

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. ЛЕНИНСКОГО КОМСОМОЛА

УДК 512.817+515.177+517.54

С.Л.Крушкаль, Б.Н.Апанасов, Н.А.Гусевский

С. Л. КРУШКАЛЬ, Б. Н. АПАНАСОВ,
Н. А. ГУСЕВСКИЙ

УНИФОРМИЗАЦИЯ И КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ

Учебное пособие

Униформизация и клейновы группы.
Учебное пособие. НГУ, 1979, I-92.

Пособие посвящено одному из интенсивно развивающихся направлений современного комплексного анализа - теории униформизации римановых многообразий и клейновых групп. Принцип униформизации, восходящий к классическим работам, является одним из центральных в теории функций, топологии и различных их приложениях. Основные результаты в этой области иллюстрируются многочисленными примерами и задачами, в том числе и нерешенными проблемами. Пособие опирается на материал спецкурсов и спецсеминаров, проводившихся в Новосибирском государственном университете и Институте математики СО АН СССР. Оно является продолжением книги "Клейновы группы в примерах и задачах" тех же авторов, изданной в 1978 году (ссылки на библиографию из "Клейновых групп" ниже будут обозначаться [п°]).



Новосибирский государственный университет, 1979.

НОВОСИБИРСК
1979

I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УНИФОРМИЗАЦИИ

§ I. Что такое униформизация?

Этот параграф является вводным и излагает программу, по которой развивалось и продолжает развиваться сейчас одно из важнейших направлений анализа и топологии.

Понятие униформизации, являющееся одним из основных в комплексном анализе и других областях математики, было введено классиками еще во второй половине прошлого века, когда началось детальное изучение многозначных аналитических функций.

Униформизировать данную многозначную аналитическую функцию $w = F(z)$ (или соответствующие ей аналитическое выражение, множество) означает в своем первоначальном понимании параметрически представить эту функцию с помощью однозначных (uniform) голоморфных или, вообще говоря, мероморфных функций $z = z(t)$, $w = w(t)$, так что $w(t) = F[z(t)]$.

Более точное определение следующее. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{C}^m$ (или \mathbb{CP}^m) униформизируется системой $f = (f_1, \dots, f_m)$ мероморфных в области $D \subset \mathbb{C}^n$ функций, если f является голоморфным накрытием $D_0 \rightarrow A_0$ плотного в A подмножества A_0 ($D_0 \subset D$) с дискретным слоем, на котором транзитивно действует (дискретная) группа G автоморфизмов D , т.е. $f(z') = f(z'')$ только для G -эквивалентных точек $z', z'' \in D_0$.

Мы будем пока в основном говорить об униформизации комплексных алгебраических или более общих аналитических кривых, т.е. римановых поверхностей (одномерных комплексных многообразий с конформной структурой). В § 10 будут приведены некоторые результаты, полученные для многомерных действительных многообразий, допускающих введение на них конформной структуры.

Рассмотрим простейшие примеры.

- 3 -

ПРИМЕР 1. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ (и соответствующая комплексная кривая в \mathbb{C}^2) униформизируется тригонометрическими функциями $x = \cos t$, $y = \sin t$ или рациональными функциями

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2};$$

при этом в первом случае $D_0 = \mathbb{C}$ и G - группа сдвигов $t \rightarrow t + 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, а во втором $D_0 = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ и G - тривиальная группа.

ПРИМЕР 2. Кубическая кривая

$$W^2 = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$$

не допускает рациональной параметризации, однако ее можно униформизировать с помощью эллиптических функций. Именно линейной заменой w и z кривая может быть приведена к виду

$$W^2 = 4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3),$$

где e_1, e_2, e_3 - различные числа, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, и, взяв \wp -функцию Бейерштрасса

$$\wp(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(\zeta-m\omega_1-n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2} \right]$$

с соответствующими периодами ω_1 и ω_2 (так что $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$), где $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0, 0\}$, можно написать $z = \wp(\zeta)$, $W = \wp'(\zeta)$; в этом случае G - свободная абелева группа ранга 2.

Начиная с Римана, многие ведущие математики второй половины прошлого столетия занимались проблемой униформизации произвольной алгебраической кривой, определяемой общим алгебраическим уравнением

$$P(z, w) = \sum_{j,k} \alpha_j z^j w^k = 0, \quad (I)$$

- 4 -

где P – неприводимый полином над полем \mathbb{C} . Вопрос заключается опять в том, чтобы найти параметрическое представление всех пар (z, w) , удовлетворяющих уравнению (I), с помощью однозначных аналитических функций комплексного переменного.

Проблема эта была выдвинута еще раньше, например, потребностями анализа в связи с интегрированием соответствующих алгебраических функций $w(z)$, определяемых такими уравнениями. Более общо с уравнением (I) связывается рациональная функция $R(z, w)$ переменных z, w ($w = w(z)$!), и возникает задача об изучении так называемых абелевых интегралов

$$\int R(z, w) dz,$$

для решения которой опять-таки необходимо иметь параметрическое представление $z = z(t)$, $w = w(t)$.

С каждой алгебраической кривой определенным образом (например указываемым ниже) связывается некоторое неотрицательное целое число r , называемое родом этой кривой. Оказывается, что все кривые рода 0 униформизируются рациональными функциями, рода 1 – эллиптическими функциями, а рода $r > 1$ – мероморфными функциями, определенными на собственных открытых подмножествах плоскости \mathbb{C} , например в круге (другими словами, при $r > 1$ множество решений любого полиномиального уравнения (I) униформизируется соответствующими мероморфными функциями в круге). Это один из самых глубоких результатов математики в целом, получивший далеко идущие обобщения. Он принадлежит Клейну, Пуанкаре и Кёбе.

Введя во множестве пар (z, w) в \mathbb{C}^2 , удовлетворяющих (I), аналитическую структуру с помощью элементов соответствующей алгебраической функции $w(z)$ (или $z(w)$), получим риманову поверхность этой функции. Эта поверхность компактна и является конечнолистной накрывающей сферы. Оказывается, что все компактные римановы поверхности с точностью до конформной эквивалентности (гомеоморфизма, сохраняющего комплексные структуры) получаются таким образом; при этом координаты точек кривой являются мероморфными функциями на римановой поверхности. Следовательно, нужно уметь униформизировать римановы по-

верхности.

Пуанкаре поставил вопрос об униформизации множества решений произвольных аналитических уравнений (другими словами, общих аналитических кривых и даже многообразий), когда в (I) P – не полином, а некоторый сходящийся степенной ряд от двух переменных, рассматриваемый во всей области его существования, т.е. со всем возможными его аналитическими продолжениями. Проблема униформизации алгебраических и произвольных аналитических многообразий была включена Д.Гильбертом в число основных проблем, поставленных в его знаменитом докладе на II Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 г.

Полного решения проблемы униформизации до сих пор еще не получено (за исключением одномерного случая), однако за прошедшее время здесь были даны существенные продвижения, послужившие фундаментом для развития многих важнейших идей и методов в математике. Сюда относятся, в частности, топологические методы, накрывающие пространства, теоремы существования для дифференциальных уравнений с частными производными, теоремы существования и искажения для конформных отображений и т.д.

Важным (и во многих случаях основным) аппаратом для униформизации римановых поверхностей послужила теория квазиконформных отображений, позволившая получить результаты типа одновременной униформизации нескольких и даже всех римановых поверхностей данного рода. Этот вопрос связан с пространствами Тейхмюлера и общей теорией клейниковых групп.

Уже рассмотренные выше простейшие примеры показывают суть униформизации: нужно построить универсальную накрывающую для данной римановой поверхности, на которой (в силу ее односвязности) соответствующие функции по теореме монодромии как раз и будут однозначными.

Построение накрывающих приводит к рассмотрению плоских областей и соответствующих дискретных групп конформных автоморфизмов этих областей. Оказывается, что при подходящем выборе областей эти автоморфизмы будут мебиусовыми, а следовательно, группы – клейниковыми и даже с инвариантной односвязной компонентой. Если обозначить эту компоненту через Δ , а саму группу через G , то исходная (униформизируемая) римано-

ва поверхность S конформно эквивалентна поверхности Δ/G . Любая многозначная аналитическая на S функция f в терминах универсального голоморфного накрытия $\tilde{\mathcal{X}}: \Delta \rightarrow \Delta/G$, т.е. функция $f \circ \pi$ становится однозначной на S . Поэтому под униформизацией римановой поверхности часто понимают пару (G, Δ) или даже саму соответствующую клейнову группу G и говорят, что G униформизирует S . Мы будем понимать униформизацию как раз в этом смысле.

§ 2. Фундаментальная группа и накрывающие пространства

Как уже отмечалось, теория униформизации и теория клейновых групп пронизаны понятиями накрывающего пространства и фундаментальной группы. Поэтому в этом параграфе мы напоминаем эти важнейшие конструкции.

Пусть X – топологическое пространство. Путь в X называется непрерывное отображение f замкнутого интервала $I = [0, 1]$ в X . Путь, концевые точки которого $f(0)$ и $f(1)$ совпадают, называется замкнутым или петлей. Если $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, то в таком случае будем говорить о петле в точке x_0 .

Два пути $f_1, f_2: I \rightarrow X$ называются гомотопными, если существует такое непрерывное отображение $F: I \times I \rightarrow X$, что $F(t, 0) = f_1(t), F(t, 1) = f_2(t)$ для всех $t \in I$ и $F(0, s) = f_1(0) = f_2(0), F(1, s) = f_1(1) = f_2(1)$ для всех $s \in I$.

Нетрудно проверить, что отношение гомотопии является отношением эквивалентности. Мы будем его обозначать символом \sim , а класс эквивалентности пути f – символом $[f]$.

Для двух петель $f_1, f_2: I \rightarrow X$ в одной и той же точке определяется их произведение:

$$(f_1 \cdot f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ f_2(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что если $f_1 = f_2, g_1 \sim g_2$, то и $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$. Пусть теперь x_0 – произвольная фиксированная точка, принадлежащая X . Рассмотрим множество гомотопических классов петель в точке x_0 . Легко проверяется, что это множество будет группой, если операция умножения на нем задается формулой $[f_1] \cdot [f_2] = [f_1 \cdot f_2]$. Эта группа называется фундаментальной группой пространства X в точке x_0 и обозначается через $\tilde{\mathcal{X}}_1(X, x_0)$.

Как видно из определения, фундаментальная группа пространства X зависит от выбора точки x_0 , но можно доказать, что если X линейно связно, то для любых двух точек $x_0, y_0 \in X$ группы $\tilde{\mathcal{X}}_1(X, x_0)$ и $\tilde{\mathcal{X}}_1(X, y_0)$ изоморфны. Поэтому в случае линейно связных пространств можно говорить об абстрактной фундаментальной группе $\tilde{\mathcal{X}}_1(X)$ пространства X .

Непосредственно проверяется, что всякое непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*: \tilde{\mathcal{X}}_1(X, x_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_1(Y, \varphi(x_0))$ по правилу $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. В частности, если φ является гомеоморфизмом, то группы $\tilde{\mathcal{X}}_1(X)$ и $\tilde{\mathcal{X}}_1(Y)$ изоморфны.

Пусть опять X – топологическое пространство. Накрывающим пространством над X , или накрытием называется пара (\tilde{X}, p) , состоящая из пространства \tilde{X} и непрерывного отображения $p: \tilde{X} \rightarrow X$, удовлетворяющих следующему условию: для каждой точки $x \in X$ существует линейно связная (открытая) окрестность U такая, что каждая компонента связности множества $p^{-1}(U)$ при отображении p гомеоморфно отображается на U .

Отображение p называется накрывающим, или проекцией.

Накрывающие пространства тесно связаны с фундаментальными группами. Следующие утверждения устанавливают связь между фундаментальной группой пространства X и фундаментальной группой накрывающего его пространства \tilde{X} .

1) Для любого пути $f: I \rightarrow X$ с начальной точкой x_0 существует такой единственный путь $\tilde{f}: I \rightarrow \tilde{X}$ с начальной точкой $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, что $p \circ \tilde{f} = f$ (поднятие путей).

2) Если g_1 и g_2 – пути в накрывающем пространстве \tilde{X}

с началом в одной точке также, что $p \circ q_1 = p \circ q_2$, то и $q_1 = q_2$ (свойство накрывающей гомотопии).

3) Гомоморфизм $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, где $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, индуцированный проекцией $p : \tilde{X} \rightarrow X$, является мономорфизмом.

4) Пусть \tilde{x}_0 и \tilde{x}_1 — точки в \tilde{X} с одинаковой проекцией x_0 . Тогда образы групп $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ и $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ при отображении p_* являются сопряженными подгруппами группы $\pi_1(X, x_0)$; с другой стороны, каждая подгруппа из класса подгрупп, сопряженных с $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, получается как образ $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ для некоторой точки $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Следовательно, образы $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ для всех $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ образуют полный класс сопряженных подгрупп группы $\pi_1(X, x_0)$.

5) Два накрытия (\tilde{X}_1, p_1) и (\tilde{X}_2, p_2) над X называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow P_1 & \swarrow P_2 \\ & X & \end{array}$$

коммутативна.

Два накрывающих пространства (\tilde{X}_1, p_1) и (\tilde{X}_2, p_2) эквивалентны тогда и только тогда, когда для любых двух точек $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$, $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$, для которых $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$, подгруппы $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ и $p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ принадлежат одному и тому же классу сопряженных подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

6) Гомеоморфизм $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ называется накрывающим, или преобразованием наложения, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \tilde{X} \\ & \searrow P & \swarrow P \\ & X & \end{array}$$

коммутативна.

Множество накрывающих гомеоморфизмов накрывающего пространства (\tilde{X}, p) образует группу относительно суперпозиции

отображений, которую обозначим через $G(\tilde{X}, X)$.

Для любых точек $x \in X$ и $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ группа $G(\tilde{X}, X)$ изоморфна факторгруппе $N[p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]/p_*\pi_1(X, x)$, где через $N[p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ обозначен нормализатор подгруппы $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ в $\pi_1(X, x)$.

7) Особенно важен случай накрывающих пространств, для которых $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ — нормальная подгруппа группы $\pi_1(X, x)$. Такие накрывающие пространства называются регулярными. Можно показать, что накрытие (\tilde{X}, p) будет регулярным тогда и только тогда, когда все подгруппы в \tilde{X} любой петли в точке $x \in X$ с началом в произвольной точке $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ являются либо замкнутыми, либо разомкнутыми.

Если (\tilde{X}, p) — регулярное накрытие над X , то для любых точек $x \in X$ и $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ группа $G(\tilde{X}, X)$ изоморфна $\pi_1(X, x)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$.

8) Накрытие (\tilde{X}, p) пространства X называется универсальным, если \tilde{X} односвязно, т.е. \tilde{X} связно и $\pi_1(\tilde{X})$ — тривиальная группа.

Если (\tilde{X}, p) — универсальное накрытие над X , то группа $G(\tilde{X}, X)$ изоморфна $\pi_1(X)$ и порядок группы $\pi_1(X)$ равен числу листов накрытия (\tilde{X}, p) (числом листов накрытия (\tilde{X}, p) называется общая мощность слоев $p^{-1}(x)$, которая не зависит от выбора точки $x \in X$).

9) Группа $G(\tilde{X}, X)$ действует на слоях $p^{-1}(x)$, $x \in X$, транзитивно тогда и только тогда, когда (\tilde{X}, p) — регулярное накрытие.

Следовательно, если накрытие (\tilde{X}, p) пространства X регулярно, то имеется естественный гомеоморфизм X на $\tilde{X}/G(\tilde{X}, X)$.

10) Если (\tilde{X}, p) — регулярное накрытие над X , то $G(\tilde{X}, X)$ действует на \tilde{X} свободно (без неподвижных точек), а также разрывно, т.е. для каждой точки $\tilde{x} \in \tilde{X}$ существует ее окрестность U такая, что $\varphi(U) \cap U = \emptyset$ для всех $\varphi \in G(\tilde{X}, X) \setminus \{1\}$.

Если X — линейно связно и G — разрывная группа его гомеоморфизмов, действующая свободно, то (\tilde{X}, p) — регулярное накрытие над X/G и $G = G(\tilde{X}, X/G)$.

Следующее утверждение является одним из фундаментальных в теории накрывающих пространств.

II) Пусть X - топологическое многообразие (т.е. локально евклидово хаусдорфово пространство со счетной базой). Тогда для любого класса \mathcal{O} сопряженных подгрупп группы $\pi_1(X, x)$ существует накрывающее пространство (\tilde{X}, p) , соответствующее данному классу \mathcal{O} , т.е. такое, что $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \in \mathcal{O}$.

Отсюда следует, что если H - произвольная подгруппа $\pi_1(X, x_0)$, то существует накрытие (\tilde{X}, p) над X такое, что $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$ для некоторой точки $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Подгруппу H будем называть определенной подгруппой накрытия (\tilde{X}, p) , а про само накрытие (\tilde{X}, p) будем говорить, что оно построено по подгруппе H .

§ 3. Плоские регулярные накрытия

Под поверхностью в этом параграфе будем понимать двумерное топологическое многообразие без края. Поверхность называется плоской, если она гомеоморфна некоторой области на двумерной сфере.

Накрытие $p: \tilde{S} \rightarrow S$ поверхности S , где \tilde{S} - плоская поверхность, называется плоским.

Как мы сейчас увидим, плоские регулярные накрытия естественным способом связаны с униформизацией римановых поверхностей клейновыми группами.

Пусть G - клейнова группа на плоскости, имеющая инвариантную компоненту Δ , а $S = \Delta/G$. Тогда, как отмечалось в § 2, естественная проекция $p: \Delta \rightarrow S$ является регулярным накрытием, в данном случае - плоским, а G есть группа накрывающих гомеоморфизмов этого накрытия.

Пусть теперь T - риманова поверхность, и $h: S \rightarrow T$ - гомеоморфизм; тогда $h \circ p: \Delta \rightarrow T$ будет, очевидно, регулярным накрытием T . Назовем пару (G, Δ) топологической униформизацией поверхности T . Если h - конформный гомеоморфизм, то (G, Δ) назовем униформизацией T .

Каждая риманова поверхность T допускает такую унифор-

мизацию. Именно пусть $p: \tilde{T} \rightarrow T$ - произвольное плоское регулярное накрытие римановой поверхности T . Тогда \tilde{T} естественным образом снабжается конформной структурой, в которой проекция p голоморфна, а группа накрывающих гомеоморфизмов $G(\tilde{T}, T)$ этого накрытия становится группой конформных автоморфизмов T .

Имеется теорема Маскита [44], утверждающая, что существует конформный гомеоморфизм $f: \tilde{T} \rightarrow \Delta$, где Δ - область на римановой сфере, такой, что $fG(\tilde{T}, T)f^{-1} = G$ есть клейнова группа с инвариантной компонентой Δ . Таким образом, всякую риманову поверхность T можно униформизировать клейновой группой.

Следовательно, задача описания всех униформизаций данной римановой поверхности S сводится к описанию всех плоских регулярных накрытий над S .

Оказывается, что каждое плоское регулярное накрытие $\tilde{S} \rightarrow S$ можно охарактеризовать некоторым множеством простых попарно непересекающихся петель на поверхности S .

Пусть v_1, \dots, v_n, \dots - множество петель на S в точках o_1, \dots, o_n, \dots и u_i - некоторый путь, соединяющий o_i с фиксированной точкой o , f_i - элемент $\pi_1(S, o)$, содержащий петлю $u_i^{-1} \cdot v_i \cdot u_i$. Обозначим через N наименьшую нормальную подгруппу $\pi_1(S, o)$, содержащую все элементы f_i , и рассмотрим регулярное накрытие $p: \tilde{S} \rightarrow S$ поверхности S , определяемую подгруппой которого совпадает с N . Легко проверяется, что накрытие (\tilde{S}, p) , определенное таким путем, зависит только от свободных гомотопических классов петель v_1, \dots, v_n, \dots (т.е. классов гомотопных петель без фиксации начальной точки); нормальная подгруппа N корректно определена для любой точки $o \in S$ и также зависит только от свободных гомотопических классов петель v_1, \dots, v_n, \dots . В этом случае мы будем говорить, что нормальная подгруппа N натянута на петли v_1, \dots, v_n, \dots , и писать $N = \langle v_1, \dots, v_n, \dots \rangle$.

Плоские регулярные накрытия над поверхностью S полностью описываются следующими двумя теоремами Маскита [43].

I. Пусть S - ориентируемая поверхность, v_1, \dots, v_n, \dots - множество простых попарно непересекающихся петель на S . Ес-

ли (\tilde{S}, p) - регулярное накрытие с определяющей подгруппой $N = \langle v_1^{\alpha_1}, \dots, v_n^{\alpha_n}, \dots \rangle$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ - целые положительные числа, то \tilde{S} - плоская поверхность.

П. (Теорема о плоских накрытиях). Пусть (\tilde{S}, p) - плоское регулярное накрытие ориентируемой поверхности S с определяющей подгруппой N . Если S - поверхность конечного типа, т.е. $\chi_1(S)$ конечно порождена, то существуют конечное множество простых попарно непересекающихся петель v_1, \dots, v_n и такие целые положительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что $\langle v_1^{\alpha_1}, \dots, v_n^{\alpha_n} \rangle = N$.

Приложение этих теорем Маскита к униформизации римановых поверхностей кляйновыми группами будет дано в § 7.

§ 4. Квазиконформные отображения

Пусть D - область в плоскости \bar{C} . Под квазиконформными отображениями области D понимаются обобщенные гомеоморфные решения $w = f(z)$ уравнения Бельтрами

$$w_{\bar{z}} - \mu(z) w_z = 0, \quad (2)$$

где $\mu(z)$ - измеримая в D функция с

$$\|\mu\|_{\infty} < 1, \quad (3)$$

а $w_z = \frac{1}{2}(w_x - i w_y)$ и $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + i w_y)$ - обобщенные производные, локально суммируемые с квадратом. Неравенство (3) показывает, что мы рассматриваем гомеоморфизмы, сохраняющие ориентацию.

Отображение f будет конформным в римановой метрике

$$ds^2 = \lambda(z) |dz + \mu(z)d\bar{z}|^2, \quad \lambda(z) > 0, \quad (4)$$

если ее ввести в D ; тогда углы почти всюду сохраняются. Мера отклонения этого отображения от обычного конформного удобно определять величиной

$$K(f) = (1 + \|\mu\|_{\infty}) / (1 - \|\mu\|_{\infty}), \quad (5)$$

называемой отклонением. Нетрудно проверить, что $K(f^{-1}) = K(f)$ и для суперпозиции $f_1 \circ f_2$:

$$K(f_1 \circ f_2) \leq K(f_1) K(f_2).$$

Из (5) видно, что $K(f) \geq 1$, причем знак равенства соответствует случаю конформных отображений; тогда (2) переходит в уравнение Коши-Римана

$$W_{\bar{z}} = 0.$$

При $K(f) = K$ отображение f называют также квазиконформным. Функция $\mu_f(z) = \mu(z)$ называется комплексной характеристикой или пилатапшей отображения f .

Иногда вместо μ рассматривают, следуя М.А.Лаврентьеву, две действительные характеристики $p(z) > 1$, $\theta(z)$, связанные с μ соотношением

$$\mu(z) = - \frac{p(z)-1}{p(z)+1} e^{2i\theta(z)}$$

Они имеют простой геометрический смысл: прообразами бесконечно малых кругов из плоскости W служат в плоскости z бесконечно малые (характеристические) эллипсы с отношением больших полуосей к малым, равным $p(z)$, и углом наклона больших полуосей к оси x , равным $\theta(z)$ (если $p(z)=1$, то $\theta(z)$ не определена).

Суть квазиконформности в том, что в малом такие отображения ведут себя (вообще говоря, почти всюду) как аффинные; действительно, в точке z_0 дифференцируемости отображения $w(z)$ выполняется равенство

$$W - W_0 = W_z(z_0)(z - z_0) + W_{\bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + O(|z - z_0|).$$

Квазиконформность можно определить и совершенно иным, чисто геометрическим, путем, что приводит к тому же самому

классу отображений. Именно рассмотрим криволинейный четырехугольник, т.е. жорданову область Q с отмеченными четырьмя граничными точками (вершинами) и упорядоченной парой противоположных граничных дуг. Этот четырехугольник отображается конформно с соответствием вершин на прямоугольник R , и если обозначить длины сторон R , соответствующие первой и второй паре сторон Q , через a и b , то отношение a/b является конформным инвариантом. Оно называется (конформным) модулем четырехугольника Q и обозначается через $\text{mod } Q$.

Оказывается, что гомеоморфизм $f: D \rightarrow \bar{C}$ является K -квазиконформным тогда и только тогда, когда он изменяет модуль любого криволинейного четырехугольника $Q \subset D$ не более чем в K раз:

$$K^{-1} \text{mod } Q < \text{mod } f(Q) < K \text{mod } Q;$$

при этом

$$K(f) = \sup_{Q \subset D} \frac{\text{mod } f(Q)}{\text{mod } Q}.$$

Отметим основные свойства квазиконформных отображений; доказательства можно найти, например, в [4], [67], [38].

1) Для любой измеримой комплексной характеристики $\mu(z)$, определенной в плоскости C , $\|\mu\|_\infty < 1$, существует и при этом единственный квазиконформный автоморфизм $f: \bar{C} \rightarrow \bar{C}$, удовлетворяющий уравнению Бельтрами (2) и оставляющий неподвижными три заданные точки, например $0, 1, \infty$.

2) Если $\zeta = f_0(z)$ — некоторое гомеоморфное решение уравнения (2) в области D , то множество всех (обобщенных) решений этого уравнения в D исчерпывается формулой

$$f(z) = \Phi[f_0(z)], \quad (6)$$

где $\Phi(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция ζ в области $f_0(D)$; другими словами, любые два решения одного и того же уравнения Бельтрами получаются друг из друга суперпозицией с аналитической функцией.

Продолжив μ нулем в $C \setminus D$, из (6) и 1) получим, что:

3) любые две односвязные области D и D' одинакового конформного типа могут быть отображены друг на друга с помощью гомеоморфного решения уравнения (2) при произвольно заданной μ в D (соответственно в D') с $\|\mu\|_\infty < 1$ (аналог теоремы Римана);

4) условия единственности квазиконформного отображения с заданной μ должны обеспечивать единственность аналитической функции Φ в (6), т.е. носят такой же характер, что и в теории конформных отображений;

5) квазиконформные отображения жордановых областей друг на друга продолжаются до гомеоморфизмов замкнутых областей.

6) имеется формула для представления квазиконформных автоморфизмов плоскости, конформных в окрестности бесконечно удаленной точки. Именно, если измеримая в C функция $\mu(z)$, $\|\mu\|_\infty \leq K < 1$, имеет компактный носитель, то гомеоморфное в C решение уравнения (2), нормированное условием $f(z) = z + O(|z|^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$, представляется в виде

$$f(z) = z - \frac{1}{\pi} \iint \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{\zeta - z} \equiv z + T_\varphi(z) \quad (\zeta = \frac{z}{r} + i\eta), \quad (7)$$

где функция $\varphi \in L_p(C)$ при некотором $p > 2$ (точнее $2 < p < p_0(K)$) и является решением интегрального уравнения

$$\varphi - \mu \Pi \varphi = \mu \quad (8)$$

с

$$\Pi \varphi = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\eta}{(\zeta - z)^2} = \frac{\partial T_\varphi}{\partial z}; \quad (9)$$

при этом интеграл (9) понимается в смысле главного значения. Уравнение (8) может быть решено методом последовательных приближений, и это дает

$$\varphi = \mu + \mu \Pi \mu + \mu \Pi (\mu \Pi \mu) + \dots$$

С помощью формул (7), (8) устанавливаются следующие важ-

ные свойства квазиконформных отображений:

7) производные $f_z, f_{\bar{z}}$ К -квазиконформного отображения $D \rightarrow \mathbb{C}$ локально суммируемы в D с некоторой степенью $p > 2$; это отображение абсолютно непрерывно относительно плоской лебеговской меры;

8) семейство нормированных K -квазиконформных автоморфизмов $\bar{\mathbb{C}}$ (или круга U) компактно. Более того, если обозначить через f^{μ} гомеоморфное решение уравнения (2) в $\bar{\mathbb{C}}$, оставляющее неподвижными точки $0, 1, \infty$ с $\|\mu\|_{\infty} \leq K < 1$, то в любом круге $U_R = \{z : |z| < R < \infty\}$

$$|f^{\mu}(z)| \leq A_1 \|\mu\|_{\infty}.$$

и для любых двух точек $z_1, z_2 \in U_R$

$$A^{-1} |z_1 - z_2|^{\frac{p(p-2)}{p}} \leq |f^{\mu}(z_1) - f^{\mu}(z_2)| \leq A |z_1 - z_2|^{\frac{(p-2)/p}{p}},$$

где постоянная A_1 зависит только от K и R , а A — от κ, R и p , $2 < p < p_0(\kappa)$.

9) Если $\kappa = \varepsilon$ достаточно мало, то из (7), (8) получается формула вариации квазиконформных отображений:

$$f^{\mu}(z) = z - \frac{z(z-1)}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\xi) d\xi d\eta}{\xi(\xi-1)(\xi-z)} + O(\|\mu\|_{\infty}^2) \quad (10)$$

с равномерной оценкой остаточного члена на компактах в \mathbb{C} . Отсюда, в частности, следует, что если μ зависит как элемент $L_{\infty}(\mathbb{C})$ непрерывно, дифференцируемым образом или голоморфно от комплексных параметров, то $f^{\mu}(z)$ при каждом фиксированном z (и даже в более сильной норме, включающей L_p -нормы производных $f_z, f_{\bar{z}}$) есть соответственно непрерывная, дифференцируемая или голоморфная функция z , при этом дифференциал отображения $\mu \rightarrow f^{\mu}$ в нуле равен интегральному члену формулы (10).

10) Всякий квазиконформный автоморфизм f верхней полу-

плоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ продолжается на всю плоскость \mathbb{C} равенством $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ для z с $\operatorname{Im} z < 0$; тогда $\mu_f(z) = \mu_f(\bar{z})$. Такое продолжение также переводит H в себя. Индуцированные автоморфизмами H гомеоморфизмы $\bar{R} \rightarrow \bar{R}$ должны удовлетворять определенному условию, найденному А.Берлингом и Л.Альфорсом [10].

С этим условием тесно связаны свойства жордановых кривых, являющихся образами окружностей при квазиконформных автоморфизмах плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Такие кривые называются квазикружностями. Они могут быть неспрямляемыми ни в какой своей части, но в силу 7) имеют цулевую плоскую меру.

Л.Альфорс [4] показал, что замкнутая ориентированная жорданова кривая $L \subset \bar{\mathbb{C}}$, проходящая через бесконечность, является квазикружностью тогда и только тогда, когда для любых трех ее конечных точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, из которых ζ_2 разделяет ζ_1 и ζ_3 , отношение $|\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_3 - \zeta_1}|$ ограничено постоянной, зависящей только от L (для ограниченных кривых требуется ограниченность ангармонического отношения четверки точек); это эквивалентно тому, что у L равномерно ограничено отношение диаметра дуги к длине стягивающей ее хорды.

В частности, инвариантные кривые конечно порожденных квазиконформных групп являются квазикружностями и, следовательно, обладают указанными выше свойствами.

§ 5. Квазиконформные отображения римановых поверхностей и деформации клейновых групп

В случае отображений римановых поверхностей коэффициент $\mu(z)$ должен удовлетворять еще некоторому условию инвариантности, а именно форма $\mu = \mu(z) d\bar{z}/dz$ должна оставаться инвариантной относительно замены локального параметра z на данной римановой поверхности S . Такие формы называются дифференциалами Бельгри. Если локальные параметры z и z' связаны конформным соответствием $z' = h(z)$, то равенство $\mu(z) d\bar{z}/dz = \mu(z') d\bar{z}'/dz'$ дает соотношение

$$\mu(h_z) \overline{h'(z)} / h'(z) = \mu(z).$$

Это означает, что μ - измеримая форма типа $(-1, 1)$ с коэффициентом в касательном расслоении над S .

Пусть f - квазиконформный гомеоморфизм поверхности S на поверхность S' и \tilde{S}, \tilde{S}' - накрывающие эти поверхности, построенные по изоморфным подгруппам из $\mathcal{U}_1(S)$ и $\mathcal{U}_1(S')$; тогда f поднимается до гомеоморфизма \tilde{f} этих накрывающих, если потребовать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S}' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array},$$

где p и p' - соответствующие проекции. Введя на \tilde{S} и \tilde{S}' естественную комплексную структуру, в которой проекции p, p' будут голоморфными отображениями, получим, что дифференциал Бельтрами $\mu_f(z) d\bar{z}/dz$ на S поднимается до дифференциала Бельтрами $\mu_{\tilde{f}}(\xi) d\bar{\xi}/d\xi$, удовлетворяющего соотношению

$$\mu_{\tilde{f}}(f\xi) \overline{\gamma'(\xi)} / \gamma'(\xi) = \mu_{\tilde{f}}(\xi) \quad (\text{II})$$

для всех накрывающих автоморфизмов $\gamma \in G(\tilde{S}, S)$.

Квазиконформные отображения сохраняют измеримую структуру на римановой поверхности, поскольку структура, построенная с помощью метрики (4), эквивалентна исходной, но не сохраняют конформную. Более того, например, любые две замкнутые римановы поверхности одного рода с одинаковым числом проколов квазиконформно эквивалентны. Однако не всякие две гомеоморфные римановы поверхности должны быть и квазиконформно эквивалентными: это, например, не выполняется для плоскости \mathbb{C} и круга U . Другими словами, квазиконформная эквивалентность слабее конформной, но сильнее топологической. В частности, квазиконформные отображения, как будет видно из дальнейшего, сохраняют тип

ветвлений над данной римановой поверхностью.

Нам придется также рассматривать квазиконформные автоморфизмы f плоскости \mathbb{C} , согласованные с общими клейновыми группами G , т.е. такие, что $G_f = fGf^{-1}$ - снова клейновы группы. Для этого нужно опять, чтобы форма $\mu(z) d\bar{z}/dz$, где $\mu = \mu_f$, была G -инвариантом, а следовательно, аналогично (II)

$$\mu(fz) \overline{\gamma'(z)} / \gamma'(z) = \mu(z) \quad \text{для всех } \gamma \in G \quad (z \in \mathbb{C}): \quad (\text{I2})$$

Здесь требуется еще определить μ на предельном множестве $\Lambda(G)$ группы G , когда его мера положительна. Обычно там полагают $\mu(z) = 0$ (ср. с примерами 20 и 25 из [33]). Недавно Д.Суливан [58] показал, что для конечно порожденных групп первого рода это равенство должно выполняться автоматически.

Прямой подсчет дает, что при выполнении (I2) отображение $\tilde{f}_f = f \circ \gamma \circ f^{-1}$ вместе с γ является мебиусовым. Следовательно, гомеоморфизм f индуцирует изоморфизм $\chi_f : G \rightarrow G_f$ по формуле $\chi_f(\gamma) = f\gamma f^{-1}$. Такие изоморфизмы χ_f будем называть квазиконформными деформациями группы G . Впрочем иногда мы будем и этим же термином называть сами отображения f , а также и группы - образы G_f .

Теория квазиконформных отображений дает один из основных способов исследования римановых поверхностей и клейновых групп, а также их приложений.

В дальнейшем нам придется рассматривать и отображения многомерных многообразий. В общем случае квазиконформность можно определить, например, геометрически следующим образом.

Пусть M и M' - два n -мерных римановых многообразия с метриками ρ, ρ' соответственно и \tilde{f} - гомеоморфизм $M \rightarrow M'$. Положим для каждого $p_0 \in M$

$$K(f; p_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{\rho(p, p_0) = r} \rho'(f(p), f(p_0))}{\inf_{\rho(p, p_0) = r} \rho'(f(p), f(p_0))}.$$

Гомеоморфизм f называется квазиконформным, если

$$\sup_M K(f; p_0) = K(f) < \infty.$$

В случае, когда M и M' - области из $\bar{\mathbb{R}}^n$, это определение эквивалентно тому, что f - гомеоморфизм из соболевского класса $W_n^1(M)$ и существует такая постоянная $K < \infty$, что

$$|\operatorname{grad} f(x)|^n \leq K \|f'(x)\|,$$

где $\|f'(x)\|$ - якобиан отображения f . На многомерные квазиконформные отображения переносятся многие дифференциальные свойства плоских отображений. Однако класс пространственных квазиконформных отображений довольно узок, поскольку получаемая для них система дифференциальных уравнений, являющаяся аналогом (2), сильно переопределена. В частности, здесь нет теоремы существования, подобной плоскому случаю, не развиты пока вариационные методы.

Что касается конформных отображений в $\bar{\mathbb{R}}^n$, $n > 2$, то в силу известной теоремы Лиувилля они исчерпываются мебиусовыми, т.е. суперпозициями относительно сфер. При этом мебиусова группа \mathcal{M}_n всех конформных автоморфизмов зависит от $(n^2 + 3n + 2)/2$ параметров.

§ 6. Униформизация римановых поверхностей

Приведем теперь основные результаты по униформизации одномерных комплексных многообразий.

Теорема униформизации Клейна-Паункаре, доказанная в общем случае Паункаре, утверждает, что каждая риманова поверхность S представляется (с точностью до конформной эквивалентности) в виде \hat{S}/Γ , где \hat{S} - одна из трех канонических областей: плоскость \mathbb{C} (сфера), плоскость \mathbb{C} или круг U , а Γ - дискретная группа мебиусовых автоморфизмов S , действующая там свободно (без неподвижных точек) и определяемая с точностью до сопряжения в мебиусовой группе \mathcal{M}_S автоморфизмов \hat{S} .

Случай $\hat{S} = \bar{\mathbb{C}}$, S и U взаимно исключают друг друга. Поверхности S с такими накрытиями называются соответственно эллиптического, параболического и гиперболического типов. Нетрудно показать, что $\hat{S} = \bar{\mathbb{C}}$ только в случае, когда сама S конформно эквивалентна сфере (а следовательно, Γ тривиальна); $\hat{S} = \mathbb{C}$, когда S - конформно эквивалентна либо \mathbb{C} , либо $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, либо тору и соответственно этому Γ либо тривиальна, либо есть группа сдвигов с образующей $z \mapsto z + \omega$ ($\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$), либо есть свободная абелева группа ранга 2 с образующими $z \mapsto z + \omega_1$, $z \mapsto z + \omega_2$, где $\omega_1, \omega_2 \neq 0$ - комплексные числа с $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$.

За исключением этих простейших случаев S эквивалентна кругу, про faktorизованному по фуксовской группе без кручения.

Каноническая проекция $\pi: \hat{S} \rightarrow \hat{S}/\Gamma$ является неравномерным накрытием и униформизирует все функции f на S , поскольку функции $f \circ \pi$ однозначны на \hat{S} .

Приведенная выше теорема допускает обобщение и на поверхности с ветвлением. Сопоставим точкам $p \in S$ функцию $V_\Sigma(p)$, которая равна нулю вне некоторого дискретного множества $\Sigma \subset S$, а на Σ принимает положительные целые значения или ∞ ; предположим еще, что если $\hat{S} = \bar{\mathbb{C}}$, то Σ не должно сводиться к одной точке, а если \hat{S} состоит из двух точек p_1, p_2 , то $V_\Sigma(p_1) = V_\Sigma(p_2)$.

В общем виде теорема униформизации Клейна-Паункаре гласит: всякая риманова поверхность S с выделенным на ней дискретным множеством Σ и заданной функцией $V_\Sigma(p)$ с точностью до конформной эквивалентности представляется в виде $S = \hat{S}/\Gamma$, где $\hat{S} = \bar{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$ или U , Γ - дискретная группа автоморфизмов \hat{S} , а накрытие $\hat{S} \rightarrow \hat{S}/\Gamma$ разветвлено над S в точках $p \in \Sigma$ и имеет там порядки $V_\Sigma(p)$.

Точкам ветвления p соответствуют неподвижные точки стационарных эллиптических подгрупп Γ порядков $V_\Sigma(p)$.

Имеются различные доказательства этой фундаментальной теоремы. Схема их следующая. Топологическим способом, указанным

в § 2, строится универсальная накрывающая \hat{S}_0 поверхности $S_0 = S \setminus \{p \in \Sigma : \nu_{\Sigma}(p) = \infty\}$ так, чтобы накрытие $\pi: \hat{S}_0 \rightarrow S_0$ имело нужные порядки ветвлений над точками $p \in \Sigma$ (когда такие имеются). Затем конформная структура с S_0 поднимается на \hat{S}_0 , как на накрытие, так что накрытие π становится голоморфным и сводится с точностью до эквивалентности к факторизации \hat{S}_0 по группе Γ ее конформных автоморфизмов. Поскольку поверхность \hat{S}_0 односвязна, можно применить теорему Римана о конформном отображении односвязных римановых поверхностей на канонические области.

Несколько иной подход к решению проблемы униформизации был предложен примерно в то же самое время Кёбе.

Общий принцип униформизации, восходящий к Кёбе, заключается в том, что если риманова поверхность \tilde{S} топологически эквивалентна плоской области D , то существует конформный гомеоморфизм \tilde{S} на D .

Тем самым проблема (аналитической) униформизации сводится к топологической проблеме нахождения всех (вообще говоря, разветвленных) плоских накрытий $\tilde{S} \rightarrow S$ данной римановой поверхности S . Решение этой топологической проблемы было изложено в § 3 и дается теоремой Маскита.

В частности, если S — замкнутая ориентируемая поверхность рода $r \geq 1$, то ее фундаментальная группа порождается $2r$ элементами:

$$\mathcal{K}_1(S) = \left\{ a_1, b_1, \dots, a_r, b_r : \prod_{j=1}^r [a_j, b_j] = 1 \right\},$$

(где $[,]$, как обычно, коммутатор), и в качестве определяющей S нормальной подгруппы N можно взять наименьшую нормальную подгруппу, порожденную a_1, \dots, a_r ; тогда поверхность S униформизируется группой Шоттки G рода r — свободной чисто локсодромической клейновой группой с r образующими: $S = \Omega(G)/G$. Это классическая "теорема о разрезах", как раз и доказанная Кёбе.

О дальнейшем развитии метода Кёбе мы будем говорить в следующем параграфе. А сейчас заметим еще, что, как уже отмечалось в § 3, фактически униформизация римановых поверхностей исчер-

пывается клейновыми группами.

С помощью квазиконформных отображений удается получить теоремы униформизации более общего характера, а именно доказать возможность одновременной униформизации нескольких поверхностей. Это было сделано Л.Берсом (см. [35]). Приведем, например, следующую его общую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть G — клейнова группа и $\Omega(G)/G = \bigcup S_j$, где S_j — римановы поверхности с ветвлениями, и пусть $f_j: S_j \rightarrow S_j$ — квазиконформные отображения с $K(f_j) \leq K < \infty$. Тогда существует такая квазиконформная деформация группы G в $G' \subset \mathcal{M}_{\bar{\Delta}}$, что $\Omega(G')/G' = \bigcup S_j$.

Доказательство этой теоремы проводится по следующей схеме. Дифференциалы Бельтрами μ_{f_j} канонически поднимаются с S_j на $\Omega(G)$, а затем равенством $\mu|_{\Delta(G)} = 0$ продолжаются до единого G -дифференциала Бельтрами μ . Группа G_f обладает всеми требуемыми свойствами.

При соответствующем выборе G отсюда получаются предыдущие теоремы униформизации. В качестве другого следствия отметим такой результат: если S и S' — две квазиконформно эквивалентные римановы поверхности гиперболического типа с вырожденными граничными компонентами (т.е. без идеальных граничных кривых), то существует такая квазидискообразная группа G первого рода, что $\Omega(G)/G = S \cup S'$.

Этот результат усиливается до получения еще единственности G в $\mathcal{M}_{\bar{\Delta}}$ за счет выделения гомотопических классов квазиконформных гомеоморфизмов S на S' (ср. § 8), а также обобщается на поверхности с ветвлениями и с невырожденными границами.

В § 8 мы покажем, как униформизируются одновременно все квазиконформно эквивалентные друг другу поверхности.

§ 7. Униформизация с помощью клейновых групп

В этом параграфе будет дано построение и описание всех униформизаций римановых поверхностей клейновыми группами. Эти результаты принадлежат в основном Кёбе и Маскиту.

Пусть S — риманова поверхность, (G, Δ) — ее униформиза-

ции, $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$ - каноническая проекция, $h : \Delta/G \rightarrow S$ - произвольный фиксированный конформный гомеоморфизм.

Рассмотрим точку $x \in S$. Так как $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G$ является, как нетрудно проверить, регулярным разветвленным накрытием (см. § 9), то для любых двух точек $z_1, z_2 \in (\pi^{-1}(x))$ их стабилизаторы G_{z_1}, G_{z_2} в группе G являются конечными группами одного и того же порядка. Это позволяет корректно определить порядок ветвления $v = v(x)$ точки x как порядок стабилизатора G_x произвольной точки $z \in (\pi^{-1}(x))$. Точку $x \in S$ назовем точкой ветвления S , если $v(x) > 1$.

В этом параграфе мы всюду будем предполагать, что все рассматриваемые клейновы группы конечно порождены. Тогда по теореме конечности Альфорса S является конечной римановой поверхностью с конечным числом точек ветвления.

Рассмотрим риманову поверхность \bar{S} конечного типа (p, k) , т.е. замкнутую риманову поверхность \bar{S} с k выколотыми точками. Назовем родом S род \bar{S} .

Пусть (G, Δ) - униформизация поверхности S , $\bar{S} \setminus S = \{y_1, \dots, y_k\}$ и x_1, \dots, x_m - точки ветвления S порядков v_1, \dots, v_m соответственно ($2 \leq v_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$).

Будем говорить, что (G, Δ) униформизирует также поверхность \bar{S} , и считать точки y_1, \dots, y_m точками ветвления \bar{S} бесконечного порядка. Вектор

$$(g, n; v_1, \dots, v_m)$$

назовем сигнатурой униформизации (G, Δ) ; здесь $n = k + m$, и некоторые v_j могут быть равны ∞ .

Из очевидных топологических соображений следует, что векторы $(0, 1, v)$ и $(0, 2, v_1, v_2)$, $v_1 \neq v_2$, не могут быть сигнатурами никакой униформизации. Остальные же векторы такого вида всегда являются сигнатурами в силу теоремы униформизации Клейна-Пуанкаре.

Клейнова группа Γ , построенная в этой теореме, называется разветвленной универсальной накрывающей группой поверхности S . Эта группа полностью определяется сигнатурой (Γ, \bar{S}) в том смысле, что она будет фуксовой или элементарной.

Чтобы описать более сложные униформизации, необходимо рас-

смотреть некоторый класс подгрупп клейновых групп с инвариантной компонентой.

Пусть G - клейнова группа с инвариантной компонентой Δ . Если H - подгруппа G , то $\Omega(H) = \Omega(G)$, и потому H имеет инвариантную компоненту $\Delta(H)$, которая содержит Δ ; эту компоненту $\Delta(H)$ назовем отмеченной компонентой H .

Напомним, что подгруппа H называется факторподгруппой G , если: 1) $\Delta(H)$ односвязна; 2) H не содержит случайных параболических элементов; 3) каждый параболический элемент G с неподвижной точкой, лежащей в $\Delta(H)$, принадлежит H ; 4) H является максимальной подгруппой G , удовлетворяющей условиям 1)-3).

У разветвленной универсальной накрывающей группы G каждая ее факторподгруппа совпадает с самой G .

Все факторподгруппы группы Шоттки тривиальны, и наоборот.

Маскитом [94⁰], показано, что все факторподгруппы клейновой группы G конечно порождены и, более того, исчерпываются элементарными, вырожденными и квазифуксовыми группами.

Существует тесная связь между факторподгруппами группы G и топологией плоского (вообще говоря, разветвленного) накрытия $\pi : \Delta \rightarrow \Delta/G = S$.

Пусть H - подгруппа G . Множество $A \subset \bar{S}$ называется строго инвариантным относительно H в G , если $\gamma(A) = A$ для всех $\gamma \in H$ и $\gamma(A) \cap A = \emptyset$ для всех $\gamma \in G \setminus H$.

Возьмем связное подмножество $Y \subset S$. Пусть A - компонента связности $\pi^{-1}(Y)$, H - стабилизатор A в G . Тогда A строго инвариантно относительно H в G . Будем говорить, что A накрывает Y , а H - накрывающая подгруппа Y .

Следующая теорема показывает связь между факторподгруппами G и строго инвариантными множествами.

ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ [91⁰]. Пусть G - неэлементарная клейнова группа с инвариантной компонентой Δ , которая униформизирует риманову поверхность S с сигнатурой $(g, n; v_1, \dots, v_m)$. Тогда существует множество простых попарно непересекающихся петель v_1, \dots, v_m . $0 \leq m \leq 3p-3+n$, на $S \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ (где x_i - точка ветвления порядка v_i поверхности S), которые делят S на компоненты

связности Y_1, \dots, Y_s , $14s + 2p - 2 + l$, так, что:

- 1) каждая факторподгруппа G является накрывающей подгруппой некоторого Y_i ;
- 2) каждая накрывающая подгруппа любого Y_i есть факторподгруппа G ;
- 3) две факторподгруппы сопряжены в G тогда и только тогда, когда они накрывают одно и то же Y_i ;
- 4) каждая накрывающая подгруппа любой петли v_j является либо тривиальной, либо циклической алгебраической, либо циклической параболической.

Отметим два частных случая этой теоремы. Если $l = 0$, то G является либо элементарной группой с односвязным множеством разрывности, либо вырожденной, либо квазифуксовой группой. Другой крайний случай дает группы Поттки. В этом случае $p = 0, m = p$; петли v_1, \dots, v_p гомологически независимы (как одномерные циклы); существует только одна поверхность Y , которая гомеоморфна сфере с $2p$ внормальными кругами; каждая накрывающая подгруппа Y тривиальна; каждая компонента A множества $\pi^{-1}(Y)$ есть фундаментальная область G .

Назовем униформизацию (G, Δ) римановой поверхности S стандартной, если группа G не имеет кручения и не содержит случайных параболических элементов.

Стандартная униформизация (G, Δ) замкнутой римановой поверхности S характеризуется топологически плоским регулярным накрытием: $h \circ \tilde{\pi} : \Delta \rightarrow S$. Используя теорему о плоских регулярных накрытиях из § 3, можно описать это накрытие с помощью конечного множества простых попарно непересекающихся петель v_1, \dots, v_m на S следующим образом: каждая из петель v_1, \dots, v_m поднимается до петли в Δ , определяющая подгруппа накрытия $\mathcal{K} : \Delta \rightarrow S$ является наименьшей нормальной подгруппой $\tilde{\pi}_1(S)$, натянутой на петли v_1, \dots, v_m .

В § 3 было отмечено также, что любая стандартная униформизация замкнутой римановой поверхности S может быть построена с помощью некоторого указанного выше конечного множества петель v_1, \dots, v_m .

Комбинируя эти замечания, получаем следующую теорему, которая по существу описывает все стандартные униформизации.

Теорема о стандартной униформизации. Пусть S — замкнутая риманова поверхность рода $p > 0$ и $\{v_1, \dots, v_m\}$ — множество простых попарно непересекающихся петель на S . Тогда существует единственная (с точностью до конформной эквивалентности) стандартная униформизация (G, Δ) поверхности S такая, что каждая факторподгруппа группы G является либо фуксовой, либо элементарной и накрытие $h \circ \tilde{\pi} : \Delta \rightarrow S$ построено по наименьшей нормальной подгруппе $\tilde{\pi}_1(S)$, содержащей петли v_1, \dots, v_m .

В этой теореме две униформизации (G_1, Δ_1) и (G_2, Δ_2) поверхности S называются конформно эквивалентными, если существует конформный гомеоморфизм $f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{f} & \Delta_2 \\ \mathcal{T}_1 \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}_2 \\ \Delta_1/G_1 & h_1 & \Delta_2/G_2 \\ & \searrow h_2 & \\ & S & \end{array}$$

коммутативна.

Пусть теперь m — минимальное число петель, указанное в теореме. Тогда ясно, что $m \leq p$. Это минимальное множество петель разбивает S на поверхности Y_1, \dots, Y_s , при этом каждая факторподгруппа G является накрывающей подгруппой некоторого Y_i , $i = 1, \dots, s$.

Выберем петли v_1, \dots, v_m так, чтобы v_1 разделяло Y_2 и Y_1 ; v_2 разделяло Y_3 и $Y_1 \cup Y_2; \dots; v_{s-1}$ разделяло Y_s и $Y_1 \cup \dots \cup Y_{s-1}$, причем v_1, \dots, v_m были неразрывными петлями, лежащими целиком на границе Y_s . После этого продеформируем петли v_1, \dots, v_m так, чтобы предыдущее свойство сохранилось, а петли v_1, \dots, v_m коснулись друг друга в некоторой точке x_0 . Тогда можно выбрать систему образующих $\tilde{\pi}_1(S, x_0)$ следующим образом.

Обозначим через p_i род Y_i ; ясно, что $\sum_{i=1}^s p_i \leq p$. Пусть $p = \sum_{i=1}^s p_i + t$, тогда $t = m - s + 1$. Для каждого $i = 1, \dots, s$ можно найти канонический гомотопический базис $\{A_{ip}, B_{ip}\}$ для поверхности Y_i с базисной точкой x_0 .

и петли $A_1, B_1, \dots, A_t, B_t$ так, что семейство $\{A_{11}, \dots, B_{1p_1}, \dots, B_{sp_s}, A_1, \dots, B_t\}$ есть канонический гомотопический базис S в точке x_0 .

На рис. I показан канонический гомотопический базис поверхности рода 3 в случае, когда $s=2, m=2, p_1=1, p_2=1$.

В результате имеем теорему, которая описывает строение факторподгруппы клейновой группы G , дающей стандартную униформизацию замкнутой римановой поверхности S :

(I). Пусть S — замкнутая риманская поверхность рода $p > 0$, $p = \sum_{i=1}^s p_i + t$ — разложение p , где $p_i > 0, i=1, \dots, s$ (или $s=0$), $t \geq 0$,

и пусть $\{A_{11}, \dots, B_{1p_1}, A_{21}, \dots, B_{sp_s}, A_1, \dots, B_t\}$ — канонический гомотопический базис S . Тогда существует единственная стандартная униформизация (G, Δ) поверхности S такая, что:

1) каждая факторподгруппа G либо элементарна, либо фуксова;

2) для всякого $i=1, \dots, s$ поднятия A_{11}, \dots, B_{1p_1} , начинающиеся в общей базисной точке, порождают факторподгруппу группы G , и каждая факторподгруппа G порождается таким образом;

3) каждая из петель A_1, \dots, A_t поднимается к петле.

Более того, каждая стандартная униформизация конформно эквивалентна униформизации, полученной таким образом.

Эта теорема позволяет дать алгебраическое описание клейновых групп, которые дают стандартную униформизацию:

(II). Пусть клейнова группа G дает стандартную униформизацию замкнутой римановой поверхности S . Тогда G имеет представление вида

$$G = \left\{ A_{11}, B_{11}, \dots, A_{3p_3}, B_{3p_3}, A_1, \dots, B_t : \prod_j [A_{1j}, B_{1j}] = \dots = \prod_j [A_{sj}, B_{sj}] = 1 \right\},$$

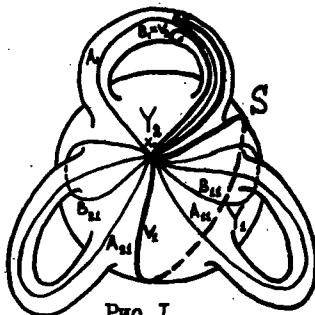


Рис. I

где $p = \sum_{i=1}^s p_i + t$, при этом либо $p_i > 0, i=1, \dots, s$, либо $s=0$

Если (G, Δ) — стандартная униформизация римановой поверхности S , построенная в теореме (II), то клейнова группа G называется группой Кобе.

Рассмотрим несколько простых примеров.

ПРИМЕР 3. Если $s=1, t=0$, то существует только одна факторподгруппа, а именно сама группа G . В этом случае униформизация дается фуксовой группой.

ПРИМЕР 4. Если $s=0, t=2$, то существуют две петли v_1 и v_2 . Эти петли разбивают S на область Y , которая является сферой с четырьмя выброшенными кругами. Каждая компонента связности $\pi_1(Y)$ имеет тривиальный стабилизатор, поэтому все факторподгруппы группы G тривиальны и, следовательно, G является группой Шоттки (см. рис.2)

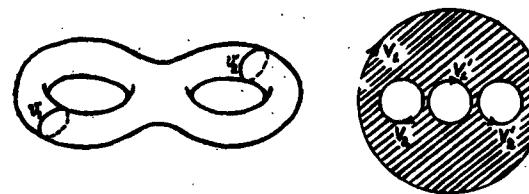


Рис.2. Группа Шоттки рода 2.

ПРИМЕР 5. Если $s=2, p_1=p_2=1, m=1, t=0$ (рис.3 а), то существует одна петля v , которая разбивает S на две поверхности Y_1 и Y_2 , и в этом случае группа G имеет много нетривиальных факторподгрупп. Каждая из поверхностей Y_1, Y_2 представляет собой тор с одним выброшенным кругом, и потому каждая факторподгруппа есть универсальная покрывающая группа тора. Ясно, что G является свободным произведением двух таких групп.

Дадим геометрическую картину этого случая. Пусть G_1 — группа, порожденная отображениями $\gamma_1(z) = z+4$ и $\gamma_2(z) = z+4i$, фундаментальная область F_1 , которой является квадратом (рис.3 б). Если рассмотреть группу G_2 , полученную из G_1 сопряжением с помощью отображения $\gamma(z) = 1/z$, то она будет иметь фундаментальную область F_2 , являющуюся

внешность четырехугольника, ограниченного дугами окружностей (рис.3б). Фундаментальная область $G = \langle G_1, G_2 \rangle$ есть $F = F_1 \cap F_2$ (рис. 3б).

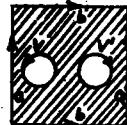


Рис.3. Группа типа Шоттки рода 2 (первый случай)

ПРИМЕР 6. Если $S = 4$, $p_i = 1$, $m = 1$, $t = 1$ (рис. 4а), то в этом случае имеется только одна петля v , не разбивающая S . Тогда существует только одна поверхность Y , которая является тором с двумя вырезанными кругами. Ясно, что все факторподгруппы группы G сопряжены в G и каждая из них является универсальной накрывающей группой тора. Группа G есть группа типа Шоттки, ее фундаментальная область приведена на рис.4б. Очевидно, что подгруппа, порожденная отображениями, которые отождествляют стороны квадрата, является факторподгруппой.

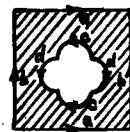
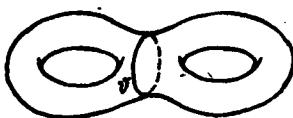


Рис.4. Группа типа Шоттки (второй случай)

Этими примерами исчерпываются все стандартные униформизации поверхностей рода 2. Для поверхностей большего рода картина будет та же самая, за исключением того, что квадраты заменяются на $4p_i$ -угольники (фундаментальные многоугольники фуксовых групп), а фундаментальные области могут быть ограничены большим числом граничных компонент.

В заключение отметим, что существуют и более общие унифор-

мизации, например, клейковыми группами с кручением и со случайными параболическими элементами. Их описание можно найти в [45°].

§ 8. Пространства Тейхмюлера

Поставим теперь следующий вопрос: насколько однозначно определяется конформная структура римановых поверхностей данного рода p ? Еще Риман в своем мемуаре "Теория абелевых функций" (1857 г.) заметил, что при $p > 1$ классы конформной эквивалентности поверхностей зависят от $3p - 3$ комплексных параметров, которые он назвал модулями. При этом он рассматривал поверхности алгебраических функций (конечнолистные разветвленные накрытия сферы), однако, как уже отмечалось в § I, этот случай на самом деле охватывает все замкнутые римановы поверхности.

Вопрос об изучении многообразия этих параметров, его структуры, известный под названием классической проблемы модулей, получил решение (в определенном смысле полное) только в последние десятилетия. Еще классиками было замечено, что решение проблемы упрощается, если конформную эквивалентность заменить более слабой, наложив некоторые топологические ограничения, например, в случае замкнутых римановых поверхностей фиксируя образующие фундаментальной группы. Это приводит к разветвленному накрытию пространства римановых поверхностей, которое удается описать с помощью квазиконформных отображений. Программа исследований в этом направлении была намечена в работах О. Тейхмюлера.

Начнем с рассмотрения замкнутых поверхностей рода $p > 1$. Назовем отмечанием поверхности S выделение системы образующих $\Sigma = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p \in \chi_1(S) : \prod_{j=1}^p [a_j, b_j] = 1\}$ с точностью до внутреннего автоморфизма $\chi_1(S)$, а пару (S, Σ) – отмеченной римановой поверхностью. Так как гомотопность двух гомеоморфизмов $S \rightarrow S'$ эквивалентна совпадению соответствующих изоморфизмов $\chi_1(S) \rightarrow \chi_1(S')$ (с точностью до внутренних автоморфизмов фундаментальных групп), то рассмотрение гомеоморфизмов отмеченной поверхности (S, Σ) на (S', Σ') равносильно фиксации гомотопического класса гомеоморфизмов $S \rightarrow S'$.

Более того, любые две отмеченные поверхности одного рода

гомеоморфны и даже квазиконформно эквивалентны. Это следует из топологической эквивалентности замкнутых поверхностей одного рода и теоремы Нильсена, утверждающей, что всякий автоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(S)$ компактной поверхности S реализуется геометрически, т.е. индуцируется некоторым топологическим автоморфизмом S , определенным с точностью до гомотопии; имея же гомеоморфизм $f: S \rightarrow S'$, можно построить гомотопный ему квазиконформный гомеоморфизм (подробности см., например, в [67°], гл. I, § 6), при этом существенно используется униформизация поверхностей. Эта конструкция обобщается на произвольные конечно порожденные группы и, в частности, на поверхности с конечным числом проколов.

Будем считать гомеоморфизмы $f': S \rightarrow S'$ и $f'': S \rightarrow S''$ эквивалентными, если $f'' \circ (f')^{-1}$ гомотопен конформному отображению $h: S' \rightarrow S''$. Переходя к универсальным накрывающим этих поверхностей, в качестве которых возьмем круг U , получим, что f', f'' поднимутся до автоморфизмов \hat{f}', \hat{f}'' круга U так, что будет коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\hat{f}'} & U \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{f'} & S' \end{array}$$

(и аналогичная для f''), при этом \hat{f}' и \hat{f}'' совпадают на границе (окружности) ∂U .

Множество классов эквивалентности $[S]$ отмеченных поверхностей рода p с n проколами, или, что то же самое, соответствующих классов эквивалентности $[f]$ квазиконформных гомеоморфизмов образует пространство Тейхмюлера $T(S)$ поверхности S . В нем вводится метрика

$$d([f], [f']) = \frac{1}{2} \inf_{f \in [f], f' \in [f']} \ell_n K(f' f^{-1}). \quad (12)$$

Если вместо S взять другую отмеченную поверхность S_1 , то получим изометрический изоморфизм $T(S_1) \rightarrow T(S)$ по

формуле $[f \circ h] \rightarrow [f]$, где h – гомеоморфизм $S_1 \rightarrow S$. Поэтому можно говорить об одном пространстве $T_{p,n}$ (классов эквивалентности) поверхностей типа (p, n) . Изометрии $[f \circ h] \rightarrow [f]$ порождают так называемую модулярную группу $Mod T_{p,n}$ пространства $T_{p,n}$, представляющую собой фактор полной группы квазиконформных гомеоморфизмов некоторой поверхности S_0 по нормальной подгруппе автоморфизмов, гомотопных тождественному, а пространство $R_{p,n}$ самих римановых поверхностей получается как фактор $T_{p,n} / Mod T_{p,n}$. Доказано, что $Mod T_{p,n}$ действует в $T_{p,n}$ разрывно. Например, для торов ($p=1, n=0$) пространство $T_{1,0}$ конформно эквивалентно верхней полуплоскости, а $Mod T_{1,0}$ изоморфна алгебраической модулярной группе.

Применение экстремальных квазиконформных отображений позволяет доказать, что $T_{p,n}$ – клетка (т.е. гомеоморфно евклидову шару) размерности $b_p - 6 + 2n$ (см. [3], [30], [59], [106°]). Это – старый результат, полученный в свое время очень сложным путем Р.Фрике (см. [106°]).

Пространство Тейхмюлера было и остается предметом глубоких исследований многих авторов. Нас здесь в основном будут интересовать результаты, примыкающие к теории униформизации.

Основной вопрос, решавший проблему модулей, – допускает ли $T_{p,n}$ введение в нем комплексной аналитической структуры. Этот вопрос также исследовался многими авторами, вводившими различные локальные координаты в $T_{p,n}$. Доказано, что $T_{p,n}$ – комплексное аналитическое многообразие размерности $m = 3p - 3 + n$, причем комплексная структура, согласованная с метрикой (12), единственна.

Этот результат допускает обобщение на произвольные римановы поверхности, и мы сразу изложим общий случай. Оставляя в стороне тривиальные случаи $m=0$ и $m=1$, будем рассматривать поверхности гиперболического типа.

Пусть S – фиксированная поверхность такого типа. Представим ее в виде $S = H/\Gamma$, где Γ – фuchsова группа (без алгебраических элементов), действующая в верхней полуплоскости H . Рассмотрим комплексное банахово пространство $M^3(\mathbb{C}, \Gamma) = \{ \mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \mu(z) d\bar{z}/dz \in \Gamma \text{-дифференциал Бельтрами},$

$\mu(\bar{z}) = \overline{\mu(z)}$ } с нормой $\|\mu\|_{M^S} = \|\mu\|_\infty$ и его единичный шар $M_1^S(\mathbb{C}, \Gamma) = \{\mu \in M^S(\mathbb{C}, \Gamma) : \|\mu\| < 1\}$. Пусть $Q(\Gamma)$ - группа (относительные суперпозиции) квазиконформных автоморфизмов H с неподвижными точками $0, 1, \infty$, согласованных с Γ , т.е. автоморфизмов f^μ с $\mu \in M_1^S(\mathbb{C}, \Gamma)$, и $Q_0(\Gamma)$ - нормальная подгруппа $Q(\Gamma)$, состоящая из всех $f^\mu \in Q(\Gamma)$, оставляющих неподвижными все точки действительной оси \mathbb{R} . Фактор

$$T(\Gamma) = Q(\Gamma)/Q_0(\Gamma) \quad (13)$$

называется пространством Тейхмюлера группы Γ (и поверхности S).

Классы эквивалентности f^μ будем обозначать через $[f^\mu]$. Они опять соответствуют гомотопическим классам отображений поверхности S .

В $Q(\Gamma)$ вводится метрика Тейхмюлера $d(f^\mu, f^\nu) = -\frac{1}{2} \ell_{\text{пк}} K(f^\mu \circ (f^\nu)^{-1})$; в $T(\Gamma)$ эта метрика в соответствии с (13) принимает вид

$$d([f^\mu], [f^\nu]) = \inf_{f \in [f^\mu \circ (f^\nu)^{-1}]} \ell_{\text{пк}}(f) \quad (12)$$

и превращает $T(\Gamma)$ в полное связное метрическое пространство.

В частности, при $\Gamma = 1$ получается универсальное пространство Тейхмюлера $T(1) = T(H)$; все $T(\Gamma)$ вложены в него естественным образом.

Пусть теперь ω - произвольный гомеоморфизм из $Q(\Gamma)$, для которого $\omega \Gamma \omega^{-1} = \Gamma$. Он индуцирует изометрический автоморфизм ω^* пространства $T(\Gamma)$ по формуле $[f^\mu] \rightarrow [f^\mu \circ \omega]$ и зависит только от значений $\omega|_{\mathbb{R}}$; при этом $(\omega_1 \circ \omega_2)^* = \omega_2^* \circ \omega_1^*$. Множество всех таких ω^* составляет модулярную группу $Mod(T(\Gamma))$ пространства $T(\Gamma)$.

Сейчас мы покажем, что пространство $T(\Gamma)$ может быть биголоморфно погружено в ограниченную область некоторого комплексного банахова пространства. Это результат, принадлежащий

Л.Альфорсу [4] и Л.Берсу [8], является центральным в теории модулей и позволяет определить глобальную аналитическую структуру на $T(\Gamma)$.

Обозначим через $B(L, \Gamma)$ банахово пространство голоморфных в нижней полуплоскости $L = \{z : \text{Im } z < 0\}$ функций $\varphi(z)$, удовлетворяющих уравнению $\varphi(\gamma z) \gamma'^2(z) = \varphi(z)$ для всех $\gamma \in \Gamma$, с нормой

$$\|\varphi\|_{B(L, \Gamma)} = \sup_L (\text{Im } z)^2 |\varphi(z)| < \infty;$$

это - ограничение в гиперболической метрике автоморфные формы веса (-4) , или, другими словами, квадратичные дифференциалы. Размерность $B(L, \Gamma)$ конечна тогда и только тогда, когда Γ - конечно порожденная группа первого рода.

Рассмотрим еще пространство $M(H, \Gamma) = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C} : \mu(z) d\bar{z}/dz = \Gamma \text{ - дифференциал Бельтрами, } \mu(z) = 0 \text{ в } L\}$ с нормой $\|\mu\|_M = \|\mu\|_\infty$. Пусть $M_1(H, \Gamma)$ - его единичный шар, и f_μ - квазиконформные автоморфизмы $\bar{\mathbb{C}}$ с $\mu \in M_1(H, \Gamma)$ и неподвижными точками $0, 1, \infty$; все f_μ конформны в L .

Нетрудно видеть, что равенство $f_{\mu_1} = f_{\mu_2}$ на \mathbb{R} выполняется тогда и только тогда, когда для соответствующих $\tilde{\mu}_j \in M^S(\mathbb{C}, \Gamma)$, полученных из μ_j продолжением из H в L по симметрии, будет $f_{\mu_1} = f_{\tilde{\mu}_2}$ на \mathbb{R} , так что сужения $f_{\mu_j}|_{\mathbb{R}}$ взаимно однозначно соответствуют классам $[f^\mu]$, т.е. точкам $T(\Gamma)$.

Действительно, при $z \in H$ имеем $f_{\tilde{\mu}_j}(z) = h_j \circ f_{\mu_j}(z)$, где h_j - конформное отображение области $f_{\mu_j}(H)$ на H , так что если $f_{\mu_1}^{\tilde{\mu}_1}$ и $f_{\mu_2}^{\tilde{\mu}_2}$ эквивалентны, то функция

$$h(w) = \begin{cases} h_2 \circ h_1^{-1}(w), & w \in f_{\mu_1}(H), \\ f_{\mu_2} \circ f_{\mu_1}^{-1}(w), & w \in f_{\mu_1}(L), \end{cases}$$

продолжается до квазиконформного автоморфизма $\bar{\mathbb{C}}$, конформного в $\mathbb{C} \setminus f_{\mu_1}(\mathbb{R})$. Следовательно, h - мебиусово отобра-

жение и в силу принятой нормировки сводится к тождественному.

Таким образом, если вместо $[f^\mu]$ исходить из классов эквивалентности $[f_\mu]$, то (с точностью до изометрического изоморфизма) получим то же самое пространство $T(\Gamma)$.

Принятая выше нормировка отображений не является существенной. Имеется инвариант, определяющий локально однолистную голоморфную в области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ функцию $f(z)$ с точностью до мебиусова преобразования. Это — производная Шварца

$$\{f, z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2, \quad z = x + iy \in D.$$

Для суперпозиции $f_1 \circ f$

$$\{f_1 \circ f, z\} = (\{f_1, z\} \circ f) f'^2(z) + \{f, z\}, \quad z = f(z), \quad (I4)$$

откуда получаем, что если $f_1 = \gamma$ — мебиусово преобразование, то $\{\gamma \circ f, z\} = \{f, z\}$, а при $f = \gamma$ будет

$$\{f_1 \circ \gamma, z\} = (\{f_1, z\} \circ \gamma) \gamma'^2(z).$$

Если же задана $\psi = \{f, z\}$, то сама функция $f(z) = \eta_1(z)/\eta_2(z)$, где η_1 и η_2 — линейно независимые решения уравнения

$$\eta''(z) + \frac{1}{2} \psi(z) \eta'(z) = 0, \quad (I5)$$

откуда и видно, что f определяется по ψ с точностью до мебиусова автоморфизма $\bar{\mathbb{C}}$. Отметим еще, что для $D = L$ имеется известная оценка $|\{f, z\}| \leq 3/2y^2$ [28], [49]; условие же $|\{f, z\}| < 1/2y^2$ является, как показал Нехари [49], достаточным для однолистности f в L .

В частности, для $f(z) = f_\mu(z)$, $z \in L$, из сказан-

ного выше следует, что $\varphi_\mu = \{f_\mu, z\} \in B(L, \Gamma)$, при этом $\|\varphi\| \leq 3/2$. Производные φ_μ взаимно однозначно соответствуют классам $[f_\mu]$, так что соответствие $\chi : [f_\mu] \rightarrow \varphi_\mu$ является голоморфным гомеоморфизмом $T(\Gamma) \rightarrow B(L, \Gamma)$ в том смысле, что если μ как элемент $L_\infty(\mathbb{C})$ зависит голоморфно от комплексных параметров, то и φ_μ как элемент $B(L, \Gamma)$ зависит от них голоморфно. (Для пояснения заметим, что $T(\Gamma)$ можно определить и как фактор $M_1(H, \Gamma)/M_0(H, \Gamma)$, где $M_0(H, \Gamma) = \{\mu \in M_1(H, \Gamma) : f_\mu|_R = I\}$, с действием M_0 в M_1 справа по формуле суперпозиции $f_{\mu \nu} \equiv f_\nu \circ f_\mu$, $\nu \in M_0$, $\mu \in M_1$.) Следовательно, $\dim T(\Gamma) = \dim B(L, \Gamma)$, и, в частности, $\dim T_{p,n} = 3p - 3 + n$.

Остается показать, что множество $\alpha(T(\Gamma)) = \Delta(\Gamma)$ открыто в $B(L, \Gamma)$ и, значит, является областью. При $\dim T(\Gamma) > 1$ это непосредственно следует из теоремы Брауэра о сохранении области; в общем же случае доказательство значительно сложнее. Альфорс и Вейл [9], модифицировав рассуждения Нехари [49], доказали, что $\Delta(\Gamma)$ содержит шар $\|\varphi\|_{B(L, \Gamma)} < 1/2$, и более того, если для заданного $\varphi \in B(L, \Gamma)$ с $\|\varphi\| < 1/2$ положить $\mu(z) = -2y^2\varphi(z)$, $\lim z = y > 0$, то f_μ согласован с Γ и $\{f_\mu, z\} = \varphi$. Вместе с равенством (I4) это позволяет доказать открытость каждой точки $\varphi \in \Delta(\Gamma)$; независимое доказательство дано в [8]. Известно также, что отображение $\mu \mapsto \varphi_\mu$ при $\dim T(\Gamma) > 1$ может иметь только локальные, но не глобальные голоморфные сечения.

Образами Γ в $T(\Gamma)$ теперь служат квазибукссы группы $\Gamma_\mu = f_\mu \Gamma f_\mu^{-1}$, определяющие поверхности $S_\mu = f_\mu(H)/\Gamma_\mu$.

В силу приведенных результатов пространство $T(\Gamma)$ можно отождествить с его образом в $B(L, \Gamma)$. Тогда элементы $Mod \mathcal{F}(\Gamma)$ являются биголоморфными автоморфизмами $T(\Gamma)$, а само $T(\Gamma)$ есть компонента нуля в $T(1) \cap B(L, \Gamma)$. Если $\dim T(\Gamma) < \infty$, то $T(\Gamma) = T(1) \cap B(L, \Gamma)$, в общем же случае такого утверждения пока нет.

Очень важным свойством пространства $T(\Gamma)$ является его голоморфная выпуклость. Впервые это было установлено Л.Берсом и Л.Эренпрайсом [9] с использованием приведенного

в § 4 геометрического критерия квазикружностей С.Л.Крукаль [31] усилил этот результат, показав, что $T(\Gamma)$ есть область ограниченной голоморфности.

Будем теперь считать, что H/Γ - поверхность конечного типа (p, n) , т.е. $T(\Gamma) = T_{p, n}$. Выбрав в $B(L, \Gamma)$ базис φ_1, φ_m ($m = 3p - 3 + n$) и взяв разложения $\varphi_\mu = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j$, получим биголоморфное погружение $T_{p, n}$ в ограниченную область из \mathbb{C}^n .

Оказывается, что метрика (12) сама вполне определяется комплексной структурой $T_{p, n}$. Именно, как показал Ройден [52] (см. также [19]), эта метрика совпадает с метрикой Кобаяси в $T_{p, n}$, а следовательно, биголоморфно инвариантна. Более того, за некоторым исключением $Mod T_{p, n}$ есть полная (счетная!) группа биголоморфных автоморфизмов $T_{p, n}$, так что $T_{p, n}$ при $\dim T_{p, n} > 1$ заведомо не является однородной областью.

Что касается пространства Римана $R_{p, n} = T_{p, n}/Mod T_{p, n}$, то в силу общей теоремы А.Картана это - нормальное комплексное пространство. Оно имеет неуниформизируемое особенности, вызванные, как показал Раух [51], наличием поверхностей с нетривиальными группами конформных автоморфизмов.

Пространство $T(\Gamma)$ можно описать с помощью уравнения (15) и несколько иначе. Именно сопоставим каждому $\varphi \in B(L, \Gamma)$ мероморфную в L функцию $w_\varphi(z) = \eta_1(z)/\eta_2(z)$, где η_1 и η_2 - линейно независимые решения уравнения (15) с начальными условиями

$$\eta_1(-i) = \eta'_1(-i) = 0, \quad \eta_2(-i) = \eta'_2(-i) = 1.$$

Функция w_φ локально однолистна в L и имеет вблизи $z = -i$ разложение $w_\varphi(z) = (z+i)^{-1} + O(|z+i|)$, а для каждого фиксированного $z \in L \setminus \{-i\}$ отображение $\varphi \mapsto w_\varphi(z)$ определяет голоморфную функцию $B(L, \Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$. Условие $\varphi(\gamma z)\gamma'(z) = \varphi(z)$, $\gamma \in \Gamma$, влечет за собой существование голоморфизма $\chi_\varphi : \Gamma \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{\mathbb{C}}}$ по формуле $\chi_\varphi \circ \gamma = \chi_\varphi(\gamma) \circ w_\varphi$ и группы $\Gamma_\varphi = \chi_\varphi(\Gamma)$ (называемой группой монодромии φ),

при этом для каждого фиксированного γ элементы $\chi_\varphi(\gamma)$ вместе с w_φ зависят голоморфно от $\varphi \in B(L, \Gamma)$.

Элементы $\varphi \in T(\Gamma)$ характеризуются тем, что φ - квазикружности группы (совпадение с Γ_φ с точностью до сопряжения в $\mathcal{M}_{\bar{\mathbb{C}}}$) с инвариантными квазикружностями $w_\varphi(\bar{R})$ (так что $w_\varphi(L)$ - хорданова область) и w_φ продолжается из L до квазиконформного автоморфизма $W_\varphi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, согласованного с Γ_φ . Обозначим $D_\varphi = \bar{\mathbb{C}} \setminus w_\varphi(L)$.

Если Γ - конечного типа, то $\varphi \in T(\Gamma)$ соответствуют φ - группам с инвариантными компонентами $w_\varphi(L)$; см. о них [33], § 7. Для $\varphi \in B(L, \Gamma) \setminus T(\Gamma)$ группы Γ_φ , вообще говоря, не дискретны.

Перейдем теперь непосредственно к вопросам униформизации. С этой целью введем в рассмотрение расслоенное пространство $\tilde{T}(\Gamma)$ над $T(\Gamma)$, положив (см. например, [35⁰])

$$\tilde{T}(\Gamma) = \{(\varphi, z) : \varphi \in T(\Gamma), z \in D_\varphi\}.$$

Это - ограниченная область в $B(L, \Gamma) \times \bar{\mathbb{C}}$. Пространство $\tilde{T}(\Gamma)$ имеет естественную комплексную структуру, определяемую из требования голоморфности проекции $(\varphi, z) \mapsto \varphi$; слой над точками $\varphi \in T(\Gamma)$ - универсальные накрывающие D_φ поверхностей $S_\varphi = D_\varphi / \Gamma_\varphi$.

Действие группы Γ можно продолжить голоморфно на все $\tilde{T}(\Gamma)$ по формуле

$$\gamma(\varphi, z) = (\varphi, W_\varphi \circ \gamma \circ W_\varphi^{-1}), \quad \gamma \in \Gamma;$$

тогда $\tilde{T}(\Gamma)/\Gamma$ - расслоение над $T(\Gamma)$ со слоями S_φ , и эти слои голоморфно зависят от φ . Таким образом, множество поверхностей S_φ превращается в голоморфное семейство римановых поверхностей, причем конформная структура на каждой из них индуцируется комплексной структурой $\tilde{T}(\Gamma)/\Gamma$ при фиксации φ .

В терминах пространства $\tilde{T}(\Gamma)$ естественно решается воп-

рос об одновременной униформизации всех дифференциалов данного порядка на различных поверхностях. Приведем соответствующий результат Л.Берса [8] (см. также [67⁰], гл. V).

Обозначим через $B_q(D_\varphi, \Gamma_\varphi)$ для целого $q > 2$ пространство голоморфных Γ_φ -автоморфных форм веса $(-2q)$ в D_φ , т.е. голоморфных в D_φ решений уравнения $\psi(jz)j^{1/q}(z) = \psi(z)$, $j \in \Gamma$, с нормой $\|\psi\| = \sup_{D_\varphi} \lambda_\varphi^{-q}(z)|\psi(z)|$, где $\lambda_\varphi(z)|dz|$ — гиперболическая метрика в D_φ .

Каждая форма $\psi \in B_q(H, \Gamma)$ канонически продолжается до голоморфной в $\tilde{\Gamma}(\Gamma)$ функции $\Psi(\varphi, z)$, $\Psi(0, z) = \psi(z)$, устанавливающей для каждого $\varphi \in \tilde{\Gamma}(\Gamma)$ линейный топологический изоморфизм $B_q(H, \Gamma)$ на $B_q(D_\varphi, \Gamma_\varphi)$ по формуле $\psi \mapsto \Psi(\varphi, z)$. Эта функция имеет вид

$$\Psi(\varphi, z) = -\frac{2q+1}{\pi} \iint_{\eta < 0} \frac{\eta^{2q-2} \Psi(\bar{\zeta}) w'_\varphi(\zeta)^q d\zeta d\eta}{(w_\varphi(\zeta) - z)^{2q}}$$

Выбирая подходящим образом Ψ , можно дать параметрическое представление всех алгебраических кривых данного рода $r > 1$ (по аналогии с тем, что функция $\rho(z; i, t)$ и ее производная $\rho'(z; i, t)$ униформизируют все кривые рода i).

Отметим еще, что, используя расслоения над $\tilde{\Gamma}(\Gamma)$, Грайфитсу [16] удалось униформизировать некоторые подмножества проективных алгебраических многообразий произвольной размерности.

Возникает вопрос, как обстоят дела в многомерном случае? Оказывается, что тогда возникают неожиданные эффекты.

Поставив перед собой задачу изучить пространство Тейхмюлера n -мерного многообразия M_n , $n > 2$, предположим для простоты, что это многообразие имеет постоянную отрицательную кривизну, т.е. является гиперболическим. Тогда оно униформизируется фуксовской группой $G \subset M_n$ (клейновой группой, действующей в шаре B^n):

$$M_n = B^n/G.$$

Казалось бы, что, рассмотрев теперь множество всех квази-

конформных автоморфизмов f шара B^n , согласованных с группой G , т.е. множество

$$\{f: B^n \rightarrow B^n : q_f(x) < q < \infty, fGf^{-1} \subset M_n\},$$

и профакторизовав его по всей группе мебиусовых автоморфизмов B^n , мы, как и выше (см. формулу (I3)), должны получить пространство Тейхмюлера многообразия M_n . Но оказывается, что получаемое таким путем пространство есть одна точка: пространственные гиперболические формы обладают сильной жесткостью. А именно имеет место.

Теорема (Мостов [97⁰]). Пусть M и M' -мерные полные гиперболические многообразия конечного объема, и пусть существует квазиконформный изоморфизм M на M' ($n > 2$). Тогда существует изометрия M на M' , индуцирующая тот же самый изоморфизм фундаментальных групп.

Иными словами, любой изоморфизм фуксовых групп $G, G' \subset M_n$, $\text{vol } B^n/G < \infty, \text{vol } B^n/G' < \infty$, вида $g \mapsto f \circ g \circ f^{-1} = g'$, где f — квазиконформный автоморфизм шара, может быть реализован в виде $g \mapsto g \circ \gamma^{-1}$, где $\gamma \in M_n$, $\gamma(B^n) = B^n$.

Как недавно установили С.Л.Крункаль [32] и в окончательном виде Д.Сулливан [58], и конечность гиперболического объема в этом эффекте не играет решающей роли: этой жесткостью деформаций обладают все фуксы группы первого рода, за исключением специального класса групп, описанного Б.Н.Апанасовым [23⁰], — групп, фундаментальные полидэры B^n/G которых имеют положительную $(n-1)$ -мерную сферическую меру множества $B^n/G \cap \partial B^n$ предельных вершин (см. [33] , пример 25).

Решающим условием в эффекте жесткости является гиперболичность квазиконформного образа $M' = f(M)$. Оказывается, что в отличие от плоского случая ($n=2$) — этот образ, вообще говоря, не имеет в качестве накрывающей гиперболическое пространство. Поэтому и оказывается тривиальным один из подходов к понятию пространства Тейхмюлера, связанный с формулой (I3). Но и другие подходы (например связанный с квазифуксовыми группами) не дают такой обильной информации, как в случае $n=2$. Это

изване и другими причинами: изучение пространства Тейхмюлера $T(G)$ осложняется неразрывностью вариаций пространственных квазиконформных отображений, топологическими трудностями. Пока лишь получена оценка снизу размерности $T(G)$ для фuchsовых групп G с компактным фундаментальным полидромом, отличным от симплекса (Б.Н.Апанасов [25°], [6]), и для некоторого класса бескоичнопорожденных фuchsовых групп (А.В.Тетенов).

Почти не изучена и граница пространства Тейхмюлера. Известны лишь отдельные ее свойства, обусловленные повышением размерности ($n > 3$). Некоторым ее точкам соответствуют клейновы группы со свойствами, аналогичными свойствам групп из примера 24 [33] (см. там также проблему 8).

Еще более сложным является изучение пространства Тейхмюлера общих клейновых групп $G \subset \mathcal{M}_n$.

§ 9. Разветвленные накрытия римановых поверхностей

Как уже отмечалось в § 2, построение накрывающих \tilde{X} заданной поверхности X (по соответствующим подгруппам ее фундаментальной группы) приводит к неразветвленным накрытиям. Разветвленные же накрытия обладают рядом специфических свойств, которые мы здесь рассмотрим.

Голоморфное отображение $\pi: X \rightarrow Y$ римановой поверхности X на риманову поверхность Y называется безграничным накрытием, если

(а) π - локально собственное отображение, т.е. для каждой точки $y \in Y$ существует открытая окрестность U такая, что сужение отображения π на каждую связную компоненту $\pi^{-1}(U)$ является собственным отображением на U ;

(б) существует такое дискретное подмножество $Y_0 \subset Y$, что сужение $\pi: X \setminus \pi^{-1}(Y_0) \rightarrow Y \setminus Y_0$ является накрытием.

Множество Y_0 называется множеством ветвления накрытия $\pi: X \rightarrow Y$. В случае $Y_0 = \emptyset$ получаются неразветвленные накрытия, основные свойства которых изложены в § 2.

Для любой точки $y_0 \in Y_0$ существует односвязная окрестность V такая, что $V \cap Y_0 = \{y_0\}$ и $\pi^{-1}(V)$ состоит из

связных компонент $U_i, i \in I$, каждую из которых собственное отображение $\pi|_{U_i}$ переводит в V . При этом для каждой компоненты U_i мощность множества $E_i = \pi^{-1}(y_0)$ $\cap U_i$ ($y_0 \in V \setminus \{y_0\}$) конечна и не зависит от выбора точки y_0 . Обозначим ее через $\beta_\pi(y_i)$ и назовем порядком ветвления отображения в точке y_i . Для $y \in V \setminus Y_0$ полагаем $\beta_\pi(y) = 1$.

Разветвленное накрытие $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ римановой поверхности S называется регулярным, если группа $G(\tilde{S}, S)$ накрывающих гомеоморфизмов \tilde{S} действует транзитивно на слоях π^{-1} , т.е. для любой пары точек $x, y \in \tilde{S}$ таких, что $\pi(x) = \pi(y)$, найдется элемент $h \in G(\tilde{S}, S)$, для которого $h(x) = y$.

Разветвленное накрытие $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ называется накрытием регулярного типа, если функция β_π постоянна на каждом слое π^{-1} , т.е. для любых $x, y \in \tilde{S}$ с $\pi(x) = \pi(y)$ выполняется равенство $\beta_\pi(x) = \beta_\pi(y)$.

Всякое регулярное накрытие является накрытием регулярного типа. Обратное, вообще говоря, не верно (см. пример 5). Однако, как показано Л.Гринбергом [15], в случае, когда поверхность \tilde{S} односвязна, всякое накрытие регулярного типа - регулярно.

Пусть X - риманова поверхность, Γ - собственно разрывная группа конформных автоморфизмов X и Γ_0 - подгруппа Γ . Отображение $\pi: X/\Gamma_0 \rightarrow X/\Gamma$, действующее по правилу $\pi(\Gamma_0 \cdot x) = \Gamma \cdot x$, $x \in X$, определяет накрытие римановой поверхности X/Γ_0 над римановой поверхностью X/Γ и называется накрытием, индуцированным включением $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$.

Если Γ_0 и Γ - группы с сигнатурой, действующие на X , такие что $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и Γ_0 не содержит элементов конечного порядка, то индуцированное включением накрытие $\pi: X/\Gamma_0 \rightarrow X/\Gamma$ является накрытием регулярного типа.

Обратно, для любого накрытия регулярного типа $\pi: X \rightarrow Y$ существует универсальное накрытие $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow X$ такое, что $\tilde{\pi}$ индуцируется действующими на \tilde{X} группами $\Gamma_0 = G(\tilde{X}, X)$ и $\Gamma = G(X, Y)$. При этом Γ не содержит элементов конечного порядка и $G(X, Y) \cong N(\Gamma_0, \Gamma)/\Gamma_0$, где $N(\Gamma_0, \Gamma)$ - нормализатор группы Γ_0 в Γ .

В частности, знание группы преобразований наложения Γ

универсального накрытия \tilde{X} позволяет определить группу всех конформных автоморфизмов поверхности X , которую будем обозначать через $\text{Aut } X$. А именно имеет место канонический изоморфизм $\text{Aut } X \cong N(\Gamma, \text{Aut } \tilde{X})/\Gamma$.

Пусть Γ — фуксовая группа в круге U с сигнатурой (g, r, m_1, \dots, m_r) и Γ_0 — подгруппа конечного индекса в Γ .

Кратность накрытия $\pi : U/\Gamma_0 \rightarrow U/\Gamma$, индуцированного включением $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, совпадает с индексом $|\Gamma : \Gamma_0|$ группы Γ_0 в Γ и может быть определена по классической формуле Римана-Гурвица

$$|\Gamma : \Gamma_0| = \mu(\Gamma_0)/\mu(\Gamma), \quad (16)$$

где $\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - 1/m_j)$ — гиперболический объем фундаментального множества группы Γ .

Как заметил Маклафлин [42], формула (16) остается в силе и для конечно порожденных фуксовых групп второго рода, только тогда отношение в правой части теряет свой геометрический смысл, поскольку гиперболическая площадь фундаментальной области становится бесконечной.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 7. Построим накрытие, индуцированное действием циклической группы Γ на плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. Пусть группа Γ порождается алгебраическим элементом γ порядка p . Тогда Γ представляется в виде

$$\Gamma = \{\gamma, \gamma^{-1} : \gamma^p = (\gamma^{-1})^p = \gamma^{-1} = 1\}$$

и имеет сигнатуру $(p, p, 0)$. В качестве γ выберем мебиусово преобразование $z' = \gamma(z)$ с неподвижными точками $\pm i$, для которого

$$\frac{z' + i}{z' - i} = e^{\frac{2\pi i}{p}} \frac{z + i}{z - i}.$$

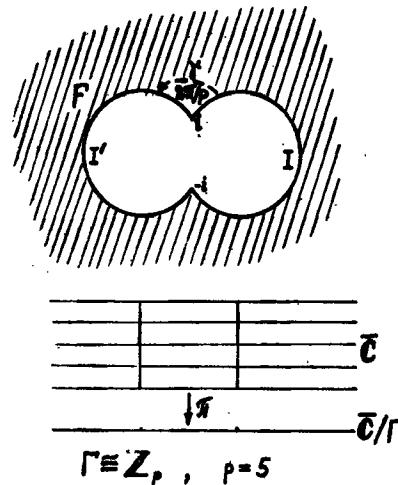


Рис.5.

Пусть I и I' — конгруэнтные дуги окружностей, концы которых повторно встречаются в точках $\pm i$ под углом $2\pi/p$ (см. рис.5). Обозначим через F треугольник в $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченный хордановой кривой IUI' и содержащий бесконечно удаленную точку; он является фундаментальным многоугольником для Γ . Преобразование γ переводит сторону I в I' . После отождествления этих сторон треугольник F превращается в компактную риманову поверхность реда 0. Каноническая проекция $\pi : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}/\Gamma$ дает p -листное накрытие сферы над сферой и имеет порядок ветвления p в точках $\pm i$. Во всех остальных точках $\bar{\mathbb{C}}$ накрытие π неразветвлено. Диаграмма ветвления изображена на рис.5.

Пример 8. Рассмотрим группу Γ с сигнатурой $(0, 3; 2, 3, 6)$, действующую на $\bar{\mathbb{C}}$. Ее представление имеет вид

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : \gamma_1^2 = \gamma_2^3 = \gamma_3^6 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = 1\}.$$

В качестве образующих группы Γ можно взять следующие мебиусовы преобразования (см. [40], с.69):

$$\gamma_1(z) = \left(z - \frac{1+\xi^5}{2} \right) + \frac{1+\xi^5}{2},$$

$$\gamma_2(z) = \xi(z-1)+1, \quad \gamma_3(z) = \xi z,$$

$$\text{где } \xi = e^{2\pi i/6} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пользуясь методом Рейдемайстера - Прейбера (см. [40]), в Γ можно выделить подгруппу Γ_0 , индекса 6, не содержащую элементов конечного порядка; в качестве образующих группы можно взять

$$g_1(z) = z+1+\xi, \quad g_2(z) = z+1-\xi^2.$$

При этом Γ_0 имеет представление

$$\Gamma_0 = \{g_1, g_2 : g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = 1\}$$

и изоморфна фундаментальной группе тора.

Фундаментальным множеством группы Γ служит четырехугольник $F(\Gamma)$ с вершинами $0, \frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi i/12}, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2\pi i/12}$. $F(\Gamma)$ состоит из двух прямоугольных треугольников с углами $\pi/6, \pi/2$ и $\pi/3$, получаемых друг из друга отражением относительно гипотенуз, лежащей на действительной оси. При этом конгруэнтные катеты треугольников отождествляются при действиях группы Γ и превращают $F(\Gamma)$ в компактную риманову поверхность рода 0 с тремя выделенными точками $0, 1$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi i/12} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{2\pi i/12}$, над которыми $\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ имеет порядки ветвления 6, 3 и 2 соответственно.

Фундаментальным многоугольником для Γ_0 служит параллелограмм $F(\Gamma_0)$ с вершинами $0, 1+\xi, 3, 1-\xi^2$, который при действиях группы Γ накрывается шестью экземплярами $F(\Gamma)$. Отождествив противоположные стороны $F(\Gamma_0)$, получим тор \mathbb{C}/Γ_0 . Накрытие тора над сферой $\pi: \mathbb{C}/\Gamma_0 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ разветвлено ровно в шести точках, обозначенных на рис.6 греческими буквами, порядки ветвления которых можно определить по диаграмме на рис.6.

Накрытие π регулярно, и его группа преобразований наложения — циклическая порадка шесть.

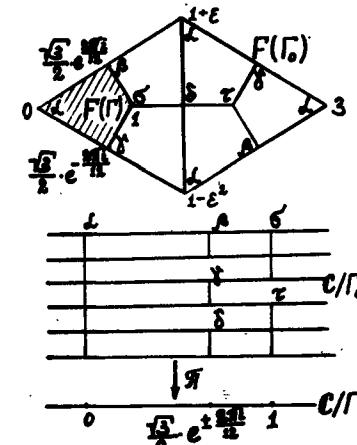


Рис.6.

Пример 9. (Накрытие регулярного типа с трициклической группой преобразований наложения)

Пусть Γ — фuchsова группа в единичном круге U , имеющая представление $\Gamma = \{a, b, c : c^3 = c[a, b] = 1\}$.

В качестве фундаментального многоугольника $F(\Gamma)$ можно взять неевклидов шестиугольник, изображенный на рис.8; эллиптическая вершина $F(\Gamma)$ с углом $2\pi/3$ находится в начале координат.

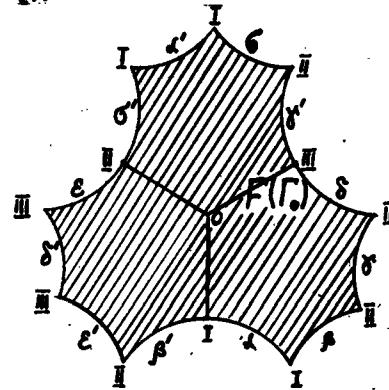


Рис.7.

Определим эпиморфизм θ группы Γ на симметрическую группу S_3 по правилу $\theta(a) = (12), \theta(b) = (23), \theta(c) = (132)$.

Подгруппа $G_0 \subseteq S_3$, оставляющая на месте символ β , состоит из двух элементов:

$$G_0 = \{(1), (12)\}.$$

Группа $\Gamma_0 = \theta^{-1}(G_0)$ имеет следующую полную систему образующих: $a, ac, c^2ac^2, bc^2, cb, c^2bc$.

Рассмотрим неевклидов многоугольник

$$F = F(\Gamma)U \subset (F(\Gamma))U \subset^2 (F(\Gamma)).$$

Его стороны попарно отождествляются порождающими группой Γ , так, как это указано на рис.7. По теореме Пуанкаре F является фундаментальным многоугольником группы Γ в U .

Каноническое отображение $U \rightarrow U/\Gamma$ униформизирует тор $S = U/\Gamma$ с одной отмеченной точкой, над которой все порядки ветвления равны трем. Он получается из многоугольника $F(\Gamma)$ способом, указанным на рис.8. При этом отмеченной точке на торе соответствует эллиптическая вершина в начале координат.

Трехлистное накрытие $\pi: U/\Gamma \rightarrow U/\Gamma$ разветвлено над той же отмеченной точкой и имеет над ней, в силу неразветвленности накрытия $U \rightarrow U/\Gamma_0 = S_0$, порядок 3. Диаграмма накрытия π изображена на рис.8.

Рис.8

Вычислим группу преобразований наложения $G(S_0, S)$.

Имеем

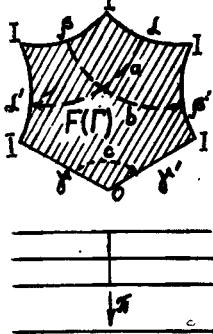
$$G(S_0, S) \cong N(\Gamma_0, \Gamma)/\Gamma_0 \cong N(G_0, S_0)/G_0 \cong 1.$$

Другие примеры накрытий регулярного типа с тривиальной группой преобразований наложения можно найти в [95°], лемма 2.

§ 10. Униформизация многомерных многообразий

Если проблема униформизации римановых поверхностей решена полностью, то относительно униформизации n -мерных многообразий ($n > 2$) известно очень мало. Здесь мы приведем некоторые известные в этом направлении результаты.

Пусть M^n — n -мерное дифференцируемое многообразие без края с конформной структурой, определенной локально квад-



ратичными формами в дифференциалах локальных координат (существование римановой метрики в целом не предполагается). Такое многообразие назовем конформным. Конформное многообразие M^n называется конформно евклидовым, если оно имеет конформную структуру со следующим свойством: каждая точка $x \in M^n$ имеет окрестность, которая может быть гомеоморфно и конформно (с сохранением углов между кривыми) отображена на область евклидова пространства R^n .

Конформно евклидовы многообразия (размерности n) тесно связаны с разрывными группами мебиусовых отображений конформной n -мерной сферы $S^n = R^n \cup \{\infty\}$, т.е. клейновыми группами. В дальнейшем мы покажем, что каждое такое многообразие (при естественных ограничениях) может быть униформизировано клейновой группой. Под униформизацией n -мерного многообразия M^n мы понимаем, как и раньше, клейнову группу $G \subset M_n$ с инвариантной компонентой A такую, что существует конформный гомеоморфизм A/G на M^n .

Пару (\tilde{M}^n, π) , состоящую из конформного многообразия \tilde{M}^n и непрерывного отображения $\pi: \tilde{M}^n \rightarrow M^n$, назовем конформным накрытием конформного многообразия M^n , если каждая точка $x \in M^n$ имеет окрестность $U(x)$ такую, что ограничение π на каждую компоненту связности $\pi^{-1}(U(x))$ является конформным гомеоморфизмом.

Если (\tilde{M}^n, π) есть накрытие в топологическом смысле (см. §2) конформного многообразия M^n , то это накрытие может быть сделано конформным введением на \tilde{M}^n конформной структуры обычным образом. Именно для каждой точки $x \in M^n$ возьмем такую ее координатную окрестность $U(x)$, что $\pi^{-1}(U(x))$ представляет собой объединение окрестностей, каждая из которых гомеоморфно отображается на $U(x)$ с помощью π . Пусть $\tilde{U}(x)$ — произвольная компонента $\pi^{-1}(U(x))$. Зададим на $\tilde{U}(x)$ те же самые локальные координаты, что и на $U(x)$, и определим на $\tilde{U}(x)$ конформную структуру той же самой квадратичной дифференциальной формой, что и на $U(x)$. Тем самым на \tilde{M}^n задается конформная структура, превращающая (\tilde{M}^n, π) в конформное накрытие.

Из сказанного следует, что конформное многообразие M^n

можно унформизировать клейновой группой $G \subset M_n$, если некоторое накрытие \tilde{M}^n этого многообразия отображается конформным гомеоморфизмом на область в S^n .

Одним из первых результатов здесь является теорема Купера [34], утверждающая, что односвязное конформно евклидово многообразие $M^n(n > 2)$ допускает конформное гомеоморфное отображение на область в S^n . Это отображение, называемое развертыванием, единственно с точностью до мебиусовых автоморфизмов S^n .

Пусть (\tilde{M}^n, π) - универсальное накрытие конформно евклидова многообразия M^n , f - конформный гомеоморфизм \tilde{M}^n на область $D \subset S^n$ (существование которого следует из теоремы Купера) и $G(\tilde{M}^n, M^n)$ - группа накрывающих гомеоморфизмов накрытия (\tilde{M}^n, π) . Группа $G(D, M^n)$ накрывающих автоморфизмов накрытия $(D, \pi \circ f^{-1})$, являющаяся образом при отображении f группы $G(\tilde{M}^n, M^n)$ в группу конформных автоморфизмов D , клейнова.

Таким образом, каждое конформно евклидово многообразие $M^n(n > 2)$ можно унформизировать клейновой группой G с односвязной инвариантной компонентой.

Что касается произвольных накрытий конформно евклидовых многообразий (неодносвязных многообразий), то для них никаких результатов такого сорта практически нет.

Отметим также, что, как показано в [35], каждое односвязное компактное конформно евклидово многообразие $M^n(n > 2)$ допускает конформный гомеоморфизм на всю сферу S^n .

Для конформно евклидовых многообразий размерности $n > 2$, имеющих бесконечную абелеву или конечную фундаментальную группу, получены более содержательные результаты.

Пусть $M^n(n > 2)$ - полное конформно евклидово риманово многообразие, т.е. на M^n задана метрика в целом. Тогда, как показано в [36], если секционная кривизна M^n равномерно ограничена снизу от нуля, то M^n допускает конформный гомеоморфизм на некоторое компактное риманово многообразие постоянной положительной кривизны. Такие многообразия имеют конечную фундаментальную группу, а значит, и компактное универсальное накрывающее многообразие, которое, как было отмечено выше,

конформно и гомеоморфно отображается на S^n .

В случае многообразий с бесконечной абелевой фундаментальной группой имеет место следующий результат: универсальное накрывающее многообразие компактного конформно евклидова многообразия размерности $n > 2$ класса C^2 с бесконечной абелевой фундаментальной группой допускает конформный гомеоморфизм либо на сферу S^n с одной выброшенной точкой, либо на S^n с двумя выброшенными точками.

В общем случае (многообразий с бесконечными неабелевыми фундаментальными группами) конформное описание области в S^n , на которую отображается универсальное накрывающее многообразие компактного конформно евклидова многообразия, неизвестно, хотя можно привести некоторые примеры, которые показывают, что эта область может быть очень сложно устроенной (см. примеры 24-27).

Свойства трехмерных многообразий с краем, унформизируемых клейновыми группами, были изложены в [33].

II. ПРИМЕРЫ^(*)

10. Пример универсальной римановой поверхности, содержащей в качестве подобластей любые компактные поверхности с краем (П.П.Белинский [7])

При рассмотрении дифференциальных уравнений, особенно нелинейных, на римановых поверхностях и в других вопросах приходится иметь дело с переменными поверхностями, пребегающими некоторое их семейство. Здесь удобнее определять соответствующие функции на некоторой единой поверхности, содержащей все поверхности данного семейства как подобласти. Ниже строится универсальная поверхность для всех компактных поверхностей с краем; при этом поверхности рассматриваются с точностью до конформной эквивалентности.

Назовем поверхность типа (g, p, m) риманову поверхность, получаемую из некоторой компактной поверхности рода g вырезанием p дырок (односвязных областей с аналитическими границами) и выкашиванием еще m точек ($g, p, m \gg 0$).

Будем доказывать наличие на поверхности в качестве подобластей поверхностей типа $(g, p, 0)$, ибо поверхности типа (g, p, m) получаются дополнительными проколами из поверхностей типа $(g, p, 0)$; для простоты записи вместо $(g, p, 0)$ будем писать (g, p) .

Сначала рассмотрим поверхности фиксированного типа (g, p) и выделим счетное всюду плотное множество поверхностей $\{R_k\}$ в пространстве Тейхмюлера T_g (замкнутых поверхностей рода g). Всякая поверхность $R(g, p)$ типа (g, p) с краем может быть расширена до некоторой замкнутой поверхности $\tilde{R}(g)$ рода g (дырки заклеиваются дисками). Варьируя квазиконформно диски (достаточно хотя бы один из них), можно проверять модули $\tilde{R}(g)$ так, чтобы образы $\tilde{R}(g)$ заполнили целую окрестность

^(*) Примеры I-9 помещены в § I, 7 и 9.

в пространстве Тейхмюлера (см. [670]). В этой окрестности будет хотя бы одна поверхность из счетной базы $\{R_k\}$. Другими словами, все поверхности типа (g, p) являются подобластями поверхностей из счетной последовательности $\{R_k\}$.

Возьмем на каждой поверхности R_k счетное всюду плотное множество точек $\{P_{kj}\}$, $j = 1, 2, \dots$, с их окрестностями гиперболического радиуса r_{kj} , так чтобы $r_{kj} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Обозначим через R_{kj} поверхность R_k с выбраненным (гиперболическим) кружком с центром P_{kj} . Так как центры кружков расположены в R_k всюду плотно и их радиусы стремятся к нулю (при $j \rightarrow \infty$), то из сказанного выше следует, что произвольная поверхность типа (g, p) , которая, как мы уже видели, являлась подобластью R_k , будет и подобластю бесконечного множества поверхностей R_{kj} (нам достаточно хотя бы одной).

Остается разместить поверхности R_{kj} на одной универсальной поверхности. Для этого возьмем плоскость, на ней счетное число непересекающихся кругов и подклеймем вдоль ограничивающих эти круги окружностей поверхности R_{kj} . Для полной универсальности нужно повторить эту процедуру для всех родов $g = 1, 2, \dots$

II. Пример регулярного накрытия $\tilde{S} \rightarrow S$ над заданной римановой поверхностью S с заданной конечной группой преобразований наложения $G(\tilde{S}, S)$, совпадающей с $\text{Aut } \tilde{S}$ (Л.Гринберг [15])

Пусть S — компактная риманова поверхность рода g и G — конечная нетривиальная группа. Выберем множество образующих x_1, \dots, x_k для G такое, что

- а) x_i имеет порядок $v_i > 1$, $i = 1, \dots, k$;
- б) $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k = 1$;
- в) $k > 6g - 3$ и $k > 6$, если $g \leq 1$.

Такой выбор всегда можно сделать, добавляя к списку образующих элементы вида x , x^{-1} , где $x \in G \setminus \{1\}$.

Л.Гринберг [15] установил, что риманову поверхность S можно униформизировать максимальной фуксовской группой Γ (не содержащейся в другой фуксовской группе) сигнатуры $(v_1, \dots, v_k; g)$

с достаточно большим числом элементов конечного порядка, т.е. в случае, когда выполнено условие (в). Пусть $S = D/\Gamma$ и Γ порождается элементами a_i, b_i, c_j , $1 \leq i \leq g$, $1 \leq j \leq k$, с определяющими соотношениями $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^k c_j = 1$, $c_j^{-1} = c_j$, $1 \leq j \leq k$.

Определим эпиморфизм группы Γ на группу G по следующему правилу:

$$\theta(a_i) = \theta(b_i) = 1, \quad i = 1, \dots, g; \quad \theta(c_j) = x_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пусть $\Gamma_0 = \text{Ker } \theta$. Поскольку c_j и x_j имеют одинаковый порядок, группа Γ_0 не содержит элементов конечного порядка и $\Gamma/\Gamma_0 \cong G$. Пусть $\tilde{S} = D/\Gamma_0$ и $r: \tilde{S} \rightarrow S$ – регулярное накрытие, индуцированное групповым включением $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

Для группы преобразований наложения накрытия r имеем изоморфизм

$$G(\tilde{S}, S) \cong N(\Gamma_0, \Gamma)/\Gamma_0 \cong \Gamma/\Gamma_0 \cong G.$$

Вычислим теперь полную группу конформных автоморфизмов поверхности \tilde{S} . Для этого заметим, что $\Gamma \subset N(\Gamma_0, \text{Aut } D)$ и Γ – максимальная фуксовая группа. Следовательно, $\Gamma = N(\Gamma, \text{Aut } D)$ и $\text{Aut } \tilde{S} \cong N(\Gamma_0, \text{Aut } D)/\Gamma_0 \cong \Gamma/\Gamma_0 \cong G$.

12. Пример компактной римановой поверхности с тривиальной группой конформных автоморфизмов (Р.Аккола [1]).

Пусть S – компактная риманова поверхность рода g , на которой выделено конечное множество E такое, что из всех конформных автоморфизмов S только тождественный оставляет E инвариантным. Пусть $\Phi: \tilde{S} \rightarrow S$ – p -листное разветвленное накрытие с множеством ветвления E и с тривиальной группой преобразований наложения, для которого выполнено условие $r_6 > 2p(p-1)$, где $r_6 = \sum_{t \in S} [\beta_\Phi(t)-1]$ – сумма всех индексов ветвления накрытия Φ .

Если p простое и больше 2, то Φ – максимальное строго разветвленное накрытие в смысле Акколы [1], обладающее следующими свойствами:

- a) $G_\Phi(\tilde{S}, S)$ является центральной подгруппой в $\text{Aut } \tilde{S}$;
 - б) каждый конформный автоморфизм \tilde{S} опускается до конформного автоморфизма поверхности S ;
 - в) $\text{Aut } \tilde{S}/G_\Phi(\tilde{S}, S) \subset \text{Aut}_E S$, где $\text{Aut}_E S$ – все конформные автоморфизмы S , оставляющие инвариантным множество E .
- В силу выбора множества E имеем $\text{Aut}_E S = \{1\}$ и $G_\Phi(\tilde{S}, S) = \{1\}$, откуда $\text{Aut } \tilde{S} = \text{Aut } \tilde{S}/G_\Phi(\tilde{S}, S) \subset \{1\}$,

или

$$\text{Aut } \tilde{S} = \{1\}.$$

Род \tilde{S} поверхности \tilde{S} определяется из соотношения Римана-Гурвица

$$2\tilde{g} - 2 = p(2g - 2) + r_6$$

и минимален при $g=0$, $p=3$ и $r_6=14$. В этом случае $\tilde{g}=5$.

Для построения поверхности \tilde{S} рода $\tilde{g}=5$ в качестве E можно выбрать любое множество из восьми точек на расширенной комплексной плоскости $S = \bar{\mathbb{C}}$, которое не остается инвариантным ни при каком дробно-линейном отображении, кроме тождественного. Потребуем, чтобы трехлистное накрытие Φ имело порядки ветвления 2 над двумя точками множества E и порядки ветвления 3 над остальными шестью. При этом Φ не будет накрытием регулярного типа, и, следовательно, $G_\Phi(\tilde{S}, S) = \{1\}$. Условие $r_6 > 2p(p-1)$ проверяется непосредственно.

Изложенный пример не дает аналитического описания получаемой римановой поверхности. Такое описание в терминах соответствующей фуксовой группы дается в следующем примере, где строится целый класс поверхностей с аналогичным свойством: $\text{Aut } S = \{1\}$.

13. Примеры фуксовых групп, униформизирующих компактные римановы поверхности с тривиальной группой конформных автоморфизмов (А.Д.Медных [46])

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, который мы будем рассматривать как модель плоскости Лобачевского с метрикой $d_6 = |dz|/(1-|z|^2)$. Для заданного простого числа $p > 3$ определим три подстановки на p -символах

$$\xi = (p-1, p-2, \dots, 4, 3, 1, p, 2), \eta = (1, 4, 6, \dots, p-1, 3, 5, \dots, p, 2),$$

$$\tilde{\xi} = (1, 2, \dots, p-1, p),$$

которые удовлетворяют условию $\xi \eta = \tilde{\xi}$.

Пусть, далее, заданы x циклов длины p , для которых выполнено равенство

$$\theta_1 \theta_2 \dots \theta_x = \xi, \quad (17)$$

где x — целое число, выбираемое из условия $x > 2p$.

В круге D построим неевклидов треугольник OAB , вершина которого O находится в точке $z=0$, а углы при вершинах O, A и B равны соответственно π/pr , π/p и π/x . Построенный треугольник будем обозначать через F , а его сторону AB через Γ . Соответствующие им при отражении относительно стороны OA треугольник и сторону обозначим через F^- и Γ^- . Пусть $y = e^{2\pi i/pr} z$ — эллиптическое преобразование D , имеющее порядок pr . Рассмотрим не-

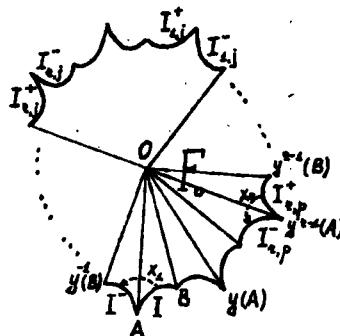


Рис.9.

неевклидов многоугольник

$$F_0 = \bigcup_{l=0}^{pr-1} y^l(F \cup F^-),$$

который имеет $2pr$ сторон, определяемых через стороны треугольников F и F^- по формулам

$$\Gamma_{k,j}^+ = y^{jx+k-1}(I), \quad \Gamma_{k,j}^- = y^{jx+k-1}(I^-); \\ k=1, 2, \dots, x, \quad j=1, 2, \dots, p;$$

(см. рис.9).

Через x_k обозначим эллиптические преобразования порядка p , которые отображают сторону $I_{k,p}^+$ на $I_{k,p}^-$, $k=1, 2, \dots, x$. При помощи подстановок из [17] зададим отображения, попарно отождествляющие стороны многоугольника F_0 :

$$T_{k,j} = y^{rx_k(j)} x_k y^{-rj}, \quad k=1, \dots, x; \quad j=1, \dots, p.$$

Заметим, что $T_{k,j}$ отображает сторону $I_{k,j}^+$ на $I_{k,\theta_k(j)}^-$. По теореме Шункара преобразования $T_{k,j}$ порождают фуксову группу (см. [33], с.76),

$$\Gamma_0 = \{T_{k,j}, \quad k=1, \dots, x, \quad j=1, \dots, p\},$$

для которой Γ_0 является фундаментальным многоугольником. При этом Γ_0 не содержит эллиптических элементов и определяет компактную риманову поверхность $T = D/\Gamma_0$.

Укажем теперь явный вид подстановок в (17), которым будет соответствовать риманова поверхность $T = D/\Gamma_0$ с тривиальной группой конформных автоморфизмов. Положим

$$\theta_k = \xi^{(-1)^k}, \quad k=1, \dots, x-2, \quad \theta_{x-1} = \xi, \quad \theta_x = \eta, \quad (18)$$

если x четно, и

$$\theta_k = \xi^{(-1)^k}, \quad k=1, \dots, x-4; \quad \theta_{x-3} = \xi^2, \quad \theta_{x-2} = \xi^{-1}, \quad \theta_{x-1} = \xi, \quad \theta_x = \eta, \quad (19)$$

если x нечетно.

Можно доказать (см. [46], теорема I), что, если p — простое число > 3 , $x \geq 2p$ и T — риманова поверхность, определяемая условиям (18) или (19), то $\text{Aut } T \cong \{1\}$.

I4. Пример компактной римановой поверхности S с циклической группой $\text{Aut} S$ (А.Д.Медных [46])

Пусть $S = \mathbb{C}$ и N - натуральное число > 2 . Пусть, далее, p - простое число такое, что $p \equiv 1 \pmod{2N^2}$. Покажем, что существуют компактная риманова поверхность \tilde{S} и p -листное накрытие регулярного типа $\phi: \tilde{S} \rightarrow S$ такие, что $G(\tilde{S}, S) \cong \{1\}$ и $\text{Aut } \tilde{S} \cong \mathbb{Z}_N$, где \mathbb{Z}_N - циклическая группа порядка N .

Пусть $p = 2m_0 N^2 + 1$, $(m_0 > 1)$, $\xi = (12 \dots p)$ и T - такой цикл длины p , что $(\xi^{2m_0 N} T)^N = 1$.

Обозначим через i_K остаток от деления числа K на p . В обозначениях предыдущего примера положим $x = Np$ и

$$\theta_x = \xi^{(-1)^{i_K}}, \quad p \nmid K, \quad i < K < x, \\ \theta_{e_p} = \xi^{(\ell-1)m} T^{-(\ell-1)m}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N.$$

Условие (I7) на подстановки θ проверяется непосредственно.

Имеем $\tilde{S} = D/\Gamma$ и $S = D/\Gamma$, где $\Gamma = \langle \gamma, \Gamma_0 \rangle$ - группа порожденная γ и Γ_0 . Из леммы I.2 работы [46] следует, что $N(\Gamma_0, \text{Aut } D) = \sum_{\ell=0}^{q-1} \gamma^{\ell} \cdot p^2 \Gamma_0$ и $N(\Gamma_0, \Gamma) = \Gamma_0$, откуда получаем изоморфизмы

$$\text{Aut } \tilde{S} \cong N(\Gamma_0, \text{Aut } D)/\Gamma_0 \cong \mathbb{Z}_N$$

и

$$G(\tilde{S}, S) \cong N(\Gamma_0, \Gamma)/\Gamma_0 \cong \{1\}.$$

Следующий цикл примеров (I5-22) описывает некоторые многообразия, униформизируемые клейновыми группами.

Пример I5. Пространства линзы

Пусть $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 : |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ - трехмерная сфера и p, q - взаимно простые целые числа. Определим отображение $h: S^3 \rightarrow S^3$ формулой

$$h(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/p} z_0, e^{2\pi i q/p} z_1). \quad (20)$$

Тогда h - гомеоморфизм сферы S^3 с периодом p (т.е. $h^p = 1$) и группа \mathbb{Z}_p действует на S^3 без неподвижных точек. Пространство орбит этого действия \mathbb{Z}_p на S^3 называется линзовым пространством $L(p, q)$.

Это трехмерное сферическое многообразие можно определить и другим образом. Для этого рассмотрим в \mathbb{R}^3 линзу, т.е. область, ограниченную двумя сферическими сегментами, и разобъем край линзы на p равных дуг, превратив этим сегменты в два p -угольника: α и α' . Отражая α относительно плоскости края линзы и повернув его на угол $2\pi q/p$, отождествим стороны линзы. Полученное многообразие и есть пространство линзы $L(p, q)$.

Взяв при $p = 2$, $q = 1$ в качестве линзы шар, а в качестве ее ребра - экваториальную окружность, получим, что $L(2, 1)$ является проективным пространством P^3 (шар с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной сферы).

Легко видеть, что пространство $L(p, q)$ униформизируется и клейновой группой в \mathbb{R}^3 . Для этого достаточно взять линзу с двугранным углом при ее ребре, равным $2\pi q/p$. Тогда указанное отождествление будет осуществляться мебиусовым отображением

$g = U \circ O \circ J$, где $J(x)$ - инверсия относительно сферы, содержащей α , $O(x)$ - отражение относительно плоскости ребра линзы, а $U(x)$ - поворот на угол $2\pi q/p$ вокруг оси линзы.

Циклическая группа $G = \langle g \rangle \subset \mathcal{M}_3$ элементарна (имеет порядок p), действует на S^3 без неподвижных точек, а линза является ее фундаментальной областью. Таким образом, многообразие S^3/G и есть пространство линзы $L(p, q)$.

Можно показать, что $\pi_1(L(p, q)) \cong H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$ (см. [23] стр.245). Возникает вопрос: либо $L(p, q)$ и $L(p, q')$ при $q \neq q'$ гомеоморфны, либо топологические инварианты π_1 и H_1 слишком слабы для того, чтобы установить различие таких пространств. При помощи более тонких топологических методов можно установить второе - а именно различие некоторых пространств линз, например $L(5, 1)$ и $L(5, 2)$.

Пример 16. Обобщенное линзовое пространство

Пусть $S^{2n+1} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum |z_i|^2 = 1\}$ - $(2n+1)$ -мерная сфера, и пусть q_1, \dots, q_m - целые числа, взаимно простые с целым числом p . Определим отображение $h: S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}$ формулой

$$h(z_0, \dots, z_n) = (e^{\frac{2\pi i}{p}}, e^{\frac{2\pi i q_1}{p}}, \dots, e^{\frac{2\pi i q_m}{p}} z_1, \dots, z_n).$$

Здесь, как и в предыдущем примере, гомеоморфизм h определяет действие группы \mathbb{Z}_p на S^{2n+1} без неподвижных точек. Соответствующее пространство орбит $L(p, q_1, \dots, q_m)$ называется обобщенным линзовым пространством. Можно показать [56], что это фундаментальная группа изоморфна \mathbb{Z}_p .

Пример 17. Проективное пространство P^n

Напомним, что под проективным пространством P^n понимается пространство, точками которого являются прямые, проходящие через начало координат O $(n+1)$ -мерного пространства \mathbb{R}^{n+1} ($n > 2$) ; под окрестностью прямой ℓ понимается совокупность всех прямых, проходящих через точку O и пересекающих окрестность какой-либо точки, лежащей на прямой ℓ и отличной от O . Пространство P^n можно получить из n -мерной сферы S^n отождествлением ее диаметрально противоположных точек, а также из n -мерного шара путем отождествления диаметрально противоположных точек его границы - сферы S^{n-1} .

В пространстве P^n можно ввести однородные координаты,

заметив, что координаты

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

всех точек прямой, проходящей через начало координат пространства \mathbb{R}^{n+1} , отличаются лишь общим множителем пропорциональности.

Нетрудно показать, что при четных $n = 2m$ проективное пространство P^n является неориентируемым, а при нечетных $n = 2m + 1$ - ориентируемым многообразием. Более того, похожее в предыдущем примере $p = 2$, $q_1 = q_2 = \dots = q_m = 1$, увидим, что P^{2m+1} получается как обобщенное линзовое пространство $L(2, 1, \dots, 1)$.

Если же рассмотреть мебиусово отображение $g = O_1 \circ O_2 \circ \dots \circ O_{2m+1} \circ J$, где $J(\alpha) = \alpha / |\alpha|^2$ - инверсия относительно сферы S^{2m+1} , $O_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, 2m+1$ - отражение относительно гиперплоскости, проходящей через O и ортогональной i -координатной оси, то видно, что \mathbb{R}^{2m+1} есть пространство орбит клейновой группы $G = \langle g \rangle$, действующей на сфере S^{2m+1} без неподвижных точек и имеющей порядок 2 ; другими словами, оно униформизируется клейновой группой. Отсюда следует, что фундаментальная группа $\pi_1(P^{2m+1})$ изоморфна \mathbb{Z}_2 .

В общем случае нетрудно показать, что группы гомологий $H_{2k+1}(P^n)$ нечетной размерности представляют циклические группы второго порядка, а группы гомологий $H_{2k}(P^n)$ четной размерности тривиальны. Исключение составляют нульмерные группы гомологий $H_0(P^n)$ для любых n и n -мерные $H_n(P^n)$ для нечетных n ; эти группы всегда являются свободными циклическими группами.

В качестве баз гомологий нечетных размерностей можно взять когерентно ориентированные проективные подпространства P^1, P^3, P^5, \dots .

Пример 18. n -мерный тор

n -мерный тор T^n определяется как топологическое произведение n окружностей. Это n -мерное многообразие униформизируется элементарной клейновой группой G - свободной абелевой группой ранга n , порожденными которой служат перено-

ся в R^n на вектори $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $k=1, \dots, n$.
Фундаментальной областью группы G является куб с ребром единичной длины. Многообразие $T^n = R^n/G$ получается отождествлением противоположных граней куба.

Пример 19. Пространство Цуанкаре с конечной фундаментальной группой

Оно получается из додекаэдра при отождествлении противоположных его граней — пятиугольников, повернутых друг относительно друга на угол $\pi/5$. При таком отождествлении имеется 5 незэквивалентных вершин, а ребра додекаэдра распадаются на 10 классов, по три эквивалентных ребра в каждом (см. рис.10). Непосредственный подсчет показывает, что эйлерова характеристика этого пространства $N = 5 - 10 + 6 - 1 = 0$, так что оно является многообразием (см. [23]), называемым сферическим пространством додекаэдра.

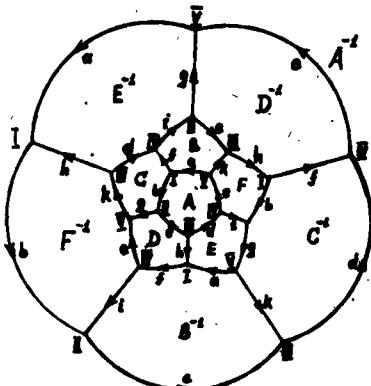


Рис.10.

пространство додекаэдра — единственное известное многообразие с конечной фундаментальной группой: это есть бинарная группа икосаэдра, а именно группа, характеризующаяся соотношениями на своих порождающих a, b, c : $a^5 = b^2 = c^3 = abc$. Порядок этой группы равен 120.

Покажем, что сферическое пространство додекаэдра универсаль-

ноизируется клейновой группой $G \subset M_3$. Для этого достаточно найти разрывную группу $G \subset M_3$, порожденные которой осуществляли бы необходимое отождествление граней додекаэдра. В силу того что имеются тройки эквивалентных ребер, у додекаэдра двугранные углы должны равняться $2\pi/3$. А так как у евклидова додекаэдра они примерно равны 117° , то видно, что необходимо брать сферический додекаэдр. Мы будем проводить конструкцию в сферическом пространстве $R^3 = R^3 \cup \{\infty\}$, в котором сферические плоскости — это сферы, пересекающиеся со сферой $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ по ее экватором.

Центром додекаэдра будет начало координат. Если евклидов диаметр указанного сферического додекаэдра устремлять к нулю, то двугранные углы его будут стремиться к 117° (сферические плоскости стремятся к евклидовым); если же диаметр стремится к 2, то наш додекаэдр приближается к единичному шару, а его двугранные углы — к π . Таким образом, найдется такое значение диаметра сферического додекаэдра, при котором его двугранные углы будут равны $2\pi/3$. Если теперь для его эквивалентных граней, например A и A^{-1} , рассмотреть отображения

$$g_A(x) = U \circ O \circ J(x),$$

где $J(x)$ — инверсия относительно сферы, содержащей A , $O(x)$ — отражение относительно плоскости, перпендикулярной прямой, соединяющей центры A и A^{-1} , а $U(x)$ — поворот вокруг этой прямой на угол $\pi/5$, то группа $G \subset M_3$, порожденная этими отображениями, и будет искомой клейновой группой. Это следует из того, что построенный додекаэдр есть ее выпуклый фундаментальный полиэдр, сумма двугранных углов которого при эквивалентных ребрах равна 2π . Таким образом, сферическое пространство додекаэдра представляется в виде R^3/G , где $G \subset M_3$ — конечная группа.

Пример 20. Пространство октаэдра

Октаэдрическое пространство получается при отождествлении противоположных треугольников октаэдра, повернутых на угол $\pi/3$ друг относительно друга. На рис. II показана сеть

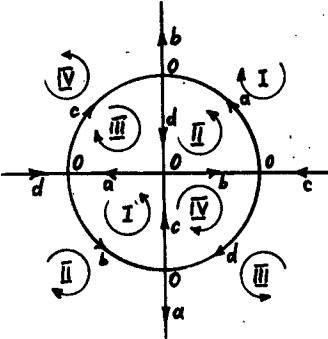


Рис. II.

отождествление можно сделать лишь на сферической октаэдре. Аналогично предыдущему примеру, конечная группа $G \subset M_3$, порожденная четырьмя мебиусовыми отображениями $g_i = U_i \circ O_i \circ J_i$, отождествляемыми указанным образом грани октаэдра, является клейной, а октаэдрическое пространство представляется в виде многообразия \bar{R}^3/G , универсальной накрывающей которого служит сфера $S^3 \approx \bar{R}^3$.

Пример 21. Гиперболическое пространство додекаэдра

Отождествлением сторон додекаэдра можно получить и многообразие постоянной отрицательной кривизны, универсальной накрывающей которого является шар (а не сфера, как в предыдущем примере). Для этого рассмотрим единичный шар B^3 с введенной там гиперболической метрикой. Возьмем в B^3 гиперболический додекаэдр с центром в начале координат. Он полностью определяется своим гиперболическим диаметром d . Если d устремлять к нулю, то гиперболический додекаэдр стремится к евклидову (двугранные углы $\approx 117^\circ$); если же d стремится к бесконечности, то двугранные углы додекаэдра стремятся к $2\pi/6$ — двугранным углам додекаэдра с вершинами на границе B^3 . Таким образом, можно подобрать значение d , при котором двугранные углы будут равны $2\pi/5$.

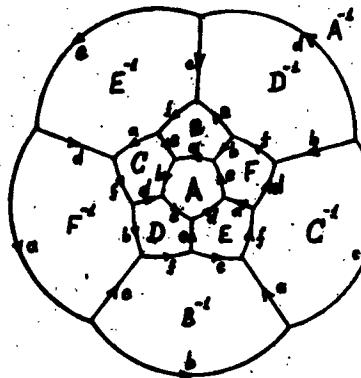


Рис. I2.

Рассмотрим для каждого двух противоположных граней додекаэдра, например A и A^{-1} , локсодромические отображения $g_A = U \circ O \circ J$, где $J(x)$ — инверсия относительно сферы (гиперболической плоскости), содержащей A , $O(x)$ — отражение относительно плоскости перпендикулярной прямой, соединяющей центры A и A^{-1} , а $U(x)$ — поворот вокруг этой прямой на угол $3\pi/5$. На рис. I2 показана сеть додекаэдра, полностью определяемая получаемое при отождествлении граней отображениями g_A пространстве додекаэдра. Хорошо видно, что все ребра додекаэдра распадаются на шесть классов, состоящих из пяти эквивалентных ребер, и все вершины эквивалентны друг другу. Отсюда видно, что наш додекаэдр с отождествлением граней является фундаментальной областью группы $G \subset M_3$, порожденной отображениями g_A , которая поэтому является клейной группой в шаре B^3 . Таким образом, построенное пространство додекаэдра является компактным замкнутым многообразием постоянной отрицательной кривизны, универсальной накрывающей которого является шар B^3 (гиперболическое пространство). Можно показать, что его одномерная группа гомологий изоморфна прямой сумме трех циклических групп порядка 5.

Пример 22. n -мерная сфера с p n -мерными ручками

Как известно, любая замкнутая риманова поверхность рода p может быть представлена как связная сумма двумерной сферы и p экземпляров двумерных торов.

Аналогично можно рассмотреть замкнутое компактное n -мерное многообразие, являющееся связной суммой p -мерной сферы и p экземпляров n -мерных торов T^n (см. пример I8), т.е. n -многообразие, получающееся следующей конструкцией. Вырежем из сферы S^n n -мерные (открытые) шары B_1, \dots, B_p

с попарно непересекающимися граничными сферами S_1, \dots, S_p ; в свою очередь из торов T_1^n, \dots, T_p^n выражем по открытому, n -мерному шару B_1, \dots, B_p с граничными сферами S'_1, \dots, S'_p . Тогда, отождествляя сферы S_i и S'_i , $i=1, \dots, p$ (с противоположными индуцированными на них ориентациями), получаем выше n -многообразие M_p^n (" n -сфера с p n -ручками"). При $n > 3$ фундаментальная группа $\pi_1(M_p^n)$ имеет такой вид (см. рис. I.3):

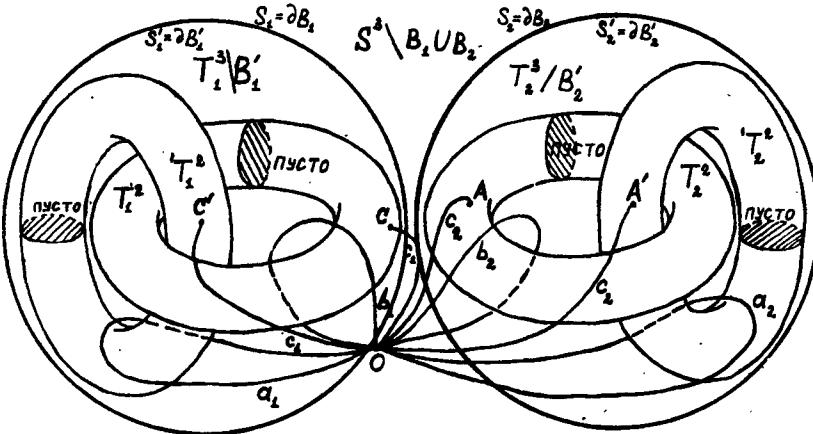


Рис. I.3

$$\{a_1, b_1, c_1, \dots, a_p, b_p, c_p; [a_i, b_i] = [b_i, c_i] = [c_i, a_i] = \dots = [c_p, a_p] = 1\}.$$

Многообразие M_p^n можно униформизировать клейновой группой $G \subset \mathcal{M}_n$. В качестве такой группы достаточно взять свободное произведение p свободных абелевых групп ранга n , т.е. клейнову группу G , получаемую комбинированием по Клейну из p элементарных групп G_1, \dots, G_p , каждая из которых сопряжена в \mathcal{M}_n группе, порожденной переносами на вектора, находящиеся в общем положении.

Таким образом, " n -сфера с p n -ручками" $M_p^n = \Omega(G)/G$ накрывает областью $\Omega(G) \subset \mathbb{R}^n$, получающейся из \mathbb{R}^n выбрасыванием совершенного нигде не плотного множества $\Lambda(G)$, которое имеет положительную логарифмическую емкость. Аналогично [33] (пример I.8) можно показать, что при достаточно большом числе ручек множество $\Lambda(G)$ будет иметь хаусдорфову размерность больше $n/2$.

Область $\Omega(G)$ является и универсальным накрывающим пространством многообразия M_p^n , следовательно, n -сфера с p n -ручками при $n > 3$ не является гиперболическим многообразием (в отличие от $n=2$).

Пример 23. 3-многообразие, накрываемое пространством плотного узла (Б.Н.Анасов [6])

Зададим конечное семейство сфер S_i , $i=1, \dots, k$, и какой-либо полигональный узел ℓ в \mathbb{R}^3 , вершины которого — точки касания сфер S_i (каждая сфера соприкасается внешне ровно с двумя другими). Рассмотрим $(k-1)$ -порожденную клейнову группу $G \subset \mathcal{M}_3$, состоящую из суперпозиций четного числа инверсий относительно сфер S_i . Тогда сферический полидром

$P(G) = \text{Ext } S_1 \cup \text{Ext } S_k (\text{Ext } S_i)$ служит фундаментальным полидромом группы G . Точки касания его сторон — параллельные вершины — являются вершинами полигонального узла ℓ , имеющего тот же тип, что и композиция узлов $\ell \# \ell$ (см. [29]), а также формулу (21). Легко видеть, что предельное множество $\Lambda(G)$ образует простую замкнутую кривую, проходящую через вершины $P(G)$ и их G -образы. Тип этой кривой проследится, если заметить, что при инверсии \mathcal{I} относительно сферы S , ограничивающей $P(G)$, получается узел ℓ_0 , имеющий тип композиции узлов $\ell_0 \# \ell_0$, которую можно представить в виде объединения:

$$(\ell_0 \cap \text{Ext } S) \cup (\mathcal{I}(\ell_0) \cap \text{int } S). \quad (21)$$

Предолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность узлов $\{\ell_m\}$ такую, что узел ℓ_m имеет тип узла $\ell_{m-1} \# \ell_{m-1}$ и лежит в дополнении к объединению $[m/2]+1$ образов полидра $P(G)$. При исчерпании множества $\Omega(G)$ образами $P(G)$ эта последовательность узлов аппроксимирует предельное множество $\Lambda(G)$, которое, таким образом, есть дикий узел в \mathbb{R}^3 , не имеющий ни одной ручной дуги (см. [29]).

Таким образом, мы построили клейнову группу G , универ-

множество $\Omega(G)/G$, накрывающее которое $\Omega(G)$ – пространство дикого узла $\Lambda(G)$. Дикость полученного узла возникает в силу необходимости. Известно [36], что предельное множество $\Lambda(G)$ клейновой группы $G \subset M_3$, не может быть ручным узлом.

Полученное многообразие $\Omega(G)/G$ имеет квазиконформную связь с многообразием конечного типа (пространством орбит конечно порожденной фуксовой группы). В самом деле, рассмотрим в плоскости R^2 покрытие дискаами b_i , $i=1, \dots, k$, окружности S^1 (как и сферы S^1), диски касаются друг друга, а их границы ортогональны S^1 ; возьмем в R^3 семейство сфер f_i , $i=1, \dots, k$, с теми же центрами и радиусами, что и диски b_i , и образуем $(k-1)$ -порожденную клейнову группу $\Gamma \subset M_3$, состоящую из суперпозиций четного числа инверсий относительно сфер f_i . Группа Γ является продолжением с плоскости в R^3 фуксовой группы конечного типа.

Рассматривая теперь конусы

$$\{x \in R^4 : x = \lambda \psi + \mu r, \psi \in \ell_0\} \times \{x \in R^4 : x = \lambda \psi + \mu q, \psi \in S^1\},$$

где числа λ и μ положительны, $\lambda + \mu = 1$, а точки r и q из полуправства R_+^4 зафиксированы, можно методами кусочно-линейной топологии (см. [53]) построить квазиконформный гомеоморфизм f_0 пространства R^4 , переводящий узел ℓ_0 в окружность S^1 , а фундаментальный полигон $P(\bar{G})$ с соответствием сторон в фундаментальный полигон $P(\bar{\Gamma})$. Здесь через \bar{G} и $\bar{\Gamma}$ обозначены продолжения в R^4 клейновых групп G и Γ . Продолжая теперь f_0 (согласованно с действием групп \bar{G} и $\bar{\Gamma}$) с полигона $P(\bar{G})$ на множество разрывности $\Omega(\bar{G})$, а затем и на устранимое множество $\Lambda(\bar{G}) = \Lambda(G)$ (подробности см. в [16]), получаем квазиконформный автоморфизм f пространства R^4 такой, что $f \bar{G} f^{-1} = \bar{\Gamma}$. Этот автоморфизм f "развязывает" дикий узел $\Lambda(G)$:

$$f(\Lambda(G)) = f(\Lambda(\bar{\Gamma})) = f(\Lambda(\bar{\Gamma})) = S^1,$$

а обратный гомеоморфизм f^{-1} индуцирует квазиконформное отображение

4-многообразия $\Omega(\bar{\Gamma})/\bar{\Gamma}$ конечного типа на многообразие $\Omega(\bar{G})/\bar{G}$, которое разбивается 3-многообразием $\Omega(G)/G$ на два одинаковых многообразия с краем.

24. Пример компактного гиперболического многообразия, расслаивающегося над окружностью (Т. Йргенсен [17])

Одновременно с указанным в заголовке примером в этом пункте будет построен и пример дискретной двупорожденной группы гиперболических движений, имеющей фундаментальный полигон, ограниченный счетным числом граней, т.е. не являющейся геометрически конечной (см. также [33], пример II).

Рассмотрим для $m > 2$ числа λ, ψ, ρ, x и χ , задаваемые следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \lambda &= \exp(\pi i / 2m), \quad 2\psi = 1 + (17 - 8 \cos \pi/m)^{1/2}, \\ 2\rho &= (\psi + 2)^{1/2} + (\psi - 2)^{1/2}, \quad 2x(\psi - 2)^{1/2} = (\chi - \psi)^{1/2} + (-\psi - 1)^{1/2}, \\ 2\chi(\psi - 2)^{1/2} &= -(\chi - \psi)^{1/2} + (-\psi - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим группу G^* , порожденную матрицами

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X = \begin{pmatrix} -\lambda x & -(1+x^2) \\ 1 & \lambda^{-1}x \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что G^* – группа движений трехмерного гиперболического пространства R_+^3 . Рассмотрим ее коммутант. Это группа $G \subset G^*$, порожденная преобразованиями $Y = TX^{-1}T^{-1}X$ и X . Тогда подгруппа $\Gamma \subset G^*$, порожденная преобразованиями T и

$$K = XYX^{-1}Y^{-1} = \begin{pmatrix} -\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix},$$

абелева и состоит из евклидовых подобий.

Рассмотрим множество

$$I = \{ \gamma X \gamma^{-1}, \gamma Y \gamma^{-1}, \gamma X^{-1} \gamma^{-1}, \gamma Y^{-1} \gamma^{-1}; \gamma \in G \}$$

и возьмем неевклидов полигон

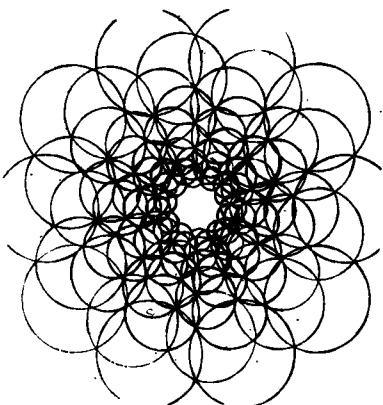


Рис.14.

ка, лежащего на изометрической сфере отображения X . Если обозначить через A и

В некоторую пару образующих группы G , взятую из множества I и имеющую коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$, равный K , то

проекция полигонда P на плоскость C выглядит, как на рис.16. Подгруппа $G \subset G^*$ действует на границе полигонда P как

группа автоморфизмов. Фундаментальный полигонд G^* получается из полигонда P следующим образом. Рассмотрим пересечение P с двугранным углом раствора $2\pi/m$, образующие которого – два дуги на

плоскости C , переводящие один в другой преобразованием K . Обозначим это пересечение через G . Взяв теперь две гиперболические плоскости (являющиеся полусферами с центром в нуле), которые переводятся одна в другую преобразованием T , и рассмотрев полигонд R , получающийся пересечением

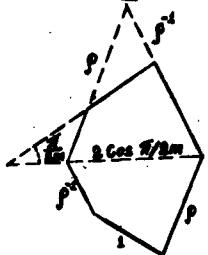


Рис.15

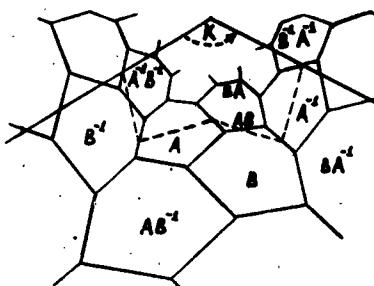


Рис.16.

области, ограниченной этими плоскостями, с полигондом Q , мы и построим фундаментальный полигонд группы G^* . Доказательство этого факта получается при помощи теоремы Пуанкаре (см. [33], с.76) с использованием имеющегося отождествления сторон R . Отсюда же следует, что группы G^* и $G \subset G^*$ дискретны, а полигонд $Q = UT^n(R)$ является фундаментальным для

группы G . Каждый граничный шестиугольник полигонда Q обладает осью симметрии, являющейся неподвижной линией для соответствующего эллиптического преобразования второго порядка, которое получается при помощи произведения Ли образующих A и B по формуле $\varphi = A'B - BA$, $\varphi^2 = 1$. Рассматривая на границе Q любую гиперболическую ломаную, перпендикулярную соответствующим линиям симметрии граничных шестиугольников, получаем расслоение на полигональные дуги рассмотренной части границы Q (см. рис.16). Это расслоение нетрудно продолжить на сам полигонд Q . Тогда, учитывая отождествление граничных точек получаемых слоев преобразованиями группы G (см. схему на рис.17), легко видеть, что каждый такой слой есть тор с

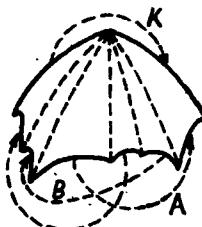


Рис.17.

одной точкой ветвления порядка m , а следовательно, многообразие R_+^3/G является расслоением над вещественной прямой, слоями которого служат торы с одной точкой ветвления порядка m . Учитывая периодичность этого расслоения (что соответствует действию отображения T), получаем, что компактное многообразие R_+^3/G^* представляется в виде расслоения над окружностью со слоями-торами с одной точкой ветвления.

Это первый пример компактного многообразия постоянной отрицательной кривизны, расслаивающегося над окружностью.

Примеры 25–27 касаются построения конформно евклидовых

многообразий с бесконечными неабелевыми фундаментальными группами и показывают, что в общем случае структура таких многообразий может быть очень сложной.

Пример 25 (Н.Купер [34]). В пространстве R^n рассмотрим полуплоскость $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_1 > 0, x_2 = \dots = x_{n-1} = 0\}$, на которой введем гиперболическую метрику $ds^2 = (dx_1^2 + dx_n^2)/x_1^2$. Геодезические в этой метрике изображаются дугами окружностей, ортогональных прямой $x_1 = 0$. Пусть P — выпуклый гиперболический шестиугольник в H с прямыми углами. Если выполнить последовательно все инверсии \mathcal{J} относительно сторон P и их получаемых образов, то H целиком заполнится образами P . Отождествление эквивалентных (относительно инверсий) точек дает замкнутое двумерное риманово многообразие постоянной отрицательной кривизны.

Будем теперь вращать H вокруг прямой $\ell : x_1 = \dots = x_n = 0$. Тогда получим все R^n с выброшенной прямой ℓ . Рассмотренные выше инверсии \mathcal{J} определяют единственным образом соответствующие инверсии $\hat{\mathcal{J}}$ в \bar{R}^n . Эти инверсии коммутируют с поворотами \bar{R}^n вокруг ℓ . Отождествив точки \bar{R}^n , эквивалентные относительно четного числа инверсий $\hat{\mathcal{J}}$, получим компактное конформно евклидово многообразие; в этом многообразии можно задать глобальную метрику $ds^2 = \sum_{j=1}^{n-1} dx_j^2 / \sum_{j=1}^n x_j^2$.

Следующая конструкция позволяет существенно расширить класс конформно евклидовых многообразий с бесконечными неабелевыми фундаментальными группами.

Пример 26. Пусть Γ — произвольная конечно порожденная фуксовая группа первого рода в плоскости \bar{C} с предельной окружностью ℓ , не имеющая кручения. Продолжим действие Γ в верхнее и нижнее полупространства R_+^3 и R_-^3 , а тем самым и во все пространство R^3 ; предельное множество продолженной группы также совпадает с ℓ . Многообразие $M = (R^3 \setminus \ell) / \Gamma$ будет конформно евклидовым и представляет собой тривиальное расслоение над окружностью, слоем которого является риманова поверхность $S = (\text{int } \ell) / \Gamma$, униформизируемая группой в круге. Группа $\pi_1(M)$ заведомо бесконечна, поскольку содержит бесконечную циклическую подгруппу, изоморфную $\pi_1(R^3 \setminus \ell)$, и неабелева (в силу сказанного в § 10).

Если при этом Γ не содержит параболических элементов, то многообразие M будет компактным.

Пример 27. Пусть G — клейнова группа без кручения в плоскости \bar{C} , являющаяся Z_2 -расширением конечно порожденной квазифуксовой группы без параболических элементов. Тогда, как показал Н.А.Гусевский [55], группа G изоморфна фундаментальной группе замкнутой неориентируемой поверхности S , а многообразие $M^+(G) = (R^3 \cup \Omega(G)) / G$ является нетривиальным линейным расслоением над S . Такое же строение имеет, очевидно, и многообразие $M^-(G) = (R^3 \cup \Omega(G)) / G$. Эти многообразия имеют общий край $\Omega(G) / G$, представляющий одну (ориентируемую) поверхность.

Поэтому если считать, что действие группы G продолжено во все пространство R^3 , то многообразие $M(G) = (R^3 \setminus L) / G$, где L — предельная хордовая кривая группы G в \bar{C} , получается склейванием $M^+(G)$ и $M^-(G)$ по их общему краю и представляет собой нетривиальное расслоение на окружности над исходной неориентируемой поверхностью S .

III. УПРАЖНЕНИЯ

I. Покажите, что риманова поверхность, соответствующая декартову листу

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0,$$

конформно эквивалентна сфере.

2. Доказать, что сфера с $n > 3$ проколами является поверхностью гиперболического типа, т.е. униформизируется фуксовой группой.

3. Доказать, что не существует квазифуксовой группы (отличной от фуксовой), униформизирующей сферу с тремя проколами.

4. Показать, что любая триангулируемая ориентируемая поверхность допускает введение на ней конформной структуры, а значит, может быть превращена в риманову поверхность.

5. Доказать, что замкнутая риманова поверхность, у которой одномерная группа гомологий тривиальна, конформно эквивалентна сфере.

6. Доказать соотношение Римана - Гурвица: если S и \tilde{S} - замкнутые римановы поверхности родов ρ и $\tilde{\rho}$ соответственно и $f: \tilde{S} \rightarrow S$ - n -листное голоморфное накрытие, то

$$2(\tilde{\rho}-1) = 2\rho(n-1) + r,$$

где $r = \sum_{x \in S} (\nu(x)-1)$, $\nu(x)$ - порядок ветвления f в точке $x \in S$.

7. Доказать, что сфера может быть накрыта разветвленным образом любой замкнутой ориентируемой поверхностью.

8. Доказать, что крендель (ориентируемая поверхность рода 2) накрываются любой замкнутой поверхностью большего рода и это накрытие конечнолистно.

9. Описать все трехлистные накрытия над кренделем.

10. Доказать, что фундаментальная группа некомпактной поверхности всегда связна.

II. Доказать, что всякая замкнутая неориентируемая поверхность S есть сфера с вклеенным в нее определенным числом k листов Мебиуса (называемым родом этой поверхности) и что ее фундаментальная группа имеет представление

$$\pi_1(S) = \{a_1, \dots, a_k : \prod_{j=1}^k a_j^2 = 1\}.$$

12. Вычислите фундаментальные группы проективной плоскости и бутылки Клейна.

13. Доказать, что замкнутая неориентируемая поверхность рода k гомеоморфна некоторой ориентируемой поверхности с вклеенным в нее одним листом Мебиуса.

14. Показать, что у всякой неориентируемой поверхности существует двулистное ориентируемое накрытие.

15. Показать, что риманова поверхность, на которой существуют непостоянные ограниченные голоморфные функции, гиперболична.

16. Показать, что если \tilde{S} - открытая односвязная риманова поверхность гиперболического типа, обладающая функцией Грина $G(z, z_0) = \ell n \frac{1}{|z-z_0|} + g(z, z_0)$, то конформное отображение $f(z; z_0)$ поверхности S на круг U с нормировкой $f(z_0, z_0) = 0$ дается формулой

$$f(z; z_0) = e^{-G(z, z_0) - iH(z, z_0)},$$

где H - функция, гармонически сопряженная с G .

17. Построить риманову поверхность, обладающую функцией Грина, но не допускающую нетривиальных ограниченных гармонических функций.

18. Доказать, что если $z: S \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ - мероморфная функция на компактной римановой поверхности S , принимающая каждое значение n раз, то:

I) всякая другая мероморфная на S функция f связана с z алгебраическим уравнением степени n :

$$f^n + r_1(z)f^{n-1} + \dots + r_{n-1}(z)f + r_n(z) = 0, \quad (22)$$

где $r_k(z)$, $k=1, \dots, n$, - рациональные функции от z ;

2) функцию f можно выбрать так, что уравнение (22),

выраженное через z , будет неприводимым, а значит, определяет алгебраическую функцию $f(z)$; ее риманова поверхность конформно эквивалентна S .

19. Доказать, что конформный автоморфизм замкнутой римановой поверхности S , гомотопный тождественному, сам является тождественным отображением.
20. Доказать, что конформный автоморфизм замкнутой римановой поверхности рода p , отличный от тождественного, может иметь не более $2p+2$ неподвижных точек.
21. Доказать теорему Гурвица: группа $\text{Aut } S$ конформных автоморфизмов замкнутой римановой поверхности S рода $p > 2$ имеет порядок $\leq 84(p-1)$.

Эта оценка точная, поскольку Клейн построил пример замкнутой поверхности рода 3, допускающей 168 различных конформных автоморфизмов.

22. Пусть S и S' — компактные римановы поверхности, $H(S, S')$ — множество непостоянных голоморфных отображений S на S' . Доказать, что если род S' больше 1, то множество $H(S, S')$ конечно.
23. Описать касательное и кокасательное расслоение над пространством Тейхмюлера T_p, n .
24. Показать, что $\text{Mod } T(\Gamma)$ есть подгруппа $\text{Mod } T(1)$, действующая инвариантно на $T(\Gamma)$.
25. Пусть G — заданная конечно порожденная группа с конечным числом определяющих соотношений. Доказать, что существует четырехмерное компактное многообразие, фундаментальная группа которого изоморфна G .
26. Показать, что для линзового пространства

$$\pi_1(L(p, q)) \cong H_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p.$$

27. Доказать, что замкнутое односвязное трехмерное многообразие M является асферичным во всех размерностях (т.е. $\pi_n(M) = 0$ для всех $n \geq 2$).
28. Показать, что если многообразие M есть декартово произведение многообразий M_1 и M_2 ($M = M_1 \times M_2$), то $\pi_1(M)$ есть прямое произведение $\pi_1(M_1)$ на $\pi_1(M_2)$.

29. Вычислить фундаментальную группу n -мерного тора.
 30. Показать, что сферическое пространство додекаэдра имеет гомологический тип сферы.
 31. Описать все компактные трехмерные многообразия с краем, имеющие свободные абелевы фундаментальные группы.
 32. Доказать, что фундаментальная группа полного гиперболического многообразия не имеет кручения.
 33. Доказать, что всякая абелева подгруппа фундаментальной группы компактного гиперболического многообразия является циклической.
 34. Показать, что фундаментальная группа октаэдрического пространства задается соотношениями
- $$abc = acb = acd = bdc = 1.$$
35. Показать, что группы гомологий октаэдрического пространства имеют вид $H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z}_2$, $H_2 = 0$, $H_3 = \mathbb{Z}$.
 36. Найти фундаментальную группу гиперболического пространства додекаэдра.
 37. Пусть $T = \bar{U} \times [0, 1]$ — заполненный трехмерный цилиндр. Отождествим его основания $\bar{U} \times \{0\}$ и $U \times \{1\}$ с помощью меняющего ориентацию гомеоморфизма. Полученное (неориентируемое) многообразие называется заполненной бутылкой Клейна. Доказать, что ее фундаментальная группа изоморфна \mathbb{Z} , а двулистным ориентируемым накрытием служит заполненный тор.
 38. Описать все возможные накрытия n -мерного действительного проективного пространства ($n \geq 2$).
 39. Показать, что существует ровно два неэквивалентных пятилистных накрытия многообразия $S^3 \setminus L$, являющегося дополнением к трилистнику, т.е. узлу с фундаментальной группой $\pi_1(S^3 \setminus L) = \{x, y : x^{-1}y = y^{-1}x\}$.
 40. Доказать, что все сплетения Хегора рода 1 (т.е. многообразия, полученные склеиванием двух заполненных торов по их краю) являются линзовыми пространствами (верно и обратное).
 41. Доказать, что полное n -мерное риманово многообразие нулевой (секционной) кривизны униформизируется разрывной группой евклидовых изометрий \mathbb{R}^n .
 42. Доказать, что компактное риманово многообразие нулевой кривизны накрывается тором и при этом конечнолистно.

IV. ЗАДАЧИ

1. Пусть S — замкнутая риманова поверхность рода $p > 2$, определяемая уравнением $P(z, w) = 0$, где $P(z, w)$ — неприводимый полином, и $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$ — плоское накрытие поверхности S . Функция $\pi^{-1}(z) = \eta(z)$, обратная к π , называется линейно полиморфной. Эта функция локально однолистна на S и удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\{\eta, z\} = r(\xi, \xi) + \sum_{j=1}^{3p-3} \lambda_j \varphi_j(z, w), \quad (23)$$

где $\xi = (z, w) \in S$, $r(\xi, \xi)$ — некоторая рациональная функция от (z, w) , $\{\varphi_j(z, w)\}_{j=1}^{3p-3}$ — базис в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов на S , λ_j — так называемые присоединенные параметры.

Уравнение (23) тесно связано с теорией униформизации и изучалось различными авторами. Важнейшие примеры линейно полиморфных функций дают рассматривавшиеся ранее классические случаи $\eta(\xi) = \pi^{-1}(\xi)$, когда 1) $\pi: U \rightarrow S$ — универсальное накрывающее отображение; 2) $\pi: D \rightarrow S$ — накрывающее отображение Шоттки.

Пусть S представлена в виде конечнолистной разветвленной накрывающей плоскости \mathbb{C} с простыми точками ветвления b_1, \dots, b_m . Показать, что параметры $\lambda_j = \lambda_j(b)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$, определяющие линейно полиморфные функции $\eta(\xi)$, зависят от b голоморфно (\mathbb{C} — голоморфно для накрытия Шоттки и \mathbb{R} — голоморфно для универсального накрытия, порождающего соответствующую Фуксову группу) (Д.Хейхал [61]).

2. Пусть S — замкнутая риманова поверхность рода $p > 2$. Обозначим через $\ell(S)$ длину кратчайшей геодезической на S в гиперболической метрике и через $d(S)$ — гиперболический диаметр S .

Доказать, что:

a) $d(S) \leq (p-1) \ell(S) / \sin^2(\ell(S)/2)$,

при этом для достаточно малых $\ell(S)$ имеем

$$\ell(S) / \sin^2(\ell(S)/2) \approx 4\ell(S);$$

б) существуют постоянные C_1 и C_2 , зависящие только от рода p , такие, что

$$\ln(C_1/\ell(S)) \leq d(S) \leq 6p \ln(C_2/\ell(S))$$

(Л.Берс [34°], С.Вольштедт [14]).

3. Пусть $c > 0$ и $K_c \subset R_{p,0} = T_{p,0} / \text{Mod } T_{p,0}$ есть множество замкнутых римановых поверхностей рода $p \geq 2$, на которых каждая замкнутая геодезическая в гиперболической метрике имеет длину не меньше c . Доказать, что множество K_c компактно в $R_{p,0}$ (Л.Берс [34°], Д.Мамфорд [79°]).

Это дает из способов описания границы $T_{p,0}$, поскольку $\ell(S) \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \partial T_{p,0}$.

4. Пусть X и Y — замкнутые римановы поверхности, $H(X, Y)$ — множество сиръективных голоморфных отображений X на Y . Доказать, что существует такое число $N(p)$, зависящее только от рода p поверхности X , что для любой поверхности Y рода больше I выполняется неравенство $\text{card } H(X, Y) \leq N(p)$ (Т.М.Бандман).

5. Пусть $p, p' > 0$, $p \geq 1$ и $M_p(p', p)$ — множество тех точек в пространстве $R_{p,0}$, которым соответствуют поверхности, обладающие голоморфным отображением на какую-либо поверхность рода p' с кратностью p . Доказать, что множество $M_p(p', p)$ есть алгебраическое подмножество пространства $R_{p,0}$ и его размерность равна $(2p-2)-(2p-3)(p'-1)$ (Ланге [37]).

6. Накрытия $\pi: T \rightarrow S$ и $\pi': T' \rightarrow S$ называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h: T \rightarrow T'$ такой, что $\pi = \pi' \circ h$. Доказать, что над кренделем существует ровно 100 неэквивалентных трехлистных накрытий, из которых 40 регулярных, а остальные — нерегулярные (А.Д.Медных [47]).

7. Доказать, что число подгрупп индекса p в фундаментальной группе замкнутой римановой поверхности рода p равно

$$M_p(n) = n \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1}}{s} \sum_{\substack{i_1 + i_2 + \dots + i_s = n \\ i_1, i_2, \dots, i_s \geq 1}} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_s},$$

где $\beta_k = \sum_{\lambda \in D_k} (k! / f^{(\lambda)})^{2p-2}$, D_k - множество всех неприводимых представлений симметрической группы S_k , а $f^{(\lambda)}$ - степень представления λ (А.Д.Медных [47]).

8. Доказать, что число неэквивалентных n -листных накрытий над замкнутой римановой поверхностью рода p равно

$$N_p(n) = \frac{1}{n} \sum_{m|n} M_p(m) \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu\left(\frac{n}{md}\right) d^{(2p-2)m+2},$$

где $\mu(n)$ - теоретико-числовая функция Мебиуса, а $M_p(n)$ - то же, что и в задаче 7.

Вывести отсюда, что $M_1(n) = \sum_{d|n} d$ - сумма делителей числа n ,

$$M_p(n) \sim 2(n!)^{2p-2}, \quad p > 1, \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{и}$$

$$\sum_{s=1}^n M_1(s) \sim \pi^{2p-2} / 12 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (\text{А.Д.Медных}).$$

9. Доказать, что при $p=0$ пространство Римана $R_{p,0} = T_{p,0} / \text{Mod } T_{p,0}$ односвязно (Маклахиля [79]).

10. Назовем поверхностью типа (p, n, m) риманову поверхность S , получаемую из замкнутой поверхности рода p выкашиванием n точек и вырезанием m конформных дисков ($p > 0$, $n > 0$, $m > 0$). Аналогично случаю поверхностей без края определяется пространство Тейхмюлера $T_{p,n,m}$ (квазиконформных деформаций) поверхностей типа (p, n, m) .

Доказать, что существует действительный аналитический диффероморфизм пространства $T_{p,n,m}$ на произведение $6p - 6 + 2n + 3m$ открытых интервалов (Л.Кин [55]).

Об эрмитовых метриках на пространстве $T_{p,n}$. Метрика

Тейхмюлера (Кобаяси) в $T_{p,n}$ не является эрмитовой. Для получения эрмитовых метрик следует, как обычно, рассмотреть положительно определенные эрмитовы внутренние произведения на касательных или кокасательных пространствах в точках $T_{p,n}$.

В частности, кокасательное пространство в точке $X_0 \in T_{p,n}$ состоит из интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов φdz^2 на римановой поверхности X_0 (точнее представитель этого класса эквивалентности), и, взяв некоторую конформную метрику $\lambda(z) |dz|$ на X_0 , получим эрмитово произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \iint_{X_0} \lambda^{-2}(z) \varphi_1(z) \overline{\varphi_2(z)} dx dy.$$

Выбрав в качестве $\lambda(z)$ обычную гиперболическую метрику, придем к так называемой метрике Вейля-Петерсона $W_T(X_0, X)$. Именем пусть X_0 представляется в виде $X_0 = H/\Gamma_0$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ - базис в $B(H, \Gamma)$ такой, что

$$\iint_{H/\Gamma_0} (2y)^2 \varphi_j(z) \overline{\varphi_k(z)} dx dy = \delta_{jk}.$$

Окрестность точки X_0 в $T_{p,n}$ заполняется точками $X = X_0^\mu$ с $\mu = (2y)^2 \sum_{j=1}^m \xi_j \varphi_j(z)$, и в качестве локальных координат в этой окрестности возьмем ξ_1, \dots, ξ_m . Тогда соответствующая метрике W_T дифференциальная форма $ds^2 = \sum |d\xi_j|^2$.

II. Доказать, что метрика Вейля-Петерсона квадрата, имеет отрицательную голоморфную кривизну, не полна и существует постоянная $c_{p,n}$, зависящая только от $T_{p,n}$, такая, что $W_T(X_0, X) \leq c_{p,n} d(X_0, X)$ (см. А.Вейль [13], Л.Альфорс [26], М.Линч [39], С.Волшерт [14]).

12. Проекция $\pi_p: T_{p,0} \rightarrow R_{p,0} = T_{p,0} / \text{Mod } T_{p,0}$ позволяет определить в $R_{p,0}$ метрику

$$\tilde{W}_R(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = \inf W_T(\pi_p^{-1}(\tilde{X}_1), \pi_p^{-1}(\tilde{X}_2)).$$

Доказать, что диаметр пространства $R_{p,0}$ в метрике \tilde{W}_R конечен (С.Волперт [14]).

13. Пусть Γ - произвольная фуксовая группа и $C_\Gamma(\cdot, \cdot)$ - метрика Каратеодори в пространстве Тейхмюлера $T(\Gamma)$, т.е. $c_\Gamma(X_1, X_2) = \inf \rho(f(X_1), f(X_2))$ по всем голоморфным отображениям $f: T(\Gamma) \rightarrow U$, где ρ - гиперболическая метрика в круге U .

Доказать, что метрика $C_\Gamma(\cdot, \cdot)$ полна для любого $T(\Gamma)$, а если $\dim T(\Gamma) < \infty$, то $C_\Gamma(\cdot, \cdot)$ и сильно полна (т.е. любой шар $\{X \in T(\Gamma) : c_\Gamma(X, X_0) \leq r < \infty\}$ компактен в $T(\Gamma)$) (С.Крушкаль, К.Ирл, см. [31]).

Отсюда, как известно, вытекает, в частности, что всякое голоморфное отображение $f: U \setminus \{0\} \rightarrow T(\Gamma)$ продолжается до голоморфного отображения всего круга U .

14. Доказать, что а) все конечномерные пространства Тейхмюлера $T(\Gamma)$ стягиваются и, следовательно, все группы $\pi_i(T(\Gamma)) = 0$ для $i > 1$; б) универсальное пространство $T(1)$ также стягивается (К.Ирл, Дж.Иллс [18]).

15. Пусть $T(\Gamma) = T_{p,n}$ и $\tilde{T}(\Gamma)/\Gamma = V_{p,n}$ - расслоение над пространством $T(\Gamma)$ на римановы поверхности типа (p,n) , называемое также кривой Тейхмюлера; напомним, что проекция

$$\pi_n: V_{p,n} \rightarrow T_{p,n}$$

голоморфна (см. § 8). Доказать, что:

а) $\pi_n: V_{p,n} \rightarrow T_{p,n}$ имеет ровно p глобальных голоморфных сечений при $p \geq 3$ и $2n+6$ голоморфных сечений при $p=2$ ($n>0$); случаю $p=0$ ($p=2$) отвечают сечения, соответствующие так называемым точкам Вейерштрасса римановых поверхностей, остальные сечения (при $p>0$) соответствуют n проколам.

б) кривые $\pi_n: V_{1,n} \rightarrow T_{1,n}$, $n=3$ и $\pi_n: V_{0,n} \rightarrow T_{0,n}$ при $n \geq 5$ имеют n голоморфных сечений (Дж.Бобэр [63]; К.Ирл и И.Кра [20]).

16. Пусть $\alpha(X) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ - произвольные локальные координаты (модули) в окрестности точки $X_0 \in T_{p,n}$. $m = 3p - 3 + n$ ($\alpha(X_0) = 0$). Доказать, что

$$\alpha_j(X) = \iint_{X_0} \mu(z) \varphi_j(z) dz dy + O(\|\mu\|^2),$$

где μ - дифференциал Бельтрами квазиконформного отображения $f^M: X_0 \rightarrow X = X_0^M$, а $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ - соответствующий базис в пространстве интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов на X_0 (С.Крушкаль [65]).

В следующем цикле задач приводятся важнейшие результаты топологии трехмерных многообразий, лежащие в основе ее приложений к униформизации клейновыми группами (см. также § 10).

17. Доказать, что если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ трехмерного многообразия M содержит бесконечно порожденную абелеву подгруппу G , то G изоморфна подгруппе аддитивной группы рациональных чисел (Б.Эванс, Л.Мозер [21]).

18. Показать, что если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ трехмерного многообразия M содержит конечно порожденную абелеву подгруппу G , то G изоморфна одной из следующих групп: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ (Дж.Хемпель [62]).

19. Пусть M - компактное неприводимое ориентируемое трехмерное многообразие, а $F \subset \partial M$ - компактная поверхность, отличная от сферы и диска. Доказать, что если $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ является изоморфизмом, то M гомеоморфно $F \times [0,1]$ (Е.Браун [11]).

20. Пусть M - компактное ориентируемое неприводимое трехмерное многообразие. Тогда если $\pi_1(M)$ содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную фундаментальной группе замкнутой поверхности S рода $r \geq 1$, то $\pi_1(M)$ сама изоморфна фундаментальной группе замкнутой поверхности, а M есть линейное расслоение (с компактным слоем $I = [0,1]$) над некоторой замкнутой поверхностью (Дж.Хемпель [62]).

21. Доказать, что если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ трехмерного многообразия M конечно порождена, то $\pi_1(M)$ имеет конечное число определяющих соотношений. (Г.Скотт [54]).

Отсюда, в частности, следует, что конечно порожденная

клейнова группа имеет конечное число определяющих соотношений.

22. Доказать, что любое трехмерное многообразие M с конечно порожденной фундаментальной группой содержит компактное трехмерное подмногообразие M_0 , такое, что вложение $i: M_0 \subset M$ индуцирует изоморфизм $i_*: \pi_1(M_0) \rightarrow \pi_1(M)$ (Г.Скотт [54]).

23. Доказать, что фундаментальная группа трехмерного компактного многообразия конечно порождена (Г.Скотт [54]).

24. Показать, что если M - неориентируемое трехмерное многообразие с конечной фундаментальной группой, то оно гомотопически эквивалентно связанной сумме $\mathbb{RP}^2 \times [0,1] \# B^3 \# \dots \# B^3$ (и, в частности, $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}_2$) (Д.Эштейн [22]).

Многообразие M называется примитивным, если из того, что $M = M_1 \# M_2$, следует, что либо M_1 , либо M_2 является сферой S^n .

25. Доказать, что трехмерное примитивное многообразие с нетривиальной свободной фундаментальной группой гомеоморфно одному из следующих:

1) расслоение на двумерные сферы над окружностью; 2) заполненный тор; 3) заполненная бутылка Клейна (см. упражнение 37); 4) дисковая сумма заполненных торов и заполненных бутылок Клейна (Дж.Хемпель [62]).

26. Пусть M - трехмерное компактное неприводимое многообразие. Предположим, что существует точная последовательность

$$1 \rightarrow N \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow Q \rightarrow 1, \quad (24)$$

где N - конечно порожденная нормальная подгруппа $\pi_1(M)$ с бесконечной свободной фактор-группой Q .

Доказать, что если $Q \cong \mathbb{Z}$, то M гомеоморфно расслоению над окружностью, слоем которого является двумерная поверхность; если же ранг Q больше 1, то M гомеоморфно расслоению над двумерной поверхностью с краем, слоем которого является окружность (Дж.Хемпель [62]).

27. Пусть M - трехмерное компактное многообразие, для которого существует точная последовательность (24) с бесконечной фактор-группой Q . Доказать, что если M неприводимо

и Q изоморфна фундаментальной группе замкнутой поверхности S (отличной от S^2 и \mathbb{RP}^2), то M гомеоморфно расслоению над S со слоем, являющимся окружностью (Дж.Хемпель [62]).

28. Пусть M - трехмерное компактное неприводимое многообразие. Если коммутиант $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ конечно порожден и $H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, то M либо гомотопически эквивалентно $\mathbb{RP}^2 \times S^1$, либо есть расслоение над окружностью со слоем - компактной поверхностью S , при этом $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \cong \pi_1(S)$ (Дж.Хемпель [62]).

29. Пусть M - трехмерное компактное неприводимое ориентируемое многообразие с бесконечной фундаментальной группой $\pi_1(M)$. Доказать, что если центр $\pi_1(M)$ есть нетривиальная, конечно порожденная нециклическая группа, то либо M гомеоморфно $S^1 \times S^1 \times S^1$, либо M есть линейное расслоение над тором (Дж.Хемпель [62]).

Трехмерное многообразие M называется достаточно большим, если оно содержит несканаемую двустороннюю поверхность S (т.е. либо S - сфера, не стягиваемая в M , либо гомоморфизм $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ является мономорфизмом; последнее, грубо говоря, означает, что у S нельзя уничтожить ручки).

30. Доказать, что если трехмерное ориентируемое компактное многообразие M неприводимо и является достаточно большим, то универсальное накрытие M вкладывается в \mathbb{R}^3 , а универсальное накрытие внутренности M гомеоморфно \mathbb{R}^3 (Ф.Вальдхаузен [42°]).

31. Доказать, что трехмерное многообразие M является линейным расслоением (с компактным слоем) над замкнутой неориентируемой поверхностью S рода $r > 2$ тогда и только тогда, когда M гомеоморфно $M(G) = (\mathbb{R}^3 + U\Omega(G))/G$, где G есть \mathbb{Z}_2 -расширение (без кручения) квазицикловой группы без параболических элементов (Н.А.Гусевский [55°]).

У. НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

В заключение сформулируем ряд нерешенных проблем по униформизации поверхностей и многообразий.

1. Пусть S и S' — замкнутые римановы поверхности рода ρ и ρ' соответственно ($\rho > \rho' > 1$). Определить число всевозможных конформных отображений из S в S' .

2. Определить число неэквивалентных n -листных накрытий над замкнутой римановой поверхностью рода ρ с заданными порядками точек ветвления. Для неразветвленных накрытий результат содержится в задаче 8.

3. Описать все замкнутые трехмерные многообразия, допускающие полную гиперболическую структуру.

4. Описать все узлы и зацепления (с конечным числом компонент), на дополнениях к которым можно вести полную гиперболическую структуру. Некоторые результаты в этом направлении имеются, например, в [36].

5. Существуют ли нетривиальные квазиконформные деформации компактного гиперболического многообразия, униформизируемого фуксовской группой $G \subset M_3$, которая имеет в качестве фундаментального полидэра симплекс?

6. Многообразие M^n (n -мерное) называется гомологически плоским, если каждая вложенная в него ($n-1$)-мерная сфера разбивает M^n на две компоненты. Описать все нормальные подгруппы группы $\pi_1(M)$, которые служат определяющими подгруппами гомологически плоских накрытий M^n .

7. Многообразие M^n называется плоским, если оно гомеоморфно некоторой области в \bar{R}^n . Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы гомологически плоское многообразие было плоским. (Это так при $n=2$; если же $n>2$, то существуют примеры гомологически плоских многообразий, не являющихся плоскими).

8. Будет ли всякое гомологически плоское накрытие замкнутого многообразия плоским?

9. Пусть M_1 и M_2 — два n -мерных гомотопически эквивалентных многообразия без края, одно из которых топологически униформизируется некоторой клейновой группой в \bar{R}^n . Униформизируется ли тогда клейновой группой и второе многообразие?

Л и т е р а т у р а

- I. Accola R.D.H. Strongly branched coverings of closed Riemann surfaces.—Proc.Amer.Math.Soc., 1970, vol.26, №2, p.315–322.
2. Ahlfors L.V. Curvature properties of Teichmüller space.—J. Anal.math., 1971, vol.9, p.161–176.
3. Альфорс Л., Берс Л. Пространство римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М., ИЛ., 1961, с.104–172.
4. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. — М.: Мир, 1969, с.133.
5. Ahlfors L.V., Weill G. A uniqueness theorem for Beltrami equations.—Proc.Amer.Math.Soc., 1962, vol.13, №6, p.975–978.
6. Апанасов Б.Н. Клейновы группы, пространство Тейхмюллера и теорема жесткости Мостова. — Сиб.матем.журн., 1980, т.21, № 4, с.735–758.
7. Белинский П.П. Пример универсальной римановой поверхности, содержащей в качестве подобластей любые компактные поверхности с краем. — Сиб.мат.журн., 1980. т.21.
8. Bers L. On moduli of Riemann surfaces. Lectures at Forschungsinstitut für Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule. Zürich, 1964.
9. Bers L. and Ehrenpreis L. Holomorphic convexity of Teichmüller spaces.—Bull.Amer.Math.Soc., 1964, vol.70, №6, p.761–764.
10. Beurling A. and Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings.—Acta Math., 1956, vol.96, p.125–142.
- II. Brown E.M. Unknotting in $M^2 \times I$.—Trans.Amer.Math.Soc., 1966, vol.123, p.480–505.
12. Винберг Е.Б., Шварцман О.В. Римановы поверхности. — В кн.: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. Вып.16, М., изд. ВИНИТИ, 1978, с.191–245.
13. Weil A. Sur les modules des surfaces de Riemann.—In: Seminaire Bourbaki, t.1956/57–1957/58, № 168.
14. Wolpert S. The finite Weil-Petersson diameter of Riemann space.—Pacific.J.Math., 1977, vol.70, №1, p.281–288.

15. Greenberg L. Maximal groups and signatures.-In:Discontinuous groups and Riemann surfaces.Princeton, 1974, p.207-226.
16. Griffiths P.A. Complex analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties.-Ann.of Math., 1971, vol. 94, № 1, p.21-51.
17. Jørgensen T. Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle.-Ann.of Math., 1977, vol.106, p.61-72.
18. Earle C.I. and Eells I. A fibre bundle description of Teichmüller theory.- J. Diff. Geometry, 1969, vol. 3. p. 19-43.
19. Earle C.I. and Kra I. On holomorphic mappings between Teichmüller spaces.-In:Contributions to analysis, New York, London, Acad.press, 1974, p.107-124.
20. Earle C.I. and Kra I. On sections of some holomorphic families of closed Riemann surfaces.-Acta Math., 1976, vol.137, №1-2, p.49-79.
21. Evans B., Moser L. Solvable fundamental groups of compact 3-manifolds.-Trans.Amer.Math.Soc., 1972, vol. , p.189-210.
22. Epstein O.B.A. Finite presentations of groups and 3-manifolds.-Quart.J.Math., 1961, vol.12,p.205-212.
23. Зейферт Г. Трельфальль.В. Топология. - М.-Л.: изд. ОНТИ, 1938.
24. Seifert H.,Weber C. Die beiden Dodekaederräume.-Math.Z., 1933, Bd.37, S.237-253.
25. Koebe P. Über die Uniformisierung algebraischer Kurven.- Math.Anna., 1909, Bd.67, S.145-224; 1910, Bd.69, S.1-81; 1912, Bd.72, S.437-516; 1914, Bd.75, S.42-129.
26. Keen L. Intrinsic moduli on Riemann surfaces.-Ann.of Math., 1966, vol.84, №3, p.404-420.
27. Klein F. Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie.- Math.Anna., 1883, Bd.21, S.141-218.
28. Kraus W. Über Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung.- Mitt.math.Semin.Gießen, 1932, Н.21, S.1-28.
29. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. - М.: Мир, 1967.
30. Крушкаль С.Л. К теореме Тейхмюлера об экстремальных квазиконформных отображениях. - Сиб.мат.журн. 1967, т.8, № 2, с.313-332.
31. Крушкаль С.Л. Две теоремы о пространствах Тейхмюлера. - Докл. АН СССР, 1976, т.228, № 2, с.290-292.
32. Крушкаль С.Л. Замечание о жесткости квазиконформных деформаций дискретных групп изометрии гиперболических пространств. - Сиб.мат.журн., 1980, т.21.
33. Крушкаль С.Л., Апанасов Б.Н., Гусевский Н.А. Клейновы группы в примерах и задачах. - Новосибирск: изд. НГУ, 1978.
34. Kuiper N.H. On compact conformally euclidean spaces of dimension 2.-Ann.of Math, 1950, vol.52, №2, p.478-490.
35. Kuiper N.H. On conformally-flat spaces in the large.-Ann.of Math., 1949, vol.50, №4, p.916-924.
36. Kulkarni R.S. Infinite regular coverings.-Duke Math.J., 1978, vol.45, №4, 781-796.
37. Lange H. Moduli spaces of algebraic curves with rational maps.-Math.Proc.of Cambridge Phil.Soc., 1975, vol.78, №2, p.283.
38. Lehto O. and Virtanen K.I. Quasikonformal Abbildungen, Berlin, Springer, 1965.
39. Linch M. A comparison of metrics on Teichmüller space.- Proc.Amer.Math.Soc., 1974, vol.43, №2, p.349-352.
40. Магнус В., Капрас А. и Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. - М.: Наука, 1974.
41. MacLachlan C. Moduli space is simply connected.-Proc.Amer. Math.Soc., 1971, vol.29, №2, p.85-86.
42. MacLachlan C. Maximal normal Fuchsian groups.-Illinois J. Math., 1971, vol.15, №1, p.104-113.
43. Mackit B. A theorem on planar covering surfaces with applications to 3-manifolds.-Ann.of Math., 1965, vol.81, №2, p.342-355.
44. Mackit B. The conformal group of a plane domain.-Amer.J. Math., 1968, vol.90, №3, p.718-722.
45. Mackit B. Uniformizations of Riemann surfaces.-Contributions to analysis, 1974, New York, Acad.press, p.293-312.
46. Медных А.Д. Об одном примере компактной римановой поверхности с тривиальной группой автоморфизмов. - Докл. АН СССР, 1977, т.237, № 1, с.32-34.
47. Медных А.Д. О неразветвленных накрытиях компактных римано-

- вых поверхностей. - Докл. АН СССР, 1979, т.244, № 3,
с.529-532.
48. Неванлинина Р. Униформизация. - М.: ИЛ., 1955.
49. Nehari Z. Schwarzian derivatives and schlicht functions.-
Bull.Amer.Math.Soc., 1949, vol.55, №6, p.545-551.
50. Poincare H. Cinquieme complement a l'analysis situs.-Compt.
llement. Rend. cirs. Mat. Palermo, 1904, t.18, p. 45-110.
51. Kauch H.E. A transcendental view of the space of algebraic
Riemann surfaces.-Bull.Amer.Math.Soc., 1965, vol.71, №2, p.1-39.
52. Royden H.L. Automorphisms and isometries of Teichmüller spaces.-In:Advances in the theory of Riemann surfaces.Prin-
ceton,Princeton Univ. press, 1971, p.369-383.
53. Пурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную тополо-
гию. - М.: Мир, 1974.
54. Scott P. Compact submanifolds of 3-manifolds.-J.London
Math.Soc., 1973, vol.7, p.246-250.
55. Stallings J. On the loop theorem.-Ann.of Math., 1960, v.72,
p.12-19.
56. Спенсер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1971.
57. Спрингер Г. Введение в теорию римановых поверхностей. -
М.: ИЛ.. 1960.
58. Sullivan D. On the ergodic theory at infinity of an arbit-
rary discrete groups of hyperbolic motions.Preprint, 1978.
59. Teichmüller O. Extremale quasikonforme Abbildungen und
quadratische Differentiale.-Abh.Preuss.Akad.Wiss., Math.-
Naturw.Kl., 1940, №22, S.3-197.
60. Teichmüller O. Veränderliche Riemannsche Flächen.-Deut-
sche Math., 1944, Bd. 9, S. 344-359.
61. Hejhal D.A. The variational theorie of linearli polimorphic
functions.- J.Anal.Math., 1976, vol.30, p.215-264.
62. Hempel J. 3-manifolds. Princeton, Princeton Univ. Press,
1976.
63. Hubbard J. Sur le non-existence de sections analytiques a
la curve universelle de Teichmüller.- C.R.Acad. Sci.Paris,
ser. A-B, 1972, t.274, p.A978-A979.

Оглавление

I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УНИФОРМИЗАЦИИ

§ 1. Что такое униформизация?	3
§ 2. Фундаментальная группа и покрывающие простран- ства	7
§ 3. Плоские регулярные накрытия.	II
§ 4. Квазиконформные отображения.	13
§ 5. Квазиконформные отображения римановых поверх- ностей и деформации клеймовых групп.	18
§ 6. Униформизация римановых поверхностей	21
§ 7. Униформизация с помощью клеймовых групп	24
§ 8. Пространства Тейхмюлера	32
§ 9. Разветвленные накрытия римановых поверхностей	43
§ 10. Униформизация многомерных многообразий . . .	49
II. ПРИМЕРЫ	53
III. УПРАЖНЕНИЯ	75
IV. ЗАДАЧИ	79
V. НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ	87
Литература	88

Самуил Лейбович Крушкаль
Борис Николаевич Апанасов
Николай Александрович Гусевский

УНИФОРМИЗАЦИЯ И КЛЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Учебное пособие

Темплан 1979 г., поз.68

Редактор С.Л.Розина

Корректоры А.Г.Крюгер, С.Д.Андреева
Обложка художника Н.А.Савельевой

Подписано в печать 2.02.80

Формат 60x84, 1/16. Бумага картографическая Тираж 600 экз.
- Заказ № 147 Объем 5,75 п.л., 5 уч.-изд.л. Цена 28 коп.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
ротапринт НГУ, 630090, Новосибирск-90, Пирогова,2