [15, 22*]. Эта неустойчивость называется *зеркальной*:

$$\left(\frac{T_{\perp B_0}}{T_{\parallel B_0}} - 1 \right)_e > \frac{1}{2\beta_e} \quad (\text{зеркальная неустойчивость}), \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \parallel \mathbf{B}_0. \quad (9.12.3)$$

Кроме неустойчивости (9.12.2), в плазме с $T_{\parallel} > T_{\perp}$ может развиваться шланговая неустойчивость, рассмотренная в гл. 5 на основе гидродинамических уравнений. Эта мода имеет круговую поляризацию, в которой электрический вектор \mathbf{E}_1 перпендикулярен, а волновой вектор \mathbf{k} параллелен полю \mathbf{B}_0 . В этом случае условие неустойчивости [15, 22*] записывается в виде

$$\frac{T_{\parallel B_0}}{T_{\perp B_0}} - 1 > \frac{2}{\beta} \quad (\text{шланговая неустойчивость}), \quad \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{E}_k \perp \mathbf{B}_0.$$

Как отмечалось выше, магнитное поле стабилизирует все потенциально неустойчивые волны, если их длина волны превышает ларморовский радиус (ср. с обсуждавшейся в § 8 настоящей главы двухпотоковой неустойчивостью в магнитном поле).

§ 13. КОНУСНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Существуют электростатические неустойчивости, раскачивающиеся при некоторых анизотропных распределениях, в особенности в замагниченной плазме. Одной из рассмотренных ранее всего неустойчивостей такого рода является неустойчивость, изученная Харрисом [16]. Он показал, что анизотропные распределения электронов в магнитном поле неустойчивы по отношению к распространяющимся под углом к \mathbf{B}_0 электростатическим волнам, длины волн которых порядка ларморовского радиуса. Для существования этой неустойчивости должен быть превышен порог по плотности, а именно должно выполняться условие $\omega_{pe}/\omega_{ce} > 1$. К неустойчивостям, изученным позже, относится конусная неустойчивость [17], которую мы рассмотрим здесь подробно.

Плазма, удерживаемая в пробкотроне, характеризуется (в центральной части ловушки) распределением ионов по поперечным скоростям (фиг. 179), зависящим от значения скорости v , параллельной магнитному полю. В частности, можно записать

$$f_{i0} = f_{i0}(v_{\perp}^2, v_{\parallel}^2), \quad (9.13.1)$$

причем

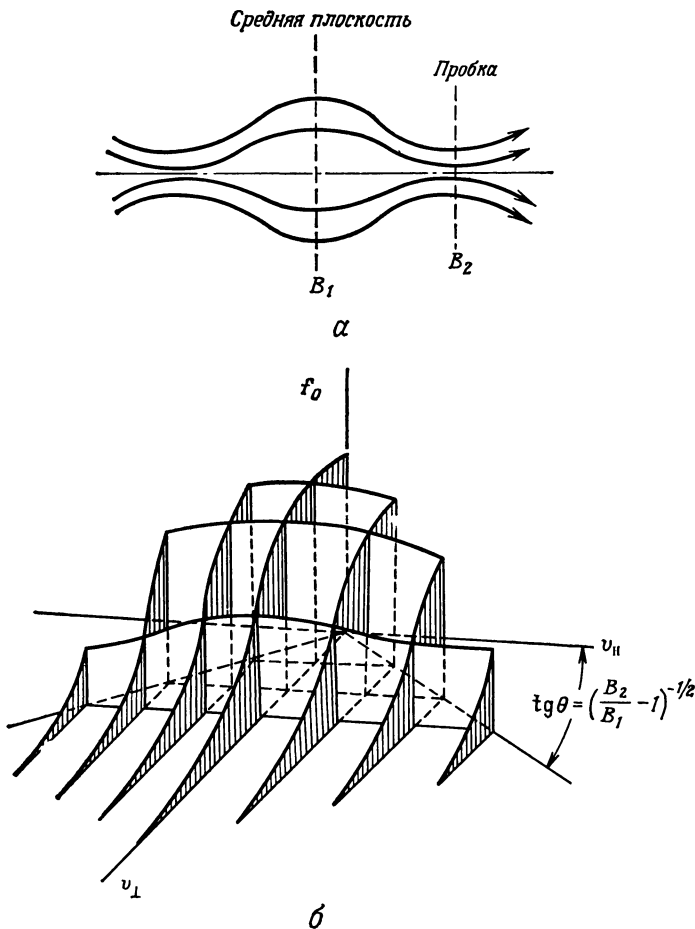
$$f_{i0} = 0, \quad \text{если } v_{\perp}^2 < Mv_{\parallel}^2, \quad (9.13.2)$$

где константа M зависит от пробочного отношения. Справедливость условия (9.13.2) для распределения плазмы в пробкотроне следует из приведенного в приложении I анализа движения частиц. При заданном пробочном отношении B_2/B_1 (фиг. 179) ионы с $v_{\perp} = 0$ (в центральной части пробкотрона) будут вылетать из ловушки. Поэтому для ионов $f_{i0}(v_{\perp} = 0, v_{\parallel} \neq 0) = 0$. Ион, имеющий скорость v_{\parallel} , отразится от пробки лишь при достаточно большом v_{\perp} ; это и учтено в (9.13.2). Распределение же электронов можно считать изотропным, поскольку легкие электроны не могут уйти от ионов.

Распределение с конусом потерь присуще любой плазме в магнитной ловушке и встречается как в лаборатории, так и в космосе (например, магнитное поле Земли образует ловушку, в которой удерживаются частицы радиационных поясов); поэтому неустойчивость, развивающаяся вследствие анизотропии (9.13.2), играет весьма важную роль. Совершенно ясно, что такое распределение в принципе может быть неустойчивым по отношению к электростатическим возмущениям, поскольку оно не является монотонно убывающей функцией v^2 .

Пусть для простоты плазма, распределение в которой имеет вид (9.13.1), находится в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{i}}_{\parallel}$. Предположим, что кинетическое давление плазмы мало по сравнению с магнитным:

$$\beta = \frac{n\kappa T}{B_0^2/8\pi} \ll 1. \quad (9.13.3)$$



Фиг. 179. Схематическое представление магнитного поля пробкотрона (а) и функции распределения плазмы (б) [18].

Распределение плазмы анизотропно из-за наличия конуса потерь и неустойчиво вследствие возникновения специфической конусной неустойчивости.

Это ограничение позволяет рассматривать лишь электростатические неустойчивости, поскольку электромагнитные неустойчивости возмущают магнитное поле и приводят к увеличению его энергии. В самом деле, однородное равновесное магнитное поле \mathbf{B}_0 обладает минимумом энергии. Если кинетическое давление мало [см. (9.13.3)], любое уменьшение энергии частиц (при электромагнитных возмущениях) с избытком компенсируется увеличением энергии поля.

Дисперсионное уравнение для волн в замагниченной плазме было получено в гл. 8. Для электростатических волн $\mathbf{E} = E(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ при $\beta \ll 1$ оно имеет вид

$$k^2 = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 2\pi \int \sum_n \frac{J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{c\alpha})}{k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega + n\omega_{c\alpha}} \left(k_{\parallel} v_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} + n\omega_{c\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \right) dv_{\perp}^2 dv_{\parallel}, \quad (9.13.4)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_{\parallel}) \equiv (v_{\perp} \cos \theta, v_{\perp} \sin \theta, v_{\parallel})$, причем $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_{\parallel}) = (k_{\perp} \cos \psi, k_{\perp} \sin \psi, k_{\parallel})$ (см. задачу 9.13.1).

Нахождение всех решений уравнения (9.13.4) — процедура довольно утомительная. Ее можно значительно облегчить, если сделать следующие разумные предположения:

1. Поскольку электроны по предположению имеют изотропное распределение, они не вносят дестабилизирующего вклада. Наоборот, электроны обычно способствуют затуханию Ландау. Следовательно, скорее всего неустойчивыми будут те возмущения, для которых это затухание ничтожно:

$$\frac{\omega}{k_{\parallel}} \gg v_T, \quad (9.13.5)$$

где v_T — тепловая скорость электронов. Это ограничение, накладываемое на k_{\parallel} , мы будем использовать в дальнейшем исследовании.

2. Целесообразно рассматривать лишь волны, длина которых больше электронного ларморовского радиуса a_{ce} :

$$k_{\perp}^2 a_{ce}^2 \ll 1. \quad (9.13.6)$$

Это требование совместно с (9.13.5) означает, что электроны можно рассматривать как холодную жидкость (отвлекаясь от затухания Ландау и от распределения электронов по скоростям). Неравенство (9.13.6) позволяет в уравнении (9.13.4) пренебречь всеми членами, кроме $n = 0$, в сумме по n , определяемой распределением электронов, поскольку $J_n^2 \approx (k_{\perp}^2 a_{ce}^2)^n$. Неравенство (9.13.6) называют *пределом малого ларморовского радиуса*. В силу условия (9.13.5) можно написать следующее разложение:

$$\frac{1}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}} = \frac{1}{\omega} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega^2} + \dots$$

В результате уравнение (9.13.4) принимает вид

$$k^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} k_{\parallel}^2 + \sum_n \omega_{pi}^2 \int \frac{J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{ci}) [2k_{\parallel} v_{\parallel} (\partial f_{i0} / \partial v_{\parallel}^2) + 2n\omega_{ci} (\partial f_{i0} / \partial v_{\perp}^2)]}{k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_{ci} - \omega} dv. \quad (9.13.7)$$

Задача 9.13.1. Покажите, что дисперсионное уравнение (9.13.4) может быть получено следующими двумя способами:

а) путем вычисления плотности заряда $\rho_1 = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} dv$ [где $f_{\alpha 1}$ дается выражением (8.10.8) в предположении $\mathbf{B}_1 = 0$] и последующего использования уравнения $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi \rho_1$;

б) путем перехода к пределу $\beta \ll 1$, $kc \gg \omega$ в дисперсионном уравнении (8.10.10).

Сравнение с результатами гл. 4 показывает, что член $(\omega_{pe}^2 / \omega^2) k_{\parallel}^2$ описывает отклик холодной электронной жидкости на электростатический потенциал ϕ_k . По этой причине приближения (9.13.5) и (9.13.6) часто называют *пределом нулевой температуры*, хотя на самом деле они представляют собой ограничение на длины рассматриваемых волн.

Член в уравнении (9.13.7), описывающий вклад ионов, можно упростить, воспользовавшись тождеством

$$\int \frac{f(v)}{kv - \omega} dv = \oint \frac{f(v)}{kv - \omega} dv + \frac{i\pi}{|k|} f\left(v = \frac{\omega}{k}\right)$$

и заметив, что, поскольку

$$\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2,$$

вещественной частью интеграла, описывающего вклад ионов, можно пренебречь. Тогда, согласно (9.13.7),

$$\omega_r = \omega_{pe} \frac{k_{\parallel}}{k}. \quad (9.13.8)$$

Однако мнимой частью ионного слагаемого пренебрегать нельзя, так как ею определяется инкремент ω_i . С учетом этих замечаний дисперсионное уравнение (9.13.7) принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} + \omega^2 \pi i \sum_n \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \frac{2\pi}{|k_{\parallel}|} \times \\ \times J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ci}} \right) \left[(\omega_r - n\omega_{ci}) \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\parallel}^2} + \right. \\ \left. + n\omega_{ci} \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} \right] dv_{\perp}^2 \Big|_{v_{\parallel} = \frac{\omega_r - n\omega_{ci}}{k_{\parallel}}} \quad (9.13.9)$$

Это уравнение описывает высокочастотные электростатические волны. Далее, поскольку при оценке электронного вклада было использовано неравенство $\omega \gg k_{\parallel} v_{\parallel}$, чтобы пренебречь затуханием Ландау, неравенство

$$\frac{\omega}{k} \gg v_{Ti} \quad (9.13.10)$$

тем более выполняется, если только температура ионов не *чрезвычайно* велика. Поэтому ионный вклад в неустойчивость существен лишь тогда, когда

$$\omega - n\omega_{ci} \approx 0, \quad (9.13.11)$$

поскольку только при таком условии равенство $k_{\parallel} v_{\parallel} \approx \omega - n\omega_{ci}$ выполняется при v_{\parallel} порядка тепловой скорости ионов. Но ω определяется плотностью электронов, т. е. $\omega \ll \omega_{pe}$, так как $k_{\parallel} \leq k$. Таким образом, условие (9.13.11) может выполняться лишь при достаточно высокой плотности. Это ограничение представляет собой необходимое условие существования неустойчивости, ибо в противном случае вклад дестабилизирующего члена пренебрежимо мал. Следовательно,

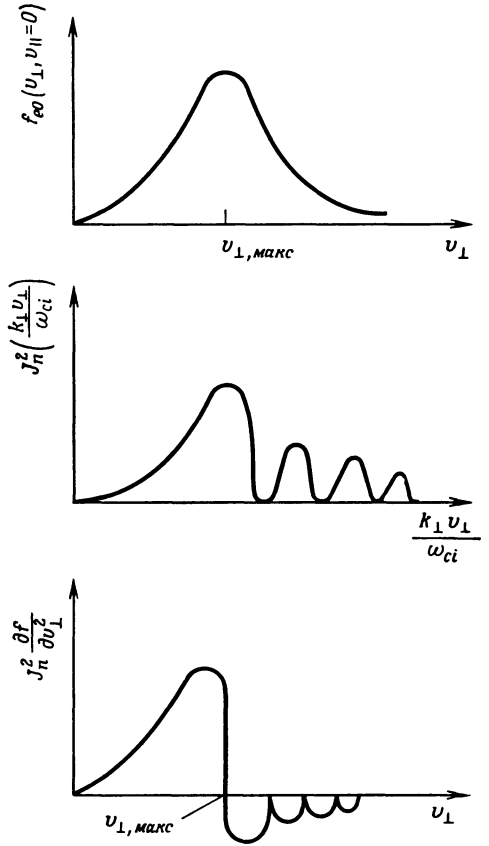
$$\omega_{pe}^2 \geq n^2 \omega_{ci}^2 \quad \text{есть необходимое условие конусной неустойчивости} \\ \text{на } n\text{-й гармонике } \omega_r = n\omega_{ci}. \quad (9.13.12)$$

Если условие (9.13.12) выполняется при $n \leq N$, неустойчивыми будут все гармоники с $n = 1, 2, \dots, N$. Для каждой из них существен лишь один из членов суммы $\sum_n J_n^2$. Для n -й гармоники, если положить $\omega_r - n\omega_{ci} = 0$, уравнение (9.13.9) записывается в виде

$$\omega = \omega_{pe} \frac{k_{\parallel}}{k} + i\omega_{pi}^2 \omega_{pe} \frac{\pi^2 \omega_{ci} n}{k^3} \int J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v}{\omega_{ci}} \right) \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} \Big|_{v_{\parallel}=0} dv_{\perp}^2. \quad (9.13.13)$$

Устойчивость моды определяется знаком последнего члена в (9.13.13). Из фиг. 180 ясно, что знак интеграла зависит от положения ($v_{\text{макс}}$) максимума функции $f_{i0}(v_{\perp}^2, v_{\parallel} = 0)$ относительно положения скорости v_{\perp} , при которой $J_n^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{ci})$ становится малой величиной. Из фиг. 180 нетрудно видеть, что

$$\int J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ci}} \right) \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} \Big|_{v_{\parallel}=0} dv_{\perp}^2 > 0, \quad \text{если } \frac{k_{\perp} v_{\perp, \text{макс}}}{\omega_{ci}} \gg n, \quad (9.13.14)$$



Фиг. 180. Графики функций, фигурирующих при вычислении конусной неустойчивости.

И

$$\int J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{ci}} \right) \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} dv_{\perp}^2 < 0, \quad \text{если } \frac{k_{\perp} v_{\perp, \text{макс}}}{\omega_{ci}} \ll n. \quad (9.13.15)$$

При записи этих неравенств максимум f_{i0} предполагался не настолько узким, чтобы интеграл определялся интервалом скоростей между двумя нулями функции Бесселя J_n .

Уравнение (9.13.13) удобно записать в виде

$$\omega = \omega_{pe} \frac{k_{\parallel}}{k} + \frac{i\pi^2 n \omega_{ci} \omega_{pi}^2 \omega_{pe}}{k^3 (\chi T_i / m_i)^{3/2}} G \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp, \text{макс}}}{\omega_{ci}} \right). \quad (9.13.16)$$

При такой записи устойчивость определяется знаком G . Для заданного распределения (т. е. для заданного значения $v_{\perp, \text{макс}}$) G есть функция от k_{\perp} . Ее график приведен на фиг. 181. Она имеет максимальное значение порядка единицы. Следовательно, волны с

$$k_{\perp} \gg \frac{v_{\perp, \text{макс}}}{n \omega_{ci}} \quad (9.13.17)$$

будут неустойчивыми ($G > 0$). Волновой вектор k_{\perp} , при котором инкремент максимален, может быть определен путем прямого вычисления G , если функция распределения ионов f_{i0} задана в явном виде. Но по порядку величины k_{\perp} для наиболее быстро растущей волны равен

$$k_{\perp} \approx \frac{n \omega_{ci}}{v_{\perp, \text{макс}}}.$$

Подставляя это значение k_{\perp} в (9.13.16), получаем максимальный инкремент

$$\omega_{i, \text{макс}} \approx \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{pe}}{n^2 \omega_{ci}^2} \quad (9.13.18)$$

в предположении, что $\omega_{i, \text{макс}} < n \omega_{ci}$ и $\omega_{pe} > n \omega_{ci}$.

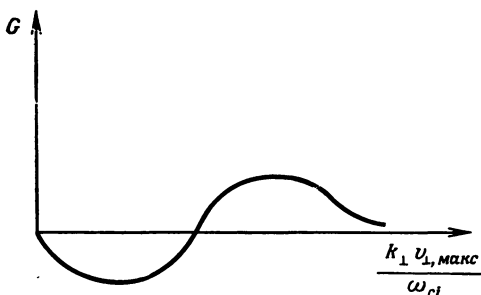
В проведенном анализе не использовалось никаких специфических свойств функции распределения ионов, за исключением того, что она обладает конусом потерь.

Во многих установках, использующих принцип пробкотрона, наблюдались колебания вблизи ионной циклотронной частоты, когда плотность плазмы достигала уровня, достаточного для выполнения условия неустойчивости (9.13.12).

Если плотность плазмы достаточно велика, т. е.

$$n_i > \frac{B_0^2}{4\pi m_i c^2} \frac{m_e}{m_i},$$

то $\omega_{i, \text{макс}}$, определяемое выражением (9.13.18), будет порядка $n \omega_{ci}$ и предыдущее рассмотрение становится неприменимым. Совершенно ясно, что для волн, растущих быстрее ионной циклотронной моды, можно без большой ошибки считать $\mathbf{V} = 0$ при вычислении отклика ионов на возмущение. Вычисляя такой отклик, мы имеем



$$\begin{aligned} \rho_{ik} &= \bar{n}_i \int e f_{ik} dv = \\ &= - \frac{\bar{n}_i e^2}{m_i} \int \frac{\bar{\mathbf{E}}_k \cdot \nabla_v f_{i0}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} dv. \end{aligned}$$

Фиг. 181. Функция G , определяющая конусную неустойчивость плазмы. Распределение неустойчиво, если $G > 0$.

При этом дисперсионное уравнение (9.13.7) записывается в более простом

виде (см. задачу 9.13.2):

$$k^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} k_{\parallel}^2 + \omega_{pi}^2 \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{i0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}. \quad (9.13.19)$$

Данное уравнение предсказывает неустойчивость, поскольку функция распределения $f_{i0}(v_{\perp}^2)$ не является монотонно убывающей. Замечая снова, что $k_{\parallel} v_{i\parallel} \ll \omega$, поскольку мы предположили $k_{\parallel} v_{e\parallel} < \omega$ (чтобы пренебречь затуханием Ландау на электронах), и действуя, как и выше, можно переписать уравнение (9.13.19) следующим образом:

$$k^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} k_{\parallel}^2 + \omega_{pi}^2 \left(\frac{m_i}{\kappa T_i} \right)^{1/2} G_1 \left(\frac{\omega}{k_{\perp} \sqrt{\kappa T_i / m_i}} \right), \quad (9.13.20)$$

где

$$G_1 = \int dv_{\parallel} \left(\frac{\kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2} \frac{1}{(1 - k_{\perp}^2 v_{\perp}^2 / \omega^2)^{1/2}} \frac{\partial f_{i0}}{\partial v_{\perp}^2} dv_{\perp}^2$$

и

$$\text{Im } G_1 > 0, \quad \text{если } \frac{k_{\perp} \sqrt{\kappa T_i / m_i}}{\omega} > 1.$$

Рассмотрение усложняется тем обстоятельством, что распространяющиеся вдоль \mathbf{B}_0 волны могут покидать область удержания в пробкотроне. В этом случае о неустойчивости можно судить по увеличению амплитуды волны за время одного ее пробега через установку. По этой причине уравнение (9.13.20) обычно решают для вещественной частоты ω и комплексной величины k , чтобы выявить пространственный рост возмущения, зародившегося в центральной области и распространяющегося к пробке. Решение имеет вид

$$k_{\parallel} = k \frac{\omega}{\omega_{pe}} - i \frac{\omega_{pe} |G_1|}{(\kappa T_i / m_i)^{1/2}}.$$

Задача 9.13.2. Покажите, что в пределе $\mathbf{B} \rightarrow 0$ дисперсионное уравнение (9.13.7) переходит в (9.13.19).

Величина параметра G_1 , определяющего длину нарастания, зависит от состояния плазмы. Рассмотрим два конкретных примера.

1. При пробочном отношении $B_2/B_1 = 2$ имеем

$$G_1 \approx \frac{1}{10},$$

если плазма удерживалась в ловушке в течение времени, превышающего в несколько раз время свободного пробега τ_c .

2. Если плазма образуется за счет инъекции частиц почти поперек магнитного поля, то

$$G_1 \gg 1.$$

В установке длиной L возмущение нарастает от центра (средней плоскости) до пробок в e^N раз, где

$$N \approx 10^{-5} \sqrt{\frac{n_i}{T_i}} L |G_1|,$$

n_i измеряется в см^{-3} , а T_i — в кэВ.

В литературе обсуждаются многие другие неустойчивости (геликонов, альфвеновских волн и т. д.), возникающие в плазме с конусом потерь. Их роль уменьшается в пределе низких β , а кроме того, они более чувствительны к деталям функции распределения, чем рассмотренный здесь случай. Следует

отметить, что устойчивость плазмы с конусом потерь часто весьма сильно зависит от состава плазмы (например, от присутствия плотного фона холодных электронов наряду с горячей электрон-ионной плазмой).

§ 14. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ УРОВНЯ ШУМОВ И ИНКРЕМЕНТОВ В НЕУСТОЙЧИВОЙ ПЛАЗМЕ

Несмотря на всю громоздкость изложенного в предыдущих параграфах анализа собственных колебаний плазмы, нетрудно усмотреть, что в основе неустойчивостей всегда лежит следующая термодинамическая причина: существует состояние, в котором энергия плазмы меньше (а энергия полей, следовательно, больше) и которого плазма может достичь, подчиняясь уравнениям, описывающим эволюцию плазмы. Изучение таких достижимых для плазмы состояний с меньшей кинетической энергией может позволить определить верхний предел энергии полей в неустойчивой системе и в некоторых случаях найти условия устойчивости и оценки инкрементов.

В столкновительной плазме условие «достижимости» выражается неравенством $dS/dt \geq 0$, где S — энтропия; в бесстолкновительной плазме уравнение Власова ограничивает возможные движения более жестко. В частности, определяемая (классически) для каждого сорта частиц энтропия

$$S \sim \int f \ln f \, dx \, dv \quad (9.14.1)$$

постоянна, если f подчиняется уравнению Власова. Таким образом, можно оценить сверху энергию полей в неустойчивой плазме, найдя состояние плазмы с минимальной энергией частиц, но той же энтропией (что и в начальном состоянии), поскольку в любой момент времени

$$\text{Энергия поля} + \text{Энергия плазмы} = \text{Энергия поля} + \text{Энергия плазмы при } t=0. \quad (9.14.2)$$

Задача 9.14.1. Докажите, что $\int G(f) \, dx \, dv$ сохраняется постоянным для всякой изолированной системы, в которой f подчиняется уравнению Власова.

Однако сохранение S является лишь одним из множества законов сохранения, выводимых из уравнения Власова (см. задачу 9.14.1), и, возможно, с помощью одного из них можно получить лучшую оценку энергии полей. [Два состояния с одинаковой энтропией не обязательно имеют одни и те же значения интеграла $\int G(f) \, dx \, dv$ при всяком G ; в этом случае нельзя перейти из одного состояния в другое, не нарушая уравнения Власова, которое требует сохранения $\int G(f) \, dx \, dv$ при любом $G(f)$.] По контрасту с анализом устойчивости методом собственных колебаний, в котором «правила игры» пусть сложны, но всегда ясно очерчены, термодинамический подход — нахождение наиболее полезных ограничений на возможные состояния системы — является искусством, а не наукой¹⁾, поскольку здесь нет определенных *предписаний*, как проводить исследование.

Обычно в термодинамическом подходе поступают следующим образом:

1. Определяют обобщенную «свободную» энергию

$$H = \int G(v, x, f) \, dx \, dv + \int \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) dx. \quad (9.14.3)$$

¹⁾ Правильнее было бы сказать: а не ремеслом.— *Прим. ред.*

2. Выбирают G таким образом, чтобы интеграл от G был минимален для некоторого известного распределения $f = f_0$:

$$\int [G(x, v, f) - G(x, v, f_0)] dx dv \geq 0 \quad (9.14.4)$$

3. Определяют изменение H во времени, если f подчиняется уравнению Власова

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha} \int \frac{\partial G}{\partial f_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dx dv + \frac{d}{dt} \int \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) dx. \quad (9.14.5)$$

Следующий шаг зависит от выбора функции G . Например, если G выбрано так, что H есть интеграл движения, тогда с помощью (9.14.4) можно получить верхнюю границу энергии волновых полей:

$$\int \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) dx \leq H(t=0) - \int G(x, v, f_0) dx dv. \quad (9.14.6)$$

Иногда G выбирается так, что, хотя H не сохраняется, можно из (9.14.5) вычислить

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \Big|_{\max}.$$

В этом случае неравенство

$$\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dx \leq H(t) - \int G(f_0) dx dv$$

можно использовать для нахождения максимального инкремента неустойчивых волн в плазме с распределением f_{α} ,

$$\omega_{i, \max} = \frac{1}{2} \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} \Big|_{\max}. \quad (9.14.7)$$

Сейчас мы рассмотрим примеры использования этого подхода, подробно описанного в статье Фаулера [19].

14.1. Оценка энергии флуктуаций

Возможный выбор $G(f)$, при котором функция H , определяемая выражением (9.14.3), становится интегралом движения, дается формулой

$$G(x, v, f) = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} v^2 f_{\alpha} + G_1(f) + \text{const.} \quad (9.14.8)$$

Если f подчиняется уравнению Власова, то

$$\frac{d}{dt} \int G_1(f) dx dv = 0$$

при любом G_1 . С другой стороны, мы имеем

$$\sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 f_{\alpha} dx dv + \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dx = \text{Полная энергия системы} = \text{const.}$$

Например, если $G_1 = f \ln f$, то H имеет вид свободной энергии

$$H = U - TS, \quad (9.14.9)$$

где S — энтропия, а U — сумма кинетической и электромагнитной энергии плазмы, но H сохраняется постоянной и при любом другом выборе G_1 . Нетрудно видеть, что $\int G dx dv$ [где G определено формулой (9.14.8)] имеет минимум, поскольку $\frac{1}{2} m v^2 f$ — положительная величина:

$$\int G(f) dx dv \geq \int G_1 dx dv,$$

причем равенство имеет место при $f = \delta(\mathbf{v})$. Уравнения (9.14.3) и (9.14.8) дают в совокупности оценку верхней границы поля волны, записываемую при $G_1 = 0$ в следующем виде:

$$\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} d\mathbf{x} \leq \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 f_{\alpha}(\mathbf{v}, t=0) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right)_{t=0} d\mathbf{x}. \quad (9.14.10)$$

Это, конечно, тривиальная оценка, выражающая тот факт, что приращение энергии полей ограничено энергией частиц при $t = 0$. Лучшую оценку можно получить, выбрав $G_1(f)$ так, что $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, f)$ имеет минимум для распределения, энергия которого больше нуля.

Полезным может оказаться выбор $G_1(f)$, при котором

$$\int G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \left[\kappa T_{\alpha} \left(f_{\alpha} \ln \frac{f_{\alpha}}{C_{\alpha}} - f_{\alpha} \right) - \kappa T_{\alpha} \left(f_0 \ln \frac{f_0}{C_{\alpha}} - f_0 \right) + (f_{\alpha} - f_0) \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 \right] d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \quad (9.14.11)$$

где суммирование производится по всем сортам частиц, а

$$f_0 = C_{\alpha} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{m_{\alpha} v^2}{\kappa T_{\alpha}} \right).$$

При таком выборе функция G имеет следующие свойства *независимо* от значений параметров C_{α} и T_{α} :

- 1) $H = \int G d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} d\mathbf{x} = \text{const}$;
- 2) $\int G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \geq \int G(\mathbf{x}, \mathbf{v}, f = f_0) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0$.

Из этих двух свойств вытекает следующее ограничение на энергию поля волны:

$$\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} d\mathbf{x} \leq \int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \Big|_{t=0} d\mathbf{x} + \int G[\mathbf{x}, \mathbf{v}, f(t=0)] d\mathbf{x} d\mathbf{v}. \quad (9.14.12)$$

Далее, поскольку (9.14.12) справедливо при всех C_{α} и T_{α} , эти константы должны быть выбраны так, чтобы минимизировать $\int G[\mathbf{x}, \mathbf{v}, f(t=0)] d\mathbf{x} d\mathbf{v}$. Смысл оценок (9.14.10) и (9.14.12) совершенно ясен. Из (9.14.10) следует, что энергия поля в неустойчивой плазме не превышает полной начальной энергии. Уравнение же (9.14.12) утверждает, что в действительности к флуктуациям поля может перейти лишь часть энергии частиц — энергия, которая высвободилась бы при релаксации от $f(t=0)$ до $f_{\alpha 0} = C_{\alpha} \exp(-m_{\alpha} v^2 / 2\kappa T_{\alpha})$. Выбор максвелловского вида функции f_{α} , а также G не однозначен, и другие варианты, возможно, дадут лучшие оценки.

Задача 9.14.2. Покажите, что $\int G d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ в (9.14.11) имеет минимум при $f_{\alpha} = f_{\alpha 0}$.

14.2. Пример: оценка верхней границы E^2 в двухпотоковой неустойчивости

Описанные выше приемы можно проиллюстрировать на примере двухпотоковой неустойчивости. Пусть при $t = 0$

$$\begin{aligned} f_e &= N_e \exp \left(-\frac{m_e v^2}{2\kappa T_0} \right), \\ f_i &= N_i \exp \left(-\frac{1/2 m_i v^2 + m_i U_0 v_z}{\kappa T_0} \right), \end{aligned} \quad (9.14.13)$$

где N_e и N_i — нормировочные константы. Это распределение описывает движение ионов на фоне электронов со скоростью потока U_0 . Для получения искомой верхней границы нужно подставить (9.14.13) в (9.14.12) и выбрать затем значения C_α и T_α . Однако, поскольку в начальном состоянии в плазме есть потоки, нет оснований полагать, что лучшая оценка будет получена, если представить, что распределения электронов и ионов релаксируют к максвелловскому распределению, которое покоится в начальной системе покоя *электронов*. Ясно, что лучшая оценка может быть получена, если оба распределения релаксируют к максвелловским, сдвинутым на одну и ту же скорость \bar{U} ($0 \leq \bar{U} \leq U_0$). Поэтому $G(v, x, f)$ выбирается в виде (9.14.11), но с заменой

$$\frac{1}{2} \frac{m_\alpha v^2}{\kappa T_\alpha} \rightarrow \frac{1}{\kappa T_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_\alpha v^2 + m_\alpha \bar{U} v_z \right), \quad (9.14.14)$$

где \bar{U} берется таким, чтобы получить более низкую верхнюю границу величины E^2 . Заметим, что свойства 1 и 2 не изменились; следовательно, по-прежнему верна и оценка (9.14.12).

Теперь в наличии только пять параметров ($C_i, C_e, T_i, T_e, \bar{U}$), которые нужно подбирать таким образом, чтобы минимизировать верхнюю границу E^2 . Константы C_α нужно выбрать из условия сохранения числа частиц

$$\int C_\alpha \exp \left[-\frac{1}{\kappa T_\alpha} \left(\frac{1}{2} m_\alpha v^2 + \bar{U} m_\alpha v_z \right) \right] dv = \int f_\alpha(t=0) dv,$$

которое дает

$$C_e = N_e \left(\frac{T_0}{T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_e \bar{U}^2}{2\kappa T_e} \right)$$

и

$$C_i = N_i \left(\frac{T_0}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{m_i U_0^2}{2\kappa T_0} - \frac{m_i \bar{U}^2}{2\kappa T_i} \right).$$

Задача 9.14.3. Покажите, что свойства 1 и 2, рассмотренные после выражения (9.14.11), остаются неизменными, несмотря на замену (9.14.14).

Оценка верхней границы энергии поля имеет теперь вид

$$\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dx \leq n_0 V \left[\frac{1}{2} m_i (\bar{U} - U_0)^2 + \frac{1}{2} m_e \bar{U}^2 + \sum_\alpha \frac{3}{2} \left(\kappa T_\alpha \ln \frac{T_\alpha}{T_0} - \kappa T_\alpha + \kappa T_0 \right) \right]; \quad (9.14.15)$$

здесь V — объем системы, а $n_0 = \int \bar{n}_\alpha f_\alpha dv$ — плотность плазмы. Правая часть (9.14.15) минимальна при

$$T_e = T_i = T_0$$

и

$$\bar{U} \approx U_0.$$

При этом условии окончательно имеем

$$\int \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \leq \frac{1}{2} n_0 m_e U_0^2 V. \quad (9.14.16)$$

Данный результат согласуется с тем, что при релаксации системы, описываемой распределениями (9.14.13), сохраняется импульс, а скорость легких электронов меняется почти на U_0 и при этом высвобождается энергия $nV \frac{1}{2} m_e U_0^2$.

Существует множество других приемов в термодинамическом подходе, позволяющих оценить энергию, доступную для неустойчивостей, и читатель может узнать о них в обзорной статье Фаулера [20].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernstein I. B.*, Phys. Rev., **109**, 10 (1958).
2. *Gardner C. S.*, Phys. Fluids, **6**, 839 (1963).
3. *Pierce J. R.*, Traveling Wave Tubes, Van Nostrand, New York, 1950 (см. перевод: Дж. Пирс, Лампы бегущей волны, М., 1957).
4. *Buneman O.*, Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
5. *Stringer T. E.*, Plasma Physics, Journ. Nucl. Energy, **C6**, 267 (1964).
6. *Davidson R. C. et al.*, Phys. Rev. Letters, **24**, 519 (1970).
7. *Penrose R.*, Phys. Fluids, **3**, 258 (1960).
8. *Fried B. D., Gould R. W.*, Phys. Fluids, **4**, 139 (1961).
9. *Bell P. R., Kelley G. G., Lazar N. H., Macklin R. J., Jr.*, Nucl. Fusion, 1962, Suppl., Part 1, 1962, p. 251.
10. *Jensen T., Scott F. R.*, Phys. Rev. Letters, **19**, 1100 (1967).
11. *Fried B. D., Conte S. D.*, The Plasma Dispersion Function, Academic Press, New York, 1961.
12. *Weibel E. S.*, Phys. Rev. Letters, **2**, 83 (1959).
13. *Davidson R. C., Hammer D. A., Haber I., Wagner C. E.*, Phys. Fluids, **15**, 317 (1972).
14. *Bennet W. H.*, Phys. Rev., **45**, 890 (1934).
15. *Furth H. P.*, Phys. Fluids, **6**, 48 (1963).
16. *Harrts E. G.*, Phys. Rev. Letters, **2**, 34 (1959).
17. *Rosenbluth M. N.*, Microinstabilities в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965, p. 485.
18. *Scharer J. E.*, Phys. Fluids, **10**, 652 (1967).
19. *Fowler T. K.*, в книге «Advances in Plasma Physics» (eds. A. Simon, W. B. Thompson), Vol. 1, Wiley, New York, 1968 (см. перевод в книге «Физика высокотемпературной плазмы», изд-во «Мир», 1972).
20. *Fowler T. K.*, Plasma Stability Theory, Oak Ridge National Laboratory Lecture Notes, Oak Ridge, Tenn., 1963.
- 21*. *Бабыкин М. А., Гагарин П. П., Завойский Е. К., Рудаков Л. И., Скорюпин В. А.*, ЖЭТФ, **41**, 1597 (1964).
- 22*. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Саздеев Р. З.*, УФН, **73**, 701 (1961).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Арцимович Л. А.*, Элементарная физика плазмы, Атомиздат, 1969.
- Bernstein I. B., Trehan S. K.*, Plasma Oscillations, I, Nucl. Fusion, **1**, 3 (1960).
- Bodin H. A.*, Instabilities of High β Plasmas в книге «Methods of Experimental Physics» (eds. H. R. Griem, R. H. Lovberg), vol. 9, part A, Plasma Physics, 1970, p. 395.
- Hendel A. W., Chu T. K.*, Collisional Drift Instabilities в книге «Methods of Experimental Physics» (eds. H. R. Griem, R. H. Lovberg), vol. 9, part A, Plasma Physics, 1970, p. 345.
- Кадошцев Б. Б.*, Турбулентность плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964.
- Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций (под ред. М. А. Леонтовича), т. 1—4, изд-во АН СССР, 1958.
- Мизгайловский А. Б.*, Колебания неоднородной плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Госатомиздат, 1963.
- Perkins W. A.*, High Frequency Instabilities в книге «Methods of Experimental Physics» (eds. H. R. Griem, R. H. Lovberg), vol. 9, part A, Plasma Physics, 1970, p. 275.
- Rosenbluth M. N.*, Microinstabilities в книге «Advanced Plasma Theory», Academic Press, New York, 1964; также в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Simon A.*, Linear Oscillations in Collisionless Plasma, в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Stix T.*, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York, 1962 (см. перевод: Т. Х. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, 1965).
- Yoshikawa S.*, Low Frequency Instabilities, в книге «Methods of Experimental Physics» (eds. H. R. Griem, R. H. Lovberg), vol. 9, part A, Plasma Physics, 1970, p. 205.

НЕЛИНЕЙНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН И НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ

Линейная теория плазменных волн и устойчивости, развитая в предыдущих главах, объясняет многие явления в плазме. Однако она не является настолько полной, чтобы позволить проследить за судьбой даже малых возмущений равновесного состояния. Линейную теорию возмущений, рассмотренную в гл. 8 и 9, можно расширить в нелинейную область и тем самым заложить основу для описания широкого класса нелинейных явлений. Эта нелинейная теория возмущений для волн малой, но конечной амплитуды и их взаимодействий между собой хорошо развита. Что же касается теории волн произвольной амплитуды, то она в настоящее время еще только разрабатывается.

§ 1. НЕОБХОДИМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В настоящей главе мы рассмотрим слабо нелинейную теорию (т. е. нелинейную теорию, использующую метод возмущений), которая позволяет описывать такие явления и свойства плазмы, для которых линейная теория неприменима. Ниже мы обсудим несколько таких свойств, которые нельзя объяснить в рамках линейной теории.

1.1. Баланс энергии

Результаты линейной теории обычно сводятся к предсказанию роста или затухания амплитуд плазменных волн, причем изменение энергии волн $\delta(E^2 + B^2)/8\pi$ должно быть скомпенсировано изменением энергии частиц. Законы сохранения энергии являются нелинейными, поскольку $W_E \sim E^2/8\pi$.

1.2. Изменение усредненных величин плазмы

Как при росте, так и при затухании плазменных волн происходит изменение функции распределения частиц. Это изменение может повлиять на устойчивость плазмы (или на затухание волн в плазме). Изменениям подвержены и различные средние величины; в частности, температура плазмы (измеряемая кинетической энергией в с. ц. м.) может увеличиваться или уменьшаться в результате затухания или раскачки плазменных волн. В линейной теории возмущенная функция распределения описывается выражением

$$f = f_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) f_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}.$$

Каждая из компонент Фурье при усреднении дает нуль; поэтому изменения средних величин можно определить лишь при нелинейном подходе.

1.3. Взаимодействие между плазменными волнами

[Волны конечной амплитуды участвуют в процессах, которые зависят от произведения амплитуд волн и поэтому являются нелинейными. К таким процессам относятся, например, биения волн, рассеяние волн на частицах и резонансные взаимодействия между волнами (рассеяние волн на волнах).

Существуют два различных предельных случая, для которых можно развить слабо нелинейную теорию. В первом из них рассматривается небольшое число волн конечной амплитуды и каждую волну можно описывать индивидуально. Пример такого рода — система двух связанных маятников в классической механике. В данном случае говорят о *теории слабых когерентных волн*. Во втором случае число волн настолько велико, что применимо статистическое описание, позволяющее определить те черты эволюции плазмы, которые не зависят от начальных фаз волн. В этом случае используют *теорию слабой турбулентности*, или *квазилинейную теорию* (квазилинейные уравнения).

В обоих случаях решение уравнения Власова находят методом итераций. Обе упомянутые теории неприменимы, если возникает одна из следующих двух ситуаций:

1. Ряд теории возмущений расходится.

2. Орбиты частиц настолько возмущаются полями волн, что при расчете *линейных* свойств волн нельзя более полагать $f \approx f_0$. Наиболее типичный пример такого возмущения орбит имеет место при захвате частиц плазменными волнами.

[При использовании слабо нелинейных теорий, которые мы рассмотрим ниже, следует принимать во внимание оба эти ограничения.

§ 2. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАЗМЫ [1—3]

Рассмотрим состояние плазмы, к которому мы нередко обращались в гл. 9: плазма пространственно однородна, ее функция распределения $f_\alpha(\mathbf{v}, t)$ при $t = 0$ представляет собой стационарное решение уравнения Власова, описывающее равновесие, но неустойчивое, поскольку в начальный момент времени распределение $f_\alpha(\mathbf{v}, t = 0)$ либо имеет вид функции с двумя максимумами, либо обладает какими-то другими термодинамически неравновесными свойствами.

Поведение такой системы в линейном приближении изучалось в гл. 9. Оно описывается суперпозицией волн:

$$\mathbf{E}_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \mathbf{E}_\mathbf{k}(t) d\mathbf{k}, \quad (10.2.1)$$

причем в неустойчивой системе $\mathbf{E}_\mathbf{k}$ растет во времени. Распределение эволюционирует согласно выражению

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) f_{\alpha\mathbf{k}}(t) d\mathbf{k}, \quad (10.2.2)$$

причем $f_{\alpha 0}$ в линейной теории от времени не зависит.

Поскольку даже в равновесии существует тепловой спектр плазменных волн, среднюю функцию распределения в случае пространственно однородной плазмы правильно определять как среднее по пространству от истинного распределения f_α :

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{V} \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}. \quad (10.2.3)$$

В квазилинейной теории среднее распределение $f_{\alpha 0}$ медленно меняется во времени. Формальное определение (10.2.3) для $f_{\alpha 0}$ позволяет однозначно

отделить быстро флуктуирующую часть $f_{\mathbf{k}}(t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}]$ в f_{α} от медленно меняющегося вследствие раскочки плазменных волн среднего распределения.

Для простоты рассмотрим плазму, неустойчивую относительно электростатических возмущений, в отсутствие средних полей, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{V} \int \mathbf{E} d\mathbf{x} = 0, \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{V} \int \mathbf{B} d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

В данном случае поведение плазмы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f_{\alpha} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (10.2.5)$$

Решение этих уравнений по теории возмущений записывается в виде

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1. \end{aligned} \quad (10.2.6)$$

Здесь

$$f_{\alpha 0} \equiv \frac{1}{V} \int f_{\alpha} d\mathbf{x} \equiv \langle f_{\alpha} \rangle \text{ и } \langle f_{\alpha 1} \rangle = \langle \mathbf{E}_1 \rangle = 0.$$

Усредняя уравнения (10.2.5) и используя равенства $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$ и $\nabla_{\mathbf{x}} \langle f \rangle = 0$, получаем уравнение для $f_{\alpha 0}$:

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\partial \langle f_{\alpha} \rangle}{\partial t} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle, \quad (10.2.7)$$

где мы использовали равенство $\langle \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 1} \rangle = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle$. Уравнение для $f_{\alpha 1}$ находим, подставляя в уравнение Власова (10.2.5) распределение $f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}$ и выражая $\partial f_{\alpha 0} / \partial t$ из (10.2.7). В результате имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) f_{\alpha 1} = -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} - \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle). \quad (10.2.8)$$

Из уравнения (10.2.7) видно, что зависящая от времени добавка к $f_{\alpha 0}$ — величина второго порядка теории возмущений. Это поясняет, почему линейная теория не предсказывает каких-либо изменений средней функции распределения.

Для нахождения $\partial f_{\alpha 0} / \partial t$ в низшем порядке по \mathbf{E}_1 нужно вычислить $f_{\alpha 1}$ согласно линейной теории. Линейное решение уравнения (10.2.8) можно получить, если пренебречь членами, пропорциональными $\mathbf{E}_1 f_{\alpha 1}$. Кроме того, можно пренебречь зависимостью $f_{\alpha 0}$ от времени, поскольку $\partial f_{\alpha 0} / \partial t$ есть величина второго порядка малости по \mathbf{E}_1 . В линейном приближении, как показано в гл. 8, имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_{\alpha \mathbf{k}}(t) &= \bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) &= \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}, \\ \bar{f}_{\alpha \mathbf{k}} &= -\frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)}. \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

Здесь частота собственных колебаний ω представляет собой функцию волнового числа \mathbf{k} и распределения $f_{\alpha 0}$. Эту зависимость находят с помощью уравнения

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v},$$

и она дается следующим дисперсионным уравнением:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int_L \frac{du}{u - \omega/|\mathbf{k}|} \frac{\partial}{\partial u} \left[f_{e0}(u) + \frac{m_e}{m_i} f_{i0}(u) \right] = 0, \quad (10.2.10)$$

где ¹⁾

$$f_{\alpha 0}(u) = \int \delta \left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|} \right) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v},$$

а при интегрировании по скоростям используется контур Ландау, проходящий под полюсом $u = \omega/|\mathbf{k}|$. В отличие от результата, полученного в линейной теории, $f_{\alpha 0}$ теперь, согласно (10.2.7), слабо зависит от времени. Следовательно, от времени зависит также и частота собственных колебаний ω , представляющая собой функционал от $f_{\alpha 0}$.

Если учесть, что

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} \rangle &= \frac{1}{V} \int \mathbf{E}_1 f_{\alpha 1} d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}_q f_{\alpha k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{1}{V} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} f_{\alpha k}, \end{aligned} \quad (10.2.11)$$

и использовать (10.2.9) в (10.2.7), уравнение для $f_{\alpha 0}(t)$ можно записать в виде

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{1}{V} \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \left[\frac{1}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(t) \right] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (10.2.12)$$

Полученное уравнение можно записать в терминах спектральной плотности энергии электростатического поля $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$, определяемой следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle W_E \rangle &= \left\langle \frac{E_1^2}{8\pi} \right\rangle = \frac{1}{V} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{8\pi} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \equiv \int \mathcal{E}_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \\ \mathcal{E}_{\mathbf{k}} &\equiv \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{8\pi}. \end{aligned} \quad (10.2.13)$$

Заметив, что для электростатических волн

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}},$$

уравнение (10.2.12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 \frac{1}{V} \int \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{k^2} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \left[\frac{1}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} (t) \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} \right] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \\ &= \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \right)^2 8\pi \int \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \left[\frac{1}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(t) \right] \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{k^2} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Спектральная плотность энергии $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ меняется во времени по закону [считаем, что $\omega = \omega_r(t) + i\omega_i(t)$]

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t) = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(0) e^{2\omega_i t},$$

в силу того что $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \bar{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}$ и [вследствие (10.2.10)]

$$\omega(\mathbf{k}, t) = -\omega^*(-\mathbf{k}, t);$$

здесь $\omega^* = \omega_r - i\omega_i$ — комплексно-сопряженная величина.

Система уравнений для $f_{\alpha 0}(t)$, $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(t)$ и $\omega(\mathbf{k}, t)$ может быть записана в виде уравнения диффузии для $f_{\alpha 0}$ ¹⁾

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}(t), \quad (10.2.14)$$

¹⁾ В основном мы будем рассматривать одномерные случаи, и $f_{\alpha 0}(u)$ обозначает одномерную функцию распределения.

где тензор диффузии D_v имеет вид

$$D_v = \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 8\pi \int \frac{\mathcal{E}_k(t)}{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega)} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k} = \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 8\pi \int \frac{\omega_i \mathcal{E}_k}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega_r)^2 + \omega_i^2} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} d\mathbf{k},$$

и уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k(t)}{\partial t} = 2\omega_i(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}_k(t).$$

Величина $\omega(\mathbf{k}, t)$ определяется через $f_{\alpha 0}(t)$ уравнением (10.2.10). Уравнения (10.2.14) называются *квазилинейными уравнениями диффузии*; они описывают диффузию в пространстве скоростей. При интегрировании по \mathbf{k} в (10.2.14) полюс обходитя снизу. Заметим, что последнее выражение для D_v получено с помощью результата, сформулированного в задаче 10.2.1.

Диффузия возникает в результате излучения и поглощения волн частицами плазмы. Некоторые полезные свойства этих уравнений диффузии обсуждаются в § 3 настоящей главы.

Задача 10.2.1. Покажите, что решения уравнения $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$ удовлетворяют тождествам

$$\omega_r(\mathbf{k}) = -\omega_r(-\mathbf{k}); \quad \omega_i(\mathbf{k}) = \omega_i(-\mathbf{k}).$$

§ 3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЧИСЛА ЧАСТИЦ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

Для вывода квазилинейной теории из уравнения Власова был использован ряд приближений. Поэтому важно знать, сохраняются ли в квазилинейной теории те величины, законы сохранения для которых следуют из точного уравнения Власова.

Для того чтобы выяснить это, рассмотрим для простоты одномерную плазму с распределением $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(u)$, где $u = v_x$, и возмущение поля в одном направлении, т. е. $E_1 = \bar{x} \bar{E}_k \exp(ikx)$. Результаты нетрудно распространить и на трехмерный случай. Одномерные квазилинейные уравнения для $f_{\alpha 0}$ и \mathcal{E}_k записываются в виде

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} 8\pi \left(\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 \int_L \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial u} dk, \quad (10.3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = 2\omega_i \mathcal{E}_k, \quad (10.3.2)$$

а частота собственных колебаний $\omega = \omega_r + i\omega_i$ определяется из уравнения [см. (10.2.10)]

$$1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k} \int_L \frac{1}{ku - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}(u)}{\partial u} du = 0. \quad (10.3.3)$$

3.1. Сохранение числа частиц

Интегрирование в (10.3.1) по скоростям дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f_{\alpha 0}(u, t) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} D_u \frac{\partial f_{\alpha 0}(u, t)}{\partial u} du = 0, \quad (10.3.4)$$

поскольку подынтегральное выражение в правой части является полным дифференциалом и отсутствуют частицы со скоростями $u = +\infty$ и $u = -\infty$. Из (10.3.4) следует, что в квазилинейной теории полное число частиц не меняется:

$$\int f_{\alpha 0}(u, t) du = \text{const.}$$

3.2. Сохранение импульса

Умножая уравнение (10.3.1) на $\bar{n}_\alpha m_\alpha u$, интегрируя затем по u и суммируя по всем сортам частиц в плазме, получаем (после интегрирования по частям) уравнение, определяющее скорость изменения импульса частиц:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int m_{\alpha} u f_{\alpha 0} du = - \sum_{\alpha} 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du. \quad (10.3.5)$$

Для вычисления правой части уравнения (10.3.5) можно использовать уравнение (10.3.3) для $\omega(k)$:

$$\sum_{\alpha} 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du = \int 2k\mathcal{E}_k dk. \quad (10.3.6)$$

Но $\mathcal{E}_k \sim E_k E_{-k}$ и, следовательно, \mathcal{E}_k симметрично по k , так что $\int \mathcal{E}_k k dk = 0$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int m_{\alpha} u f_{\alpha 0} du = 0. \quad (10.3.7)$$

Отсюда мы видим, что импульс частиц в квазилинейной теории сохраняется. Поскольку импульс электростатического поля равен нулю, требованию сохранения импульса частиц должна удовлетворять правильная теория.

Задача 10.3.1. Проследите за сохранением импульса в случае электромагнитных волн, записав для этого случая уравнения, аналогичные (10.3.5)—(10.3.7). Покажите, что при доказательстве сохранения импульса должен быть учтен импульс электромагнитного поля.

3.3. Закон сохранения энергии

Квазилинейные уравнения в отличие от линеаризованного уравнения Власова позволяют доказать закон сохранения энергии. Сохранение энергии представляет собой естественное следствие квазилинейной теории. Умножение (10.2.14) на $\bar{n}_\alpha m_\alpha u^2/2$ и интегрирование по u дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \int \frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} u^2 f_{\alpha 0} du &= \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int u^2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathcal{E}_k}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du = \\ &= \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \mathcal{E}_k \frac{-2u}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du = \\ &= \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \mathcal{E}_k \left(-\frac{2}{k} \right) \frac{\omega}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du. \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

Используя тот факт, что ω удовлетворяет уравнению $D(k, \omega) = 0$ [см. (10.2.10)], имеем

$$\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{ku - \omega} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u} du = k.$$

Уравнение (10.3.1) можно поэтому переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \bar{n}_{\alpha} m_{\alpha} \int u^2 f_{\alpha 0} du = 2i \int \omega \mathcal{E}_k dk = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (10.3.9)$$

Здесь мы использовали одно из тождеств задачи (10.2.1), которое позволило написать

$$2i \int \omega \mathcal{E}_k dk = -\int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk = \frac{-\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk.$$

Поскольку $\int \mathcal{E}_k dk$ есть полная электростатическая энергия волн, из уравнения (10.3.9) следует, что всякое увеличение энергии волн происходит

за счет соответствующего уменьшения полной кинетической энергии частиц. Изменение энергии частиц включает в себя как энергию осциллирующего движения частиц в полях волн, так и уменьшение (или увеличение) энергии частиц вследствие раскачки (или затухания) волн. Различие этих двух слагаемых, описывающих полное изменение энергии частиц, лучше всего проследить на примере слабой неустойчивости или слабого затухания.

§ 4. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ¹⁾

Пусть функция распределения электронов (одномерной) плазмы

$$f_{e0} \left(\equiv \frac{1}{V} \int f_e dx \right)$$

имеет вид, показанный на фиг. 182, и пусть в плазме возбуждены колебания с конечной амплитудой, для которых (§ 6 гл. 8)

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) + i\omega_i, \tag{10.4.1}$$

в такой области длин волн, что фазовые скорости лежат в интервале $\Delta(\omega/k)$, отмеченном на фиг. 182.

Линейная теория ленгмюровских волн (§ 6 гл. 8) показывает, что эти волны слабо затухают с декрементом, пропорциональным производной функции распределения электронов в интервале скоростей $\Delta \approx \Delta(\omega/k)$:

$$\omega_i = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_r}{k^2} \frac{\partial f_{e0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\omega/|k|}. \tag{10.4.2}$$

Результаты (10.4.1) и (10.4.2) линейной теории, описывающей свойства волн в плазме с помощью распределения f_{e0} , и квазилинейные уравнения (10.2.14), определяющие изменение f_{e0} со временем, позволяют детально проанализировать обмен энергией и искажение функции распределения при затухании. Квазилинейные уравнения в одномерном случае записываются в виде

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{8\pi e^2}{m_e^2} \int \frac{\mathcal{E}_k dk}{i(ku - \omega)} \right] \frac{\partial f_{e0}}{\partial u}, \tag{10.4.3}$$

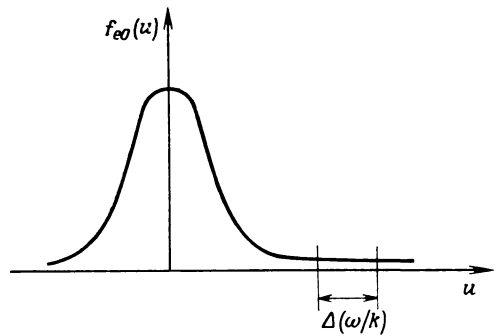
$$\frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} = 2\omega_i \mathcal{E}_k,$$

где ω_r и ω_i выражаются через f_{e0} с помощью формул (10.4.1) и (10.4.2), а интеграл по k берется по контуру Ландау ²⁾.

Поскольку $\omega_i \ll \omega_r$, уравнение (10.3.8), выражающее закон сохранения энергии, можно переписать таким образом, чтобы явно выделить вклады резонансных электронов, движущихся со скоростью волны ($u \approx \omega/k$), и нерезонансных электронов с помощью равенства (§ 4 и 5 гл. 8)

$$\int_L \frac{G(u) du}{ku - \omega} = \oint \frac{G(u) du}{ku - \omega} + \frac{\pi i}{|k|} G\left(\frac{\omega}{|k|}\right).$$

Заметим также, что вкладом ионов в энергию волны, поскольку $m_e/m_i \ll 1$, можно пренебречь. Тогда уравне-



Фиг. 182. Функция распределения электронов по скоростям u . $\Delta(\omega/k)$ — интервал фазовых скоростей плазменных волн конечной амплитуды.

¹⁾ Этот вопрос был исследован Веденовым, Велиховым и Сагдеевым [15*]. — Прим. ред.

²⁾ При $\omega_i > 0$ интегрирование по k ведется вдоль вещественной оси. При $\omega_i < 0$ интеграл по k представляет собой аналитическое продолжение интеграла при $\omega_i > 0$.

ние (10.3.8) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \bar{n}_e m_e u^2 f_{e0} du = -2\omega_{pe}^2 \int \frac{1}{k} \mathcal{E}_k \left[\oint \frac{\omega}{i(ku - \omega)} \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} du + \right. \\ \left. + \pi \frac{\omega}{|k|} \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} \Big|_{u=\omega/|k|} \right] dk. \quad (10.4.4)$$

Задача 10.4.1. Решив задачу с начальными условиями, докажите, что интегрирование по k должно выполняться по контуру Ландау.

Первое слагаемое в правой части уравнения (10.4.4) описывает изменение энергии нерезонансных частиц; второе слагаемое дает изменение энергии резонансных частиц ($\omega = ku$). Сравнение последнего слагаемого в (10.4.4) с выражением (10.4.2) для ω_i показывает, что

$$\frac{d}{dt} (\text{Кинетическая энергия резонансных частиц}) = \\ = -4 \int \omega_i \mathcal{E}_k dk = -2 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (10.4.5)$$

Поскольку электростатическая энергия $\int \mathcal{E}_k dk$ убывает в процессе затухания Ландау, кинетическая энергия резонансных частиц возрастает на величину, равную удвоенному значению уменьшения электростатической энергии. Однако, как показано в (10.3.9), полное изменение кинетической энергии равно и противоположно по знаку изменению электростатической энергии. Таким образом, баланс энергии приводит к следующим равенствам:

$$\frac{d}{dt} (\text{Кинетическая энергия нерезонансных частиц}) = \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk, \\ \frac{d}{dt} (\text{Полная кинетическая энергия}) = -\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (10.4.6)$$

Нерезонансные частицы при затухании электрического поля волны теряют свою энергию. Эта энергия (*механическая*) связана с колебаниями частиц в поле волны, и, естественно, при уменьшении \mathcal{E}_k она также убывает. В случае волн с отрицательной энергией можно было бы записать

$$\frac{d}{dt} (\text{Кинетическая энергия нерезонансных частиц}) \sim -\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk.$$

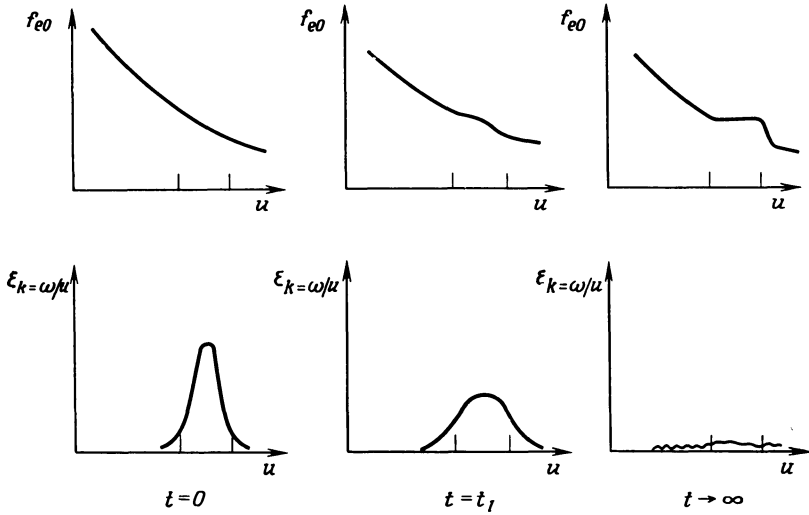
В случае ленгмюровских волн, рассмотренных здесь, механическая и электростатическая энергии равны друг другу, но для волн других типов такое равенство, вообще говоря, не соблюдается и выполняется следующее соотношение:

$$\text{Энергия волны} = \frac{\partial [\omega D(k, \omega)]}{\partial \omega} \int \mathcal{E}_k dk$$

[как было показано в формуле (4.3.10)]. Но и в общем случае полная энергия при затухании волн сохраняется.

Наряду с изучением баланса энергии интересно посмотреть, как изменяется f_{e0} при затухании волн. Удобно снова отдельно рассматривать резонансные и нерезонансные частицы, записав квазилинейное диффузионное уравнение (10.2.14) в виде

$$\frac{\partial f_{e0}(u \approx \omega/k)}{\partial t} = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{\partial}{\partial u} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|k|} \right) = \\ = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{1}{u} \frac{\partial^2}{\partial u^2} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|k|} \right), \quad (10.4.7) \\ \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk = \int 2\omega_i \mathcal{E}_k dk;$$



Фиг. 183. Эволюция функции распределения электронов и спектральной плотности энергии волн при затухании

сделанные здесь приближения оправданы в силу предположения о том, что скорость волны больше тепловой скорости ($\omega/k > \sqrt{\kappa T_e/m_e}$). Поскольку, как это следует из распределения на фиг. 182, $\partial^2 f_{e0}/\partial u^2 > 0$ при $\omega \approx ku$, f_{e0} в резонансной области растет, в то время как энергия волн убывает. Такой процесс проиллюстрирован на фиг. 183, где для ясности размеры резонансной области увеличены. В области поглощения волн распределение становится более плоским. Это в свою очередь приводит к уменьшению декремента ω_i , пропорционального $\partial f_{e0}/\partial u$, как показано на фиг. 184.

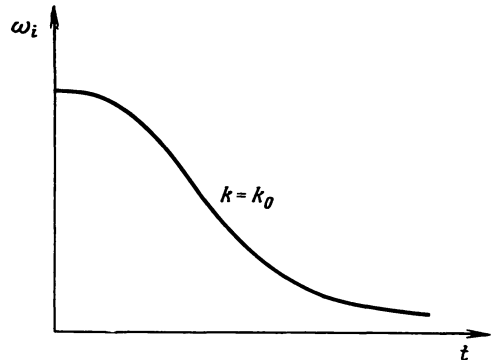
Если энергия волны достаточно велика, затухание может прекратиться при конечной амплитуде волн. При малой же энергии волны затухают, прежде чем в распределении f_{e0} образуется плато.

Уравнение, описывающее временную эволюцию распределения в резонансной области, можно получить, если заметить, что с учетом (10.4.2)

$$\frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \right) \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{df_{e0}}{du} \Big|_{u=\omega/|k|} = \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{k=\omega/u}. \quad (10.4.8)$$

Используя это тождество, уравнение (10.4.7) для распределения резонансных частиц можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(f_{e0, \text{рез}} - \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \right) = 0. \quad (10.4.9)$$

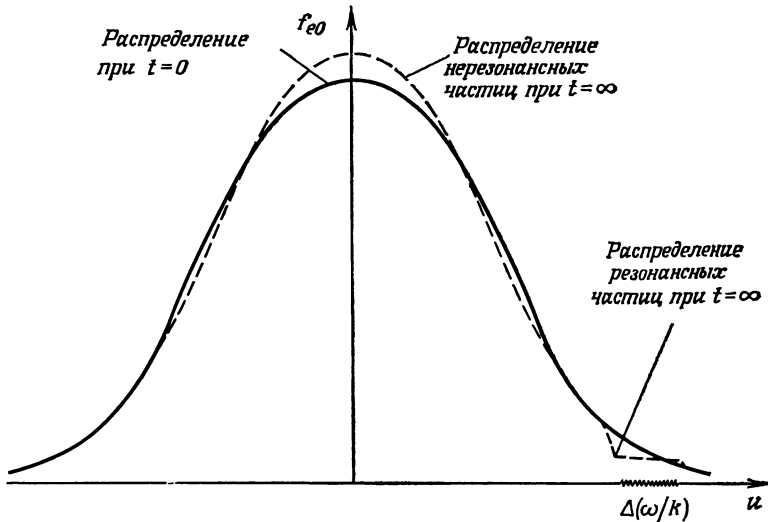


Если начальная энергия колебаний в плазме не слишком велика, \mathcal{E}_k асимптотически приближается к нулю. В этом случае распределение в резонансной области $u \approx \omega/k$ дается выражением

$$f_{e0, \text{рез}}(u, t = \infty) = f_{e0}(u, t = 0) - \frac{2\omega_{pe}}{\bar{n}_e m_e} \frac{d}{du} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{k=\omega/u}(t = 0),$$

$$\mathcal{E}_k(t = \infty) = 0. \quad (10.4.10)$$

Фиг. 184. Изменение декремента затухания ω_i со временем t для волн с $k = \omega/u$.



Фиг. 185. Функция распределения электронов до и после того, как начальное волновое возмущение затухло.

Интегрируя выражение (10.4.10) по области, соответствующей скорости резонансных частиц, и учитывая, что по определению на границах этой области $\mathcal{E}_{k=\omega/u} \rightarrow 0$, имеем

$$\int_{\text{По резонансной области}} f_{e0}(u, t = \infty) du = \int_{\text{По резонансной области}} f_{e0}(u, t = 0) du.$$

Отсюда следует, что число резонансных частиц остается неизменным.

Задача 10.4.2. Выведите уравнение (10.4.8).

Распределение вне резонансной области нетрудно найти, заметив, что для основной массы нерезонансных частиц

$$\omega_r \gg ku.$$

Следовательно, коэффициент диффузии в пространстве скоростей для нерезонансных частиц не зависит от u . Поэтому, пренебрегая величинами ku и ω_i по сравнению с ω_r в (10.4.3), можно записать диффузионное уравнение (10.2.14) в виде

$$\frac{\partial f_{e0, \text{нерез}}}{\partial t} - \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk = 0. \quad (10.4.11)$$

Диффузия нерезонансных частиц слабо влияет на распределение, поэтому в (10.4.11) допустимо сделать следующее приближение:

$$\frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \approx \frac{\partial^2 f_{e0}(u, t=0)}{\partial u^2}.$$

После интегрирования в (10.4.11) [в предположении, что $\mathcal{E}_k(t = \infty) = 0$] получаем

$$f_{e0, \text{нерез}}(u, t = \infty) = f_{e0}(t = 0) - \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \int \mathcal{E}_k(t = 0) dk. \quad (10.4.12)$$

Формулы (10.4.10) и (10.4.12) описывают изменение f_{e0} в процессе затухания Ландау спектра ленгмюровских волн малой энергии. Это изменение функции распределения показано на фиг. 185.

Из (10.4.11) можно получить и другое уравнение для определения f_{e0} при $t \rightarrow \infty$. Вводя обозначение

$$\tau = \frac{1}{n_e m_e} \int \mathcal{E}_k dk, \quad (10.4.13)$$

уравнение (10.4.11) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2}.$$

Частное решение этого уравнения записывается следующим образом:

$$f_{e0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_e m_e} \int \mathcal{E}_k dk + \frac{\kappa T_e}{2m_e}}} \times \exp \left[\frac{-u^2}{4 \left(\frac{1}{n_e m_e} \int \mathcal{E}_k dk + \frac{\kappa T_e}{2m_e} \right)} \right]. \quad (10.4.14)$$

Из решения (10.4.14) видно, что энергия волн играет роль «температуры» распределения в области нерезонансных частиц, убывающей по мере затухания волн. Таким образом, максимум f_{e0} становится более острым: это видно также из фиг. 185.

Изложенные в данном параграфе методы можно с равным успехом применять и к распределению, неустойчивому (слабо) относительно ленгмюровских колебаний (см., например, § 5 настоящей главы).

Задача 10.4.3. Найдите изменение функции распределения ионов в процессе затухания Ландау ленгмюровских колебаний.

Задача 10.4.4. Покажите, как меняются во времени электрические поля и функции распределения ионов и электронов в одномерной плазме, которая при $t = 0$ описывается распределением

$$f_{e0} = \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{-m_e u^2}{2\kappa T_e} \right),$$

$$f_{i0} = \left(\frac{m_i}{2\pi\kappa T_i} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{-m_i u^2}{2\kappa T_i} \right),$$

причем $T_e \gg T_i$. Пусть в такой плазме возбуждены ионно-звуковые волны (см. § 9 гл. 8) с частотой

$$\omega_r = \frac{kC_s}{\sqrt{1 + (k\lambda_{De})^2}}$$

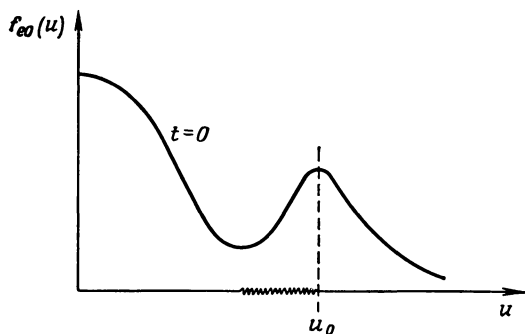
в интервале волновых векторов

$$0 < k < \frac{1}{\lambda_{De}}.$$

Вычислите, как распределена энергия между электрическим полем волны и резонансными и нерезонансными электронами (ионами).

§ 5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕПЛОГО ПУЧКА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

Линейная теория плазменных волн предсказывает, что волны в неустойчивой плазме растут все время. Такой результат не соответствует действительности, поскольку нелинейные эффекты в конце концов изменяют функцию распределения. Для изучения нелинейных эффектов в неустойчивой



Фиг. 186. Функция распределения электронов с дополнительным максимумом на «хвосте» и интервал фазовых скоростей неустойчивых волн (волнистая линия).

лежат в некотором интервале $\Delta(\omega/k)$. Эта неустойчивость является слабой, поскольку инкремент ω_i гораздо меньше частоты колебаний ω_r . Тем не менее за достаточно большое время начальные возмущения в плазме вырастают настолько, что линейная теория становится уже неприменимой, и нелинейные эффекты приведут к искажению функции распределения $f_{e0}(u, t)$, а это в свою очередь вызовет изменение инкрементов, поскольку $\omega_i \sim (\partial f_{e0}/\partial u)|_{u=\omega/k}$.

Если скорость пучка u_0 намного превышает тепловую скорость $\sqrt{\kappa T_e/m_e}$, то свойства неустойчивых волн соответствуют рассмотренным в предыдущем параграфе, где были вычислены квазилинейные эффекты при затухании Ландау ленгмюровских колебаний. По-прежнему справедливы следующие результаты, полученные в § 4 настоящей главы:

1. Электростатическая энергия тех волн, фазовые скорости которых лежат в интервале $\Delta(\omega/k)$, отмеченном на фиг. 186, увеличивается. В этом интервале $\partial f_{e0}/\partial u > 0$ и имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} &= 2\omega_i \mathcal{E}_k, \\ \omega_i &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^2 \omega_r}{k^2} \frac{\partial f_{e0}(u)}{\partial u} \Big|_{u=\omega_r/|k|}, \\ \omega_r &= \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2\right) \approx \omega_{pe}. \end{aligned} \quad (10.5.1)$$

2. Увеличение электростатической энергии происходит за счет энергии резонансных частиц пучка:

$$\frac{d}{dt} W_{K, \text{рез}} = -2 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (10.5.2)$$

3. Половина энергии, теряемой резонансными частицами, переходит в электростатическую энергию; другая половина переходит в энергию нерезонансных частиц, связанную с их колебаниями, т. е. в механическую энергию волн:

$$\frac{d}{dt} W_{K, \text{нерез}} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_{K, \text{рез}}. \quad (10.5.3)$$

4. Диффузия резонансных частиц описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|k|} \right) = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \frac{1}{u} \frac{d^2}{du^2} f_{e0} \left(u \approx \frac{\omega}{|k|} \right). \quad (10.5.4)$$

плазме можно использовать квазилинейную теорию. К одному из неустойчивых равновесных распределений, которое просто проанализировать с помощью квазилинейной теории, относится функция распределения теплового пучка.

Эта функция распределения, показанная на фиг. 186, состоит из изотропного максвелловского фона и движущегося относительно него пространственно однородного теплового электронного пучка. Данное распределение, подробно разобранное в § 4 гл. 9, неустойчиво относительно ленгмюровских колебаний, фазовые скорости которых

Таким образом, об эволюции волн и искажении функции распределения в резонансной области можно судить по $d^2 f_{e0}/du^2$ в области, где $\partial f_{e0}/\partial u > 0$. На фиг. 187 представлена качественная картина такой эволюции.

5. Насыщение неустойчивости можно исследовать с помощью уравнения (10.4.9), описывающего эволюцию распределения резонансных частиц и которое выводится точно так же, как в случае затухания Ландау:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f_{e0, \text{рез}} - \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{k=\omega/u} \right) = 0.$$

При $t \rightarrow \infty$ оно имеет асимптотическое решение [при условии, что $\mathcal{E}_k(t=0)$ мало]

$$f_{e0}(u, t \rightarrow \infty) - f_{e0}(u, t=0) = \frac{2\omega_{pe}}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{u^3} \mathcal{E}_{k=\omega/u}(t \rightarrow \infty). \quad (10.5.5)$$

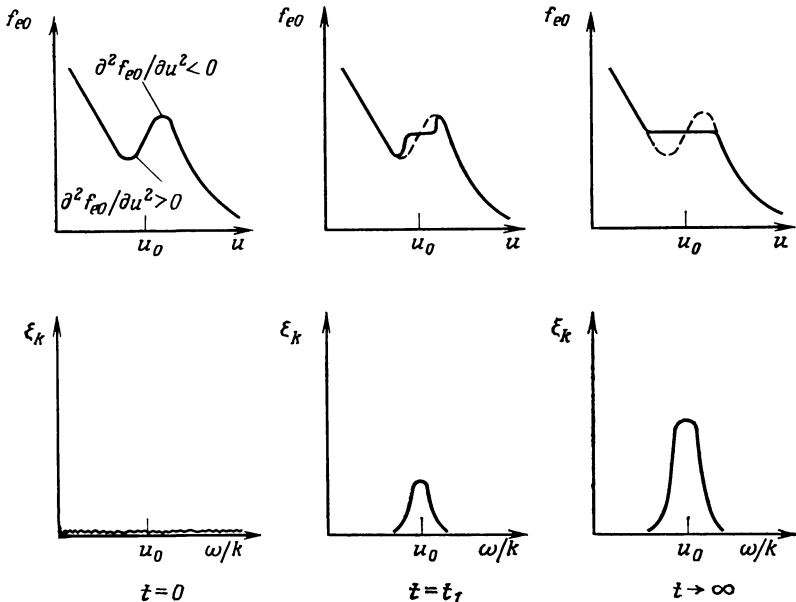
Распределение f_{e0} искажается до тех пор, пока оно не становится устойчивым. Устойчивость ($\omega_i = 0$) достигается при

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial u} = 0, \quad (10.5.6)$$

т. е. когда в резонансной области $f_{e0}(u, t = \infty) = \text{const}$. Такой асимптотический вид f_{e0} носит название *квазилинейного плато*. Спектральную плотность электростатической энергии при $t \rightarrow \infty$ можно найти интегрированием выражения (10.5.5) по скоростям в резонансной области:

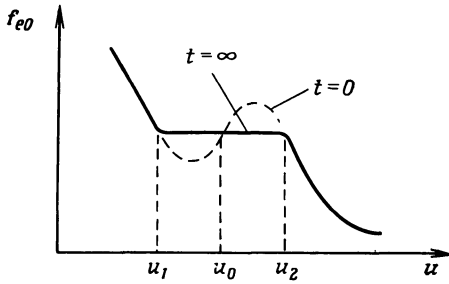
$$\mathcal{E}_{k=\omega/u} = \frac{\bar{n}_e m_e u^3}{2\omega_{pe}} \int_{u_1}^u [f(u', t \rightarrow \infty) - f(u', t \rightarrow 0)] du'. \quad (10.5.7)$$

Здесь нижний предел интегрирования u_1 совпадает с нижней границей резонансного интервала (фиг. 188). Используя закон сохранения энергии [(10.4.5)



Фиг. 187. Эволюция неустойчивой функции распределения электронов и спектральной плотности энергии волн.

Неустойчивость со временем нарастает.



Фиг. 188. Эволюция функции распределения электронов в области фазовых скоростей неустойчивых волн и образование плато в распределении.

При $t = \infty$ распределение становится устойчивым.

Полученный результат подтверждает интуитивную уверенность в том, что рост энергии неустойчивых волн ограничен энергией, доступной для неустойчивости и определяемой отклонением распределения от термодинамически равновесного. В рассматриваемом случае эта энергия равна разности энергий исходного распределения с пучком и устойчивого распределения, показанного на фиг. 188 сплошной линией.

Задача 10.5.1. Вычислите $\int \mathcal{E}_k dk$, интегрируя выражение (10.5.7) по k ($k = \omega_{pe}/u$) в предположении, что пучок имеет максвелловское распределение. [Указание. Разложите $f(u, t=0)$ в ряд Тейлора в точке $u = u_0$, где $f(u_0, t = \infty) = f(u_0, t = 0)$.] Покажите, что

$$W_E = \int \mathcal{E}_k(t \rightarrow \infty) dk \approx \frac{\omega_i(k = \omega_{pe}/u_0, t=0) \bar{n}_e m_e (u_2 - u_1)^3}{\omega_{pe} u_0} \approx \Delta (n_B m_e u^2) \approx n_B m_e u_0 (u_2 - u_0), \quad (10.5.9)$$

где n_B — плотность частиц в пучке.

6. Происходит «диффузия» нерезонансных частиц, поскольку их энергия увеличивается по мере развития неустойчивости. Увеличение энергии обусловлено тем, что эти частицы колеблются в поле нарастающих электростатических волн. Измененное распределение нерезонансных частиц можно вычислить из квазилинейных уравнений при условии, что $\omega/k \gg u$ для основной массы нерезонансных частиц. С учетом этого обстоятельства квазилинейное диффузионное уравнение (10.2.14) записывается в виде [см. уравнение (10.4.11), полученное при вычислении затухания Ландау]

$$\frac{\partial f_{e0, \text{перез}}}{\partial t} = \frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial^2 f_{e0}}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E}_k dk. \quad (10.5.10)$$

Решение этого уравнения было найдено при изучении процесса затухания Ландау:

$$f_{e0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_e m_e} \int \mathcal{E}_k dk + \frac{\kappa T_e}{2m_e}}} \exp \left[-\frac{u^2}{4 \left(\frac{1}{n_e m_e} \int \mathcal{E}_k dk + \frac{\kappa T_e}{2m_e} \right)} \right]. \quad (10.5.11)$$

и (10.4.6)], можно найти полную энергию волн при $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} W_{K, \text{рез}}. \quad (10.5.8)$$

Из фиг. 188 ясно, что изменение энергии резонансных частиц

$$\Delta W_{K, \text{рез}} \approx \frac{1}{2} \Delta (n_B m_e u^2) \approx n_B m_e u_0 (u_2 - u_0),$$

поскольку изменение скоростей резонансных частиц в среднем равно $\Delta u \approx u_2 - u_0$. Величина n_B обозначает плотность частиц в пучке (соответствующая область изменения скоростей в пучке показана на фиг. 188). Полу-

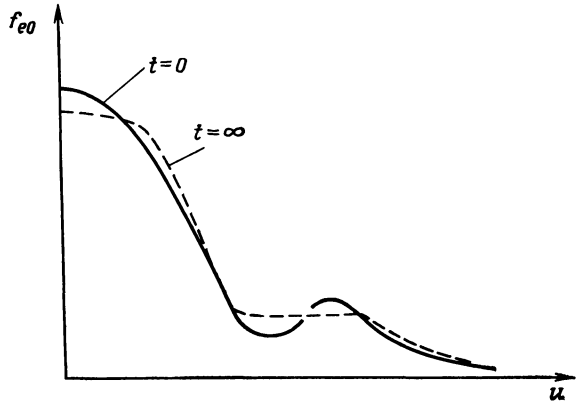
полученный результат подтверждает интуитивную уверенность в том, что рост энергии неустойчивых волн ограничен энергией, доступной для неустойчивости и определяемой отклонением распределения от термодинамически равновесного. В рассматриваемом случае эта энергия равна разности энергий исходного распределения с пучком и устойчивого распределения, показанного на фиг. 188 сплошной линией.

По мере возрастания интеграла $\int \mathcal{E}_R dk$ при $t \rightarrow \infty$ [см. (10.5.8)] энергия усредненного распределения нерезонансных частиц увеличивается. Это увеличение энергии происходит так, как будто температура [см. форму записи f_{e0} , через (10.5.11)] возрастает на величину

$$T_{\text{движение в волне}} = \frac{2}{n_e \kappa} \int \mathcal{E}_R dk, \quad (10.5.12)$$

связанную с кинетической энергией волны. Разумеется, эта величина не есть истинная температура: на самом деле нерезонансные частицы под действием электрического поля E волны совершают упорядоченное движение (когерентные колебания).

На фиг. 189 представлено асимптотическое (при $t \rightarrow \infty$) распределение f_{e0} , построенное в соответствии с формулами (10.5.6) для резонансных и (10.5.11) для нерезонансных частиц.

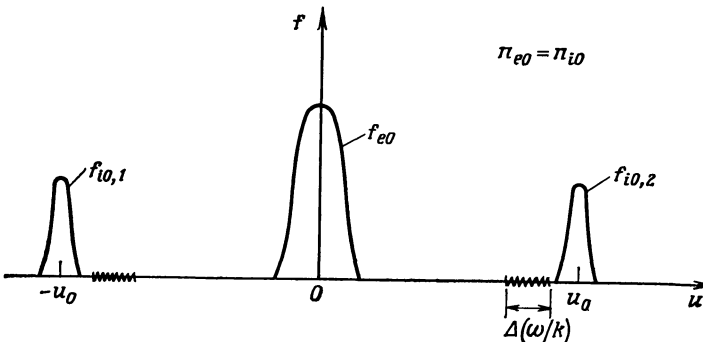


Фиг. 189. Распределение электронов (штриховая кривая, $t = \infty$), образовавшееся в результате квазилинейной релаксации неустойчивого распределения (сплошная кривая, $t = 0$).

Ясно видны области, соответствующие резонансным и нерезонансным частицам.

§ 6. КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДВУХПОТОКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Применение квазилинейной теории не ограничивается случаем, когда неустойчивость раскачивается резонансными частицами. Рассмотрим, например, двухпотоковую неустойчивость в однородной плазме, в которой ионы движутся относительно холодных электронов; это распределение изображено на фиг. 190. Неустойчивость плазмы, связанная с движением ионов относительно электронов со скоростью, значительно превышающей тепловую скорость электронов, рассматривалась в § 3 гл. 9. Распределение, показанное на фиг. 190, состоит из двух ионных потоков, распространяющихся на фоне электронов, и выбрано таким ради простоты, поскольку в этом случае средняя скорость электронов U_{e0} остается, как ясно из симметрии, равной



Фиг. 190. Функция распределения двух встречных ионных пучков, движущихся в электронном газе.

Показана область существования неустойчивых нерезонансных волн (Δ).

нулю. Неустойчивость является гидродинамической, ибо ее поведение определяется только плотностью и средними скоростями электронов и ионов, и поэтому ее можно рассчитать на основе гидродинамических уравнений.

Изменение распределения электронов и ионов за счет диффузии описывается (по крайней мере для времен, соответствующих нескольким обратным инкрементам) квазилинейными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{8\pi e^2}{m_\alpha^2} \int \mathcal{E}_k \frac{\omega_i}{(\omega_r - ku)^2 + \omega_i^2} dk \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial u}, \quad \omega_i > 0. \\ \frac{\partial \mathcal{E}_k}{\partial t} &= 2\omega_i(k) \mathcal{E}_k, \end{aligned} \quad (10.6.1)$$

в которых $\omega_i(k)$ и $\omega_r(k)$ в данный момент времени определяются значениями функции $f_{\alpha 0}$. Поскольку неустойчивость обусловлена нерезонансными частицами, ω_i и ω_r не чувствительны к деталям функций распределения. Для описания неустойчивости полезно прежде всего сравнить между собой следующие процессы:

1. Уменьшение средней скорости ионов, за счет которой неустойчивость обеспечивается энергией.

2. Увеличение энергии электронов (увеличение энергии колебательного движения электронов в поле волны).

3. Увеличение энергии колебательного движения ионов (энергии в системе отсчета, движущейся со средней скоростью ионов).

Определим среднюю скорость и среднюю кинетическую энергию (относительного движения) для каждого сорта частиц с помощью следующих выражений:

$$U_\alpha = \int u f_{\alpha 0}(u, t) du \quad (10.6.2)$$

и

$$W_K = \frac{\bar{n}_\alpha m_\alpha}{2} \int [u - U_\alpha(t)]^2 f_{\alpha 0}(u, t) du, \quad (10.6.3)$$

и возьмем соответствующие моменты скоростей от уравнений (10.6.1). Тогда для средних величин можно записать уравнения

$$\bar{n}_\alpha m_\alpha \frac{dU_\alpha}{dt} = 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \omega_i \mathcal{E}_k \frac{2k [(\omega_r - kU_\alpha) - k(u - U_\alpha)]}{[(\omega_r - ku)^2 + \omega_i^2]^2} f_{\alpha 0} du \quad (10.6.4)$$

и

$$\frac{d}{dt} W_{K\alpha} = 2\omega_{p\alpha}^2 \int dk \int \omega_i \mathcal{E}_k \frac{(\omega_r - kU_\alpha)^2 + \omega_i^2 - k^2(u - U_\alpha)^2}{[(\omega_r - ku)^2 + \omega_i^2]^2} f_{\alpha 0} du. \quad (10.6.5)$$

В этих уравнениях ω_r и ω_i зависят от k , как показано с помощью линейной теории в § 3 гл. 9, и существуют две неустойчивые ветви: одна обусловлена взаимодействием электронов с ионами, движущимися с относительной скоростью $U_{i1} = u_0$, а другая связана с взаимодействием электронов с ионами, движущимися со скоростью $U_{i2} = -u_0$. Ионы рассматриваются как две отдельные, движущиеся каждая со своей скоростью U_{i1} и U_{i2} жидкости с распределениями $f_{i0,1}$ и $f_{i0,2}$ (фиг. 190).

При линейном рассмотрении неустойчивости (§ 3 гл. 9) были получены следующие выражения для максимального инкремента

$$\omega_{i, \text{макс}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_e}{4m_i} \right)^{1/3} \omega_{pe}, \quad (10.6.6)$$

волнового числа и частоты для волны с максимальным инкрементом (наиболее быстрорастущей):

$$\left(\frac{\omega_r}{k} \mp u_0\right)_{\text{макс}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{4m_i}\right)^{1/3} u_0, \quad (10.6.7)$$

$$|k|_{\text{макс}} \approx \frac{\omega_{pe}}{u_0}.$$

Эти выражения можно использовать для оценки изменений энергии электронов и средней скорости ионов с помощью уравнений (10.6.4) и (10.6.5). При вычислении энергии электронов в данных уравнениях нужно пренебречь величинами u и U_e по сравнению с ω/k , а в уравнениях для ионов — величиной $u - U_i$ по сравнению с $(\omega - kU_i)/k$. В результате мы имеем

$$\frac{d}{dt} W_{K, \text{ электроны}} = \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk, \quad (10.6.8)$$

$$\frac{1}{2} n_1 m_i \frac{d}{dt} U_{i1}^2 = - \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk,$$

$$\frac{1}{2} n_2 m_i \frac{d}{dt} U_{i2}^2 = - \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk, \quad (10.6.9)$$

причем $n_{e0} = n_{i0}$. Снова можно заметить, что увеличение энергии поля составляет лишь половину энергии, теряемой ионами и питающей неустойчивость. Остальная часть теряемой ионами энергии переходит в кинетическую энергию электронов.

Увеличение же энергии относительного движения ионов в каждом пучке сравнительно мало:

$$\frac{d}{dt} W_{K, \text{ ионы в пучке 1}} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk, \quad (10.6.10)$$

$$\frac{d}{dt} W_{K, \text{ ионы в пучке 2}} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \frac{d}{dt} \int \mathcal{E}_k dk.$$

Сумма изменений энергии не удовлетворяет равенству $dW_{\text{плазма}}/dt = - (d/dt) \int \mathcal{E}_k dk$, поскольку при вычислении кинетической энергии электронов пренебрегалось малыми членами, пропорциональными $(m_e/m_i)^{1/3}$.

Различие между энергией упорядоченного движения частиц и энергией неупорядоченного движения, адекватно описываемого температурой, ясно видно из экспериментов по моделированию на ЭВМ, в которых вычисляются координата и скорость каждой частицы в процессе развития неустойчивости. На фиг. 159 были приведены результаты такого эксперимента для плазмы, рассматриваемой в данном параграфе. Средние величины, характеризующие неустойчивость и вычисляемые с помощью уравнений (10.6.8)—(10.6.10), подтверждаются результатами моделирования на ЭВМ, но, как видно из фиг. 159, *в*, энергия электронов соответствует упорядоченным колебаниям в полях неустойчивых волн. Это упорядоченное движение в конце концов (фиг. 159, *г*) превращается в неупорядоченное (тепловое) за счет не учитываемых в квазилинейной теории процессов. Основным процессом, ответственным за разупорядочивание движения, является захват электронов в потенциальные ямы, образуемые волнами.

Без дальнейшего углубления в детали понятно, что инкремент ω_i двухпоточковой неустойчивости нечувствителен к f_{e0} до тех пор, пока энергия части электронов не станет такой, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\frac{\omega}{k} \approx \sqrt{\frac{W_{K, e}}{n_e m_e}} \approx \sqrt{\langle u_e^2 \rangle}.$$

В самом деле, если

$$\sqrt{\frac{\kappa \Gamma_e}{m_e}} \gg U_i,$$

линейная теория предсказывает, что распределение, приведенное на фиг. 190, устойчиво. Результаты моделирования на ЭВМ свидетельствуют о том, что неустойчивость перестает развиваться при

$$\sqrt{\frac{W_{K,e}}{n_e m_e}} \gtrsim U_i,$$

хотя энергия электронов $W_{K,e}$ не является тепловой. Превращение энергии электронов в тепловую при захвате частиц $W_{K,e} \rightarrow n_e \kappa T_e$ стабилизирует волны в плазме. В следующем параграфе мы подробно рассмотрим этот процесс.

§ 7. ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНОВ ОТДЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНОЙ

При изучении плазмы, в которой возбуждено ограниченное число волн, возникают многие интересные и важные нелинейные явления. В данном и следующем параграфах мы рассмотрим несколько примеров. В качестве первого примера рассмотрим нарушение теории затухания Ландау (гл. 8) вследствие захвата частиц одиночной ленгмюровской волной с большой длиной волны [4].

Рассмотрим поле электростатической волны вида

$$E_1 = \hat{x} \bar{E}_k \sin(kx - \omega_{pe} t), \quad k\lambda_{De} \ll 1, \quad (10.7.1)$$

в однородной максвелловской плазме в отсутствие внешних полей. Такая волна затухает согласно теории Ландау за время

$$\tau_L = \left[\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{(k\lambda_{De})^3} \exp\left(-\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} - \frac{3}{2}\right) \right]^{-1}. \quad (10.7.2)$$

Линеаризация уравнения Власова, с помощью которой было получено затухание Ландау (§ 6 гл. 8), основана на предположении, что траектории частиц слабо возмущаются полем волны. Электрон, движущийся со скоростью, почти равной скорости волны, колеблется в потенциальной яме согласно уравнению $m\ddot{x} = -e\bar{E}_k \sin kx \approx -e\bar{E}_k kx$ с периодом

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{e\bar{E}_k k}} \equiv \frac{\tau_T}{2\pi}. \quad (10.7.3)$$

Это простое гармоническое колебание в ямах плазменной волны сильно возмущает траекторию частицы, и все линейные расчеты, зависящие от распределения захваченных частиц, перестают быть верными при $t > \tau_T$. Применимость или неприменимость теории затухания Ландау зависит от распределения частиц, движущихся примерно со скоростью волны. Поскольку эти резонансные частицы захватываются раньше всех, теория Ландау применима, лишь если

$$\tau_L < \tau_T. \quad (10.7.4)$$

Чтобы полнее продемонстрировать, что при $t > \tau_T$ линейная теория неприменима для описания одиночной волны, рассмотрим решение линеаризованного уравнения Власова для функции распределения $f_e = f_0 + f_1$ в поле волны E_1 , определяемом выражением (10.7.1):

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + u \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m} \bar{E}_k \sin(kx - \omega_{pe} t) \frac{\partial f_0}{\partial u}. \quad (10.7.5)$$

Считая, \bar{E}_k и f_0 не зависящими от времени, решение уравнения (10.7.5) можно записать в виде

$$f_1(x, u, t) = f_1(u, t=0) \cos(kx - kut) - \frac{e}{m} E_k \frac{\partial f_0}{\partial u} \left[\frac{\cos(kx - \omega_{pe}t)}{ku - \omega_{pe}} - \frac{\cos(kx - kut)}{ku - \omega_{pe}} \right]. \quad (10.7.6)$$

Разложив (10.7.6) вблизи $u = \omega_{pe}/k$, можно видеть, что

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} \Big|_{u \approx \omega_{pe}/k} \approx \frac{ek\bar{E}_k}{m} t^2 \frac{\partial f_0}{\partial u} \Big|_{u \approx \omega_{pe}/k} \frac{\cos(kx - \omega_{pe}t)}{2}.$$

Отсюда следует, что линейное рассмотрение ($\partial f_1/\partial u \ll \partial f_0/\partial u$) в резонансной области становится некорректным при

$$t \approx \sqrt{\frac{m}{ek\bar{E}_k}} \equiv \tau_T,$$

что совпадает со временем захвата частиц, определенным в (10.7.3).

Можно найти нелинейное решение уравнения Власова, заметив, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, u, t) + u \frac{\partial}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{q}{m} \bar{E}_k \sin(kx - \omega_{pe}t) \frac{\partial}{\partial u} f(x, u, t) = 0 \quad (10.7.7)$$

эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt'} f[x'(t'), u'(t'), t'] = 0, \quad (10.7.8)$$

$$\frac{d}{dt'} x'(t') = u'(t'),$$

$$\frac{d}{dt'} u'(t') = \frac{q}{m} E_k \sin[kx'(t') - \omega_{pe}t'], \quad (10.7.9)$$

$$x'(t' = t) = x,$$

$$u'(t' = t) = u.$$

Эта система уравнений выражает тот факт, что функция распределения f постоянна вдоль траектории частицы с зарядом q и массой m в электрическом поле E_k .

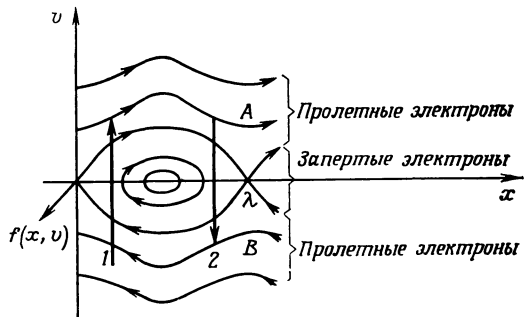
Фазовые траектории захваченных и незахваченных частиц можно неявно записать через эллиптические функции. На фиг. 191 схематически показаны такие траектории. Решение уравнения Власова с заданными начальными условиями имеет вид

$$f(x, u, t) = f[x'(t' = 0), u'(t' = 0), 0],$$

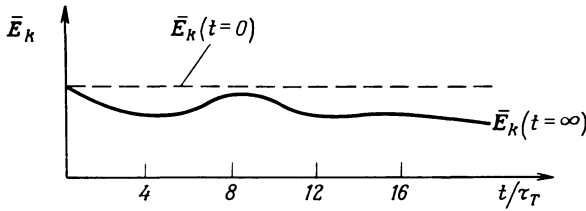
поскольку решение $f = \text{const}$ удовлетворяет уравнению (10.7.8).

Начальные условия, соответствующие заданной форме поля E_1 , можно записать в виде

$$f(x_0, u_0, 0) = f_0(u_0) + f_1(u_0, t=0) \cos kx_0,$$



Фиг. 191. Фазовая диаграмма, демонстрирующая захват частиц полем волны конечной амплитуды [5].



Фиг. 192. Затухание волны конечной амплитуды [6].
Показано, что захваченные частицы меняют линейный режим затухания

где

$$x_0(x, u, t) \equiv x'(t' = 0)$$

и

$$u_0'(x, u, t) \equiv u'(t' = 0).$$

Медленно изменяющуюся амплитуду \bar{E}_k волны при захвате частиц находят из закона сохранения энергии:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\pi/\hbar}^{\pi/\hbar} \frac{\bar{E}_k^2}{8\pi} \sin^2 kx \, dx = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{E}_k^2}{16\pi} = \int \frac{1}{2} mu^2 \frac{\partial}{\partial u} \langle f \rangle du,$$

$$\langle f \rangle \equiv \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi/\hbar}^{\pi/\hbar} f \, dx.$$

На фиг. 192 показано изменение амплитуды $\bar{E}_k(t)$, полученное с помощью описанной выше процедуры, в которой учитывалось влияние лишь резонансных частиц. На временах $t < \tau_T$ волна затухает по Ландау. При $t > \tau_T$ поле \bar{E}_k осциллирует, приближаясь к постоянному значению. Проведенное рассмотрение не зависит от знака величины ω_i , и поэтому захват частиц существенно изменяет также и инкремент *нарастания* волн при $t > \tau_T$.

§ 8. ПЛАЗМЕННО-ВОЛНОВОЕ ЭХО

Теория когерентных волн предсказывает интересное явление, которое может быть изучено с помощью уравнения Власова,— плазменно-волновое эхо [7]. Его суть состоит в том, что если квазимонохроматическая волна, спектр которой сосредоточен вблизи k_1 , затухает по Ландау, то функция распределения плазмы остается возмущенной (см. § 7 гл. 8) и имеет следующий вид (для ясности рассмотрим одномерную плазму):

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha k_1}(u, t = t_1) e^{ik_1 u(t-t_1)} + \dots$$

Здесь мы не выписали члены, пропорциональные $E_1(t)$, которые затухают по Ландау. Добавка к функции распределения, пропорциональная $\exp(ik_1 ut)$, называется *баллистическим членом*; эта добавка не порождает электрических полей, поскольку $\int \exp(ik_1 ut) f(u) du \rightarrow 0$ с ростом t . В баллистическом члене тем не менее содержится информация о первоначальном возмущении функции распределения. Доступ к этой информации может быть найден, если заметить, что другая квазимонохроматическая волна с $k \approx k_2$, возбужденная в момент t_2 , создает новое возмущение, которое может интерферировать с прежним возмущением таким образом, что возмущения в функции распределения складываются:

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + f_{\alpha k_2}^{(1)} e^{ik_2 u(t-t_2)} + f_\alpha^{(2)} + \dots;$$

здесь вклад в возмущение второго порядка $f_{\alpha}^{(2)}$ имеет вид

$$f_{\alpha}^{(2)} \sim f_{\alpha k_1}^{(1)} f_{\alpha k_2}^{(1)} e^{ik_1 u(t-t_1)} e^{-ik_2 u(t-t_2)}, \quad t > t_2.$$

Таким образом, хотя второе возмущение также затухает по Ландау, в более поздний момент времени t_3 , определяемый из соотношения

$$k_1(t_3 - t_1) - k_2(t_3 - t_2) = 0,$$

откуда

$$t_3 \approx \frac{k_1 t_1 - k_2 t_2}{k_1 - k_2}, \tag{10.8.1}$$

плотность заряда

$$\rho_{q2} \approx \int e^{ik_1 u(t-t_1)} e^{-ik_2 u(t-t_2)} f_{\alpha}^{(2)}(h_2 - h_1) du$$

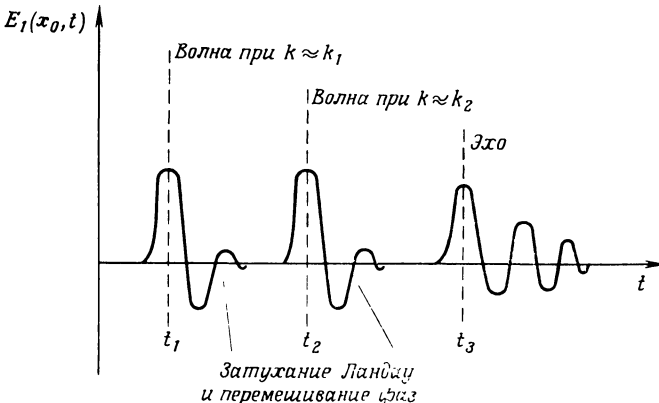
более не является малой величиной, поскольку под интегралом стоит теперь не осциллирующее выражение. Такая ситуация имеет место в течение ограниченного промежутка времени, после чего ρ_{q2} снова становится равной нулю вследствие перемешивания фаз: $\int e^{ik_1 u t} F(u) du \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В момент времени $t = t_3$ заряд ρ_{q2} создает электрическое поле, которое называется эхом. В таком процессе амплитуда электрического поля изменяется, как показано на фиг. 193. В момент времени t_1 с помощью набора сеток возбуждается импульс поля, который затем затухает по Ландау. В момент времени t_2 с помощью этих сеток возбуждается второй импульс. В момент времени t_3 в плазме возникает самопроизвольно импульс электрического поля, показывая, что в промежутках времени Δt_1 и Δt_2 плазма не находилась в равновесии, как можно было бы судить по измерениям электрических полей.

Эхо наблюдалось в лабораторных условиях [8], и этот эксперимент позволил получить следующие результаты:

1. Экспериментальное подтверждение затухания Ландау.
2. Подтверждение того, что информация о возмущении, имевшем место при $t = 0$, сохраняется в баллистическом члене, несмотря на отсутствие макроскопических полей (т. е. энтропия сохраняется в течение времени $\tau \ll \tau_c$).
3. Возможность проверки и дальнейшего развития теории когерентных нелинейных волн. В частности, была выявлена роль нелинейных эффектов в эволюции полей.

Для более детального анализа описанного выше процесса введем в рассмотрение внешний потенциал $\Phi_{\text{внеш}}(\mathbf{x}, t)$, приложенный к трехмерной плазме,



Фиг. 193. Схематическое представление плазменно-волнового эха. Приложенные к плазме в момент t_1 и t_2 импульсы электрического поля $E_1(x_0, t)$ затухают, а в момент t_3 спонтанно возникает импульс эха.

описываемой уравнением Власова

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \nabla \Phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0. \quad (10.8.2)$$

Разложим распределение f_{α} на усредненное по пространству равновесное распределение

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) = \frac{1}{V} \int f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x}$$

и возмущенную часть $f_{\alpha 1}$ относительно этого среднего:

$$f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha 1}.$$

Фурье-образ возмущенной части определяется равенством

$$f_{\alpha \mathbf{k}} = \int f_{\alpha 1} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Фурье-преобразование уравнения (10.8.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha \mathbf{k}} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_{\alpha \mathbf{k}} - i \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = \\ = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha \mathbf{k}'} \Phi_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (10.8.3)$$

Величина $\Phi_{\mathbf{k}}$ представляет собой фурье-образ *полного* потенциала плазмы, равного сумме внешнего потенциала и потенциала, создаваемого зарядами плазмы с плотностью $\rho_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v}$.

Уравнение Пуассона дает еще одну связь между $\Phi_{\mathbf{k}}$ и $f_{\mathbf{k}}$:

$$k^2 \Phi_{\mathbf{k}}(t) = k^2 \Phi_{\mathbf{k}, \text{внеш}} + \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (10.8.4)$$

Уравнения (10.8.3) и (10.8.4) можно упростить, если взять их преобразование Лапласа. Запишем прямое и обратное преобразования Лапласа для возмущения функции распределения

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \int_0^{\infty} f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) e^{-pt} dt, \quad \text{Re}(p) > p_0,$$

и

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) e^{pt} dp.$$

Предположим, что при $t = 0$ распределение плазмы $f_{\alpha 0}$ было невозмущенным, т. е.

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t = 0) = 0, \quad \mathbf{k} \neq 0.$$

Преобразованные по Лапласу уравнения Власова и Пуассона записываются в виде

$$\begin{aligned} (p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = \frac{i q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} - \\ - \frac{i q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int_{p_{01} - i\infty}^{p_{01} + i\infty} dp_1 \int_{p_{02} - i\infty}^{p_{02} + i\infty} \left[\frac{1}{p - p_1 - p_2} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}(p_2) (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}'}(\mathbf{v}, p_1) \right] \times \\ \times e^{p_1 t} e^{p_2 t} dp_2, \quad \text{Re}(p) > p_1 + p_2 \end{aligned} \quad (10.8.5)$$

и

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(p) = \bar{\Phi}_{\mathbf{k}, \text{внеш}}(p) + \sum_{\alpha} \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}}{k^2} \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) d\mathbf{v}.$$

Эти уравнения можно решать методом итераций, считая возмущения $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ малыми. Подстановка $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$ из (10.8.5) в преобразованное по Лапласу уравнение Пуассона дает

$$D(\mathbf{k}, ip) \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}, \text{внеш}} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v} \times \\ \times \int_{p_{01}-i\infty}^{p_{01}+i\infty} \frac{dp_1}{2\pi i} \int_{p_{02}-i\infty}^{p_{02}+i\infty} \frac{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}{p-p_1-p_2} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}'}(\mathbf{v}, p_1) \frac{\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ip} \frac{dp_2}{2\pi i}; \quad (10.8.6)$$

здесь

$$D(\mathbf{k}, ip) \equiv 1 - \sum \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ip} d\mathbf{v}.$$

Используя разложение потенциала в виде

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(1)} + \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(2)} + \dots,$$

можно найти член первого порядка в этом разложении, пренебрегая в (10.8.6) нелинейным членом $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}'} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$. В результате имеем

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}, \text{внеш}}(p)}{D(\mathbf{k}, ip)}. \quad (10.8.7)$$

Член второго порядка в потенциале можно найти, если в нелинейный член уравнения (10.8.6) подставить линейное выражение для $\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}}$:

$$\tilde{f}_{\alpha\mathbf{k}} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ip} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$$

и выражение (10.8.7) для $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(1)}$.

В результате получаем

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}^{(2)} = \sum_{\alpha} \frac{4\pi q_{\alpha}^2 \bar{n}_{\alpha}}{m_{\alpha}^2 k^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{v} \int_{p_{01}-i\infty}^{p_{01}+i\infty} \frac{dp_1}{2\pi i} \int_{p_{02}-i\infty}^{p_{02}+i\infty} \frac{1}{p-p_1-p_2} \times \\ \times \Phi_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \text{внеш}}(p_1) (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \times \\ \times \frac{\mathbf{k}' \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{D(\mathbf{k}, ip) D(\mathbf{k}-\mathbf{k}', ip_2) D(\mathbf{k}', ip_1) (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} - ip) (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{v} - ip_1)} \times \\ \times \Phi_{\mathbf{k}', \text{внеш}}(p_1) \frac{dp_2}{2\pi i}. \quad (10.8.8)$$

Дальнейшие итерации позволяют получить вклады высшего порядка в потенциал $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$.

Для того чтобы применить этот формализм в задаче о плазменно-волновом эхе, рассмотрим одномерный случай, т. е. $\mathbf{v} \rightarrow u$, $\mathbf{k} \rightarrow k$, и предположим, что внешний потенциал создается высокочастотным полем (следовательно, можно считать ионы неподвижными). Пусть, кроме того, внешний потенциал состоит из двух импульсов, посылаемых в моменты времени $t = \tau_1$ и $t = \tau_2$:

$$\Phi_{\text{внеш}}(x, t) = A_1 \delta[\omega_{pe}(t - \tau_1)] \cos k_1 x + A_2 \delta[\omega_{pe}(t - \tau_2)] \cos k_2 x; \quad (10.8.9)$$

здесь A_1 и A_2 — постоянные амплитуды, и предполагается, что

$$k_2 > k_1 > 0. \quad (10.8.10)$$

Образ Фурье — Лапласа этого внешнего потенциала имеет простой вид

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}, \text{внеш}}(p) = \frac{\pi A_1}{\omega_{pe}} [\delta(k_1 - k) + \delta(k_1 + k)] e^{-p\tau_1} + \\ + \frac{\pi A_2}{\omega_{pe}} [\delta(k_2 - k) + \delta(k_2 + k)] e^{-p\tau_2}, \quad (10.8.11)$$

что позволяет выполнить интегрирование по dk' в (10.8.8). Произведение

$$\tilde{\Phi}_{k-k', \text{внеш}}(p_2) \tilde{\Phi}_{k', \text{внеш}}(p_1)$$

состоит из 16 слагаемых. Ниже мы рассмотрим лишь те из них, которые, будучи проинтегрированы по k' , дают в $\tilde{\Phi}^{(2)}$ вклад, пропорциональный

$$\delta(k - k_2 + k_1).$$

Задача 10.8.1. Покажите (прочитав до конца § 8 настоящей главы), что для плазменно-волнового эха существенны лишь члены, пропорциональные $\delta(k - k_2 + k_1)$.

С учетом принятого ограничения и используя для $\tilde{\Phi}_{k, \text{внеш}}$ выражение (10.8.11), мы можем записать $\tilde{\Phi}_k^{(2)}$ в виде [функция $f_{\alpha 0}(u)$ определяется из (10.2.10)]

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k^{(2)}(p) = & \frac{\pi e A_1 A_2}{2m_e k^2} \int du \int_{p_{01}-i\infty}^{p_{01}+i\infty} \frac{dp_1}{2\pi i} \int_{p_{02}-i\infty}^{p_{02}+i\infty} \frac{\delta(k - k_2 + k_1)}{p - p_1 - p_2} \frac{k_1 k_2}{D(k, ip)} \times \\ & \times \left[\frac{e^{-p_1 \tau_1} e^{-p_2 \tau_2}}{D(-k_1, ip_1) D(k_2, ip_2) (ku - ip)} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{k_2 u - ip_2} \frac{\partial}{\partial u} f_{\alpha 0} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-p_1 \tau_1} e^{-p_2 \tau_2}}{D(-k_1, ip_2) D(k_2, ip_1) (ku - ip)} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{-k_1 u - ip_2} \frac{\partial}{\partial u} f_{\alpha 0} \right) \right] \frac{dp_2}{2\pi i}. \quad (10.8.12) \end{aligned}$$

Это выражение можно упростить, если проинтегрировать его по частям относительно u и в первом члене поменять местами p_1 и p_2 :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k^{(2)}(p) \approx & -\frac{\pi e A_1 A_2}{2m_e k^2} \int_{p_{01}-i\infty}^{p_{01}+i\infty} \frac{dp_1}{2\pi i} \times \\ & \times \int_{p_{02}-i\infty}^{p_{02}+i\infty} \frac{\delta(k - k_2 + k_1) k_1 k_2 e^{-p_1 \tau_1} e^{-p_2 \tau_2}}{(p - p_1 - p_2) D(k, ip) D(-k_1, ip_1) D(k_2, ip_2)} \times \\ & \times \int du \left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial u} \right) \frac{k}{(ku - ip)^2} \frac{(ku - ip) + i(p - p_1 - p_2)}{(k_1 u + ip_1) (k_2 u - ip_2)} \frac{dp_2}{2\pi i}. \quad (10.8.13) \end{aligned}$$

Уравнение (10.8.13) содержит полную информацию о членах второго порядка в разложении потенциала, но большая часть этой информации не имеет никакого отношения к эху. Чтобы проявить всплеск потенциала (т. е. эхо), после того как два наложенных извне первичных сигнала затухли по Ландау, нужно при обращении (10.8.13),

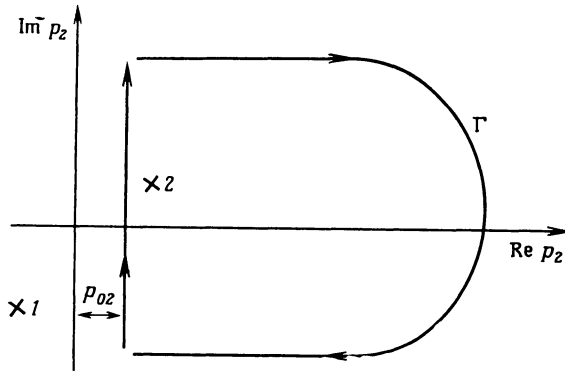
$$\Phi_k^{(2)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{\Phi}_k^{(2)}(p) e^{pt} dp, \quad p_0 > p_{01} + p_{02},$$

пренебречь полюсами, соответствующими равенствам $D(k, ip) = 0$, $D(k_2, ip_2) = 0$ и $D(-k_1, ip_1) = 0$; эти полюса приводят к затухающим потенциалам $\Phi^{(2)} \sim e^{\omega_i t}$ и не существенны при t больше нескольких $|\omega_i^{-1}|$. Интегрирование по dp_2 удобно выполнить, если замкнуть контур справа, как показано на фиг. 194, и учесть вклад от единственного полюса при

$$p_2 = p - p_1. \quad (10.8.14)$$

Множитель $e^{-p_2 \tau_2}$ обеспечивает убывание подынтегрального выражения на части контура, отмеченной на фиг. 194 буквой Γ (вот почему контур интегрирования по dp_2 и был замкнут справа).

При вычислении вклада от полюса (10.8.14) $e^{-p_1 \tau_1} e^{-p_2 \tau_2}$ заменяется на $e^{p_1(\tau_2 - \tau_1)} e^{-p_2 \tau_2}$, и, поскольку $\tau_2 > \tau_1$, при интегрировании по p_1 контур



Фиг. 194. Контур, используемый при вычислении интеграла в формуле обращения для $\varphi_k^{(2)}$. 1 — полюса функции $\varphi_k(p_2)$ лежат левее p_{02} ; 2 — полюс $p - p_1 - p_2 = 0$ лежит правее p_{02} , поскольку $\text{Re } p > p_{01} + p_{02}$.

должен быть замкнут слева (фиг. 195). В пренебрежении полюсами $D = 0$, которые дают решения, затухающие по Ландау, единственный вклад в $\int dp_1$ происходит от полюса $p_1 = ik_1u$.

После интегрирования по p_1 и p_2 потенциал $\varphi_k^{(2)}$ принимает вид

$$\varphi_k^{(2)}(t) = \frac{\pi e}{2m_e} A_1 A_2 \frac{ik_1 k_2}{k^2} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \int \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} e^{p(t-\tau_2)} \delta(k - k_2 + k_1) \times$$

$$\times \frac{e^{ik_1 u(\tau_2 - \tau_1)}}{D(k, ip) D(k_2, ip + ik_1 u) D(-k_1, -k_1 u) (ku - ip)^2} du.$$

Основной вклад в интеграл по p дает полюс второго порядка

$$\frac{1}{(ku - ip)^2},$$

и мы имеем

$$\varphi_k^{(2)}(t) = \frac{\pi e}{2m_e} A_1 A_2 \frac{ik_1 k_2 \delta(k - k_2 + k_1)}{k^2} (t - \tau_2) \times$$

$$\times \int \frac{\partial f_{e0}}{\partial u} \frac{\exp\{-iku[t - \tau_2 - k_1(\tau_2 - \tau_1)/k]\}}{D(k, ku) D(k_2, k_2 u) D(-k_1, -k_1 u)} du. \quad (10.8.15)$$

В начале данного параграфа уже указывалось, что $\varphi_k^{(2)}(t)$ обычно мало, так как подынтегральное выражение в интеграле по u является быстро осциллирующей функцией u . Однако при

$$t \approx \tau' \equiv \tau_2 + \frac{k_1}{k} (\tau_2 - \tau_1) \quad (10.8.16)$$

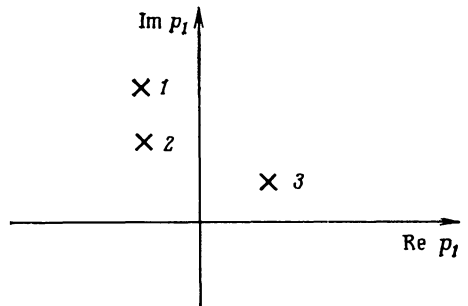
$\varphi_k^{(2)}$ не мало, поскольку

$$\exp[-iku(t - \tau')] \approx 1.$$

Структура плазменно-волнового эха зависит при заданных k_1 и k_2 от функции распределения по скоростям f_{e0} . Пусть, например, волновой вектор k настолько велик, что

$$D(k_2, k_2 u) \approx D(-k_1, -k_1 u) \approx$$

$$\approx D(k, ku) \approx 1.$$



Фиг. 195. Положение полюсов $\tilde{\varphi}_k^{(2)}$ в плоскости p_1 . 1 — точка, в которой $D(-k, ip) = 0$; 2 — полюс при $k_1 v + ip_1 = 0$; 3 — полюс при $k_2 v - ip + ip_1 = 0$.

Предположим также, что плазма максвелловская, т. е.

$$f_{e0} = \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{m_e u^2}{2k T_e} \right).$$

В этом случае (10.8.15) дает

$$\Phi k^{(2)}(t) = \frac{\pi e}{2m_e} A_1 A_2 \delta(k - k_2 + k_1) k_1 k_2 (t - \tau_2) (t - \tau') \exp \left[- \frac{k^2 k T_e}{2m_e} (t - \tau')^2 \right],$$

где момент наступления плазменно-волнового эха τ' определяется выражением (10.8.16). Таким образом, по ширине сигнала плазменно-волнового эха

$$\Delta \tau' \approx \sqrt{\frac{2m_e}{k^2 k T_e}}$$

можно судить о температуре плазмы.

Столкновения вызывают распад возмущенной функции распределения и разрушают эхо,

$$f \sim e^{ikut} \rightarrow e^{ikut} e^{-vt}.$$

Этот процесс не успевает произойти, если интервал между первым сигналом и эхом не слишком велик [9]:

$$(\omega_{pe} \tau')^2 \tau' v_{90^\circ} < 1;$$

здесь v_{90° — частота столкновений с поворотом на большие углы.

Теория, развитая в настоящем параграфе, описывает затухание плазменных волн во времени и повторное появление электрических возмущений в плазме — плазменно-волнового эха. Эту теорию, описывающую развитие эха во времени, можно применить для рассмотрения эха в пространстве [10]. Если в эксперименте по изучению плазменно-волнового эха первичные импульсы плазменных волн затухают во времени, эхо появится в более поздний момент времени. Если же эксперимент поставлен так, что первичные волны затухают в пространстве, плазменно-волновое эхо появится вдали от точек, где возбуждаются первичные плазменные волны (на расстоянии, значительно превышающем длину затухания волн по Ландау). Исходя из практических соображений, в экспериментах по плазменно-волновому эху исследуют пространственное, а не временное эхо. Для объяснения пространственного плазменно-волнового эха используют те же аргументы, что и в случае временного. Электрическое поле, зависящее от времени как $\exp(-i\omega_1 t)$ и возбуждаемое в точке $x = 0$, затухает по Ландау при распространении от области возбуждения и вызывает возмущение функции распределения в виде

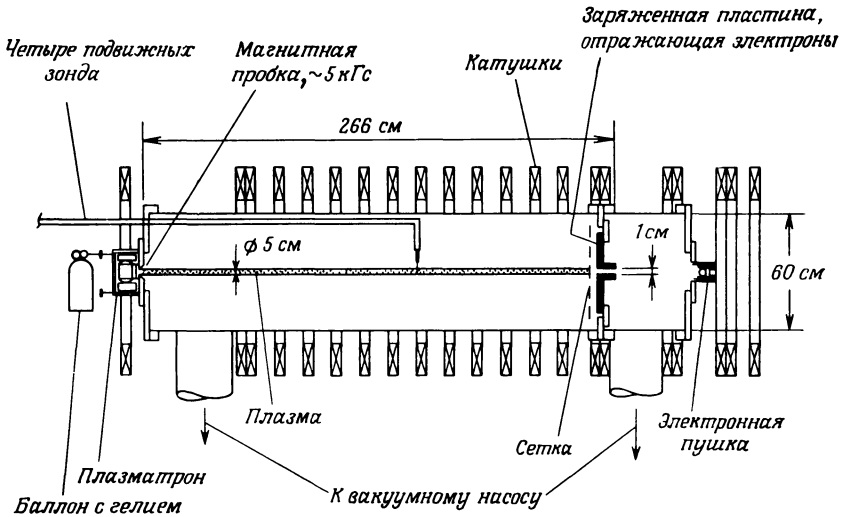
$$f_{\alpha 1}(u) \approx f^{(1)} \exp \left[i\omega_1 \left(-t + \frac{x}{u} \right) \right].$$

При больших значениях x это возмущение не порождает электрического поля, поскольку интеграл по скоростям равен нулю из-за перемешивания фаз. При $x = L$ возбуждается электрическое поле $\sim \exp(i\omega_2 t)$, которое также затухает по Ландау, распространяясь в глубь плазмы, и в свою очередь создает в плазме возмущение функции распределения вида

$$f_{\alpha 1}(u) \approx f^{(1)} \exp \left[i\omega_2 \left(t - \frac{x-L}{u} \right) \right].$$

Кроме того, это второе электрическое поле модулирует возмущение, созданное первым электрическим полем, и в результате возникает возмущение второго порядка вида

$$f_{\alpha 2} \approx f^{(2)} \exp \left[i(\omega_2 - \omega_1) t + i\omega_2 \frac{L}{u} - i(\omega_2 - \omega_1) \frac{x}{u} \right].$$

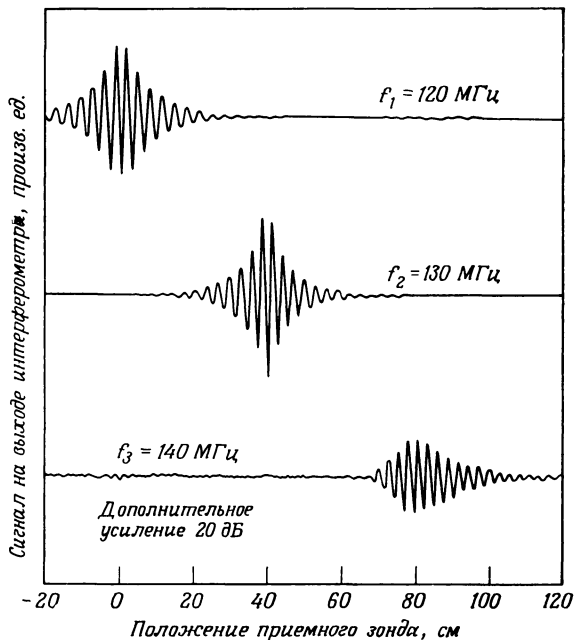


Фиг. 196. Схема установки для наблюдения плазменно-волнового эха [11]. В эксперименте используется постоянное магнитное поле 0 ± 480 Гс; давление в вакуумной камере $\sim 2 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст.

В точке $x = L\omega_2/(\omega_2 - \omega_1)$ интеграл по скоростям от такого возмущения не обращается в нуль, и в плазме вблизи этой точки появляется третье электрическое поле.

Если L велико по сравнению с длиной затухания Ландау, а $\omega_2 \approx (\omega_2 - \omega_1)$, то область возникновения этого третьего электрического поля, соответствующего эху, отделена от областей возбуждения первичных полей. На фиг. 196 представлена схема установки, используемая Малмбергом и др. [11] в эксперименте по изучению плазменно-волнового эха. Столб плазмы длиной 180 см, диаметром 5 см и плотностью $\sim 1,5 \cdot 10^8$ см⁻³ в центре находится в продольном магнитном поле 300 Гс, которое в данном эксперименте можно рассматривать как бесконечное. Температура исследуемой плазмы равна 9,4 эВ, а дебаевский радиус 2 мм. Средняя длина свободного пробега электронов равна 10^5 см для электрон-ионных столкновений и $4 \cdot 10^4$ см для столкновений электронов с нейтральными частицами. Плазма окружена цилиндром радиусом 5,2 см, который служит волноводом для распространяющихся по плазме волн и уменьшает связь между возбуждающим и детектирующим зондами.

Плазменно-волновое эхо, полученное в этом эксперименте, иллюстрируется нижней кривой



Фиг. 197. Пространственное плазменно-волновое эхо третьего порядка [8].

Колебания возбуждаются зондами, расположенными в точках $x = 0$ и $x = 40$ см. Верхняя кривая записана приемником на частоте f_1 , средняя — на частоте f_2 и нижняя (с дополнительным усилением 20 дБ) на частоте f_3 .

на фиг. 197. Верхняя кривая показывает пространственное распределение сигнала частотой 120 МГц, возбуждаемого первым зондом в точке $x = 0$. Средняя кривая соответствует сигналу на частоте 130 МГц, возбуждаемому вторым зондом в точке $x = L$. Нижняя кривая на фиг. 197 соответствует плазменно-волновому эху третьего порядка, поскольку частота эха равна $\omega_3 = 2\omega_2 - \omega_1$. Результаты рассмотренного эксперимента подтверждают детальные теоретические предсказания по нелинейному взаимодействию плазменных волн и показывают, что даже после того, как затухли электрические поля, связанные с первоначальным возмущением, в функции распределения плазмы сохраняется информация об этом возмущении.

§ 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН И ЧАСТИЦ (СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ)

Результаты, полученные в § 2—6 настоящей главы, показывают, как меняется распределение частиц вследствие поглощения или излучения волн в плазме. Эти изменения функции распределения пропорциональны E_k^2 . Таким образом, они являются линейными относительно энергии волны. Существуют и другие нелинейные процессы, которые изменяют функцию распределения плазмы, такие, как взаимодействие двух волн с частицами плазмы или двух волн с третьей, причем в последнем случае плазма играет роль диэлектрической среды, по которой распространяются эти волны. Например, при рассеянии волн на частицах с заданным распределением частицы взаимодействуют с падающей и рассеянной волнами. Вторым примером может служить слияние двух волн в одну, причем процесс подчиняется обычным законам сохранения.

Нелинейные взаимодействия между волнами и частицами можно вычислять, используя уравнение Власова. Изложение деталей этих расчетов выходит за рамки данной книги. Здесь мы приведем лишь окончательные уравнения, описывающие поведение полей и функций распределения, и обсудим результаты, вытекающие из этих уравнений.

Предполагая, что постоянное магнитное поле отсутствует, а турбулентность слаба и однородна в пространстве, из уравнения Власова можно вывести систему кинетических уравнений для описания нелинейных взаимодействий. Эти уравнения можно вывести различными методами, и читатель может найти соответствующие детали в монографиях по теории турбулентности в плазме [6]. Однако во всех случаях для замыкания системы уравнений используют приближение *случайных фаз*; в этом приближении проведено усреднение по фазам волн $\langle \varphi_k \varphi_{k'} \rangle = \varphi_k^2 \delta_{k-k'}$, так что в уравнениях участвуют только *модули* амплитуд волн. Приближение случайных фаз может быть строго получено из цепочки уравнений для средних (по ансамблю), которая выводится из уравнения Власова разложением в ряд теории возмущений. Величины, усредненные по ансамблю, записываются следующим образом:

$$\langle f(x, v, t) \rangle, \langle f(x_1, v_1, t) f(x_2, v_2, t) \rangle, \langle f(1) f(2) f(3) \rangle, \dots$$

Они удовлетворяют цепочке уравнений

$$\begin{aligned} \langle f(1) \rangle &= G_1 [\langle \delta f(1) \delta f(2) \rangle], \\ \langle \delta f(1) \delta f(2) \rangle &= G_2 [\langle \delta f(1) \delta f(2) \delta f(3) \rangle], \\ &\dots \end{aligned}$$

где $\delta f = f - \langle f \rangle$ — флуктуации функции распределения, причем $\langle \delta f \rangle = 0$.

Величины g , называемые кумулянтами, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} g_2 &\equiv \langle \delta f(1) \delta f(2) \rangle, \\ g_3 &\equiv \langle \delta f(1) \delta f(2) \delta f(3) \rangle, \\ g_4 &\equiv \langle \delta f(1) \delta f(2) \delta f(3) \delta f(4) \rangle - g_2(1, 3) g_2(2, 4) - \\ &\quad - g_2(1, 4) g_2(2, 3) - g_2(1, 2) g_2(3, 4), \\ &\dots \end{aligned}$$

Приближение случайных фаз эквивалентно пренебрежению кумулянтами старшего порядка, начиная с четвертого. В этом приближении плотность $N_{\mathbf{k}}^\gamma$ плазменных волн типа γ , определяемая выражением

$$N_{\mathbf{k}}^\gamma \equiv k^2 \frac{\varphi_{\mathbf{k}}^2}{8\pi} \left| \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^\gamma}, \quad D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma) = 0, \quad (10.9.1)$$

описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^\gamma}{\partial t} = T(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma, t) N_{\mathbf{k}}^\gamma + \sum_{\beta, \eta} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma - \omega_{\mathbf{l}}^\beta - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}^\eta) R(\mathbf{k}, \mathbf{l}, D_{\gamma, \beta, \eta}) N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}-\mathbf{l}} + \\ + \sum_{\beta, \eta, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma = \omega_{\mathbf{l}}^\beta + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{l}}^\eta} L[\mathbf{k}, \mathbf{l}, f(\mathbf{v})] N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{l}}. \end{aligned} \quad (10.9.2)$$

Операторы T , R и L , входящие в это уравнение, мы определим ниже. Три слагаемых в (10.9.2) отвечают различным физическим процессам.

9.1. Линейное (и квазилинейное) взаимодействие частиц с волнами

Первое слагаемое в (10.9.2) является линейным относительно плотности плазменных волн $N_{\mathbf{k}}$ и содержит результаты всей линейной теории волн и устойчивости (гл. 8 и 9), а также квазилинейные поправки, вычисленные выше в данной главе. В явном виде линейное взаимодействие частиц с волнами описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^\gamma}{\partial t} = T(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma, t) N_{\mathbf{k}}^\gamma = \left[2 \operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma) + 2 \operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma)^Q + \right. \\ \left. + \frac{1}{\partial D(k\omega)/\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^\gamma} \right] N_{\mathbf{k}}^\gamma, \end{aligned} \quad (10.9.3)$$

здесь $\operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma)$ обозначает линейный инкремент (декремент), равный

$$\operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma) = \pi \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 [D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma)]'} \int \delta(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha}) d\mathbf{v}, \quad (10.9.4)$$

а $\operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma)^Q$ — квазилинейный инкремент (декремент), определяемый выражением

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^\gamma)^Q = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 D'(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^\gamma)} \times \\ \times \operatorname{Re} \left(\int \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}^\gamma - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha}}{\omega_{\mathbf{k}}^\gamma - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} d\mathbf{v} \right)_{\varepsilon \rightarrow +0}. \end{aligned} \quad (10.9.5)$$

Верхний индекс γ обозначает *определенный* тип волн (ленгмюровских, ионно-звуковых и т. д.). Частота $\omega_{\mathbf{k}}^\gamma$ представляет собой решение уравнения

$D(\mathbf{k}, \omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}) = 0$ для данного волнового вектора \mathbf{k} и типа волны γ , а $D' = \partial D / \partial \omega_{\mathbf{k}}$.

В уравнении (10.9.3) член $\text{Im}(\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma})$ описывает линейное затухание (или нарастание) волн. Следующие два члена в этом уравнении дают поправки к линейному затуханию (нарастанию), возникающие вследствие медленного искажения функции распределения f_0 [а также диэлектрической проницаемости $D(\mathbf{k}, \omega)$] за счет процессов испускания и поглощения волн. Изменение функции распределения f_0 во времени вычисляется согласно изложенной выше квазилинейной теории [уравнение (10.9.5)].

9.2. Резонансное взаимодействие волн

Второй член в уравнении (10.9.2), содержащий множитель

$$\delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{k}_2}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}), \quad (10.9.6)$$

описывает взаимодействие между тремя волнами, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}_1}^{\gamma} &= \omega_{\mathbf{k}_2}^{\beta} + \omega_{\mathbf{k}_3}^{\eta}, \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (10.9.7)$$

Эти условия являются резонансными и выделяют пары взаимодействующих волн, каждая из которых представляет собой собственную моду, т. е. удовлетворяет уравнению $D(\mathbf{k}, \omega) = 0$. Возникающая в результате взаимодействия такой пары третья волна также есть собственное колебание плазмы [она удовлетворяет уравнению $D(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \omega_2 + \omega_3) = 0$]. Такое взаимодействие называется *резонансным сливанием мод*: этот процесс не связан ни с каким резонансом волны и частиц, а определяется резонансом трех собственных мод системы.

Подобное взаимодействие характерно для любой диэлектрической среды с проницаемостью $D(\mathbf{k}, \omega)$, в которой распространяются волны. При этом энергия волн может распределяться по многим собственным модам системы, и в зависимости от диэлектрических свойств системы возможно возникновение неустойчивости (т. е. $N_{\mathbf{k}}$, N_1 и $N_{\mathbf{k}-1}$ нарастают во времени).

Кинетическое уравнение, описывающее трехволновые резонансные процессы (без учета линейного, квазилинейного и нелинейного взаимодействия волн с частицами), в явном виде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\gamma}}{\partial t} &= \sum_{\beta, \eta} \delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{k}_1}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}) R(\mathbf{k}, \mathbf{l}, D_{\gamma, \beta, \eta}) N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}-1} = \\ &= 8\pi^2 \text{Re} \sum_{\beta, \eta} \int \left[\frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{k}_1}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}) S_{\mathbf{k}}^{\gamma}}{k^2 l^2 |\mathbf{k}-1|^2 |D'(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}) D'(1, \omega_{\mathbf{k}_1}^{\beta}) D'(\mathbf{k}-1, \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta})|} \right] \times \\ &\times \bar{M}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; 1, \omega_{\mathbf{k}_1}^{\beta}; \mathbf{k}-1, \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}) [\bar{M}^*(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; 1, \omega_{\mathbf{k}_1}^{\beta}; \mathbf{k}-1, \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}) \times \\ &\times S_{\mathbf{k}}^{\gamma} N_1^{\beta} N_{\mathbf{k}-1}^{\eta} - \bar{M}(1, \omega_1^{\beta}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; 1-\mathbf{k}, \omega_{1-\mathbf{k}}^{\eta}) S_1^{\beta} N_{\mathbf{k}}^{\gamma} N_{\mathbf{k}-1}^{\eta} - \\ &- \bar{M}(\mathbf{k}-1, \omega_{\mathbf{k}-1}^{\eta}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; -1, -\omega_1^{\beta}) S_{\mathbf{k}-1}^{\eta} N_{\mathbf{k}}^{\gamma} N_1^{\beta}] d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (10.9.8)$$

В этом уравнении знаковая функция $S_{\mathbf{k}}^{\gamma}$ равна

$$S_{\mathbf{k}}^{\gamma} = \text{sign} \left. \frac{\partial D(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega = \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}}, \quad (10.9.9)$$

а матричные элементы определяются следующим образом:

$$\bar{M} = \sum_{\alpha} \int M_{\mathbf{v}, \alpha} d\mathbf{v},$$

$$M_{\mathbf{v}, \alpha}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) = \frac{4\pi n_{\alpha} q^3}{m_{\alpha}^2} \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} \left[\mathbf{k}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \frac{\mathbf{k}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha}}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} + (2 \leftrightarrow 3) \right]_{\varepsilon \rightarrow +0} \quad (10.9.10)$$

и обладают следующей симметрией:

$$\begin{aligned} \bar{M}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) &= \bar{M}(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_3, \omega_3; \mathbf{k}_2, \omega_2), \\ \bar{M}^*(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}_3, \omega_3) &= \\ &= \bar{M}(-\mathbf{k}_1, -\omega_1; -\mathbf{k}_2, -\omega_2; -\mathbf{k}_3, -\omega_3). \end{aligned} \quad (10.9.11)$$

9.3. Нелинейное взаимодействие волн с частицами

Слагаемые последней суммы в правой части (10.9.2) описывают нелинейное взаимодействие волн с частицами. Эти члены не равны нулю только в том случае, когда волна $(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta})$ находится в резонансе с некоторой группой частиц, и пропорциональны следующему интегралу:

$$\int \delta[\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{l}} - (\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v}] G(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (10.9.12)$$

Линейное взаимодействие, пропорциональное $\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$, ответственно за затухание Ландау; нелинейное взаимодействие (10.9.12) связано с нелинейным затуханием Ландау. Подобно тому, как затухание Ландау в плазме с достаточно сильным отклонением от равновесного распределения превращается в нарастание, т. е. переходит в неустойчивость, нелинейное затухание Ландау также может привести к неустойчивости, если функция распределения вблизи $(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{v} = \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{l}}$ достаточно сильно отклоняется от термодинамического равновесия.

В тех случаях, когда эволюция волн определяется лишь нелинейным взаимодействием волн с частицами [например, когда устойчивые в линейном приближении волны не удовлетворяют условию резонанса волн (10.9.7)] и плотность волн меняется лишь за счет третьего члена в (10.9.12), кинетическое уравнение для плотности волн записывается в виде

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\gamma}}{\partial t} = - \sum_{\beta} N_{\mathbf{k}}^{\gamma} N_{\mathbf{l}}^{\beta} \int L^{\gamma\beta}[\mathbf{k}, \mathbf{l}, f(\mathbf{v})] d\mathbf{l}, \quad (10.9.13)$$

где

$$\begin{aligned} L^{\gamma\beta} &= \frac{-16\pi S_{\mathbf{k}}^{\gamma}}{k^2 l^2 |\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2 |D'(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}) D'(\mathbf{l}, \omega_{\mathbf{l}}^{\beta})|} \times \\ &\times \text{Im} \left[\frac{\bar{M}(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; -\mathbf{l}, -\omega_{\mathbf{l}}^{\beta}) \bar{M}(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; \mathbf{k} - \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta}; \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{l}}^{\beta})}{D(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta})} + \right. \\ &\left. + \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \frac{|\mathbf{k} - \mathbf{l}|^2}{\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon} \mathbf{l} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} M_{\mathbf{v}, \alpha}(\mathbf{k} - \mathbf{l}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta}; \mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}^{\gamma}; -\mathbf{l}, -\omega_{\mathbf{l}}^{\beta}) d\mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (10.9.14)$$

Кроме того, должно выполняться условие

$$\omega_{\mathbf{k}}^{\gamma} - \omega_{\mathbf{l}}^{\beta} \neq \omega_{\mathbf{k} - \mathbf{l}}^{\eta}.$$

Матричные элементы $M_{\mathbf{v}, \alpha}$ и \bar{M} определяются выражениями (10.9.10).

Аналогичные уравнения существуют для $\partial f/\partial t$. Встречается много случаев, когда система, устойчивая в линейном приближении, оказывается неустойчивой в нелинейном режиме. Для детального ознакомления читатель может найти примеры в работах [6, 12—14].

В проведенном выше обсуждении мы ставили целью представить общие кинетические уравнения для описания взаимодействия волн и частиц и подчеркнуть три основных эффекта, определяющих нелинейное поведение турбулентной плазмы:

1. Линейное взаимодействие частиц и волн (неустойчивость и затухание волн).
2. Нелинейные взаимодействия волн с волнами (диффузия волн, резонансное слияние мод).
3. Нелинейные взаимодействия частиц и волн [нелинейное затухание (или нарастание) Ландау, рассеяние волн на частицах].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ведынов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., Nucl. Fusion, **1**, 82 (1961).
2. Drummond W. E., Pines D., Nucl. Fusion, Suppl., Part 3, 1962, p. 1049.
3. Bernstein I. B., Englemann F., Phys. Fluids, **9**, 937 (1966).
4. O'Neil T. M., Phys. Fluids, **8**, 2255 (1965).
5. Berk H. L., Roberts K. V., Phys. Fluids, **10**, 1595 (1967).
6. Davidson R. S., Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic Press, New York, 1971.
7. Gould R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H., Phys. Rev. Letters, **19**, 219 (1967).
8. Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., O'Neil T. M., Phys. Fluids, **11**, 1147 (1968).
9. Su C. H., Oberman C., Phys. Rev. Letters, **20**, 427 (1968).
10. O'Neil T. M., Gould R. W., Phys. Fluids, **11**, 134 (1968).
11. Malmberg J. H. et al., Proc. Conf. on Phénomènes d'ionization dans les gas, **4**, 229 (1968).
12. Кадошцев Б. Б., Турбулентность плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964.
13. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Нелинейная теория плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 7, Атомиздат, 1973.
14. Ведынов А. А., Введение в теорию слаботурбулентной плазмы, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1963.
- 15*. Ведынов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З., Nucl. Fusion, Suppl., Part 3, 1962, p. 465.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Drummond W. E., Quasilinear Theory of Plasma Turbulence, в книге Plasma Physics, Intern. Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Gentle K. W., Plasma Waves and Echoes в книге Methods of Experimental Physics (eds. H. R. Griem, R. H. Lovberg), vol. 9, part A, Plasma Physics, Academic, 1970.
- Сагдеев Р. З., Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 20.
- Tidman D. A., Krall N. A., Shock Waves in Collisionless Plasmas, Wiley, New York, 1971.
- Ведынов А. А., Теория турбулентной плазмы, изд-во АН СССР, 1965.

ФЛУКТУАЦИИ, КОРРЕЛЯЦИИ И ИЗЛУЧЕНИЕ

По существу, бесстолкновительная кинетическая теория, так же как и гидродинамическая, описывают плазму как сплошную среду, поскольку в уравнении Власова плазма рассматривается как жидкость в фазовом пространстве x, v , описываемая непрерывной функцией распределения. Подобно тому как в МГД-теории не проявляются (даже приближенно) некоторые свойства плазмы, существуют немаловажные свойства и процессы, не проявляющиеся и при описании с помощью уравнения Власова.

Так, бесстолкновительная кинетика не способна дать ответ на следующие вопросы:

1. Каков уровень флуктуаций электрических и магнитных полей в *устойчивой* плазме?

2. Каковы интенсивность и спектр излучения плазмы?

3. Чему равно сечение рассеяния электромагнитных волн плазмой?

Ответ на многие подобные вопросы может быть найден лишь из уравнений, в которых учитываются члены более высоких (по $1/n\lambda_D^3$) порядков, чем в уравнении Власова. Причина этого заключается в том, что эффекты такого рода связаны с *дискретностью* плазмы, т. е. с тем фактом, что плазма состоит из отдельных частиц. Предел $n\lambda_D^3 \rightarrow \infty$ соответствует пренебрежению дискретностью частиц; в самом деле, уравнение Власова описывает, строго говоря, систему частиц, для которых

$$q \rightarrow 0, \quad m \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \\ \frac{q}{m} = \text{const}, \quad nq = \text{const}.$$

При $q \rightarrow 0$ взаимодействие отдельных частиц с полем излучения не учитывается. Однако в реальной плазме движение и столкновения отдельных частиц приводят к возбуждению флуктуаций поля до теплового уровня, испусканию и рассеянию излучения.

Влияние индивидуальных частиц можно учесть, если в цепочке статистических уравнений, полученной в гл. 7, удерживать члены порядка $1/n\lambda_D^3$. Большинство эффектов, возникающих в этом порядке, может быть получено без потери строгости с помощью весьма привлекательных физических представлений. Речь идет о методе пробных частиц [1], который мы здесь используем как основу для изучения флуктуаций, рассеяния и излучения.

§ 1. ЭКРАНИРОВАНИЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПРОБНОГО ЗАРЯДА

Чтобы проследить за эффектами дискретности частиц, полезно вычислить потенциал вокруг точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью v' в бесстолкновительной незамагниченной плазме, которая в отсутствие пробной частицы однородна. Такое экранирование было найдено в гл. 2 для покоящейся пробной частицы в равновесной плазме, но экранирование зависит как от скорости частицы, так и от функции распределения частиц плазмы.

В низшем порядке по взаимодействию пробного заряда с окружающими его частицами можно считать, что он движется по прямой линии и в момент времени t находится в точке

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{v}'t \quad (11.1.1)$$

(\mathbf{x}'_0 — положение пробного заряда при $t = 0$). Плотность заряда пробной частицы равна

$$\rho_T = q_T \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = q_T \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t).$$

Полный потенциал φ вокруг пробного заряда складывается из потенциала, создаваемого им самим, и из потенциала зарядов, индуцированных в плазме. Таким образом, φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi q_T \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t) - 4\pi \rho_{\text{плазма}}, \quad (11.1.2)$$

в котором

$$\rho_{\text{плазма}} = \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}$$

— плотность поляризационных зарядов, наведенных в плазме пробным зарядом. Функция распределения f_{α} удовлетворяет уравнению Власова

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\nabla \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0. \quad (11.1.3)$$

Предполагая, что плазма однородна в отсутствие внешних зарядов и лишь слегка возмущается пробной частицей, уравнение Власова можно линеаризовать вблизи $f = f_{\alpha 0}$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha} &= f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) + f_{\alpha 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \\ \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 0} d\mathbf{v} &= 0, \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

$$\frac{\partial f_{\alpha 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha 1} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\nabla \varphi) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}.$$

Если пробная частица покоится, а плазма максвелловская, то потенциал φ есть потенциал экранирования, который мы рассматривали в гл. 1 и 2 (см. также задачу 11.1.1):

$$\varphi = \frac{q_T}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) = q_T \frac{\exp(-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\lambda_D)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (11.1.5)$$

здесь $\lambda_D \equiv [\sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 / \kappa T_{\alpha}]^{-1/2}$. Покоящийся пробный заряд поляризует плазму и окружается экранирующим облаком. Это экранирующее облако возникает благодаря избытку зарядов, знак которых *противоположен* знаку q_T , и уменьшению плотности зарядов того же знака. Отношение возмущенных электронных и ионных зарядов $\rho_{e1}/\rho_{i1} = T_i/T_e$.

Задача 11.1.1. Покажите, воспользовавшись преобразованием Фурье, что потенциал пробного заряда, покоящегося в точке $r = 0$ в плазме с функцией распределения $f_{\alpha 0}(v^2)$, имеет вид

$$\varphi = \frac{q_T}{r} \exp\left[-r \left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int 2 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v^2} dv\right)^{1/2}\right],$$

а возмущение распределения записывается следующим образом:

$$f_{\alpha 1} = 2 \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v^2} \frac{q_T}{r} \exp\left[-r \left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int 2 \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v^2} dv\right)^{1/2}\right].$$

Покажите, что возмущение плотности зарядов любого сорта частиц при $r \ll \lambda_D$ обратно пропорционально температуре частиц данного сорта.

В случае движущегося пробного заряда ситуация резко меняется, поскольку для поляризации плазмы, или, как говорят, для «одевания» пробной частицы, требуется время. Если пробный заряд движется достаточно быстро, время его пребывания в каком-то одном месте слишком мало по сравнению с временем, необходимым для одевания. Вообще говоря, только частицы, движущиеся с той же скоростью, что и пробный заряд, находятся рядом с ним достаточно долго и дают вклад в экранирование. К этому же выводу (о зависимости степени экранирования и структуры экранирующего облака от скорости пробной частицы) можно прийти, решая уравнения Власова и Максвелла (11.1.2) и (11.1.4).

Пусть в момент времени $t = 0$ пробная частица находится в точке \mathbf{x}'_0 , имеет скорость \mathbf{v}' и не «одета», т. е. $f_{\alpha 1}(t = 0) = 0$. Уравнения (11.1.2) и (11.1.4) описывают процесс поляризации плазмы, и решение этих уравнений при $t \rightarrow \infty$ дает экранирование такой (дискретной) пробной частицы. Вычисления похожи на те, которые проводились при изучении плазменных волн (§ 1—6 гл. 8). Уравнения (11.1.2) и (11.1.4) решаются с помощью преобразования Лапласа по t и преобразования Фурье по \mathbf{x} для возмущения функции распределения:

$$\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, \mathbf{k}, p) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha 1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-pt) \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^3}, \quad \text{Re}(p) > p_D.$$

Преобразование уравнений (11.1.2) и (11.1.4) дает

$$k^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0)}{(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') (2\pi)^3} + 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} d\mathbf{v} \quad (11.1.6)$$

и

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}} = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}. \quad (11.1.7)$$

Можно сразу получить решение этих уравнений, подставляя $\tilde{f}_{\alpha \mathbf{k}}$ из (11.1.7) в (11.1.6):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} &= \frac{4\pi q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0)}{(2\pi)^3 k^2 (p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - ip} d\mathbf{v}\right)} = \\ &= \frac{4\pi q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0)}{(2\pi)^3 k^2 (p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') D(\mathbf{k}, ip)}. \end{aligned} \quad (11.1.8)$$

Истинный потенциал $\phi(\mathbf{x}, t)$, возникающий в плазме вокруг пробной частицы в точке $\mathbf{x}'(t)$, может быть получен в пределе $t \rightarrow \infty$ из уравнения (11.1.8), описывающего процесс одевания пробной частицы. Если величина $n\lambda_D^3$ достаточно велика, то за время между кулоновскими столкновениями пробной частицы вокруг нее успевает образоваться экранирующее облако, описываемое уравнением (11.1.8) при $t \rightarrow \infty$. Асимптотическое решение $\Phi_{\mathbf{k}}(t \rightarrow \infty)$ можно получить из (11.1.8), выполняя обратное преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, p) e^{pt} dp = \frac{4\pi q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' t)}{(2\pi)^3 k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') t} + \\ &+ \sum_j \frac{4\pi q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0) \exp(p_j t)}{(2\pi)^3 k^2 (p_j + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') (dD/dp)|_{p=p_j}}. \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Входящие сюда величины p_j являются решениями уравнения

$$D(\mathbf{k}, ip_j) = 0.$$

Они соответствуют плазменным волнам и подробно изучены в гл. 8. Для движущегося пробного заряда плазма представляет собой диэлектрическую среду с проницаемостью $D(\mathbf{k}, ip)$. Этот заряд взаимодействует с нормальными модами p_j , которые представляют собой нули функции $D(\mathbf{k}, ip)$.

При $t \rightarrow \infty$ член $e^{p_j t}$ обращается в нуль, поскольку волны в плазме затухают по Ландау и действительные части p_j отрицательны, так что

$$e^{p_j t} = \exp[i \operatorname{Im}(p_j) t] \exp[\operatorname{Re}(p_j) t] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

С учетом сказанного потенциал, создаваемый отдельной частицей, движущейся в плазме со скоростью \mathbf{v}' , равен

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{4\pi q_T}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] }{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')} d\mathbf{k}, \quad (11.1.10)$$

где $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{v}'t$ есть положение пробной частицы в момент времени t . Функция распределения плазмы в присутствии пробной частицы дается выражением

$$f_\alpha = f_{\alpha 0} + \frac{4\pi q_T}{(2\pi)^3} \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \times \\ \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{k}, \quad (11.1.11)$$

в котором

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int \frac{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} (\partial f_{\alpha 0} / \partial v^2)}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon} d\mathbf{v} \right].$$

Предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ определяет контур интегрирования Ландау, проходящий ниже полюса. (Такой контур мы подробно рассмотрели в § 4 гл. 8.)

В модели пробных частиц плазма представляется состоящей из совокупности отдельных некоррелированных одетых частиц, распределенных в фазовом пространстве \mathbf{x}, \mathbf{v} в соответствии с $f_{\alpha 0}$, причем каждая дает потенциал, определяемый выражением (11.1.10). Пробные частицы взаимодействуют со всей плазмой, рассматриваемой как жидкость, но не с отдельными ее частицами. Каждая частица плазмы ведет двойную жизнь. С одной стороны, она играет роль пробной частицы, движущейся сквозь жидкость. С другой стороны, она является частью этой жидкости и, следовательно, участвует в экранировке остальных пробных частиц. Такая картина открывает наглядный путь для вычисления (с точностью до $1/n\lambda_D^3$) флуктуаций полей и плотности, а также иных свойств плазмы, для которых существенна дискретность частиц. Интересно сравнить электростатические потенциалы, создаваемые пробными частицами, движущимися с различными скоростями.

1.1. Экранирование медленно движущегося пробного заряда ($v' \ll \sqrt{\chi T_i/m_i}$)

При $v' \ll \sqrt{\chi T_i/m_i}$ с хорошей точностью можно принять, что

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du,$$

где 1)

$$F_{\alpha 0} = \int \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) f_{\alpha 0} d\mathbf{v}.$$

1) Подразумевается, что функция распределения $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v^2)$. — Прим. ред.

Обращение выражения (11.1.8) дает

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \exp \left[-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du \right)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{q_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t|} \exp \left[-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t| \left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (11.1.12)$$

В максвелловской плазме

$$F_{\alpha 0} = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T} \right)_{\alpha}^{1/2} e^{-m_{\alpha}u^2/2\kappa T_{\alpha}}$$

величина

$$\left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du \right)^{-1/2}$$

представляет собой дебаевский радиус экранирования

$$\lambda_D = \left(\sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 m_{\alpha}}{\kappa T_{\alpha}} \right)^{1/2}.$$

В общем же случае произвольного (устойчивого) распределения $F_{\alpha 0}(u)$ величина

$$\left(-\sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du \right)^{-1/2}$$

определяет эффективный радиус экранирования. Используя (11.1.10) и (11.1.11), для возмущения плотностей электронов и ионов получаем

$$\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha 1} d\mathbf{v} = \left(\frac{1}{4\pi} \omega_{p\alpha}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} du \right) \varphi.$$

Отсюда можно сделать вывод, что в экранировании покоящейся частицы электроны и ионы с одинаковыми температурами принимают равное участие.

1.2. Экранирование быстрого пробного заряда ($v' > \sqrt{\kappa T_e/m_e}$)

В этом случае диэлектрическую проницаемость D можно приближенно записать в виде

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 - \sum \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \left(k \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u} \right) \left[\frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'} + \frac{k u}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')^2} + \dots \right] du \approx 1,$$

а потенциал вокруг пробной частицы, находящейся в точке \mathbf{x}' , согласно (11.1.10), равен

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{q_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{q_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t|}, \quad (11.1.13)$$

где q_T — заряд пробной частицы.

Таким образом, пробная частица, движущаяся со скоростью, значительно превышающей тепловую скорость частиц плазмы, совсем не экранируется¹⁾.

1.3. Экранирование пробного заряда, движущегося с промежуточной скоростью ($\sqrt{\kappa T_i/m_i} \ll v' \ll \sqrt{\kappa T_e/m_e}$)

В данном случае диэлектрическая проницаемость приближенно определяется выражением

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} du,$$

¹⁾ В действительности экранирование происходит на расстоянии, которое значительно больше дебаевского радиуса.— Прим. ред.

а потенциал имеет вид

$$\varphi = \frac{q_T}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t|} \exp \left[-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t| \left(\omega_{pe}^2 \int -\frac{1}{u} \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} du \right)^{1/2} \right]. \quad (11.1.14)$$

Возмущение плотности электронов равно

$$-en_e \int f_{e1} d\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \left(\omega_{pe}^2 \int \frac{1}{u} \frac{\partial F_{e0}}{\partial u} du \right) \varphi,$$

а возмущение плотности ионов мало:

$$\frac{\rho_{i1}}{\rho_{e1}} \approx O \left[\frac{\kappa T_i}{m_i (v')^2} \right].$$

Следовательно, пробная частица, которая движется быстрее, чем ионы, но медленнее, чем электроны, экранируется только электронами (плотность электронов увеличивается при $q_T > 0$ и уменьшается при $q_T < 0$). Из сравнения (11.1.12) и (11.1.14) ясно, что радиус экранирования движущегося пробного заряда электронами больше (в $\sqrt{2}$ раз), чем радиус экранирования покоящейся частицы.

С помощью представления о пробных частицах можно найти и другие свойства равновесной плазмы.

Задача 11.1.2. Вычислите первые поправки по скорости к экранированным потенциалам (11.1.12)—(11.1.14). Эти поправки называют черенковскими следами. Они связаны с тем, что пробные частицы движутся быстрее плазменных волн.

§ 2. ФЛУКТУАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПЛАЗМЕ

Даже в устойчивой плазме существуют электрические поля и плазменные волны конечной амплитуды. Эти волны представляют собой собственные колебания системы, и соответствующие им степени свободы возбуждены в термодинамическом равновесии. Плазменные волны испускаются частицами при их движении в плазме и ею же поглощаются (например, при затухании Ландау).

Динамическое равновесие между испусканием и поглощением волн приводит к существованию равновесного уровня флуктуаций поля.

Равновесный уровень (и спектр) электрических полей можно непосредственно вычислить, исходя из электрического поля движущейся пробной частицы (§ 1 настоящей главы). Электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ в плазме вблизи пробной частицы, находящейся в точке \mathbf{x}' и движущейся со скоростью \mathbf{v}' , дается выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{v}') = -4\pi q_T \int \exp \{ i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{x} - \mathbf{x}'(t)] \} \frac{i\mathbf{k}}{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (11.2.1)$$

где

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') - i\varepsilon} d\mathbf{v}.$$

Это электростатическое поле полностью экранированной пробной частицы определяется диэлектрическими свойствами плазмы.

Среднее поле в точке \mathbf{x} плазмы можно вычислить, если просто сложить поля всех пробных частиц. Такое вычисление средних полей можно выполнить формально, если рассматривать плазму как ансамбль некоррелированных между собой пробных частиц, однородно распределенных в пространстве и распределенных по скоростям согласно $f_{\alpha 0}$. Пусть $P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ — некоторая величина, описывающая свойства плазмы в точке \mathbf{x} в момент времени t

при наличии в точке \mathbf{x}' пробной частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v}' . Среднее этой величины по ансамблю экранированных некоррелированных частиц определяется выражением

$$\langle P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}') \rangle = \sum_{\alpha} N_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{x}'}{V} \int P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}') f_{\alpha 0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}', \quad (11.2.2)$$

где N_{α} — число пробных частиц сорта α .

Из предположения о равномерности пространственного распределения пробных частиц следует, что *среднее* поле в точке \mathbf{x} равно нулю. Действительно, пробная частица, которая могла бы создавать поле в точке \mathbf{x} , с равной вероятностью может находиться в любом месте (см. задачу 11.2.1).

Задача 11.2.1. Покажите, что среднее поле в точке \mathbf{x} , создаваемое пробной частицей сорта α :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle_{\alpha} = \int d\mathbf{x}' \int \mathbf{E}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{v}') f_{\alpha 0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}',$$

тождественно обращается в нуль.

Среднее значение величины \mathbf{E}^2 можно вычислить из (11.2.1), используя процедуру усреднения (11.2.2):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\alpha} (4\pi q_{\alpha})^2 \int \frac{d\mathbf{x}'}{V} \int N_{\alpha} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \int i\mathbf{k}_1 \frac{\exp[i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]}{k_1^2 D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}')} \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int -i\mathbf{k}_2 \frac{\exp[-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]}{k_2^2 D^*(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}')} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}; \quad (11.2.3) \end{aligned}$$

здесь D^* — величина, комплексно-сопряженная D . Интеграл $\int d\mathbf{x}'$ дает δ -функцию:

$$\int \exp[i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}'] \frac{d\mathbf{x}'}{(2\pi)^3} = \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1).$$

Поэтому интегрирование по $d\mathbf{k}_2$ нетрудно выполнить, и мы имеем

$$\frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{\alpha} \frac{(4\pi q_{\alpha})^2 \bar{n}_{\alpha}}{8\pi} \int \frac{f_{\alpha 0}(\mathbf{v}')}{k^2 |D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')|^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} d\mathbf{v}'. \quad (11.2.4)$$

Для любого \mathbf{k} диэлектрическая проницаемость зависит только от компонент скорости \mathbf{v}' , направленных вдоль \mathbf{k} , поскольку $D = D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')$.

Функцию распределения $f_{\alpha 0}$ удобно проинтегрировать по двум другим компонентам \mathbf{v}' , определив одномерное распределение

$$F_{\alpha 0}(u) = \int \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{|\mathbf{k}|}\right) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'.$$

Далее, обозначая $\omega = ku$, можно записать (11.2.4) в виде

$$\frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^2 |D(k, \omega)|^2} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (11.2.5)$$

Из этой формы записи ясно, что величину

$$W_{k, \omega} = \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^2 |D(k, \omega)|^2} \quad (11.2.6)$$

можно рассматривать как спектральную плотность флуктуаций поля. Таким образом, имеем

$$\frac{\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int W_{k, \omega} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (11.2.7)$$

Задача 11.2.2. Исходя из выражения [см. (11.1.9)]

$$\varphi(\mathbf{k}, t) = \frac{4\pi q_T}{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'t),$$

найдите

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) \exp(-i\omega t) \frac{dt}{2\pi}$$

и покажите, что

$$\frac{\langle \mathbf{E}^2(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\pi} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int W_{\mathbf{k}, \omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

причем $W_{\mathbf{k}, \omega}$ определяется выражением (11.2.6).

Зная диэлектрические свойства плазмы, нетрудно оценить уровень флуктуаций поля в различных диапазонах длин волн. Заранее можно ожидать, что волны с $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ будут возбуждены до высокого уровня, поскольку они являются слабозатухающими собственными колебаниями плазмы. С другой стороны, волны с $k^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$ будут возбуждены слабо. Определив

$$W_{\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{\mathbf{k}, \omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

можно провести интегрирование по ω в различных диапазонах \mathbf{k} с учетом того, что для вещественных ω

$$|D(\mathbf{k}, \omega)|^2 = D_r^2 + D_i^2 = \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \oint \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}\right)^2 + \left[\sum_{\alpha} \pi \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \frac{dF_{\alpha 0}(\omega/k)}{d(\omega/k)}\right]^2, \quad (11.2.8)$$

а

$$W_{\mathbf{k}, \omega} = \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 n_{\alpha} q_{\alpha}^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^3 \left\{ \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \oint \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega} d\mathbf{v}\right)^2 + \left[\sum_{\alpha} \pi \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \frac{dF_{\alpha 0}(\omega/k)}{d(\omega/k)}\right]^2 \right\}}. \quad (11.2.9)$$

Спектральная плотность колебаний имеет особенно простой вид в двух предельных случаях: $k^2 \lambda_D^2 \gg 1$ и $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$.

2.1. Электрические флуктуации в диапазоне длин волн $k\lambda_D \ll 1$ ($T_e = T_i$)

При малом $k\lambda_D$ выражение (11.2.9) существенно упрощается, поскольку в высокочастотной области спектра ($\omega \gtrsim \omega_{pe}$)

$$W_{\mathbf{k}, \omega} \approx \frac{\sum 4\pi^2 n_{\alpha} q_{\alpha}^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^3 \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\pi \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \frac{dF_{e0}(\omega/k)}{d(\omega/k)}\right)_{\omega=\omega_{pe}}^2 \right\}}, \quad \omega \approx \omega_{pe}, \quad k\lambda_D \ll 1.$$

Частоты $\omega \approx \omega_{pe}$ особенно важны. Дело в том, что

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} \left| \frac{dF_{e0}(\omega/k)}{d(\omega/k)} \right| \ll 1$$

и знаменатель в выражении (11.2.9) достигает минимума при $\omega = \omega_{pe}$. Поэтому область частот $\omega \approx \omega_{pe}$ дает основной вклад в интеграл $\int d\omega$.

Это означает, что наибольшая спектральная плотность флуктуаций электрического поля имеет место при частотах собственных колебаний плазмы, т. е. при частотах плазменных волн.

Интеграл от $W_{k,\omega}$ по областям частот вблизи $\omega = \pm \omega_{pe}$ может быть найден, например, интегрированием по контуру. В результате имеем

$$\int_{\pm \omega_{pe} - \Delta}^{\pm \omega_{pe} + \Delta} W_{k,\omega} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{m_e \omega_{pe}}{2k} \frac{F_{e0}}{|dF_{e0}/d(\omega/k)|} \quad k\lambda_D \ll 1. \quad (11.2.10)$$

Таким образом,

$$W_k = \frac{\omega_{pe} m_e}{2k} \frac{F_{e0}}{|dF_{e0}/dv|} \Big|_{v=\omega/k}, \quad k < \frac{1}{\lambda_D}. \quad (11.2.11)$$

В случае максвелловской плазмы $F_{e0} = (m_e/2\pi k T_e)^{1/2} \exp(-m_e u^2/2k T_e)$, и из (11.2.10) следует

$$W_k = \frac{\kappa T_e}{2}, \quad k\lambda_D \ll 1. \quad (11.2.12)$$

Этот результат показывает, что в максвелловской плазме полностью возбуждаются почти не затухающие плазменные волны, энергия которых равна

$$W_k = \frac{\kappa T_e}{2} \text{ на одну степень свободы.}$$

2.2. Электрические флуктуации в диапазоне длин волн $k\lambda_D \gg 1$ ($T_e = T_i$)

В отличие от полностью возбужденных плазменных волн в диапазоне $k\lambda_D \ll 1$, в диапазоне коротких волн $k\lambda_D > 1$ плазменные волны возбуждаются слабо. В последнем случае

$$|D(k, \omega)|^2 \approx 1$$

и

$$W_k = \int \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 n_{\alpha} q_{\alpha}^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^3} \frac{d\omega}{2\pi} = \sum_{\alpha} \frac{2\pi n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{k^2} = \frac{\kappa T_e}{2k^2 \lambda_D^2}, \quad k\lambda_D \gg 1. \quad (11.2.13)$$

Энергия флуктуаций электрического поля при этом равна

$$\left\langle \frac{E^2}{8\pi} \right\rangle = \int W_k \frac{dk}{(2\pi)^3},$$

где W_k определяется выражением (11.2.12) или (11.2.13).

Таким образом, коротковолновые флуктуации электрического поля в плазме, находящейся в термодинамическом равновесии, возбуждены слабо. Уровень энергии полей, когда $k\lambda_D \gg 1$, меньше уровня κT , приходящегося на одну степень свободы незатухающих колебаний.

2.3. Электрические флуктуации в максвелловской плазме ($T_e = T_i$)

Если пробные частицы имеют максвелловское распределение, то в этом случае можно точно вычислить $\int W_{k,\omega}(d\omega/2\pi)$:

$$W_k = \int W_{k,\omega} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{\kappa T_e}{1 + (k\lambda_D)^2}, \quad (11.2.14)$$

$$\left\langle \frac{E^2}{8\pi} \right\rangle = \int \frac{\kappa T_e}{1 + (k\lambda_D)^2} \frac{dk}{(2\pi)^3}.$$

Отсюда снова видно, что сильно затухающие волны с $k\lambda_D > 1$ возбуждены слабо, в то время как слабо затухающие моды возбуждаются полностью.

Нужно отметить, что полный уровень (длинноволновых) флуктуаций поля, получаемый интегрированием (11.2.12) по \mathbf{k} , мал (порядка $g = 1/n\lambda_D^3$) по сравнению с плотностью энергии частиц:

$$\left\langle \frac{E^2}{8\pi} \right\rangle \approx \frac{1}{n\lambda_D^3} n\kappa T_e.$$

Таким образом, описание с помощью некоррелированных одетых пробных частиц, правильное в первом порядке по g , позволяет получать информацию, которая не содержится в уравнении Власова.

§ 3. ФЛУКТУАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В НЕМАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЕ

Мы уже неоднократно отмечали, что на временах, меньших времени между столкновениями, может существовать стационарное (и даже устойчивое) состояние плазмы, далекое от термодинамического равновесия. Метод пробных частиц позволяет вычислить флуктуации полей для различных распределений.

Влияние отклонений от максвелловского распределения видно из (11.2.10): если производная $\partial F/\partial(\omega/k)$ уменьшается, т. е. распределение становится более плоским в некотором интервале $\Delta(\omega/k)$, чем максвелловское, спектральная плотность флуктуаций в этом интервале возрастает. Если же распределение имеет совершенно плоский участок, то выражение (11.2.10) расходится, что соответствует случаю безразличного равновесия. При этом нельзя уже рассматривать движение пробных частиц в линейном приближении (предполагая, что пробная частица движется с постоянной скоростью) [2, 3].

3.1. Флуктуации электрического поля при $T_e \gg T_i$

При слабых отклонениях распределения от максвелловского можно действовать так же, как в § 1 и 2 настоящей главы. Поучительным примером служит плазма, в которой $T_e \gg T_i$. Из результатов гл. 8 следует, что в такой плазме наряду с ленгмюровскими колебаниями существуют также слабозатухающие ионно-звуковые волны. Поэтому в плазме с горячими электронами вклад в энергию флуктуаций поля $\langle E^2/8\pi \rangle$ дают ионно-звуковые волны, возбужденные до теплового уровня столкновениями частиц.

Вклад в $\langle E^2/8\pi \rangle$ от ионно-звуковых волн можно найти из (11.2.9) с учетом того, что $\omega \ll \omega_{pi}$ и $\sqrt{\kappa T_i/m_i} < \omega/k < \sqrt{\kappa T_e/m_e}$ (электроны и ионы имеют максвелловское распределение, причем с отличной друг от друга температурой):

$$W_{k, \omega} = \frac{\sum 4\pi^2 \bar{n}_\alpha q_\alpha^2 F_{\alpha 0}(\omega/k)}{k^3 |D|^2} \approx \frac{4\pi^2 \bar{n}_i e^2 [F_{i0}(\omega/k) + F_{e0}(\omega/k)]}{k^3 \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} \right)^2 + \left[\frac{\omega}{\omega_{pe}} \frac{1}{k^3 \lambda_{De}^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\omega}{\omega_{pi}} \frac{1}{k^3 \lambda_{Di}^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left(\frac{-m_i \omega^2}{2\kappa T_i k^2}\right) \right]^2 \right\}}. \quad (11.3.1)$$

В этой области частот величина $W_{k, \omega}$ имеет острый максимум при $\omega = \pm \omega_{pi}/\sqrt{1 + 1/k^2 \lambda_{De}^2}$, и интегрирование по этим резонансным областям, $\pm \omega_{pi} \pm \Delta$

$\int_{\pm \omega_{pi} - \Delta}^{\pm \omega_{pi} + \Delta}$, дает

$$W_{k, \text{рез}} = \frac{\kappa T_i}{2} \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} \frac{\exp\left(\frac{-T_e}{2T_i(1 + k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}}{\exp\left(\frac{-T_e}{2T_i(1 + k^2 \lambda_{De}^2)}\right) + \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}}. \quad (11.3.2)$$

При увеличении $k\lambda_{De}$ уровень, до которого возбуждены ионно-звуковые волны с данным k , растет до максимального уровня возбуждения на одну степень свободы:

$$W_{k, \text{рез}} \approx \frac{\kappa T_i}{2}; \quad T_e > T_i; \quad \exp\left(\frac{-T_e}{2T_i(1+k^2\lambda_{De}^2)}\right) > \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}.$$

Если же $T_e \gg T_i$, то член с $\sqrt{m_e/m_i}$ больше $\exp(-T_e/T_i)$ и

$$W_{k, \text{рез}} \approx \frac{\kappa T_e}{4}, \quad T_e \gg T_i.$$

Полная плотность энергии флуктуаций равна сумме вкладов от ионно-звуковых и ленгмюровских плазменных волн:

$$\left\langle \frac{E^2}{8\pi} \right\rangle = \int \left[\frac{1}{2} \kappa T_e \frac{1}{1+k^2\lambda_{De}^2} + \frac{1}{2} \kappa T_i \frac{k^2\lambda_{De}^2}{1+k^2\lambda_{De}^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\exp\left(\frac{-T_e}{2T_i(1+k^2\lambda_{De}^2)}\right) + \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}}{\exp\left(\frac{-T_e}{2T_i(1+k^2\lambda_{De}^2)}\right) + \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2}} \right] \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (11.3.3)$$

При неравновесных распределениях иного типа уровень возбуждения мод меняется в соответствии с (11.2.8), если только плазма устойчива и спектральные плотности достаточно малы, так что поправками более высоких порядков к кинетическим уравнениям можно пренебречь.

Зависимость уровня возбуждения от соотношения между $\sqrt{m_e/m_i}$ и T_e/T_i выявляет интересные детали, связанные с излучением волн. Члены в числителе выражения (11.3.2) дают относительное число ионов $\{\exp[-T_e/2T_i(1+k^2\lambda_{De}^2)]\}$ и электронов $(\sqrt{m_e/m_i}\sqrt{T_i/T_e})$, которые, взаимодействуя с бесстолкновительной плазмой, возбуждают ионно-звуковые волны. Когда число ионов, находящихся в резонансе с ионно-звуковыми волнами, превышает число электронов, уровень возбуждения $\kappa T_i/2$ в точности аналогичен уровню возбуждения ленгмюровских колебаний, только вместо электронов участвуют ионы. Если же число резонансных ионов мало, уровень возбуждения определяется электронами. В следующем параграфе мы рассмотрим равновесие между излучением и поглощением, определяющее уровень возбуждения волн.

§ 4. ТОРМОЖЕНИЕ ПРОБНОЙ ЧАСТИЦЫ. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН

Одетая пробная частица окружена поляризационным облаком, движущимся вместе с ней в плазме. Поляризационное облако вызывает торможение пробного заряда. Вследствие этого торможения пробная частица испускает плазменные (а также электромагнитные) волны. Тормозящую силу, действующую на пробный заряд сорта α , можно найти, если вычесть поле голой пробной частицы из полного поля (11.2.1):

$$\mathbf{F} = q_\alpha \mathbf{E}_{\text{поляриза}} = -4\pi q_\alpha^2 \int \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \left[\frac{1}{D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')} - 1 \right] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}; \quad (11.4.1)$$

здесь $\mathbf{E}(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{v}')$ вычисляется в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}'(t)$, где находится пробный заряд.

Задача [11.4.1. Постройте эквипотенциальные поверхности вокруг пробного заряда, движущегося со скоростью а) $\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{x}}\sqrt{\kappa T_e/m_e}$, б) $\mathbf{v}' = 4\hat{\mathbf{x}}\sqrt{\kappa T_e/m_e}$ и в) $\mathbf{v}' = 10\hat{\mathbf{x}}\sqrt{\kappa T_e/m_e}$.

Для этого придется проделать численные расчеты. Покажите, что сила (11.4.1), действующая на покоящуюся пробную частицу, равна нулю.

Энергия, теряемая пробной частицей в единицу времени, равна мощности излучения одиночным пробным зарядом и дается выражением

$$\mathbf{v}' \cdot q \mathbf{E}_{\text{поляриз}}(\mathbf{v}') = \frac{d}{dt} W_{\text{пробной частицы}}.$$

Полная мощность плазменных волн, излучаемая пробными частицами в единичном объеме, записывается следующим образом:

$$\left\langle \frac{dW_{\text{полн}}}{dt} \right\rangle = \sum_{\alpha} 4\pi q_{\alpha}^2 \bar{n}_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \frac{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \left[\frac{1}{D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} - 1 \right] d\mathbf{v}. \quad (11.4.2)$$

Если в плазме нет токов, то это выражение можно упростить, воспользовавшись тем, что $\sum_{\alpha} \int i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0$. Кроме того, записав $D = D_r + iD_i$ и замечая, что D_r четно, а D_i нечетно по \mathbf{k} , можно записать мощность излучения электростатических волн пробными частицами в виде

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \sum_{\alpha} 4\pi q_{\alpha}^2 \bar{n}_{\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha 0} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k^2} \frac{D_i(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{|D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} d\mathbf{v}.$$

С помощью проекции $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$ на направление волнового вектора \mathbf{k} , определяемой выражением

$$F_{\alpha 0} \equiv \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{k}|}\right) d\mathbf{v},$$

для диэлектрической проницаемости имеем

$$D_r = 1 - \sum \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \oint \frac{\partial F_{\alpha 0} / \partial u'}{u' - u} du'$$

и

$$D_i = -\pi \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial u'} \Big|_{u=\omega/|\mathbf{k}|}.$$

Используя определение $\omega = |\mathbf{k}|u$, P можно выразить в виде интеграла от спектральной плотности:

$$P = \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \int \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4} \sum_{\alpha} 8\pi^2 \omega \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 \frac{F_{\alpha 0}}{|\mathbf{k}^3|} \frac{D_i(k, \omega)}{|D(k, \omega)|^2} = \int P_{\mathbf{k}, \omega} \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}. \quad (11.4.3)$$

Мы видим, что излучение велико, если $|D|^2$ мало. В частности, при $\omega \approx \omega_{pe}$ и $k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$ мощность P соответствует излучению ленгмюровских волн. В стационарном состоянии мощность излучения волн пробными частицами должна уравнивать уменьшение энергии волн вследствие затухания Ландау. Условие баланса излучения и поглощения дает связь между W_E , P и ω_i , которая должна выполняться для любого стационарного состояния плазмы.

Для того чтобы продемонстрировать эту связь между P из (11.4.3), W из (11.2.8) и ω_i из линейной теории волн, сравним (11.4.3) с (11.2.8):

$$P_{\mathbf{k}, \omega} = 2\omega D_i(k, \omega) W_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (11.4.4)$$

Убедимся в том, что это выражение описывает равновесие между излучением волн пробными частицами и затуханием Ландау. Заметим, что для ленгмюровских колебаний при $k^2 \lambda_D^2 \ll 1$

$$D = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + iD_i$$

и

$$\omega = \omega_r + i\omega_i = \omega_{pe} - i \frac{\omega_{pe}}{2} D_i(k, \omega). \quad (11.4.5)$$

Затем, поскольку скорость уменьшения электростатической энергии $W_{k,\omega}$ вследствие затухания Ландау для каждой моды (k, ω) пропорциональна $W_{k,\omega} \approx E^2 \sim \exp(2\omega_i t)$, то, согласно линейной теории, мы имеем

$$\frac{d}{dt} W_{k,\omega} \Big|_{\text{затухание}} = 2\omega_i W_{k,\omega} = -\omega_{pe} D_i(k, \omega) W_{k,\omega}. \quad (11.4.6)$$

Скорость уменьшения полной энергии волны (суммы электростатической и механической энергий) равна удвоенной скорости потерь электростатической энергии, т. е.

$$\frac{dW_{k,\omega} \text{ волн}}{dt} = \frac{2dW_{k,\omega}}{dt}. \quad (11.4.7)$$

Это справедливо лишь для ленгмюровских колебаний, поскольку их энергия состоит наполовину из электростатической, а наполовину из механической энергии. В общем же случае, согласно п.3.3 гл. 4,

$$\frac{dW_{\text{волн}}}{dt} = 2\omega_i W_{k,\omega} \frac{dD(k, \omega)}{d\omega}. \quad (11.4.8)$$

Сравнивая мощности излучения (11.4.4) и поглощения (11.4.6) и (11.4.7), мы видим, что энергия, излучаемая пробными частицами, в точности уравнивается поглощением волн вследствие затухания Ландау. Существование равновесия между поглощением и излучением в стационарном состоянии называется *законом Кирхгофа*. Чтобы показать, что закон Кирхгофа выполняется для всех волн в плазме, нужно найти декремент ω_i из уравнения $D(k, \omega) = 0$, разлагая $D(k, \omega) = D_r(k, \omega_r) + i\omega_i (dD/d\omega) + iD_i + \dots$ вблизи точки $\omega = \omega_r$, где $D_r(k, \omega_r) = 0$. Для слабо затухающих волн это дает

$$\omega_i = - \frac{D_i(k, \omega_r)}{(d/d\omega_r) D_r(k, \omega_r)}. \quad (11.4.9)$$

Таким образом, уравнение (11.4.4) можно записать для ленгмюровских волн в виде

$$P_{k,\omega} = \frac{\text{Мощность излучения в}}{\text{единичный интервал частот}} = -2\omega_i W_{k,\omega} \frac{dD}{d\omega}. \quad (11.4.10)$$

Сравнение (11.4.10) с (11.4.8) показывает, что закон Кирхгофа выполняется (а независимые вычисления характеристик излучения пробными зарядами, поглощения вследствие затухания Ландау и равновесного уровня флуктуаций поля согласуются друг с другом) для всех плазменных волн (слабо затухающих собственных колебаний плазмы). Уравнение (11.4.4) верно для *всех* частот и волновых векторов.

Закон Кирхгофа представляет собой мощное средство при вычислении характеристик излучения любой плазмы, для которой известны коэффициент поглощения и стационарный уровень флуктуаций. Например, мощность излучения максвелловской плазмы можно рассчитать исходя из коэффициента затухания, найденного с помощью уравнения Власова, и приняв во внимание следующие свойства плазмы:

1. В максвелловской плазме, находящейся в термодинамическом равновесии со своим окружением при температуре T , уровень шумов $I(k, \omega)$ определяется черным излучением.

2. В этом случае (11.4.10) позволяет определить мощность излучения по декременту затухания ω_i и равновесной плотности излучения.

3. Спонтанное излучение зависит только от температуры плазмы и распределения частиц. Поэтому вычисленная согласно п. 1 и 2 мощность излучения плазмы, находящейся в равновесии с окружающей средой, совпадает в хорошем приближении с мощностью излучения максвелловской плазмы, находящейся в *любых* условиях.

Задача 11.4.2. Прочтите статью Тидмана и Эвиэйтора [4] и обсудите вопрос о *диффузии* пробных частиц (происходящей наряду с рассмотренным в данном параграфе *торможением* таких частиц).

§ 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ И ИЗЛУЧЕНИЕ

В предыдущих параграфах мы рассматривали только электростатические флуктуации в равновесной плазме, т. е. лишь те компоненты спектра электрического поля, в которых $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}_\mathbf{k}$. Наряду с этими флуктуациями в плазме существуют электромагнитные флуктуации, обусловленные движением пробного заряда со скоростью \mathbf{v}' и возникновением в связи с этим тока, плотность которого равна

$$j_T = q_T \mathbf{v}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t).$$

Электромагнитные флуктуации можно вычислить теми же методами, которые были развиты в § 3 и 4 настоящей главы.

Уравнения Максвелла для электрических полей с $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_\mathbf{k}$ до и после применения преобразований Фурье по координатам и Лапласа по времени записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v} + \frac{4\pi q_T}{c} \mathbf{v}' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t), \\ c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \omega} - p^2 \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}, \omega} &= 4\pi p \sum_{\alpha} \frac{\bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \int \frac{\mathbf{v} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v} + \\ &+ \frac{4\pi q_T \mathbf{v}' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'_0)}{(2\pi)^3} \frac{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}. \end{aligned} \quad (11.5.1)$$

Обращение преобразований Фурье и Лапласа дает электрическое поле в виде функции координат и времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{v}'t)] \frac{4\pi q_T (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v}'}{k^2 c^2 D_T(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \perp \mathbf{k},$$

где

$$D_T(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')^2}{k^2 c^2}. \quad (11.5.2)$$

Отсюда для энергии флуктуаций электромагнитного поля получаем

$$\frac{\langle E^2(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\pi} = \sum_{\alpha} 4\pi^2 \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha 0} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{v}')^2}{k^4 c^4 |D_T(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')|^2 k^2} \frac{d\mathbf{v}'}{(2\pi)^3}. \quad (11.5.3)$$

Поскольку в плазме скорости частиц $v' \ll c$ (это означает, что мы должны положить $f_{\alpha 0} = 0$ при $v > c$, чтобы избежать несуществующего в действительности резонанса в $1/D_T^2$), мы можем считать с хорошей точностью $D_T = 1 + \omega_p^2/k^2 c^2$. В результате выражение для энергии электромагнитных волн записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\langle E^2(\mathbf{x}, t) \rangle}{8\pi} &= \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha}^2 \left(\frac{\kappa T_{\alpha}}{m_{\alpha}} \right)^2 \int \frac{1}{k^2 c^4 (1 + \omega_p^2/k^2 c^2)^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \approx \\ &\approx \kappa T_e \int \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2} \frac{1}{(1 + \omega_p^2/k^2 c^2)^2} \frac{\kappa T_e}{m_e c^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}; \end{aligned} \quad (11.5.4)$$

здесь опущены члены, связанные с движением ионов.

Из сравнения с результатами § 3 настоящей главы ясно, что, хотя электростатические колебания плазмы существуют лишь в узком интервале ω и k ($\omega \approx \omega_{pe}$, $k\lambda_D < 1$), они возбуждены сильнее [в $c^2/(\kappa T_e/m_e)$ раз], чем электромагнитные волны.

Мощность излучения электромагнитных волн дается выражением

$$\langle \mathbf{v}' \cdot e \mathbf{E}_{\text{поляриз}} \rangle,$$

причем теперь $\mathbf{E}_{\text{поляриз}}$ обозначает электромагнитную составляющую экранирующего поля. Это выражение можно объединить с формулой для мощности излучения электромагнитных волн. В результате получаем

$$P_{k, \omega} = 8\pi^2 \bar{n}_\alpha q_\alpha^2 \int F_{\alpha 0} \left(\frac{\omega}{k} \right) \left\{ \frac{\omega D_i}{k^3 |D|^2} + \frac{2\kappa T}{mc^2} \frac{\omega}{k^3} \frac{|D_{Ti}|}{|D_T|^2} \right\} \frac{dk d\omega}{(2\pi)^4}.$$

Мнимая часть величины D_T не может быть найдена в рамках уравнения Власова. Если учесть слабые столкновения порядка g , то D_{Ti} становится отличной от нуля. Причина различия в излучении электростатических и электромагнитных волн заключается в следующем. Излучение электростатических волн в наинизшем порядке по g является черенковским, в то время как излучение электромагнитных волн в немагнитной плазме не может быть черенковским, поскольку нет частиц, скорость которых превышает фазовую скорость ($\omega/k > c$) этих волн. Электромагнитное излучение вследствие столкновений называется тормозным и появляется в более высоком порядке по g , чем черенковское излучение электростатических волн.

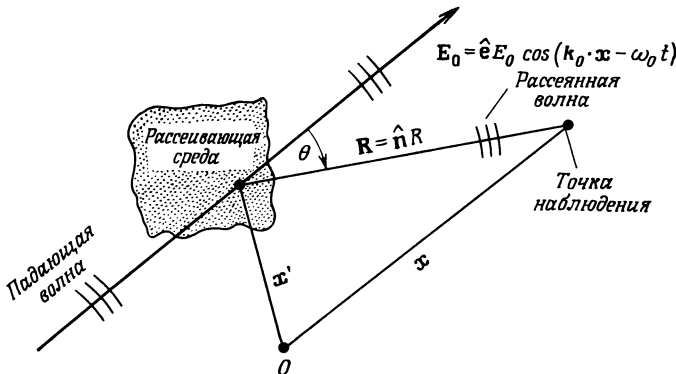
§ 6. РАССЕЯНИЕ НЕКОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ

В плазме существуют не только флуктуации полей, но и флуктуации плотности заряда. Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях плотности зарядов позволяет получать полезную информацию о микросостоянии плазмы. Данный параграф мы посвятим изучению некогерентного рассеяния волн от плазмы.

Во многих книгах по теории электромагнитного поля приводится расчет рассеяния неполяризованной волны на отдельном электроне. Он дает следующий результат (томсоновское сечение рассеяния):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta); \tag{11.6.1}$$

здесь $r_0 = e^2/m_e c^2$ — классический радиус электрона, а θ — угол между падающей и рассеянной волнами (фиг. 198). Если рассеивающий электрон движется, частота рассеянной волны сдвигается вследствие эффекта Доплера.



Фиг. 198. Рассеяние плоской волны в плазме.

На первый взгляд правдоподобный, но в действительности часто *неправильный* метод вычисления рассеяния волн в плазме состоит в том, что все электроны считаются свободными и суммируется излучение, рассеянное каждым из электронов. В этом случае сечение рассеяния по-прежнему определялось бы выражением (11.6.1), а разброс частот — распределением электронов по скоростям, поскольку из-за теплового разброса скоростей рассеяние на каждом электроне приводит к своему доплеровскому сдвигу. Таким образом, рассеянное на электронном газе излучение обладало бы разбросом частот. Форма линии рассеянного света для максвелловского распределения свободных электронов с температурой T является гауссовой с шириной

$$\Delta\omega \approx k\bar{v}_e = k \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}. \quad (11.6.2)$$

Однако в действительности электроны плазмы не являются свободными. Об этом факте свидетельствуют эксперименты [5] по рассеянию электромагнитных волн плазмой, которые показывают, что сечение рассеяния длинноволнового излучения в два раза меньше сечения (11.6.1). Кроме того, принятый радиолокационной станцией сигнал в длинноволновом диапазоне, отраженный от ионосферы, показывает [6], что ширина линии рассеянного излучения гораздо уже ширины, предсказываемой из (11.6.2), а именно

$$\Delta\omega_{\text{эксп}} \approx k\bar{v}_i = k \sqrt{\frac{\kappa T_i}{m_i}}.$$

Такая ширина соответствует рассеянию на *ионах*. Поскольку невозможно поверить в то, что высокочастотное излучение рассеивается на тяжелых и неподвижных ионах, а не на гораздо более легких электронах, становится ясно, что в процессе рассеяния существенны коллективные эффекты, которые отличают плазму от системы независимых электронов. Предположение о том, что для вычисления рассеяния достаточно просуммировать вклады от отдельных свободных частиц, означает, что мы слишком упростили задачу.

Рассеяние излучения связано с дискретностью частиц. Кинетическая теория, рассмотренная в гл. 8, не предсказывает рассеяния излучения равновесной плазмой в отсутствие внешних полей, поскольку в пределах применимости этой теории плотность зарядов каждого сорта в плазме равна повсюду своему среднему значению, т. е. в ней отсутствуют какие-либо центры рассеяния.

Рассеяние появляется в следующем приближении теории по величине $1/n\lambda_D^3$, а именно в модели некоррелированных одетых пробных частиц. Согласно данной модели, в плазме *имеются* дискретные частицы, которые рассеивают излучение. Коллективные эффекты здесь учитываются автоматически наличием экранирующей «шубы» у пробных частиц, появляющейся из-за взаимодействия с остальной плазмой, описываемой уравнением Власова. Чтобы получить характеристики рассеяния, сначала вычисляют рассеяние на одной пробной частице, помещенной в плазму, а затем суммируют результат по всем пробным зарядам.

Используя представление о пробных частицах, развитое в предыдущих параграфах, можно довольно просто вычислить плотность электронов плазмы в окрестности пробного заряда.

Согласно (11.1.11), плотность электронов в точке x в момент времени t вследствие поляризации пробным электроном, находящимся в точке x' и движущимся со скоростью v' , равна

$$n_{e,e}(x, t; x', v') = \bar{n}_e + \bar{n}_e \frac{4\pi e^2}{m_e} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0}}{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \times \\ \times \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} d\mathbf{v} + \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (11.6.3)$$

В этом выражении первый член в правой части описывает однородную плотность электронов в плазме с «размазанными» зарядами в отсутствие пробного заряда, второй член — изменение плотности плазмы «размазанных» электронов вследствие их отталкивания от пробного заряда, а третий описывает плотность в точке \mathbf{x} , t самого пробного электрона ¹⁾. Аналогично плотность электронов в точке \mathbf{x} в момент времени t в присутствии пробного иона в точке $\mathbf{x}' [=\mathbf{x}'_0 + \mathbf{v}' t]$ равна

$$n_{e,i}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', \mathbf{v}') = \bar{n}_e - \bar{n}_e \frac{4\pi e^2}{m_e} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int d\mathbf{v} \int \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0}}{k^2 D(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \quad (11.6.4)$$

В выражениях (11.6.3) и (11.6.4) предел $\varepsilon \rightarrow +0$ соответствует интегрированию по контуру Ландау (§ 3 гл. 8). При вычислении некогерентного рассеяния в плазме сечение рассеяния выражают через плотность электронов [(11.6.3) и (11.6.4)] и результат затем усредняют по ансамблю пробных частиц.

Рассеяние волн плазмой обусловлено ускорением частиц в электрическом поле \mathbf{E}_i падающей волны. Поле волны, рассеянное одним электроном, равно (в волновой зоне)

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = -\frac{e}{c^2} \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{v}}]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \Big|_{\text{с запаздыванием}}. \quad (11.6.5)$$

Здесь ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ вычисляется с учетом запаздывания в момент времени t' ($= t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$), так что электрическое поле в точке наблюдения \mathbf{x} в момент времени t определяется ускорением электрона в более ранний момент времени; $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении распространения рассеянной волны. Используя равенство $m_e (d\mathbf{v}/dt) = -e\mathbf{E}_i$ и предполагая, что электроны распределены с плотностью $n_e(\mathbf{x}', t')$, можно найти поле рассеянной волны вдали от рассеивающего центра:

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) \approx \frac{e^2}{m_e c^2} \int n_e(\mathbf{x}', t') \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x}', t')]}{|\mathbf{x}|} d\mathbf{x}', \quad (11.6.6)$$

где

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$

Выражение (11.6.6) полезно записать в виде

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{x}, t) = \frac{e^2}{m_e c^2} \int d\mathbf{x}' \int \delta\left(t' - t + \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \times \\ \times n_e(\mathbf{x}', t') \frac{\hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x}', t')]}{|\mathbf{x}|} dt'. \quad (11.6.7)$$

Рассмотрим рассеяние электромагнитной волны (фиг. 198), в которой электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{e}} \cos(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t');$$

здесь $\hat{\mathbf{e}}$ — единичный вектор в направлении электрического поля падающей волны. Вдали от рассеивающего центра можно воспользоваться приближенным равенством

$$\delta\left(t' - t + \frac{1}{c} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|\right) \approx \int \exp\left[i\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x}|}{c} - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'}{c}\right) \omega\right] \frac{d\omega}{2\pi}.$$

¹⁾ Строго говоря, поскольку один из электронов рассматривается в качестве пробной частицы, средняя плотность \bar{n}_e должна быть заменена на $n_e^* = (N_e - 1)/V = \bar{n}_e - 1/V$, где V — объем, а N_e — полное число электронов в плазме. В (11.6.3) при $N \gg 1$ можно положить $n_e^* = \bar{n}_e$.

Используя это равенство и записывая \mathbf{E}_i как

$$\mathbf{E}_i = E_0 \hat{\mathbf{e}} \frac{\exp [i (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t)] + \exp [-i (\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t)]}{2},$$

уравнение (11.6.7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} E_r(\mathbf{x}, t) = & \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{E_0}{|\mathbf{x}|} [\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})] \int \frac{d\omega}{2\pi} \int n_e(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt' \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ i \left[\left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c} \right) \cdot \mathbf{x}' + (\omega - \omega_0) t' - \omega \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \right] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \exp \left\{ -i \left[\left(\mathbf{k}_0 + \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c} \right) \cdot \mathbf{x} - (\omega + \omega_0) t' + \omega \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (11.6.8)$$

Учитывая, что

$$\int \exp(-i\omega t) d\omega = \left[\int \exp(i\omega t) d\omega \right]^*,$$

уравнение (11.6.8) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E_r(\mathbf{x}, t) = & \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{E_0 [\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]}{|\mathbf{x}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} (2\pi)^4 \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \tilde{n}_e \left(\mathbf{k}_0 - \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c}, \omega - \omega_0 \right) \exp \left[-i\omega \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \tilde{n}_e^* \left(\mathbf{k}_0 - \hat{\mathbf{n}} \frac{\omega}{c}, \omega - \omega_0 \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11.6.9)$$

где

$$\tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega) = \int n_e(\mathbf{x}', t') \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'] \exp(i\omega t') \frac{d\mathbf{x}' dt'}{(2\pi)^4}.$$

Энергия, излученная в единицу времени, дается усредненной по времени величиной $|E_r|^2$. Определим усреднение по времени следующим образом:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |E_r|^2 dt.$$

Такое усреднение можно выполнить, если заметить, что [в обозначениях $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$ и $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \hat{\mathbf{n}}(\omega/c)$]

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left\{ \int n_e(\mathbf{K}, \Delta\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \frac{d\omega}{2\pi} \times \right. \\ \times \int n_e(\mathbf{K}, \Delta\omega') \exp \left[i\omega' \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \frac{d\omega'}{2\pi} \left. \right\} = \\ = \frac{1}{T} \int n_e \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) n_e \left(\mathbf{k}_0 + \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} n_e(\mathbf{K}, \Delta\omega) \exp \left[i \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \times \right. \\ \times \int \frac{d\omega'}{2\pi} n_e^*(\mathbf{K}, \Delta\omega') \exp \left[-i\omega' \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \left. \right\} = \frac{1}{T} \int \frac{d\omega}{2\pi} [n_e(\mathbf{K}, \Delta\omega)^2]. \end{aligned} \quad (11.6.10)$$

Интеграл

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \left[n_e \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) n_e \left(\mathbf{k}_0 + \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega + \omega_0 \right) \right]$$

обращается в нуль при усреднении по ансамблю пробных частиц

(задача 11.6.1). Используя (11.6.10), можно найти мощность рассеянного излучения в единичный телесный угол из точки \mathbf{x} :

$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{\mathbf{x}^2 c}{4\pi} \langle E_r^2 \rangle = \begin{array}{c} \text{Мощность рассеянной волны} \\ \text{на единицу площади} \end{array} = r_0^2 \frac{cE_0^2}{4\pi} [\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]^2 \times \\ \times \int N_e \lim_{VT \rightarrow \infty} \frac{1}{VT} \frac{(2\pi)^8}{2n_e} \left| \tilde{n}_e \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \right|^2 \left(\frac{d\omega}{2\pi} \right); \quad (11.6.11)$$

здесь $r_0 \equiv e^2/m_e c^2$.

Плотность падающего потока мощности равна $cE_0^2/8\pi$, и дифференциальное сечение рассеяния, определяемое как $(dP/d\Omega)/(cE_0^2/8\pi)$, можно записать через плотность электронов:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 [\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]^2 \int N_e \lim_{VT \rightarrow \infty} \frac{1}{VT} (2\pi)^8 \left| \tilde{n}_e \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (11.6.12)$$

Определив величину

$$S \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \equiv \lim_{VT \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^8}{n_e} \left| \tilde{n}_e \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \right|^2, \quad (11.6.13)$$

выражение (11.6.12) можно переписать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 [\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]^2 \int N_e S \left(\mathbf{k}_0 - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0 \right) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (11.6.14)$$

Подынтегральное выражение в (11.6.14) описывает форму линии рассеянного излучения. Если $S \rightarrow [2\pi F_{e0}(\omega/k)]/k$, рассеяние плазмой не отличается от рассеяния на N_e независимых электронах с распределением по скоростям $F_{e0}(v)$ (причем $\int F_{e0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$). Однако в общем случае S отличается от $2\pi [F_{e0}(\omega/k)]/k$. Отличие обусловлено тем, что падающее излучение «видит» экранированные, а не независимые частицы.

Соотношение (11.6.4) дает дифференциальное сечение рассеяния, выраженное через плотность электронов n_e . Чтобы найти $d\sigma/d\Omega$ для плазмы, нужно усреднить величину $|n_e(\mathbf{k}, \omega)|^2$, вычисленную для одного пробного заряда, по ансамблю пробных зарядов. Среднее от $|n_e(\mathbf{k}, \omega)|^2$ можно выразить через $n_e(\mathbf{x}, t)^2$ [плотность электронов $n_e(\mathbf{x}, t)$ дается формулами (11.6.3) и (11.6.4)] следующим образом:

$$\langle |n_e(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle = \left\langle \int n_e(\mathbf{x}_1, t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 + i\omega t_1) \frac{d\mathbf{x}_1 dt_1}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \times \int n_e(\mathbf{x}_2, t_2) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_2) \exp(-i\omega t_2) \frac{d\mathbf{x}_2 dt_2}{(2\pi)^4} \left. \right\rangle = \\ = \int \langle n_e(\mathbf{x}_1, t_1) n_e(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] \times \\ \times \exp[-i\omega(t_2 - t_1)] \frac{d\mathbf{x}_1 dt_1 d\mathbf{x}_2 dt_2}{(2\pi)^8}. \quad (11.6.15)$$

Из (11.6.3) и (11.6.4) следует

$$\langle n_e(\mathbf{x}_1, t_1) n_e(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \\ = n_e \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int d\mathbf{x}'_0 \int f_{e0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \left(\int \exp[i\mathbf{k}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t_1)] \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \times \right. \\ \times \int \exp\{+i[\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t_2)]\} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \times \\ \times \left. \left[1 + \omega_{pe}^2 \int \frac{\mathbf{k}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0} d\mathbf{v}}{k_2^2 D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}' - i\epsilon)} \right] \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + \omega_{pe}^2 \int \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{k_1^2 D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \right] + \\ & + n_i \int d\mathbf{x}'_0 \int f_{i0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \left\{ \omega_{pe}^2 \int d\mathbf{v} \times \right. \\ & \times \left[\int \frac{\exp[i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t)] \mathbf{k}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0}(\mathbf{v})}{k_1^2 D(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right] \times \\ & \left. \times \omega_{pe}^2 \int d\mathbf{v} \int \frac{\exp[-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_0 - \mathbf{v}'t_2)] \mathbf{k}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{e0}(\mathbf{v})}{k_2^2 D(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}') (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}' - i\varepsilon)} \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрирование по $d\mathbf{x}'_0$ дает δ -функцию, после чего можно взять интеграл по $d\mathbf{k}_2$. В результате имеем

$$\begin{aligned} & \langle n_e(\mathbf{x}_1, t) n_e(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \\ & = n_e \int F_{e0}(u') du' \int \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \exp[-i|\mathbf{k}|u'(t_1 - t_2)] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \left| 1 + \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{k^2 D(\mathbf{k}, |\mathbf{k}|u') (u - u' - i\varepsilon/|\mathbf{k}|)} \right|^2 + \\ & + n_i \int F_{i0}(u') du' \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)] \exp[-i|\mathbf{k}|u'(t_1 - t_2)] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \left| \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{k^2 D(\mathbf{k}, |\mathbf{k}|u') (u - u' - i\varepsilon/|\mathbf{k}|)} \right|^2. \quad (11.6.16) \end{aligned}$$

Подставив этот результат в (11.6.15), получим

$$\begin{aligned} \langle S(\mathbf{k}, \omega) \rangle & = \frac{(2\pi)^8}{TV} \frac{\langle |\tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle}{n_e} = \int F_{e0}(u') 2\pi \delta(\omega - |\mathbf{k}|u') du' \times \\ & \times \left| 1 + \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{k^2 D(\mathbf{k}, |\mathbf{k}|u') (u - u' - i\varepsilon/|\mathbf{k}|)} \right|^2 + \\ & + \int F_{i0}(u') 2\pi \delta(\omega - |\mathbf{k}|u') du \left| \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{k^2 D(\mathbf{k}, |\mathbf{k}|u') (u - u' - i\varepsilon/|\mathbf{k}|)} \right|^2. \quad (11.6.17) \end{aligned}$$

Задача 11.6.1. Действуя так же, как при вычислении величины $\langle |\tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega)|^2 \rangle$, покажите, что

$$\langle \tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega) \tilde{n}_e(\mathbf{k}, \omega') \rangle = 0, \quad \omega \neq \omega';$$

следовательно, вклады типа

$$\left\langle n_e\left(\mathbf{k} - \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega - \omega_0\right) n_e\left(\mathbf{k} + \frac{\omega \hat{\mathbf{n}}}{c}, \omega + \omega_0\right) \right\rangle$$

в сечение рассеяния действительно можно не учитывать.

[Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния в плазме можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} d\omega;$$

здесь дифференциальное сечение рассеяния в единичный интервал частот

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega} & = r_0^2 [\hat{\mathbf{e}} - \tilde{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]^2 N_e \frac{F_{e0}(\Delta\omega/|\mathbf{K}|)}{|\mathbf{K}|} \times \\ & \times \left| 1 + \omega_{pe}^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{K^2 D(\mathbf{K}, \Delta\omega) (u - \Delta\omega/|\mathbf{K}| - i\varepsilon/|\mathbf{K}|)} \right|^2 + \\ & + \frac{F_{i0}(\Delta\omega/|\mathbf{K}|)}{|\mathbf{K}|} \left| \omega_{pe}^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{(\partial F_{e0}/\partial u) du}{K^2 D(\mathbf{K}, \Delta\omega) (u - \Delta\omega/|\mathbf{K}| - i\varepsilon/|\mathbf{K}|)} \right|^2, \quad (11.6.18) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{K} = \left| \mathbf{k}_0 - \frac{\hat{\mathbf{n}}\omega}{c} \right| \quad \text{и} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Угловая зависимость для неполяризованного падающего излучения описывается выражением

$$[\hat{\mathbf{e}} - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})]^2 = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}.$$

Первое слагаемое в правой части (11.6.18) соответствует рассеянию на пробных электронах и электронах плазмы, экранирующих пробный электрон. Второе слагаемое описывает рассеяние на электронах, которые образуют экранирующее облако вокруг пробного иона.

Эффект экранирования зависит от отношения длины волны падающего излучения и размеров экранирующего облака, определяемого параметром $\alpha \equiv 1/K\lambda_D$.

6.1. Рассеяние коротких волн ($K\lambda_D \gg 1$)

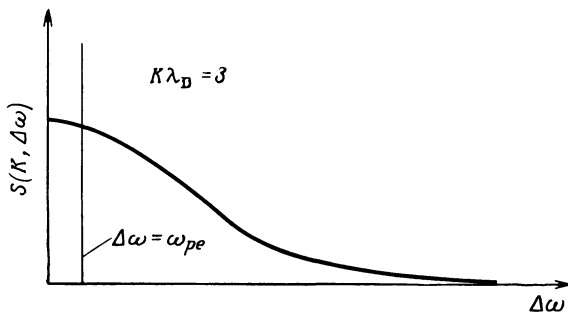
В этом предельном случае можно пренебречь членами, содержащими $1/K^2$. Тогда дифференциальное сечение рассеяния, согласно (11.6.18), запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} r_0^2 \frac{N_e}{2\pi} S(|\mathbf{K}|, \Delta\omega) d\omega = \\ &= \int \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{N_e F_{e0}(\Delta\omega/|\mathbf{K}|)}{|\mathbf{K}|} d\omega = N_e r_0^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \end{aligned} \quad (11.6.19)$$

Это сечение рассеяния соответствует суммарному эффекту рассеяния на отдельных независимых электронах (и равно сечению рассеяния на отдельном электроне, умноженному на общее число рассеивающих электронов). Таким образом, при рассеянии излучения с $K\lambda_D \gg 1$ «плазменный» эффект не проявляется. Это связано с тем, что коротковолновое излучение проникает внутрь экранирующего облака и «видит» отдельные голые электроны.

На фиг. 199 представлена спектральная плотность $S(\mathbf{K}, \Delta\omega)$ рассеянного излучения (при фиксированном угле рассеяния) для максвелловского распределения электронов. Форма линии рассеяния определяется функцией распределения электронов. Таким образом, вследствие эффекта Доплера линия уширена и ширина ее определяется тепловым разбросом скоростей электронов.

Задача 11.6.2. Используя выражение (11.6.18), покажите, что в плазме, состоящей из размазанных частиц и описываемой уравнением Власова $[n_e(\mathbf{x}, t) = n_0 = \text{const}]$, рассеяния нет.



Фиг. 199. Спектральное распределение интенсивности излучения (с $K\lambda_D = 3$), рассеянного плазмой с максвелловским распределением электронов [7].

Этот результат почти не отличается от рассеяния на \bar{N} независимых электронах.

6.2. Рассеяние длинных волн ($K\lambda_D \ll 1$)

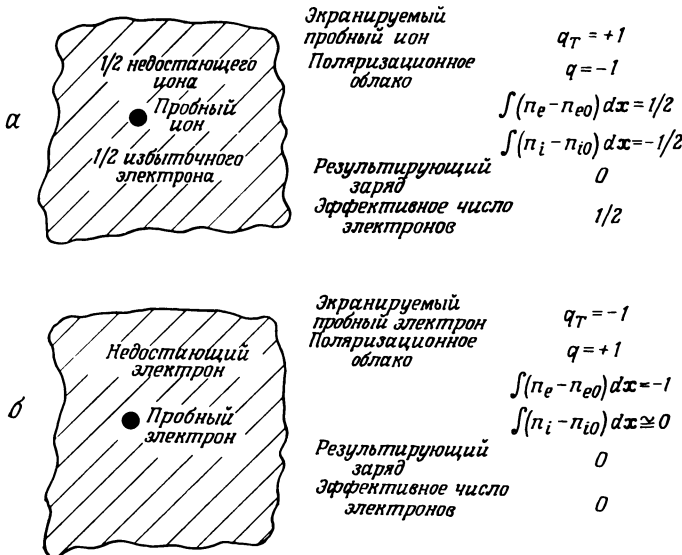
В длинноволновом пределе падающая волна «видит» полностью экранированные пробные частицы. Как показано на фиг. 200, б, пробный одетый электрон представляет собой образование с равным нулю результирующим электронным зарядом, так как в экранировании (не слишком медленного) электрона принимают участие только электроны. Поэтому длинноволновое излучение слабо рассеивается на экранированных пробных электронах. Пробный одетый ион также является нейтральным образованием, но содержит (интегрально) половину ионного и половину электронного заряда, поскольку шуба типичного пробного иона в равной мере создается притягивающимися электронами и отталкивающимися ионами плазмы (фиг. 200, а). Поэтому рассеяние длинных волн с $K\lambda_D \ll 1$ происходит в основном на электронной компоненте поляризационного облака вокруг ионов и характеризуется эффективным числом экранирующих электронов ($N_i/2$) и тепловым разбросом скоростей ионов.

Приведенные выше соображения уже показывают, что рассеяние длинноволнового излучения в плазме существенно отличается от рассеяния на свободных электронах. Кроме того, в этом случае рассеяние существенно зависит от частоты, отражая тот факт, что в плазме существуют флуктуации плотности, связанные с существованием плазменных волн, которые всегда присутствуют в плазме с тепловым разбросом скоростей и на которых рассеивается излучение. Это свойство плазмы соответствует малости диэлектрической проницаемости $D(K, \Delta\omega)$ для частот и волновых векторов плазменных волн. Спектр рассеянного излучения состоит из нескольких характерных областей:

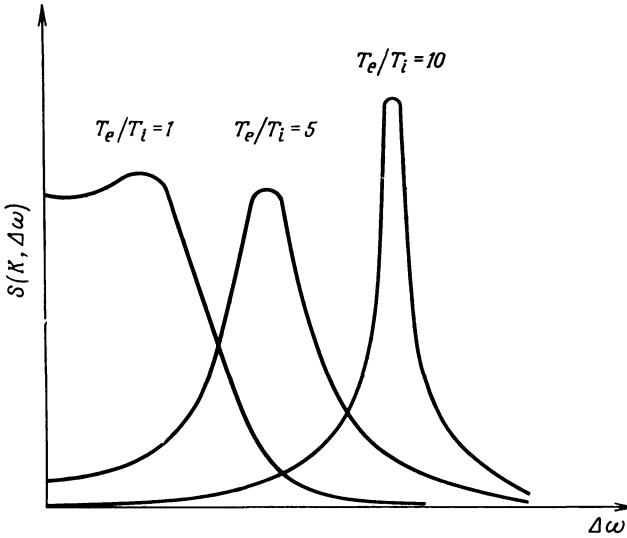
1. $\Delta\omega/K \lesssim \sqrt{\kappa T_i/m_i}$. Если частота рассеянного излучения почти равна частоте падающего, то из (11.6.18) следует

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{N_e F_{i0} (\Delta\omega/|K|)}{|K|} \left| \frac{2}{K^2 D(K, \Delta\omega) \lambda_D^2} \right|^2 d\omega. \quad (11.6.20)$$

Здесь мы пренебрегли величиной F_{e0} , приняв во внимание то обстоятельство, что в области скоростей порядка тепловой ионной скорости величина F_{i0} больше F_{e0} в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз. При фиксированном K диэлектрическая проницае-



Фиг. 200. Диаграмма, поясняющая экранирование пробного иона (а) и пробного электрона (б), а также распределение результирующего заряда.



Фиг. 201. Спектры излучения, рассеянного двухтемпературной максвелловской плазмой [7].

Видно возникновение ионной линии, соответствующей возбуждению ионно-звуковых волн при $T_e \gg T_i$.

мость $D(\mathbf{K}, \Delta\omega)$ уменьшается от значения $D(\mathbf{K}, 0)$ до относительного минимума при $\Delta\omega \approx \omega_{pi}$. Поэтому с ростом $\Delta\omega$ интенсивность рассеянного излучения увеличивается. Если $T_e \gg T_i$, то $D(\mathbf{K}, \Delta\omega \approx \omega_{pi}) \ll 1$. Это означает, что ионно-звуковые волны почти не затухают и соответствующий им пик интенсивности рассеянного излучения при $\omega \approx \omega_0 + \omega_{pi}$ ярко выражен. Этот пик называют *ионной линией*.

В случае $T_e \approx T_i$ диэлектрическая проницаемость $D(\mathbf{K}, \Delta\omega \approx \omega_{pi})$ не слишком мала, поскольку велика мнимая часть D_i и в данном случае вклад ионно-звуковых волн в рассеяние не существен. На фиг. 201 показана зависимость величины ионного пика в спектре рассеяния от T_e/T_i .

При $\Delta\omega > \omega_{pi}$ интенсивность рассеянного излучения уменьшается пропорционально уменьшению $F_{i0}(\Delta\omega/K)$. Таким образом, в отличие от случая рассеяния коротких волн с $K\lambda_D \gg 1$, для которых форма спектра рассеяния определяется распределением электронов F_{e0} , форма спектра рассеяния при $K\lambda_D \ll 1$ определяется распределением ионов F_{i0} . Как уже отмечалось выше, причина этого состоит в том, что полный заряд пробного электрона и поляризационного облака электронов, обволакивающего его, равен нулю. В облаке же, экранирующем пробный ион, содержится дополнительная «половина» электрона, и эта флуктуация электронной плотности рассеивает длинноволновое излучение со сдвигом частоты $\Delta\omega < \omega_{pe}$.

Тот факт, что рассеяние происходит главным образом на «половине» электрона, нейтрализующей каждый пробный ион, приводит к *двум* выводам. Первый вывод состоит в том, что в рассеянии участвует *вдвое* меньше электронов, чем их имеется в системе. Действительно, интегрируя (11.6.20), получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} N_e (1 + \cos^2\theta), \tag{11.6.21}$$

что вдвое меньше дифференциального сечения (11.6.19), полученного для рассеяния на независимых электронах.

Второй вывод заключается в том, что центральная часть линии рассеяния обусловлена электронами, входящими в экранирующее облако иона, и поэтому ширина (и форма) рассматриваемой части линии ($\Delta\omega < \omega_{pe}$) определяется разбросом скоростей ионов. Это следует из того, что подынтег-

ральное выражение в (11.6.20) пропорционально $F_{i0} (\Delta\omega/K)$. Наоборот, при рассеянии на независимых электронах (а также в плазме при $K\lambda_D \gg 1$) ширина и форма линии рассеяния определяются тепловой скоростью электронов. Поэтому в случае $K\lambda_D \gg 1$ линия рассеяния гораздо шире, чем когда $K\lambda_D \ll 1$.

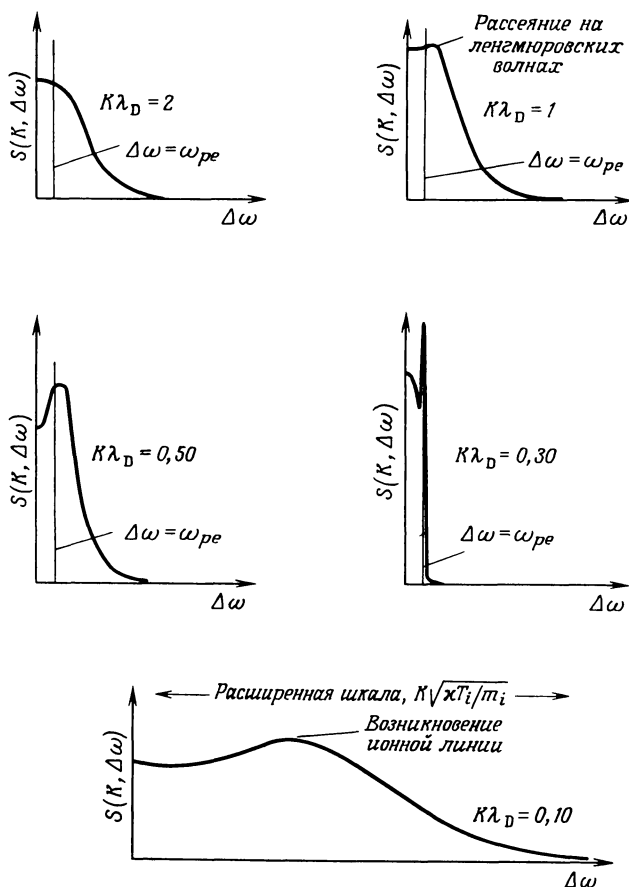
2. $\sqrt{\kappa T_i/m_i} < \Delta\omega/K < \sqrt{\kappa T_e/m_e}$. Величина $F_{i0} (\Delta\omega/K)$ и рассеяние, соответствующие этому участку спектра, малы. Рассеяние определяется слабым взаимодействием волны с пробным электроном и окружающим его экранирующим облаком:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{N_e F_{e0} (\Delta\omega/K)}{K} K^4 \lambda_D^4 d\omega, \quad K\lambda_D \ll 1. \quad (11.6.22)$$

3. $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \approx \omega_{pe}$; $\Delta\omega/K > \sqrt{\kappa T_e/m_e}$. В данной области частот $D(K, \Delta\omega)$ мало и в линии рассеянного излучения имеется пик, описываемый выражением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \int \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \frac{N_e F_{e0} (\Delta\omega/K)}{K} \frac{4}{\left(\frac{\Delta\omega^2}{\omega_{pe}^2} - 1\right)^2 + \left(\pi \frac{\omega_p^2}{K^2} \frac{\partial F_{e0}}{\partial (\Delta\omega/K)}\right)^2} d\omega. \quad (11.6.23)$$

Этот пик соответствует рассеянию на ленгмюровских колебаниях, возбужденных до теплового уровня в плазме (см. § 2 и 3 настоящей главы).

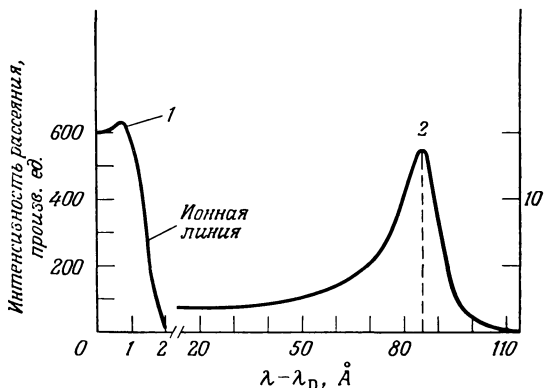


Фиг. 202. Спектры излучения, рассеянного максвелловской плазмой, иллюстрирующие переход от рассеяния на голых частицах при $K\lambda_D \gg 1$ к рассеянию на экранированных частицах при $K\lambda_D \ll 1$ [7].

Амплитуда и ширина линии рассеяния определяются коэффициентом затухания, который в свою очередь зависит от $(K\lambda_D)^2$. На фиг. 202 представлены спектральные плотности для различных значений $K\lambda_D$.

На фиг. 203 показана форма линии рассеяния, полученная в конкретном эксперименте по рассеянию длинноволнового излучения ($K\lambda_D = 1/2, 17$, $n = 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $T_e = 5 \text{ эВ}$).

Рассеяние электромагнитных волн в плазме позволяет получить богатейшую информацию о микропроцессах в плазме.



Фиг. 203. Спектр излучения, рассеянного максвелловской плазмой [5].

Показаны области, соответствующие рассеянию на электронах и на ионах: 1 — рассеяние на ионных волнах; 2 — рассеяние на ленгмюровских волнах.

Задача 11.6.3. Покажите, проинтегрировав (11.6.20) по области

$$|\Delta\omega| \sim K \sqrt{\frac{\kappa\Gamma_i}{m_i}}, \quad K\lambda_D \ll 1,$$

что сечение рассеяния длинноволнового излучения на электронах в плазме вдвое меньше рассеяния на том же количестве свободных электронов.

§ 7. ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ. ЗАКОН КИРХГОФА

Электромагнитное излучение плазмы является отличительной характеристикой этого состояния вещества. Оно отражает как одночастичные, так и коллективные свойства плазмы. За счет такого излучения лабораторная плазма теряет энергию, что накладывает некоторые ограничения при решении некоторых прикладных проблем физики плазмы. Например, при рассмотрении предложений по использованию горячей плазмы в управляемом термоядерном реакторе (разд. Г гл. 5) для расчета к. п. д. реактора следует обязательно учитывать излучение замагниченных электронов [8—10]. В других случаях специально измеряют излучение плазмы, для того чтобы определить с его помощью температуру и распределение частиц в системе.

Плазма излучает, потому что состоит из дискретных, а не из размазанных частиц. Поэтому (микроскопическая) плотность ее не постоянна, как считалось в макроскопической гидродинамической и кинетической теориях. В рамках этих теорий нельзя рассмотреть процесс излучения. Как было показано в предыдущих параграфах данной главы, излучение можно рассчитывать исходя из представления о пробных частицах. В настоящем параграфе мы применим закон Кирхгофа для расчета излучения плазмы по декрементам волн, вычисленным в гл. 8. Поскольку затухание волн можно вычислить из уравнения Власова, применение такого метода значительно упрощает дело, позволяя вычислить эффекты более высокого порядка (по $g = 1/n\lambda_D^3$) с помощью кинетического уравнения низшего порядка.

Закон Кирхгофа есть по существу закон сохранения энергии. Рассмотрим изолированную плазму, находящуюся в истинном термодинамическом равновесии со своим окружением (термостатом) при температуре T . В этом случае плазма излучает как черное тело с интенсивностью

$$I = I_{\text{черн. тело}}, \tag{11.7.1}$$

которая описывается формулой Планка (§ 8 настоящей главы).

Когда излучение проходит через плазму, оно поглощается (затухает), как было установлено в теории плазменных волн, изложенной в гл. 8. Таким образом, интенсивность излучения по мере прохождения его через плазму уменьшается согласно уравнению

$$\left. \frac{dI}{dx} \right|_{\text{затухание}} = -AI. \quad (11.7.2)$$

В равновесии излучение компенсируется поглощением, так что излучательная способность плазмы равна

$$S = AI_{\text{черн. тело}}. \quad (11.7.3)$$

Таким образом, излучательную способность плазмы можно найти по вычисленным в гл. 8 декрементам (коэффициентам поглощения) и интенсивности излучения черного тела, устанавливаемой с помощью равновесной статистической механики (см. следующий параграф).

Соотношение (11.7.3) и выражает закон Кирхгофа [11]. Его применение основано на том, что спонтанная излучательная способность зависит только от распределения излучающих частиц, но не зависит от уровня уже имеющегося в плазме излучения. Поэтому (11.7.3) определяет излучение плазмы с максвелловским распределением частиц вне зависимости от того, находится плазма или нет в равновесии с окружающими ее телами.

§ 8. РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛАЗМЫ

Для того чтобы воспользоваться законом Кирхгофа, необходимо вычислить интенсивность равновесного (черного) излучения в плазме. С этой целью рассмотрим плазму при температуре T , находящуюся в равновесии с полем излучения (фиг. 204). В вакууме падающее на плазму (а также выходящее из плазмы) излучение является равновесным и описывается спектральной плотностью $I_{\text{вак}}(\omega)$. Пусть слой плазмы настолько тонок, что поглощением в нем можно пренебречь. В таком случае уровень излучения в плазме не зависит от толщины слоя.

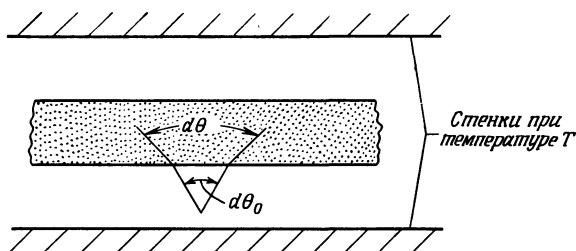
Излучение, падающее на плазму под углами относительно нормали к ее поверхности, расположенными в конусе $d\theta_0$, после преломления будет распространяться внутри конуса с углом раствора $d\theta_1$, поскольку фазовая скорость света v_Φ внутри плазмы отлична от скорости света c в вакууме. Согласно закону Снелля,

$$\frac{c}{v_\Phi} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta_1} = \frac{d\theta_0}{d\theta_1}. \quad (11.8.1)$$

Отсюда получаем отношение телесных углов

$$\frac{d\Omega_0}{d\Omega_1} = \frac{c^2}{v_\Phi^2}. \quad (11.8.2)$$

За время τ из вакуума в плазму войдет (по нормали к поверхности) излучение из слоя толщиной st . В плазме это излучение будет занимать слой тол-



Фиг. 204. Плазменный слой, находящийся в термодинамическом равновесии с окружающей средой.

Волна, падающая на слой, преломляется на границе плазма — вакуум.

щиной $v_{гр}\tau$, где $v_{гр}$ — групповая скорость электромагнитных волн в плазме. Тогда из закона сохранения энергии следует равенство

$$I_{\text{вак}}(\omega) c\tau d\Omega_0 = I_p(\omega) v_{гр} \tau d\Omega_1, \quad (11.8.3)$$

где I_p — интенсивность излучения внутри плазмы. Объединяя эти результаты, можно найти интенсивность черного излучения в плазме:

$$I_p = I_{\text{вак}} \frac{c^3}{v_{гр} v_{\phi}^2} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^3 [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]} \frac{c^3}{v_{гр} v_{\phi}^2}.$$

Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в плазме ($\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$) дает

$$v_{гр} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

и

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}.$$

Таким образом, при $\hbar\omega \ll kT$ интенсивность черного излучения *внутри* плазмы в отсутствие магнитного поля равна

$$I_p = \frac{\kappa T \omega^2}{2\pi^2 c^3} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (11.8.4)$$

Энергия излучения в плазме распределена между энергиями электрического и магнитного полей (W_E и W_B) и кинетической энергией W_K частиц. Используя связь магнитного и электрического полей $|\mathbf{B}| = (kc/\omega) |\mathbf{E}|$ и то, что ускорение частиц равно $dv/dt = -e\mathbf{E}/m$, находим следующие соотношения для этих энергий:

$$W_E = \frac{E^2}{8\pi}, \quad W_B = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) W_E,$$

$$W_K = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E^2}{8\pi} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} W_E.$$

Интенсивность черного излучения в плазме I_p можно использовать для вычисления излучательной способности плазмы с помощью закона Кирхгофа. Но следует заметить, что только плазма громадных размеров или очень высокой плотности действительно излучает как черное тело (см. задачу 11.8.1).

Заметим, что закон Кирхгофа не помогает при расчете излучения незамагниченной плазмы, поскольку электромагнитные волны *затухают* в плазме только благодаря столкновениям, так что все равно необходимо привлекать кинетическое уравнение, учитывающее столкновения. Однако для плазмы, находящейся в магнитном поле, положение существенно меняется.

Задача 11.8.1. Покажите, что из выражения для ускорения электронов ближайшим ионом

$$a = \frac{Ze^2}{m_e r^2}$$

следует, что излучаемая электронами мощность примерно равна

$$\frac{\text{Мощность, излучаемая}}{\text{из единицы объема}} = \frac{8\pi}{3} \frac{Z^2 e^6 n_e n_i}{c^3 m_e^2 R_{\text{мин}}} \approx \frac{n_e 16\pi^2 Z^2 e^6}{3c^2 m \hbar} \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}},$$

где $R_{\text{мин}}$ — наименьшее расстояние между электроном и ионом (при котором процесс излучения можно рассматривать классически), при-

нятое здесь равным \hbar/p . Сравните это излучение с излучением черного тела и покажите, что радиус плазменного шара, излучающего как черное тело, равен $R_{\text{черн. тело}} \approx 10^{23} T^{7/2} (1/Z^2 n_i n_e)$ см, где T — температура в электронвольтах.

§ 9. ЦИКЛОТРОННОЕ (СИНХРОТРОННОЕ) ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Заряженные частицы в магнитном поле движутся с ускорением [$\mathbf{a} = - (e/mc) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$] и, следовательно, излучают, теряя при этом свою энергию. Вращение электронов в магнитном поле широко используется в различных типах ускорителей, и излучение вращающихся электронов называют *циклотронным*, или *синхротронным*, излучением¹⁾. Это излучение, присутствующее в плазме, находящейся в магнитном поле, появляется в самых разнообразных явлениях, как, например, в радиоизлучении во время вспышек на Солнце [12], в излучении Юпитера [13] и радиосумах Крабовидной туманности [14].

Для вычисления циклотронного излучения можно воспользоваться законом Кирхгофа и вычисленным в § 14 гл. 8 коэффициентом поглощения (декрементом). Рассмотрим плазменный слой, находящийся в магнитном поле, как показано на фиг. 205. Если плазма находится в равновесии (при температуре T) с окружающей ее средой, то снаружи плазмы спектральная плотность излучения дается формулой для излучения черного тела (при высоких температурах законом Рэлея — Джинса):

$$I_{\text{черн. тело}} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^3 c^2 [\exp(\hbar \omega / kT) - 1]} \xrightarrow{\hbar \omega \ll kT} \frac{\omega^2 kT}{4\pi^3 c^2}. \quad (11.9.1)$$

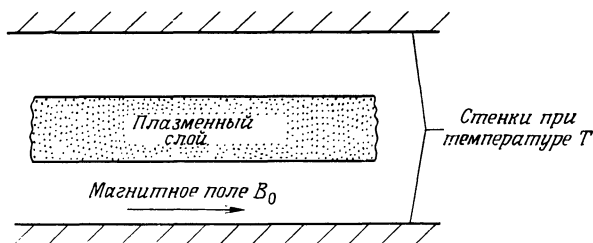
Мощность излучения с частотой в интервале ω , $\omega + d\omega$, падающего под углом θ на площадку $d\sigma$, равна

$$I_{\text{черн. тело}} \cos \theta d\sigma d\omega. \quad (11.9.2)$$

В равновесии излучение такой же мощности выходит из плазмы, причем оно состоит из спонтанного излучения плазменного слоя и непоглощенной части прошедшего через плазму излучения. Внутри плазмы распространяются электромагнитные волны двух поляризацій — обыкновенная ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$) и необыкновенная ($\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$) волны. Обозначив коэффициенты поглощения для этих двух волн через A_{\perp} и A_{\parallel} , запишем интенсивность излучения, выходящего из плазменного слоя, в виде

$$\left\{ \frac{1}{2} I_{\text{черн. тело}} \cos \theta \left[\exp\left(-\frac{A_{\perp} L}{\cos \theta}\right) + \exp\left(-\frac{A_{\parallel} L}{\cos \theta}\right) \right] + I_p \right\} d\sigma d\omega, \quad (11.9.3)$$

где I_p — интенсивность спонтанного излучения плазмы, а первые два слагаемых описывают излучение, прошедшее сквозь плазму. В пренебрежении



Фиг. 205. Плазменный слой в магнитном поле, находящийся в равновесии с окружающей средой.

Эта модель используется для вычисления интенсивности синхротронного излучения плазмы, удерживаемой магнитным полем.

¹⁾ В отечественной литературе распространен также термин «магнитотормозное излучение». — Прим. ред.

рефракцией (направления распространения волны совпадают в плазме и вакууме) интенсивности (11.9.2) и (11.9.3) должны быть равны, откуда следует, что спонтанное излучение плазменного слоя толщиной L

$$I_p = I_{\text{черн. тело}} \cos \theta \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\exp \left(-\frac{A_{\perp} L}{\cos \theta} \right) + \exp \left(-\frac{A_{\parallel} L}{\cos \theta} \right) \right] \right\}. \quad (11.9.4)$$

Уравнение (11.9.4) выражает закон Кирхгофа для излучения в замагниченной плазме. Если слой плазмы достаточно толстый, так что плазма непрозрачна ($L \gg \cos \theta / A$), то он излучает как черное тело. Если же слой тонкий, то интенсивность циклотронного (синхротронного) излучения плазмы равна

$$I_p = \frac{1}{2} I_{\text{черн. тело}} L (A_{\perp} + A_{\parallel}). \quad (11.9.5)$$

Коэффициенты поглощения связаны с декрементами волн соотношением (§ 14 гл. 8)

$$A_{\perp, \parallel} = \frac{2\omega_i}{c} (\perp, \parallel), \quad (11.9.6)$$

где множитель 2 появился вследствие того, что ω_i описывает затухание амплитуды, а не энергии поля, а переход от временного затухания к пространственному осуществляется делением на скорость света c .

Во многих приложениях излучающая плазма является релятивистской. В этих случаях излучение плазмы называют синхротронным. Равновесное распределение для релятивистского электронного газа [15], выраженное через импульс p [параллельный (p_{\parallel}) и перпендикулярный (p_{\perp}) магнитному полю \mathbf{B}_0], имеет вид

$$f_0 = N \exp \left[-\frac{c}{\chi T} (p^2 + m^2 c^2)^{1/2} \right] \quad (11.9.7)$$

с нормировкой

$$\int f_0 d\mathbf{p} = 1.$$

Используя распределение (11.9.7) и выражения для декрементов из § 14 гл. 8, можно найти интенсивность излучения из единичного объема плазмы:

$$\frac{I_p}{L} = \frac{n_0 e^2}{c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} \omega^2 f_0 \delta [\omega (1 - \beta_{\parallel} \sin \theta) - n\omega_{ce}] \times \\ \times [\beta_{\perp}^2 (J_n')^2 + \beta_{\parallel}^2 J_n^2] p_{\perp} dp_{\perp}. \quad (11.9.8)$$

Здесь аргумент функции Бесселя J_n равен $k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{ce}$, а $\beta_{\perp, \parallel} = v_{\perp, \parallel} / c$ и $\omega_{ce} = eB_0 / \gamma m_e c$. В связи с тем, что декременты волн в § 14 гл. 8 были вычислены в случае $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$, уравнение (11.9.8) справедливо, только когда направление излучения почти перпендикулярно \mathbf{B}_0 .

Поскольку синхротронное излучение происходит на частотах $\omega \approx n\omega_{ce}$ и при этом аргумент функций Бесселя (с учетом $k \approx \omega/c$) равен nv_{\perp}/c , то излучение на высших гармониках мало, если плазма нерелятивистская.

Задача 11.9.1. Вычислите излучение электрона, вращающегося в поле \mathbf{B}_0 (решение этой задачи приведено, например, в [16, 17*]), и покажите, что интенсивность некогерентного излучения ансамбля электронов (в расчете на единицу объема) равна

$$\frac{I}{L} = \frac{n_0 e^2}{c} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 f_0 \delta [\omega (1 - \beta_{\parallel} \sin \theta) - n\omega_{ce}]}{1 - \beta_{\parallel} \sin \theta} \times \\ \times \left[(\text{tg } \theta - \beta_{\parallel} \sec \theta)^2 J_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \cos \theta \right) + \beta_{\perp}^2 J_n'^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \cos \theta \right) \right] p_{\perp} dp_{\perp}. \quad (11.9.9)$$

Сравните (11.9.8) и (11.9.9) и покажите, что несоответствие между этими формулами незначительно, если для ω_i применимы выражения, использованные при выводе (11.9.8).

§ 10. РАСЧЕТ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ МЕТОДОМ ПРОБНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Закон Кирхгофа позволяет вычислить излучение равновесной бесстолкновительной плазмы. Более прямой и гибкий метод расчета излучения основывается на вычислении излучения произвольного пробного источника, помещенного в плазму, причем пробный источник выбирается в соответствии с теми или иными физическими процессами. Он может быть задан как источник плотностей заряда $\rho_s(\mathbf{x}, t)$ и тока $\mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t)$, связанных между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0. \quad (11.10.1)$$

Примерами пробных источников могут служить: 1) заряженная частица, вращающаяся в магнитном поле и приводящая к синхротронному излучению; 2) заряженная частица, сталкивающаяся с другой заряженной частицей, — этот процесс приводит к тормозному излучению; 3) заряженная частица, скорость которой превышает скорость плазменной волны, что ведет к возникновению черенковского излучения.

Электрическое поле, создаваемое пробными зарядами с плотностью ρ_s , определяется из решений уравнений Власова и Максвелла (см. предыдущие главы).

Пусть $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения плазмы, возмущенная пробным источником, а $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$ — функция распределения в отсутствие пробного источника. Если в плазме отсутствуют внешние поля, за исключением поля пробного источника, можно записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0} = 0, \quad (11.10.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha} 4\pi q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v} + 4\pi \rho_s(\mathbf{x}, t), \quad (11.10.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{n}_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{v} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t), \quad (11.10.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (11.10.5)$$

которые определяют поля, создаваемые в плазме зарядами ρ_s и токами \mathbf{J}_s . В (11.10.2) опущен малый нелинейный член $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} (f_{\alpha} - f_{\alpha 0})$, описывающий взаимодействие поля источника с возмущенной [частью] функции распределения. Система (11.10.2)—(11.10.5) решается методами, развитыми в гл. 8—10, что приводит к следующему результату для фурье-образов электростатического и электромагнитного полей, создаваемых источниками ρ_s и \mathbf{J}_s :

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i \tilde{\rho}_s(\mathbf{k}, \omega)}{D_L(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (11.10.6)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i \omega \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 c^2 D_T(\mathbf{k}, \omega)}; \quad (11.10.7)$$

здесь

$$D_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int_L \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v},$$

$$D_T(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2} + \sum_L \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega}{k^2 c^2} \int \frac{f_{\alpha 0}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v},$$
(11.10.8)

причем интегрирование ведется по контурам Ландау [$\omega \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\omega + i\varepsilon)$].

Полная энергия излучения, испущенного источником в течение длительного промежутка времени, дается выражением

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt \int \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

или в фурье-представлении выражением (здесь мы использовали теорему Парсеваля)

$$W = \text{Re} \left[\frac{1}{2(2\pi)^4} \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \dot{\mathbf{x}}^*(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega \right] =$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^3} \text{Im} \left\{ \int \left[\frac{|\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}, \omega)|^2}{\omega k^2 D_L(\mathbf{k}, \omega)} - \frac{\omega |\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{k}, \omega)|^2}{k^2 c^2 D_T(\mathbf{k}, \omega)} \right] d\mathbf{k} d\omega \right\}. \quad (11.10.9)$$

Уравнение (11.10.9) можно обобщить на более сложные равновесные состояния, в частности на случай замагниченной плазмы.

10.1. Черенковское излучение

В качестве примера использования (11.10.9) рассмотрим излучение пробного заряда, равномерно движущегося в плазме. В вакууме такой заряд не излучал бы. В плазме же взаимодействие его с остальными зарядами ведет к излучению черенковского типа. Плотность пробного заряда ρ_s и создаваемая им плотность тока \mathbf{J}_s даются выражениями

$$\rho_s = q_T \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_0 t),$$

$$\mathbf{J}_s = q_T \mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_0 t),$$
(11.10.10)

причем фурье-образ плотности заряда имеет вид

$$\tilde{\rho}_s(\mathbf{k}, \omega) = \frac{q_T \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0)}{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)}, \quad \text{Im}(\omega) < 0.$$

Мощность излучения равна W/T . Заметив, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{T} \frac{1}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)^2 + \varepsilon^2} = \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0),$$

из уравнения (11.10.9) находим мощность черенковского излучения электростатических волн

$$\frac{W}{T} = \frac{q_T^2}{(4\pi)^3 2\pi} \text{Im} \left(\int \frac{\omega \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)}{k^2 D_L(\mathbf{k}, \omega)} d\omega d\mathbf{k} \right). \quad (11.10.11)$$

Это излучение велико, если скорость пробного заряда превышает тепловую скорость частиц плазмы.

Задача 11.10.1. Как изменится уравнение (11.10.9) для максвелловской плазмы, если ее поместить в однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 ?

10.2. Тормозное излучение при электрон-ионных столкновениях

В п. 10.1 мы вычисляли мощность черенковского излучения пробной частицы, движущейся в плазме. Столкновения между отдельными частицами также приводят к излучению, называемому тормозным.

Теперь мы вычислим дипольное излучение, возникающее при электрон-ионных столкновениях. (При столкновениях одинаковых частиц излучение является квадрупольным.)

Рассмотрим небольшой объем плазмы, в котором происходят столкновения. Пусть l -я частица с зарядом q_l находится в точке \mathbf{x}_l , так что плотность полного тока равна

$$\mathbf{J} = \sum_l q_l \dot{\mathbf{x}}_l = Ze \sum_i \dot{\mathbf{x}}_i - e \sum_e \dot{\mathbf{x}}_e \quad (11.10.12)$$

(здесь вклады электронов и ионов записаны отдельно). Этот ток можно связать с полями, создаваемыми частицами, продифференцировав (11.10.12) по t , используя сохранение импульса $\sum_e m_e \ddot{\mathbf{x}}_e = -\sum_i m_i \ddot{\mathbf{x}}_i$ и заметив, что ускорение ионов под действием электронов равно

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \frac{Ze}{m_i} \mathbf{E}_i,$$

где \mathbf{E}_i — электрическое поле, создаваемое электронами и действующее на i -й ион. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \left(\frac{Z^2 e^2}{m_i} - \frac{Ze^2}{m_e} \right) \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (11.10.13)$$

Преобразование Лапласа в этом уравнении дает

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{\omega} \left(\frac{Z^2 e^2}{m_i} - \frac{Ze^2}{m_e} \right) \sum_i \tilde{\mathbf{E}}_i(\omega).$$

Плотность тока рассматриваемых источников можно найти суммированием вкладов от каждого иона:

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{\omega} \left(\frac{Z^2 e^2}{m_i} - \frac{Ze^2}{m_e} \right) \sum_i \tilde{\mathbf{E}}_i(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i).$$

Фурье-образ этого выражения записывается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{J}}_s(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{i}{\omega} \left(\frac{Z^2 e^2}{m_i} - \frac{Ze^2}{m_e} \right) \sum_i \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{x}_i, \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i). \quad (11.10.14)$$

Электрическое поле, действующее на ион, который находится в точке \mathbf{x}_i , со стороны электрона, расположенного в точке \mathbf{x}_e , было вычислено в § 1 настоящей главы:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ie}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_e, \omega) = \frac{e}{\pi} \int \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_e)] \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{e0}) i\mathbf{k}}{k^2 D_L(\mathbf{k}, \omega)} d\mathbf{k}.$$

Для получения энергии излучения необходимо вычислить $|\mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega)|^2$. Для каждого пробного электрона эта величина дается квадратом выражения (11.10.14). Затем нужно просуммировать по всем электронам и результат усреднить по ансамблю ионных конфигураций:

$$|\mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{Z^2 e^4}{m_e^2} \sum_e \sum_i \sum_{i'} \langle \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i'})] \tilde{\mathbf{E}}_i \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{i'} \rangle.$$

Если пренебречь корреляциями между ионами, то при усреднении по ансамблю остаются только члены с $i = i'$. Для получения окончательного результата необходимо проделать несколько простых, хотя и громоздких преобра-

зований. Из (11.10.9) ясно видно, что излучение велико при таких k, ω , для которых величины $D_L(k, \omega)$ или $D_T(k, \omega)$ очень малы, т. е. излучаются нормальные моды плазмы. Можно показать, что энергия излучения этих волн при столкновении иона с экранированным электроном, движущимся со скоростью v_0 , описывается выражением

$$W_\omega = \frac{Z^2 e^6 (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2}}{6\pi^3 m_e^2} \left[\frac{(u_0^3 \omega^3)^{3/2} - 1}{\left(\frac{3c^3 \omega}{2}\right)^{-1}} \right] \times \\ \times \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{b}_{ie}] \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{e0}) \delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}_{e0})}{k^2 k'^2 D_L(k, \omega) D_L^*(k', \omega)} d\mathbf{k} d\mathbf{k}',$$

где \mathbf{b}_{ie} — прицельный параметр, а $u_0 = (\kappa T_e / m_e)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов в плазме. Верхний множитель в квадратных скобках этого выражения относится к излучению продольных волн, а нижний — к излучению поперечных волн.

Суммирование по электронам дает полную мощность излучения из единичного объема [18—20] ¹⁾:

$$P(\omega) = \frac{4Z^2 e^6 n_i n_e}{3\pi m_e^2} \left[\frac{(u_0^3 \omega^3)^{3/2} - 1}{\left(\frac{3c^3 \omega}{2}\right)^{-1}} \right] (\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} \int f_{e0}(v_e) \frac{\delta|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e|}{k^2 |D_L(\mathbf{k}, \omega)|^2} d\mathbf{k} dv_e.$$

В случае термодинамического равновесия этот результат согласуется с мощностью излучения, рассчитанной на основе закона Кирхгофа (т. е. из баланса излучения и поглощения). Интересно отметить, что в области $\omega \gg \omega_p$, где $D_L \approx 1$, полученный результат совпадает с мощностью излучения при электрон-ионных столкновениях в вакууме [21].

В плазме существенную роль играют и другие процессы излучения (трансформация продольных и поперечных волн на флуктуациях плотности, тормозное излучение при электрон-электронных столкновениях и т. д.). Читатель может изучить их по специальным обзорам и монографиям (см., например, работу [18] и цитируемую там литературу). Другим важным вопросом физики плазмы, хорошо освещенным в специальной литературе [22], является вопрос об излучении нейтральных атомов, находящихся в плазме. Это излучение используется в целях диагностики плазмы.

§ 11. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИЕ СТОЛКНОВИТЕЛЬНУЮ РЕЛАКСАЦИЮ В ПЛАЗМЕ

Хотя кинетическая теория, основанная на уравнении Власова, правильно описывает усредненные взаимодействия между частицами плазмы, она не учитывает эффектов, связанных с взаимодействием частиц на малых расстояниях (при столкновениях), которые обусловлены *дискретностью* плазмы и проявляются в кинетическом уравнении в членах первого порядка по $g \equiv 1/n\lambda_D^3$. В гл. 6 было использовано модельное описание процесса столкновительной релаксации плазмы с помощью уравнения Фоккера — Планка. Это уравнение позволяет найти изменение функции распределения частиц плазмы вследствие парных столкновений, которые описываются сечениями рассеяния. Хотя такой подход кажется естественным, результаты этой главы показывают, что отдельная частица в плазме не является голой: в процессе рассеяния она окружена экранирующим облаком, которое следует учитывать при рассмотрении задачи о рассеянии. Иными словами, парное столкновение

¹⁾ В статье Даусона [18] собран большой материал и приведено много ссылок на работы по методу пробных частиц.

заряженных частиц в диэлектрической среде отличается от их столкновения в вакууме.

Кинетическая теория, учитывающая столкновения, может быть построена различными способами ¹⁾. Последующее изложение находится в тесной связи с квазилинейной теорией (гл. 10), которая была развита для вычисления релаксации неустойчивой плазмы.

Рассмотрим устойчивую плазму, содержащую N_α частиц сорта α , в которой среднее поле $\mathbf{E} = 0$. Пусть распределение этих частиц описывается точно зависимостью координат и скоростей всех частиц от времени:

$$F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{s=1}^{N_\alpha} \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t)] \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_s(t)]. \quad (11.11.1)$$

В момент времени $t = \tau$ мы имеем

$$F_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t = \tau) = \sum_{s=1}^{N_\alpha} \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_s) \delta(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}_s). \quad (11.11.2)$$

Это распределение подчиняется уравнению Лиувилля (см. гл. 7):

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_\alpha = 0, \quad (11.11.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int F_\alpha d\mathbf{v}; \quad (11.11.4)$$

здесь $\bar{n}_\alpha = N_\alpha/V$, а V — объем системы.

Фурье-образы величин F_α и \mathbf{E} , определяемые выражениями

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \int \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{E} d\mathbf{x},$$

$$F_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \sum_{s=1}^{N_\alpha} \delta[\mathbf{v} - \mathbf{v}_s(t)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_s), \quad (11.11.5)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} F_{\alpha\mathbf{k}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha, \mathbf{k}=0} = \\ = - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (11.11.6)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{n}_\alpha q_\alpha \int F_{\alpha\mathbf{k}} d\mathbf{v};$$

в верхнем уравнении член с $\mathbf{k} = 0$ в $\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_\alpha$ выписан отдельно.

Естественно ожидать далее, что компонента $F_{\alpha, \mathbf{k}=0}$, соответствующая однородной системе, больше, чем величина $F_{\alpha\mathbf{k}}$, которая учитывает «дискретность» плазмы. В рамках уравнения Власова $F_{\alpha, \mathbf{k}=0}$ дает полное описание устойчивой плазмы. Это приводит к следующему приближению: считая $F_{\alpha, \mathbf{k}=0} \gg F_{\alpha\mathbf{k}}$ пренебрежем в (11.11.6) членом $\sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}.$ В этом

¹⁾ Кинетическое уравнение, о котором идет речь в данном параграфе, впервые было получено в работах [1, 23, 24]. Приводимое ниже рассмотрение базируется на источниках [25, 26], а также на частном сообщении Хамасаки (S. Hamasaki).

приближении плазма описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial F_{\alpha\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} F_{\alpha\mathbf{k}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}_\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha, \mathbf{k}=0} = 0, \quad (11.11.7)$$

$$\frac{\partial F_{\alpha, \mathbf{k}=0}}{\partial t} = -\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha\mathbf{k}'}, \quad (11.11.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\mathbf{k} = \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_\alpha q_\alpha \int F_{\alpha\mathbf{k}} d\mathbf{v}, \quad (11.11.9)$$

$$F_{\alpha\mathbf{k}}(t=0) = \sum_{s=0}^{N_\alpha} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{s0}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{s0}).$$

Сходство данной системы уравнений с уравнениями квазилинейной теории (гл. 10) очевидно. Различие состоит в том, что в неустойчивой плазме *столкновительный* член $\sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha\mathbf{k}'}$ возникает вследствие коллективных эффектов, в то время как в рассматриваемом теперь случае он определяется дискретной природой плазмы. Точно так же, как и в квазилинейной теории, малость производной $\partial F_{\alpha, \mathbf{k}=0} / \partial t = O[(q_\alpha/m_\alpha) (\mathbf{E}_\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha\mathbf{k}})]$ показывает, что *усредненная* часть функции распределения $F_{\alpha, \mathbf{k}=0}$ в процессе приближения к равновесному состоянию меняется медленно по сравнению с характерными временами изменения полей, связанными с движением отдельных частиц плазмы, когда они проходят одна вблизи другой.

Решение уравнений (11.11.7) и (11.11.9) восстанавливается по начальным значениям (11.11.2) обычным, уже не раз использованным нами методом.

Преобразование Лапласа

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \int_0^\infty F_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) \exp(-pt) dt, \quad \text{Re}(p) > 0$$

$$(F_{\alpha, \mathbf{k}=0} \equiv F_{\alpha 0})$$

позволяет найти компоненты полей и функций распределений:

$$\tilde{F}_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, p) = \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0) - (q_\alpha/m_\alpha) \tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha, \mathbf{k}=0}(\mathbf{v}, t)}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - p}, \quad (11.11.10)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\mathbf{k}(p) = \frac{1}{D(\mathbf{k}, ip)} \sum_{\alpha} 4\pi \bar{n}_\alpha q_\alpha \int \frac{F_{\alpha\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t=0)}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - p} d\mathbf{v}, \quad (11.11.11)$$

$$D(\mathbf{k}, ip) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha 0}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + ip} d\mathbf{v}. \quad (11.11.12)$$

Обращение преобразования Лапласа дает зависимость полей и функций распределений от времени. В интеграле обращения имеются вклады от полюсов двух типов: один от $D(\mathbf{k}, ip) = 0$, а другой от $p = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$. Первый вклад приводит к членам, пропорциональным $\exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t)$, где $\omega_{\mathbf{k}}$ — корень уравнения $D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0$. Но так как нормальные моды устойчивой плазмы *затухают*, эти члены не играют роли на больших временах. Оставляя, таким

образом, только вклад от полюса $p = ik \cdot \mathbf{v}$, получаем

$$ik \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = - \sum_{\alpha} \sum_{s=1}^{N_{\alpha}} \frac{4\pi \bar{n}_{\alpha} q_{\alpha} \exp(ik \cdot \mathbf{v}_{s0} t) \exp(ik \cdot \mathbf{x}_{s0})}{D(\mathbf{k}, -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{s0})}, \quad (11.11.13)$$

$$F_{\alpha \mathbf{k}}(t) = - \sum_{s=1}^{N_{\alpha}} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \exp(ik \cdot \mathbf{x}_{s0}) \exp(ik \cdot \mathbf{v} t) - \\ - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{\beta} \sum_{s=1}^{N_{\beta}} \frac{4\pi \bar{n}_{\beta} q_{\beta} (\mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha 0})}{k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_s)} \left[\frac{1}{D(\mathbf{k}, -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{s0})} \exp(ik \cdot \mathbf{v}_{s0} t) \exp(ik \cdot \mathbf{x}_{s0}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{D(\mathbf{k}, -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \exp(ik \cdot \mathbf{v} t) \exp(ik \cdot \mathbf{x}_{s0}) \right], \quad (11.11.14)$$

$$\frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial t}(\mathbf{v}, t) = - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{E}_{-\mathbf{k}'}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha \mathbf{k}'}(t). \quad (11.11.15)$$

Выражения (11.11.13) и (11.11.14) можно подставить в уравнение (11.11.15), которое и определяет столкновительную релаксацию устойчивой плазмы. Для практического использования этого уравнения необходимо проделать еще две операции. Во-первых, поскольку основной интерес представляют времена, сравнимые со временем релаксации, уравнение (11.11.15) можно усреднить по быстрым осцилляциям $\exp(ik \cdot \mathbf{v} t)$. Во-вторых, (11.11.15) следует усреднить по ансамблю N_{α} дискретных частиц. Это означает, что

сумма по индивидуальным частицам $\sum_{s=1}^{N_{\alpha}} A(\mathbf{v}_s)$ должна быть заменена на $\int F_{\alpha}(\mathbf{v}') A(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'$. В результате кинетическое уравнение (11.11.15) записывается в виде

$$\frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial t} = - \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \sum_{\mathbf{k}'} \overline{\mathbf{E}_{-\mathbf{k}'}(t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha \mathbf{k}'}(t)} \right\rangle, \quad (11.11.16)$$

где $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю, а черта сверху — усреднение $(1/T) \int_0^T dt$ по периодам быстрых осцилляций. В развернутом виде уравнение (11.11.16) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \sum_{\beta} \bar{n}_{\beta} \int \frac{\mathbf{k}}{m_{\alpha}} \left(\frac{4\pi q_{\alpha} q_{\beta}}{k^2} \right)^2 d\mathbf{k} \times \\ \times \int \frac{\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{|D(\mathbf{k}, -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})|^2} \left(\frac{1}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} - \frac{1}{m_{\beta}} \nabla_{\mathbf{v}'} \right) F_{\alpha}(\mathbf{v}, t) F_{\alpha}(\mathbf{v}', t) d\mathbf{v}'. \quad (11.11.17)$$

Это уравнение называется *уравнением Ленарда — Балеску*. Оно относится к уравнениям типа уравнения Фоккера — Планка, причем в нем учтены диэлектрические свойства плазмы, приводящие к экранированию.

Задача 11.11.1. Выведите уравнение Фоккера — Планка методом, использовавшимся в гл. 6, но приняв во внимание, что взаимодействие между двумя рассеивающимися частицами описывается экранированным кулоновским потенциалом (§ 1 настоящей главы). Покажите, что результат совпадает с (11.11.17) (см., например, [27]).

Задача 11.11.2. Получите уравнение (11.11.17) из уравнений (11.11.13) — (11.11.15). Покажите, что $\int G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \nabla_{\mathbf{v}} \cdot F_{\alpha 0}(\mathbf{v}') F_{\alpha 0}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}'$ возникает

из члена с $\sum_s \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)$ в $F_{\alpha k}$, тогда как $\int G(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha 0}(\mathbf{v}) F_{\alpha 0}(\mathbf{v}') d\mathbf{v}'$ появляется из оставшихся двух членов $F_{\alpha k}$.

При выводе уравнения Ленарда — Балеску не были учтены поля плазменных волн (учитывались лишь поля отдельных частиц): члены, пропорциональные $\exp(-i\omega_k t)$, были опущены. В действительности, особенно если система далека от термодинамического равновесия, поля волн наряду со столкновениями могут определять временную эволюцию системы. Более того, в неустойчивой плазме эти поля играют главную роль.

Можно получить уравнение, аналогичное уравнению Ленарда — Балеску, учитывающее эффекты полей устойчивых и неустойчивых волн, оставив в выражениях для $E_k(t)$ и $F_{\alpha k}(t)$ члены, содержащие $\exp(-i\omega_k t)$. Вычисления довольно громоздки, но результат может быть записан в очень наглядном виде ¹⁾:

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \Big|_{\text{коллект}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{J}_{\alpha}. \quad (11.11.18)$$

Слагаемое $(\partial F_{\alpha}/\partial t)|_{\text{коллект}}$ описывает эффект линейных и нелинейных взаимодействий частицы с волной, а также нелинейных процессов взаимодействия волн с волнами, обсуждавшихся в гл. 10. Ток \mathbf{J}_{α} определяет влияние столкновений и других процессов (в которых участвуют частицы), таких, как излучение волн:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\alpha} = & - \sum_{\beta} \sum_{\nu} \bar{n}_{\beta} \int \frac{\mathbf{k}}{m_{\alpha}} \left(\frac{4\pi q_{\alpha} q_{\beta}}{k^2} \right)^2 d\mathbf{k} \times \\ & \times \int \left\{ \frac{1}{|\partial D(\mathbf{k}, \omega)/\partial \omega|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} + i\varepsilon}} \left[\frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}')}{(\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + i\varepsilon)^2} F_{\beta}(\mathbf{v}', t) \frac{1}{m_{\alpha}} \times \right. \right. \\ & \times \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F_{\alpha}(\mathbf{v}, t) - \frac{\delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{(\omega_{\mathbf{k}}^{\nu} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' + i\varepsilon)^2} F_{\alpha}(\mathbf{v}, t) \frac{1}{m_{\beta}} \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{v}'} F_{\beta}(\mathbf{v}', t) \left. \right] + \\ & + \left[P \frac{1}{|\partial D(\mathbf{k}, -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + \varepsilon)|^2} \right] \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \left(\frac{1}{m_{\alpha}} \nabla_{\mathbf{v}} - \frac{1}{m_{\beta}} \nabla_{\mathbf{v}'} \right) \times \\ & \times F_{\alpha}(\mathbf{v}, t) F_{\beta}(\mathbf{v}', t) \left. \right\} d\mathbf{v}'; \quad (11.11.19) \end{aligned}$$

здесь P обозначает главное значение интеграла.

Сумма \sum_{ν} берется по различным нулям уравнения $D(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0$, т. е. по различным типам плазменных волн. В выражении (11.11.19) первые два слагаемых в $\int d\mathbf{v}'$ описывают спонтанное излучение волн частицами: первое из них дает нерезонансное, а второе — резонансное излучение. Третий член в этом выражении есть интеграл столкновений, полученный в гл. 6 при выводе уравнения Фоккера — Планка и в настоящей главе — при выводе уравнения Ленарда — Балеску.

Заметим, что в случае неустойчивой плазмы член, определяющий коллективные эффекты, нарастает со временем, и по сравнению с ним ток \mathbf{J}_{α} становится несущественным. В плазме, близкой к полному равновесию, излучение и поглощение волн компенсируют друг друга и релаксация в основном определяется столкновительным членом.

В приведенных ниже задачах сформулированы и предложены для доказательства некоторые свойства уравнения Ленарда — Балеску.

¹⁾ См. § 14.6 в книге Давидсона [28] и приведенные в ней ссылки на литературу.

Задача 11.11.3. Покажите, что в уравнении Ленарда — Балеску (11.11.17) не требуется вводить искусственное обрезание при малых k в отличие от уравнения Фоккера — Планка. Отнесите этот факт за счет экранирующего свойства плазмы.

Задача 11.11.4. Покажите, что интеграл в (11.11.17) действительно необходимо обрезать при больших k . Это связано с тем, что большие k соответствуют близким столкновениям между частицами, для которых потенциал взаимодействия нельзя рассматривать как слабое возмущение, что предполагалось в теории, развитой нами; иными словами, разложение по $g = 1/n\lambda_D^3$ не годится для коротковолновых (при больших k) компонент функции распределения.

Задача 11.11.5. Покажите, что из уравнения (11.11.17) вытекают следующие свойства [16, 24] функции распределения:

- 1) $F_{\alpha 0}$ остается положительной;
- 2) $\int F_{\alpha 0} dv$ не зависит от времени;
- 3) $\sum_{\alpha} \int m_{\alpha} v F_{\alpha 0} dv$ не зависит от времени;
- 4) $\sum_{\alpha} \int m_{\alpha} v^2 F_{\alpha 0} dv$ не зависит от времени.

Задача 11.11.6. Убедитесь, что максвелловская функция распределения представляет собой не зависящее от времени решение уравнения (11.11.17). Покажите, что при $t \rightarrow \infty$ всякое начальное распределение $F_{\alpha 0}$ приближается к максвелловскому (H-теорема).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Rostoker N., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, 3, 1 (1960).
2. Frieman E. A., Rutherford P., Ann. Phys., 28, 134 (1964).
3. Rogister A., Oberman C., Journ. Plasma Physics, 2, 33 (1968); 3, 119 (1969).
4. Tidman D. A., Eviator A., Phys. Fluids, 8, 2059 (1965).
5. Kunze H. J., The Lazer as a Tool for Plasma Diagnostics в книге «Plasma Diagnostics» (ed. W. Lochte-Holtgreven), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968, p. 550 (см. перевод: Методы исследования плазмы под ред. В. Лохте-Хольтгревена, изд-во «Мир», 1971).
6. Bowles K. L., Ochs G. R., Green J. L., Journ. Res. Nat. Bureau Stand., 66D, 395 (1962).
7. Bernstein I. B., Trehan S. K., Weenink M. P. H., Nucl. Fusion, 4, 61 (1964).
8. Трубников Б. А., Кудрявцев В. С., в книге «Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy», Vol. 31, 93 (U.N., Geneva, 1958).
9. Drummond W. E., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, 3, 45 (1960).
10. Beard D. B., Baker J. C., Phys. Fluids, 5, 1113 (1962).
11. Bekefi C., Hirschfeld J., Brown S. C., Phys. Rev., 112, 1037 (1961).
12. Wild J. P., Smerd S. F., Weiss A. A., Ann. Rev. Astronomy Astrophys., 1, 291 (1963).
13. Warwick J. W., Ann. Rev. Astronomy Astrophys., 2, 1 (1964).
14. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., Ann. Rev. Astronomy Astrophys., 3, 297 (1965).
15. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, Fairlawn, N.Y., 1934.
16. Montgomery D., Tidman D. A., Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1964, pp. 210—219.
- 17*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, изд-во «Наука», 1967.
18. Dawson J. M., Radiation from a Plasma в книге «Advances in Plasma Physics» (eds. A. Simon, W. B. Thompson), vol. 1, Wiley, New York, 1968 (см. перевод: Дж. Даусон, в книге «Физика высокотемпературной плазмы», изд-во «Мир», 1972, стр. 9).
19. Tidman D., Dupree T., Phys. Fluids, 5, 1860 (1965).
20. Birmingham T., Dawson J., Oberman C., Phys. Fluids, 5, 297 (1965).
21. Scheuer P. A. G., Monthly Notice Roy. Astron. Soc., 120, 231 (1960).
22. Griem H. R., Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill, New York, 1964.
23. Balescu R., Phys. Fluids, 3, 52 (1960).

24. *Lenard A.*, Ann. Phys. (N.Y.), 3, 390 (1960).
25. *Климонтович Ю. Л.*, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд-во МГУ, 1964.
26. *Dupree T. H.*, Phys. Fluids, 2, 696 (1961).
27. *Bernstein I. B., Trehan S. K., Weeninks M. P. H.*, Plasma Oscillation, II, Kinetic Theory of Waves in Plasmas, Nucl. Fusion, 4, 61 (1964).
28. *Davidson R. C.*, Methods in Nonlinear Plasma Theory, Academic Press, New York, 1971, § 14.6.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Bekefi G.*, Radiation Processes in Plasmas, Wiley, New York, 1966 (см. перевод: Дж. Бекефи, Радиационные процессы в плазме, изд-во «Мир», 1971).
- Боголюбов Н. Н.*, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
- Born M., Green H. S.*, A General Kinetic Theory of Liquids, Cambridge, London, 1949.
- Drummond W. E.*, Cyclotron radiation в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Plasma Diagnostic Techniques (eds. R. M. Huddleston and S. L. Leonard), Academic Press, New York, 1965 (см. перевод: Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда, изд-во «Мир», 1967).
- Kirkwood J. G.*, Journ. Chem. Physics, 14, 180 (1946); 15, 72 (1947).
- McDaniel E. W.*, Collision Phenomena in Ionized Gases, Wiley, New York, 1964 (см. перевод: И. Мац-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд-во «Мир», 1967).
- Oberman C.*, High Frequency Conductivity and the Emission and Absorption Coefficients of a Fully Ionized Plasma в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Thompson W. B.*, The Transport Equation for a plasma в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.
- Трубников Б. А.*, Столкновения частиц в полностью ионизованной плазме, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Госатомиздат, 1963.
- Yvon J.*, La théorie des fluids et l'équation d'état: actualités scientifiques et industrielles, Hermann et Cie, Paris, 1935.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ

Плазма состоит из заряженных частиц, движущихся под действием электромагнитных полей, которые создаются либо самими частицами плазмы, либо внешними источниками. В этом приложении приводятся решения уравнений движения отдельной заряженной частицы в различных постоянных и переменных электромагнитных полях. Здесь рассматриваются некоторые свойства плазмы, непосредственно вытекающие из уравнений движения для отдельных частиц, и обсуждаются адиабатические инварианты, которые используются для изучения движения в полях сложной геометрии.

Такое изучение движений заряженных частиц служит естественным связующим звеном между макроскопической гидродинамической и микроскопической кинетической теориями. В приближении холодной плазмы жидкий элемент следует по траектории отдельной заряженной частицы, поскольку все частицы элемента движутся согласованно. В то же время в горячей плазме движение отдельных частиц в конфигурационном пространстве и пространстве скоростей лишь после усреднения по ансамблю дает статистическое кинетическое уравнение, описывающее свойства плазмы. В любом случае необходимо уметь рассчитывать движение отдельных частиц в разнообразных ситуациях, возникающих в физике плазмы.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ описывает временную картину движения точечной частицы. Вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ определяется соотношением

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t). \quad (1.1.1)$$

Нерелятивистское уравнение движения частицы с массой m и зарядом q в электрическом и магнитном полях имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}}{c} \right). \quad (1.1.2)$$

Рассмотрим решения этих уравнений для некоторых конфигураций полей.

Задача 1.1.1. При какой энергии (в килоэлектронвольтах) существенны релятивистские поправки к уравнениям движения для электронов и ионов?

Задача 1.1.2. Какой вид будет иметь уравнение (1.1.2), если в него включить гравитационное поле? На каком расстоянии и за какое время гравитационное поле Земли могло бы ускорить электрон (ион) до энергии, при которой существенны релятивистские поправки [см. задачу (1.1.1)]?

§ 2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ОДНОРОДНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

2.1. Свободное движение ($\mathbf{E}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$)

В случае нулевых электрического и магнитного полей скорость \mathbf{v}_0 , импульс $m\mathbf{v}_0$ и кинетическая энергия $m\mathbf{v}_0^2/2$ являются интегралами движения.

2.2. Движение в электростатическом поле ($\mathbf{B}_0 = 0$, $\mathbf{E}_0 \neq 0$)

В случае электростатического и нулевого магнитного полей уравнение (1.1.2) имеет решение

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m} \mathbf{E}t. \quad (1.2.1)$$

Кинетическая энергия и скорость ее изменения равны (при $\mathbf{v}_0 = 0$)

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{(qEt)^2}{2m} \quad (1.2.2)$$

и

$$\frac{dW}{dt} = \frac{(qE)^2 t}{2m}. \quad (1.2.3)$$

2.3. Движение в постоянном магнитном поле ($\mathbf{E}_0 = 0$, $\mathbf{B}_0 \neq 0$)

В случае когда магнитное поле постоянно, а электрическое равно нулю, уравнение движения (I.1.2) принимает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0}{c}. \quad (1.2.4)$$

Скалярное умножение этого уравнения на $m\mathbf{v}$ дает

$$m\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = q \frac{\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]}{c} = 0. \quad (1.2.5)$$

Таким образом, кинетическая энергия частицы в однородном магнитном поле есть интеграл движения.

Определим единичный вектор в направлении магнитного поля

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|}. \quad (1.2.6)$$

Умножая скалярно уравнение (I.2.4) на $\hat{\mathbf{b}}$, можно получить компоненту ускорения частицы вдоль магнитного поля:

$$\dot{v}_{\parallel} = \frac{q}{m} \frac{\hat{\mathbf{b}} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{c} = 0, \quad (1.2.7)$$

где $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ — скорость частицы вдоль магнитного поля. Следовательно, мы показали, что скорость v_{\parallel} и кинетическая энергия частицы вдоль магнитного поля $\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2$ суть константы движения. Это означает, что движение частиц в направлении, перпендикулярном магнитному полю, можно без потери общности изучать в системе координат, в которой $v_{\parallel} = 0$. Поскольку полная энергия заряженной частицы в статическом магнитном поле сохраняется, энергия движения частицы в поперечном направлении также остается постоянной. Сохранение энергии означает, что

$$W = W_{\parallel} + W_{\perp} = \text{const}. \quad (1.2.8)$$

Скорость, перпендикулярная магнитному полю, определяется выражением

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{b}}. \quad (1.2.9)$$

Определяя единичный вектор в направлении скорости \mathbf{v}_{\perp} как

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{v_{\perp}}, \quad (1.2.10)$$

уравнение (I.2.4) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \dot{v}_{\perp} \hat{\mathbf{e}} + v_{\perp} \dot{\hat{\mathbf{e}}} = \omega_c v_{\perp} (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{b}}), \quad (1.2.11)$$

где $\omega_c = qB_0/mc$.

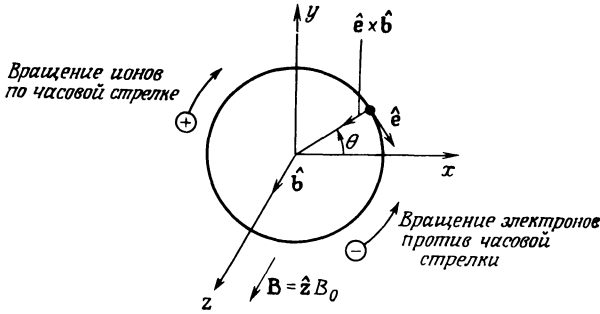
Умножая скалярно (I.2.11) на $\hat{\mathbf{e}}$, получаем

$$\hat{\mathbf{e}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} + v_{\perp} \hat{\mathbf{e}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} = 0. \quad (1.2.12)$$

Второй член в (I.2.12) равен нулю, следовательно, равен нулю и первый. Таким образом, кинетическая энергия поперечного движения есть интеграл движения, как этого и следовало ожидать на основании уравнений (I.2.7) и (I.2.8).

Используя соотношение (I.2.12), уравнение (I.2.11) можно переписать в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = \omega_c (\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{b}}). \quad (1.2.13)$$



Фиг. 206. Движение ионов и электронов в однородном постоянном магнитном поле.

Скалярное умножение уравнения (I.2.13) на $[\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{b}}]$ дает

$$(\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{b}}) \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}} = \omega_c. \quad (I.2.14)$$

С другой стороны, можно записать следующее соотношение между единичными векторами:

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = -(\hat{\mathbf{e}} \times \hat{\mathbf{b}}) \dot{\theta}, \quad (I.2.15)$$

где θ — угол, образуемый скоростью \mathbf{v}_\perp с некоторым фиксированным направлением, перпендикулярным направлению $\hat{\mathbf{b}}$. Для положительно заряженных частиц угол θ уменьшается со временем. Таким образом, положительно заряженные частицы вращаются по круговым орбитам в направлении по часовой стрелке, если магнитное поле направлено, как показано на фиг. 206, перпендикулярно плоскости листа на читателя. Простой способ запомнить направление вращения состоит в применении «правила буравчика» для тока с учетом того, что, как показывает формула (I.2.15), магнитное поле, создаваемое вращающейся частицей, направлено навстречу исходному полю¹⁾. Радиус-вектор заряженной частицы в магнитном поле как функция времени дается выражением

$$\mathbf{r}(t) = a_c [\hat{\mathbf{x}} \sin(\omega_c t - \phi) + \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega_c t - \phi)]. \quad (I.2.16)$$

Здесь магнитное поле направлено вдоль оси z , угол ϕ характеризует начальное положение частицы, а за начало координат выбран центр орбиты.

Размер круговой орбиты связан со скоростью v_\perp соотношением

$$v_\perp = a_c \omega_c, \quad (I.2.17)$$

где a_c — ларморовский радиус.

Магнитный момент заряженной частицы, вращающейся в магнитном поле, определяется как произведение создаваемого ею кругового тока на площадь, очерчиваемую орбитой. Магнитный момент можно выразить через энергию частицы и магнитное поле:

$$\mu = \text{Магнитный момент} = \left(\frac{q}{c} \frac{\omega_c}{2\pi} \right) \pi a_c^2 = \frac{W_\perp}{B}. \quad (I.2.18)$$

Магнитный момент представляет собой вектор, направленный противоположно исходному магнитному полю \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{W_\perp}{B} \hat{\mathbf{b}}. \quad (I.2.19)$$

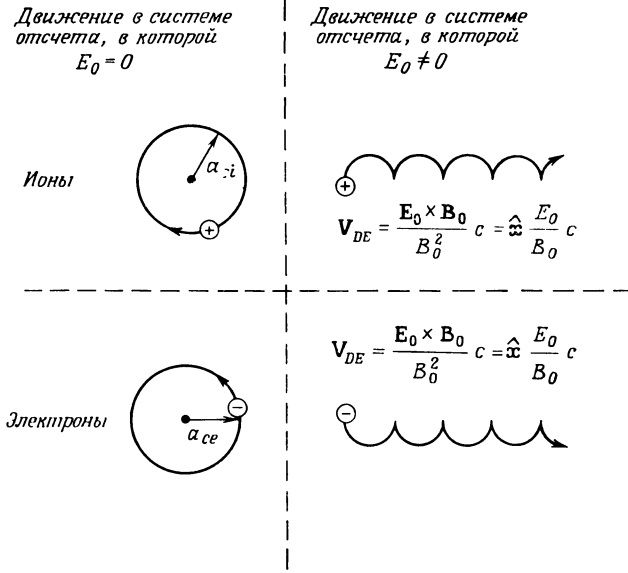
Задача I.2.1. Какова циклотронная частота и радиус орбиты электрона (протона) с энергией 250 кэВ в магнитном поле 30 кГс? Чему равна величина релятивистской поправки?

2.4. Движение в статических электрическом и магнитном полях ($\mathbf{E}_0 \neq 0$, $\mathbf{B}_0 \neq 0$)

Для изучения движения частиц в этом случае удобно разделить электрическое поле на параллельную и перпендикулярную магнитному полю составляющие:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{b}} E_{\parallel} + \mathbf{E}_\perp, \quad (I.2.20)$$

¹⁾ Двимагнитный эффект. — Прим. ред.



Фиг. 207. Движение ионов и электронов в скрещенных электрическом и магнитном полях (электрический дрейф).

Магнитное поле $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ направлено перпендикулярно плоскости фигуры на читателя; в картине справа вектор электрического поля лежит в плоскости фигуры и направлен вверх, $\mathbf{E} = |E_0 \hat{y}$.

причем $E_{||} = \mathbf{E} \cdot \hat{b}$, а $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \hat{b}) \hat{b}$. Подставляя (I.2.20) в уравнение (I.1.2) и умножая последнее скалярно на \hat{b} , получаем уравнение

$$\hat{b} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} E_{||} = \dot{v}_{||}. \tag{I.2.21}$$

Отсюда следует, что движение вдоль направления \mathbf{B} остается таким же, как в отсутствие магнитного поля.

Уравнение поперечного движения (для поперечной компоненты скорости) имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{c} \right). \tag{I.2.22}$$

Для решения этого уравнения удобно перейти к новой зависимой переменной $\bar{\mathbf{v}}_{\perp}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{v}_{\perp} = \bar{\mathbf{v}}_{\perp} + \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{|B_0|^2} c = \bar{\mathbf{v}}_{\perp} + \mathbf{V}_{DE}. \tag{I.2.23}$$

Величина

$$\mathbf{V}_{DE} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{|B_0|^2} c \tag{I.2.24}$$

представляет собой скорость дрейфа, называемого электрическим или $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфом в направлении, перпендикулярном как электрическому, так и магнитному полям. Она не зависит ни от заряда, ни от массы частицы.

Уравнение движения (I.2.22) для $\bar{\mathbf{v}}_{\perp}$ можно записать в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_{\perp} = \omega_c [\bar{\mathbf{v}}_{\perp} \times \hat{b}]. \tag{I.2.25}$$

Данное уравнение для $\bar{\mathbf{v}}_{\perp}$ совпадает с уравнением (I.2.11), описывающим поперечное движение частицы в однородном магнитном поле в отсутствие электрического. Движение заряженной частицы в движущейся (со скоростью \mathbf{V}_{DE}) системе координат показано на фиг. 207. Для получения движения в лабораторной системе координат следует сложить скорость дрейфа и скорость кругового движения. Этот процесс демонстрируется на фиг. 207. Дрейфовое движение не приводит ни к току, ни к разделению зарядов, поскольку и положительно и отрицательно заряженные частицы дрейфуют в одном и том же направлении с одной и той же скоростью. Однако, как показывает равновесное решение макроскопических уравнений [см. (3.8.7)], это движение вызывает поток вещества.

Задача I.2.2. Покажите, что циклоидное движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях может быть получено с помощью преобразования Лоренца в такую систему координат, в которой поперечная компонента электрического поля равна нулю, т. е.¹⁾

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) = 0. \quad (\text{I.2.26})$$

Задача I.2.3. Какова кинетическая энергия дрейфового движения электрона и иона в электрическом поле 10 кВ/см и магнитном поле 20 кГс? Положите $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

Задача I.2.4. Проведите выкладки, опущенные при выводе уравнения (I.2.25).

Задача I.2.5. Опишите движение заряженной частицы в однородных статическом магнитном и гравитационном полях и покажите, что это движение приводит к появлению суммарного электрического тока даже в случае, когда частицы с зарядами обоих знаков присутствуют в равных количествах.

Задача I.2.6. Частица с зарядом q и массой m рождается в состоянии покоя в скрещенных электрическом и магнитном полях и движется со скоростью дрейфа $c\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Покажите, что энергии вращения и дрейфового движения равны друг другу. Каким будет движение частицы, если электрическое поле медленно уменьшается до нуля? Чему будет равно после внезапного выключения электрического поля отношение конечной средней энергии к начальной энергии дрейфового движения?

Выражение (I.2.24) для скорости дрейфа заряженной частицы можно использовать для вывода скорости дрейфа частицы в гравитационном и магнитном полях. Умножим числитель и знаменатель в выражении (I.2.24) на заряд q . Заменяем далее силу $q\mathbf{E}$ в числителе на силу тяжести $m\mathbf{g}$ (или другую внешнюю силу). В результате получим скорость гравитационного дрейфа:

$$\mathbf{v}_{DG} = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} c. \quad (\text{I.2.27})$$

Эта скорость зависит от массы и знака заряда. Поэтому такое дрейфовое движение приводит к возникновению токов и разделению зарядов в плазме. Как было показано при рассмотрении рэлей-тейлоровской неустойчивости в гл. 5, гравитационное дрейфовое движение может приводить к неустойчивости.

§ 3. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

3.1. Движение в медленно меняющемся электрическом поле

$$[\mathbf{B}_0 = 0, \mathbf{E}(t) \neq 0]$$

В случае когда скорость частицы намного меньше скорости света, в уравнении движения (I.1.2) можно пренебречь магнитным полем, индуцируемым за счет медленного изменения электрического поля. Тогда уравнение (I.1.2) запишется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(t). \quad (\text{I.3.1})$$

Его решение имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q}{m} \int_0^t \mathbf{E}(t) dt. \quad (\text{I.3.2})$$

3.2. Движение частиц в медленно меняющемся магнитном поле

$$[\mathbf{E}_0 = 0, \mathbf{B}(t) \neq 0]$$

Медленное изменение магнитного поля означает, что изменение магнитного поля за циклотронный период мало, т. е.

$$\frac{1}{\omega_c} \left| \frac{\partial \mathbf{B} / \partial t}{B} \right| \ll 1. \quad (\text{I.3.3})$$

¹⁾ Полученные таким способом результаты будут верны и в релятивистском случае. — *Прим. ред.*

Однако отсюда не следует, что в уравнении движения можно пренебречь индуцированным электрическим полем. В самом деле, индуцированное электрическое поле может сообщать или отбирать энергию орбитального движения частицы. В предположении об отсутствии движения вдоль магнитного поля траектория частицы в медленно меняющемся магнитном поле приближенно описывается окружностью с медленно меняющимся радиусом. Изменение энергии поперечного движения частицы, когда она совершит полный оборот, равно

$$\Delta W_{\perp} = q \oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l}. \quad (I.3.4)$$

Используя уравнение Максвелла, это изменение можно записать в виде

$$\Delta W_{\perp} = \frac{1}{c} \left(q \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{s} \right). \quad (I.3.5)$$

Предполагая, что размер орбиты изменяется за один период незначительно, для изменения энергии поперечного движения получаем следующее приближенное выражение:

$$\Delta W_{\perp} \approx q\pi a_0^2 \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (I.3.6)$$

Изменение магнитного поля B за один период равно

$$\Delta B = \frac{2\pi}{\omega_c} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Таким образом, отсюда и из (I.3.6) следует, что изменение энергии поперечного движения за один оборот составляет

$$\Delta W_{\perp} = \frac{W_{\perp}}{B} \Delta B. \quad (I.3.7)$$

Уравнение (I.3.7) можно переписать следующим образом:

$$\Delta \left(\frac{W_{\perp}}{B} \right) = 0. \quad (I.3.8)$$

Отсюда видно, что величина W_{\perp}/B , равная магнитному моменту частицы (I.2.18), приближенно является интегралом движения в медленно меняющемся магнитном поле. Магнитный момент называют *адиабатическим инвариантом*, и во многих случаях его можно считать постоянным. Существует несколько адиабатических инвариантов, связанных с движением частиц (см. § 7 настоящего приложения).

Задача I.3.1. Восстановите выкладки, опущенные при выводе уравнения (I.3.8).

§ 4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ И БЫСТРО МЕНЯЮЩЕМСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ [$B_0 \neq 0$, $E(t) \neq 0$]

Если частица остается нерелятивистской, влиянием магнитного поля, индуцированного переменным электрическим полем, на движение частицы можно пренебречь. Для плоской волны $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} \exp[i(kx - \omega t)]$ это условие выполнено, если $qE/kt_0c^2 \ll 1$ и $\omega \neq \omega_c$. В дальнейшем анализе мы не будем учитывать индуцированного магнитного поля, поскольку электрические поля можно считать столь малыми, что написанное выше неравенство будет удовлетворено.

Согласно выражению (I.3.2), скорость движения вдоль магнитного поля равна

$$v_{\parallel}(t) = v_{\parallel}(0) + \frac{q}{m} \int_0^t E_{\parallel} \, dt. \quad (I.4.1)$$

Уравнение поперечного движения совпадает с (I.2.22), только теперь мы будем рассматривать величину E_{\perp} как зависящую от времени, т. е. $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp}(t)$. Таким образом,

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{m} \left[\mathbf{E}_{\perp}(t) + \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{c} \right]. \quad (I.4.2)$$

Умножая обе части этого уравнения справа векторно на \mathbf{B}_0 , получаем

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{c} \times \mathbf{B}_0 \right). \quad (I.4.3)$$

Раскрывая двойное векторное произведение, уравнение (I.4.3) можно записать в виде

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_0}{c} \mathbf{B}_0 - \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_0}{c} \mathbf{v}_{\perp} \right). \quad (I.4.4)$$

Беря производную от обеих частей уравнения движения (I.4.2)

$$\ddot{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{q}{m} \left(\dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \frac{\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \times \mathbf{B}_0}{c} \right), \quad (I.4.5)$$

из (I.4.4) можно исключить член $[\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \times \mathbf{B}_0]/c$. Поскольку из определения $\dot{\mathbf{v}}_{\perp}$ следует $\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$, мы имеем

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_0 = \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (I.4.6)$$

В результате из (I.4.4) и (I.4.5) получаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{v}}_{\perp} + \omega_c^2 \mathbf{v}_{\perp} = \frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}}_{\perp} + \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{1}{c} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}_0. \quad (I.4.7)$$

Это уравнение может быть решено для произвольной зависимости $\mathbf{E}(t)$, однако здесь мы рассмотрим лишь случай гармонической зависимости:

$$\mathbf{E}_{\perp}(t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{E}}_{\perp} e^{-i\omega t}). \quad (I.4.8)$$

Ищем решение в виде

$$\mathbf{v}_{\perp}(t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{v}}_{\perp} e^{-i\omega t}) + \mathbf{v}_{\perp h}(t), \quad (I.4.9)$$

где $\mathbf{v}_{\perp h}$ — скорость циклотронного движения, удовлетворяющая однородному уравнению (I.2.25). «Крышка» в соответствующих величинах означает, что рассматриваемые амплитуды являются комплексными числами. Дальнейший вывод аналогичен использованному выше при исследовании движения заряженной частицы в скрещенных \mathbf{E} - и \mathbf{B} -полях, а именно движение разделяется на циклотронное движение со скоростью $\mathbf{v}_{\perp h}$ и «дрейфовое движение» со скоростью $\text{Re}(\hat{\mathbf{v}}_{\perp} e^{-i\omega t})$, которое представляет собой отклик частицы на электрическое поле. Поскольку электрическое поле зависит от времени, обусловленные им скорости дрейфа также зависят от времени. Отметим, что здесь, как и в случае статического поля, можно выбрать начальные условия, соответствующие отсутствию циклотронного движения, а полное движение частицы описывать скоростью $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{V}_{DE} = \text{Re}(\hat{\mathbf{v}}_{\perp} e^{-i\omega t})$. Для этих начальных условий стационарное решение уравнения (I.4.7) для поперечной скорости имеет вид

$$\hat{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{-i\omega(q/m)\hat{\mathbf{E}}_{\perp} + (q/m)^2(\hat{\mathbf{E}}_{\perp} \times \mathbf{B}_0)/c}{\omega_c^2 - \omega^2}. \quad (I.4.10)$$

Направив \mathbf{B}_0 вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат и расписав (I.4.10) по компонентам, получим

$$\hat{v}_x = \frac{q}{m} \frac{-i\omega\hat{E}_x + \omega_c\hat{E}_y}{\omega_c^2 - \omega^2}, \quad (I.4.11)$$

$$\hat{v}_y = \frac{q}{m} \frac{-i\omega\hat{E}_y - \omega_c\hat{E}_x}{\omega_c^2 - \omega^2}, \quad (I.4.12)$$

$$\hat{v}_z = i \frac{q}{m} \frac{\hat{E}_z}{\omega}. \quad (I.4.13)$$

Скорость и электрическое поле связаны уравнением

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{E}}, \quad (I.4.14)$$

в котором тензор \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = -\frac{q}{m} \begin{bmatrix} \frac{i\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} & \frac{-\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ \frac{\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\omega} \end{bmatrix}. \quad (I.4.15)$$

Задача I.4.1. Проверьте, правильно ли записаны компоненты тензора (I.4.15).

Из уравнений (I.4.14) и (I.4.15) следует, что вынужденное движение частицы в однородном электрическом поле E_x , гармонически зависящем от времени и перпендикулярном постоянному магнитному полю, представляет собой эллипс, большая и малая полуоси которого зависят от отношения циклотронной и вынуждающей частот. Это можно продемонстрировать, найдя решение для координат x и y дрейфующей частицы как функцию времени и исключив время, чтобы представить траекторию частицы в обычной форме уравнения эллипса, а именно

$$x^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 y^2 = \frac{[(q/m) E_x]^2}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2}. \quad (I.4.16)$$

В случае низкой частоты ($\omega \ll \omega_c$) электрического поля эллипс вытягивается вдоль оси x , а при высокой частоте ($\omega \gg \omega_c$) — вдоль оси y . В пределе $\omega = \omega_c$ траектория становится круговой, но неограниченной. В некоторых случаях (в частности, для холодной плазмы) амплитуда теплового циклотронного вращения пренебрежимо мала и формулы (I.4.11) — (I.4.16) эффективно описывают полное движение частиц.

Задача I.4.2. Исходя из выражений (I.4.11) и (I.4.12), выведите уравнение (I.4.16).

Задача I.4.3. а) Выведите выражение для изменения кинетической энергии за один период вращения электрона в постоянном магнитном поле \mathbf{B}_0 и перпендикулярном направлению \mathbf{B}_0 электрическом поле $\mathbf{E} = E_0 \sin \omega_c t$, который в начальный момент времени находился в покое.

б) Решите ту же задачу для частицы с ненулевой начальной скоростью.

Задача I.4.4. Чему равно максимальное увеличение энергии за один период вращения электрона, если $E_0 = 10^4$ В/см, $B_0 = 3000$ Гс, а $\omega = \omega_c$.

В случае медленно меняющегося электрического поля из уравнения (I.4.7) можно найти другое решение для поперечного движения заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. В наименьшем порядке ¹⁾ частица совершает дрейфовое и циклотронное движение, описываемое формулами (I.2.23) — (I.2.25). По мере увеличения электрического поля скорость дрейфа возрастает. Ведущий центр циклотронной орбиты частицы может рассматриваться как новая частица, на которую действует сила $m \dot{\mathbf{V}}_{DE}$. Эта сила приводит к новой скорости дрейфа, определяемой выражением

$$\mathbf{v} = \frac{m}{q} \frac{\dot{\mathbf{V}}_{DE} \times \mathbf{B}_0 c}{|\mathbf{B}_0|^2}. \quad (I.4.17)$$

Поскольку B_0 не зависит от времени, $\dot{\mathbf{V}}_{DE} = c \dot{\mathbf{E}}/B_0$ и (I.4.17) можно записать в виде

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{V}_{\text{поляриз}} = \frac{m}{q} \frac{\dot{\mathbf{E}} c^2}{|\mathbf{B}_0|^2}. \quad (I.4.18)$$

Дрейф со скоростью $\mathbf{V}_{\text{поляриз}}$ называется поляризационным и представляет собой дрейфовое движение ведущего центра в направлении приложенного электрического поля. Полное движение частицы складывается из циклотронного вращения, электрического дрейфа и поляризационного дрейфа.

Скорость поляризационного дрейфа зависит от знака заряда, и этот вид дрейфа приводит к появлению тока

$$\mathbf{J}_{\text{поляриз}} = nq \mathbf{V}_{\text{поляриз}} = \frac{nm c^2}{|\mathbf{B}_0|^2} \dot{\mathbf{E}}_{\perp}. \quad (I.4.19)$$

Информацию о поляризационном дрейфе можно также получить из низкочастотного предела выражения (I.4.15). В самом деле, полагая, например, $\mathbf{E} = E_x \hat{x}$ и $\omega \ll \omega_c$,

¹⁾ По скорости изменения электрического поля. — *Прим. ред.*

из (I.4.15) можно вывести следующее выражение:

$$\mathbf{v} = -\frac{q}{m} \frac{i\omega E_x}{\omega_c^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{qE_x}{m\omega_c} \hat{\mathbf{y}}.$$

Учитывая, что $\dot{E}_x = -i\omega E_x$, и сравнивая это выражение для скорости с (I.4.18), нетрудно заметить, что первый член в нем соответствует поляризованному дрейфу, а второй — $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфу.

§ 5. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

На движение частицы в присутствии электромагнитной волны достаточно большой амплитуды оказывает влияние индуцированное магнитное поле, связанное с быстро меняющимся электрическим полем волны. В данном параграфе мы рассмотрим движение заряженной частицы в такой волне с удержанием лишь наименьшей по v/c релятивистской поправки, предполагая при этом, что статические электрические и магнитные поля отсутствуют. Плоская волна распространяется в направлении оси z , т. е. $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_x \cos(kz - \omega t)$, и имеет компоненты полей E_x и B_y . Запишем уравнение движения

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right). \quad (\text{I.5.1})$$

Поскольку для плоской волны в вакууме $E_x = B_y$, уравнение (I.5.1) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{qE_x}{mc} (\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{U} \times \hat{\mathbf{y}}) \cos(kz - \omega t), \quad (\text{I.5.2})$$

здесь $\mathbf{U} = \mathbf{v}/c$ — безразмерная скорость. Распишем уравнение (I.5.2) отдельно для каждой компоненты скорости:

$$\dot{U}_x = \frac{qE_x}{mc} (1 - U_z) \cos(kz - \omega t), \quad (\text{I.5.3})$$

$$\dot{U}_y = 0, \quad (\text{I.5.4})$$

$$\dot{U}_z = \frac{qE_x}{mc} U_x \cos(kz - \omega t). \quad (\text{I.5.5})$$

Уравнение (I.5.3) можно решить приближенно в предположении, что $|U_z| \ll 1$. Напомним, что $\cos(kz - \omega t) = \cos(k \int U_z dt - kct) \approx \cos \omega t$. В результате с принятой точностью получаем следующее решение:

$$\dot{U}_x \approx \frac{qE_x}{mc} \cos \omega t, \quad (\text{I.5.6})$$

Интегрирование по времени дает

$$U_x \approx A \sin \omega t, \quad (\text{I.5.7})$$

$$U_z \approx A^2 \frac{1}{2} \sin^2 \omega t, \quad (\text{I.5.8})$$

где параметр $A = qE_x/\omega mc$. Среднее значение z -компоненты скорости равно

$$\langle U_z \rangle = \frac{1}{4} A^2. \quad (\text{I.5.9})$$

Отсюда видно, что приближение $|U_z| \ll 1$ оправдано, если частица остается нерелятивистской, т. е. $A \ll 1$. За вычетом этого среднего значения, U_z осциллирует с частотой 2ω :

$$U_z - \langle U_z \rangle = \left(\frac{A}{2} \right)^2 \left(\sin^2 \omega t - \frac{1}{2} \right) = - \left(\frac{A}{2} \right)^2 \cos 2\omega t. \quad (\text{I.5.10})$$

Задача I.5.1. Восстановите опущенные выкладки в вышеприведенном выводе и найдите, при каких условиях использованное приближение становится неприменимым. Какова средняя скорость в направлении потока излучения частотой $\omega \approx 10^{10} \text{ с}^{-1}$ и плотностью мощности 10^6 Вт/см^2 ? Чему при этом равно максимальное значение скорости периодического движения частицы? Нарисуйте примерную траекторию частицы.

Задача 1.5.2. Покажите, что дифференциальные уравнения движения частицы, учитывающие релятивистские поправки к массе и тот факт, что частица проходит за период вращения определенную часть длины волны, имеют вид

$$\frac{dU_x}{d\theta} = F(1 - U_z - U_x^2)(1 - U_x^2 - U_z^2)^{1/2}, \quad (1.5.11)$$

$$\frac{dU_z}{d\theta} = FU_x(1 - U_z)(1 - U_x^2 - U_z^2)^{1/2}, \quad (1.5.12)$$

$$\frac{dX}{d\theta} = U_x, \quad (1.5.13)$$

$$\frac{dZ}{d\theta} = U_z. \quad (1.5.14)$$

В этих уравнениях введены следующие обозначения:

$$F = A \cos(\theta - Z + \phi),$$

$$U_{x,z} = \frac{v_{x,z}}{c}, \quad X = \frac{\omega x}{c},$$

$$Z = \frac{\omega z}{c}, \quad A = \frac{qE}{km_0c^2},$$

$$\theta = \omega t, \quad \omega = kc.$$

На фиг. 208 показаны скорости движения заряженной частицы, покоящейся в начальный момент времени, в поле волны большой амплитуды для некоторых значений параметра A . Частица приобретает скорость в направлении распространения под действием силы $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, создаваемой высокочастотным магнитным полем. Скорость параллельного (в направлении B) движения можно найти из приближенного соотношения $c \Delta m v_{||} = \Delta^{1/2} m v_{\perp}^2$.

Задача 1.5.3. Покажите, что в пределе $|U_z| \ll 1$ сечение неупругого рассеяния на удвоенной частоте определяется выражением $\sigma(2\omega) = \sigma(\omega) |U_{x,\max}|^2$, где $\sigma(\omega) = (8\pi/3) r_0^2$ — томсоновское сечение, $r_0 = e^2/m_0c^2$ — классический радиус электрона.

Задача 1.5.4. Покажите, что для заряженной частицы, начинающей движение при некоторой начальной фазе ϕ электрического поля, так что $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x \cos(\omega t + \phi)$, среднее значение скорости равно

$$\langle U_z \rangle = \frac{A^2}{4} (1 + 2 \sin^2 \phi).$$

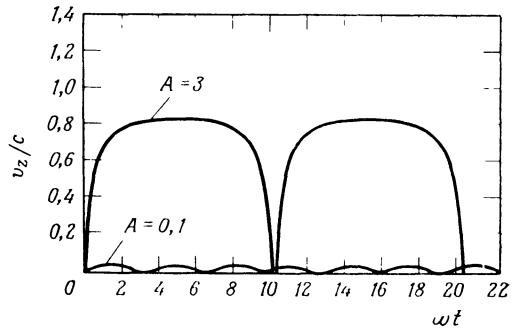
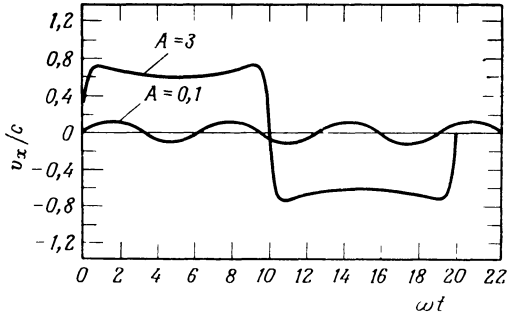
Задача 1.5.5. Релятивистское уравнение движения частицы с зарядом q и массой m записывается в виде

$$\frac{d}{dt} [m\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} \right]. \quad (1.5.15)$$

Покажите, выразив релятивистскую массу через массу покоя, т. е. $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, что уравнение (1.5.15) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{\gamma m_0} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{c} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)]}{c^2} \right\}, \quad (1.5.16)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.



Фиг. 208. Скорость движения частицы в поле сильной электромагнитной волны [1].

Приведены x - и z -компоненты скорости относительно скорости света c . Плоская электромагнитная волна распространяется в направлении оси z и поляризована в направлении оси x : $E_x = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$. Кривые приведены для различных значений параметра $A = qE_0/km_0c^2$.

Скорость параллельного (в направлении B) движения можно найти из приближенного соотношения $c \Delta m v_{||} = \Delta^{1/2} m v_{\perp}^2$.

§ 6. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОСТОЯННОМ НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Составляющие градиента магнитного поля образуют тензор, имеющий в общем случае девять компонент. В прямоугольной декартовой системе координат соответствующая матрица записывается в виде

$$\nabla \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ следует, что среди диагональных компонент лишь две независимы. Чтобы изучить влияние градиента магнитного поля на движение частицы, мы рассмотрим ряд упрощенных задач, в которых члены разного типа, связанные с определенным дрейфовым движением, следует учитывать по отдельности. Для получения полной картины движения мы должны затем сложить дрейфы различного вида. К простым случаям относятся те, в которых магнитное поле медленно меняется в пространстве. Условие медленности можно записать в виде

$$\left| \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B}}{\omega_c B} \right| \ll 1.$$

Это условие означает, что магнитное поле мало меняется на расстоянии порядка ларморовского радиуса при движении частицы поперек магнитного поля, т. е.

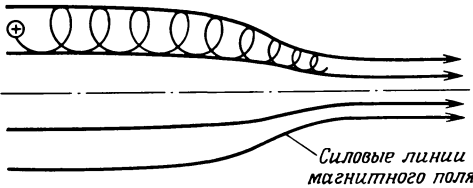
$$\left| \frac{\mathbf{v}_\perp \cdot \nabla \mathbf{B}}{\omega_c B} \right| \ll 1,$$

а в случае движения частицы вдоль магнитного поля — то, что магнитное поле, которое «видит» частица, мало меняется за время порядка циклотронного периода, т. е.

$$\left| \frac{\mathbf{v}_\parallel \cdot \nabla \mathbf{B}}{\omega_c B} \right| \ll 1.$$

6.1. Магнитное поле с продольным градиентом¹⁾

Рассмотрим заряженную частицу, которая вращается по почти круговой орбите вблизи оси симметрии в азимутально-симметричном магнитном поле, как показано на фиг. 209.



В цилиндрических координатах условие равенства нулю дивергенции магнитного поля записывается следующим образом:

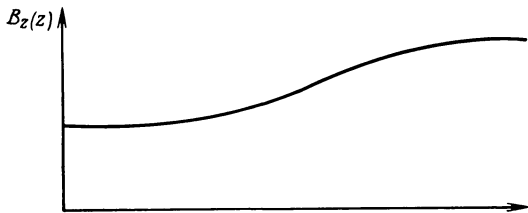
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (I.6.1)$$

Интегрируя уравнение (I.6.1), получаем компоненту B_r , выраженную через $B_z(z)$, в виде

$$r B_r = - \int_0^{r'} r' \frac{\partial B_z}{\partial z} dr', \quad (I.6.2)$$

поскольку $r B_r = 0$ при $r = 0$. Считаем, что изменение B_z с z мало; это позволяет вынести производную из-под интеграла. Тогда (I.6.2) принимает вид

$$B_r = - \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (I.6.3)$$



Фиг. 209. Движение заряженной частицы в магнитном поле с продольным градиентом.

На вращающуюся частицу со стороны радиального магнитного поля действует

¹⁾ Этот термин не является математически корректным, однако он широко распространен. Имеется в виду поле, напряженность которого изменяется в основном вдоль поля. — Прим. ред.

сила $(1/c) v_{\theta} B_r$. Поскольку $v_{\theta} = -(q/|q|) |v_{\perp}|$, эта сила равна

$$F_z = -\frac{qv_{\theta} B_r}{c} = \frac{|q| v_{\perp} B_r}{c}. \quad (I.6.4)$$

Подставляя сюда B_r из (I.6.3), полагая $r = v_{\perp}/\omega_c$ и используя обозначение $W_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2$, получаем

$$F_z = -\frac{W_{\perp}}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (I.6.5)$$

Обобщая это выражение, можно вычислить силу, параллельную локальному магнитному полю,

$$F_{\parallel} = -\mu \cdot \nabla B. \quad (I.6.6)$$

Другой способ описания движения заряженной частицы в неоднородном магнитном поле состоит в использовании приближенного интеграла движения $\mu = W_{\perp}/B$ и интеграла движения W (равного полной энергии). Рассмотрим снова ситуацию, схематически изображенную на фиг. 209, когда частица движется в область возрастающей плотности магнитного потока. Обозначим через $B(0)$ магнитное поле в некоторой точке, где частица обладает как продольной энергией W_{\parallel} , так и поперечной W_{\perp} . При движении частицы в область возрастающего магнитного поля полная энергия W сохраняется (поскольку \mathbf{F} перпендикулярно \mathbf{v}). Сохраняется также магнитный момент μ , так как в системе отсчета, движущейся вместе с частицей, магнитное поле медленно возрастает во времени. Поэтому можно записать следующие соотношения:

$$W(0) = W_{\perp}(0) + W_{\parallel}(0) = W(z) = W_{\perp}(z) + W_{\parallel}(z) \quad (I.6.7)$$

и

$$\mu = \frac{W_{\perp}(0)}{B(0)} = \frac{W_{\perp}(z)}{B(z)}. \quad (I.6.8)$$

Разрешая (I.6.7) и (I.6.8) относительно энергии продольного движения, получаем

$$W_{\parallel}(z) = W_{\parallel}(0) - W_{\perp}(0) \left[\frac{B(z)}{B(0)} - 1 \right]. \quad (I.6.9)$$

Таким образом, при движении частицы в область возрастающего магнитного поля параллельная компонента ее скорости уменьшается и в некоторой точке может обратиться в нуль. Положение этой точки, называемой *точкой поворота*, зависит от отношения начальных энергий продольного и поперечного движений.

Задача I.6.1. Обозначив через R отношение $B(z)/B(0)$, покажите, что если при $z=0$ вектор скорости составляет с направлением магнитного поля угол $\theta = \arctg(v_{\perp}/v_{\parallel})$, то частица отразится в той точке z , в которой выполнено условие

$$\sin \theta \geq \frac{1}{\sqrt{R(z)}}. \quad (I.6.10)$$

Задача I.6.2. Покажите, что угол, который вектор скорости составляет с направлением локального магнитного поля, преобразуется согласно соотношению

$$\sin \theta' = \sqrt{R(z)} \sin \theta, \quad (I.6.11)$$

где θ' — угол в точке z , а θ — угол в точке $z=0$.

Задача I.6.3. Покажите, что магнитный поток, охватываемый циклотронной орбитой частицы, при постоянном магнитном моменте остается постоянным.

Задача I.6.4. До какого максимального значения электрического поля справедлива формула

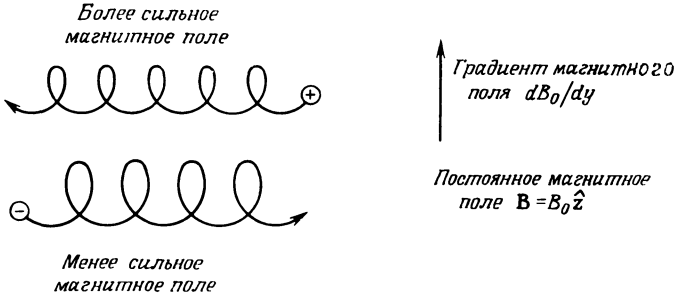
$$v_{DE} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c,$$

если магнитное поле равно 10^4 Гс?

6.2. Магнитное поле с поперечным градиентом ¹⁾

Рассмотрим магнитное поле с прямыми силовыми линиями и с градиентом в направлении, перпендикулярном силовым линиям. В таком поле частица дрейфует перпендикулярно силовым линиям и направлению градиента поля. Это движение частицы

¹⁾ См. примечание на стр. 486.— *Прим. ред.*



Фиг. 210. Движение заряженной частицы в магнитном поле с поперечным градиентом (градиентный дрейф).

Магнитное поле $\mathbf{V} = B_0 \hat{z}$ направлено на читателя. Показано, что более сильное поле вызывает движение частицы на орбите с меньшим радиусом кривизны, а слабое поле — с большим радиусом кривизны.

нетрудно понять, заметив что в большем поле ларморовский радиус ее орбиты меньше; на той же части траектории, где частица движется в меньшем поле, радиус орбиты возрастает. Из-за такого характера движения траектория становится незамкнутой и возникает дрейф, как показано на фиг. 210.

Задача I.6.5. Выведите приближенное выражение для скорости дрейфа при поперечном градиенте магнитного поля, полагая, что магнитное поле меняется скачком на линии, пересекающей орбиту, и сравните результат с полученным ниже.

Скорость градиентного дрейфа можно найти посредством разложения магнитного поля в ряд Тейлора относительно центра орбиты, движение которого предполагается медленным по сравнению с орбитальным движением частицы. Поле в месте нахождения частицы выражается через поле в центре циклотронной орбиты следующим образом:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r} = \mathbf{a}_c) = \hat{\mathbf{b}} [B(0) + \mathbf{a}_c(t) \cdot \nabla B(0)]. \quad (I.6.12)$$

В нашем обсуждении мы принимаем, что вектор ∇B содержит лишь поперечный градиент. Уравнение движения записывается в виде

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \omega_c \left[\mathbf{v}_{\perp} \times \hat{\mathbf{b}} \left(1 + \frac{\mathbf{a}_c \cdot \nabla B}{B} \right) \right]. \quad (I.6.13)$$

Для решения этого уравнения вновь разложим скорость на периодическую часть $\bar{\mathbf{v}}_{\perp}$ и постоянную скорость дрейфа \mathbf{V}_D :

$$\mathbf{v}_{\perp} = \bar{\mathbf{v}}_{\perp} + \mathbf{V}_D. \quad (I.6.14)$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение (I.6.13), получаем

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_{\perp} = \omega_c \left[\bar{\mathbf{v}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{b}} \left(1 + \frac{\mathbf{a}_c \cdot \nabla B}{B} \right) + \mathbf{V}_D \times \hat{\mathbf{b}} \left(1 + \frac{\mathbf{a}_c \cdot \nabla B}{B} \right) \right]. \quad (I.6.15)$$

Используя неравенство

$$\left| \frac{\mathbf{a}_c \cdot \nabla B}{B} \right| \ll 1$$

и пренебрегая неоднородностью магнитного поля, можно найти приближенное решение уравнения (I.6.15) в виде

$$\bar{\mathbf{v}}_{\perp} = -(\mathbf{a}_c \times \hat{\mathbf{b}}) \omega_c. \quad (I.6.16)$$

Подставляя это решение в уравнение (I.6.15), получаем в первом порядке

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_{\perp} = \omega_c \left[-[\mathbf{a}_c \times \hat{\mathbf{b}}] \times \hat{\mathbf{b}} \left(1 + \frac{2\mathbf{a}_c \cdot \nabla B}{B} \right) \omega_c + (\mathbf{V}_D \times \hat{\mathbf{b}}) \right]. \quad (I.6.17)$$

Усреднение этого выражения по времени ($\langle \dot{\bar{\mathbf{v}}}_{\perp} \rangle = \langle \mathbf{a}_c \rangle = 0$, $\langle \mathbf{a}_c^2 \rangle = 1/2 a_c^2$) дает

$$0 = -a_c^2 \omega_c \frac{\nabla B}{B} + \mathbf{V}_D \times \hat{\mathbf{b}}. \quad (I.6.18)$$

Чтобы определить скорость градиентного дрейфа, разрешим уравнение (I.6.18) относительно скорости V_D , умножив его векторно на \hat{b} . В результате получим

$$V_D, \text{ град} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{qB} \frac{\hat{b} \times \nabla B}{B} c = \frac{\mu}{q} \frac{\hat{b} \times \nabla B}{B} c. \quad (\text{I.6.19})$$

Заметим, что скорость градиентного дрейфа зависит от знака заряда, поэтому градиентный дрейф может привести к появлению токов и разделению зарядов в плазме.

Задача I.6.6. Проведите выкладки, опущенные при выводе уравнения (I.6.18), и проверьте справедливость сделанных приближений.

6.3. Магнитное поле с изогнутыми силовыми линиями

Рассмотрим магнитное поле с изогнутыми силовыми линиями, как показано на фиг. 211. Такое поле имеет, вообще говоря, отличный от нуля градиент в направлении, перпендикулярном силовым линиям поля, что приводит к возникновению градиентного дрейфа, который мы только что рассматривали выше. Кроме того, если частица имеет конечную скорость вдоль магнитного поля, на нее действует центробежная сила, обусловленная кривизной магнитных силовых линий, и частица дрейфует в направлении, перпендикулярном направлению радиуса кривизны R и магнитного поля. Этот дрейф возникает в результате действия центробежной силы на ведущий центр частицы при его движении вдоль силовой трубки. Действие центробежной силы приводит к специфическому центробежному дрейфу таким же образом, как приводит к дрейфу действие произвольной силы. Скорость этого дрейфа равна

$$V_{DC} = \frac{1}{q} \frac{F_c \times B}{|B|^2} c. \quad (\text{I.6.20})$$

Центробежная сила F_c записывается в виде

$$F_c = \frac{mv_{\parallel}^2}{|R|^2} R. \quad (\text{I.6.21})$$

Подставляя выражение (I.6.21) в (I.6.20), получаем

$$V_{DC} = \frac{m}{q} \left| \frac{v_{\parallel}}{R} \right|^2 \frac{R \times B}{|B|^2} c. \quad (\text{I.6.22})$$

Используя соотношение между радиусом кривизны силовой трубки и градиентом магнитного поля, скорость центробежного дрейфа можно выразить целиком через параметры магнитного поля:

$$V_{DC} = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} c (\hat{b} \times \nabla B). \quad (\text{I.6.23})$$

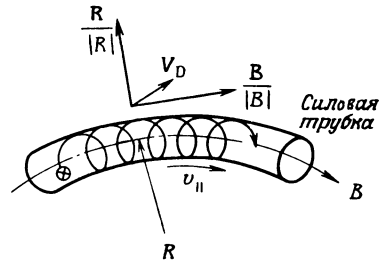
Скорость полного дрейфа заряженной частицы в изогнутом магнитном поле складывается из скорости градиентного дрейфа [см. (I.6.19)] и скорости центробежного дрейфа [см. (I.6.23)]:

$$V_D = \frac{mc}{2qB^2} (v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2) (\hat{b} \times \nabla B) = \frac{\mu c}{qB} \left(1 + \frac{2v_{\parallel}^2}{v_{\perp}^2} \right) (\hat{b} \times \nabla B).$$

Отметим, что скорость центробежного дрейфа зависит от знака заряда, поэтому он может приводить к появлению тока и разделению зарядов в плазме.

§ 7. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

В п. 3.2 было показано, что в медленно меняющемся магнитном поле существует приближенный интеграл движения заряженной частицы. Эта величина представляет собой *магнитный момент* и обозначается через μ ($= W_{\perp}/B$). Такого рода приближенные посто-



Фиг. 211. Движение заряженной частицы в магнитном поле с изогнутыми силовыми линиями (центробежный дрейф). R — радиус кривизны силовой трубки.

янные называют адиабатическими инвариантами ¹⁾. В некоторых случаях с движением частицы может быть связан более чем один адиабатический инвариант.

В частности, при движении частицы в магнитном поле пробкотрона (см. фиг. 8) существуют три адиабатических инварианта. Первый из них — магнитный момент

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B}, \quad (I.7.1)$$

который выражает тот факт, что величина магнитного потока через площадь, очерчиваемую круговой орбитой частицы, остается постоянной. В самом деле, $p_{\perp}^2/2Bm_0$ — первый адиабатический инвариант, который для частиц с малой энергией становится равным W_{\perp}/B .

Второй приближенный интеграл движения называют *продольным инвариантом*. Он определяется выражением

$$J = \int v_{\parallel} ds, \quad (I.7.2)$$

где интеграл вычисляется между точками поворота, в которых $v_{\parallel} = 0$. Этот инвариант означает, что для частицы, совершающей колебания между точками поворота в пробкотроне, величина J примерно постоянна, если частота качаний намного меньше циклотронной частоты ²⁾.

Третий адиабатический инвариант обозначают через Φ . Он выражает тот факт, что если частица медленно дрейфует поперек магнитного поля в пробкотроне, то она движется по замкнутой бочкообразной поверхности, магнитный поток через которую сохраняется постоянным.

Последний инвариант оказывается полезным при изучении полей, изменяющихся во времени, так как с его помощью можно предсказать изменение формы плазменного образования в случае, когда временной масштаб изменения поля велик по сравнению с временем оборота частицы при дрейфовом движении.

Задача I.7.1. Определите временные масштабы для каждого из трех видов периодического движения заряженной частицы в магнитном поле Земли, при которых любую из трех величин μ , J и Φ можно считать инвариантом. Согласуется ли это движение с тем фактом, что заряд может удерживаться в радиационных поясах ван Аллена?

Задача I.7.2. Покажите, что величина J постоянна в первом порядке ³⁾ ($\Delta J = 0$) для частицы в магнитном поле пробкотрона.

§ 8. СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ, СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ ТЕОРИИ ОРБИТ

Рассмотрения дрейфовых движений отдельных частиц недостаточно для полного описания плазмы. Однако с их помощью можно наглядно показать некоторые макроскопические свойства плазменного состояния.

8.1. Намагничивание плазмы

Рассмотрим поверхность S , ограниченную кривой C , расположенную в ионизованном газе с подвижными электронами (тогда как необходимые для нейтральности ионы будем считать неподвижными). Каждый электрон, вращающийся по своей орбите, обладает «микроскопическим» магнитным моментом и участвует в создании макроскопической намагниченности среды. Намагниченность определяется числом электронов, орбиты которых «наматываются» на кривую C и которые дают вклад в ток, протекающий через S . Если n — число токовых петель в единичном объеме, то средний ток по поверхности S равен

$$I = c \int_C n \mu \cdot ds = c \int_C \mathbf{M} \cdot ds = c \int_S [\nabla \times \mathbf{M}] \cdot da. \quad (I.8.1)$$

¹⁾ Точность, с которой сохраняются адиабатические инварианты, оценена в работе Калсруда [2] на примере гармонического осциллятора с медленно меняющейся частотой (см. также статью Крускала [3]), описываемого уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0.$$

²⁾ С помощью этого инварианта можно изучать движение частицы и в случае, если магнитное поле пробкотрона не обладает азимутальной симметрией. — *Прим. ред.*

³⁾ По параметру, описывающему медленность изменения магнитного поля. — *Прим. ред.*

При классическом рассмотрении магнитных материалов вводят фиктивную плотность тока намагничивания \mathbf{J}' , связанную с вектором намагничивания \mathbf{M} соотношением

$$\mathbf{J}' = c \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.8.2)$$

Записывая для вектора магнитной индукции выражение

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \quad (1.8.3)$$

получаем в случае плазмы нелинейную связь между \mathbf{B} и \mathbf{H} , поскольку величина \mathbf{M} пропорциональна $1/B$. Таким образом,

$$\mathbf{M} = -n \frac{W_{\perp}}{|B|^2} \mathbf{B} \quad (1.8.4)$$

(здесь n — число частиц в единичном объеме).

8.2. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Плотность тока поляризации

$$\mathbf{J}_{\text{поляриз}} = nq \mathbf{V}_{\text{поляриз}} = \frac{nmc^2}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.8.5)$$

Из уравнения Максвелла, записанного в виде

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{поляриз}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \left(1 + \frac{4\pi nmc^2}{B^2} \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.8.6)$$

следует, что диэлектрическая проницаемость плазмы равна

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi nmc^2}{B^2}. \quad (1.8.7)$$

8.3. Магнитное давление

Понятие о давлении магнитного поля можно ввести, рассматривая движение частиц в простом случае магнитного поля с прямыми силовыми линиями и поперечным градиентом.

Из уравнений Максвелла имеем

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_D + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}', \quad (1.8.8)$$

где \mathbf{J}_D — плотность тока, связанная с градиентным дрейфом, равна

$$\mathbf{J}_D = nq \mathbf{V}_D = n\mu \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \nabla B}{|B|} c, \quad (1.8.9)$$

а \mathbf{J}' — плотность тока намагничивания:

$$\mathbf{J}' = -c \nabla \times \hat{\mathbf{b}} (n\mu) = c \hat{\mathbf{b}} \times \nabla (n\mu) = \left[\frac{\hat{\mathbf{b}}}{|B|} \times \nabla (nW_{\perp}) - n\mu \frac{\hat{\mathbf{b}} \times \nabla B}{|B|} \right] c. \quad (1.8.10)$$

Подставляя выражения для токов (1.8.9) и (1.8.10) в уравнение (1.8.8), получаем

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{b}} \times \nabla |B| = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{\hat{\mathbf{b}}}{|B|} \times \nabla nW_{\perp} \right) c. \quad (1.8.11)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} + nW_{\perp} \right) = 0, \quad (1.8.12)$$

из которого следует, что в равновесии

$$\frac{B^2}{8\pi} + p_{\perp} = \text{const}, \quad (1.8.13)$$

здесь $p_{\perp} = nW_{\perp}$ — поперечное давление.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Jory H. R., Trivelpiece A. W.*, Journ. Appl. Phys., 39, 3053 (1968).
2. *Kulsrud R.*, Phys. Rev., 106, (1957).
3. *Kruskal M. D.*, Advanced Theory of Gyration Particles в книге «Plasma Physics», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1965.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Chandrasekhar S.*, Plasma Physics, University of Chicago, Chicago, 1960.
2. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950 (см. перевод: *Г. Голдстейн*, Классическая механика, Физматгиз, 1957).
3. *Lichtenberg A. J.*, Phase-Space Dynamics of Particles, Wiley, New York, 1969.
4. *Northrop T. G.*, The Adiabatic Motion of Charged Particles, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: *Т. Нортрон*, Адиабатическая теория движения заряженных частиц, Атомиздат, 1967).
5. *Longmire C. L.*, Elementary Plasma Physics, Interscience, New York, 1963 (см. перевод: *К. Лонгмайр*, Физика плазмы, Атомиздат, 1966).
6. *Spitzer L., Jr.*, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York, 1962 (см. перевод: *Л. Спитцер*, Физика полностью ионизованного газа, изд-во «Мир», 1965).

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ; НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ; КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

Большинство физических величин могут быть описаны либо как скаляры, либо как векторы, либо как тензоры второго порядка. Знать свойства таких величин и уметь обращаться с ними необходимо и научным работникам, и инженерам. Строгое рассмотрение этих величин и соответствующие доказательства требуют знания математики в значительном объеме. Читатель может получить такие математические сведения в следующих книгах

Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953, Ch. I (см. перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, т. I, 1958).

Jeffreys H., Cartesian Tensors, Cambridge, N.Y., 1953.

Pipes L. A., Applied Mathematics for Engineers and Physicists, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

Magnus W., Oberhettinger F., Functions of Mathematical Physics, Chelsea, N.Y., 1954.

Jahnke E., Emde F., Tables of Functions, Dover, N.Y., 1945 [см. также: Янке Е., Эмде Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), изд-во «Наука», 1968].

В данном приложении для удобства читателя приведен краткий перечень основных свойств рассматриваемых величин. Чтобы различать эти величины в записываемых выражениях, мы используем следующие обозначения (следите за шрифтом):

S — скаляр (температура, энергия, время и т. п.),

A — вектор (скорости, импульса, силы и т. п.),

T — тензор (сдвига, потока импульса и т. п.).

Действия над скалярами обладают

коммутативностью: $RS = SR$,

ассоциативностью: $(QR)S = Q(RS)$ и

дистрибутивностью: $S(P + Q - R) = SP + SQ - SR$.

Ортогональный репер \hat{a} состоит из трех компонент, представляющих собой взаимно ортогональные единичные векторы \hat{a}_i :

$$\hat{a} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3).$$

Декартова система координат построена на репере

$$\hat{a} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}).$$

Для векторов, образующих этот репер, в литературе часто применяют обозначение $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Произвольный вектор A можно записать в виде

$$A = \hat{a}_1 A_1 + \hat{a}_2 A_2 + \hat{a}_3 A_3.$$

Имея дело с декартовыми координатами, часто для краткости и удобства используют следующее *правило суммирования*: если в некоторой группе индексов один из индексов встречается дважды, то по этому индексу (называемому немым) производится суммирование. Пусть немые индексы i, j, k пробегают значения 1, 2, 3, или x, y, z . Тогда, согласно правилу суммирования в декартовой системе координат, эквивалентны друг другу следующие формы записи:

$$A = \hat{a}_i A_i = \hat{a}_1 A_1 + \hat{a}_2 A_2 + \hat{a}_3 A_3, \\ V_j W_j = V_x W_x + V_y W_y + V_z W_z$$

и

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

В произвольных криволинейных координатах правило суммирования, вообще говоря, не применяется. Применение его означает, что используются декартовы координаты.

Скалярное произведение векторов

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Скалярное произведение обладает свойствами коммутативности и дистрибутивности, но в этом случае говорить об ассоциативности бессмысленно. Скалярное произведение вектора с самим собой равно квадрату его длины:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_i A_i = A^2$$

Векторное произведение векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{\mathbf{a}}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \hat{\mathbf{a}}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \hat{\mathbf{a}}_z (A_x B_y - A_y B_x). \end{aligned}$$

Векторное произведение обладает свойством дистрибутивности, но не является ни коммутативным, ни ассоциативным.

Определим дельта-символ Кронекера δ_{ij} :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Единичный антисимметричный тензор ε_{ijk} имеет следующие компоненты:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & ijk = 123, 231, 312 \text{ (при четном числе перестановок)}, \\ -1, & ijk = 321, 132, 213 \text{ (при нечетном числе перестановок)}, \\ 0 & \text{(если два индекса принимают одно и то же значение)}. \end{cases}$$

Из этих определений и правила суммирования следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} &= 2\delta_{ih}, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnh} &= \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}. \end{aligned}$$

Свойства единичных векторов, образующих ортогональный репер, можно теперь записать в виде

$$\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij}$$

■

$$\hat{\mathbf{a}}_i \times \hat{\mathbf{a}}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{a}}_k.$$

Так же можно записать скалярное произведение

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i$$

■ векторное произведение любых двух векторов

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

Для тройного векторного произведения нередко используют тождество

$$\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Тензоры второго порядка. Тензор второго порядка имеет девять компонент, преобразующихся по определенному закону при переходе от одной системы координат к другой. Этот тензор часто записывают в виде

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы T_{ii} называются диагональными. Тензор является симметричным, если $T_{ij} = T_{ji}$. Единичный тензор \mathbf{a} имеет компоненты $a_{ij} = \delta_{ij}$. Тензор с компонентами $A_i B_j$, составленными из компонент двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} , называется *диадой* (диадным произведением векторов) и записывается в виде

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{bmatrix}.$$

При записи диадного произведения между векторами не ставят никакого знака ¹⁾. Произведение тензора на вектор (знак произведения обозначается одной точкой) дает вектор

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \hat{a}_i T_{ij} A_j,$$

причем i -я компонента вектора $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}$ записывается в виде

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{A})_i = (T_{ix} A_x + T_{iy} A_y + T_{iz} A_z).$$

Аналогично для произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} &= \hat{a}_i A_j T_{ji} = \\ &= \hat{a}_1 (A_1 T_{11} + A_2 T_{21} + A_3 T_{31}) + \\ &+ \hat{a}_2 (A_1 T_{12} + A_2 T_{22} + A_3 T_{32}) + \\ &+ \hat{a}_3 (A_1 T_{13} + A_2 T_{23} + A_3 T_{33}). \end{aligned}$$

Векторные операции дифференцирования. Векторный оператор дифференцирования ∇ (оператор Гамильтона, или набла) в декартовых координатах определяется следующим образом:

$$\nabla = \hat{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Оператор ∇ представляет собой векторный оператор: как и у всякого вектора, у него есть различные компоненты и он обязательно действует на какую-либо из величин: скалярную, векторную или тензорную функцию.

Градиент скалярного поля

$$\nabla S = \hat{a}_i \frac{\partial S}{\partial x_i} = \text{grad } S = \hat{a}_x \frac{\partial S}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial S}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Вектор, образуемый в результате действия оператора ∇ на скаляр S , называется *градиентом* величины S . Действие оператора ∇ на S обладает дистрибутивностью, но не является ни коммутативным, ни ассоциативным.

Ротор векторного поля. Векторное произведение ∇ на \mathbf{A} называется *ротором* вектора \mathbf{A} :

$$\nabla \times \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} \hat{a}_i \nabla_j A_k = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix};$$

здесь $\nabla_j = \partial/\partial x_j$.

Операция взятия ротора дистрибутивна, но не является ни коммутативной, ни ассоциативной.

Дивергенция векторного поля

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{A} = \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Операция дивергенции является дистрибутивной, но не коммутативной и не ассоциативной.

Лапласиан скалярного поля. Дивергенция градиента скалярного поля $S(x_i)$ равна

$$\nabla \cdot \nabla S = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x_i^2}.$$

Эта операция обычно записывается как $\nabla^2 S$, причем оператор Лапласа $\Delta \equiv \nabla^2$ в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор Лапласа обладает свойством дистрибутивности, но не обладает ни коммутативностью, ни ассоциативностью.

¹⁾ В отечественной литературе диады, как правило, не используются. В необходимых случаях переходят к тензорной записи, записывая диаду в виде $A_i B_j$. — *Прим. ред.*

Лапласиан векторного поля. В декартовых прямоугольных координатах оператор ∇^2 может действовать на векторное поле, действуя отдельно на каждую компоненту этого поля, как на скаляр:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \hat{\mathbf{a}}_i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \hat{\mathbf{a}}_x (\nabla^2 A_x) + \hat{\mathbf{a}}_y (\nabla^2 A_y) + \hat{\mathbf{a}}_z (\nabla^2 A_z).$$

В криволинейных координатах это равенство не выполняется. Однако всегда справедливо следующее равенство:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}].$$

Производная тензорного поля. Дифференциальный оператор ∇ может действовать на тензоры и диады:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \hat{\mathbf{a}}_i \nabla_j T_{ji}$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{AB} = \hat{\mathbf{a}}_i \nabla_j A_j B_i.$$

Таким образом, y -я компонента записывается в виде

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_y = \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \right).$$

Аналогично, если ∇ входит в состав диады, имеем

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_k A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i}.$$

Можно сказать, что в этом случае ∇ образует оператор $1^)$ вида $(\mathbf{A} \cdot \nabla)$. Следовательно,

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \hat{\mathbf{a}}_i A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j}$$

Субстанциональная, или материальная, производная. При описании движущихся жидкостей удобно дифференцировать по времени величины, отнесенные к одному и тому же жидкому элементу. В результате получаем субстанциональную производную, определяемую равенством

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

в котором \mathbf{v} — скорость жидкого элемента. Субстанциональная производная скалярной величины записывается в виде

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + v_i \frac{\partial S}{\partial x_i}.$$

Субстанциональная производная векторного поля

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \hat{\mathbf{a}}_i \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right).$$

В криволинейных координатах иногда удобно использовать тождество

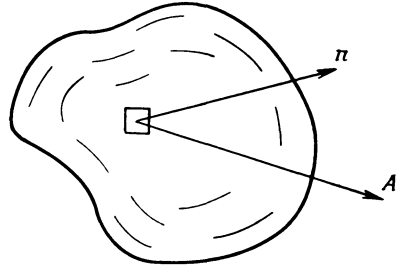
$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{v}],$$

сводящее производную скорости вдоль направления скорости к операциям градиента и ротора. Многие полезные тождества, которые можно доказать на основе перечисленных здесь правил действий со скалярами, векторами и тензорами, приведены в [1, 6].

¹⁾ В отечественной литературе эта дифференциальная операция называется производной вектора \mathbf{B} вдоль вектора \mathbf{A} . — *Прим. ред.*

Интегральные теоремы. В механике сплошных сред большую пользу приносит применение теоремы Гаусса, связывающей между собой поверхностные и объемные интегралы:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\mathbf{x} = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}) ds;$$



здесь V — объем, а S — замкнутая поверхность, ограничивающая этот объем, и $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности. В декартовых координатах данная теорема записывается в виде

$$\iiint_V \frac{\partial A_k}{\partial x_k} d\mathbf{x} = \iint_S A_j \hat{n}_j ds.$$

Поверхностный интеграл можно также представить следующим образом:

$$\iint_S (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) ds = \iint_S A_n ds.$$

Аналогичные соотношения справедливы для скаляров и тензоров:

$$\iiint_V \nabla f d\mathbf{x} = \iint_S \hat{\mathbf{n}} f ds$$

и

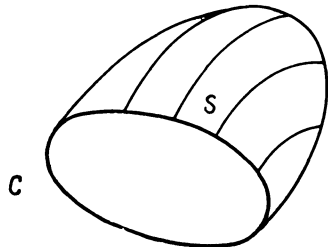
$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{T}) d\mathbf{x} = \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}) ds.$$

Последнее соотношение в декартовых координатах записывается в виде

$$\iiint_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} d\mathbf{x} = \iint_S T_{ij} \hat{n}_j ds.$$

Теорема Стокса устанавливает связь между криволинейными и поверхностными интегралами:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S [\nabla \times \mathbf{A}] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds;$$



здесь интеграл слева берется по замкнутому контуру C , а справа — по любой поверхности S , натянутой на этот контур.

Дифференцирование тройного интеграла; формула Лейбница. Пусть $V(t)$ — зависящая от времени область пространства, ограниченная поверхностью $S(t)$, и $f(r, t)$ — скалярная функция координат и времени. Тогда мы имеем следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f d\mathbf{x} = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{x} + \iint_S (\mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) f ds,$$

в котором \mathbf{v}_s — скорость элемента поверхности ds . Если элемент поверхности движется вместе с жидкостью (т. е. со скоростью $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$), то отсюда, используя уравнение непре-

рывности, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho f dx = \int_V \rho \frac{Df}{Dt} dx.$$

Криволинейные координаты. Во многих физических задачах удобно и естественно использовать криволинейные координаты. Здесь мы рассмотрим только ортогональные системы координат, в частности практически важные случаи применения цилиндрических и сферических координат.

Цилиндрические координаты. Декартовы переменные x, y, z связаны с цилиндрическими координатами r, θ, z соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y &= r \sin \theta, & \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ z &= z, & z &= z. \end{aligned}$$

Элемент длины dl записывается в виде

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2.$$

Компоненты вектора в декартовых координатах преобразуются в цилиндрическую систему координат по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_r &= (\cos \theta) A_x + (\sin \theta) A_y, & A_x &= (\cos \theta) A_r + (-\sin \theta) A_\theta, \\ A_\theta &= (-\sin \theta) A_x + (\cos \theta) A_y, & A_y &= (\sin \theta) A_r + (\cos \theta) A_\theta, \\ A_z &= A_z, & A_z &= A_z. \end{aligned}$$

Сферические координаты (r, θ, ϕ). Связь между x, y, z и r, θ, ϕ дается формулами

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, & \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ z &= r \cos \theta, & \phi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Вектор преобразуется из декартовой системы в сферическую и обратно согласно соотношениям

$$\begin{aligned} A_r &= (\sin \theta \cos \phi) A_x + (\sin \theta \sin \phi) A_y + (\cos \theta) A_z, \\ A_\theta &= (\cos \theta \cos \phi) A_x + (\cos \theta \sin \phi) A_y + (-\sin \theta) A_z, \\ A_\phi &= (-\sin \phi) A_x + (\cos \phi) A_y \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A_x &= (\sin \theta \cos \phi) A_r + (\cos \theta \cos \phi) A_\theta + (-\sin \phi) A_\phi, \\ A_y &= (\sin \theta \sin \phi) A_r + (\cos \theta \sin \phi) A_\theta + (\cos \phi) A_\phi, \\ A_z &= (\cos \theta) A_r + (-\sin \theta) A_\theta. \end{aligned}$$

Общие правила преобразования векторов и тензоров. Связь между компонентами вектора в системе координат g_1, g_2, g_3 и в системе координат g_1', g_2', g_3' (обе системы координат ортогональны) дается соотношениями

$$A_{i'} = \sum_i l_{i'i} A_i$$

и

$$A_i = \sum_{i'} l_{ii'} A_{i'},$$

где $l_{i'i}$ — направляющие косинусы, а именно $l_{i'i}$ — косинус угла между единичным вектором в направлении i' и единичным вектором в направлении i .

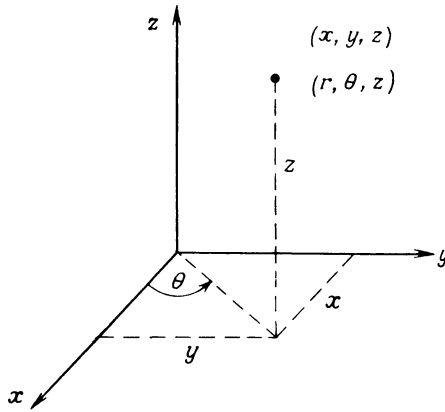
Компоненты тензоров преобразуются аналогично:

$$\begin{aligned} T_{i'j'} &= \sum_i \sum_j l_{i'i} l_{j'j} T_{ij}, \\ T_{ij} &= \sum_{i'} \sum_{j'} l_{ii'} l_{jj'} T_{i'j'}. \end{aligned}$$

Эти соотношения, по существу, представляют собой определение тензора второго порядка, т. е. тензором второго порядка называется совокупность величин, преобразующихся по такому закону.

Дифференциальные операции в криволинейных координатах. Здесь мы приведем формулы для различных дифференциальных операций (∇) в цилиндрических и сферических координатах. В криволинейных координатах оператор ∇ для разных компонент записывается по-разному и не удовлетворяет определенным правилам преобразования. Для вывода этих формул декартовы компоненты векторов и тензоров нужно выразить через их компоненты в криволинейных координатах, а затем перейти от дифференцирования по x, y, z к дифференцированию по криволинейным координатам. Эта процедура достаточно громоздка, хотя и не является сложной. Таким образом, запишем следующие формулы для оператора ∇ в цилиндрических и сферических координатах. Формулы, включающие операции над тензором T , справедливы только для симметричных тензоров.

Цилиндрические координаты



Дивергенция вектора

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Лапласиан

$$\nabla^2 S = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

Градиент

$$(\nabla S)_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad (\nabla S)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad (\nabla S)_z = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

$$T_{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = T_{rr} \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \right) + T_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) + T_{zz} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + T_{r\theta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] + T_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) + T_{rz} \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial z} \right).$$

Ротор

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

Дивергенция тензора

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{r\theta}) - \frac{1}{r} T_{\theta\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z},$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} T_{r\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z},$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rT_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z}.$$

Лапласиан вектора

$$\begin{aligned}(\nabla^2 \mathbf{A})_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2}, \\(\nabla^2 \mathbf{A})_\theta &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}, \\(\nabla^2 \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Компоненты вектора $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_r &= A_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta^2}{r} + A_z \frac{\partial A_r}{\partial z}, \\(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_\theta &= A_r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r A_\theta}{r} + A_z \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \\(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_z &= A_r \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

Компоненты тензора напряжений в декартовой прямоугольной и цилиндрической системах координат связаны между собой следующими равенствами:

$$\begin{aligned}T_{xx} &= T_{rr} (\cos^2 \theta) - 2T_{r\theta} \sin \theta \cos \theta + T_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \\T_{xy} &= T_{rr} \sin \theta \cos \theta + T_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - T_{\theta\theta} \sin \theta \cos \theta, \\T_{xz} &= T_{rz} \cos \theta - T_{z\theta} \sin \theta, \\T_{yy} &= T_{rr} \sin^2 \theta + 2T_{r\theta} \sin \theta \cos \theta + T_{\theta\theta} \cos^2 \theta, \\T_{yz} &= T_{rz} \sin \theta + T_{z\theta} \cos \theta, \\T_{zz} &= T_{zz}.\end{aligned}$$

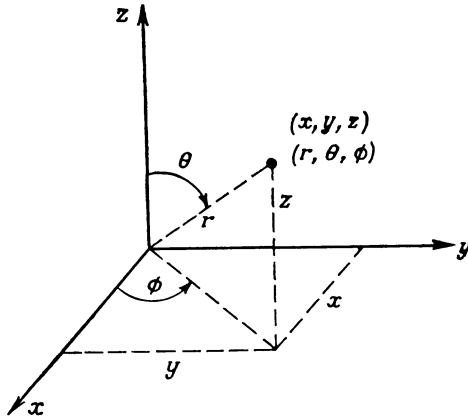
При выводе этих выражений мы использовали следующие формулы:

$$T_{ij} = \sum_{i'} \sum_{j'} l_{ii'} l_{jj'} T_{i'j'}$$

и

$$\begin{bmatrix} l_{xr} & l_{x\theta} & l_{xz} \\ l_{yr} & l_{y\theta} & l_{yz} \\ l_{zr} & l_{z\theta} & l_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сферические координаты



Дивергенция

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.$$

Лапласиан

$$\nabla^2 S = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial S}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2}.$$

Градиент

$$(\nabla S)_r = \frac{\partial S}{\partial r},$$

$$(\nabla S)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta},$$

$$(\nabla S)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi}.$$

$$\begin{aligned} T_{ij} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = & T_{rr} \left(\frac{\partial A_r}{\partial r} \right) + T_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) + T_{\phi\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_r}{r} + \frac{A_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) + \\ & + T_{r\theta} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \right) + T_{r\phi} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r} \right) + \\ & + T_{\theta\phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} A_\phi \right). \end{aligned}$$

Ротор

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi),$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

Дивергенция тензора

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r},$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta}}{r} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} T_{\phi\phi},$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi}}{r} + \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r} T_{\theta\phi}.$$

Лапласиан вектора

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2A_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\theta = \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}.$$

Компоненты вектора $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_r = A_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\theta^2 + A_\phi^2}{r},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_\theta = A_r \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} + \frac{A_r A_\theta}{r} - \frac{A_\phi^2 \operatorname{ctg} \theta}{r},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A})_\phi = A_r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{A_\phi A_r}{r} + \frac{A_\theta A_\phi \operatorname{ctg} \theta}{r}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ; СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ; СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

§ 1. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

В данной книге использована переработанная гауссова система СГС. Эта система была выбрана потому, что она используется в большинстве (хотя, конечно, не во всех) книг и научных статей по физике плазмы. Мы приведем здесь основные соотношения системы СГС и дадим перевод единиц этой системы в систему СИ (МКСА).

Гауссова система единиц СГС

Основными единицами являются единицы длины (сантиметр), массы (грамм) и времени (секунда). Единица заряда определяется из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Два одинаковых заряда в 1 ед. СГС притягиваются один к другому с силой 1 дина на расстоянии 1 см. Единица потенциала определяется из формулы

$$\varphi = \frac{q}{r};$$

1 ед. потенциала СГС = 1 ед. заряда СГС/см.

Напряженность электрического поля дается выражением

$$E = \frac{q}{r^2};$$

1 ед. напряженности электр. поля СГС = 1 ед. потенциала СГС/см, 1 ед. тока СГС = 1 ед. заряда СГС/с.

Частицы с зарядом q , распределенные с плотностью n и движущиеся все в одну сторону со скоростью v , создают плотность тока

$$J = nqv \text{ ед. заряда СГС}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}),$$

а полный ток через поверхность A равен

$$I = nqvA \text{ ед. заряда СГС}/\text{с}.$$

Магнитная индукция B на расстоянии r от бесконечного прямолинейного проводника, по которому течет ток I , определяется выражением

$$B_\theta = \frac{2I}{cr} \text{ Гс},$$

где I измеряется в ед. тока СГС, c — скорость света, а B измеряется в гауссах (Гс).

В гауссовой системе СГС уравнения Максвелла и сила Лоренца, действующая на заряд q , записываются в виде

$$\mathbf{F}_L = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho q,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

где ρ_q — плотность заряда (ед. заряда СГС/см³). В материальной среде $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$, так что диэлектрическая проницаемость ϵ ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$) и магнитная проницаемость μ ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) являются безразмерными. Единица напряженности магнитного поля H называется эрстедом (в вакууме $1 \text{ Э} = 1 \text{ Гс}$).

Система СИ (МКСА)

К основным единицам этой системы относятся единицы длины (м, метр), массы (кг, килограмм), времени (с, секунда) и силы тока (А, ампер). Ампер определяется как сила тока, протекающего по бесконечно длинному прямому проводу, такой величины, что она действует с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м на единицу длины другого провода с таким же током, который расположен параллельно первому проводу на расстоянии 1 м от него. Единица заряда кулон (Кл) определяется как количество заряда, переносимое током 1 А за 1 с:

$$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}.$$

Магнитная индукция измеряется в теслах (Т). Тесла — такая магнитная индукция, при которой магнитный поток в 1 вебер (Вб) пересекает площадку с поперечным сечением 1 м². Ток силой 1 А, текущий по прямому проводу, создает в вакууме на расстоянии r от провода магнитное поле, индукция которого

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \text{ Т (Вб/м}^2\text{)};$$

здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м — магнитная проницаемость в вакууме. Закон Кулона записывается в виде

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, поскольку $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Потенциал в вольтах равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Отсюда и из закона Кулона имеем

$$1 \text{ В} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м/Кл}.$$

Напряженность электрического поля

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

измеряется в В/м.

В системе СИ сила Лоренца и уравнения Максвелла записываются в виде

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ II},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_q,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}.$$

В этих уравнениях ρ_q — плотность заряда в Кл/м³, \mathbf{J} — плотность тока в А/м².

Волновое уравнение в вакууме имеет вид

$$\left[\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E} = 0,$$

так что $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ и $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \approx (1/36\pi) \cdot 10^{-9}$ Ф/м. В материальной среде электрическая индукция равна $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, а магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$, откуда следует, что напряженность магнитного поля H измеряется в А/м.

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Величина	Гауссова система единиц СГС	Система СИ ¹⁾
Длина (l)	1 см	10^{-2} м
Масса (m)	1 г	10^{-3} кг
Время (t)	1 с	1 с
Заряд (q)	1 ед. заряда СГС	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Кл (кулон)
Плотность заряда (ρ_q)	1 ед. заряда СГС/см ³	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$ Кл/м ³
Ток (I)	1 ед. тока СГС	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ А (ампер)
Плотность тока (J)	1 ед. тока СГС/см ²	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ А/м ²
Электрическое поле (E)	1 ед. потенциала СГС/см	$3 \cdot 10^4$ В/м
Потенциал (ϕ)	1 ед. потенциала СГС	300 В (вольт)
Магнитная индукция (B)	1 Гс	10^{-4} Т (или Вб/м ²)
Напряженность магнитного поля (H)	1 Э	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^3$ А/м
Намагниченность (M)	1 ед. магн. момента СГС/см ³	10^3 А/м
Проводимость (σ)	1 с ⁻¹	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ См/м
Электрическая индукция (D)	1 ед. заряда СГС/см ²	$\frac{1}{4\pi \cdot 3} \cdot 10^{-5}$ Кл/м ²
Энергия (W)	1 эрг	10^{-7} Дж (джоуль)
Индуктивность (L)	1 ед. индуктивности СГС	$9 \cdot 10^{11}$ Г (генри)
Емкость (C)	1 см	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ Ф (фарада)
Мощность (P)	1 эрг/с	10^{-7} Вт (ватт)
Заряд электрона (e)	$4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГС	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона (m_e)	$9,1 \cdot 10^{-28}$ г	$9,1 \cdot 10^{-31}$ кг
Постоянная Планка (h)	$6,626 \cdot 10^{-27}$ эрг · с	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Больцмана (k)	$1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

¹⁾ Для точных вычислений множитель 3 в этой таблице должен быть заменен на величину $c \cdot 10^{-10} = (2,997930 \pm 0,000003)$ см/с, где c — скорость света.

§ 3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Индексы

Многие перечисленные ниже величины снабжены индексами (верхними или нижними), служащими для уточнения. Так, например, функция распределения обозначается f . Если же речь идет о конкретном сорте частиц, используется индекс α , например f_α . Для обозначения равновесия и невозмущенных величин используется индекс 0, например $f_{\alpha 0}$ или $f_{\alpha 0}$. Возмущенные величины снабжены индексом 1, например f_1 , $f_{\alpha 1}$.

Единичные векторы

Для обозначения единичных векторов используется полужирный шрифт и шляпка, например \hat{x} , $\hat{\theta}$, \hat{e}_\parallel

Латинские символы

A	Вектор-потенциал
a е. д.	Астрономическая единица длины ($=1,50 \cdot 10^{13}$ см)
a , a_i^T	Ускорение, см/с ² ; полное ускорение i -й частицы
a	Радиус (постоянный или переменный)
$a_{c\alpha}$	Ларморовский радиус ($=v_\alpha/\omega_{c\alpha}$) частиц сорта α
B (\mathbf{x} , t)	Магнитная индукция, Гс

\hat{b}	Единичный вектор в направлении магнитного поля ($= \mathbf{B}/ \mathbf{B} $)
b	Прицельный параметр
C_s	Ионно-звуковая скорость ($= \sqrt{\kappa T_e/m_i}$), см/с
c	Скорость света [$= (2,997930 \pm 0,000003) \cdot 10^{10}$ см/с]
D, D_{∇}	Коэффициент и тензор диффузии
$D(\mathbf{k}, \omega)$	Диэлектрическая проницаемость плазмы
$D(\mathbf{x})$	Электрическая индукция
$D(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$	Функция распределения Гиббса
D_A	Коэффициент амбиполярной диффузии
D_B	Коэффициент бомовской диффузии
dv	Элемент объема в пространстве скоростей ($= dv_x dv_y dv_z$)
$d\mathbf{x}$	Элемент объема в конфигурационном пространстве ($= dx dy dz$)
$d\Omega$	Элемент телесного угла
$E(\mathbf{x}, t)$	Напряженность электрического поля
$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$	Спектральная плотность энергии электростатических волн $\left[= \frac{1}{V} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}}{8\pi} \right]$
e	Индекс, обозначающий электронные величины (например, m_e — электронная масса)
e	Заряд электрона ($= 4,803 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС)
\hat{e}	Единичный вектор заданного направления (например, \hat{e}_{\perp} — единичный вектор, перпендикулярный локальному магнитному полю)
F	Сила
F_N	$= F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t)$ — функция распределения, дающая полное статистическое описание системы N частиц
F_s	Приведенная функция распределения
$F_{\alpha 0}(u)$	Спроектированная на направление волнового вектора \mathbf{k} равновесная функция распределения $\left[= \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{ \mathbf{k} }\right) d\mathbf{v} \right]$
$F(u)$	Одномерное распределение $\left[= F_e(u) + \frac{m_e}{m_i} F_i(u) \right]$
F	Свободная энергия Гельмгольца
$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$	Функция распределения частиц в фазовом пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v}) в момент времени t
$f_{\alpha}^{(1)} = f_{\alpha}$	Одночастичная функция распределения частиц сорта α
$f_{\alpha}^{(2)}$	Двухчастичная функция распределения частиц сорта α
$f_{\alpha}(u)$	Одномерная одночастичная функция распределения частиц сорта α
G	Распределение Гиббса
g	Параметр неидеальности ($= 1/n\lambda_D^3$)
g	Ускорение свободного падения ($= 980$ см/с ²)
H	Напряженность магнитного поля
H	Поток тепла
h	Постоянная Планка ($= 6,6234 \cdot 10^{-27}$ эрг·с)
l	Единичная диада
$I_n(x)$	Модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка
I	Ток
i	$\sqrt{-1}$; индекс, обозначающий мнимую часть комплексной переменной; индекс, обозначающий ионные величины (например, m_i — масса иона)
i, j, k	Индексы, по которым ведется суммирование
$J_n(x)$	Функция Бесселя первого рода n -го порядка
J	Плотность тока
J	Продольный инвариант ($= \oint p_{\parallel} dl_{\parallel}$)
K, K_e	Относительная диэлектрическая проницаемость ($= \epsilon/\epsilon_0$)
$K_n(x)$	Модифицированная функция Бесселя второго рода n -го порядка
K	Тензор «упругих постоянных»
\mathbf{k}	Волновой вектор ($ \mathbf{k} = 2\pi/\lambda$)
\mathbf{k}	Индекс, обозначающий пространственную компоненту Фурье $\left[f_{\alpha \mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_{\alpha}(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]$
L	Характерный размер макроскопической системы; индуктивность
l	Средняя длина свободного пробега
M	Вектор намагниченности

M	Верхний индекс для обозначений микроскопических полей (например, E^M — микроскопическое электрическое поле); число Маха
m_α	Масса частицы сорта α
\bar{N}_α, N_α	Полное число частиц сорта α
$n(\mathbf{k}, \omega)$	Флуктуация плотности
$n_\alpha(\mathbf{x}, t)$	Макроскопическая средняя плотность частиц сорта α
\bar{n}	Показатель преломления ($=c/v_\Phi$)
\bar{n}_α	Средняя плотность частиц сорта α ($=\bar{N}_\alpha/V$ или N_α/V)
P	Вектор Пойнтинга
P	Тензор давления
P_B	Мощность тормозного излучения
$P_{\text{черн. тело}}$	Мощность излучения черного тела
$P(F)$	Функция Пенроуза
P_{12}	Двухчастичная корреляционная функция
p	Давление; переменная в преобразовании Лапласа
P	Импульс
Q	Поток энергии
Q	Верхний индекс, обозначающий величины квазилинейной теории
q_α	Заряд частицы сорта α
$q_{\text{поляриз}}$	Поляризационный заряд
q_T	Пробный заряд
R	Радиус кривизны
R	Сопrotивление; коэффициент отражения; число Рейнольдса
R	Полное число событий (например, столкновений) в 1 см^3 за 1 с ($=n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle_{1,2}$)
R_M	Магнитное число Рейнольдса
$R_{\text{черн. тело}}$	Радиус, начиная с которого плазма излучает как черное тело
r	Индекс, обозначающий вещественную часть комплексной переменной
r_0	Классический радиус электрона ($=e^2/m_e c^2$)
S	Энтропия
T	Температура; коэффициент прохождения
T_{123}	Трехчастичная корреляционная функция
t	Время
U	Средняя скорость пучка пробных частиц ($= \int f_T v dv / \int f_T dv$)
U	Скорость движущейся системы отсчета
U_α	Средняя скорость одномерного распределения частиц сорта α
u	Скалярная скорость в одномерных распределениях
V	Объем системы; электрическое напряжение
V	Средняя макроскопическая (гидродинамическая) скорость ($= \int f v dv / \int f dv$)
V_A	Альфвеновская скорость ($=B / \sqrt{4\pi\rho}$)
V_s	Скорость звука в газе нейтральных частиц ($=\sqrt{\gamma p/\rho}$)
V_{DE}	Скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях [$= (c/B^2) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$]
V_{DG}	Скорость гравитационного дрейфа [$= (mc/qB^2) [\mathbf{g} \times \mathbf{B}]$]
$V_D, \text{град}$	Скорость дрейфа в прямом магнитном поле с поперечным градиентом [$= (mv_\perp^2 c/2qB^3) \mathbf{B} \times \nabla_\perp \mathbf{B}$]
V_D	Скорость дрейфа в магнитном поле с изогнутыми силовыми линиями [$= (mv_\parallel^2 c/qB^2 R^2) \mathbf{R} \times \mathbf{B}$]
$V_{\text{поляриз}}$	Скорость поляризационного дрейфа в переменном электрическом и постоянном магнитном полях
v	Скорость частицы
v_Φ	Фазовая скорость ($=\omega/k$)
$v_{\text{гp}}$	Групповая скорость ($=\partial\omega/\partial k$)
W	Неэлектростатический (например, гравитационный) потенциал
W_K	Кинетическая энергия пучка частиц
W_E, W_M	Плотности электрической и магнитной энергии ($W_E = E^2/8\pi$, $W_M = B^2/8\pi$)
$\langle W_{ij} \rangle$	Средняя энергия взаимодействия i -й и j -й частиц
w	Кинетическая энергия частицы ($=\frac{1}{2}mv^2$)
X	Координата точки в фазовом пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v})
x	Радиус-вектор
$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$	Единичные векторы в направлениях x, y, z

Z	Зарядовое число ионов; статистический интеграл
$Z(\xi)$	Дисперсионная функция плазмы
	$\left(= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2} dx}{x - \xi} \right), \quad \text{Im } \xi > 0$
Греческие символы	
α, β, γ	Индексы, обозначающие различные сорта частиц (например, электронов, ионов, нейтралов и т. п.)
α	Постоянная Стефана — Больцмана [$= 5,7 \cdot 10^{-5}$ эрг/см ² · с · К ⁴]
β	Отношение кинетического давления к магнитному давлению, т. е. $p/(B^2/8\pi)$; отношение скорости частицы к скорости света, например $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ — безразмерная скорость, параллельная локальному магнитному полю
$\Gamma(x)$	Поток частиц
γ	Релятивистский множитель ($= 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$)
γ_{α}	Показатель адиабаты для плазмы частиц сорта α
Δ	Обозначает приращение переменной (например, ΔB — приращение магнитного поля B)
δ	Глубина высокочастотного скин-слоя ($= c/\omega_p$)
δB	Малое приращение переменной
δ_{ij}	Символ Кронекера
$\delta(x - x_0)$	Дельта-функция $\left[f(x_0) = \int f(x) \delta(x - x_0) dx \right]$
i	Иота, угол вращательного преобразования при наличии полоидального и тороидального полей
κ	Постоянная Больцмана ($= 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К)
κ_T	Теплопроводность
ϵ	Диэлектрическая проницаемость плазмы; малый параметр разложения
ϵ	Диэлектрический тензор плазмы
$\hat{\theta}$	Единичный вектор в направлении θ
Λ	Отношение дебаевского радиуса к прицельному параметру столкновения с отклонением на 90°
	$\left[= \frac{3}{2} \left(\frac{\kappa^3 T^3}{\pi n_e} \right)^{1/2} \frac{1}{Z e^3} \right]$
λ	Длина волны
λ_D	Дебаевский радиус ($= \sqrt{\kappa T/8\pi n e^2}$)
λ_{De}	Электронный дебаевский радиус ($= \sqrt{\kappa T_e/4\pi n e^2}$)
λ	Дейбройлевская длина волны
μ	Магнитный момент ($= W/B_{\perp}$); приведенная масса [равная $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$]
μ	Тензор подвижности
ν_c	Частота столкновений ($= n \langle \sigma v \rangle$)
ρ	Плотность
ρ_q	Плотность электрического заряда ($\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha}$)
ρ_m	Плотность массы ($\sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha}$)
σ	Проводимость ($= 1/\eta$); поперечное сечение
σ	Тензор проводимости
τ	Постоянная времени; временной интервал
τ_c	Время между столкновениями
τ_D	Время диффузии
τ_{90°	Время, за которое частица при парных столкновениях рассеивается на 90° в пространстве скоростей
$\Phi(y)$	Функция ошибок $\left(= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \right)$
φ	Электростатический потенциал
Φ_T	Потенциал пробного заряда
ω	Угловая частота, рад/с
$\omega_{c\alpha}$	Циклотронная частота для частиц сорта α ($= q_{\alpha} B / m_{\alpha} c$)
$-\omega_{ce}$	Циклотронная частота электронов ($\omega_{ce} \equiv eB/m_e c$)

ω_{ci}	Циклотронная частота ионов ($\omega_{ci} \equiv eB/m_i c$)
$\omega_{p\alpha}$	Плазменная частота частиц сорта α ($= \sqrt{4\pi n_\alpha e^2/m_\alpha}$)
ω_H	Верхняя гибридная частота ($= \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$)
ω_{LH}	Нижняя гибридная частота ($= \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}} \sqrt{\frac{1+B^2/4\pi n m_i c^2}{1+B^2/4\pi n m_e c^2}}$)

Специальные обозначения и операторы

\perp, \parallel	Индексы, обозначающие направление, перпендикулярное и параллельное локальному магнитному полю
$\langle A \rangle$	Величина, усредненная по ансамблю
\bar{W}	Величина, усредненная по времени
0	Индекс, обозначающий равновесные, невозмущенные величины
1	Индекс, обозначающий возмущенные величины, зависящие от времени
z^*	Величина, комплексно-сопряженная z
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{v}}$	Оператор градиента в пространстве скоростей $\left(= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial v_z} \right)$
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla_{\mathbf{x}}$	Оператор градиента в конфигурационном пространстве $\left(= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Re z	Вещественная часть величины z
Im z	Мнимая часть величины z
\sim	Используется для обозначения образа Лапласа [например,
	$\tilde{f}_\alpha = \int_0^\infty f_\alpha(t) \exp(-pt) dt]$

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ

1. Турбулентный нагрев

Тот факт, что при развитии неустойчивости энергия упорядоченного движения взаимопроникающих потоков плазмы переходит в энергию электрического поля колебаний (и в энергию движения частиц в этом поле), послужил основой для предложений об использовании неустойчивостей в качестве эффективного механизма нагрева. Некоторые экспериментальные и теоретические аспекты аномального сопротивления и нагрева плазмы при развитии неустойчивости рассматриваются в следующих работах:

- Бабыкин М. Л., Гаверин Р. Р., Завойский Е. К., Рудаков Л. И., Скорюпин В. А.*, ЖЭТФ, **41**, 1597 (1964).
Corpi V., Mazzucato E., Phys. Fluids, **14**, 134 (1971).
Dekluiver H., Kawamura T., Phys. Fluids, **10**, 2715 (1967).
Desilva A. W., Stamper J., Phys. Rev. Letters, **19**, 1027 (1967).
Dupree T. H., Phys. Rev. Letters, **25**, 789 (1970).
Field E. C., Fried B. D., Phys. Fluids, **7**, 1937 (1964).
Искольдский А., Куртмуллаев Р., Нестерихин Ю., Пономаренко А., ЖЭТФ, **47**, 1964, стр. 774.
Goldenbaum G. G., Phys. Fluids, **10**, 1897 (1971).
Hamberger S. M., Friedman M., Phys. Rev. Letters, **31**, 674 (1968).
Keilhacker M., Kornherr M., Steuer H. H., Zs. Phys., **223**, 385 (1969).
Mather J. W., Hans P. J. B., Carpenter J. P. et al., в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. II, Vienna, 1971, p. 561.
Neidigh R. V., Alexeff I., Guest G. E. et al., в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. II, Vienna, 1969, p. 693.
Nishihara K., Hasegawa A., Phys. Rev. Letters, **28**, 414 (1972).

2. Ударные волны в плазме

Полезной проверкой теории плазмы является применение ее к ударным волнам, поскольку они представляют собой возмущение большой амплитуды. За фронтом ударной волны состояние плазмы может измениться, в частности, за счет коллективных плазменных явлений. О развитии и современном состоянии теории ударных волн можно прочесть в статьях (см. также литературу, цитированную в основном тексте, и литературу по турбулентному нагреву):

- Adlam J., Allen J.*, Phil. Mag., **3**, 448 (1958).
Auer P., Hurwitz H., Jr., Miller R., Phys. Fluids, **1**, 501 (1958).
Auer P., Hurwitz H., Jr., Kilb R., Phys. Fluids, **4**, 1105 (1961); **5**, 298 (1962).
Bogen P., Dietz K. J., Dippel K. H., Hintz E., Hothker K., Siemsen F., Zeyer G., в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. III, Vienna, 1971, p. 227.
DeHoffman E., Teller E., Phys. Rev., **80**, 692 (1950).
Hain K., Lust R., Schluter A., Zs. Naturforsch., **13**, 11 (1958).
Kennel C., Sagdeev R. Z., Journ. Geophys. Res., **72**, 3303, 3327 (1967).
Manheimer D. M., Boris J. P., Phys. Rev. Letters, **28**, 659 (1972).
Morawetz C. S., Phys. Fluids, **4**, 988 (1961).
Paul J. W. M., Goldenbaum G. C., Iiyoshi A., Holmes L. S., Hardcastle R. A., Nature (London), **216**, 363 (1967).

3. Теория явлений переноса

Некоторые отмеченные в основном тексте вопросы более подробно освещены в следующих статьях:

- Abraham-Shrauner B.*, Journ. Plasma Phys., **4**, 411 (1970). (Просвист электронов.)
Eubank H., Wilkerson T., Phys. Fluids, **4**, 1407 (1961). (Движение плазмы в искривленном магнитном поле.)

- Dreicer H.*, Phys. Rev., 115, 238 (1959). (Просвист электронов и проводимость.)
- Düchs D. F., Furth H. P., Rutherford P. H.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. I, Vienna, 1971, p. 369. (Радиальный перенос в токамаке.)
- Галеев А. А., Сагдеев Р. З.*, «Неоклассическая» теория диффузии, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 7, 1973, стр. 205. (Неоклассическая диффузия.)
- Grad H.*, Principles of the Kinetic Theory of Gases в книге «Handbuch der Physik», Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, 1957. (Уравнение Больцмана.)
- Hoh F. C., Lenhart B.*, Phys. Fluids, 3, 600 (1960). (Диффузия поперек магнитного поля.)
- Rosenbluth M. N., Rutherford P. H., Taylor J. B., Frieman E. A., Kovrizhnikh L. M.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. I, Vienna, 1971, p. 495. (Классическая диффузия в тороидальных системах.)
- Yoshikawa S., Christofilos N. C.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», vol. II, Vienna, 1971, p. 357. (Перенос в тороидальных системах.)

4. Гидродинамическая и МГД-теории

- Burgers J. M.*, в книге «Statistical Plasma Mechanics in Symposium of Plasma Dynamics» (ed. Clauser F. T.), Addison Wesley, Reading, Mass., 1960.
- Cowling T. G.*, Magnetohydrodynamics, Wiley, New York, 1953.
- Elsasser W.*, Amer. Journ. Phys., 23, 590 (1955); 24, 25 (1956). (Гидродинамическая теория.)

5. Вычислительные методы в физике плазмы

В последние годы прилагались значительные усилия, направленные на применение ЭВМ для решения задач физики плазмы. Представление о применении численных методов можно получить из следующих работ, которые можно разбить на две категории:

1) Численное интегрирование уравнений, описывающих плазму (либо гидродинамических уравнений, либо уравнения Власова).

Armstrong T. P., Montgomery D. C., Journ. Plasma Phys., 1, 425 (1967).

Berk H. L., Roberts K. V., Phys. Fluids, 10, 1595 (1967).

Boris J. P., Book D. L., Journ. Comp. Phys., 6, 1000 (1972).

Hain K., Hain G., Roberts K., Roberts S. J., Koopendorfer W., Zs. Naturforsch., 15a, 1039 (1960).

Kellog P. J., Phys. Fluids, 8, 102 (1965).

Knorr G., Zs. Naturforsch., 16a, 1320 (1961).

2) Моделирование плазмы на ЭВМ путем интегрирования уравнений движения большого ($\sim 10^6$) числа взаимодействующих заряженных частиц.

Birdsall C. K., Langdon A. B., Okuda H., Finite-Size Particle Physics Applied to Plasma Simulation в книге «Methods in Computational Physics», Vol. 9, Academic, New York, 1970, p. 241 (см. перевод в книге «Вычислительные методы в физике плазмы», изд-во «Мир», 1974).

Biskamp D., Chodura R., в книге «Plasma and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. II, Vienna, 1971, p. 265.

Buneman O., Phys. Rev., 115, 503 (1959).

Dawson J., Shanny R., Birmingham T., Phys. Fluids, 12, 687 (1969).

Eldridge O. C., Feix M., Phys. Fluids, 5, 1307 (1962).

Morse R. L., Nielson C. W., Phys. Rev. Letters, 23, 1087 (1969).

Paradopoulos K., Davidson R. C., Dawson J. M., Haber I., Hammer D. A., Krall N. A., Shanny R., Phys. Fluids, 14, 849 (1971).

См. также статьи в книге «Methods in Computational Physics» (eds. B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenber), vol. 9, Plasma Physics, Academic, New York and London, 1970 (см. перевод: Вычислительные методы в физике плазмы, изд-во «Мир», 1974).

6. Собственные колебания плазмы и затухание Ландау

Называть плазменные волны собственными колебаниями не вполне правильно, поскольку эти волны затухают, хотя и слабо. Однако существуют истинные собственные колебания плазмы (сингулярные в математическом смысле). Эти колебания и их соответствие с обычным аппаратом теории плазмы рассмотрены в следующих работах:

Case K. M., Ann. Phys. (N.Y.), 7, 293 (1959).

Vankampen N. G., Physica, 21, 949 (1955).

Вопросы, связанные с затуханием Ландау, подробно изучены в статье

Weitzner H., Phys. Fluids, 6, 484, 1123 (1963).

7. Равновесие плазмы

Существует множество работ по исследованию методов удержания плазмы. Некоторые из них цитировались в гл. 5. Ниже приводится краткий список дополнительной литературы.

- Anderson O. A., Birdsall D. H., Hartman C. W., Hooper E. B., Jr., Munger R. H., Taylor C. E.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», vol. I, Vienna, 1974, p. 103. (Левитрон.)
- Baker D. A., Burkhardt I. C., Dimarco J. N., Forman P. R., Haberstick A., Karr H. J., Mann L. W., Phillips J. A., Schofield A. E.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», vol. I, Vienna, 1974, p. 203. (Z-пинч.)
- Burnett S. C., Ellis W. R., Hammer C. F. et al.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», vol. III, Vienna, 1971, p. 201. (θ-пинч с большим β.)
- Butt E. P., Carruthers R., Mitchell J. et al.*, в книге «Proc. 2nd International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy», Vol. II, Geneva, P1519, 1959.
- Christofilos N. C., Condit W. C., Fessenden T. J. et al.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. I, Vienna, 1974, p. 119. («Астроном».)
- Freidberg J. P.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. III, Vienna, 1974, p. 215. (Теория «Сциллака».)
- Grad H.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. III, Vienna, 1974, p. 229. (См. также содержащиеся в этой статье ссылки.)
- Hirsch R. L.*, Phys. Fluids, 11, 2486 (1968).
- Hosea J. C., Bobeldijk C., Grove D. J.*, «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. II, Vienna, 1974, p. 425. (Токамак.)
- Kerst D. W., Forsen H. K., Meade D. M. et al.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. I, Vienna, 1974, p. 3. (Эксперименты с мультипольными конфигурациями.)
- Kruskal M. D., Johnson J. L., Gottlieb M. B., Goldman L. M.*, Phys. Fluids, 1, 424 (1958).
- Laval G., Luc H., Maschke E. K., Mercier C., Pellat R.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. II, Vienna, 1974, p. 507. (Эксперименты на установке типа «токамак».)
- Ohkawa T., Yoshikawa M., Gilleland J. R., Tamano T.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. I, Vienna, 1974, p. 15. (Эксперименты с мультипольными конфигурациями.)
- Rothmann M. A., Sinclair R. M., Brown I. G., Hosea J. C.*, Phys. Fluids, 12, 2211 (1969). (Нагрев в стеллараторах.)
- Weitzner H.*, в книге «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», Vol. III, Vienna, 1974, p. 223.

Установки типа «токамак», в которых используется тороидальный плазменный шнур с размытой границей, были разработаны в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова под руководством Л. А. Арцимовича. С 1968 г. эксперименты на установках токамак стали проводиться во многих лабораториях мира. Обзор этого направления можно прочесть в статье

Corpi B., Rem J., Scient. Amer., July 1972, p. 65.

* Арцимович Л. А., Замкнутые плазменные конфигурации, изд-во «Наука», 1969.

8. Колебания и устойчивость плазмы

Проблема устойчивости плазмы исследовалась весьма интенсивно и широко. Читателям, заинтересованным в более подробном изучении проблемы устойчивости плазмы, можно рекомендовать следующие статьи:

- Aamodt R. E., Sloan M.*, Phys. Rev. Letters, 19, 1227 (1967). (Нелинейные неустойчивости волн с отрицательной энергией.)
- Anderson D. A., Baker W. R., Colgate J. A., Ise J., Jr., Pyle R.*, Phys. Rev., 110, 1375 (1958).

- Chang R. P., Porkolab M., Grek B.*, Phys. Rev. Letters, **28**, 206 (1972). (Параметрические неустойчивости.)
- Colchin R. J., Dunlap J. L., Postma H.*, Phys. Fluids, **13**, 501 (1970).
- Coppi B.*, Phys. Rev. Letters, **25**, 851 (1970). (Радиальный перенос энергии вследствие неустойчивостей.)
- Etievant C., Perulli M.*, Compt. Rend., **256**, 5080 (1963).
- Guest G. E., Harris E. G.*, Phys. Rev. Letters, **27**, 1499 (1971). (Захваченные частицы.)
- Pearlstein L. D., Berk H.*, Phys. Rev. Letters, **23**, 220 (1969). (Неустойчивость при наличии шира.)
- Schumann W. O.*, Zs. Angew. Phys., **8**, 482 (1956).
- Sudan R. N.*, Phys. Fluids, **6**, 57 (1963). (Электромагнитные неустойчивости.)

* Электромагнитные свойства плазмы (под ред. А. И. Ахиезера), изд-во «Наука», 1974.

9. Плазма твердых тел

Многие коллективные явления в горячей плазме имеют аналог в вырожденном электронном газе. Плазма твердых тел (электроны и дырки в полупроводниках, полуметаллах и металлах) представляет собой интересный и хорошо изученный объект. Об этой области можно получить представление по следующим работам:

- Anker-Johnson B.*, Phys. Rev., **135A**, 1423 (1964).
- Pines D.*, Elementary Excitations in Solids, Benjamin, New York, 1963 (см. перевод: Д. Пайнс, Элементарные возбуждения в твердых телах, изд-во «Мир», 1965).
- Steele M. C., Vural B.*, Wave Interactions in Solid State Plasmas, McGraw-Hill, New York, 1969.

10. Астрофизические приложения физики плазмы

В посвященном астрофизической плазме сб. «Plasma Instabilities in Astrophysics» (eds. D. G. Wentzel, D. A. Tidman), Gordon and Breach, New York, 1969, содержатся следующие статьи по этому вопросу:

- Burlaga L. F., Ogilvie K. W.*, Helmholtz Instability in the Interplanetary Medium, p. 374.
- Fredricks R. N.*, Observations of the Microstructure of the Bow Shock, p. 199.
- Kennel C. F.*, Instability Phenomena of the Magnetosphere, p. 171.
- Sturrock P.*, Explosions in Galaxies and Quasars, p. 297.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альфвен (Alfven H.)** 93
Арпимович Л. А. 225
Ахизер А. И. 185
- Беннет (Bennett W. H.)** 88
Бернштейн (Bernstein I. B.) 345
Боголюбов Н. Н. 289
Бойд (Boyd G. D.) 33
Болдвин (Baldwin D. E.) 140
Бом (Bohm D.) 26
Борн (Born M.) 289
Брагинский С. И. 78
Будкер Г. И. 229
Бук (Book D. L.) 64
- Веденов А. А.** 411
Велихов Е. П. 225, 411
Власов А. А. 133
- Гарднер (Gardner C. S.)** 355, 357
Гибсон (Gibson A.) 224
Гибсон (Gibson G.) 217
Голдбергер (Goldberger M. L.) 186
Гоулд (Gould R. W.) 33, 138, 168, 315, 379
Грин (Green H. S.) 289, 345
- Давидсон (Davidson R. C.)** 473
Дамм (Damm C. C.) 227
Даусон (Dawson J. M.) 469
Джордан (Jordan W.) 217
- Завойский Е. К.** 381
- Ивон (Ivon J.)** 289
Иоффе М. С. 210, 218, 219
- Кадомцев Б. Б.** 225
Калсруд (Kulsrud R.) 490
Капица П. Л. 38
Кирквуд (Kirkwood J. G.) 289
Клярфельд Б. 33
Конте (Conte S.) 388
Коэнсген (Coensgen F. H.) 220
Кристофилос (Christofilos N. C.) 228, 258
Крукс (Crookes W.) 11
Крускал (Kruskal M. D.) 345, 490
- Ландау Л. Д.** 237, 297, 301, 308, 313
Ленгмюр (Langmuir I.) 11, 45
Леонтович М. А. 225
- Линлор (Linlor W. I.)** 40
Лихтенберг (Lichtenberg A. J.) 49
Лойер (Lauer E. J.) 217
Лонгмайр (Longmire C. L.) 194
Лоу (Low F. E.) 186
Лоусон (Lawson J. D.) 214
- Майер (Mayer J. E.)** 55
Малмберг (Malmberg J. H.) 315, 431
Маршалл (Marshall J.) 34
Минарди (Minardi E.) 348
Мотт-Смит (Mott-Smith H.) 45
- Никл (Nickel J. C.)** 138
Ньюкомб (Newcomb W. A.) 355
- Оберман (Oberman C.)** 315
О'Нейл (O'Neil T. M.) 61, 315
Ошер (Osher J. E.) 50
- Паркер (Parker E. N.)** 138
Пекачек (Pechacek R. E.) 315
Пенроуз (Penrose R.) 369
Пирс (Pierce J. R.) 185
Полк (Polk D. H.) 40
- Рипин (Ripin B. H.)** 315
Розенблют (Rosenbluth M. N.) 194
Ростокер (Rostoker N.) 61
Рэлей (Rayleigh W. S.) 11, 190
- Сагдеев Р. З.** 411
Саймон (Simon A.) 270
Спитцер (Spitzer L., Jr.) 224
Стори (Storey L. R. O.) 155
Стрингер (Stringer T. E.) 382
Су (Su C. H.) 315
- Теллер (Teller E.)** 21
Тидман (Tidman D. A.) 450
Тонкс (Tonks L.) 11, 133
Трайвелпис (Trivelpiece A. W.) 33, 168
- Уортон (Wharton C. B.)** 315
- Файнберг Я. Б.** 185
Фаулер (Fowler T. K.) 401
Фейкс (Feix M. R.) 348

- Ферми (Fermi E.) 222
Филд (Field L. M.) 33
Фрид (Fried B. D.) 379, 388
Фримен (Frieman E. A.) 64
- Хот (Haught A. F.) 40
Чепмен (Chapman S.) 78
Чу (Chew G. F.) 186
- Шафранов В. Д. 88
- Хамасаки (Hamasaki S.) 470
Харрис (Harris E. G.) 394
Хейбенстриг (Heibenstreit W. B.) 185
- Эвиэйтор (Eviator A.) 450
Энглеман (Englemann F.) 348

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатические инварианты 489
 «Алиса» 227
 Альфвеновская волна 18, 93, 94, 105, 158, 161, 173
 — — шланговая неустойчивость 186, 187
 — — скорость 94
 Анализ собственных колебаний (линейная теория устойчивости) 200—203, 355
 Анизотропная плазма 383
 — — двухтемпературная максвелловская, электромагнитная неустойчивость 387—391
 — — замагниченная, устойчивость 393
 — — неустойчивости 382, 383
 Анизотропное распределение ионов, неустойчивость 391, 392
 Антипробкотрон 193, 209
 «Астрон» 228
- Баллистический член 313, 424
 БГКИ-цепочка 289
 БГК-волны 345—347
 Бернштейновские моды 325—329
 Беспотковительная (высокочастотная) глубина проникновения 106
 Беспотковительное затухание, см. Ландау затухание
 Больцмана распределение линеаризованное 171
 — уравнение беспотковительное, см. Власова уравнение
 — — кинетическое модифицированное 254, 255
 — — определение 250
 — Н-теорема 14
 Бома — Гросса дисперсионное уравнение 133, 135, 140
 Бомовская диффузия 25—27, 272
 Бостика источник 33
 Бриллюэновский поток 101
 Бунчировка пучков 368
- Вакуумный предел 127
 Ведущий центр 16
 — — дрейфовая скорость 16
 Верхний гибридный резонанс 163
 Верхняя гибридная частота 162
 Взаимодействие волн плазменных 406
 — — резонансное 434
 — — частиц с волнами, линейное 433
 — — — — нелинейное 435
 Вириальные коэффициенты 53
 Власова уравнение 73, 294
 — — линеаризованное 295, 296
- Власова уравнение, свойства 289—292
 — — — — сохранение числа частиц 289
 — — — — существование множества равновесных решений 289—292
 — — — — энтропия и Н-теорема 292
 — — — — теория ленгмюровских и ионно-звуковых волн 306—313
 Вмороженность силовых линий 92, 93
 Волны в плазме 17, 350
 — — — — замагниченной, горячей, неоднородной 325—340
 — — — — — — распространение параллельно магнитному полю 330—333
 — — — — — — поперек магнитного поля 325—329
 — — — — — — холодной 125—129, 151—165
 — — — — — — высокочастотные, распространение параллельно магнитному полю 151—153
 — — — — — — — — перпендикулярно магнитному полю 162—164
 — — — — — — промежуточной частоты, распространение параллельно магнитному полю 158
 — — — — — — — — поперек магнитного поля 164
 — — дрейфовые 169, 337
 — — ионно-звуковые 17, 93, 124, 319
 — — ионно-циклотронные 161
 — — магнитозвуковые 105, 164, 329
 — — малой амплитуды, кинетическая теория 317—325
 — — пространственного заряда (см. также Ленгмюровские колебания и Плазменные волны) 121—125
 — — — — двухпоточковая неустойчивость 181
 — — — — измерение фазовых характеристик 169
 — — — — фазовая скорость 143
 — — — — скорость групповая 17
 — — — — фазовая 17
 — — с положительной и отрицательной энергиями в движущейся плазме 119—121
 — — электромагнитные, см. Электромагнитные волны
 — — электронно-циклотронные 159
 — — электростатические, см. Электростатические волны
 — — энергия 118
 Вращательное преобразование, угол 223
- Гарднера теорема 358, 376
 Гаусса теорема 497
 Геликон 155

- Гельмгольца энергия, см. Свободная энергия
- Гиббса ансамбль 12
— распределение 55, 56, 70
— свободная энергия 59
- Гидродинамические уравнения 61, 65, 75, 81
- Гирорадиус, см. Ларморовский радиус
- Глубина проникновения, бесстолкновительная (высокочастотная) 106, 128
- Головной скачок 40, 100
- Граница плазма — магнитное поле, устойчивость 208—211
— плазмы, отражение электромагнитных волн 127
- Граничные условия 199
— — для плазмы с резкой границей 202
— — на границе плазма — вакуум 200
— — — плазма — идеально проводящая твердая стенка 200
— — — — плазма — плазма 199
- Дважды адиабатическая теория, см. Чу — Голдбергера — Лоу (ЧГЛ) теория
- Движение частиц 475
— — в однородной плоской электромагнитной волне большой амплитуды 484
— — — поле магнитном, постоянном, неоднородном 486—489
— — — — — с градиентом продольным 486
— — — — — — — — — поперечным 487
— — — — — — — — — изогнутыми силовыми линиями 489
— — — — — — — — — однородном 476
— — — — — — — — — и в быстро меняющемся электрическом 481—484
— — — — — — — — — электростатическом 475
— — — — — — — — — свободное 475
- Двухжидкостная гидродинамика 78, 79
- Двухтемпературная максвелловская плазма, электромагнитные неустойчивости 387—391
- Дебаевская поправка 60
— сфера 13
- Дебаевский радиус экранирования 12, 13, 64
— — — обобщенный 346
- Дебаевское число 13, 54
- Дебая — Хюккеля теория 13
- Диагностика плазмы 40—50
— — атомная спектроскопия 48
— — измерение непрерывного излучения 48
— — — тока и напряжения 42
— — корпускулярные измерения 49
— — рассеяние света 50
— — нейтронная 50
— — фотографирование 48
- Динамический пинч 42—44, 105—109
— — использование магнитных зондов 46, 47
— — определение 88
— — схематическое представление 43
- Дисперсионное уравнение Бома — Гросса 133, 135, 140
— — для волн в плазме с равновесным распределением 315—317
- Дисперсионное уравнение для волн в плазме холодной бесстолкновительной однородной замагниченной 150
— — — — — плазменных 117
— — — — — продольных, электростатических 22
— — — — — пространственного заряда, ограниченная холодная плазма замагниченная 167
— — — — — электромагнитных 18
— — — — — с правой и левой круговой поляризацией 158, 159
— — — — — электростатических с $\beta \ll 1$ 395
- Дисперсия 97
— тепловая 135
- Диффузия 25—27
— амбиоплярная 26, 258—263
— — в слое 260
— — от импульсного источника 261
— — слабоионизированной плазмы ограниченной замагниченной 268
— — экспериментальная проверка 270
— бомовская 25—27
— классическая 26
— конус потерь 26, 27
— магнитного поля 92
— уравнение 408
- Диэлектрическая проницаемость 169, 491
— — высокочастотная, холодная однородная изотропная плазма 18
— — плазмы из горячих электронов и холодных ионов 122
— — — при распространении в ней электростатических волн 298
— — — холодной, в отсутствие полей 111—113
— — — замагниченной 148—151
— — — связь с энергией волны 118
— — системы движущихся и покоящихся электронов 22
- Допплера сдвиг частоты 22
— — — при рассеянии света 50
- Дрейф 15, 16
— гравитационный 480
— градиентный 16
— поляризационный 483
— центробежный 489
— электрический 479, 483
- Дрейфовые волны 169, 337
— — низкочастотные в неоднородной плазме 169—174
— — — распространение под косым углом к магнитному полю 343
— — — — перпендикулярно магнитному полю 342
— — электромагнитные 172—174
— — электростатические 171
- DCX, термоядерная установка 229, 380, 381
- Закрепление концов силовых линий, стабилизация 213
- Затухание бесстолкновительное, см. Ландау затухание
— за счет столкновений 116
- Захват электронов 422, 423
— — фазовая диаграмма 423
- Зеркальная неустойчивость 393

- Излучение 28, 437—474
 — доплеровский сдвиг частоты 50
 — закон Кирхгофа 461
 — — Стефана — Больцмана 29
 — метод пробных источников 466
 — некогерентное, рассеяние 451
 — примесное 29
 — равновесное 462
 — тормозное 468
 — синхротронное (циклотронное) 29, 49, 154
 — — замагниченной плазмы 464—466
 — черенковское 29, 451, 467
 — черного тела 12, 29, 462
 — электромагнитных волн 451
 Изобарические поверхности 86
 Изотермическая атмосфера 91
 Изотермическое сжатие 95
 Ижекция нейтральных пучков 227
 Ионная линия 459
 Ионно-звуковая неустойчивость 378
 Ионно-звуковые волны 93, 124, 319
 — — деформация при наличии градиента плотности 172
 — — скорость 93, 126
 — — солитоны 96—98
 — — теория, основанная на уравнении Власова, 306
 — — ударные волны 96—98
 Ионосфера 11, 66
 Иоффе полосы 218
 Источник с дейтерированной шайбой, см. Бостика источник
- Квазилинейная теория 405
 — — взаимодействия частиц с волнами 433
 — — двухпоточковой неустойчивости 419
 — — закон сохранения импульса 409
 — — — числа частиц 409
 — — — энергии 409
 — — Ландау затухание 411
 — — неустойчивость теплого пучка 415
 Квазилинейное плато 417
 Квазилинейные уравнения 406—409
 — — диффузии 409
 Квазинейтральность 81
 Квазиравновесие 12
 Кирхгофа закон 449, 463
 Климонтовича — Дюпри уравнение 281
 Кинетическая теория нелинейная 405—436
 — — плазменные волны, сравнение с гидродинамикой 348, 349
 Кинетические уравнения для кулоновской плазмы 285, 286
 — — замыкание цепочки 286, 287
 Кинетическое давление 15
 Кинетическое уравнение 73
 — — нулевого приближения (см. также Власова уравнение) 287, 288
 — — первого приближения 288
 — — — свойства 292
 Конечный ларморовский радиус (КЛР), магнитогидродинамика 86
 Конус потерь пробкотрона 27
 Координаты криволинейные 498
 — — дифференциальные операции 499
 — — сферические 498
 — — цилиндрические 498
 Корреляции 53, 437—474
 Корреляции двухчастичные (парные) 56, 57
 — трехчастичные 61
 Корреляционная функция 55—57, 286
 — — двухчастичная (парная) 56—59
 — — свойства 58
 Коэффициент диффузии 26
 — — амбиполярной 26, 259, 268
 — — бомбовской 26, 272
 — — в газе нейтральных частиц 26
 — — — слабоионизованной плазме 257
 — — тензор 266
 — отражения 133
 Кроубар 221
 Крука модель 255
 Крускала — Шафранова условие 203
 Кулоновская плазма, кинетические уравнения 285, 286
 — сила 11, 54
 — энергия плазмы 67, 68
 Кулоновские столкновения 232—237
 — — многократные, отклонение заряженной частицы 234—237
 Кулоновское взаимодействие 11
 — сечение 24
 — — многократное рассеяние 237
 Кумулянты 433
- Лагранжевы координаты 204
 Лазерная плазма 40
 Лазер с модулированной добротностью 40
 Ландау затухание 19, 306, 308, 309
 — — квазилинейная теория 411—415
 — — нелинейное взаимодействие волн с частицами 435, 436
 — контур 300, 301
 Ларморовский радиус 16, 27
 Ленарда — Балеску уравнение 472—474
 Ленгмюровские колебания (см. также Волны пространственного заряда и Плазменные волны) 17, 19
 — — высокочастотные 319
 — — кинетическая теория 306
 Лиувилля теорема 357
 — уравнение 71, 282, 470
 Лоренца модель 255
 — — для слабоионизованной плазмы 250
 Лоренцева ионизация 227
 Лоусона критерий 214
- Магнитное давление 15, 88, 491
 — поле с изогнутыми силовыми линиями 489
 — — тороидальное 221—224
 Магнитные поверхности 86
 Магнитный звук, см. Магнитозвуковая волна
 — момент 490
 Магнитогидродинамические (МГД) уравнения 84, 85
 Магнитозвуковая волна 105, 164, 329
 Майера групповое разложение 55, 286, 287
 Макроскопические параметры 73, 74
 Макроскопические (гидродинамические) уравнения, схема замыкания 78
 — — цепочка 77
 Максвелла — Больцмана функция распределения 14, 19, 290
 Максвелловское распределение 14

- Пойнтинга вектор 119
 Пороговые частоты 165
 Порог со стороны высокой плотности 127
 Поток кинетической энергии 120
 — тепла 74
 — частиц 74
 Предел бесконечной проводимости 88
 — малого ларморовского радиуса 396
 — нулевой температуры 396
 Приближение плазменное 13
 — — в проблеме устойчивости 176
 — — соответствие идеализированной плазме 62
 — слабой связи 65
 — случайных фаз 432
 — холодной плазмы 185
 — электростатическое 296, 297
 Примесное излучение 29
 Пробокотрон 191, 213
 — замкнутая система 215
 — открытая система 215
 — стабилизированный 218—220
 Пробокотрон-5 (ПР-5) 219, 220
 Пробный заряд 64, 447—450
 — — длина пробега 236
 — — потенциал в плазме 63, 64
 — — торможение 447
 Пробочное отношение 217
 Проводимость 25
 — полностью ионизированной плазмы 247, 248
 — связь с частотой столкновений 81
 — слабоионизированной плазмы 265, 266
 — тензор 265
 Продольный вариант 490
 «Проект Шервуд» 12, 214
 Пролетный член, см. Баллистический член
 Пучок, продольное торможение 242—244
 — рассыпание 244, 245
 — релятивистский сильноточный 107
 — с тепловым разбросом скоростей (теплой), неустойчивость 364, 367, 415, 416
 Q-машины 35
- Равновесие** 12, 354, 356
 — безразличное 177
 — неустойчивое 177
 — пинча 88, 109
 — проблема 178
 — решений уравнения Власова 289—291
 — устойчивое 177
Равновесный пинч 88
Разряд низкого давления с холодным катодом 30
 — термоэмиссионный дуговой 31—33
 Распределение изотропное 353, 356, 447
 Рассеяние на большой угол 24
 — — малые углы 24
 — некогерентного излучения на флуктуациях плотности 451
 — света 50
 — эксперименты 50, 134
 Резерфордское сечение 24
 Резонансное слияние мод 434
 Рейнольдса число 83
 — — магнитное 84
 Релаксация в плазме, столкновительная 241, 469—474
- Рэлей-тейлоровская неустойчивость 48, 190, 192
 Рэля — Джинса закон 464
- Свисты** 155, 332
 — групповая скорость 155
 Свистящие атмосферники, см. Свисты
 Свободная энергия 59, 445
 СВЧ-диагностика плазмы 129—133
 СВЧ-интерферометр 131
 Сечение слияния двух дейтронов 24
 — ядерных реакций 24
 Сжатие плазмы, поле с минимумом B 220, 221
 Система многих тел 53, 79
 — — — уравнения микроскопические 280
 — — — — статистические 282
 Солитон 23, 96—99
 Солнечный ветер 40, 41, 99
 Средняя длина свободного пробега 24
 Стелларатор 224, 227
 Стокса теорема 497
 Столкновения 24, 25
 — парные 12
 — частота 73, 258
 Схемы замыкания 78
 Сциллак 229
- Тензор давления** 15, 74, 75
 — диффузии 409
Температура 14
Теорема вириала 60
Теория орбит, свойства плазмы 490—492
 — слабых когерентных волн 406
Токамаки 225—227
Томсоновское сечение 50, 451
Тормозное излучение 28, 451
 — — при электрон-ионных столкновениях 468, 469
Точка поворота 487
Трубка потока (силовых линий) 192, 195, 215
Турбулентность слабая 28
Турбулентный нагрев 358
- Ударная волна** 23, 115
 — — бесстолкновительная 99
 — — головной скачок 40, 100
 — — ионно-звукового типа 96
Удельное сопротивление 42
 — — связь с частотой столкновений 81
Удержание плазмы высокотемпературной 20
 — — эксперименты 216—229
 — — — в системах замкнутых 221—227
 — — — — открытых 216—221
Уединенная волна, см. Солитон
Управляемые термоядерные реакторы 12, 177, 214
Управляемый термоядерный синтез 20, 21, 214—216
Уравнение движения 76—78, 475
 — диффузии 408
 — непрерывности 75, 76, 261
 — состояния 60, 61, 85
 — — теория ЧГЛ 103

- Устойчивость плазмы 354
 — — анизотропной замагниченной 393
 — — гидродинамическая, плазма удерживается магнитным полем в поле силы тяжести 188—190, 200—203
 — — — дрейфовый анализ 188, 189
 — — — линейная теория 200—203
 — — — с точки зрения термодинамики 190—196
 — — — энергетическое рассмотрение 189, 190
 — — горячей 364—368
 — — граница 181
 — — монотонно убывающее распределение 355—358
 — — Найквиста метод 369—378
 — — немонотонное распределение 358—364
 — — неограниченной 181—187
 — — Пенроуза критерий 369—378
 — — плоской границы плазма — магнитное поле 208—211
 — — самоудерживаемой ($B = 0$) 211—213
 — — электромагнитные возмущения, плазма без внешних полей 385, 387
- Фарадеево вращение плоскости поляризации 153
 Фарадеевские генераторы 274
 Флуктуации электрического поля 442
 — — — в плазме максвелловской 445
 — — — — немекселловской 446
 — — электромагнитные 450
- Фоккера — Планка уравнение 237—241, 469, 472—474
 Функция распределения 14
 — — возмущенная, локальное приближение 338—340
 — — — при распространении плазменных волн 313—315
 — — двух встречных ионных пучков в электронном газе 419
 — — для двух пучков горячих электронов 354
 — — — — холодных электронов 353
 — — двухчастичная 71, 282
 — — квазилинейные уравнения 406—409
 — — Максвелла — Больцмана 14, 19, 290
 — — максвелловская 14
 — — монотонно убывающая, устойчивость 20, 355—358
 — — немонотонная, устойчивость 358—368
 — — неравновесная 20
 — — одночастичная 70—73, 282
 — — приведенная 55, 282
 — — температура и другие моменты 14
- Хаотизация фаз, см. Перемешивание фаз
 Холла генератор 274
 — параметр 274
 — поле 274
- Циклотронная частота 16
 Циклотронное (синхротронное) излучение 29, 49
 — — замагниченной плазмы 464—466
 Циклотронные волны 332
 Циклотронный резонанс 38, 154
- Чепмена — Энскога схема замыкания 78
 Черенковские следы 442
 Черенковское излучение 29, 450, 451, 466
 Четвертое состояние вещества 11
 Чу — Голдбергера — Лоу (ЧГЛ) теория 102—105
 — — замыкание макроскопических уравнений 186
 — — описание альфвеновских волн 104, 105
- Экранирование движущегося заряда 437
 — слой вокруг зонда 46
 Электромагнитные волны 126—128, 407
 — — дрейфовые 172—174
 — — круговой поляризации 152
 — — малой амплитуды, кинетическая теория 317
 — — отражение от границы плазмы 127, 128
 — — перенос энергии 126
 — — распределение энергии 127
 — — распространение в горячей замагниченной плазме параллельно магнитному полю 330—332
 — — — — — под произвольным углом к магнитному полю 332
 — — — — — поперек магнитного поля 325—329
 — — — условия 125, 126
 — — скорость групповая 126
 — — — фазовая 126
 — — устойчивость изотропного распределения 385
 — — — циклотронные 332
- Электронный газ, удержание магнитным полем 100—102
 Электростатические волны 19, 296, 306, 317, 319
 — — БГК 345, 347
 — — высокочастотные 306
 — — дисперсионное уравнение 305
 — — велинейные 345
 — — — отсутствие запертых частиц 345
 — — — равновесие в присутствии запертых частиц 347
 — — низкочастотные в неоднородной замагниченной плазме 341
 — — распространение в горячей замагниченной плазме параллельно магнитному полю 330
- ЭЛМО 37, 38
 Энергетический принцип 204—208
 — — исследование устойчивости 208—212
 Эпштона — Хартри уравнение 150
 Эхо 425
 — плазменно-волновое 424, 425, 430
 — эксперимент 425, 431

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие авторов	7
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ	11
А. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ	12
§ 1. Равновесие и квазиравновесие	12
§ 2. Дебаевский радиус экранирования	12
§ 3. Параметр неидеальности плазмы	13
§ 4. Функция распределения	14
§ 5. Температура и другие моменты функции распределения	14
§ 6. Магнитное давление	15
§ 7. Дрейф частиц	15
§ 8. Плазменная частота	17
§ 9. Волны в плазме	17
§ 10. Затухание Ландау	19
§ 11. Устойчивость плазмы и управляемый термоядерный синтез	20
§ 12. Ударные волны и солитоны	23
§ 13. Столкновения	24
§ 14. Классическая и бомовская диффузия	25
§ 15. Излучение плазмы	28
Б. СОЗДАНИЕ ПЛАЗМЫ	30
§ 16. Разряд низкого давления с холодным катодом	30
§ 17. Термоэмиссионный дуговой разряд	31
§ 18. Плазменные пушки	33
§ 19. Плазма паров щелочных металлов. Q -машины	35
§ 20. Плазма высокочастотного разряда	35
§ 21. Плазменный фокус	38
§ 22. Солнечная плазма	40
§ 23. Лазерная плазма	40
В. ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ	40
§ 24. Измерение тока и напряжения в плазме	42
§ 25. Плазменные зонды	45
§ 26. Другие методы диагностики плазмы	48
Цитированная литература	51
Дополнительная литература	52
Глава 2. ТЕРМОДИНАМИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА РАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЫ	53
§ 1. Параметр неидеальности	54
§ 2. Распределение Гиббса и корреляционные функции	55
§ 3. Двухчастичные корреляции в равновесной плазме	56
§ 4. Свободная энергия плазмы	59
§ 5. Уравнение состояния плазмы	60
§ 6. Плазма как жидкость	61
§ 7. Идеальная плазма	62
§ 8. Потенциал пробного заряда в плазме	63
§ 9. Другие примеры применения гидродинамической модели плазмы	65
§ 10. Кулоновская энергия плазмы	67
§ 11. Обсуждение	69
Цитированная литература	69
Дополнительная литература	69

Глава 3. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ	70
§ 1. Функция распределения и уравнение Лиувилля	70
§ 2. Макроскопические параметры плазмы	73
§ 3. Макроскопические (гидродинамические) уравнения плазмы	75
§ 4. Двухжидкостная модель плазмы	78
§ 5. Одножидкостная модель плазмы	79
§ 6. Основные приближения, используемые в одножидкостной теории	81
§ 7. Упрощенные одножидкостные и магнитогидродинамические (МГД) уравнения	84
§ 8. Свойства плазмы, описываемой одножидкостной и МГД-теориями	86
§ 9. Динамические свойства плазмы, описываемой одножидкостной и МГД-теориями	91
§ 10. Теория Чу — Голдбергера — Лоу	102
§ 11. Динамический пинч	105
Цитированная литература	109
Дополнительная литература	110
Глава 4. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ	111
§ 1. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы в отсутствие внешних полей ($E_0 = V_0 = 0$)	111
§ 2. Плазменные колебания	113
§ 3. Плазменные колебания в одномерном потоке	116
§ 4. Волны пространственного заряда в горячей плазме	121
§ 5. Поперечные волны в холодной плазме	125
§ 6. СВЧ-диагностика плазмы	129
§ 7. Резонансные колебания плазменного столба	133
§ 8. Волны пространственного заряда в ограниченной плазме	140
§ 9. Диэлектрическая проницаемость холодной замагниченной плазмы ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$)	148
§ 10. Волны в холодной замагниченной плазме, распространяющиеся параллельно магнитному полю ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$)	151
§ 11. Волны в холодной замагниченной плазме, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$)	162
§ 12. Частоты волн в типичных плазмах	165
§ 13. Волны пространственного заряда в ограниченной холодной плазме в присутствии конечного магнитного поля	166
§ 14. Низкочастотные дрейфовые волны в неоднородной плазме	169
Цитированная литература	174
Дополнительная литература	175
Глава 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ	176
А. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ	176
§ 1. Проблема равновесия	178
§ 2. Классификация плазменных неустойчивостей	178
§ 3. Методы исследования устойчивости	188
§ 4. Области устойчивости	181
Б. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ В РАМКАХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	181
§ 5. Двухпотоковая неустойчивость волн пространственного заряда	181
§ 6. Шланговая неустойчивость альфвеновской волны	186
В. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, В РАМКАХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	187
§ 7. Гидродинамическая устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести	188
§ 8. Гидродинамическая устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем, с точки зрения термодинамики; желобковая (перестановочная) неустойчивость	190
§ 9. Макроскопические уравнения, описывающие гидродинамическую устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем	196
§ 10. Гидродинамическая устойчивость плазмы, удерживаемой магнитным полем в поле силы тяжести. Анализ собственных колебаний (линейная теория устойчивости)	200

§ 11. Энергетический принцип	204
§ 12. Исследование устойчивости плоской границы плазма — магнитное поле на основании энергетического принципа	208
§ 13. Исследование устойчивости самоудерживаемой плазмы ($B_z = 0$) на основании энергетического принципа	211
§ 14. Стабилизация за счет закрепления концов силовых линий	213
Г. ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО СИНТЕЗА	214
§ 15. Эксперименты по удержанию плазмы в открытых конфигурациях	216
§ 16. Эксперименты по удержанию плазмы в замкнутых конфигурациях	221
§ 17. Другие эксперименты по удержанию плазмы	227
Цитированная литература	229
Дополнительная литература	230
Глава 6. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ПЛАЗМЕ	231
§ 1. Парные кулоновские столкновения	232
§ 2. Отклонение заряженной частицы при многократных кулоновских столкновениях	234
§ 3. Теория явлений переноса в полностью ионизованной плазме, основанная на уравнении Фоккера — Планка	237
§ 4. Времена релаксации в полностью ионизованной плазме	241
§ 5. Явления переноса в полностью ионизованной плазме	247
§ 6. Кинетическое уравнение Больцмана и модель Лоренца для слабоионизованной плазмы	250
§ 7. Модифицированное уравнение Больцмана	254
§ 8. Коэффициенты переноса в слабоионизованной плазме	255
§ 9. Амбиполярная диффузия	258
§ 10. Коэффициенты переноса в слабоионизованной плазме, находящейся в постоянном однородном магнитном поле	263
§ 11. Амбиполярная диффузия слабоионизованной плазмы поперек магнитного поля	267
§ 12. МГД-генераторы энергии	272
Цитированная литература	278
Дополнительная литература	279
Глава 7. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЛАЗМЫ	280
§ 1. Микроскопические уравнения для системы многих тел	280
§ 2. Статистические уравнения для системы многих тел	282
§ 3. Кинетические уравнения для кулоновской плазмы	285
§ 4. Замыкание цепочки кинетических уравнений	286
§ 5. Кинетическое уравнение нулевого приближения — уравнение Власова	287
§ 6. Кинетическое уравнение первого приближения	288
§ 7. Свойства уравнения Власова	289
§ 8. Свойства кинетического уравнения первого приближения	292
Цитированная литература	293
Дополнительная литература	293
Глава 8. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН	294
§ 1. Уравнение Власова	294
§ 2. Линеаризованное уравнение Власова	295
§ 3. Решение линеаризованных уравнений Власова — Максвелла для электростатических возмущений в отсутствие внешних полей	296
§ 4. Асимптотические решения для $\Phi_k(t)$	300
§ 5. Упрощенный вывод электростатических волн в плазме	304
§ 6. Теория ленгмюровских и ионно-звуковых волн, основанная на уравнении Власова. Затухание Ландау ($E_0 = \mathbf{V}_0 = 0$)	306
§ 7. Возмущение функции распределения плазмы при распространении в ней плазменных волн	313
§ 8. Дисперсионное уравнение для волн в плазме с произвольным равновесным распределением	315
§ 9. Кинетическая теория волн малой амплитуды в изотропной плазме. Электростатические и электромагнитные волны [$\mathbf{E} = \mathbf{V}_0 = 0$, $f_0 = f_0(v^2)$]	317
§ 10. Кинетическая теория волн малой амплитуды в однородно замагниченной плазме [$\mathbf{V}_0 = B_0 \hat{z}$, $\mathbf{E}_0 = 0$, $f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_{\perp}^2, v_{\parallel})$]	320

§ 11. Кинетическая теория волн в холодной замагниченной плазме	324
§ 12. Волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в горячей замагниченной плазме ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$). Электромагнитные волны и бернштейновские моды	325
§ 13. Волны, распространяющиеся параллельно магнитному полю в горячей замагниченной плазме. Электростатические и электромагнитные волны ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$)	330
§ 14. Электромагнитные волны, распространяющиеся под произвольным углом к магнитному полю в горячей замагниченной плазме ($E_0 = 0$, $V_0 = B_0 \hat{z}$)	332
§ 15. Волны в неоднородной горячей замагниченной плазме [$E_0 = 0$, $V_0 = B_0(x) \hat{z}$, $n_0 = n_0(x)$]	333
§ 16. Низкочастотные электростатические волны в неоднородной замагниченной плазме	341
§ 17. Нелинейные электростатические волны (БГК-волны)	345
§ 18. Сравнение гидродинамической теории плазменных волн с кинетической теорией	348
§ 19. Основные результаты кинетической теории волн	349
Цитированная литература	351
Дополнительная литература	352
Глава 9. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ	353
§ 1. Введение	353
§ 2. Устойчивость монотонно убывающих распределений. Теорема Ньюкомба — Гарднера [1, 2]	355
§ 3. Устойчивость немонотонных распределений. Двухпоточковая неустойчивость	358
§ 4. Устойчивость немонотонных распределений в горячей плазме. Неустойчивость пучка с тепловым разбросом скоростей	364
§ 5. Механизм двухпоточковой неустойчивости	368
§ 6. Метод Найквиста и критерий устойчивости Пенроуза	369
§ 7. Ионно-звуковая неустойчивость	378
§ 8. Применение теории двухпоточковой неустойчивости	380
§ 9. Неустойчивости анизотропной плазмы	382
§ 10. Электромагнитные неустойчивости (по отношению к пинчеванию)	383
§ 11. Неустойчивости по отношению к пинчеванию	392
§ 12. Устойчивость анизотропной замагниченной плазмы	393
§ 13. Конусная неустойчивость	394
§ 14. Термодинамические ограничения уровня шумов и инкрементов в неустойчивой плазме	400
Цитированная литература	404
Дополнительная литература	404
Глава 10. НЕЛИНЕЙНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН И НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ	405
§ 1. Необходимость в нелинейной теории плазмы	405
§ 2. Квазилинейные уравнения для функции распределения плазмы [1—3]	406
§ 3. Закон сохранения числа частиц, импульса и энергии в квазилинейной теории	409
§ 4. Затухание Ландау в квазилинейной теории	411
§ 5. Неустойчивость теплого пучка в квазилинейной теории	415
§ 6. Квазилинейная теория двухпоточковой неустойчивости	419
§ 7. Захват электронов отдельной плазменной волной	422
§ 8. Плазменно-волновое эхо	424
§ 9. Нелинейные взаимодействия волн и частиц (слабая турбулентность)	432
Цитированная литература	436
Дополнительная литература	436
Глава 11. ФЛУКТУАЦИИ, КОРРЕЛЯЦИИ И ИЗЛУЧЕНИЕ	437
§ 1. Экранирование движущегося пробного заряда	437
§ 2. Флуктуации электрического поля в плазме	442
§ 3. Флуктуации электрического поля в немаксвелловской плазме	446
§ 4. Торможение пробной частицы. Излучение электростатических волн	447
§ 5. Электромагнитные флуктуации и излучение	450

§ 6.	Рассеяние некогерентного излучения на флуктуациях плотности плазмы	451
§ 7.	Излучение плазмы. Закон Кирхгофа	461
§ 8.	Равновесное излучение плазмы	462
§ 9.	Циклотронное (синхротронное) излучение замагниченной плазмы	464
§ 10.	Расчет излучения плазмы методом пробных источников	466
§ 11.	Кинетические уравнения, учитывающие столкновительную релаксацию в плазме	469
	Цитированная литература	474
	Дополнительная литература	475
Приложение I. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ		476
§ 1.	Уравнения движения	476
§ 2.	Движение частицы в однородных статических электрическом и магнитном полях	476
§ 3.	Движение частицы в медленно меняющихся однородных электрическом и магнитном полях	480
§ 4.	Движение частицы в постоянном однородном магнитном поле и быстро меняющемся электрическом поле малой амплитуды [$\mathbf{B}_0 \neq 0$, $\mathbf{E}(t) \neq 0$]	481
§ 5.	Движение частицы в поле однородной плоской электромагнитной волны большой амплитуды	484
§ 6.	Движение частицы в постоянном неоднородном магнитном поле	486
§ 7.	Адиабатические инварианты	489
§ 8.	Свойства плазмы, следующие из теории орбит	490
	Цитированная литература	492
	Дополнительная литература	492
Приложение II. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ; НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ; КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ		493
Приложение III. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ; СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЕДИНИЦАМИ ИЗМЕРЕНИЯ; СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ		502
§ 1.	Системы единиц	502
§ 2.	Соотношения между единицами измерения и некоторые физические константы	504
§ 3.	Используемые обозначения	504
Приложение IV. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ		509
	Именной указатель	513
	Предметный указатель	515

Н. Кролл, А. Трайвелпис
ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Редактор А. Н. Куксенко
Художник Н. Г. Блинов
Художественный редактор Е. К. Самойлов
Технический редактор В. П. Сизова

Сдано в набор 27/V 1975 г. Подписано
к печати 10/XI 1975 г. Бумага кн. журн.
 $70 \times 108^{1/16} = 16,50$ бум. л. 46,20 печ. л.
Уч.-изд. л. 40,48. Изд. № 2/7730.
Цена 3 р. 59 к. Зак. 0884

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра
революции» Союзполиграфпрома при
Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9