



# **АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ**

14

International Atomic Energy Agency  
CONFERENCE ON PLASMA PHYSICS  
AND CONTROLLED NUCLEAR FUSION RESEARCH

---

ASYMPTOTIC THEORY OF HAMILTONIAN  
AND OTHER SYSTEMS WITH  
ALL SOLUTIONS NEARLY PERIODIC  
BY

**M. Kruskal**

Princeton University, Princeton, New Jersey, USA

---

Salzburg, 4—9 September, 1961

**М. КРУСКАЛ**

# **АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ**

Асимптотическая теория уравнений  
Гамильтона и других систем  
дифференциальных уравнений, все решения  
которых приблизительно периодичны

Перевод с английского

Издательство иностранной литературы  
Москва 1962

## АННОТАЦИЯ

Книга Крускала посвящена вопросу о сохранении адиабатических инвариантов во всех порядках асимптотического разложения. Рассматривается случай, когда адиабатический инвариант связан с системой уравнений Гамильтона, все решения которых приблизительно периодичны. Такие уравнения возникают при изучении движения заряженных частиц в магнитном поле, что имеет большое значение для теории магнитных ловушек и космической физики. Доказанные Крускалом теоремы позволяют устанавливать адиабатическую инвариантность во всех порядках, не проводя при этом никаких вычислений в высших порядках.

Книга Крускала полезна для физиков и математиков, занимающихся вопросами, связанными с дифференциальными уравнениями с быстро колеблющимися решениями.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с развитием работ по физике плазмы, по проблеме управляемых термоядерных реакций и по космической физике возник интерес к исследованию поведения заряженных частиц в магнитных ловушках. Очень часто для практики существенно знать не саму траекторию, а характер движения частицы за весьма продолжительное время. Например, одним из наиболее важных вопросов теории движения частиц в ловушках является вопрос о времени жизни частицы в некоторой замкнутой системе. К этому же типу задач принадлежат задачи по исследованию магнитных поверхностей. Однако в этом случае рассматриваются не траектории частиц, а поведение магнитных силовых линий, причем исследуется вопрос, насколько долго силовая линия останется в заданном ограниченном объеме.

Часто на эти вопросы нельзя ответить точно. Однако существуют асимптотические методы, позволяющие решать такие задачи приближенно. Эти методы разработаны для решения систем дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра  $\varepsilon$ . Обычно стремятся описать поведение решений, используя разложения по степеням  $\varepsilon$ . Поэтому прежде всего нужно иметь метод, позволяющий строить эти разложения. Такой метод был впервые разработан в небесной механике применительно к специфическим для нее системам. Начиная с 30-х годов, П. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов и др. развили соответствующий метод со значительной степенью общности<sup>1)</sup>. Эти методы в последние годы применялись к

<sup>1)</sup> Метод Крылова и Боголюбова изложен не только в цитируемой Крускалом книге [1], которая в настоящее время стала библиографической редкостью, но и в ряде других книг и статей, причем в более общем виде [2, 3]. К задаче об инвариантности магнитного момента этот метод применялся в [10].

ряду вопросов теоретической физики как у нас, так и за рубежом и при этом сам метод получил дальнейшее развитие; значительный вклад еще в 1951 г. был сделан известным американским ученым Крускалом, который впоследствии обобщил полученные результаты и изложил их в систематизированной форме. Эта работа была представлена в виде доклада на Международной конференции по управляемым термоядерным реакциям в Зальцбурге (сентябрь 1961 г.).

Поскольку эти материалы представляют значительный интерес для многих физиков и математиков, было сочтено целесообразным издать перевод доклада Крускала в виде отдельной книги. Работа Крускала начинается с изложения метода построения асимптотических разложений. Этот метод позволяет построить для системы с быстро вращающейся фазой такую замену переменных, которая приводит к распаду системы (с точностью до любой наперед заданной степени  $\epsilon$ ) на уравнение для фазы и «осредненную» или «приведенную» систему для остальных переменных, в которую фаза уже не входит.

Однако эффективно проделать все эти построения во всех порядках невозможно (за исключением отдельных, особенно простых случаев, вроде примера из раздела 2, § 4). Поэтому приходится ограничиваться несколькими первыми приближениями, часто даже одним только первым приближением. Это, конечно, позволяет составить представление о том, какие движения происходят в изучаемой системе, однако важный вопрос об устойчивости (финитности) движения на бесконечном или по крайней мере на очень большом интервале оставался в ряде случаев невыясненным и требовал дальнейшего исследования.

В ряде случаев было обнаружено, что если ограничиться первым приближением, то получается, что при движении остаются постоянными некоторые величины — так называемые адиабатические инварианты. Поскольку сохранение адиабатического инварианта определяет финитность движения, то для целого ряда задач существенно было знать, сохраняется ли адиабатический инвариант

за очень большое время. Поэтому искались поправки к адиабатическому инварианту в следующих порядках<sup>1)</sup>. Кроме того, был поставлен ряд экспериментальных работ по проверке сохраняемости адиабатического инварианта.

Одной из первых наиболее интересных экспериментальных работ в этом направлении является работа Родионова [4], который показал, что адиабатический инвариант сохраняется с нужной степенью точности в течение  $10^7$  колебаний между магнитными зеркалами. Аналогичная работа была выполнена также Гибсоном, Пордапом и Лауэр [5]. Наличие радиационных поясов вокруг земли также свидетельствует о сохранении адиабатического инварианта с очень большой степенью точности.

Вскоре на целом ряде примеров было показано, что адиабатический инвариант сохраняется во всех порядках асимптотического разложения. При этом следует иметь в виду, что адиабатический инвариант вовсе не обязан иметь один и тот же вид во всех порядках малости. Это означает, во-первых, что существует некий ряд по степеням  $\epsilon$  (возможно, расходящийся), оборвав который на  $n$ -м члене, мы получим величину, сохраняющуюся с точностью до  $\epsilon^{n+1}$ , и что, во-вторых, члены ряда (поправки) зависят лишь локально<sup>2)</sup> от параметров системы и не зависят явно от времени.

В работе М. Крускала обобщаются все ранее полученные результаты о сохранении адиабатических инвариантов во всех порядках<sup>3)</sup>. Постановка задачи и результаты имеют значительно большую область применения, чем в равных работах по адиабатическим инвариантам. В отличие от тех работ здесь не ставится задача нахождения поправок к адиабатическим инвариантам или другим аналогичным величинам в следующих

<sup>1)</sup> Из обширной литературы, помимо работ, указанных Крускалом, упомянем еще [11, 12, 13].

<sup>2)</sup> Определение локальной зависимости см. в разделе 1, § 4. В данном случае, впрочем, речь идет о локальности по отношению к интегралу; см. раздел 5, § 2.

<sup>3)</sup> Кроме части результатов Ленарда, см. раздел 1, § 2.

более высоких порядках разложения<sup>1)</sup>). Ее значение состоит в том, что в ней сформулирован и доказан ряд теорем, с помощью которых можно устанавливать, что данная величина сохраняется во всех порядках, не проводя при этом никаких вычислений в высших порядках.

Конечно, асимптотическая теория не дает никаких точных оценок и оставляет нерешенным ряд вопросов. Будет ли движение финитным на бесконечном интервале времени? Если нет, то как найти возрастающие со временем поправки к адиабатическому инварианту?

В этом направлении, выходящем за рамки асимптотических методов, сделаны только первые шаги. Б. В. Чириков [6] пытался получить более точную картину движения, рассматривая резонансы между вращением частиц и медленными колебаниями между магнитными пробками; однако вопрос нельзя считать решенным. В самое последнее время В. И. Арнольд [7] доказал, что в некоторых случаях адиабатический инвариант сохраняется неограниченное время, т. е. что движение остается финитным на бесконечном интервале времени. Эта работа входит в серию работ по системам уравнений Гамильтона, начатую А. Н. Колмогоровым [8]. Известно, что асимптотическая теория не даст точной качественной картины вблизи сепаратрис. Поэтому предпринимаются попытки изучить этот вопрос иными методами. См. [9].

М. Крускал поставил перед собой задачу изложить метод адиабатических инвариантов так, чтобы при максимальной краткости читатель нашел все необходимое для понимания и освоения метода. Поэтому материал изложен достаточно подробно со всеми деталями вычислений. Для удобства читателей в работе приведены и многие известные результаты из теории систем дифференциальных уравнений. Автор всюду использует безымянные обозначения для векторов и тензоров. Это экономит место при написании формул. Однако «диадная» терминология и обозначения мало известны и почти не

<sup>1)</sup> Во всяком случае, те методы нахождения поправок, которые имеются в работе, несколько не проще ранее существующих.

встречаются в литературе. По этой причине, а также потому, что в книге много определений, все основные обозначения, правила и определения сведены нами в специальном дополнении (стр. 83).

Книга М. Крускала будет полезна физикам и математикам, интересующимся как асимптотической теорией, так и ее многочисленными приложениями (особенно в области исследования движения заряженных частиц). Перевод данной работы выполнил М. С. Рабинович, редакция и примечания Д. В. Аносова.

М. С. Рабинович,  
Д. В. Аносов

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П., Боголюбов Н., Введение в нелинейную механику, Киев, 1936.
2. Боголюбов Н. Н., Зубарев Д. Н., Украинский мат. журнал, 7, № 1, 5 (1955).
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958.
4. Родионов С. Н., Атомная энергия, 6, № 6, 623 (1959).
5. Gibson G., Jordan W., Laue E., Phys. Rev. Lett., 5, № 4, 141 (1960).
6. Чириков Б. В., Атомная энергия, 6, № 6, 630 (1959).
7. Арнольд В. И., ДАН СССР, 142, № 4, 758 (1962).
8. Колмогоров А. Н., ДАН СССР, 98, № 4, 527 (1954).
9. Мельников В. К., ДАН СССР, 144, № 4, 747, (1962).
10. Брагинский С. И., Украинский мат. журнал, 8 (1956).
11. Фирсов О. Б., в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 3, 259, (1958).
12. Дыхне А. М., Покровский В. Л., ЖЭТФ, 39, № 2, 373 (1960).
13. Дыхне А. М., Чаплик А. В., ЖЭТФ, 40, № 2, 666 (1961).

#### ОТ АВТОРА

Эта работа была в основном выполнена при поддержке Комиссии по атомной энергии США. Часть работы была сделана в то время, когда автор был гостем в Институте физики и астрофизики им. Макса Планка (в Мюнхене) в качестве стипендиата Национального научного фонда. Обоим этим организациям автор выражает свою благодарность. Кроме того, автору доставляет большое удовольствие поблагодарить за полезные дискуссии и различные предложения ученых, особенно Е. Герджу, Ю. Мозера и коллег автора из лаборатории физики плазмы в Принстоне, главным образом И. Берпштейна, Е. Фримана, Р. Калсруда, А. Лепарда, С. Обермена и Л. Спитцера.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Об истории вопроса

Свойство адиабатической инвариантности (т. е. постоянство интеграла действия при медленном изменении внешних параметров) давно было известно в классической механике. Особенно большое значение адиабатические инварианты получили в так называемых квантовых условиях во времена перехода от классической механики к квантовой. Хотя было ясно, что они постоянны лишь приблизительно, а их инвариантность была показана только в наименьшем исчезающем порядке [1], вопрос о том, сохранится ли это постоянство в высших порядках, по-видимому, не был рассмотрен в то время или в данной связи. Это не произошло, возможно, по двум причинам. Во-первых, вопрос, казалось, имел только академический интерес. Во-вторых, не все адиабатические инварианты являются постоянными в порядках выше первого.

Этот вопрос, по-видимому, впервые приобрел значение, когда Альфвен [2] показал, что магнитный момент заряженной частицы, вращающейся в сильном магнитном поле, является адиабатическим инвариантом. С другой стороны, теория различных устройств для производства полезной энергии при контролируемой термоядерной реакции [3] существенно базируется на постоянстве этого магнитного момента. В тех случаях, когда предусматриваются более или менее стационарные процессы (стелларатор, пробкотрон и т. д.), ясно, что можно ожидать сохранения частиц в течение многих миллионов оборотов только при условии, если магнитный момент с большой степенью точности остается постоянным. В связи с работами по теории стелларатора было получено несколько приближенных результатов, которые, как было показано, сохраняются во всех порядках [4, 5].



Это сделало более вероятным мнение, что постоянство магнитных моментов также имеет место. С другой стороны, астрофизические задачи (например, механизм Ферми [6] образования космических лучей) привели к тому же самому вопросу. В связи с этим Хеллвиг [7] проверил постоянство магнитного момента в следующем (выше первого) порядке. Калсруд [8] рассмотрел простую задачу гармонического осциллятора с медленно изменяющимся коэффициентом упругости и показал, что его адиабатический инвариант (отношение энергии к частоте) сохраняется во всех порядках. Это, по-видимому, был первый результат подобного рода. Вскоре после этого первого прорыва Крускал [9] получил аналогичный результат для вращающихся частиц, а Ленард [10] — для ангармонического осциллятора. Берковиц и Гарднер [11] подтвердили эти результаты с необычайной (но желаемой!) математической строгостью. Они показали, что формальное разложение, примененное для описания движения вращающихся частиц, действительно является правильным асимптотическим рядом для траектории частиц.

Другой адиабатический инвариант, знание степени точности которого недавно приобрело практическое значение, — это так называемый продольный адиабатический инвариант вращающихся частиц. Этот инвариант получается для более частных случаев, чем инвариант магнитного момента, а именно для того случая, когда вращающаяся частица движется вперед и назад вдоль магнитной силовой линии и возвращается периодически к начальному состоянию. Продольный адиабатический инвариант вращающихся частиц, по-видимому, впервые использовал (в наименьшем порядке) Розенблют [12]. Интерес к этому инварианту (особенно в высших порядках) вновь возник после открытия радиационных поясов земли [13]. Гарднер [14] доказал его инвариантность во всех порядках.

## § 2. Значение работы и порядок изложения

В настоящей статье достигнута унификация и упрощение всех упомянутых выше работ по адиабатической инвариантности в высших порядках. Оказалось, что эти

работы имеют общую существенную черту — каждый из рассматриваемых в них инвариантов связан с гамильтоновой системой<sup>1)</sup>, все решения которой приблизительно периодичны. Чтобы не быть обвиненным в трюизме, следует отметить, что имеются другие типы адиабатических инвариантов, связанных с гамильтоновыми системами, решения которых в низшем порядке эргодичны на поверхностях постоянной энергии в фазовом пространстве. (Между прочим, Ленард [10] показал, что можно получить описание и результаты, справедливые во всех порядках, даже для некоторой системы, все решения которой приблизительно только «многопериодичны»<sup>2)</sup>, если она линейна.)

Эти две характеристики (т. е. то, что система является гамильтоновой и все решения приблизительно периодичны) можно рассматривать в значительной степени независимо друг от друга, хотя их объединение (названное Герджу новым словом «квазимеханикой») приводит к интересным следствиям (см. раздел 5). Так как теория гамильтоновых систем чрезвычайно хорошо развита, то все необходимое мы имеем под рукой, может быть, за исключением результатов, доказанных в приложении 2. Поэтому мы посвятили основную часть статьи изучению систем дифференциальных уравнений, все решения которых приблизительно периодичны. Эта задача имеет большой самостоятельный интерес во многих случаях. Сначала получим подходящее формальное решение в виде ряда (см. раздел 2, § 5—9). Наша методика в основном совпадает с методом Крылова и Боголюбова [15], но, по-видимому, является несколько более общей, так как указанный метод относится к квазилинейным системам второго порядка<sup>3)</sup>.

Затем покажем (см. раздел 2, § 10 и 11), что данная система имеет точные решения, определенные в достаточно большой области независимой переменной, и что формальный ряд представляет точные решения асимп-

<sup>1)</sup> В данной книге термин «гамильтонова система» употребляется как синоним термина «система уравнений Гамильтона». — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> То есть представляю собой конечную сумму гармоник с различными периодами. — *Прим. ред.*

<sup>3)</sup> См. примечание на стр. 5. — *Прим. ред.*

тотически. По-видимому, наш метод более прост и более естествен, чем метод, развитый Берковицем и Гарднером [11] для специального случая вращающихся частиц. Интересной чертой метода (см. раздел 2, § 11) является использование «метода связывания», при котором два утверждения проверяются одновременно. Этим способом мы избегаем некоторых повторений, присущих работе Берковица и Гарднера.

Раздел 3 начинается с теоремы о независимости от фазы, значение и полезность которой для данной статьи трудно переоценить. Честно говоря, в разделах 3—5 не содержится почти ничего, кроме систематического использования этой теоремы. Полное значение этой до смешного простой теоремы может быть оценено, вероятно, только теми, кто, подобно автору, тратил колоссальное количество усилий и времени, пытаясь (часто безуспешно) получить различные результаты, справедливые во всех порядках разложения.

### § 3. Обозначения и определения

Мы постоянно используем векторные и диадные обозначения, когда имеем дело с совокупностями величин, и часто позволяем себе применять геометрическую терминологию, которая им так естественно соответствует. Все векторы обозначаются строчными курсивными буквами, набранными жирным шрифтом, а диады — прописными курсивными буквами, также набранными жирным шрифтом. Когда впервые вводится вектор, мы будем указывать, конечно, число его компонент (элементов совокупности), если оно определено. Но после того это число не будет указываться никакими специальными обозначениями. Единичную диаду в любом числе измерений мы будем обозначать буквой  $\mathcal{J}$ . Скалярное произведение двух векторов (оно обозначается точкой) будет определено только в том случае, если векторы имеют одинаковое число компонент, а двойное скалярное произведение следует понимать в том смысле, что

$$ab : cd = (a \cdot d)(b \cdot c).$$

Дифференцирование (обычное или частное) мы будем всюду обозначать, приписывая к дифференцируемой

величине в качестве нижнего индекса переменную, по которой берется производная. Поэтому нижние индексы используем исключительно для этой цели. Для того чтобы в некоторых местах сохранить правильный порядок векторов, иногда удобно записывать индекс перед символом, к которому он относится. Так, например,  ${}_x f$  означает градиент векторного поля  $f$  и является диадой, получающейся транспонированием  $f_x$ .

Когда один ряд переменных (координат) переходит в другой, этот процесс символизируется двойной стрелкой  $\leftrightarrow$ . Новые переменные будут обозначаться символами, полностью отличными от старых; поэтому (в отличие, например, от термодинамики, где используются обыкновенные обозначения) здесь не может возникнуть неясность, какие переменные фиксированы при частном дифференцировании.

Мы имеем в основном дело с формальными бесконечными рядами по возрастающим целым степеням параметра разложения  $\varepsilon$  и обычно опускаем какие-либо указания на  $\varepsilon$  в обозначениях. Если, например,  $f$  означает такой ряд, то  $f^{(n)}$  — коэффициент перед  $\varepsilon^n$ , а  $f^{[n]}$  — сумма всех членов ряда  $f$  до члена  $\varepsilon^n f^{(n)}$  включительно. Как обычно,  $O(\varepsilon^n)$  означает любую величину, которая стремится к нулю по крайней мере так же быстро, как  $\varepsilon^n$ .

Переменную мы назовем *квазиугловой*, если она определяется с точностью до аддитивного целого числа и только с такой точностью. Таким образом, эта переменная подобна углу, измеряемому в единицах полного числа оборотов. (Заметим, что мы будем выделять курсивом термин, когда он вводится впервые.)

### § 4. Локальная зависимость и полезные интегралы

Для полного понимания значения полученных результатов необходимо обсудить здесь понятие локальной зависимости. Функция  $\eta(\mathbf{x})$ , определенная в пространстве точек  $\mathbf{x}$  и являющаяся функционалом [т. е. зависящая от другой, определенной в том же пространстве функции  $\xi(\mathbf{x})$ ], зависит *локально* от  $\xi(\mathbf{x})$ , если значение функции  $\eta$  в любой данной точке  $\mathbf{x}$  не зависит от значения  $\xi$  вне произвольно малой окрестности этой точки. (Здесь под

символами  $\xi$  и  $\eta$  можно понимать также совокупности многих функций). На практике это обычно означает, что  $\eta$  в точке  $x$  есть функция  $x$  и значения  $\xi$  и ее производных (и часто число производных конечно) в той же точке  $x$ . Мы используем это определение только «метаматематически», т. е. можем изменять его или использовать не очень строго в зависимости от обстоятельств.

Чтобы пояснить, почему локальная зависимость существенна, обратим внимание на то, что один из наших результатов состоит в выводе приближенного интеграла или «константы движения»  $J$  (см. раздел 5, § 2) для псковой системы дифференциальных уравнений. Возникает вопрос: каким образом этот результат может иметь значение, ведь такая система, вообще говоря, имеет не только один, а полный ряд точных интегралов? Ответ заключается в том, что  $J$  является «полезным» интегралом. Имеются две возможности, при которых интеграл системы может не быть полезным: во-первых, если не получается так называемый изолирующий интеграл (см. Уинтнер [16]), и, во-вторых, если он не является локально вычисляемым.

Чтобы проиллюстрировать первую возможность (не входя в детали и также не давая определение изолирующего интеграла) с помощью действительно тривиального примера, рассмотрим систему, которая состоит из двух независимых подсистем:

$$\dot{x}_s = a, \quad \dot{y}_s = b, \quad (1.1)$$

где  $x$  и  $y$  — квазиугловые переменные, а  $s$  — независимая переменная,  $a$  и  $b$  — заданные константы. Каждая из подсистем имеет один интеграл, а именно:

$$x = as, \quad y = bs. \quad (1.2)$$

Будем интересоваться интегралом, не зависящим от  $s$ . Легко видеть, что подсистемы не имеют таковых, но комбинированная система имеет интеграл, не зависящий от  $s$ :

$$bx - ay. \quad (1.3)$$

Этот интеграл, однако, многозначен. Если  $a$  и  $b$  соизмеримы ( $a/b$  рационально), то мы имеем изолирующий

интеграл и он полезен: зная значение интеграла (например, из начальных условий) и, скажем,  $\beta$ , можно высказать соображения относительно величины  $\alpha$ . Действительно, записав  $a/b$  в стандартной форме как  $m/n$  (где  $m$  и  $n$  не имеют общих множителей и  $n$  положительно), можно сказать, что  $\alpha$  должно иметь  $n$  (существенно различных) значений, попарные разности которых кратны  $1/n$ . С другой стороны, если  $a$  и  $b$  несоизмеримы, интеграл не является изолирующим и бесполезен для указанной цели.

Вторая возможность имеет более прямое отношение к делу. Для иллюстрации рассмотрим движение частицы в данном статическом трехмерном потенциальном поле. Чтобы гарантировать существование полной системы изолирующих интегралов, условимся принимать во внимание и интегралы, зависящие от времени. (В различных специальных случаях существование указанной системы может быть гарантировано, даже если ограничиться интегралами, не зависящими от времени, например, если потенциал трансляционно инвариантен, так что соответствующая пространственная координата растет линейно во времени и может играть роль времени.) В таких случаях иногда говорят, что энергия является единственным интегралом. Строго говоря, это чепуха, так как мы знаем, что существует полная система интегралов (например, значения динамических переменных, взятые при  $t = 0$  и рассматриваемые как функции свободных динамических переменных<sup>1)</sup>). Но не существует сомнения в исключительном положении интеграла энергии. Он играет в бесчисленных физических рассуждениях уникальную роль, которая не свойственна другим интегралам. Причина этого заключается в том, что энергия зависит только локально от потенциала и что не существует других интегралов (функционально не зависящих от энергии) с этим свойством. Дело в том, что, хотя в каждом отдельном случае (т. е. для каждой отдельной потенциальной

<sup>1)</sup> Более подробно, если  $x(t, x_0)$  означает решение, проходящее при  $t = 0$  через точку  $x_0$ , то, разрешив уравнения  $x = x(t, x_0)$  относительно  $x_0$ , мы получим систему функций  $x_0 = x_0(t, x)$ , которые, очевидно, постоянны вдоль решения. — Прим. ред.

функции) существуют другие интегралы, математически весьма хорошо определенные, проблема их нахождения эквивалентна проблеме интегрирования уравнений движения частицы. Только интеграл энергии полезен, потому что он один известен *a priori* без полного интегрирования системы и один остается неизменным (в его функциональной форме) в какой-нибудь области при изменении потенциала где-либо в другом месте вдоль орбиты частицы.

### § 5. Автономные системы уравнений

Всюду в этой статье мы будем иметь дело с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Главным образом для удобства обозначений считаем, что правые части уравнений не содержат независимой переменной. Однако это не является существенным ограничением, так как не имеется никаких препятствий для осуществления такой зависимости *de facto* (коль скоро она не допускается *de nomine*): действительно, можно ввести зависимую переменную, которая всюду равна независимой, т. е. имеет производную, равную единице. Обозначая все зависимые переменные через  $x$  и независимую переменную через  $s$ , можно записать общую систему уравнений в следующем виде:

$$\dot{x}_s = f(x). \quad (1.4)$$

Эту систему можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка в пространстве точек  $x$ . Для краткости и как некоторое напоминание, что скорость изменения  $x$  зависит только от  $x$ , назовем такие системы *автономными*. Когда  $f(x)$  представляет собой формальный ряд по степеням  $\epsilon$ , мы скажем, что уравнение (1.4) записано в *стандартной форме*, если  $f$  начинается с члена нулевого порядка, который нигде (как функция от  $x$ ) не исчезает (т. е. все компоненты не обращаются одновременно в нуль).

Мы предполагаем, что  $f$  является достаточно гладкой функцией, так что вся обычная теория систем обыкновенных дифференциальных уравнений применима в нашем случае. Наиболее фундаментальным выводом этой

теории является то, что для каждого определенного «начального условия», т. е. для определенного значения  $x$ , скажем для значения  $x$  при  $s = 0$ , существует решение уравнения (1.4), которое можно продолжать неограниченно, пока  $x$  остается внутри области определения  $f$ . Другой фундаментальный вывод заключается в том, что такое решение единственно: любые две функции, удовлетворяющие той же самой автономной системе уравнений и равные при  $s = 0$ , равны для всех значений  $s$  (в любом интервале, который содержит 0 и в котором обе функции определены). Этот вывод в действительности является частным случаем основной теоремы о приближенном решении обычных дифференциальных уравнений (см. приложение 1).

Пусть  $X(x, s)$  означает единственное решение уравнения (1.4), которое проходит через  $x$  при  $s = 0$ , т. е. определяется следующими условиями:

$$\dot{X}_s(x, s) = f(X(x, s)), \quad (1.5)$$

$$X(x, 0) = x. \quad (1.6)$$

Важное свойство решений автономных систем состоит в том, что однопараметрическое семейство преобразований, переводящих точки пространства  $x$  в точки того же пространства

$$x \rightarrow X(x, s),$$

образует группу. Более того, последовательное выполнение операций  $X(x, s')$  и  $X(x, s)$  дает  $X(x, s' + s)$ , так что эта группа изоморфна аддитивной группе действительных чисел  $s$ . Уравнение (1.6) уже констатирует, что при  $s = 0$  мы имеем тождественное преобразование. Поэтому остается установить, что

$$X(X(x, s'), s) = X(x, s + s'). \quad (1.7)$$

Это равенство следует из теоремы единственности. Действительно, левая и правая части, согласно (1.6), равны друг другу при  $s = 0$  и удовлетворяют той же самой автономной системе уравнений, потому что левая сторона соотношения (1.7) получается из  $X(x, s)$  подстановкой  $X(x, s')$  вместо  $x$ , а правая — подстановкой  $s + s'$  вместо  $s$ , и ни одна из этих подстановок не нарушает (1.5).

## 1. Введение

Другое свойство, которое мы используем в следующем параграфе, теперь легко может быть получено. Полагая в (1.5)  $s = 0$  и учитывая (1.6), находим

$$X_s(x, 0) = f(x). \quad (1.8)$$

Дифференцируя (1.7) по  $s'$ , полагая затем  $s' = 0$  и принимая во внимание (1.6) и (1.8), получаем окончательно

$$X_x(x, s) \cdot f(x) = X_s(x, s). \quad (1.9)$$

## § 6. Рекуррентные системы уравнений

Если все решения системы уравнений (1.4) периодичны (периоды не обязательно равны), то мы назовем (1.4) *рекуррентной системой*. Мы также по аналогии назовем векторное поле  $f$  в  $x$ -пространстве *рекуррентным*, если интегральные кривые (т. е. кривые, касающиеся в каждой точке поля) замкнуты и образуют топологические круги, которые мы будем называть *петлями*. Тогда для каждого  $x$  существует наименьшее положительное значение  $s$ , при котором начальное значение  $x$  вновь повторяется; обозначая этот период изменения  $x$  символом  $S(x)$ , имеем следующие соотношения:

$$X(x, S(x)) = x, \quad (1.10)$$

$$X(x, s) \neq x \quad \text{при} \quad 0 < s < S(x). \quad (1.11)$$

Докажем, далее, с помощью формальных рассуждений тот очевидный факт, что период  $S(x)$  постоянен вдоль орбиты. Сначала продифференцируем по  $s$  уравнение (1.10), учитывая, что  $x$  изменяется в соответствии с (1.4). Другими словами, мы берем производную по  $x$ , скажем, от правой части и полученное умножаем скалярно на  $f(x)$ ; используя затем (1.9) при  $s = S(x)$ , получаем

$$X_s(x, S(x)) + X_s(x, S(x)) S_x(x) \cdot f(x) = f(x). \quad (1.12)$$

Но подставляя  $s = S(x)$  в (1.5) и учитывая (1.10), находим

$$X_s(x, S(x)) = f(x). \quad (1.13)$$

Поэтому крайние члены в (1.12) сокращаются, и далее, так как  $f \neq 0$ , мы получаем

$$S_x(x) \cdot f(x) = 0. \quad (1.14)$$

Это и есть желаемый результат о постоянстве  $S$  вдоль орбиты. Чтобы установить это явно, напишем с учетом (1.5) и (1.14) [делаем в последнем уравнении подстановку  $x = X(x, s)$ ]:

$$\begin{aligned} \{S(X(x, s))\}_s &= S_x(X(x, s)) \cdot X_s(x, s) = \\ &= S_x(X(x, s)) \cdot f(X(x, s)) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, период, вычисленный во всех точках решения  $X(x, s)$ , одинаков (не зависит от  $s$ ). Этот результат можно записать в следующей форме:

$$S(X(x, s)) = S(x). \quad (1.16)$$

Другим, едва ли удивительным результатом является обобщение (1.10):

$$X(x, s + S(x)) = X(x, s). \quad (1.17)$$

Этот результат можно получить из теоремы единственности или путем следующих рассуждений. Перепишем левую часть уравнения (1.17) с помощью соотношения (1.7), заменив в последнем  $s'$  на  $S(x)$  а правую часть перепишем с помощью соотношения (1.10), заменив в последнем  $x$  на  $X(x, s)$ . Тогда (1.17) примет следующую эквивалентную форму:

$$X(X(x, s), S(x)) = X(X(x, s), S(X(x, s))), \quad (1.18)$$

а это непосредственно вытекает из (1.16). Теперь очевидно, что  $X(x, s)$  имеет одно и то же значение для двух различных значений  $s$  тогда и только тогда, когда эти значения отличаются на величину, кратную  $S(x)$ . Слово «тогда» следует по индукции из (1.17), а слова «только тогда» вытекают из того, что в противном случае получилось бы противоречие с условием (1.11).

## § 7. Разделяемые системы уравнений

Некоторые системы дифференциальных уравнений обладают важным свойством — из них можно образовать автономные подсистемы. Предположим, что  $x$  означает  $N$  независимых переменных и что имеется некоторое число  $M$

переменных (причем  $1 \leq M \leq N-1$ ), производные которых определяются уравнением (1.4) и не зависят от остальных  $N-M$  переменных. Тогда  $M$  переменных образуют автономную подсистему, и мы можем считать, что первоначальная система *разделилась*. В общем случае назовем систему *разделяемой*, если путем локального изменения зависимых переменных ее можно преобразовать в разделенную систему, т. е. если существует локальное определение  $M$  новых переменных как функций от  $x$ , производные которых, вычисленные по (1.4), выражаются как функции одних только этих  $M$  новых переменных. Эти новые переменные образуют *новую автономную* систему меньшего числа переменных.

Под локальным изменением переменной подразумевается такое изменение, которое определяется формулами, локально зависящими от  $f(x)$  (см. § 4). Требование локальности существенно для определений. Без него, например, каждая система с полным рядом интегрируемых интегралов была бы не только разделяемой, но и разделялась бы полностью на  $N$  независимых автономных подсистем с одной зависимой переменной в каждой.

Если система порядка  $N$  разделяема, то задачу ее решения можно разбить на две последовательные задачи: сначала решить систему порядка  $M$  и затем систему порядка  $N-M$ .

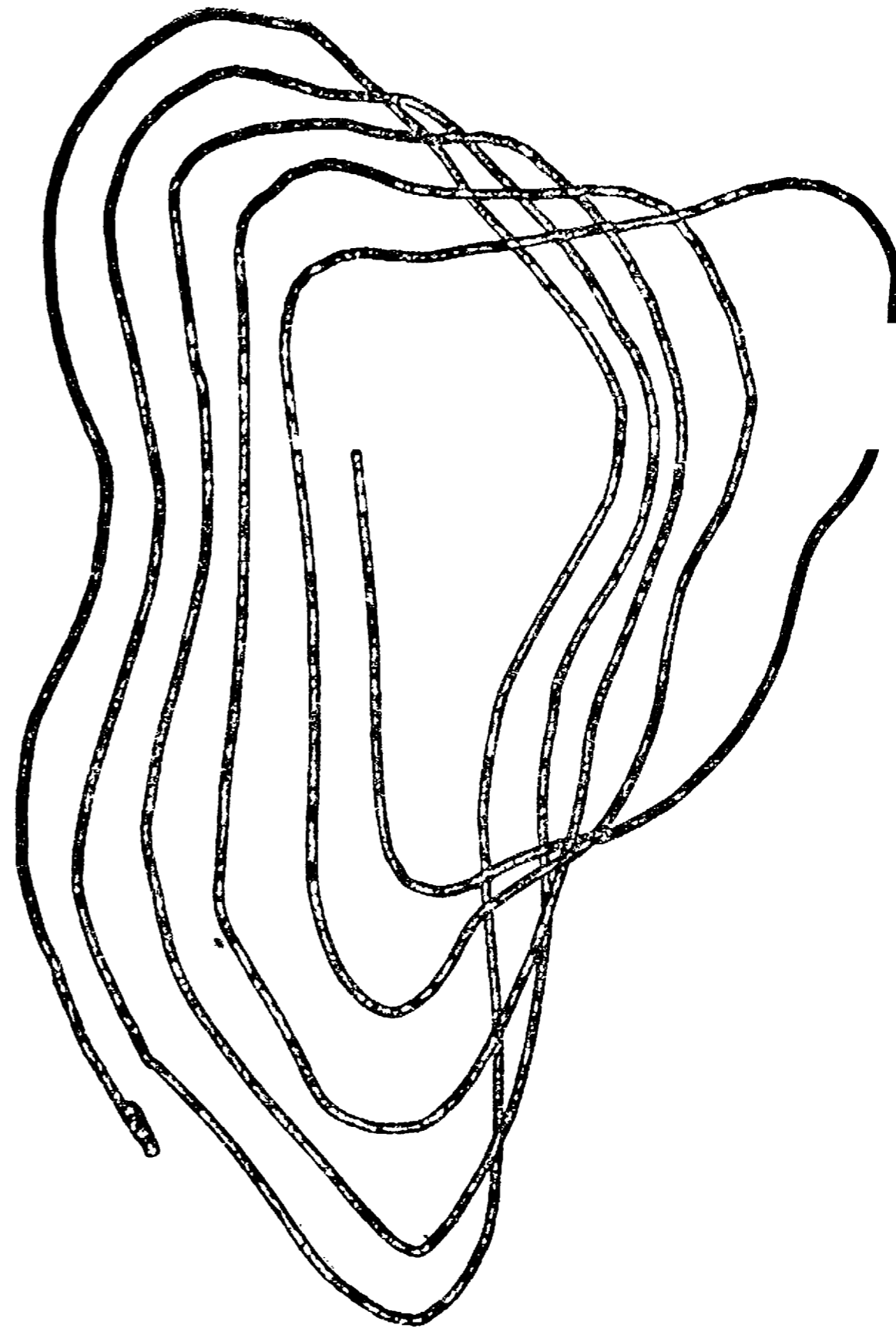
## 2. ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО РЕКУРРЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

### § 1. Формулировки и описание

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_s = F(x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

где  $x$  и  $F$  — векторы с  $N$  компонентами. Допустим, что функция  $F$  задана в некоторой области своих аргументов (о которой будет сказано ниже), непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков.



Фиг. 1. Траектория решения (2.1).

Кривая не может самопересекаться. Кажущиеся пересечения получились при проектировании.



Здесь  $f(x)$  означает разложение в ряд Тейлора функции  $F$  в точке  $\varepsilon = 0$  и поэтому представляет бесконечно дифференцируемый формальный бесконечный ряд по неотрицательным степеням  $\varepsilon$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left[ \frac{d^n F}{dz^n} \right]_{\varepsilon=0} \frac{1}{n!}. \quad (2.5)$$

Мы имеем две причины для того, чтобы поступать таким образом. Во-первых, так как мы ищем формальное решение (которое, как будет показано позже, представляет истинное решение асимптотически, но которое, вообще говоря, не сходится к нему и вообще не сходится; см. следующий параграф), то мы обязаны в каком-то месте каким-то образом ввести формальные ряды, и проще всего сделать это с самого начала. Во-вторых, теорию, которую мы собираемся разработать, можно применять не только к истинным системам дифференциальных уравнений, но и к системам, всего лишь формальным (в частности к приведенным системам, образующимся при первом же применении теории; см. раздел 5, § 6).

Однако необходимо сделать предупреждение. Конечно, (2.4) является формальным аналогом (2.1) и, разумеется, формальные решения (2.1), которые мы получим, когда будем производить вычисления до членов порядка  $n$ , дают приближенные решения уравнения (2.1) с точностью до этого порядка [как и истинные решения системы  $\dot{x}_s = f^{[n]}(x)$ ]. Это следует из основной леммы о приближениях (см. приложение 1). Но все это справедливо только в промежутке значений  $s$ , ограниченном независимо от  $\varepsilon$ . Из-за наличия экспоненты в оценках [см. (П. 9)] не играет роли, насколько большое число членов  $n$  мы возьмем, все равно мы не могли бы ожидать, что эти формальные приближения останутся близкими к истинным решениям в области  $s$  порядка  $1/\varepsilon$  (или порядка  $1/\varepsilon^\alpha$ , где  $\alpha > 0$ , но мы могли бы, например, этого ожидать для области порядка  $\log \varepsilon$ ). Вернее, мы не могли бы ожидать этого, если бы не было сделано предположения о приближительной периодичности. Один из наших выводов (см. раздел 2, § 10) со-

стоит в том, что приближения действительно хороши для областей порядка  $1/\varepsilon$  (но недостаточно хороши: два порядка по  $\varepsilon$  теряются при выводах<sup>1)</sup>).

#### § 4. Пример

Очень простой, но вдвойне хороший пример представляет гармонический осциллятор с медленно изменяющимся положением точки равновесия. В качестве основного уравнения возьмем следующее:

$$\varepsilon^2 u_{tt} + u = r(t), \quad (2.6)$$

где  $u$  — смещение осциллятора, а  $r(t)$  — координата точки равновесия, являющаяся заданной функцией  $t$  (и, возможно, рядом по степеням  $\varepsilon$ ). Если бы функция  $r$  была постоянной, то каждое решение (2.6) представляло бы собой гармоническое колебание около  $r$  с периодом  $2\pi\varepsilon$ . Если же, как это есть на самом деле,  $r(t)$  — величина приблизительно постоянная в течение периода, то можно привести (2.6) к виду, соответствующему задачам этой статьи.

Чтобы период оставался конечным, мы положим

$$s \equiv \frac{t}{\varepsilon},$$

так что (2.6) перейдет в уравнение, с которого можно было бы начать,

$$u_{ss} + u = r(\varepsilon s). \quad (2.7)$$

Здесь правая часть изменяется медленно из-за множителя  $\varepsilon$  в аргументе функции  $r$ . Чтобы (2.7) превратить в формальную систему уравнений первого порядка, положим

$$v \equiv u_s,$$

а чтобы исключить зависимость функции  $r$  от независимой переменной  $s$ , вернемся к переменной  $t$ , но теперь будем рассматривать ее как новую зависимую переменную. (Мы не вводим новую зависимую переменную, равную  $s$ , потому что  $s$  не является рекуррентной даже в

<sup>1)</sup> См. § 10 настоящего раздела, стр. 40. Прим. ред.

лизшем порядке.) Таким образом, приходим, наконец, к системе, записанной в стандартной форме (2.4), где принято

$$\begin{aligned} x &\equiv (u, v, t), \\ f &\equiv (v, r(t) - u, \epsilon). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эта система приблизительно рекуррентна, так как  $t$  в нулевом порядке остается постоянной, а  $u$  и  $v$  периодически колеблются.

Используя этот пример для иллюстрации того, как данную систему можно преобразовать в соответствии с теорией, покажем теперь, почему формальный ряд, к которому мы приходим, является в общем случае асимптотическим, а не сходящимся, как можно было бы ожидать (когда  $f$  сходится, т. е. когда является аналитической функцией). Для этой цели необходима только первоначальная форма уравнения (2.6). Соответствующее однородное уравнение имеет общее решение:

$$u = \alpha \cos\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + \beta \sin\left(\frac{t}{\epsilon}\right). \quad (2.9)$$

Нам остается найти частное решение (2.6). Частное решение для этого случая можно выбрать «безосцилляторное» (понятие, которое можно ввести строго с помощью обращения  $J'$  в нуль; см. раздел 5, § 2). Это является однозначно определяющей характеристикой во всех порядках разложения, хотя плохо определено для конечного  $\epsilon$ . Упомянутые осцилляторы, естественно, такого малого периода  $2\pi\epsilon$ , что их можно исключить, потребовав, чтобы дифференцирование по  $t$  не действовало на порядок по  $\epsilon$  (не понижало порядок), в отличие от того, что происходит при дифференцировании общего решения (2.9). Таким образом,  $\epsilon^2 u_{tt}$  рассматривается как малая величина и (2.6) решается рекуррентно

$$\begin{aligned} u &= r - \epsilon^2 u_{tt}, \\ u &= r - \epsilon^2 r_{tt} + \epsilon^4 r_{tttt} - \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это формальное разложение отличается от ряда Тейлора для  $r(t + \epsilon)$  в двух отношениях: в одном несущественном для наших целей — отсутствие нечетных степеней  $\epsilon$ ,

изменение знака среди четных степеней — и в одном важном — отсутствие  $n!$  в знаменателе члена порядка  $\epsilon^n$ . Таким образом, ясно, что даже аналитичность  $r(t)$  недостаточна для того, чтобы обеспечить сходимость (2.10). Так, для того чтобы (2.10) имело отличный от нуля радиус сходимости, разложение функций  $r(t + \epsilon)$  должно иметь бесконечный радиус сходимости, т. е.  $r(t)$  должна быть целой функцией. И даже этого не совсем достаточно, как можно видеть из фурье-анализа уравнения (2.6) <sup>1)</sup>.

### § 5. Более подходящие переменные

Наши поиски асимптотического решения уравнения (2.4) мы начнем с введения новой системы координат, более удобной для описания приблизительно периодических, но медленно дрейфующих траекторий. Для этого заметим, что петли образуют  $(N - 1)$ -мерное семейство, так что существует  $N - 1$  независимых функций с аргументом  $x$ , постоянных вдоль каждой из петель. Очевидно, что функции можно выбрать бесконечно дифференцируемыми, так как  $f^{(0)}$  обладает этим свойством.

<sup>1)</sup> Судя по последней фразе, Крускал, по-видимому, имеет в виду тот случай, когда функция  $r(t)$  периодическая; будем считать, что ее период равен  $2\pi$ . Допустим, что при некотором  $\epsilon \neq 0$  ряд (2.10) сходится (равномерно по  $t$ ). Тогда этот ряд (будучи степенным рядом по  $\epsilon$ ) должен сходиться и при всех меньших  $\epsilon$  (тоже равномерно по  $t$ ), а его сумма должна быть периодическим решением уравнения (2.6), имеющим период  $2\pi$ , так что при всех достаточно малых  $\epsilon$  уравнение (2.6) должно иметь периодическое решение. Но это оказывается возможным лишь в том случае, когда  $r(t)$  — тригонометрический полином, т. е. когда в разложении Фурье

$$r(t) = \sum r_n e^{int}$$

лишь конечное число членов отлично от нуля. Действительно, если

$$u = \sum u_n e^{int}$$

— периодическое решение (2.6), то для  $u_n$  получаются уравнения

$$-\epsilon^2 n^2 u_n + u_n = r_n,$$

откуда видно, что при  $\epsilon = 1/k$  уравнение для  $u_k$  (и  $u_{-k}$ ) непротиворечиво только в том случае, когда  $r_k = 0$  (и  $r_{-k} = 0$ ). — Прим. ред.



[Например, мы могли бы выбрать бесконечно дифференцируемую  $(N-1)$ -мерную гиперповерхность в  $x$ -пространстве, которая нигде не касается  $f^{(0)}$ , затем выбрать любую совокупность  $(N-1)$  независимых бесконечно дифференцируемых координат  $Y$  на гиперповерхности и продолжить их в остальную часть  $x$ -пространства так, чтобы они оставались постоянными на каждой петле.] Обозначим некоторый, произвольно выбранный, но фиксированный набор таких функций через  $Y(x)$ . Эта векторная функция имеет  $N-1$  компонент. Таким образом, каждая петля однозначно характеризуется постоянной (векторной) величиной — значением, которое принимает векторная функция  $Y(x)$  на этой петле.

Далее допустим, что  $T(x)$  — любая бесконечно дифференцируемая квазиугловая функция, которая монотонно изменяется вдоль каждой петли. Для определенности примем, что эта функция увеличивается с возрастанием  $s$ . Произведем замену переменных. Перейдем от  $x$  к  $y$  и  $v$ :

$$y = Y(x), \quad v = T(x). \quad (2.11)$$

Конечно, функция  $v$  определена только с точностью до произвольного аддитивного целого числа. Ясно, что этому преобразованию соответствует обратное бесконечно дифференцируемое преобразование, которое мы обозначим следующим образом:

$$x = X(y, v), \quad (2.12)$$

где  $X$ , конечно, периодически по  $v$  (с периодом, равным 1).

В этих новых переменных система (2.4) принимает следующий вид:

$$y_s = \varepsilon g(y, v), \quad v_s = \psi(y, v), \quad (2.13)$$

где (всюду опуская аргументы  $y$  и  $v$ )

$$\varepsilon g \equiv Y_x(X) \cdot f(X), \quad (2.14)$$

$$\psi \equiv T_x(X) \cdot f(X). \quad (2.15)$$

Здесь  $g$  и  $\psi$  — бесконечно дифференцируемые формальные ряды. Их основные члены порядка  $O(1)$ , причем основной член  $\psi$  положительно определен; перед  $g$  стоит

множитель  $\varepsilon$ , так как по определению  $y_s$  должно исчезать в нулевом порядке. Эти уравнения ясно изображают вращение по петлям. Действительно, в нулевом порядке  $x$  остается на петле при увеличении  $s$  (так как  $y$  — константа) и периодически обегает ее (так как  $v$  увеличивается монотонно). В первом порядке петля может дрейфовать, так как может изменяться  $y$ .

Однако нас едва ли может удовлетворить система уравнений в форме (2.13). Вращение, описываемое ею, может быть очень неправильным, полным внезапных ускорений и замедлений, так как  $\psi$  может сильно флуктуировать. Кроме того (что на самом деле более серьезно), окончательная скорость дрейфа явно не входит в уравнение, так как во время одного оборота  $g$  может иметь любые направления, даже совсем противоположные направлению, в котором происходит эффективный дрейф  $y$ . Ее можно найти только при некотором интегрировании вдоль петли. Используя ранее введенную наглядную картину, можно сказать, что в новых координатах  $y$  и  $v$  каждая траектория действительно может быть похожей на спираль с малым шагом (если мы рассматриваем  $v$  как угловую координату точки на окружности), однако только в нулевом порядке. Но даже и в этом порядке  $s$  не увеличивается равномерно вдоль петли.

Указанные недостатки можно исправить. Например, если мы займемся исправлением менее существенного недостатка, то нетрудно увидеть, что при разумном выборе  $T(x)$  функция  $\psi^{(0)}$  перестает зависеть от  $v$ . Для этой цели необходимо взять  $T(x)$  в следующем виде:

$$T(x) = \frac{\int_{x'}^x dx / f^{(0)}}{S(x')}, \quad (2.16)$$

где  $x'$  — некоторая определенная точка на петле, скажем точка пересечения с гиперповерхностью, о которой говорилось выше,  $S$  — это период (см. раздел 1, § 6) и линейный интеграл взят вдоль петли (так что отношение векторов под знаком интеграла имеет смысл и является скаляром и, само собой разумеется, означает лишь  $ds$ ). При применении нашего метода для частных проблем

действительно очень желательно начать с указанного выбора  $T$ . Мы, однако, не будем точно определять этот, так называемый *разумный выбор*, поскольку для наших абстрактных целей это несущественно, однако изредка, когда конкретный выбор будет иметь значение, будем делать специальные указания.

### § 6. Лучшие переменные

Все недостатки, которые мы заметили в системе (2.13), возникают благодаря зависимости функций  $g$  и  $\psi$  от  $v$ . Поэтому мы спросим себя, можно ли найти бесконечно дифференцируемое формальное преобразование к новым переменным, которые были бы подобны  $y$  и  $v$  и удовлетворяли бы уравнениям, аналогичным (2.13), но не имеющим неприятной зависимости от квазиугловой переменной не только в нулевом порядке, но во всех порядках? Мы увидим, что ответ положительный.

Введем новые переменные (вектор  $z$  с  $N-1$  компонентами и квазиугловую переменную  $\varphi$ ), связанные со старыми переменными следующим образом:

$$z = Z(y, v), \quad \varphi = \Phi(y, v), \quad (2.17)$$

где  $Z$  и  $\Phi$  — искомые функции. Пусть система (2.13) и, следовательно, (2.4) преобразуются в систему

$$z_s = \varepsilon h(z), \quad \varphi_s = \omega(z), \quad (2.18)$$

которая аналогична (2.13), но в правую часть ее не входит  $\varphi$ ;  $h$  и  $\omega$  также должны быть найдены. Естественно, что  $h$  и  $\omega$ , подобно  $g$  и  $\psi$ , являются бесконечными рядами по  $\varepsilon$  и, конечно,  $Z$  и  $\Phi$  являются такими же рядами. Поэтому преобразование (2.17) в отличие от (2.11) зависит от параметра разложения  $\varepsilon$ . Но это совсем не важно, особенно потому, что  $\Phi$  и  $Z$ , а значит  $h$  и  $\omega$  должны быть порядка  $O(1)$ .

Мы должны наложить на  $Z$  и  $\Phi$  условие периодичности, которое выражает тот факт, что  $v$  и  $\varphi$  — квазиугловые переменные:

$$Z(y, v+1) = Z(y, v), \quad \Phi(y, v+1) = \Phi(y, v) + 1. \quad (2.19)$$

Оказывается, что при  $\varepsilon = 0$  можно выбрать зависимость  $Z$  и  $\Phi$  от  $y$  с большим произволом. Для определенности и простоты мы выберем следующие начальные условия:

$$Z(y, 0) = y, \quad \Phi(y, 0) = 0. \quad (2.20)$$

Эти соотношения выражают тот факт, что  $z$  и  $\varphi$  равны  $y$  и  $v$  в одной определенной точке на каждой петле, а именно в той точке, где  $v = 0$ . Получив условия (2.18) — (2.20), мы теперь утверждаем, что формальное преобразование (2.17), удовлетворяющее этим условиям, не только существует, но и единственно.

### § 7. Нахождение рекуррентных соотношений

Для определения  $Z$ ,  $\Phi$ ,  $h$  и  $\omega$  сначала подставляем (2.17) в (2.18), используем правило дифференцирования сложной функции и исключаем  $y_s$  и  $v_s$  с помощью (2.13). В результате имеем

$$\varepsilon Z_y \cdot g + Z_v \dot{v} = \varepsilon h(Z), \quad (2.21)$$

$$\varepsilon \Phi_y \cdot g + \Phi_v \dot{v} = \omega(Z). \quad (2.22)$$

Предположим временно, что мы знаем функции  $h$  и  $\omega$ . Тогда уравнения (2.21) и (2.22) можно решить. Действительно, так как множитель  $\varepsilon$  входит в первый член каждого из них, то можно выразить порядок за порядком производные  $Z$  и  $\Phi$  по  $v$  через известные величины, считая при этом  $y$  параметром. Согласно этой программе, переносим первые члены в правую часть уравнения, делим на  $\dot{v}$  и интегрируем. С учетом начальных условий (2.20) можно записать результаты в следующем виде:

$$Z = y + \varepsilon \int_0^v dv [h(Z) - Z_y \cdot g] \frac{1}{\dot{v}}, \quad (2.23)$$

$$\Phi = \int_0^v dv [\omega(Z) - \varepsilon \Phi_y \cdot g] \frac{1}{\dot{v}}. \quad (2.24)$$

На  $Z$  и  $\Phi$  следует наложить условия периодичности (2.19), которые достаточно использовать только при

$v = 0$  [так как из того, что (2.19) выполняется в предыдущем порядке, следует, что подынтегральные выражения (2.23) и (2.24) являются периодическими функциями  $v$  в следующем порядке]. Мы находим

$$\int_0^1 dv [h(Z) - Z_y \cdot g] \frac{1}{\psi} = 0, \quad (2.25)$$

$$\int_0^1 dv [\omega(Z) - \varepsilon \Phi_y \cdot g] \frac{1}{\psi} = 1. \quad (2.26)$$

Теперь используем эти условия для того, чтобы определить функции  $h$  и  $\omega$ , которые раньше предполагались известными.

Для этой цели обозначим интеграл в (2.23) буквой  $K$ , подставим  $y + \varepsilon K$  в аргументы функций  $h$  и  $\omega$  в (2.25) и (2.26) и разложим  $h$  и  $\omega$  в ряд Тейлора при значении аргумента, равном  $y$ . Множители  $h(y)$  и  $\omega(y)$  в главных членах этих разложений не зависят от  $v$  и их можно вынести из-под знака интеграла; в результате получим

$$h(y) \int_0^1 dv \frac{1}{\psi} = \int_0^1 dv \left[ Z_y \cdot g - \varepsilon \left\{ \frac{h(y + \varepsilon K) - h(y)}{\varepsilon} \right\} \right] \frac{1}{\psi}, \quad (2.27)$$

$$\omega(y) \int_0^1 dv \frac{1}{\psi} = 1 + \varepsilon \int_0^1 dv \left[ \Phi_y \cdot g - \left\{ \frac{\omega(y + \varepsilon K) - \omega(y)}{\varepsilon} \right\} \right] \frac{1}{\psi}. \quad (2.28)$$

Выражения, заключенные в фигурные скобки, предполагаются разложенными обычным путем и их порядок равен  $O(1)$ . Множитель

$$\int_0^1 \frac{dv}{\psi}$$

можно разложить в ряд с главным членом, имеющим порядок  $O(1)$  и положительно определенным благодаря

свойствам функции  $\psi$ . Таким образом, из (2.27) и (2.28) получаются рекуррентные формулы для  $h(y)$  и  $\omega(y)$ .

## § 8. Рекуррентное построение искомых функций

Мы теперь подготовились к доказательству существования и единственности формальных рядов  $Z(y, v)$ ,  $\Phi(y, v)$ ,  $h(y)$  и  $\omega(y)$ , удовлетворяющих соотношениям (2.17) — (2.20) (так как мы ищем функции  $h$  и  $\omega$  именно как функции, то не важно, что мы обозначаем аргументы через  $y$ , а не через  $z$ ). Доказательство проведем по индукции. Достаточно доказать, что для всякого неотрицательного целого  $n$  справедливо утверждение: если ряды существуют и единственны вплоть до членов порядка  $n-1$ , то тогда они существуют и единственны вплоть до членов порядка  $n$ . [Так как ряды, конечно, существуют и единственны вплоть до членов порядка  $-1$ , то нам требуется начать с членов порядка 0!]

Доказательство весьма простое, нужно только постоянно использовать выведенные нами уравнения (2.23), (2.24), (2.27), (2.28), которые определяют искомые функции и дают уверенность, что мы найдем  $Z$  до того, как найдено  $\Phi$ , или найдем  $h$  и  $\omega$  до того, как найдено  $\Phi$ . Итак, сначала можно единственным образом определить  $Z$  до членов порядка  $n$ , заметив, что правую часть уравнения (2.23) можно получить в этом порядке с помощью членов более низкого порядка, которые уже известны, согласно сделанным в методе индукции допущениям. Конечно, при этом предполагается, что  $h(Z)$  разложено в ряд Тейлора в точке  $y$  и что таким же образом разложены произведения и частные, а затем произведено интегрирование. Аналогичным образом можно однозначно определить  $h$  из (2.27),  $\omega$  из (2.28) и, наконец,  $\Phi$  из (2.24).

Само собой разумеется, так как  $\Phi$  и  $\omega$  не входят в (2.23) и (2.27), можно найти  $Z$  и  $h$  во всех порядках, совсем не находя  $\Phi$  и  $\omega$ .

Выражения для  $Z$  и  $\Phi$  гарантируют тривиально, что они удовлетворяют начальным условиям (2.20) до порядка  $n$ . В то же самое время выражения для  $h$  и  $\omega$

гарантируют, что (2.25) и (2.26) удовлетворяются до порядка  $n$  и поэтому выполняются условия периодичности (2.19) при  $v = 0$ . По  $Z_v$ , как это видно из (2.21), очевидно, периодически по  $v$  до порядка  $n$ , так как  $Z$  периодически до порядка  $n - 1$ , согласно предположению индукции, и, таким образом, первое условие периодичности справедливо вообще для любых  $v$ . Аналогичными рассуждениями можно показать, что  $\Phi_v$  также периодически до порядка  $n$  и, следовательно, второе условие периодичности выполняется для всех  $v$  (а не только для  $v = 0$ ). На этом доказательство заканчивается.

Из наших построений очевидно, что преобразования (2.17) от  $y$  и  $v$  к  $z$  и  $\varphi$  бесконечно дифференцируемы, и можно легко показать, что существует обратное преобразование, также бесконечно дифференцируемое. Теперь осталось только получить рекуррентные соотношения для  $y$  и  $v$ . Метод доказательства аналогичен использованному выше. Формула для  $y$  — это фактически уравнение (2.23) с последним членом, перенесенным в другую сторону уравнения. При выборе разумного способа мы могли бы получить так же просто уравнение и для  $v$ . Действительно, можно увидеть из (2.24) и (2.28) и из положительности  $\psi$ , что ту функцию, которая дает в нулевом порядке значения  $\varphi$  в зависимости от  $y$  и  $v$ , можно обратить относительно  $v$ . Разрешая это выражение относительно  $v$ , получаем в нулевом порядке  $v$  в виде функции, зависящей от  $\varphi$  и  $y$  и, следовательно, от  $\varphi$  и  $z$ . Используя эту обратную функцию в уравнении (2.24) [т. е. рассматривая каждую сторону уравнения (2.24) как аргумент этой обратной функции и приравнявая результат] и разлагая в ряд по  $\epsilon$ , приходим к уравнению, у которого единственный член нулевого порядка в правой части есть  $v$ , поэтому уравнение можно решить тривиально, и мы получим необходимые рекуррентные соотношения.

### § 9. Резюме формальных результатов

Давайте вновь запишем то, что было достигнуто, опуская промежуточные переменные  $y$ ,  $v$  и соответственно этому переопределяя  $Z$ ,  $\Phi$ ,  $h$ ,  $\omega$  и  $X$ . Мы по-

казали, что для исходной, бесконечно дифференцируемой системы уравнений (2.4), все решения которой приблизительно периодичны, можно найти преобразование

$$z = Z(x), \quad \varphi = \Phi(x) \quad (2.29)$$

и функции  $h(z)$ ,  $\omega(z)$  так, чтобы новые переменные удовлетворяли уравнению (2.18). Кроме того, существует обратное преобразование

$$x = X(z, \varphi) \quad (2.30)$$

и  $Z$ ,  $\Phi$ ,  $h$ ,  $\omega$  и  $X$  — бесконечно дифференцируемые бесконечные ряды по неотрицательным степеням  $\epsilon$  (член нулевого порядка  $v$   $\omega$  должен быть положительно определенным).

### § 10. Доказательство асимптотической сходимости рядов к истинному решению

Теперь мы хотим доказать, что решения уравнений (2.18) дают асимптотические представления точных решений (2.4), а также любой точной системы дифференциальных уравнений (2.1), формальным разложением которой является (2.1). Это означает, грубо говоря, что если мы ищем решение (2.1) или (2.4) при заданных начальных условиях при  $s = 0$  и ограничиваемся точностью до некоторой заданной положительной степени параметра  $\epsilon$ , то можно решить вместо этих уравнений соответствующую приближенную версию<sup>1)</sup> уравнений (2.18). При этом за начальные значения  $z$  и  $\varphi$  надо принять значения, которые получаются из начальных значений  $x$ , согласно приближенной версии преобразования (2.29). Затем надо вернуться в  $x$ -пространство, применив к полученным решениям уравнений (2.18) соответствующую приближенную версию обратного преобразования (2.30). Наше утверждение состоит в том, что при этом получится искомое приближенное решение (2.1)

<sup>1)</sup> Под приближенной версией уравнений или преобразований понимаются соответствующие уравнения или преобразования с отброшенными членами, порядок которых выше некоторого данного порядка  $n$ . — Прим. перев.

или (2.4) не только для ограниченного  $s$ , но даже для  $s$  порядка  $O(1/\epsilon)$ .

Так как мы хотим доказать, что наш искомый результат справедлив для таких больших  $s$ , мы обязаны вначале использовать приближения на два порядка лучшие, чем приближения, получаемые в конце нашего вывода, или чем в случае, когда мы хотели бы получить те же самые выводы, ограничиваясь конечными значениями  $s$ . Это происходит потому, что мы, так сказать, теряем порядок точности при интегрировании, которое мы проводим 2 раза по большой области  $s$ . Необходимость в сверхвысокой точности связана главным образом с оценкой для переменного фазового угла. Проследить только за дрейфом  $z$ , как видно из дальнейшего, было бы значительно легче.

Вот точная формулировка того, что мы хотим доказать. Пусть  $\hat{x}(s)$  является решением системы (2.1), либо же системы, полученной из (2.4) путем обрезания формального ряда на порядке  $n+1$  ( $n \geq 0$ ), так что

$$\hat{x}_s = F(\hat{x}, \epsilon) \quad \text{либо} \quad \hat{x}_s = f^{[n+1]}(\hat{x}); \quad (2.31)$$

система (2.31) является, конечно, системой настоящих, а не только формальных дифференциальных уравнений. Определим  $z'(s)$  и  $\varphi'(s)$  как такие решения уравнений, полученных из (2.18) путем соответствующих обрезаний рядов  $h$  и  $\omega$ , которые при  $s=0$  имеют значения, вычисленные из  $\hat{x}(0)$  с помощью соответствующей укороченной версии преобразования (2.29). Более конкретно,  $z'(s)$  и  $\varphi'(s)$  единственным образом определяется из следующих уравнений:

$$z'_s = \epsilon h^{[n]}(z'), \quad \varphi'_s = \omega^{[n]}(\varphi'), \quad (2.32)$$

$$z'(0) = Z^{[n]}(\hat{x}(0)), \quad \varphi'(0) = \Phi^{[n]}(\hat{x}(0)). \quad (2.33)$$

Далее, для того чтобы получить кривые в  $x$ -пространстве, произведем преобразование, определяя  $x'(s)$  как результат применения соответствующей укороченной версии преобразования (2.30) к  $z'(s)$  и  $\varphi'(s)$ :

$$x' = X^{[n-1]}(z', \varphi'). \quad (2.34)$$

Наше утверждение состоит в том, что  $x'$  является хорошим приближением к  $\hat{x}$ . Более точно

$$\hat{x}(s) = x'(s) + O(\epsilon^n) \quad (2.35)$$

для промежутка  $s$  порядка  $1/\epsilon$ , если только при этом  $\hat{x}$  и  $x'$  остаются в области определения  $f$ . [Пока что мы еще не знаем, не может ли последнее требование, предъявляемое к поведению точек  $\hat{x}$  и  $x'$ , ограничить  $s$  более сильно, однако в следующем параграфе мы покажем, что точки действительно остаются в указанной области в течение времени  $s$  порядка  $O(1/\epsilon)$ .]

Доказательство этого утверждения разбивается на три части. Во-первых, мы покажем, что  $Z^{[n+1]}(\hat{x})$  близко к  $z'$ , затем что  $\Phi^{[n]}(\hat{x})$  близко к  $\varphi'$  и, наконец, что  $x'$  близко к  $\hat{x}$ , т. е. получим искомое утверждение. Запишем три формальных тождества для  $x$ :

$$Z_x \cdot f = \epsilon h(Z), \quad (2.36)$$

$$\Phi_x \cdot f = \omega(Z), \quad (2.37)$$

$$x = X(Z, \Phi). \quad (2.38)$$

Первые два из этих тождеств выражают тот факт, что (2.29) преобразуют (2.4) в (2.18), а последнее, — что (2.30) является обратным преобразованием по отношению к (2.29). Фактически нам нужны не эти тождества, а их приближенные версии:

$$Z_x^{[n+1]} \cdot f^{[n+1]} = \epsilon h^{[n]}(Z^{[n+1]}) + O(\epsilon^{n+2}), \quad (2.39)$$

$$\Phi_x^{[n]} \cdot f^{[n+1]} = \omega^{[n]}(Z^{[n]}) + O(\epsilon^{n+1}), \quad (2.40)$$

$$x = X^{[n-1]}(Z^{[n-1]}, \Phi^{[n-1]}) + O(\epsilon^n). \quad (2.41)$$

Справедливость последнего из этих равенств может быть, например, доказана следующим образом. Разность между левой частью уравнения и первым членом справа является математически хорошо определенной, бесконечно дифференцируемой функцией  $x$  и  $\epsilon$ . Разложение в ряд Тейлора этой функции в точке  $\epsilon=0$  тождественно обращается в 0 вплоть до членов порядка  $n-1$ , так как в этих порядках это разложение содержит в точности

те самые члены, которые входят в формальное тождество (2.38). Таким образом, частное от деления этой разности на  $\varepsilon^n$  является непрерывной функцией  $x$  и  $\varepsilon$  в ограниченной замкнутой области и поэтому ограничено независимо от  $x$  и  $\varepsilon$ . На этом и заканчивается доказательство. Тем же самым способом, но с заменой всюду  $n$  на  $n+2$  или на  $n+1$ , доказывается справедливость (2.39) и (2.40).

Если мы временно ограничимся вторым вариантом (2.31), то равенство (2.39), вычисленное в точке  $\hat{x}$ , примет вид

$$\{Z^{[n-1]}(\hat{x})\}_s = \varepsilon h^{[n]}(Z^{[n+1]}(\hat{x})) + O(\varepsilon^{n-2}). \quad (2.42)$$

Мы хотим сравнить это уравнение с первым уравнением (2.32); для этого используем теорему о приближении (см. приложение 1). Суть доказательства состоит в том, чтобы сперва сделать замену независимой переменной, полагая

$$\sigma = \varepsilon s. \quad (2.43)$$

Тогда после деления на  $\varepsilon$  два уравнения, которые мы хотим сравнить, примут следующий вид:

$$\{Z^{[n+1]}(\hat{x})\}_s = h^{[n]}(Z^{[n+1]}(\hat{x})) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad (2.44)$$

$$z'_s = h^{[n]}(z'). \quad (2.45)$$

Таким образом,  $Z^{[n+1]}(\hat{x})$  и  $z'$  удовлетворяют одной и той же автономной системе дифференциальных уравнений с точностью до  $O(\varepsilon^{n+1})$  и, так как согласно (2.33), они имеют те же самые начальные условия с той же точностью  $O(\varepsilon^{n+1})$ , то, согласно теореме о приближениях, мы имеем

$$Z^{[n-1]}(\hat{x}) = z' + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.46)$$

для ограниченного  $\sigma$ , т. е. для  $s = O(1/\varepsilon)$ . Заметим, что здесь мы могли бы заменить индекс обрезания  $n+1$  в левой части равенства на  $n$ . На этом заканчивается первая часть доказательства. Остается только заметить, что для первого варианта (2.31) доказательство можно провести точно таким же способом, используя вместо (2.39) очевидную, равным образом справедливую формулу, полученную при замене множителя  $f^{[n+1]}$  на  $F$ .

Вторая часть доказательства даже проще. Ограничиваясь опять вторым вариантом (2.31) (а в случае первого варианта нужно сделать то же самое тривиальное видоизменение, что и раньше), вычислим (2.40) в точке  $\hat{x}$  и запишем решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\Phi^{[n]}(\hat{x})\}_s &= \omega^{[n]}(Z^{[n]}(\hat{x})) + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= \omega^{[n]}(z') + O(\varepsilon^{n+1}) = \varphi'_s + O(\varepsilon^{n-1}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь мы использовали (2.46) и второе уравнение (2.32). Так как начальные значения, полученные из второго соотношения (2.33), те же самые, что и для  $\Phi^{[n]}(\hat{x})$ , то для промежутка  $s$  порядка  $O(1/\varepsilon)$  простое интегрирование дает

$$\Phi^{[n]}(\hat{x}) = \varphi' + O(\varepsilon^n). \quad (2.48)$$

(Здесь мы опять могли бы заменить индекс обрезания  $n$  в левой части равенства на  $n-1$ .)

Третья часть доказательства наипростейшая. Вычислим (2.41) в точке  $\hat{x}$  и используем (2.46) и (2.48), тогда получим

$$\hat{x} = X^{[n-1]}(z', \varphi') + O(\varepsilon^n). \quad (2.49)$$

Это уравнение, согласно (2.34), в точности совпадает с (2.35). Доказательство закончено.

### § 11. Доказательство того, что истинное решение остается долго в области определения функции

Теперь можно показать, что  $\hat{x}(s)$  действительно остается внутри заданной области  $x$ -пространства для большого промежутка  $s$  порядка  $1/\varepsilon$ . Из (2.45) следует, что пока  $\sigma$  находится в некотором конечном промежутке,  $z'$  остается внутри соответствующей области  $z$ -пространства. Это соответствует, согласно (2.43), некоторому определенному большому промежутку  $s$ , которым мы и ограничимся в наших рассуждениях. [Поскольку  $\varphi'$  является квазиугловой переменной, то она не может быть ограничена по величине: как видно из (2.32), она заведомо изменяется по порядку величины на  $O(1/\varepsilon)$ .]



Тогда легко увидеть из (2.34), что  $x'$  определено и находится внутри области, так что (2.35) будет справедливо, пока  $\hat{x}$  находится внутри области. С другой стороны, пока (2.35) справедливо,  $\hat{x}$  действительно находится в этой области. Применим, далее, «метод связывания». Сопоставляя эти утверждения, мы приходим к заключению, что  $\hat{x}$  остается внутри до тех пор, пока  $\hat{x}$  не выйдет из заданной области (по крайней мере почти в точности; хотя, естественно, одна из точек может достигнуть границы несколько раньше другой).

Если это доказательство не покажется сразу вполне убедительным (а так может оказаться на самом деле), то мы можем его уточнить. Зная, что  $x'$  остается внутри области для некоторого промежутка значений  $s$  порядка  $1/\epsilon$ , т. е. остается на конечном расстоянии  $\delta$  от ее границы, предположим (для доказательства от противного), что  $\hat{x}$  покидает эту область в течение указанного промежутка  $s$ . Рассмотрим ближайшее к нулю значение  $s$ , при котором  $\hat{x}$  и  $x'$  находятся на расстоянии  $\delta/2$ . Так как точки  $\hat{x}$  и  $x'$  находятся обе внутри рассматриваемой области вплоть до этого момента, то можно применить (2.35) и показать, что они разделены расстоянием  $O(\epsilon^n)$ , которое значительно меньше, чем  $\delta/2$ . Это противоречие доказывает, что на самом деле  $\hat{x}$  не может покинуть область в течение интересующего нас периода.

### 3. КОЛЬЦА И ПРИВЕДЕННАЯ СИСТЕМА

#### § 1. Фазовая независимость

Теперь мы введем простое, но мощное средство, которое будем постоянно применять для того, чтобы устанавливать независимость функций от фазового угла  $\varphi$ . Пусть  $W(z, \varphi)$  — вектор с любым конечным числом  $M$  компонент. Пусть эти компоненты являются формальными бесконечными рядами по степеням  $\epsilon$ , зависят от аргументов  $z$  и  $\varphi$ , периодичны по последней переменной (конечно, с периодом 1) и имеют порядок  $O(1)$ . Допустим далее, что  $W(z, \varphi)$  удовлетворяет формальному

дифференциальному уравнению

$$W_{\varphi} = A(z) + \epsilon B(z, W, W_z), \quad (3.1)$$

где  $A(z)$  и  $B(z, w, v)$  — векторы с  $M$  компонентами, являющиеся формальными бесконечными рядами по степеням  $\epsilon$  и функциями указанных аргументов [ $w$  — любая переменная с  $M$  компонентами, а  $v$  с  $M(N-1)$  компонентами]. Вектор  $B$  порядка  $O(1)$ , однако относительно вектора  $A$  мы не будем делать этого предположения. Тогда оказывается, что на самом деле  $W$  не зависит от  $\varphi$  во всех порядках.

Для того чтобы доказать эту теорему о фазовой независимости, возьмем неопределенный интеграл от (3.1):

$$W(z, \varphi) = W(z, 0) + \int_0^{\varphi} d\varphi [A(z) + \epsilon B(z, W, W_z)]. \quad (3.2)$$

Используем условие периодичности  $W$ , что даст

$$\int_0^1 d\varphi [A(z) + \epsilon B(z, W, W_z)] = 0, \quad (3.3)$$

и применим метод индукции. Вплоть до членов порядка  $-1$  вектор  $W = 0$  и, таким образом, не зависит от  $\varphi$ . Допустим, что  $W$  не зависит от  $\varphi$  вплоть до членов порядка  $n-1$ . Тогда подынтегральное выражение (3.3) не зависит от  $\varphi$  вплоть до членов порядка  $n$  и, следовательно, равно своему интегралу, а он равен нулю. Поэтому мы можем записать (3.2) в следующем виде:

$$W(z, \varphi) = W(z, 0) + O(\epsilon^{n+1}), \quad (3.4)$$

откуда видно, что  $W$  не зависит от  $\varphi$  вплоть до членов порядка  $n$ ; это и требовалось доказать согласно методу индукции. Кроме того, мы получаем дополнительные результаты, что  $A = O(\epsilon)$  и что на самом деле  $A + \epsilon B = 0$  во всех порядках.

Конечно, мы могли бы предположить, что  $B$  зависит от более высоких производных  $W$  по  $z$ , не изменяя способа доказательства или выводов. Но этого мы не будем использовать. Однако имеется небольшая модификация теоремы, которой мы будем пользоваться очень часто.

Именно, пусть мы имеем дело с более конкретной задачей, когда  $B$  является линейной функцией двух последних своих аргументов. Тогда можно тривиально обобщить результат, допустив, чтобы  $W$  начиналось с любой (например, с отрицательной) степени  $\varepsilon$ , вместо имевшегося ранее допущения  $W = O(1)$ . Очевидно, полученные выводы сохранятся.

Другую, небольшую, но полезную модификацию получим, заменив в (3.1)  $W_\varphi$  на  $W_s$ . Так как

$$W_s = W_\varphi \omega(z) + \varepsilon W_z \cdot h(z), \quad (3.5)$$

то получившееся после замены уравнение опять можно немедленно привести к той же форме (3.1), модифицировав  $A$  и  $B$ . Наши выводы по-прежнему сохранятся. Полезно сделать замечание, которое будет нам необходимо позже и которое с очевидностью вытекает из (3.5): операторы дифференцирования по  $s$  и по  $\varphi$  коммутируют друг с другом.

## § 2. Произвол в выборе лучших переменных

Очевидно, что лучшие переменные  $z$  и  $\varphi$ , введенные в разделе 2, совсем не являются единственными. Действительно, в способе, с помощью которого мы их определили, имеется произвол: произвол в выборе функций  $Y$  и  $T$  (см. раздел 2, § 5) и в форме начальных условий (2.20). Мы хотим теперь точно выяснить, как велика свобода в выборе этих полезных координат?

Предположим, что мы ввели новые переменные  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$ , представляющие собой бесконечно дифференцируемые формальные бесконечные ряды по неотрицательным степеням  $\varepsilon$ , коэффициенты которых зависят от  $z$  и  $\varphi$  таким образом, что переменная  $\hat{z}$  периодична по  $\varphi$ , а переменная  $\hat{\varphi}$  изменяется на единицу вместе с  $\varphi$ . Кроме того, пусть преобразование от  $z, \varphi$  к  $\hat{z}, \hat{\varphi}$  можно формально обратить, т. е. дать аналогичные выражения для  $z$  и  $\varphi$  через  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$ . Теперь мы можем спросить: во-первых, при каких разумных общих условиях  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$  должны с необходимостью удовлетворять уравнениям раздела 2, § 18?

Ответ найти легко. Так как  $z$  удовлетворяет автономной системе уравнений, то последнюю, конечно, можно преобразовать в автономную систему для  $\hat{z}$  в том случае, если  $\hat{z}$  зависит только от  $z$ , т. е. если

$$\hat{z}_\varphi = 0. \quad (3.6)$$

Действительно, в этом случае сразу получим

$$\hat{z}_s = \varepsilon \hat{h}(\hat{z}),$$

где

$$\hat{h}(\hat{z}) = \hat{z}_z \cdot h(z).$$

Кроме того, можно считать, что  $\varphi$  удовлетворяет тривиальному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\varphi_s = \omega(z),$$

если  $z$  рассматривать как параметр. Конечно,  $\hat{\varphi}$  будет удовлетворять аналогичному тривиальному уравнению, если  $\hat{\varphi}$  отличается от  $\varphi$  только на «константу», которая, само собой разумеется, может зависеть от параметра  $z$ . (Нельзя считать, что  $\hat{\varphi}$  является более общей линейной функцией  $\varphi$ , так как две угловые переменные должны изменяться на единицу одновременно.) Таким образом, получаем условие

$$\hat{\varphi}_\varphi = 1. \quad (3.7)$$

Действительно, отсюда сразу следует, что

$$\hat{\varphi}_s = \hat{\omega}(\hat{z}),$$

где

$$\hat{\omega}(\hat{z}) = \varepsilon \hat{\varphi}_z \cdot h(z) + \omega(z).$$

Заметим, что  $\hat{\varphi}_z$  зависит только от  $z$ , так как  $\hat{\varphi}_{z\varphi} = 0$ .

Во-вторых, можно задать и обратный вопрос: действительно ли каждое преобразование от  $z$  и  $\varphi$  к новым лучшим переменным  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$  удовлетворяет (3.6) и (3.7)? Ответ положительный. Условие, которое мы нашли, необходимо и достаточно для того, чтобы сохранить форму



уравнения (2.18). Прежде всего пусть существует такая функция  $\hat{h}$ , что

$$\hat{z}_s = \epsilon \hat{h}(\hat{z}). \quad (3.8)$$

Тогда мы можем применить теорему о фазовой независимости и получить (3.6). Пусть существует также такая функция  $\hat{\omega}$ , что

$$\hat{\varphi}_s = \hat{\omega}(\hat{z}). \quad (3.9)$$

К этому уравнению мы не можем непосредственно применить теорему о фазовой независимости (хотя мы и знаем, что  $\hat{z}$  зависит только от  $z$ ), потому что  $\hat{\varphi}$  не является периодической функцией  $\varphi$ . Однако уравнение (3.9) можно переписать в следующей форме:

$$[\hat{\varphi} - \varphi]_s = \hat{\omega}(\hat{z}) - \omega(z); \quad (3.10)$$

так как разность  $\hat{\varphi} - \varphi$  периодична, то к (3.10) можно применить теорему о фазовой независимости. Таким образом получаем соотношение, эквивалентное (3.7),

$$[\hat{\varphi} - \varphi]_\varphi = 0. \quad (3.11)$$

### § 3. Кольца, разность фаз и приведенная система уравнений

Необходимые и достаточные условия (3.6) и (3.7) того, чтобы новые переменные  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$ , подобно старым переменным  $z$  и  $\varphi$ , являлись лучшими, позволяют нам ввести простые понятия, которые связаны с первоначальной системой уравнений (2.4) и которые основываются на существовании лучших переменных, но не зависят от их конкретного вида. Конечно, эти понятия будут определены только во всех порядках, но они не являются, вообще говоря, точными.

Рассмотрим совокупность точек в  $x$ -пространстве, которым соответствует одно и то же значение  $z$ . Так как  $\varphi$  есть угловая переменная, то эта совокупность точек является топологическим кругом, который мы назовем *кольцом*. Две точки в  $x$ -пространстве с одинаковым  $z$  мы назовем *кольцевой парой*. Теперь можно про-

сто интерпретировать уравнение (3.6) как утверждение о постоянстве  $\hat{z}$  вдоль кольца. Это показывает, что понятие колец и кольцевых пар инвариантно по отношению к выбору лучших переменных.

Значение фазовой переменной  $\varphi$ , соответствующее точке  $x$ , конечно, не инвариантно, но если две точки образуют кольцевую пару, тогда их *разность фаз*  $\Delta\varphi$ , согласно (3.7), является инвариантом

$$\Delta\hat{\varphi} = \int d\hat{\varphi} = \int \hat{\varphi}_\varphi d\varphi = \int d\varphi = \Delta\varphi. \quad (3.12)$$

В (3.12) интегралы распространены по части колец между указанными двумя точками. Конечно, эта разность фаз определена с точностью до периода 1.

Ясно также, что если нам известны, какие пары точек кольцевые и каковы разности фаз между ними, то мы имеем как раз всю информацию, которую можно извлечь из какой-нибудь конкретной системы лучших переменных, но которая не зависит от того, с какой именно системой лучших переменных мы имеем дело. Ибо, зная кольцевые пары и разности фаз, можно построить лучшие переменные.

Так как  $z$  удовлетворяет автономной системе уравнений, очевидно, что если два решения  $x(s)$  первоначальной системы дают кольцевую пару точек при каком-то одном значении  $s$ , то они будут кольцевыми парами для всех значений  $s$ . При этом их разность фаз одна и та же, так как

$$(\Delta\varphi)_s = \omega(z) - \omega(z) = 0.$$

Следовательно, инвариантные понятия кольца и разности фаз имеет смысл применять не только к точкам в  $x$ -пространстве, но также к целым решениям  $x(s)$  уравнения (2.4).

Понятие кольца представляет собой усложненный и более тонкий вариант понятия петли, которая, разумеется, является нулевым приближением к кольцу. Каждое кольцо характеризуется своим значением  $z$  точно так же, как каждая петля характеризовалась (см. раздел 2, § 5) своим значением  $y$ . Таким образом, кольца образуют  $(N-1)$ -мерное пространство, а их медленный

дрейф при изменении  $s$  можно описать формальной автономной системой

$$\dot{z}_s = h(z). \quad (3.13)$$

Здесь мы вновь ввели независимую переменную  $\sigma = \varepsilon s$  [см. (2.43)]. Это сделали для того, чтобы система уравнений (3.13), которую мы назовем *приведенной системой*, имела ту же самую общую форму, что и первоначальная система (2.4), хотя система (3.13) не обязательно должна быть в стандартной форме. Теперь фаза играет подчиненную роль (в то время как раньше она играла преобладающую), так как она никаким образом не действует (в любом конечном порядке) на дрейф.

Между прочим, оказалось, что приблизительно рекуррентная система (2.4) разделяема. Новая автономная система содержит на одну переменную меньше.

Если случится, что (3.13) будет приблизительно рекуррентной системой в стандартной форме, то можно повторить наши доказательства и получить таким образом вторичную приведенную систему и т. д. Тогда аргументы, изложенные в разделе 2, § 11, можно использовать для доказательства того, что истинное решение  $\hat{x}(s)$  уравнения (2.31) остается в заданной области  $x$ -пространства для промежутка времени  $s$ , даже большего, чем  $O(1/\varepsilon)$ .

#### § 4. Скорость вращения

Теперь можно показать, что вся информация, связанная со знанием колец и разностей фаз на них, сосредоточена в сжатой форме в  $x_\varphi$ . Действительно, вскоре мы подробно покажем, что кольца получаются из  $x_\varphi$  при интегрировании некой автономной системы уравнений, у которой независимой переменной является фаза. При этом существенно, что можно с помощью  $x_\varphi$ , рассматриваемой как функции  $x$ , описать результаты,

<sup>1)</sup> Конечно, при этом дифференцировании по  $\varphi$  следует рассматривать  $x$  как функцию  $\varphi$  и  $z$ , получающуюся согласно преобразованию (2.30). Но сами производные можно после этого рассматривать как функции  $x$  [с помощью обратного преобразования (2.29)].

полностью оставаясь в  $x$ -пространстве, хотя для получения результатов удобнее было перейти к другим переменным. Такой способ описания результатов обладает эстетически приятной однозначностью. Действительно, согласно (3.6) и (3.7), для любых трюгих лучших координат  $\hat{z}$ ,  $\hat{\varphi}$  мы имеем

$$x_\varphi = x_{\hat{z}} \cdot \hat{z}_\varphi + x_{\hat{\varphi}} \hat{\varphi}_\varphi = x_{\hat{\varphi}}. \quad (3.14)$$

Функция  $x_\varphi$  заслуживает того, чтобы мы присвоили ей специальный термин и специальный символ. Назовем ее *скоростью вращения* и обозначим через  $R(x)$

$$R \equiv x_\varphi. \quad (3.15)$$

Этот термин указывает, что определяющей характеристикой  $R$  является скорость изменения  $x$  (с ростом фазы) при вращении вдоль кольца.

Теперь установим четыре свойства  $R$ , которые можно выразить независимо от лучших переменных, колец и фаз. Позже будет показано, что эти свойства характеризуют  $R$  однозначно. Первое очевидное свойство состоит в том, что автономная система (3.15) является рекуррентной, так как каждое решение представляет движение вдоль некоторого кольца. Второе свойство, также очевидное, состоит в том, что начальное значение первый раз повторяется, когда независимая переменная  $\varphi$  увеличивается на 1. Это значит, что

$$\oint \frac{dx}{R} = 1; \quad (3.16)$$

линейный интеграл здесь взят вдоль произвольной интегральной кривой  $R$  и отношение векторов имеет смысл, так как на такой кривой эти векторы в точности параллельны (действительно,  $dx = x_\varphi d\varphi = R d\varphi$ ). Третье свойство состоит в том, что в наимизшем (нулевом) порядке  $R$  параллельно  $f$  и не равно нулю, как это сразу видно из (2.4) и из соотношения (3.5), в котором  $W$  заменено на  $x$ . И, наконец, мы запишем четвертое свойство

$$f_x \cdot R = R_x \cdot f, \quad (3.17)$$

которое выражает согласованность уравнений (2.4) и (3.15), что фактически представляет собой тривиальное видоизменение соотношения

$$f_\varphi = x_{s\varphi} = x_{\varphi s} = R_s; \quad (3.18)$$

это соотношение легко получается, если использовать указание, приведенное в конце § 1 раздела 3.

Скорость вращения однозначно характеризуется указанными четырьмя свойствами. Для доказательства этого достаточно показать, что для любой функции  $R^1$  с указанными свойствами можно найти такие лучшие переменные  $z$  и  $\varphi$ , что будет выполняться соотношение (3.15). Действительно, если бы другая функция  $\hat{R}$  обладала этими четырьмя свойствами, мы могли бы найти такие лучшие переменные  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$ , что выполнялось бы соотношение

$$\hat{R} = x_{\hat{\varphi}}.$$

Тогда из (3.14) немедленно вытекало бы, что  $R = \hat{R}$ .

Мы можем построить искомые лучшие переменные как решения уравнений:

$$z_x \cdot R = 0, \quad (3.19)$$

$$\varphi_x \cdot R = 1, \quad (3.20)$$

т. е. мы выбираем переменные  $z$  таким образом, чтобы они были константами (конечно, независимыми) на замкнутой (первое свойство!) интегральной кривой  $R$ , а функция  $\varphi$  должна быть на ней многозначной. То, что  $\varphi$  является угловой переменной, т. е. ее ветви отличаются на целые числа, следует из (3.16) (второе свойство!)

$$\int d\varphi = \int \varphi_x \cdot dx = \int \varphi_x \cdot R \frac{dx}{R} = 1. \quad (3.21)$$

Эти координаты не могут быть вырожденными, так как переменные  $z$  выбраны независимыми друг от друга, а если бы  $\varphi$  можно было представить в виде функции

<sup>1)</sup> Конечно,  $R$  следует рассматривать как бесконечно дифференцируемые формальные ряды.

от  $z$ , то мы получили бы вследствие (3.19)

$$\varphi_x \cdot R = 0,$$

что противоречит (3.20). Поэтому можно использовать стандартное представление единичной днады через производные

$$R = \mathcal{J} \cdot R = (x_z \cdot z_x + x_\varphi \cdot \varphi_x) \cdot R = x_\varphi. \quad (3.22)$$

Это и доказывает справедливость (3.15). Теперь нам чрезвычайно легко установить одно из главных свойств лучших переменных, а именно то, что  $z_s$  и  $\varphi_s$  являются функциями только  $z^1$ )

$$\begin{aligned} (z_s)_\varphi &= (z_x \cdot f)_x \cdot R = z_{xx} : fR + z_x \cdot f_x \cdot R = \\ &= z_{xx} : Rf + z_x \cdot R_x \cdot f = (z_x \cdot R)_x \cdot f = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В (3.23) мы использовали последовательно выражения (2.4), (3.15), симметрию триады  $z_{xx}$  по отношению к положению последних двух векторов (3.17) (четвертое свойство!) и (3.19). Аналогичная операция, проведенная для  $\varphi_s$ , показывает, что  $\varphi_s$  можно записать в виде  $\omega(z)$ . Чтобы показать, что  $z_s$  можно записать в виде  $\varepsilon h(z)$ , остается только заметить, что, согласно (3.19) (третье свойство!),

$$z_x \cdot f = O(\varepsilon).$$

Совсем не очевидно, можно ли найти явное рекуррентное выражение для  $R$  через  $f$ . Если это возможно, то вся теория, содержащаяся в настоящей работе, стала бы намного более простой и в то же время менее глубокой.

<sup>1)</sup> В этом параграфе мы не можем использовать коммутативность дифференцирований по  $\varphi$  и по  $s$ , что заставляет нас проделывать ряд промежуточных операций в (3.23), так как мы еще не знаем, что  $z$  и  $\varphi$  являются лучшими переменными, а хотим только это доказать.

## 4. НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА

## § 1. Определение

Мы знаем теперь последовательный формальный способ, который можно применять к любой приблизительно рекуррентной формальной системе с  $N$  зависимыми переменными для того, чтобы «исключить быстрое вращение» и найти приведенную систему с  $N - 1$  зависимыми переменными, которая описывает дрейф колец во всех порядках. Существует, как мы увидим, ряд свойств систем дифференциальных уравнений, которыми может обладать первоначальная система (2.4) и которые в таком случае переносятся на приведенную систему (3.13) или наследуются ею. Мы назовем некое свойство систем дифференциальных уравнений *наследственным*, если всякий раз, когда оно справедливо для первоначальной системы (по крайней мере в формальном смысле — во всех порядках разложения), оно справедливо для приведенной системы. Это определение, подобно определению локальной зависимости, является метаматематическим и поэтому к нему не нужно слишком прицеливаться.

## § 2. Наследование свойства разделяемости систем уравнений

Сначала рассмотрим весьма простой пример наследования свойства разделяемости уравнений (см. раздел 1, § 7). Если (2.4) является разделяемой системой и если функционалы, локально зависящие от  $f(x)$  и определяющие  $M$  новых переменных, удовлетворяющих новой автономной системе, можно разложить в ряд по степеням  $\varepsilon$  с основными членами порядка 0, то очевидно, что новая автономная система также имеет все решения приблизительно периодичные и ее можно привести к стандартной форме путем подходящего изменения переменных. Согласно методу, изложенному в разделе 3, при введении новых лучших переменных новая угловая переменная  $\hat{\varphi}$  выбирается в основном такой же (а могла

бы быть выбрана в точности такой же), как и первоначальная угловая переменная  $\varphi$ . Поэтому приведенная система уравнений для новой автономной системы является некоторой новой автономной подсистемой, отделившейся от основной приведенной (3.13). Поэтому основная приведенная система может разделяться и уменьшение числа зависимых переменных в результате разделения является таким же, как для первоначальной разделяемой системы (2.4).

## § 3. Наследование интегралов (констант движения)

Важным и простым наследственным свойством является наличие интегралов (не зависящих от  $s$ ). Для того чтобы это показать, допустим, что  $I(x)$  является (разложимым<sup>1)</sup>) интегралом уравнения (2.4), т. е. положим, что

$$I_s = I_x \cdot f = 0. \quad (4.1)$$

Таким образом, интеграл  $I$  постоянен на каждом решении системы (2.4). Согласно теореме о фазовой независимости, мы сразу получаем, что  $I$  является функцией только от  $z$  и поэтому также интегралом приведенной системы (3.13).

Отсюда следует, что (2.4) не может обладать полной системой интегралов ( $N$  функционально независимых интегралов), каждый из которых разложим. Действительно, для системы (3.13) мы можем иметь, конечно, только  $N - 1$  независимых интегралов. Любой интеграл системы (2.4), который учитывает различие между кольцевыми точками, не является разложимым.

## § 4. Наследование инвариантной меры

Другим интересным наследственным свойством является обладание инвариантной мерой. Пусть  $\rho(x)$  будет плотностью некоторой меры, которая инвариантна при «течении», описываемом уравнением (2.4). Это значит, что за меру любой области в  $x$ -пространстве принимается интеграл от  $\rho$  по этой области, и меры огов-

<sup>1)</sup> Имеется в виду разложение по степеням  $\varepsilon$ . — Прим. ред.

ражений этой области для различных значений  $s$  при «движении» согласно (2.4) равны друг другу. Математическим выражением этой инвариантности является «независимое от времени» уравнение непрерывности

$$\mathcal{J} : (\rho f)_x = 0; \quad (4.2)$$

левая часть этого уравнения есть просто дивергенция от  $\rho f$ , записанная в соответствии с нашим методом обозначений. Уравнение (4.2) можно записать также в следующей форме:

$$\rho_s + \rho \mathcal{J} : f_x = 0. \quad (4.3)$$

Такая инвариантная мера является по своему существу независимой от координатной системы. В  $z, \varphi$ -пространстве плотность меры  $\tau(z, \varphi)$  получается из  $\rho$  путем умножения на якобиан  $x$  относительно  $z, \varphi$ . В этих координатах (4.2) и (4.3) принимают следующий вид:

$$\mathcal{J} : (\tau h)_z + (\tau \omega)_\varphi = 0, \quad (4.4)$$

$$\tau_s + \varepsilon \tau \mathcal{J} : h_z = 0. \quad (4.5)$$

Если  $\rho$  разлагается в степенной ряд, то тем же свойством обладает и  $\tau$  (так как якобиан, конечно, может быть разложен). Следовательно, согласно теореме о фазовой независимости,  $\tau$  должно быть функцией только  $z$ . Таким образом,  $(\tau \omega)_\varphi = 0$ , и, значит, для приведенной системы уравнение (4.4) представляет собой точную аналогию уравнения (4.2) для первоначальной системы. Этим самым мы доказали наследование этого свойства.

### § 5. Общие интегральные инварианты

Обсужденные выше два наследственных свойства являются, по сути дела, частными случаями более общего наследственного свойства — свойства иметь интегральный инвариант<sup>1)</sup> любого порядка  $m$ . Действительно, эти частные случаи соответствуют крайним значениям

<sup>1)</sup> Определения и ясное изложение общей теории интегральных инвариантов и, следовательно, оправдание некоторых утверждений этого параграфа см. у Де Дондера [18]. Строго говоря, наследственное свойство есть обладание искомым интегральным инвариантом,

( $m = 0$  и  $m = N$ ). Из-за простоты они были рассмотрены независимо. В этом параграфе мы сосредоточим свое внимание на случае  $m = 2$ , который является, по-видимому, единственным, достаточно похожим на общий случай, чтобы допустить непосредственное обобщение<sup>1)</sup> основных представлений, результатов и особенностей, и в то же время еще достаточно простым, чтобы можно было оперировать с нашими безиндексными обозначениями без новых специальных определений и без особых усложнений. Однако мы рассмотрим не только абсолютные, но также и относительные интегральные инварианты.

Пусть  $I(x)$  будет антисимметричным диадным полем<sup>2)</sup> в  $x$ -пространстве. Тогда  $I : dx dx$  будет дифференциальной формой второго порядка<sup>3)</sup>, интеграл от которой

порядок которого меньше, чем порядок системы уравнений, на определенное целое число, так как инвариант порядка  $m$  первоначальной системы приводит к инварианту порядка  $m - 1$  приведенной системы. Слова «по сути дела» в тексте должны показать, что с этой точки зрения наследственные свойства, изложенные в § 3, являются не совсем обычными. (См. также Э. Картан, Интегральные инварианты, М.—Л., 1940; Уиттекер, Аналитическая динамика, М.—Л., 1937. — Прим. ред.)

<sup>1)</sup> Важный случай  $m = 1$  можно получить даже более непосредственно с помощью обратной методики (этот пример скорее «вырожденный», чем выделенный). Кроме того, этот случай проиллюстрирован (как и относительный инвариант в случае  $m = 2$ ) в разделе 5 с помощью теории гамильтоновых систем, в которой этот инвариант имеет специальную форму  $p \cdot dq$ .

<sup>2)</sup> В общем случае мы должны были бы ввести полностью антисимметричную полиаду  $m$ -степени, которая изменяет знак при перестановке любых двух векторов (в индексных обозначениях — это тензор порядка  $m$ , который изменяет знак при перестановке любых двух индексов).

<sup>3)</sup> Следует отметить, что  $dx dx$  (в литературе часто обозначается как  $dx \times dx$ ) (еще чаще вместо косоугольного креста употребляется знак  $\wedge$  или квадратные скобки. — Прим. ред.) является антисимметричной диадой, а не симметричной или просто диадой, как может показаться на первый взгляд. Действительно, так как  $\mathcal{A}$  антисимметрично, то любые симметричные компоненты ничего не внесли бы в дифференциальную форму. Изменение порядка векторов изменяет ориентацию поверхностного элемента и, таким образом, изменяет знак  $dx dx$ . На любой поверхности, определенной как функция двух параметров  $u$  и  $v$  [т. е.  $x = x(u, v)$ ], мы имеем

$$dx dx = (x_u x_v - x_v x_u) du dv.$$

(См. определения и обозначения на стр. 86. — Прим. ред.).

по любой поверхности, находящейся в  $x$ -пространстве, образует своего рода меру для такой поверхности. Скорость изменения этой меры с ростом  $s$  в том случае, когда каждая точка поверхности перемещается согласно уравнению (2.4), является другой мерой, которая аналогичным образом связана с дифференциальной формой,

$$\begin{aligned} (.l : dx dx)_s &= .l_s : dx dx + .l : (df dx + dx df) = \\ &= (.l_s + .l \cdot f_x + x f \cdot .l) : dx dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Условие, при котором  $.l : dx dx$ , является *относительным интегральным инвариантом*, состоит в том, что (4.6) должно обращаться в 0 при интегрировании по любой замкнутой поверхности. В свою очередь это условие эквивалентно условию существования однозначного векторного поля  $V(x)$ , удовлетворяющего следующему уравнению:

$$.l_s + .l \cdot f_x + x f \cdot .l = V_x - x V; \quad (4.7)$$

правая часть здесь представляет собой ротор от  $V$ . В этом случае мера любой замкнутой поверхности остается постоянной, когда поверхность перемещается. Условие, при котором

$$.l : dx dx$$

является *абсолютным интегральным инвариантом*, состоит в том, что (4.6) должно обращаться в нуль при интегрировании по каждой (не обязательно замкнутой) поверхности, т. е. что левая часть уравнения (4.7) должна равняться 0. В этом случае мера любой поверхности всегда остается постоянной, когда поверхность перемещается.

## § 6. Наследование относительных инвариантов

Переходя к лучшим переменным, получаем

$$\begin{aligned} .l : dx dx &= .l : (x_z \cdot dz + x_\varphi d\varphi) (x_z \cdot dz + x_\varphi \cdot d\varphi) = \\ &= \mathcal{B} : dz dz + C \cdot (dz d\varphi - d\varphi dz). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь, конечно, не может быть членов с  $d\varphi d\varphi$  (т. е. коэффициенты перед этими членами обращаются в 0). Кроме того, приняты следующие обозначения<sup>1)</sup>:

$$\mathcal{B} \equiv x_z \cdot .l \cdot x_z, \quad C \equiv x_\varphi \cdot .l \cdot x_\varphi. \quad (4.9)$$

Условие, при котором (4.8) является относительным инвариантом, можно получить тем же самым путем, каким было найдено (4.7), или путем преобразования (4.7). Оно состоит в том, что должны существовать такие однозначные вектор  $W(x)$ , и величина  $T(x)$ , что

$$\mathcal{B}_s + \mathcal{B} \cdot \varepsilon h_z + \varepsilon h \cdot \mathcal{B} - C \omega_z + \omega_z C = W_z - z W, \quad (4.10)$$

$$C_s + C \cdot \varepsilon h_z = T_z - W_\varphi. \quad (4.11)$$

Обозначим полный интеграл по фазе (т. е. полный линейный интеграл вдоль кольца или усредненное по  $\varphi$  значение) чергой сверху. Тогда из (4.11) немедленно получим (так как дифференцирование и интегрирование по  $\varphi$  и  $s$  коммутируют друг с другом)

$$\bar{C}_s + \bar{C} \cdot \varepsilon h_z = \bar{T}_z. \quad (4.12)$$

Это как раз и есть условие [аналогичное (4.7), но на один порядок ниже], что  $\bar{C} \cdot dz$  является относительным интегральным инвариантом приведенной системы. Если  $.l$  и  $V$  можно разложить в ряд по  $\varepsilon$ , то можно разложить в ряд  $C$ ,  $T$ , а также  $\bar{C}$ ,  $\bar{T}$ . Таким образом, доказано наследование относительных инвариантов.

Конечно, может случиться, что  $\bar{C} \cdot dz$  окажется тривиальным относительным инвариантом, т. е. что интеграл от этой дифференциальной формы будет иметь постоянную величину, не зависящую от замкнутой кривой,

<sup>1)</sup> При вычислении (4.9) следует иметь в виду, что на самом деле  $\mathcal{A} : dx dx$  означает билинейную форму  $2\mathcal{A} : dx^1 dx^2$  (см. обозначения и определения на стр. 86). Можно также — это формально проще — пользоваться антикоммутативным умножением, на что обычно указывают знаком « $\wedge$ ». Произведение  $d\varphi \wedge d\varphi = 0$ , а в последней скобке в (4.8), напротив, не происходит сокращения, так как

$$dz \wedge d\varphi = -d\varphi \wedge dz.$$

Эта скобка означает

$$2(d\varphi^2 dz^1 - d\varphi^1 dz^2).$$

— Прим. ред.



по которой он взят. Это может произойти только в том случае, когда  $\bar{C}$  является градиентом какой-то функции (т. е. ее производной по  $z$ ), так что его ротор тождественно обращается в нуль

$$\bar{C}_z - {}_z\bar{C} = 0. \quad (4.13)$$

Но в этом случае нас забавным образом компенсирует то, что усредненное по  $\varphi$  значение (4.10) можно записать в следующем виде:

$$\bar{B}_s + \bar{B} \cdot \varepsilon h_z + \varepsilon_z h \cdot \bar{B} = (\bar{W} + \bar{C}_\omega)_z - {}_z(\bar{W} + \bar{C}_\omega). \quad (4.14)$$

Соотношение (4.14) как раз есть условие [аналогичное (4.7)] того, что  $\bar{B} : dz dz$  является относительным интегральным инвариантом приведенной системы.

### § 7. Наследование абсолютных инвариантов

В только что описанном свойстве наследования относительных инвариантов имеется некоторый элемент самообмана. Дело в том, что любой относительный инвариант системы дает относительный инвариант меньшего порядка при интегрировании по замкнутому подмногообразию, так что если система разделяема, то относительный инвариант новой автономной подсистемы получается путем интегрирования по неавтономным переменным. Причина, почему не проявляется преимущество лучших переменных, состоит в том, что теорема о фазовой независимости осталась в стороне. С наследованием абсолютных инвариантов ситуация другая, и, таким образом, мы вернулись к основной теме данной работы.

Если  $I : dx dx$  является абсолютным инвариантом, то тогда, переходя к лучшим переменным и вводя так же, как и прежде,  $\bar{B}$  и  $\bar{C}$  согласно (4.9), мы получаем (4.10) и (4.11), у которых правую часть надо заменить на нуль. Из последнего уравнения видно, что, во-первых, согласно теореме о фазовой независимости,  $\bar{C}$  зависит только от  $z$  и, во-вторых, как следствие этого,  $\bar{C} \cdot dz$  является абсолютным инвариантом приведенной системы. Тогда из первого уравнения видно, что  $\bar{B}$  также зависит только от  $z$ . Однако не ясно, как можно было бы исполь-

зовать последний факт, если только  $\bar{C} \cdot dz$  не является тривиальным инвариантом. В этом последнем случае  $\bar{B} : dz dz$ , как легко видеть, является по-прежнему относительным инвариантом (если не рассматривать весьма частные случаи  $\bar{C} = 0$  или  $\omega_z = 0$ , для которых  $\bar{B} : dz dz$ , конечно, является даже абсолютным инвариантом).

## 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА

### § 1. Предварительные преобразования

Вероятно, из всех наследственных свойств наиболее важные применения имеет свойство системы быть гамильтоновой. Допустим, что зависимые переменные состоят из  $N = 2M$  канонически сопряженных координат  $q$  и  $p$ , и предположим, что гамильтониан  $H(q, p)$  однозначен и не зависит от времени. (Системы, зависящие от времени, у которых имеются «медленно изменяющиеся внешние параметры», не исключаются нашим определением, так как их можно преобразовать к форме, не зависящей от времени, с помощью хорошо известного метода, в котором время и энергия рассматриваются как новые дополнительные пары сопряженных координат. См. также раздел 2, § 4.) Переменные  $q$  и  $p$  совместно удовлетворяют автономной системе уравнений, носящей название системы уравнений Гамильтона:

$$q_t = H_p, \quad p_t = -H_q. \quad (5.1)$$

Чтобы область применения была бы наибольшей, мы не требуем, чтобы (5.1) было записано в стандартной форме, но требуем только, чтобы существовало некоторое (моногомное) преобразование независимой переменной

$$t \leftrightarrow s \quad (5.2)$$

и некоторое преобразование зависимых переменных

$$q, p \leftrightarrow x, \quad (5.3)$$

приводящее систему к стандартной форме (2.4), все решения которой приблизительно периодичны. (Первое

преобразование используется только по одной причине — для нормировки величины  $f$ . Поэтому  $t$  и  $s$  в общем случае отличаются самое большее на множитель, который представляет собой некую степень  $\varepsilon$ .) Применяя теперь нашу общую теорию, можно произвести дальнейшие преобразования зависимых переменных к лучшим переменным, удовлетворяющим (2.18),

$$q, p \leftrightarrow x \leftrightarrow z, \varphi. \quad (5.4)$$

Здесь  $x$  входит просто как промежуточное звено и, таким образом, не представляет в дальнейшем интереса.

### § 2. Интеграл действия

Хорошо известно, что  $p \cdot dq$  является относительным интегральным инвариантом (см. раздел 4, § 5) любой системы уравнений Гамильтона. Действительно, это свойство может быть использовано для эквивалентного определения систем уравнений Гамильтона. Другими словами, линейный интеграл

$$\oint p \cdot dq,$$

взятый по замкнутой кривой, остается постоянным во времени, если каждая точка кривой движется в соответствии с уравнениями движения (5.1). Таким путем можно было бы получить любое число констант движения, которые, однако, в большинстве случаев не являются полезными, так как они локально не вычисляемы (см. раздел 1, § 4). Не существует иного способа выяснить, как перемещается семейство выбранных замкнутых кривых, кроме, конечно, полного решения уравнений движения, т. е. выполнения именно той работы, избежать или «помочь» провести которую можно было бы, если бы были известны константы движения, для чего прежде всего их и хотелось бы знать.

В данном случае существует тем не менее некое семейство кривых, чрезвычайно подходящих для получения полезной константы движения. Этим семейством является семейство колец, которое остается инвариантным (так как кольца переходят в кольца; см. раздел 3, § 3), причем кольца являются в нужной степени локаль-

но вычисляемыми (они являются локальными по отношению к петле, проходящей через точку, а не локальными в точке). В соответствии с этим мы определим «фазовый интеграл действия»

$$J(z) \equiv \oint_{\text{По кольцу } z} p \cdot dq = \int_0^1 d\tau p \cdot q_\tau, \quad (5.5)$$

где  $q$  и  $p$  следует рассматривать как функции от  $z$  и  $\tau$  в соответствии с преобразованием (5.4). Пожалуй, стоит привести тривиальное прямое доказательство постоянства  $J$  во всех порядках. Дифференцирование по  $s$  коммутирует с дифференцированием или интегрированием по  $\varphi$ , следовательно, дифференцирование по  $t$  обладает тем же свойством. Поэтому

$$\begin{aligned} J_t &= \oint (p_t \cdot dq - q_t \cdot dp) = \\ &= - \oint (H_q \cdot dq + H_p \cdot dp) = - \oint dH = 0; \end{aligned} \quad (5.6)$$

здесь мы сначала проинтегрировали второй член по частям, а затем использовали уравнения (5.1). (Между прочим, очевидно, что интеграл  $J$  инвариантен также при канонических преобразованиях.)

Постоянство интеграла  $J$  во всех порядках, очевидно, справедливо для области изменения независимой переменной порядка  $\varepsilon^{-n}$  при любом  $n$ , пока интеграл  $J$  определен.

### § 3. Скобки Пуассона

Пусть  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{B}$  являются полными функциями состояния нашей физической системы, т. е. функциями от  $q$  и  $p$ . Их скобки Пуассона определяются, как обычно, формулой

$$[\mathcal{L}, \mathcal{B}] = \mathcal{L}_q \cdot p \mathcal{B} - \mathcal{L}_p \cdot q \mathcal{B}. \quad (5.7)$$

Для дальнейшего нужна формула

$$[\mathcal{L}, \mathcal{B}]_s = [\mathcal{L}_s, \mathcal{B}] + [\mathcal{L}, \mathcal{B}_s]; \quad (5.8)$$

она полностью эквивалентна формуле, в которую вместо производной по  $s$  входит производная по  $t$  (умножение на  $t_s$  или  $s_t$  позволяет переходить от одной формулы



к другой). Формула же с производными по  $t$  хорошо известна и ее легко можно получить путем непосредственных вычислений с использованием только уравнений (5.1).

Теперь с помощью формул (5.8), (2.18), (5.7) можно написать

$$[z, z]_s = [\varepsilon h, z] + [z, \varepsilon h] = \varepsilon h_z \cdot [z, z] + \varepsilon [z, z] \cdot z h. \quad (5.9)$$

Согласно теореме о фазовой независимости, тиада  $[z, z]$  (очевидно, антисимметричная) является функцией только  $z$

$$[z, z]_\varphi = 0. \quad (5.10)$$

(Заметим, что, хотя у нас нет причин считать порядок  $[z, z]$  равным  $O(1)$ <sup>1)</sup>, указанная теорема тем не менее применима, так как уравнение (5.9) линейно по  $[z, z]$ .) Аналогичным способом найдем

$$[\varphi, z]_s = [\omega, z] + [\varphi, \varepsilon h] = \omega_z \cdot [z, z] + \varepsilon [\varphi, z] \cdot z h. \quad (5.11)$$

Опять по теореме о фазовой независимости, которая, согласно (5.10), здесь применима, получим

$$[\varphi, z]_\varphi = 0. \quad (5.12)$$

Нам нужны будут формулы

$$[z, z] \cdot ({}_z p \cdot q_\varphi - {}_z q \cdot p_\varphi) = 0, \quad (5.13)$$

$$[\varphi, z] \cdot ({}_z p \cdot q_\varphi - {}_z q \cdot p_\varphi) = 1. \quad (5.14)$$

Докажем кратко справедливость этих формул. Заметим, что их общий множитель представляет собой скобки Лагранжа от  $z$  и  $\varphi$ , и используем хорошо известное соотношение между скобками Пуассона и Лагранжа<sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup> Напомним, что при переходе от  $p$  и  $q$  к  $x$ , а следовательно, к  $z$  и  $\varphi$  может произойти умножение или деление на  $\varepsilon$  в некоторой степени; см. § 1 настоящего раздела. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Имеется в виду теорема о том, что произведение двух диад, образованных скобками Лагранжа и Пуассона от полной системы независимых переменных, равно единичной диаде

$$(x, x) \cdot [x, x] = \mathcal{I}.$$

— Прим. перев.

имея в виду, что суммирование, указанное самой крайней левой точкой в каждом из этих равенств, происходит по полному ряду переменных, за исключением переменной  $\varphi$ , для которой скобка Лагранжа  $(\varphi, \varphi)$  все равно равна нулю. Конечно, справедливость формул (5.13) и (5.14) легко можно установить также непосредственными вычислениями. Для этого необходимо разложить (5.13) и (5.14) на слагаемые с помощью (5.7) и закона дистрибутивности, а затем использовать соотношения (вытекающие из правил дифференцирования сложной функции) между производными  $q$  и  $p$  по  $z$  и  $\varphi$  и *vice versa*. Такими соотношениями являются

$$q_z \cdot z_q + q_\varphi \varphi_q = q_q = \mathcal{I} \quad (5.15)$$

и аналогичные ему соотношения, которые получаются, если двумя способами вычислить  $q_p$ ,  $p_q$ ,  $p_p$ ,  $z_\varphi$  и  $\varphi_z$  и сравнить результаты. (Два остающихся аналогичных соотношения, связанные с  $z_z$  и  $\varphi_z$ , здесь не нужны.)

Мы теперь готовы к тому, чтобы вычислить две специальные скобки Пуассона, представляющие для нас интерес. Одна из них следующая:

$$[z, J] = [z, z] \cdot J_z = [z, z] \cdot \int_0^1 d\varphi ({}_z p \cdot q_\varphi - {}_z q \cdot p_\varphi) = 0. \quad (5.16)$$

Здесь первое равенство следует из (5.7) и из того факта, что  $J$  зависит только от  $z$ ; второе уравнение получается, если непосредственно продифференцировать (5.5) и затем проинтегрировать по частям, а последнее следует из формулы (5.13), если сначала  $[z, z]$  ввести под знак интеграла, что можно сделать согласно (5.10). Вторые специальные скобки Пуассона получаются тем же самым путем из (5.14) и (5.12):

$$[\varphi, J] = 1. \quad (5.17)$$

#### § 4. Нетривиальность интеграла действия

Мы отвлечемся на минуту для того, чтобы показать, что интеграл  $J$  едва ли может быть тривиальной константой движения. Конечно, интеграл  $J$  не может быть

полностью тривиальными в том смысле, что он не является обычной константой, так как в противном случае его скобка Пуассона с любой другой величиной равнялась бы нулю, а это противоречит (5.17). Но допустим, что  $J$  можно выразить как функцию только  $\dot{H}$ ; это, конечно, тоже означало бы некоторого рода тривиальность  $J$ , так как  $H$  автоматически является константой движения. В этом случае  $J_H$  не могло бы равняться нулю, иначе мы бы имели

$$[z, J] = [z, H] J_H = 0,$$

что, как и ранее, противоречит (5.17). Следовательно, мы могли бы найти обратное соотношение и выразить  $H$  как функцию  $J$ . Тогда

$$z_t = [z, H] = [z, J] H_J = 0; \quad (5.18)$$

первое равенство хорошо известно и очевидно, а последнее следует из уравнения (5.16). Таким образом,  $z$  представляет собой полную систему интегралов движения. Лишь в этом исключительном случае интеграл  $J$  может быть функцией только  $H$ .

### § 5. Приведенная система уравнений Гамильтона

Теперь мы продолжим нашу программу доказательства свойства наследования гамильтоновой формы. Для этой цели следует преобразовать приведенную систему уравнений к гамильтоновой форме. В процессе получения приведенного уравнения мы «отбросили» (или «выделили») переменную  $\varphi$ . Теперь же мы имеем новую не тривиальную константу движения  $J$ , которую можно использовать для того, чтобы исключить еще одну переменную. Итак, можно надеяться, что нам удастся преобразовать остающуюся систему с  $2M - 2$  переменными к форме уравнений Гамильтона с  $M - 1$  степенями свободы.

Наш фактический метод получения указанной приведенной не зависящей от времени системы уравнений Гамильтона состоит в каноническом преобразовании первоначальной системы  $M$  пар канонически сопряженных координат  $(q, p)$  к новой системе, в которой имеется пара

$(\varphi, J)$ , а остальные  $M - 1$  пар, обозначенные  $(Q, P)$ , также можно вычислить локально. Необходимые и достаточные условия, при которых преобразование к новому ряду пар координат является каноническим, заключается в том, что скобки Пуассона для любой пары новых координат должны равняться 0, если координаты взяты из различных пар, и 1, если они образуют единую пару (в должном порядке). Уравнение (5.17) показывает, что одно из этих условий автоматически выполняется, поэтому возможность найти каноническое преобразование с указанными свойствами нельзя считать исключенной. Однако совсем не очевидно, что можно найти такое преобразование. В приложении 2 показано<sup>1)</sup>, что если известны некоторые из новых координат запроюктированного гипотетического канонического преобразования и эти координаты удовлетворяют всем необходимым условиям, налагаемым на скобки Пуассона, содержащие одни только эти координаты, и имеют линейно независимые производные по старым координатам, то тогда, действительно, можно определить недостающие координаты (так, чтобы они были локально зависимыми от гамильтониана) и тем самым получить полное каноническое преобразование. Кроме того, все построения, очевидно, осуществляются порядок за порядком, если рассматриваемые координаты образуют степенной ряд по  $\epsilon$ .

Условие линейной независимости производных, конечно, выполнено, так как в противном случае, напри-

<sup>1)</sup> Очень похожая теорема приводится в статье Нордхейма и Фуса [19], в которой предполагается, что известен некий интеграл, и показано, как этот интеграл можно использовать для уменьшения порядка системы уравнений Гамильтона на одну степень свободы. Можно найти каноническое преобразование к новым координатам, одна из которых является известным интегралом, а ее сопряженная координата, конечно, исключается. В нашем же случае заранее известной является исключаемая координата  $\varphi$ . Конечно, не из-за этой небольшой разницы мы приводим независимое доказательство данной теоремы. Дело в том, что, с одной стороны, мы хотели, чтобы в этой статье содержалось, насколько это возможно, все необходимое для понимания, и, с другой стороны, излагаемый нами метод довольно прост и, по-видимому, дает несколько необычный взгляд на природу условий, налагаемых на скобки Пуассона.

мер, если бы мы имели

$$J_q = k\varphi_q, \quad J_p = k\varphi_p, \quad (5.19)$$

то мы сразу бы получили

$$[\varphi, J] = k[\varphi, \varphi] = 0,$$

что опять противоречит (5.17). В соответствии с этим мы можем предположить, что у нас есть следующая последовательность преобразований:

$$\varphi, z \leftrightarrow q, p \leftrightarrow \Phi, J, Q, P. \quad (5.20)$$

Здесь в соответствии с правилом, установленным в разделе 1, § 3, вместо  $\varphi$  введен новый символ  $\Phi$  (его не следует пугать с  $\Phi$  в разделе 2), который указывает, что мы имеем дело с  $\varphi$ , но в новой системе переменных. Таким образом, равенство

$$\Phi = \varphi \quad (5.21)$$

можно свободно использовать, за исключением тех случаев, когда эти символы записаны в качестве индексов (см., впрочем, ниже!). Новые переменные  $Q$  и  $P$  выбраны таким образом, что они удовлетворяют правильным условиям, налагаемым на скобки Пуассона одним только этих переменных,

$$[Q, Q] = 0, \quad [P, P] = 0, \quad [Q, P] = J, \quad (5.22)$$

а также „смешанным“ условиям:

$$0 = [Q, \Phi] = [Q, \varphi] = Q_z \cdot [z, \varphi], \quad (5.23)$$

$$0 = [Q, J] = Q_\varphi [\varphi, J] + Q_z \cdot [z, J] = Q_\varphi \quad (5.24)$$

и аналогичным условиям, получающимся при замене  $Q$  на  $P$ . Из (5.24) мы видим, что  $Q$  и  $P$ , подобно  $J$ , действительно не зависят от  $\varphi$ , так что во все преобразования

$$z \leftrightarrow J, Q, P$$

$\varphi$  фактически не входит. Поэтому можно полностью уничтожить разницу между  $\Phi$  и  $\varphi$  (и с этого момента осуществим эту возможность).

Новый гамильтониан — это, конечно, в точности старый гамильтониан  $H$ , но выраженный с помощью преобразования (5.20) как функция новых канонических координат. В новых координатах уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\varphi_t = H_J, \quad (5.25)$$

$$J_t = -H_\varphi, \quad (5.26)$$

$$Q_t = H_P, \quad P_t = -H_Q. \quad (5.27)$$

Так как

$$\varphi_t = \varphi_s S_t = \omega S_t,$$

то (5.25) представляет собой обычного вида соотношение между частотой и производной гамильтониана по переменной действия. Так как  $J_t$  равно 0, уравнение (5.26) показывает, что  $H$  не зависит от  $\varphi$ ; это можно, конечно, другим путем получить из того факта, что  $H$  есть интеграл системы уравнений (см. раздел 4, § 3). Теперь ясно, что уравнения (5.27) образуют однопараметрическое (с параметром  $J$ ) семейство автономных гамильтоновых систем.

### § 6. Возможность повторения изложенных операций для нахождения других инвариантов

Мы видели, что приведенную систему можно записать в гамильтоновой форме. Отсюда немедленно следует, что если приведенная система имеет все решения приблизительно периодичные (естественно, с периодом, большим, чем период первоначальной системы, по крайней мере на один порядок по  $\varepsilon$ ), то тогда существует еще одна константа движения

$$J' \equiv \oint_{\text{По кольцу } z'} P \cdot dQ = \int_0^1 d\varphi' P \cdot Q_{\varphi'}, \quad (5.28)$$

где  $z'$  и  $\varphi'$  — новые лучшие переменные приведенной системы

$$z \leftrightarrow J, Q, P \leftrightarrow z', \varphi'. \quad (5.29)$$

Как и следовало ожидать, чтобы вычислить  $J'$  нет необходимости проводить сложный процесс интегрирования

ния, связанный с нахождением  $Q$  и  $P$ ; действительно,

$$J' = \int_0^1 d\varphi' (P \cdot Q_{\varphi'} + J_{\varphi'}) = \int_0^1 d\varphi' p \cdot q_{\varphi'}, \quad (5.30)$$

ибо  $\varphi_{\varphi'} = -0$  [преобразование (5.29) не зависит от  $\varphi$ ] и дифференциальная форма  $p \cdot dq$  канонически инвариантна.

Поскольку  $Q$  и  $P$  вычисляются локально, то и  $J'$  вычисляется локально. Кроме того,  $J'$  не может зависеть только от  $J$  или от  $J$  и  $H$ , за исключением весьма тривиального частного случая, когда можно найти полный ряд интегралов. Между прочим, следует отметить, что здесь нет шансов найти еще один интеграл с помощью известного метода образования скобок Пуассона из двух уже известных интегралов, так как при втором каноническом преобразовании можно ввести систему канонических координат, среди которых появятся сопряженные пары  $(\varphi, J)$  и  $(\varphi, J')$ , так что среди четырех соотношений со скобками Пуассона мы будем иметь

$$[J, J'] = 0. \quad (5.31)$$

Если все решения новой приведенной системы опять окажутся приблизительно периодическими, то мы можем найти еще один интеграл  $J''$  и исключить еще одну угловую переменную  $\varphi''$  и т. д. до тех пор, пока на некотором этапе наших рассуждений не получится приведенная система, решения которой уже не будут приблизительно периодичны. Если же при таком процессе число всех внутренних степеней свободы будет исчерпано, то мы придем к полному (асимптотическому) описанию системы через  $M$  исключенных угловых переменных и  $M$  локально определенных сопряженных переменных действия.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. Основная теорема о приближениях

Для полноты мы приведем здесь сжатый набросок известного доказательства теоремы о том, что если две функции удовлетворяют приблизительно идентичным автономным системам и имеют приблизительно равные начальные значения, то они сами приблизительно равны друг другу в ограниченной области изменения независимой переменной. Пусть  $x(s)$  и  $\hat{x}(s)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$x(s) = f(x), \quad \hat{x}(s) = f(\hat{x}) + \gamma(\hat{x}), \quad (\text{П. 1})$$

$$x(0) = \hat{x}(0) + \delta, \quad (\text{П. 2})$$

где  $\gamma$  и  $\delta$  — малые величины, нормы которых (для  $\gamma$  взято максимальное значение нормы по  $x$ -пространству) мы обозначим через  $\gamma$  и  $\delta$ . (Норму можно определить любым разумным способом; для ее обозначения используем знак абсолютной величины.) В интересующей нас области  $x$ -пространства  $f$  удовлетворяет условию Липшица, т. е. для соответствующим образом выбранной положительной константы  $c$  и любых  $x'$  и  $x''$  выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq c |x' - x''| \quad (\text{П. 3})$$

(конечно, оно будет справедливо, если существует днада  $f_x$ , непрерывная в замкнутой ограниченной области и имеющая поэтому все компоненты ограниченными).

Чтобы оценить разность, напишем

$$|\hat{x} - x| = |\hat{x}(0) - x(0) + \int_0^s ds [f(\hat{x}) + \gamma(\hat{x}) - f(x)]| \leq \delta + \int_0^s ds [c|\hat{x} - x| + \gamma], \quad (\text{П. 4})$$

ограничиваясь для простоты неотрицательными значениями  $s$ . Тогда максимальное значение  $\mu(s)$  величины  $|\hat{x} - x|$  в промежутке от 0 до  $s$  удовлетворяет неравенству

$$\mu \leq \delta + \int_0^s ds [c\mu + \gamma] \leq \delta + s [c\mu + \gamma]. \quad (\text{П. 5})$$

Так что, если (например)

$$s \leq \frac{1}{2c},$$

то мы имеем

$$\mu \leq \frac{\delta + \gamma s}{1 - cs} \leq 2\delta + 2\gamma s. \quad (\text{П. 6})$$

Чтобы получить оценки для больших значений  $s$ , мы могли бы применять (П. 6) вновь и вновь, совершая шаги длиной  $1/2c$  и принимая оценку, получаемую в конце интервала при каждом шаге, за новую начальную оценку, соответствующую (П. 2) на следующем шаге. Таким путем мы могли бы вывести экспоненциальную оценку, которая, однако, более изящно и, может быть, более просто получается из следующего замечания. Верхняя граница для  $|\hat{x} - x|$  дается функцией  $v(s)$ , которая удовлетворяет уравнению, получаемому из (П. 4) при замене  $|\hat{x} - x|$  на  $v(s)$  и знака « $\leq$ » на знак « $=$ ». Действительно, разность

$$D = v - |\hat{x} - x|$$

удовлетворяет неравенствам

$$D \geq c \int_0^s ds D, \quad (\text{П. 7})$$

$$\left( e^{-cs} \int_0^s ds D \right)_s \geq 0. \quad (\text{П. 8})$$

Отсюда после интегрирования от 0 до  $s$  следует, что правая сторона (П. 7) и *a fortiori*  $D$  не отрицательны. Явное выражение для  $v(s)$  можно легко найти и мы получим

$$|\hat{x} - x| \leq v = \left( \delta + \frac{\gamma}{c} \right) e^{cs} - \frac{\gamma}{c}. \quad (\text{П. 9})$$

Тот факт, что нельзя найти оценки, существенно лучшие, чем указанные, очевиден даже из самых простых примеров.

Отсюда, конечно, можно получить обычную теорему единственности, как частный случай, когда  $\gamma = \delta = 0$ .

## 2. Завершение канонического преобразования

Необходимыми и достаточными условиями того, чтобы преобразование

$$q, p \leftrightarrow \hat{q}, \hat{p} \quad (\text{П. 10})$$

было каноническим, являются условия, налагаемые на основные скобки Пуассона

$$[\hat{q}, \hat{q}] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = \mathcal{J}, \quad [\hat{p}, \hat{p}] = 0. \quad (\text{П. 11})$$

Из этих соотношений вытекает линейная независимость производных компонент  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  (и *a fortiori* сами компоненты функционально независимы), так как для любой линейной комбинации этих производных, которая обращается в 0,

$$a \cdot \hat{q}_q + b \cdot \hat{p}_q = 0, \quad a \cdot \hat{q}_p + b \cdot \hat{p}_p = 0 \quad (\text{П. 12})$$

мы получим с помощью (П. 11) и (П. 12)

$$a = a \cdot [\hat{q}, \hat{p}] = b \cdot [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \quad (\text{П. 13})$$

и аналогичным образом

$$b = 0.$$

Предположим теперь, что нам даны некоторые, но не все компоненты  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  как функции от  $q$  и  $p$  в за-проектированном преобразовании (П. 10). Мы хотим доказать, что можно построить остальные компоненты. Пусть каждый вектор  $q, p, \hat{q}, \hat{p}$  имеет  $M$  компонент. Обозначим  $N < 2M$  заданных компонент (входящие сюда  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  не обязательно парные) буквой  $\alpha$  и потребуем, чтобы они имели линейно независимые производные и удовлетворяли тем из соотношений (П. 11), в которые только они и входят. Так как можно использовать метод математической индукции, то достаточно найти одну из недостающих компонент  $\hat{p}$  или  $\hat{q}$ , скажем одну компоненту  $\hat{q}$ . Обозначим эту компоненту через  $q'$  а ей сопряженную через  $p'$ . Искомая  $q'$  должна удовлетворять тем из соотношений (П. 11), в которые входят только  $q'$  и  $\alpha$ . Эти соотношения имеют вид

$$[\alpha, q'] = c, \quad (\text{П. 14})$$

где  $c$  — векторная постоянная, все компоненты которой, конечно, равны 0, за исключением, самое большее, одной из них, которая равна  $-1$ . (Компонента, равная  $-1$ , появится, если в число компонент  $\alpha$  входит  $p'$ .)

Условия (П. 14) равносильны заданию значений направленных производных от  $q'$  по каждому из направлений, определяемых производными компонент  $\alpha$ . Так как производные компонент  $\alpha$  линейно независимы, то линейно независимы и указанные направления. Далее мы займемся условиями совместности уравнений (П. 14), а именно условиями, чтобы вторые производные от  $q'$  не зависели от порядка дифференцирования. Диадная вторая направленная производная от  $q'$  (которая, если ее раскрыть явно, содержит как первую, так и вторую производные от  $q'$ ) равна

$$[\alpha, [\alpha, q']] = [\alpha, c] = 0, \quad (\text{П. 15})$$

так как  $c$  — (векторная) константа. Беря направленные производные в обратной последовательности, получаем

$$-[[\alpha, q'], \alpha] = 0 \quad (\text{П. 16})$$

[(П. 16) является диадой, транспонированной по отношению к (П. 15)]. В это выражение входят те же самые вторые производные от  $q'$ , так что мы получим условия совместности, если возьмем разность (П. 15) и (П. 16):

$$[\alpha, [\alpha, q']] + [[\alpha, q'], \alpha] = 0. \quad (\text{П. 17})$$

Запишем тождество Якоби для двух векторов и скаляра; с учетом порядка расположения диад оно имеет вид:

$$[\alpha, [\alpha', q']] + [[\alpha, q'], \alpha'] + [q', [\alpha, \alpha']] = 0. \quad (\text{П. 18})$$

Средний член (П. 18) представляет собой транспонированную диаду  $[\alpha' [q', \alpha]]$ . Подставив сюда  $\alpha' = \alpha$ , получим, что (П. 17) эквивалентно следующему равенству:

$$[[\alpha, \alpha'], q'] = 0, \quad (\text{П. 19})$$

которое явно не содержит второй производной от  $q'$ . Но, согласно (П. 11),  $[\alpha, \alpha']$  есть диадная константа, все компоненты которой равны либо 0, либо  $\pm 1$ , поэтому (П. 19) выполняется тождественно.

Так как условие совместности удовлетворяется (тавтологически), то из общей теории дифференциальных уравнений в частных производных следует, что (П. 14) имеет общее решение  $q'$ , определенное с точностью до произвольной функции от  $2M - N$  переменных. С геометрической точки зрения можно сказать, что  $N$ -мерное векторное пространство, определенное в каждой точке по направлениям направленных производных  $[\alpha, \dots]$ , касается  $(2M - N)$ -мерного семейства  $N$ -мерных гиперповерхностей<sup>1)</sup>. Уравнения (П. 14) полностью определяют производные от  $q'$  как функции на каждой гиперповерхности, но никак не ограничивают изменения  $q'$  при переходе с одной гиперповерхности на другую. Ясно, что

<sup>1)</sup> Эвристическое изложение теории таких вопросов см. у Ньюкомба [20]. Согласно его терминологии, мы показали, что «смешанные» скобки для любых двух направлений дифференцирования равны 0.

на каждой гиперповерхности  $q'$  определено с точностью до константы (т. е. с точностью до «начального» значения в какой-нибудь произвольно заданной точке).

Остается только показать, что произвол в построении  $q'$  позволяет нам выбрать ее таким образом, чтобы производные от  $q'$  и  $\alpha$  были линейно независимыми. Доказательство состоит, в основном, в подсчете размерностей. А именно, предположим прогивное: пусть

$$q'_q = k \cdot \alpha_q, \quad q'_p = k \cdot \alpha_p. \quad (\text{П. 20})$$

Если  $p'$  входит в  $\alpha$ , то все компоненты  $[\alpha, q']$  равны 0, за исключением той, в которую входит  $p'$ , а так как, согласно (П. 20),

$$0 = [q', q'] = k \cdot [\alpha, q'], \quad (\text{П. 21})$$

то отсюда следует, что соответствующая компонента  $k$  обращается в 0. Аналогичным образом, если любые (другие) сопряженные координаты  $q'', p''$  обе входят в  $\alpha$ , то соответствующие две компоненты  $k$  должны обращаться в 0, ибо иначе, используя (П. 20), мы могли бы найти и исключить производные либо от  $q''$ , либо от  $p''$ , а тогда из (П. 11) получилось бы противоречие<sup>1)</sup>:

$$1 = [q'', p''] = 0.$$

Пусть число таких пар в  $\alpha$  будет  $L$ ; таким образом, число непарных компонент в  $\alpha$  равно  $N - 2L$ . Очевидно,

$$N - L = (N - 2L) + L \leq M, \quad (\text{П. 22})$$

причем знак равенства справа может иметь место только тогда, когда  $p'$  входит в  $\alpha$ . Число возможных ненулевых

<sup>1)</sup> Пусть, например, более подробно

$$q'_q = kp''_q + \dots, \quad q'_p = kp''_p + \dots, \quad k \neq 0,$$

где многоточие в первом и втором равенствах означает линейную комбинацию производных остальных компонент  $\alpha$  по  $q$  и  $p$  соответственно. Значит, производные  $p''$  по  $q$  и  $p$  можно выразить через производные остальных компонент  $\alpha$  и производные  $q'$  по  $q$  и  $p$  соответственно. Но это противоречит (П. 11), ибо тогда скобку Пуассона  $[q'', p'']$  можно было бы выразить в виде линейной комбинации скобок Пуассона, равных 0, в то время как эта скобка должна быть равна 1. — Прим. ред.

компонент  $k$  равно

$$N - 2L = 2(N - L) - N \leq 2M - N \quad (\text{П. 23})$$

или  $N - 2L = 1$ , если  $p'$  входит в  $\alpha$ . Таким образом, это число в любом случае строго меньше, чем  $2M - N$ . Но  $q'$  определено с точностью до произвольной функции от  $2M - N$  переменных, так что совокупность ее производных образует  $(2M - N)$ -мерное линейное пространство в противоречии с (П. 20).

### 3. Итерации приблизительно тождественных отображений

Существует тесная внутренняя связь между асимптотической теорией приблизительно рекуррентных систем дифференциальных уравнений и асимптотической теорией итераций приблизительно тождественных отображений, которая ранее была менее удовлетворительно рассмотрена Крускалом [5] и использована Спитцем [1]. В этом приложении мы изложим теорию итераций и опишем упомянутую связь.

Приблизительно тождественным отображением некоторого пространства векторов  $\xi$  самого в себя называется функция, скажем,  $T(\xi)$ , которую можно записать в виде

$$T(\xi) = \xi + \varepsilon D(\xi), \quad (\text{П. 24})$$

где  $D(\xi)$  может быть рядом по степеням  $\varepsilon$ , порядок которого  $O(1)$ . С этим преобразованием (так же как и с любым другим) связана последовательность итераций. Таким образом, преобразования  $T^n(\xi)$  определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$T^1(\xi) \equiv T(\xi), \quad T^{n-1}(\xi) \equiv T^n(T(\xi)), \quad (\text{П. 25})$$

где  $n$  принимает все положительные целые значения<sup>1)</sup>. Мы интересуемся асимптотическим описанием (при

<sup>1)</sup> Конечно, из (П. 24) можно формально получить обратное преобразование  $T^{-1}$  с соответствующими последующими итерациями  $T^{-2}$ ,  $T^{-3}$  и т. д. Если положить еще  $T^0(\xi) = \xi$ , то (П. 25) будет уже справедливо для всех целых  $n$  (не обязательно положительных).



$\varepsilon \rightarrow 0$ ) дискретной «траектории» точки  $\xi$  при последовательных итерациях  $T$ , т. е. мы интересуемся последовательностью точек  $T^n(\xi)$ , где  $n = 0, 1, 2, 3$  и т. д.

Очевидно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  точки приближаются все ближе и ближе друг к другу. Для любого фиксированного  $n$ , конечно,  $T^n(\xi) \rightarrow \xi$ , но это вовсе не означает, что траектория как целая сжимается к начальной точке. Для  $n$ , равного приблизительно  $c/\varepsilon$  (где  $c$  — константа), можно ожидать, что  $T^n(\xi)$  находится явно вдали от  $\xi$  и даже сходится к пределу<sup>1)</sup>, отличному от  $\xi$ . Дискретная траектория становится все более и более похожа на непрерывную (и гладкую) кривую, которую мы обозначим через  $\Xi^{(0)}(\sigma)$  и определим следующим образом:

$$\Xi^{(0)}(0) = \xi, \quad \Xi^{(0)} = D(\Xi^{(0)}); \quad (\text{П. 26})$$

последнее уравнение получается из (П. 24) при замене  $\xi$  на  $T^n(\xi)$  и при переходе к пределу после введения следующих обозначений:

$$\sigma \equiv n\varepsilon, \quad (\text{П. 27})$$

$$\Xi^{(0)}(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^n(\xi). \quad (\text{П. 28})$$

За исключением нулевого порядка, точки  $T^n(\xi)$ , естественно, не должны лежать на кривой  $\Xi^{(0)}$ . Это предполагает (и мы уже это учли в обозначениях), что мы ищем такой формальный ряд  $\Xi(\sigma)$ , что представление

$$T^n(\xi) = \Xi(\sigma) \quad (\text{П. 29})$$

будет справедливым во всех порядках с учетом обозначений (П. 27), которые нет необходимости изменять. И действительно, легко получаются соответствующие условия (т. е. дифференциальное уравнение и начальное условие), определяющие  $\Xi$  до высших порядков. Затем мы могли бы развить строгую теорию, аналогичную изложенной в основной части данной статьи. Однако проще свести проблему к той, которую мы уже подробно исследовали.

<sup>1)</sup> Этот предел есть  $\Xi^{(0)}(\sigma)$  [см. формулу (П. 28)].

Решающий шаг состоит в том, чтобы включить последовательность точек  $T^n(\xi)$  в непрерывную траекторию, представляющую решения автономной системы дифференциальных уравнений. Таким образом мы ищем такую функцию  $\eta(\xi)$ , чтобы кривая  $\hat{\xi}(\xi, \sigma)$ , определенная как решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_\sigma = \eta(\xi) \quad (\text{П. 30})$$

с начальными условиями

$$\hat{\xi}(\xi, 0) = \xi, \quad (\text{П. 31})$$

проходила через указанную последовательность точек для  $\sigma$ , определяемого (П. 27):

$$\hat{\xi}(\xi, n\varepsilon) = T^n(\xi). \quad (\text{П. 32})$$

Мы увидим, что с помощью этих условий (которые должны выполняться при любом  $\xi$ )  $\eta$  определяется во всех порядках по  $\varepsilon$  (единственным образом) в виде некоторого ряда.

Очевидно, достаточно определить  $\eta$  так, чтобы (П. 32) было справедливо для  $n = 1$ :

$$\hat{\xi}(\xi, \varepsilon) = T(\xi), \quad (\text{П. 33})$$

ибо тогда (П. 32) автоматически будет справедливо для всех больших  $n$ . Последнее можно доказать по методу индукции, основываясь на следующих вычислениях: если допустить, что (П. 32) уже доказано для  $n$ , то

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\xi, n\varepsilon + \varepsilon) &= \hat{\xi}(\hat{\xi}(\xi, n\varepsilon), n\varepsilon) = \\ &= \hat{\xi}(T(\xi), n\varepsilon) = T^n(T(\xi)) = T^{n+1}(\xi), \end{aligned} \quad (\text{П. 34})$$

где первое равенство следует из (1.7), второе — из (П. 33), третье — выполняется согласно индуктивному допущению (П. 32), а четвертое — следует из (П. 25).

Найдем разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(\xi, \varepsilon) &= \hat{\xi}(\xi, 0) + \varepsilon \hat{\xi}_\sigma(\xi, 0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \hat{\xi}_{\sigma\sigma}(\xi, 0) + \dots = \\ &= \xi + \varepsilon \eta(\xi) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta_\xi(\xi) \cdot \eta(\xi) + \dots \end{aligned} \quad (\text{П. 35})$$



— это, согласно (П. 24) и (П. 33), можно записать в следующей форме:

$$\eta + \frac{1}{2} \varepsilon \eta_{\xi} \cdot \eta + \dots = D, \quad (\text{П. 36})$$

где всюду опущен аргумент  $\xi$ . Разрешая это уравнение относительно  $\eta$ , мы немедленно получаем<sup>1)</sup>:

$$\eta = D - \frac{1}{2} \varepsilon D_{\xi} \cdot D + \dots \quad (\text{П. 37})$$

Искомое представление (П. 29), очевидно, получится, если положить

$$\Xi(\varepsilon) \equiv \xi. \quad (\text{П. 38})$$

Наконец, совсем просто привести эту теорию к виду, соответствующему основному содержанию данной статьи. Будем рассматривать  $\eta$  как непрерывную переменную и назовем ее теперь  $s$ , или, другими словами, определим  $s$  как

$$s \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (\text{П. 39})$$

Вводя лишнюю угловую переменную  $\theta$ , равную  $s$  с точностью до произвольного аддитивного целого числа,  $n$ , определяя<sup>2)</sup>  $x$  как

$$x \equiv (\xi, \theta), \quad (\text{П. 40})$$

мы приведем систему к стандартной форме

$$x_s = f \equiv (\varepsilon \eta, 1). \quad (\text{П. 41})$$

Это уравнение приблизительно рекуррентное, так как в нулевом порядке  $\xi$  — константа, а  $\theta$  увеличивается равномерно, возвращаясь к своему начальному значению (с точностью до целого числа, которое можно рассматривать как значение угла поворота) каждый раз, когда

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что  $\eta$  ищется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , коэффициенты которого зависят от  $\xi$ . Нетрудно проверить, что (П. 36) действительно позволяет последовательно определить эти коэффициенты. Следует подчеркнуть, что полученный ряд, вообще говоря, не будет сходиться. Именно в этом месте излагаемая теория, если можно так выразиться, становится асимптотической. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Таким образом,  $x$ -пространство топологически представляет собой произведение  $\xi$ -пространства на некоторую окружность.

$s$  увеличивается на 1. Поэтому общая теория применима. Лучшие переменные вводятся, конечно, совершенно тривиально.

$$z = \xi, \quad \varphi = \theta. \quad (\text{П. 42})$$

Приведенной системой в данном случае является уравнение (П. 30), с которого мы начали. Единственная причина этого довольно смешного хождения вокруг да около состоит в том, что тем самым мы обеспечиваем дальнейшее развитие теории, в особенности доказательство теоремы о том, что формальные ряды в действительности являются асимптотическими представлениями истинного решения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> На первый взгляд может показаться непонятным, каким же образом из общей теории, на которую здесь имеется ссылка, может следовать справедливость построенных асимптотических представлений для отображений, ведь в общей теории об отображениях не говорилось ни слова?

Крускал имеет в виду рассуждения следующего характера. Почти тождественное, бесконечно дифференцируемое отображение (П. 24) можно считать получившимся согласно конструкции, описанной в следующем абзаце работы Крускала, из некоторой системы приблизительно рекуррентных уравнений, определенной в пространстве переменных  $\xi$  и еще одной квазиугловой переменной. Обозначим ее через  $\nu$ . [Даже если в действительности мы с самого начала имеем дело с отображением (П. 24), а никакой системы дифференциальных уравнений у нас не было, то все равно такую систему легко можно построить. Напомним, что речь пока идет о системе в пространстве переменных  $\xi$  и  $\nu$ .] Мы хотим теперь исключить  $\nu$  и перейти к автономной системе в одном только пространстве  $\xi$ . Для этого надо перейти к лучшим переменным, которые получаются преобразованием (2.17) с условием (2.20) [нашему  $\xi$  в (2.17) и (2.20) соответствует  $\mathcal{Y}$ ]. Как видно из (2.17) и (2.20), при значениях  $\nu$ , кратных периоду, никакой замены переменной  $\xi$ , в сущности, не происходит. Поэтому можно считать, что получившаяся автономная система записана все в тех же переменных  $\xi$ , а точка, движущаяся в  $\xi$ -пространстве по траектории этой автономной системы и вышедшая в момент 0 из точки  $\xi$ , попадет через период в точку  $T(\xi)$ .

Сказанное означает, что действительно можно найти автономную систему в  $\xi$ -пространстве, обладающую теми свойствами, которыми должна была обладать система (П. 30). Теперь же, имея уверенность, что подобная система существует, мы можем искать ее так, как это делалось в приложении 3. Как мы видели, это приводит к уравнению (П. 36) для правой части  $\eta$  системы, откуда  $\eta$  определяется однозначно. — *Прим. ред.*

В заключение кратко скажем об обратном образе действий. Если бы мы решили развить теорию отображений полностью, то теорию приблизительно рекуррентных систем уравнений мы могли бы основывать на ней, выбирая в качестве  $\xi$ -пространства гиперповерхность в  $x$ -пространстве, пересекающую петлю. Отображение в этом случае получилось бы, если бы мы взяли какую-либо точку  $\xi$  на гиперповерхности и проследили бы за проходящим через точку решением системы (2.4) до того момента, когда оно снова пересечет данную гиперповерхность; эту (первую после  $\xi$ ) точку пересечения следовало бы назвать  $T(\xi)$ . Таким образом, мы видим, что две теории полностью эквивалентны.

## ДОПОЛНЕНИЕ <sup>1)</sup>

### Определения и обозначения

1. *Диада*. Под диадой Крускал понимает конечную совокупность (множество) величин. При этом имеется в виду, что величины, составляющие диаду, снабжены индексами (или по смыслу задачи могут быть снабжены ими), подобно компонентам вектора или тензора или коэффициентам матрицы. Совпадение двух диад означает совпадение составляющих их величин (компонент) с одинаковыми индексами. Если индексов больше двух, то говорят о *полиаде*.

Таким образом, Крускал употребляет слово «диада» в более широком смысле, чем это делает большинство авторов, пользующихся этим термином. Обычно под диадой понимают так называемое диадное произведение двух векторов

$$ab = (a_i b_j). \quad (1)$$

Крускал же называет диадой также и матрицу

$$f_x = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right),$$

где  $f = (f_1, \dots, f_n)$  — вектор.

2. *Скалярное произведение векторов или диад* — это свертывание по ближайшим (внутренним) индексам. Оно обозначается точкой. Например,

$$a \cdot b = a_i b_i, \quad A \cdot B = A_{ij} B_{jk}. \quad (2)$$

Здесь и далее производится суммирование по одинаковым индексам.

3. *Двойное скалярное произведение двух диад* — это двойное сворачивание по внутренним (ближайшим) и внешним (удаленным) индексам. Оно обозначается

<sup>1)</sup> Составлено переводчиком и редактором перевода. — Прим. ред.

двумя точками. Например,

$$(da) : (bc) = (a \cdot b)(d \cdot c) = d_k a_i b_i c_k, \quad A : B = A_{ki} B_{ik}. \quad (3)$$

4. *Единичная диада* всегда обозначается

$$J = (\delta_{ij}).$$

5. Векторы всюду обозначены строчными курсивными буквами, набранными жирным шрифтом. Диады или полиады, если по индексам не ясен их характер, записываются прописными курсивными буквами, также набранными жирным шрифтом.

6. Дифференцирование указывается путем приписывания к дифференцируемой величине нового нижнего индекса — переменной, по которой берется производная. Порядок написания индексов указывает на порядок написания строк и столбцов в диаде, что существенно при умножении. Например,

$$z \cdot x f = z_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad z \cdot f_x = z_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \quad (4)$$

7. Система *автономна*, если  $F(x)$  не зависит от  $s$ , т. е.

$$x_s = F(x). \quad (5)$$

8. *Стандартизация* — приведение уравнения (5) к виду

$$x_s = f(x), \quad (6)$$

где

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left[ \frac{d^n F}{d\varepsilon^n} \right]_{\varepsilon=0}. \quad (7)$$

$$f^{(n)} = \sum_{n=0}^n \varepsilon^n \left[ \frac{d^n F}{d\varepsilon^n} \right]_{\varepsilon=0} \frac{1}{n!}, \quad f^{(n)} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n F}{d\varepsilon^n} \right]_{\varepsilon=0}. \quad (8)$$

Система записана в *стандартной форме*, если  $f^{(0)}$  нигде не обращается в 0.

9. Выражение *бесконечно дифференцируемый формальный ряд* означает, что коэффициенты ряда суть бесконечно дифференцируемые функции.

10. Переменная называется *квазиугловой*, если она определена с точностью до целого числа.

11. *Локальная зависимость* функции  $\eta(x)$  от функции  $\xi(x)$  означает, что определение или способ построения функции  $\eta(x)$  зависит от функции  $\xi$ , вследствие чего при изменении функции  $\xi$  функция  $\eta$ , вообще говоря, должна будет измениться, но если при этом не менять значений функции  $\xi$  вблизи точки  $x$ , то значение  $\eta$  в этой точке не изменится.

12. Преобразование называется *локальным*, если формула преобразования локально зависит от  $f$  или  $H$ .

13. *Изолирующий интеграл* — интеграл, позволяющий выделить некоторое подмногообразие, на котором целиком расположена траектория.

14. Интегралы *полезные*, если они локально вычисляемые (например, их значения в точке локально связаны со значением потенциальной энергии в окрестности данной точки) и, кроме того, изолирующие.

15. Система уравнений *разделяемая*, если  $N$  переменных можно так разделить на две группы из  $M$  и  $N - M$  переменных, что первая из них образует автономную подсистему, или если можно произвести локальное преобразование переменных, после которого система разделится.

16. *Рекуррентная система* — это такая система дифференциальных уравнений, все решения которой периодичны (но не обязательно все периоды равны).

17. Вектор  $f$  образует *рекуррентное поле*, если его «силовые линии» замкнуты.

18. *Петли* — это замкнутые «силовые линии» рекуррентного поля.

19. *Приблизительно рекуррентная система* — это система уравнений, у которой при  $\varepsilon = 0$  все решения периодичны, а при  $\varepsilon \rightarrow 0$  все ее траектории стремятся к петлям, если область рассматриваемых значений  $s$  остается ограниченной. Расстояние, на которое изображающая точка промахивается мимо своего начального положения после одного оборота, — порядка  $\varepsilon$ .

20. *Оборот* — это приблизительный обход одной почти замкнутой петли.

21. *Дрейф* — это смещение петли от первоначального положения за большое время (порядка  $1/\varepsilon$ ).

22. *Лучшие переменные* — это переменные  $z, \varphi$  (где  $\varphi$  — угловая переменная), при переходе к которым изучаемая система принимает вид:

$$z_s = \varepsilon h(z), \quad \varphi_s = \omega(z), \quad (9)$$

$$z = Z(x), \quad \varphi = \Phi(x), \quad (10)$$

$$x = X(z, \varphi). \quad (11)$$

23. *Приведенной системой* называется следующая система дифференциальных уравнений:

$$z_s = h(z), \quad \sigma = \varepsilon s.$$

24. Если  $\hat{z}$  и  $\hat{\varphi}$  — новые лучшие переменные, то

$$\hat{z}_\varphi = 0, \quad \hat{\varphi}_\varphi = 1. \quad (12)$$

25. *Кольцо* — это точки пространства  $x$  с одним и тем же  $z$ . Уравнение колец имеет вид

$$x = X(c, \varphi), \quad z = c, \quad (13)$$

где  $c$  — константа.

26. *Кольцевая пара* — это две точки на одном и том же кольце.

27. *Разность фаз* — это разность значений  $\varphi$  для кольцевой пары.

28. Скорость вращения по кольцу не зависит от  $\varphi$  и обозначается через

$$R(z) = x_\varphi. \quad (14)$$

29. *Теорема о фазовой независимости*: величина  $W(x)$ , рассматриваемая как функция  $z$  и  $\varphi$ , не зависит от  $\varphi$  во всех порядках по  $\varepsilon$  (но не точно), если известно, что  $W$  периодично по  $\varphi$  и удовлетворяет уравнению

$$W_\varphi = A(z) + \varepsilon B(z, W, W_z), \quad (15)$$

где  $A$  и  $B$  — бесконечные ряды по  $\varepsilon$ .

30. *Наследственность* — это перенесение свойств первоначальной системы уравнений на приведенную систему уравнений.

31. *Антисимметричная диада*

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

позволяет определить *антисимметричную форму*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \wedge x_j. \quad (16)$$

Выражение (16) является, собственно говоря, сокращенным обозначением для *билинейной* (а не квадратичной) *антисимметричной формы*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i y_j - x_j y_i) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}.$$

Можно также рассматривать « $\wedge$ » как знак своеобразного антикоммутативного умножения (оно называется «внешним умножением»).

32. Антисимметричное двадное поле  $A(x)$  позволяет определить *антисимметричную дифференциальную форму*

$$A : dx dx = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j. \quad (17)$$

*Интеграл этой формы по двумерной поверхности* можно определить наглядно, разбивая поверхность на большое число маленьких областей, каждая из которых очень близка к параллелограмму. Пусть  $\nu$ -й параллелограмм имеет вершину  $x^{(\nu)}$  и стороны  $\Delta x^{(\nu)}$ ,  $\Delta' x^{(\nu)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int A : dx dx &= \int \sum a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j = \\ &= \lim_{\nu} \sum_{i,j} a_{ij}(x^{(\nu)}) \Delta x_i^{(\nu)} \wedge \Delta x_j^{(\nu)} = \\ &= \lim_{\nu} \sum_{i,j} a_{ij}(x^{(\nu)}) \begin{vmatrix} \Delta x_i^{(\nu)} & \Delta' x_i^{(\nu)} \\ \Delta x_j^{(\nu)} & \Delta' x_j^{(\nu)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(Между прочим, последний определитель выражает площадь проекции  $\nu$ -го параллелограмма на плоскость  $x_i, x_j$ .) В том случае, когда поверхность задана в параметрическом виде  $x = x(u, v)$ , этот интеграл сводится к некоторому интегралу по  $u, v$ . Действительно, если  $dx$  и  $d'x$  касаются этой поверхности

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad d'x = x_u d'u + x_v d'v,$$

то

$$dx_i \wedge dx_j = \begin{vmatrix} x_{iu} du + x_{iv} dv & x_{iu} d'u + x_{iv} d'v \\ x_{ju} du + x_{jv} dv & x_{ju} d'u + x_{jv} d'v \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} x_{iu} & x_{iv} \\ x_{ju} & x_{jv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & d'u \\ dv & d'v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} du \wedge dv.$$

Поэтому

$$\int \mathcal{L} : dx dx = \int \int \sum a_{ij} \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} du dv.$$

33. Абсолютный интегральный инвариант второго порядка определяется с помощью антисимметричной дивергенции  $\mathcal{L}$ . Обозначим интеграл по произвольной поверхности  $S$  через

$$I_S = \int_S \mathcal{L} : dx dx. \quad (18)$$

При движении точек  $x$  согласно системе (5) поверхность  $S$  за время  $t$  перейдет в некоторую другую поверхность  $S(t)$ . Если для любой поверхности  $S$  величина  $I_{S(t)}$  остается постоянной во всех порядках

$$I_{S(t)} = I_S,$$

то (18) называется абсолютным интегральным инвариантом для системы (5).

34. Относительный интегральный инвариант второго порядка определяется так же, как и абсолютный, с той только разницей, что интеграл  $I_S$  должен оставаться постоянным лишь для замкнутых поверхностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Born M., Fock V., Zs. f. Phys., 51, 165 (1928).
2. Alfvén H., Cosmical Electrodynamics, Oxford, 1950. (Имеется перевод: Альфвен Х., Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.)
3. Bishop A., Project Sherwood, Mass., 1958. (Имеется перевод: Бишоп А. С., Программа США по управляемому термоядерному синтезу, М., 1960).
4. Spitzer L., Phys. Fluids., 1, 253 (1958). (Имеется перевод в сб. «Физика горячей плазмы и термоядерные реакции, М., 1959, стр. 505.)
5. Kruskal M., U. S. A. E. C. Rep. NYO-998 (PM-S-5), 1952; U. S. A. E. C. Rep NYO-996 (Appendix to PM-S-3), 1951.
6. Fermi E., Astrophys. Journ., 119, 1 (1954).
7. Hellwig G., Zs. Naturforsch., 10a, 508 (1955).
8. Kulsrud R., Phys. Rev., 106, 205 (1957).
9. Kruskal M., Rendiconti del Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni D'ionizzazione nei Gas tenuto a Venezia, Società Italiana di Fisica, Milan, 1957.
10. Lenard A., Ann. of Phys., 6, 261 (1959).
11. Berkowitz J., Gardner C., Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XII, 501 (1959).
12. Rosenbluth M., U. S. A. E. C. Rep. LA-2030 (1956).
13. Van Allen J., Journ. Geophys. Res., 64, 1683 (1959).
14. Gardner C., Phys. Rev., 115, 791 (1959).
15. Крылов Н., Боголюбов Н., Введение в нелинейную механику, Киев, 1936.
16. Wintner A., Analytical Foundations of Celestial Mechanics sect. 128, Princeton, 1941.
17. Bohr H., Fastperiodische Funktionen, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, B. 1, № 5, Berlin, 1932. (Имеется перевод: Бор Г., Почти периодические функции, М.—Л., 1934.)
18. De Donder Th., Théorie des Invariants Intégraux, Paris, 1927.
19. Nordheim L., Fues E., Handbuch der Physik, Bd. 5, Kap. 3, Ziff. 10, Berlin, 1927.
20. Newcomb W., Ann. of Phys., 3, 317 (1958).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

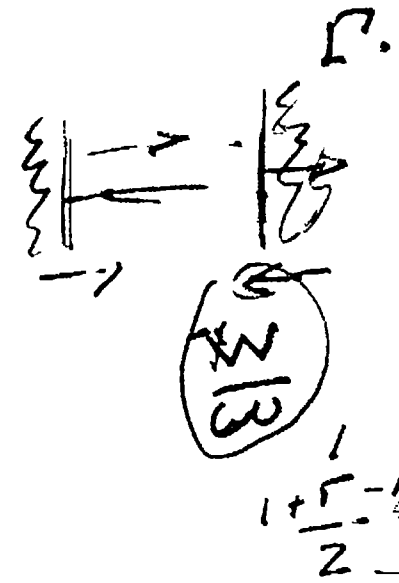
	Стр.
Предисловие . . . . .	5
От автора . . . . .	11
1. Введение . . . . .	13
§ 1. Об истории вопроса . . . . .	13
§ 2. Значение работы и порядок изложения . . . . .	14
§ 3. Обозначения и определения . . . . .	16
§ 4. Локальная зависимость и полезные интегралы . . . . .	17
§ 5. Автономные системы уравнений . . . . .	20
§ 6. Рекуррентные системы уравнений . . . . .	22
§ 7. Разделяемые системы уравнений . . . . .	23
2. Приблизительно рекуррентные системы уравнений . . . . .	24
§ 1. Формулировки и описание . . . . .	24
§ 2. Неадекватность данной задаче очевидного решения в виде ряда . . . . .	27
§ 3. Стандартизация . . . . .	27
§ 4. Пример . . . . .	29
§ 5. Более подходящие переменные . . . . .	31
§ 6. Лучшие переменные . . . . .	34
§ 7. Нахождение рекуррентных соотношений . . . . .	35
§ 8. Рекуррентное построение искомым функций . . . . .	37
§ 9. Резюме формальных результатов . . . . .	38
§ 10. Доказательство асимптотической сходимости рядов к истинному решению . . . . .	39
§ 11. Доказательство того, что истинное решение остается долго в области определения функции . . . . .	43
3. Кольца и приведенная система . . . . .	44
§ 1. Фазовая независимость . . . . .	44
§ 2. Произвол в выборе лучших переменных . . . . .	46
§ 3. Кольца, разность фаз и приведенная система уравнений . . . . .	48
§ 4. Скорость вращения . . . . .	50
4. Наследственные свойства . . . . .	54
§ 1. Определение . . . . .	54
§ 2. Наследование свойства разделяемости систем уравнений . . . . .	54
§ 3. Наследование интегралов (констант движения) . . . . .	55
§ 4. Наследование инвариантной меры . . . . .	55
§ 5. Общие интегральные инварианты . . . . .	56
§ 6. Наследование относительных инвариантов . . . . .	58
§ 7. Наследование абсолютных инвариантов . . . . .	60
5. Системы уравнений Гамильтона . . . . .	61
§ 1. Предварительные преобразования . . . . .	61
§ 2. Интеграл действия . . . . .	62
§ 3. Скобки Пуассона . . . . .	63
§ 4. Нестривальность интеграла действия . . . . .	65
§ 5. Приведенная система уравнений Гамильтона . . . . .	66
§ 6. Возможность повторения изложенных операций для нахождения других инвариантов . . . . .	69
Приложения . . . . .	71
1. Основная теорема о приближениях . . . . .	71
2. Завершение канонического преобразования . . . . .	73
3. Итерации приблизительно тождественных отображений . . . . .	77
Дополнение . . . . .	83
Литература . . . . .	89

$$i \cdot \ddot{v} = \delta \frac{m^{\oplus} m^{\oplus}}{R^2} > 0$$

$$m^{\ominus} \ddot{v} = \delta \frac{m^{\ominus} m^{\oplus}}{R^2}$$

$$+0 \quad +0 \quad -\mu \ddot{v} = \delta \frac{-\mu m^{\oplus} m^{\oplus}}{R^2} > 0$$

$$+ \oplus \quad + \oplus \quad +\mu \ddot{v} = \delta \frac{\mu m^{\oplus} m^{\oplus}}{R^2} < 0$$



**М. Крускал**  
**АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ**  
 Редактор *Е. Майкова*  
 Художник *И. И. Каледин*  
 Технический редактор *Г. Е. Маркова*  
 Корректор *А. В. Шацкая*

Сдано в производство 2/VII 1962 г.  
 Подписано к печати 29/X 1962 г.  
 Бумага 84x108:32 = 1,4 бум. л.  
 4,5 печ. л. Уч.-изд. л. 1,0. Изд. № 2-1352.  
 Цена 25 к. Зак. № 614.

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
 ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.  
 Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой  
 УЦБ и НИИ Ленсовнархоза.  
 Ленинград, Пискаревский пр., 29.