АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН И ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"

МОСКВА

1979

УДК 530.12+531.51

Сборник посвящен 100-летию со дня рождения величайшего физика современности Альберта Эйнштейна и содержит подборку фундаментальных публикаций как самого А. Эйнштейна, так и других ученых, внесших значительный вклад в развитие теории гравитации.

Книга рассчитана на широкие круги ученых-исследователей и историков науки, преподавателей и студентов и всех тех, кто интересуется становлением современной теории гравитации и историей научного поиска в одной из фундаментальных областей физики.

Редакция литературы по физике

1704020000

А $\dfrac{20402-049}{041(01)-79}$ 49—79

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН
И ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Ст. научный редактор Е. Куранский
Мл. научные редакторы: Р. Зацепина, Г. Сорокина
Художник А. Шипов. Художественный редактор Л. Безрученков
Технический редактор М. Страшнова. Корректор С. Денисова

ИБ № 1847

Сдано в набор 25.09.78. Подписано к печати 24.01.79. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Объем 18,56 бум. л. Усл. печ. л. 37,13, в т. ч. 1 вкл. Уч.-изд. л. 32,76. Изд. № 2/0199. Тираж 16500 экз. Зак. № 0919. Цена 3 р. 10 к.

Издательство «Мир» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома Государственного Комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 103001, Трехпрудный пер., 9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом году отмечается 100-летний юбилей со дня рождения величайшего ученого XX столетия А. Эйнштейна (14 марта 1879 г.— 18 апреля 1955 г.). Его имя неразрывно связано с великой революцией в физике, свершившейся в начале века,— с созданием квантовой теории и теории относительности, причем вклад Эйнштейна в становление современной физической картины мира оказался определяющим. Он стоял у колыбели квантовой механики. Ему принадлежат первоклассные работы по статистике. Именно за работы в этих областях в 1921 г. ему была присуждена Нобелевская премия. Эйнштейну мы воздаем славу как человеку, сказавшему решительное слово в формировании специальной теории относительности, взявшему ответственность за ее физическое содержание и последовательно отстаивавшему созданную теорию, а также как создателю общей теории относительности.

Данный сборник предназначен отобразить роль Эйнштейна лишь в создании и развитии общей теории относительности. Ряд сборников классических работ создателей специальной теории относительности выходил в нашей стране ранее. Последний из них —«Принцип относительности» был выпущен Атомиздатом в 1973 г.

При составлении нашего сборника преследовались следующие цели.

1. Показать физические и геометрические *истоки* основных идей общей теории относительности, которые накопились в науке к моменту создания Эйнштейном своей теории.

2. Переиздать основополагающие работы Эйнштейна и его современников, в которых был заложен фундамент общей теории относительности. Мы считаем, что переиздание к юбилею Эйнштейна его работ наиболее соответствует его замечанию в «Автобиографических заметках», что «... главное в жизни человека моего склада заключается в том, *что* он думает и *как* он думает, а не в том, что он делает или испытывает» [1]).

3. Переиздать работы А. Эйнштейна и других авторов, существенно развившие идеи общей теории относительности.

Отбор материалов для сборника определялся следующими соображениями.

а) Было решено ограничиться изданием лишь оригинальных работ (полностью или частично). Ясно, что никакие обзорные или исторические работы

---

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 270.

не могут заменить непосредственного знакомства с образом мыслей и взглядами первооткрывателей. Эйнштейн говорил: «...всякий знает имена людей, которые внесли особенно большой вклад в создание новых представлений, идей и теорий. Однако лишь немногие имели возможность познакомиться с этими людьми поближе. Лучше всего это достигается не чтением их биографий, а ознакомлением с их оригинальными работами, в которых запечатлен ход мысли великих личностей» [1]).

б) В связи с трудностями отбора наиболее существенных работ из числа выполненных за последнее десятилетие было решено ограничиться статьями, опубликованными примерно до 1965 г., важность результатов которых уже выдержала проверку временем. Исключение было сделано лишь для важной работы Хокинга по квантовым эффектам, ответственным за испарение черных дыр, и для аннотаций экспериментальных работ, содержащих последние данные об эффектах общей теории относительности.

в) Было решено отказаться от пространных пояснений результатов включенных в сборник работ. Такое право оставлено лишь за самим Эйнштейном. Везде, где это было возможно сделать, перед оригинальными статьями помещены комментарии или высказывания об авторах или их результатах самого Эйнштейна.

г) Данный сборник составлен на основе пожеланий и рекомендаций ведущих советских ученых по теории относительности и гравитации, входящих в состав Секции гравитации научно-технического совета Минвуза СССР и Гравитационной комиссии Академии наук СССР. Классификация отобранного материала произведена с учетом вышеперечисленных целей сборника и опыта организации секций на отечественных и международных гравитационных конференциях, где обычно бывают представлены четыре основных направления: классическая (неквантовая) теория гравитации, связь теории гравитации с физикой микромира, космология и релятивистская астрофизика и гравитационный эксперимент.

В итоге сложился план сборника, составленного из семи частей.

1) *Истоки общей теории относительности*. Очевидно, что ни одна теория не появляется на пустом месте. Обычно к моменту создания какой-либо теории в науке накапливается целый ряд фактов, проблем и идей, настоятельно требующих своего обобщения и разрешения в целях дальнейшего прогресса. Главную роль играют здесь выдающиеся умы, те, которые оказываются способными чутко уловить интересы эпохи и соответствующим образом выразить их в своей научной деятельности. Так было при построении специальной теории относительности, еще в большей мере это относится и к общей теории относительности. Сам Эйнштейн неоднократно подчеркивал огромную роль своих предшественников в эволюции представлений о свойствах пространства и времени.

---

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 170.

Первый существенный шаг на трудном пути к созданию новой теории пространства и времени был сделан нашим великим соотечественником Н. И. Лобачевским (1792—1856 гг.) и независимо от него, немного позже, венгерским математиком Я. Бояи (1802—1860 гг.) и немецким математиком К. Гауссом (1777—1855 гг.). Недавно мы отмечали 150-летие создания Лобачевским первой неевклидовой геометрии [1]. Настоящий сборник открывается выдержками из известного сочинения Лобачевского «О началах геометрии». Лобачевский первый четко поставил вопрос: какова геометрия реального физического пространства?

Второй шаг принадлежит немецкому математику Б. Риману (1826—1866 гг.), знаменитый мемуар которого «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» также включен в сборник. Риман размышлял уже о природе тяготения, но еще не мог связать ее с искривлением пространства-времени.

Далее в этой части сборника помещены две важные работы английского математика В. Клиффорда (1845—1879 гг.). Он сыграл большую роль в формировании идеи о связи между физическими свойствами материи и свойствами искривленного пространства. В этом читатель сможет сам убедиться, прочитав в сборнике его работу «О пространственной теории материи» (1876 г.) и отрывок из его книги «Здравый смысл точных наук» (1879—1885 гг.). Подчеркнем также, что Клиффорду принадлежит первый перевод на английский язык упомянутого мемуара Римана. Биографами Эйнштейна и его современниками отмечалось, что Эйнштейн был знаком с трудами Клиффорда [2] уже в бернский период своей жизни (1902—1909 гг.).

В сборник включены отрывки из книг Э. Маха «Механика» и «Познание и заблуждение». Известно, что Эйнштейн многократно отмечал огромную роль Э. Маха (1838—1916 гг.) в развитии своего физического мышления: «Максвелл и Герц в своем сознательном мышлении также считали механику надежной основой физики, хотя в исторической перспективе следует признать, что именно они и подорвали доверие к механике как основе основ всего физического мышления. Эрнст Мах в своей истории механики потряс эту догматическую веру; на меня — студента — эта книга оказала глубокое влияние именно в этом отношении. Я вижу действительное величие Маха в его неподкупном скепсисе и независимости; в мои молодые годы на меня произвела сильное впечатление также гносеологическая установка Маха, которая сегодня представляется мне в существенных пунктах несостоятельной» [3]. Среди высказываний Эйнштейна о философских концепциях Маха можно встретить и более резкие определения его как «жалкого философа» [4]. Развернутая критика идеалистических философских взглядов Маха дана

---

[1]) Доклад Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» был сделан на заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета 11 (23) февраля 1826 г.

[2]) См., например, *Б. Г. Кузнецов*, Эйнштейн, Изд. АН СССР, М., 1962.

[3]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М.,1967, стр. 266.

[4]) *Meyerson E.*, La déduction relativiste, Paris, 1925, p. 62.

В. И. Лениным в работе «Материализм и эмпириокритицизм». Однако В. И. Ленин здесь же отмечает: «...Мах *забывает* свою собственную теорию и, начиная говорить о различных вопросах физики, рассуждает попросту, без идеалистических выкрутас, т. е. материалистически. Все «комплексы ощущений» и вся эта берклианская премудрость летят прочь». И далее: «Собственная теория Маха есть субъективный идеализм, а когда нужен момент объективности,— Мах без стеснения вставляет в свои рассуждения посылки противоположной, т. е. материалистической теории познания» [1]). Поэтому мы считаем, что читателю будет полезно познакомиться с мыслями Маха *как физика*.

Завершается первая часть сборника выдержками из известной классической работы А. Пуанкаре (1854—1912 гг.) «О динамике электрона» (1906 г.), где в рамках пространства-времени специальной теории относительности сделан первый реальный шаг после работ Ньютона по развитию теории гравитации.

2) *Становление общей теории относительности.* Эта часть открывается отрывком из работы Эйнштейна «О принципе относительности и его следствиях» (1907 г.), где он впервые касается теории гравитации. Затем помещена первая, физическая, часть работы Эйнштейна и Гроссмана «Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения» (1913 г.), в которой был заложен фундамент общей теории относительности, вскрыта связь теории тяготения с метрическими свойствами пространства-времени. Завершается этот раздел работой Эйнштейна «Основы общей теории относительности» (1916 г.), выход в свет которой знаменовал собой создание общей теории относительности. В эту же часть включена работа Д. Гильберта (1862—1943 гг.), вышедшая в 1915 г., в которой вариационным методом впервые были выведены в окончательном виде уравнения Эйнштейна. В этой статье Гильберт опирается на предшествующие работы Эйнштейна.

3) *Важнейшие работы по точным решениям уравнений Эйнштейна, их классификации и уравнениям движения в ОТО.* Раздел начинается с важной работы немецкого физика К. Шварцшильда (1873—1916 гг.) «О гравитационном поле точечной массы в теории Эйнштейна» (1916 г.), в которой было получено первое точное решение уравнений Эйнштейна — сферически-симметричное решение в вакууме. На метрике Шварцшильда основано объяснение всех трех эффектов, подтверждающих общую теорию относительности. Заметим, что эта работа опубликована в труднодоступном сейчас журнале и мало кто из современных советских физиков-гравитационистов может похвастаться, что ее читал.

Приятно отметить большой вклад в развитие классической теории гравитации, внесенный советскими учеными: профессором Казанского университета А. З. Петровым (1910—1972 гг.) (по алгебраической классификации пространств Эйнштейна) и академиком В. А. Фоком (1898—1974 гг.). В работе Фока выведены уравнения движения тел из уравнений Эйнштейна. Этот результат получен им независимо от известной работы Эйнштейна, Инфельда

---

[1]) *Ленин В. И.*, Полное собрание сочинений, т. 18, стр. 60.

и Гоффмана и практически одновременно с ней. Однако у Фока этот результат в ряде отношений глубже. Упомянутая его статья в свое время оказала огромное влияние на развитие исследований по общей теории относительности в СССР.

4) *Основные работы по космологии и релятивистской астрофизике.* В данный раздел вошли первые работы по космологии на основе общей теории относительности самого Эйнштейна (замкнутая статическая модель Вселенной) и В. де Ситтера (1872—1934 гг.). Существенный вклад в этом направлении был сделан советским ученым А. А. Фридманом (1888—1925 гг.). Его заслуга состоит в открытии нестационарных однородных изотропных моделей Вселенной (открытых и замкнутой), составляющих основу современных космологических воззрений. Расширение Вселенной, предсказанное Фридманом, было подтверждено экспериментально Хабблом в 1929 г. В сборник включены обе знаменитые работы Фридмана 1922 и 1924 гг. Далее в эту часть вошли работы ряда авторов, заложившие основу для бурно развивающегося сейчас раздела астрономии и теории гравитации — релятивистской астрофизики.

5) *Общая теория относительности и физика микромира.* Эта часть посвящена перспективному направлению, в котором сделаны пока лишь первые шаги: исследованию связи между закономерностями общей теории относительности и квантовой теории. Мы отдаем себе отчет, что, поскольку это направление недостаточно разработано, в данный момент могут быть разные точки зрения на то, какие из результатов существенны, а какие нет. Мы выбрали работы: В. А. Фока (описание фермионов в искривленном пространстве-времени), М. П. Бронштейна (1906—1938 гг.) (вопросы измеримости геометрических величин в квантовой теории гравитации и вывод ньютоновской гравитационной силы из квантовой теории слабого гравитационного поля), Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова (гипотеза взаимных трансмутаций гравитонов и квантов обычной материи), Т. Редже (планковская длина и измеримость геометрических величин), М. А. Маркова (гравитация и теория элементарных частиц) и С. Хокинга (квантовая теория и испарение черных дыр). Несомненно, в сборник не вошло много других достойных работ.

6) *Обобщения эйнштейновской теории гравитации.* В эту часть вошла основополагающая работа Г. Вейля (1885—1955 гг.), в которой впервые поставлена проблема геометризации электромагнитного поля (построения единой теории гравитации и электромагнетизма). В этой же статье Вейлем предложено обобщение дифференциальной геометрии Римана (ковариантная производная от метрического тензора отлична от нуля) и определена конформная симметрия. Другое обобщение римановой геометрии — использование пространств с кручением — было предложено французским математиком Э. Картаном (1869—1951 гг.). Одна из его работ включена в сборник. Принципиально иное направление построения единой теории гравитации и электромагнетизма (на основе пятимерных римановых пространств) начал развивать Т. Калуца (1885—1954 гг.). Его первая работа такого содержания помещена в сборник. Отметим, что этим направлением в единой теории поля одно время занимался и Эйнштейн. В краткой статье П. А. М. Дирака впервые была выска-

зана гипотеза о связи между космологическими и атомными константами и о возможности их совместного изменения. С тех пор эта гипотеза продолжает обсуждаться физиками. Далее здесь приведена выдержка из работы Эйнштейна, в которой излагается последний вариант его единой теории гравитации и электромагнетизма с несимметричной метрикой. Известно, что попыткам построения единой теории поля Эйнштейн посвятил около тридцати последних лет своей жизни. Завершается эта часть отрывком из работы Ч. Мизнера и Дж. Уилера «Классическая физика как геометрия», посвященной топологическому и геометрическому истолкованию электромагнетизма.

7) *Экспериментальные основания общей теории относительности.* В этот раздел было решено поместить выдержки из отчета А. Эддингтона (1882—1944 гг.) с соавторами о результатах первого эксперимента по проверке общей теории относительности — экспедиции Эддингтона 1919 г., предпринятой для наблюдения эффекта отклонения лучей света во время солнечного затмения. Кроме того, в этой части помещены аннотации последних экспериментальных работ по самым точным (на начало 1978 г.) измерениям эффектов общей теории относительности: принципа эквивалентности, гравитационного красного смещения, отклонения света (и радиоволн) в искривленном Солнцем пространстве-времени, смещения перигелия Меркурия.

В заключение пользуемся случаем выразить искреннюю признательность всем коллегам физикам-гравитационистам, принявшим участие в составлении и обсуждении данного сборника и в работе над ним.

Секция гравитации научно-технического совета Минвуза СССР

Гравитационная комиссия Академии наук СССР

ИСТОКИ
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
А. ЭЙНШТЕЙНА

«Среди аксиом Евклида была одна, которая казалась математикам непосредственно менее очевидной, чем другие; в течение долгого времени они стремились свести ее к другим, т. е. доказать ее с их помощью. Это была так называемая аксиома о параллельных. Так как все старания доказать ее ни к чему не привели, должно было постепенно выработаться предположение, что это доказательство невозможно, т. е. что эта аксиома не сводится к другим. Это предположение могло бы считаться доказанным, если бы удалось построить логически непротиворечивую научную систему, отличающуюся от евклидовой геометрии тем и только тем, что аксиома о параллельных заменена другой. Лобачевский, с одной стороны, и Бóяи (отец и сын), с другой, независимо пришли к этой мысли и убедительно провели ее; в этом состоит их неоценимая заслуга. После этого у математиков не могло не возникнуть убеждения, что наряду с евклидовой геометрией существуют и другие, логически с нею вполне равноправные. Естественно возникал также вопрос, должна ли быть положена в основание физики именно евклидова геометрия, а не какая-нибудь другая. Вопрос был поставлен в еще более определенной форме: какова геометрия физического мира — евклидова или какая-нибудь другая?»

(*А. Эйнштейн, «Неевклидова геометрия и физика», 1926 г.*) [1])

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука» М., 1966, стр. 180.

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ*

(Первая часть сочинения) (1829)

Кажется, трудность понятий увеличивается по мере их приближения к начальным истинам в природе; так же, как она возрастает в другом направлении, к той границе, куда стремится ум за новыми познаниями. Вот почему трудности в Геометрии должны принадлежать, во-первых, самому предмету. Далее, средства, к которым надобно прибегнуть, чтобы достигнуть здесь последней строгости, едва ли могут отвечать цели и простоте сего учения. Те, которые хотели удовлетворить сим требованиям, заключили себя в такой тесный круг, что все усилия их не могли быть вознаграждены успехом. Наконец, скажем и то, что со времени Ньютона и Декарта вся Математика, сделавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами вперед, что оставила далеко за собой то учение, без которого могла уже обходиться и которое с тем вместе перестало обращать на себя внимание, какое прежде заслуживало. Евклидовы начала, таким образом, несмотря

* Извлечено самим Сочинителем из рассуждения, под названием: Exposition succincte des principes de la Géométrie etc., читанного им в заседании Отделения физико-математических наук, 12 февраля 1826 г.

(Здесь перепечатаны с незначительными исправлениями вводная и заключительная части сочинения из книги: «Основания геометрии», ГИТТЛ, М., 1956, стр. 27, 28.— *Прим. ред.*)

на глубокую древность их, несмотря на все блистательные успехи наши в Математике, сохранили до сих пор первобытные свои недостатки.

В самом деле, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий, с каких, повторяя Евклида, начинаем мы Геометрию, и что нигде в Математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий. Правда, что против ложных заключений от неясности первых и общих понятий в Геометрии предостерегает нас представление самых предметов в нашем воображении, а в справедливости принятых истин без доказательства убеждаемся простотою их и опытом, например астрономическими наблюдениями; однако ж все это нисколько не может удовлетворить ум, приученный к строгому суждению. К тому и не в праве пренебрегать решением вопроса, покуда оно неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему другому.

Здесь намерен я изъяснить, каким образом думаю пополнить такие пропуски в Геометрии. Изложение всех моих исследований в надлежащей связи потребовало бы слишком много места и представления совершенно в новом виде всей науки. О прочих недостатках Геометрии, менее важных по затруднению, не почитаю нужным говорить подробно. Ограничусь одним только замечанием, что они относятся к способу преподавания. Никто не помышляет отделить то, что исключительно принадлежит Геометрии, от того где наука сия становится уже другою, т. е. Аналитикой.

Первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу. Тогда только они могут служить прочным и достаточным основанием учения. Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным — не должно верить.

Ничего не может быть простее того понятия, которое служит основанием Арифметике. Мы познаем легко, что все в природе подлежит измерению, все может быть сосчитано. Не таковы положения Механики: человек с помощью одних ежедневных своих опытов не мог бы прийти к ним. Вечность и одинаковость раз сообщенного движения, где скорость служит мерою оного и массы различных тел — такого рода истины, которые требовали времени, пособия других познаний и ожидали гения [1]).

* * *

[1]) После этого вступления Лобачевский переходит к изложению начал геометрии. Развернутое изложение этих вопросов дано Лобачевским в первых главах его сочинения «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (*Н.И. Лобачевский*, Полн. собр. соч., т. II, стр. 200 и след.; там же имеются обстоятельные комментарии Б. Л. Лаптева). (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии».*)

Изложенная нами теория параллельных предполагает линии с углами в такой зависимости, которая, как после увидим, находится или нет в природе, доказать никто не в состоянии[1]). По крайней мере наблюдения астрономические убеждают в том, что все линии, которые подлежат нашему измерению, даже расстояния между небесными телами, столько малы в сравнении с линиею, принятою в теории за единицу, что употребительные до сих пор уравнения прямолинейной Тригонометрии без чувствительной погрешности должны быть справедливы.

Называем a поперечник земного пути вокруг солнца: $2p$ самый большой годовой паралакс неподвижной звезды: это значит $\pi/2 - 2p$ будет угол между a и расстоянием одного конца a до звезды, тогда как расстояние звезды до другого конца перпендикулярно к a. Необходимо

$$F(a) > \frac{\pi}{2} - 2p,$$

отсюда

$$e^a < \frac{1 + \operatorname{tang} p}{1 - \operatorname{tang} p},$$

$$\frac{1}{2} a < \operatorname{tang} p + \frac{1}{3} \operatorname{tang} p^3 + \frac{1}{5} \operatorname{tang} p^5 + \ldots,$$

тем более

$$a < \operatorname{tang} 2p.$$

Расстояние звезды сделается к a перпендикулярно, если разность в долготе звезды с солнцем составит прямой угол. Это будет именно то условие, которого должно держаться для выгоды самих наблюдений над паралаксом.

Кажется, всего более можно положиться на способ, придуманный г-м Дасса-Мондардье (Connaiss. des temps de 1831). Он находит годовой паралакс звезды Кейды (29 Эридана) $2''$, Ригеля $1''$, 43, Сириуса $1''$,24. Последний дает

$$a < 0{,}00000602.$$

Самый большой

$$a < 0{,}000009696.$$

Сколько ни мало таким образом должно полагать a, следовательно, и все вообще линии, какие могут подлежать нашему измерению, в уравнениях (17) тем более можем довольствоваться низшими степенями боков треугольника, что здесь в функции входят или одни четные или одни нечетные степени.

[1]) Уравнения (17) и все, что за ними следует, прибавлено уже Сочинителем после к тому рассуждению, которое было им представлено 1826 года в Отделение физико-математических наук.

Сумма углов, даже и в таких треугольниках, которые теперь рассматриваем, чрезвычайно мало разнится от двух прямых. Если означаем 2ω эту разность, то из последнего уравнения в (17), полагая $B = \pi/2$; $A = \pi/2 - 2p$; $C = 2p - 2\omega$, легко находим

$$\cos F\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{tang}\omega \cdot \operatorname{tang}(2p-\omega)},$$

отсюда

$$\sin(p-\omega)^2 = \sin p^2 - \cos 2p \cdot \cos F\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Если p' другой паралакс, менее p, то

$$\cot F\left(\frac{a}{2}\right)^2 < \frac{\sin p'^2}{\cos 2p'}.$$

Итак, с тою точностью вычисления, какую здесь надобно соблюсти, можно полагать

$$\omega < 2p \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2, \quad \text{где} \quad \sin x = \frac{\sin p'}{\sin p}\sqrt{\frac{\cos 2p}{\cos 2p'}}.$$

Например, для Сириуса $p' = 0'',62$, для Кейды $p = 1''$, следовательно, в треугольнике, который простирается до второй из сих звезд,

$$2\omega < 0'',43.$$

Если бы расстояние до звезды было тоже a, тогда $\operatorname{tang}\omega = \cos F(a/2)^2 < \operatorname{tang} p^2$, где $2p$ — самый малый известный паралакс для a. Например, полагая $p = 0'',62$, находим, что сумма углов в таком треугольнике разнится от двух прямых менее, нежели на

$0'',00000372$ [1]).

Вообще в прямоугольном треугольнике, которого a, b катеты, $\pi - 2\omega$ сумма углов,

$$\operatorname{tang}\omega = \left(\frac{e^a-1}{e^a+1}\right)\left(\frac{e^b-1}{e^b+1}\right).$$

Чем менее, следовательно, треугольник, тем сумма углов его менее разнится от двух прямых. После этого можно воображать, сколько эта разность, на которой основана наша теория параллельных, оправдывает точность всех вычислений обыкновенной Геометрии и дозволяет принятые начала этой последней рассматривать как бы строго доказанными.

Между тем нельзя не увлекаться мнением г. Лапласа, что видимые нами звезды и Млечный путь принадлежат к одному только

[1]) В тексте Лобачевского ошибочно стоит $0''$, 000372. (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии»*.)

собранию небесных светил, подобному тем, которые усматриваем как слабо мерцающие пятна в созвездиях Ориона, Андромеды, Козерога и проч. Итак, не говоря о том, что в воображении пространство может быть продолжаемо неограниченно, сама Природа указывает нам такие расстояния, в сравнении с которыми исчезают за малостию даже и расстояния нашей земли до неподвижных звезд.

После этого нельзя утверждать более, что предположение, будто мера линий не зависит от углов — предположение, которое многие Геометры хотели принимать за строгую истину, не требующую доказательства,— может быть, оказалось бы приметно ложным еще прежде, нежели перейдем за пределы видимого нами мира.

С другой стороны, мы не в состоянии постигать, какая бы связь могла существовать в природе вещей и соединять в ней величины столь разнородные, каковы линии и углы. Итак, очень вероятно, что Евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными.

Как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики.

(От редакции сб. «Об основаниях геометрии». Дальнейшая, основная часть сочинения Лобачевского содержит основы аналитической и дифференциальной геометрий неевклидова пространства, измерение площадей, поверхностей и объемов. Лобачевский получает для них формулы в одних случаях в конечном виде, в других — в виде определенных интегралов. Сравнивая полученные результаты, вычисленные различными способами, он получает как известные, так и новые значения некоторых определенных интегралов.

Сочинение заканчивается следующим заключением.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После того как мы нашли уравнения (17), которые представляют зависимость углов и боков треугольника; когда, наконец, дали мы общие выражения для элементов линий, площадей и объемов тел, все прочее в Геометрии будет уже Аналитикой, где исчисления необходимо должны быть согласны между собою и ничего не в состоянии открыть нам нового, чего бы не заключалось в тех первых уравнениях, откуда должны быть взяты все отношения геометрических величин друг к другу. Итак, если надобно предполагать теперь, что какое-нибудь противоречие принудит впоследствии опровергнуть начала, принятые нами в этой новой Геометрии, то это противоречие может только скрываться в самих уравнениях (17). Заметим однако ж, что эти уравнения переменяются в (16) сферической Тригонометрии как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$; но в обыкновенной Геометрии и сферической Тригонометрии везде входят одни содержания линий: следовательно, обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта новая Геометрия всегда будут согласны между собой.

Если теперь Аналитика с новой — назовем *воображаемой* Геометрией в отличие от *употребительной* — соглашены уже между собою, то можно ожидать от той и другой взаимного пособия. Это ожидание кажется не без основания после того, как, предположивши собственно достигнуть только одной цели — дать общие правила для измерения всех геометрических величин, — идя прямо к этой цели и дозволивши себе мимоходом только некоторые применения, мы были в состоянии открыть значения определенных интегралов, к познанию которых одной Аналитике, без пособия Геометрии, трудно было бы проложить дорогу.

Оставалось бы исследовать, какого рода перемена произойдет от введения воображаемой Геометрии в Механику, и не встретится ли здесь принятых уже и несомнительных понятий о природе вещей, но которые принудят нас ограничивать или совсем не допускать зависимости линий и углов. Однако ж можно предвидеть, что перемены в Механике при новых началах Геометрии будут того же рода, какие показал г. Лаплас (Mécanique céleste, T. I, Liv. I, Ch. II), предполагая возможной всякую зависимость скорости от силы, или — выразимся вернее — предполагая силы, измеряемые всегда скоростию, подчиненными другому закону в соединении, нежели принятому сложению их.

«Заслуга Римана в развитии идей о соотношении между геометрией и физикой двояка. Во-первых, он открыл сферическую (эллиптическую) геометрию, которая является антитезой гиперболической геометрии Лобачевского. Таким образом, он впервые указал на возможность геометрического пространства конечной протяженности. Эта идея была сразу воспринята и привела к постановке вопроса о конечности физического пространства. Во-вторых, Риман имел смелость создать геометрии несравненно более общие, чем геометрия Евклида или неевклидовы геометрии в более узком смысле. Он создал, таким образом, «риманову» геометрию, которая (как и неевклидовы геометрии в более узком смысле) только в бесконечно малом совпадает с евклидовой; эта геометрия является результатом применения гауссовой теории поверхностей к континууму произвольного числа измерений. Сообразно с этой более общей геометрией метрические свойства пространства и различные возможности расположения бесконечно большого числа бесконечно малых неизменяемых тел в конечных областях не определяются исключительно аксиомами геометрии. Вместо того чтобы быть смущенным этим выводом и заключить о физической бессмысленности своей системы, Риман пришел к смелой мысли, что геометрические отношения тел могут быть обусловлены физическими причинами, т. е. силами. Таким образом, путем чисто математических рассуждений он пришел к мысли о неотделимости геометрии от физики; эта мысль нашла свое фактическое осуществление семьдесят лет спустя в общей теории относительности, которая соединила в одно целое геометрию и теорию тяготения».

(А. Эйнштейн, «Неевклидова геометрия и физика», 1926 г.) [1]

[1] *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 181.

Б. РИМАН

О ГИПОТЕЗАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ*

ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

Общеизвестно, что геометрия предполагает заданными заранее как понятие пространства, так и первые основные понятия, которые нужны для выполнения пространственных построений. Она дает номинальные определения понятий, тогда как существенные свойства определяемых объектов входят в форме аксиом. При этом взаимоотношение между этими предпосылками остается невыясненным: не видно, является ли, и в какой степени, связь между ними необходимой; не видно также a priori, возможна ли такая связь.

Начиная от Евклида и кончая Лежандром (я называю наиболее выдающегося из новейших исследователей основ геометрии), ни математиками, ни философами из числа занимавшихся интересующим нас вопросом упомянутые неясности не были устранены. Причина этому обстоятельству, как я полагаю, заключается в том, что общая концепция многократно протяженных величин, к которым относятся пространственные величины, оставалась вовсе не разработанной. В связи с этим я поставил перед собой задачу,— исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины. Мы придем к заключению, что в многократно протяженной величине возможны различные мероопределения и что пространство есть не что иное, как частный случай трижды протяженной величины. Необходимым следствием отсюда явится то, что предложения геометрии не выводятся из общих свойств протяженных величин и что, напротив, те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трижды протяженных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта. В таком случае возникает задача установить, из каких простейших допущений вытекают метрические свойства про-

*) Вступительная лекция, прочитанная Риманом 10 июня 1954 г. Впервые опубликована в 1868 г.: *Riemann B.*, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Bd. 13, 1868, S. 133—152. (Здесь перепечатан с незначительными исправлениями перевод из книги: «Об основаниях геометрии», ГИТТЛ, М., 1956, стр. 309—324.)

странства,— задача, естественно, не вполне определенная, так как не исключено, что возможно несколько систем простых допущений, из которых каждая достаточна для установления метрических свойств пространства; важнейшая среди них, с точки зрения поставленной нами цели, есть система, положенная в основу геометрии Евклидом. Допущения, о которых идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они — не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие (которое, как бы то ни было, очень значительно в пределах наблюдения) надлежит подвергнуть исследованию и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого.

I. ПОНЯТИЕ n-КРАТНО ПРОТЯЖЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Я обращаюсь к первой из указанных мною задач, а именно к выяснению понятия многократно протяженной величины; при этом считаю для себя обязательным просить об известном снисхождении, тем более, что в относящихся сюда работах философского содержания, трудность которых заключена скорее в анализе понятий, чем в математических построениях, я не обладаю большой осведомленностью. Кроме очень кратких указаний, которые г. тайный советник Гаусс дал во втором мемуаре, посвященном биквадратическим вычетам (в Геттингенских ученых записках), и в своей юбилейной работе, а также некоторых философских исследований Гербарта, я не имел возможности использовать какие-либо литературные источники.

1

Образование понятия величины возможно лишь в том случае, если предпослано некоторое общее понятие, связанное с допущением ряда различных состояний [1]). В зависимости от того, существует ли или не существует непрерывный переход от одного состояния к другому, мы имеем дело с непрерывным или с прерывным многообразием; отдельные состояния называются в первом случае точками, во втором — элементами многообразия. Величины, ко-

---

[1]) «Состояние»— Bestimmungsweise. Под многообразием Риман понимает не только геометрические протяженности (это явствует, например, из конца абзаца, где Риман говорит об ощущениях и цветах). Поэтому позволительно воспользоваться, за неимением лучшего, общепонятным, хотя и не вполне геометрическим термином «состояние» для обозначения элемента многообразия, соответствующего совокупности некоторых определенных числовых значений параметров (координат). В случае геометрической протяженности «состояние»— то же, что «точка». (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии».*)

торые образуют дискретное множество состояний, встречаются столь часто, что по крайней мере в более развитых языках для соответствующих понятий всегда имеются особые наименования (и именно потому при построении учения о дискретных величинах математики могли исходить из допущения однородности данных объектов). Напротив, надобность в образовании понятий, соответствующих случаю непрерывных многообразий, встречается сравнительно редко; из немногочисленных примеров многократно протяженных многообразий, встречающихся в обыденной жизни, укажем локализованные ощущения и цвета; гораздо чаще приходится прибегать к рассмотрению и исследованию подобного рода понятий в высших разделах математики.

Отдельные части многообразий могут быть выделены с помощью некоторых признаков или же количественных (квантитативных) различий. С количественной точки зрения сравнение осуществляется в случае дискретных многообразий посредством счета, в случае непрерывных — посредством измерения. Измерение заключается в последовательном прикладывании сравниваемых величин; поэтому возможность измерений обусловлена наличием некоторого способа переносить одну величину, принятую за единицу масштаба, по другой величине. Если такой способ не указан, то сравнивать две величины можно лишь в том случае, когда одна из них является частью другой, и тогда речь может идти лишь о «больше» или «меньше», а не о «сколько». Исследования, которые имеют своим предметом величины такого рода, образуют общего характера, независимую от мероопределения, часть учения о величинах: в ней величины не мыслятся существующими независимо от их положения и выраженными через единицу измерения, а должны быть представляемы как области в некотором многообразии. Такого рода исследования стали крайне необходимыми для многих отраслей математики, в частности в теории многозначных аналитических функций; недостаточное их развитие, несомненно, есть причина того, что знаменитая теорема Абеля, а также результаты, полученные Лагранжем, Пфаффом, Якоби в общей теории дифференциальных уравнений, долгое время не давали своих плодов.

С точки зрения цели, которую мы здесь имеем в виду, из этой общей части учения о протяженных величинах (где не делается никаких допущений, которые не содержались бы в самом понятии) достаточно особо выделить два пункта: первый относится к способу введения понятия многократно протяженной величины, второй касается того, как определение местонахождения в многообразии сводится к установлению ряда количественных (квантитативных) данных, причем выяснено будет и то, какому многообразию приписывается n-кратная протяженность.

2

Предположим, что некоторому понятию сопоставлено непрерывное множество состояний, причем от одного состояния определенным способом можно переходить ко всякому другому; тогда все эти состояния образуют просто протяженное или однократно протяженное многообразие, отличительным признаком которого служит возможность непрерывного смещения на каждом данном этапе лишь в две стороны — вперед и назад. Предположим дальше, что это многообразие в свою очередь может быть переведено в другое, вполне отличное от первого многообразия, притом также совершенно определенным образом, т. е. так, что каждая точка первого многообразия переходит в определенную точку второго; все состояния, которые могут быть получены при подобного рода операциях, образуют дважды протяженное многообразие. Так же образуется и трижды протяженное многообразие: достаточно представить себе, что дважды протяженное многообразие определенным образом переводится в иное, вполне отличное многообразие. Легко понять, как можно продолжить это построение. Если условимся термину «определенный» противопоставлять в качестве противоположного термина «изменяемый», то можно характеризовать наше построение как составление изменяемости $n+1$ измерений из одной изменяемости n измерений и одной изменяемости одного измерения [1])

3

Теперь я покажу, как, обратно, изменяемость, связанная с некоторой данной областью, может быть разложена на изменяемость одного измерения и изменяемость меньшего числа измерений. Для этой цели представим себе переменную точку на некотором многообразии одного измерения (на этом последнем отсчет ведется от определенной начальной точки, и различные результаты измерения сравнимы между собой) и вообразим, что для каждой точки данного многообразия указывается некоторое положение упомянутой переменной точки с сохранением непрерывности; другими словами, на данном многообразии указывается некоторая непрерывная функция точки и притом такая, которая на некоторой части данного многообразия не может оставаться постоянной [2]). В таком случае всякая система точек, в которых

---

[1]) «Изменяемость»— Veränderlichkeit. Этот термин Риман употребляет как синоним Mannigfaltigkeit, с целью облегчения правильного понимания. (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии»*.)

[2]) Нужно напомнить, что у Римана «точка» не есть часть «кривой» или «поверхности», «кривая» не есть часть «поверхности» и т. д. Вообще под «частью» многообразия подразумевается принадлежащее ему многообразие того же измерения. (*Ред. сб. «Об основании геометрии»*.)

функция сохраняет постоянное значение, образует непрерывное многообразие меньшего числа измерений, чем данное. Эти многообразия при изменении значения функции непрерывно переходят одно в другое; поэтому можно считать, что из одного из них получаются все остальные, причем происходит это, вообще говоря, так, что каждая точка одного переходит в определенную точку другого (случаи исключения, исследование которых существенно, здесь оставляются в стороне). В итоге определение положения на данном многообразии приводится к определению числового значения просто протяженной величины и определению положения на многообразии, протяженность которого меньшей кратности. Легко показать, что это многообразие будет иметь $n-1$ измерений, если данное многообразие их имеет n. Повторяя указанную операцию n раз, мы сводим определение положения на многообразии n-кратной протяженности к определению числовых значений n просто протяженных величин, т. е. определение положения на данном многообразии (если только такое определение возможно) — к указанию конечного числа числовых данных. Впрочем, существуют и такие многообразия, для которых определение положения требует указания бесконечного ряда или даже непрерывного множества числовых данных. Примером такого рода могут служить многообразия, образованные функциями в данной области, многообразия, образованные контурами геометрических фигур, и т. п. [1])

II. МЕРООПРЕДЕЛЕНИЕ, ВОЗМОЖНОЕ НА МНОГООБРАЗИИ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ, ЧТО ЛИНИИ ИМЕЮТ ДЛИНЫ, НЕЗАВИСИМЫЕ ОТ ИХ ПОЛОЖЕНИЯ, ТАК ЧТО КАЖДАЯ ЛИНИЯ ИЗМЕРИМА ПОСРЕДСТВОМ КАЖДОЙ

После того как построено понятие n-кратно протяженного многообразия и установлено в качестве существенного признака n-мерности, что определение положения на многообразии приводится к определению числовых значений n просто протяженных величин, мы перейдем теперь ко второму из поставленных выше вопросов, а именно к исследованию метрических отношений, возможных на таком многообразии, и к выяснению условий, которые являются достаточными для установления этих отношений. Метрические отношения могут быть исследуемы посредством отвлеченных величин и поставлены во взаимную связь с помощью формул; однако при некоторых предположениях их можно свести

[1]) Можно сказать, что Риман здесь имеет в виду «функциональные многообразия»: неудобно сказать «функциональные пространства», так как «пространство» у Римана имеет более узкий смысл, чем в наше время. (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии».*)

к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают определенные геометрические представления, и, следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме. Поэтому, хотя (чтобы стоять на твердой почве) и нельзя вовсе избежать абстрактного исследования с помощью формул, все же результаты этого исследования будут здесь представлены, если можно так выразиться, в геометрическом одеянии. Для того и другого прочное основание заложено в знаменитом сочинении о кривых поверхностях г. тайного советника Гаусса.

1

Мероопределение подразумевает независимость величин от местоположения. Эта независимость может быть понимаема в различных смыслах: первое допущение, которое естественно принять и которое я здесь подвергну дальнейшему рассмотрению, заключается в том, что длины линии не зависят от их положения, так что каждая линия измерима посредством каждой. Если определение положения приведено к определению величин, т. е. положение точки на данном n-кратно протяженном многообразии определяется n переменными величинами x_1, x_2, x_3 и т. д. до x_n, то для определения линии нужно задать величины x как функции некоторой одной переменной. Тогда задача заключается в том, чтобы указать математическую формулу для длины линий. В таком случае неизбежно подразумевать, что каждая из величин x может быть выражена через некоторую единицу. Поставленную задачу я буду исследовать только при некоторых ограничениях. Во-первых, ограничусь рассмотрением таких линий, для которых отношения величин dx (взаимно соответствующих приращений величин x) изменяются непрерывно. Тогда можно разбить линии на такие элементы, в пределах которых отношения величин dx допустимо считать постоянными, и задача наша сводится к тому, чтобы указать общую формулу для линейного элемента ds, выходящего из любой данной точки; эта формула должна, следовательно, содержать величины x и величины dx. Во-вторых, я допущу, что длина линейного элемента остается неизменной с точностью до величин второго порядка, если все его точки испытывают одно и то же бесконечно малое перемещение; отсюда, в частности, вытекает, что, когда все величины dx увеличиваются в одно и то же число раз, то и линейный элемент ds увеличивается во столько же раз [1]). При сделанных допущениях линейный элемент

[1]) Эту мысль удается расшифровать, если сделать допущение, что Риман молчаливо предполагает, что «длина» линейного элемента, т. е. расстояние ρ_{AB} между его конечными точками A и B, удовлетворяет требованию

$$\rho_{AB}=\rho_{AC}+\rho_{CB}.$$

Обозначим через $F(x, dx)$ расстояние между точками x и $x+dx$; тогда, сможет быть произвольной однородной функцией первой степени от величин dx, которая не изменяется, когда все величины dx меняют знаки, и в которой коэффициенты являются непрерывными функциями величин x.

Чтобы прийти к простейшим возможным случаям, я сначала нахожу формулу для $(n-1)$-кратно протяженных многообразий, отстоящих от начальной точки линейного элемента повсюду на одно и то же расстояние, т. е. ищу непрерывную [1]) функцию точки, которая отличает одно из таких многообразий от другого. Такая функция должна будет во все стороны от начальной точки или уменьшаться, или увеличиваться; я предположу, что она во все стороны увеличивается и, следовательно, в самой точке имеет минимум. Тогда, если только ее первые и вторые производные конечны, дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль, а дифференциал второго порядка не может становиться отрицательным; я предположу, что он всегда положительный. Это дифференциальное выражение второго порядка остается постоянным, когда ds остается постоянным, и возрастает в квадратном отношении, когда величины dx и, следовательно, также и ds увеличиваются в одно и то же число раз; поэтому оно $= \mathrm{const}\cdot ds^2$ и, значит, $ds =$ квадратному корню из всегда положительной целой однородной функции второй степени величин dx с коэффициентами — непрерывными функциями величин x. В частности, для пространства, если определять положение точки прямоугольными координатами, мы имеем: $ds = \sqrt{\Sigma\,(dx^2)}$; пространство, следовательно, подпадает под этот простейший случай. Случай, который можно было бы назвать следующим по простоте, соответ-

---

согласно сделанному явно предположению, с точностью до величин высших порядков будем иметь

$$F\,(x + \delta x,\ dx) = F\,(x,\ dx).$$

Отсюда следует при n целом

$$F\,(x,\ n\,dx) = \sum_{m=1}^{n} F\,(x + \overline{m-1}\,dx,\ dx) = nF\,(x,\ dx),$$

и дальше, по непрерывности, получается для всех положительных λ

$$F\,(x,\ \lambda\,dx) = \lambda F\,(x,\ dx).$$

Точно так же, дальше, из требования

$$\rho_{AB} = \rho_{BA}$$

вытекает

$$F\,(x,\ -dx) = F\,(x - dx,\ dx) = F\,(x,\ dx).$$

(*Ред. сб. «Об основаниях геометрии».*)

[1]) «Непрерывность» Риман здесь понимает в смысле Эйлера и, как можно судить из дальнейшего изложения, представляет рассматриваемую им функцию разложенной в степенной ряд. Об этом же свидетельствует упоминание (см. несколько выше) о коэффициентах. (*Ред. сб. «Об основаниях геометрии».*)

ствует тем многообразиям, в которых линейный элемент представляется в виде корня четвертой степени из дифференциального выражения четвертой степени. Исследование этого более общего типа многообразий, правда, не потребовало бы введения каких-либо существенно новых принципов, но связано было бы со значительной потерей времени и едва ли позволило бы представить учение о многообразиях в особо своеобразном освещении; притом результаты не смогли бы быть сформулированы геометрически. Поэтому я позволяю себе ограничиться многообразиями, для которых линейный элемент задается как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени.

Дифференциальное выражение рассматриваемого типа может быть преобразовано в другое выражение подобного типа, если n зависимых переменных приравнять некоторым функциям от n новых независимых переменных. Но таким образом нет возможности преобразовать всякое дифференциальное выражение во всякое: действительно, наше выражение содержит $n\,\frac{n+1}{2}$ коэффициентов, являющихся произвольными функциями независимых переменных; при введении же новых переменных мы сможем удовлетворить только n соотношениям, так что лишь n коэффициентов примут данные заранее значения. Поэтому $n\,\frac{n-1}{2}$ остальных коэффициентов зависят от природы исследуемого многообразия, и для установления отношений между ними требуются еще $n\,\frac{n-1}{2}$ функций точки на многообразии.

Те многообразия, для которых, как для плоскости и пространства, линейный элемент может быть приведен к виду $\sqrt{\Sigma\,(dx)^2}$, образуют частный случай изучаемых нами многообразий; они, без сомнения, заслуживают особого наименования, и потому я буду многообразия, для которых квадрат линейного элемента приводится к сумме квадратов независимых дифференциалов, называть плоскими.

Для того чтобы было легче обозреть существенные особенности различных многообразий, представимых в указанной форме, необходимо устранить особенности, возникающие из формы представления, что достигается надлежащим выбором переменных, совершаемым по определенному принципу.

2

Именно, вообразим, что построена система кратчайших линий, выходящих из произвольной начальной точки; тогда положение рассматриваемой переменной точки определится, если будут указаны начальное направление кратчайшей линии, на которой она лежит, и расстояние ее от начальной точки, отсчитываемое по этой кратчайшей линии; достаточно, следовательно, задать отношения величин dx^0, т. е. величин dx в начале кратчайшей линии, и длины s этой линии. Но вместо dx мы введем линейные комбинации $d\alpha$, составленные из них таким образом, чтобы в начальной точке квадрат линейного элемента равнялся сумме их квадратов; независимыми переменными тогда будут: величина s и отношения величин $d\alpha$; и, наконец, вместо $d\alpha$ введем такие пропорциональные им величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы сумма их квадратов равнялась s^2. После введения этих переменных для бесконечно малых значений x квадрат линейного элемента примет вид Σdx^2, причем член следующего порядка будет однородным выражением второй степени от $n\frac{n-1}{2}$ величин $(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$, $(x_1\,dx_3 - x_3\,dx_1)$, ..., т. е. этот член будет уже бесконечно малой величиной четвертого порядка. Отсюда следует, что мы получим конечную величину, если разделим эту величину на квадрат площади бесконечно малого треугольника, в вершинах которого переменные имеют значения $(0, 0, 0, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Эта величина сохраняет неизменное значение, поскольку величины x и dx содержатся в одних и тех же бинарных линейных формах или же поскольку обе кратчайшие линии от значений 0 к значениям x и от значений 0 к значениям dx лежат в одном и том же плоском элементе, и зависит, следовательно, только от местонахождения и направления этого элемента. Она, очевидно, равна нулю, если рассматриваемое многообразие плоское, т. е. если квадрат линейного элемента приводится к виду Σdx^2 и может потому служить мерой того, насколько многообразие по данному плоскостному направлению отклоняется от плоского многообразия. Будучи умножена на $-{}^3/_4$, она становится равной той величине, которую г. тайный советник Гаусс назвал мерой кривизны поверхности. Уже раньше было отмечено, что для введения мероопределения на n-кратно протяженном многообразии, представимом в указанной выше форме, необходимо задать $n\frac{n-1}{2}$ функций точки; поэтому если в каждой точке задается мера кривизны, соответствующая каждому из $n\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений, то тем самым определяются и метрические отношения на многообразии. Исключительным представляется лишь тот случай, когда между мерами кривизны имеются тождественные соотношения (что, вообще говоря, не имеет места). Таким образом, на многообразиях, линейный элемент которых представляется как квадратный корень из дифференциального выражения второй степени, мероопределение может быть введено совершенно независимо от выбора переменных величин.

По совершенно аналогичному пути можно идти к поставленной цели и в том случае, если линейный элемент многообразия задается менее простым выражением, например в виде корня четвертой степени. В этом случае, вообще говоря, линейный элемент не может быть приведен к виду корня квадратного из суммы квадратов дифференциальных выражений, и в выражении для квадрата линейного элемента отклонение от плоскости было бы бесконечно малой величиной второго порядка, тогда как для ранее рассмотренных многообразий оно четвертого порядка. Уместно было бы сказать, что последние упомянутые многообразия являются «плоскими в бесконечно малых частях». Но наиболее важное с установленной нами точки зрения свойство этих многообразий, обусловливающее то, почему исключительно они одни здесь исследуются, заключается в том, что метрические отношения в случае двукратной протяженности допускают геометрическое истолкование посредством поверхностей, а в случае многократной протяженности могут быть сведены к рассмотрению метрических отношений на содержащихся в них поверхностях. К последнему замечанию необходимо теперь дать некоторые краткие пояснения.

3

При рассмотрении поверхностей следует различать внутренние метрические отношения, в которые входят лишь длины путей на самой поверхности, и отношения, характеризующие взаимное положение поверхностей и точек, лежащих вне их. От этих последних «внешних» отношений можно отвлечься следующим образом: станем изменять поверхности так, чтобы длины линий, на них лежащих, оставались неизменными, т. е. так, чтобы, будучи как угодно изгибаемы, поверхности не подвергались растяжениям или сжатиям, и все получаемые в результате изгибаний одна из другой поверхности пусть рассматриваются как одинаковые.

Так, например, цилиндрические или конические поверхности существенно не отличны от плоскости, так как могут быть получены из плоскости посредством одного лишь изгибания, причем внутренние метрические отношения остаются неизменными и все теоремы, касающиеся этих отношений, т. е. вся планиметрия, остаются в силе; напротив, названные поверхности существенно отличны от сферы, которую без растяжений нельзя превратить в плоскость. Согласно предыдущему, в каждой точке внутренние метрические отношения дважды протяженной величины (если только линейный элемент может быть представлен в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, что имеет место в случае поверхностей) характеризуются мерой кривизны. Оказывается, что в случае поверхностей этой величине можно дать наглядное истолкование: она равняется произведению двух главных кривизн в рассматриваемой точке; можно также сказать, что произведение ее на площадь бесконечно малого треугольника, составленного из кратчайших линий, равняется половине разности между суммой его углов и двумя прямыми углами (в долях радиуса). Первое определение подразумевало бы теорему: произведение главных радиусов кривизны при изгибании поверхности остается неизменным; второе — другую теорему: в одной и той же точке поверхности разность между суммой углов бесконечно малого треугольника и двумя прямыми углами пропорциональна площади треугольника. Чтобы дать геометрическое истолкование мере кривизны n-кратно протяженного многообразия в данной точке относительно данного через нее проходящего плоского элемента, нужно исходить из того, что кратчайшая линия, выходящая из данной начальной точки, определяется полностью, если указано ее начальное направление. Отсюда следует, что мы получим совершенно определенную поверхность, если продолжим все кратчайшие линии, выходящие из данной точки и имеющие начальные направления, лежащие в данном плоском элементе. Эта поверхность имеет в данной точке определенную меру кривизны, каковая и есть мера кривизны n-кратно протяженного мнообразия в данной точке относительно данного плоского элемента.

4

Прежде чем мы сделаем применение нашей теории к случаю пространства, необходимо еще изложить ряд соображений, касающихся общего случая плоских многообразий, т. е. таких многообразий, для которых квадрат линейного элемента представляется в виде суммы квадратов полных дифференциалов.

В случае плоского n-кратно протяженного многообразия мера кривизны в каждой точке относительно любого направления равна нулю; согласно предшествующему исследованию, для того чтобы метрические отношения были определены, достаточно знать, что в каждой точке относительно $n\,\frac{n-1}{2}$ плоскостных направлений (таких, что соответствующие меры кривизны независимы между собой) мера кривизны равна нулю. Многообразия, для которых мера кривизны везде равна нулю, представляют собой частный случай многообразий, для которых мера кривизны всюду постоянна. Многообразия с постоянной мерой кривизны могут быть характеризованы также тем свойством, что фигуры могут в них перемещаться без растяжений и сжатий. В самом деле, очевидно, что фигуры не смогли бы быть как угодно перемещаемы и вращаемы в многообразии, если бы мера кривизны не оставалась неизменной в каждой точке по любому направлению. С другой стороны, метрические отношения на многообразии полностью определяются мерой кривизны; поэтому если в одной точке по всем направлениям мера кривизны остается той же, что и во всякой другой точке, то во всякой точке можно выполнить те же построения, что и в начальной точке, так что на многообразии с постоянной мерой кривизны фигуры способны занимать совершенно произвольные положения. Метрические отношения на таких многообразиях зависят только от числового значения меры кривизны; по поводу аналитического представления я позволю себе заметить, что, если это числовое значение обозначено через α, выражение для линейного элемента может быть приведено к виду

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\sum x^2}\sqrt{\sum dx^2}.$$

5

Чтобы дать геометрическую иллюстрацию, рассмотрим поверхности с постоянной мерой кривизны. Легко убедиться, что поверхности, у которых кривизна положительная, всегда разворачиваются на сферу, радиус которой равен единице, деленной на корень квадратный из меры кривизны. Чтобы обозреть все множество этих поверхностей, придадим одной из них вид сферы, а остальным — вид поверхностей вращения, которые касаются этой сферы по экватору. Поверхности, у которых мера кривизны больше, чем у сферы, будут касаться сферы изнутри и будут иметь такой вид, как внешняя (отвернутая от оси) часть поверхности тора: их можно было бы развернуть на зоны сфер меньшего радиуса, но при разворачивании они покрыли бы зоны сфер больше одного раза. Поверхности с мерой кривизны меньшей, чем мера кривизны начальной сферы, получаются, если из сфер большего радиуса вырезать кусок, ограниченный двумя большими полукругами, и соединить линии разреза. Поверхность с мерой кривизны нуль будет цилиндр, касающийся сферы по экватору. Поверхности с отрицательной мерой кривизны будут касаться этого цилиндра извне и иметь такой вид, как внутренняя (повернутая к оси) часть поверхности тора.

Если захотим по всем этим поверхностям перемещать куски поверхности (как тела перемещаются в пространстве), то окажется, что для всех поверхностей такие перемещения возможны без растяжений и сжатий. Поверхности с положительной мерой кривизны можно изогнуть так, что произвольные перемещения кусков поверхностей смогут после этого осуществляться уже без изгибаний: достаточно развернуть их на соответствующие сферы. Для поверхностей с отрицательной мерой кривизны это невозможно. Кроме отмеченной независимости кусков поверхностей от положения, в случае поверхности с мерой кривизны нуль имеет место еще особого рода независимость направлений от положения, чего нет для других поверхностей.

III. ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОСТРАНСТВУ

1

Установим теперь условия, необходимые и достаточные для определения метрических отношений в пространстве. При этом будем исходить из изложенных выше общих результатов, касающихся мероопределения в n-кратно протяженной величине, и допустим независимость линий от положения и представимость линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени, т. е. допустим, что пространство «плоско в бесконечно малом».

Во-первых, как ясно из предыдущего, требуемые условия сводятся к тому, чтобы мера кривизны в каждой точке относительно трех плоскостных направлений равнялась нулю. Поэтому нужно считать, что мероопределение в пространстве задано, если установлено, что сумма углов всякого треугольника равна двум прямым.

Во-вторых, следуя Евклиду, допустим, что не только линии, но и тела существуют независимо от их положения в пространстве, откуда вытекает, что мера кривизны пространства всюду постоянна. В таком случае сумма углов в любом треугольнике определена, если определена в каком-нибудь одном.

Наконец, в-третьих, можно было бы, вместо того чтобы допускать независимость длины линий от места и направления, допустить независимость их длины и направления от места. Приняв эту точку зрения, мы приходим к тому, что перемещения или изменения местоположения являются комплексными величинами, выражающимися через три независимые единицы.

2

Излагая предшествующие соображения, мы начали с того, что отделили отношения протяженности (или отношения взаимного расположения) от метрических отношений, и пришли к заключению, что при одних и тех же отношениях протяженности мыслимы различные метрические отношения; затем установили системы простых метрических отношений, которыми полностью определяется метрика пространства и необходимым следствием которых являются все теоремы геометрии. Остается еще выяснить, обеспечиваются ли опытной проверкой эти простые отношения, и если обеспечиваются, то в какой степени и в каком объеме? Между отношениями протяженности и метрическими отношениями с этой точки зрения имеется существенное различие: именно, поскольку для отношений протяженности возможно лишь дискретное множество различных случаев, результаты опытной проверки не могут не быть вполне точными (хотя, с другой стороны, не могут быть вполне достоверными), тогда как для метрических отношений множество возможных случаев непрерывно, и потому результаты опытной проверки неизбежно неточные, какова бы ни была вероятность того, что они приближенно точны. Это обстоятельство имеет большое значение, когда речь идет о распространении эмпирического опыта за пределы непосредственно наблюдаемого — в направлении неизмеримо большого или неизмеримо малого: за пределами непосредственно наблюдаемого метрические отношения становятся все менее точными, чего нельзя сказать об отношениях протяженности.

При распространении пространственных построений в направлении неизмеримо большого следует различать свойства неограниченности и бесконечности: первое из них есть свойство протяженности, второе — метрическое свойство. То, что пространство есть неограниченное трижды протяженное многообразие, является допущением, принимаемым в любой концепции внешнего мира; в полном согласии с этим допущением область внешних восприятий постоянно расширяется, производятся геометрические построения в поисках тех или иных объектов, и допущение неограниченности ни разу не было опровергнуто. Поэтому неограниченности пространства свойственна гораздо большая эмпирическая достоверность, чем какому бы то ни было другому продукту внешнего восприятия. Но отсюда никоим образом не следует бесконечность пространства; напротив, если допустим независимость тел от места их нахождения, т. е. припишем пространству постоянную меру кривизны, то придется допустить конечность пространства, как бы мала ни была мера кривизны, лишь бы она была положительной. Если бы мы продолжили кратчайшие линии, начальные направления которых лежат в некотором плоскостном элементе, то получили бы неограниченную поверхность с постоянной положительной мерой кривизны, т. е. такую поверхность, которая в плоском трижды протяженном многообразии приняла бы вид сферы и, следовательно, является конечной.

3

Для объяснения природы вопросы о неизмеримо большом — вопросы праздные. Иначе обстоит дело с вопросами о неизмеримо малом. От той точности, с которой нам удается проследить явления в бесконечно малом, существенно зависит наше знание причинных связей. Успехи в познании механизма внешнего мира, достигнутые на протяжении последних столетий, обусловлены почти исключительно благодаря точности того построения, которое стало возможно в результате открытия анализа бесконечно малых и применения основных простых понятий, которые были введены Архимедом, Галилеем и Ньютоном и которыми пользуется современная физика. В тех же областях естествознания, где еще отсутствуют основные понятия, которые позволили бы произвести аналогичные построения, явления с целью установления причинных связей исследуются в пространственном бесконечно малом, насколько это осуществимо посредством микроскопа. Поэтому вопросы о метрических отношениях пространства в неизмеримо малом не принадлежат к числу праздных.

Если допустим, что тела существуют независимо от места их нахождения, так что мера кривизны везде постоянна, то из астрономических наблюдений следует, что она не может быть отлична от нуля; или если она отлична от нуля, то по меньшей мере можно сказать, что часть Вселенной, доступная телескопам, ничтожна по сравнению со сферой той же кривизны. Если же такого рода независимость тел от места их нахождения не отвечает действительности, то из метрических отношений в большом нельзя заключать о метрических отношениях в бесконечно малом: в таком случае в каждой точке мера кривизны может по трем направлениям иметь какие угодно значения, лишь бы в целом кривизна доступных измерению частей пространства заметно не отличалась от нуля. Еще более сложные соотношения имели бы место, если бы мы отказались от допущения о представимости линейного элемента в виде квадратного корня из дифференциального выражения второй степени. Эмпирические понятия, на которых основывается установление пространственных метрических отношений, — понятия твердого тела и светового луча, — по-видимому, теряют всякую определенность в бесконечно малом. Поэтому вполне мыслимо, что метрические отношения пространства в бесконечно малом не отвечают геометрическим допущениям; мы действительно должны были бы принять это положение, если бы с его помощью более просто были объяснены наблюдаемые явления.

Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенное в настоящей работе, именно, имеющие исходным пунктом общие понятия, служат лишь для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день.

Б. РИМАН

ФРАГМЕНТЫ ФИЛОСОФСКОГО СОДЕРЖАНИЯ* НАТУРФИЛОСОФИЯ

3. ТЯГОТЕНИЕ И СВЕТ

Данное Ньютоном объяснение движения падающих тел и небесных тел заключается в принятии следующих допущений.

1. Существуют бесконечное пространство, обладающее свойствами, указываемыми в геометрии, и весомые тела, изменяющие свое положение в нем не иначе, как непрерывно.

2. В любой момент всякая весомая точка имеет нечто, определенное по величине и направлению и обусловливающее ее движение (материя в состоянии определенного движения). Мерой движения является скорость [1]).

Объясняемые посредством этих допущений явления еще не ведут к допущению различных масс весомых тел.

3. В любой момент во всякой точке пространства существует нечто определенное по величине и направлению (сила ускорения), что сообщает находящейся там весомой точке — какова бы она ни была — определенное движение, складывающееся геометрически с движением, которым она уже обладает.

4. В каждой весомой точке существует нечто определенное по величине (абсолютная сила тяготения), что порождает во всякой точке пространства силу ускорения, обратно пропорциональную квадрату расстояния от этой весомой точки и пропорциональную присущей этой точке абсолютной силе тяготения; эта сила ускорения складывается геометрически со всеми другими силами ускорения, приложенными к этой точке [2]).

---

* Впервые опубликовано в сб. «Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass» (Тойбнер, Лейпциг) в 1876 г. (Здесь с незначительными исправлениями перепечатан отрывок из книги: *Б. Риман*, Сочинения, Гостехиздат, М.— Л., 1948, стр. 471—473.)

[1]) Если бы материальное тело было в пространстве одно, оно или не изменяло бы своего положения в нем, или же двигалось в пространстве по прямой линии с постоянной скоростью.

Этот закон движения не может быть обоснован принципом достаточного основания. То, что тело продолжает свое движение, должно иметь причину, которую следует искать во внутреннем состоянии материи.

[2]) Одна и та же весомая точка в двух различных местах претерпела бы изменения движения, которые по направлению совпали бы с силами, а по величине были бы пропорциональны силам. Отношение силы к изменению дви-

Существующую, согласно 3, в каждой точке пространства определенную по величине и направлению силу ускорения я пытаюсь объяснить движением некоей субстанции, наполняющей все бесконечное пространство, а именно, допускаю, что направление ее движения совпадает с направлением силы ускорения, а скорость ее пропорциональна величине силы ускорения. Эту субстанцию можно представлять себе как физическое пространство, точки которого движутся в геометрическом пространстве.

На основании этого допущения все воздействия весомых тел на весомые тела передаются в пустом пространстве посредством названной субстанции. Таким образом, формы движения, лежащие в существе света и теплоты, посылаемых небесными телами, суть не что иное, как формы движения этой субстанции. Но названные явления, именно тяготение и распространение света сквозь пустое пространство,— единственные, которые должны были бы быть объяснены только движением этой субстанции.

Я допущу дальше, что действительное движение субстанции в пустом пространстве составляется из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления тяготения, и из движения, которое должно быть допущено для объяснения явления света.

Дальнейшее развитие следствий, вытекающих из этой гипотезы, распадается на две части, поскольку требуется исследовать

1) законы движения субстанции, позволяющие дать объяснение явлений,

2) причины, объясняющие само возникновение этого движения.

Первая задача — математическая, вторая — метафизическая. По поводу последней я сразу же замечу, что движение субстанции не следует пытаться объяснять притяжением и отталкиванием ее частиц. Такого характера объяснения широко применяются в физике не вследствие их очевидности (особой разумности) и — кроме электричества и тяготения— не вследствие их особой легкости, а вследствие того обстоятельства, что закон всемирного тяготения Ньютона — вопреки ожиданиям его творца — так долго не допускал более глубокого объяснения [1]).

жения поэтому всегда одно и то же для определенной весомой точки. Но для различных весомых точек оно различно. Оно называется массой точки.

[1]) Ньютон говорил: «Мысль о том, чтобы способность возбуждать тяготение могла быть неотъемлемым, внутренне-присущим свойством материи, и чтобы одно тело могло воздействовать на другое через пустоту на расстоянии, без участия чего-то такого, что переносило бы действие и силу от одного к другому,— представляется мне столь нелепой, что нет, как я полагаю, человека, способного мыслить философски, кому она пришла бы в голову». См. третье письмо к Bentley.

В. КЛИФФОРД

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТЕОРИИ МАТЕРИИ*

(Резюме)

Риман показал, что как существуют разного рода линии и поверхности, так существуют и разного рода пространства трех измерений и что мы можем лишь опытным путем установить, какого рода то пространство, в котором мы живем. В частности, в рамках опытов на поверхности листа бумаги верны аксиомы геометрии на плоскости, но мы знаем, что в действительности лист испещрен множеством малых рубчиков и бороздок, на которых (поскольку полная кривизна не равна нулю) эти аксиомы несправедливы. Точно так же, утверждает он, хотя аксиомы стереометрии верны в рамках опыта для конечных участков нашего пространства, у нас все же нет оснований заключать, что они верны и для очень малых участков; и у нас были бы основания заключить, что для очень малых участков пространства они неверны, если бы это могло помочь в объяснении физических явлений.

Я хочу здесь указать, каким образом эти соображения могли бы быть применены к исследованию физических явлений. Я считаю:

1. Что малые участки пространства действительно *аналогичны* небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно: там несправедливы обычные законы геометрии.

2. Что это свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны.

3. Что такое изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем *движением материи*, будь она весомая или эфирная.

---

* On the Space-Theory of Matter, в книге: *Clifford W. K.*, Mathematical Papers, MacMillan, New York—London, 1968, стр. 21 (впервые статья опубликована в 1876 г.).

4. Что в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений, подчиняющихся (возможно) закону непрерывности.

Я предпринял попытку в общем виде объяснить на основе такой гипотезы законы двойного лучепреломления, но еще не получил определенных результатов, заслуживающих быть сообщенными.

В. КЛИФФОРД

ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ ТОЧНЫХ НАУК*

ГЛАВА IV. § 19. О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА

Главной темой этой главы было положение, а именно положение точки P относительно точки A. Это относительное положение естественным образом привело к рассмотрению геометрии вектора. Я исходил из той гипотезы, что всякое положение относительно и потому должно быть определяемо только путем процесса поступов. Относительность положения была постулатом, выведенным из обычных методов определения положения,— методов, действительно, всегда дающих положение относительное. *Относительность положения есть, таким образом, постулат, полученный из опыта.* Профессор Клерк Максвелл вполне выразил важность этого постулата в следующих словах:

«Все наше знание времени и пространства относительно. Кто не привык складывать слова, не заботясь об образовании мыслей, которые должны были бы им соответствовать, тот с легкостью отметит контраст между этим относительным знанием и знанием так называемым абсолютным и укажет на наше незнание абсолютного положения точки как на пример ограниченности наших способностей. Всякий, однако, кто попытался бы вообразить состояние ума, обладающего знанием абсолютного положения точки, будет потом всегда довольствоваться нашим относительным знанием» [1]).

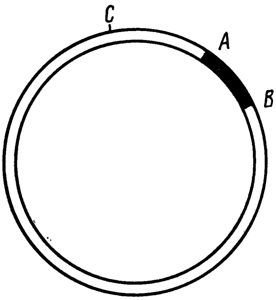
Установление того, насколько мы можем быть уверенными в справедливости наших постулатов в точных науках, представляется делом столь важным, что я попрошу читателя вернуться к рассмотрению нашего понятия о положении, хотя с несколько иной точки зрения. Я даже попрошу его попытаться исследовать то состояние ума, на которое указал профессор Клерк Максвелл в выше приведенном отрывке.

---

* Впервые опубликовано после смерти В. Клиффорда в 1885 г. под редакцией Р. Роу и К. Пирсона. Перепечатывается с незначительными исправлениями отрывок (стр. 163—171) из русского перевода книги, изданной в 1922 г.

[1]) Клерк Максвелл, «Материя и движение», § 18. (*См. Максвелл К.*, Материя и движение, Госиздат, М., 1924, § 18.— *Прим. ред.*)

Предположим, что у нас имеется трубка с чрезвычайно тонким отверстием, согнутая в виде круга, и что внутри ее находится червь длиной AB (черт. 89). В предельном случае, когда мы считаем отверстие трубки и самого червя бесконечно малыми, мы придем к рассмотрению пространства одного измерения. С того времени, как мы на трубке отметили *одну* хотя бы точку C, длины CA достаточно для определения положения червя. Если мы допустим, что червь не может познавать что-либо вне пространства



Черт. 89

его трубки, то он все же будет в состоянии сделать некоторые заключения относительно характера пространства, в котором он существует, лишь бы только он мог различить какую-либо метку C на поверхности его трубки. Таким образом червь заметил бы, когда именно он возвращается в точку C; он нашел бы, что это возвращение постоянно повторяется каждый раз, как он обойдет канал. Далее червь всегда будет иметь дело с одним и тем же *размером кривизны*, ибо все части круга имеют одну и ту же форму, а потому понятно, что он сделает допущение об *одинаковости* повсюду пространства, т. е. что пространство обладает во всех точках одними и теми же свойствами. Это допущение совершенно сходно с тем, которое мы делаем относительно постулатов и евклидовой геометрии: постулаты эти, как учит нас опыт, оказываются на практике справедливыми для пространства, нас непосредственно окружающего, и мы утверждаем, что они справедливы также для всего пространства; мы допускаем таким образом одинаковость нашего пространства трех измерений. Но червь имеет большее право на свой постулат, чем мы, потому что он побывал во всех частях своего пространства одного измерения.

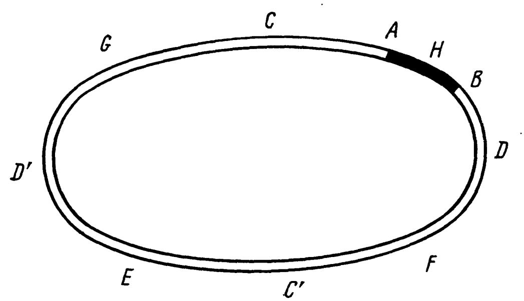
Кроме ограниченности и одинаковости своего пространства, червь может удостовериться в относительности положения и может определить свое положение длиной дуги, заключающейся между C и A. Внесем теперь изменение в нашу задачу и предположим, что червь не в состоянии ни сделать какой бы то ни было отметки на трубе, ни распознать ее. В таком случае очевидно, что червь не имел бы возможности убедиться, ограничено ли его пространство или нет; он никогда не будет знать, когда он окончил полное обращение по своей трубе. Так как червь будет иметь дело всегда с одной и той же величиной кривизны, он, естественно, будет соединять в своем представлении эту *кривизну с некоторыми физическими свойствами, а не с пространством, в котором он перемещался.* Таким образом, он вполне вправе был бы предположить, что его пространство бесконечно или что он движется в бесконечно длинной трубе. Если бы таким образом червь связывал кривизну с ее физическими условиями, то он не нашел бы никакой разницы между движением в пространстве постоянной кривизны (круг) и движением в таком пространстве, которое называется *гомалоидальным* или плоским (прямая линия); если бы он внезапно был перенесен из одного пространства в другое, то он приписал бы ощущение, происшедшее от разницы в кривизне, некоторому изменению, происшедшему в его физическом строении. Отсюда следует, что в пространстве одного измерения и постоянной кривизны всякое положение по необходимости относительно; и конечный или бесконечный характер пространства будет восприниматься, как постулат возможности определить положение в нем точки [1]).

Предположим, что наш червь движется в трубе другого рода, например в трубке той формы, той проекции круга, которую мы называли эллипсом (черт. 90). В такой трубке степень искривления не везде одна и та же; червь при перемещении от места наименьшей кривизны C к месту наибольшей D будет проходить через последовательно изменяющиеся кривизны, и в каждой точке H между C и D будет своя собственная кривизна. Итак, существует нечто такое, что стоит особо от определения положения H относительно C и что в то же время характеризует собой точку H. Это особая для каждого положения H степень кривизны, связанная с этой точкой; таким образом, положение точки H на CD определяется, раз мы знаем степень сгиба. Таким образом, червь может определить абсолютное положение в своем пространстве по степени сгиба, связанной с тем или другим положением. Червь в состоянии теперь оценить различие в сгибе и может даже образовать шкалу кривизны, возрастающую на равные величины. Нуль такой шкалы может быть по желанию червя взят где угод-

---

[1]) При этом предполагается, что пространство одного измерения и постоянной кривизны лежит в плоскости. Высказанные соображения неприменимы к такому пространству, как винтовая линия (пробочник), которая обладает постоянной кривизной, но не конечна.

но, и степени большего и меньшего сгиба могут быть отсчитываемы от этого нуля как положительные и отрицательные величины. На практике такой нуль может быть чисто воображаемым, т. е. представлять собой ту степень гнутия, которой не существует в пространстве червя. Так, например, в случае эллипса за нуль можно принять абсолютную прямоту, понятие, которое червь может представить как предел его опытного понимания степеней сгиба [1]). Таким образом, в пространстве «переменного сгиба»

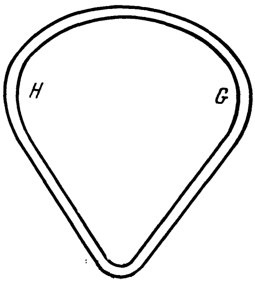


Черт. 90

или в пространстве, части которого не все одинаковы, положение не должно быть необходимо относительным. Понятие относительности тут уже не связывается с положением в пространстве и переносится на шкалу сгибов, построенную червем; относительность положения становится относительностью физических чувствований. В случае эллиптического канала, в силу симметрии, существует четыре точки одинакового сгиба, а именно: H, E, F и G, но между H, E и F, G существует следующее различие. Если червь движется кругом по каналу в направлении, обозначенном буквами $CHDE$, то в H или E он будет переходить от положений меньшего сгиба к положениям большего сгиба, и наоборот, в F или G — от положений большего сгиба к положениям меньшего. Придется тогда предположить, что только точки H и E тожественны, потому что лишь они обладают одной и той же степенью сгиба. Но мы могли откинуть даже и эти сомнения, предположив, что червь движется по грушевидному каналу, как на помещенном выше чертеже (черт. 91). В этом случае будет лишь две точки равного сгиба, а именно H и G, которые легко отличить друг от друга путем, указанным выше.

[1]) Физики могут припомнить при этом абсолютный нуль температуры.

Мы могли бы таким образом отсюда заключить, что в пространстве одного измерения и переменного сгиба положение не должно быть необходимо относительным. Высказывая такое суждение мы, однако, должны отметить следующее обстоятельство: мы допустили, что червь будет соединять в своем представлении изменение сгиба с изменением положения в его пространстве, но червь может воспринимать последнее либо как изменение физического состояния, либо как изменение ощущений. Отсюда



Черт. 91

следует, что червь легко может впасть в ошибку, приняв постулат о тожественности пространства во всех его частях и приписав все изменения в сгибе пространства, в действительности происходящие от изменения положения, некоторым периодическим изменениям, которым подвергается его организм (если червь передвигается вокруг по каналу равномерно), или непериодическим (если он движется каким бы то ни было образом взад и вперед). Подобные результаты могли бы получиться, если бы червь перемещался в пространстве одной и той же кривизны, причем эта кривизна, как целое, подвергалась бы изменениям в силу некоторого воздействия извне, или если бы пространство червя было бы пространством переменной кривизны, которое было бы также способно претерпевать во времени всякого рода изменения. Читатель может представить себе все эти случаи, предположив, что трубка сделана из гибкого материала. Червь может приписать изменение в степени сгиба или изменению характера пространства, или изменению его организма, не связанному с положением в пространстве. Мы приходим к заключению, что постулат об относительности положения не является необходимо обязательным для пространств одного измерения и переменного сгиба.

Переходя от пространства одного измерения к пространству двух измерений, мы получаем результаты совершенно сходного характера.

Если мы возьмем совершенно ровное (так называемое *гомалоидальное*) пространство двух измерений, т. е. плоскость, то в таком пространстве совершенно плоская фигура может быть перемещена куда бы то ни было без изменения ее формы. Если по аналогии с бесконечно тонким червем мы вообразим бесконечно тонкую камбалу, то такая рыба не будет в состоянии определить положения, раз ей не дано возможности наносить в ее плоском пространстве какие-либо метки. Как только она определила положение двух точек в ее плоскости, она будет в состоянии определить и *относительное* положение.

Предположим теперь, что вместо этого гомалоидального пространства двух измерений мы должны были бы взять совершенно тожественное во всех своих частях пространство, но пространство некоторой конечной кривизны, т. е. поверхность сферы. В таком случае растянем и изогнем нашу камбалу, чтобы она совпала с какой-нибудь частью шара. Так как поверхность сферы представляет собой во всех частях пространство одной и той же формы, то наша рыба может перемещаться по поверхности, не изменяя ни в каком отношении размеров своего сгиба и растяжения, какие мы нашли необходимым ей придать для того, чтобы она совпадала со сферой в одном каком-нибудь положении. Если бы рыба не могла провести межу на поверхности шара, она была бы совершенно не в состоянии определить положение; если она могла бы поставить по крайней мере две вехи, она была бы в состоянии определить относительное положение. Совершенно подобно червю в круговом канале, рыба, не имеющая вех, могла бы с полным правом предположить, что ее пространство бесконечно, или даже принять его за совершенно плоское (гомалоидальное) и приписать постоянство степени сгиба и растяжения физическим условиям.

Перейдем теперь к некоторому пространству двух измерений, которое не во всех своих частях тожественно,— к некоторому пространству, сходному, скажем, с той седлообразной поверхностью, которую мы рассматривали на стр. 77 [1]) — поверхностью, сгиб которой при переходе от одной части к другой изменяется. В этом случае рыба, прилегающая вплотную к одной части поверхности, не должна непременно совпадать со всякой другой частью. Все время, как рыба будет передвигаться по поверхности, должен непрерывно совершаться процесс изгибания и растяжения. Таким образом, каждая часть пространства двух измерений будет определяться своей особой величиной изгиба и растяжения, какие должна испытать рыба, чтобы совпасть с поверхностью, иначе

---

[1]) Ссылка на стр. 77 книги В. Клиффорда.— *Прим. ред.*

говоря, каждая часть пространства будет определяться тем, что обыкновенно называют *кривизной*. У поверхностей, обладающих известной степенью симметрии, непременно окажутся части равной кривизны, и в некоторых случаях наша рыба, быть может, будет в состоянии найти отличия этих точек друг от друга, подобно тому, как в случае эллиптического канала различал точки одинаковой кривизны червь. На поверхностях неправильной формы не должны, однако, непременно находиться такие точки одинаковой кривизны. Мы пришли, таким образом, к заключениям, сходным с теми заключениями, сделанными нами по отношению к пространству одного измерения, а именно в пространстве двух измерений, неодинаковом во всех своих частях, положение может быть определяемо абсолютно посредством кривизны. Нашей рыбе для определения своего абсолютного положения в пространстве пришлось бы только носить с собой при передвижении шкалу размеров изгиба и растяжения, соответствующих различным положениям на поверхности, но, с другой стороны, рыба легко могла бы приписать все эти изменения изгиба и растяжения изменениям ее организма, совершенно не зависящим от ее положения в пространстве. Таким образом, наша рыба могла бы уверить себя, что жизнь ее организма до чрезвычайности изменчива, что ее физические чувствования претерпевают непрерывные изменения совершенно независимо от геометрического характера того пространства, в котором она живет. Она могла бы предположить, что пространство обладает совершенной тожественностью во всех своих частях или даже переходит в «тоскливую бесконечность гомалоида» [1]).

В результате нашего рассмотрения пространств одного и двух измерений мы находим, что если эти пространства не одинаковы во всех своих частях (a fortiori не гомалоидальны), то при помощи их кривизны мы можем определить положение абсолютно. Но мы видим также, что существо, живущее в этих пространствах, с большой вероятностью приписало бы действие кривизны изменениям в его собственном физическом состоянии, ни в каком случае не связывая в своем толковании такое воздействие с геометрическим характером пространства.

Какой же урок могут дать нам эти соображения в применении к пространству трех измерений, в котором мы сами существуем? Начнем с того, что все наше пространство всюду совершенно *одно и то же*, как и тела при переходе из одного положения в другое. Этот постулат о тожественности пространства мы основываем на результатах наблюдения в той несколько ограниченной части

---

[1]) Предположим, что в этом случае пространством двух измерений будет плоскость. См. *Klifford W.*, Lectures and Essays, vol. I, p. 323.

пространства, относительно которой мы осведомлены [1]). Предположим, что наши наблюдения правильны, но из того, что одна часть пространства, которую мы знаем, в практических вопросах оказывается во всех своих частях тожественной, ни в коем случае не следует, что все пространство всюду одинаково [2]). Такое допущение является лишь догматическим расширением (на область известного) того постулата, который, быть может, уместен для пространства, над коим мы можем производить опыт. Построение таких догматических утверждений по отношению к неизвестному скорее дело средневекового теолога, чем современного ученого. На подобном основании наряду с постулатом о тожественности нашего пространства во всех его частях находится дальнейшее утверждение о том, что это пространство гомалоидально. Когда мы утверждаем, что наше пространство повсюду одно и то же, мы предполагаем, что оно обладает постоянной кривизной (подобно кругу, представителю пространства одного измерения, и шару, представителю пространства двух измерений). Предполагая, что пространство гомалоидально, мы допускаем, что кривизна его равна нулю (подобно кривизне прямой в пространстве одного измерения и кривизне плоскости в пространстве двух измерений). Это допущение принимает в нашей геометрии следующую форму: две параллельные плоскости или две параллельные прямые в одной и той же плоскости, т. е. плоскости или прямые, которые, будучи продолжены как угодно далеко, никогда не пересекаются, имеют *действительное* существование в нашем пространстве. Это действительное существование, быть осведомленными относительно которого мы, очевидно, не можем, мы вставляем как постулат; мы рассматриваем этот постулат как вывод, построенный на нашем опыте, обнимающем то, что совершается в ограниченной части пространства.

---

[1]) Может явиться мысль, что постулат о тожественности во всех частях нашего пространства имеет опору в том, что до сих пор не удалось дать какое-либо геометрическое представление о кривизне пространства. Но независимо от того, что человечество обыкновенно делает допущения относительно многих вещей, о которых не в состоянии составить геометрическое понятие (например, циклические точки на бесконечности у математиков), я должен заметить, что мы не можем ожидать, чтобы какое-нибудь существо было в состоянии составить себе геометрическое понятие о кривизне его пространства раньше, чем оно увидит его из пространства высшего измерения, т. е. на деле — никогда.

[2]) Следует отметить, что из факта *кажущегося* сохранения одной и той же формы телом, движущемся в той части пространства, с которой мы знакомы, не следует, что тело действительно сохраняет свою форму. Изменения формы либо могут быть неуловимы на тех расстояниях, на которые мы можем передвинуть тело, либо, если они имеют место, могут быть приписаны нами таким «физическим причинам», как теплота, свет или магнетизм, которые, быть может, служат лишь именами для изменений кривизны нашего пространства.

Мы можем принять как постулат, что та часть пространства, относительно которой мы осведомлены, на практике гомалоидальна, но, очевидно, мы не имеем никакого права догматически распространять этот постулат на все пространство. Постоянная кривизна, неулавливаемая восприятием в той части пространства, относительно которой мы только и можем производить опыты, или даже кривизна, изменяющаяся во времени совершенно неуловимым образом, вполне удовлетворяла бы всему тому, что наш опыт научил нас считать справедливым по отношению к пространству, в котором мы живем.

Но мы можем продолжить нашу аналогию на шаг дальше. Ведь наши воображаемые червь и рыба с большой готовностью приписывали результаты изменений в сгибе их пространств изменениям в их собственном организме; спросим же себя, не можем ли и мы подобным же образом рассматривать как изменение физического характера те действия, которые на самом деле обязаны своим происхождением изменениям в кривизне нашего пространства. Не окажется ли, что все или некоторые из тех причин, которые мы называем физическими, свое начало ведут от геометрического строения нашего пространства?

Вот те три рода изменений кривизны в пространстве, которые мы должны признать лежащими в пределах возможного.

I. Пространство наше, быть может, действительно, обладает кривизной, меняющейся при переходе от одной точки к другой,— кривизной, которую нам не удается определить или потому, что мы знакомы лишь с небольшой частью пространства, или потому, что мы смешиваем незначительные происходящие в нем изменения с переменами в условиях нашего физического существования, последние же мы не связываем с переменами в нашем положении. Мы должны допустить, что ум, который мог бы распознать эту изменяющуюся кривизну, обладал бы знанием абсолютного положения точки. Для такого ума постулат об относительности положения потерял бы всякое значение. Едва ли так трудно представить себе подобное состояние ума, как в том хотел уверить профессор Клерк Максвелл. Таким существом было бы лицо, способное распознавать так называемые физические изменения, которые в действительности являются изменениями геометрическими или, иначе говоря, возникают благодаря изменению положения в пространстве.

II. Наше пространство, может быть, действительно тожественно во всех своих частях (имеет одинаковую кривизну), но величина его кривизны может изменяться как целое во времени. В таком случае наша геометрия, основанная на тожественности пространства, сохранит свою силу для всех частей пространства, но перемены в кривизне могут произвести в пространстве ряд последовательных видимых физических изменений.

III. Мы можем мыслить наше пространство как имеющее повсюду приблизительно однородную кривизну, но легкие изменения кривизны могут существовать при переходе от одной точки к другой, в свою очередь, изменяясь во времени. Эти изменения кривизны во времени могут произвести явления, которые мы не так уж неестественно приписываем физическим причинам, не зависящим от геометрии нашего пространства. Мы можем зайти тут настолько далеко, что припишем изменению кривизны даже то, что «в действительности происходит в явлении, называемом нами движением материи». Мы ввели эти соображения относительно природы нашего пространства для того, чтобы освоить читателя с характером тех постулатов, которые мы предлагаем в точных науках. Эти постулаты не являются необходимыми и всеобщими истинами, как это слишком часто допускают. Это лишь аксиомы, основанные на нашем опыте относительно известной ограниченной области. Подобно тому, как в какой-нибудь области физического исследования мы отправляемся от опытов и основываем на них ряд аксиом, составляющих основание точной науки, так и в геометрии наши аксиомы, хотя менее очевидно, являются результатом опыта. На этом-то основании геометрия была названа в начале второй главы одной из естественных наук. Опасность догматического утверждения, что аксиома, основанная на опыте, относящемся к ограниченной области, сохраняет силу повсюду, предстанет теперь перед читателем с известной отчетливостью. Этот перенос может привести нас к тому, что мы совершенно проглядели бы или под чьим-либо влиянием отбросили бы возможное объяснение явлений. Гипотезам, гласящим, что пространство не гомалоидально, что его геометрический характер может меняться во времени, быть может, суждено или не суждено сыграть большую роль в физике будущего, но мы не вправе не рассматривать их как возможные объяснения физических явлений, потому что их можно противопоставить повсюду распространенному догматическому верованию в всеобщность известных геометрических теорем — верованию, образовавшемуся благодаря столетиям непрерываемого почитания гения Евклида.

«Что же касается меня лично, то я должен сказать, что мне, прямо или косвенно, особенно помогли работы Юма и Маха. Я прошу читателя взять в руки работу Маха: «Механика. Историко-критический очерк ее развития»— и прочитать рассуждения, содержащиеся в разделах 6 и 7 второй главы («Взгляды Ньютона на время, пространство и движение» и «Критический обзор ньютоновских представлений»). В этих разделах мастерски изложены мысли, которые до сих пор еще не стали общим достоянием физиков. Эти разделы представляют для нас особый интерес еще и потому, что содержат дословно цитированные отрывки из «Начал» Ньютона. Приведем несколько наиболее важных мест...»

«Приведенные строки показывают, что Мах ясно понимал слабые стороны классической механики и был недалек от того, чтобы прийти к общей теории относительности. И это за полвека до ее создания! Весьма вероятно, что Мах сумел бы создать общую теорию относительности, если бы в то время, когда он еще был молод духом, физиков волновал вопрос о том, как следует понимать постоянство скорости света. При отсутствии интереса к факту постоянства скорости света, вытекающему из электродинамики Максвелла — Лоренца, потребности Маха в критике оказались недостаточными, чтобы он смог почувствовать необходимость определения одновременности пространственно разделенных событий».

(А. Эйнштейн, «Эрнст Мах», 1916 г.) [1])

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 29—31.

Э. МАХ

МЕХАНИКА
Историко-критический очерк ее развития*

Глава II. РАЗВИТИЕ ПРИНЦИПОВ ДИНАМИКИ

6. ВЗГЛЯДЫ НЬЮТОНА НА ВРЕМЯ, ПРОСТРАНСТВО И ДВИЖЕНИЕ

1. В примечании, которое Ньютон поместил непосредственно за своими определениями, он выражает свои взгляды на время и пространство; на них нам необходимо остановиться несколько подробнее. Мы приведем оттуда дословно только важнейшие места, необходимые для характеристики этих взглядов.

«В изложенном выше имелось в виду объяснить, в каком смысле употребляются в дальнейшем менее известные названия. *Время*, *пространство*, *место и движение* составляют понятия общеизвестные. Однако необходимо заметить, что эти понятия обыкновенно относятся к тому, что постигается нашими чувствами. Отсюда происходят некоторые неправильные суждения, для устранения которых необходимо вышеприведенные понятия разделить на абсолютные и относительные, истинные и кажущиеся, математические и обыденные.

I. *Абсолютное*, *истинное и математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью.

Относительное, *кажущееся или обыденное время* есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного математического времени, как-то: час, день, месяц, год...» [1])

«...Естественные солнечные сутки, принимаемые при обыденном измерении времени за равные, на самом деле между собою неравны. Это неравенство и исправляется астрономами, чтобы

---

*) *Mach E.*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt, F. A. Brockhaus, Leipzig, 1904, S. 236.

[1]) Здесь и далее высказывания Ньютона цитируются по переводу *А. Н. Крылова* книги И. Ньютона «Математические начала натуральной философии», См. Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, М.— Л., 1936, стр. 30—36.—*Прим. перев.*

4—0919

при измерениях движений небесных светил применять более правильное время. Возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенною точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же *абсолютного* времени изменяться не может. Длительность или продолжительность существования вещей одна и та же, быстры ли движения (по которым измеряется время), медленны ли, или их совсем нет».

2. Создается впечатление, что в приведенных выше замечаниях Ньютон находится еще под влиянием средневековой философии, как будто бы он *изменил* своему намерению исследовать только *фактическое*. Если вещь A изменяется со временем, то это означает лишь, что условия вещи A зависят от условий некой другой вещи B. Колебания маятника происходят *во времени*, если его отклонения *зависят* от положения Земли. Так как при наблюдении маятника нам не обязательно принимать во внимание зависимость от положения Земли, а можно сравнивать его положение с какой-либо другой вещью (состояния которой, конечно, опять зависят от положения Земли), то легко возникает иллюзия, будто все эти тела несущественны. Да, мы можем, наблюдая маятник, отвлечься от всех остальных внешних вещей и обнаружить, что при каждом его положении наши мысли и ощущения другие. Вследствие этого кажется, что время есть нечто особенное, от течения которого зависит положение маятника, тогда как вещи, которые мы произвольно выбираем для сравнения, играют как будто случайную роль. Но мы не должны забывать, что все вещи неразрывно связаны между собой и что мы сами со всеми нашими мыслями составляем лишь часть природы. Мы совершенно не в состоянии *измерять временем* изменение вещей. Напротив, время есть абстракция, к которой мы приходим, наблюдая изменение вещей, вследствие того, что у нас нет *определенной* меры именно потому, что все меры взаимосвязаны. Мы называем равномерным такое движение, при котором равные приращения пути соответствуют равным приращениям пути другого движения, выбранного для сравнения (вращения Земли). Движение может быть равномерным относительно другого движения. Вопрос, равномерно ли движение *само по себе*, не имеет никакого смысла. Точно так же мы не можем говорить о неком «абсолютном времени» (независимо от всякого изменения). Такое абсолютное время не может быть измерено никаким движением и потому не имеет ни практического, ни научного значения; никто не вправе сказать, что он знает что-нибудь о таком времени, это пустое «метафизическое» понятие.

То, что наши представления о времени проистекают из взаимной зависимости вещей, было бы не трудно доказать психологически, исторически и филологически (на основании названий промежутков времени). В наших представлениях о времени выражается самая глубокая и самая общая связь вещей. Если движение происходит во времени, то оно зависит от движения Земли. Это не противоречит тому, что механические движения обратимы. Несколько переменных величин могут так зависеть друг от друга, что, когда в одной группе этих переменных происходят изменения, в остальных никаких изменений не будет. Природа подобна машине. Отдельные ее части взаимно обусловлены. Но если в машине положением одной части определяется положение всех других частей, то в природе соотношения более сложные. Эти соотношения можно лучше всего пояснить, взяв случай, когда n величин удовлетворяют меньшему числу уравнений n'. Если бы было $n = n'$, то природа не знала бы изменений. При $n' = n - 1$ одной величиной определялись бы все остальные. Если бы в природе существовало такое соотношение, то время было бы обратимо, но только при одном единственном движении. Истинное же положение вещей соответствует другой разности n и n'. Величины частично определяются одна другой, но сохраняют бо́льшую неопределенность или свободу, чем в рассмотренном случае. Мы сами чувствуем себя таким частично определенным, а частично неопределенным элементом природы. Поскольку лишь часть изменений в природе зависит от нас и может быть повернута нами вспять, время кажется нам необратимым и прошлое — ушедшим навсегда.

Если говорить кратко и общепонятно, то к представлению о времени мы приходим из-за взаимосвязи между содержанием поля наших воспоминаний и содержанием поля наших восприятий. Когда мы говорим, что время течет в определенном направлении, то это означает, что в определенном направлении протекают физические (а следовательно, и физиологические) процессы [1]). Все разности температур, электрического потенциала, разности всяких уровней, предоставленные самим себе, становятся не больше, а меньше. Рассмотрим два предоставленных самим себе соприкасающихся тела с разными температурами. В этом примере только бо́льшая разность температур в поле воспоминаний может встретиться с малыми температурами в поле восприятий, но не наоборот. Во всем этом выражается только своеобразная глубокая связь всего сущего. Но требовать здесь уже полной ясности — значит предвосхищать в духе спекулятивной философии все будущие результаты частных наук и, таким образом, постулировать завершение развития естествознания.

Подробное рассуждение о *физиологическом* времени, об ощущении времени и частично о *физическом* времени можно найти в другой моей книге («Beiträge zur Analyse der Empfindungen», Jena, 1886, S. 103—111, 166—168). Аналогично тому, как мы

---

[1]) О физиологической природе ощущений времени и пространства см. «Analyse der Empfindungen».

предпочитаем при изучении тепловых процессов в качестве меры температуры нашему ощущению тепла близко следующее ему произвольно выбранное (в термометре) изменение объема, которое не подвержено неконтролируемым возмущениям, характерным для органов чувств, мы по таким же причинам предпочитаем в качестве меры времени нашему ощущению его близко ему следующее произвольно выбранное движение (угол поворота Земли; путь, пройденный телом при свободном падении). Если понять, что речь идет только об установлении *взаимной зависимости* явлений, на что я указывал уже в 1865 г. («Ueber den Zeitsinn des Ohres», Sitzungsber. d. Wiener Akad.) и в 1866 г. (Fichte's Zeitschr. f. Philosophie), то всякие метафизические неясности исчезают. (См. Epstein, «Die logischen Principien der Zeitmessung», Berlin, 1887).

В другом месте (Principien der Wärmelehre, S. 51) я попытался показать, на чем основана естественная склонность человека гипостазировать ценные для него понятия, особенно те из них, к которым он пришел инстинктивно, не зная истории их развития. Рассуждения, приведенные там о понятии температуры, могут быть легко перенесены на понятие времени и объясняют происхождение ньютонова «абсолютного времени». Там также указывается на связь между понятием энтропии и необратимостью времени (стр. 338) и высказывается мысль, что энтропия мира, если бы ее вообще можно было определить, действительно была бы в некотором роде абсолютной мерой времени. Наконец, я должен еще указать здесь на рассуждения Петцольда («Das Gesetz der Eindeutigkeit», Vierteljahrschr. f. w. Philosophie, 1894, S. 146), на которых я остановлюсь в другом месте.

3. Подобные же взгляды Ньютон развивает не только на время, но и на пространство и движение. Опять приведем несколько характерных мест.

«II. *Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.

Относительное есть его мера или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая определяется нашими чувствами по положению его относительно некоторых тел и которое в обыденной жизни принимается за пространство неподвижное...»

«IV. *Абсолютное движение* есть перемещение тела из одного абсолютного его места в другое, *относительное* — из относительного в относительное же...»

«...Таким образом, вместо абсолютных мест и движений пользуются относительными; в делах житейских это не представляет неудобства, в философских необходимо отвлечение от чувств. Может оказаться, что в действительности не существует покоящегося тела, к которому можно было бы относить места и движения прочих...»

«*Проявления*, которыми различаются абсолютное и относительное движение, *состоят в силах стремления удалиться от оси вращательного движения*, ибо в чисто относительном вращательном движении эти силы равны нулю, в истинном же и абсолютном они больше или меньше, сообразно количеству движения. Если на длинной веревке подвесить сосуд и, вращая его, закрутить веревку, пока она не станет совсем жесткой, затем наполнить сосуд водой и, удержав сперва вместе с водою в покое, внезапным действием другой силы привести сосуд во вращение в сторону раскручивания веревки, то сосуд будет продолжать вращаться, причем это вращение будет поддерживаться достаточно долго раскручиванием веревки. Сперва поверхность воды будет оставаться плоской, как было до движения сосуда. Затем сосуд силою, постепенно действующею на воду, заставит и ее участвовать в своем вращении. По мере возрастания вращения вода будет постепенно отступать от середины сосуда и возвышаться по краям его, принимая впалую форму поверхности (я сам это пробовал делать)...»

«В начале, когда относительное движение воды в сосуде было наибольшее, оно совершенно не вызывало стремления удалиться от оси — вода не стремилась к окружности и не повышалась у стенок сосуда, а ее поверхность оставалась плоской и истинное вращательное ее дижение еще не начиналось. Затем, когда относительное движение уменьшилось, повышение воды у стенок сосуда обнаруживало ее стремление удалиться от оси, и это стремление показывало постепенно возрастающее истинное вращательное движение воды, и когда оно стало наибольшим, то вода установилась в покое относительно сосуда...»

«*Распознание истинных движений* отдельных тел и точное их разграничение от кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дело не вполне безнадежное. Основания для суждений можно заимствовать частью из кажущихся движений, представляющих разности истинных, частью из сил, представляющих причины и проявления истинных движений. Так, если два шара, соединенные нитью на данном друг от друга расстоянии, будут обращаться около общего их центра тяжести, то по натяжению нити можно будет узнать стремление шаров к удалению от оси вращения и по нему вычислить угловую его скорость. Если затем на противоположные стороны шаров заставить действовать равные силы, так чтобы они или увеличивали, или уменьшали круговращательное движение, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяжению нити может быть обнаружено увеличение или уменьшение скорости движения, и таким образом можно будет найти те стороны шаров, к которым надо приложить силы, чтобы увеличение скорости движения стало наибольшим, и, значит, найти те стороны шаров, которые обращены по направлению движения или по направлению, ему обратному. Когда эти передние и задние стороны будут найдены, то и движение будет вполне определено.

Таким способом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних, доступных чувствам признаков, к которым можно было бы относить положения шаров.»

4. Вряд ли есть необходимость отмечать здесь, что и в приведенных выше рассуждениях Ньютон изменяет своему намерению исследовать только *фактическое*. Никто не может ничего сказать об абсолютном пространстве и абсолютном движении, это нечто, лишь мыслимое, на опыте не обнаружимое. Все наши основные законы механики представляют собой, как это уже было подробно показано, данные опыта об относительных положениях и движениях тел. Их не следовало и невозможно было принимать без проверки в тех областях, в которых в настоящее время они признаны правильными. Никто не вправе распространять действие этих законов за пределы опыта. Такое распространение даже бессмысленно, так как никто не сумел бы найти ему применение.

Перейдем теперь к подробностям. Когда мы говорим, что тело K изменяет направление и скорость движения только под действием другого тела K', то мы никак не сможем узнать этого, если нет других тел A, B, C, . . ., относительно которых мы рассматриваем движение тела K. Следовательно, мы, собственно, признаем отношение тела K к телам A, B, C, ... Если же мы вдруг забудем о телах A, B, C, . . . и будем говорить о положении тела K в абсолютном пространстве, то мы совершим двойную ошибку. Во-первых, нам неоткуда было бы знать, как ведет себя тело K в отсутствие тел A, B, C, ... Во-вторых, у нас не будет никаких средств определить, как ведет себя тело K, и проверить свои высказывания о его поведении, которые поэтому не будут иметь научного смысла.

Два тела K и K', которые притягивают друг друга, сообщают друг другу ускорения, обратно пропорциональные их массам m и m', в направлении соединяющей их линии. В этом законе проявляется не только отношение тел K и K' друг к другу, но и их отношение к другим телам. Этот закон говорит не только о том, что тела K и K' испытывают взаимное ускорение $\varkappa\ (m+m')/r^2$, но и то, что тело K испытывает ускорение $-\varkappa m'/r^2$, а тело K' — ускорение $+\varkappa m/r^2$ вдоль соединяющей их линии, что может быть установлено только в присутствии других тел.

Движение тела K всегда может быть определено только по отношению к другим телам A, B, C, ... Так как в нашем распорядении всегда имеется достаточное число неподвижных одно относительно другого или только медленно изменяющих свое положение тел, ничто не заставляет нас ограничиваться лишь одним *определенным* телом, и мы можем исключать из рассмотрения то одно, то другое. Отсюда и возникло мнение, будто бы эти тела вообще несущественны.

Можно, конечно, себе представить, что изолированные тела A, B, C, . . . играют только случайную роль при определении движения тела K, а движение определяется *средой*, в которой находится тело K. Но тогда пришлось бы заменить этой средой абсолютное пространство Ньютона. Такого представления у Ньютона решительно не было. К тому же легко доказать, что воздух не является такой средой, определяющей движение. Поэтому пришлось бы представлять себе какую-нибудь другую среду, наполняющую мировое пространство, о свойствах и о динамическом отношении которой к находящимся в ней телам мы в настоящее время мало знаем. Само по себе такое положение не является невозможным. Новейшими гидродинамическими исследованиями установлено, что твердое тело в жидкости, свободной от трения, испытывает сопротивление только при *изменении* скорости. Правда, этот результат получен теоретически на основе представления об инерции, но его можно было бы рассматривать, наоборот, в качестве исходного положения. Даже если бы такое представление пока практически ничего не дало бы, все же можно было бы надеяться в будущем больше узнать об этой гипотетической среде, и она была бы с естественнонаучной точки зрения более ценной, нежели сомнительная идея абсолютного пространства. Если же мы примем во внимание, что мы не можем устранить изолированные тела A, B, C, . . ., а следовательно, не можем выяснить опытным путем их существенную или случайную роль и что эти тела пока что единственное, а также достаточное средство для определения направления движения и для описания механических явлений, то придем к выводу, что пока надо рассматривать движение как определяемое этими телами.

5. Рассмотрим теперь тот пункт, на котором, кажется, с большим правом основывает Ньютон различие между относительным и абсолютным движением. Если Земля находится в *абсолютном* вращении вокруг своей оси, то в ней существуют центробежные силы, она сплющивается, ускорение силы тяжести уменьшается на экваторе, плоскость качания маятника Фуко поворачивается и т. д. Все эти явления исчезают, если Земля покоится, а все остальные небесные тела сами абсолютно движутся около нее, так что в результате получается то же самое *относительное* вращение. Так, впрочем, происходит в том случае, если заранее исходят из представления об абсолютном пространстве. Но если не уходить от фактов, то надо помнить об *относительных* про-

странстве и движении. Если отвлечься от неизвестной и неподдающейся учету среды мирового пространства, то движения во Вселенной будут относительными и одинаковыми, согласно как учению Птолемея, так и учению Коперника. Оба учения одинаково *верны*, но только последнее проще и *практичнее*. Вселенная дана нам не *дважды* — с покоящейся и вращающейся Землей, а только *один раз* с ее единственным образом определяемыми относительными движениями. Поэтому мы не можем сказать, что было бы, если бы Земля не вращалась. Мы можем данный нам единственный случай интерпретировать по-разному. Но если наша интерпретация противоречит опыту, то это значит, что *мы* неверно интерпретируем. Основные законы механики вполне можно понимать таким образом, чтобы из них следовали центробежные силы и при относительных вращениях.

Опыт Ньютона с вращающимся сосудом с водой показывает только, что вращение воды относительно *стенок сосуда* не вызывает заметных центробежных сил, но что эти силы вызываются вращением по отношению к массе Земли и прочим небесным телам. Никто не может сказать, как протекал бы опыт, если бы стенки сосуда были толще и массивнее, пока наконец толщина их не достигла бы нескольких миль. Налицо перед нами лишь один опыт, и нам остается лишь привести его в согласие со всеми остальными известными нам фактами, но не с произвольными созданиями нашей фантазии.

6. У нас не может быть сомнений относительно значения закона инерции, если мы вспомним, как он был найден. Галилей сначала заметил изменение скорости и направления движения тела относительно каких-либо земных объектов. Большинство земных движений столь малы по продолжительности и протяженности, что вовсе нет необходимости принимать во внимание изменение скорости поступательного движения Земли относительно небесных тел и вращение последних. Только в случае далеко выстреленного снаряда, при колебаниях маятника Фуко и т. д. это необходимо принимать во внимание. Когда же Ньютон попытался применить принципы механики, найденные во времена Галилея, к планетным системам, он заметил, что планеты, насколько вообще можно об этом судить, по-видимому, сохраняют направление движения и скорость относительно очень удаленных как будто бы неподвижных относительно друг друга мировых тел, как это делают тела, движущиеся на Земле относительно неподвижных объектов Земли. Отношение земных тел к Земле может быть сведено к их отношению к удаленным небесным телам. Если бы мы стали утверждать, что о движущихся телах нам известно больше, нежели то данное опытом отношение их к небесным телам, то поступили бы *нечестно*. Поэтому когда мы говорим, что тело сохраняет направление своего движения и скорость *в простран-*

стве, то в этом заключается лишь краткое указание на то, что во внимание принимается *весь мир*. Тот, кто формулирует принцип, может позволить себе такое сокращение, если знает, что выполнение условий, указываемых в этом правиле, не вызывает трудностей. Но это сокращение ничего не дает, если затруднения возникают, например отсутствуют необходимые неподвижные одно относительно другого тела.

7. Вместо того чтобы относить движущееся тело K к пространству (к какой-нибудь координатной системе), будем рассматривать непосредственно его отношение к *телам* мира, посредством которых только и можно *определить* систему координат. Очень далекие друг от друга тела, которые движутся относительно других удаленных неподвижных тел с постоянными по величине и направлениям скоростями, изменяют свои взаимные расстояния пропорционально времени. Можно сказать также, что расстояния между всеми очень далекими телами изменяются пропорционально друг другу независимо от их взаимодействия или прочих сил. Два тела, которые движутся на небольшом расстоянии друг от друга с постоянной по величине и направлению скоростью относительно других неподвижных тел, находятся в более сложном отношении. Если мы будем рассматривать оба тела как зависимые друг от друга и обозначим через r расстояние между ними, через t — время и через a — константу, зависящую от направления и скорости движения, то получим

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{1}{r}\left[a^2-\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Очевидно, что гораздо *проще и нагляднее* рассматривать оба тела как независимые друг от друга и принимать во внимание неизменность направления и скорости их движения относительно других неподвижных тел.

Вместо того чтобы говорить: расстояние и скорость массы в пространстве остаются постоянными, можно употреблять выражение, что среднее ускорение массы μ относительно масс m, m', m'', . . ., находящихся на расстояниях r, r', r'', . . . , равно нулю, или

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum mr}{\sum m}=0$$

Второе выражение эквивалентно первому, если только принимать во внимание достаточно много масс, достаточно далеких и больших. При этом само собою отпадает взаимное влияние более близких малых масс, которым, по-видимому, нет дела друг до друга. Легко убедиться, что неизменные направление и скорость даны приведенным условием; для этого следует из массы μ как вершины построить конусы, вырезающие в мировом пространстве различные части, и применить наше условие к массам этих отдельных частей. Можно, конечно, положить

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum mr}{\sum m}=0$$

и для *всего* пространства, окружающего μ. Но это уравнение ничего не говорит о движении массы μ, так как оно применимо к любому ее движению, если масса μ равномерно окружена бесконечно большим количеством масс. Если две массы μ_1, μ_2 действуют друг на друга с силой, зависящей от их расстояния, то

$$\frac{d^2r}{dt^2}=(\mu_1+\mu_2)\,f\,(r).$$

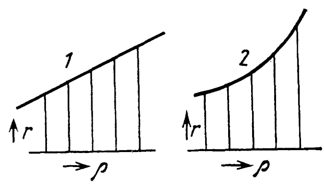
Но при этом ускорение центра тяжести обеих масс или среднее ускорение системы масс (согласно принципу противодействия) относительно масс мирового пространства равно нулю, т. е.

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\mu_1\frac{\sum mr_1}{\sum m}+\mu_2\frac{\sum mr_2}{\sum m}\right]=0.$$

Если принять во внимание, что время, входящее в ускорение, есть не что иное, как мера расстояний (или углов поворота) мировых тел, то можно увидеть, что даже в простейшем случае, когда мы будто бы рассматриваем взаимодействие только *двух* масс, *невозможно* отвлечься от остального мира. Природа не начинает с элементов, как вынуждены начинать с них мы. Впрочем, для нас счастье, если нам удается на некоторое время отвести взор от огромного целого и сосредоточиться на его отдельных частях. Но мы не должны забывать тотчас же заново исследовать то, что временно не учитывали, и внести дополнения и поправки.

8. Приведенные выше рассуждения показывают, что нет необходимости связывать закон инерции с каким-то особым абсолютным пространством. Напротив, мы видим, что как те массы, которые при обычном способе выражения действуют друг на друга, так и те, которые друг на друга не действуют, находятся в совершенно одинаковых отношениях ускорения к друг другу, и притом можно считать, что *все* массы находятся в отношениях друг с другом. То, что в отношениях масс главную роль играют *ускорения*, нужно принять как опытный факт; это не исключает попыток *объяснить* данный факт, сопоставив его с другими фактами, что может привести к новым точкам зрения. Во всех процессах природы решающую роль играют *разности* известных величин u. Разности температур, потенциалов и т. д. вызывают процессы, завершающиеся выравниванием этих величин. Известные выражения d^2u/dx^2, d^2u/dy^2, d^2u/dz^2, которыми определяется характер

выравнивания, могут служить мерой отклонения состояния какой-нибудь точки от среднего состояния окружающей среды, к которому стремится эта точка. Аналогичным образом могут быть поняты ускорения масс. Большие расстояния между массами, между которыми не действуют какие-нибудь особые силы, изменяются *пропорционально друг другу*. Таким образом, если мы по оси абсцисс будем откладывать некоторое расстояние ρ, а по оси ординат — некоторое другое расстояние r, то получится прямая.



Фиг. 143

Тогда каждая ордината r, соответствующая некоторому значению ρ, представляет собой среднее соседних ординат. Если между телами действуют какие-нибудь силы, то ими определяется величина d^2r/dt^2, которую на основании сказанного выше можно заменить величиной $d^2r/d\rho^2$. Таким образом, силовым взаимодействием определяется *отклонение* ординаты r от *среднего соседних ординат*, и без силового взаимодействия такого отклонения не было бы. Надеюсь, что этого пояснения достаточно.

9. Выше мы пытались придать закону инерции выражение, отличное от обычного. Оно дает то же, что и обычное, коль скоро существует достаточное число тел в мировом пространстве, кажущихся неподвижными. Оно так же легко применяется и сталкивается с теми же трудностями. В одном случае мы не можем получить абсолютное пространство, а в другом — нашему исследованию доступно лишь ограниченное число масс и поэтому указанное суммирование не может быть доведено до конца. Соответствовало ли бы новое выражение закона инерции положению вещей, когда звезды протекали бы одни сквозь другие, неизвестно. Более общий опыт не может быть выведен из имеющегося у нас более частного опыта. Нам остается лишь *подождать*, пока этот опыт у нас не появится. Может быть, мы приобретем его, расширив свои физико-астрономические познания где-нибудь в небесном пространстве, где происходят более быстрые и сложные движения, нежели в окружающем нас мире. Самым же важным результатом нашего рассмотрения является то, что *именно простейшие с виду законы*

механики имеют очень сложную природу, что они основаны на неполном и даже на немогущем быть полным опыте, что они, правда, практически достаточно проверены, чтобы, принимая во внимание устойчивость нашего окружения, служить основой математической дедукции, но сами они вовсе не могут рассматриваться как математические истины, а лишь как законы, которые не только могут, но и должны подвергаться непрерывной опытной проверке. Понимание этого очень важно, потому что оно содействует научному прогрессу.

10. Здесь я должен кратко остановиться на сочинениях о законе инерции, появившихся с 1883 г. и представляющих отрадное доказательство возросшего интереса к этому вопросу, сначала на сочинениях Штрейнтца (Streintz, «Physikalische Grundlagen der Mechanik», Leipzig, 1883) и Ланге (L. Lange, «Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes», Leipzig, 1886).

Штрейнтц прав, считая понятие «абсолютного поступательного движения» бессодержательным и объявляя в соответствии с этим известные аналитические выводы излишними. Что же касается *вращения*, то он вместе с Ньютоном считает возможным различать *абсолютное* и относительное вращение. С такой точки зрения для выражения закона инерции в качестве тела отсчета можно выбрать любое тело без абсолютного вращения.

Я *не могу* согласиться с такой точкой зрения. Для меня вообще существует *только* относительное движение (см. «Erhaltung der Arbeit», S. 48, Alinea 2; «Mechanik», S. 243, 4), и я *не могу* здесь допустить какое-нибудь различие между движением вращательным и поступательным. Если тело вращается относительно неба неподвижных звезд, то возникают центробежные силы, а если оно вращается относительно *другого* тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то центробежных сил нет. Я ничего не имею против, чтобы первое вращение называть *абсолютным*, если только не забывать, что это не означает ничего другого, кроме вращения *относительно неба неподвижных звезд*. Можем ли мы, держа неподвижно ньютонов сосуд с водой, вращать относительно него небо со звездами и доказать, что в этом случае центробежные силы отсутствуют?

Такой опыт неосуществим, но он и в принципе не имеет никакого смысла, так как *оба* случая неразличимы для наших органов чувств. Поэтому я считаю *оба* случая *одним и тем же* случаем, а различие, которое делает между ними Ньютон,— иллюзией (см. п. 5) [1].

Верно, конечно, что на воздушном шаре всегда можно ориентироваться в тумане при помощи тела, *не вращающегося* относительно неподвижного звездного неба. Но это не что иное, как

[1]) Стр. 55 данного сборника.— *Прим. перев.*

один из способов ориентироваться относительно неподвижного звездного неба; это просто механическое ориентирование вместо оптического.

Относительно критики моих взглядов Штрейнтцем я должен заметить следующее. Мое мнение *не следует* смешивать с мнением Эйлера (Штрейнтц, стр. 7, 50), которому, как это обстоятельно показал Ланге, вообще не удалось прийти к определенному и ясному взгляду. Я *не утверждал*, что в определении скорости тела принимают участие *только* отдаленные и не принимают участия близкие массы (Штрейнтц, стр. 7); я говорю только о влиянии, *не зависящем* от расстояния. Непредвзятый и внимательный читатель моих рассуждений вряд ли захочет утверждать вместе с Штрейнтцем (стр. 50), что я, не зная Ньютона и Эйлера, спустя столь длительное время все-таки пришел к взглядам, которые уже разделяли эти исследователи, но которые должны были быть уже отвергнуты частично ими, а частично другими исследователями. Даже мои замечания от 1872 г., которые только и были известны Штрейнтцу, не дают ему права утверждать это. Правда, эти замечания по существенным причинам очень кратки, но вовсе не настолько скудны, как это должно показаться человеку, который знает их только из критики Штрейнтца. Точку зрения, на которой стоит Штрейнтц, я уже тогда категорически отверг.

Сочинения же Ланге, мне кажется, принадлежат к лучшим работам по обсуждаемым вопросам. Его метод вызывает симпатию. Тщательный анализ и историко-критическое рассмотрение понятия движения имеют, как мне кажется, результаты непреходящей ценности. Я считаю большой заслугой ясное выдвижение и целесообразное *применение* принципа «частного определения», хотя сам принцип и соответственно применение его мне *не представляются* новыми. Принцип этот, собственно говоря, лежит в основе всякого измерения. Выбор единицы массы — это условность, число же, измеряющее массу,— результат исследования. *Каждый* естествоиспытатель, уяснивший себе, что он должен исследовать исключительно *взаимосвязь* явлений, как я давно сформулировал это (в 1865 и 1866 гг.), применяет этот принцип. Если, например («Mechanik», S. 231 fg.), отрицательное обратное отношение взаимных ускорений двух тел определено как отношение масс, то это, очевидно, просто *условность*, а *результат* исследования заключается в том, что указанное отношение *не зависит* от рода и порядка комбинации тел. Я мог бы привести здесь много аналогичных примеров как из теории теплоты и учения об электричестве, так и из других областей.

Для того чтобы с самого начала ввести наиболее простое и наглядное выражение, Ланге формулирует закон инерции следующим образом:

«Пусть три материальные точки P_1, P_2, P_3 одновременно выбрасываются из одной и той же точки пространства и тотчас же предоставляются самим себе. Как только мы убедились, что они не лежат на одной прямой, соединим каждую из них линией с *совершенно произвольной* четвертой точкой пространства Q. Линии соединения, которые обозначим через G_1, G_2, G_3, образуют трехгранный угол. Если этот угол *неподвижен и сохраняет свою форму* и если точка P_1 движется всегда вдоль ребра G_1, точка P_2 — вдоль ребра G_2, а точка P_3 — вдоль ребра G_3, то эти ребра можно рассматривать как оси некоторой координатной системы (инерциальной системы), относительно которой всякая свободная материальная точка перемещается по прямой линии. Пути, проходимые этими свободными точками в так определенных направлениях, пропорциональны друг другу».

Система координат, по отношению к которой три материальные точки движутся по прямым линиям, есть, по мнению Ланге (при указанных выше ограничениях), *просто условность*. То, что по отношению к такой системе координат и четвертая, и любая другая свободные материальные точки движутся по *прямой линии* и что пути, проходимые различными точками, остаются пропорциональными друг другу, есть *результат исследования*.

На первый взгляд нельзя отрицать, что закон инерции можно отнести к пространственно-временной координатной системе такого рода и таким образом выразить его. Хотя такая формулировка закона менее пригодна для практических применений, чем формулировка Штрейнтца, она более предпочтительна вследствие своих методологических преимуществ. Мне лично она особенно симпатична, так как много лет назад я был занят аналогичными попытками, от которых сохранились лишь остатки («Mechanik», S. 248, 7) [1]. Я оставил эти попытки, придя к убеждению, что во всех этих формулировках (то же самое можно сказать и о формулировках Штрейнтца и Ланге) безотносительность к неподвижному звездному небу и углу вращения Земли только *кажущаяся*.

В действительности же мы пришли к познанию закона инерции в теперешней области его применения, наблюдая небо неподвижных звезд и вращение Земли, а *без этих основных факторов нам бы и в голову не пришло* заниматься такими изысканиями («Mechanik», S. 247, 6) [2]. Рассматривать же отдельные изолированные точки, полностью игнорируя весь остальной мир, кажется мне недопустимым («Mechanik», S. 244, 248, 7) [3].

Представляется весьма спорным, двигалась ли бы (равномерно) *четвертая*, предоставленная самой себе, материальная точка

[1]) Стр. 57 данного сборника, п. 7.— *Прим. перев.*
[2]) Стр. 56 данного сборника, п. 6.— *Прим. перев.*
[3]) Стр. 55 и 57, п. 7, данного сборника.— *Прим. перев.*

относительно «инерциальной системы» Ланге по прямой, если бы можно было считать, что неба неподвижных звезд нет, или что оно не неизменно, или хотя бы что оно неизменно не с той точностью.

Самый естественный подход настоящего естествоиспытателя таков: сначала рассматривать закон инерции как достаточно приближенный, соотнести его пространственно с неподвижным звездным небом, а по времени с вращением Земли, и затем следует ожидать поправок или развития наших знаний на основе дальнейшего опыта, как я изложил это здесь («Mechanik», S. 251, 9) [1]).

11. Мне остается еще упомянуть работы по вопросу о законе инерции, опубликованные после 1889 г. Прежде всего, укажу изложение Пирсона (K. Pearson, «Grammar of Science», 1892, S. 477), которое, если оставить в стороне терминологию, согласуется с моим. Фридлендеры (B. Friedländer, J. Friedländer, «Absolute und relative Bewegung», Berlin, 1896) пытаются решить проблему экспериментально по схеме, предложенной мною на стр. 247 [2]), причем я только опасаюсь, что этой схемы количественно может оказаться недостаточно. Я вполне могу согласиться с рассуждением Иоганнессона (Johannesson, «Das Beharrungsgesetz», Berlin, 1896), но все-таки остается нерешенным вопрос, *чем определяется* движение одного тела, не ускоренное заметным образом относительно других тел. Полноты ради упомянем еще о преимущественно диалектических выводах Викэра (M. E. Vicaire, «Société scientifique de Bruxelles», 1895) и об исследованиях Мак-Грегора (J. G. MacGregor, «Royal Society of Canada», 1895). Последние исследования мало связаны с затронутыми здесь вопросами. Мне нечего возразить против взглядов Будде (Budde) на пространство как на некую среду (стр. 245) [3]), но только я думаю, что свойства этой среды все же должны подтверждаться физически еще и иным образом, а не приниматься ad hoc. Если все (кажущиеся) действия на расстоянии, ускорения, оказываются переданными через среду, то проблема вообще представляется в ином свете и решение ее, может быть, следует искать на основе точки зрения, изложенной выше (стр. 245, 9 [4])).

12. Обсуждение вопросов о значении закона инерции в настоящее время носит характер более общий и более свободный от предрассудков, нежели во время появления первого издания этой книги. Научно образованная публика с тех пор существенно изменилась. По этой причине в настоящее время (1904 г.) проблему можно было бы изложить заново, а элементы полемики, которые тогда были необходимы, можно было бы опустить. Но мне — что

---

[1]) Стр. 59 данного сборника, п. 9.— *Прим. перев.*
[2]) Стр. 56 данного сборника.— *Прим. перев.*
[3]) Стр. 55 данного сборника.— *Прим. перев.*
[4]) Стр. 59 данного сборника, п. 9.— *Прим. перев.*

нетрудно понять — желательно оставить старый текст без изменений; поэтому позволю себе изложить то, что я хотел бы сказать сегодня, в виде дополнения.

Тот взгляд, что «абсолютное движение» — пустое, бессодержательное и ненужное с научной точки зрения понятие,— взгляд, который двадцать лет назад вызывал у всех неприятное удивление, в настоящее время разделяется многими видными исследователями. В качестве решительных «релятивистов» я смог бы назвать: Сталло (Stallo), Дж. Томсона (J. Thomson), Людвига Ланге (Ludwig Lange), Лава (Love), Мак-Грегора (J. G. Mac Gregor), Пирсона (Pearson), Мансиона (Mansion), Клейнпетера (Kleinpeter). Число релятивистов быстро растет, и приведенный список, наверное, уже не полный. Можно надеяться, что скоро уже не будет ни одного выдающегося сторонника противоположного взгляда. Но если и без того малопонятные гипотезы абсолютного пространства и абсолютного времени не выдерживают более критики, то возникает вопрос: каким же образом мы можем придать понятный смысл закону инерции? В превосходной и ясно написанной статье Мак-Грегор (MacGregor, Philos. Magaz., XXXVI, 1893, p. 233) указывает два пути: 1) историко-критический, заново исследующий факты, на которых основан закон инерции, изучающий пределы его применимости и, может быть, дающий его новую формулировку; 2) допущение, что закон инерции в своей старой форме дает достаточно сведений о движении, и вывод правильной системы координат *из этого* движения.

Примером первого пути может служить изложенный здесь *мой* подход. Он также указывает на назревшую необходимость видоизменения формулировки закона инерции посредством расширения опыта. Второй путь, разумеется, *психологически* представляется более естественным уже ввиду того большого доверия, которым пользуется механика, как точнейшая из естественных наук. И действительно, исследователи чаще шли именно этим путем, с бо́льшим или меньшим успехом. Я сам прежде шел таким путем, пока не пришел к убеждению, что надо предпочесть другой. В. Томсон и Тэйт (W. Thomson, Tait, «Treatise on Natural Philosophy», Part 1, Vol. 1, 1879, § 249) замечают, что две материальные точки, вышедшие одновременно из одного и того же места и затем предоставленные самим себе, движутся так, что соединяющая их линия остается параллельной самой себе. Поэтому если четыре точки O, P, Q, R одновременно выбрасываются из одного и того же места и затем на них не действуют больше никакие силы, то соединяющие их линии OP, OQ, OR задают навсегда *зафиксированные* направления. Дж. Томсон пытается в двух статьях (J. Thomson, Proceed. R.S.E., 1884, p. 568 and 730) построить систему отсчета, соответствующую закону инерции; при этом он замечает, что допущения о равномерности и прямолинейности движения представляют собой *отчасти лишь условность*. Под влиянием Дж. Томсона Тэйт принимает участие в решении той же задачи при помощи кватернионов (см. пред. ссылку, стр. 743). На том же пути находится и Мак-Грегор в его «Presidential Adress» (Transact. R.S. of Canada, Vol. X, 1892, Sect. III, в особенности стр. 5 и 6).

Те же самые психологические мотивы двигали, вероятно, и Людвигом Ланге, которому посчастливилось больше всего. Он дал *правильное толкование* закона инерции Ньютона уже в 1885 г. (см. две его статьи в журнале Вундта «Philos. Studien», 1885). Во второй статье Ланге показывает, что для *одной* произвольно и даже криволинейно движущейся точки P_1 можно так задать систему координат, что в ней точка P_1 будет описывать заданную прямую G_1. Если в рассмотрение ввести *вторую* точку P_2, то всегда можно задать так движущуюся систему координат, что вторая точка P_2 в общем случае будет описывать прямую G_2 под углом к G_1, если только кратчайшее расстояние G_1G_2 не превышает кратчайшего расстояния, которое достижимо между точками P_1 и P_2. Система еще может вращаться вокруг P_1P_2. Если выбрать еще третью прямую G_3 так, чтобы все треугольники $P_1P_2P_3$ (которые могут образоваться присоединением третьей произвольно движущейся точки P_3) могли быть представлены точками на прямых G_1, G_2, G_3, то и точка P_3 сможет перемещаться вдоль G_3. Таким образом, максимум для трех точек система координат, в которой эти точки могут двигаться по прямым линиям, является *чистой условностью*. Так вот, важнейшее содержание закона инерции Ланге видит в том, что при помощи трех свободных материальных точек может быть задана система координат, относительно которой не только *четыре*, но и *любое* число свободных материальных точек движется прямолинейно, проходя взаимно пропорциональные отрезки пути. Следовательно, случай, представленный в природе, соответствовал бы *упрощению и ограничению* кинематически возможного многообразия. Такой подход весьма привлекателен, ибо всякое открытие новых закономерностей всегда означает сокращение мыслимых возможностей. Это следует добавить для пояснения упомянутой выше формулировки Ланге. Клейнпетер (Kleinpeter, «Archiv f. system. Philos.», VI, 1900, S. 461), стоящий на несколько иной точке зрения, объясняет содержание закона инерции следующим образом: «Можно так определить систему координат и некое нормальное движение, что относительно них все тела будут двигаться равномерно и прямолинейно, причем отклонение от этой нормы нельзя будет определить однозначно и в соответствии с нашими прежними физическими допущениями».

Недавно Ланге опубликовал критическую статью (L. Lange, Wundt's «Philos. Studien», XX, 1902), в которой он излагает, *как* можно было бы, согласно его принципам, ввести *новую* систему координат, если бы обычное грубое отнесение к неподвижному звездному небу оказалось больше непригодным вследствие более точных астрономических наблюдений. Между мной и Ланге нет различия во мнениях относительно *теоретической* формальной ценности заключений Ланге, а именно, что в настоящее время неподвижное звездное небо является единственной *практически* пригодной системой отсчета, а также относительно метода определения новой системы отсчета посредством постепенных поправок. Различие, которое еще остается и, может быть, сохранится, состоит в том, что Ланге подошел к вопросу как *математик*, тогда как я обратил внимание на его *физическую* сторону.

Ланге с известной уверенностью предполагает, что *его* выводы окажутся верными и при значительных движениях на небе. Я не могу разделить этой уверенности. Мне представляется, что наш окружающий мир с почти постоянными углами направлений на созвездия есть весьма частный случай, и я не осмелюсь на основе этого частного случая делать выводы о другом, сильно от него отличающемся. Хотя я и думаю, что астрономические наблюдения сделают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же допускаю, что закон инерции в той простой форме, которую ему придал Ньютон, имеет для нас, людей, лишь ограниченное и преходящее значение. Позволим себе еще более свободную точку зрения. Мы измеряем наше время по углу вращения Земли, хотя могли бы измерять его также и по углу поворота какой-нибудь другой планеты. Но мы не станем из-за этого считать, что течение *во времени* всех физических явлений тотчас же должно нарушиться, если случайно резко изменится угловая скорость вращения Земли или той удаленной планеты. Мы не считаем такую зависимость *непосредственной*, а, следовательно, временнáя упорядоченность является лишь внешней. Точно так же никто не станет думать, что в системе свободных от всякого воздействия, предоставленных самим себе и движущихся равномерно и прямолинейно тел, случайное возмущение *одного из них* (например, вследствие столкновения), участвующего в задании системы координат, повлекло бы тотчас же возмущение остальных тел. И здесь упорядоченность также чисто внешняя. Как мы ни должны быть благодарными за эту упорядоченность, особенно если она очищена от бессмысленности, естествоиспытатель все же будет стремиться к более полному познанию, к познанию *непосредственных* связей, например масс Вселенной. Идеалом для него было бы такое принципиальное представление, из которого в *равной* мере следовали бы ускоренные движения и движения по инерции. Образцом здесь может служить прогресс от открытия Кеплера к закону тяготения Ньютона и переход от последнего к физическому пониманию в духе электрического действия на расстоянии. Мы не должны даже заранее отвергать мысль, что массы, которые мы видим и благодаря которым мы как-то ориентируемся, может быть, вовсе не имеют решающего значения. Поэтому не следует преуменьшать также значение таких экспериментальных идей, как идеи г-д Фриндлендер, несмотря на то, что в них пока не видно непосредственного успеха. Хотя исследователь и хватается с радостью за быстро достижимое, ему все же иногда не вредно обращать свой взор в глубины неизвестного.

Когда печаталось настоящее издание этой книги, я нашел в недавно вышедшем юбилейном сборнике в честь Больцмана новое сообщение Неймана (C. Neumann) «О так называемом абсолютном движении». В нем, между прочим, имеется следующее замечание: «Так как все движения должны быть отнесены к системе альфа (системе инерции), она, очевидно, представляет некую косвенную связь между всеми процессами, происходящими во Вселенной, и, следовательно, содержит в себе, можно сказать, столь же загадочный, сколь и сложный универсальный закон». Я думаю, что с этим согласится всякий; это ясно выражено и в том, что выше упорядоченность не называлась непосредственной. Когда же Нейман чувствует необходимость в астрономическом определении системы альфа, то он становится на путь, который Мак-Грегор определил как второй и который выбрал также Ланге. Но я думаю, что естествоиспытатель всегда будет стремиться заменить косвенные связи прямыми. Далее, передо мной лежит свежо, ясно и очень популярно написанное сочинение В. Гофмана «Движение и инерция» (W. Hofmann, «Bewegung und Trägheit, Wien, 1904). Автору, по-видимому, неизвестны существующие здесь разногласия, и он ищет решение вопроса почти теми же способами, которые в свое время испробовал и я. И вновь вскрывается движущая сила, которая заключена в этой проблеме. Французские авторы по проблемам механики предпочитают держаться в стороне от подобного рода обременительных вопросов, делая строгое различие между физической и логической механикой. Первая дает экспериментальные основы для идеализированных предпосылок второй, логические следствия которой, конечно, остаются неприкосновенными, пока сохраняются предпосылки. Но так как главное значение механики состоит в ее применимости, то, несомненно, необходимо по мере развития теории пересматривать под ее влиянием факты, лежащие в основе физической механики. Если строго сохранять произведенное разделение, то это приведет к опасному застою в обеих частях. Каждая область естествознания нуждается в непрерывном взаимодействии теории и эксперимента. См. прекрасное сочинение Мансиона (P. Mansion) «Основные принципы геометрии, механики и астрономии». Мансион считает, впрочем как и мы, абсолютное движение абсурдом, а птолемееву и коперникову системы кинематически равноценными. Обсуждение какой-либо проблемы многими авторами имеет весьма существенное значение для выяснения и разрешения этой проблемы, освещает его разные стороны.

7. ОБЗОР И КРИТИКА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЬЮТОНА

1. Достаточно подробно обсудив представления Ньютона, мы можем теперь охватить общим взглядом их форму и порядок построения. Сначала Ньютон приводит несколько определений, за которыми следуют законы движения. Остановимся сначала на определениях.

«Определение 1. Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее...» «Это же количество я подразумеваю в дальнейшем под названиями тело или масса. Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом, как о том сказано ниже».

«Определение 2. Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и массе».

«Определение 3. Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

«Определение 4. Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

«Определение 5. Центростремительная сила есть та, с которою тела к некоторой точке, как к центру, отовсюду притягиваются, гонятся или как бы то ни было стремятся».

«Определение 6. Абсолютная величина центростремительной силы есть мера большей или меньшей мощности самого источника ее распространения из центра в окружающее его пространство».

«Определение 7. Ускорительная величина центростремительной силы есть мера, пропорциональная той скорости, которую она производит в течение данного времени».

«Определение 8. Движущая величина центростремительной силы есть ее мера, пропорциональная количеству движения, которое ею производится в течение данного времени».

«Для краткости эти величины сил можно называть силами движущими, ускоряющими и абсолютными и для отличия относить их к самим притягиваемым к центру телам, к месту тел и к центру сил, а именно: движущую силу — к телу, как стремление всего тела к центру, причем это полное стремление составляется из стремлений отдельных частиц тела; силу ускорительную — к месту тела в пространстве, как некоторую способность, распространенную центром на все места окружающего пространства и заставляющую приходить в движение тела, в этих местах находящиеся; абсолютную же силу — к самому центру, как заключающуюся в нем причину, без которой движущие силы не распространялись бы в окружающем пространстве; сказанною причиною может служить или какое-либо центральное тело (как, например, магнит в центре сил магнитных или Земля в центре сил тяжести), или что бы то ни было иное, хотя бы и ничем не обнаружимое. Эти понятия должно рассматривать как математические, ибо я еще не обсуждаю физических причин и места нахождения сил.

Таким образом, ускорительная сила так относится к движущей, как скорость к количеству движения. В самом деле, количество движения пропорционально скорости и массе, движущая же сила пропорциональна ускорительной и массе, ибо сумма действий ускорительной силы на отдельные частицы тела и составляет движущую силу его. Поэтому близ поверхности Земли, где ускоряющая сила тяжести для всех тел одна и та же, движущая сила тяжести, или вес, пропорциональна массе тела. Если подняться в такие области, где ускоряющая сила тяжести будет меньше, то и вес пропорционально уменьшится; вообще вес будет постоянно пропорционален массе тела и ускоряющей силе тяжести. Так, например, в тех областях пространства, где ускоряющая сила тяжести вдвое меньше, вес массы, вдвое или втрое меньшей, будет вчетверо или вшестеро меньше, нежели близ поверхности Земли. Далее я придаю тот же самый смысл названиям «ускорительные и движущие притяжения и натиски». Название же «притяжение» (центром), «натиск» или «стремление» (к центру) я употребляю безразлично одно вместо другого, рассматривая эти силы не физически, а математически, поэтому читатель должен озаботиться, чтобы, ввиду таких названий, не думать, что я ими хочу определить самый характер действия или физические причины происхождения этих сил, или же приписывать центрам (которые суть математические точки) действительно и физически силы, хотя я и буду говорить о силах центров и о притяжении центрами».

2. Определение 1, как уже было подробно показано, является лишь кажущимся определением. Следующее из него понятие массы не станет более ясным, если массу представить как произведение объема на плотность, ибо плотность сама по себе тоже масса, но только масса единицы объема. Действительное определение массы можно дать только исходя из динамических отношений между телами.

Против определения 2, которое поясняет только способ вычисления, нет никаких возражений. Зато определение 3 (инерции) оказывается излишним из-за определений силы 4—8, так как в них выявляется ускоряющая природа сил инерции.

Определение 4 вводит силу как причину ускорения тел или стремления тел к ускорению. Последнее обосновывается тем, что в случае, когда ускорение не может возникнуть, происходят другие соответствующие ему изменения: давление, деформация тел и т. д. Причина ускорения по направлению наружу от определенного центра объявляется в определении 5 центробежной силой, а в 6, 7, 8 разделяется на абсолютную, ускоряющую и движущую. Конечно, дело вкуса и формы выражать сущность понятия силы в одном или в нескольких определениях. В принципе, против определений Ньютона возражений нет.

Затем следуют аксиомы или законы движения, из которых Ньютон устанавливает три.

«1-й закон. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние».

«2-й закон. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует».

«3-й закон. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны».

К этим трем законам Ньютон присовокупляет несколько дополнений. В первом и втором дополнениях говорится о правиле параллелограмма, в третьем — о количестве движения, производимом противодействием, в четвертом — о независимости положения центра масс от действия противодействующих сил, в пятом и шестом — об относительном движении.

4. Легко видеть, что 1-й и 2-й законы уже даны исходными определениями силы. Согласно этим определениям, в отсутствие силы нет и ускорения и, значит, возможно лишь состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. После того как ускорение принято в качестве меры силы, будет совершенно ненужной тавтологией вновь говорить, что изменение движения пропорционально силе. Было бы достаточно сказать, что предпосланные определения не являются произвольными математическими аксиомами, но отвечают данным в опыте свойствам тел. Третий закон, видимо, содержит нечто новое. Но мы уже видели, что его нельзя понять без правильного определения понятия массы, а при определении самого понятия массы на основе только динамического опыта он становится излишним.

В дополнении 1 действительно содержится нечто новое. Однако в нем ускорения тела K, обусловленные различными телами M, N, P, рассматриваются как *с очевидностью* независимые друг от друга, тогда как это следовало четко охарактеризовать как *опытный факт*. Дополнение 2 — простое применение закона, высказанного в дополнении 1. Также и остальные дополнения представляются простыми дедуктивными (математическими) следствиями введенных ранее понятий и законов.

5. Даже *полностью* оставаясь на позициях Ньютона и совершенно отвлекаясь от упомянутых трудностей и неопределенностей, которые не устраняются, а лишь маскируются такими краткими названиями, как «время» и «пространство», можно заменить ньютоновские конструкции намного более простыми, методически более упорядоченными и удовлетворительными. На наш взгляд, они могли бы состоять в следующем.

а. Опытный закон. При некоторых условиях, устанавливаемых экспериментальной физикой, противостоящие тела придают друг другу противоположные ускорения в направлении соединяющей их линии. (Сюда уже включен закон инерции.)

б. Определение. Отношение масс двух тел равно взятому с обратным знаком обратному отношению их взаимных ускорений.

в. Опытный закон. Отношения масс не зависят от рода физических состояний тел (являются ли они электрическими, магнитными и т. п.), которыми обусловлено их взаимное ускорение, и остаются одинаковыми вне зависимости от того, определяются ли они прямо или косвенно.

г. Опытный закон. Ускорения, придаваемые различными телами A, B, C, ... телу K, не зависят друг от друга. (Отсюда прямо следует принцип параллелограмма сил.)

д. Определение. Движущая сила равна произведению величины массы тела на придаваемое ему ускорение.

Теперь можно было бы привести и другие произвольные определения вычислительных величин — «количества движения», «живой силы» и т. д., которые, однако, совсем не необходимы. Приведенные законы удовлетворяют требованию простоты и экономии, которое следует предъявлять к законам из экономически-научных соображений. Они также ясны и понятны, ибо ни один из них не вызывает сомнения в отношении того, что он означает, из какого источника берется и выражает ли данные опыта или произвольное утверждение.

6. В целом можно сказать, что Ньютон превосходно справился с отысканием понятий и законов, *достаточно надежных* для дальнейших построений. Его отчасти вынуждали к широкому подходу и тем самым к определенной расплывчатости представлений трудность и новизна предмета для его современников. В результате оказывается, например, что одна и та же закономерность механического явления формулируется многократно. Частично же ему самому заведомо не были вполне ясны значение и источник познания его законов. Но и это не может бросить ни малейшей тени

на его духовное величие. Тот, кому приходится основывать новую точку зрения, естественно, не может с самого начала столь уверенно разбираться в ней, как тот, кто без труда от него перенимает эту точку зрения. Он совершил достаточно, если обнаружил истины, на основе которых можно продолжать дальнейшее построение. Ведь с каждым новым следствием возникает новый взгляд на вещи, новая проверка точки зрения, ее расширение и разъяснение. Военоначальник может не более, чем первооткрыватель, на каждой вновь занятой им позиции провести детальное исследование того, на каком основании он ее занял. Величие задачи, требующей решения, для этого вообще не оставляет времени. Позднее все изменяется. Ньютон вполне мог ожидать, что следующие два столетия приведут к дальнейшему обоснованию и упрочению основ созданного им. Действительно, в период большего научного спокойствия принципы в большей мере привлекают философский интерес, чем то, что на их основе удалось построить. Тогда возникают вопросы, подобные рассмотренным здесь, к ответу на которые мы здесь, может быть, хотя бы немного приблизились. Выражая уважение и восхищение Ньютоном, мы присоединяемся к прославленному физику В. Томсону (лорду Кельвину). Нам трудно, однако, понять точку зрения сэра В. Томсона, что ньютоновские формулировки остаются и сегодня самыми лучшими и философски совершенными.

ПОЗНАНИЕ И ЗАБЛУЖДЕНИЕ*

ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

3. Потребность в глубоком гносеологическом выяснении основ геометрии заставила Римана [1]) в середине прошлого столетия поставить вопрос о природе пространства. Еще до этого Гаусс, Лобачевский и оба Бояи обратили внимание на эмпирически-гипотетическое значение известных основных допущений геометрии. Когда Риман рассматривает пространство как частный случай многократно протяженной «величины», он мыслит некоторый геометрический образ, который можно представлять себе наполняющим и все пространство, например координатную систему Декарта. Далее, Риман говорит, что положения геометрии нельзя вывести из общих понятий о величинах, но те свойства, которыми пространство отличается от других мыслимых величин трех измерений, могут быть заимствованы только из опыта: «Подобно всем фактам и эти факты не необходимы, а только эмпирически достоверны; они — гипотезы». Как основные допущения во всякой отрасли естествознания, так и основные допущения геометрии, к которым привел опыт, представляют собой *идеализации* этого опыта. В своем естественно-научном понимании геометрии Риман стоит на точке зрения своего учителя Гаусса. Гаусс высказал убеждение, «что мы не можем обосновать геометрию вполне a priori [2])...» «Мы должны смиренно признать, что, хотя число есть только продукт нашего ума, пространство есть реальность и вне нашего ума, которой мы не можем всецело приписывать закона a priori» [3]).

---

* Здесь с незначительными исправлениями перепечатывается частично одна глава из книги Э. Маха «Познание и заблуждение» (перевод второго немецкого издания под редакцией Н. Ланге), издание С. Скирмунта, М., 1909 г., стр. 389—420. Эта глава была впервые напечатана в журнале «The Monist», Vol. XIV, 1903.

[1]) См. мемуар Римана, помещенный в настоящий сборник, стр. 18.— *Прим. ред.*

[2]) Письмо Гаусса Бесселю от 27 января 1829 г.

[3]) Письмо Гаусса Бесселю от 9 апреля 1830 г. Выражение «число есть продукт или творение ума» с тех пор неоднократно употреблялось матема-

4. Каждый исследователь испытал, что познанию объекта, подлежащего исследованию, существенно помогает *сравнение* его с объектом родственным. Естественно, что и Риман ищет вещи, представляющие аналогию с пространством. Геометрическое пространство он рассматривает как непрерывное многообразие трех измерений, элементами которого надо считать точки, определяемые тремя координатами. Он находит, «что места чувственных предметов и цвета суть, пожалуй, единственные понятия (?), определения которых образуют многообразие многих измерений». К этой аналогии другие ученые прибавили еще новые и развили их далее, но, по моему мнению, не всегда с успехом [1]).

10. Нетрудно подняться до римановского представления непрерывного многообразия n измерений, и удается даже части такого многообразия реализовать и сделать наглядными. Пусть $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}$ суть какие-нибудь элементы (ощущаемые качества, вещества и т. д.). Если представить себе эти элементы соединенными во всех возможных отношениях, то каждое отдельное такое соединение может быть представлено следующим выражением:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_{n+1} a_{n+1},$$

причем коэффициенты α удовлетворяют уравнению

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1.$$

Так как n коэффициентов α можно выбрать произвольно, то совокупность соединений из $n + 1$ элементов представляет собой непрерывное многообразие n измерений [2]). В качестве координат какой-нибудь точки, элемента, этого многообразия можно рассматривать выражения формы α^m/α', или $F(\alpha^m/\alpha')$, например, $\log(\alpha^m/\alpha')$. Но при выборе определения расстояния или других понятий, аналогичных геометрическим, пришлось бы поступать

тиками. Но беспристрастное психологическое наблюдение учит нас, что образованию понятия числа в такой же мере кладет начало опыт, как образованию геометрических понятий. По меньшей мере прежде чем возникнет понятие о числе, должен существовать опыт, что в известном смысле *равноценные* объекты существуют *множественно и неизменно. И числовой эксперимент* играет выдающуюся роль в развитии арифметики.

[1]) Если устанавливают аналогию между высотой, интенсивностью и тембром звука, между цветом, насыщенностью и силой света, с одной стороны, и тремя измерениями пространства — с другой, то такие аналогии удовлетворят немногих. Тембр звука, как и цвет, зависит от многих переменных. Поэтому, если эта аналогия имеет вообще какой-нибудь смысл, то тембру и цвету должны соответствовать многие измерения. Ср. Benno Erdmann, Die Axiome der Geometrie, Leipzig, 1877.

[2]) Если бы шесть основных цветовых ощущений были совершенно независимы друг от друга, то система цветовых ощущений представляла бы собой многообразие пяти измерений, но так как они образуют три пары противоположных цветов, то эта система соответствует многообразию трех измерений.

весьма произвольно, если бы *опыт* о соответственном многообразии не учил нас, что известные метрические понятия имеют реальное значение и поэтому должны быть предпочитаемы. Так обстоит, например, дело в геометрическом пространстве с вытекающим из постоянства объема тел определением элемента расстояния $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, а в звуковых ощущениях — с упомянутым уже выше логарифмическим выражением. В большинстве случаев подобных искусственных построений отсутствуют такие опорные пункты, и все исследование оказывается поэтому бесплодным. Аналогия с пространством теряет вследствие этого в полноте, плодотворности и полезности.

11. Риман развил Гаусса еще и в другом направлении, исходя из исследования относительно кривых поверхностей. Меру кривизны данной поверхности в данной точке Гаусс [1]) выразил через $K = d\sigma/ds$, где ds обозначает элемент исследуемой поверхности, а $d\sigma$ — элемент поверхности сферы, принятой за 1, предельные радиусы которого параллельны предельным нормалям элемента ds. Эта мера кривизны может также быть выражена в форме $K = 1/\rho_1\rho_2$, где ρ_1, ρ_2 обозначают главные радиусы кривизны исследуемой поверхности в данной точке. Особый интерес представляют поверхности, мера кривизны которых имеет во всех точках одно и то же значение, поверхности *с постоянной* мерой кривизны. Если представлять поверхности как бесконечно тонкие, нерастяжимые, но сгибаемые тела, то поверхности с равной мерой кривизны могут при сгибании быть наложены друг на друга; так, например, можно плоский лист бумаги обернуть вокруг цилиндра или конуса, но этот лист бумаги не может быть наложен на поверхность шара. При этой деформации и даже при любом сгибании измерительные отношения длин и углов фигур, начерченных в *поверхности*, остаются без изменения, если только при измерении *не выходить* из двух измерений поверхности. Мера кривизны поверхности вовсе не зависит от формы последней в третьем измерении пространства, а только от ее *внутренних измерительных отношений*. Отсюда Риман пришел к мысли распространить понятие меры кривизны на пространство трех и больше измерений. В соответствии с этим он допускает возможность *конечных* беспредельных пространств с постоянной положительной мерой кривизны, соответственно беспредельной, но конечной шаровой поверхности двух измерений, между тем как, по нашему обычному представлению, бесконечное пространство соответствует бесконечной плоскости с мерой кривизны, равной нулю; наконец, третий род пространства соответствовал бы поверхностям с отрицательной мерой кривизны. Фигура, начерченная на поверхности некоторой постоянной кривизны, может быть перемещена без искажения

---

[1]) Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827.

только на *этой* поверхности; например, сферическая фигура может перемещаться только на этой сфере и плоская фигура — только в плоскости. Нечто подобное должно, по мысли Римана, существовать и для телесных фигур, для твердых тел. Как это далее развил Гельмгольц [1]), последние могли бы свободно передвигаться только в пространствах с постоянной мерой кривизны. Как кратчайшие линии в плоскости бесконечны, на поверхности же шара имеют, как большие круги сферы, некоторую конечную длину и замкнуты (при продолжении возвращаешься к исходной точке), так Риман представляет себе конечным, но беспредельным то, что в трехмерном пространстве положительной кривизны аналогично прямой линии и плоскости. Но здесь встречается некоторое затруднение. Если бы существовало понятие меры кривизны для четырехмерного пространства, то переход к более специальному случаю трехмерного пространства был бы понятен. Но переход от специального к более общему случаю заключает в себе нечто произвольное, и вполне естественно, что различные исследователи пошли здесь различными путями [2]) (Риман, Кронекер). Уже одно то обстоятельство, что для одномерного пространства — любой кривой линии — не существует меры кривизны в смысле ее *внутренней меры* и что эта мера кривизны является лишь в двумерном пространстве, возбуждает в нас вопрос, имеет ли вообще то, что аналогично этому в трехмерном пространстве, какой-нибудь смысл, и в каких пределах? Не впадаем ли мы здесь в иллюзию, оперируя символами, которым, может быть, вообще ничего действительного не соответствует, во всяком случае ничего наглядного, чем мы могли бы проверять и исправлять наши понятия?

Мы дошли теперь до высших и наиболее общих идей о пространстве и его отношениях к аналогичным многообразиям, которые возникли из взгляда Гаусса на эмпирическое обоснование геометрии. Но развитие этого взгляда имеет двухтысячелетнюю историю, основные факты которой нам удастся, может быть, лучше обозреть с высоты, на которой теперь стоим.

20. Таким образом, геометрия есть применение математики к опыту относительно пространства. Подобно математической физике, она становится дедуктивной точной наукой только тем, что объекты опыта изображает схематическими, идеализированными понятиями. Подобно тому как механика может утверждать постоянство масс или сводить взаимодействие тела к одним ускорениям лишь в *пределах ошибок наблюдения*, так и существование прямых, плоскостей, величины суммы углов треугольника и т. д. возможно утверждать лишь с той же оговоркой. Но так же, как физика

[1]) Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1868, 3 Juni.

[2]) См., например, *Kronecker*, Über Systeme von Funktionen mehrerer Variablen, Sitzungsben. d. Berl. Akad., 1869.

иногда оказывается вынужденной заменять свои идеализированные допущения другими, обыкновенно более общими, например постоянное ускорение падающего тела — ускорением, зависящим от расстояния, постоянное количество теплоты — переменным и т. д., так должна делать это и геометрия под давлением фактов или в виде попытки ради научного выяснения [1]). После сказанного перед нами явятся в правильном свете попытки Лежандра, Лобачевского и обоих Бояи, из которых младший находился, может быть, под косвенным влиянием Гаусса.

21. На попытках Швейкарта и Тауринуса, тоже современников Гаусса, мы останавливаться не будем. Работы Лобачевского были первыми, которые стали известны в широких кругах и оказали влияние (1829). Очень скоро вслед за этим обнародовал свою работу младший Бояи (1833), который во всех существенных пунктах сходился с Лобачевским, отличаясь только формой выводов. Судя по актам, теперь легко и в обилии доступным благодаря прекрасным изданиям Энгеля и Стаккеля [2]), можно предположить, что и Лобачевский предпринял свои исследования в надежде, что отрицание аксиомы Евклида приведет к противоречиям. Но когда это ожидание не оправдалось, у него хватило *интеллектуального мужества* сделать отсюда все выводы. Лобачевский излагает свои выводы в синтетической форме. Но мы можем представить себе те общие аналитические рассуждения, которые, по всей вероятности, подготовили построение его геометрии...

24. Итак, мы видим, что, допустив сходимость параллельных прямых, мы можем развить систему геометрии, свободную от внутренних противоречий. Правда, это допущение не подтверждается *ни одним* наблюдением доступных нам геометрических фактов и в такой мере противоречит нашему геометрическому инстинкту, что делает вполне понятным отношение старых исследователей, как Саккери и Ламберт. Наше представление, руководимое созерцанием и привычными евклидовскими понятиями, может только частями и постепенно приспособляться к требованиям геометрии Лобачевского. Мы должны при этом руководствоваться больше геометрическими *понятиями*, чем *чувственными образами* доступной нам небольшой пространственной области. Должно, однако, признать, что математические количественные понятия, при помощи которых мы самодеятельно изображаем факты геометрического опыта, не абсолютно соответствуют этим последним. Как и физические теории, геометрическая теория более *проста и точна*, чем то, собственно, может быть доказано опытом с его случай-

---

[1]) Разницу между геометрией и физикой Дюгем (La Téorie physique, стр. 290) считает основной и качественной, а я усматриваю здесь только разницу в степени.

[2]) *Engel F.*, Nikolai Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, Leipzig, Teubner, 1898.

ными уклонениями. Разные понятия могут в области, доступной наблюдению, *одинаково* точно выражать факты. Таким образом, должно отличать *факты от умственных* образов, которые они возбудили. Последние, т. е. понятия, должны быть лишь *согласованы* с наблюдением и, кроме того, логически не противоречить друг другу. Эти два требования могут быть, однако, осуществлены многообразно, и отсюда различные системы геометрий.

25. Из работ Лобачевского видно, что они представляют результат долголетнего и напряженного умственного труда, и можно предполагать, что он сначала должен был общими рассуждениями и аналитическими вычислениями выработать себе общую картину своей системы, прежде чем был в состоянии изложить в синтетической форме. Привлекательной эту тяжеловесную евклидовскую форму никак нельзя назвать, и, может быть, именно этой форме главным образом надо приписать то, что значение работ Лобачевского и Я. Бояи так поздно получило всеобщее признание.

26. Лобачевский развил только следствия, вытекающие из видоизменения пятого требования Евклида. Если же отвергнуть положение Евклида, что «две прямые не ограничивают пространства», то приходят к некоторой противоположности геометрии Лобачевского [1]). В отношении поверхностей это есть сферическая геометрия. Вместо евклидовских прямых линий мы имеем здесь большие круги сферы, которые все дважды пересекаются и каждая пара которых образует два сферических двуугольника. Здесь, следовательно, совсем нет параллелей. Возможность подобной геометрии в трехмерном пространстве (с положительной мерой кривизны) впервые указал Риман. Ее, по-видимому, не допускал Гаусс, может быть, из пристрастия к бесконечности пространства. Гельмгольц [2]), который развивал далее именно в физическом смысле исследования Римана, напротив, в *первой* своей работе оставил без внимания пространство Лобачевского, т. е. пространство с отрицательной мерой кривизны (с мнимым параметром k). Действительно, рассмотрение этого случая ближе математику, чем физику. Гельмгольц обсуждает здесь только случай Евклида с мерой кривизны, равной нулю, и пространство Римана с положительной мерой кривизны.

27. Итак, факты пространственного наблюдения мы можем изображать со всей доступной нам точностью как при помощи геометрии Евклида, так и при помощи геометрии Лобачевского и Римана, если только в двух последних случаях примем пара-

---

[1]) См. работу *De Tilly*, Essai su les principes fondamentaux de la géometrie et de la mécanique (Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 1880).

[2]) Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie, 1866. Wissenschaftliche Abhandlungen, II, стр. 610 и след.

метр k достаточно большим. До сих пор физики не имели оснований отказаться от допущения геометрии Евклида, т. е. $k = \infty$. По оказавшейся целесообразною привычке они придерживаются *простейших* предположений до тех пор, пока факты не принудят их к усложнению или видоизменению этих предположений. Это соответствует и точке зрения всех выдающихся математиков в отношении прикладной геометрии. Поскольку, однако, взгляды натуралистов и математиков в этих вопросах различны, объясняется это тем, что для первых физически данное имеет величайшую важность, геометрия же есть только привычное средство для его исследования, между тем как для последних именно эти вопросы представляют величайший специальный и в особенности гносеологический интерес. Но раз математик попытался изменить ближайшие и простейшие предположения, которые внушал ему геометрический опыт, и раз эта попытка увенчалась для него расширением понимания, то, конечно, такие попытки должны были развиваться и далее, в интересе уже чисто математическом. Были развиты системы геометрии, аналогичные привычной нам геометрии, но с точки зрения предположений еще более свободных, еще более общих, для любого числа измерений, не претендующие быть чем-либо, кроме научных экспериментов в мыслях, без притязаний на применение к чувственной действительности. Достаточно указать здесь на движение вперед математики в работах Клиффорда, Клейна, Ли и др. Весьма редко какой-нибудь мыслитель так уходил в свои теоретические построения и настолько отрывался от действительности, чтобы думать, что *данное нам чувственное пространство может иметь больше трех* измерений, или изображать это пространство при помощи геометрии, значительно уклоняющейся от евклидовской. Гауссу, Лобачевскому, Я. Бояи, Риману это было вполне ясно, и они, во всяком случае, не ответственны за те несуразные мнения, которые были высказаны в этой области впоследствии.

28. Не во вкусе физика делать предположения относительно свойств геометрических образов в бесконечности, ему недоступной, и затем сравнивать эти последние с ближайшим опытом и к нему их приспособлять. Он предпочитает (как это сделал в своей работе Штольц) рассматривать как источник своих понятий непосредственно данное и значение этих понятий затем распространяет и на область недоступного ему бесконечного до тех пор, пока не увидит себя вынужденным их изменить. Но и он должен быть весьма благодарен за выяснение того факта, что существует *несколько* удовлетворяющих делу геометрий, что можно справиться с делом и при помощи *конечного* пространства и т. д., одним словом, за устранение *традиционных ограничений* мышления. Если бы мы жили на поверхности планеты с мутной непрозрачной атмосферой и, обладая только наугольником и измерительной цепью,

приступили бы к измерениям исходя из предположения плоской поверхности, то нарастание нарушений правила относительно суммы углов в случае больших треугольников скоро заставило бы нас заменить нашу планиметрию сферометрией. *Возможности* аналогичных данных опыта в трехмерном пространстве физик в *принципе* не может исключить, хотя явления, вынуждающие к допущению геометрии Лобачевского или Римана, столь чудовищно противоположны всему, к чему мы до сих пор привыкли, что никто не считает наступления их *вероятным*.

29. Вопрос, представляет ли данный *физический* объект прямую линию или дугу круга, неправилен по форме своей постановки. Натянутая нить или световой луч не есть, конечно, ни то ни другое. Вопрос может быть только о том, реагирует ли наш объект пространственно так, что он лучше соответствует одному, чем другому, понятию и соответствует ли он вообще с достаточной и достижимой точностью *одному* из геометрических понятий. Если этого нет, то возникает вопрос, можем ли мы практически устранить или по меньшей мере мысленно определить и учесть *отклонение* от прямой или круга, т. е. можем ли мы *исправить* результат измерения. Но при практическом измерении мы всегда делаем только одно: сравниваем *физические* объекты. Если бы оказалось, что при прямом исследовании эти последние соответствуют геометрическим понятиям со всей возможной точностью, но косвенные результаты измерения больше отклоняются от теории, чем то допустимо в пределах возможных ошибок, то мы действительно были бы вынуждены *изменить* наши физически-метрические понятия. *Физик*, однако, будет прав, если он подождет наступления этого положения, между тем как перед *математиком* с его рассуждениями поле действий всегда свободно.

30. Понятия натуралиста о пространстве и времени суть наиболее *простые понятия*. Пространственные и временные объекты, соответствующие их требованиям, могут быть устроены с большой *точностью*. Почти каждое *отклонение*, которое еще может быть замечено, возможно *устранить*. Каждое построение в пространстве или времени можно мыслить осуществленным, не делая насилия над фактами. Прочие физические свойства тел настолько зависят друг от друга, что произвольные фикции находят здесь тесные рамки в фактах. Идеального газа, идеальной жидкости, абсолютно упругого тела не существует; физику известно, что его фикции соответствуют фактам только приблизительно, произвольно упрощая их; ему известны отклонения, которые не могут быть устранены. Шар, плоскость и т. д. можно мыслить сделанными *с какой угодно точностью*, не противореча никаким фактам. Если поэтому какой-нибудь физический факт требует видоизменения наших понятий, физик охотнее жертвует менее совершенными понятиями физики, чем более простыми, более совершенными и устойчивыми понятиями геометрии, составляющими самую твердую основу всех его построений.

31. Но, с другой стороны, физик может извлечь существенную пользу из работ геометров. Наша геометрия относится всегда к объектам чувственного опыта. Но если мы оперируем с абстрактными вещами, как то атомами и молекулами, которые по самой природе своей *не могут быть даны нашим чувствам*, мы не имеем более *никакого* права обязательно мыслить эти вещи в отношениях, в относительных положениях, соответствующих евклидову трехмерному пространству нашего чувственного опыта. Это в особенности должен принимать во внимание тот, кто считает атомистические теории необходимыми [1]).

32. Вернемся к происхождению геометрии из практической потребности. Познание пространственной субстанциональности, пространственного постоянства протяженной вещи, несмотря на ее движения, является для нас биологически необходимым, ибо существует некоторая связь между пространственным количеством и количеством удовлетворения потребности. Поскольку это знание не обеспечено достаточно самой нашей физиологической организацией, мы употребляем наши руки и ноги для сравнения с протяженным объектом. Но пользуемся ли мы для сравнения нашими руками или искусственным масштабом, раз мы сравниваем тела между собой, мы уже вступили в область физики. Все физические определения *относительны*. Так и все *геометрические* определения имеют значение, *относительное* к масштабу. Понятие меры есть понятие отношения, которое *ничего* не говорит нам о *самом* масштабе. В геометрии мы только принимаем, что масштаб всегда и везде остается равным тому, чему он где-либо и когда-либо оказался равным. Относительно самого же масштаба здесь не высказано ничего. Этим на место пространственного *физиологического* равенства выступает совершенно иначе определяемое *физическое* равенство, которое также не следует смешивать с первым, как нельзя отождествлять показания термометра с тепловыми ощуще-

[1]) Находясь еще под влиянием атомистической теории, я попытался однажды объяснить спектральные линии газов колебаниями друг относительно друга атомов, входящих в состав молекулы газа. Затруднения, на которые я наткнулся при этом, навели меня в 1863 г. на мысль, что *нечувственные* вещи не должны обязательно быть представляемыми в нашем *чувственном* пространстве трех измерений. Таким путем я пришел к мысли об аналогах пространства различного числа измерений. Одновременно с этим изучение различных физиологических многообразий (см. стр. 393) привело меня к вопросам, затронутым в конце настоящей главы. Мысль о конечных пространствах, сходящихся параллельных линиях и т. д., которая могла возникнуть только при историческом изучении геометрии, была тогда далека от меня. Мои критики прекрасно сделали бы, мне кажется, если бы не оставляли без внимания оговорки, напечатанные курсивом. Подробности относительно этого см. в примечаниях к моей работе «Erhaltung der Arbeit», Prag, 1872.

ниями. Правда, практический геометр констатирует расширение нагретого масштаба масштабом, остающимся при постоянной температуре, и обращает внимание на то, что вследствие такого *постороннего пространству* физического обстоятельства указанное выше отношение равенства нарушается. Однако для чистой геометрии всякое предположение относительно масштаба чуждо. Молчаливо, но без достаточного основания, сохраняется привычка, обусловленная только физиологически, считать масштаб постоянным. Было бы совершенно бесплодно и не имело бы *никакого смысла*, если бы мы приняли, что масштаб, а следовательно, и тела вообще с перемещением в пространстве претерпевают изменения или остаются неизменными: ведь все это могло бы быть констатировано опять только при помощи нового масштаба. Из этих соображений обнаруживается *относительность* всех пространственных отношений.

33. Если критерий пространственного равенства существенно изменяется уже введением мер, то с введением *понятия числа* в геометрию он претерпевает дальнейшее изменение, становится точнее. Этим обусловливается большая тонкость различий, какую простое понятие совмещения никогда не могло бы дать. Только применение арифметики к геометрии приводит к понятиям *несоизмеримого*, *иррационального*. Таким образом, в наших геометрических понятиях имеются чуждые пространству примеси; они изображают пространственное с некоторой свободой и именно с произвольной *большей точностью*, чем то может быть достигнуто пространственным наблюдением. Неполный контакт между фактами и понятиями делает возможными разные геометрические системы (теории) [1]. То же самое можно сказать и относительно физики [2].

34. Все развитие, приведшее к перевороту в понимании геометрии, следует признать за *здоровое и сильное* движение. Подготовляемое столетиями, значительно усилившееся в наши дни, оно никоим образом не может считаться уже законченным. Напротив, следует ожидать, что движение это принесет еще богатейшие плоды — и именно в смысле теории познания — не только для математики и геометрии, но и для других наук. Будучи обязано, правда, мощным толчкам некоторых отдельных выдающихся людей, оно, однако, возникло не из *индивидуальных*, но *общих потребностей*. Это видно уже из одного разнообразия профессий людей, которые приняли участие в движении. Не только математики, но и философы и дидактики внесли свою долю в эти исследования. И пути, проложенные различными исследователями, близко сопри-

---

[1] Мы не можем предполагать, чтобы материя осуществляла все атомистические фантазии физика. Столь же мало может удовлетворять пространство (как объект опыта) всем идеям математика, что, однако, не должно возбуждать сомнений в значении соответствующих исследований самих по себе.

[2] См. примечание на стр. 409. (См. здесь п. 20.— *Прим. ред.*)

касаются. Мысли, высказанные Лейбницем [1]), встречаются вновь в мало измененной форме у Фурье [2]), Лобачевского, Я. Бояи, Х. Эрба [3]). Философ Иберверг [4]), который в своей оппозиции против Канта примыкал по существу к психологу Бенеке [5]), а своими геометрическими рассуждениями — к Х. Эрбу (в свою очередь называющему своим предшественником К. А. Эрба [6]), своими исследованиями в значительной мере расчистил почву для работ Гельмгольца.

35. Результаты, к которым привели нас предыдущие рассуждения, можно сжато выразить так:

1) Опыт был признан источником наших геометрических понятий.

2) Была выяснена множественность понятий, удовлетворяющих одним и тем же геометрическим фактам.

3) Сравнением пространства с другими многообразиями были получены более общие понятия, для которых понятия геометрические составляют частный случай. Этим геометрическое мышление было освобождено от традиционных границ, считавшихся непереходимыми.

4) Указанием многообразий, родственных пространству, но от него отличных, были возбуждены совершенно новые вопросы: Что такое пространство физиологически, физически, геометрически? К чему сводятся его особые свойства, так как мыслимы и другие? Почему пространство трехмерно? и т. д.

36. Эти вопросы, решения которых невозможно ожидать ни сегодня и ни завтра, изображают перед нами всю глубину того, что подлежит еще исследованию. Не будем вовсе говорить о суждениях непризванных «беотийцев», появление которых предвидел Гаусс и которые настраивали его к такой сдержанности. Но что нам сказать о той суровой придирчивой критике, которой подверглись мысли Гаусса, Римана и их товарищей со стороны людей, зани-

---

1) См. стр. 371, 372. (В данный сборник не вошли.—*Прим. ред.*)

2) Séances des Écoles normales, Débats, т. 1, 1800, стр. 28.

3) *H. Erb*, *Grossherzoglich Badischer Finanzrat*, Die Probleme der geraden Linie, des Winkels und der ebenen Fläche, Heidelberg, 1846. Автор дал здесь то дополнение к элементарной геометрии, которого требовал Гаусс в одном письме к Бесселю. В том же направлении работал И. Шрам в своей статье «Leibnizens Definitionen der Ebene und der Geraden». Статья напечатана на правах рукописи в 1903 г. в Оберштейге, в северном Тироле.

4) Die Prinzipien der Geometrie wissenschaftlich dargestellt. Archiv für Philologie und Pädagogik, 1851. Напечатано в книге *Brash*, Welt und Lebensanschauung, F. Überwegs, Leipzig, 1889, стр. 263—317.

5) Logik als Kunstlehre des Denkens, Berlin, 1842, II. Bd., стр. 51—55.

6) Zur Mathematik und Logik, Heidelberg, 1821. Сочинения этого мне не удалось достать. Читателей, особенно интересующихся философией, отсылаем еще к работе: *C. Siegel*, Versuch einer empiristischen Darstellung der räumlichen Grundgebilde u.s.w. (Vierteljarschr. f. wiss. Philosopie, 1900).

мающих выдающееся положение в науке? Неужели им на себе самих не пришлось никогда испытать того, что исследователь на крайних границах знания находит часто то, что не может быть гладко и немедленно усвоено каждым умом и что тем не менее далеко не бессмысленно? Конечно, и такие исследователи могут впадать в ошибки. Но и ошибки иных людей бывают нередко по своим последствиям плодотворнее, чем открытия других.

А. ПУАНКАРЕ

О ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОНА*

ВВЕДЕНИЕ

На первый взгляд кажется, что аберрация света и связанные с нею оптические и электрические явления дают нам средство для определения абсолютного движения Земли или, вернее, ее движения не по отношению к другим небесным телам, а по отношению к эфиру. Уже Френель пытался сделать это, но скоро обнаружил, что движение Земли не изменяет законов отражения и преломления. Аналогичные опыты (например, с трубой, наполненной водою, и все прочие, где принимаются в расчет только члены первого порядка относительно величины аберрации) дали лишь отрицательный результат, чему вскоре было найдено объяснение; но и Майкельсон, придумавший опыт, в котором становились уже заметными члены, зависящие от квадрата аберрации, в свою очередь потерпел неудачу.

Эта невозможность показать опытным путем абсолютное движение Земли представляет собой, по-видимому, общий закон природы; мы естественно приходим к тому, чтобы принять этот закон, который мы назовем *постулатом относительности*, и принять без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат, до сих пор согласующийся с опытом, подтвержден или опровергнут более точными измерениями, сейчас, во всяком случае, представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены.

Лоренц и Фицджеральд ввели гипотезу о сокращении всех тел в направлении движения Земли, зависящем от квадрата аберрации. Такое сокращение, которое мы назовем *лоренцевым сокра-*

---

* «Sur la dynamique de l'électron», Rendiconti der Circolo Matematico di Palermo, 1906, v. XXI, p. 129. (Статья на языке оригинала поступила в печать 23 июля 1905 г.) [перевод в сб.: «Принцип относительности», Атомиздат, М., 1973, стр. 118—161; публикуются с незначительными исправлениями «Введение» (стр. 118—121) и § 9 «Гипотезы о тяготении» (стр. 152—161)].

щением, дало бы объяснение опыту Майкельсона и всем другим произведенным до сих пор в этом направлении опытам. Однако, если бы мы пожелали принять постулат относительности во всей его общности, подобная гипотеза оказалась бы недостаточной. Последнее обстоятельство заставило Лоренца дополнить и видоизменить гипотезу так, чтобы установить полное соответствие между нею и постулатом относительности. Он достиг этого в своей статье «Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света» (Amsterdam Proceedings, 27 May 1904) [1]). Важность вопроса побудила меня снова заняться им; результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц. Я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях. Некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли.

Идею Лоренца можно резюмировать так: если возможно сообщить общее поступательное движение всей системе, без того чтобы имели место какие-либо видимые изменения в явлениях, то это значит, что уравнения электромагнитного поля не изменятся в результате некоторых преобразований, которые мы будем называть *преобразованиями Лоренца*; две системы — одна неподвижная, другая перемещающаяся поступательно — представляют, таким образом, точное изображение одна другой. Ланжевен [2]) пытался видоизменить идею Лоренца. У обоих авторов движущийся электрон принимает форму сжатого эллипсоида, но в то время как у Лоренца постоянными остаются две оси эллипсоида, у Ланжевена, наоборот, объем эллипсоида остается постоянным. Оба, впрочем, показали, что эти две гипотезы так же хорошо согласуются с опытами Кауфмана, как и первоначальная гипотеза Абрагама (недеформирующийся шаровой электрон).

Преимущество теории Ланжевена в том, что она вводит только электромагнитные силы и силы связи, но она несовместима с постулатом относительности. Последнее было показано Лоренцем. Я также получил этот результат несколько иным путем, пользуясь основными положениями теории групп. Следует поэтому вернуться к теории Лоренца. Однако, если мы хотим сохранить ее, избегнув явных противоречий, необходимо допустить существование силы, объясняющей одновременно сжатие одной и постоянство двух других осей. Я пытался определить эту силу и нашел, что *она может быть приравнена постоянному внешнему давлению, дей-*

---

[1]) Перевод в сб.: Принцип относительности, Атомиздат, М., 1973, стр. 67.— *Прим. ред.*

[2]) До Ланжевена эту же идею высказал Бухерер в Бонне (см. *Bucherer*, Mathematische Einführung in die Elektronentheorie, August 1904, Teubner, Leipzig).

ствующему на деформируемый и сжимаемый электрон, работа которого пропорциональна изменению объема этого электрона.

Тогда если инерция материи имеет исключительно электромагнитное происхождение, как это общепризнано после опытов Кауфмана, и, за исключением постоянного давления, о котором я только что говорил, все силы будут электромагнитного происхождения, то постулат относительности может быть установлен со всей строгостью; именно это я и собираюсь показать весьма простыми вычислениями, основанными на принципе наименьшего действия.

Но это не все. Лоренц в цитированной работе считал необходимым дополнить свою гипотезу так, чтобы постулат относительности имел место и при наличии других сил помимо электромагнитных. Согласно его идее, все силы, какого бы они ни были происхождения, ведут себя благодаря преобразованию Лоренца (и, следовательно, благодаря поступательному перемещению) точно так же, как электромагнитные силы. Оказалось необходимым более внимательно рассмотреть эту гипотезу и, в частности, исследовать, какие видоизменения она вносит в законы тяготения.

Прежде всего, очевидно, она вынуждает нас предположить, что распространение сил тяготения происходит не мгновенно, а со скоростью света. Можно было бы подумать, что это является достаточным основанием для того, чтобы отвергнуть подобную гипотезу, так как Лаплас показал, что она не может иметь места. Но на самом деле действие этого распространения уравновешивается в большей части другим обстоятельством, так что не существует противоречия между предложенным законом и астрономическими наблюдениями. Возможно ли найти такой закон, который удовлетворял бы условию, поставленному Лоренцем, и одновременно сводился к закону Ньютона во всех случаях, когда скорости небесных тел достаточно малы для того, чтобы можно было пренебречь их квадратами (а также произведениями ускорений на расстояния) по сравнению с квадратом скорости света?

На этот вопрос, как мы увидим дальше, следует ответить утвердительно. Согласуется ли видоизмененный таким образом закон с астрономическими наблюдениями? По-видимому, да, но этот вопрос может быть окончательно разрешен только после более глубокого исследования.

Однако, допуская даже, что это обсуждение докажет преимущество новой гипотезы, к какому заключению мы должны будем прийти? Если распространение сил притяжения происходит со скоростью света, то это не может быть результатом каких-либо случайных обстоятельств, а должно быть обусловлено одной из функций эфира; тогда возникает задача глубже проникнуть в природу этой функции и связать ее с другими свойствами эфира. Недостаточно ограничиться простым сопоставлением формул, согласующихся между собою лишь благодаря счастливой случайности;

необходимо, чтобы эти формулы, так сказать, проникали друг в друга. Разум наш не будет удовлетворен до тех пор, пока мы не поверим, что усмотрели причину этого согласования так хорошо, что, кажется, мы могли бы ее предвидеть.

Но этот вопрос можно представить себе еще с другой точки зрения. Лучше всего можно это понять при помощи сравнения. Представим себе астронома, живущего до Коперника и размышляющего над системой Птолемея. Он заметил бы, что для всех планет один из двух кругов — эпицикл или деферент (основной круг) — проходится в одно и то же время. Так как это не может быть случайностью, между всеми планетами существует какая-то таинственная связь. Однако Коперник, изменив лишь оси координат, рассматривавшиеся ранее как неподвижные, сразу устранил эту видимую связь: каждая планета описывает только один круг, и периоды обращения становятся независимыми друг от друга (до тех пор пока Кеплер не установил между ними связь, которую считали уничтоженной).

Возможно, что и в нашем случае имеется нечто аналогичное: если бы мы приняли принцип относительности, то в законе тяготения и электромагнитных законах мы нашли бы общую постоянную — скорость света. Точно так же мы встретили бы ее во всех других силах какого угодно происхождения, что можно объяснить только с двух точек зрения: или все, что существует в мире,— электромагнитного происхождения, или же это свойство, являющееся, так сказать, общим для всех физических явлений, есть не что иное, как внешняя видимость, что-то связанное с методами наших измерений. Как же мы производим наши измерения? Прежде мы ответили бы: перенося тела, рассматриваемые как твердые и неизменные, одно на место другого; но в современной теории, принимая во внимание сокращение Лоренца, это уже не верно. Согласно этой теории, двумя равными отрезками — по определению — будут такие два отрезка, которые свет проходит в одно и то же время.

Может быть, достаточно только отказаться от этого определения, чтобы вся теория Лоренца была совершенно уничтожена, как это случилось с системой Птолемея после вмешательства Коперника. Во всяком случае, если последнее и произойдет, это еще не докажет, что усилия Лоренца были бесполезными, ибо и Птолемей, какого бы мнения о нем ни придерживаться, отнюдь не был бесполезен для Коперника.

Поэтому я также нисколько не колебался опубликовать эти частичные результаты, хотя в настоящий момент вся теория кажется поставленной под угрозу ввиду открытия магнитокатодных лучей.

* * *

§ 9. ГИПОТЕЗЫ О ТЯГОТЕНИИ

Итак, теория Лоренца полностью объясняет невозможность показать опытным путем наличие абсолютного движения в случае, если все силы будут электромагнитного происхождения.

Однако существуют силы, которым нельзя приписать электромагнитное происхождение, как, например, силы тяготения. В самом деле, может случиться, что две системы тел порождают эквивалентные электромагнитные поля, т. е. оказывают одинаковое действие на наэлектризованные тела и токи, и в то же время оказывают различное гравитационное действие на ньютоновские массы.

Следовательно, поле тяготения отличается от электромагнитного поля. Поэтому Лоренц вынужден был дополнить свою гипотезу предположением, *что силы любого происхождения, и в частности силы тяготения, ведут себя при поступательном движении (или, если угодно, при преобразовании Лоренца) совершенно так же, как электромагнитные силы.*

Нам необходимо теперь заняться более детальным рассмотрением этой гипотезы. Если мы желаем, чтобы ньютоновская сила вела себя указанным образом при преобразовании Лоренца, то мы уже не можем предполагать, что эта сила зависит только от относительного положения двух притягивающихся тел в рассматриваемый момент. Она должна зависеть, кроме того, от скоростей обоих тел. Но это не все: естественно предположить, что если сила, действующая в момент t на притягиваемое тело, зависит от его положения и скорости в тот же момент, то она зависит, кроме того, от положения и скорости *притягивающего тела*, но уже не в момент t, а *в предшествующий момент*, как если бы силы тяготения требовали некоторого времени для своего распространения. Будем рассматривать, таким образом, положение притягиваемого тела в момент t_0, и пусть x_0, y_0, z_0 будут его координаты в этот момент, а ξ, η, ζ — составляющие его скорости. Рассмотрим, с другой стороны, притягивающее тело в момент $t_0 + t$, и пусть в этот момент его координатами будут $x_0 + x$, $y_0 + y$, $z_0 + z$, а составляющими скорости ξ_1, η_1, ζ_1.

Прежде всего мы должны получить соотношение для определения времени

$$\varphi\,(t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1) = 0. \tag{1}$$

Это соотношение определит закон распространения сил тяготения (при этом мы вовсе не предполагаем, что распространение происходит с одинаковой скоростью по всем направлениям).

Пусть теперь X_1, Y_1, Z_1 будут тремя составляющими силы, действующей в момент t на притягиваемое тело. Задача заключается в том, чтобы выразить X_1, Y_1, Z_1 как функции от

$$t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1. \tag{2}$$

Какие условия должны быть при этом выполнены?

1. Соотношение (1) не должно меняться при преобразованиях группы Лоренца.

2. Составляющие X_1, Y_1, Z_1 должны вести себя при преобразовании Лоренца так же, как электромагнитные силы, обозначаемые теми же буквами, т. е. согласно уравнениям (11) § 1.

3. Когда оба тела находятся в покое, мы должны вернуться к обыкновенному закону притяжения.

Важно отметить, что в этом последнем случае соотношение (1) не имеет места, ибо, когда оба тела находятся в покое, время t уже не играет никакой роли. Задача, поставленная таким образом, является, очевидно, неопределенной. Поэтому мы попытаемся удовлетворить, насколько возможно, другим дополнительным условиям.

4. Так как астрономические наблюдения не обнаруживают, по-видимому, заметных отклонений от закона Ньютона, то мы выберем решение, наименее расходящееся с этим законом для малых скоростей обоих тел.

5. Попытаемся распорядиться так, чтобы время t всегда было отрицательным; в самом деле, если понятно, что гравитационный эффект требует некоторого времени для своего распространения, то очень трудно усмотреть, каким образом этот эффект может зависеть от *недостигнутого еще* положения притягивающего тела.

Существует случай, когда неопределенность задачи исчезает; это происходит тогда, когда два тела находятся в *относительном* покое одно по отношению к другому, т. е. когда $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$, $\zeta = \zeta_1$; поэтому рассмотрим сначала этот случай, полагая, что скорости постоянны, т. е. что оба тела участвуют в общем движении переноса, равномерном и прямолинейном.

Положим, что ось x параллельна направлению этого переноса, так что $\eta = \zeta = 0$, и возьмем $\varepsilon = -\xi$.

Применяя при этих условиях преобразование Лоренца, получаем, что после преобразования оба тела будут находиться в состоянии покоя и, следовательно, $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$. Так как составляющие X_1', Y_1', Z_1' должны удовлетворять закону Ньютона, то мы будем иметь с точностью до постоянного множителя

$$\begin{gathered} X_1' = -x'/r'^3, \qquad Y_1' = -y'/r'^3, \qquad Z_1' = -z'/r'^3; \\ r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Но, согласно § 1,

$$x' = k(x+\varepsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = k(t+\varepsilon x), \quad \rho'/\rho = k(1+\xi\varepsilon) =$$
$$= k(1-\varepsilon^2) = 1/k, \quad \sum X_1\xi = -X_1\varepsilon, \quad X_1' = k(\rho/\rho')\left(X_1 + \varepsilon \sum X_1\xi\right) =$$
$$= k^2 X_1(1-\varepsilon^2) = X_1, \quad Y_1' = (\rho/\rho')Y_1 = kY_1, \quad Z_1' = kZ_1.$$

Кроме того, имеем

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \qquad r'^2 = k^2(x-\xi t)^2 + y^2 + z^2$$

и

$$X_1 = -k(x-\xi t)/r'^3, \qquad Y_1 = -y/kr'^3, \qquad Z_1 = -z/kr'^3, \tag{4}$$

что можно написать в виде

$$X_1 = dV/dx, \qquad Y_1 = dV/dy, \qquad Z_1 = dV/dz, \qquad V = 1/kr'. \tag{4a}$$

На первый взгляд кажется, что здесь имеется неопределенность, так как мы не сделали никакого предположения о значении t, т. е. о скорости распространения; к тому же x есть функция от t; однако легко видеть, что в наши формулы входят только величины $x - \xi t$, y, z, которые не зависят от t.

Очевидно, что если два тела участвуют в общем переносе, то сила, действующая на притягиваемое тело, нормальна к эллипсоиду, имеющему в качестве центра притягивающее тело.

Чтобы продолжить наше исследование, необходимо найти *инварианты группы Лоренца.*

Мы знаем, что подстановки этой группы (при $l = 1$) являются линейными подстановками, не изменяющими квадратичной формы $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$. Положим, с другой стороны, $\xi = \delta x/\delta t$, $\eta = \delta y/\delta t$, $\zeta = \delta z/\delta t$, $\xi_1 = \delta_1 x/\delta_1 t$, $\eta_1 = \delta_1 y/\delta_1 t$, $\zeta_1 = \delta_1 z/\delta_1 t$.

Мы видим, что в результате преобразования Лоренца величины δx, δy, δz, δt и $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$ подвергаются таким же линейным подстановкам, как x, y, z, t. Будем рассматривать x, y, z, $t\sqrt{-1}$, δx, δy, δz, $\delta t\sqrt{-1}$, $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t\sqrt{-1}$ как координаты трех точек P, P', P'' в пространстве четырех измерений.

Легко видеть, что преобразование Лоренца представляет не что иное, как поворот в этом пространстве вокруг начала координат, которое считается неподвижным. Таким образом, отличными друг от друга инвариантами будут только 6 расстояний между тремя точками P, P', P'' и началом координат, или, если угодно, два выражения:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2; \qquad x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z - t\,\delta t,$$

или четыре выражения такой же формы, получающиеся в результате любой перестановки трех точек P, P', P''.

Но инварианты, которые мы пытаемся найти, являются функциями 10 переменных (2); поэтому мы должны отыскать между комбинациями из наших шести инвариантов те из них, которые зависят только лишь от этих 10 переменных, т. е. те, которые являются однородными функциями нулевой степени как по отношению к δx, δy, δz, δt, так и по отношению к $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$, $\delta_1 t$.

Таким образом, нам остаются следующие четыре различных инварианта:

$$\begin{gathered}\sum x^2-t^2, \quad \left(t-\sum x\xi\right)/\sqrt{1-\sum \xi^2},\\ \left(t-\sum x\xi_1\right)/\sqrt{1-\sum \xi_1^2},\\ \left(1-\sum \xi\xi_1\right)/\sqrt{\left(1-\sum \xi^2\right)\left(1-\sum \xi_1^2\right)}.\end{gathered} \tag{5}$$

Займемся теперь преобразованиями, которым подвергаются составляющие силы; обратимся к уравнениям (11) § 1, которые относятся не к силе X_1, Y_1, Z_1, рассматриваемой нами сейчас, а к силе, отнесенной к единице объема. Полагая, кроме того,

$$T=\sum X\xi,$$

мы видим, что уравнения (11) можно (при $l=1$) переписать в виде

$$\begin{gathered}X'=k\,(X+\varepsilon T), \qquad T'=k\,(T+\varepsilon X),\\ Y'=Y, \qquad Z'=Z.\end{gathered} \tag{6}$$

Таким образом, X, Y, Z, T преобразуются так же, как и x, y, z, t.

Следовательно, инвариантами группы будут следующие выражения:

$$\begin{gathered}\sum X^2-T^2, \qquad \sum Xx-Tt, \qquad \sum X\delta x-T\delta t,\\ \sum X\delta_1 x-T\delta_1 t.\end{gathered}$$

Однако нам нужны не X, Y, Z, а X_1, Y_1, Z_1, причем $T_1=\sum X_1\xi$. Мы видим, что $X_1/X=Y_1/Y=Z_1/Z=T_1/T=1/\rho$. Таким образом, преобразование Лоренца действует на X_1, Y_1, Z_1, T_1 точно так же, как и на X, Y, Z, T, с той разницей, что эти выражения будут умножены, кроме того, на $\rho/\rho'=1/k\,(1+\xi\varepsilon)=\delta t/\delta t'$; аналогично, на величины ξ, η, ζ, 1 оно будет действовать таким же образом, как и на δx, δy, δz, δt, с той, однако, разницей, что эти последние выражения будут умножены, кроме того, на *одну и ту же* величину $\delta t/\delta t'=1/k\,(1+\xi\varepsilon)$.

Будем рассматривать затем X, Y, Z, $T\sqrt{-1}$ как координаты некоторой четвертой точки Q; тогда инвариантами будут служить функции взаимных расстояний пяти точек O, P, P', P'', Q. Из этих функций мы должны оставить только те, которые являются однородными степени 0, с одной стороны, по отношению к X, Y, Z, T, δx, δy, δz, δt (переменные, которые можно заменить потом на X_1, Y_1, Z_1, T_1, ξ, η, ζ, 1) и, с другой стороны, по отношению к δx_1, δy_1, δz_1, t (переменные, которые также можно заменить затем на ξ_1, η_1, ζ_1, 1).

Таким образом, кроме прежних четырех инвариантов (5) мы находим следующие четыре новых различных инварианта:

$$\frac{\sum X_1^2 - T_1^2}{1-\sum \xi^2}, \qquad \frac{\sum X_1 x - T_1 t}{\sqrt{1-\sum \xi^2}},$$
$$\frac{\sum X_1 \xi_1 - T_1}{\sqrt{1-\sum \xi^2}\sqrt{1-\sum \xi_1^2}}, \qquad \frac{\sum X_1 \xi - T_1}{1-\sum \xi^2}. \tag{7}$$

Согласно определению (7), последний инвариант всегда равен нулю.

Установив все это, посмотрим, какие условия должны быть выполнены.

1. Первая часть соотношения (1), определяющая скорость распространения, должна быть функцией четырех инвариантов (5).

Здесь, очевидно, возможно множество гипотез, из которых мы рассмотрим только две.

А. Можно положить

$$\sum x^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0,$$

откуда $t = \pm r$, а так как t должно быть отрицательным, то $t = -r$. Это говорит о том, что скорость распространения равна скорости света.

На первый взгляд может показаться, что эта гипотеза должна быть сразу же отброшена без дальнейшего обсуждения. В самом деле, Лаплас показал, что распространение сил тяготения происходит или мгновенно, или со скоростью, во много раз превосходящей скорость света. Однако Лаплас рассматривал гипотезу конечной скорости распространения cetĕris non mutatis (при прочих неизменных условиях); здесь же, напротив, эта гипотеза осложнена многими другими, и может случиться, что между ними будет иметь место более или менее полная компенсация вроде той, что мы неоднократно видели на многочисленных примерах в результате преобразования Лоренца.

Б. Можно положить

$$\left(t-\sum x\xi_1\right)\Big/\sqrt{1-\sum \xi_1^2}=0, \qquad t=\sum x\xi_1.$$

При этом скорость распространения гораздо больше скорости света; однако в некоторых случаях t может быть положительным, что, как уже было сказано, представляется малоприемлемым. *Поэтому мы будем придерживаться гипотезы А.*

2. Четыре инварианта (7) должны быть функциями инвариантов (5).

3. Если два тела находятся в абсолютном покое, то X_1, Y_1, Z_1 должны иметь значения, соответствующие закону Ньютона; если же они находятся в относительном покое, то эти значения получаются из уравнения (4).

Согласно гипотезе абсолютного покоя, первые два инварианта (7) должны приводиться к $\sum X_1^2$, $\sum X_1 x$, или, по закону Ньютона, к $1/r^4$, $-1/r$.

С другой стороны, согласно гипотезе А, второй и третий инварианты (5) приводятся к

$$(-r-\sum x\xi)/\sqrt{1-\sum \xi^2}, \quad (-r-\sum x\xi)/\sqrt{1-\sum \xi_1^2},$$

т. е. при абсолютном покое к $-r$, $-r$.

Мы можем допустить *в качестве примера*, что два первых инварианта (7) сводятся к

$$(1-\sum \xi_1^2)^2/(r+\sum x\xi_1)^4 \text{ и } -\sqrt{1-\sum \xi_1^2}/(r+\sum x\xi_1),$$

хотя возможны и другие комбинации.

Необходимо сделать выбор среди этих комбинаций, и, кроме того, нам нужно еще третье уравнение для определения X_1, Y_1, Z_1. Для подобного выбора мы должны стремиться, насколько возможно, не отдаляться от закона Ньютона. Посмотрим теперь, что получается, если пренебречь квадратами скоростей ξ, η и т. д. (полагая по-прежнему $t = -r$).

Четыре инварианта (5) приводятся тогда к виду

$$0, \ -r-\sum x\xi, \ -r-\sum x\xi_1, \ 1,$$

а четыре инварианта (7) — к виду

$$\sum X_1^2, \ \sum X_1(x+\xi r), \ \sum X_1(\xi_1-\xi), \ 0.$$

Однако, для того чтобы иметь возможность сравнить это с законом Ньютона, необходимо другое преобразование; здесь $x_0 + x$, $y_0 + y$, $z_0 + z$ представляют собой координаты притягивающего тела в момент $t_0 + t$ и $r = \sqrt{\sum x^2}$, в законе же Ньютона нужно рассматривать координаты $x_0 + x_1$, $y_0 + y_1$, $z_0 + z_1$ притягивающего тела в момент t_0 и расстояние $r_1 = \sqrt{\sum x_1^2}$.

Мы можем пренебречь квадратом времени t, необходимого для распространения, и, следовательно, поступать так, как если бы движение было равномерным. В таком случае получим

$$x = x_1 + \xi_1 t, \qquad y = y_1 + \eta_1 t, \qquad z = z_1 + \zeta_1 t,$$
$$r(r - r_1) = \sum x\xi_1 t$$

или, так как $t = -r$,

$$x = x_1 - \xi_1 r, \qquad y = y_1 - \eta_1 r, \qquad z = z_1 - \zeta_1 r,$$
$$r = r_1 - \sum x\xi_1,$$

так что наши четыре инварианта (5) станут равными 0, $-r_1 + \sum x(\xi_1 - \xi)$, $-r$, 1, а четыре инварианта (7): $\sum X_1^2$, $\sum X_1 [x_1 + (\xi - \xi_1) r_1]$, $\sum X_1 (\xi_1 - \xi)$, 0.

Во втором из этих выражений мы написали r_1 вместо r, потому что r умножено здесь на $\xi - \xi_1$, а квадратом ξ мы пренебрегаем.

С другой стороны, по закону Ньютона мы получили бы для этих четырех инвариантов (7)

$$1/r_1^4, \quad -1/r_1 - \left[\sum x_1(\xi - \xi_1)\right]/r_1^2,$$
$$\left[\sum x_1(\xi - \xi_1)\right]/r_1^3, \quad 0.$$

Следовательно, если мы обозначим второй и третий инварианты (5) через A и B, а первые три инварианта (7) — через M, N, P, то мы удовлетворим закону Ньютона с точностью до членов второго порядка малости, положив

$$M = 1/B^4, \qquad N = +A/B^2, \qquad P = (A - B)/B^3. \tag{8}$$

Это решение не единственно.

В самом деле, пусть C есть четвертый инвариант (5) и пусть $C - 1$ имеет порядок квадрата ξ, так же как и $(A - B)^2$.

Таким образом, мы можем прибавить к правым частям каждого из уравнений (8) величину $C - 1$, умноженную на произвольную функцию от A, B, C, и величину $(A - B)^2$, также умноженную на функцию от A, B, C.

Уравнение (8) кажется на первый взгляд наиболее простым, но тем не менее оно не может быть принято. В самом деле, так как M, N, P являются функциями от X_1, Y_1, Z_1 и от $T_1 = \sum X_1\xi$, то из этих трех уравнений (8) можно получить значения X_1, Y_1, Z_1; однако в некоторых случаях эти значения становятся мнимыми.

Для того чтобы избавиться от этого неудобства, поступим следующим образом. Положим

$$k_0 = 1/\sqrt{1 - \sum \xi^2}, \qquad k_1 = 1/\sqrt{1 - \sum \xi_1^2},$$

что оправдывается аналогией с обозначением

$$k = 1/\sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

фигурирующим в подстановке Лоренца.

В этом случае, а также в силу условия $-r = t$ инварианты (5) приводятся к

$$0,\ A = -k_0 \left(r + \sum x\xi\right), \quad B = -k_1 \left(r + \sum x\xi_1\right),$$
$$C = k_0 k_1 \left(1 - \sum \xi\xi_1\right).$$

С другой стороны, мы видим, что следующие системы величин:

$$\begin{array}{llll} x, & y, & z, & -r = t; \\ k_0 X_1, & k_0 Y_1, & k_0 Z_1, & k_0 T_1; \\ k_0\xi, & k_0\eta, & k_0\zeta, & k_0; \\ k_1\xi_1, & k_1\eta_1, & k_1\zeta_1, & k_1 \end{array}$$

подвергаются *таким же* линейным подстановкам, как и при преобразовании группы Лоренца. Следовательно, мы приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} X_1 &= x\,(\alpha/k_0) + \xi\beta + \xi_1\,(k_1/k_0)\,\gamma, \\ Y_1 &= y\,(\alpha/k_0) + \eta\beta + \eta_1\,(k_1/k_0)\,\gamma, \\ Z_1 &= z\,(\alpha/k_0) + \zeta\beta + \zeta_1\,(k_1/k_0)\,\gamma, \\ T_1 &= -r\,(\alpha/k_0) + \beta + (k_1/k_0)\,\gamma. \end{aligned} \tag{9}$$

Ясно, что если α, β, γ — инварианты, то X_1, Y_1, Z_1, T_1 удовлетворяют основному условию, т. е. подвергаются вследствие преобразования Лоренца соответствующей линейной подстановке. Но для того чтобы уравнения (9) были совместны, необходимо, чтобы $\sum X_1\xi - T_1 = 0$, или, заменяя X_1, Y_1, Z_1, T_1 их значениями из (9) и умножая на k_0^2,

$$-A\alpha - \beta - C\gamma = 0. \tag{10}$$

Мы хотим, чтобы при отбрасывании квадратов скоростей ξ и т. д., а также произведений ускорений на расстояния как малых по сравнению с квадратом скорости света, как мы это делали выше, значения X_1, Y_1, Z_1 оставались соответствующими закону Ньютона.

Мы можем положить $\beta = 0$, $\gamma = -A\alpha/C$. С точностью до приближения принятого нами порядка будем иметь

$$k_0 = k_1 = 1, \quad C = 1, \quad A = -r_1 + \sum x\,(\xi_1 - \xi), \quad B = -r_1,$$
$$x = x_1 + \xi_1 t = x_1 - \xi_1 r.$$

Первое уравнение (9) примет тогда вид

$$X_1 = \alpha\,(x - A\xi_1).$$

Но если мы пренебрегаем квадратом ξ, то $A\xi_1$ можно заменить на $-r_1\xi_1$ или на $r\xi_1$, что дает $X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) = \alpha x_1$. По закону Ньютона мы получили бы $X_1 = -x_1/r_1^3$.

Таким образом, для инварианта α мы должны выбрать тот, который приводится к $-1/r_1^3$ при точности порядка допущенного приближения, т. е. $1/B^3$. Уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned} X_1 &= (x/k_0B^3) - \xi_1 (k_1/k_0)(A/B^3C), \\ Y_1 &= (y/k_0B^3) - \eta_1 (k_1/k_0)(A/B^3C), \\ Z_1 &= (z/k_0B^3) - \zeta_1 (k_1/k_0)(A/B^3C), \\ T_1 &= -(r/k_0B^3) - (k_1/k_0)(A/B^3C). \end{aligned} \tag{11}$$

Отсюда мы видим прежде всего, что исправленное притяжение состоит из двух составляющих: одна параллельна вектору, соединяющему местоположения обоих тел, а другая параллельна скорости притягивающего тела.

Напомним, что когда мы говорим о положении или скорости притягивающего тела, то речь идет о положении или скорости в момент, когда гравитационная волна покидает его; наоборот, для притягиваемого тела речь идет о его положении или скорости в момент, когда гравитационная волна достигает его; предполагается, что эта волна распространяется со скоростью света.

Я полагаю, что было бы преждевременно более подробно обсуждать эти формулы. Поэтому ограничимся несколькими замечаниями.

1. Решения (11) не единственны; в самом деле, величину $1/B^3$, входящую всюду как множитель, можно заменить на

$$(1/B^3) + (C - 1) f_1 (A, B, C) + (A - B)^2 f_2 (A, B, C),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции от A, B, C, или же не брать больше β равным нулю, а прибавить к α, β, γ какие-нибудь добавочные члены, лишь бы только они удовлетворяли условию (10) и были второго порядка относительно ξ в части, относящейся к α, и первого порядка относительно β и γ.

2. Первое уравнение (11) можно переписать в виде

$$X_1 = -(k_1/B^3C)\left[x\left(1 - \sum \xi\xi_1\right) + \xi_1\left(r + \sum x\xi\right)\right], \tag{11a}$$

причем выражение в квадратных скобках также можно переписать как

$$(x + r\xi_1) + \eta(\xi_1 y - x\eta_1) + \zeta(\xi_1 z - x\zeta_1). \tag{12}$$

Таким образом, полную силу можно разложить на три составляющие, соответствующие трем скобкам в выражении (12); первая составляющая имеет некоторую аналогию с механической силой, обусловленной электрическим полем, а две другие —

с механической силой, обусловленной магнитным полем. Для того чтобы дополнить аналогию, мы можем, согласно замечанию 1, заменить в уравнении (11) $1/B^3$ на C/B^3 так, чтобы X_1, Y_1, Z_1 зависели только линейно от скорости ξ, η, ζ притягиваемого тела, так как C при этом исчезает из знаменателя (11a). Положим далее

$$\begin{aligned} &k_1(x + r\xi_1) = \lambda, \quad k_1(y + r\eta_1) = \mu, \quad k_1(z + r\zeta_1) = \nu, \\ &k_1(\eta_1 z - \zeta_1 y) = \lambda', \quad k_1(\zeta_1 x - \xi_1 z) = \mu', \quad k_1(\xi_1 y - x\eta_1) = \nu', \end{aligned} \tag{13}$$

а так как C исчезло из знаменателя (11a), то

$$\begin{aligned} X_1 &= (\lambda/B^3) + (\eta\nu' - \zeta\mu')/B^3, \\ Y_1 &= (\mu/B^3) + (\zeta\lambda' - \xi\nu')/B^3, \\ Z_1 &= (\nu/B^3) + (\xi\mu' - \eta\lambda')/B^3; \end{aligned} \tag{14}$$

к тому же будем иметь

$$B^2 = \sum \lambda^2 - \sum \lambda'^2. \tag{15}$$

При этом λ, μ, ν, или λ/B^3, μ/B^3, ν/B^3 играют роль электрического поля, в то время как λ', μ', ν', или, вернее, λ'/B^3, μ'/B^3, ν'/B^3 — роль магнитного поля.

3. Постулат относительности обязывает нас принять решение (11), или решение (14), или какое-нибудь из решений, получаемых при помощи замечания 1. Однако прежде всего следует задать себе вопрос, совместимы ли эти решения с астрономическими наблюдениями. Расхождение с законом Ньютона будет порядка ξ^2, т. е. в 10 000 раз меньше, чем если бы оно было порядка ξ, иначе говоря, если бы силы тяготения распространялись со скоростью света cetĕris non mutatis; поэтому можно надеяться, что это расхождение не слишком велико. Однако только обстоятельное исследование может полностью осветить этот вопрос.

II

СТАНОВЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

О ПРИНЦИПЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯХ*

V. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЯГОТЕНИЕ

§ 17. УСКОРЕННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА И ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

До сих пор мы применяли принцип относительности, т. е. требование независимости законов природы от состояния движения системы отсчета, только к *неускоренным* системам отсчета. Можно ли представить себе, что принцип относительности выполняется и для систем, движущихся относительно друг друга с ускорением?

Правда, пока еще нет возможности подробно обсуждать здесь этот вопрос. Но, поскольку этот вопрос должен возникнуть перед каждым, кто следил за применениями принципа относительности до настоящего времени, я не могу не высказать здесь своего мнения на этот счет.

Рассмотрим две системы отсчета Σ_1 и Σ_2. Пусть Σ_1 движется с ускорением в направлении своей оси X, и пусть ее ускорение (постоянное во времени) равно γ. Предположим, что Σ_2 покоится,

---

* Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik, Bd. 4, 1907, S. 411 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 65—114; здесь с незначительными исправлениями перепечатана глава V статьи, стр. 105—114).

но находится в однородном гравитационном поле, которое сообщает всем телам ускорение $-\gamma$ в направлении оси X.

Как известно, физические законы относительно Σ_1 не отличаются от законов, отнесенных к Σ_2; это связано с тем, что в гравитационном поле все тела ускоряются одинаково. Поэтому при современном состоянии наших знаний нет никаких оснований полагать, что системы отсчета Σ_1 и Σ_2 в каком-либо отношении отличаются друг от друга, и в дальнейшем мы будем предполагать полную физическую равноценность гравитационного поля и соответствующего ускорения системы отсчета.

Это предположение распространяет принцип относительности на случай равномерно ускоренного прямолинейного движения системы отсчета. Эвристическая ценность этого предположения состоит в том, что оно позволяет заменить однородное поле тяжести равномерно ускоренной системой отсчета, которая до известной степени поддается теоретическому рассмотрению.

18. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В РАВНОМЕРНО УСКОРЕННОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Рассмотрим сначала тело, отдельные материальные точки которого в некоторый определенный момент времени t в неускоренной системе отсчета S покоятся относительно S, но обладают определенным ускорением. Как влияет это ускорение γ на форму тела в системе отсчета S?

Если подобное влияние существует, оно будет заключаться в равномерном изменении размеров либо в направлении ускорения, либо же в двух перпендикулярных ускорению направлениях, ибо другие результаты исключаются по соображениям симметрии. Каждое обусловленное ускорением сокращение (если оно вообще существует) должно быть четной функцией γ; следовательно, им можно пренебречь, если ограничиться случаем, когда γ так мало, что можно отбросить члены второй и более высоких степеней по γ. Поскольку в дальнейшем мы ограничимся этим случаем, влияние ускорения на размеры тела можно не учитывать.

Рассмотрим теперь систему отсчета Σ, равномерно ускоренную относительно неускоренной системы отсчета S в направлении оси X последней. Пусть часы или масштаб в системе отсчета Σ в покое идентичны часам или масштабу в S. Предположим, что начало координат системы отсчета Σ движется вдоль оси X системы отсчета S, а оси Σ параллельны осям S. В каждый момент времени существует неускоренная система отсчета S', координатные оси которой в рассматриваемый момент (в определенный момент времени t' в S') совпадают с координатными осями системы отсчета Σ. Если точечное событие, происходящее в этот момент времени t', имеет в Σ координаты ξ, η, ζ, то

$$x' = \xi,$$
$$y' = \eta,$$
$$z' = \zeta,$$

поскольку, согласно сказанному выше, можно не учитывать влияние ускорения на размеры тела, применяемого для измерения ξ, η, ζ. Представим себе далее, что часы в Σ в момент времени t' в S' идут так, что показывают в этот момент t'. Как будут идти часы в следующий промежуток времени τ?

Прежде всего следует учесть, что специфическое влияние *ускорения* на ход часов Σ можно не принимать во внимание, так как оно должно быть порядка γ^2. Далее, поскольку влиянием скорости, приобретенной за время τ, на ход часов можно пренебречь и поскольку путь, пройденный относительно S' часами за время τ, по порядку величины равен τ^2 и, таким образом, им можно тоже пренебречь, показания часов в Σ за элемент времени τ полностью совпадают с показаниями часов в S'.

Отсюда следует, что свет в вакууме распространяется относительно Σ в течение элемента времени τ с универсальной скоростью c, если мы определим одновременность в системе отсчета S', мгновенно покоящейся относительно Σ, и если мы будем применять для измерения времени и координат соответственно часы и масштабы, эквивалентные тем, которые применяются для измерения времени и пространства в неускоренных системах. Таким образом, и в этом случае для определения понятия одновременности можно применять принцип постоянства скорости света, если ограничиться очень малыми световыми путями.

Теперь представим себе, что часы в Σ поставлены указанным образом в тот момент $t = 0$ в S, когда Σ мгновенно покоится относительно S. Совокупность показаний поставленных таким образом часов мы будем называть «местным временем» σ системы отсчета Σ. Физический смысл местного времени, как это непосредственно видно, заключается в следующем. Если для измерения времени процессов, происходящих в отдельных элементах пространства Σ, применять местное время σ, то законы, которым подчиняются эти процессы, не могут зависеть от положения рассматриваемого элемента объема, т. е. от его координат, при условии, что в разных элементах объема применяются не только одинаковые часы, но и одинаковые масштабы.

Напротив, местное время σ непосредственно нельзя считать «временем» системы отсчета Σ, и именно по той причине, что два точечных события, происходящие в разных точках Σ, в смысле нашего определения неодновременны, когда их местные времена равны. Если какие-либо двое часов в Σ в момент $t = 0$ синхронны относительно S и совершают указанные движения, то они всегда остаются синхронными относительно S. Но в соответствии с § 4 эти часы не будут синхронными относительно системы отсчета S', мгновенно покоящейся относительно Σ, но движущейся относительно S, и, следовательно, по нашему определению, они не будут синхронными относительно Σ.

Определим теперь «время» τ системы отсчета Σ как совокупность тех показаний часов, находящихся в начале координат системы отсчета Σ, которые в смысле нашего определения являются одновременными с рассматриваемыми событиями [1]).

Найдем теперь соотношение между временем τ и местным временем σ точечного события. Из первого уравнения (1) следует, что два события одновременны относительно S', а следовательно, и относительно Σ, при условии

$$t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2} x_2,$$

причем индексы указывают на принадлежность к тому или другому точечному событию. Ограничимся сначала рассмотрением таких коротких промежутков времени [2]), что можно отбросить все члены, содержащие вторую или более высокие степени τ или v; тогда с учетом (1) и (29) следует положить

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1' = \xi_2 - \xi_1,$$
$$t_1 = \sigma_1, \ t_2 = \sigma_2,$$
$$v = \gamma t = \gamma \tau,$$

так что из написанного выше соотношения получается

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \frac{\dot{\gamma\tau}}{c^2} (\xi_2 - \xi_1).$$

Помещая первое точечное событие в начало координат, так что $\sigma_1 = \tau$ и $\xi_1 = 0$, и опуская индекс для второго точечного события, получаем

$$\sigma = \tau \left(1 + \frac{\gamma\xi}{c^2}\right). \tag{30}$$

Это соотношение выполняется прежде всего, если τ и ξ меньше определенных пределов. Оно, очевидно, выполняется и для произвольного τ, если ускорение γ постоянно относительно системы отсчета Σ, так как в этом случае соотношение между σ и τ должно быть линейным. Для произвольных ξ соотношение (30) не выпол-

---

[1]) Таким образом, символ τ применяется здесь в другом смысле, чем было выше.

[2]) Тем самым, согласно уравнению (1), предполагается также известное ограничение значений $\xi = x'$.

няется. Из того, что выбор начала координат не должен влиять на это соотношение, можно заключить, что оно должно быть заменено точным соотношением

$$\sigma = \tau e^{\frac{\gamma\xi}{c^2}}.$$

Однако мы будем придерживаться формулы (30). В соответствии с § 17 формула (30) применима также в системе координат, в которой действует однородное гравитационное поле. В этом случае мы должны положить $\Phi = \gamma\xi$, причем Φ означает потенциал силы тяжести; в результате получим

$$\sigma = \tau\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{30a}$$

Мы определили время в системе отсчета Σ двояко. Какое из этих определений следует применять в различных случаях? Предположим, что в двух местах с различными гравитационными потенциалами ($\gamma\xi$) находятся физические системы, и мы хотим сравнивать их свойства. Здесь, по-видимому, наиболее естественно поступить следующим образом. Отправимся сначала с нашими измерительными приборами в первую физическую систему и проведем там измерения; после этого направимся вместе со всеми измерительными приборами во вторую систему, чтобы произвести в ней такие же измерения. Если измерения в этих системах дадут одинаковые результаты, мы будем называть обе физические системы «одинаковыми». Среди названных измерительных приборов имеются часы, которыми мы измеряем местные времена σ. Поэтому вполне естественно для определения физических величин в областях, в которых существует поле тяжести, использовать время σ.

Если же речь идет о явлении, в котором необходимо одновременно рассматривать тела, находящиеся в областях с разными гравитационными потенциалами, то в выражениях, в которые время входит явно (т. е. не только посредством других физических величин), мы должны использовать время τ: иначе одновременность двух событий не выражалась бы равенством значений времени обоих событий. Поскольку же при определении времени τ используются моменты времени по часам, находящимся в некотором произвольно выбранном месте, то при пользовании временем τ законы природы могут зависеть от координат.

§ 19. ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ЧАСЫ

Если в точке P с гравитационным потенциалом Φ находятся часы, показывающие местное время, то, согласно соотношению (30a), их показания в $(1 + \Phi/c^2)$ раз больше, чем τ, т. е. они идут в $(1 + \Phi/c^2)$ раз быстрее одинаковых с ними часов, находящихся в начале координат. Пусть показания обоих этих часов воспринимаются каким-нибудь способом, например оптическим путем, наблюдателем, находящимся где-то в пространстве. Поскольку время $\Delta\tau$, проходящее между показанием часов и моментом, когда это показание будет воспринято наблюдателем, находящимся где-то в пространстве, не зависит от τ, то часы в точке P идут в $1 + \Phi/c^2$ раз быстрее, чем часы в начале координат. В этом смысле можно сказать, что процесс, происходящий в часах,— и вообще любой физический процесс — протекает тем быстрее, чем больше гравитационный потенциал в области, где разыгрывается этот процесс.

Существуют «часы», находящиеся в местах с различными гравитационными потенциалами, скорость «хода» которых можно проконтролировать с большой точностью; это — источники света с линейчатым спектром. Из сказанного выше следует [1]), что свет, приходящий от такого источника, расположенного на поверхности Солнца, обладает длиной волны, приблизительно на две миллионные доли большей, чем свет, испускаемый теми же атомами на Земле.

§ 20. ВЛИЯНИЕ ТЯГОТЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Если мы будем относить электромагнитный процесс в некоторый момент времени к неускоренной системе отсчета S', мгновенно покоящейся относительно системы отсчета Σ, движущейся равномерно ускоренно, то в соответствии с (5) и (6) выполняются уравнения

$$\frac{1}{c}\left(\rho' u'_x + \frac{\partial X'}{\partial t}\right) = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'} \quad \text{и т. д.}$$

и

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial t} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'} \quad \text{и т. д.}$$

Согласно сказанному выше, величины ρ', u', X', L', x' и т. д., отнесенные к системе отсчета S', можно сразу приравнять соответствующим величинам ρ, u, X, L, ξ и т. д., отнесенным к Σ, если мы ограничиваемся бесконечно малым временем [2]), бесконечно близким к времени относительного покоя S' и Σ. Далее, t'

---

[1]) В предположении, что соотношение (30а) выполняется также в неоднородном гравитационном поле.

[2]) Это ограничение не влияет на пределы применимости наших результатов, поскольку выводимые далее законы природы по существу не могут зависеть от времени.

мы должны заменить местным временем σ. Однако для этого нельзя положить просто

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial \sigma}$$

по той причине, что покоящаяся относительно системы отсчета Σ точка, к которой должны относиться преобразованные к Σ уравнения, за время $dt' = d\sigma$ меняет свою скорость относительно S', причем, согласно соотношениям (7а) и (7б), этому изменению соответствует изменение во времени компонент поля, отнесенных к системе отсчета Σ. Поэтому следует положить

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial t'}&=\frac{\partial X}{\partial \sigma}, & \frac{\partial L'}{\partial t'}&=\frac{\partial L}{\partial \sigma},\\
\frac{\partial Y'}{\partial t'}&=\frac{\partial Y}{\partial \sigma}+\frac{\gamma}{c}N, & \frac{\partial M'}{\partial t'}&=\frac{\partial M}{\partial \sigma}-\frac{\gamma}{c}Z,\\
\frac{\partial Z'}{\partial t'}&=\frac{\partial Z}{\partial \sigma}-\frac{\gamma}{c}M, & \frac{\partial N'}{\partial t'}&=\frac{\partial N}{\partial \sigma}+\frac{\gamma}{c}Y.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения электромагнитного поля, отнесенные к Σ, принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left(\rho u_\xi+\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)&=\frac{\partial N}{\partial \eta}-\frac{\partial M}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\left(\rho u_\eta+\frac{\partial Y}{\partial \sigma}+\frac{\gamma}{c}N\right)&=\frac{\partial L}{\partial \zeta}-\frac{\partial N}{\partial \xi},\\
\frac{1}{c}\left(\rho u_\zeta+\frac{\partial Z}{\partial \sigma}-\frac{\gamma}{c}M\right)&=\frac{\partial M}{\partial \xi}-\frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial \sigma}&=\frac{\partial Y}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}-\frac{\gamma}{c}Z\right)&=\frac{\partial Z}{\partial \xi}-\frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\left(\frac{\partial N}{\partial \sigma}+\frac{\gamma}{c}Y\right)&=\frac{\partial X}{\partial \eta}-\frac{\partial Y}{\partial \xi}.
\end{aligned}$$

Умножим эти уравнения на $\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$ и введем обозначения

$$X^*=X\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right),\quad Y^*=Y\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\ \text{и т. д.}$$

$$\rho^*=\rho\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right).$$

Далее, пренебрегая членами второй степени по γ, получаем уравнения

$$\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\xi + \frac{\partial X^*}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial N^*}{\partial \eta} - \frac{\partial M^*}{\partial \zeta},$$
$$\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\eta + \frac{\partial Y^*}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial L^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial N^*}{\partial \xi}, \quad (31а)$$
$$\frac{1}{c}\left(\rho^* u_\zeta + \frac{\partial Z^*}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial M^*}{\partial \xi} - \frac{\partial L^*}{\partial \eta},$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial L^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial Y^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z^*}{\partial \eta},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial M^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial Z^*}{\partial \xi} - \frac{\partial X^*}{\partial \zeta}, \quad (32а)$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial N^*}{\partial \sigma} = \frac{\partial X^*}{\partial \eta} - \frac{\partial Y^*}{\partial \xi}.$$

Из этих уравнений прежде всего видно, какое влияние оказывает гравитационное поле на статические и стационарные явления. В этих случаях выполняются такие же закономерности, как в поле без тяготения, с той лишь разницей, что компоненты поля X и т. д. заменяются на $X\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$ и т. д. и ρ на $\rho\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$.

Для рассмотрения хода нестационарных процессов мы будем пользоваться временем τ как при дифференцировании по времени, так и для определения скоростей, т. е., согласно соотношению (30), положим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial \sigma}$$

и

$$w_\xi = \left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)u_\xi.$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{1}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\left(\rho^* w_\xi + \frac{\partial X^*}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial N^*}{\partial \eta} - \frac{\partial M^*}{\partial \zeta} \text{ и т. д.} \quad (31б)$$

и

$$\frac{1}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\cdot\frac{\partial L^*}{\partial \tau} = \frac{\partial Y^*}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z^*}{\partial \eta} \text{ и т. д.} \quad (32б)$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как в неускоренной системе или пространстве, свободном от тяготения; но вместо c в них входит величина

$$c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right) = c\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Отсюда следует, что световые лучи, распространяющиеся не по оси X, искривляются гравитационным полем; изменение направления, как легко видеть, составляет $\frac{\gamma}{c^2}\sin\varphi$ на 1 см пути света, где φ означает угол между направлениями силы тяжести и светового луча.

| С помощью этих формул и уравнений для поля и электрического тока в точке, известных из оптики покоящихся сред, можно определить влияние гравитационного поля на оптические явления в покоящихся средах. При этом следует учитывать, что уравнения оптики покоящихся сред выполняются для местного времени σ. К сожалению, согласно нашей теории, влияние поля тяготения Земли так незначительно (вследствие того, что величина $\frac{\gamma x}{c^2}$ мала), что нет никаких перспектив на сравнение результатов теории с опытом.

Умножая уравнения (31а) и (32а) соответственно на $X^*/4\pi, \ldots$ $\ldots, N^*/4\pi$ и интегрируя по бесконечному пространству, получаем в наших прежних обозначениях

$$\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\rho}{4\pi}(u_\xi X+u_\eta Y+u_\zeta Z)\,d\omega+ \\ +\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)^2\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\sigma}(X^2+Y^2+\ldots+N^2)\,d\omega=0.$$

При этом

$$\frac{\rho}{4\pi}(u_\xi X+u_\eta Y+u_\zeta Z)$$

есть энергия η_σ, подводимая к веществу в единицу объема за единицу местного времени σ, при условии, что эта энергия измеряется прибором, находящимся в рассматриваемой области. Следовательно, согласно соотношению (30),

$$\eta_\sigma=\eta_\tau\left(1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$$

представляет собой энергию, подведенную (и так же измеренную) к веществу в единицу объема за единицу времени τ; $\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+\ldots+N^2)$ есть электромагнитная энергия ε на единицу объема, измеренная таким же способом. Учитывая далее, что, согласно (30), $\frac{\partial}{\partial\tau}=\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}$, получаем

$$\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\eta_\tau\,d\omega+\frac{d}{d\tau}\left\{\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\varepsilon\,d\omega\right\}=0.$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии и содержит весьма примечательный результат. Вкладу энергии $E = \varepsilon\, d\omega$ (или приросту энергии $\eta\, d\omega\, d\tau$) в интеграл энергии соответствует еще дополнительный вклад $(E/c^2)\,\gamma\xi = (E/c^2)\,\Phi$, связанный с местом, где находится E. Следовательно, каждому количеству энергии E в гравитационном поле соответствует потенциальная энергия, по величине равная потенциальной энергии «тяжелой» массы E/c^2.

Таким образом, выведенная в § 11 теорема о том, что энергии E соответствует масса величиной E/c^2, выполняется не только для *инертной*, но и для *тяготеющей* массы, если остается в силе предположение, введенное в § 17.

«...я навестил в 1912 г. моего старого студенческого друга Марселя Гроссмана, который тем временем стал профессором математики в Швейцарском политехникуме. ...Вышло так, что хотя он охотно согласился совместно работать над проблемой, но все-таки с тем ограничением, что он не берет на себя никакой ответственности за какие-либо физические утверждения и интерпретации. Он тщательно просмотрел литературу и скоро обнаружил, что указанная математическая проблема была уже решена прежде всего Риманом, Риччи и Леви-Чивитой. Это развитие в целом примыкало к теории кривизны поверхностей Гаусса; в этой теории впервые были систематически использованы обобщенные координаты. Достижения Римана были наибольшими. Он показал, как из поля тензоров g_{ik} можно получить вторые производные. Из этого следовало, как должны выглядеть уравнения поля гравитации в случае, если поставлено требование инвариантности относительно группы всех непрерывных преобразований координат. Однако не так легко было принять это требование как обоснованное, так как я считал, что против него можно найти какие-то возражения. Эта, разумеется, ошибочная мысль привела к тому, что в своей окончательной форме теория появилась только в 1916 г.»

(А. Эйнштейн. «Автобиографические наброски») [1]).

[1]) *Autobiographische Skizze.* Helle Zeit — dunkle Zeit. In Memorium Albert Einstein, Herausgegeben von Carl Seelig, Zürich, 1956 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 355).

А. ЭЙНШТЕЙН, М. ГРОССМАН

ПРОЕКТ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ*

I. ФИЗИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Излагаемая теория возникла на основе убеждения, что пропорциональность инертной и тяжелой масс является точным законом природы, который должен находить свое отражение уже в самих основах теоретической физики. Это убеждение я стремился отразить в ряде предыдущих работ [1], в которых делалась попытка свести *тяжелую* массу к *инертной*; это стремление привело меня к гипотезе о том, что поле тяжести (однородное в бесконечно малом объеме) физически можно полностью заменить ускоренной системой отсчета. Наглядно эту гипотезу можно сформулировать так: наблюдатель, находящийся в закрытом ящике, никаким способом не сможет установить, покоится ящик в статическом гравитационном поле или же находится в пространстве, свободном от гравитационных полей, но движется с ускорением, вызываемым приложенными к ящику силами (гипотеза эквивалентности).

Тот факт, что пропорциональность тяжелой и инертной масс выполняется всегда с чрезвычайно высокой точностью, мы знаем благодаря фундаментальному исследованию Этвеша [2], которое основано на следующем рассуждении. На тело, покоящееся на поверхности Земли, действует как сила тяжести, так и центробежная сила, возникающая вследствие вращения Земли. Первая из этих сил пропорциональна тяжелой, вторая — инертной массе. Следовательно, если бы пропорциональность инертной и тяжелой масс не соблюдалась, то направление равнодействующей этих двух сил, т. е. направление кажущейся силы тяжести (вертикаль-

---

* Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und Theorie der Gravitation. Zs. Math. und Phys., **62**, 225 (1913). (Перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 227—266; с незначительными исправлениями перепечатывается раздел I «Физическая часть», написанный Эйнштейном, стр. 227—247.)

[1]) *Einstein A.*, Ann. d. Phys., 35, 898 (1911); 38, 355 (1912). (Перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 165, 189.)

[2]) *Eötvös R.*, Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, Bd. VIII, 1890; Wiedemann Beiblätter, 15, 688 (1891).

ное направление), должно было бы зависеть от физической природы рассматриваемых тел. В этом случае кажущиеся силы тяжести, действующие на отдельные части неоднородной жесткой системы, вообще говоря, не сводились бы к одной равнодействующей; в общем случае оставался бы еще вращательный момент кажущихся сил тяжести, который можно было бы обнаружить при подвешивании системы на незакрученную нить. Установив с большой тщательностью отсутствие таких вращательных моментов, Этвеш показал, что для исследованных им тел отношение обеих масс не зависит от природы тела с такой точностью, что гипотетические относительные различия этого отношения для разных веществ не могут превышать одной двадцатимиллионной.

При распаде радиоактивных веществ выделяются столь значительные количества энергии, что изменение инертной массы системы, которое, согласно теории относительности, соответствует этой убыли энергии, не очень мало по сравнению с общей массой [1]). Например, при распаде радия эта убыль составляет 1/10 000 общей массы. Если бы этим изменениям инертной массы не соответствовали изменения тяжелой массы, то отклонения инертной массы от тяжелой должны были бы значительно превышать допускаемые опытами Этвеша. Поэтому следует считать весьма вероятным, что равенство инертной и тяжелой масс является точным. По этим причинам нам представляется, что и гипотеза эквивалентности, выражающая физическую равнозначность тяжелой и инертной масс, в высшей степени вероятна [2]).

§ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СТАТИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Согласно обычной теории относительности [3]), свободная точка движется в соответствии с соотношением

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\{\sqrt{-dx^2-dy^2-dz^2+c^2dt^2}\} = 0. \tag{1}$$

Это соотношение утверждает лишь, что материальная точка движется прямолинейно и равномерно. Оно представляет собой уравнение движения точки в форме Гамильтона, и его можно записать также в виде

$$\delta\left\{\int H\,dt\right\} = 0, \tag{1a}$$

[1]) Как известно, убыль инертной массы, соответствующая энергии E, составляет E/c^2, если c — скорость света.

[2]) См. также § 7 настоящей работы.

[3]) См., например, *Planck M.*, Verh. deutsch. phys. Ges., 1906, S. 136.

причем

$$H = -\frac{ds}{dt} m$$

а m — масса покоя материальной точки.

Отсюда известным способом получаются импульс (I_x, I_y, I_z) и энергия E движущейся материальной точки:

$$\begin{gathered} I_x = m \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m \frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad \text{и т. д.,} \\ E = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} \dot{z} - H = m \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - q^2}}. \end{gathered} \tag{2}$$

Эти выражения для энергии и импульса отличаются от обычных лишь тем, что в последних I_x, I_y, I_z и E содержат еще множитель c. Однако, поскольку в обычной теории относительности c постоянно, приведенные формулы эквивалентны обычным. Различие состоит лишь в том, что I и E имеют теперь иную размерность.

В предыдущих работах я показал, что гипотеза эквивалентности ведет к следствию, что в статическом гравитационном поле скорость c зависит от гравитационного потенциала. Тем самым я пришел к выводу, что обычная теория относительности является лишь приближенной; эта теория должна быть справедливой в предельном случае, когда в рассматриваемых пространственно-временных областях нет слишком больших изменений гравитационного потенциала. Кроме того, я обнаружил, что уравнениями движения материальной точки в статическом гравитационном поле по-прежнему служат уравнения (1) или (1а); однако при этом c следует рассматривать не как постоянную, а как функцию пространственных координат, представляющую меру гравитационного потенциала. Из соотношения (1а) известным способом получаются уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}\right\} = -\frac{mc \dfrac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2 - q^2}}. \tag{3}$$

Нетрудно увидеть, что выражение для количества движения остается таким же, как и выше. Вообще для материальной точки, движущейся в статическом гравитационном поле, справедливы формулы (2). Правая часть уравнения (3) представляет силу $\mathfrak{K}_x$, действующую на материальную точку со стороны гравитационного поля. В частном случае покоя ($q = 0$)

$$\mathfrak{K}_x = -m \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Отсюда видно, что c играет роль гравитационного потенциала. Из формул (2) для медленно движущейся материальной точки следует, что

$$I_x = \frac{m\dot{x}}{c},$$

$$E - mc = \frac{\frac{1}{2} mq^2}{c}. \tag{4}$$

Таким образом, при заданной скорости импульс и кинетическая энергия обратно пропорциональны величине c. Иначе говоря, инертная масса, входящая в выражение для импульса и энергии, есть m/c, где m — характерная для материальной точки постоянная, не зависящая от гравитационного потенциала. Это согласуется со смелой мыслью Маха о том, что причиной инерции является взаимодействие рассматриваемой материальной точки со всеми остальными; в самом деле, если мы поместим другие массы вблизи рассматриваемой материальной точки, то тем самым уменьшим гравитационный потенциал c и, следовательно, увеличим отношение m/c, определяющее инерцию.

§ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ХАРАКТЕРИСТИКА ПОСЛЕДНЕГО

Введя предположение, что величина c может изменяться в пространстве, мы вышли из рамок теории, называемой в настоящее время «теорией относительности», ибо величина, обозначаемая через c, теперь уже не будет инвариантом по отношению к линейным ортогональным преобразованиям. Следовательно, если принцип относительности должен остаться в силе — а это не подлежит сомнению,— то необходимо так обобщить теорию относительности, чтобы она содержала как частный случай намеченную ранее теорию статического поля тяжести.

Введем новую пространственно-временну́ю систему координат K' (x', y', z', t') с помощью произвольного преобразования

$$\begin{aligned}
x' &= x'(x, y, z, t),\\
y' &= y'(x, y, z, t),\\
z' &= z'(x, y, z, t),\\
t' &= t'(x, y, z, t).
\end{aligned}$$

Если в первоначальной системе отсчета K поле тяжести было статическим, то при этом преобразовании уравнение (1) перейдет в уравнение вида

$$\delta\left\{\int ds'\right\}=0,$$

причем

$$ds'^2=g_{11}\,dx'^2+g_{22}dy'^2+\ldots+2g_{12}dx'\,dy'+\ldots,$$

а величины $g_{\mu\nu}$ суть функции x', y', z', t'. Если вместо x', y', z', t' подставить соответственно x, y, z, t и вместо ds' написать ds, то уравнения движения материальной точки относительно системы K' примут вид

$$\delta\left\{\int ds\right\}=0, \tag{1'}$$

причем

$$ds^2=\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu.$$

Таким образом, мы приходим к убеждению, что в общем случае гравитационное поле характеризуется десятью пространственно-временными функциями

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{matrix}\qquad (g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}),$$

которые в случае обычной теории относительности соответственно равны

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & +c^2,\end{matrix}$$

где c — постоянная.

Вырождение такого же рода имеет место в статическом поле тяжести рассмотренного выше типа с тем отличием, что в этом случае $g_{44}=c^2$ есть функция от x_1, x_2, x_3.

Функция Гамильтона H в общем случае, таким образом, имеет вид

$$H=-m\frac{ds}{dt}=$$

$$=-m\sqrt{g_{11}\dot{x}_1^2+\ldots+2g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2+\ldots+2g_{14}\dot{x}_1+\ldots+g_{44}}. \tag{5}$$

Из соответствующих уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x}=0 \text{ и т. д.} \tag{6}$$

сразу получаются выражения для импульса I материальной точки и силы $\mathfrak{K}$, действующей на нее со стороны гравитационного поля:

$$I_x=-m\frac{g_{11}\dot{x}_1+g_{12}\dot{x}_2+g_{13}\dot{x}_3+g_{14}}{\dfrac{ds}{dt}}=$$

$$=-m\frac{g_{11}dx_1+g_{12}\,dx_2+g_{13}\,dx_3+g_{14}\,dx_4}{ds}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{K}_x=-\frac{1}{2}m\frac{\sum\limits_{\mu\nu}\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\,dx_\mu\,dx_\nu}{ds\cdot dt}=-\frac{1}{2}m\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{dt}. \tag{8}$$

Далее, для энергии E материальной точки получаем

$$-E=-\left(\dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}+\ldots\right)+H=$$

$$=-m\left(g_{41}\frac{dx_1}{ds}+g_{42}\frac{dx_2}{ds}+g_{43}\frac{dx_3}{ds}+g_{44}\frac{dx_4}{ds}\right). \tag{9}$$

В обычной теории относительности допускаются только линейные ортогональные преобразования. Мы покажем, что для описания воздействия гравитационного поля на материальные процессы можно составить уравнения, ковариантные относительно произвольных преобразований.

Прежде всего, исходя из роли, которую играет ds в законе движения материальной точки, мы можем заключить, что интервал ds должен быть абсолютным инвариантом (скаляром); отсюда следует, что величины $g_{\mu\nu}$ образуют ковариантный тензор второго ранга [1]), который мы будем называть ковариантным фундаментальным тензором. Последний определяет гравитационное поле. Далее, из формул (7) и (9) следует, что импульс и энергия материальной точки совместно образуют ковариантный тензор первого ранга, т. е. ковариантный вектор [2]).

---

[1]) См. часть II, § 1.
[2]) См. там же.

§ 3. ЗНАЧЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ТЕНЗОРА $g_{\mu\nu}$ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Из сказанного ранее можно сделать вывод, что между пространственно-временны́ми координатами x_1, x_2, x_3, x_4 и результатами измерений, полученными с помощью масштабов и часов, не существует такой простой связи, как в обычной теории относительности. По отношению ко времени это обнаружилось уже для статического гравитационного поля[1]). Поэтому возникает вопрос о физическом смысле (принципиальной измеримости) координат x_1, x_2, x_3, x_4.

Заметим к тому же, что ds следует понимать как инвариантную меру расстояния между двумя соседними пространственно-временны́ми точками. Поэтому интервал ds должен также иметь физический смысл независимо от выбранной системы отсчета. Предположим, что ds есть «естественно измеренное» расстояние между двумя пространственно-временны́ми точками; под этим мы будем понимать, что непосредственная окрестность точки (x_1, x_2, x_3, x_4) определяется в координатной системе бесконечно малыми переменными dx_1, dx_2, dx_3, dx_4. Представим себе, что вместо последних линейным преобразованием вводятся новые переменные $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$, так что выполняется равенство

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2.$$

При этом преобразовании $g_{\mu\nu}$ следует считать постоянными; вещественный конус $ds^2 = 0$ оказывается стянутым к своей оси. Тогда в этой элементарной $d\xi$-системе справедлива обычная теория относительности, а расстояния и промежутки времени имеют в этой системе такой же физический смысл, как и в обычной теории относительности, т. е. ds^2 есть квадрат четырехмерного расстояния между двумя бесконечно близкими точками, измеренного при помощи неускоренного в системе $d\xi$ твердого тела и покоящихся в этой системе единичных масштабов и часов.

Отсюда видно, что при данных dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 соответствующее этим дифференциалам естественное расстояние можно измерить только в том случае, если известны величины $g_{\mu\nu}$, определяющие гравитационное поле. Это же можно выразить так: гравитационное поле влияет на измерительные тела и часы вполне определенным образом.

Из основного равенства

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

[1]) См., например, *Einstein A.*, Ann. d. Phys., 35, 898 (1911).

видно, что для установления размерности величин $g_{\mu\nu}$ и x_ν требуется еще одно условие. Величина ds имеет размерность длины. Условимся, что x_ν (в том числе x_4) также имеют размерность длины; тогда величины $g_{\mu\nu}$ будут безразмерными.

§ 4. ДВИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕСВЯЗАННЫХ МАСС В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Для вывода закона движения непрерывно распределенных несвязанных масс вычислим импульс и пондеромоторную силу на единицу объема и применим затем закон сохранения импульса.

Для этого сначала вычислим трехмерный объем V нашей материальной точки. Рассмотрим бесконечно малый (четырехмерный) отрезок пространственно-временной траектории нашей материальной точки. Объем этого отрезка есть

$$\int\int\int\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = V\, dt.$$

Если вместо dx ввести естественные дифференциалы $d\xi$, причем измерительный масштаб предполагать покоящимся относительно материальной точки, то получим

$$\int\int\int d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 = V_0,$$

т. е. «покоящийся объем» материальной точки. Далее,

$$\int d\xi_4 = ds,$$

где ds имеет тот же смысл, что и выше.

Если дифференциалы dx связаны с $d\xi$ соотношениями

$$dx_\mu = \sum_\sigma \alpha_{\mu\sigma}\, d\xi_\sigma,$$

то

$$\int\int\int\int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 = \int\int\int\int \frac{\partial\,(dx_1,\, dx_2,\, dx_3,\, dx_4)}{\partial\,(d\xi_1,\, d\xi_2,\, d\xi_3,\, d\xi_4)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3\, d\xi_4,$$

или

$$V\, dt = V_0\, ds \cdot |\, \alpha_{\rho\sigma}\, |.$$

Однако, так как

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \sum_{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\sigma}\, d\xi_\rho\, d\xi_\sigma = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2,$$

то между определителем

$$g = |\, g_{\mu\nu}\, |,$$

т. е. дискриминантом квадратичной дифференциальной формы ds^2, и определителем преобразования $|\alpha_{\rho\sigma}|$ существует соотношение

$$g\cdot|\alpha_{\rho\sigma}|^2 = -1,$$

или

$$|\alpha_{\rho\sigma}| = \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Следовательно, для V получаем соотношение

$$V\,dt = V_0\,ds\cdot\frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Отсюда с помощью равенств (7), (8) и (9) после замены $\frac{m}{V_0}$ на ρ_0 получаем

$$\frac{I_x}{V} = -\rho_0\sqrt{-g}\cdot\sum_{\nu} g_{1\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\cdot\frac{dx_4}{ds},$$

$$\frac{-E}{V} = -\rho_0\sqrt{-g}\cdot\sum_{\nu} g_{4\nu}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}\cdot\frac{dx_4}{ds},$$

$$\frac{\mathfrak{K}_x}{V} = -\frac{1}{2}\rho_0\sqrt{-g}\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}.$$

Заметим, что

$$\Theta_{\mu\nu} = \rho_0\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}$$

есть контравариантный тензор второго ранга относительно произвольных преобразований. Из сказанного выше можно предположить, что закон сохранения энергии-импульса имеет вид

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Theta_{\mu\nu} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

Первые три из этих соотношений ($\sigma = 1, 2, 3$) выражают закон сохранения импульса, последнее ($\sigma = 4$) — закон сохранения энергии. Эти соотношения действительно оказываются ковариантными относительно произвольных преобразований [1]).

Кроме того, интегрированием по линии тока из этих соотношений можно снова получить наши исходные уравнения движения материальной точки.

[1]) Ср. часть II, § 4, пункт 1.

Тензор $\Theta_{\mu\nu}$ назовем (контравариантным) тензором энергии-натяжений материальных тел. Соотношению (10) мы приписываем область применимости, далеко выходящую за рамки частного случая движения несвязанных масс. Это соотношение выражает вообще энергетический баланс между гравитационным полем и любой материальной системой; необходимо лишь придавать $\Theta_{\mu\nu}$ то значение, которое соответствует тензору энергии-натяжений рассматриваемой системы. Первая сумма в указанном соотношении содержит пространственные производные натяжений или плотности потока энергии и временны́е производные импульса или плотности энергии; вторая сумма выражает влияние гравитационного поля на материальный процесс.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

После того как мы получили выражение энергии-импульса для материальных явлений (механических, электрических и других) в их связи с гравитационным полем, перед нами стоит еще следующая задача. Пусть задан тензор $\Theta_{\mu\nu}$ для материальной системы. Какими будут дифференциальные уравнения, позволяющие определить величины g_{ik}, т. е. гравитационное поле? Другими словами, мы ищем обобщение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\varkappa\rho.$$

Для решения этой задачи мы не нашли метода, который был бы столь же естественным, как в случае предыдущей задачи. Нам пришлось ввести некоторые далеко не очевидные, хотя и вероятные допущения.

Искомое уравнение, по всей вероятности, должно иметь вид

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}, \tag{11}$$

где $\varkappa$ — постоянная, $\Gamma_{\mu\nu}$ — контравариантный тензор второго ранга, образованный из производных фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$.

В соответствии с законом Ньютона — Пуассона представляется разумным потребовать, чтобы эти уравнения (11) были уравнениями *второго* порядка. Однако следует возразить, что это предположение не позволяет найти дифференциальное выражение, являющееся обобщением $\Delta\varphi$, которое было бы тензором [1]) по отношению к произвольным преобразованиям. Априори нельзя утверждать, что окончательные точные уравнения гравитации не могут содержать производных выше второго порядка. Поэтому все еще существует возможность, что окончательные точные дифференциальные уравнения гравитации могут быть ковариантными относительно

[1]) Ср. часть II, § 4, пункт 2.

произвольных преобразований. Однако при современном состоянии наших знаний о физических свойствах гравитационного поля обсуждение подобных возможностей было бы преждевременным. Поэтому мы вынуждены ограничиться уравнениями второго порядка и, следовательно, отказаться от поисков уравнений гравитации, ковариантных относительно произвольных преобразований. Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что у нас нет никаких оснований для общей ковариантности уравнений гравитации [1]).

Скалярный лапласиан $\Delta\varphi$ получается из скаляра φ посредством применения последовательных операций градиента и дивергенции. Обе операции можно обобщить так, что они могут применяться к каждому тензору сколь угодно высокого ранга, допуская при этом произвольные замены основных переменных [2]). Однако эти операции вырождаются, если их проделать над фундаментальным тензором $g_{\mu\nu}$. Отсюда, по-видимому, следует, что искомые уравнения должны быть ковариантными относительно только одной определенной, пока неизвестной нам, группы преобразований.

Обращаясь к прежней теории относительности, естественно предположить при этих обстоятельствах, что в искомую группу преобразований должны входить линейные преобразования. Следовательно, мы требуем, чтобы величины $\Gamma_{\mu\nu}$ составляли тензор относительно произвольных линейных преобразований.

Выполнив преобразование, легко доказать следующие теоремы.

1. Если $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ есть контравариантный тензор ранга n относительно линейных преобразований, то величина

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_\mu}$$

есть контравариантный тензор ранга $n+1$ относительно линейных преобразований (расширение) [3]).

2. Если $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ есть контравариантный тензор ранга n относительно линейных преобразований, то

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}}{\partial x_\lambda}$$

есть контравариантный тензор ранга $n-1$ относительно линейных преобразований (дивергенция).

Выполняя над некоторым тензором обе операции поочередно, мы получаем тензор того же ранга, что и первоначальный (опе-

---

[1]) См. также соображения, приведенные в начале § 6.

[2]) Ср. часть II, § 2.

[3]) $\gamma_{\mu\nu}$ есть контравариантный тензор, обратный $g_{\mu\nu}$ (см. часть II, § 1).

рация Δ, примененная к тензору). Применяя эти операции к фундаментальному тензору, получаем

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \tag{a}$$

Следующее рассуждение показывает, что этот оператор является родственным оператору Лапласа. В обычной теории относительности (когда гравитационное поле отсутствует) следовало бы положить

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1, \qquad g_{44}=c^2, \qquad g_{\mu\nu}=0 \text{ для } \mu\neq\nu;$$

следовательно,

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=-1, \qquad \gamma_{44}=\frac{1}{c^2}, \qquad \gamma_{\mu\nu}=0 \text{ для } \mu\neq\nu.$$

Если же имеется достаточно слабое гравитационное поле, т. е. если $g_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ отличаются от этих значений на бесконечно малую величину, то, пренебрегая членами второго порядка, вместо выражения (a) получаем

$$-\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2}\right).$$

Если поле статическое и переменной является только величина g_{44}, то мы приходим к случаю ньютоновской теории гравитации, если положим, что полученное выражение с точностью до постоянного множителя отождествляется с величиной $\Gamma_{\mu\nu}$.

Поэтому можно считать, что выражение (a) с точностью до постоянного множителя и есть искомое обобщение $\Delta\varphi$. Однако это было бы ошибкой, ибо при таком обобщении в подобное выражение могли бы войти члены, сами являющиеся тензорами и обращающиеся в нуль в результате сделанных допущений. Это относится к тем случаям, когда две первые производные $g_{\mu\nu}$ или $\gamma_{\mu\nu}$ умножаются друг на друга. Так, например,

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}$$

есть ковариантный тензор второго ранга (относительно линейных преобразований); он становится величиной, бесконечно малой второго порядка, когда $g_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ отличаются от постоянных лишь на бесконечно малые величины первого порядка. Поэтому необходимо допустить, что в $\Gamma_{\mu\nu}$ наряду с (a) входят еще другие члены, для которых пока должно выполняться только одно условие, а именно: они все вместе должны иметь тензорный характер относительно линейных преобразований.

Для отыскания этих членов обратимся к закону сохранения энергии-импульса. Для пояснения применяемого метода продемонстрируем его сначала на общеизвестном примере.

В электростатике $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\rho$ есть ν-я компонента импульса, передаваемая единичному объему вещества, если φ означает электростатический потенциал, а ρ — плотность заряда. Для φ ищется дифференциальное уравнение, которое всегда удовлетворяет закону сохранения импульса. Известно, что решением задачи служит уравнение

$$\sum_\nu \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu^2} = -\rho.$$

Выполнение закона сохранения импульса доказывается тождеством

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right] = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\sum_\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}\left(=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\cdot\rho\right).$$

Итак, если импульс сохраняется, то для каждого ν должно существовать тождество следующей структуры: в правой части стоит произведение $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}$ на левую часть дифференциального уравнения, в левой части — сумма производных.

Если бы дифференциальное уравнение для φ еще не было известно, то задача его получения свелась бы к нахождению этого тождества. Для нас существенно только то, что это тождество можно вывести, зная один из входящих в него членов. Необходимо лишь повторно применять правило дифференцирования произведения

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v + \frac{\partial v}{\partial x_\nu}u$$

и

$$u\frac{\partial v}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) - \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v,$$

а затем переносить производные в левую часть, остальные члены в правую часть. Например, если исходить из первого члена написанного выше тождества, то поочередно получим

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right) = \sum_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} + \sum_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu\partial x_\mu} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\sum_\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right\},$$

откуда после перегруппировки следует указанное тождество.

Вернемся теперь к нашей задаче. Из соотношения (10) следует, что

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu}\quad(\sigma=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

есть импульс (или энергия), передаваемый гравитационным полем единице объема вещества. Чтобы выполнялся закон сохранения энергии-импульса, необходимо так выбрать дифференциальные выражения $\Gamma_{\mu\nu}$, входящие в уравнения гравитации

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu},$$

чтобы сумму

$$\frac{1}{2\varkappa}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Gamma_{\mu\nu}$$

можно было преобразовать в сумму производных. В то же время известно, что в искомое уравнение для $\Gamma_{\mu\nu}$ входит член (a).

Следовательно, искомое тождество имеет вид

$$\text{Сумма производных}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\text{другие члены, обращающиеся в нуль в первом приближении}\right\}.$$

Тем самым искомое тождество определяется однозначно; образуя его указанным выше способом, получаем

$$\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}\right)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right)=$$

$$=\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)-\right.$$

$$-\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\rho}\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}-$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right\}.\qquad(12)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части, и есть искомый тензор, входящий в уравнения гравитации

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu}.\qquad(13)$$

Для лучшего обозрения этих уравнений введем следующее сокращенное обозначение:

$$-2\varkappa\vartheta_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right).$$

Назовем $\vartheta_{\mu\nu}$ *«контравариантным тензором энергии-натяжений гравитационного поля»*. Взаимный ему ковариантный тензор обозначим через $t_{\mu\nu}$:

$$-2\varkappa t_{\mu\nu}=\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\left(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right). \tag{14}$$

Для операций дифференцирования, выполняемых над фундаментальными тензорами $\gamma_{\mu\nu}$ или $g_{\mu\nu}$, введем следующие обозначения:

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma)=\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)-\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\rho}\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\nu\rho}}{\partial x_\beta} \tag{15}$$

и

$$D_{\mu\nu}(g)=\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)-$$
$$-\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\tau\rho}\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_\beta}. \tag{16}$$

Каждый из этих операторов порождает тензор того же ранга (относительно линейных преобразований).

С этими сокращенными обозначениями тождество (12) принимает вид

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\varkappa\vartheta_{\mu\nu}\}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\{-\Delta_{\mu\nu}(\gamma)+\varkappa\vartheta_{\mu\nu}\} \tag{12а}$$

или также

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\{\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu}\cdot\varkappa t_{\mu\sigma}\}=\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\{-D_{\mu\nu}(g)-\varkappa t_{\mu\nu}\}. \tag{12б}$$

Написав соотношения (10) и (12а) соответственно для вещества и для гравитационного поля в виде

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\Theta_{\mu\nu})-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Theta_{\mu\nu}=0, \tag{10}$$

$$\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\vartheta_{\mu\nu})-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\vartheta_{\mu\nu}=$$
$$=-\frac{1}{2\varkappa}\cdot\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Delta_{\mu\nu}(\gamma), \tag{12в}$$

мы видим, что тензор $\vartheta_{\mu\nu}$ энергии-натяжений гравитационного поля входит в соотношение, выражающее закон сохранения для гравитационного поля, совершенно таким же образом, как и тензор $\Theta_{\mu\nu}$ материального процесса в соотношение закона сохранения для этого процесса. Это обстоятельство весьма примечательно, если учесть различие вывода этих уравнений.

Из соотношения (12а) следует выражение для дифференциального тензора, входящего в уравнение гравитации:

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(\gamma) - \varkappa\vartheta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Следовательно, уравнения гравитации (11) принимают вид

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \varkappa(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}). \tag{18}$$

Эти уравнения удовлетворяют требованию, по нашему мнению, обязательному для релятивистской теории гравитации; именно, они показывают, что тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям.

Складывая соотношения (10) и (12а) и принимая во внимание уравнение (18), находим

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\sqrt{-g}\cdot g_{\sigma\mu}(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\right\} = 0 \quad (\sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{19}$$

Отсюда видно, что соотношения для законов сохранения справедливы для вещества и гравитационного поля, вместе взятых.

Выше мы отдавали предпочтение контравариантным тензорам, поскольку контравариантный тензор энергии-натяжений для движения несвязанных масс выражается особенно просто. Однако полученные уравнения можно столь же просто выразить и через ковариантные тензоры. В этом случае вместо $\Theta_{\mu\nu}$ мы должны взять в качестве тензора энергии-натяжений для материального процесса $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\Theta_{\alpha\beta}$.

Вместо соотношения (10) почленным преобразованием получим

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\mu\nu}T_{\mu\sigma}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot T_{\mu\nu} = 0. \tag{20}$$

Из этого соотношения и равенства (16) следует, что уравнения гравитационного поля можно записать также в виде

$$-D_{\mu\nu}(g) = \varkappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}); \tag{21}$$

это можно получить и непосредственно из уравнений (18). Аналогом равенства (19) является соотношение

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} (T_{\sigma\nu} + t_{\sigma\nu})\} = 0. \qquad (22)$$

§ 6. ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ НА ФИЗИЧЕСКИЕ, В ЧАСТНОСТИ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ, ПРОЦЕССЫ

Поскольку во всех физических процессах большую роль играют импульс и энергия, которые определяют гравитационное поле и на которые это поле в свою очередь воздействует, величины $g_{\mu\nu}$, определяющие поле тяжести, должны входить во все физические уравнения. Мы уже видели, что движение материальной точки описывается уравнением

$$\delta\left\{\int ds\right\} = 0,$$

причем

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu.$$

Интервал ds является инвариантом по отношению к произвольным преобразованиям. Искомые уравнения, определяющие ход того или иного физического процесса, должны быть построены так, чтобы из инвариантности ds следовала ковариантность соответствующей системы уравнений.

Однако при попытке выполнить эту общую задачу мы наталкиваемся на принципиальную трудность. Мы не знаем, относительно какой группы преобразований должны быть ковариантны искомые уравнения. Сначала наиболее естественным кажется требование ковариантности системы уравнений относительно *произвольных* преобразований. Однако такому требованию противоречит тот факт, что построенные нами уравнения гравитационного поля этим свойством не обладают. Мы смогли показать, что уравнения гравитационного поля ковариантны лишь относительно произвольных *линейных* преобразований; однако мы не знаем, существует ли общая группа преобразований, относительно которой ковариантны эти уравнения. Вопрос о существовании такой группы преобразований для системы уравнений (18) или (21) имеет важнейшее значение для рассматриваемой здесь задачи. Во всяком случае, при современном состоянии теории мы не можем требовать ковариантности уравнений относительно произвольных преобразований.

Однако в то же время мы видели, что для материальных процессов можно составить уравнение баланса энергии-импульса [§ 4, соотношение (10)], которое допускает произвольные преобразования. Поэтому все же естественно предположить, что все физические уравнения, за исключением уравнений гравитационного поля, следует сформулировать так, чтобы они были ковариантны относительно произвольных преобразований. Такое исключительное положение уравнений гравитационного поля связано, по нашему мнению, с тем, что они могут содержать лишь первые две производные от составляющих фундаментального тензора.

Для составления упомянутых систем уравнений требуется вспомогательный аппарат — обобщенный векторный анализ в том виде, в каком он излагается в части II настоящей работы.

Мы ограничимся пока тем, что укажем, как этим способом получить уравнения электромагнитного поля в вакууме [1]). Мы исходим из того, что электрический заряд следует рассматривать как нечто неизменное. Пусть произвольно движущееся тело с бесконечно малой массой имеет заряд e и объем dV_0 (покоящийся объем) в системе, движущейся вместе с телом. Определим истинную плотность электрического заряда как $e/dV_0 = \rho_0$; по определению она является скаляром. Поэтому

$$\rho_0 \frac{dx_\nu}{ds} \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

есть контравариантный 4-вектор, который мы сейчас преобразуем, определив плотность электрического заряда ρ в данной координатной системе равенством

$$\rho_0\, dV_0 = \rho\, dV.$$

Воспользовавшись соотношением из § 4

$$dV_0\, ds = \sqrt{-g}\ dV \cdot dt,$$

получим

$$\rho_0 \frac{dx_\nu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \rho \frac{dx_\nu}{dt},$$

т. е. контравариантный вектор плотности электрического тока.

Электромагнитное поле мы сведем к контравариантному тензору второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$ специального вида (6-вектору) и образуем «дуальный» контравариантный тензор второго ранга $\varphi^*_{\mu\nu}$ по методу, изложенному в § 3 части II [формула (42)]. Дивергенция этого контравариантного тензора второго ранга, согласно формуле (40) § 3 части II, есть

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot \varphi^*_{\mu\nu}\right).$$

[1]) См. в связи с этим также стр. 23 (§ 3) работы Коттлера [*Kottler F.*, Über die Raumzeitlinien der minkowskischen Welt, Wien, Berlin, 1912, 121].

Обобщением уравнений Максвелла — Лоренца будут уравнения

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}) = \rho \frac{dx_{\mu}}{dt}, \tag{23}$$

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\sqrt{-g} \cdot \varphi^{*}_{\mu\nu}) = 0 \tag{24}$$

($dt = dx_4$), ковариантность которых очевидна. Если ввести обозначения

$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{23} = \mathfrak{H}_x, \qquad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{31} = \mathfrak{H}_y, \qquad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{12} = \mathfrak{H}_z,$$
$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{14} = -\mathfrak{E}_x, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{24} = -\mathfrak{E}_y, \quad \sqrt{-g} \cdot \varphi_{34} = -\mathfrak{E}_z,$$
$$\rho \frac{dx_{\mu}}{dt} = u_{\mu},$$

то система уравнений (23) в более подробной записи примет вид

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = u_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \rho.$$

Эти уравнения с точностью до выбора единиц совпадают с первой группой уравнений Максвелла. Для получения второй группы уравнений Максвелла необходимо сначала принять во внимание, что к составляющим

$$\mathfrak{H}_x, \ \mathfrak{H}_y, \ \mathfrak{H}_z, \quad -\mathfrak{E}_x, \quad -\mathfrak{E}_y, -\mathfrak{E}_z$$

тензора $\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}$ принадлежат компоненты дополнения $f_{\mu\nu}$ [часть II, § 3, формулы (41a)]

$$-\mathfrak{E}_x, \ -\mathfrak{E}_y, \ -\mathfrak{E}_z, \quad \mathfrak{H}_x, \ \mathfrak{H}_y, \ \mathfrak{H}_z.$$

В отсутствие гравитационного поля отсюда получается вторая группа, т. е. уравнение (24) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0.$$

Тем самым показано, что полученные выше уравнения обобщают уравнения обычной теории относительности.

§ 7. МОЖНО ЛИ СВЕСТИ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ К СКАЛЯРУ?

Ввиду бесспорной сложности изложенной выше теории гравитации необходимо со всей серьезностью поставить вопрос о том, является ли разумной и оправданной только та точка зрения, которая высказывалась до настоящего времени и согласно которой гравитационное поле сводится к скаляру. Кратко разъясним причины, почему ответ на этот вопрос должен быть, по-видимому, отрицательным.

Для сведéния гравитационного поля к скаляру необходимо следовать по пути, совершенно аналогичному тому, которому мы следовали выше. В качестве уравнений движения материальной точки в форме Гамильтона следует взять

$$\delta\left\{\int \Phi\, ds\right\} = 0,$$

где ds — четырехмерный элемент длины в обычной теории относительности и Φ — скаляр, а затем следует продвигаться дальше в полной аналогии с вышеизложенным, но не выходя за пределы обычной теории относительности.

Любой материальный процесс и в этом случае характеризуется тензором энергии-натяжений $T_{\mu\nu}$. Однако при этом взаимодействие между гравитационным полем и материальной системой определяется скаляром. Этот скаляр, как указал Лауэ, может быть только вида

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = P,$$

и мы будем называть его «скаляром Лауэ». В этом случае можно до известной степени оправдать закон эквивалентности инертной и тяжелой масс. Лауэ обратил внимание на то, что для замкнутой системы выполняется равенство

$$\int P\, dV = \int T_{44}\, d\tau$$

Отсюда видно, что, согласно этой точке зрения, тяготение в замкнутой системе определяется ее полной энергией.

Однако тяготение незамкнутой системы зависело бы от натяжений T_{11} и т. д., которым подвержена система. Отсюда возникают следствия, которые, как будет показано на примере излучения в полости, представляются нам неприемлемыми.

Для излучения в вакууме скаляр P, как известно, равен нулю. Если излучение заключено в невесомый зеркальный ящик, то стенки ящика испытывают напряжения растяжения; вся система как целое обладает тяжелой массой $\int P\, d\tau$ и соответствующей энергией E.

Теперь представим себе, что излучение находится не в полом ящике, а что оно ограничено: 1) неподвижными зеркальными стенками закрепленной шахты S, 2) двумя зеркальными стенками W_1 и W_2, которые могут двигаться в вертикальном направлении. В этом случае тяжелая масса $\int P\, d\tau$ подвижной системы составляет только одну треть значения, которое она принимает в случае

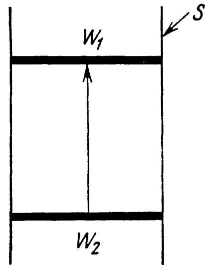


Рис. 1

ящика, могущего двигаться как целое. Тогда, если подымать ящик с излучением против гравитационного поля, то в этом случае пришлось бы затратить только одну треть той работы, которая затрачивалась в только что рассмотренном случае, когда излучение заперто в ящике. Это представляется нам неприемлемым.

Однако, с моей точки зрения, самое действенное возражение против подобной теории основано на убеждении, что относительность справедлива не только для ортогональных линейных преобразований, но и для значительно более широкой группы преобразований. Однако мы не можем считать это возражение решающим хотя бы потому, что нам не удалось отыскать (наиболее общую) группу преобразований, связанную с нашими уравнениями гравитации.

Д. ГИЛЬБЕРТ

ОСНОВАНИЯ ФИЗИКИ*

(Первое сообщение)

Решительный подход Эйнштейна [1, 2] к постановке проблем, а также остроумные методы, предлагаемые им для их решения, его глубокие идеи и новые вводимые им понятия, на основе которых Ми [3] строит свою электродинамику, открывают новые пути исследования оснований физики.

Ниже я хочу, следуя аксиоматическому методу, установить в сущности на основании двух простых аксиом новую систему фундаментальных уравнений физики, обладающих идеальной красотой и содержащих, как я полагаю, *одновременно* решение проблем и Эйнштейна, и Ми. Более строгий вывод, а также — и прежде всего — конкретное приложение моих фундаментальных уравнений к коренным вопросам учения об электричестве я откладываю до следующих сообщений.

Пусть w_s ($s = 1, 2, 3, 4$) — координаты, которыми однозначно определяются мировые точки, т. е. это так называемые мировые параметры (наиболее общие пространственно-временные координаты). Событие в точке w_s характеризуют следующие величины:

1) десять впервые введенных Эйнштейном гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$), симметричных и обладающих тензорными свойствами относительно произвольных преобразований мировых параметров w_s;

2) четыре электродинамических потенциала q_s, обладающих в том же смысле векторными свойствами.

Физическое событие не является произвольным, но подчиняется следующим двум аксиомам.

Аксиома I [аксиома Ми о мировой функции [1])]: *Закон физи-*

---

* *Hilbert D.*, Die Grundlagen der Physik, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, Heft 3, S. 395.

[1]) Аргументы мировых функций Ми не совсем такие; в частности, аргументы (2) введены Борном. Но для электродинамики Ми наиболее характерно введение и применение мировой функции такого рода в принципе Гамильтона.

ческого события определяется мировой функцией H, аргументы которой таковы:

$$g_{\mu\nu},\ g_{\mu\nu l}=\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l},\qquad g_{\mu\nu lk}=\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l\,\partial w_k}, \tag{1}$$

$$q_s,\ q_{sl}=\frac{\partial q_s}{\partial w_l}\quad (l,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{2}$$

причем вариация интеграла

$$\int H\sqrt{g}\,d\omega$$

$$(g=|g_{\mu\nu}|,\ \ d\omega=dw_1\,dw_2\,dw_3\,dw_4)$$

обращается в нуль для каждого из 14 потенциалов $g_{\mu\nu}$ и q_s.

Вместо аргументов (1) могут, конечно, быть взяты аргументы

$$g^{\mu\nu},\ g_l^{\mu\nu}=\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l},\qquad g_{lk}^{\mu\nu}=\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w_l\,\partial w_k}, \tag{3}$$

где под $g^{\mu\nu}$ понимается алгебраическое дополнение элемента $g^{\mu\nu}$ в определителе g, деленное на g.

Аксиома II [аксиома общей инвариантности [1])]: *Мировая функция H инвариантна относительно произвольных преобразований мирового параметра w_s.*

Аксиома II простейшим образом математически выражает требование, чтобы сама по себе связь между потенциалами $g_{\mu\nu}$ и q_s совершенно не зависела от того, как определяются мировыми параметрами мировые точки.

Лейтмотив построения моей теории задается следующей математической теоремой, доказательство которой я приведу в другом месте.

Теорема I. Пусть J — инвариант относительно произвольных преобразований 4 мировых параметров, зависящий от n величин и их производных, и пусть из вариационного уравнения

$$\delta\int J\sqrt{g}\,dw=0$$

по отношению к этим n величинам строятся n вариационных уравнений Лагранжа. Тогда из этой инвариантной системы n дифференциальных уравнений для n величин четыре уравнения всегда будут следствиями остальных $n-4$ в том смысле, что для этих n дифференциальных уравнений и их полных производных всегда

---

[1]) Требование ортогональной инвариантности было выдвинуто еще Ми. В сформулированной выше аксиоме II находит свое простейшее выражение основополагающая идея Эйнштейна об общей инвариантности, хотя у самого Эйнштейна принципу Гамильтона отводится лишь второстепенная роль, а его функции H вовсе не являются общими инвариантами и к тому же не зависят от электрических потенциалов.

тождественно выполняются 4 линейные и не зависящие одна от другой комбинации.

Заметим сразу же относительно производных по $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$ и $g_{kl}^{\mu\nu}$, входящих в уравнение (4) и последующие формулы, что вследствие симметрии по μ и ν, с одной стороны, и по k и l, с другой — производные по $g^{\mu\nu}$ и $g_k^{\mu\nu}$ должны умножаться на 1 при $\mu=\nu$ и на $^1/_2$ при $\mu\neq\nu$, тогда как производные по $g_{kl}^{\mu\nu}$ должны умножаться на 1 при $\mu=\nu$ и $k=l$, на $^1/_2$ при $\mu=\nu$ и $k\neq l$ или $\mu\neq\nu$ и $k=l$ и на $^1/_4$ при $\mu\neq\nu$ и $k\neq l$.

Из аксиомы I при варьировании по 10 гравитационным потенциалам $g^{\mu\nu}$ следуют 10 дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g^{\mu\nu}}-\sum_k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_k^{\mu\nu}}+\\+\sum_{k,\,l}\frac{\partial^2}{\partial w_k\,\partial w_l}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}=0\quad(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4),\tag{4}$$

а при варьировании по 4 потенциалам электродинамики q_s — 4 дифференциальных уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_h}-\sum_k\frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{hk}}=0\quad(h=1,\ 2,\ 3,\ 4).\tag{5}$$

Для краткости обозначим левые части уравнений (4) и (5) символами

$$[\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\quad\text{и}\quad[\sqrt{g}H]_h.$$

Будем называть уравнения (4) основными уравнениями гравитации, а уравнения (5) — основными уравнениями электродинамики или обобщенными уравнениями Максвелла. На основании теоремы I четыре уравнения (5) можно рассматривать как следствия уравнений (4), т. е. непосредственно на основании этой математической теоремы можно утверждать, *что в указанном смысле явления электродинамики представляют собой эффекты гравитации.* В этом выводе я усматриваю простое и совершенно неожиданное решение проблемы Римана, первым начавшего теоретические изыскания относительно взаимосвязи между тяготением и светом.

Далее мы воспользуемся тем, что, как легко доказать, если обозначить через p^j $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *произвольный* контравариантный вектор, то величина

$$p^{\mu\nu}=\sum_s(g_s^{\mu\nu}p^s-g^{\mu s}p_s^{\nu}-g^{\nu s}p_s^{\mu})\quad\left(p_s^j=\frac{\partial p^j}{\partial w_s}\right)$$

представляет собой симметричный контравариантный тензор, а величина

$$p_l = \sum_s (q_{ls}p^s + q_s p_l^s)$$

есть ковариантный вектор.

Для дальнейшего анализа мы докажем две математические теоремы, формулируемые следующим образом.

Теорема II. Если J — инвариант, зависящий от $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, $g_{lk}^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk}, то для любого произвольного контравариантного вектора p^s тождественно по всем аргументам выполняется равенство

$$\sum_{\mu, \nu, l, k} \left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}} \Delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}} \Delta g_l^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}} \Delta g_{lk}^{\mu\nu} \right) + \\ + \sum_{s, k} \left(\frac{\partial J}{\partial q_s} \Delta q_s + \frac{\partial J}{\partial q_{sk}} \Delta q_{sk} \right) = 0,$$

где

$$\Delta g^{\mu\nu} = \sum_m (g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu),$$

$$\Delta g_l^{\mu\nu} = -\sum_m g_m^{\mu\nu} p_l^m + \frac{\partial \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l},$$

$$\Delta g_{lk}^{\mu\nu} = -\sum_m (g_m^{\mu\nu} p_{lk}^m + g_{lm}^{\mu\nu} p_k^m + g_{km}^{\mu\nu} p_l^m) + \frac{\partial^2 \Delta g^{\mu\nu}}{\partial w_l \, \partial w_k},$$

$$\Delta q_s = -\sum_m q_m p_s^m,$$

$$\Delta q_{sk} = -\sum_m q_{sm} p_k^m + \frac{\partial \Delta q_s}{\partial w_k}.$$

Теорему II можно сформулировать и иначе.

Если, как и раньше, J — инвариант, а p^s — произвольный вектор, то выполняется тождество

$$\sum_s \frac{\partial J}{\partial w_s} p^s = PJ, \tag{6}$$

причем

$$P = P_g + P_q,$$

$$P_g = \sum_{\mu, \nu, l, k} \left(p^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p_l^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}} + p_{lk}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}} \right),$$

$$P_q = \sum_{l, k} \left(p_l \frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk} \frac{\partial}{\partial q_{lk}} \right),$$

где используются обозначения

$$p_k^{\mu\nu}=\frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial \omega_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu}=\frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k\,\partial w_l}, \quad p_{lk}=\frac{\partial p_l}{\partial w_k}.$$

Доказывается тождество (6) просто: оно, очевидно, справедливо для постоянного вектора p^s, а следовательно, ввиду своей инвариантности справедливо и вообще.

Теорема III. Пусть J — инвариант, зависящий только от компонент $g^{\mu\nu}$ и их производных, а через $[\sqrt{g}J]_{\mu\nu}$, как и прежде, обозначены вариационные производные от $\sqrt{g}J$ по $g^{\mu\nu}$. Тогда, если $h^{\mu\nu}$ — любой контравариантный тензор, то величина

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{\mu,\,\nu}[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$$

также будет инвариантом; если подставить в эту сумму вместо $h^{\mu\nu}$ стандартный тензор $p^{\mu\nu}$ и написать

$$\sum_{\mu,\,\nu}[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}\,p^{\mu\nu}=\sum_{s,\,l}(i_s p^s+i_s^l p_l^s),$$

где конструкции

$$i_s=\sum_{\mu,\,\nu}[\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu}\,g_s^{\mu\nu},$$

$$i_s^l=-2\sum_{\mu}[\sqrt{g}\,J]_{\mu s}\,g^{\mu l}$$

зависят только от $g^{\mu\nu}$ и их производных, то

$$i_s=\sum_{l}\frac{\partial i_s^l}{\partial w_l}, \tag{7}$$

причем данное уравнение выполняется тождественно для всех аргументов, а именно для $g^{\mu\nu}$ и их производных.

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим интеграл

$$\int J\sqrt{g}\,d\omega, \quad d\omega=dw_1\,dw_2\,dw_3\,dw_4,$$

по конечной области четырехмерного мира. При этом вектор p^s должен вместе со своими производными обращаться в нуль на трехмерной границе этой мировой области. Поскольку $P=P_g$, из равенства (13) следует, что

$$P_g(\sqrt{g}\,J)=\sum_{s}\frac{\partial\sqrt{g}\,Jp^s}{\partial w_s},$$

откуда

$$\int P_g(J\sqrt{g})\,d\omega=0,$$

а по правилу построения производной Лагранжа и

$$\int \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}\, J]_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu}\, d\omega = 0.$$

Вводя, наконец, в это тождество величины i_s и i_s^l, получаем

$$\int \Big(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} - i_s \Big)\, p^s\, d\omega = 0,$$

чем и доказывается наша теорема.

Теперь важнее всего определить понятие энергии и вывести закон ее сохранения, опираясь лишь на аксиомы I и II.

Для этого мы сначала определим

$$P_g(\sqrt{g}H) = \sum_{\mu,\nu,k,l} \left(\frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g^{\mu\nu}}\, p^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_k^{\mu\nu}}\, p_k^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}\, p_{kl}^{\mu\nu} \right).$$

Здесь $\partial H / \partial g_{kl}^{\mu\nu}$ — смешанный тензор четвертого порядка; полагая

$$A_k^{\mu\nu} = p_k^{\mu\nu} + \sum_\rho \left(\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} p^{\rho\nu} + \begin{Bmatrix} k\rho \\ \nu \end{Bmatrix} p^{\rho\mu} \right)$$

и

$$\begin{Bmatrix} k\rho \\ \mu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\mu\sigma} (g_{k\sigma\rho} + g_{\rho\sigma k} - g_{k\rho\sigma}),$$

находим, что величина

$$a^l = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}\, A_k^{\mu\nu} \tag{8}$$

представляет собой контрагредиентный вектор.

Построим с помощью этих конструкций выражение

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, a^l}{\partial w_l},$$

которое уже не содержит вторых производных $p_{kl}^{\mu\nu}$ и поэтому может быть представлено в виде

$$\sqrt{g} \sum_{\mu,\nu,k} (B_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + B_{\mu\nu}^k p_k^{\mu\nu}),$$

где величина

$$B_{\mu\nu}^k = \sum_{\rho,l} \left(\frac{\partial H}{\partial g_k^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial w_l} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} - \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\rho\nu}} \begin{Bmatrix} l\mu \\ \rho \end{Bmatrix} - \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\rho}} \begin{Bmatrix} l\nu \\ \rho \end{Bmatrix} \right)$$

вновь является смешанным тензором.

Сконструируем теперь вектор

$$b^l = \sum_{\mu,\nu} B^l_{\mu\nu} p^{\mu\nu} \tag{9}$$

и получим тогда

$$P_g(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l+b^l)}{\partial w_l} = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}H]_{\mu\nu}\, p^{\mu\nu}. \tag{10}$$

В то же время

$$P_q(\sqrt{g}H) = \sum_{k,l}\left(\frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_k} p_k + \frac{\partial\sqrt{g}H}{\partial q_{kl}} p_{kl}\right);$$

производная $\partial H/\partial q_{kl}$ есть тензор, а поэтому величина

$$c^l = \sum_k \frac{\partial H}{\partial q_{kl}} p_k \tag{11}$$

представляет собой контрагредиентный вектор. Соответственно этому, как и ранее,

$$P_q(\sqrt{g}H) - \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}c^l}{\partial w_l} = \sum_k [\sqrt{g}H]_k\, p_k. \tag{12}$$

Если теперь учесть основные уравнения (4) и (5), то, сложив (10) и (12), найдем

$$P(\sqrt{g}H) = \sum_l \frac{\partial\sqrt{g}(a^l+b^l+c^l)}{\partial w_l}.$$

Тогда

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g}PH + H\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} =$$

$$= \sqrt{g}PH + H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s} p^s + \sqrt{g}p^s_s\right),$$

откуда, в силу тождества (6),

$$P(\sqrt{g}H) = \sqrt{g}\sum_s \frac{\partial H}{\partial w_s} p^s +$$

$$+ H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s} p^s + \sqrt{g}p^s_s\right) = \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}Hp^s}{\partial w_s}. \tag{13}$$

Тем самым мы получили, наконец, инвариантное уравнение

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial w_l} \sqrt{g}(Hp^l - a^l - b^l - c^l) = 0.$$

Примем теперь во внимание, что величина

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

является антисимметричным контравариантным тензором. Поэтому величина

$$d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,\,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} H}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\} \tag{14}$$

есть контравариантный вектор, удовлетворяющий, очевидно, тождеству

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, d^l}{\partial w_l} = 0.$$

Определим теперь *вектор энергии* как

$$e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l, \tag{15}$$

т. е. как контравариантный вектор, который, однако, линейно зависит от произвольного вектора p^s, тождественно удовлетворяя при любом выборе этого вектора p^s инвариантному уравнению сохранения энергии

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial w_l} = 0.$$

Что же касается мировой функции H, то для ее однозначного определения требуются дополнительные аксиомы. Если в уравнения гравитации могут входить лишь вторые производные потенциалов $g^{\mu\nu}$, то функция H должна иметь вид

$$H = K + L,$$

где K — инвариант, следующий из тензора Римана (скалярная кривизна четырехмерного многообразия):

$$K = \sum_{\mu,\,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \left\{ {\mu\varkappa \atop \varkappa} \right\} - \frac{\partial}{\partial w_\varkappa} \left\{ {\mu\nu \atop \varkappa} \right\} \right) + \\ + \sum_{\varkappa,\,\lambda} \left(\left\{ {\mu\varkappa \atop \lambda} \right\} \left\{ {\lambda\nu \atop \varkappa} \right\} - \left\{ {\mu\nu \atop \lambda} \right\} \left\{ {\lambda\varkappa \atop \varkappa} \right\} \right),$$

а L — функция только переменных $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s и q_{sk}. В дальнейшем мы, кроме того, примем для простоты, что L не зависит от $g_l^{\mu\nu}$.

Применим теперь теорему II к инварианту L и получим

$$\sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p_s^m -$$
$$- \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} (q_{sm} p_k^m + q_{mk} p_s^m + q_m p_{sk}^m) = 0. \qquad (16)$$

Приравняв слева нулю коэффициенты при p_{sk}^m, мы придем к уравнению

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} \right) q_m = 0,$$

или

$$\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} = 0. \qquad (17)$$

Это означает, что производные потенциалов электродинамики могут встречаться лишь в комбинации

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}.$$

Отсюда мы видим, что при наших предположениях инвариант L, кроме потенциалов $g^{\mu\nu}$ и q_s, может зависеть лишь от компонент антисимметричного инвариантного тензора

$$M = (M_{ks}) = \mathrm{Rot}\,(q_s),$$

т. е. от так называемого электромагнитного шестивектора. *Этот вывод, которым лишь и обусловлен характер уравнений Максвелла, оказывается здесь в сущности следствием общей инвариантности, т. е. вытекает из аксиомы II.*

Приравнивая в левой части тождества (16) нулю коэффициенты при p_m^ν, получаем с учетом уравнения (17)

$$2 \sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_s \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \qquad (18)$$

Уравнение (18) позволяет существенно преобразовать электромагнитную энергию, т. е. ту часть вектора энергии, которая получается из L. Она следующим образом конструируется из выражений (11), (14) и (15):

$$Lp^l - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} p_k - \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\}.$$

В силу уравнения (17) и с учетом уравнений (5) это дает

$$\sum_{s,\,k}\left(L\delta_s^l-\frac{\partial L}{\partial M_{lk}}M_{sk}-\frac{\partial L}{\partial q_l}q_s\right)p^s \tag{19}$$

$$(\delta_s^l=0,\quad l\neq s;\quad \delta_s^s=1),$$

т. е. с учетом (18) —

$$-\frac{2}{\sqrt{g}}\sum_{\mu,\,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu s}}g^{\mu l}p^s. \tag{20}$$

На основании уравнения (22), выводимого ниже, отсюда можно, в частности, усмотреть, что электромагнитная энергия, а вместе с ней и полный вектор энергии e^l могут быть выражены только через K, т. е. в них входят лишь компоненты $g^{\mu\nu}$ и их производные, но не входят компоненты q_s и их производные. Если в выражении (19) перейти к пределу при

$$g_{\mu\nu}=0\quad(\mu\neq\nu),$$
$$g_{\mu\mu}=1,$$

то результат будет в точности совпадать с тем, который был установлен Ми в его электродинамике. *Таким образом, электромагнитный тензор энергии Ми есть не что иное, как общеинвариантный тензор, получающийся при дифференцировании инварианта L по гравитационным потенциалам $g^{\mu\nu}$, если в нем совершить указанный предельный переход.* Данное обстоятельство явилось для меня первым указанием на необходимую тесную связь между общей теорией относительности Эйнштейна и электродинамикой Ми и придало мне уверенность в справедливости развитой здесь теории.

Остается еще показать непосредстенно, что в установленном выше смысле обобщенные уравнения Максвелла (5), полученные выше, следуют из уравнений гравитации (4), если принять

$$H=K+L. \tag{21}$$

Переходя к введенным выше обозначениям для вариационных производных по $g^{\mu\nu}$, напишем на основании равенства (21) уравнения гравитации в виде

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}+\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{\mu\nu}}=0. \tag{22}$$

Первый член здесь таков:

$$[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}=\sqrt{g}\left(K_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Kg_{\mu\nu}\right),$$

что ясно без вычислений, если учесть, что K — единственный инвариант, а $K_{\mu\nu}$ — единственный (кроме $g_{\mu\nu}$) тензор второго порядка, которые можно построить только из компонент $g^{\mu\nu}$ и их первых и вторых производных $g_k^{\mu\nu}$ и $g_{kl}^{\mu\nu}$.

Мне представляется, что полученные таким образом дифференциальные уравнения гравитации согласуются с выдвинутой Эйнштейном в его последних сообщениях [2] грандиозной общей теорией относительности.

Если теперь обозначить вариационные производные от $\sqrt{g}J$ по потенциалам электродинамики q_h через

$$[\sqrt{g}J]_h = \frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}J}{\partial q_{hk}},$$

то, в силу равенства (21), основные уравнения электродинамики примут вид

$$[\sqrt{g}L]_h = 0. \tag{23}$$

Так как инвариант K зависит только от $g^{\mu\nu}$ и их производных, согласно теореме III, должно тождественно выполняться уравнение (7), причем

$$i_s = \sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}K]_{\mu\nu}\, g_s^{\mu\nu}, \tag{24}$$

$$i_s^l = -2\sum_\mu [\sqrt{g}K]_{\mu s}\, g^{\mu l} \quad (\mu = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{25}$$

Если учесть соотношения (22) и (25), то величина (20) принимает вид $-i_\nu^m/\sqrt{g}$. Дифференцируя по w_m с суммированием по m, получаем на основании формулы (7)

$$\begin{aligned} i_\nu = \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\left(-\sqrt{g}L\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{q}L}{\partial M_{sm}}M_{s\nu}\right) = -\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu} + \\ + \sum_m \left\{ q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right) + \right. \\ \left. + q_{\nu m}\left([\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\right)\right\} + \\ + \sum_s \left([\sqrt{g}L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}\right)M_{s\nu} + \sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m} = [\sqrt{g}L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}$$

и

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{sm}}=[\sqrt{g}L]_s-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_s}.$$

Примем также во внимание, что ввиду свойства (17)

$$\sum_{m,s}\frac{\partial^2}{\partial w_m\,\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}=0,$$

и тогда слагаемые можно сгруппировать следующим образом:

$$i_\nu=-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu}+\sum_m\left(q_\nu\frac{\partial}{\partial w_m}[\sqrt{g}L]_m+M_{m\nu}\,[\sqrt{g}L]_m\right)+$$
$$+\sum_m\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu}+\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}. \qquad (26)$$

В то же время

$$-\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial w_\nu}=-\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial g^{sm}}g_\nu^{sm}-\sum_m\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_m}q_{m\nu}-\sum_{m,s}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial q_{ms}}\frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}.$$

В силу формул (22) и (24), первый член справа — не что иное, как i_ν. Последний член справа оказывается с точностью до знака равным последнему члену в выражении (26), так что

$$\sum_{s,m}\frac{\partial\sqrt{g}L}{\partial M_{sm}}\left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}-\frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}\right)=0 \qquad (27)$$

ввиду симметрии выражения

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}-\frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}=\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial w_s\,\partial w_m}-\frac{\partial^2 q_s}{\partial w_\nu\,\partial w_m}-\frac{\partial^2 q_m}{\partial w_\nu\,\partial w_s}$$

по s и m и антисимметрии первого множителя в сумме (27) по этим же индексам.

Из выражения (26) следует равенство

$$\sum_m\left(M_{m\nu}\,[\sqrt{g}L]_m+q_\nu\frac{\partial}{\partial w_m}[\sqrt{g}L]_m\right)=0, \qquad (28)$$

т. е. из уравнений гравитации (4) действительно следуют 4 не зависящие друг от друга линейные комбинации (28) уравнений электродинамики (5) вместе с их первыми производными. *Это — точное математическое выражение данного выше общего утверждения о природе электродинамики как следствия гравитации.*

Так как по предположению величина L не зависит от производных $g^{\mu\nu}$, она должна быть функцией известных 4 общих инвариантов, соответствующих указанным Ми ортогональным инвариантам, простейшие из которых суть

$$Q=\sum_{k,\,l,\,m,\,n} M_{mn}M_{lk}g^{mk}g^{nl}$$

и

$$q=\sum_{k,\,l} q_k q_l g^{kl}.$$

Простейший выбор величины L, самый естественный с точки зрения структуры K, одновременно соответствует и электродинамике Ми, а именно

$$L=\alpha Q+f(q)$$

или, если еще конкретнее следовать Ми,

$$L=\alpha Q+\beta q^3.$$

Здесь $f(q)$ — некоторая функция переменного q, а α и β — постоянные.

Как мы видим, для построения теории достаточно небольшого числа предположений, высказанных в аксиомах I и II, правильно истолкованных. Они в корне преобразуют наши представления о пространстве, времени и движении в том духе, который выразил Эйнштейн. Более того, я убежден, что выведенные здесь основные уравнения смогут прояснить скрытые до сих пор тончайшие процессы, протекающие внутри атома, и вообще позволят свести все физические постоянные к математическим константам, так что физика, вполне, может быть, станет наукой типа геометрии, и это, конечно, будет величайшим триумфом аксиоматического метода, берущего, как мы здесь видим, на вооружение мощный аппарат анализа, а именно вариационное исчисление и теорию инвариантов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1914, S. 1030 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», М., 1965, стр. 326).
2. *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1915, S. 778, 799, 831, 844 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», М., 1965, стр. 425, 435, 439, 448).
3. *Mie G.*, Ann. d. Phys., 37, 511; 39, 1 (1912); 40, 1 (1913).

А. ЭЙНШТЕЙН

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Излагаемая здесь теория является наиболее радикальным обобщением общеизвестной в настоящее время «теории относительности»; последнюю в отличие от первой я буду называть «специальной теорией относительности», предполагая, что с нею читатель знаком. Обобщение теории относительности существенно облегчалось благодаря работам математика Минковского, который впервые вскрыл формальное равноправие пространственных координат и временно́й координаты в специальной теории относительности и использовал это равноправие для построения теории. Необходимый для общей теории относительности вспомогательный математический аппарат уже существовал в форме «абсолютного дифференциального исчисления», основы которого были заложены в исследованиях Гаусса, Римана и Кристоффеля, посвященных неевклидовым пространствам; это исчисление, приведенное в систему Риччи и Леви-Чивитой, уже применялось для решения задач теоретической физики. В разделе Б настоящей работы изложен весь необходимый нам, но, очевидно, неизвестный физикам вспомогательный математический аппарат по возможности самым простым и прозрачным способом, так что для понимания этой работы не требуется изучать математическую литературу. Наконец, хочу поблагодарить здесь своего друга, математика М. Гроссмана, который не только избавил меня от изучения специальной математической литературы, но и поддерживал при поисках уравнений гравитационного поля.

---

* Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. d. Phys., 49, 769 (1916) [здесь с незначительными исправлениями перепечатывается перевод из книги: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», М., 1965, стр. 452—504].

А. ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПОСТУЛАТЕ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ЗАМЕЧАНИЯ К СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В основе специальной теории относительности лежит следующий постулат, которому удовлетворяет также и механика Галилея — Ньютона. Если координатная система K выбрана так, что физические законы в ней справедливы в своей простейшей форме, то *те же самые* законы справедливы во всякой другой координатной системе K', которая движется равномерно и прямолинейно относительно K. Мы называем этот постулат «специальным принципом относительности». Словом «специальный» подчеркивается то обстоятельство, что этот принцип ограничивается случаем, когда система K' совершает относительно системы K *равномерное* и *прямолинейное движение*, и что равноценность систем K' и K не распространяется на случай *неравномерного* движения системы K' относительно K.

Итак, специальная теория относительности отличается от классической механики не только постулатом относительности, но и в основном постулатом постоянства скорости света в пустоте, из которого при объединении его со специальным принципом относительности известным образом вытекают относительность одновременности, преобразование Лоренца и связанные с последним законы, касающиеся поведения движущихся твердых тел и часов.

Хотя теория пространства и времени и испытала под влиянием специальной теории относительности весьма глубокое изменение, однако *один* важный пункт остался незатронутым. Согласно специальной теории относительности, высказывания геометрии имеют значение законов, касающихся возможных относительных положений (покоящихся) твердых тел, а общие положения кинематики — значение законов, описывающих поведение измерительных приборов и часов. При этом двум выбранным материальным точкам покоящегося (твердого) тела всегда соответствует некоторый отрезок вполне определенной длины независимо как от положения и ориентации тела, так и от времени. Двум отмеченным показаниям стрелки часов, покоящихся относительно некоторой (допустимой) координатной системы, всегда соответствует интервал времени определенной величины независимо от места и времени. Вскоре мы увидим, что общая теория относительности не может придерживаться этого простого физического толкования пространства и времени.

§ 2. ОБ ОСНОВАНИЯХ, КОТОРЫЕ ПОДСКАЗЫВАЮТ РАСШИРЕНИЕ ПОСТУЛАТА ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Классической механике и в неменьшей степени специальной теории относительности присущ некоторый теоретико-познавательный недостаток, который, пожалуй, впервые был ясно отмечен Э. Махом. Мы поясним его на следующем примере. Пусть два жидких тела одинаковой величины и состава свободно парят в пространстве на таком большом расстоянии друг от друга (и от всех прочих масс), что должны приниматься во внимание только те гравитационные силы, с которыми действуют друг на друга части *одного и того же тела*. Пусть расстояние между этими телами остается неизменным. Пусть также не происходит перемещения одной относительно другой частей одного и того же тела. Но пусть каждая масса, рассматриваемая наблюдателем, покоящимся относительно другой массы, вращается вокруг линии, соединяющей массы, с постоянной угловой скоростью (это относительное движение обеих масс всегда можно установить). Теперь представим себе, что поверхности обоих тел (S_1 и S_2) измерены с помощью масштабов (покоящихся относительно этих тел); пусть в результате измерения оказалось, что поверхность S_1 представляет собой сферу, а поверхность S_2 — эллипсоид вращения.

Теперь возникает вопрос: по какой причине тела S_1 и S_2 ведут себя по-разному? Ответ на этот вопрос может быть только тогда признан удовлетворительным [1]) с теоретико-познавательной точки зрения, когда обстоятельство, указанное в качестве причины, является *наблюдаемым опытным фактом*; ибо принцип причинности только тогда имеет смысл суждения о явлениях в мире опыта, когда в качестве причин и следствий в конечном итоге оказываются лишь *наблюдаемые факты*.

Механика Ньютона не дает удовлетворительного ответа на этот вопрос. Она говорит следующее. Законы механики справедливы для пространства R_1, относительно которого тело S_1 находится в покое, но несправедливы для пространства R_2, относительно которого находится в покое тело S_2. Однако галилеево пространство R_1 (и движение по отношению к нему), которое при этом вводится, является *фиктивной* причиной, а не наблюдаемым фактом. Таким образом, ясно, что механика Ньютона в рассматриваемом случае удовлетворяет требованию причинности не по существу, но лишь кажущимся образом, возлагая ответственность за наблюдаемое различное поведение тел S_1 и S_2 на фиктивную причину — пространство R_1.

---

[1]) Удовлетворительный с теоретико-познавательной точки зрения ответ может, конечно, еще оказаться физически неверным в том случае, когда он не согласуется с другими опытными данными.

Удовлетворительным ответом на поставленный выше вопрос может быть только следующий: физическая система, состоящая из тел S_1 и S_2, сама по себе не дает возможности указать причину, с помощью которой можно было бы объяснить различное поведение тел S_1 и S_2. Причина должна, следовательно, лежать *вне* этой системы. Отсюда следует вывод, что общие законы движения, которые, в частности, определяют форму тел S_1 и S_2, должны быть таковы, чтобы механические свойства тел S_1 и S_2 в значительной степени обусловливались отдаленными массами, которые мы не включили в рассматриваемую систему. Эти отдаленные массы (и их относительные движения по отношению к рассматриваемым телам) должны тогда рассматриваться как носители принципиально наблюдаемых причин различного поведения рассматриваемых тел S_1 и S_2; они становятся на место фиктивной причины R_1. Из всех мыслимых пространств R_1, R_2 и т. д., движущихся любым образом относительно друг друга, ни одному из них априори не должно отдаваться предпочтение, если только мы хотим устранить указанный теоретико-познавательный недостаток. *Законы физики должны быть составлены так, чтобы они были справедливы для произвольно движущихся координатных систем.* Таким образом, мы приходим к расширению постулата относительности.

Кроме этого весьма важного теоретико-познавательного аргумента, в пользу расширения теории относительности говорит еще один хорошо известный физический факт. Пусть K — галилеева координатная система, т. е. такая, относительно которой (по крайней мере в рассматриваемой четырехмерной области) некоторая масса, достаточно удаленная от других, движется прямолинейно и равномерно. Пусть K' — вторая координатная система, которая относительно K движется *равномерно ускоренно.* Тогда достаточно изолированная от других масса совершает относительно K' ускоренное движение, причем ни ускорение, ни направление этого ускорения не зависят от химического состава и физического состояния этой массы.

Может ли наблюдатель, покоящийся относительно координатной системы K', отсюда заключить, что он находится в «действительно» ускоренной координатной системе? Ответ на этот вопрос должен быть отрицательным, ибо только что указанное поведение масс, свободно движущихся относительно K', может быть столь же хорошо объяснено следующим образом. Координатная система K' не имеет ускорения, но в рассматриваемой пространственно-временно́й области имеется гравитационное поле, вызывающее ускоренное движение тел относительно системы K'.

Такого рода объяснение становится возможным благодаря тому, что из опыта нам известно о существовании силового поля (а именно гравитационного поля), обладающего замечательным свойством сообщать всем телам одно и то же ускорение [1]). Механическое поведение тел относительно координатной системы K' будет таким же, какое обнаруживается на опыте по отношению к системам, которые мы привыкли рассматривать как «покоящиеся» или как «законные»; поэтому и с физической точки зрения естественно считать, что обе системы K и K' с одинаковым правом могут рассматриваться как «покоящиеся»; иначе говоря, обе системы равноправны в качестве координатных систем для физического описания процессов.

Из этих соображений видно, что построение общей теории относительности должно одновременно привести и к теории тяготения, ибо гравитационное поле можно «создать» простым изменением координатной системы. Далее, сразу видно, что принцип постоянства скорости света в пустоте должен быть изменен, ибо легко убедиться в том, что траектория луча света относительно системы K' в общем случае должна быть кривой, если свет относительно системы K распространяется прямолинейно и с определенной постоянной скоростью.

§ 3. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КОНТИНУУМ. ТРЕБОВАНИЕ ОБЩЕЙ КОВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ, ВЫРАЖАЮЩИХ ОБЩИЕ ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ

В классической механике, так же как и в специальной теории относительности, пространственные и временны́е координаты имеют непосредственный физический смысл. Когда мы говорим, что точечное событие имеет координату x_1, то это означает следующее: построенную по правилам евклидовой геометрии при помощи твердых стержней проекцию точечного события на ось X_1 получают, откладывая определенную линейку — единичный масштаб —x_1 раз от начала координат по (положительной) оси X_1. Когда мы говорим, что точка имеет координату $x_4 = t$, то это означает следующее: по часам (эталону времени), покоящимся относительно координатной системы, пространственно (практически) совпадающим с точечным событием и выверенным по определенным правилам, прошло $x_4 = t$ периодов, когда наступило точечное событие [2]).

Такое понимание пространства и времени всегда представлялось взору физиков, хотя, быть может, большей частью и бессознательно; это ясно видно из той роли, какую играют эти понятия в физических измерениях. Такое толкование читатель должен был

---

[1]) Этвеш экспериментально доказал, что гравитационное поле обладает этим свойством, с большой степенью точности.

[2]) Мы допускаем возможность констатирования «одновременности» для пространственно смежных событий или, точнее выражаясь, для пространственно-временно́го соприкосновения (совпадения), не давая определения этого фундаментального понятия.

положить также в основу второго рассуждения последнего параграфа для того, чтобы придать ему некоторый смысл. Однако мы покажем теперь, что это толкование нужно отбросить и заменить более общим, чтобы последовательно провести общий постулат относительности, при условии, что специальная теория относительности сохраняется в предельном случае отсутствия гравитационного поля.

Мы введем в пространстве, свободном от гравитационных полей, галилееву координатную систему K (x, y, z, t) и, кроме того, координатную систему K' (x', y', z', t'), которая равномерно вращается относительно K. Пусть начала координат обеих систем, так же как и их оси Z, все время совпадают друг с другом. Покажем, что вышеприведенные определения, касающиеся физического смысла длин и времен, не пригодны для изучения пространства и времени в системе K'. На основании симметрии ясно, что окружность в координатной плоскости XY системы K с центром в начале координат может в то же время рассматриваться как окружность в координатной плоскости $X'Y'$ системы K'. Теперь представим себе, что длина и диаметр этой окружности измерены при помощи единичного масштаба (бесконечно малого по сравнению с радиусом), и затем взято отношение обоих результатов измерения. Если выполнить этот эксперимент с масштабом, покоящимся относительно галилеевой системы K, то в качестве частного получится число π. Результатом измерения, выполненного с масштабом, покоящимся относительно системы K', будет число, большее π. В этом легко убедиться, если судить о процессе измерения из «покоящейся» системы K и принять во внимание, что масштаб, приложенный по касательной к окружности, претерпевает лоренцево сокращение, а радиально приложенный масштаб не изменяется. Поэтому относительно системы K' оказывается несправедливой геометрия Евклида; выше установленное представление о координатах, которое предполагает применимость евклидовой геометрии, оказывается непригодным в системе K'. Столь же невозможным оказывается введение в K' удовлетворяющего физическим требованиям времени, которое показывали бы одинаковые часы, покоящиеся относительно K'. Чтобы в этом убедиться, представим себе, что в начале координат и где-нибудь на окружности установлено двое одинаковых часов, наблюдаемых из «покоящейся» системы K. Согласно известному выводу специальной теории относительности, наблюдение по часам в системе K дает, что часы, установленные на окружности, идут медленнее часов, помещенных в начале координат, поскольку первые движутся, а последние нет. Наблюдатель, который находится в общем начале координат и который способен, пользуясь светом, наблюдать часы, находящиеся на окружности, обнаружит тогда, что часы, установленные на окружности, идут медленнее, чем часы, установленные рядом с ним. Так как наблюдатель не решится считать скорость света на пройденном светом пути явной функцией времени, то он объяснит свое наблюдение тем, что часы на окружности «действительно» идут медленнее часов, установленных в начале координат. Таким образом, он будет вынужден дать времени такое определение, которое указывало бы, что скорость хода часов зависит от места.

Итак, мы приходим к следующему выводу: в общей теории относительности пространственные и временны́е величины не могут быть определены так, чтобы разности пространственных координат могли быть измерены непосредственно единичным масштабом, а разности временны́х — посредством стандартных часов.

Итак, прежний способ, заключавшийся в определенном построении системы координат в пространственно-временно́м континууме, оказывается неприменимым; представляется, что не существует пути, который позволил бы приспособить к четырехмерному миру такие координатные системы, чтобы с помощью их можно было бы ожидать особенно простой формулировки законов природы. Поэтому не остается ничего другого, как признать все мыслимые [1]) координатные системы принципиально равноправными для описания природы. Это равносильно требованию:

Общие законы природы должны быть выражены уравнениями, справедливыми во всех координатных системах, т. е. эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общековариантными).

Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворяет и общему постулату относительности. Ибо в совокупности *всех* подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем. То, что это требование общей ковариантности, отнимающее у пространства и времени последний остаток физической предметности, является естественным, видно из следующего соображения. Все наши пространственно-временны́е констатации всегда сводятся к установлению пространственно-временны́х совпадений. Если бы, например, события состояли только в движении материальных точек, то в конце концов наблюдались бы только встречи двух или нескольких таких точек. Результаты наших измерений также являются не чем иным, как констатацией подобных встреч между материальными точками наших масштабов с другими материальными точками, и соответственно совпадений между часовыми стрелками, точками циферблата и рассматриваемыми точечными событиями, происходящими в том же месте и в то же время.

Введение координатной системы служит только для более простого описания совокупности совпадений. Четыре пространственно-

---

[1]) Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности.

временны́е переменные x_1, x_2, x_3, x_4 сопоставляются с миром таким образом, чтобы каждому точечному событию соответствовала некоторая система значений переменных $x_1, \ldots, x_4$. Двум совпадающим точечным событиям соответствует одна и та же система значений переменных $x_1, \ldots, x_4$, т. е. совпадение характеризуется равенством координат. Если ввести вместо переменных $x_1, \ldots, x_4$ любые четыре функции от $x'_1, \ldots, x'_4$ как новую координатную систему так, чтобы эти системы значений однозначно соответствовали друг другу, то равенство соответствующих координат в новой системе тоже явится выражением пространственно-временно́го совпадения двух точечных событий. Так как все наши физические опытные данные можно в конце концов свести к таким совпадениям, то заранее нет никакого основания отдавать предпочтение какой-либо одной координатной системе перед другими, т. е. мы приходим к требованию общей ковариантности.

§ 4. СВЯЗЬ ЧЕТЫРЕХ КООРДИНАТ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ВРЕМЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В настоящей статье я не старался представить общую теорию относительности в виде наиболее простой логической системы при минимуме аксиом. Моя главная цель — изложить эту теорию так, чтобы читатель ощутил психологическую естественность выбранного пути и чтобы предпосылки, положенные в ее основу, представлялись как можно лучше согласованными с опытом. В этом смысле введем теперь следующую предпосылку.

Для бесконечно малых четырехмерных областей при подходящем выборе системы координат справедлива теория относительности в более узком смысле.

Ускоренное движение бесконечно малой («местной») координатной системы должно быть при этом выбрано так, чтобы отсутствовало гравитационное поле; для бесконечно малой области это возможно. Пусть X_1, X_2, X_3 — пространственные координаты; X_4 — координата времени, измеренная надлежащим масштабом [1]). Если представить себе, что дана твердая линейка небольших размеров в качестве единичного масштаба, то эти координаты при данной ориентации координатной системы имеют непосредственный физический смысл в рамках специальной теории относительности. В этом случае выражение

$$ds^2 = -dX_1^2 - dX_2^2 - dX_3^2 + dX_4^2 \tag{1}$$

---

[1]) Единицу времени следует выбрать так, чтобы скорость света в пустоте, измеренная в «местной» координатной системе, равнялась единице.

имеет в специальной теории относительности некоторое численное значение, независимое от ориентации местной координатной системы и определяемое путем пространственно-временно́го измерения. Назовем величину ds линейным элементом, принадлежащим двум бесконечно близким друг к другу точкам четырехмерного пространства. Если величина ds^2, соответствующая элементу $(dX_1, \ldots, dX_4)$, положительна, то мы вместе с Минковским будем называть последний времениподобным, в противном случае — пространственноподобным.

Рассмотренному линейному элементу, или соответственно обоим бесконечно близким точечным событиям, соответствуют также дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_4$ четырехмерных координат некоторой выбранной системы. Если для рассматриваемого места выбрана такая система координат и «местная» система вышеуказанного типа, то величины dX_ν можно представить в виде некоторых выражений, линейных и однородных относительно dx_σ:

$$dX_\nu = \sum_\sigma \alpha_{\nu\sigma}\, dx_\sigma. \tag{2}$$

Подставив эти выражения в равенство (1), получим

$$ds^2 = \sum_{\sigma\tau} g_{\sigma\tau}\, dx_\sigma\, dx_\tau, \tag{3}$$

где величины $g_{\sigma\tau}$ — функции x_σ, которые уже не могут более зависеть от ориентации и состояния движения «местной» координатной системы, поскольку ds^2 является величиной, определенной независимо от того или иного выбора системы координат, относящейся к бесконечно близким в пространстве и во времени точечным событиям и получаемой посредством измерения, выполненного с масштабом и часами. При этом величины $g_{\sigma\tau}$ должны быть выбраны так, чтобы $g_{\sigma\tau} = g_{\tau\sigma}$; суммирование должно быть распространено на все значения σ и τ, так что сумма состоит из 4×4 слагаемых, из которых 12 попарно равны.

Обычная теория относительности получается как частный случай рассмотренного здесь, когда, в силу особого поведения $g_{\sigma\tau}$ в некоторой конечной области, оказывается возможным выбрать в ней координатную систему так, чтобы $g_{\sigma\tau}$ приняли постоянные значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}. \tag{4}$$

Мы увидим ниже, что выбор таких координат для конечных областей в общем случае невозможен.

Из рассуждений § 2 и 3 следует, что величины $g_{\sigma\tau}$ с физической точки зрения должны рассматриваться как величины, описывающие гравитационное поле относительно выбранной системы координат. В самом деле, допустим сначала, что специальная теория относительности справедлива для определенной рассматриваемой четырехмерной области при подходящем выборе системы координат. Тогда величины $g_{\sigma\tau}$ имеют указанные в (4) значения. В этом случае свободная материальная точка движется относительно этой системы прямолинейно и равномерно. Если теперь ввести путем произвольного преобразования новые пространственно-временные координаты $x_1, \ldots, x_4$, то в этой новой системе величины $g_{\sigma\tau}$ будут уже не постоянными, но функциями пространственно-временных координат. В то же время движение свободной материальной точки в новой системе окажется криволинейным и неравномерным, причем закон движения не будет зависеть от природы движущейся материальной точки. Поэтому мы будем истолковывать это движение как движение, происходящее под влиянием гравитационного поля. Мы видим, что появление гравитационного поля связано с зависимостью $g_{\mu\nu}$ от пространственно-временных координат. Но и в общем случае, когда мы не сможем соответствующим выбором координат сделать специальную теорию относительности применимой в конечной области пространства, мы сохраним представление о том, что величины $g_{\sigma\tau}$ описывают гравитационные поля.

Таким образом, согласно общей теории относительности, гравитационные силы играют исключительную роль по сравнению с остальными силами, особенно электромагнитными; 10 функций $g_{\sigma\tau}$, представляющих гравитационное поле, определяют в то же время метрические свойства четырехмерного пространства.

Б. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ВЫВОДА ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показав выше, что общий постулат относительности приводит к требованию ковариантности систем уравнений физики по отношению к любым преобразованиям координат $x_1, \ldots, x_4$, мы должны теперь подумать над тем, как можно получить подобные общековариантные уравнения. Обратимся теперь к этой чисто математической задаче; при этом выяснится, что заданный равенством (3) инвариант ds, названный нами в соответствии с гауссовой теорией поверхностей «линейным элементом», играет основную роль при решении этой задачи.

Основная мысль этой общей теории ковариантных величин заключается в следующем. Пусть некоторые объекты («тензоры») определены относительно координатной системы посредством некоторого числа пространственных функций, которые называются «компонентами» тензора. Тогда имеются определенные правила, по которым эти компоненты вычисляются для новой координатной системы, если они известны для первоначальной системы и если известно преобразование, связывающее обе системы. Эти объекты, называемые ниже тензорами, характеризуются еще и тем, что уравнения преобразования для их компонент линейны и однородны. Поэтому все компоненты в новой системе обращаются в нуль, если они все равны нулю в первоначальной системе. В соответствии с этим, если какой-нибудь закон природы формулируется как равенство нулю всех компонент некоторого тензора, то он общековариантен; исследуя законы образования тензоров, мы тем самым получаем средство для установления общековариантных законов.

§ 5. КОНТРАВАРИАНТНЫЙ И КОВАРИАНТНЫЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОР

Контравариантный четырехмерный вектор (4-вектор). Линейный элемент определяется с помощью четырех «компонент» dx_ν, закон преобразования которых имеет вид

$$dx'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x'_\sigma}{dx_\nu} dx_\nu. \tag{5}$$

Величины dx'_σ выражаются линейно и однородно через dx_ν; поэтому мы можем рассматривать эти дифференциалы координат как компоненты «тензора», которому дадим специальное название контравариантного 4-вектора. Каждый объект, определяемый по отношению к координатной системе посредством четырех величин A^ν, которые преобразуются по тому же закону

$$A^{\sigma'} = \sum_\nu \frac{dx'_\sigma}{dx_\nu} A^\nu, \tag{5a}$$

мы также называем контравариантным 4-вектором. Из соотношения (5a) непосредственно следует, что суммы $(A^\sigma \pm B^\sigma)$ будут компонентами 4-вектора, если A^σ и B^σ в отдельности являются таковыми. Аналогичное положение возникает для всех систем, вводимых ниже в качестве «тензоров» (правило сложения и вычитания тензоров).

Ковариантный четырехмерный вектор. Мы называем четыре величины A_ν компонентами ковариантного 4-вектора, если для любого произвольно выбранного контравариантного 4-вектора B_ν

$$\sum_\nu A_\nu B^\nu \text{ есть инвариант.} \tag{6}$$

Из этого определения следует закон преобразования ковариантного 4-вектора. Заменив в правой части равенства

$$\sum_\sigma A'_\sigma B^{\sigma'} = \sum_\nu A_\nu B^\nu$$

величину B^ν выражением

$$\sum_\sigma \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma'},$$

полученным из равенства (5а), найдем

$$\sum_\sigma B^{\sigma'} \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_\sigma B^{\sigma'} A'_\sigma.$$

Но отсюда, в силу того, что в этом равенстве каждый из 4-векторов $B^{\sigma'}$ может быть выбран произвольно и независимо от других, следует закон преобразования

$$A'_\sigma = \sum_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е о б у п р о щ е н и и з а п и с и в ы р а ж е н и й. Рассматривая уравнения этого параграфа, мы сразу видим, что суммирование всегда производится по тем и *только* по тем значкам, которые дважды появляются под знаком суммы [например, значок ν в правой части равенства (5)]. Поэтому можно без ущерба для ясности отбросить знак суммы. Для этого мы введем следующее правило: если член некоторого выражения содержит какой-нибудь индекс дважды, то по этому значку должно быть произведено суммирование, если только специально не оговорено противное.

Различие между ковариантным и контравариантным 4-векторами заключается в законе преобразования [соотношения (7) и (5)]. Обе величины представляют собой тензоры в том смысле, в каком о них говорилось выше. Следуя Риччи и Леви-Чивите, будем отмечать контравариантный характер, помещая значок вверх, а ковариантный — вниз.

§ 6. ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ РАНГОВ

Контравариантный тензор. Если мы составим все 16 произведений $A^{\mu\nu}$ компонент A^μ и B^ν двух контравариантных 4-векторов

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu, \tag{8}$$

то, в силу соотношений (8) и (5a), компоненты $A^{\mu\nu}$ удовлетворяют закону преобразования

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu}. \tag{9}$$

Мы называем объект, который по отношению ко всякой координатной системе описывается посредством 16 величин (функций), удовлетворяющих закону преобразования (9), контравариантным тензором второго ранга. Не все тензоры этого рода можно составить по формуле (8) из двух 4-векторов. Но легко доказать, что 16 произвольно заданных компонент $A^{\mu\nu}$ можно представить в виде суммы четырех слагаемых типа $A^\mu B^\nu$, составленных из компонент четырех пар надлежащим образом выбранных четырехмерных векторов. Поэтому почти все положения, справедливые для тензора второго ранга, определенного соотношением (9), можно проверить, доказывая их для специальных тензоров типа (8).

Контравариантный тензор любого ранга. Очевидно, что по аналогии с (8) и (9) можно определить также контравариантные тензоры третьего и высших рангов с 4^3 и т. д. компонентами. Из соотношений (8) и (9) вытекает также, что в этом смысле можно рассматривать контравариантный 4-вектор как контравариантный тензор первого ранга.

Ковариантный тензор. Если, с другой стороны, составить 16 произведений $A_{\mu\nu}$ из компонент двух *ковариантных* 4-векторов A_μ и B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu, \tag{10}$$

то для них справедлив закон преобразования

$$A'_{\sigma\tau} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} \cdot A_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Этим законом преобразования дается определение ковариантного тензора второго ранга. Все замечания, которые прежде были сделаны по поводу контравариантных тензоров, остаются в силе и для ковариантных тензоров.

Замечание. Скаляр (инвариант) удобно рассматривать как контравариантный или как ковариантный тензор нулевого ранга.

Смешанный тензор. Можно также составить тензор второго ранга типа

$$A_\mu^\nu = A_\mu B^\nu, \tag{12}$$

который ковариантен относительно индекса μ и контравариантен относительно индекса ν. Его закон преобразования имеет вид

$$A_\sigma^{\tau'} = \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\sigma} \cdot A_\alpha^\beta. \tag{13}$$

Имеются, конечно, смешанные тензоры с произвольным числом индексов ковариантного и произвольным числом индексов контравариантного характера. Ковариантный и контравариантный тензоры можно рассматривать как частные случаи смешанного тензора.

Симметричные тензоры. Контравариантный (или ковариантный) тензор второго или высшего ранга называется *симметричным*, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, равны между собою. Тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) симметричен, если для любой комбинации значков имеем

$$A^{\mu\nu}=A^{\nu\mu}, \tag{14}$$

или

$$A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}. \tag{14a}$$

Докажем, что определенная таким образом симметрия представляет собой свойство, не зависящее от системы координат. В самом деле, на основании равенств (14) из (9) следует

$$A^{\sigma\tau\prime}=\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu}=\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu}A^{\nu\mu}=\frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\nu}A^{\mu\nu}=A^{\tau\sigma\prime}.$$

Предпоследнее из этих равенств основывается на перестановке значков суммирования μ и ν (т. е. на простом изменении способа обозначения).

Антисимметричные тензоры. Контравариантный или ковариантный тензор второго, третьего или четвертого ранга называется антисимметричным, если две компоненты, получающиеся друг из друга путем перестановки каких-нибудь двух значков, *равны по величине и противоположны по знаку*. Следовательно, тензор $A^{\mu\nu}$ (или $A_{\mu\nu}$) антисимметричен, если

$$A^{\mu\nu}=-A^{\nu\mu} \tag{15}$$

или

$$A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}. \tag{15a}$$

Из 16 компонент $A^{\mu\nu}$ четыре компоненты $A^{\mu\mu}$ равны нулю; остальные компоненты попарно равны по величине и имеют противоположные знаки, так что имеются только 6 численно различных компонент (6-вектор). Таким же образом можно убедиться в том, что антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma}$ (третьего ранга) имеет только четыре численно различные компоненты, антисимметричный тензор $A^{\mu\nu\sigma\tau}$ — только одну. В четырехмерном континууме нет антисимметричных тензоров выше четвертого ранга.

§ 7. УМНОЖЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

Внешнее умножение тензоров. Из компонент двух тензоров рангов z и z' получаются компоненты тензора ранга $z + z'$, если все компоненты первого тензора попарно перемножить со всеми компонентами второго тензора. Так, например, из различного типа тензоров A и B получаются тензоры T:

$$T_{\mu\nu\sigma} = A_{\mu\nu} B_{\sigma},$$
$$T^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta} B^{\gamma\delta},$$
$$T^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\gamma\delta}.$$

Доказательство тензорного характера T следует непосредственно из соотношений (8), (10), (12) или из формул преобразования (9), (11), (13). Равенства (8), (10), (12) сами служат примерами внешнего умножения (тензоров первого ранга).

«Свертывание» смешанного тензора. Из каждого смешанного тензора можно образовать тензор, ранг которого на две единицы меньше, если один значок ковариантного характера приравнять одному значку контравариантного характера и по этому значку произвести суммирование («свертывание»). Таким образом, например, из смешанного тензора четвертого ранга $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ получают смешанный тензор второго ранга:

$$A^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta} \quad \left(= \sum_{\alpha} A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}\right),$$

и из него повторным свертыванием получают тензор нулевого ранга:

$$A = A^{\beta}_{\beta} = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}.$$

Доказательство того, что результат свертки действительно обладает тензорным характером, следует из обобщения представления тензоров (12) вместе с соотношением (6) или из обобщения соотношения (13).

Внутреннее и смешанное умножение тензоров. Оно заключается в комбинации внешнего умножения со сверткой.

Примеры. Из ковариантного тензора второго ранга $A_{\mu\nu}$ и контравариантного тензора первого ранга B^{σ} образуем посредством внешнего умножения смешанный тензор

$$D^{\sigma}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\sigma}.$$

В результате свертки по индексам ν и σ возникает ковариантный четырехмерный вектор

$$D_{\mu} = D^{\nu}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} B^{\nu}.$$

Этот вектор будем называть внутренним произведением тензоров $A_{\mu\nu}$ и B^{σ}. Аналогичным образом из тензоров $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ посредством внешнего умножения и двукратной свертки можно образовать внутреннее произведение $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$. Образовав внешнее произведение из $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ и выполнив свертку, получим смешанный тензор второго ранга $D_{\mu}^{\tau} = A_{\mu\nu}B^{\nu\tau}$. Эту операцию удобно назвать смешанной, ибо она является внешней по отношению к значкам μ и τ и внутренней по отношению к значкам ν и σ.

Теперь докажем утверждение, которое часто используется при установлении тензорного характера. На основании только что изложенного $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ есть скаляр, если $A_{\mu\nu}$ и $B^{\sigma\tau}$ — тензоры. Но утверждается также, что если $A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ для *произвольного тензора* $B^{\mu\nu}$ есть инвариант, то $A_{\mu\nu}$ имеет тензорный характер.

Доказательство. По предположению при любом преобразовании координат должно быть

$$A'_{\sigma\tau}B^{\sigma\tau\prime} = A_{\mu\nu}B^{\mu\nu}.$$

Но в результате обращения соотношения (9) имеем

$$B^{\mu\nu} = \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} B^{\sigma\tau\prime}.$$

Подставляя это выражение для $B^{\mu\nu}$ в предыдущее соотношение, получаем

$$\left(A'_{\sigma\tau} - \frac{\partial x_{\mu}}{\partial x'_{\sigma}} \cdot \frac{\partial x_{\nu}}{\partial x'_{\tau}} A_{\mu\nu}\right) B^{\sigma\tau\prime} = 0.$$

При любом выборе $B^{\sigma\tau\prime}$ это соотношение может выполняться только тогда, когда выражение в скобках равно нулю, откуда, в силу соотношения (11), и следует наше утверждение.

Эта теорема верна в соответствующей форме для тензоров любого ранга и типа; доказательство всегда проводится аналогичным путем.

Указанное утверждение можно также доказать и в такой форме: если B^{μ} и C^{ν} — произвольные векторы и если при любом их выборе внутреннее произведение

$$A_{\mu\nu}B^{\mu}C^{\nu}$$

является скаляром, то $A_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор. Последнее положение справедливо еще и в том более частном случае, когда утверждается лишь то, что при любом выборе 4-вектора B^{μ} скалярное произведение $A_{\mu\nu}B^{\mu}B^{\nu}$ является скаляром, и если, кроме того, еще известно, что $A_{\mu\nu}$ удовлетворяет условию симметрии $A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}$. В самом деле, следуя вышеуказанным путем, сначала доказывают тензорный характер величины $(A_{\mu\nu} + A_{\mu\nu})$, откуда на основании свойства симметрии непосредственно следует тензорный характер $A_{\mu\nu}$. Это утверждение легко обобщить и на случай ковариантных и контравариантных тензоров любого ранга.

Наконец, из доказанного следует утверждение, которое также можно обобщить на любые тензоры: если величины $A_{\mu\nu}B^{\nu}$ при любом выборе 4-вектора B^{ν} образуют тензор первого ранга, то $A_{\mu\nu}$ представляет собой тензор второго ранга. В самом деле, если C^{μ} — произвольный 4-вектор, то, в силу тензорного характера $A_{\mu\nu}B^{\nu}$, внутреннее произведение $A_{\mu\nu}C^{\mu}B^{\nu}$ при любом выборе обоих 4-векторов C^{μ} и B^{ν} является скаляром, откуда и следует наше утверждение.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ТЕНЗОРА $g_{\mu\nu}$

Ковариантный фундаментальный тензор. В инвариантном выражении для квадрата линейного элемента

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$$

величина dx_{μ} играет роль произвольного контравариантного вектора. Так как, кроме того, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, то на основании сказанного в последнем параграфе заключаем, что $g_{\mu\nu}$ есть ковариантный тензор второго ранга. Мы назовем его «фундаментальным тензором». Ниже мы выведем некоторые свойства этого тензора, которыми, правда, обладает каждый тензор второго ранга, но особый физический смысл фундаментального тензора в нашей теории, связанный с гравитационным действием, делает доказанные выше соотношения особенно интересными в приложении к фундаментальному тензору.

Контравариантный фундаментальный тензор. Если взять миноры, соответствующие элементам $g_{\mu\nu}$ в определителе, составленном из $g_{\mu\nu}$, и разделить каждый из них на определитель $g = | g_{\mu\nu} |$, то получатся некоторые величины $g^{\mu\nu}$ $(=g^{\nu\mu})$, относительно которых мы докажем, что они составляют контравариантный тензор.

На основании известной теоремы из теории определителей имеем

$$g_{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\nu}, \tag{16}$$

где $\delta_{\mu}^{\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu}^{\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$. Вместо приведенного выражения для ds^2 можно также написать

$$g_{\mu\sigma}\delta_{\nu}^{\sigma}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}$$

или, в силу равенства (16),

$$g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}g^{\sigma\tau}\, dx_{\mu}\, dx_{\nu}.$$

Но, согласно правилам умножения, изложенным в предыдущем параграфе, величины

$$d\xi_\sigma = g_{\mu\sigma}\, dx_\mu$$

образуют ковариантный 4-вектор и притом (в силу возможности произвольного выбора dx_μ) произвольно выбранный 4-вектор. Подставив его в наше выражение, получим

$$ds^2 = g^{\sigma\tau}\, d\xi_\sigma\, d\xi_\tau.$$

Так как это выражение при любом выборе вектора $d\xi_\sigma$ является скаляром и $g^{\sigma\tau}$ по определению симметричен по индексам σ и τ, то на основании результатов предыдущего параграфа заключаем, что $g^{\sigma\tau}$ представляет собой контравариантный тензор. Из (16) следует еще, что δ_μ^ν есть тоже тензор, который можно назвать смешанным фундаментальным тензором.

Определитель фундаментального тензора. Согласно правилу умножения определителей, имеем

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |g_{\mu\alpha}|\,|g^{\alpha\nu}|.$$

С другой стороны,

$$|g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu}| = |\delta_\mu^\nu| = 1.$$

Отсюда следует

$$|g_{\mu\nu}|\,|g^{\mu\nu}| = 1. \tag{17}$$

Инвариантный объем. Сначала найдем закон преобразования определителя $g = |g_{\mu\nu}|$. В силу соотношения (11), имеем

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\tau} g_{\mu\nu} \right|.$$

Отсюда после двукратного применения правила умножения определителей следует

$$g' = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \left| \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} \right| |g_{\mu\nu}| = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right|^2 g,$$

или

$$\sqrt{g'} = \left| \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\sigma} \right| \sqrt{g}.$$

С другой стороны, закон преобразования элемента объема

$$d\tau' = \int dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

по известной теореме Якоби имеет вид

$$d\tau' = \left| \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \right| d\tau.$$

Перемножая два равенства, получаем

$$\sqrt{g'}\,d\tau' = \sqrt{g}\,d\tau. \tag{18}$$

В дальнейшем вместо $\sqrt{g}$ вводится величина $\sqrt{-g}$, которая вследствие гиперболического характера пространственно-временнóго континуума всегда имеет вещественное значение. Инвариант $\sqrt{-g}\,d\tau$ равен величине элемента четырехмерного объема, измеренного в «местной координатной системе» посредством твердых масштабов и часов по принципам специальной теории относительности.

Замечание о характере пространственно-временнóго континуума. Наша предпосылка о справедливости в бесконечно малом специальной теории относительности приводит к тому, что ds^2 всегда можно выразить с помощью (1) через вещественные величины $dX_1, \ldots, dX_4$. Обозначив через $d\tau_0$ «естественный» элемент объема $dX_1\,dX_2\,dX_3\,dX_4$, получим

$$d\tau_0 = \sqrt{-g}\cdot d\tau. \tag{18a}$$

Если окажется, что в каком-нибудь месте четырехмерного континуума $\sqrt{-g}$ обращается в нуль, то это будет означать, что в этом месте конечному координатному объему соответствует бесконечно малый «естественный» объем. Будем считать, что этого нигде нет. В таком случае g не может менять свой знак; мы примем в соответствии со специальной теорией относительности, что g всегда имеет конечное и отрицательное значение. Это допущение является некоторой гипотезой о физической природе рассматриваемого континуума и в то же время правилом, касающимся выбора системы координат.

Но если $-g$ положительно и конечно, то естественно возникает мысль, что теперь следует выбрать координаты так, чтобы эта величина стала равной 1. Позже мы увидим, что посредством такого ограничения выбора системы координат может быть достигнуто значительное упрощение законов природы. В этом случае вместо равенства (18) имеем

$$d\tau' = d\tau,$$

откуда, приняв во внимание теорему Якоби, получаем, что

$$\left|\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu}\right| = 1. \tag{19}$$

Таким образом, при подобном выборе координатных систем допустимы преобразования координат только с определителем 1.

Но было бы ошибкой думать, что этот прием означает частичный отказ от общего принципа относительности. Мы не спрашиваем: «каковы будут законы природы, ковариантные по отношению ко всем преобразованиям с определителем 1?» Но мы задаем вопрос:

«каковы будут *общековариантные* законы природы?» Лишь после того, как эти законы установлены, мы упрощаем их выражение посредством особого выбора координатной системы.

Образование новых тензоров с помощью фундаментального тензора. Путем внутреннего, внешнего и смешанного умножения какого-нибудь тензора на фундаментальный тензор мы получаем тензоры другого характера и ранга.

Примеры:

$$A^{\mu} = g^{\mu\sigma} A_{\sigma},$$

$$A = g_{\mu\nu} A^{\mu\nu}.$$

Особо отметим следующие комбинации:

$$A^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} A_{\alpha\beta},$$

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} A^{\alpha\beta}$$

(«дополнения» к ковариантному и соответственно контравариантному тензору) и

$$B_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}.$$

Мы называем $B_{\mu\nu}$ редуцированным по отношению к $A_{\mu\nu}$ тензором. Аналогично имеем

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что $g^{\mu\nu}$ — не что иное, как «дополнение» по отношению к $g_{\mu\nu}$, ибо

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} \delta_{\alpha}^{\nu} = g^{\mu\nu}.$$

§ 9. УРАВНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ (УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ)

Так как «линейный элемент» ds является величиной, определенной независимо от координатной системы, то и для линии, проведенной между двумя точками P_1 и P_2 четырехмерного континуума, величина $\int ds$ принимает экстремальное значение, независимое от выбора координат (геодезическая). Ее уравнение имеет вид

$$\delta \left\{ \int\limits_{P_1}^{P_2} ds \right\} = 0. \tag{20}$$

Отсюда, выполняя вариацию, находят известным образом четыре обыкновенных дифференциальных уравнения, которые и определяют эту геодезическую линию. Ради полноты изложения мы приведем здесь этот вывод. Пусть λ — некоторая функция координат x_{ν};

эта функция определяет семейство поверхностей, пересекающих искомую геодезическую линию, равно как и все другие бесконечно близкие к ней кривые, проведенные через точки P_1 и P_2. В таком случае каждую из этих кривых можно представить себе заданной своими координатами x_ν, выраженными через λ. Пусть символ δ соответствует переходу из какой-нибудь точки искомой геодезической линии в ту точку соседней кривой, которой соответствует то же значение λ. В таком случае уравнение (20) можно заменить уравнением

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta w \, d\lambda = 0, \qquad w^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20a}$$

Так как

$$\delta w = \frac{1}{w} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} \delta x_\sigma + g_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) \right\}$$

и

$$\delta \left(\frac{dx_\nu}{d\lambda} \right) = \frac{d\delta x_\nu}{d\lambda},$$

то после подстановки этих значений в (20а) и интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \varkappa_\sigma \delta x_\sigma = 0, \qquad \varkappa_\sigma = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{g_{\mu\sigma}}{w} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \right\} - \frac{1}{2w} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda}. \tag{20б}$$

Отсюда, в силу произвольности выбора δx_σ, следует, что $\varkappa_\sigma$ равно нулю. Таким образом, уравнения

$$\varkappa_\sigma = 0 \tag{20в}$$

представляют собой уравнения геодезической линии. Если на рассматриваемой геодезической линии $ds \neq 0$, то в качестве параметра λ можно выбрать «длину дуги» s, измеренную вдоль геодезической линии. Тогда $w = 1$ и вместо (20в) получаем

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\sigma}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx_\nu}{d\lambda} = 0$$

или, изменяя обозначения,

$$g_{\alpha\sigma} \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2} + \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} = 0, \tag{20г}$$

где, согласно Кристоффелю, мы положили

$$\begin{bmatrix} \mu\nu \\ \sigma \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{21}$$

Наконец, умножив уравнение (20г) на $g^{\sigma\tau}$ (внешнее умножение относительно τ и внутреннее — относительно σ), получим уравнение геодезической линии в окончательном виде:

$$\frac{d^2 x_\tau}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0. \tag{22}$$

При этом, согласно Кристоффелю, введено обозначение

$$\left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} = g^{\tau\alpha} \begin{bmatrix} \mu\nu \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{23}$$

§ 10. ОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ ПОСРЕДСТВОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Используя уравнение геодезической линии, можно теперь легко вывести правила, по которым из тензоров путем дифференцирования могут быть образованы новые тензоры. Эти правила позволяют получить общековариантные дифференциальные уравнения. Мы достигаем этой цели повторным применением следующих простых операций.

Если в нашем континууме дана кривая, точки которой характеризуются длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой определенной точки на кривой, и если, далее, φ—инвариантная функция координат, то и $d\varphi/ds$ является инвариантом. Доказательство заключается в том, что как $d\varphi$, так и ds представляют собой инварианты.

Так как

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds},$$

то и

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\frac{dx_\mu}{ds}$$

будет инвариантом и притом для всех кривых, которые выходят из одной точки континуума, т. е. для любого вектора dx_μ. Отсюда следует, что

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \tag{24}$$

есть ковариантный четырехмерный вектор (grad φ).

Согласно нашему правилу, инвариантом будет также и производная, взятая вдоль кривой,

$$\chi = \frac{d\psi}{ds}.$$

Подставляя значение ψ, получаем сначала

$$\chi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}.$$

Отсюда пока еще нельзя заключить о существовании какого-либо тензора. Но если мы теперь будем считать, что кривая, вдоль которой мы дифференцировали, является геодезической, то, заменив d^2x_ν/ds^2 соответствующим выражением из формулы (22), получаем

$$\chi = \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right\} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Из возможности изменения порядка дифференцирования по μ и ν, а также из симметрии, в силу (23) и (21), символа $\left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\}$ относительно μ и ν следует, что выражение, стоящее в фигурных скобках, тоже симметрично относительно тех же индексов. Так как из любой точки континуума можно провести геодезическую линию в любом направлении и, следовательно, dx_μ/ds представляет собой 4-вектор с компонентами, соотношения между которыми могут быть проивольными, то, в силу выводов § 7,

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \tag{25}$$

есть ковариантный тензор второго ранга. Таким образом, из ковариантного тензора первого ранга

$$A_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

можно посредством дифференцирования образовать ковариантный тензор второго ранга

$$A_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left\{ {\mu\nu \atop \tau} \right\} A_\tau. \tag{26}$$

Назовем тензор $A_{\mu\nu}$ ковариантной производной тензора A_μ. Прежде всего можно легко показать, что этот способ построения приводит к тензору даже в том случае, когда A_μ нельзя представить в виде градиента. Для того чтобы убедиться в этом, мы предварительно заметим, что

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

представляет собой ковариантный 4-вектор, если ψ и φ — скаляры. То же самое справедливо в отношении суммы, состоящей из четырех таких членов:

$$S_\mu = \psi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_\mu} + \ldots + \psi^{(4)} \frac{\partial \varphi^{(4)}}{\partial x_\mu},$$

если $\psi^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$, . . ., $\psi^{(4)}$, $\varphi^{(4)}$ — скаляры. Но ясно, что каждый ковариантный 4-вектор может быть представлен в виде S_μ. Если A_μ является 4-вектором, компоненты которого представляют собой произвольно заданные функции от x_ν, то достаточно положить (относительно выбранной координатной системы)

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= A_1, & \varphi^{(1)} &= x_1,\\
\psi^{(2)} &= A_2, & \varphi^{(2)} &= x_2,\\
\psi^{(3)} &= A_3, & \varphi^{(3)} &= x_3,\\
\psi^{(4)} &= A_4, & \varphi^{(4)} &= x_4,
\end{aligned}$$

чтобы S_μ стало равным A_μ.

Поэтому для доказательства того, что $A_{\mu\nu}$ будет тензором, если в правую часть равенства (26) подставить вместо A_μ произвольный ковариантный 4-вектор, достаточно только показать, что это справедливо по отношению к 4-вектору S_μ. Но из правой части равенства (26) сразу видно, что достаточно провести доказательство для случая

$$A_\mu = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}.$$

Правая часть равенства (25), умноженная на ψ, т. е.

$$\psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau},$$

имеет тензорный характер. Точно так же

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$$

есть тензор (внешнее произведение двух 4-векторов). Складывая, мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) - \left\{ \begin{matrix} \mu\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\tau} \right)$$

имеет тензорный характер. Тем самым дано, как видно из равенства (26), требуемое доказательство для 4-вектора

$$\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}$$

и, следовательно, по доказанному выше, для любого 4-вектора A_μ.

Пользуясь ковариантной производной 4-вектора, нетрудно дать определение ковариантной производной ковариантного тензора любого ранга; это определение представляет собой обобщение ковариантной производной 4-вектора. Мы ограничимся получением ковариантной производной тензора второго ранга, так как этого достаточно, чтобы составить себе отчетливое представление об этой операции.

Как уже указывалось выше, каждый ковариантный тензор второго ранга может быть представлен [1]) в виде суммы тензоров типа $A_\mu B_\nu$. Поэтому вполне достаточно ограничиться выводом формулы ковариантной производной для такого специального тензора. Выражения

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_\tau,$$

$$\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} B_\tau$$

имеют, в силу (26), тензорный характер. Посредством внешнего умножения первого выражения на B_ν и второго на A_μ получаем по одному тензору третьего ранга; сумма полученных тензоров

$$A_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\mu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma\nu \\ \tau \end{matrix} \right\} A_{\mu\tau} \tag{27}$$

представляет собой тоже тензор третьего ранга, причем мы положили $A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu$. Так как правая часть равенства (27) линейна и однородна относительно $A_{\mu\nu}$ и его первых производных, то этот закон образования новых тензоров приводит к тензору не только в случае тензора типа $A_\mu B_\nu$, но и для суммы таких тензоров, т. е. любого ковариантного тензора второго ранга. Назовем $A_{\mu\nu\sigma}$ ковариантной производной тензора $A_{\mu\nu}$.

Ясно, что (26) и (24) являются только специальными случаями ковариантной производной (27) (ковариантными производными тензора первого и нулевого ранга). Вообще говоря, все специальные законы образования новых тензоров могут быть получены на основе соотношения (27) в соединении с умножением тензоров друг на друга.

---

[1]) Посредством внешнего умножения векторов с (любыми) компонентами A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} и соответственно с компонентами 1, 0, 0, 0 получается тензор с компонентами

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}.$$

Складывая четыре тензора этого рода, получаем тензор $A_{\mu\nu}$ с любыми наперед заданными компонентами.

§ 11. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ИМЕЮЩИЕ ОСОБОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Некоторые леммы о фундаментальном тензоре. Выведем сначала некоторые полезные в дальнейшем вспомогательные соотношения. Согласно правилу дифференцирования определителей, имеем

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}. \tag{28}$$

Последнее выражение следует из предшествующего, если принять во внимание, что $g_{\mu\nu} g^{\mu'\nu} = \delta_\mu^{\mu'}$ и $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, а, следовательно,

$$g_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\, dg_{\mu\nu} = 0.$$

Из соотношений (28) следует

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln(-g)}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \tag{29}$$

Из равенства

$$g_{\mu\sigma} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\nu$$

посредством дифференцирования получаем

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\sigma}\, dg^{\nu\sigma} &= -g^{\nu\sigma}\, dg_{\mu\sigma}, \\ &\text{или} \\ g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\lambda} &= -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Отсюда в результате смешанного умножения на $g^{\mu\tau}$ и соответственно на $g_{\nu\lambda}$ получаем (изменяя обозначения индексов)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\, dg_{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и соответственно

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\, dg^{\alpha\beta}, \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Соотношение (31) можно преобразовать в другое, которым мы также часто будем пользоваться. В силу формулы (21),

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha\sigma \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta\sigma \\ \alpha \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Подставляя это во вторую формулу (31) и принимая во внимание соотношение (23), получаем

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\sigma\\ \nu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\tau}\left\{\begin{matrix}\tau\sigma\\ \mu\end{matrix}\right\}\right). \tag{34}$$

В результате подстановки правой части равенства (34) в (29) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_\sigma} = \left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \mu\end{matrix}\right\}. \tag{29a}$$

1275 1

Дивергенция контравариантного 4-вектора. Если умножить соотношение (26) на контравариантный фундаментальный тензор $g^{\mu\nu}$ (внутреннее умножение), то его правая часть после преобразования первого члена примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(g^{\mu\nu}A_\mu) - A_\mu\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2}g^{\tau\alpha}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)g^{\mu\nu}A_\tau.$$

Последний член этого выражения на основании равенств (31) и (29) можно привести к виду

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\nu}}{\partial x_\nu}A_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\tau\mu}}{\partial x_\mu}A_\tau + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}g^{\tau\alpha}A_\tau.$$

Так как обозначение индексов, по которым производится суммирование, не имеет значения, то первые два члена последнего выражения взаимно уничтожаются со вторым членом стоящего выше выражения; последний же член можно объединить с первым членом стоящего выше выражения. Полагая

$$g^{\mu\nu}A_\mu = A^\nu,$$

где A^ν, подобно A_μ, — произвольный вектор, получаем, наконец,

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{-g}\,A^\nu\right). \tag{35}$$

Этот скаляр и представляет собой *дивергенцию* контравариантного 4-вектора A^ν.

«Ротор» (ковариантного) 4-вектора. Второй член в формуле (26) симметричен по индексам μ и ν. Поэтому $A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}$ оказывается особенно простым по своей структуре (антисимметричным) тензором. Мы имеем

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \tag{36}$$

Антисимметричная тензорная производная 6-вектора. Если применить (27) к некоторому антисимметричному тензору 2-го ранга $A_{\mu\nu}$, затем образовать из полученного равенства путем циклической перестановки индексов μ, ν, σ еще два аналогичных равенства и, наконец, сложить все эти три равенства, то получим тензор 3-го ранга

$$B_{\mu\nu\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}+A_{\nu\sigma\mu}+A_{\sigma\mu\nu}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\frac{\partial A_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}+\frac{\partial A_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}; \tag{37}$$

легко доказать, что этот тензор антисимметричен.

Дивергенция 6-вектора. Если равенство (27) умножить на $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$ (смешанное умножение), то получим тоже тензор. Первый член правой части равенства (27) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}\right)-g^{\mu\alpha}\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}-g^{\nu\beta}\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}A_{\mu\nu}.$$

Если заменить $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu\sigma}$ на $A_\sigma^{\alpha\beta}$ и $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}A_{\mu\nu}$ на $A^{\alpha\beta}$ и подставить в преобразованный первый член вместо

$$\frac{\partial g^{\nu\beta}}{\partial x_\sigma} \text{ и } \frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x_\sigma}$$

соответствующие значения по формуле (34), то в правой части равенства (27) будет семь членов, из которых четыре члена взаимно уничтожатся. Остается только

$$A_\sigma^{\alpha\beta}=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}+\begin{Bmatrix}\sigma\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix}A^{\varkappa\beta}+\begin{Bmatrix}\sigma\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix}A^{\alpha\varkappa}. \tag{38}$$

Это и есть выражение для ковариантной производной контравариантного тензора 2-го ранга. Оно может быть соответствующим образом составлено и для контравариантных тензоров более высокого и более низкого рангов.

Заметим, что аналогичным путем можно получить также ковариантную производную смешанного тензора A_μ^α:

$$A_{\mu\sigma}^\alpha=\frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\sigma}-\begin{Bmatrix}\sigma\mu\\ \tau\end{Bmatrix}A_\tau^\alpha+\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}A_\mu^\tau. \tag{39}$$

Производя свертку в формуле (38) по индексам β и σ (внутреннее умножение на δ_β^σ), получаем контравариантный 4-вектор:

$$A^\alpha=\frac{\partial A^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \beta\end{Bmatrix}A^{\alpha\varkappa}+\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix}A^{\varkappa\beta}.$$

Вследствие симметрии $\begin{Bmatrix}\beta\varkappa\\ \alpha\end{Bmatrix}$ относительно индексов β и $\varkappa$ третий член правой части обращается в нуль в том случае, когда $A^{\alpha\beta}$ есть антисимметричный тензор, что мы и будем считать в дальнейшем;

второй член может быть преобразован на основании (29а). Таким образом, получается

$$A^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{\alpha\beta})}{\partial x_{\beta}}. \tag{40}$$

Это и есть выражение для дивергенции контравариантного 6-вектора.

Дивергенция смешанного тензора второго ранга. Если в выражении (39) произвести свертку по индексам α и σ и принять во внимание формулу (29а), то получим

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}-\left\{\begin{matrix}\sigma\mu\\ \tau\end{matrix}\right\}\sqrt{-g}\,A_{\tau}^{\sigma}. \tag{41}$$

Если в последний член этого равенства ввести контравариантный тензор $A^{\rho\sigma}=g^{\rho\tau}A_{\tau}^{\sigma}$, то он примет вид

$$-\left[\begin{matrix}\sigma\mu\\ \rho\end{matrix}\right]\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}.$$

Далее, если тензор $A^{\rho\sigma}$ симметричен, то последнее выражение переходит в

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A^{\rho\sigma}.$$

Равным образом, если бы мы вместо $A^{\rho\sigma}$ ввели симметричный ковариантный тензор $A_{\rho\sigma}=g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta}A^{\alpha\beta}$, то последний член, в силу (31), принял бы вид

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}A_{\rho\sigma}.$$

Итак, в рассмотренном случае симметричного тензора выражение (41) может быть заменено следующими двумя выражениями:

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A^{\rho\sigma}, \tag{41а}$$

$$\sqrt{-g}\,A_{\mu}=\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A_{\mu}^{\sigma})}{\partial x_{\sigma}}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_{\mu}}\sqrt{-g}\,A_{\rho\sigma}, \tag{41б}$$

которыми мы в дальнейшем воспользуемся.

§ 12. ТЕНЗОР РИМАНА — КРИСТОФФЕЛЯ

Рассмотрим теперь те тензоры, которые могут быть получены из фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ *одним лишь* его дифференцированием. На первый взгляд может показаться, что все очень просто: достаточно подставить в (27) вместо произвольно взятого тензора $A_{\mu\nu}$ фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, чтобы таким образом получить новый тензор, а именно ковариантную производную фундаментального тензора. Однако легко убедиться в том, что эта ковариантная производная тождественно обращается в нуль. Цель все же достигается следующим образом. Подставим в соотношение (27) выражение для $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\left\{ {\mu\nu \atop \rho} \right\} A_\rho,$$

которое представляет собой тензорную производную 4-вектора A_μ. Тогда получается (при несколько измененном обозначении индексов) тензор третьего ранга

$$A_{\mu\sigma\tau}=\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma \partial x_\tau}-\left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\tau}-\left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}-\left\{ {\sigma\tau \atop \rho} \right\}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho}+$$
$$+\left[-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\}+\left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\}+\left\{ {\sigma\tau \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\mu \atop \rho} \right\}\right]A_\rho.$$

Это выражение приводит к мысли о составлении тензора $A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}$. Действительно, при этом следующие члены выражения для $A_{\mu\sigma\tau}$ взаимно уничтожаются с соответвующими членами из $A_{\mu\tau\sigma}$: первый, четвертый член, а также последний член внутри квадратных скобок, ибо все эти члены симметричны по σ и τ. То же самое справедливо и для суммы второго и третьего членов. Таким образом, мы получаем

$$A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}=B^\rho_{\mu\sigma\tau}A_\rho, \tag{42}$$

$$B^\rho_{\mu\sigma\tau}=-\frac{\partial}{\partial x_\tau}\left\{ {\mu\sigma \atop \rho} \right\}+\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{ {\mu\tau \atop \rho} \right\}-\left\{ {\mu\sigma \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\tau \atop \rho} \right\}+\left\{ {\mu\tau \atop \alpha} \right\}\left\{ {\alpha\sigma \atop \rho} \right\}. \tag{43}$$

В этом результате важно то, что в правой части равенства (42) стоит только 4-вектор A_ρ и отсутствуют его производные. Из тензорного характера $A_{\mu\sigma\tau}-A_{\mu\tau\sigma}$, а также из того, что A_ρ представляет собой произвольный 4-вектор, в силу выводов § 7, следует, что $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ является тензором (тензор Римана — Кристоффеля).

Математический смысл этого тензора заключается в следующем. Если континуум обладает тем свойством, что существует такая координатная система, в которой $g_{\mu\nu}$ — постоянные величины, то все $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ обращаются в нуль. Если вместо первоначальной системы выбрать любую новую координатную систему, то $g_{\mu\nu}$ в этой последней уже не будут больше постоянными. Однако тензорный характер величин $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$ влечет за собой обращение в нуль всех компонент в произвольно выбранной системе координат. Следовательно, обращение в нуль тензора Римана является необходимым условием того, чтобы посредством надлежащего выбора координатной системы можно было сделать $g_{\mu\nu}$ постоянными [1]). В нашей задаче

[1]) Математики доказали, что это условие является также и *достаточным*.

это соответствует случаю, когда при соответствующем выборе координатной системы в конечных областях справедлива специальная теория относительности.

Свертка по индексам τ и ρ в выражении (43) для $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ дает ковариантный тензор 2-го ранга

$$\begin{gathered} B_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}+S_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu}=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}, \\ S_{\mu\nu}=\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{gathered} \tag{44}$$

Замечание о выборе системы координат. Уже в § 8 в связи с соотношением (18а) было сделано замечание о том, что некоторые преимущества дает такой выбор координат, при котором $\sqrt{-g}=1$. Взгляд на уравнения, полученные в двух последних параграфах, показывает, что благодаря такому выбору законы образования тензоров значительно упрощаются. В частности, это верно для только что выведенного тензора $B_{\mu\nu}$, который в излагаемой теории играет основную роль. Именно, указанный особый выбор координат влечет за собою обращение в нуль $S_{\mu\nu}$, так что тензор $B_{\mu\nu}$ сводится к $R_{\mu\nu}$.

Поэтому в дальнейшем я буду давать все соотношения в том упрощенном виде, который следует из указанного специального выбора координатной системы. К *общековариантным уравнениям* будет нетрудно вернуться, если в каком-нибудь частном случае это окажется желательным.

В. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

§ 13. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Согласно специальной теории относительности, свободное тело, не подверженное действию внешних сил, движется прямолинейно и равномерно. С точки зрения общей теории относительности это верно лишь в той части четырехмерного пространства, в которой координатная система K_0 может быть выбрана так, что $g_{\mu\nu}$ принимают специальные постоянные значения, указанные в (4).

Если мы рассматриваем это же движение относительно произвольно выбранной координатной системы K_1, то в соответствии со сказанным в § 2 тело будет двигаться с точки зрения системы K_1 в некотором поле тяготения. Закон движения относительно системы K_1 легко получается из следующего рассуждения. В системе K_0 траектория движения представляет собой четырехмерную прямую, т. е. геодезическую. Но так как геодезическая определяется независимо от координатной системы, то ее уравнение будет также уравнением движения материальной точки относительно системы K_1. Положив

$$\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} = -\begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \tau \end{Bmatrix}, \tag{45}$$

найдем, что уравнение движения точки относительно K_1 запишется в виде

$$\frac{d^2x_\tau}{ds^2} = \Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\frac{dx_\mu}{ds}\cdot\frac{dx_\nu}{ds}. \tag{46}$$

Сделаем теперь весьма естественное допущение, что эта общековариантная система уравнений определяет движение точки в гравитационном поле и в том случае, когда не существует системы K_0, относительно которой в конечных областях пространства справедлива специальная теория относительности. Мы тем более вправе делать такое допущение, что уравнение (46) содержит только первые производные от $g_{\mu\nu}$, между которыми — даже в частном случае существования системы K_0 — отсутствуют какие-либо соотношения [1]).

Если все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ равны нулю, то точка движется прямолинейно и равномерно; следовательно, эти величины обусловливают отклонение движения от прямолинейного и равномерного. Они являются компонентами гравитационного поля.

§ 14. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ОТСУТСТВИЕ ВЕЩЕСТВА

В дальнейшем мы будем различать «гравитационное поле» и «вещество» в том смысле, что все, кроме гравитационного поля, будем называть «веществом»; это значит, что к последнему относится не только «вещество» в обычном смысле, но и электромагнитное поле.

Наша ближайшая задача заключается в отыскании уравнений гравитационного поля в отсутствие вещества. Для этого опять воспользуемся тем же методом, какой применялся в предыдущем параграфе при выводе уравнения движения материальной точки. Первоначальная теория относительности, в которой $g_{\mu\nu}$ имеют извест-

---

[1]) Лишь между вторыми (вместе с первыми) производными, согласно § 12, существуют соотношения $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau} = 0$.

ные постоянные значения, является тем частным случаем, для которого искомые уравнения заведомо должны удовлетворяться. Пусть этот частный случай осуществляется в некоторой конечной области по отношению к определенной координатной системе K_0. В этой системе все компоненты $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ тензора Римана [формула (43)] обращаются в нуль. Но в таком случае они будут равны нулю и в любой другой системе координат в рассматриваемой области.

Таким образом, искомые уравнения свободного от вещества гравитационного поля во всяком случае должны выполняться, если все $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Но это условие заведомо требует слишком многого. В самом деле, гравитационное поле, создаваемое, например, материальной точкой, во всяком случае не может быть никаким выбором координатной системы «оттрансформировано», т. е. не может быть преобразовано к случаю постоянных $g_{\mu\nu}$.

Поэтому представляется естественным требование, чтобы в свободном от вещества гравитационном поле обращался в нуль симметричный тензор $B_{\mu\nu}$, полученный из тензора $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$. Таким способом получаются 10 уравнений для 10 величин $g_{\mu\nu}$, которые выполняются в том частном случае, когда все $B^{\rho}_{\mu\sigma\tau}$ равны нулю. Эти уравнения для свободного от вещества поля, в силу (44), при сделанном выборе координатной системы имеют вид

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \qquad (47)$$

$$\sqrt{-g} = 1.$$

Следует отметить, что с выбором этих уравнений связан минимум произвола. Ведь, кроме $B_{\mu\nu}$, нет другого тензора 2-го ранга, который был бы составлен из $g_{\mu\nu}$ и их производных, не содержал бы производных более высокого порядка, чем второго, и был бы линейным относительно последних [1]).

Тот факт, что эти уравнения, вытекающие из общего принципа относительности чисто математическим путем, в соединении с уравнениями движения (46) дают в первом приближении ньютоновский закон тяготения, а во втором приближении — объяснение открытого Леверье движения перигелия Меркурия (остающегося после внесения поправок на возмущение), должен, по нашему мнению, убедить в физической правильности теории.

---

[1]) Собственно говоря, это можно утверждать только о тензоре $B_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta})$, где λ — константа. Однако, приравняв его нулю, мы снова возвращаемся к уравнениям $B_{\mu\nu} = 0$.

§ 15. ФУНКЦИЯ ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ

Чтобы показать соответствие уравнений поля законам сохранения импульса и энергии, удобнее всего написать их в следующей гамильтоновой форме:

$$\begin{gathered}\delta\left\{\int H\,d\tau\right\}=0,\\ H=g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ \sqrt{-g}=1.\end{gathered}\tag{47a}$$

При этом на границах рассматриваемой ограниченной четырехмерной области интегрирования вариации равны нулю.

Прежде всего необходимо показать, что уравнения (47а) эквивалентны уравнениям (47). Для этой цели рассмотрим H как функцию от $g^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}_{\sigma}$ $(\equiv \partial g^{\mu\nu}/\partial x_{\sigma})$. Сначала запишем

$$\delta H=\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right).$$

Но

$$\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)=-\frac{1}{2}\,\delta\left[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_{\nu}}-\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x_{\lambda}}\right)\right].$$

Выражения, получающиеся из двух последних членов в круглых скобках, имеют разные знаки и получаются друг из друга путем перестановки индексов μ и β (так как обозначение индексов суммирования не имеет значения). В выражении для δH они взаимно уничтожаются, будучи умножены на величину $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$, симметричную относительно индексов μ и β. Таким образом, следует учесть лишь первый член в круглых скобках, так что, принимая во внимание равенства (31), получаем

$$\delta H=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\delta g^{\mu\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\delta g^{\mu\beta}_{\alpha}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha},\\ \frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}.\end{gathered}\tag{48}$$

Выполнив вариации в (47а), получим сначала систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{\alpha}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}}=0,\tag{47б}$$

которая, в силу уравнений (48), совпадает с (47), что и требовалось доказать. Умножая (47б) на $g_\sigma^{\mu\nu}$ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$$

и, следовательно,

$$g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\frac{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma},$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}\right)-\frac{\partial H}{\partial x_\sigma}=0,$$

или [1])

$$\begin{gathered}\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=0,\\ -2\varkappa t_\sigma^\alpha=g_\sigma^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial g_\alpha^{\mu\nu}}-\delta_\sigma^\alpha H,\end{gathered}\tag{49}$$

причем, в силу уравнений (48), второго уравнения (47) и формулы (34), должно выполняться соотношение

$$\varkappa t_\sigma^\alpha=\frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\beta-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\sigma}^\beta.\tag{50}$$

Следует помнить, что t_σ^α не является тензором; уравнение же (49) справедливо для всех координатных систем, для которых $\sqrt{-g}=1$. Это уравнение выражает законы сохранения импульса и энергии для гравитационного поля. В самом деле, интегрирование этого уравнения по трехмерному объему V дает четыре уравнения:

$$\frac{d}{dx_4}\left\{\int t_\sigma^4\,dV\right\}=\int(t_\sigma^1 a_1+t_\sigma^2 a_2+t_\sigma^3 a_3)\,ds,\tag{49a}$$

где a_1, a_2, a_3 — направляющие косинусы внутренней нормали к элементу граничной поверхности dS (в смысле евклидовой геометрии). В этом соотношении, как нетрудно видеть, содержатся оба закона сохранения в их обычной форме записи. Мы назовем величины t_σ^α «компонентами энергии» гравитационного поля.

Представим теперь уравнения (47) еще в одной форме, особенно полезной для наглядного усвоения рассматриваемого вопроса. По-

[1]) Причина введения множителя $-2\varkappa$ выяснится позже.

средством умножения уравнений поля (47) на $g^{\nu\sigma}$ этим уравнениям придается «смешанный» вид. Нужно принять во внимание, что

$$g^{\nu\sigma}\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})-\frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}.$$

Эта величина, в силу (34), равна

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})-g^{\nu\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g^{\sigma\beta}\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu},$$

или (после изменения обозначения индексов суммирования)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta})-g^{mn}\Gamma^{\sigma}_{m\beta}\Gamma^{\beta}_{n\mu}-g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}.$$

Третий член этого выражения взаимно уничтожается с членом, получающимся из второго члена уравнений поля (47); вместо второго члена этого выражения можно, пользуясь соотношением (50), подставить

$$\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),$$

где $t=t^{\alpha}_{\alpha}$. Итак, вместо уравнений (47) получается

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta})=-\varkappa\left(t^{\sigma}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}t\right),\\ \sqrt{-g}=1.\end{gathered}\tag{51}$$

§ 16. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Уравнения поля для свободного от вещества пространства, выведенные в предыдущем параграфе, нужно сравнить с уравнением поля

$$\Delta\varphi=0$$

теории Ньютона. Мы должны найти уравнение, которое соответствует уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi=4\pi\varkappa\rho,$$

где ρ — плотность вещества.

Специальная теория относительности привела к тому выводу, что инертная масса есть не что иное, как энергия, полное математическое выражение которой дается симметричным тензором 2-го ранга, тензором энергии. Поэтому и в общей теории относительности придется ввести некоторый тензор энергии вещества T^{α}_{σ}, имеющий смешанный характер, как и компоненты t^{α}_{σ} [уравнения

(49) и (50)] гравитационного поля, но в то же время соответствующий симметричному ковариантному тензору [1]).

Система уравнений (51) показывает, как ввести этот тензор энергии (соответствующий плотности ρ в уравнении Пуассона) в уравнения гравитационного поля. Если рассматривать замкнутую систему (например, Солнечную систему), то общая масса системы и, следовательно, ее общее гравитирующее действие будут зависеть от всей энергии системы, т. е. от совокупности энергии вещества и энергии поля тяготения. Это можно выразить тем, что в уравнениях (51) вместо одних только компонент энергии t_μ^σ гравитационного поля мы подставим сумму $t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma$ компонент тензора энергии вещества и гравитационного поля. Таким образом, вместо (51) получается тензорное уравнение

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(g^{\sigma\beta}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha) = -\varkappa\left[(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma) - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma(t+T)\right],\\ \sqrt{-g}=1,\end{gathered} \tag{52}$$

где $T = T_\mu^\mu$ (скаляр Лауэ). Это и есть искомые общие уравнения гравитационного поля в смешанной форме. Отсюда, обратно, вместо (47) получается система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\beta = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),\\ \sqrt{-g}=1.\end{gathered} \tag{53}$$

Нужно признать, что указанное введение тензора энергии вещества не может быть обосновано одним только постулатом относительности; поэтому выше мы исходили из требования, что энергия гравитационного поля должна действовать в смысле тяготения точно так же, как всякая энергия другого рода. Но самым сильным аргументом в пользу указанных уравнений является то, что из них следуют уравнения сохранения импульса и энергии для компонент полной энергии, в точности соответствующие уравнениям (49) и (49а). Это будет доказано ниже.

§ 17. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Уравнение (52) нетрудно преобразовать так, чтобы второй член в правой части обратился в нуль. Для этого следует произвести свертку по индексам μ и σ и вычесть полученное таким образом уравнение, предварительно умноженное на $^1/_2\delta_\mu^\sigma$, из уравнения (52).

---

[1]) $g_{\alpha\tau}T_\sigma^\alpha = T_{\sigma\tau}$ и $g^{\sigma\beta}T_\sigma^\alpha = T^{\alpha\beta}$ должны быть симметричными тензорами.

Тогда получается

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\,\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)=-\varkappa\,(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu). \tag{52a}$$

Применяя к этому уравнению операцию $\partial/\partial x_\sigma$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right].$$

Первый и третий члены в круглых скобках приводят к взаимно уничтожающимся слагаемым, в чем легко убедиться, если в третьем члене переставить, с одной стороны, индексы суммирования α и σ и, с другой стороны, индексы β и λ. Второй член можно преобразовать согласно (31), так что имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta})=\frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu}. \tag{54}$$

Второй член в левой части (52а) сначала дает

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}(g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}),$$

или

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta}g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x_\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right].$$

Член, соответствующий последнему члену в круглых скобках, обращается в нуль при сделанном нами выборе координат, в силу (29). Два других члена можно объединить; тогда на основании соотношений (31) получим

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_\mu},$$

так что, принимая во внимание равенство (54), получаем тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}-\frac{1}{2}\,\delta^\sigma_\mu g^{\lambda\beta}\Gamma^\alpha_{\lambda\beta}\right)\equiv 0. \tag{55}$$

Из (55) и (52а) следует

$$\frac{\partial\,(t^\sigma_\mu+T^\sigma_\mu)}{\partial x_\sigma}=0. \tag{56}$$

Таким образом, из наших уравнений гравитационного поля следует, что законы сохранения импульса и энергии выполняются. В этом проще всего убедиться при помощи рассуждения, которое ведет к уравнению (49а); нужно только вместо компонент энергии t^σ_μ гравитационного поля ввести компоненты полной энергии вещества и гравитационного поля.

§ 18. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ДЛЯ ВЕЩЕСТВА КАК СЛЕДСТВИЕ УРАВНЕНИЙ ПОЛЯ

Умножая уравнение (53) на $\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma$, пользуясь приемом, примененным в § 15, и принимая во внимание, что $g_{\mu\nu}\,(\partial g^{\mu\nu}/\partial x_\sigma)$ равно нулю, получаем уравнение

$$-\frac{\partial t_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0$$

или, в силу равенства (56),

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}T_{\mu\nu}=0. \tag{57}$$

Сравнение с (41б) показывает, что это уравнение при сделанном выборе координатной системы выражает не что иное, как обращение в нуль дивергенции тензора энергии вещества. Наличие второго члена в левой части с физической точки зрения означает, что для одного лишь вещества законы сохранения импульса и, энергии в их подлинном смысле не выполняются; точнее говоря, они выполняются лишь тогда, когда $g^{\mu\nu}$ постоянны, т. е. когда компоненты напряженности гравитационного поля равны нулю. Этот второй член представляет собой выражение для импульса и, соответственно, для энергии, которые в единицу времени и в единице объема передаются веществу от гравитационного поля. Все это становится еще более ясным, если вместо (57) записать в духе соотношения (41)

$$\frac{\partial T_\sigma^\alpha}{\partial x_\alpha}=-\Gamma_{\sigma\alpha}^\beta T_\beta^\alpha. \tag{57a}$$

Правая часть этого уравнения выражает энергетическое воздействие гравитационного поля на вещество.

Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат четыре условия, которым должны удовлетворять материальные процессы. Эти условия и представляют собой уравнения материального процесса, если последний может быть описан четырьмя независимыми друг от друга дифференциальными уравнениями [1]).

Г. "МАТЕРИАЛЬНЫЕ" ПРОЦЕССЫ

Математические вспомогательные средства, изложенные в разделе Б, дают нам возможность сразу обобщить физические законы (гидродинамику, электродинамику Максвелла), сформулированные в специальной теории относительности, так чтобы они удовле-

[1]) Ср. *Hilbert D.*, Nachrichten K. Gesellschaft d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, Heft 3, S. 395. (См. данный сборник, стр. 133. — *Прим. ред.*)

творяли общей теории относительности. При этом общий принцип относительности, не налагая никаких новых ограничений, дает возможность точно описать влияние гравитационного поля на все процессы без привлечения каких-либо новых гипотез.

Из этого обстоятельства следует, что не нужно вводить никаких предположений относительно физической природы вещества (в более узком смысле). В частности, может остаться открытым вопрос о том, смогут ли теория электромагнитного поля и теория гравитационного поля совместно служить базой для теории вещества. Общий постулат относительности в принципе ничего не может сказать об этом. В процессе развития теории выяснится, смогут ли электродинамика и учение о тяготении вместе дать то, что не удавалось одной лишь первой теории.

§ 19. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ АДИАБАТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ОТСУТСТВИЕ ТРЕНИЯ

Пусть p и ρ — два скаляра, первый из которых назовем «давлением», а второй — «плотностью» жидкости; пусть они связаны некоторым уравнением. Пусть, далее, контравариантный симметричный тензор

$$T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}p + \rho \frac{dx_\alpha}{ds} \frac{dx_\beta}{ds} \tag{58}$$

является контравариантным тензором энергии жидкости. Ему соответствует ковариантный тензор

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}p + g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds} g_{\nu\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\rho, \tag{58а}$$

а также смешанный тензор [1])

$$T_\sigma^\alpha = -\delta_\sigma^\alpha p + g_{\sigma\beta}\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\alpha}{ds}\rho. \tag{58б}$$

Подставив правую часть равенства (58б) в уравнение (57а), получим гидродинамические уравнения Эйлера в общей теории относительности. В принципе эти уравнения полностью решают проблему движения, ибо четыре уравнения (57а) вместе с заданной зависимостью между p и ρ и соотношением

$$g_{\alpha\beta}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds} = 1$$

[1]) Для наблюдателя, который движется вместе с жидкостью и пользуется в бесконечно малой области координатной системой в смысле специальной теории относительности, плотность энергии T_4^4 равна $\rho - p$. Это и есть определение плотности ρ. Таким образом, для несжимаемой жидкости ρ не является постоянной.

достаточны при данных $g_{\alpha\beta}$ для определения 6 неизвестных

$$p, \ \rho, \ \frac{dx_1}{ds}, \ \frac{dx_2}{ds}, \ \frac{dx_3}{ds}, \ \frac{dx_4}{ds}.$$

Если неизвестны также и $g_{\mu\nu}$, то к прежним уравнениям присоединяются еще уравнения (53). Таким образом, для определения 10 функций $g_{\mu\nu}$ имеем 11 уравнений. Может показаться, что неизвестные функции переопределены. Между тем следует заметить, что уравнения (57а) уже содержатся в уравнениях (53), так что последние представляют не больше 7 независимых уравнений. Причина этой неопределенности заключается в широкой свободе выбора координатной системы, вследствие которой задача в математическом смысле остается неопределенной в такой степени, что три из пространственных функций могут быть выбраны произвольно [1]).

20. МАКСВЕЛЛОВЫ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ВАКУУМА

Пусть φ_ν — компоненты ковариантного 4-вектора электромагнитного потенциала. Образуем из них, согласно (36), компоненты $F_{\rho\sigma}$ ковариантного 6-вектора электромагнитного поля:

$$F_{\rho\sigma} = \frac{\partial\varphi_\rho}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x_\rho}. \tag{59}$$

Из соотношения (59) следует, что удовлетворяется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial F_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{60}$$

Левая часть этого равенства, в силу (37), представляет собой антисимметричный тензор 3-го ранга. Таким образом, система (60) содержит по существу четыре уравнения, имеющие вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} &= 0,\\
\frac{\partial F_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} &= 0,\\
\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} &= 0
\end{aligned} \tag{60a}$$

---

[1]) При отказе от выбора координатной системы с $g = -1$ свободно выбираемыми остаются *четыре* пространственные функции соответственно четырем произвольным функциям, которыми можно свободно распоряжаться при выборе координат.

Эта система уравнений соответствует второй системе уравнений Максвелла. В этом можно немедленно убедиться, если подставить

$$\begin{aligned} F_{23} &= \mathfrak{h}_x & F_{14} &= \mathfrak{e}_x, \\ F_{31} &= \mathfrak{h}_y, & F_{24} &= \mathfrak{e}_y, \\ F_{12} &= \mathfrak{h}_z, & F_{34} &= \mathfrak{e}_z. \end{aligned} \tag{61}$$

Тогда можно вместо (60а) написать в обычных обозначениях трехмерного векторного анализа

$$\begin{gathered} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathfrak{e} = 0, \\ \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0. \end{gathered} \tag{60б}$$

Первую систему уравнений Максвелла мы получим, обобщая уравнения Максвелла в форме, данной Минковским. Введем контравариантный 6-вектор

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}, \tag{62}$$

соответствующий ковариантному $F_{\alpha\beta}$, и контравариантный 4-вектор I_μ плотности электрического тока в пустоте. В таком случае можно, приняв во внимание соотношение (40), написать следующую, инвариантную по отношению к любым преобразованиям с определителем, равным 1 (согласно сделанному нами выбору координат), систему уравнений:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = I^\mu. \tag{63}$$

Положим

$$\begin{aligned} F^{23} &= \mathfrak{h}'_x, & F^{14} &= -\mathfrak{e}'_x, \\ F^{31} &= \mathfrak{h}'_y, & F^{24} &= -\mathfrak{e}'_y, \\ F^{12} &= \mathfrak{h}'_z, & F^{34} &= -\mathfrak{e}'_z. \end{aligned} \tag{64}$$

Эти величины в частном случае специальной теории относительности равны соответственно величинам $\mathfrak{h}_x, \ldots, \mathfrak{e}_z$. Далее, положим

$$I^1 = \mathfrak{j}_x, \quad I^2 = \mathfrak{j}_y, \quad I^3 = \mathfrak{j}_z, \quad I^4 = \rho.$$

Тогда вместо (63) получим

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \mathfrak{h}' - \frac{\partial \mathfrak{e}'}{\partial t} = \mathfrak{j}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{e}' = \rho. \end{gathered} \tag{63а}$$

Уравнения (60), (62), (63) представляют собой обобщение максвелловых уравнений поля в пустоте при сделанном допущении относительно выбора координат.

Компоненты тензора энергии электромагнитного поля. Образуем внутреннее произведение

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} I^\mu. \tag{65}$$

Его компоненты, написанные согласно (61), в трехмерных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \rho \mathfrak{e}_x + [\mathfrak{i}, \mathfrak{h}]_x \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \varkappa_4 &= -(\mathfrak{i}, \mathfrak{e}). \end{aligned} \tag{65a}$$

Величина $\varkappa_\sigma$ представляет собой ковариантный 4-вектор, компоненты которого с обратным знаком равны импульсу или, соответственно, энергии, которые передаются электрическими зарядами электромагнитному полю в единицу времени и в единице объема. Если электрические заряды свободны, т. е. если они находятся под влиянием одного только электромагнитного поля, то ковариантный 4-вектор $\varkappa_\sigma$ обращается в нуль.

Чтобы получить компоненты энергии T_σ^ν электромагнитного поля, достаточно уравнению $\varkappa_\sigma = 0$ придать вид уравнения (57). Тогда из (63) и (65) сначала получим

$$\varkappa_\sigma = F_{\sigma\mu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F_{\sigma\mu} F^{\mu\nu}) - F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Второй член в правой части, в силу (60), может быть преобразован следующим образом:

$$F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}.$$

Из соображений симметрии последнее выражение может быть записано также и в виде

$$-\frac{1}{4} \left[g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} F_{\mu\nu} \right].$$

Но вместо этого можно написать

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}).$$

Первый член этого выражения можно представить в виде

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}).$$

Второй член после выполнения дифференцирования и некоторого преобразования принимает форму

$$-\frac{1}{2} F^{\mu\tau} F_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x_\sigma}.$$

Объединяя все три вычисленных члена, получаем соотношение

$$\varkappa_\sigma = \frac{\partial T_\sigma^\nu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g^{\tau\mu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} T_\tau^\nu, \tag{66}$$

причем

$$T_\sigma^\nu = -F_{\sigma\alpha} F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\sigma^\nu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{66a}$$

Равенство (66) при $\varkappa_\sigma$, равном нулю, в силу (30), эквивалентно (57) или соответственно (57а). Следовательно, T_σ^ν представляют собой компоненты энергии электромагнитного поля. При помощи равенств (61) и (64) легко показать, что эти компоненты энергии электромагнитного поля в случае специальной теории относительности соответствуют известным выражениям Максвелла — Пойнтинга.

Итак, мы вывели самые общие законы, которым удовлетворяют гравитационное поле и вещество, пользуясь при этом координатной системой, в которой $\sqrt{-g} = 1$. Благодаря этому мы значительно упростили формулы и расчеты, не отказываясь в то же время от требования общей ковариантности, ибо мы вывели наши уравнения из общековариантных уравнений, выбирая лишь специальным образом координатную систему.

Все же не лишен формального интереса вопрос, остаются ли в силе законы сохранения (импульса и энергии), а также уравнения гравитационного поля, представленные в виде уравнений (56) и соответственно (52) или (52а), в которых слева стоит дивергенция (в обычном смысле), а справа — сумма компонент энергии вещества и гравитационного поля, в том случае, когда при соответственно обобщенном определении компонент энергии гравитационного поля и вещества не делается специального выбора координатной системы. Я нашел, что это действительно так. Однако я полагаю, что изложение довольно длинных рассуждений по данному вопросу нецелесообразно, поскольку при этом ничего существенно нового не получается.

Д. § 21. ТЕОРИЯ НЬЮТОНА КАК ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как уже упоминалось много раз, специальная теория относительности, рассматриваемая как частный случай общей теории относительности, характеризуется тем, что $g_{\mu\nu}$ имеют постоянные значения (4). Согласно изложенному выше, это означает полное пренебрежение гравитационными действиями. Более близкое к действительности приближение мы получаем, рассматривая случай, когда все $g_{\mu\nu}$ отличаются от значений (4) лишь на малые (по сравнению с 1) величины; при этом мы пренебрегаем малыми величинами второго и более высоких порядков. (Первая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Далее, допустим, что в рассматриваемой пространственно-временной области при надлежащем выборе системы координат величины $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности стремятся к значениям (4); это значит, что мы рассматриваем гравитационные поля, которые могут считаться созданными только веществом, находящимся в конечной области пространства.

Можно было бы думать, что упомянутые пренебрежения должны привести к теории Ньютона. Однако для этого в основных уравнениях требуется сделать некоторые приближения еще и с другой точки зрения. Рассмотрим движение материальной точки, удовлетворяющее уравнениям (46). В случае специальной теории относительности компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

могут принимать любые значения; это означает, что могут встречаться любые скорости

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2},$$

меньшие скорости света в пустоте ($v < 1$). Если ограничиться случаем, который почти всегда встречается на опыте, когда v мало по сравнению со скоростью света, то это будет означать, что компоненты

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds}, \quad \frac{dx_3}{ds}$$

должны рассматриваться как малые величины, в то время как dx_4/ds, с точностью до величин второго порядка, равно 1. (Вторая предпосылка приближенного решения основных уравнений.)

Теперь примем во внимание, что, согласно первой предпосылке нашего приближения, все $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$ представляют собой малые величины по крайней мере первого порядка. Отсюда следует, что в выражении (46), согласно второй предпосылке, должны быть учтены только члены с $\mu = \nu = 4$. Ограничиваясь членами низшего порядка, мы вместо (46) получаем сначала следующие уравнения:

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2}=\Gamma^{\tau}_{44},$$

причем $ds = dx_4 = dt$. Беря только члены первого порядка, получаем

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2}=\begin{bmatrix}44\\ \tau\end{bmatrix} \quad (\tau=1, 2, 3),$$

$$\frac{d^2x_4}{dt^2}=-\begin{bmatrix}44\\ 4\end{bmatrix}.$$

Если, кроме того, предположить, что гравитационное поле квазистатично, т. е. ограничиться тем случаем, когда вещество, создающее гравитационное поле, движется медленно (по сравнению со скоростью распространения света), то в правой части можно пренебречь производными по времени по сравнению с производными по пространственным координатам; таким образом, получается

$$\frac{d^2x_\tau}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\tau} \quad (\tau = 1, 2, 3). \tag{67}$$

Это и есть уравнение движения материальной точки в теории Ньютона, причем $g_{44}/2$ играет роль гравитационного потенциала. Этот результат замечателен тем, что только одна компонента g_{44} фундаментального тензора определяет в первом приближении движение материальной точки.

Обратимся теперь к уравнению поля (53). При этом должно быть принято во внимание, что тензор энергии «вещества» определяется почти исключительно плотностью вещества ρ в более узком смысле этого слова, т. е. вторым членом правой части (58) [и соответственно (58а) или (58б)]. В интересующем нас приближении все компоненты, кроме $T_{44} = \rho = T$, обращаются в нуль. В левой части уравнения (53) второй член представляет собой величину второго порядка малости; первый же член в интересующем нас приближении принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_4}\begin{bmatrix}\mu\nu\\4\end{bmatrix}.$$

Это выражение при $\mu = \nu = 4$ и при отбрасывании производных по времени переходит в

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{1}{2}\Delta g_{44}.$$

Таким образом, последнее из уравнений (53) может быть записано в виде

$$\Delta g_{44} = \varkappa\rho. \tag{68}$$

Уравнения (67) и (68), вместе взятые, эквивалентны закону тяготения Ньютона.

Для гравитационного потенциала на основании уравнений (67) и (68) получается выражение

$$-\frac{\varkappa}{8\pi}\int\frac{\rho\, d\tau}{r}, \tag{68а}$$

тогда как теория Ньютона при выбранной нами единице времени дает для этой величины выражение

$$-\frac{K}{c^2}\int\frac{\rho\, d\tau}{r},$$

где K — обычная гравитационная постоянная, равная $6{,}7\cdot10^{-8}$. Из сравнения обоих выражений получается

$$\varkappa=\frac{8\pi K}{c^2}=1{,}87\cdot10^{-27}. \qquad (69)$$

§ 22. СВОЙСТВА МАСШТАБОВ И ЧАСОВ В СТАТИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ. ИСКРИВЛЕНИЕ ЛУЧЕЙ СВЕТА. ДВИЖЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ ПЛАНЕТНЫХ ОРБИТ

Чтобы получить теорию Ньютона как первое приближение, нам пришлось из 10 компонент гравитационного потенциала $g_{\mu\nu}$ вычислить только g_{44}, так как только эта компонента входит в полученное в первом приближении уравнение движения (67) материальной точки в гравитационном поле. Но и другие компоненты $g_{\mu\nu}$ должны в первом приближении отличаться от значений, данных в (4), так как все они связаны условием $g=-1$.

Для материальной точки, создающей поле и находящейся в начале координат, получается в первом приближении радиально симметричное решение:

$$g_{\rho\sigma}=-\delta_{\rho\sigma}-\alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3}\ (\rho \text{ и } \sigma \text{ принимают значения от 1 до 3}),$$
$$g_{\rho4}=g_{4\rho}=0\ (\rho \text{ принимает значения от 1 до 3}), \qquad (70)$$
$$g_{44}=1-\frac{\alpha}{r},$$

где $\delta_{\rho\sigma}$ равно 1 или 0 в зависимости от того, будет ли $\rho=\sigma$ или $\rho\neq\sigma$, а

$$r=+\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

При этом, в силу выражения (68а), имеем

$$\alpha=\frac{\varkappa M}{4\pi}, \qquad (70а)$$

где через M обозначена масса, создающая поле. Легко убедиться, что это решение удовлетворяет уравнениям поля (вне массы) в первом приближении.

Исследуем теперь воздействие, которое оказывает на метрические свойства пространства поле массы M. Между «локально» измеренными (см. § 4) длинами и промежутками времени ds, с одной стороны, и приращениями координат dx_ν — с другой, всегда имеется соотношение

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu.$$

Так, например, для единицы масштаба, расположенной «параллельно» оси x, следует написать

$$ds^2 = -1, \quad dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

т. е.

$$-1 = g_{11} dx_1^2.$$

Если единица масштаба, кроме того, лежит на самой оси x, то первое из уравнений (70) дает

$$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right).$$

Из обоих последних соотношений следует в первом приближении

$$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r}. \tag{71}$$

Итак, если единичный масштаб приложен в радиальном направлении, то в рассматриваемой координатной системе благодаря наличию гравитационного поля он представляется сокращенным в найденном отношении.

Аналогичным путем мы получим координатные длины масштаба в случае поперечного направления, если положим, например,

$$ds^2 = -1, \quad dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,$$
$$x_1 = r, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

В таком случае имеем

$$-1 = g_{22} dx_2^2 = -dx_2^2. \tag{71a}$$

Итак, при поперечном положении масштаба гравитационное поле материальной точки не оказывает никакого влияния на длину стержня.

Следовательно, в гравитационном поле евклидова геометрия не справедлива даже в первом приближении, если в качестве реализации одного и того же отрезка мы используем один и тот же стержень в разных местах и в разных положениях. Но соотношения (70а) и (69) все же показывают, что ожидаемые отклонения от геометрии Евклида слишком незначительны, чтобы их можно было заметить при измерении на поверхности Земли.

Пусть, далее, исследуется скорость хода эталонных часов, которые установлены неподвижно в статическом гравитационном поле. Для единичного интервала времени в этом случае имеем

$$ds = 1, \quad dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0.$$

Следовательно,

$$1 = g_{44} dx_4^2,$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(g_{44}-1)}} = 1 - \frac{g_{44}-1}{2},$$

или

$$dx_4 = 1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \int \frac{\rho \, d\tau}{r}. \tag{72}$$

Итак, часы идут медленнее, если они установлены вблизи весомых масс. Отсюда следует, что спектральные линии света, попадающего к нам с поверхности больших звезд, должны сместиться к красному концу спектра [1)].

Далее исследуем ход лучей света в статическом гравитационном поле. Согласно специальной теории относительности, распространение света описывается уравнением

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

Следовательно, в общей теории относительности эта скорость определяется из уравнения

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu = 0. \tag{73}$$

Если дано направление луча, т. е. отношения $dx_1 : dx_2 : dx_3$, то из уравнения (73) можно вычислить величины

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \qquad \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad \frac{dx_3}{dx_4}$$

и, таким образом, скорость

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

определяемую в смысле евклидовой геометрии. Легко видеть, что лучи света должны искривляться относительно координатной системы в случае, если $g_{\mu\nu}$ не постоянны. Если n — направление, перпендикулярное направлению распространения света, то из принципа Гюйгенса следует, что луч света [рассматриваемый в плоскости (γ, n)] обладает кривизной $-\partial\gamma/\partial n$.

Исследуем искривление, которое испытывает луч света, проходящий на некотором расстоянии Δ от массы M (рис. 1). Если выбрать координатную систему так, как показано на рисунке, то общее искривление B луча света (положительное, если траекто-

---

[1)] В пользу существования подобного эффекта говорят, согласно Э. Фрейндлиху, спектральные наблюдения над звездами определенных типов. Однако окончательная проверка этого следствия не была еще предпринята.

рия луча обращена к началу координат своей вогнутой стороной) в достаточно хорошем приближении дается выражением

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{dx_1}\, dx_2,$$

причем из (73) и (70) получается

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 - \frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Вычисление дает

$$B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{\varkappa M}{2\pi\Delta}. \tag{74}$$

Согласно этой формуле, луч света, проходящий мимо Солнца, испытывает отклонение в 1″,7, а луч света, проходящий мимо планеты Юпитер, отклоняется приблизительно на 0″,02.

Если вычислить поле тяготения с точностью до величин более высокого порядка и с соответствующей точностью вычислить

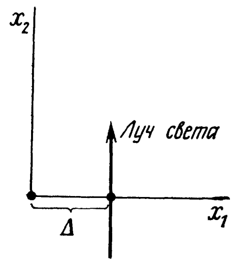


Рис. 1

движение по орбите материальной точки с бесконечно малой массой, то получается следующее отклонение от законов движения планет Кеплера — Ньютона. Эллиптическая орбита планеты испытывает в направлении движения планеты медленное вращение, равное

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} \tag{75}$$

за время одного полного обращения планеты. В этой формуле a означает большую полуось, c — скорость света в обычных единицах, e — эксцентриситет орбиты, T — период обращения планеты в секундах [1)].

Для планеты Меркурий получается вращение орбиты, составляющее 43″ в столетие, что точно соответствует величине, установленной астрономами (Леверье). Астрономы на самом деле нашли, что некоторая часть общего движения перигелия этой планеты не объясняется возмущающим действием других планет и равняется указанной величине.

[1)] Интересующихся вычислениями отсылаем к оригинальным работам: *A. Einstein*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., Bd. 47, 1915, Heft 2, S. 831 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», М., 1965, стр. 439); *K. Schwarzschild*, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1916, S. 189. (Перевод статьи Шварцильда см. в данном сборнике, стр. 199.— *Прим. ред.*)

III

ВАЖНЕЙШИЕ РАБОТЫ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА, ИХ КЛАССИФИКАЦИИ И УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ В ОТО

К. ШВАРЦШИЛЬД

О ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОЙ МАССЫ В ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ТЕОРИИ*

§ 1. В своей работе о движении перигелия Меркурия [1] г-н Эйнштейн поставил следующую задачу.

Допустим, что некая точка движется в соответствии с требованием

$$\delta \int ds = 0, \tag{1}$$

где

$$ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu} \quad (\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

причем величины $g_{\mu\nu}$ суть функции переменных x, а при варьировании переменные x закреплены на верхней и нижней границах интеграла. Короче говоря, точка движется по геодезической линии в многообразии, характеризуемом линейным элементом ds.

Варьирование дает уравнения движения точки в виде

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} = \sum_{\mu,\,\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx_\mu}{ds} \frac{dx_\nu}{ds} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{2}$$

* *Schwarzschild K.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1916, S. 189.

где

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sum_{\beta} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}\right), \tag{3}$$

а $g^{\alpha\beta}$ — миноры определителя $|g_{\mu\nu}|$, соответствующие компонентам $g_{\alpha\beta}$ и нормированные на них.

Тогда, по теории Эйнштейна, это будут уравнения движения безмассовой точки в гравитационном поле некой массы, находящейся в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, если для «компонент гравитационного поля» Γ всюду, кроме точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, выполняются «уравнения поля»

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} + \sum_{\alpha,\,\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} = 0, \tag{4}$$

а также «условие для определителя»

$$|g_{\mu\nu}| = -1. \tag{5}$$

Уравнения поля с условием для определителя обладают тем фундаментальным свойством, что они сохраняют свой вид при замене переменных x_1, x_2, x_3, x_4 любыми другими переменными, если только соответствующий якобиан равен 1.

Если x_1, x_2, x_3 — прямоугольные координаты, а через x_4 обозначено время, и если мы хотим, чтобы масса в начале координат не менялась со временем, а движение на бесконечности было равномерным и прямолинейным, то, согласно расчетам г-на Эйнштейна [1, стр. 833], должны выполняться еще следующие требования.

1. Все компоненты метрики не должны зависеть от времени x_4.

2. Равенства $g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0$ должны выполняться строго при $\rho = 1,2,3$.

3. Решение должно быть симметричным в пространстве вокруг начала координат, т. е. переходить само в себя при ортогональном преобразовании координат x_1, x_2, x_3 (вращении).

4. На бесконечности должны обращаться в нуль все величины $g_{\mu\nu}$, кроме четырех, имеющих следующие отличные от нуля предельные значения:

$$g_{44} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$$

Задача состоит в том, чтобы *отыскать линейный элемент с такими коэффициентами, которые удовлетворяли бы уравнениям поля, условию для определителя и четырем перечисленным требованиям.*

§ 2. Г-н Эйнштейн показал, что в первом приближении решение этой задачи приводит к закону Ньютона, а во втором правильно описывает известную аномалию в движении перигелия Меркурия. Вычисления же, приводимые ниже, дают *точное решение* задачи. Всегда приятно иметь точные решения простого вида. Но еще важнее, что эти вычисления одновременно показывают единственность решения, относительно которой подход г-на Эйнштейна оставлял сомнения и которая при таком методе приближений, как станет видно из дальнейшего, может быть продемонстрирована лишь с трудом. Последующие строки придадут больше чистоты блестящему результату г-на Эйнштейна.

§ 3. Если время обозначить через t, а прямоугольные координаты — через x, y, z, то очевидно, что наиболее общим линейным элементом, удовлетворяющим требованиям 1—3, является следующий:

$$ds^2 = F dt^2 - G(dx^2 + dy^2 + dz^2) - H(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2.$$

Здесь F, G и H — функции величины $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Требование 4 сводится к тому, чтобы при $r = \infty$ выполнялись равенства $F = G = 1$, $H = 0$.

Переходя к сферическим координатам по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

получаем для того же линейного элемента выражение

$$ds^2 = F dt^2 - G(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2) - Hr^2 dr^2 = \\ = F dt^2 - (G + Hr^2) dr^2 - Gr^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

При этом элемент объема в сферических координатах равен $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, так что якобиан преобразования от старых координат к новым, равный $r^2 \sin\theta$, отличен от единицы. Поэтому уравнения поля не сохраняют своего прежнего вида, если их записать в сферических координатах, и требуют основательного преобразования. Но можно обойти эту трудность, если воспользоваться простым искусственным приемом. Положим

$$x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\theta, \quad x_3 = \varphi. \tag{7}$$

Тогда элемент объема примет вид $r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = dx_1\, dx_2\, dx_3$. Следовательно, новые переменные можно толковать как *сферические координаты с определителем, равным единице*. Они сохраняют очевидные преимущества сферических координат при решении данной задачи, и вместе с тем при переходе к ним, если принять также $t = x_4$, уравнения поля и условие для определителя не меняют своего вида.

В новых сферических координатах линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = F\,dx_4^2 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}\right) dx_1^2 - Gr^2 \left[\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} + dx_3^2\,(1-x_2^2)\right], \tag{8}$$

что мы перепишем в виде

$$ds^2 = f_4\,dx_4^2 - f_1\,dx_1^2 - f_2\,\frac{dx_2^2}{1-x_2^2} - f_3\,dx_3^2\,(1-x_2^2). \tag{9}$$

Здесь f_1, $f_2 = f_3$, f_4 — три функции переменной x_1, которые должны удовлетворять следующим условиям:

1) $$f_1 = \frac{1}{r^4} = (3x_1)^{-4/3},$$

$$f_2 = f_3 = r^2 = (3x_1)^{2/3}, \quad x_4 = 1 \text{ при } x_1 = \infty;$$

2) условие для определителя $f_1 f_2 f_3 f_4 = 1$;
3) уравнения поля;
4) функции f непрерывны всюду, кроме точки $x_1 = 0$.

§ 4. Чтобы записать уравнения поля в явной форме, нужно сначала вычислить компоненты гравитационного поля, соответствующие линейному элементу (9). Для этого проще всего прямым варьированием найти дифференциальные уравнения геодезической линии, а из них уже взять указанные компоненты. Такое варьирование непосредственно дает дифференциальные уравнения геодезической линии для элемента (9) в виде

$$0 = f_1\,\frac{d^2x_1}{ds^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left[\frac{1}{1-x_2^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + (1-x_2^2)\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2\right];$$

$$0 = \frac{f_2}{1-x_2^2}\,\frac{d^2x_2}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,\frac{1}{1-x_2^2}\,\frac{dx_1}{ds}\,\frac{dx_2}{ds} + \frac{f_2 x_2}{(1-x_2^2)^2}\left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + f_2 x_2\left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2;$$

$$0 = f_2\,(1-x_2^2)\,\frac{d^2x_3}{ds^2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\,(1-x_2^2)\,\frac{dx_1}{ds}\,\frac{dx_3}{ds} - 2f_2 x_2\,\frac{dx_2}{ds}\,\frac{dx_3}{ds};$$

$$0 = f_4 \frac{d^2 x_4}{ds^2} + \frac{\partial f_4}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_4}{ds}.$$

Сравнение с уравнением (2) дает следующие выражения для компонент гравитационного поля:

$$\Gamma^1_{11} = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1};$$

$$\Gamma^1_{22} = +\frac{1}{2} \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{1}{1 - x_2^2};$$

$$\Gamma^1_{33} = +\frac{1}{2} \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} (1 - x_2^2);$$

$$\Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}; \qquad \Gamma^2_{21} = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1};$$

$$\Gamma^2_{22} = -\frac{x_2}{1 - x_2^2}; \qquad \Gamma^2_{33} = -x_2 (1 - x_2^2);$$

$$\Gamma^3_{31} = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}; \qquad \Gamma^3_{32} = +\frac{x_2}{1 - x_2^2};$$

$$\Gamma^4_{41} = -\frac{1}{2} \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}$$

(остальные компоненты равны нулю).

Ввиду симметрии относительно поворотов достаточно записать уравнения поля лишь в экваториальной плоскости ($x_2 = 0$), так что в предыдущих выражениях можно всюду заменить $1 - x_2^2$ единицей, так как предстоят лишь однократные дифференцирования. Все это приводит к следующим уравнениям:

а) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2;$$

б) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 2 + \frac{1}{f_1 f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2,$$

в) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Кроме этих трех уравнений, функции f_1, f_2 и f_4 должны удовлетворять еще условию для определителя

г) $$f_1 f_2^2 f_4 = 1, \qquad \text{или} \quad \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{2}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1} = 0.$$

Я сначала отброшу уравнение «б» и определю три функции f_1, f_2 и f_4, исходя из уравнений «а», «в» и «г». Уравнение «в» можно преобразовать к виду

в') $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{f_1 f_4} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_4}{\partial x_1},$$

в котором оно непосредственно интегрируется и дает

в″) $\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} = \alpha f_1$ (α — постоянная интегрирования).

Складывая уравнения «а» и «в′», получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)=\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\right)^2.$$

Ввиду «г» отсюда следует

$$-2\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)=3\left(\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^2.$$

Интегрированием получаем

$$\frac{1}{\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}=\frac{3}{2}x_1+\frac{\rho}{2} \quad (\rho\text{ — постоянная интегрирования})$$

или же

$$\frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=\frac{2}{3x_1+\rho}.$$

Повторное интегрирование дает

$$f_2 = \lambda\,(3x_1+\rho)^{2/3} \quad (\lambda\text{ — постоянная интегрирования}).$$

Из условия на бесконечности следует $\lambda = 1$, так что

$$f_2 = (3x_1+\rho)^{2/3}. \tag{10}$$

Далее отсюда и из уравнений «в″» и «г»

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_1}=\alpha f_1 f_4=\frac{\alpha}{f_2^2}=\frac{\alpha}{(3x_1+\rho)^{2/3}}.$$

Интегрируя с учетом условия на бесконечности, имеем

$$f_4 = 1-\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}. \tag{11}$$

Наконец, из «г» следует

$$f_1=\frac{(3x_1+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}}. \tag{12}$$

Как нетрудно убедиться путем выкладок, найденные функции f_1 и f_2 тождественно удовлетворяют уравнению «б».

Таким образом, выполнены все требования, кроме *требования непрерывности*. Функция f_1 терпит разрыв, когда

$$1=\alpha\,(3x_1+\rho)^{-1/3}, \quad 3x_1=\alpha^3-\rho.$$

Чтобы этот разрыв совпадал с началом координат, следует положить

$$\rho=\alpha^3. \tag{13}$$

Стало быть, условием непрерывности устанавливается связь между постоянными интегрирования ρ и α.

Итак, полное решение поставленной задачи имеет вид

$$f_1 = \frac{1}{R^4}\frac{1}{1-\alpha/R}; \quad f_2 = f_3 = R^2; \quad f_4 = 1 - \alpha/R,$$

где R — вспомогательная величина:

$$R = (3x_1 + \rho)^{1/3} = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}.$$

Если теперь подставить найденные выражения для функций f в формулу для линейного элемента (9) и вернуться к обычным сферическим координатам, то получится *линейный элемент, являющийся искомым точным решением эйнштейновской задачи*:

$$ds^2 = (1-\alpha/R)\,dt^2 - \frac{dR^2}{1-\alpha/R} - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2), \quad R = (r^3 + \alpha^3)^{1/3}. \tag{14}$$

В него входит одна константа α, которая зависит от величины массы, находящейся в начале координат.

§ 5. Из самих проведенных нами вычислений видна *единственность решения*. Трудность же обнаружения этой единственности в приближенном методе, примененном г-ном Эйнштейном, явствует из следующего. Выше, еще до того, как было привлечено условие непрерывности, мы имели

$$f_1 = \frac{(3x_1+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha(3x_1+\rho)^{-1/3}} = \frac{(r^3+\rho)^{-4/3}}{1-\alpha(r^3+\rho)^{-1/3}}.$$

При малых значениях α и ρ разложение в ряд с точностью до величин второго порядка малости дает

$$f_1 = \frac{1}{r^4}\left[1 + \frac{\alpha}{r} - \frac{4}{3}\frac{\rho}{r^3}\right].$$

Это выражение (вместе с соответствующими разложениями функций f_2, f_3 и f_4) удовлетворяет в рамках данной степени точности всем требованиям задачи. Требование непрерывности не приводит ни к чему новому в таком приближении, поскольку разрывы здесь автоматически получаются лишь в начале координат. Поэтому создается впечатление, что *обе* постоянные α и ρ произвольны и в физической трактовке задачи имеет место неоднозначность. Точное решение показывает, что в действительности в более высоких приближениях разрыв появится не в начале координат, а в точке $r = (\alpha^3 - \rho)^{1/3}$, и приходится специально полагать $\alpha = \rho^3$, чтобы сместить разрыв в начало. В приближенных же расчетах нужно было бы уж очень внимательно следить за поведением коэффициентов при разложении по степеням α и ρ, чтобы заметить необходимость такой связи между α и ρ.

§ 6. Остается еще исследовать *движение точки в гравитационном поле* по геодезической, соответствующей линейному элементу (14). С учетом трех обстоятельств, а именно того, что линейный элемент однороден относительно дифференциалов, а его коэффициенты не зависят от координат t и φ, варьирование сразу же дает три первых интеграла. Если ограничиться движением в экваториальной плоскости ($\theta = 90°$, $d\theta = 0$), то эти интегралы запишутся в виде

$$\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-\frac{1}{1-\alpha/R}\left(\frac{dR}{ds}\right)^2-$$

$$-R^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=\mathrm{const}=h, \qquad (15)$$

$$R^2\frac{d\varphi}{ds}=\mathrm{const}=c, \qquad (16)$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\frac{dt}{ds}=\mathrm{const}=1 \quad \text{(задание масштаба времени).} \qquad (17)$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2+R^2\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)=\frac{R^4}{c^2}\left[1-h\left(1-\frac{\alpha}{R}\right)\right]$$

или, если обозначить $1/R$ через x,

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=\frac{1-h}{c^2}+\frac{h\alpha}{c^2}x-x^2+\alpha x^3. \qquad (18)$$

Если ввести обозначения $c^2/h = B$, $(1 - h)/h = 2A$, то это уравнение в точности примет вид уравнения (11) в работе г-на Эйнштейна [1] и даст наблюдаемую аномалию в движении перигелия Меркурия.

Вообще теперь эйнштейновское приближение для орбиты переходит в точное решение, если только вместо r ввести величину

$$R=(r^3+\alpha^3)^{1/3}=r\left(1+\frac{\alpha^3}{r^3}\right)^{1/3}.$$

Так как отношение α/r приблизительно равно удвоенному квадрату скорости движения планеты (в единицах скорости света), выражение в скобках отличается от единицы лишь на величину порядка 10^{-12} даже в случае Меркурия. Поэтому R и r практически равны, и эйнштейновское приближение оказывается удовлетворительным с точки зрения самых далеких практических потребностей.

В заключение следует еще вывести в строгом виде третий закон Кеплера для круговых орбит планет. Для угловой скорости $n = d\varphi/dt$, согласно уравнениям (16) и (17), находим

$$n = cx^2(1 - \alpha x),$$

вводя $x = 1/R$. Если орбиты круговые, то производные $dx/d\varphi$ и $d^2x/d\varphi^2$ равны нулю. Согласно (18), это дает

$$0=\frac{1-h}{c^2}+\frac{h\alpha}{c^2}x-x^2+\alpha x^3$$

и

$$0=\frac{h\alpha}{c^2}-2x+3\alpha x^2.$$

Исключая из этих двух уравнений h, находим

$$\alpha = 2c^2x\,(1-\alpha x)^2.$$

Отсюда

$$n^2=\frac{\alpha}{2}x^3=\frac{\alpha}{2R^3}=\frac{\alpha}{2\,(r^3+\alpha^3)}.$$

Отклонение этой формулы от третьего закона Кеплера совершенно несущественно вплоть до самой поверхности Солнца. Но если взять идеальную точечную массу, то вблизи нее угловая скорость при уменьшении радиуса орбиты не возрастает безгранично, как это следует из закона Ньютона, а стремится к конечному пределу

$$n_0=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}.$$

(В случае точки с массой Солнца предельная частота составит $10^4 c^{-1}$.) Если молекулярные силы подчиняются подобным законам, то там это обстоятельство могло бы иметь значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, Sitzbungsber. d. Berl. Akad., Bd. 47, 1915, Heft 2, S. 831 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, «Наука», М., 1965, стр. 439).

Р. КЕРР

ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ МАССЫ КАК ПРИМЕР АЛГЕБРАИЧЕСКИ СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКИ*

Голдберг и Сакс [1] доказали, что алгебраически специальные решения уравнений поля Эйнштейна в вакууме характеризуются существованием конгруэнции k_μ геодезических и бессдвиговых лучей. В число этих пространств входят волны с плоским фронтом и метрики Робинсона — Траутмана [2], для которых конгруэнция обладает отличной от нуля расходимостью, но является нормальной (ортогональна гиперповерхности).

В этой заметке мы приведем класс решений, для которых конгруэнция расширяется и вместе с тем необязательно нормальна. До сих пор был известен единственный пример такого рода — метрики Ньюмэна — Унти — Тамбурино [3], относящиеся к типу D Петрова и обладающие 4-мерной группой изометрии.

Введя изотропную комплексную тетраду, для которой

$$ds^2 = 2tt^* + 2nk,$$

(звездочкой обозначается комплексно-сопряженная величина), можно выбрать такую систему координат, что

$$\begin{gathered}t = P\,(r + i\Delta)\, d\zeta,\\ k = du + 2\mathrm{Re}\,(\Omega\, d\zeta),\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}n = dr - 2\mathrm{Re}\,\{[(r - i\Delta)\,\dot{\Omega} + iD\Delta]\, d\zeta\} + \\ + \left\{r\dot{P}/P + \mathrm{Re}\,[P^{-2}D\,(D^*\ln P + \Omega^*)] + \frac{m_1 r - m_2\Delta}{r^2 + \Delta^2}\right\} k,\end{aligned}$$

где ζ — комплексная координата, точкой обозначено дифференцирование по u, а D — оператор, определенный как

$$D = \frac{\partial}{\partial\zeta} - \Omega\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

---

* *Kerr R. P.*, Phys. Rev. Letters, 11, 237 (1963).

Функция P действительна, тогда как Ω и функция m (определенная как $m_1 + im_2$) комплексны. Все они не зависят от координаты r. Функция Δ определена как

$$\Delta = \mathrm{Im}\,(P^{-2}D^*\Omega).$$

Существует два естественных выбора системы координат: а) можно взять величину P равной единице, и тогда Ω — комплексная величина; б) можно взять величину Ω чисто мнимой, а P — отличной от единицы. В случае «а» уравнения поля имеют вид

$$(m - D^*D^*D\Omega) = |\, d_u D\Omega\,|^2, \tag{2}$$

$$\mathrm{Im}\,(m - D^*D^*D\Omega) = 0, \tag{3}$$

$$D^*m = 3m\dot{\Omega}. \tag{4}$$

Вторая система координат, возможно, лучше первой, но уравнения поля в ней имеют более сложный вид.

Можно видеть, что при $m = 0$ уравнения поля интегрируются. Тогда они дают пространства типа III и 0 с расходимостью, отличной от нуля. Если же $m \neq 0$, то на уравнения (2) — (4) следует наложить некоторые условия интегрируемости. Их можно решить относительно m как функции величины Ω и ее производных, когда производная $\dot{\Delta}$ или $\ddot{\Omega}$ не равна нулю. Полученное выражение для m можно вновь подставить в уравнения поля, что дает условия для Ω и ее производных, откуда можно вывести новые условия интегрируемости.

Если нулю равны обе производные $\dot{\Delta}$ и $\ddot{\Omega}$, то метрику можно привести к системе координат, в которой функция Ω чисто мнима, а $P \not\equiv 1$, причем $\dot{\Omega} = \dot{P} = 0$. Тогда уравнения поля принимают вид

$$m = cu + A + iB,$$

где c — действительная постоянная, и

$$P^{-2}\nabla\,[P^{-2}\nabla\,(\ln P)] = 2c,$$

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\zeta^*}.$$

Величины A, B, Ω, не зависящие ни от u, ни от r, определяются соотношениями

$$iB = \frac{1}{2}\,P^{-2}\nabla\,(P^{-2}\partial\Omega/\partial\zeta) - P^{-4}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}\,\nabla\,(\ln P),$$

$$\nabla B = ic\,\partial\Omega/\partial\zeta,$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\,(A - iB) = c\Omega,$$

причем $\zeta = \xi + i\eta$. При $c = 0$ вектор $\partial/\partial u$ является вектором Киллинга.

Среди решений этих уравнений одно — стационарное ($c = 0$) и вместе с тем аксиально-симметричное. Как и метрика Шварцшильда, которая является его частным случаем, оно относится к типу D. При этом $B = 0$, а m — действительная постоянная — шварцшильдовская масса. Эта метрика имеет вид

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \\ + 2(du + a\sin^2\theta\, d\varphi)(dr + a\sin^2\theta\, d\varphi) - \\ - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(du + a\sin^2\theta\, d\varphi)^2,$$

где a — действительная постоянная. Переход к асимптотически декартовой системе координат осуществляется путем преобразования

$$(r - ia)\, e^{i\varphi} \sin\theta = x + iy,$$
$$r\cos\theta = z, \qquad u = t + r,$$

причем метрика принимает вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}(k)^2, \tag{5}$$

где

$$(r^2 + a^2)\, rk = r^2(x\, dx + y\, dy) + ar(x\, dy - y\, dx) + \\ + (r^2 + a^2)(z\, dz + r\, dt).$$

Здесь r — функция, которая определяется уравнением

$$r^4 - (R^2 - a^2)\, r^2 - a^2z^2 = 0,$$
$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

так что асимптотически $r = R + O(R^{-1})$. В этой системе координат наше решение аналитично всюду, кроме точек $R = a$, $z = 0$.

Если метрику (5) разложить в степенной ряд по m и a, вплоть до степени 2 для m и 1 — для a, то из сравнения с приближением третьего порядка в теории Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана для вращающейся частицы следует, что m — шварцшильдовская масса, а ma — момент импульса относительно оси z[1]). В этом приближении высшие мультипольные моменты здесь отсутствуют.

---

[1]) В действительности при таком выборе знака a момент ориентирован в отрицательном направлении оси z.— *Прим. перев.*

Так как в точной теории нет инвариантного определения моментов, о них ничего нельзя более сказать, кроме того, что они малы. Было бы желательно отыскать внутреннее решение, чтобы получить больше информации на этот счет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldberg J. N.*, *Sachs R. K.*, Acta Phys. Polonica, **22**, 13 (1962).
2. *Robinson I.*, *Trautman A.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A265**, 463 (1961).
3. *Newman E.*, *Tamburino L.*, *Unti T.*, Journ. Math. Phys., **4**, 915 (1963).

А. З. ПЕТРОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ*

В этой статье дается развернутое доказательство результатов, полученных нами ранее и впервые опубликованных в 1951 г. [1]. Именно, показывается, что для V_4, определяющих поля тяготения, задаваемых формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

с фундаментальным тензором, удовлетворяющим уравнениям поля

$$R_{ij} = \varkappa g_{ij} \tag{2}$$

(будем обозначать такие многообразия через T_4), можно установить классификацию, исследуя алгебраическую структуру тензора кривизны.

§ 1. БИВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим некоторую точку P нашего многообразия T_4 и сопоставим ему локальное центро-аффинное E_4. В этом E_4 выделим все тензоры, которые удовлетворяют условиям: 1) число ковариантных индексов, так же как и число контравариантных индексов, должно быть четным, 2) ко- и контравариантные индексы могут быть разбиты на отдельные антисимметрические пары. Каждую такую пару будем рассматривать как один собирательный индекс и будем его обозначать греческими буквами в отличие от индексов T_4 и E_4, для которых оставим латинские буквы. Таким образом, по числу значений, которые могут принимать собирательные индексы, мы получим многообразие $N = \frac{n\,(n-1)}{2}$ измерения

---

* Ученые записки Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина, юбилейный сборник, 114, 55 (1954) (статья перепечатывается с незначительными исправлениями).

(6 измерений для $n=4$), причем тензоры E_4, обладающие указанными свойствами, определят в этом пространстве тензоры вдвое меньшей валентности.

Можно утверждать, что *каждой точке* T_4, таким образом, *сопоставляется локальная 6-мерная центро-аффинная геометрия с группой*

$$\begin{gathered} \eta^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} \eta^{\alpha}, \quad \eta^{\alpha} = A_{\alpha'}^{\alpha} \eta^{\alpha'}, \\ | A_{\alpha}^{\alpha'} | \neq 0, \quad A_{\beta}^{\alpha} \cdot A_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha}. \end{gathered} \tag{3}$$

В самом деле, если мы упорядочим собирательные индексы (выбирая при этом из двух возможных пар ij и ji одну), то получим шесть возможных собирательных индексов. Остановимся, например, на следующей нумерации:

$$1-14,\ 2-24,\ 3-34,\ 4-23,\ 5-31,\ 6-12.$$

Рассмотрим теперь преобразование составляющей T^{ij} некоторого, вообще говоря, непростого бивектора

$$T^{i'j'} = A_{ij}^{i'j'} T^{ij},$$

полагая

$$A_{\alpha}^{\alpha'} = 2A_{ij}^{[i'j']} \quad \left(\text{где } A_i^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_P\right);$$

получаем в собирательных индексах соотношение

$$T^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} T^{\alpha},$$

т. е. совокупность бивекторов T_n (размерность в этом вопросе не имеет значения) определяет в E_N совокупность контравариантных векторов при условии, что имеют место соотношения (3). Что касается этих соотношений, то они могут быть проверены непосредственно путем перехода к латинским индексам.

Будем называть полученное многообразие *бивекторным*. Особый интерес для дальнейшего будет представлять тензор кривизны T_4. В бивекторном пространстве ему будет соответствовать симметрический тензор 2-й валентности

$$R_{ijkl} \longrightarrow R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}.$$

В каждом локальном E_6 можно ввести метрику, используя для этой цели любой тензор T_4, обладающий свойствами

$$M_{klij} = M_{jikl} = -M_{jikl} = -M_{ijlk},$$

и при условии, что соответствующий ему двухвалентный тензор в E_6 — неособенный. В качестве такого фундаментального тензора E_6 возьмем тензор

$$g_{ikjl} = g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{kj} \longrightarrow g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \tag{4}$$

Легко видеть, что $g_{\alpha\beta}$ дает невырождающееся мероопределение, так как $|g_{ij}| \neq 0$, а

$$|g_{\alpha\beta}| = p\,|g_{ij}|^{2n}, \quad p \neq 0.$$

Для g_{ij} определенного $g_{\alpha\beta}$ также будет определенным, для неопределенного g_{ij} тензор $g_{\alpha\beta}$ также будет, вообще говоря, неопределенным. Отметим, что мы будем рассматривать далее лишь те поля тяготения, которые соответствуют реальному распределению материи в пространстве; для этого необходимо [2], чтобы в каждой данной точке T_4 фундаментальный тензор g_{ij} в вещественной системе координат приводился к виду

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

т. е. мы приходим, таким образом, к так называемому пространству Минковского. Тогда из (4) следует, что для репера, соответствующего матрице (5), фундаментальный тензор R_6 будет иметь вид

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{Bmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{Bmatrix}, \quad |g_{\alpha\beta}| = -1, \tag{6}$$

т. е. по существу дела $g_{\alpha\beta}$ — неопределенный тензор.

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ T_4

Ряд наиболее интересных проблем, возникающих при исследовании римановых многообразий, связан с тензором кривизны V_n. При помощи этого тензора, как известно, вводится понятие кривизны V_n в данном двумерном направлении в данной точке, или, что то же самое, гауссовой кривизны двумерной поверхности, геодезической в данной точке,

$$K = \frac{R_{ijkl}V^{ij}V^{kl}}{g_{pqrs}V^{pq}V^{rs}}, \tag{7}$$

где g_{pqrs} имеет вид (4), а двумерное направление, определяемое векторами $\underset{1}{V^i}$, $\underset{2}{V^i}$, характеризуется простым бивектором $V^{ij} = \underset{[1}{V^i}\underset{2]}{V^j}$. Введем *обобщенную кривизну* V_n, которая получится, если в (7) снять требование простоты бивектора V^{ij}. Этот обобщенный инвариант K в некоторой точке V_n будет однородной функцией нулевого измерения от составляющих бивектора V^{ij} (не простого, вообще), и, очевидно, он будет иметь смысл в бивекторном пространстве, где он может быть записан в виде

$$K = \frac{R_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}}{g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta}}. \tag{8}$$

Поставим задачей определить критические значения K, что равносильно нахождению тех векторов V^{α} в R_N, для которых K принимает критические значения. Условимся эти критические значения K называть *стационарными кривизнами* V_n, а соответствующие бивекторы V^{α} — *стационарными направлениями* V_n. Дело, таким образом, сводится к определению *безусловно-стационарных векторов* V^{α} в бивекторном пространстве из необходимых и достаточных условий стационарности

$$\frac{\partial K}{\partial V^{\alpha}} = 0. \tag{9}$$

Необходимо учитывать, что при неопределенном g_{ij} тензор $g_{\alpha\beta}$ тоже неопределенный и, следовательно, возможно появление изотропных стационарных направлений

$$g_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} = 0. \tag{10}$$

Исключим сначала этот случай, чтобы затем вернуться к нему ниже.

Если (10) не имеет места, то (9) приводят к выводу, что

$$(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\,V^{\beta} = 0, \tag{11}$$

т. е. стационарные направления V_n будут главными направлениями тензора $R_{\alpha\beta}$ в бивекторном пространстве, а стационарные кривизны V_n будут характеристическими числами векового уравнения

$$|R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta}| = 0. \tag{12}$$

Пусть теперь (10) имеет место для стационарного V^{α}. Так как нас интересует только K, удовлетворяющее (9), то K — непрерывная функция V^{α}, и, следовательно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$R_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} = 0.$$

Тогда значение K для стационарного изотропного направления V^α можно, исходя из непрерывности K как функции V^α, вычислить следующим образом:

$$K(V^\alpha) = \lim_{dV^\alpha \to 0} K(V^\alpha + dV^\alpha).$$

Если для некоторого V^α ввести обозначения

$$\varphi = g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \quad \psi = R_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \tag{13}$$

то для стационарного изотропного V^α

$$K(V^\alpha) = \lim_{dV^\alpha \to 0} \frac{\psi(V^\alpha + dV^\alpha) - \psi(V^\alpha)}{\varphi(V^\alpha + dV^\alpha) - \varphi(V^\alpha)} = \lim \frac{\sum\limits_\sigma \frac{\partial}{\partial V^\sigma} \psi dV^\sigma + \ldots}{\sum\limits_\sigma \frac{\partial}{\partial V^\sigma} \varphi dV^\sigma + \ldots},$$

и так как этот предел не может зависеть от способов изменения dV^α, то

$$K(V^\alpha) = \frac{\frac{\partial}{\partial V^\sigma} \psi}{\frac{\partial}{\partial V^\sigma} \varphi} = \frac{R_{\sigma\beta} V^\beta}{g_{\sigma\beta} V^\beta},$$

т. е. мы снова приходим к (11).

Определение стационарных кривизн и направлений R_N приводит к исследованию пары квадратичных форм (13). Следовательно, приведение к каноническому виду этой пары форм в вещественном пространстве дает классификацию для тензора кривизны V_n в данной точке и той области V_n, что включает эту точку, в которой *характеристика К-матрицы*

$$\| R_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta} \| \tag{14}$$

остается неизменной. Каждому типу характеристики матрицы (14) соответствует поле тяготения особого рода. Это и определяет искомую классификацию T_4.

Пользуясь вещественным преобразованием, матрицу $\| g_{\alpha\beta} \|$ всегда можно привести к виду (6), и остается, пользуясь вещественными ортогональными преобразованиями, упростить матрицу $\| R_{\alpha\beta} \|$.

Теорема 1. *Матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ *для ортогонального репера* (5) *будет симметрично-сдвоенной.*

Для репера (5) уравнения поля примут вид

$$\sum_k e_k R_{ikjk} = \varkappa g_{ij}, \qquad e_k = \pm 1,$$

т. е. при $i = j$

$$\sum_k e_k R_{ikik} = \varkappa e_i,$$

а при $i \neq j$

$$e_k R_{ikjk} + e_l R_{iljl} = 0 \quad (i,\ j,\ k,\ l \neq).$$

Записывая эти соотношения в собирательных индексах бивекторного пространства и учитывая нумерацию, введенную в § 1, получаем для матрицы выражение

$$\| R_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline N & -M \end{array} \right\|;$$

$$M = \begin{Vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{Vmatrix}; \tag{15}$$

$$N = \begin{Vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{Vmatrix}, \qquad \begin{array}{l} m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}, \\ n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}, \\ (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ 3), \end{array}$$

где $\sum_{i=1}^{3} m_{ii} = \varkappa$, а $\sum_{1}^{3} n_{ii} = 0$, в силу известного тождества Риччи, что и доказывает теорему. Заметим, что к такого рода матрицам, при дополнительном, однако, условии их ортогональности, пришел В. Ф. Каган при изучении группы лоренцовых преобразований [3]. Изучением такого рода матриц при том же предположении об ортогональности занимались Я. С. Дубнов [4] и А. М. Лопшиц [5]. Факт, доказанный предыдущей теоремой, имеет место для любого ортогонального репера, и, следовательно, учитывая, что ортогональный репер определяется при $n = 4$ с 6-ю степенями свободы, можно рассчитывать на дальнейшее упрощение матрицы за счет выбора 6 вращений.

Предварительно докажем теорему, резко сужающую число возможных на первый взгляд типов характеристик матрицы (14).

Теорема 2. *Характеристика K-матрицы (14) всегда состоит из двух одинаковых частей.*

Приведем матрицу (14) к более простому виду, пользуясь так называемыми элементарными преобразованиями, которые, как известно, не меняют элементарных делителей матрицы и, следовательно, ее характеристики. Изобразим эту матрицу в виде

$$\left\| \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta} + K\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline n_{\alpha\beta} & -m_{\alpha\beta} - K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\|,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Прибавляя к каждому из трех первых столбцов соответствующий столбец из числа последних трех, умноженный на i, получаем эквивалентную матрицу

$$\left\| \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline -i\,(m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta}) & -m_{\alpha\beta}-K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\|;$$

прибавляя к последним трем строкам соответствующие строки из числа первых трех, умноженные на i, приведем матрицу к виду

$$\left\| \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+iK\delta_{\alpha\beta} & n_{\alpha\beta} \\ \hline 0 & -m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}-K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\|.$$

Наконец, умножая первые три столбца на $\frac{i}{2}$ и прибавляя к последним соответствующие три столбца и затем проделывая то же самое над последними тремя строками, приходим к матрице

$$\left\| \begin{array}{c|c} m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} & 0 \\ \hline 0 & m_{\alpha\beta}-in_{\alpha\beta}+K\delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\| \equiv \left\| \begin{array}{c|c} P\,(K) & 0 \\ \hline 0 & \overline{P}\,(K) \end{array} \right\|,$$

эквивалентной K-матрице (14). Дело свелось к исследованию двух трехмерных матриц $P\,(K)$ и $P\,(K)$, соответствующие элементы которых комплексно-сопряжены. Но отсюда следует, что и элементарные делители этих двух матриц также комплексно-сопряжены, а, следовательно, их характеристики имеют одинаковый вид. Таким образом, характеристика нашей K-матрицы распадается на две повторяющие друг друга части — теорема справедлива.

Отметим, что главные направления и инвариантные пучки K-матрицы также должны быть попарно комплексно-сопряженными.

Теперь можно произвести классификацию полей тяготения, которую выражает следующая теорема.

Теорема 3. *Существуют три и только три типа полей тяготения.*

Трехмерная матрица $P\,(K)$ может иметь только один из трех возможных типов характеристик: [1 1 1], [2 1], [3], если оставить в стороне случаи, когда некоторые из элементарных делителей имеют одинаковый базис и, следовательно, некоторые из цифр, стоящих в квадратных скобках, придется заключить в круглые скобки (например, [(11) 1], [(21)] и т. д.).

Характеристика $\overline{P}\,(K)$ должна иметь такой же вид. Тогда характеристики K-матрицы будут записываться так:

$$1.\ [1\overline{1},\ 1\overline{1}\ 1\overline{1}];\ 2.\ [2\overline{2},\ 1\overline{1}];\ 3.\ [3\overline{3}],$$

где надчеркнутые цифры обозначают показатель степени для элементарного делителя с базисом, комплексно-сопряженным базису элементарного делителя, степень которого выражается предыдущим числом.

Каждый из этих типов полей тяготения в дальнейшем необходимо исследовать отдельно, причем особенно важно получить для каждого из этих типов канонический вид матрицы $\| R_{\alpha\beta} \|$.

§ 3. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД МАТРИЦЫ $\| R_{\alpha\beta} \|$

Рассматриваем первый тип с характеристикой $[1\bar{1}, 1\bar{1}, 1\bar{1}]$. Так как в этом случае характеристика — простого типа, то тензор $R_{\alpha\beta}$ имеет 6 неизотропных, взаимно-ортогональных главных направлений [6]. Эти направления бивекторного пространства в данной точке T_4 дадут бивекторы специфического строения, как это можно показать.

Обозначим составляющие векторов вещественного ортогонального репера в точке T_4 через $\underset{k}{\xi^i}$ $(k, i = 1, \ldots, 4)$, а простые бивекторы $\underset{[k}{\xi^i}\underset{l]}{\xi^j}$ $(k \neq l)$, определяющие двумерные площадки, задаваемые векторами репера, будем для краткости обозначать через ξ^{ij}_{kl}. В бивекторном пространстве эти простые бивекторы определяют 6 независимых, неизотропных взаимно-ортогональных координатных векторов $\underset{\sigma}{\xi^\alpha} = \delta^\alpha_\sigma$, и любой вектор R_6, в частности и векторы главных направлений $R_{\alpha\beta}$, может быть разложен по этим векторам.

Покажем, что в качестве векторов главных направлений (они определяются однозначно только в том случае, когда корни векового уравнения (12) различны) можно взять векторы вида

$$W^\alpha = \lambda\left(\underset{1}{\xi^\alpha} \pm i\underset{4}{\xi^\alpha}\right) + \mu\left(\underset{2}{\xi^\alpha} \pm i\underset{5}{\xi^\alpha}\right) + \nu\left(\underset{3}{\xi^\alpha} \pm i\underset{6}{\xi^\alpha}\right). \tag{17}$$

В самом деле, условие того, что W^α определяет главное направление тензора $R_{\alpha\beta}$, запишется в виде

$$(R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta})\, W^\beta = 0. \tag{18}$$

Но эта система 6 уравнений, в силу симметричной сдвоенности K-матрицы, сводится всего к трем уравнениям

$$(m_{s1} \pm in_{s1} + k)\,\lambda + (m_{s2} \pm in_{s2})\,\mu + (m_{s3} \pm in_{s3})\,\nu = 0\ (s = 1, 2, 3).$$

Для того чтобы λ, μ, ν были ненулевыми решениями этой системы, необходимо и достаточно, чтобы K было корнем одного из уравнений

$$|\, P(K) \,| = 0, \qquad |\, \bar{P}(K) \,| = 0, \tag{19}$$

т. е. корнем векового уравнения (12), что и доказывает теорему.

Вектору W^{α} (17) многообразия R_6 в данной точке T_4 будет соответствовать бивектор полного ранга

$$W^{ij}=\lambda\left(\underset{14}{\xi^{ij}}\pm i\underset{23}{\xi^{ij}}\right)+\mu\left(\underset{24}{\xi^{ij}}\pm i\underset{31}{\xi^{ij}}\right)+\nu\left(\underset{34}{\xi^{ij}}\pm i\underset{12}{\xi^{ij}}\right). \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что при любом ортогональном преобразовании (вещественном) W^{ij} переходит в бивектор того же типа, причем $\lambda,\ \mu,\ \nu\rightarrow\overset{*}{\lambda},\ \overset{*}{\mu},\ \overset{*}{\nu}$, так что норма бивектора остается инвариантной:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=\overset{*}{\lambda}{}^2+\overset{*}{\mu}{}^2+\overset{*}{\nu}{}^2.$$

Пусть корням (12) $\underset{s}{K}$ $(s=1,\,2,\,3)$ соответствуют векторы главного направления $\underset{s}{W^{\alpha}}$; тогда корням $\underset{s+3}{K}$, согласно предыдущему, должны соответствовать $\underset{s}{\overline{W}^{\alpha}}$, при надлежащей нумерации корней. Корню $\underset{1}{K}$ соответствует бивектор

$$\underset{1}{W^{pq}}=\underset{1}{\lambda}\left(\underset{14}{\xi^{pq}}+i\underset{23}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\mu}\left(\underset{24}{\xi^{pq}}+i\underset{31}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\nu}\left(\underset{34}{\xi^{pq}}+i\underset{12}{\xi^{pq}}\right),$$

а корню $\underset{4}{K}$ — бивектор

$$\underset{4}{W^{pq}}=\underset{1}{\overline{\lambda}}\left(\underset{14}{\xi^{pq}}-i\underset{23}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\overline{\mu}}\left(\underset{24}{\xi^{pq}}-i\underset{31}{\xi^{pq}}\right)+\underset{1}{\overline{\nu}}\left(\underset{34}{\xi^{pq}}-i\underset{12}{\xi^{pq}}\right).$$

Представим бивектор W^{pq} в виде суммы двух вещественных бивекторов $\underset{1}{V^{pq}}+i\underset{1}{\overset{*}{V}{}^{pq}}$; тогда

$$\underset{4}{W^{pq}}=\underset{1}{V^{pq}}-i\underset{1}{\overset{*}{V}{}^{pq}}.$$

Пусть

$$\lambda=\underset{1}{a}+i\underset{1}{b},\qquad \mu=\underset{2}{a}+i\underset{2}{b},\qquad \nu=\underset{3}{a}+i\underset{3}{b},$$

где $\underset{s}{a}$, $\underset{s}{b}$ — вещественные числа $(s=1,\,2,\,3)$, и, следовательно,

$$\underset{1}{V^{pq}}=\underset{1}{a}\,\underset{14}{\xi^{pq}}+\underset{2}{a}\,\underset{24}{\xi^{pq}}+\underset{3}{a}\,\underset{34}{\xi^{pq}}-\underset{1}{b}\,\underset{23}{\xi^{pq}}-\underset{2}{b}\,\underset{31}{\xi^{pq}}-\underset{3}{b}\,\underset{12}{\xi^{pq}};$$

$$\underset{1}{\overset{*}{V}{}^{pq}}=\underset{1}{b}\,\underset{14}{\xi^{pq}}+\underset{2}{b}\,\underset{24}{\xi^{pq}}+\underset{3}{b}\,\underset{34}{\xi^{pq}}+\underset{1}{a}\,\underset{23}{\xi^{pq}}+\underset{2}{a}\,\underset{31}{\xi^{pq}}+\underset{3}{a}\,\underset{12}{\xi^{pq}}.$$

Так как $\underset{1}{W^{\alpha}}$ — неизотропный вектор R_6, то всегда можно считать, что это единичный вектор

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{W^{\alpha}}\underset{1}{W^{\beta}}=1,$$

откуда приходим к выводу, что

$$\sum_{s=1}^{3} \underset{s}{a}\underset{s}{b}=0, \tag{21}$$

$$\sum_{s=1}^{3} \underset{s}{b}^2-\underset{s}{a}^2>0. \tag{22}$$

Теперь можно утверждать следующее.

1) Вещественные бивекторы $\underset{1}{V}^{pq}$ и $\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{pq}$ *однолистны.* В самом деле, записывая условие простоты, мы придем к (21).

2) Они 0-*параллельны.* Они не могут быть $^2/_2$-параллельными, так как это может быть только при условии, что коэффициенты при одинаковых $\underset{ij}{\xi}{}^{pq}$ пропорциональны; тогда бы они были нулями. Например,

$$\frac{\underset{1}{a}}{\underset{1}{b}}=-\frac{\underset{1}{b}}{\underset{1}{a}}, \qquad \underset{1}{a}^2+\underset{1}{b}^2=0.$$

Они не могут быть и $^1/_2$-параллельными, так как тогда $\underset{1}{W}^{\alpha}$ был бы однолистный комплексный бивектор, но, записывая условие простоты, мы пришли бы к противоречию с (21) и (22). Таким образом, остается только указанная выше возможность.

3) Эти бивекторы $^2/_2$-*перпендикулярны.* Для этого необходимо и достаточно, чтобы при любых i, j выполнялись равенства

$$\underset{1}{V}_{is}\underset{1}{\overset{*}{V}}{}^{sj}=0.$$

Легко видеть, что они сводятся к (21) и, следовательно, имеют место.

Рассмотрим простой бивектор $\underset{1}{V}^{pq}$. Его норма, в силу (22),

$$g_{\alpha\beta}\underset{1}{V}^{\alpha}\underset{1}{V}^{\beta}=\sum \underset{s}{b}^2-\underset{s}{a}^2>0.$$

В плоскости этого вещественного бивектора всегда можно выбрать два вещественных, ортогональных и неизотропных вектора η^p, ν^p. Тогда норма нашего бивектора может быть также выражена в виде

$$2\eta_p\eta^p\cdot\nu_q\nu^q,$$

и, следовательно, эти два вектора либо оба *пространственные*, либо оба *временные.* Их нормы не могут быть >0, так как, принимая эти два ортогональных вещественных вектора за координатные, мы пришли бы к противоречию с законом инерции квадратичной формы. Следовательно, эти два вектора имеют отрицательные нормы. Ввиду этого, перенормируя, их можно принять за векторы $\overset{*}{\underset{2}{\xi}}{}^i$, $\overset{*}{\underset{3}{\xi}}{}^i$ нового вещественного ортогонального репера.

Точно так же в плоскости $\overset{*}{\underset{1}{V}}{}^{pq}$ определим два ортогональных (между собою и с $\overset{*}{\underset{2}{\xi}}{}^i$, $\overset{*}{\underset{3}{\xi}}{}^i$) вектора, вещественных, неизотропных, но уже с нормами противоположных знаков, так как

$$g_{\alpha\beta}\overset{*}{\underset{1}{\nu}}{}^{\alpha}\overset{*}{\underset{1}{\nu}}{}^{\beta}<0;$$

эти векторы обозначим через $\overset{*}{\underset{1}{\xi}}{}^i$, $\overset{*}{\underset{4}{\xi}}{}^i$. В такой системе координат

$$\overset{*}{\underset{1}{W}}{}^{pq}=\underset{14}{\xi}{}^{pq}+i\underset{23}{\xi}{}^{pq}$$

$$\overset{*}{\underset{4}{W}}{}^{pq}=\underset{14}{\xi}{}^{pq}-i\underset{23}{\xi}{}^{pq}.$$

Отметим, что репер $\{\overset{*}{\xi}\}$ выбран с точностью до вращения в плоскости $\left\{\overset{*}{\underset{2}{\xi}}\overset{*}{\underset{3}{\xi}}\right\}$ и лоренцова вращения в плоскости $\left\{\overset{*}{\underset{1}{\xi}}\overset{*}{\underset{4}{\xi}}\right\}$. Бивекторы $\underset{\sigma}{W}{}^{pq}$ нас интересуют, конечно, только с точностью до скалярного множителя.

Теперь, записывая условие ортогональности $\overset{*}{\underset{1}{W}}{}^{pq}$ и $\overset{*}{\underset{2}{W}}{}^{pq}$, получаем, очевидно, что бивектор 2-го главного направления должен иметь вид

$$\overset{*}{\underset{2}{W}}{}^{pq}=\overset{*}{\underset{2}{\mu}}\left(\overset{*}{\underset{24}{\xi}}{}^{pq}+i\overset{*}{\underset{31}{\xi}}{}^{pq}\right)+\overset{*}{\underset{2}{\nu}}\left(\overset{*}{\underset{34}{\xi}}{}^{pq}+i\overset{*}{\underset{12}{\xi}}{}^{pq}\right).$$

Воспользуемся указанным выше произволом в выборе репера и произведем вращения

$$\left.\begin{aligned}\underset{1}{\xi}{}^p&=\operatorname{ch}\varphi\overset{*}{\underset{1}{\xi}}{}^p+\operatorname{sh}\varphi\overset{*}{\underset{4}{\xi}}{}^p,\\ \underset{4}{\xi}{}^p&=\operatorname{sh}\varphi\overset{*}{\underset{1}{\xi}}{}^p+\operatorname{ch}\varphi\overset{*}{\underset{4}{\xi}}{}^p;\end{aligned}\right\}$$

$$\underset{2}{\xi}{}^p=\cos\psi\overset{*}{\underset{2}{\xi}}{}^p+\sin\psi\overset{*}{\underset{3}{\xi}}{}^p,$$

$$\underset{3}{\xi}{}^p=-\sin\psi\overset{*}{\underset{2}{\xi}}{}^p+\cos\psi\overset{*}{\underset{3}{\xi}}{}^p.$$

После этих преобразований $\underset{1}{W}$ будет иметь прежний вид, а, следовательно, $\underset{2}{W}$ также выразится в виде

$$\underset{2}{\widetilde{W}}{}^{pq} = \underset{2}{\widetilde{\mu}}\left(\underset{24}{\widetilde{\xi}}{}^{pq} + i\,\underset{31}{\widetilde{\xi}}{}^{pq}\right) + \underset{2}{\widetilde{\nu}}\left(\underset{34}{\widetilde{\xi}}{}^{pq} + i\,\underset{12}{\widetilde{\xi}}{}^{pq}\right),$$

где

$$\underset{2}{\widetilde{\nu}} = \sin\psi \operatorname{ch}\varphi + p\cos\psi \operatorname{ch}\varphi + q\sin\psi \operatorname{sh}\varphi + \\ + i\,(\cos\psi \operatorname{sh}\varphi + q\cos\psi \operatorname{ch}\varphi - p\sin\psi \operatorname{sh}\varphi),$$

$$p + iq = \frac{\underset{2}{\overset{*}{\nu}}}{\underset{2}{\overset{*}{\mu}}}$$

и $\underset{2}{\overset{*}{\mu}}$ можно считать отличным от нуля, так как в противном случае мы удовлетворились бы значениями $\varphi = \psi = 0$. Можно найти вещественные φ и ψ для каждых $\underset{2}{\widetilde{\nu}} = 0$. Теперь репер определен однозначно, и в этом репере, если учесть ортогональность $\underset{1}{W}$, $\underset{2}{W}$, $\underset{3}{W}$, эти бивекторы будут иметь вид (с точностью до скалярного множителя)

$$\underset{1}{W}{}^{pq} = \underset{14}{\xi}{}^{pq} + i\,\underset{23}{\xi}{}^{pq},$$
$$\underset{2}{W}{}^{pq} = \underset{24}{\xi}{}^{pq} + i\,\underset{31}{\xi}{}^{pq},$$
$$\underset{3}{W}{}^{pq} = \underset{34}{\xi}{}^{pq} + i\,\underset{12}{\xi}{}^{pq}$$

и, в силу указанной выше комплексной сопряженности,

$$\underset{4}{W}{}^{pq} = \underset{1}{\overline{W}}{}^{pq}, \quad \underset{5}{W}{}^{pq} = \underset{2}{\overline{W}}{}^{pq}, \quad \underset{6}{W}{}^{pq} = \underset{3}{\overline{W}}{}^{pq}.$$

Теперь, записывая условие (18) для каждого из этих бивекторов и учитывая, что

$$\underset{\alpha}{\xi}{}^{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\alpha},$$

легко находим

$$m_{ii} = -\underset{i}{\alpha}, \quad m_{ij} = 0, \quad n_{ii} = -\underset{i}{\beta}, \quad n_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \;\; i \neq j)$$

и, следовательно, *для первого типа T_4 получаем следующий канонический вид матрицы*:

$$(R_{\alpha\beta})=\left\|\begin{array}{ccc|ccc} -\underset{1}{\alpha} & & & -\underset{1}{\beta} & & \\ & -\underset{2}{\alpha} & & & -\underset{2}{\beta} & \\ & & -\underset{3}{\alpha} & & & -\underset{3}{\beta} \\ \hline -\underset{1}{\beta} & & & \underset{1}{\alpha} & & \\ & -\underset{2}{\beta} & & & \underset{2}{\alpha} & \\ & & -\underset{3}{\beta} & & & \underset{3}{\alpha} \end{array}\right\|, \tag{23}$$

причем вещественные части стационарных кривизн связаны соотношениями

$$\sum_{1}^{3}\underset{s}{\alpha}=\varkappa, \tag{24}$$

а мнимые части, в силу тождества Риччи

$$R_{1423}+R_{1234}+R_{1342}=0,$$

подчиняются условию

$$\sum_{1}^{3}\underset{s}{\beta}=0. \tag{25}$$

Переходим к рассмотрению T_4 с характеристикой второго типа: $[21, \overline{21}]$. Как было показано выше (§ 2), за главные направления и инвариантные пучки K-матрицы можно взять главные направления и инвариантные пучки матриц $P(K)$ и $\overline{P}(K)$. Отсюда следует, что достаточно изучить, например, матрицу $P(K)$, имеющую характеристику [21].

При такой характеристике тензор $P_{\alpha\beta}=-m_{\alpha\beta}+in_{\alpha\beta}$ трехмерного пространства имеет [6] одно главное неизотропное направление

$$(P_{\alpha\beta}-\underset{1}{K}g_{\alpha\beta})\underset{1}{W^{\beta}}=0 \tag{26}$$

и одно, ортогональное к $\underset{1}{W}$, изотропное главное направление $\underset{2}{W}$

$$(P_{\alpha\beta}-\underset{2}{K}g_{\alpha\beta})\underset{2}{W^{\beta}}=0. \tag{27}$$

Кроме того, существует изотропный вектор $\underset{3}{W^{\beta}}$, ортогональный к $\underset{1}{W^{\beta}}$ и неортогональный к $\underset{2}{W^{\beta}}$, который вместе с этими последними образует инвариантную площадку $\left\{\underset{2}{W},\ \underset{3}{W}\right\}$ тензора $P_{\alpha\beta}$, что выражается соотношением

$$(P_{\alpha\beta}-\underset{2}{K}g_{\alpha\beta})\,\underset{3}{W}^{\beta}=\sigma\underset{2}{W}_{\alpha}, \tag{28}$$

где σ — произвольный скаляр, не равный нулю; его выбор зависит от нас. Произвол этот является результатом того, что $\underset{2}{\overline{W}}$, $\underset{3}{\overline{W}}$, будучи изотропными, могут быть умножены на любое число без изменения нормы.

Всякое главное направление или пучок $P_{\alpha\beta}$ будет определять соответствующие главные направления и пучки тензора $R_{\alpha\beta}$; все они будут определяться бивекторами типа (17).

Пусть корню $\underset{1}{K}$ соответствует простой элементарный делитель $(K-\underset{1}{K})$ полей K-матрицы и главное направление, определяемое бивектором $\underset{1}{W}^{\alpha}$. Так как этот бивектор неизотропный, то к нему применимы все рассуждения, проведенные для $\underset{1}{W}^{\alpha}$, рассматривавшегося в предыдущем случае. Следовательно, можно выбрать такой вещественный репер, относительно которого

$$\underset{1}{W}^{pq}=\underset{14}{\xi}^{pq}+i\underset{23}{\xi}^{pq}.$$

Этот репер определяется с точностью до вращения в площадке $\left\{\underset{2}{\xi}\,\underset{3}{\xi}\right\}$ и лоренцова вращения в площадке $\left\{\underset{1}{\xi}\,\underset{4}{\xi}\right\}$. Так как бивекторы $\underset{2}{W}^{pq}$ и $\underset{3}{W}^{pq}$ должны быть ортогональны к $\underset{1}{W}^{pq}$, то они имеют вид

$$\underset{2}{W}^{pq}=\underset{2}{\mu}\left(\underset{24}{\xi}^{pq}+i\underset{31}{\xi}^{pq}\right)+\underset{2}{\nu}\left(\underset{34}{\xi}^{pq}+i\underset{12}{\xi}^{pq}\right),$$
$$\underset{3}{W}^{pq}=\underset{3}{\mu}\left(\underset{24}{\xi}^{pq}+i\underset{31}{\xi}^{pq}\right)+\underset{3}{\nu}\left(\underset{34}{\xi}^{pq}+i\underset{12}{\xi}^{pq}\right).$$

Условие изотропности этих бивекторов приводит к соотношениям

$$\underset{2}{\mu}^2+\underset{2}{\nu}^2=0,\qquad \underset{3}{\mu}^2+\underset{3}{\nu}^2=0,$$

т. е.

$$\underset{2}{\nu}=e_1 i\underset{2}{\mu},\qquad \underset{3}{\nu}=e_2 i\underset{3}{\mu},$$

где e_1 и e_2 равны ± 1. Наконец, записывая тот факт, что они не могут быть ортогональны, получаем, что $e_1=-e_2$. Следовательно, можно, например, положить

$$\underset{2}{W}^{pq} = \underset{24}{\xi}^{pq} + i\underset{31}{\xi}^{pq} + i\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i\underset{12}{\xi}^{pq}\right),$$

$$\underset{3}{W}^{pq} = \lambda\left\{\underset{24}{\xi}^{pq} + i\underset{31}{\xi}^{pq} - i\left(\underset{34}{\xi}^{pq} + i\underset{12}{\xi}^{pq}\right)\right\},$$

где λ — произвольный скалярный множитель $\neq 0$.

Теперь остается записать условия, аналогичные условиям (26), (27), (28) для тензора $R_{\alpha\beta}$, учитывая опять, так же как и для предыдущего случая, что $\underset{\nu}{\xi}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\nu}$. Эти условия будут иметь вид

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{1}{K} g_{\alpha\beta})\underset{1}{W}^{\beta} = 0,$$

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta})\underset{2}{W}^{\beta} = 0,$$

$$(R_{\alpha\beta} - \underset{2}{K} g_{\alpha\beta})\underset{3}{W}^{\beta} = \sigma g_{\alpha\beta}\underset{2}{W}^{\beta}.$$

Тензор $g_{\alpha\beta}$ определится матрицей (6). Полагая здесь $\alpha = 1, 2, \ldots, 6$, легко находим, что *матрица* $(R_{\alpha\beta})$ (11) *будет иметь вид*

$$(R_{\alpha\beta}) = \left\|\begin{array}{ccc|ccc} -\underset{1}{\alpha} & 0 & 0 & -\underset{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{2}{\alpha}+\sigma & 0 & 0 & -\underset{2}{\beta} & \sigma \\ 0 & 0 & -\underset{2}{\alpha}-\sigma & 0 & \sigma & -\underset{2}{\beta} \\ \hline -\underset{1}{\beta} & 0 & 0 & \underset{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\underset{2}{\beta} & \sigma & 0 & \underset{2}{\alpha}-\sigma & 0 \\ 0 & \sigma & -\underset{2}{\beta} & 0 & 0 & \underset{2}{\alpha}+\sigma \end{array}\right\|, \quad \sigma \neq 0. \tag{29}$$

Здесь σ *можно выбрать по своему усмотрению, но* $\neq 0$; $\underset{s}{\alpha}$ *и* $\underset{s}{\beta}$, *как и в первом случае, связаны соотношениями*

$$\underset{1}{\alpha} + 2\underset{2}{\alpha} = \varkappa, \qquad \underset{1}{\beta} + 2\underset{2}{\beta} = 0. \tag{30}$$

Репер определяется с точностью до вращения в площадке $\left\{\underset{2}{\xi}, \underset{3}{\xi}\right\}$ *и лоренцова вращения в площадке* $\left\{\underset{1}{\xi}\underset{4}{\xi}\right\}$.

Остается рассмотреть третий тип с характеристикой [3, $\bar{3}$]. Для такой характеристики [6] у тензора $R_{\alpha\beta}$ найдется одно главное изотропное направление $\underset{1}{W}^{\beta}$ и, кроме того, еще два вектора $\underset{2}{W}^{\beta}$ и $\underset{3}{W}^{\beta}$, обладающие свойствами

$$\begin{gathered}(R_{\alpha\beta}-\underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta})\underset{1}{W}^{\beta}=0,\\(R_{\alpha\beta}-\underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta})\underset{2}{W}^{\beta}=\sigma\delta_{\alpha\beta}\underset{1}{W}^{\beta},\\(R_{\alpha\beta}-\underset{1}{K}\delta_{\alpha\beta})\underset{3}{W}^{\beta}=\tau\delta_{\alpha\beta}\underset{2}{W}^{\beta},\end{gathered}\tag{31}$$

где σ и τ — произвольные числа $\neq 0$. Вектор $\underset{2}{W}^{\alpha}$ неизотропный, а $\underset{3}{W}^{\alpha}$ изотропный. Кроме того, $\underset{1}{W}^{\alpha}$ ортогонален $\underset{2}{W}^{\alpha}$ и неортогонален $\underset{3}{W}^{\alpha}$, а вектор $\underset{2}{W}^{\alpha}$ ортогонален $\underset{3}{W}^{\alpha}$.

Так как $\underset{2}{W}^{pq}$ — неизотропный бивектор, то, как и в двух предшествовавших случаях, выбирая соответствующим образом репер (с двумя степенями свободы), можно этот бивектор записать в виде

$$\underset{2}{W}^{pq}=\underset{24}{\xi}^{pq}+i\underset{31}{\xi}^{pq}.$$

Тогда для бивекторов $\underset{1}{W}$ и $\underset{3}{W}$, если учесть указанные выше условия ортогональности и изотропности, получим выражения

$$\begin{gathered}\underset{1}{W}^{pq}=\underset{14}{\xi}^{rq}+i\underset{23}{\xi}^{pq}+i\left(\underset{34}{\xi}^{pq}+i\underset{12}{\xi}^{pq}\right),\\\underset{3}{W}^{rq}=\lambda\left\{\underset{14}{\xi}^{rq}+i\underset{23}{\xi}^{pq}-i\left(\underset{34}{\xi}^{pq}+i\underset{12}{\xi}^{pq}\right)\right\},\end{gathered}$$

где λ — любое число $\neq 0$. Далее исследование ведется по той же схеме, что и для предшествующего типа характеристики: записываем условия (30) для $R_{\alpha\beta}$, фиксирующие тот факт, что $\underset{1}{W}^{\alpha}$ — вектор главного направления (в бивекторном пространстве), а векторы $\underset{1}{W}^{\alpha}$, $\underset{2}{W}^{\alpha}$, $\underset{3}{W}^{\alpha}$ определяют инвариантный пучок тензора $R_{\alpha\beta}$.

Эти условия таковы:

$$(R_{\alpha\beta}-Kg_{\alpha\beta})\underset{1}{W}^{\beta}=0,$$

$$(R_{\alpha\beta}-Kg_{\alpha\beta})\underset{2}{W}^{\beta}=\sigma g_{\alpha\beta}\underset{1}{W}^{\beta}, \tag{32}$$

$$(R_{\alpha\beta}-Kg_{\alpha\beta})\underset{3}{W}^{\beta}=\tau g_{\alpha\beta}\underset{2}{W}^{\beta},$$

где σ и τ — числа, отличные от нуля.

Учитывая, что бивектору $\underset{\sigma}{W}^{pq}$ в данной точке T_4 соответствует в локальном метрическом бивекторном пространстве вектор $\underset{nt}{W}^{pq}\to\underset{\sigma}{W}^{\alpha}$, и имея в виду, что для координатного репера

$$\underset{nt}{\xi}^{pq}\to\underset{\sigma}{\xi}^{\alpha}=\delta^{\alpha}_{\sigma},$$

легко убедиться, что система уравнений (32) сводится к следующим 9 независимым уравнениям:

$$\begin{aligned}
&m_{11}+in_{11}+im_{13}-n_{13}=-K,\\
&m_{12}+in_{12}+im_{23}-n_{23}=0,\\
&m_{13}+in_{13}+im_{33}-n_{33}=-iK,\\
&m_{12}+in_{12}=-\sigma,\\
&m_{22}+in_{22}=-K,\\
&m_{23}+in_{23}=-\sigma,\\
&m_{11}+in_{11}-im_{13}+n_{13}=-K,\\
&m_{12}+in_{12}-im_{23}+n_{23}=-\tau,\\
&m_{13}+in_{13}-im_{33}+n_{33}=iK,
\end{aligned}$$

где $K=\alpha+i\beta$ — один из двух корней третьей кратности векового уравнения

$$|R_{\alpha\beta}-Kg_{\alpha\beta}|=0,$$

а числа σ, τ отличны от нуля, а в остальном произвольны. Этот произвол возникает в силу произвольности числа λ и является следствием изотропности векторов $\underset{1}{W}^{\alpha}$, $\underset{3}{W}^{\alpha}$. Можно, например, предполагать, что σ и τ — вещественные числа.

Решая эту систему, а также имея в виду условия

$$\sum_{s=1}^{3}e_s m_{ss}=\varkappa,\quad \sum_{s=1}^{3}e_s n_{ss}=0,$$

нетрудно убедиться, что $\tau = 2\sigma$, $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\varkappa}{3}$, *а матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ *будет иметь вид*

$$
(R_{\alpha\beta}) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{\varkappa}{3} & -\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & -\frac{\varkappa}{3} & 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & 0 & -\frac{\varkappa}{3} & 0 & -\sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{\varkappa}{3} & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \sigma & \frac{\varkappa}{3} & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \frac{\varkappa}{3} \end{array} \right\|, \tag{33}
$$

где σ — *любое вещественное число, отличное от нуля; репер определяется с точностью до вращения в двумерной площадке* $\left\{ \underset{1}{\xi} \underset{3}{\xi} \right\}$ *и лоренцева вращения в площадке* $\left\{ \underset{2}{\xi} \underset{4}{\xi} \right\}$.

Таким образом, как итог, получается следующая теорема.

Теорема. *Существуют три принципиально различных типа полей тяготения:*

1-й тип с характеристикой K-матрицы простого типа $[111, \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}]$; *для него в каждой точке* T_4 *однозначно определяется вещественный ортогональный репер, относительно которого матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ *имеет вид* (23) *при условиях* (24), (25).

2-й тип с характеристикой непростого типа $[21, \bar{2}\ \bar{1}]$; *для него репер определяется с двумя степенями свободы, а матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ *имеет вид* (29) *при условиях* (30).

3-й тип также имеет характеристику непростого типа $[3, \bar{3}]$; *репер также имеет две степени свободы, а матрица* $\| R_{\alpha\beta} \|$ — *вид* (33).

Здесь надчеркнутые в характеристиках числа означают показатели степеней тех элементарных делителей, которые имеют базисы, комплексно-сопряженные, соответствующие ненадчеркнутым числам.

Три указанных типа допускают, очевидно, дальнейшую, более детальную, классификацию. Например, можно выделить случаи кратных или вещественных корней, как это и делалось нами ранее. Этот результат, полученный мною в 1950 г., был впервые опубликован в 1951 г. [1]. В этой статье имеется неточность в формулировке. Доказательство 3-й теоремы § 2 было дано также А. П. Норденом в 1952 г. (в печати не опубликовано), который исходил из исследуемых им биаффинных пространств. Приводимое здесь доказательство представляет собою третий вариант и является, по-видимому, наиболее простым.

Относительно исследования, проведенного в § 3, т. е. определения канонического вида матрицы $(R_{\alpha\beta})$ для ортогонального неголономного репера, необходимо сделать следующее примечание. На первый взгляд задачу можно было бы решать так: поскольку известна характеристика матрицы $\| R_{\alpha\beta} - Kg_{\alpha\beta} \|$, казалось бы, возможно сразу выписать канонический вид этой матрицы на основании общей алгебраической теории [6]. Однако этого сделать нельзя, так как в качестве коэффициентов допустимых линейных вещественных преобразований мы можем брать лишь числа вида

$$A_{\alpha}^{\alpha'} = 2A_{ij}^{[i'j']},$$

где $A_i^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right)_P$ — коэффициенты некоторого вещественного ортогонального преобразования в данной точке P многообразия T_4. То есть мы можем пользоваться только преобразованиями некоторой подгруппы всей группы ортогональных вещественных преобразований 6-мерного пространства.

Этот факт, делающий необходимыми рассуждения § 3, является в данном случае очевидным и представляет собой конкретное приложение общей теоремы, доказанной Г. Б. Гуревичем [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров А. З.*, О пространствах, определяющих поля тяготения, ДАН СССР, т. XXXI, 149—152 (1951).
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.*, Теория поля, М.— Л., 1941, с. 263—268. (См. также *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, «Наука», М., 1973, стр. 296—300.— *Прим. ред.*)
3. *Каган В. Ф.*, О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцевы преобразования, Изд. 1 МГУ, 1926, с. 1—24.
4. *Дубнов Я. С.*, О симметрично-сдвоенных ортогональных матрицах, в книге: *Каган В. Ф.*, О некоторых системах чисел, к которым приводят лоренцевы преобразования, Изд. 1 МГУ, 1927, стр. 33—54.
5. *Лопшиц А. М.*, Векторное решение задачи о симметрично-сдвоенных матрицах, Труды Всероссийского съезда математиков в Москве в 1927 г., М.— Л., 1928, 186, 187.
6. *Петров А. З.*, К теореме о главных осях тензоров, Известия Казанск. физико-математ. общества, т. 14, стр. 43 (1949).
7. *Гуревич Г. Б.*, О некоторых линейных преобразованиях симметрических тензоров или поливекторов, Мат. сб., **26**, 463 (1950).

«Группа общей теории относительности впервые приводит к тому, что наиболее простой инвариантный закон уже не будет линейным и однородным в переменных поля и их производных. Это — обстоятельство фундаментальной важности, и вот по какой причине. Если уравнения поля линейны (и однородны), то сумма двух решений снова будет решением; это имеет место, например, для максвелловских уравнений поля в пустом пространстве. В такой (линейной) теории уравнений поля недостаточно для вывода закона взаимодействия между объектами, которые описываются (каждый в отдельности) решениями системы уравнений поля. Поэтому в прежних теориях необходимы были наряду с уравнениями поля особые уравнения, определяющие движение материальных объектов под действием поля. Правда, первоначально в релятивистской теории тяготения постулировался наряду с законами для поля и независимо от него также и закон движения (геодезическая). Но впоследствии выяснилось, что не нужно, да и нельзя, вводить закон движения независимо, а что он неявно содержится в законе для поля тяготения.

Сущность этого, довольно сложного положения вещей можно представить себе более наглядно следующим образом. Одна-единственная неподвижная материальная точка изображается полем тяготения, которое конечно и регулярно везде, за исключением того места, где находится сама материальная точка; в этом месте поле имеет особенность. Если же путем интегрирования уравнений поля вычислить поле, соответствующее двум неподвижным материальным точкам, то оно будет иметь, помимо особенностей в материальных точках, также и особенную линию, соединяющую материальные точки между собой. Но можно задать движение материальных точек так, чтобы определяемое ими поле тяготения вне материальных точек нигде не имело особенностей. Это будут как раз те движения, которые в первом приближении описываются законами Ньютона. Таким образом, можно сказать: массы движутся так, что уравнения поля допускают решения, не имеющие особенностей в пространстве вне масс. Это свойство уравнений тяготения непосредственно связано с их нелинейностью, а она в свою очередь обусловлена более широкой группой преобразований».

(А. Эйнштейн, «Автобиографические заметки», 1949 г.)[1]

---

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 287.

В. А. ФОК

О ДВИЖЕНИИ КОНЕЧНЫХ МАСС В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

1. ВВЕДЕНИЕ

В общей теории относительности задача о движении конечных масс эквивалентна задаче об определении фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$, т. е. коэффициентов квадратичной формы

$$ds^2 = \sum_{\mu,\ \nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{1.01}$$

Для определения $g_{\mu\nu}$ служат уравнения тяготения (уравнения Эйнштейна)

$$R_{\mu\nu} - {}^1/_2 g_{\mu\nu} R = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{1.02}$$

где $R_{\mu\nu}$ — сокращенный тензор кривизны, R — его инвариант, $T_{\mu\nu}$ — тензор материи, $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности. Если в результате решения уравнений (1.02) получены величины $g_{\mu\nu}$, то движение масс определится как движение особенных точек этих функций.

Большую принципиальную важность имеет вопрос о том, можно ли наперед предписать произвольным образом движение этих

* ЖЭТФ, 9 (4), 375 (1939).

особенных точек, не нарушая уравнений (1.02). Если да, то уравнения движения для масс, а значит, и принцип геодезической линии являлись бы логически независимым элементом теории, не связанным с уравнениями тяготения. Последние допускали бы тогда наряду с решениями, имеющими физический смысл, также и другие, в природе неосуществимые, например соответствующие двум неподвижным центрам (такие решения, лишенные физического смысла, допускаются уравнением Пуассона в ньютоновской теории тяготения). Если же, напротив, окажется, что решения уравнений Эйнштейна могут иметь только такие особенные точки, которые движутся определенным образом, то это будет означать, что уравнения движения для масс уже содержатся в уравнениях Эйнштейна как некоторое условие их разрешимости.

Этот вопрос был поставлен и принципиально решен в двух работах Эйнштейна и Громмера [1] и Эйнштейна [2], относящихся к 1927 г. В этих работах показано, что имеет место вторая из перечисленных нами возможностей, т. е. что уравнения Эйнштейна включают в себя как теорию тяготения, так и уравнения движения для масс.

Несмотря на огромную важность этого результата — он является, по нашему мнению, одним из главных обоснований общей теории относительности,— указанные две работы Эйнштейна прошли мало замеченными и не получили надлежащего развития.

В настоящей статье мы имеем в виду продолжить исследование Эйнштейна, не доведенное им до конца. Наша цель состоит в приближенном определении фундаментального тензора $g_{\mu\nu}$ для случая, когда имеется одна или несколько масс конечной величины. При решении этой задачи попутно получатся и уравнения движения для масс как условие разрешимости уравнений Эйнштейна во втором приближении, а именно окажется, что в данном приближении массы должны двигаться согласно уравнениям Ньютона.

Таким образом, наша задача является более общей, чем задача, решенная Эйнштейном. Эйнштейн ставил себе целью установить самый факт, что из его уравнений тяготения вытекают для особенных точек какие-то уравнения движения. В нашем же результате содержится не только это, но и приближенное определение вида как этих уравнений, так и самого фундаментального тензора.

С другой стороны, наша постановка задачи является менее общей в том отношении, что мы не вводим в рассмотрение силы электромагнитного характера. Чтобы избежать этого ограничения, можно было бы ввести в правую часть уравнений тяготения тензор энергии электромагнитного поля. Однако такая постановка задачи представляется нам менее стройной в логическом отношении, чем теория, оперирующая с уравнениями Эйнштейна в пустоте (тензор материи равен нулю в области вне масс). Поэтому мы и отказываемся здесь от соответствующего обобщения. Мы можем сделать это с тем бóльшим правом, что в астрономических задачах, которые мы прежде всего имеем в виду, электромагнитные силы играют совершенно второстепенную роль.

Эти соображения находятся в тесной связи с одним существенным различием между нашей и эйнштейновской точками зрения на данную проблему, как и на всю общую теорию относительности. Для нас общая теория относительности есть прежде всего теория тяготения. Применяться она должна к тем явлениям, в которых тяготение играет преобладающую роль, т. е. в первую очередь к явлениям астрономического масштаба. Мы полагаем поэтому, что проблемы общей теории относительности не могут иметь ничего общего с проблемой структуры элементарных частиц и вообще с проблемами атомного масштаба (за исключением, конечно, чисто формальных аналогий, например аналогии между законами взаимодействия Кулона и Ньютона). Нам кажется, что наблюдаемое в атомном мире огромное преобладание электрических сил над силами тяготения (для двух электронов отношение первых к последним равно $4{,}18 \cdot 10^{39}$) является достаточно убедительным доводом в пользу такого взгляда.

Резюмируя нашу точку зрения, мы можем сказать, что, согласно ей, предмет общей теории относительности есть изучение явлений тяготения; вопросы же микромира подлежат ведению квантовой механики. Разумеется, мыслимы и такие явления, в которых одинаково важную роль играют как законы тяготения, так и законы квантовой механики (возможно, что сюда следует отнести вопросы структуры звезд).

В противоположность этому нашему взгляду Эйнштейн видит в своей теории относительности путь к решению проблемы элементарных частиц. В упомянутой своей работе, посвященной общим законам движения [2], он ставит задачу следующим образом.

«Требуется найти такое решение уравнений, которое бесконечно близко к статическому центрально-симметричному решению с точечной особенностью. Такое решение должно соответствовать случаю электрона в слабом внешнем поле».

Таким образом, и здесь Эйнштейн, говоря об особенных точках решений своих уравнений, имеет в виду в первую очередь элементарные частицы, а не небесные тела. Все дальнейшие работы Эйнштейна прямо или косвенно связаны с идеей объяснения элементарных частиц как особенных точек поля [1]). Это замечание относится, в частности, к тем работам Эйнштейна, которые посвящены многочисленным «единым» теориям поля. Наконец, неполное и условное признание Эйнштейном квантовой механики, несомненно, имеет своей основой не только его научный

[1]) См., например, [3].

консерватизм, но и надежду объяснить элементарные частицы как особенные точки поля [4].

Этой надежды мы ни в какой мере не разделяем, и нам кажется, что колоссальные успехи квантовой механики за истекшие 10—15 лет, при полном неуспехе сделанных за то же время попыток Эйнштейна объяснить элементарные частицы при помощи единой теории поля, достаточно выяснили положение в пользу квантовой механики.

С тем большим основанием следует преклониться перед гениальным созданием Эйнштейна — его теорией тяготения, столь богатой физическим содержанием, несмотря на ее кажущуюся абстрактность. Мы надеемся, что и настоящая наша работа будет способствовать раскрытию физического содержания этой замечательной теории.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Мы будем обозначать координаты через x_0, x_1, x_2, x_3, причем x_0 будет иметь характер времени, а x_1, x_2, x_3 — пространственный характер. Вместо x_0 мы часто будем писать букву t. Квадрат элемента дуги мы будем писать в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu, \tag{2.01}$$

подразумевая, как принято, суммирование по всем значкам μ и ν от 0 до 3. Вообще греческие значки будут пробегать у нас значения от 0 до 3, а латинские — только от 1 до 3. Например, формулу (2.01) можно переписать в виде

$$ds^2 = g_{00} dx_0^2 + 2g_{0i} dx_0 dx_i + g_{ik} dx_i dx_k. \tag{2.02}$$

Знак ds^2 выбран так, чтобы было $g_{00} > 0$. Следовательно, если $dx_i = 0$, $dx_0 \neq 0$, то будет $ds^2 > 0$. Таким образом, в пространстве Минковского мы имели бы

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \tag{2.03}$$

Обозначим, как принято, через g определитель, составленный из $g_{\mu\nu}$, и через $g^{\mu\nu}$ — деленные на g его миноры, т. е. контравариантные компоненты фундаментального тензора. Положим, далее,

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{2.04}$$

Мы можем тогда написать выражение для обобщенного оператора Даламбера в виде

$$\Box\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\mathfrak{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right). \tag{2.05}$$

Выполняя дифференцирование и пользуясь сокращенным обозначением

$$\Gamma^{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}}, \tag{2.06}$$

мы будем иметь

$$\Box \varphi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} - \Gamma^{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}}. \tag{2.07}$$

Мы будем называть координаты гармоническими, если для них $\Box x_{\nu} = 0$. Но мы имеем вообще

$$\Box x_{\nu} = -\Gamma^{\nu}. \tag{2.08}$$

Поэтому условие, чтобы координаты были гармоническими, сводится к требованию, чтобы было $\Gamma^{\nu} = 0$.

Величины Γ^{ν} выражаются через тензорные параметры (скобки Кристоффеля). Положим

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} \equiv [\mu\nu, \rho] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}}\right). \tag{2.09}$$

Поднимая значок ρ, получаем отсюда

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \{\mu\nu, \rho\} = g^{\rho\sigma}[\mu\nu, \sigma]. \tag{2.10}$$

Выражение для Γ^{ν} через $\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}$ будет иметь вид

$$\Gamma^{\nu} = g^{\rho\sigma}\Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}. \tag{2.11}$$

Кроме тензорных параметров $\Gamma_{\rho,\mu\nu}$ и $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, удобно бывает пользоваться тензорными параметрами с одними верхними значками, т. е. величинами

$$\Gamma^{\rho,\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}. \tag{2.12}$$

Эти величины просто выражаются непосредственно через производные от $g^{\alpha\beta}$. Мы имеем

$$\Gamma^{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g^{\rho\alpha} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} - g^{\mu\alpha} \frac{\partial g^{\nu\rho}}{\partial x_{\alpha}} - g^{\nu\alpha} \frac{\partial g^{\mu\rho}}{\partial x_{\alpha}}\right). \tag{2.13}$$

Если вместо $g^{\mu\nu}$ рассматривать как неизвестные функции величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ [формула (2.04)], то удобно преобразовать все формулы так, чтобы в них входили только производные от этих величин. Преобразуя таким путем тензорные параметры с верхними значками, мы будем иметь

$$\Gamma^{\rho,\mu\nu} = \Pi^{\rho,\mu\nu} + \Lambda^{\rho,\mu\nu}, \tag{2.14}$$

где величины $\Pi^{\rho,\mu\nu}$ и $\Lambda^{\rho,\mu\nu}$ равны соответственно

$$\Pi^{\rho,\mu\nu}=\frac{1}{2g}\left(\mathfrak{g}^{\mu\alpha}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\nu\rho}}{\partial x_\alpha}+\mathfrak{g}^{\nu\alpha}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\mu\rho}}{\partial x_\alpha}-\mathfrak{g}^{\rho\alpha}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\nu\mu}}{\partial x_\alpha}\right), \tag{2.15}$$

$$\Lambda^{\rho,\mu\nu}={}^1/_2\,(y^\mu g^{\nu\rho}+y^\nu g^{\mu\rho}-y^\rho g^{\mu\nu}). \tag{2.16}$$

В последней формуле через y^ν обозначена величина

$$y^\nu=g^{\nu\alpha}y_\alpha, \tag{2.17}$$

где в свою очередь

$$y_\alpha=\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}=\Gamma^\beta_{\alpha\beta}. \tag{2.18}$$

Заметим, что определитель, составленный из $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, равен определителю, составленному из $g_{\mu\nu}$:

$$\operatorname{Det}\mathfrak{g}^{\mu\nu}=\operatorname{Det}g_{\mu\nu}=g. \tag{2.19}$$

Таким образом, величины y_α и y^ν также можно считать выраженными через $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ и их производные. Из (2.15) и (2.16) получаем

$$g_{\mu\nu}\Pi^{\rho,\mu\nu}=\Gamma^\rho+y^\rho, \tag{2.20}$$

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\rho,\mu\nu}=-y^\rho. \tag{2.21}$$

Сумма этих выражений дает

$$g_{\mu\nu}\Gamma^{\rho,\mu\nu}=\Gamma^\rho, \tag{2.22}$$

как и должно быть.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРА ЭЙНШТЕЙНА

Перейдем теперь к преобразованию сокращенного тензора кривизны $R_{\mu\nu}$ и связанного с ним тензора Эйнштейна $R_{\mu\nu}-{}^1/_2\,g_{\mu\nu}R$. Преобразование будет иметь целью выделить в этих тензорах те члены, которые содержат величины Γ^ν и их производные, и упростить таким путем остальные члены. В гармонической координатной системе выделенные члены обратятся в нуль.

По определению сокращенного тензора кривизны [1]) мы имеем

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}+\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}-\Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\mu\nu}. \tag{3.01}$$

---

[1]) См., например, [5], стр. 147.

Преобразуем сперва второй член в этом выражении. Для выполнения преобразования удобно написать сначала тензорный параметр $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ в виде

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\beta}}. \tag{3.02}$$

Нам нужно составить сумму производных от $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ по x_{α}. Но из (3.02) видно, что в эту сумму вторые производные от компонент фундаментального тензора войдут только в следующих комбинациях: а) вторые производные от одной и той же компоненты $g_{\mu\nu}$, сгруппированные так же, как в операторе Даламбера; б) производные от величины $\partial g^{\alpha\beta}/\partial x_{\alpha}$. Но, в силу определений (2.06) и (2.17) величин Γ^{ν} и y^{ν}, мы имеем

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} = -\Gamma^{\beta} - y^{\beta}. \tag{3.03}$$

Поэтому, кроме оператора Даламбера от $g_{\mu\nu}$, вторые производные войдут только через посредство первых производных от Γ^{β} и вторых производных от $\ln \sqrt{-g}$. Эти последние мы обозначим через

$$y_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} = \frac{\partial y_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\partial y_{\nu}}{\partial x_{\mu}}. \tag{3.04}$$

Действительно, выполняя выкладки, мы получаем

$$\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\, \partial x_{\beta}} + \Gamma_{\mu\nu} + y_{\mu\nu} - y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}}. \tag{3.05}$$

Здесь через $\Gamma_{\mu\nu}$ обозначено для краткости выражение

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ g_{\alpha\nu} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + g_{\alpha\mu} \frac{\partial \Gamma^{\alpha}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} \Gamma^{\alpha} \right\}, \tag{3.06}$$

которое обращается в нуль в той координатной системе, где $\Gamma^{\alpha} = 0$. Если ввести обозначение

$$\Gamma_{\nu} = g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}, \tag{3.07}$$

то величину $\Gamma_{\mu\nu}$ можно также написать в виде

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu}}{\partial x_{\nu}} + \frac{\partial \Gamma_{\nu}}{\partial x_{\mu}} \right) - \Gamma_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{3.08}$$

Подставив выражение (3.05) в сокращенный тензор кривизны (3.01), мы убедимся, что вследствие равенства

$$y_{\mu\nu} - y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \tag{3.09}$$

производные от $\ln\sqrt{-g}$ сократятся и мы получим

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma_{\mu\nu}+$$
$$+\Gamma^\alpha_{\beta\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{3.10}$$

В этой формуле вторые производные входят только в первую строчку. Выражение во второй строчке можно преобразовать; в результате получится

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma_{\mu\nu}+\left(\Gamma_{\mu,\alpha\rho}\Gamma_{\nu,\beta\sigma}-\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x_\beta}\right)g^{\alpha\beta}g^{\rho\sigma}, \tag{3.11}$$

где $\Gamma_{\mu,\alpha\rho}$ — обычные скобки Кристоффеля [формула (2.09)]. Для гармонических координат в этом выражении нужно опустить член $\Gamma_{\mu\nu}$. Тогда оно приведется к выражению де Дондера [6] и Ланцоша [7], которые впервые обратили внимание на упрощения, достигаемые при пользовании гармоническими координатами.

От ковариантных компонент сокращенного тензора кривизны можно перейти к контравариантным. При этом получается простое выражение

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}-\Gamma^{\mu\nu}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu,\alpha\beta}, \tag{3.12}$$

где $\Gamma^{\mu\nu}$ есть величина, получаемая из $\Gamma_{\mu\nu}$ поднятием значков по обычному правилу (это приходится объяснять потому, что $\Gamma_{\mu\nu}$ не есть тензор). Величину $\Gamma^{\mu\nu}$ можно написать в виде

$$\Gamma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\frac{\partial\Gamma^\nu}{\partial x_\alpha}+g^{\nu\alpha}\frac{\partial\Gamma^\mu}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\Gamma^\alpha\right). \tag{3.13}$$

Составим теперь инвариант тензора кривизны. Вторые производные в него войдут через посредство оператора Даламбера от $\ln\sqrt{-g}$ и через посредство величин $\Gamma_{\mu\nu}$. Действительно, используя соотношение

$$\Gamma_{\nu,\alpha\beta}\Gamma^{\nu,\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\beta}=\frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}, \tag{3.14}$$

мы получим после преобразований

$$R=g^{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}-\Gamma+\frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}. \tag{3.15}$$

Здесь $y_{\alpha\beta}$ имеет значение (3.04), а Γ есть величина

$$\Gamma=g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

которую можно написать в виде

$$\Gamma = \frac{\partial \Gamma^\alpha}{\partial x_\alpha} + y_\alpha \Gamma^\alpha = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}. \tag{3.17}$$

Если положить в наших выражениях для $R^{\mu\nu}$ и R [формулы (3.12) и (3.15)]

$$\Gamma^{\mu\nu} = 0 \text{ и } \Gamma = 0,$$

то они перейдут в выражения Ланцоша [7].

Полученные формулы позволяют нам составить тензор Эйнштейна, пропорциональный тензору материи. Мы имеем

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} - \Gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\Gamma + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu,\alpha\beta} +$$
$$+ y^\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} y^\alpha y_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho}. \tag{3.18}$$

Как и в предыдущих выражениях (3.11), (3.12) и (3.15), вторые производные входят сюда (если не считать членов, содержащих $\Gamma^{\mu\nu}$ и Γ) только в виде оператора Даламбера от одной величины, а именно от $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$.

Мы преобразуем выражение (3.18) так, чтобы в него входили под знаком дифференцирования только величины $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Для этого преобразуем сперва сумму

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu,\alpha\beta},$$

выразив в ней, согласно (2.14), тензорные параметры Γ через Π и Λ.

Пользуясь формулами (2.20) и (2.21), мы получим

$$\Gamma^{\nu,\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Pi^{\nu,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta} - \frac{1}{\sqrt{-g}} y^\alpha \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha -$$
$$- \frac{1}{2}(\Gamma^\nu y^\mu + \Gamma^\mu y^\nu). \tag{3.19}$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} y^\alpha \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = y^\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha, \tag{3.20}$$

мы можем переписать предыдущую формулу в виде

$$\Gamma^{\nu,\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} + y^\alpha \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} y_\alpha y^\alpha =$$
$$= \Pi^{\nu,\alpha\beta}\Pi^\mu_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu - \frac{1}{2}(\Gamma^\nu y^\mu + \Gamma^\mu y^\nu). \tag{3.21}$$

Это дает нам первые три члена во второй строчке в правой части формулы (3.18). Чтобы преобразовать четвертый член, вычисляем выражения

$$\Lambda^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}=-y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}, \tag{3.22}$$

$$\Pi^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\Pi^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}-y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}-y_{\alpha}y^{\alpha}, \tag{3.23}$$

сумма которых дает

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\Pi^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}-2y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}-y_{\alpha}y^{\alpha}, \tag{3.24}$$

т. е. выражение в последнем члене (3.18). Подставив в (3.18) равенства (3.21) и (3.24), получим искомое выражение для тензора Эйнштейна. Чтобы записать его более кратко, обозначим буквой L величину

$$L=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\Pi^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_{\rho}}+\frac{1}{2}y_{\alpha}y^{\alpha} \tag{3.25}$$

и введем вместо $\Gamma^{\mu\nu}$ величины

$$B^{\mu\nu}=\Gamma^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\Gamma^{\nu}y^{\mu}+\Gamma^{\mu}y^{\nu}), \tag{3.26}$$

для которых

$$B=g_{\mu\nu}B^{\mu\nu}=\Gamma+y_{\alpha}\Gamma^{\alpha}. \tag{3.27}$$

С этими обозначениями наше выражение для тензора Эйнштейна примет вид

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R=-\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}\,\partial x_{\beta}}+\Pi^{\nu\cdot\,\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha\beta}-$$
$$-\frac{1}{2}y^{\mu}y^{\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}L-B^{\mu\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}B. \tag{3.28}$$

Этим выражением мы и будем пользоваться при решении нашей задачи.

В заключение заметим, что определяемая формулой (3.25) величина L есть так называемая лагранжева функция, которая обычно [1]) пишется в виде

$$L=g^{\mu\nu}(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}). \tag{3.29}$$

---

[1]) См., например, [5], стр. 244 и сл.

4. ВЫБОР НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИСКОМЫХ ФУНКЦИЙ

Уравнения Эйнштейна для пустого пространства получатся, если приравнять тензор Эйнштейна нулю. Уравнения же для пространства, заполненного материей, имеют вид

$$R^{\mu\nu} - {}^1/_2 g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu}, \tag{4.01}$$

где $T^{\mu\nu}$ есть тензор материи. Эйнштейновская постоянная тяготения $\varkappa$ связана с ньютоновской постоянной γ соотношением

$$\varkappa = \frac{8\pi}{c^2}\gamma, \tag{4.02}$$

причем величина γ равна

$$\gamma = 6{,}66 \cdot 10^{-7} \text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Прежде чем переходить к решению уравнений Эйнштейна, нам надлежит сделать определенный выбор независимых переменных (координат) и искомых функций.

Выписанные нами в предыдущем параграфе выражения для сокращенного тензора кривизны делают очевидным то огромное преимущество, которое имеет гармоническая система координат перед всеми другими. Действительно, в гармонической системе координат в каждое из десяти уравнений тяготения входят (как мы уже неоднократно отмечали) вторые производные только от одной компоненты фундаментального тензора, причем эти вторые производные группируются в виде оператора Даламбера. Как уже было указано другими авторами [1]), отсюда непосредственно и вполне строго следует также существование волн тяготения, распространяющихся со скоростью света.

При помощи гармонической системы координат в уравнениях тяготения достигается «разделение переменных» в отношении высших (т. е. вторых) производных. Оно представляет аналогию с тем, которое достигается в задачах электродинамики путем введения декартовых компонент векторного потенциала. В декартовых координатах известные уравнения для потенциалов имеют вид

$$\Delta A_k - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = -4\pi \frac{j_k}{c}; \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \tag{4.04}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{4.05}$$

Таким образом, каждое из уравнений (4.04) содержит только одну компоненту потенциала. Но если перейти от декартовых

---

[1]) См., например, обзор Дармуа [8].

к произвольным криволинейным координатам, то каждое из уравнений, связывающее потенциалы с током, будет уже содержать, вообще говоря, не одну, а несколько криволинейных компонент векторного потенциала.

Разделение переменных в уравнениях (4.04) можно, следовательно, рассматривать как одно из свойств декартовой координатной системы. Подобно этому, разделение переменных (вторых производных) в уравнениях (4.01) можно рассматривать как одно из свойств гармонической координатной системы.

Заметим, что в декартовой системе координат уравнения электродинамики, написанные в виде (4.04), содержат оператор Даламбера от компонент вектора, т. е. величину нековариантную. Подобно этому, в гармонической координатной системе, в которой $\Gamma^{\mu\nu} = B^{\mu\nu} = 0$, сокращенный тензор кривизны, который входит в уравнение тяготения (4.01), будет содержать оператор Даламбера от компонент тензора, т. е. тоже нековариантную величину. Тем не менее те и другие уравнения удобно писать именно в таком виде.

В задачах общей теории относительности, где допустимы произвольные (в широких пределах) преобразования координат, наглядное толкование координатных параметров иногда оказывается затруднительным. Эти трудности значительно смягчаются при пользовании гармонической координатной системой. Гармонические координаты — это те, которые ближе всего подходят по своим свойствам к обычным прямоугольным прямолинейным координатам и к обычному времени в «мире» Минковского. Поэтому выраженные через них формулы общей теории относительности отличаются наибольшей наглядностью.

Сделаем здесь замечание по поводу другой координатной системы, которая характеризуется требованиями $g_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Сверх того, можно было бы потребовать, чтобы координата x_0 была гармонической; тогда оставалось бы еще произвольным любое преобразование между x_1, x_2, x_3, не содержащее x_0. Эта система координат могла бы на первый взгляд показаться более естественной, так как в ней пространство «отделено» от времени; в ней можно было бы пользоваться формулами трехмерного тензорного анализа, ковариантными относительно указанных преобразований. Однако вследствие отсутствия разделения переменных (отделяется только g_{00}) эта система координат далеко не столь удобна, как та, в которой все координаты (а не только x_0) являются гармоническими. Поэтому мы будем пользоваться исключительно этой последней.

После того как мы выбрали определенным образом независимые переменные (а именно гармонические координаты), мы должны сделать также определенный выбор искомых функций. В качестве их могли бы служить ковариантные $(g_{\mu\nu})$ или контравариантные

($g^{\mu\nu}$) компоненты фундаментального тензора либо сами, либо умноженные на $\sqrt{-g}$. Из перечисленных возможностей наиболее удобной для наших целей является последняя: мы возьмем в качестве искомых функций величины

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}. \tag{4.06}$$

Эти величины удобны прежде всего тем, что выраженное через них условие гармоничности координат принимает простой вид

$$\frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \tag{4.07}$$

так что оно является линейным относительно неизвестных функций. Кроме того, для дальнейшего существенно то, что в левую часть каждого из уравнений тяготения (4.01) входит оператор Даламбера от соответственной компоненты тензора $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$.

Таким образом, искомые функции $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ подчинены нелинейным уравнениям (4.01) и линейным добавочным условиям (4.07). Кроме того, они должны удовлетворять условиям на бесконечности, а именно стремиться там к постоянным значениям, соответствующим элементу дуги пространства Минковского,

$$ds^2 = c^2 dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2. \tag{4.08}$$

Согласно (4.08), эти значения равны

$$g_{00} = c^2; \quad g_{ik} = -\delta_{ik}; \quad g_{i0} = 0. \tag{4.09}$$

Так как пространство с элементом дуги (4.08) есть псевдоевклидово пространство, то и значения (4.09) компонент фундаментального тензора следовало бы называть псевдоевклидовыми; мы будем, однако, называть их для краткости просто евклидовыми, без приставки «псевдо».

Составленный из компонент (4.09) определитель g равен $-c^2$, так что

$$\sqrt{-g} = c. \tag{4.10}$$

Контравариантные компоненты фундаментального тензора равны

$$g^{00} = 1/c^2; \quad g^{ik} = -\delta_{ik}; \quad g^{i0} = 0. \tag{4.11}$$

Умножая (4.11) на (4.10), получаем евклидовы значения искомых функций $g^{\mu\nu}$

$$\mathfrak{g}^{00} = 1/c; \quad \mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik}; \quad \mathfrak{g}^{i0} = 0, \tag{4.12}$$

которые и являются предельными значениями этих функций на бесконечности.

5. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Пока мы не сделали никаких физических предположений о распределении материи, поставленная задача не может быть определенной и с математической точки зрения. Формально это выразится в том, что нам будут неизвестны правые части уравнений тяготения (тензор материи). Для придания задаче определенности мы не можем, однако, просто потребовать, чтобы компоненты тензора материи задавались нам наперед. Без знания метрики задание компонент тензора материи как функций от координат возможно только в той области, где эти компоненты равны нулю. В области же, занятой материей, мы встречаемся со следующим своеобразным положением: задание тензора материи требует знания метрики; метрика же сама зависит от материи. Поэтому определение компонент тензора материи в области, где они отличны от нуля, может быть, строго говоря, произведено только совместно с определением фундаментального тензора. Задачу нужно здесь ставить следующим образом. Требуется найти такие $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, которые, будучи поставлены в левую часть уравнений Эйнштейна, дадут для тензора материи в правой части выражения, могущие быть истолкованными в соответствии «с определенной физической задачей».

В дальнейшем мы будем иметь в виду задачу астрономического типа, т. е. задачу о движении небесных тел в пустом пространстве. Как известно из астрономических наблюдений, в мировом пространстве масса распределена далеко не равномерно, а сконцентрирована в виде отдельных небесных тел, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Сообразно этому мы будем считать, что компоненты тензора материи равны нулю во всем пространстве, кроме некоторых отдельных областей, размеры которых малы по сравнению с их расстояниями; каждая такая область соответствует небесному телу. Число вводимых в рассмотрение небесных тел (отдельных масс) остается, конечно, произвольным и составляет одно из условий задачи.

Мы будем искать такое решение уравнений тяготения, которое соответствовало бы сферически-симметричным небесным телам, характеризуемым одной функцией — плотностью $\rho(r)$, где r — расстояние от центра тела. Учет отклонений от сферической симметрии не представляет каких-либо принципиальных затруднений для нашего метода расчета; мы ограничиваемся случаем сферической симметрии только ради простоты выкладок.

На первый взгляд казалось бы естественным рассматривать математически каждое тело как особенную точку фундаментального тензора (или функций $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$). Во вводном, § 1 нашей статьи мы и говорили для краткости об особенных точках. Однако эта идеализация недопустима потому, что на самом деле метрика везде, в том числе и внутри материи, весьма мало отличается от евклидовой. Следовательно, функции $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ везде отличаются весьма мало от постоянных значений (4.12) и особенных точек в математическом смысле не имеют. Поэтому правильнее говорить не об особенных точках, а об особенных областях, разумея под ними те, где тензор материи отличен от нуля.

Малость отклонений $g^{\mu\nu}$ от их евклидовых значений (4.12) играет в нашем исследовании существенную роль и является обязательной предпосылкой для применимости наших вычислений.

Как известно [1]) (и как будет выведено нами ниже), порядок величины отклонений диагональных элементов фундаментального тензора от их евклидовых значений (точнее — относительных отклонений) характеризуется величиной U/c^2, где U есть ньютонов потенциал тяготения, равный для одной сферически-симметричной массы

$$U = \gamma m/r. \tag{5.01}$$

Поэтому условие, чтобы метрика мало отличалась от евклидовой, равносильно требованию, чтобы ньютонов потенциал тяготения был мал по сравнению с квадратом скорости света:

$$U \ll c^2. \tag{5.02}$$

Если взять в качестве U его значение (5.01) и ввести гравитационный радиус массы m, т. е. величину

$$a = \gamma m/c^2, \tag{5.03}$$

то предыдущее неравенство будет выполняться при условии

$$r \gg a, \tag{5.04}$$

т. е. на расстояниях, достаточно больших по сравнению с гравитационным радиусом. Такими могут считаться все расстояния вплоть до поверхности тела.

Значение потенциала внутри тела массы m [где формула (5.01) неприменима] будет, вообще говоря, того же порядка, как и значение его на поверхности этого тела. Так, для шара радиусом L с постоянной плотностью материи ρ будет, как известно,

$$U(r) = \begin{cases} {}^2/_3 \pi\gamma\rho\,(3L^2 - r^2) & \text{при } r \leqslant L, \\ {}^4/_3 \pi\gamma\rho L^3/r & \text{при } r \geqslant L, \end{cases} \tag{5.05}$$

и поэтому

$$U(0) = {}^3/_2\, U(L). \tag{5.06}$$

Следовательно, требование, чтобы неравенство (5.02) выполнялось во всем пространстве, включая область, занятую материей, озна-

---

[1]) См., например, [9], стр. 388.

чает приблизительно то же самое, что и требование, чтобы это неравенство выполнялось на поверхности тел. Последнее означает, что

$$a \ll L, \tag{5.07}$$

где L есть некоторая длина, характеризующая линейные размеры тела.

Для всех известных в астрономии небесных тел, не исключая и сверхплотных звезд, неравенство (5.07) выполняется в весьма сильной степени. Так, например, для Солнца, Земли и Луны мы имеем нижеследующую таблицу, где в качестве L взят радиус шара одинакового объема с данным телом:

	Солнце	*Земля*	*Луна*
a ...	1,48 км	0,443 см	0,0053 см
L ...	696 000 км	6370 км	1738 км
a/L ...	$2 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-11}$

Для сверхплотных звезд величина a — того же порядка, что и для Солнца, тогда как L хотя и меньше, чем для Солнца, но все же не более чем в сто раз.

Тот приближенный метод решения уравнений Эйнштейна, которым мы будем пользоваться, основан на разложении всех искомых функций по обратным степеням скорости света. Для законности такого разложения необходимо, чтобы относительные скорости небесных тел были малы по сравнению со скоростью света. Это условие можно ввести в качестве отдельного предположения. Оно не является, однако, независимым от уже сделанного предположения о малости гравитационного потенциала. В самом деле, согласно теореме вириала, удвоенная средняя кинетическая энергия системы тел равна, с точностью до знака, средней потенциальной их энергии (мы предполагаем, что тела притягиваются по закону Ньютона). Мы имеем

$$\text{средн.} \sum_a m_a v_a^2 = \text{средн.} \frac{1}{2} \sum_{\substack{a,\, b \\ (a \neq b)}} \frac{\gamma m_a m_b}{|r_a - r_b|}. \tag{5.08}$$

Разделив это равенство на массу всех ($a \neq b$) тел (или на величину одного с ней порядка), мы получим слева некоторый средний квадрат скорости, справа некоторый средний ньютонов потенциал. Таким образом, последние величины должны быть одного порядка, и, следовательно, неравенство

$$v^2 \ll c^2 \tag{5.09}$$

вытекает из неравенства (5.02) или (5.07).

Разумеется, это заключение относится к тем случаям, к которым применима теорема вириала, т. е. к так называемым финитным системам. Если же мы имеем, например, тело, движущееся по гиперболической орбите мимо Солнца, то для него неравенство (5.09) не вытекает из (5.02), а составляет особое предположение.

В большинстве астрономических задач расстояния между небесными телами весьма велики по сравнению с их линейными размерами, так что там выполняется неравенство

$$L \ll R, \tag{5.10}$$

где R есть длина, характеризующая взаимное расстояние масс. Если мы примем это условие, то в соединении с (5.07) оно даст

$$a \ll L \ll R. \tag{5.11}$$

В нашем исследовании условие (5.10) не является столь существенно необходимым, как условие (5.07). Во всяком случае, в первом (ньютоновом) приближении можно его не вводить, если предположить, что массы в достаточной мере обладают сферической симметрией; тогда ньютонов потенциал каждой из них будет и на небольших расстояниях выражаться формулой (5.01). Однако во втором и последующих приближениях рассуждения и выкладки значительно упрощаются, если пользоваться условием (5.10). Упрощение основано на том, что это условие позволяет во многих случаях не входить в рассмотрение внутренней структуры масс. Поэтому, хотя условие $L \ll R$ в отличие от $a \ll L$ и не является принципиально необходимым, мы будем им пользоваться в дальнейшем.

6. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА МАТЕРИИ

В предыдущем параграфе мы уже говорили о том, что определение тензора материи (в той области, где он отличен от нуля) может быть произведено лишь совместно с определением фундаментального тензора. Поэтому мы не можем наперед задать точных значений $T^{\mu\nu}$. Однако для предварительной ориентировки достаточно знать общий характер тензора материи внутри «особенных областей» (т. е. областей, занятых материей). При этом можно воспользоваться тем, что пространство везде (также и внутри материи) почти евклидово. Так как мы будем в дальнейшем пользоваться гармоническими координатами, мало отличающимися от декартовых, то для нашей цели достаточно выписать значения тензора $T^{\mu\nu}$ (точнее, некоторых из его компонент) в декартовых координатах и для евклидова пространства.

Обозначим через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, . . . радиус-векторы [1]) центров инерции

[1]) Впрочем, в дальнейшем мы будем обозначать также и векторы r, a, b не жирными, а простыми буквами.

масс m_a, m_b,... . Декартовы координаты массы m_a в момент времени t будут

$$a_1(t), \quad a_2(t), \quad a_3(t) \quad (\text{для } m_a). \tag{6.01}$$

Чтобы избежать нагромождения значков, мы координаты разных масс не нумеруем, а обозначаем разными буквами.

Масса m_a распределена с плотностью ρ_a, зависящей только от разностей координат:

$$\rho_a = \rho_a[x_1 - a_1(t), \quad x_2 - a_2(t), \quad x_3 - a_3(t)], \tag{6.02}$$

или даже (в случае сферической симметрии) только от расстояния точки от центра массы m_a:

$$\rho_a = \rho_a(|r - a|), \tag{6.03}$$

где положено

$$|r - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}. \tag{6.04}$$

Распространенный на окрестности точки a интеграл равен

$$\int_{(a)} \rho_a \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = m_a, \tag{6.05}$$

т. е. он равен лежащей там массе.

Нулевая компонента тензора материи будет иметь вид

$$T^{00} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a, \tag{6.06}$$

где суммирование производится по всем массам. Компоненты с одним значком нуль будут

$$T^{0i} = \frac{1}{c^2} \sum \rho_a \dot{a}_i, \tag{6.07}$$

где положено

$$\dot{a}_i = da_i/dt. \tag{6.08}$$

Наконец пространственные компоненты будут приближенно равны

$$T^{ik} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \dot{a}_i \dot{a}_k + T^{*ik}, \tag{6.09}$$

где первый член (сумма по a) может терпеть разрыв на границах областей, занятых материей, а второй член T^{*ik} есть непрерывная функция координат с производными, которые остаются конечными, но могут допускать разрывы там же, где величины ρ_a.

Как известно, расходимость тензора материи должна равняться нулю во всем пространстве. Однако при формулировке этого условия необходимо учесть, что расходимость тензора, даже в том грубом приближении, которое нам здесь нужно, не будет просто равна сумме производных от его компонент по координатам и времени. Для удобства изложения мы забежим здесь несколько вперед и приведем приближенные формулы для расходимости произвольного симметричного тензора в гармонических координатах; эти формулы, которые будут выведены ниже, имеют вид

$$J^0 = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} T^{00}, \tag{6.10}$$

$$J^i = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00}, \tag{6.11}$$

где U есть ньютонов потенциал тяготения. Все ковариантные компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ предполагаются здесь одного и того же порядка величины относительно $1/c$, как это имеет место для тензора материи. Из этих формул ясно, что условие равенства нулю расходимости тензора $T^{\mu\nu}$ хотя и приводит в первом приближении к равенству

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} = 0, \tag{6.12}$$

но не приводит к равенству

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{6.13}$$

Обратимся теперь к нашим приближенным выражениям (6.06), (6.07) и (6.09) для тензора материи. Пользуясь тем, что плотность ρ_a зависит, согласно (6.02), от координат и времени только через посредство разностей $x_i - a_i(t)$, легко проверить, что соотношение (6.12) выполняется. Что касается остальных соотношений, то мы имеем

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2} \sum \frac{\partial \rho_a}{\partial x_k} \dot{a}_i \dot{a}_k + \frac{\partial T^{*ik}}{\partial x_k}, \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x_k} \dot{a}_i \dot{a}_k + \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \ddot{a}_i. \tag{6.15}$$

Плотность ρ_a может быть разрывной функцией от координат, так что производные от нее могут достигать очень больших значений. Поэтому существенно то, что при составлении суммы (6.14) и (6.15) члены, содержащие производные от плотности, сокращаются, и мы получаем

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial T^{*ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \ddot{a}_i. \tag{6.16}$$

Оставшиеся члены будут (в отличие от сократившихся) везде конечными. Эти члены и должны сократиться с последним членом в (6.11).

Таким образом, мы можем считать, что в данном приближении компоненты T^{00} и T^{i0} нам известны вполне, компоненты же T^{ik} известны лишь с точностью до функций T^{*ik}, имеющих конечные производные. Эти функции будут определены нами в дальнейшем (§ 12); для получения же исходного приближения достаточно знать компоненты T^{00} и T^{0i}.

7. ИСХОДНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Обратимся теперь к уравнениям тяготения, которые имеют вид

$$R^{\mu} -\frac{1}{2} g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{\mu\nu}. \qquad (7.01)$$

Первая ориентировка должна состоять в определении порядка величины отклонений искомых функций $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ от их евклидовых значений (4.12). Для этого рассмотрим структуру формулы (3.28) для тензора Эйнштейна.

Мы имеем

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}R = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Pi^{\nu,\,\alpha\beta}\Pi^{\mu}_{\alpha\beta} -$$
$$- {}^1/_2 y^{\mu} y^{\nu} + {}^1/_2 g^{\mu\nu} L - B^{\mu\nu} + {}^1/_2 g^{\mu\nu} B\,. \qquad (7.02)$$

Как мы знаем, члены, содержащие $B^{\mu\nu}$ и B, обратятся в нуль, если мы будем пользоваться гармонической координатной системой. Однако заранее положить их равными нулю мы не можем, так как у нас не только сами уравнения тяготения, но и условия гармоничности будут выполняться лишь приближенно. Поэтому у нас величины Γ^{ν} не будут строго равны нулю, и нам нужно будет следить, чтобы погрешность в выполнении уравнений тяготения соответствовала погрешности в выполнении условий гармоничности $\Gamma^{\nu} = 0$. Это будет иметь место, если в $R^{\mu\nu}$ будут отбрасываться члены того же порядка, как в $\Gamma^{\mu\nu}$ или в $B^{\mu\nu}$.

Во всяком случае, мы вправе предполагать, что уже для исходного приближения члены, содержащие $B^{\mu\nu}$ и B, достаточно малы по сравнению с остальными, так что их можно не рассматривать (разумеется, после получения исходного приближения это предположение должно быть проверено). Если отбросить $B^{\mu\nu}$ и B, то в формуле (7.02) останутся члены двоякого вида: с первыми производными и со вторыми производными. Так как первые производные входят квадратично, а вторые — линейно, то мы должны ожидать, что главными будут члены со вторыми производными.

Более подробная оценка членов с первыми производными (которая может быть произведена после получения исходного приближения) показывает, что это будет действительно так для уравнений со значками (0, 0) и (0, i). Для уравнений же с пространственными значками (i, k) некоторые члены с первыми производными оказываются того же порядка, как и те, которые сгруппированы в виде оператора Даламбера. Поэтому мы можем ограничиться линейными членами в уравнениях для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$, но не можем этого делать в уравнениях для $\mathfrak{g}^{ik}$.

Если мы для коэффициентов оператора Даламбера возьмем их евклидовы значения, то мы получим для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ уравнения

$$\frac{1}{2c}\left(\Delta\mathfrak{g}^{00}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2}\right)=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{00}, \tag{7.03}$$

$$\frac{1}{2c}\left(\Delta\mathfrak{g}^{0i}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2}\right)=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{0i}. \tag{7.04}$$

Здесь символ Δ означает оператор Лапласа для евклидовой метрики:

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}. \tag{7.05}$$

Уравнения для $\mathfrak{g}^{ik}$ будут иметь вид более сложный, чем (7.03) и (7.04), так как в них нужно учесть уже в первом приближении некоторые из членов с первыми производными. Это будет сделано ниже (в § 10).

Согласно формулам (6.06), (6.07) и (6.09), все контравариантные компоненты $T^{\mu\nu}$ тензора материи будут одного и того же (а именно второго) порядка относительно $1/c$. Отсюда и из уравнений (7.03) и (7.04) легко видеть, что отклонения $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ от их евклидовых значений будут третьего порядка относительно $1/c$. Но того же третьего порядка будут и поправки к $\mathfrak{g}^{ik}$. В самом деле, хотя вид уравнения для $\mathfrak{g}^{ik}$ несколько другой, главные (линейные) члены в нем те же, как и в (7.03) и в (7.04); порядок же величины добавочных членов будет в нем тот же, как и главных. Поэтому поправки ко всем $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ будут одного и того же, а именно третьего, порядка.

Если мы будем разлагать эти поправки по обратным степеням c, то первые члены разложения будут иметь вид

$$\mathfrak{g}^{00}=\frac{1}{c}+\frac{4U}{c^3}+\frac{4S}{c^5}+\ldots, \tag{7.06}$$

$$\mathfrak{g}^{0i}=\frac{4U_i}{c^3}+\frac{4S_i}{c^3}+\ldots, \tag{7.07}$$

$$\mathfrak{g}^{ik}=-c\delta_{ik}+\frac{4S_{ik}}{c^3}+\ldots. \tag{7.08}$$

Для определения величин U и U_i в этих выражениях достаточно уравнений (7.03) и (7.04). Подставляя в эти уравнения значения (6.06) и (6.07) для компонент тензора материи и пренебрегая в операторе Даламбера членом с второй производной по времени, мы получим

$$\Delta U = -4\pi\gamma \sum_a \rho_a, \tag{7.09}$$

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma \sum_a \rho_a \dot{a}_i. \tag{7.10}$$

Предполагая, что каждая из масс обладает сферической симметрией, мы можем положить

$$U = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}, \tag{7.11}$$

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}\dot{a}_i. \tag{7.12}$$

Если бы мы не ввели предположения о сферической симметрии масс, то эти выражения пришлось бы дополнить членами, происходящими от неравенства моментов инерции масс. Для простоты вычислений мы ограничиваемся здесь случаем сферической симметрии.

Величина U есть не что иное, как ньютонов потенциал тяготения, а векторным потенциалом были бы тогда величины U_i. Это название оправдывается очевидным сходством формул (7.11) и (7.12) с известными приближенными выражениями для соответствующих электродинамических величин.

Потенциалы U и U_i удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \tag{7.13}$$

Выражения (7.11) и (7.12) для U и U_i будут справедливы вне масс. Что касается значений этих функций внутри масс, то для определения их нужно знать точный вид функций ρ_a, т. е. распределение плотности внутри масс.

8. ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Мы получили следующее приближение для величин $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3}, \tag{8.01}$$

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3}, \tag{8.02}$$

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik}, \tag{8.03}$$

где величины U и U_i удовлетворяют вне масс уравнению Лапласа и определяются формулами (7.11) и (7.12). Это приближение мы будем называть исходным или первым приближением. Его можно было бы назвать также линейным, так как соответствующие ему выражения для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ удовлетворяют линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Знание $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ в первом приближении позволяет вычислить тензор Эйнштейна во втором приближении и тем самым оценить отброшенные члены в уравнениях (7.03) и (7.04).

Для этого оценим прежде всего точность, с которой выполняются условия гармоничности

$$\Gamma^{\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{g}^{\mu\nu}}{\partial x_{\mu}} = 0. \tag{8.04}$$

Вследствие равенства (7.13) величина Γ^0 будет шестого порядка, а Γ^i — четвертого порядка относительно $1/c$. Согласно определению (3.13), отсюда следует, что Γ^{00} будет восьмого, Γ^{0i} — шестого и Γ^{ik} — четвертого порядка. Такого же порядка будут отброшенные члены (содержащие $\Gamma^{\mu\nu}$ или $B^{\mu\nu}$) в выражениях для соответствующих компонент тензора Эйнштейна.

Найдем теперь приближенные значения членов с первыми производными в этих выражениях. На основании определения (2.15) величин $\Pi^{\rho,\mu\nu}$ мы получим следующую таблицу:

$$\begin{aligned}
\Pi^{0,00} &= -\frac{2}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}, \\
\Pi^{0,0l} &= \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\
\Pi^{0,kl} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right), \\
\Pi^{i,00} &= -\frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}, \\
\Pi^{i,k0} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right), \\
\Pi^{i,kl} &= 0\left(\frac{1}{c^4}\right).
\end{aligned} \tag{8.05}$$

Опуская значки при помощи евклидовых значений фундаментального тензора, выводим отсюда

$$\begin{aligned}
\Pi^{0}_{00} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}, \\
\Pi^{0}_{0l} &= -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_l}, \\
\Pi^{0}_{kl} &= \frac{2}{c^4}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k}\right),
\end{aligned} \tag{8.06}$$

$$\Pi^i_{00} = -2\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\Pi^i_{k0} = -\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right),$$

$$\Pi^i_{kl} = 0\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

Получаемые из первого приближения величины $\Pi^{i,\,kl}$ и Π^i_{kl} равны нулю; поэтому мы указываем здесь только их порядок величины.

При помощи найденных значений $\Pi^{\nu,\,\alpha\beta}$ и $\Pi^\mu_{\alpha\beta}$ мы можем вычислить суммы, входящие в формулу (7.02). Мы имеем

$$\Pi^{0,\,\alpha\beta}\Pi^0_{\alpha\beta} = -\frac{8}{c^6}(\operatorname{grad} U)^2, \tag{8.07}$$

$$\Pi^{0,\,\alpha\beta}\Pi^i_{\alpha\beta} = \frac{4}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s}, \tag{8.08}$$

$$\Pi^{i,\,\alpha\beta}\Pi^k_{\alpha\beta} = \frac{4}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{8.09}$$

В формуле (8.07), как и в дальнейшем, символ grad U означает обыкновенный трехмерный евклидов градиент, так что $(\operatorname{grad} U)^2$ есть просто сумма квадратов величин $\partial U/\partial x_i$.

Определитель g будет в нашем приближении равен $-c^3\mathfrak{g}^{00}$, так что

$$-g = c^2 + 4U \tag{8.10}$$

и, следовательно,

$$y_\alpha = \frac{\partial \lg\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha} = \frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \tag{8.11}$$

$$y^0 = \frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial t}; \qquad y^i = -\frac{2}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_i}. \tag{8.12}$$

Нам остается вычислить входящую в выражение (7.02) величину L (лагранжеву функцию), определяемую формулой (3.25). В силу предыдущих формул, мы имеем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\Pi^\rho_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathfrak{g}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} = -\frac{8}{c^4}(\operatorname{grad} U)^2, \tag{8.13}$$

$$y_\alpha y^\alpha = -\frac{4}{c^4}(\operatorname{grad} U)^2, \tag{8.14}$$

откуда

$$L = \frac{2}{c^4}(\operatorname{grad} U)^2. \tag{8.15}$$

Здесь проверкой служит то, что вариация интеграла от L дает для U в первом приближении уравнение Лапласа, как это и должно быть.

Все входящие в тензор Эйнштейна члены с первыми производными нами вычислены.

Что касается членов со вторыми производными (обобщенного оператора Даламбера), то, используя выражения (7.06) — (7.08) для $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, мы будем иметь

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = -c\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \\ + \frac{4}{c^3}\left(S_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2U_i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial t} + U\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right). \qquad (8.16)$$

В выражение (7.02) для тензора Эйнштейна входит величина (8.16), деленная на $2g$, причем φ есть соответствующая компонента $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$. Отсюда следует, что величиной во второй строчке формулы (8.16) можно пренебречь по сравнению с евклидовым оператором Даламбера не только в первом, но и во втором приближении. В самом деле, если φ есть одна из функций $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, то производные от нее будут третьего порядка, а деленная на $2g$ вторая строчка в (8.16) будет восьмого порядка. Следовательно, восьмого порядка будут и те члены в тензоре Эйнштейна, которые отбрасываются при замене обобщенного оператора Даламбера обыкновенным. Такая замена допустима, следовательно, не только в первом, но и во втором приближении (а для пространственных компонент даже и в третьем).

Чтобы избежать деления оператора Даламбера на определитель g, мы выпишем ниже выражения не для самого тензора Эйнштейна, а для этого тензора, умноженного на близкую к единице величину $(-g/c^2)$.

Для компоненты со значками (00) мы будем иметь

$$(-g/c^2)\left(R^{00} - \frac{1}{2}g^{00}R\right) = \frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{00} - \frac{1}{2c_3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2} - \frac{7}{c^6}(\operatorname{grad} U)^2 + 0\left(\frac{1}{c^8}\right), \qquad (8.17)$$

если только величины Γ^{00} и B^{00} — не менее восьмого порядка, что, как мы видели, имеет место уже в первом приближении.

Компоненты со значками ($0i$) равны

$$(-g/c^2)\left(R^{0i} - \frac{1}{2}g^{0i}R\right) = \frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{0i} - \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2} + \\ + \frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_s} - \frac{\partial U_s}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_s} + 0\left(\frac{1}{c^8}\right). \qquad (8.18)$$

Наконец, пространственные компоненты имеют вид

$$(-g/c^2)\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right)=\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{ik}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{ik}}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}-\frac{\delta_{ik}}{c^4}(\operatorname{grad} U)^2+0\left(\frac{1}{c^6}\right). \qquad (8.19)$$

Невыписанные члены будут указанного здесь порядка [т. е. восьмого в (8.17) и (8.18) и шестого в (8.19)], если такого же порядка будут соответствующие величины $\Gamma^{\mu\nu}$ или $B^{\mu\nu}$. Для этого достаточно выполнения условий гармоничности с такой точностью, чтобы было

$$\Gamma^0=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\mathfrak{g}^{00}}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{g}^{0i}}{\partial x_i}\right)=0\left(\frac{1}{c^8}\right), \qquad (8.20)$$

$$\Gamma^i=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\mathfrak{g}^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial\mathfrak{g}^{ik}}{\partial x_k}\right)=0\left(\frac{1}{c^6}\right). \qquad (8.21)$$

Последние равенства могут быть выполнены путем надлежащего выбора второго приближения для $\mathfrak{g}^{ik}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$.

Выписанные выше выражения (8.17) — (8.19) для тензора Эйнштейна позволяют также проверить законность тех пренебрежений, которые были сделаны в первом приближении. В самом деле, из этих выражений следует, что в компонентах со значками (00) и ($0i$) члены, квадратичные в первых производных, будут более высокого (а именно шестого) порядка малости, чем члены, происходящие от тензора материи (последние будут четвертого порядка). Поэтому мы вправе были пользоваться для определения поправок к евклидовым значениям $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ линейными уравнениями (7.03) и (7.04). Значит, и сами эти поправки и вытекающие из них приближенные значения тензорных параметров (8.05) и (8.06) определены были верно. В уравнениях же (7.01) для пространственных компонент члены, квадратичные в производных, будут того же (а именно четвертого) порядка, что и правая часть. Поэтому их нужно было бы принимать во внимание одновременно и уравнения для $\mathfrak{g}^{ik}$, аналогичного уравнениям (7.03) и (7.04), для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ написать нельзя.

9. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НУЛЕВОЙ КОМПОНЕНТЫ. ОБОБЩЕННЫЙ НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ

Чтобы получить уравнения для определения функций $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ во втором приближении, достаточно подставить в уравнения тяготения выведенные в предыдущем параграфе приближенные выражения для тензора Эйнштейна. К этим уравнениям нужно присоединить условия гармоничности (8.20) и (8.21).

Мы начнем определение второго приближения с функции $\mathfrak{g}^{00}$. При этом мы сперва рассмотрим область вне масс, а затем введем тензор материи. Для области вне масс уравнение для $\mathfrak{g}^{00}$ получится, если приравнять нулю выражение (8.17). Но из первого приближения (8.01) мы знаем, что

$$\operatorname{grad} \mathfrak{g}^{00} = \frac{4}{c^3} \operatorname{grad} U. \qquad (9.01)$$

Выразив по этой формуле grad U через grad $\mathfrak{g}^{00}$ и подставив в (8.17), мы получим выражение, содержащее только одну неизвестную функцию $\mathfrak{g}^{00}$. Приравняв это выражение нулю, будем иметь

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{00} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2} - \frac{7}{16} (\operatorname{grad} \mathfrak{g}^{00})^2 = 0. \qquad (9.02)$$

Это уравнение в требуемом приближении можно свести к линейному. В самом деле, с той же степенью точности мы можем вместо (9.02) написать

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathfrak{g}^{00} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathfrak{g}^{00}}{\partial t^2} - \frac{7}{16} (\operatorname{grad} \mathfrak{g}^{00})^2 + \frac{7}{16c^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{g}^{00}}{\partial t} \right)^2 = 0, \qquad (9.03)$$

так как добавка последнего члена влияет только на члены восьмого порядка, которые в (8.17) отбрасываются. Если мы теперь положим

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} f(U), \qquad (9.04)$$

то уравнение (9.03) сведется к линейному уравнению

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \qquad (9.05)$$

при условии, что функция $f(U)$ в (9.04) удовлетворяет соотношению

$$f''(U) = \frac{7}{8} [f'(U)]^2 \qquad (9.06)$$

Так как все наши вычисления — приближенные, то, разумеется, нет смысла точно интегрировать уравнение (9.06). Для нашей цели достаточно, чтобы соотношение (9.06) выполнялось при $U = 0$, а в качестве $f(U)$ можно взять полином второй степени. Постоянный и линейный члены этого полинома получатся из условия, чтобы в первом приближении выполнялось равенство (8.01). Таким путем мы получим

$$f(U) = 1 + \frac{4U}{c^2} + \frac{7U^2}{c^4} \qquad (9.07)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{7U^2}{c^5}, \tag{9.08}$$

где U удовлетворяет в области вне масс уравнению Даламбера с евклидовыми коэффициентами. Чтобы найти уравнение для U в области внутри масс, мы должны приравнять левую часть уравнений (9.02) или (9.03) не нулю, а величине

$$\frac{8\pi\gamma g}{c^4} T^{00} = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\left(1 + \frac{4U}{c^2}\right) T^{00} \tag{9.09}$$

[в данном приближении мы можем заменить g выражением (8.10)]. Разделив обе части на величину, пропорциональную $f'(U)$, мы получим для U уравнение

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right) T^{00}. \tag{9.10}$$

Как мы уже говорили в § 5, величина T^{00} может считаться известной наперед только в самом первом (ньютоновом) приближении, которого недостаточно для определения правой части (9.10) с нужной нам точностью. Поэтому уравнение (9.10) следует скорее рассматривать как уравнение для определения значения T^{00} внутри масс через U (см. ниже § 12). Если мы положим

$$\left(c^2 + \frac{1}{2}U\right) T^{00} = \rho, \tag{9.11}$$

то величина ρ будет, по крайней мере в первом приближении, плотностью материи. Поэтому уравнение (9.10), которое мы напишем в виде

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\rho, \tag{9.12}$$

можно толковать как обобщение уравнения Пуассона для ньютонова потенциала.

Таким образом, оказывается возможным сохранить и во втором приближении понятие ньютонова потенциала, удовлетворяющего уравнению (9.12) внутри материи и уравнению Даламбера в пустоте.

Обратимся теперь к нашей конкретной физической задаче. В первом приближении мы имели для области вне масс обычное выражение для ньютонова потенциала [формула (7.11)]

$$U = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r - a|}. \tag{9.13}$$

Так как координаты масс $a_i(t)$ есть функции времени, это выражение для U уравнению Даламбера не удовлетворяет, и нам нужно внести к нему поправку на запаздывание. Кроме того, чтобы удовлетворить условию гармоничности (8.20), оказывается необходимым ввести в U еще одну поправку того же порядка; мы ее обозначим через U^*/c^2. Таким образом, во втором приближении

$$U=\sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}+\frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma m_a|r-a|+\frac{U^*}{c^2}. \tag{9.14}$$

Величина U^*, которая удовлетворяет уравнению Лапласа (или Даламбера), будет определена одновременно с поправками к $\mathfrak{g}^{0i}$ из условия (8.20).

Определив величину $\mathfrak{g}^{00}$ во втором приближении при помощи уравнений (9.08) и (9.05), мы уже, строго говоря, отступили от принципа разложения по обратным степеням c. Действительно, величина U, входящая в (7.06) как коэффициент при $4/c^3$, теперь сама содержит у нас c. Поэтому в формуле (7.06) мы и в третьем члене должны будем разуметь под S разные величины, смотря по тому, что мы разумеем под U: первоначальное ли выражение (9.13) или исправленное выражение (9.14). Во втором случае мы будем иметь просто

$$S=\frac{7}{4}U^2 \tag{9.15}$$

В первом же случае к этому выражению нужно прибавить еще два члена, соответствующие двум поправкам в формуле (9.14) для U.

10. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОМПОНЕНТ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАСС

В первом приближении величины $\mathfrak{g}^{ik}$ имели евклидовы значения (8.03). Второе приближение для них может быть получено из уравнений, которые составляются следующим образом: правая часть (8.19) приравнивается выражению

$$\frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{ik}=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{ik} \tag{10.01}$$

(множитель g мы вправе заменить здесь на $-c^2$). Получаемые уравнения имеют вид

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{ik}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{ik}}{\partial t^2}+\frac{2}{c^4}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}-\frac{\delta_{ik}}{c^4}(\operatorname{grad}U)^2=-\frac{8\pi\gamma}{c^2}T^{ik}. \tag{10.02}$$

Членом со второй производной по времени здесь нужно пренебречь; в самом деле, согласно (7.08), мы имеем

$$\mathfrak{g}^{ik}=-c\delta_{ik}+\frac{4S_{ik}}{c^3}+\ldots \tag{10.03}$$

и, следовательно, этот член будет шестого порядка, т. е. того же порядка, что и те члены, которые уже отброшены. Подставив (10.03) в (10.02), мы получим, после умножения на $^1/_2c^4$ и переноса некоторых членов в правую часть, следующее уравнение для S_{ik}:

$$\Delta S_{ik} = -4\pi\gamma c^2 T^{ik} + \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{10.04}$$

Кроме уравнения (10.04), величины S_{ik} должны удовлетворять также условиям гармоничности, которые вследствие (8.21), (8.02) и (10.03) в данном приближении имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{10.05}$$

где, согласно (7.12),

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}\dot{a}_i, \tag{10.06}$$

по крайней мере вне масс.

В уравнение (10.04) входит неизвестная величина T^{ik}, относительно которой мы знаем только то, что вне масс она равна нулю, а внутри масс характер ее определяется выражением (6.09). Чтобы освободиться от этой величины, мы положим

$$S_{ik} = U_{ik} + V_{ik} \tag{10.07}$$

и подчиним U_{ik} уравнению

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma c^2 T^{ik}, \tag{10.08}$$

аналогичному уравнениям (7.09) и (7.10) для U и U_i. Тогда величины V_{ik} должны будут удовлетворять уравнениям

$$\Delta V_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}. \tag{10.09}$$

В правой части этих уравнений мы будем разуметь под U обыкновенный ньютонов потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона (7.09). Вне масс потенциал U будет равен

$$U = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}, \tag{10.10}$$

внутри же масс он будет некоторой непрерывной функцией от координат с непрерывными первыми производными. Таким образом, правые части уравнений (10.09), т. е. величины

$$Q_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}(\operatorname{grad} U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_k}, \tag{10.11}$$

будут некоторыми непрерывными функциями координат. Если мы подчиним решения уравнений

$$\Delta V_{ik} = Q_{ik} \tag{10.12}$$

[т. е. уравнений (10.09)] условиям быть всюду конечными и обращаться на бесконечности в нуль, то функции V_{ik} будут тем самым определены вполне однозначно.

Рассмотрим выражение для величины Q_{ik} вне масс. Подставив в (10.11) ньютонов потенциал (10.10), мы получим однородную квадратичную функцию от масс, которую можно написать в виде

$$Q_{ik} = \sum_a \gamma^2 m_a^2 Q_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} \gamma^2 m_a m_b Q_{ik}^{(ab)}, \tag{10.13}$$

где

$$Q_{ik}^{(aa)} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{ik}}{|r-a|^4} - \frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)}{|r-a|^6}, \tag{10.14}$$

$$Q_{ik}^{(ab)} = \frac{1}{2} \frac{(x_j - a_j)(x_j - b_j)}{|r-a|^3 |r-b|^3} \delta_{ik} - \\ - \frac{1}{2} \frac{(x_i - a_i)(x_k - b_k) + (x_i - b_i)(x_k - a_k)}{|r-a|^3 |r-b|^3}. \tag{10.15}$$

Сообразно разложению (10.13), мы можем искомое решение V_{ik} уравнения (10.12) писать в виде

$$V_{ik} = \sum_a \gamma^2 m_a^2 V_{ik}^{(aa)} + \sum_{a \neq b} \gamma^2 m_a m_b V_{ik}^{(ab)}, \tag{10.16}$$

где отдельные члены удовлетворяют соответствующим уравнениям

$$\Delta V_{ik}^{(aa)} = Q_{ik}^{(aa)}, \tag{10.17}$$

$$\Delta V_{ik}^{(ab)} = Q_{ik}^{(ab)} \tag{10.18}$$

Вне масс правые части этих уравнений имеют вид (10.14) и (10.15). Но внутри масс значения их будут определяться другими формулами. Поэтому, строго говоря, нужно различать даже в области, свободной от материи, между истинными $V_{ik}^{(ab)}$ и решениями тех уравнений, правые части которых имеют вид (10.14) и (10.15) во всем пространстве, включая область, фактически занятую массами.

Для уравнения (10.18) различие это не будет, однако, существенным, по крайней мере в том случае, когда линейные размеры масс малы по сравнению с их взаимными расстояниями. Поэтому мы будем разуметь под величиной $Q_{ik}^{(ab)}$ в правой части (10.18) выражение (10.15). Это выражение имеет в точках $r = a$ и $r = b$ особенности не выше дипольного характера. Вследствие этого уравнение (10.18) будет иметь решение, которое остается конечным во всем пространстве, включая точки $r = a$ и $r = b$, и обращается на бесконечности в нуль.

Это решение может быть найдено в конечном виде. Для этого напишем выражение (10.15) в виде производных по параметрам a_i, b_j от функции $1/|r-a|\,|r-b|$. Мы будем иметь

$$Q_{ik}^{(ab)}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial a_j\partial b_j}-\frac{\partial^2}{\partial a_i\partial b_k}-\frac{\partial^2}{\partial a_k\partial b_i}\right)\frac{1}{|r-a|\,|r-b|}. \quad (10.19)$$

Поэтому уравнение (10.18) сводится к более простому уравнению

$$\Delta\varphi=\frac{1}{|r-a|\,|r-b|}. \quad (10.20)$$

Действительно, если φ есть решение (10.20), то величина

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_k\,\partial b_i}\right) \quad (10.21)$$

будет решением уравнения (10.18).

Но решение уравнения (10.20) легко написать. Обозначим через s периметр треугольника с вершинами в точках r, a, b:

$$s=|r-a|+|r-b|+|a-b|. \quad (10.22)$$

Тогда функция

$$\varphi=\lg s=\ln(|r-a|+|r-b|+|a-b|) \quad (10.23)$$

будет удовлетворять уравнению (10.20), ибо, как легко проверить,

$$\Delta\ln s=\frac{1}{|r-a|\,|r-b|}. \quad (10.24)$$

Таким образом, искомое решение уравнения (10.18) имеет вид

$$V_{ik}^{(ab)}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_j\,\partial b_j}-\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_i\,\partial b_k}-\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_k\,\partial b_i}\right). \quad (10.25)$$

Обратимся теперь к уравнению (10.17). Частное решение его легко написать. Мы имеем

$$V_{ik}^{(aa)}=\frac{1}{4}\,\frac{(x_i-a_i)(x_k-a_k)}{|r-a|^4}. \quad (10.26)$$

Однако нам нужно не произвольное частное решение, а то, которое вне масс совпадает с истинным (т. е. всюду конечным) решением. Чтобы найти это последнее, нам нужно иметь такое выражение для $Q_{ik}^{(aa)}$, которое было бы справедливо и внутри масс.

Положим для краткости

$$v_{ik}=\gamma^2m_a^2V_{ik}^{(aa)} \quad (10.27)$$

и перенесем начало координат в точку a. Тогда функция v_{ik} должна будет удовлетворять уравнению

$$\Delta v_{ik}=\frac{\delta_{ik}}{2}(\operatorname{grad}u)^2-\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad (10.28)$$

где

$$u = u(r) \tag{10.29}$$

есть потенциал, происходящий от массы m_a. Решения уравнения (10.28) можно искать в виде

$$v_{ik} = \frac{x_i x_k - {}^1/_3 \delta_{ik} r^2}{r^5} p(r) - \delta_{ik} q(r). \tag{10.30}$$

Тогда $p(r)$ и $q(r)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{4}{r} \frac{dp}{dr} = -r^3 u'(r)^2, \tag{10.31}$$

$$\frac{d^2 q}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dq}{dr} = -\frac{1}{6} u'(r)^2, \tag{10.32}$$

откуда, имея в виду граничные условия для v_{ik}, получаем

$$p(r) = \frac{1}{5} \int_0^r r^4 u'(r)^2 \, dr + \frac{r^5}{5} \int_r^\infty \frac{u'(r)^2}{r} \, dr, \tag{10.33}$$

$$q(r) = \frac{1}{6} \int_r^\infty r u'(r)^2 \, dr + \frac{1}{6r} \int_0^r r^2 u'(r)^2 \, dr. \tag{10.34}$$

Если радиус тела равен L, то при $r > L$

$$u(r) = \frac{\gamma m}{r} \tag{10.35}$$

и выражения для $p(r)$ и $q(r)$ приведутся к следующим:

$$p(r) = {}^1/_4 \gamma^2 m^2 r - {}^1/_5 \gamma^2 m^2 \lambda, \tag{10.36}$$

$$q(r) = -\frac{\gamma^2 m^2}{12 r^2} + \frac{\gamma \varepsilon}{3r}, \tag{10.37}$$

где через ε и λ обозначены постоянные:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\operatorname{grad} u)^2 \, d\tau = \frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty r^2 u'(r)^2 \, dr, \tag{10.38}$$

$$\lambda = L - \frac{1}{\gamma^2 m^2} \int_0^L r^4 u'(r)^2 \, dr. \tag{10.39}$$

Величина ε есть взятая с обратным знаком взаимная потенциальная энергия частиц, составляющих тело; величина λ есть некоторая длина порядка L (при постоянной плотности $\lambda = {}^6/_7 L$).

Подставив найденные значения для $p(r)$ и $q(r)$ в формулу (10.30), получим

$$v_{ik}=\frac{\gamma^2 m^2 x_i x_k}{4r^4}-\frac{1}{5}\gamma^2 m^2 \lambda\,\frac{x_i x_k-\frac{1}{3}\delta_{ik} r^2}{r^5}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\frac{\gamma\varepsilon}{r}. \qquad (10.40)$$

Если мы заменим здесь x_i на $x_i - a_i$ и снабдим значком a величины m, ε, λ, то по разделении на $\gamma^2 m_a^2$ мы получим вследствие (10.27) следующее окончательное выражение для $V_{ik}^{(aa)}$:

$$V_{ik}^{(aa)}=\frac{1}{4}\frac{(x_i-a_i)(x_k-a_k)}{|r-a|^4}-\frac{\lambda_a}{5}\left[\frac{(x_i-a_i)(x_k-a_k)}{|r-a|^5}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{3}\frac{\delta_{ik}}{|r-a|^3}\right]-\frac{1}{3}\frac{\varepsilon_a}{\gamma m_a^2}\frac{\delta_{ik}}{|r-a|}. \qquad (10.41)$$

Первый член здесь совпадает с найденным ранее частным решением (10.26). Второй член будет мал по сравнению с первым, если расстояние до массы m_a велико по сравнению с радиусом; строго говоря, его следовало бы отбросить, так как подобное пренебрежение уже сделано при вычислении $V_{ik}^{(ab)}$.

Подставив найденные выражения (10.25) и (10.41) в (10.16), мы получим полное выражение для V_{ik}. Теперь наша задача состоит в определении функции U_{ik} из уравнения Лапласа [к которому приводится уравнение (10.08) вне масс] и из условия, чтобы сумма $S_{ik} = U_{ik} + V_{ik}$ удовлетворяла условию гармоничности (10.05).

Для этого нужно прежде всего вычислить расходимость трехмерных тензоров (10.41) и (10.25).

Мы имеем

$$\gamma^2 m_a^2 \frac{\partial V_{ik}^{(aa)}}{\partial x_k}=-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\gamma\varepsilon_a}{|r-a|}. \qquad (10.42)$$

Чтобы вычислить далее расходимость от $V_{ik}^{(ab)}$, нам нужно воспользоваться формулой

$$\frac{\partial^2 \ln s}{\partial a_j\,\partial b_j}=-\frac{(|r-a|+|r-b|-|a-b|)}{2|r-a|\,|r-b|\,|a-b|} \qquad (10.43)$$

и двумя другими формулами, получаемыми из (10.43) перестановкой букв (r, a, b). При помощи этих формул нетрудно проверить равенство

$$\frac{\partial V_{ik}^{(ab)}}{\partial x_k}=\frac{1}{2}\frac{a_i-b_i}{|a-b|^3}\left(\frac{1}{|r-a|}-\frac{1}{|r-b|}\right). \qquad (10.44)$$

Составив при помощи (10.42) и (10.44) расходимость от суммы (10.16), мы получим [1]

$$\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}=\sum_{a\neq b}\frac{\gamma^2 m_a m_b}{|r-a|}\frac{a_i-b_i}{|a-b|^3}-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma\varepsilon_a}{|r-a|}. \qquad (10.45)$$

[1] Оба члена в скобках в (10.44) дают при суммировании одно и то же; поэтому достаточно взять первый член и умножить результат на 2.

Для упрощения полученной формулы обозначим через Φ потенциальную энергию системы тел:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{\gamma m_a m_b}{|a-b|}. \tag{10.46}$$

Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \sum_b{}' \gamma m_a m_b \frac{a_i - b_i}{|a-b|^3}, \tag{10.47}$$

и выражение (10.45) напишется в виде

$$\frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k} = \sum_a \frac{\gamma}{|r-a|} \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_a \frac{\gamma \varepsilon_a}{|r-a|}. \tag{10.48}$$

Заметим, что это же выражение можно было бы получить и не решая в явном виде уравнения для V_{ik}, а исходя из уравнения Пуассона для левой части (10.48). Найденное выражение для $\partial V_{ik}/\partial x_k$, сложенное с выражением

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|} \ddot{a}_i - \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_a \frac{\gamma m_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|r-a|}, \tag{10.49}$$

должно давать, согласно (10.05) и (10.07), величину

$$-\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial V_{ik}}{\partial x_k}. \tag{10.50}$$

Но вне масс величины U_{ik} являются гармоническими функциями, и их разложения начинаются с членов, соответствующих простым полюсам. Поэтому левая часть (10.50) не может иметь простых полюсов, а может иметь только особенности дипольного (и, быть может, мультипольного) характера. Действительно, положив

$$U_{ik} = \sum_a \frac{\gamma m_a \dot{a}_i \dot{a}_k}{|r-a|} + \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_a \frac{\gamma \varepsilon_a}{|r-a|}, \tag{10.51}$$

мы приведем к совпадению дипольные члены в обеих частях равенства (10.50), но справа останутся члены

$$\sum_a \frac{\gamma}{|r-a|} \left(m_a \ddot{a}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right) = 0, \tag{10.52}$$

которые, однако, тоже должны обратиться в нуль. Это возможно только, если числитель в каждом члене в отдельности равен нулю. Отсюда

$$m_a \ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}. \tag{10.53}$$

Но эти уравнения представляют собой ньютоновы уравнения движения для системы масс. Таким образом, ньютоновы уравнения движения получены нами как условие разрешимости уравнений Эйнштейна во втором приближении. При этом мы совершенно не пользовались так называемым принципом геодезической линии. Тем самым мы вновь получили результат Эйнштейна [1, 2], согласно которому этот принцип уже содержится в уравнениях тяготения.

Разумеется, закон движения получился у нас в форме Ньютона только потому, что мы ограничивались в наших вычислениях вторым приближением. Учет дальнейших приближений дал бы к закону Ньютона соответствующие поправки.

11. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ СМЕШАННЫХ КОМПОНЕНТ

Пользуясь выражением (8.18) для смешанных компонент тензора Эйнштейна, мы можем написать уравнения второго приближения для величин $\mathfrak{g}^{0i}$ в виде

$$\frac{1}{2c}\Delta\mathfrak{g}^{0i}-\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\mathfrak{g}^{0i}}{\partial t^2}+\frac{6}{c^6}\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}-$$
$$-\frac{8}{c^6}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j}=\frac{8\pi\gamma g}{c^4}T^{0i}. \qquad (11.01)$$

Мы положим

$$\mathfrak{g}^{0i}=\frac{4}{c^3}U_i+\frac{4}{c^5}S_i \qquad (11.02)$$

и подчиним величины U_i и S_i уравнениям

$$\Delta U_i-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}=4\pi\gamma g T^{0i}, \qquad (11.03)$$

$$\Delta S_i-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2}=-3\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}+4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j}. \qquad (11.04)$$

Согласно (6.07) и (8.10), правая часть уравнения (11.03) будет в первом приближении совпадать с правой частью (7.09). Поэтому мы вправе обозначить одной и той же буквой U_i как решение уравнения (11.03), так и ту функцию, которая входит в правую часть (11.04) и приближенно выражается формулой (7.12).

В уравнении (11.04) можно пренебречь членом со второй производной от S_i по времени. Таким образом, если мы положим

$$Q_i=-3\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x_i}+4\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U}{\partial x_j}, \qquad (11.05)$$

то уравнение для S_i будет иметь вид

$$\Delta S_i=Q_i. \qquad (11.06)$$

Кроме уравнений (11.03) и (11.06), функции U_i и S_i должны удовлетворять условию гармоничности, вытекающему из (8.20). Из выражений (9.08) и (11.02) для $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ следует, что это условие имеет вид

$$c^2\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)+\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial S_i}{\partial x_i}=0. \qquad (11.07)$$

Составим сумму производных от обеих частей (11.06) по x_i:

$$\Delta\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}. \qquad (11.08)$$

В выражении (11.05) для Q_i можно под U и U_i разуметь их значения из первого приближения. Эти величины будут вне масс удовлетворять уравнению Лапласа и условию (7.13). Имея это в виду, получаем

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}=-\frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad} U)^2. \qquad (11.09)$$

С другой стороны, если $\Delta U=0$, то

$$\Delta(U^2)=2(\operatorname{grad} U)^2, \qquad (11.10)$$

откуда, дифференцируя по времени и умножая на $^7/_4$, будем иметь

$$\Delta\left(\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}\right)=\frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad} U)^2. \qquad (11.11)$$

Складывая это равенство с (11.08) и используя (11.09), получаем

$$\Delta\left(\frac{\partial S_i}{\partial x_i}+\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}\right)=0. \qquad (11.12)$$

Таким образом, входящее в (11.07) выражение

$$\varphi=-\left(\frac{7}{2}U\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial S_i}{\partial x_i}\right) \qquad (11.13)$$

есть функция, гармоническая вне масс.

Наша задача распадается теперь на три этапа: во-первых, нужно решить уравнения (11.06) для S_i; во-вторых, нужно при помощи найденных S_i составить по формуле (11.13) гармоническую функцию φ. Наконец, нужно определить (разумеется, в согласии с первым приближением) функции U и U_i из уравнений Даламбера и из условия

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=\frac{1}{c^2}\varphi. \qquad (11.14)$$

Этим закончится определение коэффициентов $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ во втором приближении.

Уравнения (11.06) для S_i могут быть решены в явном виде. Представим правую часть их в виде квадратичной функции масс:

$$Q_i=\sum_a \gamma^2 m_a^2 Q_i^{(aa)}+\sum_{a\neq b} \gamma^2 m_a m_b Q_i^{(ab)} \tag{11.15}$$

и соответственно будем искать решение S_i в виде

$$S_i=\sum_a \gamma^2 m_a^2 S_i^{(aa)}+\sum_{a\neq b} \gamma^2 m_a m_b S_i^{(ab)}, \tag{11.16}$$

где отдельные члены удовлетворяют уравнениям

$$\Delta S_i^{(aa)}=Q_i^{(aa)}, \tag{11.17}$$

$$\Delta S_i^{(ab)}=Q_i^{(ab)}. \tag{11.18}$$

Вне масс правые части этих уравнений имеют вид

$$Q_i^{(aa)}=\frac{4\dot{a}_i}{|r-a|^4}-(x_i-a_i)(x_j-a_j)\frac{\dot{a}_j}{|r-a|^6}, \tag{11.19}$$

$$Q_i^{(ab)}=\left\{3\dot{a}_j\frac{(x_j-a_j)(x_i-b_i)}{|r-a|^3|r-b|^3}-4\dot{a}_j\frac{(x_i-a_i)(x_j-b_j)}{|r-a|^3|r-b|^3}+\right.$$
$$\left.+4\dot{a}_i\frac{(x_j-a_j)(x_j-b_j)}{|r-a|^3|r-b|^3}\right\}_{\text{sym}}, \tag{11.20}$$

где значок sym означает, что данное выражение нужно симметризовать относительно букв a, b.

Уравнения (11.17) и (11.18) мы будем решать тем же способом, какой мы применяли в § 10 к уравнениям (10.17) и (10.18) для V_{ik}.

При решении уравнения (11.18) мы пренебрежем тем, что первая часть его имеет вид (11.20) только в области вне масс. Мы будем, следовательно, искать такую функцию $S_i^{(ab)}$, которая удовлетворяет во всем пространстве уравнению с правой частью (11.20), остается всюду конечной и обращается на бесконечности в нуль. Величину $Q_i^{(ab)}$ можно написать в виде

$$Q_i^{(ab)}=\left\{3\dot{a}_j\frac{\partial^2}{\partial a_j\,\partial b_i}-4\dot{a}_j\frac{\partial^2}{\partial a_i\,\partial b_j}+4\dot{a}_i\frac{\partial^2}{\partial a_j\,\partial b_j}\right\}_{\text{sym}}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{|r-a|\,|r-b|}\right). \tag{11.21}$$

Отсюда на основании (10.24) заключаем, что искомое решение будет

$$S_i^{(ab)}=\left\{3\dot{a}_j\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_j\,\partial b_i}-4\dot{a}_j\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_i\,\partial b_j}+4\dot{a}_i\frac{\partial^2\ln s}{\partial a_j\,\partial b_j}\right\}_{\text{sym}}. \tag{11.22}$$

При условии $L\ll R$ это выражение будет вне масс мало отличаться от решения уравнения (11.18) с более точной правой частью.

В уравнении же (11.17) мы аналогичного пренебрежения сделать не можем и должны там заменить выражение (11.19) для правой части более точным выражением

$$Q_i^{(aa)} = \frac{1}{\gamma^2 m_a^2} u_a'^2 \left\{ 4\dot{a}_i - \frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)\dot{a}_j}{|r-a|^2} \right\}, \tag{11.23}$$

где, как и в (10.29), u_a есть потенциал, происходящий от массы m_a. Если мы перенесем начало координат в точку a и опустим значок a при $u'(r)$, то получим

$$\gamma^2 m_a^2 Q_i^{(aa)} = {}^7/_2 \dot{a}_i u'(r)^2 + \dot{a}_j \Delta v_{ij}, \tag{11.24}$$

где Δv_{ij} имеет значение (10.28). Мы можем, следовательно, воспользоваться готовыми результатами § 10 и написать решение в виде

$$S_i^{(aa)} = \frac{1}{\gamma^2 m_a^2} (a_j v_{ij} - 21 a_i q), \tag{11.25}$$

где q удовлетворяет уравнению (10.32) и имеет значение (10.34). Отсюда следует, что вне масс будет

$$S_i^{(aa)} = \frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)\dot{a}_k}{4|r-a|^4} + \frac{7}{4} \frac{\dot{a}_i}{|r-a|^2} -$$

$$- \frac{\lambda_a}{5} \left[\frac{(x_i - a_i)(x_k - a_k)}{|r-a|^5} - \frac{1}{3} \frac{\delta_{ik}}{|r-a|^3} \right] \dot{a}_k - \frac{22}{3} \frac{\varepsilon_a}{\gamma m_a^2} \frac{\dot{a}_i}{|r-a|}, \tag{11.26}$$

где величины λ_a и ε_a имеют те же значения, что и в формуле (10.41).

Искомое решение S_i уравнения (11.06) будет, таким образом, выражаться формулой (11.16), где $S_i^{(ab)}$ и $S_i^{(aa)}$ имеют значения (11.22) и (11.26). При этом в (11.26) можно опустить член, пропорциональный λ_a.

Зная S_i, мы можем перейти ко второму этапу нашей задачи и составить гармоническую функцию φ, определяемую равенством (11.13). Мы будем иметь

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i} + \frac{7}{4} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|r-a|^2} = \frac{22}{3} \frac{\varepsilon_a}{\gamma m_a^2} \frac{(x_i - a_i)\dot{a}_i}{|r-a|^3}, \tag{11.27}$$

$$\frac{\partial S_i^{(ab)}}{\partial x_i} + \frac{7}{4} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|r-a||r-b|} =$$

$$= \left\{ \frac{7}{2} \frac{\dot{a}_j (x_j - a_j)}{|r-a|^3 |a-b|} + \frac{1}{2} \dot{a}_j \frac{a_j - b_j}{|a-b|^3} \left[\frac{1}{|r-a|} - \frac{1}{|r-b|} \right] \right\}_{\text{sym}}. \tag{11.28}$$

Умножая (11.27) на $\gamma^2 m_a^2$ и (11.28) на $\gamma^2 m_a m_b$ и суммируя, получаем равенство, которое после чисто алгебраических преобразований может быть написано в виде

$$\frac{\partial S_i}{\partial t}+\frac{7}{4}\frac{\partial}{\partial t}(U^2)=-\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}\left(\dot{a}_i\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}-\frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}\right)_a+$$

$$+\frac{7}{2}\sum_a \gamma m_a \frac{\dot{a}_j(x_j-a_j)}{|r-a|^3}U^{(a)}(a)+\frac{22}{3}\sum_a \gamma\varepsilon_a\frac{a_j(x_j-a_j)}{|r-a|^3}. \tag{11.29}$$

В этой формуле значок a при скобке означает, что выражение в скобках нужно брать при $x_i = a_i$. Величина $U^{(a)}(r)$ определяется посредством равенства

$$U=u_a+U^{(a)}, \tag{11.30}$$

где u_a имеет прежнее значение потенциала массы m_a, так что U^a есть потенциал всех остальных масс, кроме массы m_a. Вне масс мы имеем

$$U^{(a)}(r)=\sum_b{}' \frac{\gamma m_b}{|r-b|}\quad (b\neq a). \tag{11.31}$$

Из сравнения этого выражения с (10.46) следует, что

$$U^{(a)}(a)=-\frac{\partial\Phi}{\partial m_a}, \tag{11.32}$$

$$m_a\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a=-\frac{\partial\Phi}{\partial a_i}. \tag{11.33}$$

Преобразуем коэффициент в первом члене правой части (11.29). Мы имеем

$$\frac{d}{dt}U^{(a)}(a)=\left(\dot{a}_i\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}+\frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}\right)_a. \tag{11.34}$$

Поэтому

$$\left(\dot{a}_i\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}-\frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}\right)_a=2\dot{a}_i\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a-\frac{d}{dt}U^{(a)}(a). \tag{11.35}$$

Но, в силу уравнений движения (10.53), которые могут быть написаны в виде

$$\ddot{a}_i\quad\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a, \tag{11.36}$$

предыдущее выражение равно

$$\left(\dot{a}_i \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} - \frac{\partial U^{(a)}}{\partial t}\right)_a = \frac{d}{dt}\{v_a^2 - U^{(a)}(a)\}, \tag{11.37}$$

где мы положили

$$v_a^2 = \dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2, \tag{11.38}$$

так что v_a есть скорость массы m_a. Пользуясь равенством (11.37), мы можем написать выражение для функции φ в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}(v_a^2 - U^{(a)}(a)) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma m_a \dot{a}_i}{|r-a|}(v_a^2 - U^{(a)}(a)) + \\ + \frac{7}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma m_a \dot{a}_i}{|r-a|}U^{(a)}(a) + \frac{22}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_a \frac{\gamma \varepsilon_a \dot{a}_i}{|r-a|}. \tag{11.39}$$

Согласно (11.14), мы должны иметь

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{1}{c^2}\varphi, \tag{11.14}$$

причем вне масс функции U и U_i удовлетворяют уравнению Даламбера и в первом приближении равны (7.11) и (7.12).

Всем этим условиям можно удовлетворить, положив

$$U = \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}\left\{1 + \frac{1}{2c^2}(v_a^2 - U^{(a)}(a))\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma m_a |r-a|, \tag{11.40}$$

$$U_i = \sum_a \frac{\gamma m_a \dot{a}_i}{|r-a|}\left\{1 + \frac{1}{2c^2}(v_a^2 + 6U^{(a)}(a))\right\} + \\ + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma m_a \dot{a}_i |r-a| + \frac{22}{3c^2}\sum_a \frac{\gamma \varepsilon_a \dot{a}_i}{|r-a|}. \tag{11.41}$$

Эти выражения определяются по существу однозначно. В самом деле, зная характер правых частей уравнений (9.10) и (11.03), которым величины U и U_i удовлетворяют внутри масс, можно заключить, что на больших расстояниях члены, убывающие быстрее, чем $|r-a|^{-1}$, будут весьма малы. Поэтому весь произвол сводится к добавке выражений вида

$$U' = \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\gamma\eta_a}{|r-a|}, \tag{11.42}$$

$$U'_i = \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\gamma\eta_a \dot{a}_i}{|r-a|}, \tag{11.43}$$

где η_a — произвольные постоянные, имеющие размерность энергии. Но добавка к (11.40) и (11.41) выражений вида (11.42) и (11.43) равносильна в данном приближении замене в (11.40) и (11.41) каждой массы m_a на $m_a + \eta_a/c^2$. Замена же эта, очевидно, сводится к изменению обозначений, так как добавку η_a/c^2 можно считать уже включенной в m_a. С получением U и U_i заканчивается задача определения величин $\mathfrak{g}^{00}$ и $\mathfrak{g}^{0i}$ вне масс, а именно: будет, как мы знаем,

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{7U^2}{c^5}, \tag{9.08}$$

где U имеет значение (11.40) и

$$\mathfrak{g}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5}, \tag{11.02}$$

причем U_i и S_i равны соответственно (11.41) и (11.16).

После того как получены все $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$, можно уже чисто алгебраическим путем определить обыкновенные контравариантные и ковариантные компоненты фундаментального тензора. На этих вычислениях мы останавливаться не будем. Отметим только равенство

$$\sqrt[4]{\frac{-g}{c^2}} = 1 + \frac{1}{c^2} \sum_a \frac{\gamma m_a}{|r-a|}\left(1 - \frac{v_a^2}{2c^2}\right) + \frac{1}{2c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_a \gamma m_a |r-a|, \tag{11.44}$$

из которого следует, что корень четвертой степени из абсолютной величины определителя g удовлетворяет вне масс уравнению Даламбера.

Если мы будем писать величину $\mathfrak{g}^{00}$ вместо (9.08) в виде дроби

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} \frac{(1+U/c^2)^3}{1-U/c^2}, \tag{11.45}$$

первые члены разложения которой совпадают с (9.08), то в случае одной массы мы получим строгое решение уравнений Эйнштейна, связанное простой подстановкой с решением Шварцшильда. В самом деле, для одной массы мы имеем

$$U = \frac{\gamma m}{r} \tag{11.46}$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{g}^{00} = \frac{1}{c} \frac{\left(1+\frac{\gamma m}{c^2 r}\right)^3}{\left(1-\frac{\gamma m}{c^2 r}\right)}. \tag{11.47}$$

Далее, $U_i = 0$, $S_i = 0$ и, следовательно,

$$\mathfrak{g}^{0i} = 0. \tag{11.48}$$

Наконец, из (10.03), (10.07), (10.16), (10.41) и (10.51), полагая для почти точечной массы $\lambda = 0$, получаем

$$\mathfrak{g}^{ik} = -c\delta_{ik} + \frac{\gamma^2 m^2}{c^3} \frac{x_i x_k}{r^4}. \tag{11.49}$$

Вычисление определителя g дает

$$\sqrt[4]{-g/c^2} = 1 + \frac{\gamma m}{c^2 r}, \tag{11.50}$$

так что формула (11.44) оказывается точной. Отсюда по формуле

$$\mathfrak{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} = -\min \mathfrak{g}^{\mu\nu} \tag{11.51}$$

будем иметь

$$g_{00} = c^2 \frac{r-a}{r+a}, \tag{11.52}$$

$$g_{ik} = -\left(1+\frac{a}{r}\right)^2 \delta_{ik} - \frac{r+a}{r-a} \frac{a^2}{r^4} x_i x_k, \tag{11.53}$$

где буква a обозначает гравитационный радиус:

$$a = \frac{\gamma m}{c^2}. \tag{11.54}$$

Кроме того, очевидно, будет

$$g_{0i} = 0. \tag{11.55}$$

Если мы введем сферические координаты, то величина ds^2 напишется в виде

$$ds^2 = c^2 \frac{r-a}{r+a} dt^2 - \frac{r+a}{r-a} dr^2 - (r+a)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2). \qquad (11.56)$$

Чтобы получить отсюда формулу Шварцшильда, достаточно ввести вместо r новую переменную $r + a = R$.

12. ТЕНЗОР МАТЕРИИ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. ЗАКОН ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Выведенные в предыдущих параграфах формулы для величин U_{ik}, U_i, U, удовлетворяющих, согласно (10.08), (11.03) и (9.10), уравнениям

$$\Delta U_{ik} = -4\pi\gamma c^2 T^{ik}, \qquad (12.01)$$

$$\Delta U_i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = -4\pi\gamma (c^2 + 4U) T^{0i}, \qquad (12.02)$$

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -4\pi\gamma \left(c^2 + \frac{1}{2} U\right) T^{00}, \qquad (12.03)$$

позволяют судить и о правых частях этих уравнений, т. е. о компонентах тензора материи $T^{\mu\nu}$. Для определения тензора материи во втором приближении мы имеем два условия: во-первых, равенство нулю его расходимости и, во-вторых, требование, чтобы на больших расстояниях от масс решения уравнений (12.01), (12.02) и (12.03) имели вид (10.51), (11.41) и (11.40).

Если подставить в общее выражение

$$J^\nu = \frac{\partial T^{\nu\alpha}}{\partial x_\alpha} + y_\alpha T^{\nu\alpha} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \qquad (12.04)$$

для расходимости симметричного тензора $T^{\mu\nu}$ вытекающие из (8.06) и (8.11) выражения для y_α и $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$, то мы получим

$$J^0 = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} T^{00}, \qquad (12.05)$$

$$J^i = \frac{\partial T^{i0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} - \frac{\partial U}{\partial x_i} T^{00}. \qquad (12.06)$$

Эти выражения уже были приведены нами в § 6.

Таким образом, первое из упомянутых условий означает, что правые части (12.05) и (12.06) должны равняться нулю.

Второе же условие фиксирует значение интеграла от правых частей (12.01), (12.02) и (12.03), взятого по объему каждой массы.

В самом деле, если мы имеем уравнение

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -4\pi\gamma\sigma, \tag{12.07}$$

где σ отлично от нуля только внутри масс, то решением его будет

$$f = \sum_a \frac{\gamma\mu_a}{|r-a|} + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_a \gamma\mu_a |r-a| + \ldots, \tag{12.08}$$

где

$$\mu_a = \int_{(a)} \sigma\, dx\, dy\, dz. \tag{12.09}$$

Применяя эту формулу к решению (10.51) уравнения (12.01), мы получим условие

$$\int_{(a)} c^2 T^{ik}\, dx\, dy\, dz = m_a \dot{a}_i \dot{a}_k + \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon_a. \tag{12.10}$$

Далее, из того обстоятельства, что выражение (11.41) есть решение уравнения (12.02), следует

$$\int_{(a)} (c^2 + 4U)\, T^{0i}\, dx\, dy\, dz = m_a \dot{a}_i \left\{1 + \frac{1}{2c^2}[v_a^2 + 6U^{(a)}]\right\} + \frac{22}{3c^2}\varepsilon_a \dot{a}_i. \tag{12.11}$$

Наконец, зная, что потенциал (11.40) удовлетворяет уравнению (12.03), заключаем

$$\int_{(a)} \left(c^2 + \frac{1}{2}U\right) T^{00}\, dx\, dy\, dz = m_a \left\{1 + \frac{1}{2c^2}[v_a^2 - U^{(a)}(a)]\right\}. \tag{12.12}$$

Чтобы составить тензор $T^{\mu\nu}$, удовлетворяющий всем этим условиям, введем вспомогательную функцию $\psi_a(r)$, определяемую равенством

$$\psi_a(r) = -3\int_r^\infty \rho_a(r)\frac{du_a}{dr}\, dr, \tag{12.13}$$

где ρ_a и u_a — плотность и потенциал массы m_a. Как видно из определения, функция ψ_a, подобно плотности ρ_a, отлична от нуля только внутри массы m_a, но в отличие от ρ_a эта функция непрерывна. Так как потенциал u_a связан с плотностью ρ_a уравнением Пуассона

$$\frac{d^2 u_a}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_a}{dr} = -4\pi\gamma\rho_a, \tag{12.14}$$

то функция (12.13) может быть представлена в виде

$$\psi_a(r)=\frac{1}{4\pi\gamma}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{du_a}{dr}\right)^2+6\int\limits_r^\infty \frac{1}{r}\left(\frac{du_a}{dr}\right)^2 dr\right]. \tag{12.15}$$

При помощи этой формулы легко показать, что

$$\int \psi_a\, dx\, dy\, dz=4\pi\int\limits_0^\infty \psi_a(r)\, r^2\, dr=\varepsilon_a, \tag{12.16}$$

где, согласно (10.38), ε_a есть абсолютная величина взаимной потенциальной энергии частиц, составляющих массу m_a. Так как ψ_a не отрицательна, а интеграл от нее дает ε_a, то функцию $\psi_a(r)$ можно условно назвать плотностью потенциальной энергии.

В дальнейшем мы будем разуметь под ψ_a без указания аргумента значение этой функции для аргумента $|r-a|$. При помощи этой функции мы можем написать следующие приближенные выражения для тензора материи:

$$T^{ik}=\frac{1}{c^2}\sum_a \rho_a\dot{a}_i\dot{a}_k+\frac{1}{3c^2}\,\delta_{ik}\sum_a \psi_a, \tag{12.17}$$

$$T^{00}=\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{U}{2c^2}\right)\sum_a \rho_a\left\{1+\frac{1}{2c^2}\left(v_a^2-U^{(a)}(r)\right)\right\}, \tag{12.18}$$

$$T^{0i}=\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{U}{2c^2}\right)\sum_a \rho_a\dot{a}_i\left\{1+\frac{1}{2c^2}\left(v_a^2-U^{(a)}(r)\right)\right\}+\frac{1}{3c^4}\sum_a \psi_a\dot{a}_i. \tag{12.19}$$

Соответственно точности наших вычислений, пространственные компоненты определены с точностью до величин четвертого порядка, а временная и смешанные компоненты — с точностью до величин шестого порядка (исключительно).

Для массы m_a, обладающей сферической симметрией, мы имеем

$$\int \rho_a U^{(a)}(r)\, d\tau=m_a U^{(a)}(a), \tag{12.20}$$

так как $U^{(a)}(r)$ есть функция гармоническая. При помощи этой формулы нетрудно проверить, что написанные выше выражения для тензора материи приводят к правильным выражениям для U, U_i, U_{ik} вне масс.

Остается вычислить расходимость тензора $T^{\mu\nu}$. По формулам (12.05) и (12.06) мы будем иметь

$$J^0=-\frac{1}{c^4}\sum_a \rho_a\dot{a}_i\left\{\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i}\right)_a\right\}, \tag{12.21}$$

$$J^i = -\frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \left\{ \frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} - \left(\frac{\partial U^{(a)}}{\partial x_i} \right)_a \right\}. \qquad (12.22)$$

В этих формулах выражение в фигурных скобках весьма мало. В самом деле, это есть разность между значением ускорения внешнего поля, взятым в данной точке внутри массы m_a, и его значением в ее центре. В силу сделанных нами предположений ($L \ll R$), этой величиной можно пренебречь и считать, что условие равенства нулю расходимости тензора материи выполняется с достаточной точностью.

Таким образом, нами установлены значения тензора материи внутри масс.

Рассмотрим теперь значение потенциала тяготения U на столь большом расстоянии от всех масс, что каждое из расстояний $|r - a|$ можно заменить расстоянием r до их центра тяжести. Для столь больших расстояний поправка на запаздывание уже не имеет того вида, какой указан в формуле (11.40); поэтому мы ее оставим пока в стороне. Отбрасывая последний член в (11.40) и заменяя там $|r - a|$ на r, мы получим

$$U = \frac{\gamma}{r} \left\{ \sum_a m_a + \frac{1}{c^2} \sum_a \left(\frac{1}{2} m_a v_a^2 - \frac{1}{2} m_a U^{(a)}(a) \right) \right\}. \qquad (12.23)$$

Вследствие (11.22) мы имеем

$$\sum_a m_a U^{(a)}(a) = -\sum_a m_a \frac{\partial \Phi}{\partial m_a} = -2\Phi, \qquad (12.24)$$

где Φ — потенциальная энергия системы. Поэтому, если мы положим

$$\sum_a m_a = M, \qquad (12.25)$$

$$\sum_a \frac{1}{2} m_a v_a^2 + \Phi = E, \qquad (12.26)$$

то формула (12.23) для U напишется в виде

$$U = \frac{\gamma}{r} \left\{ M + \frac{E}{c^2} \right\}. \qquad (12.27)$$

Но величина E есть полная энергия системы. Следовательно, она остается постоянной в силу уравнений движения, которые, как мы показали, являются следствием тех же уравнений Эйнштейна. Поэтому величина (12.27) строго удовлетворяет уравнению

Даламбера и отброшенная нами поправка на запаздывание фактически равна нулю.

Полученная формула для ньютонова потенциала тяготения показывает, что на весьма больших расстояниях от нашей системы тел притягивающее действие оказывает не только сумма масс отдельных тел, но также и их кинетическая и потенциальная энергия. При этом сумма масс комбинируется с полной энергией в сочетании $M + E/c^2$, соответствующем закону эквивалентности массы и энергии. Таким образом, и этот закон уже содержится по существу в уравнениях тяготения Эйнштейна.

13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В нашей работе мы получили приближенное решение уравнений тяготения Эйнштейна для распределения материи, подобного имеющему место в Солнечной системе. Наши основные физические предположения заключаются в следующем. Во-первых, пространство на бесконечности предполагается евклидовым. Во-вторых, распределение плотности в небесных телах предполагается сферически-симметричным. В-третьих, предполагается, что массы, линейные размеры, скорости и взаимные расстояния тел удовлетворяют неравенствам

$$a \ll L \ll R, \tag{13.01}$$

$$v^2 \ll c^2. \tag{13.02}$$

Первое из этих неравенств означает, что линейные размеры тел L весьма велики по сравнению с их гравитационными радиусами $a = \gamma m/c^2$, но в то же время достаточно малы по сравнению с их взаимными расстояниями R. Второе неравенство ($v^2 \ll c^2$) есть следствие первого ($a \ll L$), если к системе тел применима теорема вириала.

Таким образом, рассмотренная нами физическая задача не имеет никакого отношения к так называемой космологической проблеме [1]).

Примененный нами приближенный метод состоит формально в разложении по обратным степеням скорости света или, если выражаться более точно, по степеням лишенных размерности малых величин U/c^2 и v^2/c^2. Обе эти величины мы считаем одного порядка

---

[1]) Нам представляется, что при современном состоянии наших знаний всякая попытка рассматривать Вселенную в целом неизбежно должна носить спекулятивный характер. Поэтому мы совершенно не рассматриваем здесь связанных с этим вопросов, в частности предложенного Эйнштейном видоизменения его уравнений (космологический член), которое кажется нам мало обоснованным.

малости (так как v^2/c^2 содержит гравитационную постоянную γ в нулевой, а U/c^2 содержит ее в первой степени, то применяемое разложение не является, очевидно, разложением по степеням γ). Впрочем, так как мы шли не дальше второго приближения, то еще рано говорить о систематическом разложении по степеням тех или иных величин; например, в уравнениях (7.06) и (7.07) величины U и U_i сами содержат у нас параметр c^2.

Из перечисленных физических предположений наиболее существенными являются гипотеза о метрике на бесконечности и условие $a \ll L$, гарантирующее малость отклонений от евклидова характера метрики также и внутри тел. От остальных ограничений можно, вероятно, освободиться путем надлежащего обобщения метода. Условием $L \ll R$ мы пользовались только при вычислении второго приближения; что касается главных членов, соответствующих ньютоновой теории тяготения, то при наличии сферической симметрии масс их вид от этого условия не зависит.

В результате решения уравнений Эйнштейна мы получили значение фундаментального тензора во втором приближении. При этом оказалось, что условием разрешимости уравнений второго приближения являются уравнения движения Ньютона для координат масс, которые входят уже в первое приближение. Этот результат подтверждает правильность высказанного Эйнштейном утверждения, согласно которому уравнения движения уже содержатся в его уравнениях тяготения.

Дальнейшим существенным результатом можно считать установление связи между законом эквивалентности массы и энергии и уравнениями Эйнштейна. Как мы видели, в выражении для ньютонова потенциала на больших расстояниях от всех масс к сумме масс отдельных тел прибавляется их полная энергия, деленная на квадрат скорости света.

Определение фундаментального тензора во втором приближении для области вне масс позволило нам построить в том же приближении и тензор материи в функции от координат и времени. Это в свою очередь позволяет в принципе определить фундаментальный тензор также и внутри масс. Такое совместное рассмотрение областей вне и внутри масс (внешняя и внутренняя задачи) является необходимым для формулировки условий, обеспечивающих единственность решения.

При решении уравнений Эйнштейна мы пользовались координатной системой, которую мы называли гармонической, но которая заслуживает названия инерциальной. Нам представляется весьма вероятным, что из условий евклидовости на бесконечности и из условий гармоничности (в соединении, быть может, с некоторыми добавочными условиями типа условий излучения или четности относительно c) наша координатная система определяется однозначно, с точностью до обыкновенного преобразования Лоренца (одного и того же во всем пространстве). Это предположение подтверждается тем, что на всех этапах получаемое решение уравнений определялось по существу однозначно. Нам кажется, что возможность введения в общей теории относительности однозначным образом определенной инерциальной координатной системы заслуживает быть отмеченной.

В наших вычислениях мы шли не дальше второго приближения. Второе приближение занимает в теории особое положение. Это происходит прежде всего потому, что оно есть наивысшее приближение, в котором можно заменить обобщенный оператор Даламбера обыкновенным (евклидовым) оператором Даламбера. Такую замену можно в известном смысле толковать как замену реального риманова пространства фиктивным евклидовым пространством, в котором как что-то внешнее находится поле тяготения. На этом основании можно ожидать, что возможна такая приближенная теория тяготения, которая оперировала бы с евклидовым пространством, но основные результаты которой совпадали бы не только в первом (ньютоновом), но и во втором приближении с истинной (эйнштейновской) теорией тяготения. В этой приближенной теории основную роль, вероятно, играл бы скаляр U, удовлетворяющий вне масс уравнению Даламбера и совпадающий в первом приближении с ньютоновым потенциалом. При помощи этого скаляра можно было бы построить тензор

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi\gamma}\left\{\frac{\partial U}{\partial x_\mu}\frac{\partial U}{\partial x_\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right\}, \tag{13.03}$$

расходимость которого вне масс равна нулю. Этот тензор можно было бы толковать как тензор энергии гравитационного поля.

Впрочем, такого рода приближенная теория была бы, конечно, шагом назад по сравнению с теорией Эйнштейна и, разумеется, не могла бы претендовать на какое-либо принципиальное значение. Поэтому едва ли есть смысл ее разрабатывать. Мы упоминаем здесь о ней только в связи с наблюдаемым иногда стремлением (которого мы отнюдь не разделяем) уложить теорию тяготения в рамки евклидова пространства. Наши результаты показывают, что такого рода попытки могут иметь шансы на успех только при условии не идти дальше второго приближения.

В связи с этим сделаем одно замечание по поводу так называемого псевдотензора энергии, который по Эйнштейну должен соответствовать энергии гравитационного поля. Нам кажется, что самое понятие локализованной в пространстве энергии гравитационного поля есть понятие приближенное, допустимое лишь в рамках теории, оперирующей с евклидовым пространством и ограничивающейся вторым приближением. Но и в такой теории этой энергии должен соответствовать настоящий тензор [например, вида (13.03)], а не псевдотензор. Последний может играть лишь роль вспомогательной величины, которая сама по себе физического смысла не имеет, но облегчает вычисление некоторых интегралов, допускающих физическое толкование. В самом деле, совершенно очевидно, что величина, которая (подобно псевдотензору энергии) может быть сделана равной нулю в любой точке путем простого преобразования координат (переход к «свободно падающей» координатной системе), не может толковаться как распределенная в пространстве энергия какого-либо реально существующего поля.

Второе приближение, которым мы ограничились в нашей работе, замечательно еще и тем, что здесь не возникает затруднений, связанных с излучением. В данном приближении безразлично, брать ли при решении уравнения Даламбера запаздывающий потенциал или требовать, например, определенной четности искомых функций относительно c. Неоднозначность возникает здесь лишь при переходе к высшим приближениям. Поэтому мы и могли не касаться здесь вопросов излучения, выяснение которых представляет большой принципиальный интерес.

В настоящей работе второе приближение (т. е. то, которое позволяет заменить обобщенный оператор Даламбера обыкновенным) не использовано нами полностью. В самом деле, при решении уравнений для пространственных компонент $\mathfrak{g}^{ik-}$ мы отбросили те члены, которые еще могут быть сохранены при одновременном сохранении евклидова вида оператора Даламбера. Учет этих членов (который не связан, вероятно, ни с какими принципиальными затруднениями) должен дать поправки к ньютоновым уравнениям движения [1]).

Нам кажется, что как результаты нашей работы, так и вопросы, из нее возникающие, с несомненностью показывают, что эйнштейнова теория тяготения необычайно богата физическим содержанием. Раскрытие этого физического содержания должно превратить ее из теории по преимуществу формальной в теорию физическую.

ДОБАВЛЕНИЕ В КОРРЕКТУРЕ (АПРЕЛЬ 1939 Г.)

В новой своей работе [10], с которой мы ознакомились, уже когда настоящая статья была сдана в печать, Эйнштейн, Инфельд и Гофман рассматривают задачу, близкую к нашей, и выводят в явной форме уравнения движения из уравнений тяготения. Однако постановка этой задачи у названных авторов совершенно иная, чем у нас, а именно у них массы рассматриваются исключи-

---

[1]) Этому вопросу будет посвящена работа Н. М. Петровой.

тельно как точечные особенности. Точка зрения трех авторов примыкает, следовательно, к отмеченной нами в § 1 старой точке зрения Эйнштейна, согласно которой целью теории является объяснение элементарных частиц материи как особенных точек поля. Введение точечных особенностей влечет за собой ряд затруднений, связанных, в частности, с вопросом об однозначности решения,— затруднений, которые у нас избегнуты вследствие того, что мы рассматриваем протяженные массы.

В некоторых отношениях результаты работы трех авторов полнее наших (получены не только уравнения движения Ньютона, но и поправки к ним), но в других отношениях они менее полны: неполнота эта происходит главным образом от тех ограничений, которые связаны с заменой протяженных масс точечными. Очевидно, например, что при такой замене отпадает возможность определения тензора материи внутри масс. Кроме того, в статье трех авторов нет указания на связь закона эквивалентности массы и энергии с уравнениями тяготения. Что касается принятого способа вычислений, то наш способ, основанный на указанном в § 4 выборе независимых переменных и искомых функций, является, по-видимому, гораздо более простым. Вычисления трех авторов настолько сложны, что, по их словам, приводить эти вычисления в журнальной статье совершенно невозможно (желающим ознакомиться с ними авторы предлагают обращаться к секретарю Института в Принстоне, где хранится полная рукопись). Наши же вычисления сравнительно просты, и мы их привели с большой подробностью.

Различие в постановке задачи, в методах вычисления и в общем направлении исследования позволяет нам ограничиться здесь этим кратким разбором статьи трех авторов и не вносить никаких изменений в текст нашей статьи, которая, таким образом, печатается в том виде, в каком она была первоначально написана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, *Grommer J.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1927, 2 (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 198).
2. *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1927, 235 (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 211).
3. *Einstein A.*, *Rosen N.*, Phys. Rev., 48, 73 (1935) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 424).
4. *Einstein A.*, Physik und Realität, Journ. of the Franklin Inst., 221 (1936) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 200).
5. *Эддингтон А. С.*, Теория относительности, ГТТИ, 1934.
6. *De Donder*, La gravifique einsteinienne, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

7. *Lanczos K.*, Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die einsteinschen Gravitationsgleichungen, Phys. Zs., 23, № 24, 537 (15 XII 1922).
8. *Darmois G.*, Les équations de la gravitation einsteinienne, Mémorial des Sci. Math., Paris, 1927.
9. *Levi-Civita T.*, The Absolute Differential Calculus, London and Glasgow, 1927.
10. *Einstein A.*, *Infeld L.*, *Hoffmann B.*, The Gravitational Equations and the Problem of Motion, Ann. Math., 39 (№ 1), 65 (1938) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 450).

IV

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ ПО КОСМОЛОГИИ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АСТРОФИЗИКЕ

А. ЭЙНШТЕЙН

ВОПРОСЫ КОСМОЛОГИИ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ*

Известно, что дифференциальное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi K\rho \tag{1}$$

в совокупности с уравнением движения материальной точки не может вполне заменить теорию дальнодействия Ньютона. Необходимо добавить условие, что потенциал φ в пространственной бесконечности стремится к определенному пределу. Аналогично обстоит дело и в теории тяготения, следующей из общего принципа относительности; здесь также к дифференциальным уравнениям должны быть добавлены граничные условия для пространственной бесконечности, если мы на самом деле рассматриваем мир бесконечно протяженным в пространстве.

При рассмотрении задач, связанных с планетной системой, мы выбрали эти граничные условия, допустив, что можно выбрать

* Kosmologiche Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1917, Hf. 1, S. 142 (здесь с незначительными исправлениями перепечатывается перевод из книги: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 601—612).

такую координатную систему, в которой все потенциалы тяготения $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности становятся постоянными. Но априори отнюдь не очевидно, что при рассмотрении более значительных частей Вселенной можно пользоваться теми же самыми граничными условиями. Ниже будут изложены соображения, которые мы получили до настоящего времени по этому принципиально важному вопросу.

§ 1. ТЕОРИЯ НЬЮТОНА

Как известно, граничное условие Ньютона в форме существования постоянного предела для φ в пространственной бесконечности ведет к представлению о том, что плотность материи в бесконечности обращается в нуль. В самом деле, представим себе, что во Вселенной можно найти место, вокруг которого гравитационное поле материи, рассматриваемое в целом, обладает сферической симметрией (центр). Тогда из уравнения Пуассона следует, что средняя плотность ρ с увеличением расстояния r от центра должна стремиться к нулю быстрее, чем $1/r^2$, для того чтобы φ в бесконечности стремилось к некоторому пределу [1]). В этом смысле мир по Ньютону конечен, хотя и может обладать бесконечно большой общей массой.

Отсюда прежде всего следует, что излучение, испускаемое небесными телами, частично покинет мир Ньютона по радиальному от центра направлению, с тем чтобы бесследно затеряться в бесконечности. Не может ли произойти то же с целым небесным телом? Едва ли можно не допускать этого, поскольку из предположения о существовании конечного предела для φ в пространственной бесконечности следует, что обладающее конечной кинетической энергией небесное тело может достичь пространственной бесконечности, преодолев ньютоновские силы притяжения. Согласно статистической механике, такие события должны происходить до тех пор, пока общая энергия звездной системы достаточно велика, чтобы — при передаче ее одному небесному телу — последнее могло совершить путешествие в бесконечность, откуда оно никогда не сможет вернуться.

Можно было бы попытаться обойти эту своеобразную трудность, допустив, что указанный граничный потенциал имеет в бесконечности очень большое значение. Это было бы приемлемо, если бы изменение потенциала тяготения не обусловливалось самим небесным телом. В действительности мы с неизбежностью приходим к заключению, что наличие значительных разностей потенциалов гравитационного поля противоречит фактам. Напро-

[1]) Здесь ρ — средняя плотность материи, определенная для области пространства, большой по сравнению с расстоянием между соседними неподвижными звездами, но малой по сравнению с размерами всей звездной системы.

тив, разности потенциалов должны быть столь малого порядка, чтобы определяемые ими скорости звезд не превосходили фактически наблюдаемых скоростей.

Если больцмановский закон распределения молекул газа применить к звездам, рассматривая звездную систему как газ, находящийся в стационарном тепловом движении, то получается, что ньютоновская Вселенная вообще не могла бы существовать, так как конечной разности потенциалов между центром и бесконечностью соответствует конечное отношение плотностей. Следовательно, нулевая плотность на бесконечности влечет за собой нулевую плотность в центре.

Эти трудности, по-видимому, нельзя преодолеть, оставаясь в рамках теории Ньютона. Возникает вопрос, нельзя ли преодолеть их путем модификации теории Ньютона. Для этого прежде всего укажем путь, который не следует принимать слишком серьезно, так как он служит только для того, чтобы лучше уяснить последующие рассуждения. Вместо уравнения Пуассона напишем

$$\Delta\varphi - \lambda\varphi = 4\pi K\rho, \tag{2}$$

где λ представляет собой некоторую универсальную постоянную.

Если ρ_0 есть постоянная плотность распределения массы, то

$$\varphi = -\frac{4\pi K}{\lambda}\rho_0 \tag{3}$$

является решением уравнения (2). Это решение соответствует случаю равномерного пространственного распределения неподвижных звезд, причем плотность ρ_0 может равняться действительной средней плотности вещества в мировом пространстве. Это решение соответствует бесконечно протяженному пространству, в среднем равномерно заполненному веществом.

Если теперь предположить, что имеются местные неравномерности в распределении материи, не изменяющие среднего значения плотности распределения, то к постоянному значению (3) потенциала φ придется добавить дополнительную величину φ, которая вблизи более плотных масс будет тем более похожа на поле Ньютона, чем меньше $\lambda\varphi$ по сравнению с $4\pi K\rho$.

Такой мир не имел бы центра по отношению к гравитационному полю, и не было бы надобности допускать, что плотность уменьшается на бесконечности; наоборот, и средний потенциал, и средняя плотность были бы постоянны вплоть до бесконечности. При этом отмеченный конфликт между теорией Ньютона и статистической механикой здесь отсутствует. При постоянной (крайне малой) плотности материя находится в равновесии, не требуя внутренних сил (давления) для поддержания этого равновесия.

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ТРЕБУЕМЫЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В дальнейшем я предлагаю читателю последовать по пройденному мной самим извилистому и неровному пути, поскольку, как мне кажется, только так будет интересен конечный результат. Я пришел к убеждению, что уравнения гравитационного поля, которых я до сих пор придерживался, нуждаются еще в некоторой модификации, чтобы можно было на базе общей теории относительности избежать тех принципиальных трудностей, которые в предыдущем параграфе были указаны для теории Ньютона. Эта модификация полностью соответствует переходу от уравнения Пуассона (1) к уравнению (2) предыдущего параграфа. Тогда, наконец, получается, что граничные условия в пространственной бесконечности вообще отпадают, так как мировой континуум должен в отношении своих пространственных размеров рассматриваться как замкнутый континуум, имеющий конечный пространственный (трехмерный) объем.

Высказанное мной недавно мнение относительно граничных условий на пространственной бесконечности основано на следующих соображениях. В последовательной теории относительности нельзя определять инерцию по отношению к «пространству», но можно определять инерцию масс относительно друг друга. Поэтому, если я удаляю какую-нибудь массу на достаточно большое расстояние от всех других масс Вселенной, то инерция этой массы должна стремиться к нулю. Попытаемся сформулировать это условие математически.

Согласно общей теории относительности, импульс (с обратным знаком) определяется первыми тремя компонентами, а энергия — последней компонентой умноженного на $\sqrt{-g}$ ковариантного тензора

$$m\sqrt{-g}\, g_{\mu\alpha}\frac{dx_\alpha}{ds}, \tag{4}$$

причем, как всегда,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu. \tag{5}$$

В особенно наглядном случае, когда координатную систему можно выбрать так, чтобы гравитационное поле в каждой точке было пространственно изотропно, эта величина принимает более простой вид

$$ds^2 = -A\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + B dx_4^2.$$

Если одновременно

$$\sqrt{-g} = 1 = \sqrt{A^3 B},$$

то в случае малых скоростей из выражения (4) для компонент импульса в первом приближении имеем

$$m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_1}{dx_4}, \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_2}{dx_4}, \quad m\frac{A}{\sqrt{B}}\frac{dx_3}{dx_4},$$

и для энергии (в случае покоя)

$$m\sqrt{B}.$$

Из выражений для импульса следует, что $m\frac{A}{\sqrt{B}}$ играет роль инертной массы. Так как m — константа, связанная с точечной массой и не зависящая от положения этой массы, то при соблюдении условия, установленного для определителя, это выражение в пространственной бесконечности только тогда обращается в нуль, когда A стремится к нулю, а B — к бесконечности. Таким образом, подобное поведение коэффициентов $g_{\mu\nu}$ представляется нам как бы следствием относительности всякой инерции. Отсюда следует также и то, что потенциальная энергия $m\sqrt{B}$ точки в бесконечности становится бесконечно большой. Таким образом, точечная масса никогда не может покинуть систему; более подробное исследование показывает, что то же самое справедливо и для лучей света. Вселенная при таком поведении потенциала гравитационного поля в бесконечности не подвергалась бы, следовательно, опасности стать пустой, на что указывалось при обсуждении ньютоновской теории.

Заметим, что упрощенные допущения о гравитационном потенциале, положенные в основу этих рассуждений, сделаны только ради большей наглядности. Для описания поведения $g_{\mu\nu}$ на бесконечности можно найти общую формулировку, которая выразит суть дела без каких-либо ограничивающих допущений.

Пользуясь дружеской помощью математика Громмера, я исследовал центрально-симметричное статическое гравитационное поле, которое выражается на бесконечности указанным образом. Из заданного потенциала гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ на основе уравнений гравитационного поля был вычислен тензор $T^{\mu\nu}$ энергии вещества. Но при этом оказалось, что для звездной системы подобного рода граничные условия никак не могут быть приняты, как недавно вполне справедливо было отмечено также астрономом де Ситтером.

В самом деле, контравариантный тензор $T^{\mu\nu}$ энергии материи имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \rho\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds},$$

где ρ означает естественно измеренную плотность материи.

При надлежащем выборе координатной системы скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому ds можно заменить величиной $\sqrt{g_{44}}\,dx_4$. Отсюда видно, что все компоненты тензора $T^{\mu\nu}$ очень малы по сравнению с последней его компонентой, T^{44}. Но это условие никак нельзя было совместить с выбранными граничными условиями. После всего изложенного этот результат не вызывает удивления. Факт незначительности скоростей звезд позволяет сделать заключение, что всюду, где имеются неподвижные звезды, потенциал гравитационного поля (в нашем случае $\sqrt{B}$) не может быть существенно больше, чем у нас; это следует из статистических соображений так же, как и в теории Ньютона. Во всяком случае, наши вычисления привели меня к убеждению, что подобные условия вырождения для $g_{\mu\nu}$ в пространственной бесконечности не могут быть постулированы.

После неудачи этой попытки прежде всего возникают две возможности: а) требовать, как в случае планетной проблемы, чтобы на пространственной бесконечности $g_{\mu\nu}$ при надлежащем выборе системы координат стремились к значениям

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix},$$

или б) не устанавливать для пространственной бесконечности никаких всегда справедливых граничных условий; в каждом отдельном случае следует особо задавать $g_{\mu\nu}$ на пространственной границе рассматриваемой области так же, как мы привыкли это делать до сих пор, задавая начальные условия.

Возможность «б» не соответствует какому-либо решению проблемы и означает отказ от ее решения. Правомерность этой точки зрения нельзя отрицать; в настоящее время ее придерживается де Ситтер [1]). Но я должен признаться, что мне трудно было бы пойти на столь большие уступки в этом принципиальном вопросе. С этим я соглашусь только в том случае, если все усилия найти удовлетворительные граничные условия окажутся тщетными.

Возможность «а» неудовлетворительна во многих отношениях. Во-первых, такие граничные условия предполагают определенный выбор системы отсчета, что несовместимо с духом принципа относительности. Во-вторых, при таком рассмотрении приходится отказаться от требования относительности инерции. В самом деле, инерция материальной точки с естественно измеренной массой m зависит от $g_{\mu\nu}$, но последние лишь очень мало отличаются от

[1]) *de Sitter W.*, Akad. van Wetensch te Amsterdam, 8 ноября 1916.

постулированных значений на пространственной бесконечности. Благодаря этому, хотя материя (находящаяся на конечном расстоянии) и *влияет* на инерцию, но все-таки не *обусловливает* последнюю. Если бы существовала только одна материальная точка, то она, согласно этому представлению, обладала бы почти такой же инерцией, как и в том случае, когда она окружена всеми прочими массами нашего реального мира. Наконец, против этого представления нужно выдвинуть те же статистические возражения, которые выше были указаны для теории Ньютона.

Из сказанного до сих пор следует, что мне не удалось установить граничные условия для пространственной бесконечности. Тем не менее существует еще одна возможность, позволяющая обойтись без отказа, упомянутого в «б». Именно, если бы можно было рассматривать мир в его пространственной протяженности как замкнутый континуум, то вообще отпала бы необходимость в подобного рода граничных условиях. Из дальнейшего будет видно, что и требование общего принципа относительности, и факт незначительности скоростей звезд совместимы с гипотезой пространственной замкнутости Вселенной; правда, для осуществления этого необходимо некоторое обобщение уравнений гравитационного поля.

§ 3. ПРОСТРАНСТВЕННО ЗАМКНУТЫЙ МИР С РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАТЕРИЕЙ

Согласно общей теории относительности, метрический характер (кривизна) четырехмерного пространственно-временного континуума определяется в каждой точке находящейся в ней материей и состоянием последней. Поэтому вследствие неравномерности распределения материи метрическая структура этого континуума должна быть крайне запутанной. Но если говорить о структуре пространства в целом, то мы можем представить материю как бы равномерно распределенной по очень большой области пространства, так что ее плотность распределения становится чрезвычайно медленно меняющейся функцией. В данном случае мы поступаем так же, как геодезисты, которые крайне сложную в деталях поверхность Земли заменяют приближенно эллипсоидом.

Самое важное из всего, что нам известно из опыта о распределении материи, заключается в том, что относительные скорости звезд очень малы по сравнению со скоростью света. Поэтому я полагаю, что на первых порах в основу наших рассуждений можно положить следующее приближенное допущение: имеется координатная система, относительно которой материю можно рассматривать находящейся в течение продолжительного времени в покое. По отношению к этой координатной системе контравариантный тензор материи $T^{\mu\nu}$, в силу (5), имеет следующий простой вид:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{matrix}. \tag{6}$$

Скаляр ρ (средней) плотности распределения априори может быть функцией пространственных координат. Однако если мы предполагаем, что мир пространственно замкнут, то естественно сделать гипотезу, что ρ не зависит от места; эту гипотезу мы и положим в основу дальнейших рассуждений.

Что касается гравитационного поля, то из уравнения движения материальной точки

$$\frac{d^2x_\nu}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\\ \nu\end{matrix}\right\}\frac{dx_\alpha}{ds}\frac{dx_\beta}{ds}=0$$

следует, что материальная точка в статическом гравитационном поле может находиться в покое только тогда, когда g_{44} не зависит от места. Так как, кроме того, мы для всех величин предполагаем независимость от временной координаты x_4, то для искомого решения можем потребовать, чтобы для всех x_ν

$$g_{44}=1. \tag{7}$$

Далее, как это обычно делается в статических задачах, нужно положить, что

$$g_{14}=g_{24}=g_{34}=0. \tag{8}$$

Теперь остается еще определить те компоненты потенциала гравитационного поля, которые характеризуют чисто пространственно-геометрические свойства нашего континуума (g_{11}, g_{12}, . . ., g_{33}). Из нашего допущения о равномерности распределения масс, создающих поле, следует, что и кривизна искомого метрического пространства должна быть постоянной. Таким образом, при заданном распределении масс искомый замкнутый континуум (x_1, x_2, x_3 при постоянном x_4) должен быть сферическим пространством.

К такому пространству мы приходим, например, следующим образом. Будем исходить из евклидова пространства (ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4) четырех измерений с линейным элементом $d\sigma$; пусть тогда

$$d\sigma^2=d\xi_1^2+d\xi_2^2+d\xi_3^2+d\xi_4^2. \tag{9}$$

Рассмотрим в этом пространстве гиперповерхность

$$R^2=\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2, \tag{10}$$

где R — постоянная. Точки этой гиперповерхности образуют трехмерный континуум — сферический объем с радиусом кривизны R.

Четырехмерное евклидово пространство, из которого мы исходили, служит только для удобного определения нашей гиперповерхности. Нас интересуют только точки этой поверхности, метрические свойства которой должны совпадать со свойствами физического пространства с равномерным распределением материи. Для описания этого трехмерного континуума можно пользоваться координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 (проекции на гиперплоскость $\xi_4 = 0$), так как, в силу (10), можно ξ_4 выразить через ξ_1, ξ_2, ξ_3. Исключая ξ_4 из (9), получаем следующее выражение для линейного элемента сферического пространства:

$$\begin{gathered} d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}\, d\xi_\mu\, d\xi_\nu, \\ \gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\xi_\mu \xi_\nu}{R^2 - \rho^2}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $\delta_{\mu\nu} = 1$, если $\mu = \nu$, и $\delta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$, а $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Выбранные координаты удобны, когда речь идет об исследовании окрестности точки $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

Итак, нам дан теперь также и линейный элемент искомого четырехмерного пространственно-временного мира. Очевидно, для потенциалов $g_{\mu\nu}$, у которых оба индекса отличаются от 4, мы должны написать

$$g_{\mu\nu} = -\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{x_\mu x_\nu}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}\right). \tag{12}$$

Это равенство вместе с (7) и (8) вполне определяет свойства масштабов, часов и лучей света в рассматриваемом четырехмерном мире.

§ 4. О ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ЧЛЕНЕ, КОТОРЫЙ НЕОБХОДИМО ВВЕСТИ В УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Уравнения гравитационного поля, предложенные мной для произвольно выбранной системы координат, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &G_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right), \\ &\text{где} \\ &G_{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha \\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta \\ \alpha\end{Bmatrix} + \\ &\qquad\qquad + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Система уравнений (13) никогда не будет удовлетворена, если вместо $g_{\mu\nu}$ подставить их значения из (7), (8) и (12), а вместо (контравариантного) тензора энергии материи — значения (6). В следующем параграфе будет показано, как удобнее всего произвести подобный расчет. Таким образом, если бы была уверенность в том, что только уравнения поля (13), которые я пока не использовал, согласуются с общим принципом относительности, следовало бы, конечно, заключить, что теория относительности несовместима с гипотезой пространственной замкнутости мира.

Однако система уравнений (13) допускает одно весьма простое обобщение, совместимое с постулатом относительности и полностью аналогичное данному выше в виде уравнения (2) обобщению уравнения Пуассона. В самом деле, к левой части уравнения поля (13) мы можем прибавить фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$, умноженный на неизвестную пока универсальную константу $-\lambda$, не нарушая этим общей ковариантности, т. е. вместо уравнения поля (13) положить

$$G_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}=-\varkappa\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{13a}$$

Это уравнение поля при достаточно малом значении λ во всяком случае тоже совместимо с результатами наблюдений над Солнечной системой. Оно удовлетворяет также законам сохранения импульса и энергии; в самом деле, вместо уравнения (13) можно получить уравнение (13а), если в принцип Гамильтона, гарантирующий правильность этих законов, вместо скаляра тензора Римана подставить этот же скаляр, умноженный на универсальную постоянную. Ниже будет показано, что уравнение поля (13а) совместимо с нашими предположениями относительно поля и материи.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЯ. РЕЗУЛЬТАТ

Так как все точки нашего континуума равноценны, то достаточно выполнить вычисление для одной точки, например для точки с координатами $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

При этом для $g_{\mu\nu}$ в уравнении (13а) всюду, где $g_{\mu\nu}$ не дифференцированы или же продифференцированы только один раз, должны быть подставлены значения

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Таким образом, получается сначала

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{bmatrix}\mu\nu\\1\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{bmatrix}\mu\nu\\2\end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3}\begin{bmatrix}\mu\nu\\3\end{bmatrix} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x_\mu \partial x_\nu}.$$

Приняв во внимание (7), (8) и (13), легко найдем, что все уравнения (13а) удовлетворяются, если выполнены следующие два соотношения:

$$-\frac{2}{R^2} + \lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2}, \qquad -\lambda = -\frac{\varkappa\rho}{2},$$

или

$$\lambda = \frac{\varkappa\rho}{2} = \frac{1}{R^2}. \tag{14}$$

Итак, новая введенная нами универсальная константа λ определяется, если известны средняя плотность распределения ρ, сохраняющаяся в состоянии равновесия, радиус R сферического пространства и его объем $2\pi^2R^3$. Полная масса M Вселенной, по нашему представлению, конечна и равняется

$$M = \rho\cdot 2\pi^2R^3 = 4\pi^2\frac{R}{\varkappa} = \frac{\sqrt{32}\,\pi^2}{\sqrt{\varkappa^3\cdot\rho}}. \tag{15}$$

Теоретическое представление о реальном мире, согласно нашим рассуждениям, было бы следующим. Характер кривизны пространства в соответствии с распределением материи зависит от места и времени; однако это пространство в целом можно приближенно представить в виде сферического пространства. Во всяком случае, это представление логически непротиворечиво и с точки зрения общей теории относительности является наиболее естественным. Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, приемлемо ли это представление с точки зрения современных астрономических знаний. Правда, для того чтобы прийти к этому непротиворечивому представлению, мы должны были все же ввести новое обобщение уравнений гравитационного поля, неоправдываемое нашими действительными знаниями о тяготении. Необходимо, однако, отметить, что положительная кривизна пространства, обусловленная находящейся в нем материей, получается и в том случае, когда указанный дополнительный член не вводится; последний нам необходим для того, чтобы обеспечить возможность квазистатического распределения материи, соответствующего фактическим малым скоростям звезд.

ПАМЯТИ ДЕ СИТТЕРА

Профессор де Ситтер был одним из наиболее выдающихся ученых в области астрономии. Кроме того, он внес важный вклад в теорию относительности. Например, с помощью спектроскопических наблюдений за двойными звездами он показал, что скорость света не зависит от динамического состояния источника света. Де Ситтер внес значительный вклад в решение важной космологической проблемы о структуре пространства в теории относительности. Его смерть является тяжелой утратой для астрономии и всей научной жизни Голландии.

Принстон, шт. Нью-Джерси, 21 ноября.

(А. Эйнштейн, New York Times, 22 ноября 1934) [1]

---

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. IV, «Наука», М., 1965, стр. 195.

В. ДЕ СИТТЕР

О ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯХ ДЛЯ АСТРОНОМИИ. СТАТЬЯ III*

Содержание статьи III [1])

1. Об относительности инерции. Новый вид уравнений поля. Два решения этих уравнений: А и Б.
2. О пространстве с постоянной положительной кривизной. Сравнение систем А и Б.
3. Лучи света и параллакс в двух системах. Гиперболическое пространство.
4. Движение материальной частицы в поле инерции двух систем. Дальнейшее сравнение двух систем.
5. Дифференциальные уравнения для гравитационного поля Солнца. Приближенное интегрирование этих уравнений.
6. Оценки R в системе А.
7. Оценки R в системе Б.

1. В общей теории относительности Эйнштейна нет особой разницы между гравитацией и инерцией. Совместное действие той и другой описывается фундаментальным тензором $g_{\mu\nu}$, и какую часть его относить к гравитации, а какую к инерции — это зависит только от нас. Мы могли бы отбросить одно из этих двух слов и называть все только одним из них. Тем не менее нам удобнее будет по-прежнему проводить такое различие. Часть компонент $g_{\mu\nu}$ можно прямо связать с действием известных материальных тел, и эту часть принято называть «гравитацией», а остальное — инерцией. Если мы затем примем в качестве системы отсчета три прямоугольные декартовы пространственные координаты и время, умноженное на c (скорость света в вакууме), то мы знаем, что в той области четырехмерного пространства-времени, которая

---

* *de Sitter W.*, On Einstein's Theory of Gravitation, and its Astronomical Consequences, Third Paper, Monthley Notices Roy. Astron. Soc., 78, 3 (1917). (Статья печатается не полностью.— *Прим. ред.*)

[1]) Данная статья посвящена вопросам, которые рассматривались в работах [3—5]. Здесь используются те же обозначения, что и в первых двух статьях [1, 2]. Напомним, что $\delta_{\mu\mu} = 1$, $\delta_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$ и что Σ обозначает сумму от 1 до 4, а Σ' — от 1 до 3.

доступна нашим наблюдениям, компоненты $g_{\mu\nu}$ поля инерции с определенной точностью таковы:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}. \qquad (1)$$

В непосредственной близости от нас, в пределах Солнечной системы, точность весьма высока: порядка восьми десятичных знаков. Если же двигаться дальше в пространстве или во времени (или и в том и в другом вместе), то точность понизится: на расстоянии миллиона световых лет мы, пожалуй, сможем гарантировать точность лишь до двух десятичных знаков [1]). Каковы $g_{\mu\nu}$ в тех областях пространства и времени, которые недоступны пока нашему наблюдению, мы не знаем, и мы никогда не будем знать, каковы они на бесконечности (пространственной или временно́й). Следовательно, все предположения о значениях $g_{\mu\nu}$ на бесконечности представляют собой экстраполяцию, которую мы вольны проводить в соответствии с теоретическими или философскими требованиями.

Экстраполяция, которая представляется наиболее естественной и которая неявно принята в ньютоновской механике, заключается в том, что значения всех компонент $g_{\mu\nu}$ принимают равными (1) для всех расстояний и времен вплоть до бесконечности. В статье II [2, стр. 181—183] было указано на то, что в этой теории инерция не является относительной. Значения (1) не инвариантны: граничные значения $g_{\mu\nu}$ на бесконечности неодинаковы в разных системах координат. Поэтому Эйнштейн и другие исследователи попытались найти другую экстраполяцию, которая в близкой окрестности Солнца давала бы с точностью, требуемой нашими наблюде-

---

[1]) Имеется два критерия, которые позволяют нам судить о компонентах фундаментального тензора на больших расстояниях от нас. Частота света пропорциональна $\sqrt{g_{44}}$. Следовательно, те объекты, в спектрах которых мы в состоянии идентифицировать определенные спектральные линии, должны находиться в той области пространства, где g_{44} все еще порядка единицы. В то же время движение материальных частиц зависит от всех компонент $g_{\mu\nu}$. Мы знаем, что относительные скорости звезд малы. Отсюда мы делаем вывод, что малы и их ускорения. Пусть скорости будут порядка α, компонента g_{44} — порядка γ, а $g_{ij} + \delta_{ij}$ — порядка β $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда ускорения содержат члены порядка γ, γ^2, $\beta\gamma$, $\alpha^2\gamma$, $\alpha^2\beta$ и т. д., но не содержат членов порядка β. Поэтому здесь мы также можем быть уверены лишь в малости γ, но не β. В пределах Солнечной системы дело обстоит иначе, поскольку у нас есть не только статистические данные о скоростях, но мы знаем и сами ускорения, при этом точность данных наших наблюдений такова, что позволяет определять величины второго порядка. Следовательно, мы можем быть уверены в значениях g_{ij} с точностью до величин первого порядка, а в g_{44} — до второго, при этом первый порядок соответствует приблизительно 10^{-8}.

ниями, для компонент $g_{\mu\nu}$ значения (1), а на бесконечности — набор значений, который был бы одинаковым во всех системах отсчета.

Компоненты $g_{\mu\nu}$ определяются из уравнений поля, которые в эйнштейновской теории 1915 г. имеют вид

$$G_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \varkappa g_{\mu\nu} T, \tag{2}$$

или

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G = -\varkappa T_{\mu\nu}, \tag{2'}$$

и

$$G = \varkappa T.$$

Если выбрана система отсчета для пространственных и временных переменных, то из этих уравнений можно получить компоненты $g_{\mu\nu}$ с точностью до постоянных интегрирования или граничных условий на бесконечности. Таким образом, лишь отклонения фактических значений $g_{\mu\nu}$ от этих значений на бесконечности обязаны воздействию масс (matter), причем механизм этого воздействия определяется уравнениями (2) или (2′). Если бы все компоненты $g_{\mu\nu}$ были равны нулю на бесконечности, то мы с полным правом могли бы сказать, что не только гравитация, но и *вся* инерция обусловлена таким воздействием. Подобные соображения легли в основу постулата о том, что все компоненты $g_{\mu\nu}$ равны нулю на бесконечности. Я назвал его *математическим постулатом об относительности инерции.*

Если же убрать все массы, кроме одной материальной частицы, будет ли она обладать инерцией? Школа Маха требует ответить: *Нет.* Но если под «всеми массами» подразумевать все вещество, известное нам: звезды, туманности, скопления и т. п.,— то наши наблюдения весьма определенно дают нам ответ: «*Да*». Поэтому последователи Маха[1]) вынуждены предполагать, что существует еще какое-то вещество. Но это вещество нужно нам лишь для одной цели: чтобы мы могли предположить, что его нет, и утверждать, что тогда не будет и инерции. Такую точку зрения, которая отрицает логическую возможность существования мира без массы, я называю *материальным постулатом относительности инерции.* Вводимую в соответствии с ним гипотетическую массу я называю *мировой массой.* Эйнштейн первоначально предполагал, что желаемый эффект мог бы быть вызван огромными массами, находящимися на очень больших расстояниях. Но теперь он убедился, что это невозможно. В решении, предлагаемом им в настоящее

[1]) Сам Мах еще полагал, что достаточно было бы неподвижных звезд. Но это не так.

время, мировая масса не сосредоточена на границе Вселенной, а распределена по всему миру, который конечен, хотя и неограничен. Ее плотность (в естественных единицах измерения), определяемая в достаточно больших пространственных областях, постоянна. Локально же ее распределение может быть весьма неоднородным. Обычная гравитирующая масса по своей природе не отличается существенно от мировой массы. Обычное вещество: Солнце, звезды и т. п. — это лишь конденсированные состояния мировой массы, и можно, хотя и не обязательно, принять, что вся мировая масса сконденсирована подобным образом. В такой теории «инерция» обусловлена всей мировой массой, а «гравитация» — локальными отклонениями ее от однородности.

В новом решении Эйнштейна трехмерный мир не бесконечен, а сферичен [1]). Поэтому не требуется уже никаких граничных условий на бесконечности. С точки зрения теории относительности кажется на первый взгляд лишенным смысла говорить, что мир *конечен*, поскольку путем преобразования координат его можно сделать бесконечным, евклидовым или гиперболическим. Но такие преобразования оставляют неизменным инвариант G и, следовательно, после перехода к евклидовым или гиперболическим координатам мир все же остается конечным и сферическим в естественных единицах измерения. Длина полуоси x_1 в естественных единицах измерения равна

$$L_1 = \int_0^\infty \sqrt{-g_{11}}\, dx_1.$$

Если она должна быть конечной, то величина g_{11} должна обращаться в нуль при $x_1 = \infty$; и, наоборот, если компонента g_{11} обращается при $x_1 = \infty$ в нуль достаточно высокого порядка, то величина L_1 конечна. Очевидно, что условие равенства нулю компонент $g_{\mu\nu}$ на бесконечности эквивалентно конечности мира в естественных единицах измерения.

Но оказалось, что компоненты $g_{\mu\nu}$ этого конечного мира не удовлетворяют уравнениям (2). Поэтому Эйнштейн вынужден был добавить в уравнения (2) новый член, после чего они приняли следующий вид:

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\varkappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T, \tag{3}$$

или

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (G - 2\lambda) = -\varkappa T_{\mu\nu} \tag{3'}$$

[1]) Или эллиптичен, см. ниже пункт 2.

откуда мы легко находим, что

$$G - 4\lambda = \varkappa T. \tag{4}$$

Если положить

$$G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu},$$

то мы получим

$$G' = G - 4\lambda.$$

Поэтому уравнения (3) и (3′) получатся, если в уравнениях (2) или (2′) заменить величины $G_{\mu\nu}$ и G величинами $G'_{\mu\nu}$ и G'. Следовательно, уравнения (3) можно получить из обобщенного принципа Гамильтона [1]), если положить

$$H_3 = \int \sqrt{-g}\,(G - 4\lambda)\,d\tau.$$

Таким образом, и после введения λ остаются справедливыми все законы сохранения, которые следуют из принципа Гамильтона.

Кривизна четырехмерного пространства-времени пропорциональна G. В новой теории имеем $G = \varkappa T + 4\lambda$; поэтому, даже если бы массы не было ($T = 0$), эта кривизна была бы отлична от нуля.

Как уже упоминалось, согласно эйнштейновскому решению уравнений (3), существует «мировая масса», заполняющая всю Вселенную. Но этим уравнениям можно удовлетворить и без такой гипотетической мировой массы. Тогда, конечно, не выполняется «материальный постулат об относительности инерции», но выполняется «математический постулат», в котором нет упоминаний о массе, а содержится лишь требование об обращении в нуль компонент $g_{\mu\nu}$ на бесконечности. Это требование выполняется благодаря введению λ-члена, а не действию массы мира, которая с такой точки зрения не играет никакой роли.

Если пренебречь давлениями и другими внутренними силами и предположить, что все массы покоятся, то тензор $T_{\mu\nu}$ примет вид

$$T_{44} = g_{44}\rho, \quad \text{все остальные } T_{\mu\nu} = 0, \tag{5}$$

где ρ — плотность, выраженная в естественных единицах измерения. Можно положить

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \tag{6}$$

где ρ_0 — средняя плотность мировой массы. Если величина ρ_0 положительна, то величина ρ_1 может быть и положительной, и отрицательной, но в последнем случае она не должна численно превышать ρ_0.

[1]) См. статью I [1, стр. 707].

Если мы хотим пренебречь гравитацией, то нужно отбросить ρ_1 и положить плотность ρ_0 постоянной. Тогда уравнения (3) примут вид [1])

$$G_{ij} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\rho_0\right) g_{ij} = 0,$$
$$G_{44} - \left(\lambda + \frac{1}{2}\varkappa\rho_0\right) g_{44} = -\varkappa\rho_0 g_{44}. \tag{7}$$

Им удовлетворяют компоненты $g_{\mu\nu}$, задаваемые следующим линейным элементом:

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2] + c^2 dt^2, \tag{8А}$$

если

$$\varkappa\rho_0 = 2\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{R^2}. \tag{9А}$$

Таково новое выражение Эйнштейна.

Этим уравнениям удовлетворяет также выражение

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2] + \cos^2 \frac{r}{R} c^2 dt^2, \tag{8Б}$$

если

$$\rho_0 = 0, \quad \lambda = \frac{3}{R^2}; \tag{9Б}$$

и, конечно, выражение

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2] + c^2 dt^2, \tag{8В}$$

если

$$\rho_0 = 0, \quad \lambda = 0. \tag{9В}$$

Последнее решение (В) дает значения компонент $g_{\mu\nu}$, соответствующие прежнему варианту теории относительности, т. е. ньютоновской теории инерции. Трехмерное пространство здесь евклидово, а в случаях А и Б оно обладает постоянной положительной кривизной. В случае А у нас имеется мировая масса; в случаях Б и В у нас $\rho_0 = 0$: гипотетическая мировая масса отсутствует.

2. Если в формулах (8А) и (8Б) положить

$$r = R\chi, \tag{10}$$

то трехмерный элемент длины примет вид

$$d\sigma^2 = R^2\{d\chi^2 + \sin^2\chi\, [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2]\}. \tag{11}$$

---

[1]) Ниже, в пункте 5, эти уравнения будут преобразованы дальше.

Это элемент длины трехмерного пространства с постоянной положительной кривизной, которая равна

$$\varepsilon = \frac{1}{R^2}.$$

Возможны два типа пространств с постоянной положительной кривизной: сферическое пространство, или пространство Римана [6], и эллиптическое пространство, которое было исследовано Ньюкомом [7]. В сферическом пространстве все прямые линии, начинаясь в какой-либо точке, снова пересекаются в «антиподной» точке, которая находится от первой точки на расстоянии πR, измеренном вдоль одной из этих прямых. В эллиптическом пространстве любые две прямые линии не могут иметь более одной общей точки. В обоих типах пространств прямые линии замкнуты: их полная длина равна $2\pi R$ в сферическом пространстве и πR в эллиптическом. Наибольшее расстояние между двумя точками в сферическом пространстве равно πR, и имеется лишь одна так называемая «антиподная точка», удаленная на такое расстояние от данной точки. В эллиптическом пространстве наибольшим возможным расстоянием будет $^1/_2\pi R$ и все точки, находящиеся на этом расстоянии от данной точки, лежат на прямой линии — «полярной линии» данной точки. Оба пространства конечны. Полный объем сферического пространства равен $2\pi^2R^3$, а эллиптического π^2R^3.

Эйнштейн говорит лишь о сферическом пространстве, которое из-за наличия двумерного аналога — сферы — легче воспринимается нашим воображением. Но в действительности более простой случай — эллиптическое пространство, и оно более предпочтительно в качестве пространства для нашего физического мира [1]). К тому же в сферическом пространстве возникли бы трудности, на которые будет указано ниже.

Мы можем вместо координат r, ψ, θ ввести другие координаты, посредством которых эллиптическое или сферическое пространство проектировалось бы на евклидово или гиперболическое пространство. Путем преобразования

$$r = R \operatorname{tg} \chi \tag{12}$$

все эллиптическое пространство проектируется на все евклидово пространство [2]). Проекция же сферического пространства дважды

[1]) Таково же мнение и самого Эйнштейна (сообщенное автору в письме).

[2]) Преобразование

$$r_1 = R \sin \chi$$

ставит эллиптическое пространство в соответствие части евклидова пространства, ограниченной сферой радиусом $r_1 = R$. Отображение же сферического покрывает евклидово пространство, причем проекции антиподных точек совпадают.

Четырехмерный элемент длины в таких координатах будет для двух рассматриваемых систем равен

$$ds^2 = -\frac{d\mathrm{r}^2}{(1+\varepsilon\mathrm{r}^2)^2} - \frac{\mathrm{r}^2\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2]}{1+\varepsilon\mathrm{r}^2} + c^2\,dt^2, \qquad (13\text{А})$$

$$ds^2 = -\frac{d\mathrm{r}^2}{(1+\varepsilon\mathrm{r}^2)^2} - \frac{\mathrm{r}^2\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2]}{1+\varepsilon\mathrm{r}^2} + \frac{c^2\,dt^2}{1+\varepsilon\mathrm{r}^2}. \qquad (13\text{Б})$$

Если мы теперь положим

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_1 &= \mathrm{r}\sin\psi\sin\theta, \\ \mathrm{x}_2 &= \mathrm{r}\sin\psi\cos\theta, \\ \mathrm{x}_3 &= \mathrm{r}\cos\psi, \\ \mathrm{x}_4 &= ct, \end{aligned}$$

пространства дважды заполняет эту сферу. Если мы положим

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \sin\psi\sin\theta, \\ y_1 &= r_1 \sin\psi\cos\theta, \\ z_1 &= r_1\cos\psi, \end{aligned}$$

то получим координаты x_1, y_1, z_1, которыми Эйнштейн пользовался в своей работе от февраля 1917 г. В этих координатах трехмерный элемент длины имеет вид

$$d\sigma^2 = \sum_i{}' dx_i^2 + \sum_i{}' \sum_j{}' \frac{x_i x_j\, dx_i\, dx_j}{R^2 - r_1^2}.$$

Если мы еще добавим

$$u_1 = R\cos\chi,$$

то получим координаты Вейерштрасса x_1, y_1, z_1, u_1.

Риман пользовался координатами, определяющимися преобразованием

$$r_2 = 2R\,\mathrm{tg}\,\frac{\chi}{2}.$$

При этом линейный элемент принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{dr_2^2 + r_2^2\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2]}{(1 + r_2^2/4R^2)^2}.$$

При таком преобразовании (которое использовал также и автор в своей работе от марта 1917 г.) сферическое пространство целиком отображается на все евклидово пространство. Эллиптическое же пространство отображается на шар $r_2 \leqslant 2R$.

Преобразование, которое использовано в данной статье, приводит к координатам Бельтрами.

то компоненты $g_{\mu\nu}$ в этих координатах примут вид

$$g_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{1+\varepsilon r^2} + \frac{\varepsilon x_i x_j}{(1+\varepsilon r^2)^2}, \qquad \begin{cases} \text{А.} & g_{44} = 1. \\ \text{Б.} & g_{44} = \dfrac{1}{1+\varepsilon r^2}. \end{cases}$$

При $r = 0$ компоненты $g_{\mu\nu}$ имеют значения (1) для обеих систем А и Б. При $r = \infty$ они вырождаются в следующие:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}, \tag{1А}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}. \tag{1Б}$$

Набор (1А) значений компонент инвариантен относительно всех преобразований, при которых $t' = t$ (на бесконечности); набор же (1Б) инвариантен относительно *любых* преобразований [1]. Поэтому оказывается, что система А лишь в том случае удовлетворяет математическому постулату об относительности инерции, если он применяется только к трехмерному пространству. Другими словами, если мы представим себе, что трехмерное пространство (x_1, x_2, x_3) с его мировой массой может двигаться в неком абсолютном пространстве, то мы никогда не сможем обнаружить путем наблюдений его движение: всякое движение материальных тел происходит относительно пространства (x_1, x_2, x_3) с мировой массой, а не относительно нашего абсолютного пространства. Таким образом, мировая материя становится на место абсолютного пространства ньютоновской теории, или так называемой «инерциальной системы». Это не что иное, как материализованная инерциальная система. Отметим, что в системе А такую относительность инерции можно осуществить, лишь приняв время практически абсолютным. Правда, основные уравнения теории: уравнение (3) и уравнения движения, т. е. дифференциальные уравнения геодезической,— инвариантны относительно всех преобразований. Но лишь те преобразования, при которых $t' = t$ на бесконечности, не меняют набора значений (1А). В противоположность этому в системе Б имеется полная инвариантность относительно любых преобразований всех четырех переменных.

---

[1] С тем ограничением, что ни один из коэффициентов dx_i/dx'_j не обращается на бесконечности в бесконечность.

Система Б — это четырехмерный аналог трехмерного пространства системы А. Если мы возьмем

$$ds^2 = -R^2\{d\omega^2 + \sin^2\omega\,(d\zeta^2 + \sin^2\zeta\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\,d\theta^2])\}, \quad (14)$$

то компоненты $g_{\mu\nu}$, определяющие этот элемент длины, будут удовлетворять уравнениям (3) с условиями (9Б). Чтобы избежать появления мнимых углов, мы можем положить

$$\omega = i\omega', \quad \zeta = i\zeta'.$$

Тогда элемент длины принимает вид [1])

$$ds^2 = R^2\{d\omega'^2 - \mathrm{sh}^2\,\omega'\,(d\zeta'^2 + \mathrm{sh}^2\,\zeta'\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\,d\theta^2])\}. \quad (15)$$

Если мы теперь положим

$$\rho = R\,\mathrm{th}\,\omega'\,\mathrm{sh}\,\zeta',$$
$$\tau = R\,\mathrm{th}\,\omega'\,\mathrm{ch}\,\zeta',$$

то получим

$$ds^2 = \frac{-(1-\varepsilon\tau^2)\,d\rho^2 - 2\varepsilon\rho\tau\,d\rho\,d\tau + (1+\varepsilon\rho^2)\,d\tau^2}{[1+\varepsilon(\rho^2-\tau^2)]^2} - \frac{\rho^2\,[d\psi^2 + \sin^2\psi\,d\tau^2]}{1+\varepsilon(\rho^2-\tau^2)}. \quad (16)$$

---

[1]) Положив

$$\mathrm{r} = R\,\mathrm{sh}\,\omega'\,\mathrm{sh}\,\zeta', \qquad \mathrm{t} = R\,\mathrm{sh}\,\omega'\,\mathrm{ch}\,\zeta',$$
$$\mathrm{x} = \mathrm{r}\sin\psi\sin\theta, \qquad \mathrm{u} = R\,\mathrm{ch}\,\omega',$$
$$\mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\psi\cos\theta,$$
$$\mathrm{z} = \mathrm{r}\cos\psi,$$

мы получим

$$ds^2 = -d\mathrm{x}^2 - d\mathrm{y}^2 - d\mathrm{z}^2 + d\mathrm{t}^2 - d\mathrm{u}^2$$

и

$$R^2 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 - \mathrm{z}^2 + \mathrm{t}^2 - \mathrm{u}^2 = 0. \quad \text{(a)}$$

Последнее соотношение есть уравнение однополостного гиперболоида в пятимерном пространстве (x, y, z, t, u). Проекция точки данного гиперболоида с координатами x, y, z, t, u на четырехмерное пространство $\mathrm{u} = R$, если принять за начало координат точку с координатами $\mathrm{x} = \mathrm{y} = \mathrm{z} = \mathrm{t} = \mathrm{u} = 0$, имеет координаты ξ, η, ζ, τ, такие, что

$$\xi = \rho\sin\psi\sin\theta,$$
$$\eta = \rho\sin\psi\cos\theta,$$
$$\zeta = \rho\cos\psi.$$

Эта проекция ограничена «гиперболой»

$$R^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 = 0, \text{ или } 1 + \varepsilon(\rho^2 - \tau^2) = 0, \quad \text{(б)}$$

которая представляет собой проекцию точек на бесконечности на гиперболоид (а). Та часть пространства $\mathrm{u} = R$, которая находится вне гиперболы (б), представляет собой проекцию двуполостного гиперболоида, сопряженного гиперболоиду (а). Из выражения (16) видно, что на ограничивающей «гиперболе» (б) все компоненты $g_{\mu\nu}$ обращаются в бесконечность.

И, наконец, путем преобразования

$$R \sin \frac{r}{R} = \frac{\rho}{\sqrt{1+\varepsilon(\rho^2-\tau^2)}}, \qquad R \operatorname{sh} \frac{ct}{R} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\varepsilon\tau^2}},$$

мы находим формулу (8Б).

В трехмерном пространстве с элементом длины (11) мы можем перенести начало координат в точку с координатами χ_1, ψ_1, θ_1; при этом элемент длины, выраженный через новые координаты, будет снова иметь вид (11). Точно таким же образом мы можем в выражении (14) перенести начало координат в точку с координатами ω_1, ζ_1, ψ_1, θ_1, соответствующую точке χ_1, ψ_1, θ_1, ct_1 в (8Б). Элемент длины в координатах, отнесенных к этому новому началу координат, будет снова иметь тот же вид (14) и может быть снова преобразован к новым переменным χ', ψ', θ', ct' и после этого снова примет вид (8Б). Конечно, ct' будет, вообще говоря, отличаться от ct.

В обеих системах А и Б всегда есть возможность найти в каждой точке четырехмерного пространства-времени систему отсчета, в которой компоненты $g_{\mu\nu}$ зависят только от одной пространственной переменной («радиус-вектора») и не зависят от «времени». В системе А «время» таких систем отсчета одинаково везде и всегда, но в системе Б это не так. В системе Б нет универсального времени; в ней нет существенной разницы между «временем» и другими тремя координатами. Ни одна из них не имеет реального физического смысла. В противоположность этому в системе А время существенно отличается от пространственных переменных.

3. Продолжая сравнение двух систем, мы рассмотрим ход лучей света. Если мы используем координаты r, ψ, θ, ct, то скорость света в системе А постоянна и лучи света, которые в четырехмерном пространстве-времени распространяются по геодезическим, в трехмерном пространстве r, ψ, θ также будут распространяться по геодезическим. К треугольникам, построенным такими лучами, применимы обычные формулы сферической тригонометрии. Поэтому если мы предположим, что Солнце покоится в начале координат, то, обозначив расстояние от Солнца до Земли через a, получим, что параллакс [1]) p звезды, находящейся на расстоянии r от Солнца, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} p = \sin \frac{a}{R} \operatorname{ctg} \frac{r}{R},$$

---

[1]) Параллакс равен $90° - A$, если A — угол у Земли, а угол у Солнца равен 90°. В сферической геометрии угол у звезды *не равен*, конечно, $90° - A$, как это имеет место в евклидовой геометрии.

или, поскольку можно пренебречь квадратом величины a/R,

$$p=\frac{a}{R}\operatorname{ctg}\frac{r}{R}. \tag{17}$$

То же самое получается и в системе отсчета, задаваемой координатами r, ψ, θ, ct. Преобразование (12) оставляет при проектировании все прямые линии снова прямыми. Более того, мы легко можем убедиться, что лучи света должны быть прямыми в системе координат r, ψ, θ, ct. Скорость света в этой системе равна

$$v=\frac{c\,(1+\varepsilon \mathrm{r}^2)}{\sqrt{1+\varepsilon \mathrm{r}^2 \sin^2 V}},$$

где V — угол между радиус-вектором и касательной к лучу света. Тогда уравнение луча света принимает вид [1, стр. 717]

$$\sin V=\frac{k}{\mathrm{r}},$$

где k — постоянная. Это уравнение прямой линии. Таким образом, параллакс определяется обычными формулами евклидовой геометрии и мы имеем выражение

$$p=\frac{a}{\mathrm{r}}=\frac{a}{R}\operatorname{ctg}\frac{r}{R},$$

которое аналогично выражению (17).

Следовательно, параллакс равен нулю при $r={}^1/_2\pi R$, т. е. при самом большом расстоянии, которое возможно в эллиптическом пространстве. Если мы примем, что наше пространство сферическое, т. е. что возможны еще большие расстояния, то параллакс p мог бы стать отрицательным и при $r=\pi R$ мы могли бы получить $p=-90°$.

В системе Б лучи света *не являются* геодезическими линиями ни в трехмерном пространстве (r, ψ, θ), ни в пространстве (r, ψ, θ). В пространстве (r, ψ, θ) скорость света равна $v=c\cos\chi$. Если мы теперь введем новую переменную h в соответствии с уравнением

$$\frac{dr}{dh}=\cos\chi,$$

интеграл которого равен

$$\operatorname{sh}\frac{h}{R}=\operatorname{tg}\frac{r}{R}=\frac{\mathrm{r}}{R}, \tag{18}$$

то скорость света в радиальном направлении будет постоянной.

При этом элемент длины принимает вид [1])

$$ds^2 = \frac{-dh^2 - R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{R} [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2] + c^2\, dt^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{h}{R}}. \tag{19Б}$$

Трехмерное пространство данной системы отсчета есть пространство с постоянной *отрицательной* кривизной, т. е. гиперболическое пространство, или пространство Лобачевского. Из выражения (18) явствует, что эллиптическое пространство целиком отображается на все гиперболическое пространство; отображение же сферического пространства дважды покрыло бы гиперболическое пространство.

В системе отсчета h, ψ, θ, ct скорость света постоянна [во всех направлениях, хотя преобразование (18) и было найдено из условия ее постоянства в радиальном направлении] и лучи света являются прямыми (т. е. геодезическими) линиями в трехмерном гиперболическом пространстве (h, ψ, θ). Таким образом, это гиперболическое пространство играет ту же роль в системе Б, что и эллиптическое пространство в системе А и евклидово пространство в системе В, если рассматривать их с точки зрения распространения луча света. Если же учитывать и движение материальных частиц (механику), то аналогия нарушается из-за наличия в знаменателе множителя $\operatorname{ch}^2 h/R$.

Поскольку лучи света представляют собой прямые линии, мы можем пользоваться при выводе формул для параллакса гиперболической тригонометрией. Таким образом, находим

$$\operatorname{tg} p = \operatorname{sh}\frac{a}{R} \operatorname{cth}\frac{h}{R},$$

или

$$p = \frac{a}{R} \operatorname{cth}\frac{h}{R}. \tag{20}$$

---

[1]) Преобразование (18) можно, конечно, применить и в системе А. Тогда элемент длины принимает вид

$$ds^2 = \frac{-dh^2 - R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{R} [d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\theta^2]}{\operatorname{ch}^2 \frac{h}{R}} + c^2\, dt^2. \tag{19А}$$

В (19А) все компоненты g^{ij} обращаются в нуль при $h = \infty$, но компонента g_{44} остается равной 1; в выражении (19Б) компонента g_{44} тоже обращается в нуль.

Отсюда следует, что в системе Б параллакс звезды никогда не может быть равен нулю. При $h = \infty$ имеем $p = a/R$. С помощью преобразования (18) получаем

$$p = \frac{a}{R\sin\chi} = \frac{a}{\mathrm{r}}\sqrt{1+\frac{\mathrm{r}^2}{R^2}}. \qquad (20')$$

Следовательно, p достигает своего минимального значения a/R при $\chi = {}^1/_2\pi$. При бо́льших значениях χ, которые возможны лишь в сферическом пространстве, параллакс p начал бы снова увеличиваться, и при $r = \pi R$ мы получили бы $p = 90°$. И действительно, если сферическое пространство проектируется с помощью преобразования (18) на гиперболическое пространство, то проекции антиподных точек совпадают: звезда, находящаяся в антиподной точке, соответствующей Солнцу, проектируется в само Солнце.

Было бы интересно вывести формулу (20′), рассмотрев ход лучей света в системе координат r, ψ, θ. В этой системе скорость света равна

$$v = c\sqrt{\frac{1+\varepsilon \mathrm{r}^2}{1+\varepsilon \mathrm{r}^2\sin^2 V}}.$$

Уравнение для луча света принимает вид

$$\sin V = \frac{a}{\mathrm{r}\,(1+\varepsilon \mathrm{r}^2)}.$$

Параллакс определяется уравнением [1])

$$\frac{dp}{d\mathrm{r}} = -\frac{\operatorname{tg} V}{\mathrm{r}},$$

[1]) Строго говоря, r здесь — расстояние от звезды до Земли, а не до Солнца. Но эти два расстояния можно считать одинаковыми, если пренебречь величиной a^2/r^2. Таким образом, мы получаем, если использовать обозначения статьи I,

$$p = V - x.$$

Теперь мы имеем [1, стр. 718]

$$\frac{dx}{dV} = 1 + \frac{\operatorname{tg} V}{\mathrm{r}}\frac{d\mathrm{r}}{dV},$$

или

$$\frac{dx}{d\mathrm{r}} = \frac{dV}{d\mathrm{r}} + \frac{\operatorname{tg} V}{\mathrm{r}},$$

откуда сразу же следует уравнение для p.

из которого, если пренебречь членом a^2/r^2, находим

$$p = \frac{a}{\mathrm{r}} \sqrt{1+\varepsilon \mathrm{r}^2},$$

что совпадает с формулой (20′).

4. Уравнениями движения материальной точки в чисто инерционном поле будут дифференциальные уравнения геодезической линии

$$\frac{d^2 x_i}{c^2\, dt^2} = -\sum_p \sum_q \left[\left\{ {pq \atop i} \right\} - \left\{ {pq \atop 4} \right\} \dot{x}_i \right] \dot{x}_p \dot{x}_q, \tag{21}$$

или, если мы ограничим себя такими системами отсчета, в которых компоненты $g_{\mu\nu}$ не зависят от $x_4 = ct$,

$$\frac{d^2 x_i}{c^2\, dt^2} = -\left\{ {44 \atop i} \right\} - \sum_p{}' \sum_q{}' \left\{ {pq \atop i} \right\} \dot{x}_p \dot{x}_q + 2 \sum_p{}' \left\{ {p4 \atop 4} \right\} \dot{x}_i \dot{x}_p. \tag{21′}$$

В системе В, которая соответствует ньютоновской теории инерции, компоненты g_{ij}, если мы возьмем прямоугольные декартовы пространственные координаты, даются формулой (1) и все скобки равны нулю. Следовательно, в этом случае

$$\frac{d^2 x_i}{c^2\, dt^2} = 0.$$

Таким образом, траектория частицы, движущейся по инерции и не испытывающей воздействия поля тяготения, представляет собой прямую линию в евклидовом пространстве, причем скорость частицы постоянна.

В системе А мы имеем в координатах r, ψ, θ, ct

$$\left\{ {22 \atop 1} \right\} = -R \sin\chi \cos\chi, \qquad \left\{ {33 \atop 1} \right\} = -R \sin\chi \cos\chi \sin^2\psi,$$

$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = \left\{ {13 \atop 3} \right\} = \frac{1}{\mathrm{R}} \operatorname{ctg}\chi, \qquad \left\{ {33 \atop 2} \right\} = -\sin\psi\cos\psi, \qquad \left\{ {23 \atop 3} \right\} = \operatorname{ctg}\psi.$$

Остальные скобки равны нулю. Получаем

$$\frac{d^2 r}{c^2\, dt^2} = R \sin\chi \cos\chi \left[\left(\frac{d\psi}{c\, dt} \right)^2 + \sin^2\psi \left(\frac{d\theta}{c\, dt} \right)^2 \right],$$

$$\frac{d^2 \theta}{c^2\, dt^2} = -\frac{2}{R} \operatorname{ctg}\chi \frac{dr}{c\, dt} \frac{d\theta}{c\, dt} - 2 \operatorname{ctg}\psi \frac{d\psi}{c\, dt} \frac{d\theta}{c\, dt},$$

$$\frac{d^2 \psi}{c^2\, dt^2} = -\frac{2}{R} \operatorname{ctg}\chi \frac{dr}{c\, dt} \frac{d\psi}{c\, dt} + \sin\psi\cos\psi \left(\frac{d\theta}{c\, dt} \right)^2.$$

Мы можем положить $\psi = 90°$, $d\psi/dt = 0$. Затем мы находим интегралы площадей и живой силы:

$$R^2 \sin^2 \chi \left(\frac{d\theta}{dt}\right) = c,$$
$$R^2 \sin^2 \chi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k. \tag{22}$$

Выделяя dt, находим дифференциальное уравнение орбиты:

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + R^2 \sin^2 \chi = \frac{k}{c^2} R^4 \sin^4 \chi. \tag{23}$$

Его интегралом будет

$$\operatorname{tg} \chi \cos (\theta - \theta_0) = \frac{c}{kR^2 - c}. \tag{24}$$

Это — уравнение прямой, т. е. геодезической, линии в сферическом или эллиптическом пространстве. Из второго уравнения (22) явствует, что скорость здесь постоянна. Таким образом, в системе А материальная частица, двигаясь по инерции, описывает прямую линию в эллиптическом пространстве, причем скорость ее постоянна.

В случае системы Б мы используем координаты r, ψ, θ, ct. Тогда мы имеем

$$\left\{ {11 \atop 1} \right\} = -\frac{2\varepsilon \mathrm{r}}{1 + \varepsilon \mathrm{r}^2}, \quad \left\{ {22 \atop 1} \right\} = -\mathrm{r}, \quad \left\{ {33 \atop 1} \right\} = -\mathrm{r} \sin^2 \psi, \quad \left\{ {44 \atop 1} \right\} = \varepsilon \mathrm{r},$$
$$\left\{ {12 \atop 2} \right\} = \left\{ {13 \atop 3} \right\} = \frac{1}{\mathrm{r}}, \quad \left\{ {33 \atop 2} \right\} =$$
$$= -\sin \psi \cos \psi, \quad \left\{ {23 \atop 3} \right\} = \operatorname{ctg} \psi, \quad \left\{ {14 \atop 4} \right\} = -\frac{\varepsilon \mathrm{r}}{1 + \varepsilon \mathrm{r}^2},$$

а остальные скобки равны нулю. Теперь мы находим

$$\frac{d^2 \mathrm{r}}{c^2\, dt^2} = \varepsilon \mathrm{r} + \mathrm{r} \left[\left(\frac{d\psi}{c\, dt}\right)^2 + \sin^2 \psi \left(\frac{d\theta}{c\, dt}\right)^2 \right],$$
$$\frac{d^2 \theta}{c^2\, dt^2} = -\frac{2}{\mathrm{r}} \frac{d\mathrm{r}}{c\, dt} \frac{d\theta}{c\, dt} - 2 \operatorname{ctg} \psi \frac{d\psi}{c\, dt} \frac{d\theta}{c\, dt},$$
$$\frac{d^2 \psi}{c^2\, dt^2} = -\frac{2}{\mathrm{r}} \frac{d\mathrm{r}}{c\, dt} \frac{d\psi}{c\, dt} + \sin \psi \cos \psi \left(\frac{d\theta}{c\, dt}\right)^2.$$

Мы можем снова принять $\psi = 90°$, $d\psi/dt = 0$. Интегралы площадей и живой силы таковы:

$$\mathrm{r}^2 \frac{d\theta}{dt} = c,$$
$$\left(\frac{d\mathrm{r}}{dt}\right)^2 + \mathrm{r}^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \varepsilon \mathrm{r}^2 + k. \tag{25}$$

Дифференциальное уравнение траектории будет иметь вид

$$\left(\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}\right)^2+\mathrm{r}^2=\frac{\varepsilon\mathrm{r}^2+k}{c^2}\,\mathrm{r}^4. \tag{26}$$

Интегрирование легко проводится подстановкой $y = 1/2\mathrm{r}^2$. Получаем

$$r^2\,[1+e\cos 2\,(\theta-\theta_0)]=\frac{2c^2}{k}, \tag{27}$$

где

$$e=\frac{\sqrt{4\varepsilon c^2+k^2}}{k}.$$

Это будет уравнением прямой линии в эллиптическом пространстве [1]) только в том случае, если $e = 1$ или $c = 0$, т. е. $d\theta/dt = 0$. Таким образом, траектория вырождается в прямую лишь в том случае, если она проходит через начало координат.

Мы можем в заключение преобразовать результат интегрирования, введя вспомогательный угол u. Получаем формулы

$$\begin{gathered}
\mathrm{r}^2=\frac{1}{2}R^2k\,(e\,\mathrm{ch}\,2u-1),\\
r^2\cos 2\,(\theta-\theta_0)=\frac{1}{2}R^2k\,(e-\mathrm{ch}\,2u),\\
r^2\sin 2\,(\theta-\theta_0)=\frac{1}{2}R^2k\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{sh}\,2u,\\
\mathrm{tg}\,(\theta-\theta_0)=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{th}\,u,\\
u=\frac{t}{R}+u_0.
\end{gathered} \tag{28}$$

Мы имеем

$$\frac{dr}{dt}=\cos^2\chi\,\frac{d\mathrm{r}}{dt}.$$

---

[1]) В координатах h, ψ, θ (гиперболическое пространство) уравнение (27) принимает вид

$$R^2\,\mathrm{th}^2\frac{h}{R}\,[k+2\varepsilon c^2+ke\cos 2\,(\theta-\theta_0)]=2c^2;$$

оно будет уравнением прямой линии при

$$e=1+\frac{2\varepsilon c^2}{k}.$$

Следовательно, интегралы (25), выраженные в координатах r, ψ, θ эллиптического пространства, принимают вид [1])

$$R^2 \operatorname{tg}^2 \chi \frac{d\theta}{dt} = c,$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + R^2 \sin^2 \chi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \sin^2 \chi \cos^2 \chi + (k + \varepsilon c^2) \cos^4 \chi. \quad (25')$$

Следовательно, в системе Б материальная частица *не может* под влиянием только инерции двигаться по прямой линии с постоянной скоростью. Ее траектория может стать прямой, только если она проходит через начало координат, но и тогда скорость ее не будет постоянной. Правда, при малых значениях χ уравнение (25') не отличается от уравнения (22). Стало быть, те участки траектории, которые доступны нашим наблюдениям, можно считать практически прямолинейными, если принять R достаточно большим.

Скорость обращается в нуль при $r = {}^1/_2\pi R$. Поэтому материальная частица, находящаяся на полярной линии данной системы координат, не может иметь какой-либо скорости. Она также не обладает никакой энергией, поскольку энергия материальной частицы равна

$$m \sum_p g_{p4} \frac{dx_p}{ds}$$

и также обращается в нуль при $r = {}^1/_2\pi R$. Скорость света на полярной линии тоже равна нулю.

Все эти результаты выглядят очень странно и парадоксально. Все они, конечно, обусловлены тем, что компонента g_{44} обращается в нуль при $r = {}^1/_2\pi R$. Мы можем сказать, что на полярной линии четырехмерное пространство-время вырождается в трехмерное пространство: *там нет времени*, а следовательно, и движения.

Отметим, что время, за которое свет может достичь точки, находящейся на расстоянии ${}^1/_2\pi R$ от начала координат (или от какой-либо другой точки), равно

$$T = \frac{R}{c} \int_0^{1/2\pi} \operatorname{sc} \chi \, d\chi = \infty.$$

---

[1]) В координатах гиперболического пространства имеем

$$R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{R} \frac{d\theta}{dt} = c,$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{R} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \operatorname{th}^2 \frac{h}{R} + (k + \varepsilon c^2) \operatorname{sch}^2 \frac{h}{R}.$$

Следовательно, закон площадей справедлив и в гиперболическом пространстве в системе Б, так же как и в эллиптическом пространстве в системе **А** и в евклидовом пространстве в системе В.

Время же, которое понадобится материальной частице для такого путешествия, будет тем более бесконечным. Это также следует и из уравнения (28), поскольку расстояние $r = {}^1/_2\pi R$ соответствует значению $\mathrm{r} = \infty$, а следовательно, и значению $u = \pm\infty$, или $t = \pm\infty$. Если частица не находится на полярной линии, то она может достичь ее лишь за бесконечное время, т. е. вообще никогда не сможет ее достичь. Поэтому мы можем сказать, что все парадоксальные явления (или, точнее, отрицания явлений), которые были перечислены выше, возможны лишь после конца или до начала вечности [1]).

Конечно, такие понятия, как «скорость» и «энергия», связаны с определенной системой координат. Это не тензорные величины, и, следовательно, они неодинаковы в разных системах отсчета. Вполне может быть, что система координат r, ψ, θ, ct не является наиболее простой или наиболее удобной для описания таких явлений. Те же результаты, записанные в других координатах, могут представиться нам в ином виде. Но остается фактом то, что экстраполяция, соответствующая гипотезе Б, сильнее отличается от всего, к чему мы привыкли в близких к нам окрестностях пространства, чем экстраполяции, соответствующие гипотезам А или В.

Система А удовлетворяет «материальному постулату об относительности инерции», но она ограничивает допустимые преобразования такими, для которых $t' = t$ на бесконечности, а потому вводит квазиабсолютное время, как уже разъяснялось в пункте 2. В системах Б и В время совершенно относительно и полностью эквивалентно другим трем координатам. В системе А у нас имеется мировая масса, заполняющая весь мир, которая может находиться в состоянии равновесия без внутренних напряжений и давлений, если она совершенно однородна и покоится. В системе Б масса может быть и может не быть, но если у нас имеется более чем одна материальная частица, то эти массы не могут покоиться, и если бы весь мир был однородно заполнен массой, то она не могла бы находиться в покое без внутреннего напряжения или давления; ибо в противном случае мы получили бы систему А, в которой $g_{44} = 1$ при всех значениях четырех координат. Система Б удовлетворяет «математическому постулату» относительности инерции, который, по-видимому, не поддается простой физической интерпретации.

В системе В у нас совсем нет относительности инерции. Нельзя отрицать, что постоянная λ, наличием которой системы А и Б отличаются от системы В, вводится несколько искусственно

[1]) В системе отсчета, в которой радиус-вектор измеряется величинами r (проекцией на евклидово пространство) и h (проекцией на гиперболическое пространство), они тоже отодвигаются в пространственную бесконечность.

и этим наносится ущерб простоте и элегантности первоначальной теории 1915 г., одной из привлекательнейших черт которой было то, что она охватывала так много без введения новых эмпирических констант.

ДОПОЛНЕНИЕ К ПУНКТУ 4
(добавлено в октябре 1917 г.)

В системе Б уравнение траектории материальной частицы, которая движется лишь по инерции, дается формулой (27). Это — уравнение *гиперболы*. Если через r_0 обозначить минимальное значение величины r, а через v_0 — скорость dr/cdt в данной точке, то мы получим

$$e=\frac{v_0^2+\varepsilon r_0^2}{v_0^2-\varepsilon r_0^2}, \qquad c=r_0 v_0, \qquad k=v_0^2-\varepsilon r_0^2.$$

Далее, если положить

$$x = r\cos(\theta-\theta_0), \qquad y = r\sin(\theta-\theta_0),$$

то уравнение (27) приведется к виду

$$\frac{x^2}{r_0^2}-\frac{y^2}{R^2 v_0^2}=1, \tag{27'}$$

т. е. к уравнению гиперболы, действительная ось которой равна r_0, а мнимая Rv_0. При скорости полмили в день последняя все-таки превышает расстояние от Нептуна до Солнца (при $R = 10^{12}$) и, следовательно, такую гиперболу во всех наблюдаемых явлениях можно считать прямой линией.

Аналогично и уравнение (28) может быть преобразовано к виду

$$x=r_0 \operatorname{ch} u, \qquad y=Rv_0 \operatorname{sh} u, \qquad u=\frac{t}{R}+u_0. \tag{28'}$$

При $v_0 = 1$ скорость частицы равна скорости света и ее траектория становится траекторией луча света. Следовательно, траектории лучей света представляют собой (в системе отсчета, задаваемой координатами r, ψ, θ, *ct*) гиперболы, мнимые оси которых равны *R*. Легко убедиться, что это согласуется с результатом, полученным в пункте 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *de Sitter W.*, Monthley Notices Roy. Astr. Soc., **76**, 699 (1916).
2. *de Sitter W.*, Monthley Notices Roy. Astr. Soc., **77**, 155 (1916).
3. *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., **1**, 142 (1917) (см. данный сборник, стр. 287).
4. *de Sitter W.*, Proc. Akad. Amsterdam, 19, 1217 (1917).
5. *de Sitter W.*, Proc. Akad. Amsterdam, **20**, 229, 1309 (1917).
6. *Riemann B.*, Nachr. K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Bd. 13, 1868, S. 133 (см. данный сборник, стр. 18).
7. *Newcomb S.*, Crelles Journ., **83**, 293.

«В предыдущей заметке [1] *я подверг критике названную выше работу* [2]. *Однако моя критика, как я убедился из письма Фридмана, сообщенного мне г-ном Крутковым, основывалась на ошибке в вычислениях. Я считаю результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, что уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические, т. е. переменные относительно времени, центрально-симметричные решения для структуры пространства».*

(А. Эйнштейн. «К работе А. Фридмана «О кривизне пространства»») [3]

[1] *Einstein A.*, Zs. Phys., **11**, 326 (1922) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 118).
[2] *Friedmann A.*, Zs. Phys., **10**, 377 (1922).
[3] *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 119.

А. А. ФРИДМАН

О КРИВИЗНЕ ПРОСТРАНСТВА*

§ 1

1. В своих известных работах, посвященных общим космологическим вопросам, Эйнштейн [1]) и де Ситтер [2]) приходят к двум мыслимым типам Вселенной; Эйнштейн получает так называемый цилиндрический мир, в котором пространство[3]) обладает постоянной, не меняющейся с течением времени кривизной, причем радиус кривизны связывается с общей массой материи, расположенной в пространстве; де Ситтер получает шаровой мир, в котором уже не только пространство, но и весь мир обладает до известной степени характером мира постоянной кривизны [4]). При этом и Эйнштейн и де Ситтер предполагают определенный характер тензора материи, отвечающий гипотезе несвязанности материи и ее относительному покою, иначе говоря, достаточной малости скоростей материи по сравнению с фундаментальной скоростью [5]), т. е. со скоростью света.

Настоящая заметка имеет целью получить цилиндрический и сферический мир как частные типы, вытекающие из некоторых общих положений, а затем указать возможность получения особого мира, кривизна пространства которого, постоянная относи-

---

* *Фридман А. А.*, Избранные труды, «Наука», М., 1966, стр. 229.

1) *Einstein A.*, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1917, Hf. 1, S. 142. (См. перевод в данном сборнике, стр. 287.— *Прим. ред.*)

2) *De Sitter*, On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences, Monthley Notices Roy. Astron. Soc., 1916—1917. (См. перевод в данном сборнике, стр. 299.— *Прим. ред.*)

3) Под пространством будем подразумевать пространство, описываемое многообразием трех измерений, относя термин «мир» к пространству, описываемому многообразием четырех измерений.

4) *Klein F.*, Über die Integralform der Erhaltungersätze und die Theorie der räumlichgeschlossen Welt, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1918.

5) См. этот термин у Эддингтона в книге: «Espace, Temps et Gravitation», 2 partie, Paris, 1921, p. 10 (см. перевод: «Пространство, время, тяготение», Одесса, 1923).

тельно трех принятых за пространственные координат, меняется с течением времени, т. е. зависит от четвертой координаты, принятой за временную; этот новый тип Вселенной в остальных своих свойствах напоминает цилиндрический мир Эйнштейна.

2. Предположения, которые мы положим в основу наших соображений, распадаются на два класса. К первому классу относятся предположения, одинаковые с теми, которые делают Эйнштейн и де Ситтер и которые относятся к уравнениям, управляющим гравитационными потенциалами, и к характеру состояния и движения материи в пространстве. Ко второму классу относятся предположения об общем, так сказать, геометрическом характере нашего мира; из принятой нами гипотезы в виде частных случаев могут быть получены как цилиндрический мир Эйнштейна, так и шаровой мир де Ситтера.

Предположения первого класса следующие:

1) гравитационные потенциалы удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна с так называемым «космологическим» членом, который может быть, в частности, равен нулю:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R\pm\lambda g_{ik}=-\varkappa T_{ik}\quad(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4),\tag{A}$$

где g_{ik} — гравитационные потенциалы, T_{ik} — тензор материи, $\varkappa$ — некоторая постоянная, $R = g^{ik}R_{ik}$, а тензор R_{ik} определяется равенством

$$R_{ik}=\frac{\partial^2\ln\sqrt{g}}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial x_\sigma}\left\{{ik \atop \sigma}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{{ik \atop \sigma}\right\}+\left\{{i\alpha \atop \sigma}\right\}\left\{{k\sigma \atop \alpha}\right\},\tag{B}$$

причем x_i ($i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$) суть мировые координаты, а $\left\{{ik \atop \sigma}\right\}$ — символ Кристоффеля второго рода [1];

2) материя находится в несвязанном состоянии и обладает взаимно относительным покоем; говоря менее строго, относительные скорости материи ничтожны сравнительно со скоростью света. При таких предположениях тензор материи T_{ik} определится равенствами

$$\left.\begin{aligned}&T_{ik} = 0,\ \text{если } i \text{ и } k \text{ одновременно не равны } 4,\\&T_{44} = c^2\rho g_{44},\end{aligned}\right\}\tag{C}$$

где ρ — плотность материи и c — фундаментальная скорость; при этом, конечно, мировые координаты разделены на две группы: x_1, x_2, x_3 названы пространственными координатами, а x_4 — временной координатой.

3. Предположения второго класса сводятся к следующему:

1) по выделении из четырех мировых координат трех пространственных (x_1, x_2, x_3) мы будем иметь пространство постоян-

---

[1] Знак R_{ik} и скалярной кривизны R изменен на обратный сравнительно с обычными обозначениями этой величины.

ной кривизны, могущей, однако, меняться с течением четвертой, временной координаты x_4. Интервал ds [1]), определяемый равенством $ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k$, можно написать, изменив соответствующим образом пространственные координаты, в следующем виде:

$$ds^2 = R^2\,(dx_1^2 + \sin^2 x_1\,dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\,dx_3^2) + 2g_{14}\,dx_1\,dx_4 + \\ + 2g_{24}\,dx_2\,dx_4 + 2g_{34}\,dx_3\,dx_4 + g_{44}\,dx_4^2,$$

где R есть функция только от x_4, R пропорционален радиусу кривизны пространства; таким образом, радиус кривизны пространства может меняться с течением времени;

2) в выражении интервала g_{14}, g_{24}, g_{34} обращаются в нуль при соответствующем выборе временной координаты, или, кратко выражаясь, время ортогонально пространству. Это второе предположение не имеет, как мне кажется, в основе своей каких-либо физических или философских соображений и вводится исключительно в целях упрощения вычислений. Необходимо заметить, что миры Эйнштейна и де Ситтера являются частными случаями рассматриваемого предположения.

Предположения 1) и 2) дают нам возможность написать ds^2 в виде

$$ds^2 = R^2\,(dx_1^2 + \sin^2 x_1\,dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\,dx_3^2) + M^2\,dx_4^2, \tag{D}$$

где R зависит только от x_4, а M является, вообще говоря, функцией всех четырех мировых координат. Вселенная Эйнштейна — частный случай, получаемый из формулы (D) заменой R^2 на $-R^2/c^2$ и M на 1, где R — постоянный (не зависящий от x_4!) радиус кривизны пространства. Вселенная де Ситтера получается, когда в формуле (D) заменим R^2 на $-R^2/c^2$, а M на $\cos x_4$:

$$d\tau^2 = -\frac{R}{c^2}\,(dx_1^2 + \sin^2 x_1\,dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\,dx_3^2) + dx_4^2, \tag{D$_1$}$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\,(dx_1^2 + \sin^2 x_1\,dx_2^2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2\,dx_3^2) + \cos^2 x_4\,dx_4^2\ [2]). \tag{D$_2$}$$

4. Необходимо сказать еще несколько слов о тех интервалах, в которых заключены мировые координаты; иначе говоря, необходимо условиться, какие точки многообразия четырех измерений мы будем считать за различные. Не входя в более подробные пояснения, условимся пространственные координаты изменять в следующих интервалах: x_1 — в интервале $(0, \pi)$, x_2 — в интервале

---

[1]) *Eddington A.*, Espace, Temps et Gravitation, 2 partie, Paris, 1921.

[2]) Придавая интервалу ds размер времени, мы обозначим его через $d\tau$; в этом случае постоянная $\varkappa$ будет иметь размерность длины, деленной на массу, и в единицах CGS будет равна $1{,}87 \cdot 10^{-27}$. См. *Laue M.*, Die Relativitätstheorie, Bd. II, Braunschweig, 1921, S. 185.

$(0, \pi)$, x_3 — в интервале $(0, 2\pi)$; что же касается временной координаты, то вопрос об интервале изменения ее оставим открытым, к нему мы вернемся в дальнейшем.

§ 2

1. Пользуясь уравнениями (A) и (C) в предположении, что гравитационные потенциалы определяются равенством (D), и полагая в уравнениях (A), что $i = 1, 2, 3$, $k = 4$, найдем

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Эти равенства дают два случая: 1) $R'(x_4) = 0$, R не зависит от x_4 и является постоянной; назовем этот случай *стационарным миром* и 2) $R'(x_4) \neq 0$, M зависит только от x_4; назовем этот случай *нестационарным миром*.

Обращаясь сначала к стационарному миру, выпишем уравнения (A) для $i = 1, 2, 3$ в предположении различных индексов; уравнения эти дадут нам такую систему формул:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\, \partial x_2} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\, \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2\, \partial x_3} - \operatorname{ctg} x_2 \frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, найдем

$$M = A(x_3, x_4)\sin x_1 \sin x_2 + B(x_2, x_4)\sin x_1 + C(x_1, x_4), \qquad (1)$$

где A, B, C — произвольные функции своих аргументов. Разрешая обычными приемами уравнения (A) относительно тензора R_{ik}, исключая из полученных и неиспользованных еще уравнений неизвестную плотность[1] ρ и подставляя выражение (1) для M в эти уравнения, мы после длинных, но элементарных вычислений найдем, что для M возможны следующие два выражения:

$$M = M_0 = \text{const}, \qquad (2)$$
$$M = (A_0 x_4 + B_0)\cos x_1, \qquad (3)$$

где M_0, A_0, B_0 — постоянные величины.

В случае когда M равно постоянному числу, мы имеем для стационарного мира случай цилиндрического мира. При этом удобнее оперировать гравитационными потенциалами, получае-

[1] Плотность ρ является у нас неизвестной функцией мировых координат x_1, x_2, x_3, x_4.

мыми из формулы (D); определяя плотность и величину λ, получаем известный результат Эйнштейна:

$$\lambda=\frac{c^2}{R^2}, \qquad \rho=\frac{2}{\varkappa R^2}, \qquad M=\frac{4\pi^2}{\varkappa}R,$$

где M — общая масса всего пространства.

В другом возможном случае, когда M определяется из формулы (3), мы путем рационального изменения x_4 [1]) приходим к шаровому миру де Ситтера, в котором $M=\cos x_1$; пользуясь формулой (D_2), найдем следующие соотношения де Ситтера:

$$\lambda=\frac{3c^2}{R^2}, \qquad \rho=0, \qquad M=0.$$

Таким образом, стационарный мир может быть или *цилиндрическим миром Эйнштейна*, или *сферическим миром де Ситтера*.

2. Обратимся теперь к изучению другого возможного мира — нестационарного. В этом случае M есть функция только x_4; соответственно изменяя x_4, мы можем без ограничения общности положить $M=1$; имея в виду большие удобства наших обычных представлений, напишем ds^2 в форме, аналогичной (D_1) и (D_2):

$$ds^2=-\frac{R^2(x_4)}{c^2}\left(dx_1^2+\sin^2 x_1\,dx_2^2+\sin^2 x_1\sin^2 x_2\,dx_3^2\right)+dx_4^2. \qquad (D_3)$$

Нашей задачей является определение R и ρ из уравнений (A). Очевидно, что уравнения (A), в которых значки различны, ничего не дадут; уравнения (A), в которых $i=k=1, 2, 3$, дадут одно соотношение

$$\frac{R'^2}{R^2}+\frac{2RR''}{R^2}+\frac{c^2}{R^2}-\lambda=0, \qquad (4)$$

а уравнение (A), в котором $i=k=4$, дает равенство

$$\frac{3R'^2}{R^2}+\frac{3c^2}{R^2}-\lambda \quad \varkappa c^2\rho, \qquad (5)$$

причем

$$R'=\frac{dR}{dx_4} \qquad R''=\frac{d^2R}{dx_4^2}.$$

Так как $R'\neq 0$, то интегрирование уравнения (4) после замены для удобства x_4 на t даст нам уравнение

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{A-R+\frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R}, \qquad (6)$$

[1]) Указанное изменение производится с помощью формулы $d\bar{x}_4=\sqrt{A_0x_4+B_0}\,dx_4$.

где A — произвольная постоянная. Из этого уравнения R получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т. е. путем решения относительно R уравнения

$$t=\frac{1}{c}\int_a^R\sqrt{\frac{x}{A-x+\frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx+B, \tag{7}$$

где B и a — постоянные; при этом, конечно, надо помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение (5) дает нам возможность определить ρ:

$$\rho=\frac{3A}{\varkappa R^3} \tag{8}$$

через всю массу M пространства; постоянная A выразится равенством

$$A=\frac{\varkappa M}{6\pi^2}, \tag{9}$$

принимая, что масса M — величина положительная, мы и для A получим положительное значение.

3. Изучение нестационарного мира основано на изучении уравнений (6) и (7); при этом, конечно, величина λ не определяется сама собой, и мы при изучении уравнений (6) и (7) будем предполагать, что λ может принимать любое значение. Определим те значения переменной x, при которых квадратный корень, входящий в формулу (7), может изменить свой знак. Ограничиваясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для x, при которых подкоренное выражение обращается в нуль или бесконечность в *интервале* $(0, \infty)$ *для* x, т. е. при положительных x.

Одно из значений x, при котором квадратный корень в формуле (7) обращается в нуль, есть значение $x = 0$; другие значения x, при которых квадратный корень в формуле (7) может изменять свой знак, определятся при изучении положительных корней уравнения

$$A-x+\frac{\lambda}{3c^2}x^3=0.$$

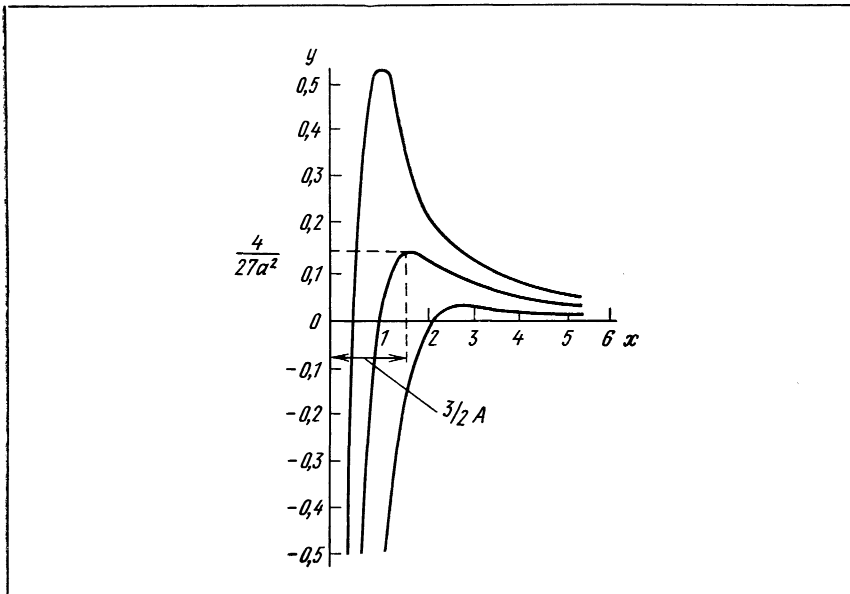
Обозначая $\lambda/3c^2$ через y, построим семейство кривых третьего порядка в плоскости (x, y), определяемое уравнением

$$yx^3-x+A=0, \tag{10}$$

где A — параметр семейства, меняющийся в интервале $(0, \infty)$. Кривые нашего семейства, показанные на рисунке, пересекают ось x в точке $x = A$, $y = 0$ и имеют максимум в точке

$$x = \frac{3A}{2}, \quad y = \frac{4}{27A^2}.$$

Рассмотрение чертежа показывает, что при отрицательных λ уравнение $A - x + (\lambda/3c^2)\, x^3 = 0$ имеет один положительный



корень x_0, лежащий в интервале $(0, A)$; рассматривая x_0 как функцию λ и A:

$$x_0 = \theta(\lambda, A),$$

найдем, что θ — возрастающая функция от λ и возрастающая функция от A. Далее, если λ лежит в интервале $(0, {}^4/_9\,(c^2/A^2))$, то уравнение наше будет иметь два положительных корня: $x_0 = \theta(\lambda, A)$ и $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$, причем x_0 лежит в интервале $(A, {}^3/_2 A)$, а x_0' — в интервале $({}^3/_2 A, \infty)$; $\theta(\lambda, A)$ будет возрастающей функцией как от λ, так и от A; $\vartheta(\lambda, A)$ будет убывающей функцией от λ и от A. Наконец, если λ больше ${}^4/_9\,(c^2/A^2)$, то наше уравнение не будет иметь положительных корней.

Приступая к исследованию формулы (7), сделаем одно замечание: пусть в начальный момент, т. е. при $t = t_0$, радиус кривизны равен R_0. В этот начальный момент квадратный корень, стоящий в формуле (7), будет иметь знак плюс или минус, смотря по тому, возрастает ли радиус кривизны с течением времени при $t = t_0$ или нет. Изменяя время t на $-t$, мы всегда можем приписать этому квадратному корню знак плюс, иначе говоря, без ограничения общности, можем время выбрать так, чтобы радиус кривизны в рассматриваемый начальный момент $t = t_0$ возрастал с течением времени.

4. Рассмотрим случай, когда $\lambda > {}^4/_9(c^2/A^2)$, когда, следовательно, уравнение $A - x + (\lambda/3c^2)\,x^3 = 0$ не имеет положительных корней. В этом случае уравнение (7) перепишется следующим образом:

$$t - t_0 = \frac{1}{c}\int_{R_0}^{R}\sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx, \tag{11}$$

причем, согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, квадратный корень будет всегда положителен. Отсюда следует, что *R будет возрастающей функцией* от t; на начальное значение радиуса кривизны R_0 никаких в этом случае ограничений не налагается.

Так как радиус кривизны не может быть меньше нуля, то, уменьшаясь от R_0 с уменьшением t, согласно формуле (11), радиус кривизны через некоторый промежуток времени t' дойдет до нуля. Пользуясь очевидной аналогией, будем называть промежуток времени, понадобившийся, чтобы радиус кривизны от 0 дошел до R_0, *временем, прошедшим от сотворения мира* [1]); этот промежуток t' определяется равенством

$$t' = \frac{1}{c}\int_{0}^{R_0}\sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx. \tag{12}$$

Условимся в дальнейшем рассматриваемый мир называть *монотонным миром первого рода.*

Время, прошедшее от сотворения монотонного мира первого рода, рассматриваемое как функция R_0, A, λ, обладает следующими свойствами: 1) оно возрастает с увеличением R_0; 2) оно убывает с увеличением A, т. е. с увеличением массы материи пространства; 3) оно убывает с увеличением λ. Если $A > {}^2/_3 R_0$, то при любых λ время, протекшее от «сотворения мира», конечно; если $A \leqslant {}^2/_3 R_0$, то всегда найдется такое характеристическое значение

[1]) Время, прошедшее от сотворения мира, характеризует время, прошедшее от момента, когда пространство было точкой ($R = 0$) до нынешнего его состояния ($R = R_0$); это время может быть бесконечным.

$\lambda = \lambda_1 = {}^4/_9(c^2/A^2)$, что с приближением λ к этой величине, время, прошедшее от «сотворения мира», будет беспредельно возрастать.

5. Положим далее, что λ заключено в интервале $[0, {}^4/_9(c^2/A^2)]$; тогда начальное значение радиуса кривизны R_0 может лежать в одном из трех интервалов: $(0, x_0)$, (x_0, x_0'), (x_0', ∞). Если R_0 лежит в интервале (x_0, x_0'), то квадратный корень в формуле (7) имеет мнимое значение и пространство с такой начальной кривизной не может существовать. Случай, когда R_0 лежит в интервале $(0, x_0)$, мы рассмотрим в следующем пункте, теперь же остановимся на третьем случае, когда $R_0 > x_0'$ или $R_0 > \vartheta(\lambda, A)$. В этом случае рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что R будет *возрастающей функцией* времени, причем R может меняться, начиная с $x_0' = \vartheta(\lambda, A)$; промежуток времени, прошедший с момента, когда $R = x_0$, до момента $R = R_0$, назовем временем, протекшим от «сотворения мира», и обозначим через t':

$$t' = \frac{1}{c}\int\limits_{x_0'}^{R_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}}\,dx. \qquad (13)$$

Условимся рассматриваемый мир называть *монотонным миром второго рода*.

6. Рассмотрим, наконец, случай, когда λ заключено в интервале $(-\infty, 0)$. В этом случае, если $R_0 > x_0 = \theta(\lambda, A)$, то квадратный корень в формуле (7) становится мнимым и, следовательно, пространство с указанным радиусом кривизны не может существовать. Если $R_0 < x_0$, то рассматриваемый случай будет совершенно одинаков со случаем, опущенным при рассмотрении в предыдущем пункте. Итак, положим, что λ лежит в интервале $[-\infty, {}^4/_9(c^2/A^2)]$, а $R_0 < x_0$. Обычными рассуждениями [1]) можно в этом случае показать, что R будет периодической функцией от t с периодом $t_\text{п}$, который мы назовем *периодом мира* и который будет определен равенством

$$t_\text{п} = \frac{3}{c}\int\limits_{0}^{x_0} \sqrt{\frac{x}{A - x + \frac{\lambda}{3c^3}x^3}}\,dx, \qquad (14)$$

причем радиус кривизны будет меняться от нуля до x_0. Условимся такого рода мир называть *периодическим*. Период периодического

---

[1]) См., например, *Weierstrass K.*, Ueber eine Gattung der reel periodischer Functionen. — Monatsber. Königl. Akad. Wiss., 1866, а также *Horn J.*, Zs. Math. Phys., 47, 400 (1902), В нашем случае необходимо, конечно, внести некоторые видоизменения в рассуждения цитированных авторов; впрочем, периодичность в нашем случае устанавливается путем элементарного рассмотрения.

мира возрастает с возрастанием λ, стремясь к бесконечности, когда λ стремится к $\lambda_1 = {}^4/_9(c^2/A^2)$.

При малых λ период $t_п$ определяется приблизительной формулой

$$t_п = \frac{\pi A}{c}. \tag{15}$$

На периодический мир можно смотреть с двух точек зрения. Если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают пространственные координаты, а временные отличаются на целое число периодов, то радиус кривизны мира, увеличиваясь сначала от 0 до x_0, будет затем уменьшаться до нуля: тогда время существования мира будет конечным.

С другой стороны, если изменять время от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. если считать два явления совпадающими, коль скоро совпадают не только их пространственные координаты, но и их временные координаты, то мы придем к действительной периодичности кривизны пространства.

7. Данные, которыми мы располагаем, совершенно недостаточны для каких-либо численных подсчетов и для решения вопроса о том, каким миром является наша Вселенная; быть может, проблема причинности и проблема центробежной силы прольют свет на рассматриваемые здесь вопросы. Следует отметить, что в полученных нами формулах «космологическая» величина λ не определяется, являясь лишней константой задачи; быть может, электродинамические соображения смогут определить эту величину. Полагая $\lambda = 0$ и считая M равной массе $5 \cdot 10^{21}$ наших Солнц, будем для периода мира иметь величину порядка 10 миллиардов лет.

Эти цифры могут иметь, конечно, лишь иллюстративное значение.

А. А. ФРИДМАН

О ВОЗМОЖНОСТИ МИРА С ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ ПРОСТРАНСТВА*

§ 1

1. В заметке «О кривизне пространства» [1]) мы рассмотрели те решения космологических уравнений Эйнштейна, которые приводят к типам мира, обладающим в качестве общего признака постоянной положительной кривизной; при этом мы обсудили все возможные случаи. Однако возможность получить из космологических уравнений мир с постоянной положительной кривизной находится в тесной связи с вопросом о конечности пространства. Поэтому представляет интерес посмотреть, можно ли получить из тех же уравнений мир с постоянной отрицательной кривизной, о конечности которого едва ли можно говорить даже при некоторых дополнительных предположениях.

В настоящей заметке будет показано, что из космологических уравнений Эйнштейна действительно можно получить мир с постоянной отрицательной кривизной. Как в упомянутой работе, так и здесь мы должны различать два случая, а именно: 1) случай стационарного мира, кривизна которого постоянна во времени; и 2) случай нестационарного мира, кривизна которого хотя и постоянна в пространстве, но меняется со временем. Между стационарными мирами с постоянной отрицательной и с постоянной положительной кривизной имеется существенное различие. Именно, миры с отрицательной стационарной кривизной не допускают положительной плотности вещества; она должна быть или отрицательной, или нулевой. В соответствии с этим аналогом физически возможных стационарных миров (т. е. миров с неотрицательной плотностью вещества) является не мир Эйнштейна, а мир де Ситтера [2]).

---

* *Фридман А. А.*, Избранные труды, «Наука», М., 1966, стр. 238. (перепечатывается незначительными исправлениями).

1) *Friedmann A.*, Zs. Phys., 10, 376 (1922). (См. данный сборник, стр. 320. —*Прим. ред.*)

2) На то, что возможность мира с отрицательной кривизной пространства требует особого исследования, мне указал мой друг проф. Я. Д. Тамаркин.

В заключение этой заметки мы коснемся вопроса о том, можно ли вообще судить о конечности или бесконечности пространства по его кривизне.

2. Обратимся к общим предположениям, которые мы будем разделять на те же два класса, что и в упомянутой выше работе; при этом мы сохраним наши старые обозначения. Предположения первого класса заключаются в том, что в качестве космологических уравнений Эйнштейна мы возьмем за основу уравнения (A), (B), (C) упомянутой работы. Второй класс предположений будет теперь отличаться от старого. Предположив, что одну из мировых координат x_4 можно рассматривать как временную координату, мы можем придать (для рассматриваемого случая мира с отрицательной постоянной кривизной пространства) второму классу гипотез следующую формулировку: интервал ds^2 должен иметь вид

$$ds^2 = \frac{R^2\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2\,dx_4^2, \qquad (\mathrm{D}')$$

где R есть функция времени, а M — функция всех четырех мировых координат. Постоянная отрицательная кривизна пространства в нашем мире при этом пропорциональна $-1/R^2$ [1]).

Учитывая, что для нашего мира ds^2 образует неопределенную форму, можно, изменив обозначения, записать формулу (D_1) в виде

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\,\frac{(dx_1^2 + dx_1^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2\,dx_4^2. \qquad (\mathrm{D}'')$$

Разумеется, пространственная кривизна нашего мира остается отрицательной и пропорциональной $-1/R^2$.

Наша задача состоит в том, чтобы найти две функции R и M, удовлетворяющие космологическим уравнениям Эйнштейна, т. е. уравнениям (A), (B) и (C) упомянутой заметки.

Полагая в (A) $i = 1, 2, 3$ и $k = 4$, получаем следующие три уравнения:

$$R'(x_4)\,\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\,\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\,\frac{\partial M}{\partial x^3} = 0.$$

Эти уравнения показывают, что рассматриваемые миры могут принадлежать одному из двух типов.

Тип 1. Стационарные миры, $R' = 0$, R не зависит от времени.

Тип 2. Нестационарные миры, $R' \neq 0$, M зависит только от времени.

Рассмотрим сперва случай стационарного мира; решение для нестационарного мира отрицательной кривизны имеет большое

---

[1]) Относительно линейного элемента см., например, *Bianchi L.*, Lezioni di geometria differenziale, v. 1, Bologna, 1923, p. 345.

сходство с решением для нестационарного мира с постоянной положительной пространственной кривизной; поэтому мы коснемся нестационарного случая совсем кратко.

§ 2

1. Уравнения (A) для индексов $i, k = 1, 2, 3$ дают

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \tag{1}$$

где P, Q, L — произвольные пока функции своих аргументов.

Для определения P, Q и L воспользуемся уравнениями (A), полагая $i, k = 1, 2, 3$.

Вычисление дает

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) = \frac{1-\lambda R^2}{x_3^2}, \\ &-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) = \frac{1-\lambda R^2}{x_3^2}, \\ &-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}\right) + \frac{2}{x_3}\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x_3} = \frac{1-\lambda R^2}{x_3^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Вычитая первое уравнение этой системы из второго, получаем

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Отсюда следует

$$\left.\begin{aligned} P &= n(x_4)\,x_1^2 + a_1(x_4)\,x_1 + b_1(x_4), \\ Q &= n(x_4)\,x_2^2 + a_2(x_4)\,x_2 + b_2(x_4). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Учитывая (1) и (3), можно записать последнее из уравнений (2) в виде

$$-\frac{3-\lambda R^2}{x_3^2}(P+Q) = \frac{4n}{x_3} + \frac{1-\lambda R^2}{x_3^2} - \frac{2}{x_3}\frac{\partial L}{\partial x_3}. \tag{4}$$

Итак, если $P + Q$ действительно содержит одну из величин x_1 или x_2, т. е. если один из коэффициентов n, a_1, a_2 отличен от нуля, то вследствие того, что правая сторона этого уравнения не зависит ни от x_1, ни от x_2, множитель при $P + Q$ в уравнении (4) должен обращаться в нуль. Случай, когда обращаются в нуль все три величины n, a_1, a_2 следует рассматривать особо.

Таким образом, в случае, когда не все величины n, a_1, a_2 равны нулю, между λ и кривизной пространства существует соотношение

$$\lambda R^3 = 3 \tag{5}$$

С учетом (5) уравнения (2) сводятся к одному-единственному уравнению, определяющему функцию L, а именно:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n. \tag{6}$$

2. Ниже мы должны различать два случая: 1) $n \neq 0$ и 2) $n = 0$. В первом случае, как показывают формулы (D_1), (1), (3), можно без ограничения общности принять величину n равной единице; именно, применяя подстановку $x_4' = \varphi(x_4)$, всегда можно сделать $n = 1$. Учитывая это, получаем из (6):

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3. \tag{7}$$

Чтобы определить ρ, положим в уравнениях (A) $i = k = 4$; простое вычисление показывает, что в нашем случае ρ становится равным нулю. Следовательно, первый случай характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \\ + \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2}{x_3}\right]^2 dx_4^2. \tag{D_1'}$$

Переходя ко второму случаю ($n = 0$), находим для L уравнение

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}. \tag{8}$$

И в этом случае вычисление дает для ρ нулевое значение. Таким образом, второй случай также характеризуется нулевой плотностью вещества и интервалом

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left[\frac{a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4)}{x_3}\right]^2 dx_4^2. \tag{D_2'}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда все три коэффициента n, a_1, a_2 обращаются в нуль, так что M не зависит от x_1 и x_2. Интегрируя (2), мы снова приходим к двум случаям:

1) $\lambda R^2 = 3,\quad M = \dfrac{M_0(x_4)}{x_3},$

2) $\lambda R^2 = 1,\quad M = M(x_4),$

где M_0 и M — произвольные функции своих аргументов. Интервал для первого случая есть частный случай формулы (D_2'); предыдущее вычисление показывает, что плотность вещества здесь равна нулю.

Второй случай [1]) приводит, как нетрудно убедиться, к плотности вещества, отличной от нуля. Чтобы решить, будет ли при этом плотность положительной или отрицательной, необходимо использовать тот вид интервала, который соответствует индефинитной квадратичной форме и выражается формулой (D″). Проводя вычисления с гравитационными потенциалами формулы (D″), убеждаемся, что в рассматриваемом случае M является функцией только x_4; следовательно, можно, не нарушая общности, положить $M = 1$ [для этого нужно лишь ввести вместо x_4 координату $x_4' = \varphi(x_4)$]. Вычисляя в этом предположении плотность ρ, находим

$$\lambda = -\frac{c^2}{R^2}, \qquad \rho = -\frac{2}{\varkappa R^2},$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\,\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \tag{D$_3''$}$$

Таким образом, этот случай дает отрицательное значение ρ.

Резюмируя, можно сказать, что *стационарный мир* с постоянной отрицательной кривизной пространства возможен только при нулевой или отрицательной плотности вещества: интервал, соответствующий этому миру, выражается приведенными выше формулами (D_1'), (D_2') и (D_3'').

3. Обратимся теперь к случаю нестационарного мира. Заметим прежде всего, что M здесь есть функция только от x_4; соображения, не раз приводившиеся ранее, показывают, что M можно приравнять единице. При этих предпосылках мы без труда находим, что уравнения (A) для $i = 1, 2, 3$, $k = 4$ и для $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3$ удовлетворяются сами собой. Полагая в них $i = k = 1, 2, 3$, мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка, определяющее функцию $R(x_4)$, а именно:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \tag{9}$$

Это уравнение совершенно аналогично нашему прежнему уравнению [уравнение (4) цитированной работы]; последнее переходит точно в (9), если положить $c = 1$. Следовательно, все сказанное об уравнении (4) можно перенести на только что написанное уравнение. Поэтому мы не будем приводить подробностей, а вычислим лишь плотность вещества ρ для нестационарного мира.

Записывая для случая нестационарного мира интервал в виде (D″), мы получаем для R дифференциальное уравнение

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} - \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0.$$

---

[1]) На возможность этого случая мне указал В. Фок.

Интегрирование этого уравнения дает нам соотношение

$$\frac{R'^2}{c^2}=\frac{A+R+\frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R}$$

где A — произвольная постоянная. Вычисляя плотность вещества, получаем

$$\rho=\frac{3A}{\varkappa R^3} \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что при положительной постоянной A плотность вещества также положительна.

Отсюда следует *возможность нестационарных миров с постоянной отрицательной кривизной пространства и с положительной плотностью вещества.*

§ 3

1. Обратимся к обсуждению физического смысла результата, полученного в предшествующих параграфах. Мы убедились, что космологические уравнения Эйнштейна обладают решениями, соответствующими миру с постоянной отрицательной кривизной пространства. Этот факт указывает на то, что одних только космологических уравнений еще недостаточно, чтобы решить вопрос о конечности нашего мира. Значение кривизны пространства еще не дает нам непосредственных указаний на его конечность или бесконечность. Чтобы прийти к определенному заключению о конечности пространства, необходимо сделать некоторые дополнительные уточнения. В самом деле, мы называем пространство конечным, если расстояние между двумя произвольными несовпадающими точками не превышает некоторого положительного постоянного числа, какова бы ни была эта пара точек. Следовательно, прежде чем рассматривать проблему конечности пространства, мы должны еще условиться, какие точки этого пространства следует считать разными. Например, если мы будем рассматривать шар как поверхность трехмерного евклидова пространства, то точки, лежащие на одной параллели с разностью долгот в 360°, мы сочтем совпадающими; напротив, если бы мы рассматривали эти точки как различные, то получили бы многолистную сферическую поверхность в евклидовом пространстве. Расстояние между двумя произвольными точками на сфере не превосходит некоторого конечного числа; если же эту сферу понимать как бесконечно многолистную поверхность, то это расстояние можно сделать как угодно большим (сопоставляя соответствующим образом точки разным листам). Отсюда ясно, что прежде чем приступать

к рассуждениям о конечности мира, необходимо уточнить, какие точки следует считать совпадающими и какие — различными.

2. В качестве критерия для несовпадения точек можно принять наряду с прочими принцип «боязни привидений». Под этим мы подразумеваем аксиому: между двумя разными точками можно провести одну и только одну прямую (геодезическую) линию. Принимая этот принцип, уже нельзя считать разными две точки, соединяемые более чем одной прямой линией. Например, вследствие этого принципа два конца одного диаметра сферы не будут отличаться друг от друга. Разумеется, этот принцип исключает возможность привидений, так как привидение появляется в той же точке, что и производящий его прообраз.

Только что рассмотренная формулировка понятия совпадающих и несовпадающих точек приводит к представлению о том, что пространства с положительной постоянной кривизной являются конечными. Однако упомянутый критерий не позволяет сделать вывод о конечности пространств с отрицательной постоянной кривизной. Это дает основание утверждать, что одних только космологических уравнений Эйнштейна без дополнительных предположений еще недостаточно для того, чтобы сделать вывод о конечности нашего мира.

Ю. ОППЕНГЕЙМЕР, Г. ВОЛКОВ

О МАССИВНЫХ НЕЙТРОННЫХ СЕРДЦЕВИНАХ*

Высказывалось предположение о том, что при достаточно высоких давлениях в звездном веществе образуется новая фаза, состоящая из нейтронов. В данной статье мы исследуем гравитационное равновесие нейтронных конфигураций на основе уравнения состояния холодного ферми-газа и общей теории относительности. В случае масс, не превышающих $^1/_3 m_\odot$, существует только одно равновесное решение, приближенно описываемое нерелятивистским фермиевским уравнением состояния и ньютоновой теорией тяготения. В интервале $^1/_3 m_\odot < m < ^3/_4 m_\odot$ существует два решения: одно устойчивое и квазиньютоновское, а другое — более плотное и неустойчивое. В случае масс, превышающих $^3/_4 m_\odot$, вообще нет статических равновесных решений. Эти выводы качественно подтверждаются сравнением с соответствующим образом подобранными частными случаями аналитических решений, полученных недавно Толменом. Анализ возможного влияния отклонений от фермиевского уравнения состояния показывает, что реальное звездное вещество после истощения термоядерных источников энергии должно (если достаточно велика масса) неограниченно сжиматься, правда, все более и более медленно, но никогда не достигая истинного равновесия.

I. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы можно было применять методы, обычно используемые при анализе строения звезд [1, 2] (краткий обзор см. в [3]), необходимо знать распределение источников энергии и их зависимость от физических условий внутри звезды. Так как в период, когда Эддингтон вел свои исследования, о физических процессах, приводящих к выделению энергии внутри звезд, было известно немного, относительно этих источников энергии делались различные удобные с математической точки зрения предположения, результатом чего явился ряд моделей звезд (модель Эддингтона, модель точечного источника и т. п.). Обнаружилось, что при одном и том же уравнении состояния вещества звезды многие важные свойства решений (такие, как закон масса — светимость) мало зависят

* *Oppenheimer J. R.*, *Volkoff G. M.*, Phys. Rev., 55, 374 (1939).

от конкретного выбора распределения источников энергии и одинаковы для широкого класса моделей.

В 1932 г. Ландау [4] высказал мысль, что нужно начинать не с произвольных предположений об источниках энергии, выбранных лишь из соображений математического удобства, а с исследования физики равновесия заданной массы вещества, в которой энергия не выделяется и которая не испускает излучения. По-видимому, он надеялся, что такое исследование позволит лучше понять и более общий случай, когда учитывается выделение энергии. Такая модель хорошо описывает белые карлики, все вещество которых, как предполагают, находится в вырожденном состоянии с основной энергией, намного превышающей даже тепловую энергию, соответствующую 10^7 К, и с давлением, в основном определяемым только плотностью, а не температурой. Но эта модель совершенно непригодна для описания нормальной звезды главной последовательности, вещество которой в модели Эддингтона должно быть невырожденным и равновесные условия в которой в значительной мере определяются имеющимися в ней источниками энергии и связанными с этим градиентами температуры и давления. Известно, что устойчивость модели, учитывающей источники энергии, зависит также от чувствительности источников энергии к температуре и от того, насколько быстро они изменяются при изменении температуры. Если, однако, принять гипотезу, сейчас представляющуюся правдоподобной, о том, что главными источниками энергии (по крайней мере, для звезд главной последовательности) являются термоядерные реакции, то рассмотренный Ландау предельный случай снова приобретает интерес в связи с вопросом о конечном состоянии нормальной звезды главной последовательности, в котором она оказывается после того, как в ней иссякнет запас элементов, необходимых для термоядерных реакций. Ландау показал, что для холодного вырожденного ферми-газа не существует устойчивых равновесных конфигураций с массами, превышающими некоторую критическую, и все такие массы коллапсируют. Он установил, что для смеси электронов и ядер, содержащей в среднем две массы протона на один электрон, критическая масса приблизительно равна $1{,}5m_{\odot}$. В общем же случае критическая масса обратно пропорциональна квадрату массы, приходящейся на одну частицу, если относить полную массу лишь к тем частицам, которыми в основном определяется давление ферми-газа.

Высказывалось предположение, что после истощения всех термоядерных источников энергии, по крайней мере в центральной части звезды, если эта звезда достаточно массивна, образуется сердцевина из нейтронного конденсата (см. [5, 6] и др.). Оценка минимальной массы, при которой такая сердцевина должна быть устойчивой, проводилась Оппенгеймером и Сербером [7], которые, приняв во внимание действие ядерных сил, получили значение $\sim 0{,}1 m_{\odot}$. Ландау указал, что постепенное увеличение такой сердцевины, сопровождающееся выделением гравитационной энергии, может являться источником энергии звезды.

В связи с этим представляет интерес вопрос о том, приложима ли такая модель конечной стадии звезды и к сколь угодно тяжелым звездам, т. е. существует ли верхний предел возможных размеров нейтронной сердцевины. Результат самого Ландау для холодного релятивистски вырожденного ферми-газа, процитированный выше, дает в случае нейтронного газа верхний предел, равный приблизительно $6 m_{\odot}$, выше которого сердцевина должна терять устойчивость и коллапсировать. Против такого вывода могут быть два возражения. Первое: этот результат был получен на основе ньютоновой теории тяготения, тогда как при столь больших массах и плотностях необходимо учитывать общерелятивистские эффекты. Второе возражение: предполагалось, что ферми-газ является релятивистски вырожденным во всем объеме сердцевины, тогда как, с одной стороны, поскольку масса нейтрона велика, в основной части сердцевины более подходящим может оказаться нерелятивистски вырожденное уравнение состояния, а с другой стороны, нельзя пренебрегать гравитационным действием кинетической энергии нейтронов. Цель нашего исследования — выяснить, насколько изменится указанный вывод, если вместо ньютоновой теории тяготения исходить из общей теории относительности и взять более точное уравнение состояния. Сначала мы остановимся на общерелятивистском подходе к задаче о равновесии сферически-симметричных распределений вещества, а затем рассмотрим идеализированный частный случай холодного нейтронного газа. В заключение мы проанализируем полученные результаты и сравним их с некоторыми выводами проф. Толмена, которые приводятся в статье, публикуемой в этом же номере журнала [8].

II. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ РАВНОВЕСИЯ

Известно [9, стр. 239], что наиболее общему выражению для интервала в статическом сферически-симметричном случае можно придать вид

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + e^{\nu}\, dt^2, \tag{1}$$
$$\lambda = \lambda(r), \qquad \nu = \nu(r).$$

Если в веществе отсутствуют поперечные натяжения и нет перемещения масс, то тензор энергии-импульса задается как [9, стр. 243]

$$T_1{}^1 = T_2{}^2 = T_3{}^3 = -p, \qquad T_4{}^4 = \rho, \tag{2}$$

где p и ρ — давление и макроскопическая плотность энергии, измеренные в сопутствующих координатах. При такой записи интервала и тензора энергии-импульса и в предположении равенства нулю космологического члена уравнения Эйнштейна принимают вид [9, стр. 244]

$$8\pi p = e^{-\lambda}(\nu'/r + 1/r^2) - 1/r^2, \tag{3}$$

$$8\pi\rho = e^{-\lambda}(\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2, \tag{4}$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{p+\rho}{2}\nu', \tag{5}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по r. Вместе с уравнением состояния вещества $\rho = \rho(p)$ эти три уравнения определяют механическое равновесие распределения массы и зависимость компонент $g_{\mu\nu}$ от r.

Граница распределения вещества соответствует значению $r = r_b$, при котором $p = 0$, причем при $r < r_b$ мы имеем $p > 0$. При $r < r_b$ решение зависит от уравнения состояния вещества, связывающего величины p и ρ. Многим уравнениям состояния соответствует существование резкой границы с конечным значением r_b.

В пустом пространстве, окружающем сферически-симметричное распределение вещества, $p = \rho = 0$ и справедливо решение Шварцшильда [9, стр. 203]:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + A/r, \quad e^{\nu(r)} = B(1 + ct/r). \tag{6}$$

Постоянные A и B определяются из требования, чтобы на больших расстояниях от распределения вещества компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ соответствовали приближению слабого поля, т. е. $B = 1$ и $A = -2m$, где m — полная ньютоновская масса вещества, наблюдаемая удаленным наблюдателем [9, стр. 203 и 207].

Внутри границ вещества уравнения (3), (4) и (5) можно переписать следующим образом. На основании уравнения состояния $\rho = \rho(p)$ уравнение (5) непосредственно интегрируется:

$$\nu(r) = \nu(r_b) - \int\limits_0^{p(r)} \frac{2\,dp}{p+\rho(p)},$$

$$e^{\nu(r)} = e^{\nu(r_b)} \exp\left[-\int\limits_0^{p(r)} \frac{2\,dp}{p+\rho(p)}\right].$$

Константа $e^{\nu(r_b)}$ определяется из требования непрерывности функции e^{ν} при переходе через границу:

$$e^{\nu(r)} = \left(1 - \frac{2m}{r_b}\right) \exp\left[-\int\limits_0^{p(r)} \frac{2\,dp}{p+\rho(p)}\right]. \tag{7}$$

Таким образом, e^{ν} — известная функция аргумента r, если p есть заданная функция переменной r. Введем теперь в уравнение (4) новую переменную

$$u(r)=\frac{1}{2}r(1-e^{-\lambda}),\text{ или } e^{-\lambda}=1-\frac{2u}{r}. \tag{8}$$

Тогда оно примет вид

$$du/dr=4\pi\rho(p)r^2. \tag{9}$$

В уравнении (3) заменим величину $e^{-\lambda}$ ее выражением (8), а величину ν' — ее выражением из (5); получим

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{p+\rho(p)}{r(r-2u)}(4\pi pr^3+u). \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) образуют систему двух уравнений первого порядка для u и p. Исходя из некоторых начальных значений $u=u_0$ и $p=p_0$ при $r=0$, будем одновременно интегрировать эти уравнения до $r=r_b$, где $p=0$, т. е. пока не будет достигнута граница распределения вещества. Значением $u=u_b$ при $r=r_b$ определяется значение функции $e^{\lambda(r_b)}$, которая непрерывно сшивается на границе с внешним решением, так что

$$u_b=\frac{r_b}{2}[1-e^{-\lambda(r_b)}]=\frac{r_b}{2}\left[1-\left(1-\frac{2m}{r_b}\right)\right]=m.$$

Таким образом, масса сферического распределения вещества, определяемая удаленным наблюдателем, равна значению u_b, которое принимает переменная u при $r=r_b$.

На выбор p_0 и u_0 (начальных значений p и u в точке $r=0$) нужно наложить следующие ограничения:

1. В соответствии с физическим смыслом давления $p_0 \geqslant 0$.

2. Из уравнения (8) видно, что при всех конечных значениях $e^{-\lambda}$ должно выполняться равенство $u_0=0$. Так как компонента $g_{11}=-e^{\lambda}$ нигде не должна быть положительной, $u_0 \leqslant 0$ при бесконечных значениях $e^{-\lambda}$ в начале координат. Однако можно показать, что из всех конечных значений p_0 в начале координат лишь значение $p_0=0$ совместимо с отрицательным значением u_0, а для уравнений состояния типа рассматриваемых в нашей задаче исключается даже такая возможность, так что величина u_0 должна быть равна нулю [1]).

3. Для каждого конкретного уравнения состояния требуется специальное исследование, чтобы выяснить, существуют ли решения, для которых $0 \geqslant u_0 \geqslant -\infty$, а $p \to \infty$ при $r \to 0$.

---

[1]) Это можно показать следующим образом. Если выбрать некое конкретное значение p_0, то обычно оказывается возможным представить уравнение состояния в данном диапазоне давлений как $\rho=Kp^s$, взяв подходящий показатель степени s. Опираясь на такое уравнение состояния и на приближенную

III. КОНКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ

Из проведенного анализа видно, что уравнениями (9) и (10) при заданном уравнении состояния полностью определяется вид распределения вещества. Приняв $\rho = \text{const}$ и $u_0 = 0$, можно в явном виде проинтегрировать уравнения (9) и (10), что дает внутреннее решение Шварцшильда [9, стр. 246]. Другие распределения вещества, соответствующие иным уравнениям состояния, приведены в статье Толмена [8].

Если принять, что вещество состоит из частиц, масса покоя которых равна μ_0 и которые подчиняются статистике Ферми, и пренебречь их тепловой энергией [1]), а также всеми действующими между ними силами, то можно показать, что в этом случае уравнение состояния в параметрическом виде запишется как (ср. [10], заменив плотность массы плотностью энергии)

$$\rho = K(\operatorname{sh} t - t), \tag{11}$$

$$p = \frac{1}{3} K \left(\operatorname{sh} t - 8 \operatorname{sh} \frac{t}{2} + 3t\right), \tag{12}$$

где

$$K = \pi \mu_0^4 c^5 / 4h^3, \tag{13}$$

$$t = 4 \ln \left\{ \frac{\hat{p}}{\mu_0 c} + \left[1 + \left(\frac{\hat{p}}{\mu_0 c}\right)^2\right]^{1/2} \right\}. \tag{14}$$

форму уравнения (10) вблизи начала координат для случая $u_0 < 0$ и конечной величины p_0, имеем

$$\frac{dp}{dr} = \frac{p + \rho(p)}{2r} = \frac{p + Kp^s}{2r}.$$

Интегрирование этого уравнения показывает, что при $s < 1$ невозможно удовлетворить требованию $p_0 \geqslant 0$, а при $s \geqslant 1$ возможно лишь значение $p_0 = 0$. При уравнениях состояния, используемых в нашей задаче, всегда $s < 1$. Можно также отметить, что, согласно приведенному выше уравнению и уравнению (7), $e^{\nu(r)} \to \infty$ при $r \to 0$.

[1]) Условие теплового равновесия в статическом гравитационном поле дано Толменом [9, стр. 318] в виде $T_0 \sqrt{g_{44}} = \text{const}$, где T_0 — температура покоя. Равновесное состояние распределения вещества, которое в основном перестало излучать, соответствует низкой поверхностной температуре T_0. Если компонента метрики g_{44} всюду конечна, то температура T_0 будет малой во всем объеме, занятом веществом. Согласно тем сингулярным решениям, в которых $g_{44} = 0$ в начале координат, температура в центре в принципе может быть высокой. Но, с одной стороны, из уравнения (7) следует, что обращению g_{44} в нуль в начале координат соответствует бесконечное давление в центре, а в этом предельном случае приведенное ниже уравнение состояния сводится к равенству $\rho = 3p$, так что температура не влечет за собой радикально новых эффектов; с другой стороны, обращение g_{44} в нуль указывает на замедление вблизи начала координат всех физических процессов и поэтому может соответствовать нестатическим решениям, описывающим состояния, еще не достигшие равновесия, которых мы в этой статье не рассматриваем.

Здесь $\hat{p}$ — максимальный импульс для распределения Ферми, связанный с плотностью покоя частиц соотношением

$$\frac{N}{V}=\frac{8\pi}{3h^3}\hat{p}^3. \tag{15}$$

Подставляя приведенные выше выражения для p и ρ в уравнения (9) и (10), получаем

$$\frac{du}{dr}=4\pi r^2K(\operatorname{sh}t-t), \tag{16}$$

$$\frac{dt}{dr}=-\frac{4}{r(r-2u)}\cdot\frac{\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}t-4\operatorname{ch}\frac{t}{2}+3}\times$$
$$\times\left[\frac{4\pi}{3}Kr^3\left(\operatorname{sh}t-8\operatorname{sh}\frac{t}{2}+3t\right)+u\right]. \tag{17}$$

Эти уравнения следует интегрировать от значений $u=0$, $t=t_0$ при $r=0$ до $r=r_b$, где $t_b=0$ (что дает $p=0$) и $u=u_b$.

Скажем также о единицах измерения величин, входящих в эти уравнения. Уравнения (3) — (5), из которых были получены уравнения (16) и (17), записывались в релятивистских единицах [9, стр. 201], т. е. в таких, что $c=1$, $G=1$ (здесь c — скорость света, а G — гравитационная постоянная). Этим единица времени и единица массы определяются через (произвольную пока) единицу длины. Мы фиксируем теперь эту последнюю, полагая $K=1/4\pi$. Тогда уравнения (16) и (17) принимают вид

$$\frac{du}{dr}=r^2(\operatorname{sh}t-t), \tag{18}$$

$$\frac{dt}{dr}=-\frac{4}{r(r-2u)}\frac{\operatorname{sh}t-2\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\operatorname{ch}t-4\operatorname{ch}\frac{t}{2}+3}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{3}r^3\left(\operatorname{sh}t+8\operatorname{sh}\frac{t}{2}+3t\right)+u\right]. \tag{19}$$

Единица длины оказывается равной

$$a=\frac{1}{\pi}\left(\frac{h}{\mu_0c}\right)^{3/2}\frac{c}{(\mu_0G)^{1/2}},$$

а единица массы равна

$$b=\frac{c^2}{G}a=\frac{1}{\pi}\left(\frac{h}{\mu_0c}\right)^{3/2}\frac{c^3}{(\mu_0G^3)^{1/2}}.$$

В случае нейтронного газа $a=1{,}36\cdot10^6$ см, $b=1{,}83\cdot10^{34}$ г. Общий характер решения не зависит от массы нейтрона, ею определяется лишь масштабный множитель.

Мы не нашли способа аналитически проинтегрировать уравнения (18) и (19), так что провели их численное решение при отдельных конечных значениях t_0. Во всех этих случаях было принято, что $u_0 = 0$, поскольку вблизи начала координат уравнение состояния при конечных t_0 имеет вид $\rho(p) = Kp^s$, $s < 1$. Таким путем были получены первые 4 строки таблицы.

МАССА, РАДИУС И НЕЙТРОННАЯ ПЛОТНОСТЬ ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ t_0

t_0	Масса		Радиус		$\left(\frac{\hat{p}}{\mu_0 c}\right)_{r=0}$	$\left(\frac{N}{V}\right)_{r=0}$, 10^{39} см³; нейтроны
	В единицах уравнений (18), (19)	В единицах ⊙, для нейтронов	В единицах уравнений (18), (19)	В км, для нейтронов		
1	0,033	0,30	1,55	21,1	0,25	0,062
2	0,066	0,60	0,98	13,3	0,52	0,56
3	0,078	0,71	0,70	9,5	0,82	2,2
4	0,070	0,64	0,50	6,8	1,17	6,4
∞	0,037	0,34	0,23	3,1	∞	∞

При $t_0 \to \infty$ уравнения (18) и (19) можно заменить их асимптотическими формами

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2} r^2 e^t, \tag{20}$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2u)}\left(\frac{r^3}{6} e^t + u\right). \tag{21}$$

Точное решение этих уравнений имеет вид [1])

$$e^t = 3/7r^2, \qquad u = 3r/14, \tag{22}$$

что соответствует $t_0 = \infty$, $u_0 = 0$. Детальный анализ уравнений (20) и (21) показал, что других решений, соответствующих $t_0 = \infty$, $0 \geqslant u_0 \geqslant -\infty$, не существует. Точное решение (22) приближенных уравнений (20) и (21) было продолжено до значения r, при котором $t = 6$ [приближение вида (20), (21) вполне приемлемо при $t \geqslant 6$] и начиная с которого проводилось численное решение точных уравнений (18) и (19) до точки $r = r_b$, где $t = 0$. Так были получены данные последней строки таблицы.

Представляет интерес вопрос о том, может ли конечная гравитационная масса соответствовать бесконечному числу частиц (и бесконечной величине гравитационной энергии связи). Нетрудно показать, что не может. В самом деле, хотя плотность покоя

[1]) Это решение является предельным случаем решений V и VI, приведенных в работе Толмена [8].

частиц становится бесконечной при бесконечно большом давлении в центре, она все же остается интегрируемой и полное число частиц всегда конечно. Элемент собственного объема сферического слоя равен $4\pi e^{\lambda/2} r^2\, dr$. Вблизи начала координат решение приближенных уравнений дает

$$e^{\lambda/2} = \left(1 - \frac{2u}{r}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{3}{7}\right)^{-1/2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{1/2},$$

причем при больших t и $\hat{p}$

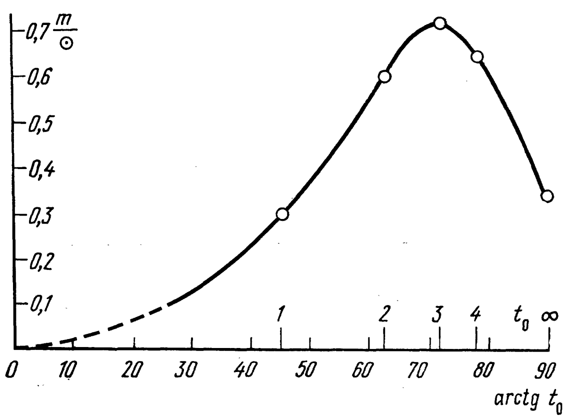
$$N/V \sim \hat{p}^3 \sim e^{3t/4} \sim 1/r^{3/2},$$

так что вблизи начала

$$N \sim \int\limits_0^r \frac{r^2}{r^{3/2}}\, dr \sim r^{3/2}.$$

В случае же несингулярных решений число частиц тем более конечно.

При очень малых значениях t уравнение состояния (11), (12) сводится к соотношениям $p = K\rho^{5/3}$ и $\hat{p} \sim t$. Исходя из такого

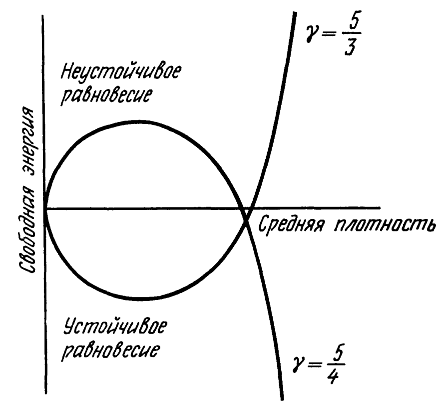


Фиг. 1
Зависимость m от t_0 для нейтронов.

уравнения и из ньютоновой теории тяготения (которая должна, по-видимому, давать правильные результаты при малых массах и плотностях) находим, что $\hat{p} \sim m^{3/2}$ или $m \sim t^{2/3}$. На фиг. 1

представлен примерный ход зависимости m от t_0 в том случае, когда элементарные частицы — нейтроны. Масса m выражена в единицах массы Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г), а по оси абсцисс откладывается $\operatorname{arctg} t_0$. Вблизи начала координат кривая проведена пунктиром, ибо, как уже было отмечено, нейтронная сердцевина с массой менее $0{,}1 m_\odot$ распадается на ядра и электроны.

Ход кривой удивителен тем, что масса возрастает с ростом t_0, достигая максимума около $t_0 = 3$, а затем уменьшается, падая примерно до $^1/_3 m_\odot$ при $t_0 = \infty$. Иными словами, при $m > {}^3/_4 m_\odot$ вообще не существует статических решений; при всех значениях m

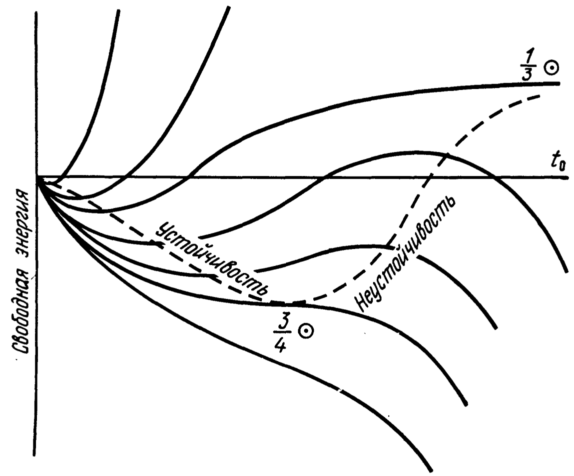


Фиг. 2

Зависимость свободной энергии от средней плотности.

в интервале $^3/_4 m_\odot > m > {}^1/_3 m_\odot$ имеется по два решения, а при всех $m < {}^1/_3 m_\odot$ — по одному.

Картина отчасти проясняется, если учесть следующее. В решениях Эмдена для нерелятивистских политроп ([11]; ср. также [12]) уравнение состояния берется в виде $p = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}$. При $n < 5$ или $\gamma > {}^6/_5$ были получены решения вполне удовлетворительные на первый взгляд (т. е. дающие конечную массу при конечном радиусе). Но Ландау [4] заметил, что, хотя эти решения и дают в каждом случае равновесную конфигурацию, такое равновесие не всегда *устойчиво*. Поэтому, если только не будет выполняться неравенство $\gamma \geqslant {}^4/_3$, равновесная конфигурация будет неустойчивой. Это можно показать путем следующих приближенных оценок. Гравитационная составляющая свободной энергии системы отрицательна и пропорциональна $\rho^{1/3}$, где ρ — взятая соответствующим образом средняя плотность (используется ньютонова теория тяготения). Составляющая свободной энергии, обусловленная сжатием, пропорциональна $\int p\,dv$, т. е. $\rho^{\gamma-1}$ ($\gamma \neq 1$). Поэтому $F = -a\rho^{1/3} + b\rho^{\gamma-1}$. Решения для политроп имеют место как при $\gamma = {}^5/_3$ ($>{}^4/_3$), т. е. $n = {}^3/_2$, так и при $\gamma = {}^5/_4$ ($<{}^4/_3$, но $>{}^6/_5$), т. е. при $n = 4$. Но, как можно видеть из примерных кривых



Фиг. 3

Примерный график зависимости свободной энергии от t_0

свободной энергии на фиг. 2, первое значение соответствует устойчивому, а второе — неустойчивому равновесию.

Результаты наших релятивистских расчетов при малых массах и малых плотностях и давлениях в центре (малые значения t_0), как уже отмечалось выше, должны, по-видимому, весьма точно согласоваться с данными нерелятивистских расчетов в случае уравнения состояния $p = K\rho^{5/3}$. Так как ρ — монотонная функция переменной t, кривые зависимости свободной энергии от t_0 при фиксированном полном числе частиц, а значит, и при фиксированном значении M_0 [1]) должны иметь при малых массах в общем

[1]) Величина M_0 — гравитационная масса при нулевой плотности. Гравитационная масса будет несколько изменяться вдоль кривой для постоянного числа частиц при возрастании плотности.

тот же самый вид, что и кривые зависимости свободной энергии от некоторой средней плотности в нерелятивистском случае (ср. кривую при $\gamma = {}^5/_3$ на фиг. 2). Тогда при увеличении числа частиц ход кривых свободной энергии должен изменяться таким образом, чтобы появилась возможность второй равновесной конфигурации. Но так как свободная энергия должна быть непрерывной функцией аргумента t_0 и так как мы знаем из нерелятивистских расчетов, что при малых массах (и малых плотностях) достигается устойчивое равновесие (минимум свободной энергии), можно заключить, что вторая равновесная конфигурация соответствует либо максимуму свободной энергии, либо точке перегиба на ее кривой (но, во всяком случае, не минимуму). На фиг. 3 показан примерный ход кривых зависимости свободной энергии от t_0 при разных значениях M_0, которым могло бы объясняться наличие одного равновесного состояния при малых массах, двух — при средних и отсутствие таких состояний при больших массах. Около кривых указаны фактические гравитационные массы, соответствующие точкам равновесия критических кривых свободной энергии, которые делят решения на три упомянутых выше типа.

IV. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, СОПОСТАВЛЕНИЕ С РЕШЕНИЯМИ ТОЛМЕНА

Прежде чем рассматривать физические следствия наших результатов, можно попытаться показать, как их качественные аспекты могут быть получены из аналитических решений, недавно найденных проф. Толменом [8] [1]). Это поможет нам также понять, к чему могли бы приводить изменения уравнения состояния нейтронного газа при больших плотностях.

С одной стороны, решение Толмена IV, о котором говорится в § 6 его статьи, позволяет понять наличие предельного значения массы для статических решений и приближенно оценить его. С другой стороны, решение Толмена VI, обсуждающееся в § 8 (и косвенно решение V), обладает при $n = {}^1/_2$ свойствами, близко напоминающими наше сингулярное решение при $t_0 \to \infty$, а при должном выборе констант дает тот же порядок величины массы, что и наше.

Решение Толмена IV несингулярно и соответствует квадратичному уравнению состояния (6.5) его статьи

$$8\,\frac{(p_c-p)^2}{p_c+\rho_c}-5\,(p_c-p)+\rho_c-\rho=0, \qquad \text{(Толмен, 6.5)}$$

где ρ_c и p_c — значения плотности и давления в центре. С помо-

[1]) Мы чрезвычайно обязаны проф. Толмену, познакомившему нас со своими результатами до их опубликования и давшему полезные комментарии к ним.

щью уравнений (6.4), (6.6) и (6.9) статьи Толмена масса, соответствующая этому решению, выражается через p_c и ρ_c как

$$m=4\left(\frac{p_c}{\rho_c+3p_c}\right)^{3/2}\left[\frac{8\pi}{3}(\rho_c-3p_c)\right]^{-1/2}. \qquad (23)$$

Если теперь связать сами величины ρ_c и p_c, пользуясь уравнением состояния ферми-газа (11), (12), то $p_c \sim \rho_c^{5/3}$ при $\rho_c \to 0$ и $\rho_c - 3p_c \sim O(\rho_c^{1/2})$ при $\rho_c \to \infty$, и мы видим, что величина m имеет максимум. При значениях ρ_c, соответствующих этому максимуму, уравнение состояния (Толмен, 6.5) качественно не отличается от фермиевского уравнения состояния (11), (12), что можно видеть из сравнения выражения $d \ln p / d \ln \rho$ для обоих решений. Само максимальное значение массы, даваемое формулой (23), оказывается равной $\sim 0{,}4m_\odot$, что по порядку величины совпадает с полученным нами значением $\sim 0{,}7m_\odot$.

Решение Толмена V при $n = {}^1/_2$, $R \to \infty$ и его решение VI при $n = {}^1/_2$, $B/A \to 0$ — это как раз наше решение (22), соответствующее уравнению состояния $p = {}^1/_3\rho$ — единственное неустойчивое сингулярное решение. Согласно решению V при $n = {}^1/_2$ и конечных значениях R, давление отличается от величины ${}^1/_3\rho$ членами порядка $\rho^{-1/6}$; согласно же решению VI при $n = {}^1/_2$ и конечных значениях B/A, когда плотность ρ велика, $\rho - 3p = \mathrm{const}\cdot\rho^{1/2}$, что вполне соответствует поведению сильно сжатого ферми-газа. Записав для этого решения массу как

$$m = A/42B \qquad \text{(Толмен, 8.9)}$$

и подобрав отношение B/A таким образом, чтобы уравнение состояния решения VI, т. е.

$$p=\frac{1}{3}\rho\,\frac{1-9(B/A)(3/56\pi)^{1/2}\rho^{-1/2}}{1-(B/A)(3/56\pi)^{1/2}\rho^{-1/2}}, \qquad \text{(Толмен, 8.5)}$$

соответствовало с точностью до членов порядка $\rho^{1/2}$ уравнению (11), (12), найдем $B/A = ({}^7/_3)^{1/2}$ и $m \sim {}^1/_7 m_\odot$, тогда как фермиевское уравнение состояния дает ${}^1/_3 m_\odot$.

Такое сравнение, по необходимости довольно грубое, может, очевидно, дать некоторое представление о характере полученного нами выше аналитического решения, соответствующего максимальной массе и максимальной (бесконечной) центральной плотности.

V. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗВЕЗДНОМУ ВЕЩЕСТВУ

Мы видели, что если масса нейтронной сердцевины больше $m \sim 0{,}7m_\odot$, то статические решения для холодной нейтронной сердцевины отсутствуют и равновесия нет. Соответствующая максимальная масса M_0 до коллапса превышает это значение приблизительно на 10%. Так как при массах менее $\sim 0{,}1 m_\odot$ нейтронные сердцевины едва ли могут быть устойчивыми по отношению к распаду с образованием электронов и ядер, а также ввиду того, что, даже когда истощаются термоядерные источники энергии, они не образуются за счет коллапса обычного вещества при массах менее $1{,}5 m_\odot$ (предел Ландау), представляется маловероятным, чтобы статические нейтронные сердцевины могли играть сколько-нибудь важную роль в звездной эволюции [1]). Вопрос о том, что происходит после того, как исчерпаны источники энергии, со звездами, массы которых превышают $1{,}5 m_\odot$, все еще остается открытым. Заметим, что, согласно критическому решению с $m \sim 0{,}7 m_\odot$, потенциалы $g_{\mu\nu}$ нигде не обладают сингулярностью и, в частности, такая сердцевина не «защищает себя» от притока новых порций вещества равенством нулю компоненты g_{44} на границе. Поэтому представляется, что есть лишь два возможных ответа на вопрос об «окончательном» поведении очень массивных звезд: либо уравнение состояния, которым мы пользовались до сих пор, перестает верно описывать поведение сильно сжатого вещества, так что сделанные выше выводы качественно неверны, либо звезда продолжает беспредельно сжиматься, никогда не достигая равновесия. Обе эти альтернативы заслуживают серьезного рассмотрения.

Плотность в центре «критической» сердцевины даже превышает ядерную, так что наша экстраполяция фермиевского уравнения состояния едва ли хорошо обоснована. При таких условиях распад нейтронов (либо на протоны и электроны, либо на мезоны) энергетически невыгоден и не будет происходить. Что же касается сравнительно слабых сил притяжения, действующих, насколько это известно, между нейтронами, то они лишь облегчат коллапс сердцевины, а не предотвратят его. Если же при исключительно больших сжатиях возможны какие-то явления, эквивалентные возникновению сил отталкивания, т. е. приводящие к повышению давления при заданной плотности выше значения, соответствующего фермиевскому уравнению состояния, то это могло бы противодействовать коллапсу.

Но даже при наличии таких сил отталкивания едва ли стали бы возможны статические решения для сколь угодно больших скоплений вещества. Дело в том, что эти силы при малых плотностях не могут изменить существенно уравнения состояния, так что размеры сердцевины с необходимостью будут конечными, как

---

[1]) Масса оболочки из обычной (хотя и плотной) материи, окружающей сердцевину, должна быть малой в случае сердцевин, намного более массивных, чем самая легкая сердцевина, устойчивая по отношению к распаду на электроны и ядра.

будет конечной и гравитационная масса сердцевины

$$m = \frac{1}{2} r_b \left(1 - e^{\lambda(r_b)}\right). \qquad \text{(Толмен, 5.5)}$$

Не может быть бесконечной до коллапса и масса M_0. Для этого решение должно было бы быть сингулярным. Но силы отталкивания при большой плотности могут самое большее лишь приблизить величину $3p$ к ρ сильнее, чем это допускается фермиевским уравнением состояния, а при $\rho = 3p$, как уже было отмечено выше и подсказывается также решениями Толмена V и VI, *единственным* сингулярным статическим решением является решение (22), согласно которому полное число частиц конечно.

Путем несложных рассуждений можно найти верхний предел наибольшей массы, который могут обеспечить сильные отталкивательные взаимодействия при больших плотностях. При $\rho < < 10^{15}$ г·см$^{-3}$ такие силы едва ли будут существенны. Предположим, что при $\rho \geqslant 10^{15}$ их наибольшее влияние сводится к тому, что они дают равенство $p = {}^1/_3\, \rho$. Тогда масса сферы, в которой уравнение состояния выполняется до $\rho = 10^{15}$ и где давление p быстро падает при $\rho \to 0$, дается нашим решением (22) — она имеет порядок $1m_\odot$. Представляется правдоподобным, что найденный нами предел $\sim 0{,}7 m_\odot$ близок к истине.

В этом рассуждении мы исходили из требования, чтобы даже при сколь угодно больших плотностях величина $\rho - 3p$ не становилась отрицательной. Это в свою очередь тесно связано с положительной определенностью плотности энергии (покоя) нейтронов и силовых полей (исключая гравитационное), связанных с ними. Представляется правдоподобным, что если бы давление p могло стать намного больше ${}^1/_3\rho$, то статические решения для сколь угодно больших масс можно было бы получить [1]).

Из сказанного явствует, что при анализе поведения реальных тяжелых звезд в течение больших промежутков времени, по-видимому, необходимо учитывать нестатические решения. Среди множества (сферически-симметричных) нестатических решений, вероятно, можно найти такие, для которых сжатие (и вообще изменение во времени) замедлялось бы все более и более, так что эти решения можно было бы рассматривать как хотя и не равновесные, но квазистатические. Некоторые основания для этого можно усмотреть из следующего. Если масса достаточно велика, то сердцевина коллапсирует; при этом плотность и давление вблизи центра растут, а компонента метрики $g_{44} = e^\nu$ уменьшается [формула (7)]. По мере уменьшения e^ν все процессы в центральной области

---

[1]) Таким образом, при $\rho = \mathrm{const}$ существует класс сингулярных статических решений, для которых $p \sim k/r^3$ и которые, по-видимому, соответствуют при $K \to \infty$ бесконечным массам. Один из нас (Г. В.) предполагает рассмотреть этот случай подробнее в другой работе.

замедляются с точки зрения внешнего наблюдателя. Формально это следует из наличия в уравнениях Эйнштейна произведений вида

$$e^{-\nu}\frac{d^2\lambda}{dt^2}, \quad e^{-\nu}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2, \quad e^{-\nu}\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\nu}{dt}.$$

Когда плотность в центре достаточно велика, уже нельзя пренебрегать даже очень медленными изменениями величин со временем, и сингулярные решения, которые, вероятно, описывают очень массивные нейтронные сердцевины, невозможно получить, если не учитывать это обстоятельство. В настоящее время исследуются решения такого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eddington A.*, The Internal Constitution of the Stars, Cambridge, Cambridge University Press, 1926.
2. *Strömgren B.*, Ergebn. Exakt. Naturwiss., **16**, 465 (1937).
3. *Gamow G.*, Phys. Rev., **53**, 595 (1938).
4. *Ландау Л. Д.*, Phys. Zs. Sowjetunion, № 1, 285 (1932). (перевод: *Ландау Л. Д.*, Собрание трудов, т. I, «Наука», М., 1969, стр. 86).
5. *Gamow G.*, Atomic Nuclei and Nuclear Transformations, 2nd edition, Oxford, 1936, p. 234.
6. *Ландау Л. Д.*, Nature, **141**, 333 (1938).
7. *Oppenheimer J. R.*, *Serber R.*, Phys. Rev., **54**, 540 (1938).
8. *Tolman R. C.*, Phys. Rev., **55**, 364 (1939).
9. *Tolman R. C.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934, p. 246 (имеется перевод: *Р. Толмен*, Относительность, термодинамика и космология, «Наука», М., 1974).
10. *Chandrasekhar S.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **95**, 222 (1935).
11. *Emden R.*, Gaskugeln, Leipzig—Berlin, 1907.
12. Handbuch der Astrophys., Bd. 3, S. 186.

Ю. ОППЕНГЕЙМЕР, Г. СНАЙДЕР

О БЕЗГРАНИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ СЖАТИИ*

После истощения всех источников термоядерной энергии достаточно массивная звезда претерпевает коллапс. Если вследствие распада, вызванного вращением, излучения массы или выдувания массы излучением масса звезды не снизится до величины порядка массы Солнца, то ее сжатие будет происходить безгранично. В этой работе мы рассматриваем решения уравнений гравитационного поля, описывающие такой процесс. В части I дан общий и качественный анализ поведения метрического тензора в процессе сжатия, когда радиус звезды асимптотически приближается к ее гравитационному радиусу, а свет, покидающий ее поверхность, испытывает неограниченно усиливающееся красное смещение и может уходить от звезды лишь во все более узком телесном угле. В части II получено аналитическое решение уравнений поля, подтверждающее эти общие соображения в случае, когда можно пренебречь давлением внутри звезды. Для наблюдателя, сопутствующего веществу звезды, полное время коллапса конечно и составляет в этом идеализированном случае при обычных массах звезд срок порядка одних суток; внешний наблюдатель видит, что звезда асимптотически сжимается до своего гравитационного радиуса.

I

Недавно было показано [1], что общерелятивистские уравнения поля не имеют статических решений в случае сферически-симметричного распределения холодных нейтронов, если общая масса нейтронов превышает величину $\sim 0,7 M_{\odot}$. Представляет интерес исследовать поведение нестатических решений этих уравнений.

В данной работе мы будем рассматривать звезды больших масс ($> 0,7 M_{\odot}$), исчерпавшие свои ядерные источники энергии. Такая звезда коллапсирует под действием собственного гравитационного поля, выделяя при этом энергию. Энергия коллапса может быть подразделена на 4 части: 1) кинетическая энергия движения частиц в звезде; 2) излучение; 3) потенциальная и кинетическая

---

* *Oppenheimer J. R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939).

энергия внешних слоев вещества звезды, которые могут выдуваться излучением; 4) энергия вращения, за счет которой звезда может разделиться на две или более частей. Если первоначальная масса звезды достаточно мала, или если достаточная часть массы может быть сдута с поверхности звезды излучением или непосредственно унесена в виде излучения, или если момент импульса звезды достаточно велик для того, чтобы она распалась на небольшие фрагменты, то оставшаяся масса может образовать устойчивое статическое распределение — белый карлик. Мы рассматриваем случай, когда этого не происходит.

Если в таком случае мы можем на поздних этапах сжатия пренебрегать гравитационным действием всякого покидающего звезду излучения или вещества, а также отклонениями от сферической симметрии, вызванными вращением, то вне границ r_b распределения звездного вещества интервал должен принять вид

$$ds^2 = e^{\nu}\, dt^2 - e^{\lambda}\, dr^2 - r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

где $e^{\nu} = 1 - r_0/r$ и $e^{\lambda} = (1 - r_0/r)^{-1}$. Здесь r_0 — гравитационный радиус звезды, связанный с ее гравитационной массой m равенством $r_0 = 2mg/c^2$; он постоянен. Поскольку давление звездного вещества недостаточно для противодействия силам собственного гравитационного притяжения звезды, она, по-видимому, начнет сжиматься, так что граница r_b неизбежно будет уменьшаться до гравитационного радиуса r_0. Локальный наблюдатель, находящийся вблизи поверхности звезды, где в любом случае давление должно быть низким, увидит, что вещество уходит внутрь со скоростью, очень близкой к скорости света. Далекому же наблюдателю это движение представится в $(1 - r_0/r_b)^{-1}$ раз более медленным. Энергия, уходящая с поверхности звезды, будет очень сильно уменьшаться в процессе ухода за счет эффекта Доплера для удаляющегося источника, за счет большого гравитационного красного смещения, $(1 - r_0/r_b)^{1/2}$, и за счет гравитационного отклонения света, которое будет препятствовать уходу излучения во всех направлениях, кроме конуса с осью, образованной внешней нормалью к поверхности, раствор которого неограниченно суживается по мере сжатия звезды. Таким образом, звезда постепенно замыкается, изолируясь от далекого наблюдателя (сохраняется лишь ее гравитационное поле). Позднее мы увидим, что, хотя с точки зрения далекого наблюдателя для такой полной изоляции требуется бесконечное время, наблюдатель, сопутствующий звездному веществу, находит этот срок конечным и, возможно, очень коротким.

Будем считать, что внутри звезды вещество распределено сферически-симметрично. Тогда интервал можно брать в виде (1).

При таком интервале уравнения поля записываются как

$$-8\pi T_1{}^1 = e^{-\lambda}(\nu'/r + 1/r^2) - 1/r^2, \tag{2}$$

$$8\pi T_4{}^4 = e^{-\lambda}(\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2, \tag{3}$$

$$-8\pi T_2{}^2 = -8\pi T_3{}^3 = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) - e^{-\nu}(\ddot{\lambda}/2 + \dot{\lambda}^2/4 - \dot{\lambda}\dot{\nu}/4), \tag{4}$$

$$8\pi T_4{}^1 = -8\pi e^{\nu-\lambda} T_1{}^4 = e^{-\lambda}\dot{\lambda}/r. \tag{5}$$

Штрихами здесь обозначены производные по r, а точками — производные по t.

Тензор энергии-импульса $T_\nu{}^\mu$ состоит из двух частей: 1) вклада вещества, соответствующего электронам, протонам, нейтронам и ядрам, и 2) вклада излучения. Вклад вещества можно мыслить как тензор для жидкости, движущейся в радиальном направлении, для которой в сопутствующих координатах выполняется определенное соотношение между давлением, плотностью и температурой. Излучение можно считать находящимся в равновесии с веществом при этой температуре, если не считать потока излучения, связанного с градиентом температуры.

Нам не удалось проинтегрировать эти уравнения, не полагая давление равным нулю. Можно, однако, получить некоторую информацию о решениях, опираясь на неравенства, следующие из дифференциальных уравнений и из условий регулярности решений. Из уравнений (2) и (3) можно видеть, что, если λ убывает до нуля при $r \to 0$ медленнее, чем r^2, то компонента $T_4{}^4$ становится сингулярной, как и $T_1{}^1$ и ν' вместе или по отдельности. С физической точки зрения такая сингулярность должна означать, что выражение, взятое для тензора энергии-импульса, не учитывает некоего существенного физического обстоятельства, которое в действительности устраняет эту сингулярность. Кроме того, на ранней стадии своей эволюции звезда не должна обладать сингулярностью плотности или давления, и такая сингулярность не может развиться за конечное время.

Поэтому, если $\lambda = 0$ при $r = 0$, функцию λ можно выразить через $T_4{}^4$, так как интегрирование уравнения (3) дает

$$\lambda = -\ln\left[1 - \frac{8\pi}{r}\int_0^r T_4{}^4 r^2\,dr\right]. \tag{6}$$

Следовательно, $\lambda \geqslant 0$ при всех значениях r ввиду неравенства $T_4{}^4 \geqslant 0$.

Зная теперь, что $\lambda \geqslant 0$, из уравнения (2) легко извлечь информацию о величине ν':

$$\nu' \geqslant 0, \tag{7}$$

так как и λ, и $(-T_1^1)$ должны быть неотрицательными.

Если при $r = \infty$ взять время t, соответствующее ходу часов (s), то мы найдем $\nu = 0$ при $r = \infty$. Из этого граничного условия и из неравенства (7) следует, что

$$\nu \leqslant 0. \tag{8}$$

Условием плоского характера пространства при больших r является равенство $\lambda = 0$ при $r = \infty$. Сложение уравнений (2) и (3) дает

$$8\pi (T_4^4 - T_1^1) = e^{\lambda} (\lambda' + \nu')/r. \tag{9}$$

Так как $T_4^4 \geqslant 0$, а $T_1^1 \leqslant 0$, мы имеем

$$\lambda' + \nu' \geqslant 0. \tag{10}$$

Из граничных условий для λ и ν следует, что

$$\lambda + \nu \leqslant 0. \tag{11}$$

Для тех частей звезды, которые участвуют в коллапсе (т. е. для всех ее частей, кроме вещества, сдуваемого излучением), из уравнения (5) следует положительность $\dot{\lambda}$. Так как функция λ со временем возрастает, она может либо а) стремиться к некоторому асимптотическому значению равномерно как функция r, либо б) неограниченно возрастать (хотя и неравномерно в зависимости от r, так как при $r = 0$ всегда должно выполняться условие $\lambda = 0$). Если бы функция λ стремилась к конечному пределу, то сама звезда приближалась бы к стационарному состоянию. Мы предполагаем, однако, что связь между компонентами T_ν^μ не допускает вообще никакого стационарного решения, так что эта возможность отбрасывается. В случае «б» можно полагать, что при любом значении $r > 0$ функция λ превысит любое наперед взятое значение, если время t достаточно велико. Если бы это было так, то объем звезды

$$V = 4\pi \int_0^{r_b} e^{\lambda/2} r^2 \, dr \tag{12}$$

возрастал бы со временем неограниченно. Ввиду постоянства массы это означало бы, что средняя плотность вещества звезды стремится к нулю. Мы увидим, однако, что при всех значениях r, кроме r_0, функция λ стремится к конечному пределу и лишь при $r = r_0$ неограниченно возрастает.

II

Чтобы ответить на этот вопрос, мы найдем решение уравнений поля для того предельного случая тензора энергии-импульса, когда давление равно нулю. В отсутствие давления уравнения поля не имеют статических решений, кроме как при обращении в нуль всех компонент T_ν^μ. Полагая $p = 0$, мы приходим к свободному гравитационному коллапсу вещества. Можно думать, что общая картина решения, полученного таким образом, остается справедливой даже в случае отличного от нуля давления, если только масса достаточно велика, чтобы обеспечить коллапс.

Для решения этой задачи мы сочли удобным действовать по аналогии с работой Толмена [2] и воспользоваться новой системой координат, сопутствующих веществу. Затем, получив искомое решение, мы вернемся к интервалу вида (1) путем координатного преобразования.

Рассмотрим интервал вида

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\bar\omega}\, dR^2 - e^{\omega}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{13}$$

Так как рассматриваются сопутствующие координаты, а давление равно нулю,

$$T_4^4 = \rho, \tag{14}$$

а все прочие компоненты тензора энергии-импульса отсутствуют.

Теперь уравнения поля имеют вид

$$8\pi T_1^1 = 0 = e^{-\omega} - e^{-\bar\omega}\frac{\omega'^2}{4} + \ddot\omega + \frac{3}{4}\dot\omega^2 = 0, \tag{15}$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = 0 = e^{-\bar\omega}(\omega''/2 - \omega'^2/4 - \bar\omega'\omega'/4) + \\ + \ddot{\bar\omega}/2 + \dot{\bar\omega}^2/4 + \ddot\omega/2 + \dot\omega^2/4 + \dot{\bar\omega}\dot\omega/4, \tag{16}$$

$$8\pi T_4^4 = 8\pi\rho = e^{-\omega} - e^{-\bar\omega}\left(\omega'' + \frac{3}{4}\omega'^2 - \bar\omega'\omega'/2\right) + \\ + \dot\omega^2/4 + \dot{\bar\omega}\dot\omega/2, \tag{17}$$

$$8\pi e^{\bar\omega} T_4^1 = -8\pi T_1^4 = 0 = \omega'\dot\omega/2 - \dot{\bar\omega}\omega'/2 + \dot\omega'. \tag{18}$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по R, а точки — дифференцирование по τ. Интеграл уравнения (18) получен Толменом [1]):

$$e^{\bar\omega} = e^{\omega}\omega'^2/4f^2(R), \tag{19}$$

где $f^2(R)$ — положительная, а в остальном произвольная функция координаты R. Полагая $f^2(R) = 1$, мы приходим к достаточно широкому классу решений.

---

[1]) Мы признательны проф. Толмену и м-ру Омеру за предоставление нам соответствующих данных, а также за ценное обсуждение.

Подставляя результат (19) при $f^2(R) = 1$ в уравнение (15), получаем

$$\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^2 = 0. \tag{20}$$

Решение этого уравнения таково:

$$e^{\omega} = (F\tau + G)^{4/3}, \tag{21}$$

где F и G — произвольные функции координаты R.

Подстановка интеграла (19) в уравнение (16) приводит к результату, эквивалентному решению (21).

Из уравнения (17) и интегралов (19) и (21) найдем плотность массы:

$$8\pi\rho = \frac{4}{3}(\tau + G/F)^{-1}(\tau + G'/F')^{-1}. \tag{22}$$

Решение (21) допускает меньшую свободу, чем казалось бы, хотя в него входят две произвольные функции F и G; действительно, если взять координату R в виде функции новой переменной R^*, то дифференциальные уравнения (15), (17) и (18) не изменятся. Поэтому можно положить

$$G = R^{3/2}. \tag{23}$$

В конкретный момент времени (например, $\tau = 0$) плотность массы можно задать как функцию координаты R. Тогда уравнение (22) становится дифференциальным уравнением первого порядка для функции F:

$$FF' = 9\pi R^2\rho_0(R). \tag{24}$$

В решении этого уравнения имеется лишь одна произвольная постоянная. Теперь ясно, что задание условия $f^2(R) = 1$ эквивалентно выбору лишь однопараметрического семейства функций в качестве начальных значений $\dot{\rho}_0$, тогда как в общем случае должно быть возможно произвольное задание начальных значений $\dot{\rho}_0$.

В качестве частного случая (24) примем теперь

$$FF' = \begin{cases} \text{const}\cdot R^2; \quad \text{const} > 0, & \text{при } R < R_b, \\ 0 & \text{при } R > R_b. \end{cases} \tag{25}$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$F = \begin{cases} -\frac{3}{2} r_0^{1/2}(R/R_b)^{3/2} & \text{при } R < R_b, \\ -\frac{3}{2} r_0^{1/2} & \text{при } R > R_b, \end{cases} \tag{26}$$

где r_0 — постоянная, введенная для большего удобства; это гравитационный радиус звезды.

Найдем преобразование координат, приводящее интервал к виду (1). Из сравнения выражений (1) и (13) явствует, что следует принять

$$e^{\omega/2}=(F\tau+G)^{2/3}=r. \tag{27}$$

Новую переменную t, зависящую от τ и R, нужно ввести так, чтобы компоненты $g_{\mu\nu}$ приняли вид (1). Взяв контравариантные компоненты метрического тензора, найдем:

$$g^{44}=e^{-\nu}=\dot{t}^2-t'^2/r'^2=\dot{t}^2(1-\dot{r}^2), \tag{28}$$

$$g^{11}=-e^{-\lambda}=-(1-\dot{r}^2), \tag{29}$$

$$g^{14}=0=\dot{t}\dot{r}-t'/r'. \tag{30}$$

Здесь (30) — дифференциальное уравнение первого порядка для t. Пользуясь выражением (27) для r и выражениями (26) и (23) для F и G, находим

$$\frac{t'}{\dot{t}}=\dot{r}r'=\begin{cases} -(r_0R)^{1/2}\left[R^{3/2}-\frac{3}{2}r_0^{1/2}\tau\right]^{-2/3} & \text{при } R>R_b,\\ -r_0^{1/2}RR_b^{-3/2}\left[1-\frac{3}{2}r_0^{-1/2}\tau R_b^{-3/2}\right]^{1/3} & \text{при } R<R_b. \end{cases} \tag{31}$$

Общее решение уравнения (31) имеет вид

$$t=L(x) \text{ при } R>R_b, \tag{32a}$$

где

$$x=\frac{2}{3r_0^{1/2}}\left(R^{3/2}-r^{3/2}\right)-2(rr_0)^{1/2}+r_0\ln\frac{r^{1/2}+r_0^{1/2}}{r^{1/2}-r_0^{1/2}},$$

и

$$t=M(y) \text{ при } R<R_b, \tag{32б}$$

где

$$y=\frac{1}{2}\left[(R/R_b)^2-1\right]+\frac{R_br}{r_0R}.$$

Здесь L и M — совершенно произвольные функции своих аргументов.

Вне звезды, где $R>R_b$, мы потребуем, чтобы интервал принял шварцшильдовский вид, так как мы снова пренебрегаем гравитационным действием уходящего излучения. Поэтому

$$e^{\lambda}=(1-r_0/r)^{-1}, \tag{33}$$

$$e^{\nu}=1-r_0/r. \tag{34}$$

Это требование фиксирует вид функции L; из уравнения (28) видно, что следует взять $L(x) = x$ или

$$t = x. \tag{35}$$

На поверхности звезды, где $R = R_b$, нужно приравнять друг другу L и M при всех значениях τ. Этим условием определяется вид функции M:

$$t = M(y) = \frac{2}{3} r_0^{-1/2} (R_b^{3/2} - r_0^{3/2} y^{3/2}) - 2r_0 y^{1/2} + r_0 \ln \frac{y^{1/2}+1}{y^{1/2}-1}. \tag{36}$$

Формулой (36) с заменой (27) определяется преобразование от переменных R и τ к переменным r и t и — неявно, через уравнения (28) и (29) — метрический тензор.

Выясним теперь асимптотическое поведение функций e^{λ}, e^{ν} и τ при больших t. В этом случае из соотношений (36) и (27) следует приближенное равенство

$$t \sim -r_0 \ln \left\{ \frac{1}{2} [(R/R_b)^2 - 3] + \frac{R_b}{r_0} (1 - 3r_0^{1/2}\tau/2R_b^{2})^{2/3} \right\}. \tag{37}$$

Отсюда мы видим, что, когда t стремится к бесконечности при фиксированном R, величина τ стремится к конечному предельному значению, которое тем больше, чем больше R. После этого момента τ_0 наблюдатель, сопутствующий веществу, уже не сможет послать со звезды светового сигнала — конус, внутри которого заключен уходящий сигнал, схлопнется полностью. Если начальная плотность звезды составляет 1 г·см$^{-3}$, а масса 10^{33} г, то этот срок τ_0 равняется приблизительно одним суткам.

Подставляя выражения (27) и (37) в уравнения (28) и (29), находим

$$e^{-\lambda} \approx 1 - \left(\frac{R}{R_b}\right)^2 \left\{ e^{-t/r_0} + \frac{1}{2}\left[3 - \left(\frac{R}{R_b}\right)^2\right]\right\}^{-1}, \tag{38}$$

$$e^{\nu} \approx e^{\lambda - 2t/r_0} \left\{ e^{-t/r_0} + \frac{1}{2}\left[3 - \left(\frac{R}{R_b}\right)^2\right]\right\}. \tag{39}$$

Отсюда видно поведение функций e^{λ} и e^{ν} при $t \to \infty$. Когда $R < R_b$, функция e^{λ} стремится к конечному пределу, а функция e^{ν} стремится к нулю как $\exp\{-2t/r_0\}$. Когда $R = R_b$, функция e^{λ} стремится к бесконечности как $\exp\{t/r_0\}$, а e^{ν} — к нулю как $\exp\{-t/r_0\}$.

Эти количественные данные о поведении функций e^{λ} и e^{ν} могут дополнить качественный анализ, проведенный в части I. Итак, функция λ стремится к конечному пределу при $r < r_0$, когда $t \to \infty$, а при $r = r_0$ она неограниченно возрастает. При

$t \to \infty$ функция $\nu \to -\infty$, если $r \leqslant r_0$. Мы предполагаем, что таким будет поведение всех коллапсирующих звезд, эволюция которых не останавливается на устойчивом стационарном состоянии. Конечно, реальные звезды должны коллапсировать медленнее, чем модель, которую мы исследовали аналитически, поскольку нужно учитывать влияние давления вещества, излучения и вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oppenheimer J. R.*, *Volkoff G. M.*, Phys. Rev., **55**, 374 (1939) (см. данный сборник, стр. 337).
2. *Tolman R. C.*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **20**, 3 (1934).

Е. М. ЛИФШИЦ

О ГРАВИТАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ МИРА*

Произведено исследование гравитационной устойчивости нестационарной модели изотропного мира, даваемой общей теорией относительности. Показано, что произвольные малые возмущения гравитационного поля и распределения материи в расширяющемся мире либо затухают со временем, либо возрастают по такому медленному закону, что не могут служить центрами образования отдельных туманностей.

В предлагаемой работе произведено исследование устойчивости нестационарного мира общей теории относительности по отношению к произвольным малым возмущениям гравитационного поля и распределения материи в нем. Гравитационная неустойчивость обычно привлекается (см., например, [1]) к объяснению образования туманностей из первоначального однородного распределения материи. При этом предполагается, что случайно возникающие местные сгущения, в случае если они обладают достаточно большими размерами, имеют тенденцию к дальнейшему увеличению, становясь таким образом центрами образования туманностей. Критические размеры таких сгущений, при которых они становятся гравитационно неустойчивыми, определяются при этом, однако, из ньютоновской теории тяготения, между тем нет a priori никаких оснований для предположения, что тот же критерий будет справедливым и в общей теории относительности. Произведенное здесь исследование показывает, напротив, что в расширяющемся мире общей теории относительности возмущения большинства типов затухают со временем, не проявляя тенденции к самопроизвольному увеличению. Существуют, правда, и такие возмущения, которые возрастают со временем, однако это возрастание происходит по такому медленному закону (как небольшая степень радиуса мира), что вряд ли они могут служить центрами образования больших неоднородностей. Таким образом,

* *Лифшиц Е. М.*, ЖЭТФ, **16**, 587 (1946).

можно, по-видимому, считать, что указанный механизм не может служить источником распадения материи на отдельные туманности.

§ 1. ИСХОДНАЯ МОДЕЛЬ

Как известно, в предположении однородности и изотропности распределения материи в пространстве общая теория относительности приводит к двум нестационарным возможным моделям мира [1]), в которых пространство обладает соответственно положительной («закрытая модель») или отрицательной («открытая модель») постоянной кривизной. Астрономические данные свидетельствуют, по-видимому, в пользу открытой модели, которая поэтому представляет больший интерес. Мы будем, однако, из соображений математического удобства производить сначала вычисления, исходя из закрытой модели, имея в виду, что переход к открытой модели может быть непосредственно произведен в окончательных уравнениях.

Метрика мира с пространством положительной кривизны определяется, как известно, выражением для интервала:

$$ds^2 = -c^2\, dt^2 + a(t)^2 \left[d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right],$$

где t — собственное время, χ, θ, φ —«сферические» пространственные координаты, $a(t)$ —«радиус кривизны» пространства (см., например, [2], § 102, 103); материя относительно этой системы отсчета покоится. Вместо времени t удобнее пользоваться переменной η, определяемой соотношением

$$c\, dt = a\, d\eta. \tag{1.1}$$

Тогда ds^2 запишется в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\right]. \tag{1.2}$$

Символы Кристоффеля для этой метрики равны [2])

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\quad \Gamma^{0}_{\alpha\beta} = \frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta},\quad \Gamma^{\beta}_{0\alpha} = \frac{a'}{a}\,\delta^{\beta}_{\alpha},\quad \Gamma^{0}_{\alpha 0} = \Gamma^{\alpha}_{00} = 0,$$
$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{a'}{a}, \tag{1.3}$$

[1]) Речь идет о решениях уравнений Эйнштейна без так называемого космологического члена, для введения которого нет в настоящее время никаких оснований.

[2]) Греческими буквами α, β, γ, . . . мы будем обозначать индексы, пробегающие значения 1, 2, 3, соответствующие пространственным координатам χ, θ, φ; временной координате $x^0 = \eta$ будет соответствовать индекс 0. Латинские буквы i, k, l, . . . обозначают индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3.

где штрих (′) означает дифференцирование по η; компоненты $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ нет необходимости выписывать в раскрытом виде, так как во всех дальнейших вычислениях можно обойтись без этого, используя непосредственно пространственную «сферическую» симметрию мира. Компоненты тензора $R_{ik} = R^{l}_{ikl}$ равны

$$R^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{a^4}(2a^2 + a'^2 + aa'')\delta^{\beta}_{\alpha}, \tag{1.4}$$

$$R^{\alpha}_{0} = 0, \quad R^{0}_{0} = -3\frac{a'^2 - aa''}{a^4},$$

а скалярная кривизна $R = R^{i}_{i}$ такова:

$$R = \frac{6}{a^3}(a + a''). \tag{1.5}$$

Тензор энергии-импульса материи есть

$$T^{k}_{i} = (p + \rho)\, u_i u^k + \delta^{k}_{i} p \tag{1.6}$$

где u^i — четырехмерный вектор скорости (с компонентами $u^{\alpha} = 0$, $u^0 = 1/a$), p — давление, ρ — плотность материи (в целях избежания множителей c^2 последняя предполагается измеренной в энергетических единицах). Его компоненты равны

$$T^{\beta}_{\alpha} = p\delta^{\beta}_{\alpha}, \quad T^{\alpha}_{0} = 0, \quad T^{0}_{0} = -\rho. \tag{1.7}$$

Общие гравитационные уравнения

$$R^{k}_{i} - \frac{1}{2}\delta^{k}_{i} R = \varkappa T^{k}_{i} \tag{1.8}$$

($\varkappa$ — эйнштейновская гравитационная постоянная) приводят к уравнениям

$$\varkappa\rho = \frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2), \quad \varkappa p = \frac{1}{a^4}(a'^2 - 2aa'' - a^2). \tag{1.9}$$

Приведем также следующее отсюда выражение для производной $dp/d\rho$:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{a^2a' - a^2a''' - 2a'^3 + 4aa'a''}{3a'(aa'' - a^2 - 2a'^2)}. \tag{1.10}$$

Взяв в качестве уравнения состояния материи равенство нулю давления ($p = 0$), получим из (1.9) известное решение

$$a = a_0(1 - \cos\eta) \tag{1.11}$$

(a_0 — постоянная), после чего из (1.1) получим $t = (a_0/c)(\eta - \sin\eta)$; этими двумя равенствами определяется в параметрическом виде зависимость радиуса a от времени. Для зависимости плотности ρ от времени при этом получается $\rho a^3 = \mathrm{const}$. На ранних стадиях (при малых временах t, т. е. при малых η) мы имеем дело с обратным предельным случаем весьма плотной материи, чему соответствует уравнение состояния $p = \rho/3$. Уравнения (1.9) дают в этом случае

$$a = b_0 \sin \eta \tag{1.12}$$

(b_0 — другая постоянная), а для времени: $t = (b_0/c)(1 - \cos \eta)$. Зависимость плотности от времени определяется при этом уравнением $\rho a^4 = \text{const}$.

В открытой модели метрика определяется выражением

$$ds^2 = a^2(\eta)\,[-d\eta^2 + d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi\,(\sin^2 \theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)]. \tag{1.13}$$

Оно может быть формально получено из (1.2) заменой

$$\eta \to i\eta, \qquad \chi \to i\chi, \qquad a \to ia. \tag{1.14}$$

Поэтому и все уравнения для открытой модели могут быть получены из уравнений для закрытой модели путем этой же подстановки. Зависимость радиуса кривизны от времени в открытой модели определяется при $p = 0$ уравнениями

$$a = a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1), \qquad t = \frac{a_0}{c} (\operatorname{ch} \eta - \eta), \tag{1.15}$$

а при $p = \rho/3$ — уравнениями

$$a = b_0 \operatorname{sh} \eta, \qquad t = \frac{b_0}{c} (\operatorname{ch} \eta - 1). \tag{1.16}$$

§ 2. УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Всякое гравитационное возмущение может быть описано как малое изменение метрики. Соответственно этому наложение возмущения сводится к замене метрического тензора g_{ik} на $g_{ik} + \delta g_{ik}$, где малые величины δg_{ik} суть некоторые функции координат и времени (обозначения g_{ik}, R_{ik} и т. д. оставляем для невозмущенных значений соответствующих тензоров); изменения плотности, давлений и т. д. материи могут быть выражены через δg_{ik}.

Введем обозначение

$$\delta g_{ik} = h_{ik} \tag{2.1}$$

для возмущения ковариантных компонент метрического тензора, причем под h_i^k, h^{ik} будут подразумеваться компоненты, полученные из h_{ik} поднятием индексов с помощью невозмущенного тензора g_{ik}. Другими словами, мы будем рассматривать h_{ik} как тензор в пространстве невозмущенной метрики g_{ik}. Тогда возмущение контравариантных компонент метрического тензора будет

$$\delta g^{ik} = -h^{ik} \tag{2.2}$$

[так чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $(g_{ik} + \delta g_{ik})(g^{kl} + \delta g^{kl}) = \delta_i^l$].

Поправки к символам Кристоффеля выражаются через h_{ik} следующим образом:

$$\delta\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\left(h^i_{k;l} + h^i_{l;k} - h_{kl}{}^{;i}\right) \tag{2.3}$$

(индекс после точки с запятой означает ковариантное дифференцирование), в чем можно убедиться непосредственной проверкой. С их помощью можно получить для возмущения тензора кривизны

$$\delta R^i{}_{klm} = \frac{1}{2}\left(h^i_{k;m;l} + h^i_{m;k;l} - h_{km}{}^{;i}{}_{;l} - h^i_{k;l;m} - h^i{}_{l;k;m} + h_{kl}{}^{;j}{}_{;m}\right), \tag{2.4}$$

откуда для поправок к тензору R_{ik} имеем

$$\delta R_{ik} = \delta R^l{}_{ilk} = \frac{1}{2}\left(h^l_{i;k;l} + h^l_{k;i;l} - h_{ik;l}{}^{;l} - h_{;i;k}\right), \tag{2.5}$$

где h обозначает след тензора h_{ik}: $h = h_i^i$. Ниже мы будем пользоваться смешанными компонентами R_i^k. Для них имеем

$$\delta R_i^k = g^{kl}\delta R_{il} - h^{kl} R_{il} \tag{2.6}$$

[это следует из того, что $R_i^k + \delta R_i^k = (R_{il} + \delta R_{il})(g^{kl} + \delta g^{kl})$]. Изменение δR скалярной кривизны равно

$$\delta R = \delta R_l^i = h_i^k{}^{;i}{}_{;k} - h_{;i}^{;i} - h^{ik} R_{ik}. \tag{2.7}$$

Наконец, члены первого порядка в гравитационных уравнениях (1.8) дают уравнения, которым должно удовлетворять всякое возмущение:

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \delta R = \varkappa \delta T_i^k, \tag{2.8}$$

где возмущение δT_i^k тензора энергии-импульса материи есть

$$\delta T_i^k = (p + \rho)(u_i \delta u^k + u^k \delta u_i) + (\delta p + \delta\rho) u_i u^k + \delta_i^k \delta p. \tag{2.9}$$

Для конкретного вычисления всех этих выражений выбираем систему отсчета (которая, очевидно, может быть подвергнута любому малому преобразованию, оставляющему δg_{ik} малыми) таким образом, чтобы было

$$h_{0\alpha} = 0, \qquad h_{00} = 0. \tag{2.10}$$

Это всегда может быть достигнуто, поскольку преобразование системы отсчета содержит четыре (по числу координат) произвольные функции. Довольно длинные вычисления приводят в результате к следующим выражениям:

$$\delta R_\alpha^\beta = \frac{1}{2a^2}\left(h_{\alpha;\gamma}{}^{;\beta} + h_\gamma^{\beta;\gamma}{}_{;\alpha} - h_{;\alpha}^{;\beta} - h_{\alpha;\gamma}^{\beta;\gamma}\right) - \frac{1}{2a^2}\, h_\alpha^{\beta\prime\prime} + \frac{a'}{a^3}\, h_\alpha^{\beta\prime} +$$

$$+ h_\alpha^\beta \frac{1}{a^2} + \frac{a'}{2a^3}\, h' \delta_\alpha^\beta,$$

$$\delta R_0^0 = \frac{1}{2a^2}\, h'' + \frac{a'}{2a^3}\, h', \quad \delta R_\alpha^0 = \frac{1}{2a^2}\left(h'_{;\alpha} - h_{\alpha;\,\beta}^{\beta\prime}\right), \tag{2.11}$$

$$\delta R = \frac{1}{a^2}\left(h_\alpha^{\beta;\alpha}{}_{;\beta} - h_{;\alpha}^{;\alpha}\right) + \frac{h''}{a^2} + \frac{3a'}{a^3}\, h' - \frac{2h}{a^2}.$$

Все ковариантные дифференцирования производятся здесь над трехмерным тензором h_α^β в трехмерном пространстве с метрикой, определяемой элементом длины

$$dl^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi\,(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{2.12}$$

(т. е. с помощью трехмерного метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{a^2} g_{\alpha\beta}$).

Далее, вычисляем компоненты δT_i^k. Для четырехмерной скорости имеем, взяв вариацию от тождества $g_{ik}u^i u^k = -1$,

$$h_{ik}u^i u^k + g_{ik}u^i \delta u^k + g_{ik}u^k \delta u^i = 0.$$

Имея в виду, что невозмущенные значения скорости есть $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1/a$, получим отсюда при условиях (2.10): $\delta u^0 = 0$. Из (2.9) находим теперь

$$\delta T_\alpha^\beta = \delta p\, \delta_\alpha^\beta, \quad \delta T_0^\alpha = -a\,(p + \rho)\,\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = -\delta\rho. \tag{2.13}$$

Ввиду малости δp и $\delta\rho$ можно написать $\delta p = (dp/d\rho)\,\delta\rho$, и мы получаем соотношение

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\rho}\, \delta T_0^0. \tag{2.14}$$

Подставив в это соотношение компоненты δT_i^k, выраженные через δR_i^k согласно уравнениям (2.8), мы получим в результате окончательные уравнения для возмущения h_α^β метрического тензора. В качестве этих уравнений удобно выбрать уравнения, получающиеся из (2.14) при $\alpha \neq \beta$ и при упрощении по индексам α, β [1]):

$$(h^{\gamma}_{\alpha;\gamma}{}^{;\beta} + h^{\beta;\gamma}_{\gamma}{}_{;\alpha} - h^{;\beta}_{;\alpha} - h^{\beta;\gamma}_{\alpha;\gamma}) + h^{\beta''}_{\alpha} + 2\frac{a'}{a} h^{\beta'}_{\alpha} + 2h^{\beta}_{\alpha} = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{2}(h^{;\gamma}_{;\gamma} - h^{\delta}_{\gamma}{}^{;\gamma}{}_{;\delta}) - h'' - 2\frac{a'}{a} h' + h = \\ = 3\frac{dp}{d\rho}\left[\frac{1}{2}(h^{\delta}_{\gamma}{}^{;\gamma}{}_{;\delta} - h^{;\gamma}_{;\gamma}) + \frac{a'}{a} h' - h\right]. \tag{2.16}$$

Возмущения скорости и плотности могут быть непосредственно определены по известным h^{β}_{α} по формулам (2.8), (2.11), (2.13). Вычисление дает для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{a^2}{6(a^2 + a'^2)}(h^{\beta;\alpha}_{\alpha}{}_{;\beta} - h^{;\alpha}_{;\alpha} + 2\frac{a'}{a} h' - 2h), \tag{2.17}$$

а для возмущения скорости

$$\delta u_{\alpha} = \frac{a}{4(a^2 + 2a'^2 - aa'')}(h'_{;\alpha} - h^{\beta'}_{\alpha}{}_{;\beta}). \tag{2.18}$$

Среди решений уравнений (2.15) и (2.16) есть такие, которые могут быть исключены простым преобразованием системы отсчета и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики. Дело в том, что условия (2.10) еще не определяют выбора системы отсчета однозначным образом. Действительно, при преобразовании координат $x^i \to x^i + \xi^i$, где ξ^i — малые величины, тензор g_{ik} получает приращение

$$h_{ik} = \xi_{i;k} + \xi_{k;i}.$$

Условия (2.10) дают

$$h_{0\alpha} = \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{\alpha}} + \xi'_{\alpha} - 2\frac{a'}{a}\xi_{\alpha} = 0, \quad h_{00} = 2\xi'_0 - 2\frac{a'}{a}\xi_0 = 0,$$

откуда

$$\xi_0 = -\frac{a}{2} f_0, \quad \xi_{\alpha} = \frac{a^2}{2}\int \frac{d\eta}{a}\frac{\partial f_0}{\partial x^{\alpha}} + a^2 f_{\alpha},$$

---

[1]) Здесь и везде в дальнейшем тензоры и векторы с греческими индексами суть трехмерные тензоры и векторы в пространстве с метрикой (2.12), т. е. на поверхности гиперсферы единичного радиуса. При этом тензор h^{β}_{α} и вектор u^{α} определены так, что смешанные компоненты первого и контравариантные второго совпадают с соответствующими компонентами h^{k}_{i} и u^i. Дальнейшие же операции поднимания и опускания индексов производятся с помощью метрического тензора $\gamma_{\beta\alpha}$.

где f_0, f_α — произвольные функции пространственных координат x^α. Это и есть то преобразование, которое допускается условиями (2.10). Отсюда находим следующий общий вид величин h_α^β, которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета:

$$h_\alpha^\beta = f_0{}_{;\alpha}^{;\beta} \int \frac{d\eta}{a} + \frac{a'}{a^2} f_0 \delta_\beta^\alpha + (f_\alpha{}^{;\beta} + f^\beta{}_{;\alpha}) \qquad (2.19)$$

[f_0 и f_α рассматриваются здесь как скаляр и как вектор в пространстве с метрикой (2.12)].

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ ШАРОВЫМ ФУНКЦИЯМ

Метрика пространства постоянной положительной кривизны соответствует, как известно, геометрии на поверхности гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. Поэтому произвольное возмущение может быть разложено по четырехмерным шаровым функциям (и их производным). Сделаем предварительно некоторые общие замечания по поводу этих функций.

Скалярные четырехмерные шаровые функции могут быть определены посредством однородных полиномов, составленных из декартовых координат x^a ($a = 1, 2, 3, 4$) [1] в четырехмерном евклидовом пространстве, удовлетворяющих уравнению Лапласа в этом пространстве. Такой полином $(n - 1)$-й степени может быть представлен в виде

$$r^{n-1} Q^{(n)} = A_{abc\ldots}^{(n)} x^a x^b x^c \ldots, \qquad (3.1)$$

где $A_{abc\ldots}$ есть некоторый постоянный (в декартовых координатах) тензор $(n - 1)$-го ранга ($n = 1, 2, 3, \ldots$), симметричный по всем своим индексам и дающий нуль при упрощении по любой паре индексов (число независимых компонент такого тензора равно n^2). Угловая часть $Q^{(n)}$ этого полинома, написанного в четырехмерных сферических координатах r, χ, θ, φ, и представляет собой линейную комбинацию n^2 сферических функций и может быть написана в явном виде следующим образом [3]:

$$Q^{(n)} = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}^{(n)} Y_{lm}(\theta, \varphi)\, \Pi_{nl}(\chi) \qquad (3.2)$$

[1]) Ниже мы обозначаем первыми буквами латинского алфавита a, b, c, ... индексы, нумерующие декартовы координаты x, y, z, u в фиктивном евклидовом пространстве. Декартовы координаты связаны с четырехмерными сферическими координатами r, χ, θ, φ соотношениями

$$x = r \sin\chi \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\chi \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = r \sin\chi \cos\theta, \qquad u = \cos\chi.$$

($A_{lm}^{(n)}$ — постоянные). Здесь $Y_{ln}(\theta, \varphi)$ суть обычные трехмерные шаровые функции, а функции Π_{nl} определяются как

$$\Pi_{nl} = \sin^l \chi \frac{d^{l+1}(\cos n\chi)}{d(\cos \chi)^{l+1}} \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.3}$$

В частности, наиболее симметричная скалярная шаровая функция соответствует $l = 0$ и имеет вид

$$Q = \frac{\sin n\eta}{\sin \eta} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сферическая функция Q [1]) удовлетворяет уравнению

$$Q_{;\alpha}^{;\alpha} = -(n^2 - 1) Q. \tag{3.4}$$

Другими словами, Q есть скалярные собственные функции оператора Лапласа на поверхности гиперсферы единичного радиуса. Уравнение (3.4) легко получить, например, из четырехмерного уравнения Лапласа

$$(Qr^{n-1})_{;a}^{;a} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{a2}} Qr^{n-1} = 0,$$

отделяя в нем угловую часть (т. е. трехмерный оператор Лапласа) от членов с производными по r [2]).

Наряду со скалярными сферическими функциями в четырехмерном случае могут быть определены также и несводящиеся непосредственно к ним векторные и тензорные сферические функции. Из них нам понадобятся функции векторные и тензорные второго ранга. Определение векторных сферических функций [аналогичное определению (3.1) скалярных функций] может быть дано следующим образом. Пусть $B_{ab,\, cd, \ldots}$ есть постоянный тензор n-го ранга ($n = 2, 3, \ldots$), антисимметричный по первой паре

[1]) Во избежание загромождения формул большим количеством индексов, мы опускаем здесь и ниже в аналогичных случаях индекс (n), указывающий порядок шаровых функций.

[2]) Имеют место следующие формулы для оператора Лапласа, примененного к скаляру f:

$$f_{;a}^{;a} = \frac{1}{r^2} f_{;\alpha}^{;\alpha} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \frac{\partial f}{\partial r}\right);$$

вектору f_a, перпендикулярному радиус-вектору ($f_a x^a = 0$):

$$f_{\alpha;\,a}^{;a} = \frac{1}{r^2} f_{\alpha;\,\beta}^{;\beta} + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} - \frac{2}{r^2} f_\alpha;$$

симметрическому тензору f_{ab} с равной нулю проекцией $f_{ab}x^b = 0$:

$$f_{\alpha;\,a}^{\beta;\,a} = \frac{1}{r^2} f_{\alpha;\,\gamma}^{\beta;\,\gamma} + \frac{\partial^2 f_\alpha^\beta}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial f_\alpha^\beta}{\partial r} - \frac{2}{r^2} f_\alpha^\beta.$$

индексов (отделенных запятой), симметричный по всем остальным и удовлетворяющий, сверх того, следующим условиям: он дает нуль при упрощении по любой паре индексов a, b и одному (любому) из остальных. Последнее условие налагается для того, чтобы нельзя было понизить ранг тензора образованием дуального ему тензора. Тогда выражения

$$r^n S_a = B_{ab,\,cd}\ldots x^b x^c x^d \ldots \tag{3.5}$$

образуют (в четырехмерном евклидовом пространстве) вектор, перпендикулярный радиус-вектору ($S_a x^a \equiv 0$), компоненты которого являются однородными полиномами степени (n — 1), удовлетворяющими уравнению Лапласа $(\partial/\partial x^a)^2\, r^n S_b = 0$. Вектор S_a, будучи преобразован в сферические координаты, дает трехмерный вектор S_α, компоненты которого зависят только от углов χ, θ, φ и представляют собой векторные сферические функции.

Функции S_α могут быть определены и без помощи четырехмерного евклидового пространства, как векторные собственные функции трехмерного оператора Лапласа в пространстве с метрикой (2.12). Именно, S_α удовлетворяют уравнениям

$$S_{\alpha;\,\beta}^{;\beta} = -(n^2-2)\,S_\alpha, \qquad S_{;\alpha}^{\alpha} = 0. \tag{3.6}$$

Равенство нулю дивергенции $S_{;\alpha}^{\alpha}$ соответствует тому, что с помощью вектора S_α нельзя составить линейного скаляра (в четырехмерном представлении этому соответствует равенство нулю скаляра $S_a x^a$). Первое из уравнений (3.6) может быть получено, как и (3.4), выделением угловой части из четырехмерного оператора Лапласа, примененного к вектору. Явное выражение для векторных сферических функций можно найти либо преобразованием (3.5) к сферическим координатам, либо решением уравнений (3.6). Мы приведем здесь результат вычисления лишь для наиболее симметричной функции:

$$\begin{gathered} S_\chi = \cos\theta\,\frac{1}{\sin\chi}\,\frac{d}{d\chi}\,\frac{\sin n\chi}{\sin\chi}\,; \\ S_\theta = -\frac{\sin\theta}{2}\,\frac{d}{d\chi}\left(\sin\chi\,\frac{d}{d\chi}\,\frac{\sin n\chi}{\sin\chi}\right), \qquad S_\varphi = 0 \\ (n = 2,\ 3,\ \ldots). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Аналогично тензорные (второго ранга) сферические функции могут быть определены посредством полиномов

$$r^{n-1} G_{ab} = C_{ac,\,bd,\,ef,\ldots}\, x^c x^d x^e x^f \ldots, \tag{3.8}$$

образующих симметрический четырехмерный тензор второго ранга. Здесь $C_{ac,\,bd,\,ef,\ldots}$ есть постоянный тензор $(n+1)$-го ранга ($n = 3,\ 4,\ \ldots$) со следующими свойствами: он антисимметричен по парам индексов a, c и b, d, симметричен по всем остальным, симметричен по отношению к перестановке пары a, c с парой b, d, дает нуль при упрощении по любой паре индексов и дает нуль при образовании циклической суммы по тройкам индексов — паре a, c (или b, d) и одному (любому) из остальных. С помощью тензора G_{ab} нельзя составить линейного скаляра или вектора: скаляры G_a^a, $G_{ab}x^a x^b$ и вектор $G_{ab}x^b$ тождественно обращаются в нуль. Преобразуя G_a^b к сферическим координатам, получим трехмерный тензор G_α^β (с равным нулю следом $G_\alpha^\alpha = 0$), компоненты которого зависят только от углов и образуют тензорные сферические функции. Тензор G_α^β удовлетворяет трехмерным уравнениям:

$$G_{\alpha;\gamma}^{\beta;\gamma} = -(n^2-3)\, G_\alpha^\beta, \qquad G_{\alpha;\beta}^{\beta} = 0. \tag{3.9}$$

Возвращаясь к гравитационным возмущениям, замечаем, что определение возможных типов этих возмущений сводится к нахождению возможных типов симметрических тензоров второго ранга h_α^β, которые можно составить с помощью описанных сферических функций. Пространственное распределение возмущения скорости δu^α и плотности $\delta\rho$ определяется при этом соответствующими векторами и скалярами, составленными из тех же функций. Таким образом получим следующую классификацию.

1. С помощью скалярных функций Q можно составить тензоры [1])

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \qquad P_\alpha^\beta = \frac{1}{n^2-1} Q_{;\alpha}^{;\beta} + Q_\alpha^\beta. \tag{3.10}$$

Тензор P_α^β определен так, чтобы было $P_\alpha^\alpha = 0$. С той же функцией Q можно образовать вектор

$$P_\alpha = \frac{1}{n^2-1} Q_{;\alpha}. \tag{3.11}$$

Соответствующим скаляром является сама функция Q.

2. Из векторной функции S_α можно составить тензор [2])

$$S_\alpha^\beta = S_\alpha^{;\beta} + S_{;\alpha}^\beta. \tag{3.12}$$

Вектором является сама функция S_α, а соответствующего скаляра не существует.

3. Тензоры вида G_α^β; соответствующих им векторов и скаляров не существует.

---

[1]) При $n = 1, 2$ могут быть образованы только тензоры Q_α^β, но не P_α^β.

[2]) При $n = 2$ тензор S_α^β не существует.

Ковариантные производные от этих тензоров [входящие в уравнения (2.15) — (2.17)] могут быть легко вычислены посредством приведения их к производным, непосредственно определяемым уравнениями (3.4), (3.6), (3.9). При этом приходится переставлять порядок ковариантного дифференцирования по различным координатам. Такая перестановка производится по известным из тензорного анализа формулам с помощью тензора кривизны. Тензор кривизны (трехмерный) на поверхности гиперсферы единичного радиуса есть просто

$$P^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \gamma_{\beta\delta}\delta^{\alpha}_{\gamma} - \gamma_{\beta\gamma}\delta^{\alpha}_{\delta}, \tag{3.13}$$

как это следует непосредственно из симметрии (см., например,[2], § 102). Таким образом получим формулы

$$P_{\alpha\ ;\gamma}^{\beta\ ;\gamma} = -(n^2-7)\, P^{\beta}_{\alpha},\quad P_{\alpha}^{\gamma;\beta}{}_{;\gamma} = \frac{2}{3}(n^2-4)\,(Q^{\beta}_{\alpha} - P^{\beta}_{\alpha}),$$

$$P^{\beta}_{\alpha\,;\beta} = -\frac{2}{3}\,(n-4)\, P_{\alpha},$$

$$S_{\alpha\ ;\gamma}^{\beta\ ;\gamma} = -(n^2-6)\, S^{\beta}_{\alpha},\quad S^{\gamma}_{\alpha;\gamma}{}^{;\beta} + S^{\beta;\gamma}_{\gamma}{}_{;\alpha} = -(n^2-4)\, S^{\beta}_{\alpha},$$

$$S^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = -(n^2-4)\, S_{\alpha}. \tag{3.14}$$

Остальные производные в уравнениях (2.15) — (2.17) вообще не требуют особого вычисления.

Все эти результаты могут быть без труда перенесены на открытую модель, в которой пространство обладает постоянной отрицательной кривизной (геометрия такого пространства соответствует математически геометрии на поверхности четырехмерной «псевдосферы» мнимого радиуса). В соответствии с (1.14) можно было бы ожидать, что «сферические функции» в этом пространстве (назовем их «псевдосферическими») получатся из рассмотренных выше функций просто заменой $\chi \to i\chi$. Это, однако, не так. Действительно, искомые функции, рассматриваемые как собственные функции оператора Лапласа, должны удовлетворять условию конечности во всем пространстве. Между тем функции, получающиеся путем указанной замены, экспоненциально возрастают при $\chi \to \infty$ (в пространстве отрицательной кривизны координата χ пробегает значения от 0 до ∞). Удовлетворяющие необходимым условиям функции можно получить, если одновременно с подстановкой $\chi \to i\chi$ произвести замену n на in; легко видеть, что получающиеся тогда функции экспоненциально затухают на бесконечности. Четырехмерные определения вида (3.1), (3.5), (3.9), разумеется, теряют при этом смысл, и псевдосферические функции должны определяться просто как собственные функции оператора Лапласа в пространстве с метрикой

$$dl^2 = d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\,\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Так, скалярные псевдосферические функции удовлетворяют аналогичному (3.4) уравнению $Q_{;\alpha}^{;\alpha} = -(n^2 + 1)\, Q$. Параметр n пробегает здесь все положительные значения от 0 до ∞ (непрерывный спектр собственных значений) в противоположность сферическим функциям, порядок n которых пробегает целочисленные значения (дискретный спектр). Это связано с тем, что в сферическом случае координата χ пробегает значения в конечном интервале от 0 до 2π и на собственные функции должно быть наложено еще требование однозначности.

Приведем явные выражения для наиболее симметричных псевдосферических функций:

скалярной

$$Q = \frac{\sin n\chi}{\operatorname{sh}\chi}, \tag{3.15}$$

векторной

$$S_\chi = \cos\theta \frac{1}{\operatorname{sh}\chi} \frac{d}{d\chi} \frac{\sin n\chi}{\operatorname{sh}\chi},$$

$$S_\theta = -\frac{\sin\theta}{2} \frac{d}{d\chi} \left(\operatorname{sh}\chi \frac{d}{d\chi} \frac{\sin n\chi}{\operatorname{sh}\chi} \right), \quad S_\varphi = 0. \tag{3.16}$$

Порядок n сферической (или псевдосферической) функции определяет ее пространственную периодичность. Чем больше n, тем меньше «длина волны» a/n. Если мы имеем возмущения в некотором участке пространства с размерами порядка l, то в его разложение войдут в основном функции с $n \sim a/l$. Другими словами, рассматривая возмущения, пространственное распределение которых определяется сферической функцией с большим (малым) n, мы тем самым исследуем поведение возмущений в малых (больших) участках пространства.

§ 4. ВОЗМУЩЕНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ

Ниже мы выписываем все уравнения сразу для открытой модели мира, не приводя соответствующих уравнений для закрытой модели, из которых они получаются путем замены a, η, n на ia, $i\eta$, in.

Начнем с рассмотрения возмущений первого типа и положим

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta)\, Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{4.1}$$

В возмущениях этого типа вместе с гравитационным полем испытывает изменение также и плотность, т. е. мы имеем дело с возмущениями, сопровождающимися возникновением сгущений или разрежений материи.

Подставляя (4.1) в общие уравнения (2.15) и (2.16) и вычисляя производные, получим в результате следующие уравнения для λ и μ:

$$\begin{gathered}\lambda''+2\frac{a'}{a}\lambda'-\frac{n^2+1}{3}(\lambda+\mu)=0,\\ \mu''+\mu'\frac{a'}{a}\left(2+3\frac{dp}{d\rho}\right)+\frac{n^2+4}{3}(\lambda+\mu)\left(1+3\frac{dp}{d\rho}\right)=0.\end{gathered}\tag{4.2}$$

Из (2.17), (2.18) получим для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{a^2}{9(a'^2-a^2)}\left[(n^2+4)(\lambda+\mu)+3\frac{a'}{a}\mu'\right]Q\tag{4.3}$$

и для скорости

$$\delta u^\alpha=\frac{a}{6(a^2-2a'^2+aa'')}\left[(n^2+1)\mu'+(n^2+4)\lambda'\right]P^\alpha.\tag{4.4}$$

Пространственное распределение скорости определяется вектором P_α, т. е. скорость направлена в каждой точке, как градиент распределения плотности.

Уравнения (4.2) имеют, прежде всего, следующие два частных интеграла:

$$\begin{gathered}\lambda=-\mu=\text{const},\\ \lambda=-(n^2+1)\int\frac{d\eta}{a}\equiv\lambda_0,\quad \mu=(n^2+1)\int\frac{d\eta}{a}-\frac{3a'}{a^2}\equiv\mu_0.\end{gathered}\tag{4.5}$$

Они соответствуют как раз тем фиктивным изменениям метрики (2.19), которые могут быть исключены преобразованием системы координат [1]). С их помощью можно понизить порядок уравнений (4.2). Для этого делаем подстановку

$$\lambda+\mu=(\lambda_0+\mu_0)\int\xi\,d\eta,\quad \lambda'-\mu'=(\lambda_0'-\mu_0')\int\xi\,d\eta+\zeta.\tag{4.6}$$

---

[1]) Первый из интегралов (4.5) получается из (2.19) выбором $f_0=Q$, $f_\alpha=0$. Второй же получается при $f_0=0$, $f_\alpha=P_\alpha$.

В закрытой модели n целочисленно. При $n=1, 2$ надо положить $\lambda\equiv0$ соответственно тому, что тензор P_α^β не может быть образован. Для μ остается уравнение второго порядка; оба решения этого уравнения при $n=2$ могут быть исключены преобразованием системы координат. При $n=1$ преобразованием координат исключается лишь одно из решений (вектор P_α не может быть образован при $n=1$); второе же соответствует бесконечно малому изменению полной массы мира и потому тоже не интересно. Таким образом, реальным возмущениям метрики соответствуют здесь лишь $n>2$.

После простых преобразований получаем для новых неизвестных функций ξ и ζ следующие уравнения:

$$\begin{gathered}\xi'+\xi\left[\frac{2a''}{a'}+\frac{a'}{a}\left(-2+\frac{3}{2}\frac{dp}{d\rho}\right)\right]+\frac{a}{2}\frac{dp}{d\rho}\zeta=0,\\ \zeta'+\zeta\frac{a'}{a}\left(2+\frac{3}{2}\frac{dp}{d\rho}\right)+\\ +\xi\frac{1}{a}\left[-2(n^2+1)+\frac{3a''}{a}-\frac{6a'^2}{a^2}+\frac{9}{2}\frac{a'^2}{a^2}\frac{dp}{d\rho}\right]=0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Начнем с наиболее ранних стадий расширения мира, когда материя сжата настолько, что уравнение ее состояния есть $p = \rho/3$. Для радиуса кривизны мира имеем при этом $a = b_0 \operatorname{sh}\eta$ (1.16). Поскольку уравнение состояния $p=\rho/3$ имеет смысл рассматривать только при малых временах t (т. е. малых η), то достаточно ограничиться исследованием уравнений при $\eta \ll 1$. Простыми преобразованиями легко привести уравнения (4.7) в рассматриваемом случае к виду [1])

$$\xi''+2\eta\xi'+\xi\frac{n^2+10}{3}=0,\quad \zeta=-\frac{\xi'}{\eta}(6-\eta^2)+\frac{3\xi}{\eta^2}\left(3-\frac{7}{2}\eta^2\right). \tag{4.8}$$

Решения этих уравнений удобно рассматривать отдельно для двух предельных случаев. Предположим сначала, что число n невелико (возмущения в больших областях пространства), так что $n\eta \ll 1$. Опуская промежуточные вычисления, приведем результат для λ, μ и относительного изменения плотности [2]):

$$\begin{gathered}\lambda=3C_1\frac{1}{\eta}+C_2,\qquad \mu=-\frac{2(n^2+4)}{3}C_1\eta+C_2,\\ \frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{n^2+4}{9}(C_1\eta+C_2\eta^2)Q\qquad (n\eta\ll 1)\end{gathered} \tag{4.9}$$

(C_1, C_2 — постоянные). Мы видим, что в μ и $\delta\rho/\rho$ есть члены, возрастающие со временем как первая степень и как квадрат радиуса кривизны (при малых η имеем $a \approx \text{const}\,\eta$). Легко, однако, видеть, что это возрастание не приводит к тому, чтобы возмущение могло стать большим, т. е. к потере устойчивости. Действительно, в момент t_0 своего возникновения возмущение должно

[1]) При произвольных η для ξ получается уравнение, приводящееся к гипергеометрическому.

[2]) Постоянные интегрирования, возникающие при вычислении λ, μ по формулам (4.6), зависят от выбора системы координат; мы выбираем их так, чтобы по возможности сократить главные члены разложения.

Для вычисления $\delta\rho/\rho$ по формуле (4.3) в μ должны быть вычислены также и следующие после выписанных члены разложения.

быть по предположению малым: $\delta\rho/\rho \ll 1$, λ, $\mu \ll 1$ [1]). Отсюда следует, что $C_1 \ll \eta_0$, $C_2 \ll 1$, где η_0 ($\eta_0 \ll 1$) — значение η, соответствующее моменту времени t_0. Применяя формулы (4.9) по порядку величины при $\eta \sim 1$, мы видим, что возмущения остаются малыми даже на верхнем пределе действия этих формул.

Пусть теперь число n настолько велико (возмущения в малых областях пространства), что $n\eta \gg 1$. В этом случае вычисление приводит к результату

$$\lambda = C\left(\frac{3\sqrt{3}}{in\eta^2} + 2\eta\right) e^{i\frac{n}{\sqrt{3}}\eta}, \quad \mu = C\left(-\frac{6\sqrt{3}}{in\eta^2} - 2\eta\right) e^{i\frac{n}{\sqrt{3}}\eta},$$
$$\frac{\delta\rho}{\rho} = C\frac{in}{\sqrt{3}} e^{i\frac{n}{\sqrt{3}}\eta} Q \quad \left(\frac{1}{n} \ll \eta \ll 1\right) \tag{4.10}$$

(C — комплексная постоянная). В λ и μ должны быть сохранены оба написанных члена, так как их относительная величина зависит от значения $n\eta^3$ (а не $n\eta$), которое может быть как малым, так и большим. Появление здесь периодического множителя вполне естественно: при больших n мы имеем дело с возмущением, периодичность которого в пространстве определяется большим «волновым вектором» $k = n/a$. Такие возмущения должны распространяться как звуковые волны со скоростью $u = \sqrt{dp/d(\rho/c^2)} = c/\sqrt{3}$; соответственно временна́я часть фазы должна определяться, как полагается в геометрической акустике, интегралом $\int ku\,dt = (n/\sqrt{3})\,\eta$. Амплитуда относительного изменения плотности остается, как мы видим, постоянной; амплитуды же λ и μ сначала падают, а затем начинают возрастать. Однако и здесь возмущение не может стать большим вплоть до $\eta \sim 1$ (малость начального возмущения дает для постоянной C соотношение $|C|\,n \ll 1$).

Далее, рассмотрим более поздние стадии расширения мира, когда материя разрежена уже настолько, что можно в качестве уравнения состояния выбрать $p = 0$. Уравнения (4.7) с $p = 0$, $a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1)$ полностью интегрируются в элементарных функциях [из первого из уравнений (4.7) вычисляем ξ, а затем из вто-

---

[1]) Смешанные компоненты h_i^k возмущения метрического тензора должны сравниваться с невозмущенными значениями $g_i^k \equiv \delta_i^k$, отсюда получается условие λ, $\mu \ll 1$. Шаровые функции Q, P_α^β и т. д. предполагаются определенными таким образом, что имеют порядок величины единицы.

рого — ζ]. В результате вычисления получаются следующие выражения [1]):

$$\lambda+\mu=-3C_1\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta}{2}}\left(1-\frac{\eta}{2}\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}\right),$$

$$\lambda-\mu=C_1(2n^2+5)\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta}{2}}\left(1-\frac{\eta}{2}\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}\right)+\frac{1}{3}\right]+$$

$$+C_2\left(\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{cth}^3\frac{\eta}{2}-\frac{2}{3}\right); \qquad (4.11)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=C_1\frac{n^2+4}{6}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{\eta}{2}}\left[2+\operatorname{ch}^2\frac{\eta}{2}-3\frac{\eta}{2}\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}\right]Q-\frac{C_2}{12}\frac{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}{\operatorname{sh}^3\frac{\eta}{2}}Q.$$

Для исследования этих выражений рассматриваем их в двух предельных случаях — больших и малых η. Малые η ($\eta \ll 1$) соответствуют той стадии расширения мира, когда радиус кривизны очень мал по сравнению с его современным значением [2]), но все же уже настолько велик, что материя достаточно разрежена (так что можно принимать $p=0$). Члены с постоянной C_2 дают при малых η

$$-\lambda=\mu=\frac{4C_2}{3\eta^2}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{2C_2}{3\eta^3}Q. \qquad (4.12)$$

Эти возмущения затухают со временем как $a^{-3/2}$ [при $p=0$ и малых η радиус кривизны $a\approx(a_0/2)\,\eta^2$]. В членах же с постоянной C_2 различаем случай небольших n (так что $n\eta \ll 1$) и больших n ($n\eta \gg 1$). В первом случае получим

$$\lambda=\mu=\frac{C_1}{2}, \quad \frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{C_1}{60}(n^2+4)\,\eta^2Q \quad (n\eta\ll 1). \qquad (4.13)$$

[1]) При интегрировании в (4.6) постоянные выбраны так, чтобы в обоих рассматриваемых ниже предельных случаях (больших и малых η) по возможности сократить главные члены.

[2]) Современное значение η можно получить из современных значений средней плотности материи ρ/c^2 в пространстве и постоянной α красного смещения (постоянная в соотношении $\Delta\omega/\omega=-\alpha l$, где $\Delta\omega/\omega$ — относительное смещение частоты для туманности на расстоянии l). Они выражаются через $a(\eta)$ формулами

$$\alpha=\frac{a'}{a^2}, \qquad \varkappa\rho=\alpha^2-\frac{1}{a^2};$$

подставляя $\alpha=5{,}6\cdot10^{-26}$ 1/см, $\rho/c^2=10^{-30}$ г/см^3 (по Хабблу), получаем $\eta=7{,}8$.

Хотя относительное изменение плотности и растет, однако не становится большим даже при $\eta \sim 1$ (поскольку $C_1 \ll 1$). При больших же n находим

$$\lambda = -\mu = C_1 \frac{n^2}{30} \eta^2, \quad \frac{\delta\rho}{\rho} = C_1 \frac{n^2}{60} \eta^2 Q \quad \left(\frac{1}{n} \ll \eta \ll 1\right). \tag{4.14}$$

Эти возмущения растут со временем как первая степень радиуса и могут стать сравнительно большими. При $\eta \sim 1$ величины λ, μ, $\delta\rho/\rho$ становятся порядка $C_1 n^2$, между тем как малость начального возмущения требует лишь, чтобы было $C_1 n^2 \eta_0^2 \ll 1$. Такое возрастание (в $1/\eta_0^2$ раз), хотя и может быть значительным [1]), но все же совершенно ничтожно по сравнению с тем, которое могло бы сделать заметными сгущения, возникающие путем термодинамических флуктуаций в областях пространства порядка величины туманностей или даже только звезд.

На поздних стадиях расширения, когда $\eta \gg 1$, получаем из (4.11)

$$\lambda = -2(n^2+1) C_1 \eta e^{-\eta} - 2C_2 e^{-2\eta}, \quad \mu = 2(n^2+4) C_1 \eta e^{-\eta} + 2C_2 e^{-2\eta},$$
$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \left[C_1 \frac{n^2+4}{6} + \frac{C_2}{3} e^{-\eta}\right] Q. \tag{4.15}$$

Мы видим, что при больших η возмущения метрики затухают, как $\ln a/a$ или $1/a^2$ [при $\eta \gg 1$ радиус $a \approx (a_0/2)\, e^{\eta}$]; относительное же изменение плотности либо стремится к постоянному пределу, либо падает как $1/a$.

Наконец, надо исследовать случай уравнения состояния, промежуточного между $p = \rho/3$ и $p = 0$. Именно, рассмотрим стадию расширения, на которой материя разрежена настолько, что производная $dp/d\rho$ мала, но все же не может быть положена равной нулю. Для функции $a(\eta)$ можно при этом пользоваться той, которая имеет место при $p = 0$. Введем обозначение $u = \sqrt{dp/d\rho}$ для «скорости звука», измеренной в единицах скорости света ($u \ll 1$). Оценка членов в уравнениях (4.7) показывает, что при $un\eta \ll 1$ все члены, содержащие u, могут быть опущены, так что мы возвращаемся к исследованному уже случаю $p = 0$. Если же $un\eta \gg 1$, то наличие членов с u становится, напротив, существенным. Исключение ζ из уравнений (4.7) приводит в этом случае к следующему уравнению для ξ:

$$\left(\frac{\xi}{u}\right)'' + n^2 u^2 \left(\frac{\xi}{u}\right) = 0.$$

---

[1]) Так, для расширения, при котором средняя плотность материи меняется от ядерной плотности ($\sim 10^{14}$ г/см^3) до современной плотности материи в пространстве ($\rho/c^2 = 10^{-30}$ г/см^3), $a(\eta)$ возрастает в $5 \cdot 10^{14}$ раз.

Его приближенное решение есть

$$\xi = -Cin\sqrt{u}\, e^{in\int u\, d\eta}$$

(C — постоянная), откуда с помощью (4.3), (4.5) получаем

$$\lambda + \mu = \frac{12C}{\sqrt{u\eta^3}} e^{in\int u\, d\eta}, \qquad \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{Cn^2}{3\sqrt{n\eta}} e^{in\int u\, d\eta}. \tag{4.16}$$

Экспоненциальный множитель снова соответствует тому, что мы имеем в рассматриваемом случае дело со «звуковыми волнами», распространяющимися со скоростью u, причем мы находимся в области применимости «геометрической акустики» ($nu\eta \gg 1$), так что фаза велика. И здесь мы находим, что возмущения, вообще говоря, не растут и, во всяком случае, не становятся большими [1].

Сделаем следующее замечание по поводу возмущений рассмотренного типа. До сих пор мы считали эти возмущения адиабатическими, т. е. происходящими при неизменной энтропии, и пренебрегали, в частности, процессами диссипации энергии путем теплопроводности. Хотя роль этих процессов для самого расширения мира и совершенно ничтожна, однако a priori не исключена возможность того, что эти малые эффекты могут привести к появлению какой-либо неустойчивости. Для исследования этого вопроса надо рассмотреть неадиабатические возмущения, в которых испытывает изменения также и энтропия материи, причем надо принять во внимание процессы теплопроводности. Такие возмущения описываются гравитационными уравнениями, к которым надо присоединить также и уравнение теплопроводности, должным образом обобщенное для общей теории относительности; в самих уравнениях гравитации появляются дополнительные члены, содержащие изменение энтропии (давление является теперь функцией не только плотности, но и энтропии). Мы не станем приводить здесь этих вычислений и укажем лишь, что в результате исследования оказывается, что учет теплопроводности тоже не приведет к появлению неустойчивости.

§ 5. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотрим теперь возмущения второго типа, в которых

$$h_\alpha^\beta = \sigma(\eta) S_\alpha^\beta. \tag{5.1}$$

В возмущениях этого типа однородность распределения материи не нарушается ($\delta\rho = 0$); это следует непосредственно из того, что не существует соответствующего скаляра (§ 3). Соответствую-

[1] Зависимость u от времени можно оценить ориентировочно, рассматривая материю как адиабатически расширяющийся идеальный газ.

щий же вектор существует, и потому наряду с изменением метрики имеется также и возмущение скорости,— возникает движение материи, имеющее вращательный характер.

Уравнение (2.16) удовлетворяется автоматически, поскольку $h = 0$. Уравнение же (2.15) дает после подстановки (5.1) следующее простое уравнение для $\sigma(\eta)$:

$$\sigma'' + 2\frac{a'}{a}\sigma' = 0; \tag{5.2}$$

отметим, что в него не входит u. Отсюда

$$\sigma = \mathrm{const}\int \frac{d\eta}{a^2}. \tag{5.3}$$

Постоянная часть этого решения (постоянная интегрирования) соответствует фиктивному изменению метрики, исключающемуся преобразованием системы координат [оно получается из (2.19) выбором $f_0 = 0$, $f_\alpha = S_\alpha$]. Для возмущения скорости вычисление по формуле (2.18) дает

$$a\delta u^\alpha = \frac{a^2\sigma'}{4(2a'^2 - a^2 - aa'')}S^\alpha. \tag{5.4}$$

Для уравнения состояния $p = \rho/3$ и малых времен ($\eta \ll 1$) получаем

$$\sigma = -\frac{C}{\eta}, \qquad a\delta u^\alpha = \frac{C}{8}; \tag{5.5}$$

мы оставили здесь множитель a перед δu^α, поскольку возмущение скорости должно сравниваться с $u^0 = 1/a$. Для уравнения же состояния $p = 0$ получаем

$$\sigma = C\left(\mathrm{cth}\frac{\eta}{2} - \frac{1}{3}\mathrm{cth}^3\frac{\eta}{2} - \frac{2}{3}\right), \quad a\delta u^\alpha = \frac{C}{12(\mathrm{ch}\,\eta - 1)} \tag{5.6}$$

(при $\eta \ll 1$ это дает $\sigma = -8C/3\eta^3$, а при $\eta \gg 1$ имеем $\sigma = -4Ce^{-2\eta}$). Таким образом, рассматриваемые возмущения во всех случаях затухают со временем.

§ 6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Наконец, рассмотрим возмущения третьего типа, в которых

$$h_\alpha^\beta = \nu(\eta)G_\alpha^\beta. \tag{6.1}$$

Здесь изменяется только метрика, т. е. гравитационное поле; материя остается неподвижной ($\delta u^\alpha = 0$) и однородно распределенной в пространстве ($\delta\rho = 0$). Это следует непосредственно из того, что не существует ни вектора, ни скаляра, соответствующего тензору G_α^β. Таким образом, рассматриваемые возмущения представляют собой гравитационные волны в расширяющемся мире.

Для $\nu(\eta)$ получаем из (2.15) следующее уравнение:

$$\nu'' + 2\frac{a'}{a}\nu' + (n^2+1)\nu = 0. \tag{6.2}$$

Оба решения этого уравнения соответствуют реальным изменениям метрики, которые не могут быть исключены преобразованием координат [поскольку в рассматриваемом случае не существует ни скаляра, ни вектора, которые могли бы быть подставлены в (2.19) в качестве f_0 и f_α].

Для уравнения состояния $p = \rho/3$ уравнение (6.2) принимает вид

$$\nu'' + 2\operatorname{cth}\eta\cdot\nu' + (n^2+1)\nu = 0$$

и имеет решение

$$\nu = \frac{1}{\operatorname{sh}\eta}(C_1 \sin n\eta + C_2 \cos n\eta). \tag{6.3}$$

При $p = 0$ уравнение (6.2) имеет вид

$$\nu'' + 2\operatorname{cth}\frac{\eta}{2}\nu' + (n^2+1)\nu = 0.$$

Его решение есть

$$\nu = \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}}\left[C_1\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\sin n\eta}{\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}}\right) + C_2\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\cos n\eta}{\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}}\right)\right]. \tag{6.4}$$

При малых η и небольших значениях числа n ($n\eta \ll 1$) имеем отсюда

$$\nu = \mathrm{const} + \frac{\mathrm{const}'}{\eta^3} \qquad \left(\eta \ll \frac{1}{n}\right), \tag{6.5}$$

а при очень больших n ($n\eta \gg 1$)

$$\nu = \frac{4n}{\eta^2}(C_1 \cos n\eta - C_2 \sin n\eta) \qquad \left(\frac{1}{n} \ll \eta \ll 1\right). \tag{6.6}$$

Наконец, на поздних стадиях расширения, когда $\eta \gg 1$,

$$\nu = e^{-\eta}(C_1' \cos n\eta + C_2' \sin n\eta). \tag{6.7}$$

Периодический множитель в (6.3), (6.6), (6.7) — как раз тот, который должен соответствовать гравитационным волнам, распространяющимся со скоростью света (волновой вектор $k = n/a$, так что временная часть фазы $\int ck\,dt = n\eta$). Из полученных формул мы видим, что амплитуда гравитационных волн затухает как $1/a$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. Л. Ландау за ценные дискуссии и постоянный интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gamow G.*, *Teller E.*, Phys. Rev., 55, 654 (1939).
2. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.*, Теория поля, М., 1941.
3. *Fock V.*, Zs. f. Physik, 98, 148 (1935).

В. Л. ГИНЗБУРГ

О МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ КОЛЛАПСИРУЮЩИХ МАСС И ПРИРОДЕ СВЕРХЗВЕЗД*

Открытие сверхзвезд (звездоподобные внегалактические объекты 3С48, 3С273-В и др.; см. [1]) и попытки найти механизм образования радиогалактик привлекли внимание к проблеме гравитационного коллапса больших масс газа [2, 9]. Правда, остается еще совершенно неясным, каким образом и при каких условиях облако газа или протозвезда с массой, достигающей $10^8\ M_\odot$, может образоваться и коллапсировать как единое целое. Не доказано также, что при учете несферичности задачи гравитационный коллапс действительно может приводить, хотя бы в некоторых случаях, к появлению наблюдаемых сверхзвезд и мощным взрывам, ответственным за образование радиогалактик. Тем не менее представляются вполне оправданными попытки уже сейчас анализировать различные возможности и астрофизические данные исходя из предположения о коллапсе больших масс (ниже для определенности называем их протозвездами). В [2] такой анализ проводится в двух направлениях. Первое из них связано с выходом за пределы существующих физических представлений (введение C-поля с отрицательной плотностью энергии, предположение о «рождении» вещества). Подобные попытки представляются нам еще по крайней мере преждевременными, и мы будем опираться на общую теорию относительности без каких-либо ее модификаций. Второе направление, обсуждающееся в [2], связано с учетом того факта, что коллапсирующая протозвезда обладает гравитационным полем (на расстоянии $r \gg R_g = 2\varkappa M/c^2$ гравитационный потенциал и в этом случае, конечно, имеет ньютоновское значение $\varphi = -\varkappa M/r$). Поэтому коллапсировавшая протозвезда вносит свой вклад в динамику системы — скопления галактик, отдельной галактики или двойной звезды, одна из компонент которой коллапсирует. В сопутствующей системе отсчета время коллапса τ

* ДАН СССР (Астрономия), 156, № 1, 43 (1964).

порядка времени свободного падения частицы в поле с потенциалом $\varphi = -\varkappa M/r$. Как отсюда, так и более строгим способом [2, 3] получаем значение $\tau \sim (\varkappa\rho_0)^{-1/2}$, где $\rho_0 = 3M/4\pi R_0^3$ — начальная плотность протозвезды (начальный радиус $R_0 \gg R_g$). Поскольку для «внешнего наблюдателя» (в области с квазигалилеевой метрикой) поверхность коллапсирующей протозвезды достигает гравитационного радиуса R_g за бесконечное время, эта поверхность могла бы в принципе наблюдаться довольно долго. Однако, в силу падения светимости, обусловленной уменьшением поверхности и искривлением световых лучей [3], наблюдать поверхность коллапсирующей звезды на сколько-нибудь далекой стадии коллапса вряд ли возможно. Обнаружение такого объекта по отклонению проходящих вблизи него световых лучей от других источников также требует исключительно благоприятных условий.

В связи с изложенным нам представляется заслуживающим особого внимания обсуждение возможной роли магнитного поля коллапсирующей протозвезды, что и составляет задачу настоящей заметки.

При изотропном сжатии достаточно хорошо проводящей протозвезды с начальным полем H_0 это поле, в силу сохранения потока $\int H\,dS \sim HR^2$, будет возрастать по закону

$$H(R) = H_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2/3} = H_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2. \tag{1}$$

Понимая под $H(R)$ поле на поверхности и считая вне протозвезды поле дипольным, можно считать, что эффективный магнитный момент протозвезды изменяется по закону

$$\mu(R) \sim H(R)\,R^3 = H_0R_0^2R \sim \mu(R_0)\,\frac{R}{R_0}, \qquad H(r) \sim \frac{H_0R_0^2R}{r^3},$$

где $H(r)$ — поле на расстоянии $r > R$ от протозвезды с радиусом R. Проводя расчет нерелятивистски, мы не можем рассматривать область $R \leqslant R_g$. Если, однако, положить $R = \xi R_g$, то по порядку величины оценки пригодны уже при $\xi \approx 2 \div 3$. Это значит, что для грубых оценок все же можно полагать $R \sim R_g$. Приведем три довольно произвольных примера (см. табл. 1).

Разумеется, сильные поля могут быть достигнуты только если за время коллапса τ поле не успеет затухнуть в результате конечной проводимости. Отсюда следует условие (см. [4], полагаем $R \sim R_g$)

$$\tau \ll t_0 \sim \frac{4\pi\sigma(R_g)\,R_g^2}{c^2}. \tag{2}$$

Для звезд типа Солнца $\sigma_0 \sim 10^{16}$, и если средняя температура при сжатии не изменялась бы, то $\sigma(R_g) \sim \sigma_0$ и $t_0 \sim 10^6$; для

Таблица 1

№ примера	$M/M_\odot$	R_0, см	ρ_0, г/см³	$\tau \backsim (\varkappa\rho_0)^{-1/2}$, с	R_g, см	H_0, э	$H(R-R_g)$
1	10^8	10^{19}	10^{-16}	$3\cdot10^{11}$	10^{13}	10^{-3}	10^9
2	10^3	10^{12}	1	$3\cdot10^3$	10^8	1	10^8
3	~ 1	10^{11}	1	$3\cdot10^3$	10^5	1	10^{12}

примеров № 1 и 2 при средней температуре Солнца получаем $t_0 \sim 10^{22}$ и $t_0 \sim 10^{12}$ с. Во всех случаях условие (2) выполнено [1]).

Итак, для коллапсирующих протозвезд вполне можно ожидать сохранения поля, хотя окончательный вывод нельзя сделать до более последовательной оценки электропроводности объекта при $R \sim R_g$. Магнитная энергия протозвезды $W_M(R) \sim (H^2/8\pi)\times\times(4\pi/3)R^3 \sim H_0^2R_0^3(R_0/R) \sim W_M(R_0)R_0/R$ [см. (1)]. Энергия $W_M(R_0)$ ничтожно мала по сравнению с гравитационной энергией $|\Omega(R_0)| \sim \varkappa M^2/R_0$ и, очевидно, $W_M(R)/|\Omega(R)| \sim \sim W_M(R_0)/|\Omega(R_0)|$. Для приведенных примеров это отношение порядка 10^{-6} (при $M \sim 10^8 M_\odot$) и $\sim 10^{-16}$ (при $M \sim M_\odot$). В то же время в первом случае абсолютное значение $W_M(R_g) \sim 10^{56}$ эрг весьма велико ($|\Omega(R_g)| \sim Mc^2 \sim 10^{62}$ эрг при $M \sim 10^8 M_\odot$).

Важнейшим является, конечно, вопрос об изменении магнитного поля в релятивистской фазе коллапса. Мы обсудим этот вопрос в следующем сообщении [10], а сейчас можем сделать в этой связи лишь несколько замечаний. В шварцшильдовской метрике (см., например, [5]) поле постоянного магнитного диполя, как можно показать, имеет вид (диполь направлен по оси $\theta = 0$)

$$H_r = \frac{2\cos\theta}{r^3} f(r)\mu, \qquad H_\theta = \frac{\sin\theta}{r^3}\Psi(r)\mu,$$

$$f(r) = -\frac{3r^3}{R_g^3}\left\{\ln\left(1-\frac{R_g}{r}\right)+\frac{R_g}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{R_g}{r}\right)^2\right\}, \tag{3}$$

$$\Psi(r) = \frac{3r^2}{R_g^2}\left\{\frac{1}{1-R_g/r}+2\frac{r}{R_g}\ln(1-R_g/r)+1\right\}\sqrt{1-R_g/r}.$$

---

[1]) Условие (2) является к тому же слишком жестким, поскольку время для изменения R (время падения) от R_0 до $R \sim R_g$ сравнивается с временем затухания в уже сжатом состоянии. Время падения на пути $\sim R_g$ порядка $\tau_0 \sim R_g/c$. Поэтому необходимое условие сохранения поля, видимо, имеет вид $\tau_0 \ll t_0$, т. е.

$$\sigma(R_g) \gg \frac{c}{4\pi R_g} = \frac{c^3}{8\pi\varkappa M}.$$

Разумеется, $f(r) \to 1$ и $\Psi(r) \to 1$ при $r \gg R_g$. Из (3) следует, что дипольное поле при приближении к гравитационному радиусу неограниченно возрастает ($f(r) \approx -3 \ln(1 - R_g/r)$ и $\Psi(r) \approx \approx 3(1 - R_g/r)^{1/2}$ при $r \to R_g$). В таком поле компонента тензора энергии — импульса $T_0^0 = -H^2/8\pi$ возрастает как $(1 - R_g/r)^{-1}$ и полная энергия поля вне протозвезды

$$W_{M,\,\text{рел}}(R) = -2\pi \int_0^\pi \int_R^\infty T_0^0 \left(1 - \frac{R_g}{r}\right)^{-1/2} r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \to$$

$$\to \frac{6\mu^2}{R_g^3} \left(1 - \frac{R_g}{R}\right)^{-1/2}$$

при $R = R_g + \varepsilon$, $\varepsilon \ll R_g$, где R — «радиус» протозвезды.

Другими словами, по сравнению с нерелятивистским значением $W_M\ (R_g) \sim \mu^2/R_g^2 \sim H_0^2 R_0^4/R_g$ появляется еще множитель $(1 - R_g/R)^{-1/2}$. Поэтому, если магнитный момент μ не стремится к нулю при приближении поверхности коллапсирующей звезды к сингулярной сфере, роль магнитной энергии возрастает и нужно учитывать ее влияние на сам коллапс. Фактически такая ситуация вряд ли может иметь место. Во-первых, масса звезды $M = -(4\pi/c^2) \int T_0^0 r^2\, dr$, и поэтому соответствующий вклад внешнего магнитного поля характеризуется скорее выражением

$$\Delta M = \frac{1}{2c^2} \int_0^\pi \int_R^\infty H^2 r^2 \sin\theta \, d\theta \, dr \approx \frac{6\mu^2}{R_g^3 c^2} \ln\left(\frac{R_g}{R - R_g}\right) \quad (\text{при } R \to R_g).$$

Во-вторых, в модели звезды с резкой границей [3], как показывает расчет, $\mu = \mu(R_0) R_g / R_0 f(R) \approx \mu(R_0) R_g / 3R_0 \ln [R_g/(R - R_g)]$ (при $R \to R_g$). Для звезды с нерезкой границей или с турбулизованной оболочкой момент μ, быть может, не стремится к нулю или стремится к нулю очень медленно [10]. Однако поле H в этом случае, вероятно, везде конечно и на поздних стадиях коллапса.

В силу всего изложенного, возможность существования гигантской магнитосферы вокруг больших коллапсирующих протозвезд представляется заслуживающей обсуждения. Наличие магнитосферы, разумеется, радикально меняет проявления коллапсирующей протозвезды с точки зрения внешнего наблюдателя. Так, для примера № 1 даже на расстоянии $R \sim 10^{15} \sim 10^2 R_g$ поле $H \sim 10^3$, что приводит к довольно большому зеемановскому расщеплению спектральных линий. Вращение плоскости поляризации радиоволн будет заметным на еще больших расстояниях [1]). Подобные эффекты представляются, однако, второстепенными по сравнению с возможной ролью радиационных поясов вокруг коллапсирующей магнитной протозвезды. Релятивистские и нерелятивистские частицы, образующие эти пояса, будут источником электромагнитных волн, относящихся к радио-, оптическому и рентгеновскому диапазонам. Достаточно сказать, что циклотронная частота электрона $\omega_H = eH/mc = 1{,}76\cdot 10^7 H$ в примере № 1 ($M \sim 10^8 M_\odot$) достигает значения 10^{16}. В этом случае, например, электрон с энергией $\sim 10^7$ эВ будет излучать уже в основном на частоте $\omega_m \sim \omega_H\, (E/mc^2)^2 \sim 10^{19}$ ($\lambda_m \sim 1$ Å). Энергия частиц в поясах может быть сравнима с магнитной энергией, т. е. для того же примера № 1 достигать 10^{56} эрг. Впрочем, мы не видим причин, по которым это значение не может быть еще увеличено на несколько порядков (см. выше). Обращает на себя внимание то обстоятельство, что при предположении о магнитотормозном механизме излучения сверхзвезды 3С273-В мы получили [7] для объекта с радиусом $R \sim 10^{16}$ см значение $H \approx 10^2$ и запас энергии $W \sim$ $\sim 3\cdot 10^{57}$ эрг, необходимый для поддержания излучения в течение 10^3 лет. В примере же № 1 поле $H \sim 10^2$ на расстоянии $r \approx$ $\approx 2\cdot 10^{15}$ см. Тем самым нам представляется возможным высказать гипотезу о том, что «сверхзвезды» представляют собой не гигантские неравновесные звезды, а радиационные пояса или магнитотурбулентные атмосферы [10] вокруг больших коллапсирующих магнитных протозвезд. Развитие этой гипотезы связано с необходимостью проанализировать многочисленные вопросы, в первую очередь такие, как роль магнитотормозных потерь и механизм ускорения частиц в поясах (магнитное поле коллапсирующей протозвезды является переменным, и поэтому в ее магнитосфере нужно учитывать действие вихревого электрического поля). Отметим, что в [2] для объяснения механизма инжекции энергии от коллапсировавшей протозвезды в межзвездное пространство делается предположение о существовании C-поля. При наличии же у протозвезды магнитосферы такая инжекция возможна в результате известных механизмов. С этой точки зрения для объяснения «подкачки» энергии в Крабовидной туманности (см., например, [2]) можно было бы считать, что коллапсирующая сверхновая 1054 г. окружена достаточно мощной магнитосферой (даже при $M \sim M_\odot$ энергия поля в магнитосфере W_M для объяснения

---

[1]) Например, при просвечивании окрестностей коллапсировавшей магнитной протозвезды поляризованным радиоизлучением дискретных источников [6] заметное вращение плоскости поляризации может наблюдаться на расстоянии, которое на много порядков больше R_g. В то же время отклонение световых лучей в гравитационном поле звезды равно $\alpha = 2R_g/R$ (ближайшее расстояние луча от протозвезды $R \gg R_g$) и вряд ли может быть замечено при $R \gtrsim 10^2 R_g$.

наблюдений может быть еще значительно меньше, чем $Mc^2 \sim \sim 10^{54}$ эрг). Как уже указывалось, подобная магнитосфера может в принципе быть также источником рентгеновского излучения (такая возможность интересна в связи с обнаружением дискретного источника рентгеновских лучей [8]).

За ценные замечания автор выражает признательность Я. Б. Зельдовичу, И. Д. Новикову и Л. М. Озерному.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greenstein J. L., Matthews T. A., et al.*, Nature, **197**, 1040 (1963).
2. *Hoyle F., Fowler W. A., et al.*, On Relativistic Astrophysics, Preprint, 1963; Nature, **197**, 533 (1963).
3. *Oppenheimer J. R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939) (см. перевод в данном сборнике, стр. 353).
4. *Пикельнер С. Б.*, Основы космической электродинамики, 1961, § 10.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Теория поля, М., 1962.
6. *Гинзбург В. Л.*, Радиофизика, Изв. высш. учебн. зав., **3**, 341 (1960); *Гинзбург В. Л., Писарева В. В.*, Изв. высш. учебн. зав., **6**, 877 (1963).
7. *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М., Сыроватский С. И.*, Астр. циркуляр, № 267 (1963); ДАН, **154**, № 3 (1964).
8. *Giacconi R., Gursky H., et al.*, Phys. Rev. Letters, 9, 439 (1962); **11**, 530 (1963).
9. *Зельдович Я. Б.*, Астр. циркуляр, № 250 (1963); ДАН, **155**, 67 (1964).
10. *Гинзбург В. Л., Озерной Л. М.*, ЖЭТФ, **47** (1964).

Р. ПЕНРОУЗ

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ*

Открытие квазизвездных радиоисточников пробудило новый интерес к проблеме гравитационного коллапса. Некоторые авторы выдвинули предположение, что те громадные количества энергии, которые, по-видимому, излучаются этими объектами, могут быть обусловлены коллапсом массы порядка $(10^6 \div 10^8)\ M_\odot$, собирающейся в окрестностях ее шварцшильдовского радиуса; это сопровождается бурным выделением энергии — возможно, в форме гравитационного излучения [1—6] (см. также ряд статей в [7]). Подробный математический анализ таких ситуаций затруднителен, ибо он требует привлечения общей теории относительности во всем ее объеме. Поэтому в большинстве *точных* расчетов по вопросам гравитационного коллапса использовались упрощающие предположения о сферической симметрии. Это, к сожалению, лишает возможности войти в детали гравитационного излучения, требующего по крайней мере квадрупольной структуры.

Общая картина хорошо известна для сферически-симметричных тел [8] (см. также [9]). Если масса достаточно велика, конечного равновесного состояния не существует. После того как излучение уносит достаточное количество тепловой энергии, тело начинает сжиматься, и это продолжается вплоть до достижения *физической сингулярности*, расположенной при $r = 0$. С точки зрения локальных сопутствующих наблюдателей тело уходит *под* свой шварцшильдовский радиус $r = 2m$ (плотности, при которых это происходит, не должны быть чрезмерно большими, если достаточно велика полная масса). С точки же зрения внешнего наблюдателя представляется, что сжатие до $r = 2m$ требует бесконечного срока. Тем не менее наличие сингулярности является серьезной проблемой при сколько-нибудь полном анализе физических процессов во *внутренней* области.

---

* *Penrose R.*, Phys. Rev. Letters, 14, 57 (1965).

Задавался вопрос, не является ли на самом деле эта сингулярность всего лишь результатом предположения о высокой симметрии. Вещество сжимается радиально внутрь по направлению к *одной единственной* центральной точке, так что следующая из этого пространственно-временна́я катастрофа, возможно, не столь уж удивительна. Не смогло бы радикально изменить все положение наличие возмущений, нарушающих эту сферическую симметрию? Недавно полученное вращательное решение Керра [10] также обладает физической сингулярностью, но, так как и здесь степень симметрии высока (а решение является алгебраически специальным), вновь можно было бы утверждать, что это не отражает самой общей картины (см. также [11]). Здесь мы рассмотрим коллапс, *не делая* предположений о симметрии (см. также [12]).

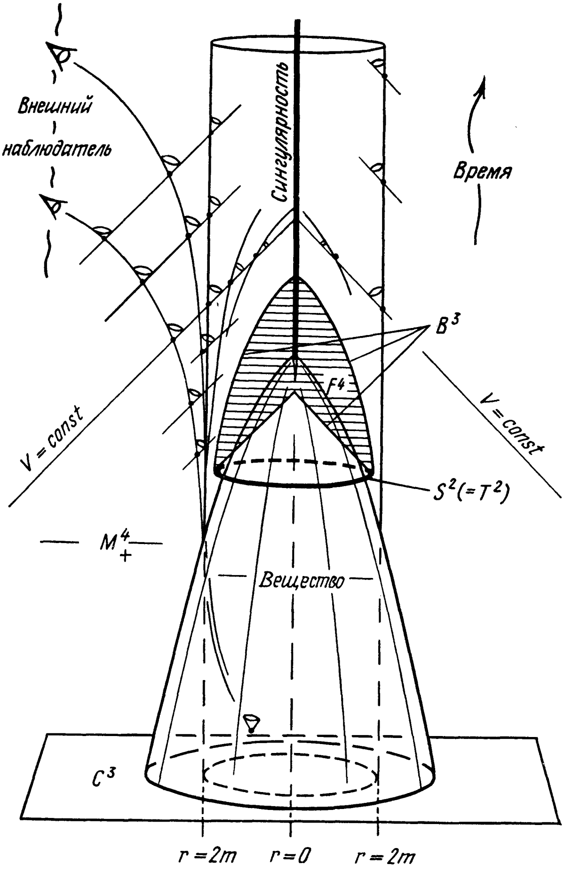
Обратимся к эволюции во времени гиперповерхности Коши C^3, задающей начальное распределение материи. Можно ввести уравнения Эйнштейна и адекватные уравнения состояния для материи. Здесь, однако, *все*, что предполагается насчет этих уравнений состояния, сводится к неотрицательной определенности эйнштейновского выражения для энергии (с космологическим членом или без него). Пусть это распределение материи подвергается гравитационному коллапсу таким образом, чтобы первоначально оно качественно походило на сферически-симметричный случай. Мы покажем, что *отклонения от сферической симметрии не могут предотвратить возникновения пространственно-временных сингулярностей*, если выполняются некоторые критические условия. Если же, как это представляется оправданным, не должно допускаться возникновения настоящих физических сингулярностей в пространстве-времени, с неизбежностью следует ожидать выполнения внутри коллапсирующего объекта по крайней мере одного из следующих условий: а) локальное появление отрицательной энергии [1]); б) нарушение уравнений Эйнштейна; в) неполнота пространственно-временного многообразия [2]); г) при очень больших значениях кривизны понятие пространства-времени теряет смысл — возможно, вследствие квантовых явлений [8, 9]. В действительности все пункты «а»—«г» в какой-то мере взаимосвязаны, и различия между ними отчасти сводятся к нашему способу мышления.

Прежде чем анализировать асимметричный случай, рассмотрим сферически-симметричный случай распределения вещества в круге конечного радиуса в C^3, которое коллапсирует симметрично.

[1]) Во избежание сингулярностей может быть использована отрицательная энергия «C-поля» [13]. Однако трудно понять, как могло бы даже наличие отрицательной энергии привести к эффективному «отскоку», если не нарушается локальная причинность!

[2]) Под этим названием имеется в виду сверхоптимистическое отношение («I'm all right, Jack») к сингулярностям!

В этом случае пустая область, окружающая вещество, описывается полем Шварцшильда, и для ее описания будет удобно восполь-



Фиг. 1

Сферически-симметричный коллапс (одно пространственное измерение опущено). Эта же схема в основном используется и при анализе несимметричного случая.

зоваться метрикой $ds^2 = -2drdv + dv^2(1 - 2m/r) - r^2 \times \times (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$ с опережающим временным параметром v [14]. Эта картина изображена на фиг. 1. Отметим, что внешний наблюдатель всегда будет видеть вещество вне $r = 2m$, а сжатие сквозь $r = 2m$ и до сингулярности при $r = 0$ для него невидимо.

После того как вещество сожмется до $r < 2m$, в пустом пространстве, окружающем его, можно взять пространственно-подобную сферу S^2 ($t = \text{const}$, $2m > r = \text{const}$). Такая сфера — пример того, что здесь будет называться *«ловушечной поверхностью»* и определяться в общем случае как замкнутая пространственно-подобная 2-поверхность T^2, обладающая тем свойством, что две ортогонально падающие на T^2 системы изотропных геодезических на T^2 локально сходятся (*конвергируют*) в направлении будущего. Ясно, что если заполненная веществом область не имеет резкой границы или сферическая симметрия нарушена, но отклонения от описанной выше картины не слишком сильны, то ловушечная поверхность будет все же существовать. Так, все решения Керра при $m > a$ (с моментом импульса ma) обладают ловушечными поверхностями, а при $m \leqslant a$ не обладают [1]). Нашей целью будет показать, что из существования ловушечной поверхности независимо от симметрии вытекает необходимость развития сингулярностей.

Однако невозможно заключить о существовании сингулярности без предположения о свойстве типа полноты для рассматриваемого многообразия. Здесь потребуется предположить, что многообразие M_+^4 — результат развития в будущем начальной гиперповерхности Коши C^3 (границы области M_+^4 со стороны прошлого) — по направлению в будущее является фактически *изотропно полным*. Точнее говоря, можно делать следующие варианты предположений. I. M_+^4 представляет собой несингулярное риманово многообразие с сигнатурой $(+---)$, изотропные полуконусы которого образуют две отдельные системы («прошлую» и «будущую»). II. Каждая изотропная геодезическая в M_+^4 может быть продолжена в будущее до сколь угодно больших значений аффинного параметра (изотропная полнота). III. Любая временноподобная или изотропная геодезическая в M_+^4 может быть продолжена в прошлое до ее пересечения с C^3 (условие гиперповерхности Коши). IV. В каждой точке M_+^4 все временноподобные векторы t^μ удовлетворяют условию $\left(-R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}\right) t^\mu t^\nu \geqslant 0$ (неотрицательность плотности энергии). V. В M_+^4 существует ловушечная поверхность T^2. Здесь будет показано (схематически), что условия I—V несовместимы друг с другом.

Пусть F^4 — множество точек в M_+^4, которые можно соединить с T^2 гладкой временноподобной кривой, идущей от T^2 в будущее.

---

[1]) Случай $m < a$ интересен в том отношении, что сингулярность оказывается «видимой» для внешнего наблюдателя. Возникают ли с неизбежностью «видимые» сингулярности при соответствующих условиях — вопрос волнующий, но не охватываемый рамками настоящего исследования.

Пусть B^3 — граница множества F^4. Локальный анализ показывает, что там, где граница B^3 не сингулярна, она *изотропна* и образована отрезками изотропных геодезических, пересекающих T^2 под прямым углом в своей оконечности в прошлом, а оконечность в будущем существует, если она является сингулярностью границы B^3 (в области каустики или пересечения). Пусть l^μ (для которого $l^\mu{}_{;\nu}l^\nu = 0$), $\rho\ (= -{}^1/{}_2 l^\mu{}_{;\mu})$ и $|\sigma|\ (= [{}^1/{}_2 l_{(\mu;\nu)} l^{\mu;\nu} - {}^1/{}_4 (l^\mu{}_{;\mu})^2]^{1/2})$ суть соответственно направленный в будущее касательный вектор, сжатие (конвергенция) и сдвиг этих изотропных геодезических (см. расшифровку обозначений в [15]), причем A пусть будет соответствующей бесконечно малой площадью сечения границы B^3. Тогда

$$[(A^{1/2})_{;\mu}\, l^\mu]_{;\nu}\, l^\nu = -(A^{1/2}\rho)_{;\mu}\, l^\mu = -A^{1/2}(|\sigma|^2 + \Phi) \leqslant 0,$$

где $\Phi = -{}^1/{}_2 R_{\mu\nu} l^\mu l^\nu$ ($\geqslant 0$, согласно IV). Так как поверхность T^2 ловушечная, на T^2 должно выполняться условие $\rho > 0$, причем A обращается в нуль на конечном аффинном расстоянии в сторону будущего от T^2 по любой из изотропных геодезических. Значит, каждая геодезическая выходит на каустику. Поэтому граница B^3 компактна (замкнута), будучи образована компактной системой конечных отрезков. Можно аппроксимировать B^3 сколь угодно точно гладкой замкнутой пространственно-подобной гиперповерхностью B^{3*}. Обозначим через K^4 множество пар (P, s), где $P \in B^{3*}$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$. Определим непрерывное отображение μ: $K^4 \to M^4_+$, такое, что $\mu\{(P, s)\}$ для фиксированной точки P является отрезком геодезической в направлении прошлого, нормальной к B^{3*} в точке $P = \mu\{(P, 1)\}$ и встречающейся с C^3 (как этого требует условие III) в точке $\mu\{(P, 0)\}$. В каждой точке Q на $\mu\{K^4\}$ можно определить *степень* $d\,(Q)$ отображения μ как число точек K^4, отображаемых на Q (при правильном подсчете). В любой области, не содержащей образа граничной точки из K^4, степень $d\,(Q)$ постоянна. Вблизи B^{3*} отображение μ взаимно однозначно, так что $d\,(Q) = 1$. Следовательно, $d\,(Q) = 1$ также вблизи C^3, и степень отображения $B^{3*} \to C^3$, индуцируемого отображением μ при $s = 0$, также должна быть равна единице. Но это невозможно в силу некомпактности C^3.

Подробности этих рассуждений и другие связанные с ними результаты будут опубликованы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hoyle F., Fowler W. A.*, Monthly Notices Roy. Astr. Soc., **125**, 169 (1963).
2. *Hoyle F., Fowler W. A., Burbidge G. R., Burbidge E. M.*, Astrophys. Journ., **139**, 909 (1964).
3. *Fowler W. A.*, Rev. Mod. Phys., **36**, 545 (1964).
4. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, ДАН СССР, **155**, 1033 (1964).

5. *Шкловский И. С., Кардашев Н. С.*, ДАН СССР, **155**, 1039 (1964).
6. *Зельдович Я. Б., Подурец М. А.*, ДАН СССР, **156**, 57 (1964).
7. Proceedings of the 1963 Dallas Conference on Gravitational Collapse, University of Chicago Press, Chicago, 1964.
8. *Oppenheimer J. R., Snyder H.*, Phys. Rev., **56**, 455 (1939); см. перевод в настоящем сборнике, стр. 353.
9. *Wheeler J. A.*, в книге: Relativity, Groups and Topology, eds. C. De Witt, B. De Witt, Gordon and Breach, New York, 1964.
10. *Kerr R. P.*, Phys. Rev. Letters, **11**, 237 (1963); см. перевод в настоящем сборнике, стр. 208.
11. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.*, Adv. Phys., **12**, 185 (1963).
12. *Bergmann P. G.*, Phys. Rev. Letters, **12**, 139 (1964).
13. *Hoyle F., Narlikar J. V.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A278**, 465 (1964).
14. *Finkelstein D.*, Phys. Rev., **110**, 965 (1959).
15. *Newman E., Penrose R.*, Journ. Math. Phys., **3**, 566 (1962).

А. Г. ДОРОШКЕВИЧ, Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, И. Д. НОВИКОВ

ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС НЕСИММЕТРИЧНЫХ И ВРАЩАЮЩИХСЯ МАСС*

Рассмотрен коллапс несимметричных и вращающихся масс. Показано, что характерная картина гравитационного самозамыкания, справедливая для сферического случая, сохраняется и в общем случае. При этом коллапс невращающегося тела приводит к затуханию для внешнего наблюдателя квадрупольного и высших мультипольных моментов поля по закону $\sim t^{-1}$. Иначе изменяется поле коллапсирующего вращающегося тела. Изменения в метрике, связанные с вращением локальной инерциальной системы, стремятся к константе, отличной от нуля. Однако картина коллапса качественно остается такой же, как в сферическом случае.

Исследуются также статические несферические решения уравнений Эйнштейна, в частности, анализируются свойства поверхности Шварцшильда $g_{00} = 0$ в этих решениях.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, эволюция звезд с $M > \sim 1{,}6\ M_{\odot}$ приводит к их неограниченному сжатию. Теория этого явления для простой модели сферического тела в значительной мере разъяснена в настоящее время (см. обзор [1], там же ссылки на оригинальные работы). Характерной особенностью процесса является гравитационное самозамыкание тела, выражающееся в том, что после сжатия до критического размера гравитационное поле тела не выпускает никакого излучения, никакой информации. Этот критический размер определяется гравитационным радиусом $R_g = 2Gm/c^2$, где G — постоянная тяготения Ньютона, c — скорость света, m — масса тела.

С самозамыканием тесно связан тот факт, что с точки зрения далекого наблюдателя эволюция при приближении к R_g замедляется и происходит асимптотическое (при $t \to \infty$) приближение

---

* *Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, ЖЭТФ, 49, 170 (1965).

наблюдаемой картины к определенному предельному состоянию, которое, однако, вовсе не является равновесным. Кажущаяся остановка есть результат замедления течения времени в сильном поле тяготения, причем для сжимающегося тела эффект Доплера для далекого наблюдателя только усиливает это замедление. Таким образом, кажущаяся остановка сжатия вызывается теми же факторами, что и красное смещение испускаемого спектра и самозамыкание.

Возникает вопрос о том, является ли эта картина общей, не связана ли она специально с симметрией задачи, сохраняются ли качественные выводы в общем несферически-симметричном случае. Утверждение, что качественно картина сохраняется и при несферически-симметричном коллапсе, высказывалось ранее [2] (см. также работу [3] об устойчивости решения Шварцшильда). В настоящей работе дано обоснование этого, далеко не очевидного, утверждения.

В качестве первой попытки нахождения асимптотики несферического решения естественно искать стационарные решения, исходя из предположения, что для внешнего наблюдателя коллапс является монотонным процессом и при $t \to \infty$ все $\partial/\partial t \to 0$. Это предположение доказано в разделе 3.

Анализ статического решения вне тела показывает, что отклонение от сферического решения, вызванное изменением в источнике поля, приводит к возникновению истинных особенностей пространства-времени на поверхности Шварцшильда $g_{00} = 0$. С другой стороны, в сопутствующей системе сжимающегося тела с малыми начальными отклонениями от сферичности в распределении плотности, момент пересечения поверхностью тела поверхности Шварцшильда ничем не выделен и не сопровождается возникновением истинных особенностей ни в метрике, ни в плотности. Сопоставление этих результатов приводит к выводу о затухании квадрупольного и высших мультипольных моментов внешнего поля тяготения на релятивистских стадиях коллапса несимметричного тела.

Отклонения в стационарной метрике от сферичности, связанные с компонентами g_0^α, т. е. с вращением локальной инерциальной системы относительно далекой инерциальной системы, и вызванные «вращательными» движениями в источнике поля, не приводят к особенностям при $g_{00} = 0$. В процессе коллапса эти отклонения не исчезают. Заметим, что «вращательные движения» не обязательно связаны с вращением тела в целом, они возникают, например, за счет тангенциальных скоростей при сжатии несимметричного тела. Ниже дается строгое обоснование изложенным соображениям.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В сферически-симметричном случае поле дается известным решением Шварцшильда и является статическим независимо от (сферически-симметричного) движения центральной массы, создающей поле [4]. В решении имеется критическая поверхность — сфера Шварцшильда $S_{\text{Ш}}$, характеризуемая условием $g_{00} \equiv 1 - R_g/R = 0$. Вблизи этой поверхности красное смещение линии излучения, испущенного покоящимся источником и воспринимаемого далеким наблюдателем, определяется выражением

$$\omega_{\text{набл}}/\omega_{\text{исп}} = \sqrt{g_{00}} \sim l,$$

где l — малое расстояние от $S_{\text{Ш}}$,

$$dl = \sqrt{g_{11}}\, dR \equiv \left(\frac{R}{R-R_g}\right)^{1/2} dR, \quad l = 2\,[R_g\,(R-R_g)]^{1/2}.$$

Наблюдаемая частота стремится к нулю при $l \to 0$. Для неподвижного внешнего наблюдателя луч света и пробная частица могут только асимптотически за бесконечное время подходить к $S_{\text{Ш}}$. И для луча света, и для свободно падающей пробной частицы это время является логарифмической бесконечностью:

$$t \sim \frac{R_g}{c} \ln \frac{R_g}{R-R_g}.$$

Четырехмерное пространство-время на $S_{\text{Ш}}$ не имеет особенностей, в частности, скаляр кривизны $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана, при $R = R_g$ имеет вполне определенное конечное значение $K = 12/R_g^4$. Если источник поля имеет размеры меньше $S_{\text{Ш}}$, то решение Шварцшильда в вакууме продолжается внутри $S_{\text{Ш}}$ в так называемую T-область [5, 6].

а) *Статическое поле с аксиальной симметрией.* Несферическую задачу в вакууме Редже и Уилер [3] рассматривали методом малых возмущений, наложенных на шварцшильдовское решение. Из решения уравнений для малых возмущений, данного в [3], видно, что в стационарном случае любое возмущение, убывающее на бесконечности, неограниченно растет при приближении к сфере Шварцшильда невозмущенной задачи. Отсюда следует, что как бы малы ни были отклонения от сферической симметрии на конечном расстоянии от $S_{\text{Ш}}$, метод малых возмущений работы Редже и Уилера [3] не может дать ответ, правильный вплоть до самой $S_{\text{Ш}}$.

Статическая задача для некоторого вида аксиально-симметричного поля квадруполя и высших мультиполей была решена Эрецом и Розеном [7] с помощью метода Вейля [8]. Соответствующее выражение интервала для поля квадруполя с исправленной нами ошибкой, вкравшейся в [7], см. в приложении I. В этом поле поверхности постоянных g_{00}, т. е. постоянного гравитационного потенциала, односвязны, замкнуты и вложены одна в другую, и таким образом, топологически не отличаются от сферически-симметричного случая, где они были концентричными сферами. Однако при приближении $g_{00} \to 0$ метрика поверхностей $g_{00} = \mathrm{const}$ радикально отличается от метрики сферы. В частности, при положительном квадрупольном моменте (тело вытянуто по оси как огурец) длина экватора стремится к нулю, а длина меридианов к бесконечности при $g_{00} \to 0$. Площадь поверхности $g_{00} = \mathrm{const}$ стремится при этом к бесконечности (но каждая поверхность с большей площадью целиком лежит внутри предыдущей, с меньшей площадью). Свет и свободно падающая частица достигают поверхности $g_{00} = 0$ за конечное время внешнего наблюдателя (см. приложение I). Наконец, инвариант $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, характеризующий общее искривление пространства-времени, обращается при $q \neq 0$ в бесконечность при $g_{00} \to 0$ как q^2/g_{00}.

Эти результаты не специфичны только для квадруполя и, как показано в приложении II, являются общими для любого статического осесимметричного решения.

б) *Внешнее поле вращающегося тела*. Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии, связанные не с изменением распределения масс в источнике поля, а с вращением. Керр [9] дал точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме. Это решение описывает поле тела массы m с полным моментом $M = amc$, где a — постоянная размерности длины. У тела, частицы которого обладают только вращательными движениями вокруг оси симметрии, во внешнем поле в подходящей системе координат из недиагональных компонент метрики отлична от нуля только g_{03}. Это сразу следует из соображений симметрии и эквивалентности прошлого и будущего. В решении Керра имеются неустранимые недиагональные компоненты $g_{\mu\nu}$, помимо g_{03}. Следовательно, если это решение реализуется как внешнее поле некоторого стационарного тела, то частицы вещества тела должны совершать не только вращательное движение вокруг оси симметрии, но еще какие-то движения (например, типа подъема по полюсам и опускания по экватору), что приводит к неэквивалентности прошлого и будущего.

Анализ решения Керра [15] приводит к следующим выводам.

1) При сколь угодно малом, но отличном от нуля a длины «параллелей» L на поверхности $g_{00} = \mathrm{const}$ (эти длины пропорциональны $(-g_{33} + g_{03}^2/g_{00})^{1/2}$ при $\theta = \mathrm{const}$ и $g_{00} = \mathrm{const}$) стремятся к бесконечности при $g_{00} \to 0$. Асимптотическое значение L имеет вид

$$L = 2\pi a \sin^2\theta/\sqrt{g_{00}}.$$

2) Прецессия гироскопа вдали от тела определяется известным выражением [4]:

$$\Omega^2 = c^2 a^2 R_g^2 R^{-6} (1 + 3\cos^2 \theta).$$

Вблизи $S_{\text{Ш}}$ прецессия в локальном времени стремится к бесконечности.

3) Скаляр K в отличие от предыдущего типа отклонений от сферической симметрии не имеет особенностей на $S_{\text{Ш}}$, и, в частности, на экваторе, как и в решении Шварцшильда на $S_{\text{Ш}}$, имеем

$$K = 12/R_g^4, \quad R_g = 2Gm/c^2.$$

В этом решении поле в вакууме можно продолжать внутрь $S_{\text{Ш}}$ в T-область. Особенность пространства-времени в решении Керра имеется (как и в решении Шварцшильда) при $R = 0$.

4) Луч света, идущий к $S_{\text{Ш}}$ в направлении полюса, и лучи света, идущие в плоскости «экватора», достигают $S_{\text{Ш}}$ за логарифмически бесконечное время внешнего наблюдателя. (Синхронизация часов здесь ведется по траектории лучей.)

В приложении III приведено поле медленно вращающегося шара с $a \ll R_g$. Это решение справедливо не только вдали, где $R \gg R_g$, но и вблизи $S_{\text{Ш}}$. В этом решении уравнений малых возмущений, наложенных на поле Шварцшильда, в поправках к компонентам $g_{\mu\nu}$ сохранены только члены, линейные по a, и высшие механические моменты и отброшены члены с a^2 и более высокого порядка. Те из эффектов на $g_{00} = 0$ решения Керра, которые зависят от линейных поправок к $g_{\mu\nu}$, сохраняются и в этом решении. В частности, здесь

$$K|_{g_{00}=0} = 12/R_g^4 < \infty,$$

вращение не дает членов первого порядка по a.

в) *Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле.* Существуют решения уравнений Эйнштейна, в которых имеется поверхность $S_{\text{Ш}}$, ничем качественно не отличающаяся от поверхности Шварцшильда для сферического случая. Однако в этом случае отклонения от сферической симметрии должны вызываться внешним полем. Например, если рассматривать сферическую массу во внешнем квадрупольном поле (нарастающем с удалением от массы m), то точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме имеет вид, данный в приложении IV. В этом поле поверхность $S_{\text{Ш}}$ является деформированной внешними полями сферой Шварцшильда со всеми ее свойствами.

3. КОЛЛАПС ВОЗМУЩЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО ОБЛАКА ПЫЛИ

Рассмотрим движение пыли в сопутствующей системе отсчета [1]). Известно (см. [4]), что в сферически-симметричном движении в этой системе отсчета переход через $S_{\text{ш}}$ происходит за конечное время и в этой системе $S_{\text{ш}}$ не представляет никакой особенности. Плотность вещества при этом конечна, и по порядку величины $\bar{\rho}_{\text{крит}} = 2\cdot 10^{16}\,(M_\odot/M)^2$ г/см³. Сферически-симметричное движение пыли с малыми возмущениями также не имеет при той же средней плотности никаких особенностей [10]. Инвариант K при этом конечен. Из сопоставления с инвариантом K стационарного решения следует вывод, данный во введении, о затухании мультипольных моментов внешнего поля в ходе коллапса.

В приложении III показано, что при коллапсе вращающегося тела отклонения от сферичности «вращательного типа» сохраняются.

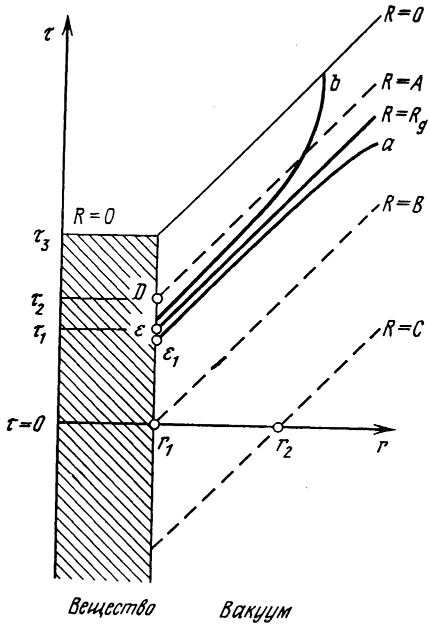
Изложенные соображения не исключают еще возможности следующей ситуации.

Тело сжимается и за конечное собственное время переходит $S_{\text{ш}}$ с малыми возмущениями, затем уже в T-области, сжавшись до большой плотности и сильно деформировавшись, вызывает сильные возмущения метрики окружающего пространства, что позволит выходить излучению и самому телу расшириться снова за пределы $S_{\text{ш}}$. Казалось бы, для далекого внешнего наблюдателя вопрос о возможности такой ситуации возникать не должен: ведь если тело за конечное собственное время пересекает $S_{\text{ш}}$, то этот процесс для внешнего наблюдателя растягивается в бесконечно долгий и что́ будет потом — для него неважно. Но в действительности сам этот вывод, к которому уже так привыкли, о растяжении времени приближения к $S_{\text{ш}}$ до бесконечности получается из того факта, что мировая линия луча, вышедшего из поверхности тела сколь угодно близко к $S_{\text{ш}}$, идет сколь угодно долго (по времени любой системы!) вблизи мировой линии точки $S_{\text{ш}}$ (см. рисунок). В нашей задаче заранее вовсе не очевидно, что возмущения метрики за бесконечно долгое время не изменят мировую линию луча настолько, что позволят ему и другим лучам, вышедшим уже после пересечения поверхностью тела $S_{\text{ш}}$, уйти к далекому наблюдателю. Иными словами, надо доказать, что выход на асимптотическое решение есть монотонный процесс и какие-либо колебания на релятивистской стадии коллапса уже невозможны для внешнего наблюдателя.

Мы докажем следующее утверждение: пусть в момент пересечения поверхностью шара $S_{\text{ш}}$ невозмущенной задачи возмущения

[1]) Результаты справедливы и для газа.

метрики в теле, возмущения плотности и скорости вещества малы. Тогда для внешнего наблюдателя картина сжатия будет такая же, как в случае точно-сферического коллапса — видимый им процесс приближения поверхности шара к $S_{Ш}$ растягивается до бесконеч-



Коллапс пылевого шара в свободно падающей системе отсчета (обозначения см. в приложении VI); a и b — мировые линии лучей света. Луч a, вышедший из ε_1 вблизи ε, долго идет вблизи $R = R_g$ (по времени любой системы отсчета).

ности, и возможность выхода лучей, испущенных поверхностью тела после пересечения $S_{Ш}$, в действительности исключается.

Доказательство (подробности которого даны в приложении V) состоит в следующем. Сначала доказывается, что если в сопутствующей, свободно падающей системе отсчета в некоторый момент собственного времени (близкий к моменту пересечения поверхностью тела $S_{Ш}$) возмущения во всем пространстве малы и если возмущения на пространственной бесконечности остаются малыми во все последующие моменты времени, то во всем пространстве вне $S_{\text{Ш}}$ и (что особенно существенно) в T-области пространства-времени вблизи $S_{\text{Ш}}$ возмущения всегда остаются малыми. Затем, используя малость возмущений метрики внутри $S_{\text{Ш}}$ в T-области, доказывается, что луч света из этой области выйти никогда не может и, следовательно, внешний наблюдатель никогда не узнает, что произошло после пересечения $S_{\text{Ш}}$, и процесс подхода поверхности тела к $S_{\text{Ш}}$ растягивается для него в бесконечность (см. приложение V).

Доказательство утверждения закончено. Этот результат работы важен для описания картины коллапса с точки зрения внешнего наблюдателя.

Заметим, что получить этот результат методом Редже и Уилера [3] нельзя, так как они работают в системе отсчета Шварцшильда, неприменимой при $g_{00} = 0$ и в T-области.

В собственном времени звезда после пересечения ее поверхностью $S_{\text{Ш}}$ может сжаться до огромных плотностей, возмущения станут колоссальными. Но что бы ни происходило там, это никак не скажется в области пространства-времени правее и ниже пунктира $R = A$ на рисунке, т. е. никак не скажется в пространстве вне $S_{\text{Ш}}$ ни при каком времени t. Этот вопрос обсуждается в [16]. Выводы [16] противоречат [10].

Полученные выводы, очевидно, важны, прежде всего, при попытках объяснения явления сверхзвезд (а также и сверхновых) релятивистскими эффектами коллапса больших масс.

4. КОЛЛАПС НЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ВНЕШНЕГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Мы доказали, что несферически-симметричная масса коллапсирует для внешнего наблюдателя качественно так же, как сферическая. Изменение мультипольных моментов в ходе сжатия тела должно сопровождаться излучением гравитационных волн, но уносимая этим излучением энергия мала. Излучение волн есть следствие изменения мультипольных моментов, и его нельзя считать причиной их полного затухания. Заметим, что в ньютоновой теории в ходе сжатия тела моменты тоже изменяются, но при конечных размерах тела они конечны. В теории Эйнштейна на это изменение моментов внешнего поля, обязанное изменению размеров сжимающегося тела, накладывается релятивистское затухание.

Найдем закон затухания q для внешнего наблюдателя в ходе коллапса. Как показано в приложении VI,

$$q \sim \ln^{-1} [R_g/(R - R_g)],$$

но приближение к $S_{\text{Ш}}$ происходит по закону

$$t \sim \ln [R_g/(R - R_g)],$$

отсюда $q \sim t^{-1}$, т. е. затухание происходит степенным образом. Внешний наблюдатель «видит» (например, с помощью излучения ν и $\widetilde{\nu}$) в предельном «застывшем» состоянии конечную несферичность распределения масс в источнике поля. Однако во внешнем поле эта несферичность не проявляется вовсе.

Отклонение предельного внешнего поля от поля Шварцшильда заключается в наличии компонент g_0^α, которые не становятся равными нулю в процессе сжатия. Эти компоненты вызывают квадратичные отклонения других компонент метрики от шварцшильдовского значения. Как уже отмечалось во введении, компоненты g_0^α во внешнем поле возникают даже при отсутствии вращения тела в целом, например за счет тангенциальных скоростей при сжатии несимметричного тела. При коллапсе шара, вращающегося по закону твердого тела, единственной компонентой, отличной от шварцшильдовских, является g_{03}, причем $\partial g_{03}/\partial t = 0$.

Таким образом, g_{03} во внешнем пространстве в ходе коллапса тела не меняется. Для внешнего наблюдателя поверхность коллапсирующего вращающегося шара асимптотически приближается к $S_{\text{Ш}}$ за бесконечное время. Шар успевает совершить только конечное число оборотов. Внешнее поле в линейных членах по a все время остается постоянным [1]).

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Приводим решение Эреца и Розена [7] уравнений Эйнштейна для статического аксиально-симметричного поля в вакууме. Решение приводится с исправлением ошибки, вкравшейся в [7] [2]), что существенно меняет окончательный вид формул:

$$ds^2 = e^{2\psi}dt^2 - m^2 e^{2\gamma-2\psi}(\lambda^2-\mu^2)\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2-1}+\frac{d\mu^2}{1-\mu^2}\right) - m^2 e^{-2\psi}(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\,d\varphi^2,$$

$$\psi = \frac{1}{2}\left\{\left[1+\frac{1}{4}q(3\lambda^2-1)(3\mu^2-1)\right]\ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1}+\frac{3}{2}q\lambda(3\mu^2-1)\right\},$$

$$\begin{aligned}\gamma = {}&\frac{1}{2}(1+q+q^2)\ln\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}-\frac{3}{2}q(1-\mu^2)\left[\lambda\ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1}+2\right]+\\ &+\frac{9}{4}q^2(1-\mu^2)\left[(\lambda^2+\mu^2-1-9\lambda^2\mu^2)\frac{1}{16}(\lambda^2-1)\ln^2\frac{\lambda-1}{\lambda+1}+\right.\\ &+\frac{1}{4}\left(\lambda^2+7\mu^2-\frac{5}{3}-9\mu^2\lambda^2\right)\lambda\ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1}+\\ &\left.+\frac{1}{4}\lambda^2(1-9\mu^2)+\left(\mu^2-\frac{1}{3}\right)\right].\end{aligned} \tag{I.1}$$

[1]) Разумеется, теория малых возмущений дает только члены, линейные по a.

[2]) Выражение γ, приведенное в [7], ошибочно.

Здесь m — масса тела, создающего поле, а q характеризует квадрупольный момент. Единицы измерения выбраны так, что $c = 1$, $G = 1$.

Скаляр $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ для метрики (I.1) имеет при малых q и $\mu = 0$ следующий асимптотический вид при $g_{00} \to 0$:

$$K = Bq^2 g_{00}^{-1} + 12/R_g^4, \quad B = \text{const}.$$

Здесь написаны главный расходящийся член и член, остающийся при $q = 0$.

В силу симметрии лучи света при $\mu = 0$ и $\mu^2 = 1$, имеющие начальное направление по радиусу, будут все время двигаться в этом направлении. Вблизи $g_{00} = 0$ время распространения света от некоторой точки с $\lambda = \lambda_0$ до $g_{00} = 0$ ($\lambda = 1$) будет

$$t = \text{const}\cdot(\lambda_0 - 1)^{q^2/8} \quad \text{при} \quad \mu = 0,$$

$$t = \text{const}\cdot(\lambda_0 - 1)^{-q}, \quad q < 0 \quad \text{при} \quad \mu^2 = 1.$$

Это время конечно [1]) в отличие от случая поля Шварцшильда.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Уравнения Вейля [8] для аксиально-симметричного поля Эйнштейна в вакууме могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right],$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{II.1}$$

Координаты ρ, z связаны с координатами λ, μ приложения I выражениями

$$\rho = m\,[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}, \quad z = m\lambda\mu.$$

Для источника вида [2]) $\sigma = \sigma(z)\,\delta(\rho) = 0$ решение (II.1), очевидно, есть потенциал нити с линейной плотностью $\sigma = \sigma(z)$ в плоском пространстве. Вблизи $g_{00} = 0$ ψ и γ записываются следующим образом [3]):

$$\psi = \sigma(z)\ln\rho, \quad \gamma = \sigma^2(z)\ln\rho,$$

где $\sigma(z)$ произвольна. Выражение для метрики имеет вид

$$ds^2 = \rho^{2\sigma}dt^2 - \rho^{2\sigma(\sigma-1)}(d\rho^2 + dz^2) - \rho^{2(1-\sigma)}d\varphi^2.$$

---

[1]) Исключение составляет только случай $q > 0$, $\mu^2 = 1$.

[2]) Источник только такого вида на конечных расстояниях от особой поверхности дает малые отклонения от сферического решения.

[3]) Исключение представляет вырожденный случай «точечной особенности» (см. [11], стр. 269, формула (8.30)).

Свойства этой метрики аналогичны разобранным в приложении I. В частности, от точки с координатами ρ_0, z_0, φ_0, двигаясь вдоль линии $z = z_0$, $\varphi = \varphi_0$ со скоростью, достаточно близкой к световой, можно за время

$$t = \rho_0^{[\sigma(z_0)-1]^2} [\sigma(z_0) - 1]^{-2}$$

по часам внешнего наблюдателя добраться до $g_{00} = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Рассмотрим поле вращающегося шара в вакууме. Состояние шара не обязано быть статическим — он может радиально расширяться или сжиматься. Из соображений симметрии ясно, что при слабом вращении из возмущений $h_{\mu\nu}$ компонент шварцшильдовского решения в первом порядке будут только h_{03}, h_{13} и h_{23} (возмущения в диагональных компонентах второго порядка малости). С помощью малого преобразования координат всегда можно обратить одну из этих величин в нуль: при преобразовании $\varphi = \tilde{\varphi} + \xi$ компоненты h_{03}, h_{13} и h_{23} получают приращения

$$\Delta h_0^3 = \partial\xi/\partial t, \qquad \Delta h_1^3 = \partial\xi/\partial R, \qquad \Delta h_2^3 = \partial\xi/\partial\theta.$$

Обратим в нуль h_{23}. Выпишем нетривиальные компоненты:

$$\delta R_{23} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{g_{11}h_{03}}{\sin^2\theta} - \frac{\partial}{\partial R}\frac{g_{00}h_{13}}{\sin^2\theta}\right) = 0,$$

$$\delta R_{13} = -\frac{1}{R^2}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{-1}\theta\frac{\partial h_{13}}{\partial\theta} + 2h_{13}\right) + \\ + g_{11}\frac{\partial^2 h_{13}}{\partial t^2} - R^2 g_{11}\frac{\partial^2}{\partial R\,\partial t}\frac{h_{03}}{R^2} = 0,$$

$$\delta R_{03} = -g_{00}\frac{\partial^2 h_{03}}{\partial R^2} - \frac{2}{R}h_{03}\frac{\partial g_{00}}{\partial R} - \frac{\sin\theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^{-1}\theta\frac{\partial h_{03}}{\partial\theta} + \\ + g_{00}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_{13}}{\partial R} + \frac{2}{R}h_{13}\right) = 0. \qquad \text{(III.1)}$$

Для нахождения стационарного решения положим

$$\partial h_{13}/\partial t = \partial h_{03}/\partial t = 0.$$

Тогда решение (III.1) имеет вид

$$h_{13} = \psi(R) R^2 \sin^2\theta, \quad h_{03} = \frac{R_g}{R}\sum_n a_n f_n\left(\frac{R}{R_g}\right) P_n^1(\cos\theta)\sin\theta. \qquad \text{(III.2)}$$

Здесь $c = 1$, $G = 1$, $\psi(R)$ произвольна, $R_g = 2m$, $a_n = \text{const}$,

$$f_n(x) = x^3 u_n(x) \int \frac{dx}{x^4 u_n^2(x)}, \quad u_n(x) = F(2+n;\ 1-n;\ 4;\ x),$$

F — гипергеометрическая функция Гаусса (см. [12]); P_n^1 — первый присоединенный полином Лежандра (см. [12]). Асимптотически

$$f_n(x) \sim x^{1-n}, \qquad x \gg 1.$$

Сделав теперь малое преобразование $\tilde{\varphi} = \varphi - \psi(R)$, получаем $h_{13} = 0$, и единственной отличной от нуля компонентой остается h_{03}, для которой справедливо (III.2). Это и есть то поле, на которое может асимптотически выходить при $t \to \infty$ ($R_{\text{пов}} \to R_g$) поле сжимающегося вращающегося шара.

Конкретный вид поля в вакууме определяется условиями сшивки на поверхности тела с внутренним решением. Условия сшивки, следующие из требований выполнимости уравнений поля на границе, требуют, чтобы h_{03} была везде непрерывна. Для шара с твердотельным законом вращения (но не обязательно стационарного — он может радиально деформироваться) это условие приводит к тому, что в вакууме $h_{03} \sim \sin^2\theta$ и $h_{13} \sim \sin^2\theta$. Первое уравнение (III.1) тогда выполнено тождественно, а решение двух других совместно с граничным условием при помощи малого преобразования координат приводится к виду

$$h_{03} = -\sin^2\theta \, \frac{2M}{R}, \tag{III.3}$$

где $M = -am$ — полный момент.

Таким образом, внешнее поле такого сжимающегося шара постоянно (в линейных по a членах). Выражение (III.3) совпадает по форме с приведенным в [4] для слабого поля. В действительности оно справедливо и в сильном поле при $a \ll R_g$ (с точностью до первого порядка по a).

Интересно отметить, что в то время как магнитный момент коллапсирующей магнитной звезды затухает [13], поле механического момента сохраняется. Это различие объясняется следующим образом. Магнитный момент связан с током I, который при приближении скорости коллапса к c ($R_{\text{пов}} \to R_g$) стремится к нулю для шварцшильдовского наблюдателя. Механический же момент сохраняется неизменным, ибо хотя скорость вращения звезды v в системе Шварцшильда при $R_{\text{пов}} \to R_g$ затухает подобно I, масса элемента объема для локального шварцшильдовского наблюдателя растет с ростом скорости коллапса. В итоге момент $M \sim mvR$ остается неизменным.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Решение уравнений Эйнштейна в вакууме для сферической массы m во внешнем квадрупольном поле (нарастающем с удалением от массы m) имеет вид (обозначения те же, что в приложении I):

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda-1}{\lambda+1} + \frac{1}{4}q(3\lambda^2-1)(3\mu^2-1),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2} - 3q\lambda(1-\mu^2) - \frac{9}{16}q^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)[9\mu^2\lambda^2-\lambda^2-\mu^2+1].$$

Поверхность $g_{00} = 0$ определяется условием $\lambda = 1$. Гауссова кривизна этой двумерной поверхности

$$R_G = \frac{1}{4m^2}e^q[1+3q-12q\mu^2-9q^2\mu^2+9q^2\mu^4]$$

различна при разных μ и везде конечна. Постоянное внешнее квадрупольное поле может быть создано удаленными массами, закрепленными на подпорках, которые удерживают их от перемещений. Приближенно на ограниченном интервале времени это же поле может быть создано и незакрепленными удаленными массами, скорости движения которых под влиянием взаимного тяготения будут вначале малы и поле почти статично.

ПРИЛОЖЕНИЕ V

Рассмотрим коллапс сферической пылевой массы. Введем в пыли сопутствующую систему. Продолжим эту свободно падающую систему за границу пыли, воспользовавшись известным решением Толмена (см. [4]). Для конкретности будем считать, что точка на границе пыли падает с параболической скоростью, а плотность вещества внутри пыли однородна [1]). Метрика внутри пыли есть метрика космологической модели Фридмана (см. [4]) с давлением, равным нулю, а метрика вне пыли есть метрика Леметра [14] с ds^2 в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - [{}^3/_2(r-\tau+\tau_0)]^{-2/3}dr^2 - [{}^3/_2(r-\tau+\tau_0)]^{4/3}(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad (\text{V}.1)$$

[1]) Если коллапс начался вдали от R_g, то вблизи R_g скорость границы всегда почти параболическая. Не представляет никакого труда обобщить доказательство на случай движения границы пыли с эллиптической или гиперболической скоростью и с градиентом плотности пыли по радиусу.

Здесь τ — собственное время, τ_0 — константа, зависящая от начала отсчета времени, r — сопутствующая координата, $c = 1$, $R_g = 1$.

Пространство-время этой модели изображено на рисунке. Пунктиры — линии $R = \text{const}$, где $R = [^3/_2 (r - \tau + \tau_0)]^{2/3}$ — шварцшильдовская координата [1]).

Пусть в момент $\tau = 0$ (близкий к моменту τ_1, когда граница пыли пересекает поверхность Шварцшильда $R = R_g$) возмущения плотности, скорости вещества и метрики h_α^β при всех $0 \leqslant r < \infty$ малы. Далее, пусть на сколь угодно большом $R = \text{const}$ возмущения всегда будут малы (последнее очевидно). Тогда, во-первых, h_α^β будут в рассматриваемой системе всегда малы при

$$R = [^3/_2 (r - \tau + \tau_0)]^{2/3} > A,$$

т. е. правее и ниже пунктира $R = A$ на рисунке; здесь A — некоторая константа $A < R_g$. И кроме того, луч света, покинувший пыль после момента τ_1, никогда не выйдет за пределы поверхности Шварцшильда $R = R_g$ (см. рисунок).

Докажем первое утверждение. Из (V.1) видно, что в вакууме компоненты $g_{\alpha\beta}$ зависят только от

$$R = [^3/_2 (r - \tau + \tau_0)]^{2/3}.$$

Поэтому если мы теперь в качестве независимых переменных будем рассматривать не r и τ, а R и τ, то малые возмущения метрики в вакууме могут быть записаны в виде $h = e^{i\omega\tau} f(R)$ (индексы α, β в дальнейшем опускаем). Функция $f(R)$ зависит от θ и φ, но эта зависимость сейчас не существенна, и мы ее не рассматриваем.

Идея доказательства состоит в том, что из малости возмущений на линиях (см. рисунок) $D - r_1 - r_2$ и далее по $R = C$ и из вида h следует, что h мало везде внутри полосы, ограниченной $R = A$, $R = C$ и $D - r_1 - r_2$.

Приводим формальное доказательство. Граница пыли пересекает R_g при конечной плотности $\rho_c \approx 2 \cdot 10^{16} (M_\odot/M)^{-2}$. Решение уравнений малых возмущений внутри пыли [13] показывает, что h неограниченно возрастает только при $\rho \to \infty$, а при $\rho = \rho_c$ конечно. Таким образом, вплоть до момента τ_2 (еще далекого от τ_3, когда $\rho = \infty$) в пыли при $r < r_1$ будет $h < \varepsilon_1$.

В свободно падающей системе в вакууме есть решения, неограниченно нарастающие на $R = R_g$. Однако корректная постановка задачи Коши исключает эти решения, и вблизи поверхности шара в вакууме h мало вплоть до $\tau = \tau_2$. Таким образом, мы имеем в вакууме:

---

[1]) В T-области (т. е. при $R < R_g$) R не может быть пространственной координатой, см. [6].

1) из начальных условий: $h = f(R) < \varepsilon_2$ при $\tau = 0$, $r > r_1$,

2) из малости возмущений на границе пыли: $h < \varepsilon_3$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ и $r = r_1$.

Из 1) следует, что $f(R) < \varepsilon_2$ при $R \geqslant B = [{}^3/_2\,(r_1 + \tau_0)]^{2/3}$ (см. рисунок).

Из 2) следует, что $f(R) < \varepsilon_4$, где $\varepsilon_4 = \varepsilon_3/|\,e^{i\omega\tau}\,|_{\max}$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$ и $A < R \leqslant B$ (см. рисунок).

Итак, всегда

$$f(R) < \varepsilon_5 \text{ при } R > A, \quad \varepsilon_5 = \max(\varepsilon_2, \varepsilon_4). \tag{V.2}$$

Теперь по условию $h < \varepsilon_6$ при достаточно большом $R = \mathrm{const} = C$ и любом $\tau > 0$:

$$h_{R=C} = e^{i\omega\tau} f(B) < \varepsilon_6, \quad \tau > 0.$$

Таким образом,

$$e^{i\omega\tau} < \varepsilon_6/f(B) = \varepsilon_7, \quad \tau > 0. \tag{V.3}$$

Из (V.2) и (V.3) следует

$$h = e^{i\omega\tau} f(R) < \varepsilon_5\varepsilon_7 = \varepsilon_8, \quad R > A, \ \ \tau > 0.$$

Первое утверждение доказано.

Докажем теперь второе утверждение. В невозмущенной метрике (V.1) для любого луча света (не обязательно идущего по радиусу) в T-области, при $R < R_g - F$, где F — произвольная константа меньше R_g, справедливы неравенства [1]):

$$d\tau/dr \geqslant (-g_{00}/g_{11})^{1/2} > 1 - N,$$

где $N = \mathrm{const}$. Это неравенство означает, что наклон луча на конечную величину больше, чем наклон линии $R = R_g$ (см. рисунок). Мы выше доказали, что всегда при $R > A$ возмущения метрики остаются малыми. Ясно, что эти возмущения мало меняют величину $d\tau/dr$ луча и неравенство

$$d\tau/dr > 1 - N$$

сохраняется. Таким образом, луч в области $A < R < R_g$ никогда не приближается к $R = R_g$ и, тем более, не может ее пересечь. Следовательно, мы доказали, что в возмущенном коллапсе луч никогда не выходит из T-области.

---

[1]) Мы рассматриваем луч, для которого $dr/d\tau > 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Аксиально-симметричные статические квадрупольные возмущения метрики Шварцшильда при $g_{00} \to 0$ записываются в виде ($c = 1$):

$$h_{00} \sim q \left(1 - \frac{R_g}{R}\right) \ln \left(1 - \frac{R_g}{R}\right), \; h_{11} \sim q \left(1 - \frac{R_g}{R}\right)^{-1} \ln \left(1 - \frac{R_g}{R}\right),$$

$$h_{22} \sim h_{33} \sim q \ln \left(1 - \frac{R_g}{R}\right),$$

где q — квадрупольный параметр возмущения.

При коллапсе тела с $q \neq 0$ в сопутствующей системе все величины $h_{\mu\nu}$ конечны. Поскольку h_{22} и h_{33} не преобразуются при переходе от сопутствующей системы к шварцшильдовской, то очевидно, что при $R \to R_g$

$$q \sim \ln^{-1} \frac{R_g}{R_1 - R_g} \sim \frac{1}{t},$$

где R_1 — положение границы коллапсирующего тела. Таким образом, в первом порядке по q возмущения в диагональных членах асимптотически исчезают.

Однако возмущения плотности в коллапсирующем теле сопровождаются в общем случае появлением членов h_{13}, h_{23} и h_{12} в синхронной системе отсчета [10]. Это соответствует появлению нерадиальных скоростей, т. е. эквивалентно некоторому дифференциальному вращению с равным нулю полным моментом. Поэтому в шварцшильдовских координатах появляются недиагональные члены, зависящие от времени.

Как было показано в приложении III, асимптотически при $g_{00} \to 0$ остаются члены h_0^α, описывающие несферически-симметричное движение центрального тела. Таким образом, при коллапсе тела с малыми отклонениями от сферической симметрии внешняя метрика в пределе при $g_{00} \to 0$ может отличаться в первом порядке теории возмущений от метрики Шварцшильда лишь членами $h_{0\alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович Я. Б.*, *Новиков И. Д.*, УФН, **84**, 377 (1964).
2. *Bergman P. G.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 139 (1964).
3. *Regge T.*, *Wheeler J.*, Phys. Rev., **108**, 1063 (1957).
4. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.*, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
5. *Finkelstein D.*, Phys. Rev., **110**, 965 (1958).
6. *Новиков И. Д.*, Сообщения ГАИШ, № 132 (1964).
7. *Erez G.*, *Rosen N.*, Bull. Res. Council Israel, **F8**, 47 (1959).
8. *Weyl H.*, Ann. d. Phys., **54**, 117 (1917); **59**, 185 (1919).

9. *Kerr R. P.*, Phys. Rev. Lett., **11**, 237 (1963). (См. данный сборник, стр. 208).
10. *Лифшиц Е. М.*, *Халатников И. М.*, УФН, **80**, 391 (1963).
11. *Дж. Синг*, Общая теория относительности, ИЛ, М., 1963.
12. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
13. *Гинзбург В. Л.*, ДАН СССР, **156**, 43 (1964). (См. данный сборник, стр. 384).
14. *Lemaitre G.*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **A53**, 51 (1933).
15. *Kerr R. P.*, В сб.: Gravitational Collaps and Quasi-Stellar Sources, eds. J. Robinson et al., Univ. of Chicago Press, 1965.
16. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965). (См. данный сборник, стр. 390).

V

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ФИЗИКА МИКРОМИРА

В. А. ФОК

ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ДИРАКОВСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОНА*

На основе понятия параллельного переноса полувектора записываются уравнения Дирака в общековариантной форме. Строится тензор энергии-импульса и выводятся как макроскопические, так и квантовомеханические уравнения движения. Первые из них имеют свой обычный вид: дивергенция тензора энергии-импульса равна силе Лоренца; последние же в основном совпадают с уравнением геодезической линии. Включение в формулу для параллельного переноса 4-потенциала φ_l наряду с коэффициентами Риччи γ_{ikl}, с одной стороны, приводит к простому геометрическому обоснованию появления в волновом уравнении выражения $p_l - (e/c)\,\varphi_l$, а с другой стороны, показывает, что здесь в отличие от эйнштейновского подхода потенциалы φ_l играют самостоятельную роль в геометрической картине мира и не обязаны быть функциями коэффициентов γ_{ikl}.

В одной статье Д. Д. Иваненко и автора [1] было высказано предположение, что матрицы Дирака имеют чисто геометрический смысл. В другой работе [2] [1]) эти же авторы ввели понятие парал-

*) Zs. f. Phys., **57**, 261 (1929).

[1]) Эта работа была доложена 20 мая 1929 г. на Физической конференции в Харькове.

лельного переноса полувектора (т. е. четверки величин, преобразующейся как ψ-функция Дирака).

В последующей заметке [3] автор применил это понятие при выводе общерелятивистского волнового уравнения для электрона и получил соответствующие макроскопические уравнения движения в эйнштейновской форме.

Данная работа представляет собой дополненный вариант анализа, проведенного в этой последней заметке.

1. Трансформационные свойства дираковской ψ-функции подробно изучались Меглихом [4] и фон Нейманом [5]. Этот закон преобразования принимает особенно простой вид, если выбрать для первых трех матриц Дирака выражения

$$\alpha_1 = \sigma_1, \quad \alpha_2 = \rho_3\sigma_2, \quad \alpha_3 = \sigma_3, \tag{1}$$

а в качестве четвертой матрицы взять одну из двух матриц [6]

$$\alpha_4 = \rho_2\sigma_2 \text{ или } \alpha_5 = \rho_1\sigma_2, \tag{1*}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3; σ_1, σ_2, σ_3 — четырехрядные матрицы, введенные Дираком.

Тогда общему преобразованию Лоренца соответствует следующее преобразование компонент ψ-функции:

$$\begin{aligned} \psi_1' &= \alpha\psi_1 + \beta\psi_2; \quad \psi_3' = \bar\alpha\psi_3 + \bar\beta\psi_4; \\ \psi_2' &= \gamma\psi_1 + \delta\psi_2; \quad \psi_4' = \bar\gamma\psi_3 + \bar\delta\psi_4. \end{aligned} \tag{2}$$

Комплексные величины α, β, γ, δ удовлетворяют условию

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{3}$$

и в случае чисто пространственного поворота переходят в обычные параметры Кэли и Клейна.

Обозначив через α_0 единичную матрицу, найдем, что величины

$$A_i = \bar\psi\alpha_i\psi \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

являются компонентами 4-вектора, а величины

$$A_4 = \bar\psi\alpha_4\psi, \qquad A_5 = \bar\psi\alpha_5\psi \tag{4*}$$

суть инварианты. Это обстоятельство следующим образом выражается математически. Обозначим преобразование (2) через S:

$$\psi' = S\psi, \qquad \bar\psi' = \bar\psi S^+. \tag{5}$$

Здесь S^+ — матрица, эрмитово-сопряженная (т. е. сопряженная и транспонированная) по отношению к S. Тогда справедливы уравнения

$$\begin{gathered} S^+\alpha_i S = \sum_{k=0}^{3} a_{ik}\alpha_k, \\ S^+\alpha_4 S = \alpha_4, \qquad S^+\alpha_5 S = \alpha_5, \end{gathered} \tag{6}$$

где a_{ik} — коэффициенты общего преобразования Лоренца. Так как

$$\overline{\psi}'\alpha_i\psi' = \overline{\psi}S^+\alpha_i S\psi,$$

величины (4) и (4*) преобразуются по формулам

$$A_i' = \sum_{k=0}^{3} a_{ik}A_k, \quad A_4' = A_4, \quad A_5' = A_5, \tag{7}$$

т. е. соответственно как 4-вектор и инварианты. Так как величины A_i ($i = 0, 1, 2, 3$), квадратичные по ψ, образуют 4-вектор, мы будем называть величины ψ, обладающие трансформационными свойствами (2), «полувектором» [1]).

В явной записи величины A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \overline{\psi}_1\psi_1 + \overline{\psi}_2\psi_2 + \overline{\psi}_3\psi_3 + \overline{\psi}_4\psi_4, \\ A_1 &= \overline{\psi}_1\psi_2 + \overline{\psi}_2\psi_1 + \overline{\psi}_3\psi_4 + \overline{\psi}_4\psi_3, \\ A_2 &= -i\overline{\psi}_1\psi_2 + i\overline{\psi}_2\psi_1 + i\overline{\psi}_3\psi_4 - i\overline{\psi}_4\psi_3, \\ A_3 &= \overline{\psi}_1\psi_1 - \overline{\psi}_2\psi_2 + \overline{\psi}_3\psi_3 - \overline{\psi}_4\psi_4, \\ A_4 &= -\overline{\psi}_1\psi_4 + \overline{\psi}_2\psi_3 + \overline{\psi}_3\psi_2 - \overline{\psi}_4\psi_1, \\ A_5 &= -i\overline{\psi}_1\psi_4 + i\overline{\psi}_2\psi_3 - i\overline{\psi}_3\psi_2 + i\overline{\psi}_4\psi_1. \end{aligned}$$

На основании этих выражений можно написать следующее тождественное соотношение для величин A_i:

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 = A_0^2. \tag{8}$$

2. Мы рассмотрели трансформационные свойства ψ-функции относительно преобразования Лоренца в рамках частной теории относительности. Если перейти к общей теории относительности, то, для того чтобы сделать возможным введение понятия полувектора, необходимо иметь в каждой точке пространства-времени ортогональную (точнее, псевдоортогональную) систему отсчета. Для этого мы введем систему 4 взаимно ортогональных конгруэнций кривых и, следуя Эйнштейну, выберем направления этих

[1]) Термин введен Л. Д. Ландау.

27—0919

конгруэнций как векторы тетрады. Рассуждения, приведенные в предыдущем пункте, остаются справедливыми и в случае общей теории относительности, если понимать под A_i тетрадные компоненты вектора.

Будем нумеровать тетрады латинскими индексами, а координаты — греческими, чтобы все они пробегали значения 0, 1, 2, 3. При суммировании по латинским индексам знак суммирования будет записываться явно, а при суммировании по греческим индексам — опускаться. Параметры конгруэнции кривых мы обозначим через h_k^α, а их моменты — через $h_{k,\alpha}$. Так как используется индефинитная метрика, мы вслед за Эйзенхартом [7] [1]) вводим величины $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_0 = +1$. Тогда координатные и тетрадные компоненты вектора (соответственно A_σ и A'_k) [2]) выражаются друг через друга как

$$A'_k = A_\sigma h_k^\sigma; \quad A_\sigma = \sum_k e_k A'_k h_{k,\sigma}. \tag{9}$$

Обозначив через ds_k тетрадные компоненты бесконечно малого сдвига, из формулы

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta A_\beta \, dx^\sigma, \quad \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta = \begin{Bmatrix} \alpha & \sigma \\ & \beta & \end{Bmatrix} \tag{10}$$

для изменения компонент вектора при параллельном переносе найдем следующее выражение для изменения при этом его тетрадных компонент:

$$\delta A'_i = \sum_{k,\,l} e_k e_l \gamma_{ikl} A'_k \, ds_l, \tag{11}$$

где γ_{ikl} — коэффициенты вращения, введенные Риччи:

$$\gamma_{ikl} = (\nabla_\sigma h_i^\beta)\, h_{k,\beta} h_l^\sigma = (\nabla_\sigma h_{i,\beta})\, h_k^\beta h_l^\sigma. \tag{12}$$

При этом ∇_σ обозначает ковариантную производную по x^σ.

3. Рассмотрим теперь изменение компонент полувектора при бесконечно малом параллельном переносе. Для этого запишем

$$\delta\psi = \sum_l e_l C_l \, ds_l \psi. \tag{13}$$

---

[1]) См. также превосходную сводку важнейших формул и фактов теории в работе Леви-Чивиты [8].

[2]) В дальнейшем тетрадные и координатные компоненты часто будут обозначаться одной и той же буквой. Чтобы избежать путаницы, мы будем помечать первые штрихом.

Под C_l следует понимать матрицы с элементами $(C_l)_{mn}$, а под $C_l\psi$ — четверку функций, m-я из которых дается формулой

$$(C_l\psi)_m = \sum_{n=1}^{4} (C_l)_{mn}\,\psi_n.$$

Уравнение, комплексно-сопряженное относительно (13), имеет вид

$$\delta\overline{\psi} = \overline{\psi} \sum_l e_l C_l^\dagger\, ds_l, \tag{13*}$$

где $C_l^\dagger$ — эрмитово-сопряженная матрица. Законом параллельного переноса полувектора (13) определяется и закон параллельного переноса вектора, а именно

$$\delta A_i' = \delta(\overline{\psi}\alpha_i\psi) = \delta\overline{\psi}\,\alpha_i\psi + \overline{\psi}\alpha_i\,\delta\psi = \overline{\psi}\sum_l e_l\,(C_l^\dagger\alpha_i + \alpha_i C_l)\,ds_l\,\psi. \tag{14}$$

Если потребовать соответствия полученного изменения данному формулой (11), то на C_l накладываются условия

$$C_l^\dagger\alpha_i + \alpha_i C_l = \sum_k e_k\alpha_k\gamma_{ikl}. \tag{15}$$

Так как к тому же $A_4' = \overline{\psi}\alpha_4\psi$ и $A_5' = \overline{\psi}\alpha_5\psi$ должны быть инвариантами, то

$$\delta A_4' = \psi \sum_l e_l\,(C_l^\dagger\alpha_4 + \alpha_4 C_l)\,ds_l\psi \tag{16}$$

и $\delta A_5'$ должны обращаться в нуль, откуда следуют дальнейшие условия

$$C_l^\dagger\alpha_4 + \alpha_4 C_l = 0, \quad C_l^\dagger\alpha_5 + \alpha_5 C_l = 0. \tag{17}$$

Можно непосредственно убедиться, что общее решение уравнений (15) и (17) дается формулой

$$C_l = \frac{1}{4}\sum_{mk} \alpha_m\alpha_k e_k\gamma_{mlk} + i\Phi_l', \tag{18}$$

где Φ_l' — эрмитовы матрицы, коммутативные со всеми α_i, равно как с α_4 и α_5. Если ограничиваться четырехрядными матрицами, то коммутативность со всеми α-матрицами означает пропорциональность единичной матрице. Если же рассматривать матрицы с большим числом строк и столбцов [1]), то матрицы Φ_l' не будут обязательно пропорциональными единичной матрице. Мы будем пользоваться четырехрядными матрицами и рассматривать Φ_l' как действительные числа.

[1]) Такие матрицы могли бы возникнуть при некоторых обобщениях уравнения Дирака (например, на случай задачи двух тел).

Отметим, что, так как в C_l не входят матрицы α_4 и α_5, первые две компоненты ψ-функции и последние две компоненты при преобразованиях комбинируются только друг с другом. Этого можно было ожидать априори на основании формул (2).

4. Определив понятие параллельного переноса полувектора, можно ввести понятие ковариантной производной последнего $D_l'\psi$ по направлению l в соответствии с формулой

$$D_l'\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s_l} - C_l\psi, \tag{19}$$

где $\partial\psi/\partial s_l = h_l^\sigma \partial\psi/\partial x^\sigma$ — частная производная по направлению l-й тетрады. Ковариантная производная полувектора по координате x^σ записывается как

$$D_\sigma\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma\psi, \tag{19*}$$

где введено обозначение

$$\Gamma_\sigma = \sum_k e_k h_{k,\,\sigma} C_k. \tag{20}$$

Переходя на время к псевдоевклидову пространству и полагая коэффициенты γ_{ikl} равными нулю, находим, что формула (19) принимает вид

$$D_l'\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s_l} - i\Phi_l'\psi.$$

Но это как раз то выражение, которое входит в уравнение Дирака, если под Φ_l' понимать

$$\Phi_l' = \frac{2\pi e}{hc}\varphi_l', \tag{21}$$

где φ_l' — тетрадные компоненты вектор-потенциала. В дальнейшем мы будем придерживаться такого физического истолкования геометрических величин Φ_l'. Тем самым мы придали геометрический смысл включению вектор-потенциала в уравнение Дирака, и смысл этот состоит в том, что потенциал может быть отличным от нуля, даже если равны нулю гравитационные члены, содержащие γ_{ikl}.

Обращаясь к формуле (13), определяющей $\delta\psi$, мы находим, что в ней в согласии с предположением, высказанным Вейлем [9], фигурирует линейная дифференциальная форма Вейля

$$\sum_l e_l\varphi_l'\,ds_l = \varphi_\sigma\,dx^\sigma.$$

Появление дифференциальной формы Вейля в законе параллельного переноса полувектора стоит в тесной связи с тем обстоятельством, отмеченным автором [10] и Вейлем [9], что добавление к 4-потенциалу градиента соответствует умножению ψ-функции на величину, модуль которой равен 1. Это положение Вейль назвал «принципом калибровочной инвариантности».

5. Понятие ковариантной производной полувектора дает возможность вывести волновое уравнение Дирака для электрона в общей теории относительности. Действительно, рассмотрим оператор

$$F\psi = \frac{h}{2\pi i} \sum_k e_k \alpha_k \left(\frac{\partial \psi}{\partial s_k} - C_k \psi \right) - mc\alpha_4 \psi. \tag{22}$$

Покажем, что он самосопряженный[1]). Для этого перейдем от тетрадных компонент к координатным и введем матрицы

$$\gamma^\sigma = \sum_k e_k \alpha_k h_k^\sigma \tag{23}$$

вместе с матрицами Γ_σ, определенными формулой (20). Для введенных таким образом матриц, согласно уравнениям (15), выполняются аналогичные соотношения:

$$\Gamma_\alpha^+ \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \Gamma_\alpha = -\nabla_\alpha \gamma^\sigma. \tag{24}$$

Эту формулу легко доказать, вернувшись к определению (12) для γ_{ikl}.

В координатном выражении оператор F имеет вид

$$F\psi = \frac{h}{2\pi i} \gamma^\sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi \right) - mc\alpha_4 \psi. \tag{25}$$

Учитывая (24), легко доказать тождество

$$\bar{\psi} F\psi - (\overline{F\psi})\, \psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\bar{\psi} \sqrt{g}\, \gamma^\sigma \psi), \tag{26}$$

где g — абсолютная величина определителя $\| g_{\rho\sigma} \|$. Данным тождеством выражается то обстоятельство, что F — самосопряженный оператор. Поэтому для уравнения Дирака в общей теории относительности можно постулировать форму

$$F\psi = 0. \tag{27}$$

Если ψ удовлетворяет этому уравнению, то из тождества (26) следует, что дивергенция вектора плотности тока

$$S^\rho = \bar{\psi} \gamma^\rho \psi, \tag{28}$$

[1]) Мы понимаем здесь слово «самосопряженный» в несколько расширенном смысле, а именно мы имеем в виду, что выражение $\bar{\psi} F\psi - (\overline{F\psi})\psi$ может быть записано в форме дивергенции (вообще говоря, четырехмерной).

который, очевидно, является действительным ввиду эрмитовости матриц γ^ρ, равна нулю:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}(\sqrt{g}\,S^\sigma)=0. \tag{29}$$

Легко показать, что постулат (25), (27), задающий уравнение Дирака, инвариантен (точнее, ковариантен) не только относительно выбора координат, но и относительно выбора ортогональных конгруэнций кривых.

Чтобы это доказать, заметим сначала, что в соответствии с прежним определением (18), (20), (21) матрицы Γ_σ однозначно определяются и уравнениями

$$\begin{gathered}\Gamma_\alpha^+\gamma^\sigma+\gamma^\sigma\Gamma_\alpha=-\nabla_\alpha\gamma^\sigma,\\ \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\Gamma_\sigma=\frac{2\pi ie}{hc}\varphi_\sigma.\end{gathered} \tag{30}$$

Если ввести теперь новую сетку конгруэнций кривых и обозначить привязанные к этой сетке величины звездочкой, то новые Γ_σ^* будут решениями аналогичных уравнений

$$\begin{gathered}\Gamma_\alpha^{*+}\gamma^{*\sigma}+\gamma^{*\sigma}\Gamma_\alpha^*=-\nabla_\alpha\gamma^{*\sigma},\\ \frac{1}{4}\operatorname{Sp}\Gamma_\sigma^*=\frac{2\pi ie}{hc}\varphi_\sigma.\end{gathered} \tag{30*}$$

Однако переход к новым ориентациям тетрады в каждой точке пространства-времени имеет характер локального преобразования Лоренца. Поэтому связь между новыми компонентами полувектора ψ^* и новыми матрицами $\gamma^{*\sigma}$, с одной стороны, и старыми ψ и γ^σ, с другой — имеет вид соотношений

$$\psi^*=S\psi,\qquad \gamma^\sigma=S^+\gamma^{*\sigma}S \tag{31}$$

[ср. формулы (5) и (6)], где S — матрица вида

$$S=\begin{Bmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0\\ \gamma & \delta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \bar\alpha & \bar\beta\\ 0 & 0 & \bar\gamma & \bar\delta\end{Bmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

с переменными элементами.

При этом закон преобразования коэффициентов Γ_σ параллельного переноса имеет вид

$$\Gamma_\sigma^*=S\Gamma_\sigma S^{-1}+\frac{\partial S}{\partial x^\sigma}S^{-1}, \tag{32}$$

и это выражение является единственным решением уравнения (30*) [1]).

Кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x^\sigma}-\Gamma_\sigma^*\psi^*=S\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\sigma}-\Gamma_\sigma\psi\right). \tag{33}$$

Если через $F^*\psi^*$ обозначить выражение, аналогичное (25), которое получается, если пометить в нем звездочкой величины γ^σ, Γ_σ и ψ, то из (31) и (33) следует

$$F\psi = S^+F^*\psi^*. \tag{34}$$

Таким образом, уравнения $F\psi = 0$ и $F^*\psi^* = 0$ эквивалентны, что и требовалось доказать.

6. В этом пункте мы представим оператор F в ином виде, чем ранее, преобразовав сумму $\sum\limits_k e_k\alpha_k C_k$, фигурирующую в формуле (22).

Чтобы можно было представить результат в обозримом виде, мы поступим следующим образом. Введем величины ε_{ijkl}, обращающиеся в нуль, если среди индексов $ijkl$, хотя бы два одинаковы, и равные $+1$ или -1 в отсутствие одинаковых индексов в зависимости от того, получается последовательность $ijkl$ из 0 1 2 3 путем четной или нечетной перестановки. С помощью таких величин мы строим «тетрадный вектор»

$$f_i=\frac{1}{2}\sum_{jkl} e_je_ke_l\varepsilon_{ijkl}\gamma_{jkl} \tag{35}$$

с компонентами

$$\begin{aligned} f_0 &= -e_0(\gamma_{123}+\gamma_{231}+\gamma_{312}),\\ f_1 &= -e_1(\gamma_{203}+\gamma_{032}+\gamma_{320}),\\ f_2 &= -e_2(\gamma_{301}+\gamma_{013}+\gamma_{130}),\\ f_3 &= -e_3(\gamma_{102}+\gamma_{021}+\gamma_{210}). \end{aligned} \tag{35*}$$

С учетом тождеств

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= i\rho_3\alpha_0,\\ \alpha_2\alpha_3 &= i\rho_3\alpha_1,\\ \alpha_3\alpha_1 &= i\rho_3\alpha_2,\\ \alpha_1\alpha_2 &= i\rho_3\alpha_3, \end{aligned} \tag{1**}$$

[1]) Справедливо равенство $\mathrm{Sp}\,\frac{\partial S}{\partial x^\sigma}S^{-1}=0$.

вытекающих из определения (1) матриц α_i, можно записать сумму $\sum\limits_k e_k \alpha_k C_k$ в виде

$$\sum_l e_l \alpha_l C_l = \sum_l e_l \alpha_l \left(i\Phi_l' - \frac{1}{2} \sum_j e_j \gamma_{jlj} - \frac{i}{2} \rho_3 f_l \right). \tag{*}$$

Введем обозначение

$$k_i = -\sum_j e_j \gamma_{jij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\sqrt{g} h_i^\sigma \right) \tag{36}$$

и подставим выражение (*) в (22). Тогда

$$F\psi = \sum_j e_j \alpha_j \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial s_j} - \frac{e}{c} \varphi_j' \psi + \frac{h}{4\pi i} k_j \psi \right) + \\ + \frac{h}{4\pi} \rho_3 \sum_j e_j \alpha_j f_j \psi - mc\alpha_4 \psi. \tag{22*}$$

Отметим, что в этом выражении первая и вторая суммы по отдельности являются самосопряженными операторами.

Если все конгруэнции являются нормальными, то «тетрадный вектор» f_i обращается в нуль, так как каждый символ Риччи γ_{ikl} по отдельности обращается в нуль, если все его индексы различны. Тогда в качестве координатных поверхностей можно выбрать гиперповерхности, нормали к которым дают нам конгруэнции кривых. При этом

$$ds^2 = \sum_j e_j H_j^2 \, dx_j^2; \qquad \sqrt{g} = H_0 H_1 H_2 H_3 \tag{37}$$

и

$$h_i^i = \frac{1}{H_i}, \qquad h_{i,i} = e_i H_i, \qquad f_i = 0, \tag{37*}$$

а все компоненты $h_{i,\sigma}$ и h_i^σ обращаются в нуль, если их индексы неодинаковы. Тогда оператор F выражается как

$$F\psi = \sum_j e_j \alpha_j \frac{1}{H_j} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} - \frac{e}{c} \varphi_j \psi + \right. \\ \left. + \frac{h}{4\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\ln \frac{\sqrt{g}}{H_j} \right) \psi \right) - mc\alpha_4 \psi. \tag{38}$$

Эта формула позволяет сразу же написать уравнение Дирака в произвольных криволинейных ортогональных координатах. При этом нужно иметь в виду следующее. Если, например, в случае обычного евклидова пространства уравнение (38) записать сначала в декартовых, а затем — в криволинейных координатах, то соответствующие ψ-функции в уравнении (38) не будут совпадать друг с другом, но будут связаны преобразованием вида (2) с переменными коэффициентами α, β, γ, δ. Это обстоятельство нельзя упускать из вида при формулировке требований однозначности ψ-функций.

В заключение данного пункта отметим, что, как известно, в общем случае риманова пространства не всегда возможно выбрать в качестве всех конгруэнций кривых нормальные конгруэнции. Это, однако, всегда удается сделать в важных частных случаях статических гравитационных полей с центральной и аксиальной симметрией, как это явствует из решений уравнений Эйнштейна, полученных Шварцшильдом и Леви-Чивитой.

7. Попытаемся теперь найти тензор энергии-импульса. Для этого рассмотрим тензор

$$A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}=\overline{\psi}\gamma^{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}-\Gamma_{\alpha}\psi\right)=\overline{\psi}\gamma^{\sigma}D_{\alpha}\psi \tag{39}$$

и вычислим его дивергенцию [1]).

Запишем уравнение Дирака и комплексно-сопряженное ему уравнение в виде

$$\gamma^{\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\sigma}}-\Gamma_{\sigma}\psi\right)-\frac{2\pi i}{h}mc\alpha_4\psi=0, \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x^{\sigma}}-\overline{\psi}\Gamma^{+}_{\sigma}\right)\gamma^{\sigma}+\frac{2\pi i}{h}mc\overline{\psi}\alpha_4=0. \tag{40*}$$

Продифференцируем (40) по x^{α} и умножим слева на $\overline{\psi}$; уравнение же (40*) умножим справа на $\partial\psi/\partial x^{\alpha}$ и результаты сложим. Учитывая формулу

$$\Gamma^{+}_{\sigma}\gamma^{\sigma}+\gamma^{\sigma}\Gamma_{\sigma}=-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\gamma^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}, \tag{41}$$

следующую из (24), можно записать сумму в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\overline{\psi}\sqrt{g}\gamma^{\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}}\right)+\overline{\psi}\frac{\partial\gamma^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}D_{\sigma}\psi-\overline{\psi}\gamma^{\sigma}\frac{\partial\Gamma_{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\psi=0. \tag{42}$$

Умножим теперь (40) слева на $-\overline{\psi}\Gamma^{+}_{\alpha}$, а (40*) — справа на $\Gamma_{\alpha}\psi$ и снова сложим. В полученной сумме заменим $\Gamma^{+}_{\alpha}\gamma^{\sigma}$ и $\Gamma^{+}_{\sigma}\gamma^{\sigma}$ их

[1]) Результаты этого пункта можно было бы получить в более изящном виде, рассматривая бесконечно малые преобразования координат (ср. [11]). Мы предпочли, однако, пойти более элементарным путем.

выражениями, найденными из формул (24) и (41). Это даст нам

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\overline{\psi}\sqrt{g}\,\gamma^\sigma\Gamma_\alpha\psi\right)+\overline{\psi}\left(\nabla_\alpha\gamma^\sigma\right)D_\sigma\psi-$$

$$-\overline{\psi}\gamma^\sigma\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial x^\sigma}\psi+\overline{\psi}\gamma^\sigma\left(\Gamma_\sigma\Gamma_\alpha-\Gamma_\alpha\Gamma_\sigma\right)\psi=0. \qquad (43)$$

Подставив сюда вместо $\nabla_\alpha\gamma^\sigma$ выражение

$$\nabla_\alpha\gamma^\sigma=\frac{\partial\gamma^\sigma}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}\gamma^\rho,$$

вычтем (43) из (42) и получим

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\sqrt{g}\,A^{\sigma}_{\cdot\alpha}\right)-\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}A^{\rho}_{\cdot\sigma}=\overline{\psi}\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha}\psi, \qquad (44)$$

где для краткости введено обозначение

$$D_{\sigma\alpha}=\frac{\partial\Gamma_\sigma}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial x^\sigma}+\Gamma_\sigma\Gamma_\alpha-\Gamma_\alpha\Gamma_\sigma. \qquad (45)$$

Теперь нужно найти матрицу $D_{\sigma\alpha}$. Имеем

$$D_{\sigma\alpha}=D_\sigma D_\alpha-D_\alpha D_\sigma=\sum_{kl}e_k e_l h_{k,\sigma}h_{l,\alpha}D'_{kl}, \qquad (46)$$

где

$$D'_{kl}=D'_k D'_l-D'_l D'_k+\sum_m e_m\left(\gamma_{mlk}-\gamma_{mkl}\right)D'_m. \qquad (47)$$

Оператор (47) равен

$$D'_{kl}=\frac{1}{4}\sum_{ij}\alpha_i\alpha_j e_j\gamma_{ijkl}+\frac{2\pi ie}{hc}M'_{kl}, \qquad (48)$$

где через γ_{ijkl} обозначены тетрадные компоненты тензора Римана:

$$\gamma_{ijkl}=\frac{\partial\gamma_{ijk}}{\partial s_l}-\frac{\partial\gamma_{ijl}}{\partial s_k}+$$

$$+\sum_m e_m\left[\gamma_{ijm}\left(\gamma_{mkl}-\gamma_{mlk}\right)+\gamma_{mil}\gamma_{mjk}-\gamma_{mik}\gamma_{mjl}\right], \qquad (49)$$

а антисимметричный тензор

$$M'_{kl}=\frac{\partial\varphi'_k}{\partial s_l}-\frac{\partial\varphi'_l}{\partial s_k}+\sum_m e_m\left(\gamma_{mlk}-\gamma_{mkl}\right)\varphi'_m \qquad (50)$$

есть тензор напряженности электромагнитного поля.

Выразим теперь матрицу $\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha}$ через D'_{kl}:

$$\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha}=\sum_{kl}e_k e_l\alpha_k h_{l,\alpha}D'_{kl}. \qquad (51)$$

Входящую сюда сумму $\sum_k e_k \alpha_k D'_{kl}$ можно найти из соотношения (48), если принять во внимание симметрию тензора Римана относительно циклирования. Тогда

$$\sum_k e_k \alpha_k D'_{kl} = \sum_k e_k \alpha_k \left(-\frac{1}{2} R'_{kl} + \frac{2\pi i e}{hc} M'_{kl} \right), \tag{52}$$

где

$$R'_{kl} = -\sum_i e_i \gamma_{ikil} \tag{53}$$

суть тетрадные компоненты свернутого тензора Римана. Подставляя (52) в (51), находим

$$\gamma^\sigma D_{\sigma\alpha} = \gamma^\rho \left(-\frac{1}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} M_{\rho\alpha} \right). \tag{51*}$$

Тем самым мы получили для дивергенции тензора $A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ выражение

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\sqrt{g} A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} \right) - \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} A^{\rho\cdot}_{\cdot\sigma} = S^\rho \left(-\frac{1}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} M_{\rho\alpha} \right). \tag{54}$$

Положим

$$\frac{ch}{2\pi i} A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} + i U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}, \tag{55}$$

где через $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ и $U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ обозначены действительная и мнимая части комплексного тензора $W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$; тогда формула (54) приводится к виду

$$\nabla_\sigma W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = S^\rho \left(e M_{\rho\alpha} - \frac{hc}{4\pi i} R_{\rho\alpha} \right) \tag{56}$$

или, после разделения действительной и мнимой частей,

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} &= e S^\rho M_{\rho\alpha}, \\ \nabla_\sigma U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} &= \frac{hc}{4\pi} S^\rho R_{\rho\alpha}. \end{aligned} \tag{57}$$

Второе из этих соотношений — тождество, которое легко доказать, так как тензор $U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ равен

$$U^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha} = -\frac{hc}{4\pi} \nabla_\alpha S^\sigma, \tag{58}$$

а дивергенция вектора S^σ равна нулю [формула (29)].

Уравнения (57) имеют тот смысл, что дивергенция тензора $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ равняется силе Лоренца. Поэтому $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ можно толковать как тензор энергии-импульса. Тогда уравнения (57) — это уравнения движения в общей теории относительности. Возможно, что было бы более последовательно рассматривать как тензор энергии-импульса не действительную часть $T^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$, а весь комплексный тензор $W^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$, но мы не станем здесь вдаваться в обсуждение вопроса о том, какая из этих двух трактовок предпочтительнее.

Следует особо подчеркнуть появление здесь тензора $M_{\rho\alpha}$ электромагнитной напряженности в комбинации с тензором Риччи в виде эрмитовой матрицы

$$\left\| R_{\rho\alpha} - \frac{4\pi i e}{hc} M_{\rho\alpha} \right\|.$$

8. Для того чтобы вывести из полученных соотношений квантовомеханические уравнения движения, отвечающие уравнениям движения материальной точки (геодезическая линия), мы поступим следующим образом.

Выберем в области изменения пространственных переменных x_1, x_2, x_3 полную систему функций

$$\psi_n (x_0, x_1, x_2, x_3; \zeta) \quad (\zeta = 1, 2, 3, 4), \tag{59}$$

таких, что каждая из них удовлетворяет уравнению Дирака [1]), и все они нормированы согласно условию

$$\int\int\int \overline{\psi}_n \gamma^0 \psi_n \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 1. \tag{60}$$

В силу уравнений (26) и (27), если это условие выполняется при каком-либо одном значении x_0, то оно выполняется и при любом другом значении x_0. Определим матричный элемент некоторого оператора L как

$$L_{mn} = \int\int\int \overline{\psi}_m L \psi_n \sqrt{g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{61}$$

Отметим, что результаты предыдущего пункта и, в частности, уравнение (54) сохраняют силу, если подставить в $A^{\sigma\cdot}_{\cdot\alpha}$ и в S^ρ вместо ψ функцию ψ_n, а вместо $\overline{\psi}$ — функцию $\overline{\psi}_m$, т. е. взять два разных решения уравнения Дирака. Поэтому уравнение (54) запишется теперь в виде

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\overline{\psi}_m \sqrt{g} \gamma^\sigma D_\alpha \psi_n \right) = \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} \overline{\psi}_m \gamma^\rho D_\sigma \psi_n + \\ + \overline{\psi}_m \gamma^\rho \left(-\frac{1}{2} R_{\rho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} M_{\rho\alpha} \right) \psi_n. \tag{62}$$

[1]) По этому поводу см. [12], а также [6].

Если это уравнение умножить на $\sqrt{g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ и проинтегрировать по всему пространству, то слева сохранится только одно слагаемое и мы получим

$$\frac{d}{dx^0}\left\{\int\int\int \overline{\psi}_m \gamma^0 D_\alpha \psi_n \sqrt{g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\right\} = \\ = \int\int\int \overline{\psi}_m \Big[\Gamma^\sigma_{\alpha\rho}\gamma^\rho D_\sigma + \\ + \gamma^\rho\left(-\frac{1}{2}R_{\rho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc}M_{\rho\alpha}\right)\Big]\psi_n \sqrt{g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \quad (63)$$

что можно также записать символически в виде

$$\frac{d}{dx_0}(\gamma^0 D_\alpha) = \Gamma^\sigma_{\alpha\rho}\gamma^\rho D_\sigma + \gamma^\rho\left(-\frac{1}{2}R_{\rho\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc}M_{\rho\alpha}\right) \quad (64)$$

или же, если положить

$$P_\alpha = \frac{h}{2\pi i}D_\alpha, \quad (65)$$

в виде

$$\frac{d}{dx^0}(\gamma^0 P_\alpha) = \Gamma^\sigma_{\alpha\rho}\gamma^\rho P_\sigma + \gamma^\rho\left(\frac{e}{c}M_{\rho\alpha} - \frac{h}{4\pi i}R_{\rho\alpha}\right). \quad (66)$$

Теперь можно истолковать операторы γ^ρ как операторы классической скорости dx^ρ/dx^0, а операторы P_σ — как операторы ковариантных компонент импульса $mg_{\sigma\rho}\,dx^\rho/ds$. Такое толкование позволяет осуществить переход к классической теории. Если при этом отбросить, сохраняя последовательность рассуждений, справа член, пропорциональный h, то мы получим в точности классическое уравнение движения заряженной материальной точки в гравитационном поле, а в том частном случае, когда электромагнитное поле отсутствует,— дифференциальное уравнение геодезической линии.

9. Ковариантные компоненты тензора

$$W_{\sigma\alpha} = g_{\sigma\rho}W^{\rho}_{\cdot\alpha} = c\overline{\psi}\gamma_\sigma P_\alpha\psi \quad (55^*)$$

несимметричны относительно перестановки индексов. Квантово-механическая величина $W_{\sigma\alpha}$ ввиду полученной интерпретации операторов $c\gamma_\sigma$ и P_α (как скорости и импульса) соответствует классической величине $\rho_0 u_\sigma u_\alpha$:

$$W_{\sigma\alpha} \to \rho_0 u_\sigma u_\alpha, \quad (67)$$

где u_σ — ковариантная компонента классической 4-скорости, а ρ_0 — плотность массы покоя вещества. При этом величина $\rho_0 u_\sigma u_\alpha$ симметрична по своим индексам.

Уравнение Дирака (27) можно вывести из вариационного принципа, который следующим образом выражается через тензор энергии-импульса:

$$\delta \int\int\int\int (W^{\sigma}_{\cdot\sigma} - mc^2\bar{\psi}\alpha_4\psi) \sqrt{g}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0. \qquad (68)$$

На основании этого равенства инварианту $m\bar{\psi}\alpha_4\psi$ следует приписать простой физический смысл плотности массы покоя.

10. Резюмируем результаты нашего исследования.

В основу было положено понятие параллельного переноса полувектора. Оно позволило трактовать чисто геометрически включение потенциалов φ_α наряду с импульсами p_α в уравнение Дирака, и стал излишним формальный перенос в квантовую механику из классической выражения $p_\alpha - (e/c)\,\varphi_\alpha$. Далее, указанное понятие позволило нам естественным образом включить потенциалы в геометрическую схему общей теории относительности, что может оказаться полезным при разработке единой теории электричества и гравитации.

Далее мы вывели уравнения Дирака в общей теории относительности, инвариантные по отношению к выбору как координат, так и тетрады. Попутно было получено явное выражение для дираковских операторов в криволинейных ортогональных координатах. Был построен тензор, дивергенция которого равна силе Лоренца, и этот тензор был истолкован как тензор энергии-импульса, а уравнение, которому он подчиняется,— как макроскопическое уравнение движения. Затем мы вывели квантово-механические уравнения движения электрона, которые отвечают классическим уравнениям для заряженной материальной точки или — в отсутствие электромагнитного поля — уравнениям геодезической линии. Наконец, был записан вариационный принцип, из которого могут быть выведены уравнения Дирака.

Цель, которую мы преследовали, состояла в геометризации дираковской теории электрона и в ее включении в общую теорию относительности. При этом вообще не были затронуты трудности, существующие в дираковской теории (например, наличие отрицательных значений энергии и отличная от нуля вероятность перезарядки электрона). Но возможно, что наши исследования косвенным образом помогут и при решении этих проблем, так как они показывают, что способна дать первоначальная, неизмененная теория Дирака.

ДОПОЛНЕНИЕ

После завершения этой работы я познакомился с очень интересной работой Г. Вейля [13]. Основная математическая идея Вейля в сущности тождественна понятию параллельного переноса полувектора. Однако физическое содержание работы Вейля в корне отличается от содержания моей работы.

Основные моменты подхода Вейля таковы.

1. Вейль рассматривает уравнение Дирака как волновое уравнение не для электрона, а для системы электрон — протон.

2. В добавочных членах гравитационного происхождения Вейль склонен усматривать замену члена $mc\alpha_4$, причем этот последний попросту зачеркивается.

По моему мнению, оба эти тезиса едва ли оправдываются, так как они наталкиваются на существенные трудности, на которые я хотел бы здесь указать.

Квантовомеханические уравнения движения, вытекающие из уравнения Дирака, полностью аналогичны классическим уравнениям движения одной заряженной материальной точки (а не системы двух тел), как это было уже показано в одной из моих работ [6].

Уравнение Дирака — именно с членом $mc\alpha_4$ — вполне пригодно для описания свободного движения электрона как волны в духе первоначального подхода де Бройля.

Предпринятое Вейлем разложение вектора плотности тока на два слагаемых, $S = S^{(+)} + S^{(-)}$, которые трактуются как токи положительного и отрицательного электричества, неоправданно, так как эти слагаемые — изотропные векторы и лишь сумма их является временноподобным вектором [1]). Но плотность тока — величина статистически-макроскопическая и потому должна быть того же рода, что и величины классической теории (т. е. с необходимостью временноподобной).

Уравнения Вейля должны по самому замыслу описывать систему электрон — протон, что требует, чтобы они правильно отражали энергетические уровни атома водорода. Это едва ли возможно ввиду отбрасывания члена $mc\alpha_4$ — и уж во всяком случае не доказано.

Гравитационные члены [«тетрадный вектор» f_i в нашей формуле (35)], трактуемые Вейлем как замена массы покоя, могут быть обращены в нуль при существовании системы нормальных конгруэнций, в частности в случае сферической симметрии, как и в статическом случае аксиальной симметрии. Но ведь система

---

[1]) *Доказательство.* Временноподобный характер величины S следует из тождества (8) (где вместо A_i теперь следует писать S_i), так как оно дает

$$S_0^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2 = S_4^2 + S_5^2. \qquad (*)$$

Величина $S_i^{(+)}$ получается из S_i, если приравнять нулю ψ_3 и ψ_4, а величина $S_i^{(-)}$ — если приравнять нулю ψ_1 и ψ_2. В обоих случаях и S_4, и S_5 обращаются в нуль, а потому должна быть равной нулю и левая часть равенства (*), что и требовалось доказать.

электрон — протон должна обладать высокой степенью симметрии.

Наконец, остается совершенно неясным, как именно из гравитационных членов должны получиться константы m и M — массы покоя электрона и протона.

Ввиду этих трудностей я не могу признать удавшейся попытку Вейля подойти к решению квантовомеханических задач о массе и о системе двух тел. Но я охотно соглашаюсь с общей идеей Вейля относительно того, что обе задачи тесно связаны друг с другом и с гравитацией.

В заключение я хотел бы сделать некоторые общие замечания о физическом содержании уравнений Дирака и о квантовомеханической задаче двух тел.

По моему мнению, уравнение Дирака квантовомеханически описывает лишь электрон, остальной же мир (включая, возможно, и массу электрона) оно описывает макроскопически. К «остальному миру» здесь отнесен также протон. Решение задачи двух тел должно состоять в том, чтобы найти квантовомеханическое описание электрона, протона, электромагнитного поля и массы. Квантовомеханическая задача о массе представляется мне неприступной, пока рассматривается только одно тело. Но квантовомеханическая задача одного тела может, по-видимому, сослужить добрую службу для макроскопического описания гравитации и электричества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фок В. А., Иваненко Д. Д.*, Zs. f. Phys., 54, 798 (1929).
2. *Фок В. А., Иваненко Д. Д.*, Compt. Rend., 188, 1470 (1929).
3. *Фок В. А.*, Compt. Rend., 189, 25 (1929).
4. *Möglich F.*, Zs. f. Phys., 48, 852 (1928).
5. *Neumann J. von*, Zs. f. Phys., 48, 868 (1928).
6. *Фок В. А.*, Zs. f. Phys., 55, 127 (1929).
7. *Eisenhart L. P.*, Riemannian Geometry, Princeton, 1926 (имеется перевод: *Л. П. Эйзенхарт*, Риманова геометрия, ИЛ, 1948).
8. *Levi-Civita T.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1929, S. 3.
9. *Weyl H.*, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, 1928, § 19, S. 88.
10. *Фок В. А.*, Zs. f. Phys., 39, 226 (1926).
11. *Tetrode H.*, Zs. f. Phys., 50, 336 (1928).
12. *Фок В. А.*, Zs. f. Phys., 49, 323 (1928).
13. *Weyl H.*, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA), 15, 323 (1929).

М. П. БРОНШТЕЙН

КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН*

Построена последовательная квантовая теория слабых гравитационных полей. Поле тяготения в пустоте рассматривается как квантовомеханическая система; вводятся релятивистски-инвариантные перестановочные соотношения. Гравитационное взаимодействие материальных тел устанавливается через посредство промежуточного агента —«гравитационных квантов». Рассмотрены два физических приложения теории: 1) расчет потерь энергии материальными системами вследствие испускания гравитационных волн и 2) вывод ньютоновского закона всемирного тяготения.

I. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

1. УРАВНЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Предметом теории гравитационных волн является случай гравитационного поля настолько слабого, что нарушение квазиевклидовского характера четырехмерного пространственно-временного континуума можно считать чрезвычайно малым. В этом случае возможно ввести систему отсчета, свойства которой весьма мало отличаются от свойств обыкновенных лоренцевых систем отсчета. Обозначая время через $t = x_0$, а прямоугольные пространственные координаты через x_1, x_2, x_3, мы можем положить компоненты метрического фундаментального тензора равными

$$g_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где числа $\Delta_{\mu\nu}$ имеют обычные значения, соответствующие квазиевклидовскому континууму Минковского:

$$\Delta_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

* ЖЭТФ, **6**, 195 (1936). (Здесь с незначительными исправлениями воспроизводится часть статьи.)

28—0919

(фундаментальная скорость принята за единицу), а все числа $h_{\mu\nu}$ малы по сравнению с единицей (причем $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$).

В этом случае уравнения теории тяготения приобретают приближенно линейный характер и легко могут быть проинтегрированы в общем виде.

Основанная на этом замечании теория гравитационных волн была построена автором общей теории относительности [1]).

Существенной чертой теории гравитационных волн является то обстоятельство, что в области применимости этой теории гравитационное поле может рассматриваться как поле, существующее в квазиевклидовском пространстве-времени (подобно электромагнитному полю в специальной теории относительности), а не как нарушение квазиевклидовского характера этого пространства-времени.

Предложенный Эйнштейном метод описания слабого гравитационного поля малыми величинами $h_{\mu\nu}$ имеет при всей своей простоте тот существенный недостаток, отмеченный Эддингтоном [2]), что при пользовании этим методом весьма трудно отделить «реальные» гравитационные волны, соответствующие нарушению квазиевклидовского характера пространства-времени, от «фиктивных» гравитационных волн, возникающих при введении произвольно осциллирующих координатных систем. Эддингтон высказал тот взгляд, что «реальный» характер имеют лишь поперечные гравитационные волны Эйнштейна (TT-волны по терминологии Эддингтона), распространяющиеся всегда с фундаментальной скоростью, в то время как волны, имеющие продольный характер (LL-волны), равно как и обладающие более сложным характером симметрии продольно-поперечные волны (LT-волны), распространяющиеся с произвольной скоростью, всегда «фиктивны», т. е. могут быть устранены целесообразным изменением координатной системы.

Любопытно отметить, что этим же замечанием впоследствии воспользовался Ландау [3]), который указал на то обстоятельство, не замечаемое большинством физиков, что поперечный характер «реальных» гравитационных волн, по-видимому, исключает возможность нарушения закона сохранения энергии в материальных системах, хотя бы и не подчиняющихся общей теории относительности (например, в системах, подчиняющихся «релятивистской

---

[1]) *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1916, S. 688; 1918, S. 154. (Имеется перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 514; стр. 631.—*Прим. ред.*)

[2]) *Эддингтон А. С.*, Теория относительности, Л.—М., 1934, стр. 236.

[3]) Эти соображения Ландау были высказаны им при обсуждении космологической теории автора настоящей работы [см. *M. Bronstein*, Sow. Phys., **3**, 73 (1933), где они изложены в «добавлении при корректуре»; см. также *G. A. Gamow*, Phys. Zs., **35**, 533 (1934)]. Обозначения (5), принятые в этой работе (см. дальше), также предложил Л. Д. Ландау.

теории квант»). В самом деле, изменение энергии (и, следовательно, массы) такой системы должно привести к распространению гравитационных волн в окружающем пустом пространстве, подчиняющемся обыкновенной («не квантовой») общей теории относительности; эти волны на основании соображений симметрии должны иметь продольный характер, а это исключается уравнениями закона тяготения в пустом пространстве. Этот качественный аргумент Ландау, впрочем, до сих пор не получил более подробного количественного обоснования.

В настоящей главе, которая должна служить введением к квантовой теории гравитационных волн, развиваемой в следующих главах, уместно привести вывод основных формул теории гравитационных волн. При этом мы, однако, будем пользоваться не методом Эйнштейна, а другим методом, в котором гравитационное поле характеризуется не коэффициентами $h_{\mu\nu}$, как в методе Эйнштейна, а компонентами четырехзначкового тензора Римана — Кристоффеля, что, очевидно, сразу же исключает «фиктивные» гравитационные волны. На возможность такого метода указал уже Эддингтон (в цитированной книге). Разумеется, предлагаемый метод, в котором переход от одних потенциалов $h_{\mu\nu}$ к другим трактуется как перемена калибровки, а не как изменение системы отсчета, вполне эквивалентен методу Эйнштейна, и различие между ними в сущности тривиально. Для наших целей, однако, новый метод представляет некоторые преимущества, так как теория гравитационных волн при этом приобретает свойства, весьма напоминающие обычную классическую электродинамику, и это позволит нам в дальнейшем ввести квантовые условия в тесной аналогии с квантовой электродинамикой. Выбор «потенциалов» $h_{\mu\nu}$, соответствующих заданному гравитационному полю, характеризуемому четырехзначковым тензором Римана — Кристоффеля, может трактоваться не как выбор системы отсчета, а как калибровочное преобразование — вроде того, с которым приходится иметь дело в электродинамике. Различные системы отсчета, соответствующие различным $h_{\mu\nu}$ (при условии, конечно, что $|h_{\mu\nu}| \ll 1$), но одним и тем же компонентам $B_{\mu\nu\sigma\rho}$, будут рассматриваться поэтому как одна и та же система отсчета. Это приводит к существенному для нас расширению класса «квазиинвариантов» (т. е. инвариантов по отношению к преобразованиям, с которыми имеет дело теория гравитационных волн): в частности, мы будем считать «квазиинвариантами» и такие величины, которые не инвариантны по отношению к калибровочному преобразованию и которые поэтому не являются даже приближенно инвариантами общей теории относительности (примером такого квазиинварианта является лагранжева функция, которая будет выведена в начале следующей главы)...

* * *

II. КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПУСТОТЕ

6. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Согласно Гейзенбергу и Паули[1]), квантовые условия в случае непрерывной среды имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&[h_{\alpha\beta}(\mathbf{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')]=0,\\
&[p_{\alpha\beta}(\mathbf{r}),\ p_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')]=0,\\
&[p_{\alpha\beta}(\mathbf{r}),\ h_{\alpha'\beta'}(\mathbf{r}')]=\frac{\hbar}{i}\,\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad \alpha\leqslant\beta,\quad \alpha'\leqslant\beta',
\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

где $h_{\alpha\beta}$ —«координаты», $p_{\alpha\beta}$ — сопряженные с ними «импульсы». Величины, входящие в скобки Пуассона, относятся к одному и тому же моменту времени, хотя могут относиться и к различным точкам пространства.

Квантовая теория гравитационного поля основана 1) на гамильтоновой функции (52), 2) на квантовых условиях (54) и 3) на соотношениях $[\alpha\alpha,\ \beta]=0$, которые могут трактоваться как некоторое добавочное условие, налагаемое на возможные состояния гравитационного поля, совместимое, как мы увидим ниже, с квантовыми уравнениями движения.

Выкладки, которые мы здесь не будем воспроизводить, показывают, что перестановочные соотношения (54) равносильны соотношениям

$$\begin{gathered}
[h_{\alpha\beta,\,\mathbf{k}},\ h_{\alpha'\beta',\,\mathbf{k}'}]=0,\qquad [h^{+}_{\alpha\beta,\,\mathbf{k}},\ h^{+}_{\alpha'\beta',\,\mathbf{k}'}]=0,\\
[h^{+}_{00,\,\mathbf{k}},\ h_{00,\,\mathbf{k}'}]=[h^{+}_{00,\,\mathbf{k}},\ h_{ll,\,\mathbf{k}'}]=[h^{+}_{ll,\,\mathbf{k}},\ h_{ll,\,\mathbf{k}'}]=-\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
[h^{+}_{00,\,\mathbf{k}},\ h_{0l,\,\mathbf{k}'}]=[h^{+}_{ll,\,\mathbf{k}},\ h_{0m,\,\mathbf{k}'}]=[h^{+}_{0l,\,\mathbf{k}},\ h_{mn,\,\mathbf{k}'}]=0,\\
[h^{+}_{00,\,\mathbf{k}},\ h_{lm,\,\mathbf{k}'}]=[h^{+}_{nn,\,\mathbf{k}},\ h_{lm,\,\mathbf{k}'}]=0\quad (l\neq m),\\
[h^{+}_{ll,\,\mathbf{k}},\ h_{mm,\,\mathbf{k}'}]=\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\quad (l\neq m),\\
[h^{+}_{0l,\,\mathbf{k}},\ h_{0m,\,\mathbf{k}'}]=\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta_{lm}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),\\
[h^{+}_{lm,\,\mathbf{k}},\ h_{pq,\,\mathbf{k}'}]=-\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta_{lp}\delta_{mq}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\quad (l<m,\ p<q).
\end{gathered}\tag{55}$$

С помощью этих соотношений легко не только проверить соотношения (54), но и вывести всевозможные перестановочные соотношения между символами Кристоффеля, компонентами поля и т. п. Заметим, что если мы имеем дело с величинами, кото-

[1]) *Heisenberg W., Pauli W.*, Zs. f. Phys., 56, 1 (1929).

рые являются линейными комбинациями различных производных от $h_{\alpha\beta}$ по x_μ, то скобка Пуассона

$$[M(\mathbf{r}),\ N(\mathbf{r}')],$$

где обе величины относятся к разным точкам пространства ($\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$), но к одному и тому же моменту времени, может быть вычислена с помощью функции $f(\mathbf{k})$, определяемой из соотношения

$$[M_{\mathbf{k}},\ N^+_{\mathbf{k}'}] = f(\mathbf{k})\cdot\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Несложное вычисление показывает, что в этом случае можно писать

$$[M(\mathbf{r}),\ N(\mathbf{r}')] = \frac{1}{(2\pi)^3}\int [f(\mathbf{k}) - f^+(-\mathbf{k})]\, e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{k}.$$

Так, например, если положить

$$M = p_{00} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}\left(h_{00} + \sum_l h_{ll}\right) - \sum_l \frac{\partial h_{0l}}{\partial x_l}, \qquad N = h_{00},$$

то

$$M_{\mathbf{k}} = -\frac{i\omega}{4}\left(h_{00,\,\mathbf{k}} + \sum_l h_{ll,\,\mathbf{k}}\right) - i\sum_l \mathbf{k}_l h_{0l,\,\mathbf{k}}, \qquad N_{\mathbf{k}} = h_{00,\,\mathbf{k}},$$

и на основании (55) получается

$$[M_{\mathbf{k}},\ N^+_{\mathbf{k}'}] = \frac{\hbar}{2i}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

откуда

$$f(\mathbf{k}) - f^+(-\mathbf{k}) = \frac{\hbar}{i}$$

и, следовательно,

$$[p_{00}(\mathbf{r}),\ h_{00}(\mathbf{r}')] = \frac{\hbar}{i}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\, d\mathbf{k} = \frac{\hbar}{i}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

в согласии с (54). Таким же образом, если положить

$$M = [00,\ k] \quad N = [00,\ l],$$

то

$$M_{\mathbf{k}} = -i\omega h_{0k,\,\mathbf{k}} - \frac{1}{2}\, i\mathbf{k}_k h_{00,\,\mathbf{k}}.$$

Поэтому

$$[M_{\mathbf{k}},\ N^+_{\mathbf{k}'}] = -\frac{\hbar}{2\omega}\left(\delta_{kl} - \frac{1}{4}\,\mathbf{k}_k\mathbf{k}_l\right)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

откуда

$$f(\mathbf{k}) - f^+(-\mathbf{k}) = 0,$$

и, следовательно, все три скобки Кристоффеля коммутируют друг с другом. Мы не станем выводить всех перестановочных соотношений, которые могут быть получены из (55). Можно было бы думать, что здесь, как и в квантовой электродинамике, получается вполне последовательная квантовомеханическая схема, содержащая величины, которые, правда, не всегда могут быть измеряемы с произвольно заданной точностью одновременно, но каждая из которых может быть сколь угодно точно измерена в отдельности. То есть можно было бы думать (следуя терминологии Ландау и Пайерлса) [1]), что измерения этих величин являются «предсказуемыми» измерениями. Чтобы понять природу тех физических условий, которые могут сделать это утверждение недействительным, рассмотрим в качестве простейшего примера измерение величины [00, 1], т. е. одной из скобок Кристоффеля. Эта величина может быть измерена посредством пробного тела, движущегося со скоростью, бесконечно малой по сравнению со скоростью света, так как уравнения движения такого тела могут быть написаны в виде [2])

$$\frac{d^2x}{dt^2} = [00,\,1] = \frac{\partial h_{01}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial t}. \tag{56}$$

Если нужно измерить среднее значение величины [00, 1] в объеме V и за промежуток времени T, то измерение сведется к определению импульса пробного тела (точнее компоненты p_x) в начале и в конце промежутка времени T, причем предполагается,

---

[1]) *Landau L., Peierls R.*, Zs. f. Phys., 69, 56 (1931).

[2]) В самом деле, в уравнении геодезической линии

$$\frac{d^2x_\alpha}{ds^2} + \left\{ {\beta\ \gamma \atop \alpha} \right\} \frac{dx_\beta}{ds} \cdot \frac{dx_\gamma}{ds} = 0$$

при весьма слабом гравитационном поле, что дает $\left\{ {\beta\ \gamma \atop 1} \right\} = -[\beta\gamma,\,1]$, положим $\alpha = 1$. Мы находим

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} = [\beta\gamma,\,1]\frac{dx_\beta}{ds}\frac{dx_\gamma}{ds}.$$

При малых скоростях правая часть сводится к $[00,\,1]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$. При малых скоростях можно также писать $ds^2 = dt^2\,(1 + h_{00})$. Поэтому $\frac{d^2x_1}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{1+h_{00}}} \times \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h_{00}}}\right)\frac{dx}{dt}$. Если скорость близка к нулю, то $\frac{d^2x_1}{ds^2} = \frac{1}{1+h_{00}} \times \frac{d^2x}{dt^2}$, откуда и следует формула (56).

что пробное тело имеет объем V. Измеряемая величина [00, 1] есть по определению

$$[00,\ 1]=\frac{(p_x)_{t+T}-(p_x)_t}{\rho VT},$$

где ρ — плотность (масса на единицу объема) пробного тела. Поэтому, если измерение импульса сопряжено с неопределенностью порядка Δp_x, то и измерение [00, 1] сопряжено с неопределенностью

$$\Delta\,[00,\ 1]\sim\frac{\Delta p_x}{\rho VT}. \tag{57}$$

Если для измерения импульса необходим промежуток времени Δt (причем, само собою, должно быть $\Delta t \ll T$) и если обозначить через Δx связанную с измерением импульса неопределенность в координате, то неопределенность импульса Δp_x будет состоять из двух членов: из обычного члена $h/\Delta x$ и из члена, связанного с полем тяготения, создаваемым самим измерительным прибором вследствие отдачи при измерении импульса. В самом деле, из уравнения (24) [1]) видно, что

$$\Box h_{01} = 16\pi G T_{01} = \varkappa'\rho v_x,$$

откуда следует, что неопределенность величины h_{01}, создаваемая неопределенностью отдачи со скоростью порядка $\Delta x/\Delta t$, имеет порядок величины

$$\varkappa'\rho\,\frac{\Delta x}{\Delta t}\,(\Delta t)^2$$

($\varkappa'$ есть постоянная тяготения, умноженная на 16π). Из формулы (56) вытекает, что соответствующая неопределенность величины [00, 1] имеет порядок величины $\varkappa'\rho\Delta x$.

Соответствующий неопределенный импульс, сообщенный измерительному прибору его собственным гравитационным полем, имеет порядок величины $\varkappa'\rho\Delta x\cdot\rho V\cdot\Delta t$. Поэтому полное выражение для Δp_x будет

$$\Delta p_x\sim\frac{h}{\Delta x}+\varkappa\rho^2 V\Delta x\Delta t. \tag{58}$$

Можно было бы думать, что обычные соотношения неопределенности теряют силу в гравитационном поле, однако — по ана-

---

[1]) Это — уравнение для слабого гравитационного поля

$$\Box\, h_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,\Delta_{\alpha\beta}\left(T_{00}-\sum_{l}T_{ll}\right),$$

получаемое из уравнений Эйнштейна с использованием гармонических координатных условий.— *Прим. ред.*

логии с известными рассуждениями Бора и Розенфельда[1]) в квантовой электродинамике — можно показать, что второй член в формуле (58) может быть сделан сколь угодно малым по сравнению с первым. Тем не менее из формулы (57) видно, что это не есть наиболее ловкий способ производить мысленный эксперимент, так как для наиболее точного измерения [00, 1] необходимо сделать Δp_x минимальным, а это, как видно из (58), достигается, когда оба члена имеют одинаковый порядок величины, т. е. когда

$$\Delta x \sim \left(\frac{h}{\varkappa'\rho^2 V\Delta t}\right)^{1/2}.$$

Наименьшее значение Δp_x равно

$$(\Delta p_x)_{\text{мин}} \sim (h\varkappa'\rho^2 V\Delta t)^{1/2},$$

и это дает для измеряемой величины неопределенность

$$(\Delta\,[00,\,1])_{\text{мин}} \sim \frac{1}{T}\left(\frac{h\varkappa'\Delta t}{V}\right)^{1/2}. \tag{59}$$

Два обстоятельства приводят к тому, что продолжительность измерения импульса (Δt) не может быть сделана сколь угодно малой. Во-первых, принцип относительности требует, чтобы Δx был меньше, чем Δt (скорость отдачи, вызванной измерением импульса, не может превосходить фундаментальную скорость, т. е. единицу). Поэтому

$$\left(\frac{h}{\varkappa'\rho^2 V\Delta t}\right)^{1/2} \leqslant \Delta t, \tag{60}$$

т. е.

$$\Delta t \geqslant \left(\frac{h}{\varkappa'\rho^2 V}\right)^{1/3}.$$

Во-вторых, из самого определения измерения поля следует, что Δx должен быть гораздо меньше линейных размеров пробного тела, т. е.

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{h}{\varkappa'\rho^2 V\Delta t}\right)^{1/2} &\ll V^{1/3},\\ \Delta t &\gg \frac{h}{\varkappa'\rho^2 V^{5/3}}. \end{aligned}\right. \tag{60$'$}$$

Таким образом, для Δt получаются *две* нижние границы (60) и (60′), причем отношение первой из них ко второй равно

$$\left(\frac{\varkappa'\rho^2 V^2}{h}\right)^{2/3},$$

т. е. оно зависит от массы пробного тела, будучи совершенно нич-

---

[1]) *Bohr N.*, *Rosenfeld L.*, Danske Vid. Selskab. Math.-Fys. Medd., **12**, № 8 (1933). (Имеется перевод в книге: Нильс Бор, Избранные научные труды, т. II, изд-во «Наука», М., 1971, стр. 120. — *Прим. ред.*)

тожной величиной в случае электрона и становясь величиной порядка 1 в случае пылинки, весящей сотую долю миллиграмма. Для неопределенности измеряемой величины [00, 1] мы получаем нижнюю границу в том и другом случае различную, а именно

$$(\Delta\,[00,\,1])_{\text{мин}} \gtrsim \frac{h^{2/3}\varkappa'^{1/3}}{T\rho^{1/3}V^{2/3}} \tag{61}$$

и

$$(\Delta\,[00,\,1])_{\text{мин}} \gtrsim \frac{h}{T\rho V^{4/3}}. \tag{61'}$$

Отсюда следует, что для возможно более точного определения среднего значения измеряемой скобки Кристоффеля в данном объеме пространства-времени выгодно применять в качестве измерительных приборов пробные тела возможно большей массы. Поэтому из двух границ (60) и (60′) единственно существенной становится первая, которая в этом случае оказывается большей, чем вторая. Для минимальной ошибки при измерении величины [00, 1] получается, следовательно, граница (61).

До сих пор все рассуждения были в большей степени параллельны соответствующим рассуждениям в квантовой электродинамике [1]); но на этом месте приходится принять во внимание обстоятельство, из которого обнаруживается принципиальное различие между квантовой электродинамикой и квантовой теорией гравитационного поля. Различие это заключается в том, что в формальной квантовой электродинамике, не учитывающей структуры элементарного заряда, нет никаких принципиальных причин, ограничивающих увеличение плотности ρ. При достаточно большой плотности заряда пробного тела точность измерения компонент электрического поля может быть сделана какой угодно. В природе, вероятно, существуют принципиальные ограничения плотности электрического заряда (не больше одного элементарного заряда на объем с линейными размерами порядка классического электронного радиуса); однако эти ограничения не учитываются формальной квантовой электродинамикой, вследствие чего она может без противоречий рассматривать измерения электромагнитных величин как «предсказуемые». Не то — в квантовой теории гравитационного поля: она должна считаться с ограничением, вытекающим из того, что гравитационный радиус пробного тела ($\varkappa\rho V$) не может превосходить его действительных линейных размеров:

$$\varkappa'\rho V \lesssim V^{1/3},$$

откуда

$$\frac{h^{2/3}\varkappa'^{1/3}}{T\rho^{1/3}V^{2/3}} \gtrsim \frac{h^{2/3}\varkappa'^{2/3}}{TV^{4/9}}.$$

---

[1]) См. *Бронштейн М. П.*, ДАН СССР, 1, 388 (1934).

Итак, величина, стоящая в правой части этого неравенства, представляет абсолютный минимум неопределенности при измерении компонент напряжения силы тяжести, который невозможно перейти введением целесообразно выбранного измерительного прибора. Этот абсолютный предел вычислен очень грубо, потому что при достаточно большой массе измерительного прибора начнут, вероятно, играть роль отступления от принципа суперпозиции (мы здесь всюду рассматриваем случай гравитационных волн, т. е. приближенно считаем уравнения закона тяготения линейными; это приближение как раз перестает быть удовлетворительным вблизи поверхности тяжелого тела, гравитационный радиус которого приближается к его действительным размерам). Тем не менее можно думать, что аналогичный результат сохранится и в более точной теории, так как он нисколько сам по себе не вытекает из принципа суперпозиции, а соответствует лишь тому факту, что в общей теории относительности не может существовать тел сколь угодно большой массы при заданном объеме. В электродинамике нет никакой аналогии этому факту (и именно вследствие того, что в ней имеет место принцип суперпозиции); вот почему квантовая электродинамика возможна без внутренних противоречий. В теории же гравитационных волн это внутреннее противоречие никак не может быть обойдено; мы можем считать измерение величин гравитационного поля «предсказуемым» лишь в том случае, если ограничимся рассмотрением достаточно больших объемов и промежутков времени. Устранение связанных с этим логических противоречий требует радикальной перестройки теории и, в частности, отказа от римановой геометрии, оперирующей, как мы здесь видим, принципиально наблюдаемыми величинами — а может быть, и отказа от обычных представлений о пространстве и времени и замены их какими-то гораздо более глубокими и лишенными наглядности понятиями. Wer's nicht glaubt, bezahlt einen Thaler [1]).

* * *

III. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С МАТЕРИЕЙ

10. ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Теория тяготения, предварительный очерк которой дан в настоящей работе, рассматривает гравитационное поле как совокупность гравитационных квантов — частиц, аналогичных фотонам. Эти частицы взаимодействуют с материей, причем энергия

[1]) Кто этому не верит, с того талер.— *Прим. ред.*

взаимодействия выражается формулой (81) (частный случай: ось z параллельна вектору $\mathbf{k}$ гравитационного кванта). Гравитационное взаимодействие материальных частиц друг с другом осуществляется лишь через посредство промежуточного агента — гравитационных квантов. В настоящем параграфе мы покажем, что такое взаимодействие по типу

$$\text{материя} \rightleftarrows \text{гравитационные кванты} \rightleftarrows \text{материя},$$

подчиняющееся количественному закону (81), может быть в первом приближении заменено взаимодействием по типу

$$\text{материя} \rightleftarrows \text{материя},$$

подчиняющимся закону тяготения Ньютона.

...Теория гравитационного взаимодействия может быть построена аналогично теории электростатического взаимодействия, которую развили Фок и Подольский[1]) в духе идей Дирака[2]). В основе теории должны лежать уравнения

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2+\frac{m_1}{2}h_{00}(r_1)\right)\psi+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_1}=0,$$
$$\left(\frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2+\frac{m_2}{2}h_{00}(r_2)\right)\psi+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t_2}=0,$$

причем при $t_1 = t_2 = t$ отсюда следует

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2+\frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=-\left(\frac{m_1}{2}h_{00}(r_1)+\frac{m_2}{2}h_{00}(r_2)\right)\psi.$$

Ищется разложение решения этого уравнения по степеням масс m_1 и m_2.

Решение этой задачи дано в цитированной статье Фока и Подольского, и незачем повторять его здесь. Мы отметим лишь те пункты, в которых рассматриваемая задача гравитационной теории отличается от своей электромагнитной аналогии.

Формула (37) работы Фока — Подольского может быть целиком переписана здесь, если вместо зарядов ε_1 и ε_2 подставить половинные массы $m_1/2$ и $m_2/2$, а вместо потенциала Φ потенциал h_{00}. Но здесь нужно принять во внимание одно существенное различие: в электродинамике Фока — Подольского имеет место перестановочное соотношение

$$[\Phi_{\mathbf{k}}^{+},\ \Phi_{\mathbf{k}'}]=\frac{\hbar}{2\omega}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

[1]) *Fock V., Podolsky B.*, Sow. Phys., **1**, 801 (1932).
[2]) *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **A136**, 453 (1932).

[см. формулу (17′) цитируемой работы], в то время как у нас

$$[h^+_{00,\,\mathbf{k}},\ h_{00,\,\mathbf{k}'}] = -\frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

[см. формулу (55)]. Поэтому в отличие от Фока — Подольского нужно положить

$$h^+_{00,\,\mathbf{k}} h_{00,\,\mathbf{k}'} = 0, \tag{96}$$

$$h_{00,\,\mathbf{k}} h^+_{00,\,\mathbf{k}'} = \frac{\hbar}{2\omega}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}').$$

Для вычисления $\varphi_2(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2)$ мы можем поэтому ограничиться формулами

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 \sim \frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\,\mathbf{k}}\varphi_1(\mathbf{p}_1-\hbar\mathbf{k}\mathbf{p}_2)\,e^{-i\omega t}\,d\mathbf{k} + \frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h_{00,\,\mathbf{k}}\varphi_1(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2-\hbar\mathbf{k})\,e^{-i\omega t}\,d\mathbf{k}, \tag{97}$$

$$-\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_1 \sim \frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^+_{00,\,\mathbf{k}}\varphi_0(\mathbf{p}_1+\hbar\mathbf{k}_1\mathbf{p}_2)\,e^{i\omega t}\,d\mathbf{k} + \frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}}\int h^+_{00,\,\mathbf{k}}\varphi_0(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2+\hbar\mathbf{k})\,e^{i\omega t}\,d\mathbf{k}. \tag{98}$$

Эти формулы существенно отличаются от аналогичных им формул (39), (40) цитированной работы Фока — Подольского. Из формулы (98) вытекает

$$\varphi_1(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2) = -\frac{m_1}{2(2\pi)^{3/2}\hbar^3}\,h^+_{00,\,\frac{\mathbf{p}_1^0-\mathbf{p}_1}{\hbar}}\,\frac{\delta(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_2^0)\,\delta_{J_0}}{W-W_0+|\mathbf{p}_1^0-\mathbf{p}_1|}\,e^{i\frac{|\mathbf{p}_1^0-\mathbf{p}_1|-W_0}{\hbar}t} - \frac{m_2}{2(2\pi)^{3/2}\hbar^3}\,h^+_{00,\,\frac{\mathbf{p}_2^0-\mathbf{p}_2}{\hbar}}\,\frac{\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1^0)\,\delta_{J_0}}{W-W_0+|\mathbf{p}_2^0-\mathbf{p}_2|}\,e^{i\frac{|\mathbf{p}_2^0-\mathbf{p}_2|-W_0}{\hbar}t}.$$

Подставляя это в (97) и пользуясь (96), мы получаем (вычеркивая бесконечные члены, соответствующие гравитационному действию частицы на самое себя) приближенную формулу

$$\left(\frac{1}{2m_1}\mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\mathbf{p}_2^2 + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi_2 \sim \frac{m_1 m_2}{4(2\pi)^3\hbar}\,\frac{\delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1^0+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_2^0)\,\delta_{J_0}e^{-\frac{i}{\hbar}W_0 t}}{|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_1^0|^2},$$

которая отличается знаком правой части от аналогичной формулы (42) работы Фока — Подольского. Соответственно этому, переходя к координатному пространству, мы получаем энергию взаимодействия в виде

$$-\frac{m_1 m_2}{16\pi\,|\,\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\,|},$$

т. е. получаем закон притяжения Ньютона с гравитационной постоянной $g = 1/16\pi$ (откуда $\varkappa = 8\pi g = {}^1/_2$), что соответствует выбранной нами системе единиц.

Тот факт, что в теории тяготения в отличие от электродинамики мы имеем притяжение между частицами, а не отталкивание, объясняется тем, что потенциал h_{00} удовлетворяет перестановочному соотношению, в котором знак другой, нежели в аналогичном перестановочном соотношении для скалярного электромагнитного потенциала.

Таким образом, закон тяготения Ньютона можно до известной степени считать следствием из теории гравитационных квантов.

Д. Д. ИВАНЕНКО, А. А. СОКОЛОВ

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ*

После нового существенно упрощенного вывода основных формул квантовой теории слабого гравитационного поля и нового подсчета излучения гравитационных волн (гравитонов) приводится обсуждение возможности превращения пар элементарных частиц в гравитоны и обратного превращения гравитонов в частицы. Тем самым уточняется связь поля тяготения с другими формами вещества, представленного элементарными частицами.

§ 1. ГРАВИТАЦИЯ И ВЕЩЕСТВО

В понимании поля тяготения можно различать три этапа. Первый из них связан с теорией Ньютона и классической физикой, согласно которой гравитационное поле осталось в стороне от известного объединения XIX века (свет — электричество — магнетизм и т. д.) и наряду с другими полями никак не было связано с пространством и временем. Второй этап представлен общей теорией относительности Эйнштейна, согласно которой, как известно, гравитационное поле должно описываться не одной компонентой ньютонова потенциала, а десятью компонентами симметричного тензора, совпадающего с компонентами метрического тензора, характеризующего искривление риманова пространства. Если отступления от псевдоевклидовых значений $g_{\mu\nu}^{(0)}$ малы, то можно положить

$$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}^{(0)}+h_{\mu\nu}, \qquad g^{\mu\nu}=g_{(0)}^{\mu\nu}-h^{\mu\nu},$$

$$g_{\mu\nu}^{(0)}=g_{(0)}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

* Вестник МГУ, № 8, 103 (1947).

При этом ньютонов потенциал равен

$$\varphi = \frac{c^2}{2} h_{44}$$

Используя значки Эйзенхарта $e_1 = e_2 = e_3 = -1$, $e_4 = 1$, имеем [1])

$$g^{(0)}_{\mu\nu} = e_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1; & \mu = \nu, \\ 0; & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что при этом

$$\sqrt{-g} = 1 + h; \quad h = e_\mu h_{\mu\mu}; \quad h^{\mu\nu} = e_\mu e_\nu h_{\mu\nu}.$$

В дальнейшем мы будем иметь дело со слабым гравитационным полем (опуская в большинстве случаев термин «слабое»), когда добавки $h_{\mu\nu}$ малы и квадратами их, вообще говоря, можно пренебречь. В этом приближении уравнения Эйнштейна для гравитационных волн будут линейными и в пустоте имеют вид волновых уравнений:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_{\mu\nu} = 0. \tag{3}$$

При этом учтено условие Гильберта, аналогичное условию Лоренца для электромагнитных потенциалов:

$$\frac{\partial e_\mu h_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^\nu} = 0, \tag{4}$$

где $x^\mu = x, y, z, ct$.

Можно сказать, что общая теория относительности, указав на возможность воздействия на пространство — время всех видов вещества, вместе с тем, казалось бы, окончательно оторвала гравитационное поле от самого вещества, которое, как мы теперь знаем, состоит из элементарных частиц (электроны, позитроны; положительные и отрицательные, а также, возможно, нейтральные мезотроны; протоны, нейтроны, фотоны или электромагнитное поле, а также, по всей вероятности, нейтрино). Как подчеркнул недавно Эйнштейн, физическая реальность разделена на «метрическое поле» (гравитацию), с одной стороны, и электромагнитное поле и материю — с другой [1].

Третий, современный, этап понимания поля тяготения связан с релятивистской квантовой механикой элементарных частиц и полей. Линейные уравнения слабого гравитационного поля можно подвергнуть вторичному квантованию [2], подсчитать излучение

[1]) Греческие индексы бегут от 1 до 4, латинские от 1 до 3; индексы, стоящие у значков Эйзенхарта, при суммировании не учитываются.

гравитационной энергии и получить из квантовой теории закон Ньютона; кроме того, было показано, что кванты поля тяготения, или гравитоны, обладают спином 2 и естественно включаются в общую систему полей и частиц различных спинов.

Наша первая задача в § 2 будет заключаться в построении теории гравитонов значительно более простым путем, в форме, непосредственно позволяющей произвести подсчеты всевозможных эффектов.

Более того, мы хотим подчеркнуть, что без всяких новых гипотез релятивистская квантовая механика гравитонов с неизбежностью приводит к возможности полного превращения пары элементарных частиц, например электрона и позитрона или двух мезотронов, в гравитоны вполне аналогично аннигиляции пары с испусканием фотонов. Также возможен обратный эффект порождения пары частиц за счет энергии гравитационного поля. Мы полагаем, что анализ подобных эффектов существенно поможет связать гравитационное поле как особую форму вещества, выражающую непосредственно искривление пространства, с другой, обычной формой вещества, представленного элементарными частицами.

Мы указываем на необходимость учесть наряду с электромагнитным и мезотронным полем также слабое гравитационное поле в качестве партнера в цепи возможных трансмутаций вещества. С другой стороны, следует подчеркнуть крайне малую вероятность процессов подобных превращений с участием гравитонов, что подтверждает практическую возможность разделения физической реальности на гравитацию и обычное вещество. В самом деле, эффективное сечение порождения и аннигиляции частиц (например, электронов) с участием фотонов определяется квадратом электромагнитного радиуса электрона

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13}\ см,$$

а также в ряде случаев электромагнитной константой тонкой структуры Зоммерфельда

$$\alpha = \frac{e^2}{hc} \sim \frac{1}{137}.$$

Вероятность порождения или аннигиляции при участии мезотронного поля (g-силы) определяется, с одной стороны, квазиэлектрическим мезотронным радиусом нуклеонов

$$r_\mu = \frac{g^2}{Mc^2} \sim 10^{-15}\ \text{см},$$

где g — ядерный мезотронный заряд нуклеонов и M — их масса, и, с другой стороны, в ряде случаев мезотронной константой тонкой структуры

$$\beta = \frac{g^2}{hc} \sim 0{,}2.$$

В случае же аннигиляции или порождения с участием гравитонов эффективные сечения будут определяться квадратами гравитационных радиусов частиц (например, для электрона)

$$r_g = \frac{\varkappa m}{c^2} \sim 10^{-55}, \tag{5}$$

где $\varkappa$ — ньютонова константа тяготения ($\varkappa = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$), а также в ряде случаев соответственными гравитационными константами тонкой структуры

$$\gamma = \frac{\varkappa m^2}{hc} \sim 10^{-45}. \tag{6}$$

Чрезвычайная малость r_g и γ указывает на то, что обычное вещество в весьма хорошем приближении можно считать отделимым от гравитационного поля, тогда как, например, газ фотонов при высоких температурах всегда содержит примесь порождаемых фотонами пар электронов и позитронов, т. е. электромагнитное поле гораздо труднее отделить от других видов вещества, чем гравитационное.

В качественном виде указанные соображения применимы также к общему случаю сильного гравитационного поля.

Не исключено, что указываемая нами связь вещества и гравитации окажется существенной для понимания процессов космологического порядка, в частности в гипотетическом предзвездном состоянии [3].

§ 2. КВАНТОВАНИЕ СЛАБОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Лагранжева функция гравитационного поля имеет в общем случае вид

$$L = \frac{c^4}{16\pi\varkappa} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\,(\{\mu\alpha,\ \beta\}\{\nu\beta,\ \alpha\} - \{\mu\nu,\ \alpha\}\{\alpha\beta,\ \beta\}), \tag{7}$$

где

$$\{\alpha\beta,\ \beta\} = \nabla_\alpha \sqrt{-g}, \quad \nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha},$$

и для слабого поля

$$\{\mu\alpha,\ \beta\} = e_\beta\,[\mu\alpha,\ \beta] = \frac{1}{2} e_\beta\,(\nabla_\alpha h_{\mu\beta} + \nabla_\mu h_{\alpha\beta} - \nabla_\beta h_{\mu\alpha}).$$

Отбросим не интересующие нас сейчас части поля — «псевдогравитоны», участвующие лишь в переносе взаимодействия (т. е. по терминологии Эддингтона [4] «продольно-продольные» и «продольно-поперечные» волны), и оставим только реально излучаемые «поперечно-поперечные» гравитоны.

Тогда, выбирая калибровку так, чтобы $h = e_\mu \eta_{\mu\mu} = 0$, получим для «поперечно-поперечной» части лагранжиана

$$L = \frac{c^4}{16\pi\varkappa} e_\mu e_\alpha e_\beta [\mu\alpha, \ \beta][\mu\beta, \ \alpha]. \tag{8}$$

Для простоты рассмотрим сперва распространение гравитационных волн вдоль оси $x^1 = x$, после чего легко будет проделать переход к общему случаю. При этом отличными от нуля будут две компоненты h_{23} и $h_{22} - h_{33}$ при условии, что $h_{22} + h_{33} = 0$. Тогда

$$L = \frac{c^4}{64\pi\varkappa} \sum_{\mu, \nu=1, 2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]. \tag{9}$$

Отсюда для плотности энергии гравитационного поля получим

$$T_{44} = L - g_{(4)}^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial g_{(4)}^{\alpha\beta}},$$

где $T_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора энергии, а

$$g_{(4)}^{\alpha\beta} = \nabla_4 (\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}) = -e_\alpha e_\beta \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$T_{44} = \frac{c^4}{64\pi\varkappa} \sum_{\mu,\nu=1, 2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]. \tag{10}$$

В согласии с теоремой Паули плотность энергии гравитационного поля, обладающего целым спином, оказывается положительной.

Разложим компоненты поля в ряд Фурье:

$$h_{\mu\nu} = L^{-3/2} \sum_{\mathbf{l}} \sqrt{\frac{8\pi\varkappa h}{c^3 l}} \left[q_{\mu\nu} e^{-iclt + i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} + q_{\mu\nu}^+ e^{iclt - i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} \right], \tag{11}$$

где L — длина куба периодичности.

В энергии поля

$$H = \int d\tau\, T_{44}$$

где $d\tau = dx\,dy\,dz$, выделим часть, связанную с распространением волн по оси x:

$$H_0 = \sum_{l_1;\, l_2=l_3=0} H(l_1 00), \tag{12}$$

и оставшуюся часть обозначим через

$$H_1 = \sum_{l_1;\, l_2;\, l_3}{}' H(l_1 l_2 l_3). \tag{13}$$

Перейдем от величин $q_{\mu\nu}$ к двум независимым компонентам

$$\begin{gathered} q_{23}(l_1 00) = q_1, \\ q_{22}(l_1 00) = -q_{33}(l_1 00) = q_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Тогда плотность энергии

$$H_0 = \sum_{l_1} \mathrm{ch}\,|l_1|\,(q_1^+ q_1 + q_2^+ q_2), \tag{15}$$

где, как обычно, отброшена нулевая энергия.

Отсюда, применяя обычные методы вторичного квантования, найдем следующие бозевские перестановочные соотношения для коэффициентов Фурье:

$$[q_\mu(l_1);\; q_\nu^+(l_1')] = \delta_{\mu\nu}\delta_{l_1 l_1'}; \qquad \mu,\ \nu = 1,\ 2. \tag{16}$$

Число «поперечно-поперечных» гравитонов в l_1-м состоянии, очевидно, равно

$$n_\mu = q_\mu^+ q_\mu, \qquad \mu = 1,\ 2 \tag{17}$$

(суммирования по μ нет).

Переходя теперь к компонентам поля $q_{ns}(\mathbf{l})$ при произвольном выборе направления для волнового числа $\vec{\mathbf{l}}$, имеем

$$q_{ns} = (a_{n2}a_{s2} - a_{n3}a_{s3})\, q_2 + (a_{n2}a_{s3} + a_{n3}a_{s2})\, q_1. \tag{18}$$

Подчеркнем, что в нашем случае «поперечно-поперечных» волн должны оставаться одни пространственные составляющие ($q_{4\mu} = 0$), причем матрица направляющих косинусов имеет вид

$$(a_{ns}) = \begin{pmatrix} l_1/l & -l_2/l_{12} & -l_1 l_3/l l_{12} \\ l_2/l & l_1/l_{12} & -l_2 l_3/l l_{12} \\ l_3/l & 0 & l_{12}/l \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь для удобства положено

$$l_{12} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}, \qquad l = \sqrt{l_{12}^2 + l_3^2}.$$

Отсюда получим перестановочные соотношения для поля гравитонов в общем случае

$$[q_{ns};\ q^{+}_{n's'}] = Q_{nn'}Q_{ss'} + Q_{ns'}Q_{sn'} - Q_{ns}Q_{n's'}, \tag{20}$$

где
$$Q_{nn'} = \delta_{nn'} - l_n l_{n'}/l^2.$$

Условие Гильберта — Лоренца (см. [4]), которое теперь имеет вид

$$q_{nn'}l_n = 0,$$

будет автоматически выполнено, так как

$$Q_{nn'}l_n = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{21}$$

Перестановочные соотношения для коэффициентов Фурье непосредственно позволяют найти четырехмерные перестановочные соотношения

$$[h_{ns}(\mathbf{r},\ t);\ h_{n's'}(\mathbf{r}',\ t')] = \frac{16\pi\varkappa h}{c^3 i}(\nabla_{nn'}\nabla_{ss'} + \nabla_{ns'}\nabla_{sn'} - \nabla_{ns}\nabla_{n's'})\,D', \tag{22}$$

причем $D' = D/(\nabla^2)^2$, где D—первая функция Паули:

$$D = (2\pi)^{-3}\int\frac{(dl)}{l}\sin clTe^{i\mathbf{l}\cdot\mathbf{R}}.$$

Здесь

$L \to \infty$, $T = t - t'$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\nabla_{nn'} = \delta_{nn'}\nabla^2 - \nabla_n\nabla_{n'}$, $(dl) = dl_1dl_2dl_3$.

Заметим, что если развивать, согласно Паули и Фирцу, теорию частиц спина 2, не выделяя специально «поперечно-поперечной» части, то получаются близкие формулы. Например, для четырехмерных перестановочных соотношений имеем

$$[h_{\mu\nu}(\mathbf{r},\ t);\ h_{\mu'\nu'}(\mathbf{r}',\ t)] = \frac{16\pi\varkappa h}{c^3 i}(\delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu'\nu'})\,D.$$

§ 3. КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Для описания движения бесспиновых частиц, порождающих гравитоны, воспользуемся релятивистским уравнением Шредингера — де Бройля, которое в гравитационном поле имеет вид

$$(-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + g^{\mu\nu}\{\mu\nu,\ \alpha\}\nabla_\alpha - k_0^2)\,\psi = 0. \tag{23}$$

В нашем приближении слабого «поперечно-поперечного» гравитационного поля имеем

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = e_\mu\nabla_\mu\nabla_\mu - h_{ns}\nabla_n\nabla_s,$$

$$g^{\mu\nu}\{\mu\nu,\ \alpha\}\nabla_\alpha = (\nabla_s h_{ns} h_{nk})\nabla_k + \frac{1}{4}e_\alpha(\nabla_\alpha h_{ns}^2)\nabla_\alpha.$$

Отсюда искомое уравнение примет вид

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - k_0^2\right)\psi = U\psi, \tag{24}$$

где $m = \dfrac{k_0 h}{c}$ является массой частиц.

Для слабого поля линейные и квадратичные члены относительно h_{ns} соответственно равны

$$U_1 = -h_{ns}\nabla_n\nabla_s; \tag{25}$$

$$U_2 = -(\nabla_s h_{ns} h_{nk})\nabla_k - \frac{1}{4}e_\alpha(\nabla_\alpha h_{ns}^2)\nabla_\alpha.$$

Таким образом, с помощью уравнения (24) возможно непосредственно описывать процессы второго порядка (порождение двух гравитонов и т. д.).

Ограничиваясь линейными членами относительно h_{ns}, мы легко можем написать уравнение Дирака в слабом гравитационном поле [1]).

В самом деле, уравнение Дирака в гравитационном поле имеет вид

$$(\gamma^\mu\nabla_\mu - ik_0)\psi = 0. \tag{26}$$

Здесь

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = 2e_\mu\delta_{\mu\nu} - 2e_\mu e_\nu h_{\mu\nu}. \tag{27}$$

Полагая, далее,

$$\gamma^\mu = \gamma_{(0)}^\mu - h^\mu,$$

где

$$\gamma_{(0)}^\mu\gamma_{(0)}^\nu + \gamma_{(0)}^\nu\gamma_{(0)}^\mu = 2e_\mu\delta_{\mu\nu},$$

найдем

$$h^\mu = \frac{1}{2}\gamma_{(0)}^\lambda e_\mu h_{\mu\lambda}. \tag{28}$$

Наконец, найдем «полурелятивистское» приближение к уравнению (24).

[1]) В общем случае уравнение Дирака в гравитационном поле было впервые написано Фоком и одним из нас [5].

Если энергия частиц может иметь два знака, т. е. соответствующее уравнение может описывать рождение частиц, но скорость частиц v много меньше c, тогда мы можем положить

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{2k_0}{ic}\frac{\partial}{\partial t}+k_0^2, \tag{29}$$

причем k_0 может принимать как положительные ($E>0$), так и отрицательные ($E<0$) значения.

Подставляя последнее соотношение в уравнение (22) и отбрасывая в энергии взаимодействия малые члены, пропорциональные $\nabla_n\psi$, найдем следующее «полурелятивистское» уравнение [1]):

$$\left(-\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial t}-H_0\right)\psi=V\psi. \tag{30}$$

Здесь потенциальная энергия в поле гравитонов V связана в «полурелятивистском» приближении с U следующим образом:

$$V=\frac{ch}{2k_0}U=-\frac{ch}{2k_0}\left(h_{ns}\nabla_n\nabla_s-\frac{ik_0}{4c}\frac{\partial h_{ns}^2}{\partial t}\right), \tag{31}$$

а функция Гамильтона H_0 равна сумме кинетической энергии $-h^2\nabla^2$, собственной энергии εmc^2 и потенциальной энергии V_0 (без учета гравитационного поля):

$$H_0=-h^2\nabla^2+\varepsilon mc^2+V_0 \quad (\varepsilon=\pm 1). \tag{32}$$

Уравнение (30) имеет место также в нерелятивистском приближении, однако в этом случае в значении для H_0 будет отсутствовать собственная энергия mc^2.

Учет спиновых эффектов, которыми здесь мы ради простоты будем пренебрегать, не может изменить порядка результатов. Поэтому при вычислении энергии излучения гравитационных волн (см. § 4) мы можем ограничиться нерелятивистским приближением. При исследовании же аннигиляции пары частиц в два гравитона (см. § 5) мы будем пользоваться релятивистским уравнением (24), хотя если компоненты пары движутся с малой относительной скоростью $v \ll c$, то этот процесс может быть с успехом описан также при помощи более простого «полурелятивистского» уравнения (30).

§ 4. ИЗЛУЧЕНИЕ ГРАВИТОНОВ

Для описания излучения единичных гравитонов ограничимся в энергии взаимодействия (31) линейным первым членом

$$V=-\frac{ch}{2k_0}h_{ns}\nabla_n\nabla_s.$$

---

[1]) Полурелятивистское уравнение было недавно использовано нами [6] для подсчета аннигиляции медленных позитронов и электронов в различных случаях.

являющимся по существу энергией связи скалярной частицы с гравитационным полем, имеющим квадрупольный характер (напомним, что спин гравитона равен двум).

Беря за начальную волновую функцию

$$\psi_0 = e^{-icK_0 t}\psi_0(\mathbf{r}) \tag{33}$$

и полагая

$$\psi = \sum_k C_k e^{-icKt}\psi_k(\mathbf{r}), \tag{33a}$$

найдем для дираковского коэффициента возмущения C

$$C_k = -\frac{i}{h}\int_0^t dt \int d\tau\, \psi_k^+ V \psi_0. \tag{34}$$

Учитывая отсутствие гравитонов в начальный момент времени ($q^+q = 0$), возможно в разложении для h_{ns} отбросить амплитуды q; тогда имеем

$$h_{ns} = L^{-3/2}\sum_{\mathbf{l}} \sqrt{\frac{8\pi\varkappa h}{c^3 l}}\, q_{ns}^+ e^{iclt - i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}}.$$

Следовательно,

$$C_k = -\frac{ic}{2k_0 h^2 L^{3/2}}\sum_{\mathbf{l}} \sqrt{\frac{8\pi\varkappa h}{c^3 l}}\, p_{ns} q_{ns}^+ \int_0^t dt\, e^{-ict(K_0 - K - l)}, \tag{35}$$

где матричный элемент

$$p_{ns} = \int d\tau\, \psi_k^+(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{r}} p_n p_s \psi_0(\mathbf{r}), \tag{36}$$

а импульс

$$p_n = \frac{h}{i}\nabla_n.$$

Учитывая известные из теории δ-функций формулы

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\int_0^t dt\, e^{-i\Gamma t}\right|^2 = 2\pi\,\delta(\Gamma); \qquad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$$

и заменяя

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{l}} \ldots = \frac{1}{8\pi^3}\int (d\mathbf{l}) \ldots ,$$

получаем значение энергии гравитационного поля, излучаемой за секунду движущимися частицами:

$$W = chl\,\frac{\partial}{\partial t}\sum C^+C = \frac{\varkappa l^2}{2\pi k_0^2 c h^2}\oint d\Omega\,(2Q_{nn'}Q_{ss'} - Q_{ns}Q_{n's'})\, p_{ns} p_{n's'}^+, \tag{37}$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла и частота $\omega = cl$.

Отсюда, интегрируя, имеем окончательно (см. также [2])

$$W = \frac{8\varkappa\omega^2}{5c^5m^4}\left(p_{ns}^2 - \frac{1}{3}p_{nn}^2\right). \qquad (38)$$

Это выражение получено для больших длин волн, когда $\omega a/c \ll \ll 1$, где a — размеры системы. В классическом пределе оно совпадает с результатом Эйнштейна.

Заметим, что порядок величины выражения излученной энергии гравитационного поля можно получить весьма просто, исходя из известного значения эйнштейновского коэффициента для вероятности излучения фотонов, т. е. электромагнитной энергии. Для перехода к излучению гравитонов достаточно лишь, во-первых, заменить электрический заряд e на «гравитационный заряд» $m\sqrt{\varkappa}$ (где m — масса излучающих частиц) и, во-вторых, учитывая квадрупольный характер гравитационного поля, описываемого тензором 2-го ранга, вместо векторного характера поля электромагнитного, описываемого вектором-потенциалом, необходимо от дипольного коэффициента Эйнштейна A перейти к квадрупольному, т. е. добавить множитель $(\omega x/c)^2$.

Окончательно получим вместо коэффициента Эйнштейна для электромагнитного излучения

$$A_c \sim \frac{e^2}{hc^3}\,\omega^3 x^2$$

коэффициент вероятности излучения гравитационного поля

$$A_g \sim \frac{\varkappa m^2}{hc^5}\,\omega^5 x^4.$$

Отсюда для излучаемой гравитационной энергии получаем

$$W \sim h\omega A_g \sim \frac{\varkappa m^2}{c^5}\,\omega^6 x^4,$$

что с точностью до коэффициента порядка 1 совпадает с полученным выше точным выражением при учете значения квадрупольного момента.

Правила отбора для разрешенного гравитационного излучения, очевидно, будут совпадать с правилами для квадрупольного излучения, т. е. соответственное квантовое число должно меняться на 2, в согласии со значением спина гравитона 2.

Заметим далее, что обычные аргументы, позволяющие вывести силу лучистого трения или торможения из величины излученной энергии, приводят в настоящем случае к выражению силы гравитационного торможения, зависящей от 5-й производной квадрупольного момента (в противоположность 3-й производной в случае дипольного излучения).

Действительно, вместо $R_e \sim \frac{e^2}{c^3}\omega^3 x \sim \frac{e^2}{c^3}\dddot{x}$ теперь будем имет

$$R_g \sim \frac{\varkappa m^2}{c^5}\omega^5 x^3 \sim \frac{\varkappa m^2}{c^5}(x^3)^{(V)}.$$

Как неоднократно подчеркивалось, излучение гравитационной энергии ничтожно, ибо у элементарных частиц малы массы, астрономические же объекты, например пульсирующие звезды, обладают незначительными частотами колебаний. Здесь следует, однако, иметь в виду, что гравитационное излучение вычислялось до сих пор как раз в заранее выдвинутом предположении нерелятивистских медленных движений излучающих частиц и слабого поля.

§ 5. ПРЕВРАЩЕНИЕ ЧАСТИЦ В ГРАВИТОНЫ [1])

Для исследования аннигиляции элементарных частиц с испусканием двух гравитонов снова обратимся к уравнению (24)

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2-k_0^2\right)\psi=(U_1+U_2)\psi, \tag{39}$$

где U_1 и U_2 определяются формулами (25).

В правой части (39) содержатся члены различных порядков по h_{ns}. Для того чтобы вычислить вероятность двухгравитонной аннигиляции, достаточно подставить в U_2 непосредственно разложение (11), что же касается члена U_1, то предварительно следует воспользоваться уравнениями гравитационного поля с точностью до величин, квадратичных по $h_{\mu\nu}$. Таким образом, для нахождения сечения аннигиляции уравнение (39) следует рассматривать совместно с уравнением для величин h_{ns}. Выполнив соответствующие выкладки, для эффективного сечения аннигиляции двух бесспиновых частиц массы m с испусканием двух гравитонов получим [2])

$$\sigma=\frac{8\pi}{15}\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 r_g^2,\quad E\gg mc^2; \tag{40}$$

$$\sigma=\pi\frac{c}{v}r_g^2,\quad E\sim mc^2, \tag{41}$$

где E — энергия частиц, а $r_g=\frac{\varkappa m}{c^2}$ — гравитационный радиус.

---

[1]) Этот параграф излагается частично в новой редакции (авторов), причем в отличие от первоначального варианта, где для получения оценки были опущены члены первого порядка по h_{kn}, здесь рассмотрение является точным.

[2]) *Sokolov A. A., Galtsov D. V.*, в книге: Experimental Gravitation (Int. Symp. at Pavia, 1977), Roma, 1977, p. 111.

Небезынтересно сравнить формулы (40) и (41) с дираковской формулой для аннигиляции электрона и позитрона с испусканием двух фотонов.

Отбрасывая логарифмический член, имеем

$$\sigma_e \sim r_e^2 \frac{c}{v}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2,$$

где $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$.

Отношение эффективных сечений, очевидно, равно отношению квадратов гравитационного и электромагнитного радиусов частиц, умноженному на характерный множитель $(E/mc^2)^4$, выражающий квадрупольный характер гравитационного поля, аналогичный известному множителю $(E/mc^2)^2$, учитывающему дипольный характер векторного мезотронного поля [7]:

$$\frac{\sigma}{\sigma_e} \sim \left(\frac{r_g}{r_e}\right)^2 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4. \tag{42}$$

Нетрудно показать, что эффективное сечение для обратного процесса порождения пары частиц при столкновении двух гравитонов определяется по существу той же величиной.

Аналогично можно рассмотреть, проще всего по методу Вильямса — Вейцзеккера, тормозное испускание гравитационных волн и убедиться, что эффективное сечение определяется в этом случае квадратом гравитационного радиуса, умноженным на квадрат гравитационной постоянной тонкой структуры.

Относительно малой вероятности взаимного превращения частиц и гравитационного поля следует вновь заметить, что рассмотренное нами явление имеет прежде всего принципиальное значение, ставя гравитоны в общую систему элементарных частиц с их взаимными превращениями; кроме того, эффективное сечение возрастает с увеличением энергии E.

В самом деле, σ и σ_e будут сравнимы по порядку величины при энергиях частиц

$$E \sim mc^2 \left(\frac{r_e}{r_g}\right)^{1/2} \sim 10^{21} mc^2.$$

Можно ожидать, что применимость данных формул, как обычно при методе возмущений, ограничена областью [8]

$$\lambda^2 > \sigma,$$

т. е.

$$E < E_0 = mc^2 \sqrt{\frac{h}{mcr_g}} \sim 10^{22} mc^2.$$

При энергиях, превышающих значение E_0, мы должны учитывать обратное действие поля, т. е. силу лучистого трения [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, Princeton, 1945, p. 129 (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1965, стр. 597).
2. *Pauli W.*, *Fiertz M.*, Proc. Roy. Soc., A., **173**, 212 (1939); см. также: Sow. Phys., **9**, 140 (1936).
3. *Иваненко Д. Д.*, УФН, **32**, 149 (1947).
4. *Эддингтон А.*, Теория относительности, ГТТИ, М.— Л., 1934, стр. 242.
5. *Fock V.*, *Iwanenko D.*, Compt. Rend., 188, 1470 (1929); см. также: *Schrödinger E.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1932, Hf. 10/11.
6. *Иваненко Д. Д.*, *Соколов А. А.*, Вестник МГУ, 6 (1947).
7. *Iwanenko D.*, *Sokolow A.*, Journ. of Phys., **6**, 174 (1942).
8. *Weizsäcker C.*, Die Atomkerne, Leipzig, 1937, S. 126; *Oppenheimer J. et al.*, Phys. Rev., **57**, 75 (1940); *Ландау Л. Д.*, ЖЭТФ, **10**, 718 (1940).
9. *Sokolow A.*, Journ. of Phys., **5**, 231 (1941); *Heitler W.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **37**, 291 (1941); *Wilson H.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **37**, 301 (1941).

Т. РЕДЖЕ

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА*

Качественно рассматриваются некоторые типы измерений гравитационных полей. Показывается, что ни один из них не дает удовлетворительных результатов, если линейные размеры области, в которой измеряется поле, меньше $L = \sqrt{Gh/c^3}$.

1. Проблема измерения гравитационных полей (точнее говоря, их средних в данной области пространства-времени, сокращенно СГП) с точки зрения квантовой механики представляется трудной и несозревшей, ибо еще не построена удовлетворительная теория этого вопроса.

Трудности возникают главным образом ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна, так как ясно, что из линейного приближения этих общих уравнений невозможно получить слишком многого.

В данной заметке мы попытаемся обсудить некоторые аспекты теории гравитации, в которых можно разобраться путем простых качественных рассуждений, основанных на мысленных экспериментах. Наши выводы не претендуют на строгость или полноту, и их можно скорее расценивать как разведку путей дальнейших исследований, чем как четко сформулированные результаты. Наш основной вывод состоит в том, что динамика эйнштейновского поля (которую мы будем, следуя Уилеру, называть геометродинамикой) не вполне аналогична электродинамике и что между ними возникают важные различия, если требуется высокая степень точности и если измерения проводятся в малых областях с линейными размерами D порядка $L = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 4 \cdot 10^{-33}$ см, где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ см$^3 \cdot$с$^{-2} \cdot$г$^{-1}$ — постоянная Ньютона.

Уилером и др. [1—3] был высказан ряд интересных соображений в поддержку той точки зрения, что на таких малых расстояниях следует ожидать важных модификаций в структуре геомет-

---

* *Regge T.*, Nuovo Cimento, 7, 215 (1958).

рии пространства. Анализ, проведенный в работах Уилера с сотрудниками, вкратце сводится к следующему.

1. Флуктуации поля в областях пространства-времени с размерами порядка L^4 таковы, что соответствующие изменения потенциалов — порядка единицы.

2. Поэтому пространство должно быть микроискривленным на таких малых расстояниях.

3. Вероятнее всего, что при наблюдении в столь малых областях пространство многосвязно. Нет априорных причин, по которым следовало бы отвергнуть многосвязное пространство как нефизическое.

Квантование геометродинамики в принципе можно провести фейнмановским методом суммирования по историям. На этом трудном пути весьма существенно продвинулся Мизнер [4]. Ниже будут рассматриваться измерения гравитационного поля, проводимые несколькими различными способами. При всех этих различиях обнаружится одно и то же ограничение, что позволяет видеть в нем некую общую закономерность при построении теории.

2. Прежде чем переходить к основной задаче измерения СГП, мы хотели бы остановиться на содержании понятия «точечной массы» в общей теории относительности. В классической физике под точечной массой обычно понимают тело, обладающее следующими свойствами:

1) оно обладает заданной массой $M \neq 0$;

2) его ускорение зависит от напряженности силового поля в точке, где находится это тело, и только от нее.

В ньютоновом приближении ничто не мешает нам думать, что эти два условия могут выполняться сколь угодно точно.

Взаимодействие элементарных частиц уже издавна рассматривается как локальное. Трудности возникают лишь в связи с общеизвестной расходимостью собственной энергии.

При заданной массе тела в общей теории относительности условие (2) едва ли может выполняться ввиду нелинейности уравнений поля Эйнштейна. Лучше всего это видно из статьи Инфельда и Шилда [5] о движении пробных частиц. Эти авторы довольно просто выводят постулат геодезических из уравнений Эйнштейна. Им удалось показать, что в пределе бесконечно малой массы пробная частица должна двигаться по геодезической. Если же взять частицу с конечной массой, то геодезическую нельзя строго определить, ибо сама частица будет возмущать метрику окружающего пространства в области с размерами $\sim MG/c^2$. Кроме того, очень маловероятно, чтобы, даже если геодезическую можно было бы определить, эта частица действительно двигалась по ней. Вывод постулата о геодезических справедлив лишь в том случае, если фоновое пространство (т. е. пространство при $M = 0$) является в хорошем приближении евклидовым в указанной области с размерами MG/c^2 [1]). Любое же нарушение этого условия приводит к изменению движения пробного тела независимо от того, какова внутренняя структура последнего.

Следовательно, движение нашего пробного тела определяется структурой фонового поля в указанной выше области. Иными словами, ускорение тела зависит от напряженности поля в области с размерами $R = MG/c^2$. Никакая частица с такими размерами ни при каких обстоятельствах не ведет себя как пробная масса и не удовлетворяет требованию 2. Длину R можно рассматривать как минимально возможный размер тела с массой M. Отметим, что в этом выводе существенную роль играет нелинейность уравнений поля.

3. Рассмотрим несколько методов измерения СГП. Для простоты предположим, что измеряемое поле можно рассматривать в линейном приближении, а нелинейные явления возникают лишь вблизи пробных тел. Кроме того, предположим, что скорость тел намного меньше c. При таких условиях можно провести очевидный эксперимент по измерению изменения $\Delta\mathbf{p}$ импульса тела с массой M за заданное время. Будем считать, что величина

$$\Gamma = \frac{\Delta\mathbf{p}}{c^2 MT} \tag{1}$$

есть СГП в области с размерами D, занимаемой телом, в интервале времени T. Если тело локализовано в области с размерами D, то $\Delta\mathbf{p}$ приобретет неопределенность h/D. К тому же, в силу вышесказанного, M не может превышать величины Dc^2/G. Поэтому величина Γ может быть измерена лишь с ошибкой

$$\Delta\Gamma \approx \frac{h}{Mc^2TD} > \frac{L^2}{D^2cT}. \tag{2}$$

Эта ошибка зависит только от универсальных постоянных h, c, G и от пространственно-временной структуры измерения. В действительности имеются и иные источники ошибок. Один из них — то, что тело может излучать в процессе измерения гравитационные волны. Вопрос о природе гравитационных волн пока еще не решен окончательно. В качестве предварительной гипотезы мы примем, что у них такие же свойства, как у электромагнитных волн. Тогда можно воспользоваться анализом Бора и Розенфельда [6], заме-

---

[1]) Это выражается математически требованием, чтобы компоненты $a_{\mu\nu}$ были малыми по сравнению с $\eta_{\mu\nu}$ во всех случаях, когда нельзя ограничиться сохранением лишь первого члена в разложении (2.05). Легко видеть, что при нарушении этого условия рушатся все последующие выводы.

нив лишь константы связи. Получаем, что неопределенность, обусловленная излучением, должна иметь вид

$$\Delta\Gamma_R \approx MTDA, \tag{3}$$

где $A = cL^2/hTD^2Z$, причем Z — наибольшая из величин D и cT.

Эта поправка полностью скомпенсируется, если тело присоединить к пружине с коэффициентом жесткости c^2M^2TA. Но такая компенсация возможна, лишь если период собственных колебаний тела с пружиной намного превышает величину T. Таким образом, получаем неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{MTA}} \gg cT. \tag{4}$$

Отсюда снова следует условие $M \ll Dc^2/G$, если $D < cT$, и $M < D^3c^2/\,(cT)^2G$,если $D > cT$, чем подтверждается принятое ограничение для массы.

И последнее, отметим, что напряженность поля, создаваемого квантом с частотой от 0 до $2/T$ на расстоянии D, может составлять L^2/D^2cT. Поскольку, чтобы определить импульс длительностью T в наблюдаемом излучении, требуется такой квант, этим в измерение Γ вводится дополнительная неопределенность того же порядка $\Delta\Gamma$, что и прежде.

4. Из сказанного следует, что для области пространства-времени с размерами D неопределенность символов Кристоффеля должна быть порядка L^2/D^3, а неопределенность метрического тензора — порядка L^2/D^2 (см. примечание на стр. 465). Если D — макроскопическая длина, то квантовые ограничения фантастически малы и ими можно пренебрегать даже в атомных масштабах. Если же величина D сравнима с L, то сохранить прежнее (обычное) понятие пространства становится все труднее и труднее и становится очевидным влияние микрокривизны.

С этими выводами полностью согласуется и детальный анализ мысленного опыта Гейзенберга с микроскопом. Наряду с большими скрытыми трудностями, связанными с обобщенным принципом Карно [7], мы натыкаемся на принципиальное препятствие, если требуем высокой точности.

В установке Бриллюэна положение тела определяется путем посылки суперпозиции волн по волноводу. Если нам нужно знать положение тела с неопределенностью, не превышающей D, то частота волн должна быть не меньше hc/D. Тогда в области, где по нашим данным должно находиться тело, неопределенность поля метрического тензора будет составлять $\Delta T \approx L^2/D^2$, что обусловлено наблюдением излучения. Доводить же D до L не имеет смысла, так как расстояние D' от тела до любой точки характеризуется неопределенностью L^2/D.

Это означает, что тела вообще нелокализуемы. В нелокальной квантовой теории поля самое важное значение имел вопрос, коммутируют ли полевые операторы на пространственноподобных интервалах, иными словами, имеем ли мы здесь дело с локальной или нелокальной коммутативностью. С нашей точки зрения, до того, как задаваться этим вопросом, следовало бы дать корректное определение пространственноподобного и временноподобного интервалов, когда они сравнимы с L.

5. Можно возразить, что анализ, проведенный в разделе 4 на основании только одного эксперимента, еще не дает решающего ответа. Поэтому мы рассмотрим совершенно иные способы измерения и покажем, что они дают такие же качественные результаты.

Можно, например, взять маятник. Под «маятником» мы понимаем здесь тело без внутренних степеней свободы, висящее на нити (или ограниченное другой эквивалентной связью). Мы во многом идеализируем нашу установку, в частности допускаем, что нить нерастяжима. Ее длина равна Q, масса маятника — M, а его радиус — R. Мы измеряем период колебаний маятника τ, а затем находим величину $g = c^2\Gamma$, вычислив

$$\Gamma = \frac{4\pi^2 Q}{c^2\tau^2} \quad \text{при} \quad R \ll Q. \tag{5}$$

Если наблюдать колебания маятника в течение времени T, то ошибка в величине $1/\tau$ должна составлять $1/T$. Этому соответствует ошибка

$$\Delta\Gamma \approx 4\pi^2 Q \frac{2}{c^2 T\tau} \gg \frac{8\pi^2 R}{c^2 T\tau}. \tag{6}$$

Если мы к тому же должны найти СГП в области с размерами D, то размах колебаний маятника не должен превышать D. Но в основной моде амплитуда его колебаний равна $\sqrt{hQ/gM\tau}$. Поэтому мы должны потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$D^2 > \frac{hQ}{gM\tau}. \tag{7}$$

Комбинируя (5) и (7), получаем

$$\frac{1}{\tau} < \frac{D^2 gM}{hQ} \approx \frac{4\pi^2 D^2 M}{\tau^2 h}, \quad \text{или} \quad \tau < \frac{4\pi^2 D^2 M}{h}. \tag{8}$$

Тогда условие (6) (если вспомнить, что $M < Rc^2/G$) эквивалентно неравенству

$$\Delta\Gamma \gg \frac{8\pi^2 R}{c^2 T\tau} \gg \frac{2L^2}{cTD^2}. \tag{9}$$

При помощи маятника величина Γ измеряется ничуть не точнее, чем при первом методе. Другой способ измерения СГП — при помощи динамометра. Идеальная установка такого типа представляет собой тело с массой M, подвешенное на идеально упругой пружине с коэффициентом жесткости k. Под тяжестью тела пружина растягивается на величину ξ. Тогда ускорение силы тяжести дается выражением

$$g=\frac{K\xi}{M}. \tag{10}$$

Однако висящее тело обычно не покоится, и нам нужно измерить его положение дважды — в моменты t и $t+T$ (где T — полуцелое число периодов) и вычислить ξ по среднему значению результатов этих измерений. Поэтому СГП энергия такого осциллятора содержит неопределенность, равную h/T.

Если мы должны определять СГП для области, меньшей D, то амплитуда колебаний не должна превышать этой величины. Отсюда

$$D^2>\frac{h}{kT}, \text{ или } k>\frac{h}{TD^2}. \tag{11}$$

Из-за неопределенности в величине ξ, превышающей MG/c^2, возникает ошибка в величине g

$$\Delta g=\frac{K\Delta\xi}{M}>\frac{h\Delta\xi}{MTD^2}>\frac{hG}{c^2TD^2}=\frac{L^2c^2}{cTD^2}. \tag{12}$$

Еще один метод: в область, в которой требуется измерить СГП, поместим атом радиусом D, «высвечивающийся» с испусканием фотона с частотой ν. Если гравитационный потенциал γ не слишком велик, то его можно определить по наблюдаемому красному смещению, пользуясь формулой

$$\gamma=\frac{\Delta\nu}{\nu}-\gamma_A. \tag{13}$$

Здесь γ_A — потенциал, обусловленный самим атомом, который нужно вычесть, чтобы осталось только фоновое поле; T — длительность эксперимента. Мы полагаем, что $T\nu\gg 1$.

Но чем выше частота ν, тем больше неопределенность $\Delta\gamma$ в величине γ_A, так как масса атома при переходе известна лишь с точностью $h\nu/c^2$. Внутри атома $\Delta\gamma_A=h\nu G/Dc^4$; эта величина также представляет собой неопределенность величины γ и согласуется с результатами предыдущих мысленных экспериментов [1]):

$$\Delta\gamma=\frac{h\nu G}{Dc^4}>\frac{L^2}{cTD}. \tag{14}$$

[1]) Может показаться неочевидным, что если среднее значение функции F по пространственно-временной области Σ известно с погрешностью ΔF, то среднее значение grad F по области со сравнимыми размерами D может быть измерено только с погрешностью $\Delta F/D$. Реально измерение grad F может быть произведено, если измеряется F в двух одинаковых областях Σ_1 и Σ_2 с размерами D, разнесенных на расстояние D, после чего берется отношение

6. Мы надеемся, что представленный анализ помог разъяснить некоторые особенности и трудности квантовой теории гравитации. Вероятнее всего, в адекватной теории такого рода ход мысли будет совершенно иным, нежели в привычной нам классической римановой геометрии. Нужно думать, что обычный пространственно-временной континуум будет обнаруживать совершенно невероятные свойства при наблюдении в масштабах, сравнимых с L. Но, как это отчетливо подчеркнул Уилер, классическая геометродинамика уже достаточно хорошо обоснована с логической точки зрения и, безусловно, пора заняться вплотную квантовой геометродинамикой.

* * *

Автор хотел бы поблагодарить проф. Верде за критическое знакомство с рукописью и многократные обсуждения. Когда статья была отправлена в печать, мы обнаружили, что близкие взгляды высказывались Клейном в лекции, прочитанной на Международной конференции по фундаментальным постоянным физики (6—11 сентября 1956 г.) [8]. Благодарим также проф. Уилера за неоднократное обсуждение вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., **97**, 520 (1955).
2. *Misner C. W.*, *Wheeler J. A.*, Ann. of Phys., **2**, 525 (1957) (имеется перевод в книге: Дж. Уилер, Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, 1962, стр. 217; см. также данный сборник, стр. 544).
3. *Wheeler J. A.*, Ann. of Phys., **2**, 604 (1957) (имеется перевод в книге: Дж. Уилер, Гравитация, нейтрино и Вселенная, ИЛ, 1962, стр. 333).
4. *Misner C. W.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).
5. *Infeld L.*, *Schild A.*, Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949).
6. *Bohr N.*, *Rosenfeld D.*, Danske Vid. Selskab. Mat.-Fys. Medd., **12**, № 8 (1933) (имеется перевод: Нильс Бор, Избранные научные труды, т. II, изд-во «Наука», М., 1971, стр. 120).
7. *Brillouin L.*, Journ. Appl. Phys., **25**, 887 (1954).
8. *Klein O.*, Nuovo Cimento (Suppl.), **6**, 344 (1957).

$(F_1 - F_2)/D$. Такое отношение можно просто представить как среднее значение величины grad F по суммарной области $\Sigma_1 + \Sigma_2 +$ промежуточные точки. Очевидно, что ошибка измерения величины grad F при этом с точностью до несущественного числового множителя равна $\Delta F/D$.

М. А. МАРКОВ

МОЖЕТ ЛИ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ОКАЗАТЬСЯ СУЩЕСТВЕННЫМ В ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ?*

Общая теория относительности открывает более широкие возможности для анализа проблемы протяженных частиц, чем специальная теория относительности. Интерпретаци малой величины $l_0 = \sqrt{\hbar\varkappa/c^3}$ как фундаментальной длины будущей теории соответствует тенденциям современной систематики брать за основу частицы с очень большими массами («кварки»?).

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные попытки ввести в рамках специальной теории относительности фундаментальную длину, чтобы построить свободную от расходимостей теорию [1]), показывают, что это неизбежно приводит к нарушению принципа причинности. Отличается ли в этом смысле общая теория относительности от специальной теории относительности? Дает ли общая теория относительности больше возможностей для введения протяженных частиц?

В общей теории относительности действительно естественным образом появляется определенная длина, характеризующая размеры Вселенной как целого (радиус Вселенной). Эта длина прекрасно согласуется с причинным формализмом теории.

Может ли эта теория, имеющая целью описание свойств пространства и времени (пространственной метрики), оказаться верной не только в большом, но и в малом?

---

* M. A. Markov, Can the Gravitational Field Prove Essential for the Theory of Elementary Particles?, Progr. Theor. Phys., Suppl. Extra Number, 1965, p. 85.

[1]) Из рассмотрения проблемы Шварцшильда для электрически заряженных частиц (см. приложение) следует, что общая теория относительности выдвигает сильные возражения против выделения расходящихся величин путем формальной процедуры вычитания. Такая процедура, обычно применяемая в электродинамике (и в перенормируемых теориях вообще), приводит, в частности, к замене на малых расстояниях ($<10^{-13}$ см) гравитационного притяжения гравитационным отталкиванием, причем, как показывает анализ, это обусловлено исключительно внутренней противоречивостью такой процедуры.

Известно, что в области малых расстояний общая теория относительности рассматривает две длины. Одна из них — гравитационный радиус [1,9]

$$r_{\text{гр}} = \frac{2\varkappa m}{c^2}, \qquad (1)$$

где m — масса частицы, $\varkappa$ — гравитационная постоянная, а c — скорость света.

Другая длина универсальна; она может быть построена только из универсальных постоянных [2]:

$$l_0 = \sqrt{\frac{\varkappa\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33}\,\text{см}, \qquad (2)$$

содержит постоянную Планка и, следовательно, в какой-то мере связана с будущей квантовой теорией гравитационного поля.

Малость величин $r_{\text{гр}}$ и l_0 по сравнению с обычно рассматриваемыми в теории элементарных частиц длинами делает их сомнительными претендентами на роль фундаментальных длин.

Однако анализ показывает, что сейчас у нас фактически нет удовлетворительного критерия для численного значения фундаментальной длины будущей теории [1]).

Действительно, четверть века назад в качестве фундаментальной длины рассматривался так называемый классический «радиус электрона» ($e^2/mc^2 = 2{,}8\cdot 10^{-13}$ см). Сегодня лишь устаревший термин («радиус электрона») напоминает нам о былом значении этой величины.

В последние годы на роль фундаментальной длины претендует или может претендовать характеристическая длина барионных масс (10^{-14} см), если, конечно, кванты полей, сильно взаимодействующих с барионами, и в особенности π, K и другие мезоны, не окажутся составными частицами.

Если же мы, кроме того, предположим, что и сами барионы состоят из «кварков», которые тогда окажутся элементарными объектами, то нам придется пока допустить, что у таких частиц произвольно большие массы и произвольно малые размеры [2]).

Хотя такие рассуждения в настоящее время и возможны и даже интересны в некоторых отношениях (§ 3), пока еще нет оснований утверждать, что обсуждаемые здесь длины связаны непосредственным числовым равенством с этими гипотетическими частицами.

---

[1]) Строго говоря, нет даже уверенности, что фундаментальная длина будет нужна в будущей теории. Это лишь одна из возможных черт обсуждаемой здесь будущей теории.

[2]) Барионные длины слишком велики для электродинамики в ее общепринятом максвелловском варианте (из-за логарифмической расходимости).

Необходимо четко осознать, что в теориях с фундаментальными длинами порядка барионных невозможна интерпретация электронной массы как источника поля. Другими словами, в этом случае мы должны расстаться с идеей, которая долго была для нас как бы путеводной звездой.

Более того, электродинамика дает нам убедительные примеры, когда не существует такого непосредственного равенства.

Если элементарными в вышеупомянутом смысле частицами являются, например, электроны, то тогда в электродинамике с ее логарифмическими расходимостями можно будет обрезать интегралы вблизи гравитационного радиуса электрона [14—16]. Известно, что слабые четырехфермионные взаимодействия дают добавки к массе электрона порядка самой электронной массы, когда интегралы обрезаны на длинах, характеризующих слабое взаимодействие ($\sim 7 \cdot 10^{-17}$ см). Однако эти добавки к массе могут быть и отрицательными [3]. Таким образом, они в этом случае могут быть лишь вычтены из большой начальной массы электрона неизвестного происхождения. Кроме того, можем ли мы быть уверены, что у нас сейчас имеется адекватная теория слабых взаимодействий и что последние по своей природе являются четырехфермионными? (См. идеи Юкавы о промежуточном мезоне [4] и т. п. [1]))

Таким образом, гипотеза о малых длинах будущей теории вполне допустима и, возможно даже, она будет соответствовать духу современных тенденций (§ 3), хотя и может повлечь за собой весьма экзотические допущения об иерархии частиц (их систематике).

Однако главный интерес в обсуждаемой проблеме заключается в вопросе: могут ли в действительности обсуждавшиеся выше величины $r_{\text{гр}}$, l_0 вести себя в каком-то смысле как обрезающие длины в общей теории относительности? Появление конечных величин вместо бесконечных могло бы само по себе (даже если отвлечься вначале от их численного значения) иметь огромное эвристическое и методологическое значение как пример настоящей теории, свободной от трудностей, связанных с расходимостями.

Естественно предположить, что непротиворечивая теория элементарных частиц может появиться лишь как квантовая теория. Однако, прежде чем перейти к описанию ситуации в квантовой теории (§ 3), стоит, как мы увидим позже, проанализировать классические аспекты проблемы.

§ 2. СФЕРА ШВАРЦШИЛЬДА

«Внешнее» сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна в пустом пространстве в статической системе отсчета ($\partial g_{\mu\nu}/\partial t = 0$) приводит, как известно, к метрике [5]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{\text{гр}}}{r}\right) c^2\, dt^2 - \frac{dr^2}{1 - (r_{\text{гр}}/r)} - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{3}$$

$$r_{\text{гр}} = \frac{2m\varkappa}{c^2},$$

[1]) То есть промежуточный мезон, а также электрон в данном случае также могут быть составными частицами в вышеупомянутом смысле.

где m — масса, локализованная где-то внутри сферы радиусом $r_1 < r$, а $\varkappa$ — гравитационная постоянная.

В этой системе отсчета все $r < r_{\text{гр}}$ ($r_{\text{гр}}$ — радиус сферы Шварцшильда) теряют свой смысл.

Идее связать гравитационный радиус непосредственно с размером «истинно элементарной частицы», как известно, противоречит то, что особенность на сфере Шварцшильда устраняется преобразованием координат [1]) (переходом к нестатической метрике) [6, 7].

Очевидно, что сама по себе сфера Шварцшильда не может автоматически выступать в роли формфактора. Известно, например, что закон Кулона для точечного заряда в шварцшильдовской системе отсчета сохраняет свою форму вблизи нуля [2]).

Но, может быть, следует поставить вопрос иначе. Нельзя ли наполнить понятие сферы Шварцшильда новым содержанием в переносном или даже прямом смысле этого слова, т. е. в смысле определенной расширенной модели, и таким образом зафиксировать эту сферу с помощью дополнительных условий, придающих ей определенный физический смысл?

Целесообразность таких попыток можно обосновать следующим. Как известно, трудность формального введения (с помощью формфакторов) протяженных частиц в специальной теории относительности связана с тем, что сигнал вдоль протяженной частицы должен в противоречии с принципом причинности распространяться с бесконечно большой скоростью. Причем это явление трудно локализовать (ограничить малой областью пространства).

В пространстве же Шварцшильда луч света распространяется к центру симметрии ($\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$) со скоростью

$$\frac{dr}{dt} = -c\left(1 - \frac{r_{\text{гр}}}{r}\right). \tag{6}$$

Другими словами, радиальное распространение света замедляется и лишь за бесконечно большое (для внешнего наблюдателя) время

[1]) Соответствующие римановы инварианты имеют особенность в нуле и регулярны на сфере Шварцшильда.

[2]) В случае электростатического поля

$$F_{14} = \frac{e}{r^2}\sqrt{-g_{00}g_{11}}. \tag{4}$$

Но для метрики Шварцшильда (3) мы имеем $g_{00}g_{11} = -1$.

Для скалярного [8] статического случая мы в то же время получаем

$$U' = \frac{cG}{r^2}\sqrt{-\frac{g_{11}}{g_{00}}}, \quad \text{где} \quad U' = \frac{\partial u}{\partial r}. \tag{5}$$

Следовательно, поведение скалярного статического поля в нуле существенно изменяется при наличии гравитационного поля.

волновой фронт сможет сколь угодно близко подойти к сфере Шварцшильда, никогда ее не пересекая.

Возможно, что в данном случае окажется легче локализовать нарушение причинности в малой области [1]). Проблема нарушения причинности, по-видимому, отпадает, если информация из области нарушения причинности не сможет быть передана внешнему наблюдателю за конечное время.

Создается впечатление, что природа дает нам в сфере Шварцшильда нетривиальный образец «жизненных условий», пригодных для существования протяженной частицы. Правда, этот образец скорее подобен миражу и остается таким до тех пор, пока не сделаны дополнительные предположения о свойствах протяженных частиц.

Из последующего станет ясно, что придать универсальной сфере Шварцшильда некоторый физический смысл, существенный с точки зрения теории элементарных частиц, удастся, возможно, в квантовой области.

§ 3. ДЛИНА $l_0 = \sqrt{\hbar\varkappa/c^3}$

Используя универсальные постоянные: планковскую константу $\hbar$, гравитационную постоянную $\varkappa$ и скорость света c, мы можем построить величину с размерностью длины

$$l_0 = \sqrt{\frac{\hbar\varkappa}{c^3}}\,.$$

Эта величина связана с квантовыми флуктуациями метрики [2, 10].

Если l_0 — действительно такая длина, что для любой меньшей длины понятие расстояния между двумя точками и особенно между двумя пространственными точками ($ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$, где компоненты $g_{\mu\nu}$ полностью неопределенны) теряет смысл, то трудно и помышлять о лучшей возможности для конкретной реализации идеи о нелокальной теории [2]).

Однако в противовес феноменологическим концепциям этих теорий, где константа с размерностью длины насильно вводится в четырехмерный континуум и в которых по определению имеют смысл сколь угодно малые расстояния, можно надеяться, что длина

---

[1]) Заметим, что существует класс систем, в которых сохраняется причинное описание: требуют дальнейшего анализа нестатические координатные системы. Еще предстоит выяснить, могут ли в реальных условиях современной физики элементарных частиц быть построены «непричинные» координатные системы и может ли быть получена с их помощью информация о нарушении причинности.

[2]) См., например, цикл работ Юкавы [11], в которых можно проследить развитие идей о нелокальной теории вплоть до их приложения к систематике элементарных частиц.

l_0 автоматически появится в полевой теории, учитывающей и гравитационные эффекты [17].

Длина l_0 обладает различными нетривиальными свойствами [2].

1) Квант волны с длиной l_0 несет энергию

$$E = \frac{\hbar c}{l_0} = \left(\frac{\hbar c}{\varkappa}\right)^{1/2} c^2 \tag{7}$$

и, следовательно, массу

$$m_0 = \left(\frac{\hbar c}{\varkappa}\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Масса эта (10^{-5} г!) сильно отличается от масс известных элементарных частиц.

Но если предположить, что существуют стабильные элементарные частицы с такими массами, то гравитационное взаимодействие двух частиц с массой m_0 оказывается равным

$$-\varkappa \frac{m_0^2}{r} = -\frac{\hbar c}{r}. \tag{9}$$

Это означает, что гравитационное взаимодействие двух таких частиц в $\hbar c/\varepsilon^2$ раз сильнее их кулоновского взаимодействия, если эти частицы обладают электрическими зарядами $\varepsilon \leqslant e$.

2) Следовательно, в этом случае частицы с электрическими зарядами одного знака могут образовывать связанные системы под действием одних лишь гравитационных сил.

И наоборот, эта возможность для электрически заряженных частиц ($\varepsilon \sim e$) не появится, если их массы не будут близки к m_0.

3) Радиус таких связанных систем («гравитационный радиус Бора»), вычисленный на основании соотношения неопределенностей Гейзенберга, оказывается порядка

$$r_0 \sim \frac{\hbar^2}{\varkappa m_0^3} = l_0, \tag{10}$$

т. е. размеры этих систем оказываются порядка тех же элементарных длин l_0, что приводит к большим дефектам массы — порядка m_0 [1]).

Здесь нам необходимо заново обратиться к хорошо известной ситуации в релятивистской проблеме Кеплера для электрона в поле кулоновского центра большого электрического заряда. Когда заряд точечного ядра Z возрастает и приближается к своему

---

[1])

$$\Delta E \sim \varkappa \frac{m_0^2}{l_0} = \left(\frac{\hbar c}{k}\right)^{1/2} c^2 = m_0 c^2$$

критическому значению $Ze^2 = \hbar c$ [как в случае (9)], то особенность в ψ-функции (слабая при малых Z) сильно возрастает вблизи нуля:

$$\psi \underset{r\to 0}{\sim} r^{\sqrt{1-(Ze^2/\hbar c)^2}-1} \to r^{-1}. \tag{11}$$

Такой рост ψ-функции вблизи нуля («падение» частиц на кулоновский центр) указывает на возможность более сильной связи в рассматриваемых системах, и не исключено, что в будущей теории истинная масса частиц, порождаемых частицами с массой m_0, окажется весьма малой по сравнению с m_0. Весьма заманчиво приписать массу m_0 кваркам [1]).

Так как, согласно этой концепции, гравитационные силы снова оказываются доминирующими на предельно малых расстояниях, силы с более резкой зависимостью от r (ядерные, возможно слабые и даже электромагнитные) должны возникать лишь в составных образованиях (аналогично силам Ван-дер-Ваальса в молекулярной физике [2])).

4) Гравитационный радиус, соответствующий массе m_0, оказывается равным

$$r^0_{\text{гр}} = \frac{2m_0\varkappa}{c^2} = 2l_0. \tag{12}$$

Если бы гравитационный радиус оказался в данном случае меньше длины l_0, а величину l_0 действительно можно было бы рассматривать как минимальную длину будущей теории элементарных ча-

---

[1]) Многие свойства этих частиц отличны от свойств кварков. Далее я называю эти новые частицы «максимонами».

[2]) Поведение частиц с максимально большими массами m_0 (скажем, «максимонов») должно быть весьма необычным. Нейтральные частицы, участвуя лишь в гравитационном взаимодействии, являются практически необнаруживаемыми. Электрически заряженные частицы (кварки?) при скоростях, которых эти частицы могут достичь в гравитационных полях небесных тел (v порядка от 10^6 до 10^7 см/с), не должны, несмотря на их огромную кинетическую энергию ($m_0v^2/2$ порядка от 10^{19} до 10^{20} эВ), оставлять ионизационные треки (максимальная энергия, передаваемая такой частицей электрону, $T_{\text{макс}} = 2m_{\text{эл}}v^2 < 0{,}1$ эВ). Двигаясь внутри планеты по орбитам с медленно меняющимся радиусом (теряя энергию за счет длинноволнового электромагнитного излучения, а также акустического и теплового излучения), эти частицы накапливаются после долгого пути в центре Земли, где образуют связанные системы и выделяют большую энергию, увеличивая температуру Земли. При таких предположениях можно найти верхний предел для возможного потока таких частиц, падающих на Землю из соответствующей «атмосферы», которая существует внутри Солнечной системы. Если температура Земли стационарна и тепло H_v, выделяемое в среднем на единицу объема Земли, порядка $2\cdot10^{-1}$ МэВ$\cdot$см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$, то мы получим для плотности потока частиц N ограничение $N < 10^{-14}$ частица/с$\cdot$см^2.

стиц, то соответствующий гравитационный радиус не играл бы никакой роли в данной теории [1]).

Длина l_0 и шварцшильдовский гравитационный радиус соответствующего кванта поля, столь различные по природе, оказываются тем не менее величинами с удивительно близкими численными значениями.

Во всяком случае, радиус сферы Шварцшильда $r^0_{\text{гр}}$ обретает совершенно новый физический смысл. Можно сказать, что имеется как бы некоторое «разделение труда» между длинами l_0 и $r^0_{\text{гр}}$. «Задача» величины l_0 — лишить понятие пространства внутри сферы Шварцшильда его физического смысла, а «задача» величины $r^0_{\text{гр}}$ (сферы Шварцшильда) состоит в том, чтобы отделить эту область от реального мира физических явлений, полностью сохранив в нем причинные связи в их первоначальном виде (§ 2).

5) Расходящиеся интегралы квантовой теории поля берут по всей области квантовой энергии вплоть до бесконечных значений, причем полностью пренебрегают бесконечно большими гравитационными эффектами [14—16].

К сожалению, пока не создана корректная в этом смысле теория, мы можем только догадываться о масштабах трудностей, обусловленных пренебрежением гравитационными эффектами [2]).

6) Мы не коснулись очень интересных топологических подходов к проблемам элементарных частиц [2, 6, 7], которые также весьма специфичны для общей теории относительности и к тому же тем или иным образом связаны с особенностями решения Шварцшильда.

К сожалению, в последовательной топологической картине материи, очевидно, нет места источнику ферми-частиц.

Еще со времени появления математической возможности конструировать величины различных тензорных размерностей из спинорных величин живет идея о построении «элементарных частиц» из спинорного поля.

---

[1]) Гравитационные радиусы известных элементарных частиц не могут иметь какого-либо физического смысла в квантовой области, поскольку все эти величины меньше l_0, т. е. с этой точки зрения все известные «элементарные частицы» или по крайней мере те, которые обладают ненулевыми массами, должны быть вторичными образованиями.

Для m_0 мы имеем

$$\frac{\hbar}{m_0 c} = \left(\frac{\hbar \varkappa}{c^3}\right)^{1/2} = l_0.$$

[2]) Согласно соотношению неопределенностей, квант с массой, большей, чем критическая масса $m_0 = (\hbar c/\varkappa)^{1/2}$, может появиться в промежуточных состояниях лишь на таких расстояниях от источников, которые меньше критической длины l_0.

Имеет ли при таких условиях физический смысл процесс излучения?

Интересным примером такого направления может служить нелинейное уравнение Гейзенберга для некоего фундаментального фермионного поля.

Если следовать этому направлению, предполагающему существование некоего фундаментального фермионного поля, то можно попытаться (как одну из гипотез такого рода) принять в качестве этого фундаментального поля, скажем, нейтринное поле. Тогда, в принципе, можно выделить гравитационное поле из системы, состоящей из уравнения для гравитационного поля с тензором энергии-импульса T_μ^ν нейтринного поля в качестве источника

$$R_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu R = -\varkappa T_\mu^\nu$$

и уравнения Дирака для нейтрино в ковариантном виде.

В результате мы получим некоторое нелинейное уравнение для фермионного поля. Вывод и анализ даже приближенных уравнений такого рода весьма сложны. Подобные исследования находятся пока еще в зачаточной стадии, и в настоящее время нельзя судить, в какой степени разные решения этих уравнений сравнимы с различными элементарными частицами в духе идей, начало которым положил Гейзенберг. Но это уравнение органически учитывает гравитационные эффекты, и если соображения о фундаментальной роли длины, построенной из содержащихся в данном уравнении констант $\hbar$, $\varkappa$ и c, верны, то оно не должно приводить к трудностям, связанным с расходимостью [1]), а соответствующие функции распространения должны существенно измениться.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Статическое сферически-симметричное гравитационное поле электрона (с массой m и зарядом e) описывается, как известно, фундаментальным тензором с компонентами [5]

$$\begin{gathered} g_{00} = 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{e^2}{r^2}; \quad g_{11} = -(g_{00})^{-1}; \\ g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \end{gathered} \tag{13}$$

[1]) Например, в задаче, рассмотренной де Виттом [17, 18], обмен гравитонами между двумя скалярными частицами приводит (в лестничном приближении) к появлению в функции Грина скорректированного интервала

$$X_\mu^2 \to X_\mu^2 - \lambda^2, \quad \text{где} \quad \lambda = (4\hbar\varkappa/\pi c^3)^{1/2}.$$

Ранее подобного вида интервал был введен в нелокальных теориях [19] феноменологически. При этом особенность в соответствующих функциях распространения смещается с конуса на гиперболоид.

Полная энергия поля Шварцшильда заряженных частиц, вычисленная каноническим способом в соответствующей (декартовой на бесконечности) системе отсчета, оказывается точно равной [1])

$$E = \mu c^2.$$

Если полная масса имеет электромагнитное происхождение, то мы получаем $\mu = 0$ при $e = 0$.

Для точечного электрона имеем

$$\mu^{\text{эл}} = \frac{e^2}{r} \xrightarrow[r \to 0]{} \infty$$

и соответствующий радиус Шварцшильда становится бесконечно большим.

Конечная величина μ в выражении для g_{00} [формула (13)] означает либо наличие конечных размеров у электрона, либо соответствующую перенормировку его массы.

В первом случае мы можем без труда предположить, что

$$\mu^{\text{эл}} = \frac{e^2}{a},$$

где a — «радиус» электрона.

Интерпретация третьего члена в компоненте $g_{00} = 1 - (2\mu/r) + (e^2/r^2)$ ясна: на бесконечности им можно пренебречь по сравнению с $2\mu/r$, так что полная масса электростатического поля на бесконечности заключена в гравитационной массе электрона, его гравитационном потенциале μ/r.

Когда пробное нейтральное тело приближается к электрону на расстояние r_1, его эффективная гравитационная масса уменьшается на e^2/r_1, поскольку электростатическое поле, занимающее область $r > r_1$, не оказывает более гравитационного воздействия на пробное тело.

При $r < a$ вся масса электромагнитного поля перестает участвовать в гравитационном взаимодействии. В этом случае для члена e^2/r^2 неравенство $r < a$ не может выполняться по определению. Следовательно, член e^2/r^2 никогда не сможет быть больше члена $2\mu/r$, т. е. гравитационное притяжение не может перейти в гравитационное отталкивание.

В классической физике была одна интересная возможность практической регуляризации электромагнитной массы электрона, предложенная когда-то Штюкельбергом [21]. Эта регуляризация автоматически выполняется в том случае, когда электрон ко всему еще оказывается источником скалярного юкавского поля [4]:

$$U = -e\frac{e^{-mr}}{r}.$$

---

[1]) Данный вопрос подробно рассматривается в работе [20].

Дело в том, что соответствующая масса источника скалярного поля отрицательна ($\mu = \mu^{\text{эл}} - \mu^{\text{скал}}$). Поэтому в решении задачи Шварцшильда к g_{00} добавляется член $\varphi(r)$, по знаку противоположный [1]) члену e^2/r^2.

Точное выражение для юкавского поля $\varphi(r)$ не было найдено. Однако поведение поля $\varphi(r)$ в нуле существенно отличается от той особенности, которой обладает кулоновское поле [5, 8]. В случае скалярных квантов с бесконечно малой массой покоя особенность скалярного поля в общей теории относительности становится логарифмической [8] и, таким образом, практическая регуляризация по Штюкельбергу в рамках общей теории относительности также становится невозможной.

Формальная же перенормировка сводится к замене расходящегося значения массы в выражении для g_{00} ее экспериментальным значением. Поскольку в данном случае у нас электрон все еще является по определению точечным, член e^2/r^2 должен иметь смысл на любых малых расстояниях. Но уже при $r < 10^{-13}$ см гравитационное притяжение сменяется гравитационным отталкиванием. В этом можно видеть серьезное возражение против общепринятого метода перенормировки масс вычитанием бесконечных постоянных, поскольку изменению знака гравитационных сил на малых расстояниях нельзя придать никакого физического смысла. Более того, очевидно, что такое изменение полностью обусловлено несовершенством процедуры вычитания. Действительно, разность двух членов компоненты g_{00}

$$\frac{1}{2}\left(2\mu - \frac{e^2}{r}\right) = m(r)$$

по самому ее физическому смыслу есть масса поля, локализованного внутри сферы радиусом r. Если масса частицы имеет исключительно электромагнитную природу, то при $r = 0$ эти два члена должны взаимно компенсировать друг друга.

Искусственной процедурой вычитания мы изменили численное значение лишь первого члена, а второй член оставили неизменным. Иначе говоря, мы, с одной стороны, произвольно изменили массу поля во всем пространстве, а, с другой стороны, оставили

---

[1]) В первом порядке разложения по гравитационной константе $\varkappa$ компонента g_{00} при наличии полей Максвелла и Юкавы имеет вид [22]

$$g_{00} = 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{e^2}{r^2} - em\left[\frac{e^{-2mr}}{r} - m\,\mathrm{ei}\,(2mr)\right],$$
$$\mathrm{ei}\,(2mr) = \int_r^\infty \frac{e^{-2mt}}{t}\,dt. \qquad (14)$$

неизменной массу поля, локализованного внутри произвольного конечного объема. За такую непоследовательность мы и расплачиваемся тем, что при определенных (вообще говоря, не малых) расстояниях $r < 10^{-13}$ см гравитационное поле меняет свой знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dirac P. A. M.*, в книге: Compt. rend. de la Conférence internationale sur les théories relativistes de la gravitation (Warszawa and Jablonna, 1962), Gauthier-Villars, Paris, 1964.
2. *Wheeler J. A.*, в книге: Rendiconti della Schola Internationale di Fisica «Enrico Fermi», Corso XI, p. 67.
3. *Markov M. A.*, Nucl. Phys., **55**, 130 (1964).
4. *Yukawa H.*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **17**, 48 (1935).
5. *Tolman R.*, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934 (имеется перевод: *Р. Толмен*, Относительность, термодинамика и космология», «Наука», М., 1974).
6. *Kruskal M. D.*, Phys. Rev., **119**, 1743 (1960).
7. *Einstein A.*, *Rosen N.*, Phys. Rev., **48**, 73 (1935) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966 стр. 424).
8. *Фишер И. З.*, ЖЭТФ, **18**, 636 (1948).
9. *Einstein A.*, Ann. Math., **40**, 922 (1939) (перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 514).
10. *Regge T.*, Nuovo Cim., **7**, 215 (1958) (см. данный сборник, стр. 460).
11. *Blohincev D. I.*, Nuovo Cim., **16**, 382 (1960).
12. *Yukawa H.*, Phys. Rev., **76**, 300 (1949); **77**, 219 (1950); **80**, 1047 (1950); **91**, 415 (1953); Progr. Theor. Phys., **31**, 1167 (1964).
13. *Yukawa H.*, *Katayama Y.*, Progr. Theor. Phys., **32**, 366 (1964).
14. *Pauli W.*, Helv. Phys. Acta (Suppl.), **4**, 69 (1956) (Bern Congress on Relativity Theory, 1955).
15. *Landau L. D.*, в книге: Niels Bohr and Development of Physics, ed. W. Pauli with ass. of L. Rosenfeld, V. Weisskopf, Pergamon Press, London, 1955, p. 52 (имеется перевод в сб.: Нильс Бор и развитие физики, ред. В. Паули, ИЛ, 1958).
16. *Марков М. А.*, ЖЭТФ, **17**, 848 (1947).
17. *De Witt B.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 114 (1964).
18. *Deser S.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 417 (1957).
19. *Markov M. A.*, Nucl. Phys., **10**, 140 (1959).
20. *Florides P.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **58**, 110 (1962).
21. *Stückelberg E.*, Helv. Phys. Acta, **14**, 21 (1945).
22. *Stephenson G.*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **58**, 521 (1962).

С. ХОКИНГ

РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ НА ЧЕРНЫХ ДЫРАХ*

В классической теории черные дыры могут только поглощать, но не испускать частицы. Но здесь показывается, что вследствие квантовомеханических эффектов черные дыры могут рождать и испускать частицы, как если бы это были тела, нагретые до температуры $\hbar\varkappa/2\pi k \approx 10^{-6}$ $(M_{\odot}/M)$ К, где $\varkappa$ — сила тяжести на поверхности черной дыры. Такое тепловое излучение ведет к постепенному уменьшению массы черной дыры, а затем и к ее исчезновению. Все первичные черные дыры с массой менее $\sim 10^{15}$ г должны были бы уже испариться к настоящему времени. Хотя эти квантовые эффекты противоречат тому классическому закону, что поверхность горизонта событий черной дыры не может уменьшаться, сохраняет силу обобщенный второй закон термодинамики: не может уменьшаться сумма $S + {}^{1}/_{4}A$, где S — энтропия материи вне черных дыр, а A — суммарная площадь поверхности горизонтов событий. Таким образом, гравитационный коллапс приводит к превращению барионов и лептонов коллапсирующего тела в энтропию. Напрашивается мысль, что, может быть, поэтому на каждый барион во Вселенной приходится столь большая энтропия.

Несмотря на большой объем проведенной в последние 15 лет работы (см. свежие обзоры [1, 2]), я, вероятно, не погрешу против истины, если скажу, что еще нет вполне удовлетворительной и непротиворечивой квантовой теории гравитации. Классическая общая теория относительности по-прежнему остается наиболее эффективным способом описания гравитации. В классической общей теории относительности мы имеем классическую метрику, удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна, правую часть которых мы понимаем как тензор энергии-импульса классических полей материи. Но, хотя и могут быть основания пренебрегать квантовыми гравитационными эффектами ввиду их предполагаемой

---

* *Hawking S. W.*, Commun. math. Phys., 43, 199 (1975).

малости, мы знаем, что квантовая механика играет очень важную роль в определении поведения полей материи. Поэтому встает задача выработать последовательный подход, при котором метрика пространства-времени рассматривалась бы с классических позиций, но была бы связана с полями материи, рассматриваемыми на основе квантовой механики. Вероятно, такой подход может быть лишь приближением к более глубокой теории (еще не существующей), в которой будет проквантовано и само пространство-время. Тем не менее можно надеяться, что он давал бы очень хорошее приближение почти во всех задачах, кроме анализа явлений вблизи пространственно-временных сингулярностей.

Я использую в этой статье приближение, в котором материальные поля, такие, как скалярное, электромагнитное или поле нейтрино, подчиняются обычным волновым уравнениям, если в них метрику Минковского заменить классической метрикой пространства-времени g_{ab}. Последняя удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с источником в правой части, равным среднему значению должным образом определенного оператора энергии-импульса материальных полей. При такой формулировке квантовой механики в искривленном пространстве-времени встает проблема истолкования операторов полей как операторов уничтожения и рождения. В плоском пространстве-времени обычно разлагают потенциалы на положительно- и отрицательночастотные составляющие. Если, например, φ — потенциал безмассового эрмитова скалярного поля, удовлетворяющего уравнению $\varphi_{;ab}\eta^{ab} = 0$, то его представляют в виде

$$\varphi = \sum_i \{f_i a_i + \bar{f}_i a_i^\dagger\}, \tag{1.1}$$

где $\{f_i\}$ — полная система ортонормированных комплекснозначных решений волнового уравнения $f_{i;ab}\,\eta^{ab} = 0$, содержащих только положительные частоты относительно обычной временной координаты Минковского. Оператор a_i интерпретируется как оператор уничтожения, а оператор $a_i^\dagger$ — как оператор рождения частиц в i-м состоянии. Состояние вакуума $|0\rangle$ определяется как состояние, в котором уничтожение частиц невозможно т. е.

$$a_i\,|0\rangle = 0 \quad \text{при всех } i.$$

В искривленном пространстве-времени также можно рассматривать эрмитов оператор скалярного поля φ, удовлетворяющий ковариантному волновому уравнению $\varphi_{;ab}g^{ab} = 0$. Но его невозможно разложить на положительно- и отрицательночастотные составляющие, ибо в искривленном пространстве-времени положительные и отрицательные частоты не имеют инвариантного смысла. Все же можно потребовать, чтобы функции $\{f_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$ в совокупности образовали полный базис для решений волнового уравнения, причем

$$\frac{1}{2} i \int\limits_S (f_i \overline{f}_{j;a} - \overline{f}_j f_{i;a})\, d\Sigma^a = \delta_{ij}, \tag{1.2}$$

где S — соответственно подобранная поверхность. Условие (1.2), однако, не выделяет однозначно из пространства всех решений подпространства, натянутого на $\{f_i\}$, а потому не определяет разбиения оператора φ на составляющие, отвечающие уничтожению и рождению частиц. В плоской или асимптотически плоской области пространства-времени адекватным критерием выделения $\{f_i\}$ является наличие у этих функций лишь положительных частот относительно временной координаты Минковского. Но если мы имеем дело с пространством-временем, которое содержало начальную плоскую область 1, сменившуюся затем областью с кривизной 2 и, наконец, снова плоской областью 3, то базис $\{f_{1i}\}$, содержащий только положительные частоты в области 1, не совпадает с базисом $\{f_{3i}\}$, содержащим только положительные частоты в области 3. Это значит, что первоначальное состояние вакуума $|\,0_1\rangle$ (т. е. состояние, удовлетворяющее условию $a_{1i}\,|\,0_1\rangle = 0$ для любого первоначального оператора уничтожения a_{1i}) не будет совпадать с конечным состоянием вакуума $|\,0_3\rangle$, иначе говоря, $a_{3i}\,|\,0_1\rangle \neq 0$. Данное обстоятельство можно истолковать как рождение метрикой, зависящей от времени,— или гравитационным полем — некоторого числа квантов скалярного поля.

Хотя и очевидно, что подпространство, натянутое на $\{f_i\}$, относится к асимптотически плоской области, оно определяется неоднозначно для произвольной точки искривленного пространства-времени. Предположим, что вектор скорости наблюдателя в точке p равен v^a. Пусть B — наименьшая верхняя грань $|\,R_{abcd}\,|$ в любой ортонормированной тетраде, временноподобный вектор которой совпадает с v^a. В окрестности U точки p наблюдатель может построить локальную инерциальную систему координат (например, нормальных координат) с координатным радиусом порядка $B^{-1/2}$. Затем он может выбрать систему $\{f_i\}$, удовлетворяющую уравнению (1.2), приближенно отвечающую в окрестности U положительным частотам относительно временной координаты в U. Для тех мод f_i, характеристическая частота ω которых велика по сравнению с $B^{1/2}$, это приводит к неопределенности между f_i и комплексно-сопряженной функцией $\overline{f}_i$ порядка экспоненты с показателем, кратным $-\omega B^{-1/2}$. Таким образом, неопределенность между оператором уничтожения a_i и оператором рождения $a_i^\dagger$, соответствующим этой моде, экспоненциально мала. Но неопределенность между a_i и $a_i^\dagger$ становится стопроцентной, если этой моде соответствует $\omega < B^{1/2}$. Такая неопределенность приводит для оператора числа частиц $a_i^\dagger a_i$ этой моды к неопределенности $\pm\,{}^1/_2$. Плотность числа мод на единицу объема в частотном интервале от ω до $\omega + d\omega$ по порядку величины равна $\omega^2 d\omega$, когда ω превышает массу покоя m кванта рассматриваемого поля. Поэтому неопределенность локальной плотности энергии, обусловленная неопределенностью мод с длинами волны, превышающими локальный радиус кривизны $B^{-1/2}$, равна по порядку величины B^2 в единицах, для которых $G = c = \hbar = 1$. Так как эта неопределенность экспоненциально убывает для длин волн, коротких по сравнению с радиусом кривизны $B^{-1/2}$, полная неопределенность локальной плотности энергии будет порядка B^2. Можно считать, что эта неопределенность соответствует локальной плотности энергии частиц, порождаемых гравитационным полем. Неопределенность кривизны, обусловленная в силу уравнений Эйнштейна этой неопределенностью плотности энергии, мала по сравнению с полной кривизной пространства-времени, если величина B меньше единицы, т. е. радиус кривизны $B^{-1/2}$ велик по сравнению с планковской длиной, равной 10^{-33} см. Поэтому подход, при котором материальные поля рассматриваются квантовомеханически на фоне классического искривленного пространства-времени, должен быть, по-видимому, хорошим приближением всюду, кроме областей, в которых кривизна сравнима с ее планковским значением 10^{66} см$^{-2}$. На основании классических теорем о сингулярностях [3—6] можно полагать, что такие большие кривизны возникают при коллапсе звезд и существовали прежде в начале современного этапа расширения Вселенной. В первом случае можно думать, что области больших кривизн скрыты от нас горизонтом событий [7]. Таким образом, в интересующем нас случае подход, сочетающий классическую геометрию с квантованной материей, должен быть применим, начиная с возраста 10^{-43}, к нашей Вселенной. Иногда высказывается взгляд, что этот подход теряет силу, когда радиус кривизны становится сравним с комптоновской длиной волны ($\sim 10^{-13}$ см) элементарной частицы типа протона. Однако комптоновская длина волны частиц с нулевой массой покоя, например фотона или нейтрино, бесконечна, и тем не менее мы не сталкиваемся с трудностями, исследуя в искривленном пространстве-времени электромагнитное излучение или излучение нейтрино. Когда радиус кривизны пространства-времени становится меньше комптоновской длины волны какого-то данного вида частиц, все сводится к тому, что возникает неопределенность числа частиц — иными словами, их рождения. Но, как это было показано выше, локально плотность энергии рождаемых частиц мала по сравнению с той кривизной, которая их породила.

Хотя эффекты рождения частиц локально могут быть незначительными, я покажу в этой статье, что, складываясь, они могут заметно повлиять на черные дыры за сроки существования Вселенной, т. е. за $\sim 10^{17}$ с или 10^{60} планковских единиц времени. Гравитационное поле черных дыр должно, по-видимому, рождать частицы и испускать их в бесконечность точно таким же образом, как если бы черная дыра была обычным телом с температурой, равной в геометрических единицах $\varkappa/2\pi$, где $\varkappa$ — «поверхностная сила тяжести» черной дыры [8]. В обычных единицах эта температура имеет порядок 10^{26} M^{-1} K, где M — масса черной дыры в граммах. Для черной дыры с массой Солнца (10^{33} г) такая температура намного ниже 3 К — температуры космического СВЧ-фона. Поэтому черные дыры таких размеров должны поглощать излучение в большей степени, чем излучать, и их масса должна расти. Но кроме черных дыр, образующихся в результате коллапса звезд, могут также существовать намного меньшие черные дыры, обусловленные флуктуациями плотности в ранней Вселенной [9, 10]. Такие малые черные дыры, обладая большей температурой, должны излучать сильнее, чем поглощать. Поэтому они должны терять массу. По мере уменьшения они будут разогреваться и излучать еще сильнее. Когда же температура превысит массы покоя таких частиц, как электроны и μ-мезоны, они также появятся в излучении черной дыры. При достижении температуры около 10^{12} К (или при снижении массы приблизительно до 10^{14} г) число разных видов частиц в излучении может настолько возрасти [11], что черная дыра полностью истратит остатки своей массы покоя на излучение за характерное время сильного взаимодействия порядка 10^{-23} с. Так происходит взрыв с энергией 10^{35} эрг. Даже если бы число испускаемых частиц возросло не очень сильно, черная дыра высветила бы всю свою массу за срок порядка 10^{-28} M^3 с. В последнюю десятую долю секунды испущенная энергия по порядку величины должна быть тогда равна 10^{30} эрг.

При уменьшении массы черной дыры уменьшается и площадь горизонта событий, нарушая тем самым классический закон о невозможности уменьшения этой площади [7, 12]. Такое нарушение можно понимать как следствие потока отрицательной энергии через горизонт событий, компенсирующего положительный поток энергии, уходящий в бесконечность. Этот поток отрицательной энергии можно изобразить следующим образом. Непосредственно перед горизонтом событий возникают виртуальные пары частиц (с отрицательной и с положительной энергией). Частица с отрицательной энергией находится в запрещенной классической теорией области, но она способна туннелировать через горизонт событий в область внутри черной дыры, где вектор Киллинга, описывающий сдвиг во времени, является пространственноподобным. В этой области частица может существовать как реальная частица с временноподобным вектором импульса, несмотря на то, что ее энергия отрицательна по отношению к бесконечности, будучи измерена согласно вектору Киллинга временного сдвига. Другая частица этой пары, имеющая положительную энергию, может уйти на бесконечность, где она дает вклад в упомянутое выше тепловое излучение. Вероятность туннелирования частицы с отрицательной энергией через горизонт определяется поверхностной силой тяжести, так как это есть мера градиента абсолютной величины вектора Киллинга, т. е. она указывает, в каком темпе вектор Киллинга становится пространственноподобным. Вместо того чтобы представлять себе туннелирование частиц с отрицательной энергией через горизонт в положительном направлении времени, можно рассматривать их как частицы с положительной энергией, пересекающие горизонт по мировым линиям, направленным в прошлое, а затем рассеиваемые по мировым линиям, направленным в будущее, гравитационным полем. Подчеркнем, что такое наглядное описание механизма, обеспечивающего тепловое излучение и уменьшение площади горизонта, является чисто эвристическим и его не следует понимать буквально. Вполне возможно, что черная дыра может распадаться квантовомеханически как возбужденное состояние гравитационного поля и что, в силу квантовых флуктуаций метрики, энергия может туннелировать через потенциальный барьер черной дыры. Такое рождение частиц — точный аналог подобного эффекта на глубокой потенциальной яме в плоском пространстве-времени [18]. Но настоящим оправданием для введения этого теплового излучения будет математический вывод, данный в разделе 2 для случая незаряженной черной дыры без вращения. Влияние момента импульса и заряда рассматривается в разделе 3. В разделе 4 показывается, что при любой перенормировке тензора энергии-импульса, обладающего соответствующими свойствами, должны получаться отрицательный поток энергии внутрь черной дыры и соответствующее уменьшение площади горизонта событий. Локально этот отрицательный поток энергии ненаблюдаем.

Уменьшение площади горизонта событий обусловлено нарушением слабого энергетического условия [5—7, 12], следующим из неопределенности числа частиц и плотности энергии в искривленном пространстве-времени. Но, как это было показано выше, такая неопределенность мала и имеет порядок B^2, где B — абсолютная величина тензора кривизны. Поэтому она может оказывать «дивергирующее» влияние на такую изотропную поверхность, как горизонт событий, обладающую весьма малой конвергентностью или дивергентностью, но не способна раскрыть сильно конвергирующую ловушечную поверхность, пока B не станет порядка единицы. Поэтому отрицательная плотность энергии не должна вызывать нарушения классических теорем о сингулярностях, пока радиус кривизны пространства-времени не достигнет 10^{-33} см.

Самый веский довод в пользу способности черных дыр рождать и испускать частицы с постоянной интенсивностью — это, по-видимому, то обстоятельство, что предсказываемая интенсивность испускания совпадает с интенсивностью теплового излучения при температуре $\varkappa/2\pi$. Имеются и независимые термодинамические основания для того, чтобы считать величину, пропорциональную поверхностной силе тяжести, тесно связанной с температурой. Вполне очевидна аналогия между вторым началом термодинамики и тем законом, что (классически) площадь горизонта событий не может уменьшаться, а когда две черные дыры сталкиваются друг с другом и сливаются в одну, то горизонт событий этой последней по своей площади больше суммы площадей двух первоначальных горизонтов событий [7, 12]. Имеется также аналогия между первым началом термодинамики и соотношением, связывающим два соседних равновесных состояния черной дыры [8],

$$dM = \frac{\varkappa}{8\pi} dA + \Omega\, dJ,$$

где M, Ω и J — масса, угловая скорость и момент импульса черной дыры, а A — площадь горизонта событий. Сравнивая это соотношение с уравнением

$$dU = T\, dS + p\, dV,$$

мы видим, что если считать величину, пропорциональную A, аналогом энтропии, то величина, пропорциональная $\varkappa$, должна быть аналогом температуры. Поверхностная сила тяжести аналогична температуре также в том отношении, что при равновесии она постоянна на всем горизонте событий. Бекенштейн высказал предположение [19], что A и $\varkappa$ — не просто аналоги энтропии и температуры, но в определенном смысле действительно энтропия и температура черной дыры. Хотя обычное второе начало термодинамики и нарушается тем, что энтропия может теряться, уходя в черную дыру, этот поток энтропии через горизонт событий всегда вызывает некоторое возрастание площади поверхности горизонта. Поэтому Бекенштейн [20] предложил обобщенное второе начало: энтропия + A (с некоторым неопределенным коэффициентом) не может убывать. Он, однако, не предполагал, что черная дыра способна не только поглощать, но и испускать частицы. В отсутствие такого излучения обобщенное второе начало нарушается, например, если поместить черную дыру в излучение абсолютно черного тела с температурой ниже температуры черной дыры. Если же принять, что черные дыры испускают частицы с постоянной интенсивностью, то можно отождествить величину $\varkappa/2\pi$ с температурой, а величину $^1/_4\, A$ — с энтропией, и тем самым подтверждается обобщенное второе начало.

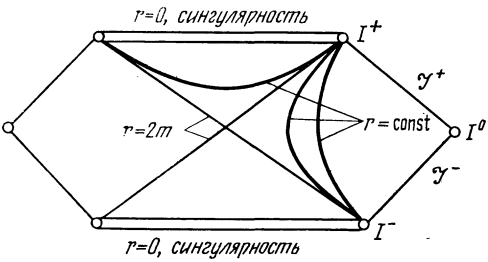
2. ГРАВИТАЦИОННЫЙ КОЛЛАПС

Сейчас стало общепринятым, что, согласно классической теории, результатом гравитационного коллапса является черная дыра, быстро достигающая стационарного аксиально-симметричного равновесного состояния, которое характеризуется ее массой, моментом импульса и электрическим зарядом [7, 13]. Одно такое семейство равновесных состояний черной дыры дается решением Керра — Ньюмэна, а существование каких-либо других состояний представляется маловероятным. Поэтому сейчас обычно игнорируют саму стадию коллапса, а черную дыру просто описывают одним из таких решений. Поскольку же эти решения стационарны, никакого смешения положительных и отрицательных частот не происходит и рождение частиц вряд ли возможно. Существует, однако, классический эффект, называемый сверхизлучением [14—17], при котором некоторые моды волн, падающих на вращающуюся или заряженную черную дыру, рассеиваются с увеличением амплитуды (см. раздел 3). Если говорить о частицах, то такое усиление волн должно соответствовать увеличению числа частиц, т. е. вынужденному испусканию частиц. Но тогда, вообще говоря, должно быть и спонтанное испускание с постоянной интенсивностью этих сверхизлучательных мод, которое могло бы уносить часть момента импульса или заряда черной дыры [16]. Чтобы понять, каким образом при смешении положительных и отрицательных частот могут рождаться частицы, нужно рассматривать не только квазистационарное конечное состояние черной дыры, но и зависящий от времени этап ее формирования. Можно полагать, что (в духе «теорем об отсутствии волос») интенсивность такого излучения не будет зависеть от частностей процесса коллапса, определяясь лишь массой, моментом импульса и зарядом конечной черной дыры. Я покажу, что это именно так, но что наряду с испусканием сверхизлучательных мод должен быть постоянный поток излучения всех мод с такой интенсивностью, как если бы черная дыра была обычным телом с температурой $\varkappa/2\pi$.

Сначала я рассмотрю простейший случай невращающейся черной дыры без заряда. Ее конечное стационарное состояние описывается решением Шварцшильда с метрикой

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \quad (2.1)$$

Как теперь хорошо известно, кажущаяся сингулярность при $r = 2M$ является фиктивной и обусловлена просто неудачным выбором координат. Глобальная структура аналитически продолженного решения Шварцшильда может быть просто описана диаграммой Пенроуза на плоскости r — t (фиг. 1) [6, 13]. На этой диаграмме изотропные геодезические на плоскости r — t проходят под углом $\pm 45°$ к вертикали. Каждая точка диаграммы изображает 2-сферу с площадью $2\pi r^2$. Путем конформного преобразования бесконечность перенесена на конечное расстояние от начала: она изображается двумя диагональными линиями (на самом деле изотропными поверхностями), обозначенными через $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$, и точками I^+, I^- и I^0. Две горизонтальные линии $r = 0$ — сингулярности кривизны, а две диагональные линии $r = 2M$ — в действительности изотропные поверхности — горизонты событий будущего и прошлого, делящие решение на две области, из которых нельзя выйти к $\mathcal{J}^+$ и $\mathcal{J}^-$. В левой части диаграммы — другая бесконечность и асимптотически плоская область.



Фиг. 1

Диаграмма Пенроуза для аналитически продолженного решения Шварцшильда.

Бóльшая часть диаграммы Пенроуза на самом деле не имеет отношения к черной дыре, возникающей за счет гравитационного коллапса, так как метрика принадлежит решению Шварцшильда только в области вне коллапсирующей материи и только в асимптотическом будущем. В случае строго сферического коллапса, который я буду рассматривать для простоты, метрика является в точности метрикой Шварцшильда всюду вне поверхности коллапсирующего объекта, которая изображена с помощью временноподобной геодезической на диаграмме Пенроуза (фиг. 2). Внутри объекта метрика совершенно иная, горизонт событий прошлого, сингулярность $r = 0$ в прошлом и вторая асимптотически плоская область не существуют и заменены временноподобной кривой, изображающей начало сферической системы координат. Соответствующая диаграмма Пенроуза представлена на фиг. 3, где путем произвольного конформного преобразования начало сферической системы координат переведено в вертикальную линию.

Рассмотрим (опять-таки для простоты) в таком пространстве-времени оператор безмассового эрмитова скалярного поля φ, удовлетворяющий волновому уравнению

$$\varphi_{;ab}g^{ab}=0. \tag{2.2}$$

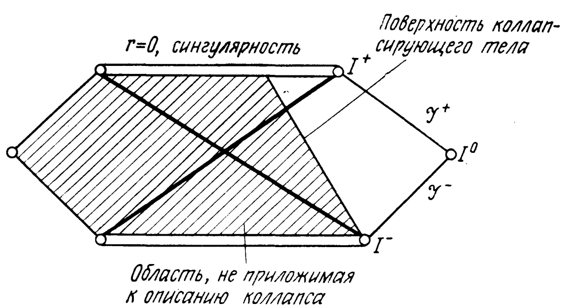
(Результаты не изменятся, если использовать конформно-инвариантное волновое уравнение

$$\varphi_{;ab}g^{ab}+\frac{1}{6}R\varphi=0.)$$

Оператор φ можно представить в виде

$$\varphi=\sum_i\{f_ia_i+\bar{f}_ia_i^\dagger\}. \tag{2.3}$$

Решения $\{f_i\}$ волнового уравнения $f_{i;ab}\,g^{ab}=0$ можно выбрать так, чтобы на изотропной бесконечности $\mathcal{I}^-$ прошлого они образовали полную систему, удовлетворяющую условию ортонормиро-

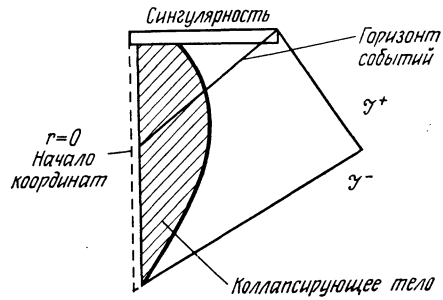


Фиг. 2

Диаграмма Пенроуза.

К черной дыре, образованной в результате гравитационного коллапса, относится только область решения Шварцшильда вне коллапсирующего тела. Внутри тела решение будет совершенно иным.

ванности (1.2), где в качестве поверхности S берется $\mathcal{I}^-$, причем эти решения содержат только положительные частоты относительно канонического аффинного параметра на $\mathcal{I}^-$. (Такое условие положительности частоты можно определить однозначно, несмотря на существование «супертрансляций» в группе асимптотической симметрии Бонди — Метцнера — Сакса [21, 22].) Операторы a_i и $a_i^\dagger$ естественно рассматривать как операторы уничтожения и рождения приходящих частиц, т. е. частиц на изотропной бесконечности прошлого $\mathcal{J}^-$. Поскольку безмассовые поля полностью определяются своими начальными данными на $\mathcal{J}^-$, оператор φ можно представить в форме (2.3) всюду. В области вне горизонта событий можно также задать безмассовые поля их значениями на горизонте



Фиг. 3

Диаграмма Пенроуза для сферически-симметричного коллапсирующего тела, образующего черную дыру. Вертикальная штриховая линия слева изображает несингулярный центр тела.

событий и на изотропной бесконечности будущего $\mathcal{J}^+$, так что потенциалу φ можно придать вид

$$\varphi = \sum_i \{p_i b_i + \bar{p}_i b_i^\dagger + q_i c_i + \bar{q}_i c_i^\dagger\}. \tag{2.4}$$

Здесь $\{p_i\}$ — чисто расходящиеся решения волнового уравнения (т. е. их значения Коши на горизонте событий равны нулю), а $\{q_i\}$ — решения, не содержащие расходящихся компонент (т. е. их данные Коши равны нулю на $\mathcal{J}^+$). Решения $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ должны быть полными наборами, удовлетворяющими условиям ортонормированности (1.2), где в качестве поверхности S взяты для первых $\mathcal{J}^+$, а для вторых — горизонт событий. Кроме того, требуется, чтобы система $\{p_i\}$ содержала только положительные частоты относительно канонического аффинного параметра вдоль изотропных геодезических образующих $\mathcal{J}^+$. При наложении на $\{p_i\}$ условия положительной частотности операторы $\{b_i\}$ и $\{b_i^\dagger\}$ можно рассматривать как операторы уничтожения и рождения расходящихся частиц, т. е. частиц на $\mathcal{J}^+$. Следует ли наложить какое-то условие типа положительной частотности на $\{q_i\}$ и если да, то по отношению к чему — не ясно. Выбор системы $\{q_i\}$ не сказывается на результатах расчетов испускания частиц в сторону $\mathcal{J}^+$. К этому вопросу я вернусь в разделе 4.

Так как безмассовые поля полностью определяются их данными на $\mathcal{J}^-$, системы $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ можно представить в виде линейных комбинаций функций $\{f_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$:

$$p_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} \bar{f}_j), \tag{2.5}$$

$$q_i = \sum_j (\gamma_{ij} f_j + \eta_{ij} \bar{f}_j). \tag{2.6}$$

Соответствующие соотношения для операторов таковы:

$$b_i = \sum_j (\bar{\alpha}_{ij} a_j + \bar{\beta}_{ij} a_j^\dagger), \tag{2.7}$$

$$c_i = \sum_j (\bar{\gamma}_{ij} a_j + \bar{\eta}_{ij} a_j^\dagger). \tag{2.8}$$

Начальное состояние вакуума $|0\rangle$, т. е. состояние, не содержащее входящих частиц, иначе говоря частиц на $\mathcal{J}^-$, определяется условием

$$a_i \mid 0\rangle = 0 \text{ при всех } i. \tag{2.9}$$

Но поскольку коэффициенты β_{ij}, вообще говоря, отличны от нуля, начальное состояние вакуума будет отличаться от конечного состояния вакуума для наблюдателя на $\mathcal{J}^+$. Вместо этого он получит для среднего значения оператора числа частиц в i-й расходящейся моде выражение

$$\langle 0_- | b_i^\dagger b_i | 0_- \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2. \tag{2.10}$$

Поэтому, чтобы найти число частиц, рождаемых гравитационным полем и уходящих в бесконечность, нужно просто вычислить коэффициенты β_{ij}. Можно полагать, что это была бы работа не из чистых, да и результат будет зависеть от всего хода гравитационного коллапса. Но, как я покажу, можно вывести асимптотическое выражение для β_{ij}, в котором эти величины зависят только от поверхностной силы тяжести окончательной черной дыры. Происходит рождение частиц с некоторой конечной интенсивностью, зависящей от конкретного хода коллапса. Эти частицы рассеиваются, а позднее, с неким запаздыванием, на $\mathcal{J}^+$ устанавливается постоянный поток частиц, определяющийся асимптотическим видом коэффициентов β_{ij}.

При вычислении этого асимптотического вида для большего удобства можно разлагать входящие и расходящиеся решения в интегралы Фурье по опережающему и запаздывающему времени и использовать нормировку на δ-функцию. Тогда решения с конечной нормировкой можно получить, составляя из фурье-компонент волновые пакеты. Поскольку пространство-время здесь сферически-симметрично, входящие и расходящиеся решения можно также разлагать по сферическим гармоникам. Тогда вне коллапсирующего тела можно записать входящие и расходящиеся решения в виде

$$f_{\omega' lm} = (2\pi)^{-1/2} r^{-1} (\omega')^{-1/2} F_{\omega'}(r)\, e^{i\omega' v} Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{2.11}$$

$$p_{\omega lm} = (2\pi)^{-1/2} r^{-1} \omega^{-1/2} P_{\omega}(r)\, e^{i\omega u} Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{2.12}$$

где v и u — обычные опережающая и запаздывающая координаты:

$$v = t + r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \tag{2.13}$$

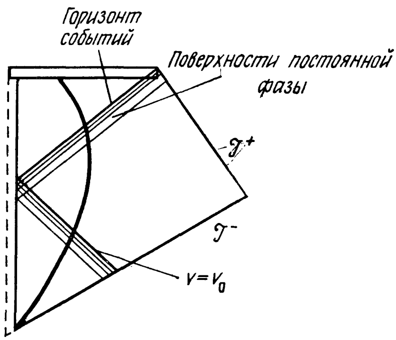
$$u = t - r - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \tag{2.14}$$

Каждое решение $p_{\omega lm}$ можно представить в виде интеграла по ω' от решений $f_{\omega' lm}$ и $\bar{f}_{\omega' lm}$ при одинаковых значениях l и $|m|$ (индексы l и m я буду далее отбрасывать):

$$p_{\omega} = \int_0^{\infty} (\alpha_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} \bar{f}_{\omega'})\, d\omega'. \tag{2.15}$$

Чтобы найти коэффициенты $\alpha_{\omega\omega'}$ и $\beta_{\omega\omega'}$, рассмотрим решение p_{ω}, распространяющееся в обратном направлении от $\mathcal{J}^+$ с данными Коши на горизонте событий, равными нулю. Составляющая $p_{\omega}^{(1)}$ решения p_{ω} будет рассеяна статическим полем Шварцшильда вне коллапсирующего тела и придет на $\mathcal{J}^-$ с той же частотой ω. Это даст в коэффициенте $\alpha_{\omega\omega'}$ слагаемое $\delta(\omega' - \omega)$. Остальная часть $p_{\omega}^{(2)}$ решения p_{ω} проникает в коллапсирующее тело, где частично рассеивается, а частично отражается через центр, приходя в конце концов на $\mathcal{J}^-$. Именно составляющая $p_{\omega}^{(2)}$ приводит к интересным эффектам. Так как запаздывающая временна́я координата u обращается в бесконечность на горизонте событий, поверхности постоянной фазы решения p_{ω} сгущаются вблизи горизонта (фиг. 4). Наблюдателю на коллапсирующем теле кажется, что волна приобретает очень большое фиолетовое смещение. Поскольку эффективная частота очень велика, эта волна проходит по законам геометрической оптики через центр тела и далее на $\mathcal{J}^-$. На поверхности $\mathcal{J}^-$ решение $p_{\omega}^{(2)}$ совершит бесконечное число колебаний до наступления самого последнего момента v_0 опережающего времени, в который изотропная геодезическая может уйти с $\mathcal{J}^-$, чтобы пройти через центр тела и достичь $\mathcal{J}^+$, прежде чем ее уловит горизонт событий. Вид $p_{\omega}^{(2)}$ на $\mathcal{J}^-$ вблизи $v = v_0$ можно определить следующим образом. Пусть x — точка на горизонте событий вне материи, а l^a — изотропный вектор, касательный к горизонту.

Возьмем в точке x ориентированный в будущее изотропный вектор n^a, направим его радиально внутрь и нормируем так, чтобы выполнялось равенство $l^a n_a = -1$. Вектор $-\varepsilon n^a$ (при малом положительном ε) будет связывать точку x на горизонте событий с соседней изотропной поверхностью постоянного запаздывающего времени u, а тем самым и с поверхностью постоянной фазы решения $p_\omega^{(2)}$. Если параллельно перенести векторы l^a и n^a вдоль изотропной геодезической γ, проходящей через x и являющейся образующей горизонта, то вектор $-\varepsilon n^a$ будет все время связывать



Фиг. 4

Диаграмма Пенроуза.

Решение волнового уравнения p_ω претерпевает бесконечное число колебаний вблизи горизонта событий и вблизи поверхности $v = v_0$.

горизонт событий с одной и той же поверхностью постоянной фазы решения $p_\omega^{(2)}$. Чтобы найти соотношение между ε и фазой $p_\omega^{(2)}$, представим себе (фиг. 2), что коллапсирующего тела нет, а вакуумное решение Шварцшильда аналитически продолжено так, чтобы заполнить всю диаграмму Пенроуза. Тогда можно перенести пару (l^a, n^a) обратно до той точки, где пересекаются горизонты событий прошлого и будущего. При этом вектор $-\varepsilon n^a$ будет ориентирован вдоль горизонта событий прошлого. Пусть λ — аффинный параметр на горизонте событий прошлого, такой, что в точке пересечения обоих горизонтов $\lambda = 0$, а $dx^a/d\lambda = n^a$. Аффинный параметр λ связан с запаздывающим временем u на горизонте событий прошлого соотношением

$$\lambda = -Ce^{-\varkappa u}, \tag{2.16}$$

где C — постоянная, а $\varkappa$ — поверхностная сила тяжести черной дыры, определяющаяся равенством $K^a{}_{;b}K^b = -\varkappa K^a$ на горизонте; здесь K^a — вектор Киллинга сдвига во времени (для шварцшильдовской черной дыры $\varkappa = 1/4M$). Отсюда следует, что вектор $-\varepsilon n^a$ связывает горизонт событий будущего с поверхностью постоянной фазы $-(\omega/\varkappa)(\ln\varepsilon - \ln C)$ решения $p_\omega^{(2)}$. Этот вывод будет верен также и в реальном пространстве-времени (включающем коллапсирующее тело) в области вне этого тела. Вблизи горизонта событий вследствие очень большой эффективной частоты решения $p_\omega^{(2)}$ оно будет проходить через коллапсирующее тело в соответствии с приближением геометрической оптики. Это означает, что если продолжить изотропную геодезическую γ назад до конечной точки горизонта событий и далее на $\mathcal{J}^-$ при $v = v_0$, а вектор n^a перенести параллельно вдоль γ, то вектор $-\varepsilon n^a$ будет по-прежнему соединять геодезическую γ с поверхностью постоянной фазы решения $p_\omega^{(2)}$. На $\mathcal{J}^-$ вектор n^a будет параллелен вектору Киллинга K^a, касательному к изотропным геодезическим образующим поверхности $\mathcal{J}^-$:

$$n^a = DK^a.$$

Таким образом, на $\mathcal{J}^-$ при малых положительных $v_0 - v$ фаза решения будет равна

$$-\frac{\omega}{\varkappa}[\ln(v_0-v)-\ln D-\ln C]. \tag{2.17}$$

Поэтому на $\mathcal{J}^-$ решение $p_\omega^{(2)}$ обращается в нуль при $v > v_0$, а при $v < v_0$ оно равно

$$p_\omega^{(2)} \sim (2\pi)^{-1/2}\omega^{-1/2}r^{-1}P_\omega^- \exp\left\{-i\frac{\omega}{\varkappa}\left[\ln\left(\frac{v_0-v}{CD}\right)\right]\right\}, \tag{2.18}$$

где $P_\omega^- \equiv P_\omega(2M)$ — радиальная функция P_ω на горизонте событий прошлого в аналитически продолженном решении Шварцшильда. Выражение (2.18) для $p_\omega^{(2)}$ верно, лишь если разность $v_0 - v$ мала и положительна. При меньших значениях опережающего времени амплитуда будет другой, а частота, определяемая по отношению к v, будет приближаться к исходной частоте ω.

Производя фурье-преобразование $p_\omega^{(2)}$, можно оценить вклад этого решения в коэффициенты $\alpha_{\omega\omega'}$ и $\beta_{\omega\omega'}$. При больших значениях ω' для этого достаточно асимптотического вида (2.18). Поэтому, когда частота ω' велика,

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} \approx (2\pi)^{-1} P_\omega^- (CD)^{i\omega/\varkappa} \exp(i(\omega-\omega')v_0) \times \\ \times \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \Gamma\left(1-\frac{i\omega}{\varkappa}\right)(-i\omega')^{-1+i\omega/\varkappa}, \tag{2.19}$$

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} \approx -i\alpha_{\omega(-\omega')}^{(2)}. \tag{2.20}$$

При больших значениях v решение $p_\omega^{(2)}$ на J^- равно нулю. Это означает, что его фурье-образ является аналитической функцией на верхней половине плоскости ω' и что $p_\omega^{(2)}$ можно корректно представить интегралом Фурье, контур интегрирования для которого сдвинут в верхнюю половину плоскости ω'. Фурье-образ $p_\omega^{(2)}$ содержит множитель $(-i\omega')^{-1+i\omega/\varkappa}$, обладающий логарифмической расходимостью при $\omega' = 0$. Чтобы с помощью соотношения (2.20) получить $\beta_{\omega\omega'}^{(2)}$ из $\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}$, следует аналитически продолжить $\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}$ против часовой стрелки вокруг этой сингулярности. Это означает, что

$$|\alpha_{\omega\omega'}^{(2)}| = \exp\left(\frac{\pi\omega}{\varkappa}\right) |\beta_{\omega\omega'}^{(2)}|. \tag{2.21}$$

В действительности то обстоятельство, что решение $p_\omega^{(2)}$ не определяется выражением (2.18) при малых значениях опережающего времени, означает, что сингулярность в $\alpha_{\omega\omega'}$ имеет место при $\omega' = \omega$, а не при $\omega' = 0$. Однако соотношение (2.21) сохраняет силу при больших значениях ω'.

Среднее значение полного числа рождаемых частиц на $\mathcal{J}^+$ в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ равно $d\omega \int\limits_0^\omega |\beta_{\omega\omega'}|^2 d\omega'$.

Этот интеграл расходится, поскольку функция $|\beta_{\omega\omega'}|$ ведет себя как $(\omega')^{-1/2}$ при больших ω'. Бесконечно большое полное число рождаемых частиц соответствует конечной постоянной интенсивности излучения на протяжении бесконечно долгого времени, что можно показать, составив полный ортонормированный набор волновых пакетов с помощью фурье-компонент p_ω. Возьмем

$$p_{jn} = \varepsilon^{-1/2} \int\limits_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} e^{-2\pi i n \varepsilon^{-1}\omega} p_\omega \, d\omega, \tag{2.22}$$

где j и n — целые числа, $j \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. При малых ε такие волновые пакеты будут обладать частотой $j\varepsilon$ и наибольшей амплитудой вблизи значения запаздывающего времени $u = 2\pi n \varepsilon^{-1}$ с шириной ε^{-1}. Величины $\{p_{jn}\}$ можно разложить по решениям $\{f_\omega\}$:

$$p_{jn} = \int\limits_0^\infty (\alpha_{jn\omega'} f_{\omega'} + \beta_{jn\omega'} \bar{f}_{\omega'}) \, d\omega', \tag{2.23}$$

где

$$\alpha_{jn\omega'} = \varepsilon^{-1/2} \int\limits_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} e^{-2\pi i n \varepsilon^{-1}\omega} \alpha_{\omega\omega'} \, d\omega \quad \text{и т. д.} \tag{2.24}$$

При $j \gg \varepsilon$, $n \gg \varepsilon$

$$|\alpha_{jn\omega'}| = \left|(2\pi)^{-1} P_\omega^- \omega^{-1/2} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\varkappa}\right) \varepsilon^{-1/2} (\omega')^{-1/2} \times \right.$$
$$\left. \times \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \exp i\omega'' (-2\pi n \varepsilon^{-1} + \varkappa^{-1} \ln \omega')\, d\omega'' \right| =$$
$$= \left| \pi^{-1} P_\omega^- \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\varkappa}\right) \varepsilon^{-1/2} (\omega')^{-1/2} z^{-1} \sin \frac{\varepsilon z}{2} \right|, \qquad (2.25)$$

где $\omega = j\varepsilon$ и $z = \varkappa^{-1} \ln \omega' - 2\pi n \varepsilon^{-1}$. В случае волновых пакетов, достигающих $\mathscr{J}^+$ при больших значениях запаздывающего времени, т. е. соответствующих большим значениям n, главный вклад в коэффициенты $\alpha_{jn\omega'}$ и $\beta_{jn\omega'}$ дают очень высокие частоты ω' порядка $\exp(2\pi n \varkappa \varepsilon^{-1})$. Следовательно, эти коэффициенты определяются только асимптотическими выражениями (2.19), (2.20), которые соответствуют большим ω' и не зависят от конкретного хода коллапса.

Среднее значение числа рождаемых и уходящих в бесконечность $\mathscr{J}^+$ частиц в моде p_{jn} волнового пакета равно

$$\int_0^\infty |\beta_{jn\omega'}|^2\, d\omega'. \qquad (2.26)$$

Его можно вычислить следующим образом. Рассмотрим волновой пакет p_{jn}, распространяющийся назад от $\mathscr{J}^+$. Часть его, равная $1 - \Gamma_{jn}$, рассеивается на статическом поле Шварцшильда, а часть Γ_{jn} проникает в коллапсирующее тело. Здесь

$$\Gamma_{jn} = \int_0^\infty \left(|\alpha_{jn\omega'}^{(2)}|^2 - |\beta_{jn\omega'}^{(2)}|^2\right) d\omega', \qquad (2.27)$$

причем $\alpha_{jn\omega'}^{(2)}$ и $\beta_{jn\omega'}^{(2)}$ вычисляются по формулам (2.19), (2.20) исходя из той части волнового пакета $p_{jn}^{(2)}$, которая проникает в звезду. Знак минус перед вторым слагаемым в правой части выражения (2.27) обусловлен тем, что компоненты $p_{jn}^{(2)}$ с отрицательной частотой дают отрицательный вклад в поток частиц внутрь коллапсирующего тела.

Согласно формуле (2.21),

$$|\alpha_{jn\omega'}^{(2)}| = \exp(\pi\omega\varkappa^{-1})\, |\beta_{jn\omega'}^{(2)}|. \qquad (2.28)$$

Таким образом, полное число частиц, рожденных в моде p_{jn}, равно

$$\Gamma_{jn}\, [\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1]^{-1}. \qquad (2.29)$$

Но при больших значениях запаздывающего времени часть Γ_{jn} волнового пакета, проникающая в коллапсирующее тело, почти столь же велика, как и часть его, которая пересекла бы горизонт событий прошлого, если бы там не было коллапсирующего тела, но было бы аналитически продолжено внешнее решение Шварцшильда. Поэтому данная часть Γ_{jn} та же самая, что и часть аналогичного волнового пакета, приходящего от $\mathcal{J}^-$, которая пересекает горизонт событий будущего и поглощается черной дырой. Следовательно, соотношение между сечениями излучения и поглощения здесь точно такое же, как и для тела с температурой, равной $\varkappa/2\pi$, если ее выразить в геометрических единицах.

Аналогичные выводы получаются для электромагнитного и линеаризованного гравитационного полей. Поля на $\mathcal{J}^-$, обусловленные волнами положительной частоты, приходящими с $\mathcal{J}^+$, имеют тот же асимптотический вид, что и (2.18), но содержат в своей амплитуде дополнительный множитель фиолетового смещения. Этот добавочный множитель сокращается при построении скалярного произведения, так что асимптотический вид (2.19) и (2.20) коэффициентов α и β сохраняется. Поэтому черные дыры должны испускать фотонное и гравитонное тепловое излучение. Для фермионов с нулевой массой покоя (например, нейтрино) также получаются аналогичные выводы с той лишь разницей, что отрицательно-частотные составляющие, выражаемые через коэффициенты β, дают теперь положительный вклад в поток вероятности внутрь коллапсирующего тела. Это означает, что член $|\beta|^2$ в формуле (2.27) имеет теперь обратный знак. Отсюда следует, что число частиц, испускаемых в моде расходящегося волнового пакета, равно умноженному на $[\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) + 1]^{-1}$ числу частиц того волнового пакета, который был бы поглощен черной дырой, если бы он пришел с $\mathcal{J}^-$. Это опять-таки именно то, что должно происходить при тепловом излучении частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака.

Поля с отличной от нуля массой покоя квантов не достигают поверхностей $\mathcal{J}^-$ и $\mathcal{J}^+$. Поэтому входящие и расходящиеся состояния этих полей следует описывать на основе таких представлений, как проективная бесконечность Эрдли и Сакса [23] и Шмидта [24]. Но если начальное и конечное состояния асимптотически являются решениями Шварцшильда или Керра, то входящие и расходящиеся состояния полей можно рассматривать, просто привлекая разделение переменных, и можно определить положительные частоты по отношению к векторам Киллинга сдвига во времени этих начальных и конечных асимптотических пространств-времен. В асимптотическом будущем связанных состояний не будет — каждая из частиц уйдет либо за горизонт событий, либо в бесконечность. Поэтому несвязанные расходящиеся состояния вместе с состояниями горизонта событий образуют полный базис решений волновых уравнений в области вне горизонта событий. В асимптотическом прошлом связанные состояния могли бы существовать, если бы у коллапсирующего тела бесконечно долгое время был ограниченный радиус. Но с равным основанием можно принять, что данное тело коллапсировало, начиная с бесконечного радиуса, а в таком случае не может быть связанных состояний. Возможность существования связанных состояний в прошлом не сказывается на интенсивности испускания частиц в асимптотическом будущем, она опять будет равна интенсивности излучения тела с температурой $\varkappa/2\pi$. Здесь единственное отличие от случая нулевой массы покоя состоит в том, что в частоту ω в тепловом множителе $[\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) \mp 1]^{-1}$ теперь входит масса (энергия) покоя частицы. Поэтому интенсивность испускания частиц с массой покоя m будет небольшой, если температура $\varkappa/2\pi$ не превышает m.

Можно показать, что наши выводы о тепловом излучении не зависят от предположения о сферической симметрии. Рассмотрим асимметричный коллапс, результатом которого будет черная дыра, стремящаяся к невращающемуся и незаряженному решению Шварцшильда (момент импульса и заряд будут рассмотрены в следующем разделе). То обстоятельство, что конечное состояние является асимптотически квазистационарным, означает, что существует привилегированная система координат Бонди [25] на $\mathcal{J}^+$, относительно которой данные Коши для расходящихся состояний можно разложить на положительно-частотные сферические гармоники. На $\mathcal{J}^-$ привилегированная система координат может существовать или не существовать, но если ее нет, то можно выбрать произвольную систему координат Бонди и аналогичным способом разложить данные Коши для входящих состояний. Рассмотрим теперь одно из состояний $p_{\omega lm}$ на $\mathcal{J}^+$, распространяющееся вспять в этом пространстве-времени до коллапсирующего тела, а затем снова *вовне* на $\mathcal{J}^-$. Возьмем изотропную геодезическую образующую γ горизонта событий и проведем ее назад за конечную точку горизонта прошлого до пересечения с $\mathcal{J}^-$ в точке y на изотропной геодезической образующей λ поверхности $\mathcal{J}^-$. Выберем пару изотропных векторов $(l^a, \hat{n}^a)$ в точке y, где вектор l^a касательный к кривой γ, а вектор $\hat{n}^a$ — к λ. Перенесем векторы l^a и $\hat{n}^a$ параллельно вдоль кривой γ до точки x в той области пространства-времени, где метрика уже является почти окончательным решением Шварцшильда. В точке x вектор $\hat{n}^a$ будет некоторой линейной комбинацией вектора l^a и радиального изотропного вектора n^a, направленного внутрь. Это означает, что вектор $-\varepsilon\hat{n}^a$ будет связывать точку x с поверхностью фазы $-(\omega/\varkappa)(\ln\varepsilon - \ln E)$ решения $p_{\omega lm}$, где E — некоторая постоянная. Как и прежде, согласно приближению геометрической оптики, вектор $-\varepsilon\hat{n}^a$ в точке y будет связывать эту последнюю с поверхностью фазы

$-(\omega/\varkappa)(\ln \varepsilon - \ln E)$ решения $p^{(2)}_{\omega lm}$, проникающего в коллапсирующее тело. Поэтому на изотропной геодезической образующей λ поверхности $\mathcal{J}^-$ фаза $p^{(2)}_{\omega lm}$ будет равна

$$-\frac{i\omega}{\varkappa}[\ln(v_0-v)-\ln H], \tag{2.30}$$

где v — аффинный параметр на λ, равный v_0 в точке y, а H — постоянная. Согласно приближению геометрической оптики, величина $p^{(2)}_{\omega lm}$ на λ равна

$$L\exp\left\{-\frac{i\omega}{\varkappa}[\ln(v_0-v)-\ln H]\right\}, \tag{2.31}$$

когда разность $v_0 - v$ мала и положительна, и равна нулю, когда $v > v_0$, причем L — постоянная. На любой изотропной образующей поверхности $\mathcal{J}^-$ решение $p^{(2)}_{\omega lm}$ будет иметь вид (2.31) с соответствующими значениями L, v_0 и H. Отсутствие сферической симметрии в период коллапса повлечет на $\mathcal{J}^-$ появление в решении $p^{(2)}_{\omega lm}$ компонент сферических гармоник с индексами (l', m'), отличными от (l, m). Это значит, что теперь решение $p^{(2)}_{\omega lm}$ следует представлять в виде

$$p^{(2)}_{\omega lm}=\sum_{l'm'}\int_0^\infty\{\alpha^{(2)}_{\omega lm\omega' l'm'}f_{\omega' l'm'}+\beta^{(2)}_{\omega lm\omega' l'm'}\bar{f}_{\omega' l'\omega'}\}\,d\omega'. \tag{2.32}$$

Соответственно форме выражения (2.31) коэффициенты $\alpha^{(2)}$ и $\beta^{(2)}$ будут зависеть от ω' так же, как это было в выражениях (2.19) и (2.20). Поэтому мы снова получим такое же соотношение, как (2.21):

$$|\alpha^{(2)}_{\omega lm\omega' l'm'}| = \exp(\pi\omega\varkappa^{-1})\,|\beta^{(2)}_{\omega lm\omega' l'm'}|. \tag{2.33}$$

Как и раньше, для каждой пары индексов (l, m) можно построить волновые пакеты p_{jnlm}. Число частиц, испускаемых в каждой такой моде волнового пакета, равно

$$\sum_{l'm'}\int_0^\infty|\beta_{jnlm\omega' l'm}|^2\,d\omega'. \tag{2.34}$$

Аналогично доля Γ_{jnlm} волнового пакета, проникающая внутрь коллапсирующего тела, равна

$$\Gamma_{jnlm}=\sum_{l'm'}\int_0^\infty\{|\alpha^{(2)}_{jnlm\omega' l'\omega'}|^2-|\beta^{(2)}_{jnlm\omega' l'm'}|^2\}\,d\omega'. \tag{2.35}$$

Здесь, как и прежде, величина Γ_{jnlm} равна той части аналогичного волнового пакета, приходящего с $\mathcal{J}^-$, которая была бы поглощена черной дырой. Итак, пользуясь соотношением (2.33), находим, что излучение обладает свойствами излучения тела с температурой $\varkappa/2\pi$: при больших значениях запаздывающего времени излучение зависит только от конечного квазистационарного состояния черной дыры, а не от хода гравитационного коллапса.

3. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАРЯД

Если коллапсирующее тело вращается или обладает электрическим зарядом, то возникающая черная дыра стремится к стационарному состоянию, описываемому уже не решением Шварцшильда, а решением Керра с зарядом, которое характеризуется массой M, моментом импульса J и зарядом Q. Поскольку такие решения стационарны и аксиально-симметричны, можно представить решения волновых уравнений в виде произведений с множителем $e^{i\omega u}$ или $e^{i\omega v}$ на функцию координат r и θ. В случае скалярного волнового уравнения последнюю функцию можно представить в виде произведения функции координаты r на функцию координаты θ [26]. Можно также полностью разделить переменные для любого волнового уравнения в случае отсутствия вращения и заряда, а Тьюкольскому [27] удалось полностью разделить переменные для волновых уравнений поля нейтрино, электромагнитного и линеаризованного гравитационного полей при наличии вращения, но в отсутствие заряда.

Рассмотрим волновой пакет для классического поля с зарядом e, частотой ω и аксиальным квантовым числом m, падающий из бесконечности на керровскую черную дыру. Изменение массы черной дыры dM, обусловленное частичным поглощением волнового пакета, будет связано с изменением площади, момента импульса и заряда классическим первым законом термодинамики для черных дыр:

$$dM = \frac{\varkappa}{8\pi}\, dA + \Omega\, dJ + \Phi\, dQ \qquad (3.1)$$

где Ω и Φ — угловая частота и электростатический потенциал черной дыры [13]. Отношение потоков энергии, момента импульса и заряда в волновом пакете будет равно $\omega : m : e$. Таково же будет отношение и изменений массы, момента импульса и заряда черной дыры. Следовательно,

$$dM\,(1 - \Omega m \omega^{-1} - e\Phi\omega^{-1}) = \frac{\varkappa}{8\pi}\, dA. \qquad (3.2)$$

Волновой пакет классического поля бозонов будет удовлетворять слабому энергетическому условию неотрицательности локальной плотности энергии с точки зрения любого наблюдателя. Отсюда следует [7, 12], что изменение площади dA, обусловленное волновым пакетом, будет неотрицательно. Поэтому, если

$$\omega < m\Omega + e\Phi, \qquad (3.3)$$

изменение массы черной дыры dM должно быть в сторону уменьшения. Иными словами, черная дыра будет отдавать энергию волновому пакету, который в результате рассеивается с той же частотой, но с большей амплитудой. Такое явление называется «сверхизлучением».

В случае классических полей с полуцелым спином подробные выкладки [28] показывают отсутствие сверхизлучения. Это обусловлено тем, что скалярное произведение для полей с полуцелым спином является положительно определенным в отличие от случая полей с целым спином. Это значит, что поток вероятности через горизонт событий положителен, а, в силу закона сохранения вероятности, поток вероятности для рассеянного волнового пакета должен быть меньше, чем он был в падающей волне. Рассуждения, основывавшиеся выше на первом законе, неверны потому, что для тензора энергии-импульса классического поля с полуцелым спином не выполняется слабое энергетическое условие. На квантовом же уровне (на уровне теории элементарных частиц) отсутствие сверхизлучения для фермионных полей можно объяснить тем, что принцип исключения Паули не допускает наличия более чем одной частицы в каждой моде расходящегося волнового пакета, а потому и не допускает, чтобы рассеянный волновой пакет стал мощнее падающего.

Переходя к квантовой теории, рассмотрим сначала случай незаряженной вращающейся черной дыры. Как и раньше, можно выбрать произвольную систему координат Бонди на $\mathcal{J}^-$ и разлагать оператор φ по системе падающих решений $\{f_{\omega l m}\}$, где индексы ω, l, m относятся к опережающему времени и угловой зависимости f на $\mathcal{J}^-$ в выбранной системе координат. Конечным квазистационарным состоянием черной дыры на $\mathcal{J}^+$ определяется привилегированная система координат Бонди, пользуясь которой можно найти систему расходящихся решений $\{p_{\omega l m}\}$. В этом случае индекс l характеризует сферические гармоники, с помощью которых переменные разделяются в этом волновом уравнении. При вычислении асимптотического вида $p^{(2)}_{\omega l m}$ на $\mathcal{J}^-$ поступают, как и прежде. Единственное различие состоит в том, что, так как горизонт вращается относительно $\mathcal{J}^+$ с угловой скоростью Ω, эффективная частота вблизи образующей горизонта событий равна не ω, а $\omega - m\Omega$. Это означает, что число частиц, испускаемых в моде p_{jnlm} волнового пакета, равно

$$\{\exp[2\pi\varkappa^{-1}(\omega - m\Omega)] \mp 1\}^{-1}\,\Gamma_{jnlm}. \tag{3.4}$$

В результате этого интенсивность излучения частиц с положительным моментом импульса m будет выше, чем для частиц с той же частотой ω и квантовым числом l, но с отрицательным моментом импульса $-m$. Таким образом, при испускании частиц уносится момент импульса. В случае бозонных полей множитель в фигурных скобках в (3.4) отрицателен, если $\omega < m\Omega$. Но та доля Γ_{jnlm} волнового пакета, которая поглощается черной дырой, в этом случае также будет отрицательна, ибо неравенство $\omega < m\Omega$ есть условие сверхизлучения. В пределе очень низких температур $\varkappa/2\pi$ испускание частиц происходит лишь в количестве $\mp\Gamma_{jnlm}$ в модах, для которых $\omega < m\Omega$. Такая интенсивность рождения частиц совпадает с тем, что получили Старобинский [16] и Унру [29], рассматривавшие только конечное стационарное решение Керра и пренебрегавшие стадией коллапса.

Заряженную невращающуюся черную дыру можно рассматривать подобным же образом. Электромагнитное и гравитационное поля, не несущие электрического заряда, ведут себя здесь так же, как и раньше, за исключением того, что наличие у черной дыры заряда приводит к уменьшению поверхностной силы тяжести $\varkappa$, а значит, и температуры черной дыры. Рассмотрим здесь простой случай безмассового заряженного скалярного поля φ, удовлетворяющего волновому уравнению с минимальным взаимодействием

$$g^{ab}(\nabla_a - ieA_a)(\nabla_b - ieA_b)\varphi = 0. \tag{3.5}$$

Фаза решения p_ω волнового уравнения (3.5) не является калибровочно-инвариантной, но волновой вектор $ik_a = \nabla_a(\ln p_\omega) - ieA_a$ инвариантен. В приближении геометрической оптики или ВКБ вектор k_a изотропен и подчиняется уравнению

$$k_{a;b}k^b = -eF_{ab}k^b. \tag{3.6}$$

Бесконечно малый вектор z^a будет соединять между собой точки, отвечающие «калибровочно-инвариантной» разности фаз $ik_a z^a$. Если z^a распространяется вдоль огибающих вектора k^a в соответствии с уравнением

$$z^a{}_{;b}k^b = -eF^a_b z^b, \tag{3.7}$$

то вектор z^a будет соединять поверхности, калибровочно-инвариантная разность фаз между которыми постоянна.

В окончательной стационарной области можно выбрать такую калибровку, что электромагнитный потенциал A_a будет там стационарен, а на $\mathcal{J}^+$ обратится в нуль. В такой калибровке переменные в уравнении поля (3.5) будут разделяться, и мы получим решения p_ω с зависимостью от запаздывающего времени вида $e^{i\omega u}$. Пусть x — точка на горизонте событий в окончательной стационарной области, а l^a и n^a — два изотропных вектора в этой точке. Как и прежде, вектор $-\varepsilon n^a$ будет соединять горизонт событий с поверхностью действительной фазы $-(\omega/\varkappa)(\ln\varepsilon - \ln C)$ решения p_ω. Калибровочно-инвариантная фаза будет, однако, равна $-\varkappa^{-1}(\omega - e\Phi)(\ln\varepsilon - \ln C)$, где $\Phi = K^a A_a$ — значение электростатического потенциала на горизонте, а K^a — вектор Киллинга сдвига во времени. Перенесем теперь вектор l^a, подобно k^a, согласно уравнению (3.6), вспять до достижения им образующей λ поверхности $\mathcal{J}^-$ в точке y; вектор же n^a перенесем, подобно z^a, согласно уравнению (3.7), вдоль огибающей вектора l^a. При таком правиле переноса вектор $-\varepsilon n^a$ будет соединять поверхности постоянной калибровочно-инвариантной фазы. Вблизи $\mathcal{J}^-$ можно воспользоваться другой калибровкой электромагнитного поля, при которой $A^a = 0$ на $\mathcal{J}^-$. В такой калибровке фаза решения $p_\omega^{(2)}$ вдоль любой образующей поверхности $\mathcal{J}^-$ будет иметь вид

$$-(\omega - e\Phi)\,\varkappa^{-1}\,\{\ln(v_0 - v) - \ln H\}, \tag{3.8}$$

где число H постоянно вдоль каждой образующей. Такое поведение фазы приводит к тому же самому тепловому излучению, но с заменой ω на $\omega - e\Phi$. Аналогичные выводы можно сделать относительно потери черной дырой заряда и сверхизлучения. В случае же когда черная дыра одновременно вращается и обладает зарядом, можно просто скомбинировать полученные выше результаты.

4. ОБРАТНОЕ ДЕЙСТВИЕ НА МЕТРИКУ

Теперь я перейду к сложному вопросу об обратном влиянии на метрику со стороны процесса рождения частиц и о соответствующем медленном уменьшении массы черной дыры. На первый взгляд может показаться, что, поскольку зависимость метрики от времени на фиг. 4 относится лишь к стадии коллапса, все процессы рождения частиц должны происходить в коллапсирующем теле еще до формирования горизонта событий и что бесконечно большое число родившихся квантов должно парить прямо над горизонтом событий, уходя на $\mathcal{J}^+$ постоянным потоком. Это, по-видимому, неверно, ибо это означало бы, что коллапсирующее тело знает, когда именно ему предстоит уйти за горизонт событий, тогда как положение этого горизонта опеделяется всей будущей историей черной дыры и может оказаться где-то снаружи от кажущегося горизонта, который только и может быть найден локально [7].

Предположим, что наблюдатель падает через горизонт спустя некоторое время после коллапса. Он может построить локально инерциальную координатную окрестность радиусом ~ с центром в точке пересечения им горизонта. Он может выбрать и полную систему решений $\{h_\omega\}$ волнового уравнения, которая подчинена условию

$$\frac{1}{2}\, i \int\limits_S (h_{\omega_1}\bar{h}_{\omega_2;\,a} - \bar{h}_{\omega_2} h_{\omega_1;\,a})\, d\Sigma^a = \delta(\omega_1 - \omega_2) \tag{4.1}$$

(где S — поверхность Коши) и элементы которой в этой координатной окрестности обладают приблизительно координатной зависимостью вида $e^{i\omega t}$. Из последнего условия следует разбиение на положительные и отрицательные частоты, а потому и удовлетворительное выделение операторов уничтожения и рождения для мод h_ω при $\omega > M$, но не при $\omega < M$. Так как в отличие от решений $\{p_\omega\}$, решения $\{h_\omega\}$ непрерывны при переходе через горизонт событий, они будут непрерывны и на $\mathcal{J}^-$. Рождение в каждой моде бесконечно большого полного числа частиц обусловлено разрывом решений $\{p_\omega\}$ на $\mathcal{J}^-$ при $v = v_0$. Решение p_ω дает хвост вида $(\omega')^{-1}$ у фурье-образов $\{p_\omega\}$ при больших отрицательных частотах ω'. В то же время при $\omega > M$ решения $\{h_\omega\}$ будут обладать на $\mathcal{J}^-$ весьма малыми компонентами отрицательной частотности. Это значит, что наблюдатель будет видеть на горизонте событий мало частиц с $\omega > M$. Он не сможет обнаружить частицы с $\omega < M$, так как длины их волн будут больше размеров его детектора частиц, которые не могут превышать M. Как указывалось во введении, неопределенность плотности энергии будет порядка M^{-4}, что соответствует неопределенности числа частиц в этих модах.

Из сказанного явствует, что рождение частиц — это фактически глобальный процесс, а не процесс, локализованный в области коллапса: наблюдатель, падающий через горизонт событий, не обнаружит бесконечного числа частиц, вылетающих из коллапсирующего тела. Поскольку же это нелокальный процесс, по-видимому, вряд ли удалось бы построить локальный тензор энергии-импульса, который описывал бы обратное действие процесса рождения частиц на метрику. Вместо этого нужно отрицательную плотность энергии, необходимую, чтобы объяснить уменьшение площади горизонта, рассматривать как следствие неопределенности порядка M^{-4} локальной плотности энергии на горизонте событий. Можно также объяснять себе это уменьшение площади тем, что в результате квантовых флуктуаций метрики местоположение и даже само понятие горизонта событий становится несколько неопределенным.

Хотя о локальной плотности энергии-импульса рождаемых частиц, по-видимому, и не имеет смысла говорить, можно определить полный поток энергии сквозь достаточно большую поверхность. Здесь положение в какой-то мере аналогично определению гравитационной энергии в классической общей теории относительности: там существует множество разных псевдотензоров энергии-импульса, ни один из которых не имеет инвариантного локального смысла, но все они приводят к одинаковым результатам при интегрировании по достаточно большой гиперповерхности. Если рассматривать частицы, то здесь тоже имеется ряд разных выражений, которые могут быть использованы в качестве перенормированного тензора энергии-импульса. Тензор энергии-импульса классического поля φ равен

$$T_{ab}=\varphi_{;a}\varphi_{;b}-\frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}\varphi_{;c}\varphi_{;d}. \tag{4.2}$$

Если это выражение перенести в квантовую теорию, рассматривая φ как операторы, то возникнет расходимость, ибо для каждой моды справа от оператора уничтожения стоит оператор рождения. Поэтому необходимо каким-то образом вычесть такую расходимость. Для этого предлагались разные способы (см., например, [30]), но все они кажутся несколько искусственными. Но по аналогии со случаем псевдотензора можно надеяться, что эти все различные перенормировки будут давать один и тот же интегральный поток. Так действительно обстоит дело в случае окончательной квазистационарной области: все перенормированные операторы энергии-импульса T_{ab}, подчиняющиеся уравнениям сохранения $T^{ab}{}_{;b}=0$, стационарные (т. е. для них равна нулю производная Ли относительно вектора Киллинга сдвига во времени K^a) и равные друг другу вблизи $\mathcal{J}^+$, будут давать одинаковый поток энергии и момента импульса через любую поверхность постоянной координаты r вне горизонта событий. Поэтому достаточно определить поток энергии вблизи поверхности $\mathcal{J}^+$, ибо, в силу уравнений сохранения, он будет совпадать с потоком энергии на горизонте событий. Вблизи $\mathcal{J}^+$ способ перенормировки оператора энергии-импульса очевиден; нужно привести выражение (4.2) к нормальному виду в смысле расстановки положительно- и отрицательночастотных операторов, определенных относительно вектора Киллинга сдвига во времени K^a для окончательного квазистационарного состояния. Вблизи же горизонта событий нормальное произведение операторов относительно K^a не может служить корректным способом перенормировки оператора энергии-импульса, ибо оператор в таком нормальном виде на горизонте расходится. Тем не менее на любой поверхности постоянной координаты r он продолжает описывать один и тот же поток энергии. Перенормированный оператор, регулярный на горизонте, противоречит слабому энергетическому условию, так как дает отрицательную плотность энергии. Такая отрицательная плотность энергии локально ненаблюдаема.

Чтобы найти нормальную форму оператора, требуется так выбрать систему $\{q_i\}$, описывающую волны, которые пересекают горизонт событий, чтобы она имела положительную частоту относительно параметра времени, определяемого по K^a вдоль образующих горизонта для окончательного квазистационарного состояния. Условия, которым подчиняются $\{q_i\}$ в зависящий от времени период коллапса, не определены, но это не должно сказываться на волновых пакетах на горизонте в более поздние времена. Если составить волновые пакеты $\{q_{jn}\}$ наподобие $\{p_{jn}\}$, то получится, что доля Γ_{jn} волнового пакета проникает через горизонт событий, окружающий черную дыру, и уходит к $\mathcal{J}^-$ с той же частотой ω, которую она имела на горизонте. Это дает функцию $\delta(\omega - \omega')$ в составе $\gamma_{jn\omega'}$. Остальная часть $1 - \Gamma_{jn}$ волнового пакета отражается от потенциального барьера, проходит сквозь коллапсирующее тело, а из него — на $\mathcal{J}^-$. Здесь волновой пакет уподобляется $p_{jn}^{(2)}$. Поэтому при больших значениях ω'

$$|\gamma_{jn\omega'}^{(2)}| = \exp(\pi\omega\varkappa^{-1})\,|\eta_{jn\omega'}^{(2)}|. \tag{4.3}$$

На основании таких же соображений, как и в разделе 2, можно заключить, что число частиц, пересекающих горизонт событий в моде волнового пакета, максимальной в позднейшие времена, будет равно

$$(1 - \Gamma_{jn})\{\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1\}^{-1}. \tag{4.4}$$

На данной частоте ω, т. е. при данном значении j, коэффициент поглощения Γ_{jn} стремится к нулю по мере роста углового квантового числа l под влиянием центробежного барьера. Поэтому на первый взгляд может показаться, что в каждой моде волнового пакета при больших значениях l содержится

$$\{\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1\}^{-1}$$

частиц, а полное число частиц и полная энергия, пересекающие горизонт событий в единицу времени, должны быть бесконечно большими. Такая оценка, очевидно, противоречит тому, что, как показано выше, при пересечении горизонта событий наблюдатель должен увидеть лишь конечную (и малую) плотность энергии порядка M^{-4}. Причина такого расхождения, по-видимому, в том, что волновые пакеты $\{p_{jn}\}$ и $\{q_{jn}\}$ образуют полный базис решений волнового уравнения только в области, внешней относительно горизонта событий, но не на самом горизонте. Поэтому, чтобы рассчитать поток частиц через горизонт, следует найти поток через какую-нибудь поверхность сразу над горизонтом и перейти к пределу, устремив эту поверхность к горизонту.

Чтобы провести такие вычисления, удобно ввести новые волновые пакеты: $x_{jn} = p_{jn}^{(2)} + q_{jn}^{(2)}$, которые будут давать нам часть пакетов p_{jn} и q_{jn}, проходящую сквозь коллапсирующее тело, и $y_{jn} = p_{jn}^{(1)} + q_{jn}^{(1)}$, которые дают часть пакетов p_{jn} и q_{jn}, распространяющуюся на $\mathcal{J}^-$ по квазистационарной метрике окончательной черной дыры. В первоначальном состоянии вакуума моды $\{y_{jn}\}$

не будут включать частиц, а в каждой моде x_{jn} будет содержаться $\{\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1\}^{-1}$ частиц. Эти частицы будут казаться вылетающими из коллапсирующего тела сразу вне горизонта событий и разлетающимися по радиусам. Их доля Γ_{jn} будет проникать за потенциальный барьер, имеющий максимум при $r = 3M$, и уходить к $\mathcal{J}^+$, где эти частицы образуют тепловое излучение черной дыры. Остальная часть $1 - \Gamma_{jn}$ будет отражаться потенциальным барьером обратно и пересекать горизонт событий. Таким образом, полный поток частиц через поверхность постоянной координаты r сразу над горизонтом будет составлять Γ_{jn} и будет направлен наружу.

Я покажу теперь, что при использовании в операторе энергии-импульса нормального произведения сомножителей средний поток энергии через поверхность постоянной координаты r между моментами запаздывающего времени u_1 и u_2

$$(u_2 - u_1)^{-1} \int\limits_{u_1}^{u_2} \langle 0_- | T_{ab} | 0_- \rangle K^a \, d\Sigma^b \tag{4.5}$$

направлен наружу и равен потоку энергии теплового излучения нагретого тела. Поскольку в решениях $\{y_{jn}\}$ отсутствуют отрицательные частоты на $\mathcal{J}^-$, эти решения не дадут вклада в среднее значение (4.5) для нормальной формы оператора энергии-импульса. Пусть

$$x_{jn} = \int\limits_0^\infty (\zeta_{jn\omega'} f_{\omega'} + \xi_{jn\omega'} \bar{f}_{\omega'}) \, d\omega' \tag{4.6}$$

Вблизи поверхности $\mathcal{J}^+$

$$x_{jn} = (\Gamma_{jn})^{1/2} p_{jn}. \tag{4.7}$$

Тогда

$$(4.5) = (u_2 - u_1)^{-1} \operatorname{Re} \Big\{ \sum_{j,\, n} \sum_{j'',\, n''} \int\limits_0^\infty \int\limits_{u_1}^{u_2} \omega\omega'' \times$$

$$\times \Gamma_{jn}^{1/2} p_{jn} \bar{\xi}_{jn\omega'} (\bar{\Gamma}_{j''n''}^{1/2} \bar{p}_{j''n''} \xi_{j''n''\omega'} - \Gamma_{j''n''}^{1/2} p_{j''n''} \zeta_{j''n''\omega'}) \, d\omega' \, du \Big\}, \tag{4.8}$$

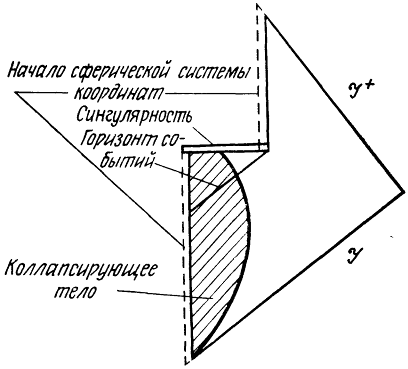
где ω и ω'' — частоты волновых пакетов p_{jn} и $p_{j''n''}$. В пределе при $u_2 - u_1 \to \infty$ второй член подынтегрального выражения в формуле (4.8) дает при интегрировании нулевой вклад, а первый дает вклад лишь при $(j'', n'') = (j, n)$. Рассуждая так же, как и в разделе 2, получаем

$$\int_0^\infty |\xi_{jn\omega'}|^2 d\omega' = \{\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1\}^{-1}. \tag{4.9}$$

Поэтому

$$(4.5) = \int_0^\infty \Gamma_\omega \omega \{\exp(2\pi\omega\varkappa^{-1}) - 1\}^{-1} d\omega, \tag{4.10}$$

где $\Gamma_\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_{jn}$ — часть волнового пакета с частотой ω, которая поглощается черной дырой. Поток энергии (4.10) в точности отвечает интенсивности теплового излучения, вычисленной в разделе 2. Такой же поток энергии через любую поверхность постоянной координаты r даст и любой перенормированный оператор энергии-импульса, если он соответствует вблизи $\mathscr{I}^+$ оператору



Фиг. 5

Диаграмма Пенроуза для процесса гравитационного коллапса с последующим медленным испарением, а затем и исчезновением черной дыры.
В конце концов остается пустое пространство без сингулярности в начале координат.

в нормальном виде, удовлетворяя к тому же уравнениям сохранения и будучи стационарным в окончательной квазистационарной области. Поэтому он даст положительный поток энергии через горизонт событий наружу или, что то же, отрицательный поток энергии внутрь горизонта событий.

Наличие отрицательного потока энергии приводит к уменьшению площади горизонта событий, так что состояние черной дыры в действительности не будет стационарным. Но пока масса черной дыры велика по сравнению с планковской массой (10^{-5} г), скорость ее эволюции будет очень мала по сравнению с характерным временем, необходимым свету для выхода за шварцшильдовский радиус. Поэтому в довольно хорошем приближении черную дыру можно описывать как последовательность стационарных решений, вычисляя для каждого из них скорость испускания частиц. И лишь когда масса черной дыры дойдет до 10^{-5} г, квазистационарное приближение потеряет силу. С этого момента будет уже невозможно использовать классическую метрику. Однако остающаяся в этой системе полная масса или энергия будет уже очень мала. Таким образом, если черная дыра не эволюционирует в голую сингулярность с отрицательной массой, ей ничего не остается, кроме как полностью исчезнуть. Те барионы и лептоны, из которых образовалось первоначальное коллапсировавшее тело, не могут появиться вновь, так как вся их масса (энергия) покоя уносится тепловым излучением. Очень заманчивой кажется мысль, что, может быть, именно поэтому теперь во Вселенной так мало барионов по сравнению с фотонами. Сначала во Вселенной могли быть одни только барионы, а излучение могло отсутствовать, но бо́льшая часть барионов упала в малые черные дыры, которые затем испарились и отдали обратно массу покоя барионов, но в виде излучения, а не самих барионов.

На фиг. 5 представлена диаграмма Пенроуза для черной дыры, которая полностью испаряется, оставляя пустое пространство. Горизонтальная линия с пометкой «сингулярность»— на самом деле область, где радиус кривизны — порядка планковской единицы длины. Материя, падающая в эту область, в принципе может выйти наружу в другой Вселенной или даже в нашей Вселенной сквозь верхнюю вертикальную линию, что приведет к появлению голой сингулярности с отрицательной массой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Isham C. J.*, Preprint (1973).
2. *Ashtekar A. Geroch R. P.*, Quantum Theory of Gravity, Preprint (1973).
3. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965) (см. данный сборник, стр. 390).
4. *Hawking S. W.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A300**, 187 (1967).
5. *Hawking S. W.*, *Penrose R.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A314**, 529 (1970).
6. *Hawking S. W.*, *Ellis G. F. R.*, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, London, 1973 (имеется перевод: *С. Хокинг*,

Дж. Эллис, Крупномасштабная структура пространства-времени, «Мир», М., 1977).
7. *Hawking S. W.*, в книге: Black Holes, eds. C. M. De Witt, B. S. De Witt, Gordon and Breach, New York, 1973.
8. *Bardeen J. M.*, *Carter B.*, *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **31**, 161 (1973).
9. *Hawking S. W.*, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **152**, 75 (1971).
10. *Carr B. J.*, *Hawking S. W.*, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **168**, 399 (1974).
11. *Hagedorn R.*, Astron. and Astrophys., **5**, 184 (1970).
12. *Hawking S. W.*, Commun. Math. Phys., **25**, 152 (1972).
13. *Carter B.*, в книге: Black Holes, eds. C. M. De Witt, B. S. De Witt, Gordon and Breach, New York, 1973.
14. *Misner C. W.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **17**, 472 (1972).
15. *Press W. M.*, *Teukolsky S. A.*, Nature, **238**, 211 (1972).
16. *Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, **64**, 48 (1973).
17. *Старобинский А. А.*, *Чурилов С. М.*, ЖЭТФ, **65**, 3 (1973).
18. *Bjorken J. D.*, *Drell S. D.*, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw Hill, New York, 1965 (имеется перевод: *Дж. Д. Бьёркен*, *С. Д. Дрелл*, Релятивистская квантовая теория, т. 1, Релятивистская квантовая механика, «Наука», М., 1978).
19. *Beckenstein J. D.*, Phys. Rev., **D7**, 2333 (1973).
20. *Beckenstein J. D.*, Phys. Rev., **D9**.
21. *Penrose R.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 66 (1963).
22. *Sachs R. K.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A270**, 103 (1962).
23. *Eardley D.*, *Sachs R. K.*, Journ. Math. Phys., **14** (1973).
24. *Schmidt B. G.*, Commun. Math. Phys., **36**, 73 (1974).
25. *Bondi H.*, *van der Burg M. G. J.*, *Metzner A. W. K.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A269**, 21 (1962).
26. *Carter B.*, Commun. Math. Phys., **10**, 280 (1968).
27. *Teukolsky S. A.*, Astrophys. Journ., **185**, 635 (1973).
28. *Unruh W.*, Phys. Rev. Lett., **31**, 1265 (1973).
29. *Unruh W.*, Phys. Rev., **D10**, 3194 (1974).
30. *Зельдович Я. Б.*, *Старобинский А. А.*, ЖЭТФ, **61**, 2161 (1971).

VI

ОБОБЩЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

«Как известно, Г. Вейль попытался дополнить общую теорию относительности, введя дальнейшее условие инвариантности, и создал при этом теорию, заслуживающую большого внимания, хотя бы уже в силу смелости и логичности его математической мысли».

(А. Эйнштейн, «Об одном естественном дополнении основ общей теории относительности», 1921 г.) [1])

«Желание свести гравитационное и электромагнитное поля в одно единое по своей сущности поле в последние годы владеет умами теоретиков. Навстречу этим стремлениям идет математическое открытие, сделанное Леви-Чивитой и Вейлем: тензор кривизны Римана, имеющий фундаментальное значение для общей теории относительности, наиболее естественным путем можно получить с помощью закона «параллельного переноса» векторов («аффинная связь»):

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} A^{\alpha}\, dx^{\beta}.$$

Этот закон сводится к формуле

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^{\mu}\, dx^{\nu},$$

если постулировать, что длина вектора при параллельном переносе не меняется; однако этот шаг не является логически необходимым. Впервые это обстоятельство обнаружил Г. Вейль, построивший на нем обобщение римановой геометрии, которое, по его мнению, содержало теорию электромагнитного поля. Вейль придает инвариантный смысл не длине линейного элемента или вектора, а только отношению длин двух линейных элементов или векторов, исходящих из одной точки. Параллельный перенос должен быть таким, чтобы это отношение сохранялось. Основу этой теории можно назвать полуметрической».

(А. Эйнштейн, «К общей теории относительности», 1923 г.) [2])

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М.,1966, стр. 105.

[2]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 134.

Г. ВЕЙЛЬ

ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСТВО*

Согласно Риману [1], геометрия основывается на следующих двух положениях:

1. *Пространство есть трехмерный континуум*, многообразие точек которого всюду допускает представление посредством набора трех координат x_1, x_2, x_3.

2. (*Теорема Пифагора.*) Квадрат ds^2 расстояния между двумя бесконечно близкими точками

$$P = (x_1,\ x_2,\ x_3) \text{ и } P' = (x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ x_3 + dx_3) \qquad (1)$$

есть (в произвольных координатах) квадратичная форма разностей координат dx_i:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (g_{ki} = g_{ik}). \qquad (2)$$

Второе положение кратко выражается так: пространство есть метрический континуум. Вполне в духе современной физики, тре-

* *Weil H.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1918, S. 465.

бующей близкодействия, мы принимаем, что теорема Пифагора строго выполняется лишь для бесконечно малых областей.

Частная теория относительности привела к представлению о времени как о четвертой координате (x_0), выступающей на равных правах с тремя пространственными координатами, и, таким образом, к пониманию арены материальных явлений, т. е. *мира, как четырехмерного метрического континуума*. При этом квадратичная форма (2), задающая метрику мира, не является положительно определенной, как в случае геометрии трехмерного пространства, но обладает индексом инерции 3. Уже Риман высказал мысль о том, что ее следует рассматривать как нечто физически реальное, ибо, например, она проявляет себя в центробежных силах как некий потенциал, оказывающий реальное воздействие на материю, и что в соответствии с этим следует принять гипотезу об обратном воздействии материи на самое себя; ранее же всегда и все геометры и философы придерживались представления, что метрика пространства существует сама по себе независимо от материального содержания, которым заполнено пространство. На этих идеях, для реализации которых у Римана попросту не было еще возможности, в наши дни Эйнштейн (независимо от Римана) основал величественное здание своей общей теории относительности. Согласно Эйнштейну, свойствами метрики мира объясняются также явления *тяготения*, а законы, по которым материя воздействует на метрику, не что иное, как законы гравитации. Коэффициенты g_{ik} в форме (2) представляют собой компоненты гравитационного потенциала. В то время как гравитационный потенциал определяется инвариантной *квадратичной* дифференциальной формой, для *электромагнитных явлений* главную роль играет 4-потенциал, компоненты которого объединяются в инвариантную *линейную* дифференциальную форму $\sum \varphi_i \, dx_i$. При этом оба круга явлений — гравитация и электричество — сосуществуют совершенно изолированно друг от друга.

В свете новых представлений, развитых г-дами Леви-Чивитой [2], Хессенбергом [3] и автором [4, § 14], становится совершенно ясно, что при естественном построении римановой геометрии в основу следует класть бесконечно малый параллельный перенос вектора. Пусть P и P^* — какие-либо две точки, соединенные кривой; тогда вектор, заданный в точке P, можно перенести параллельно самому себе вдоль этой кривой из P в P^*. Правда, такой перенос вектора из P в P^*, вообще говоря, неинтегрируем, т. е. вектор, получаемый в точке P^*, зависит от пути, по которому производился перенос. Интегрируемость имеет место только в евклидовой («безгравитационной») геометрии. Но в охарактеризованной выше римановой геометрии остается еще один, последний нелокальный геометрический элемент — и, насколько я могу видеть, без особых оснований. Причиной тому может быть лишь случайный факт возникновения этой геометрии из геометрии плоского мира. Действительно, квадратичная форма (2) позволяет сравнивать друг с другом длины не только двух векторов, взятых в одной и той же точке, но и векторов в любых двух удаленных друг от от друга точках. *В настоящей же геометрии близкодействия должен быть лишь принцип переноса длины из одной точки в другую, бесконечно к ней близкую.* И тогда оказывается столь же мало оснований предполагать заранее, что задача переноса длины из одной точки в другую, удаленную от нее на конечное расстояние, интегрируема, как и в задаче о переносе направления. Если устранить эту непоследовательность, то мы придем к геометрии, поразительным образом объясняющей (если ее применить к физическому миру) *не только гравитационные, но и электромагнитные явления.* И у тех и у других в возникающей таким образом теории оказывается один и тот же источник, причем, *вообще говоря, гравитацию и электричество даже нельзя произвольно отделять друг от друга.* В этой теории *смысл всех физических величин определяется геометрией мира и, в частности, действие в ней с самого начала выступает как просто число. Эта теория приводит к мировому закону, определенному по существу однозначно, она даже позволяет в некотором смысле объяснить, почему мир четырехмерен.* Я намечу здесь сначала структуру модифицированной римановой геометрии, не касаясь физической подоплеки, а ее физическое приложение обнаружится затем само собой.

В заданной системе координат относительные координаты dx_i точки P', бесконечно близкой к точке P, суть компоненты *бесконечно малого сдвига* $\overrightarrow{PP'}$ [формула (1)]. Переход от одной системы координат к другой осуществляется путем обычных преобразований

$$x_i = x_i(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

связывающих координаты одной и той же точки в первой и второй системах. Тогда компоненты dx_i и dx_i^* одного и того же бесконечно малого сдвига точки P связаны между собой линейными преобразованиями

$$dx_i = \sum_k \alpha_{ik}\, dx_k^*, \tag{3}$$

где α_{ik} — значения производных $\partial x_i/\partial x_k^*$ в точке P. Некий (контравариантный) *вектор* $\mathfrak{x}$ имеет в точке P в качестве компонент по отношению к любой системе координат определенные n чисел, которые при переходе к другой системе координат преобразуются в точности по закону (3), т. е. как компоненты бесконечно малого сдвига. Всю совокупность векторов в точке P я назову *векторным пространством в P.* Оно обладает свойствами: 1) *линейности*, или *аффинности*, т. е. при умножении вектора в P на число и при сложении двух таких векторов всегда снова получается некоторый вектор в P; 2) *метричности*, т. е. каждым двум векторам $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ с компонентами ξ^i и η^i инвариантным образом сопоставляется скалярное произведение

$$\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{y}=\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{x}=\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k,$$

отвечающее симметричной билинейной форме типа (2). Правда, при нашем подходе *эта форма определена лишь с точностью до остающегося произвольным положительного коэффициента пропорциональности*. Если многообразие точек пространства представляется координатами x_i, то метрикой в точке P определяется лишь отношение компонент g_{ik}. И прямой физический смысл имеют лишь отношения компонент g_{ik}. Уравнению

$$\sum_{ik} g_{ik}\,dx_i\,dx_k=0$$

в данной начальной точке P удовлетворяют лишь те бесконечно близкие соседние точки P', в которые приходит испущенный из P световой сигнал. Для аналитического описания нам нужно: 1) выбрать определенную систему координат; 2) определить в каждой точке P произвольный коэффициент пропорциональности, который включается в g_{ik}. Соответственно этому возникающие соотношения должны обладать двойной инвариантностью: 1) они должны быть *инвариантными относительно любых гладких преобразований координат*; 2) они *не должны изменяться при замене* g_{ik} на λg_{ik}, где λ — произвольная гладкая функция точки. Добавление этого второго свойства инвариантности — характерная особенность нашей теории.

Пусть P и P^* — какие-либо две точки и каждому вектору $\mathfrak{x}$ в P таким образом сопоставляется вектор $\mathfrak{x}^*$ в P^*, что при этом всегда $\alpha\mathfrak{x}$ (где α — любое число) переходит в $\alpha\mathfrak{x}^*$, а $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ переходит в $\mathfrak{x}^*+\mathfrak{y}^*$. Пусть вектор 0 в точке P — единственный, которому в P^* соответствует тоже вектор 0, так что тем самым установлено *аффинное*, *или линейное*, *отображение* векторного пространства в P на векторное пространство в P^*. Это отображение оказывается, в частности, отображением *подобия*, когда скалярное произведение отображенных векторов $\mathfrak{x}^*\cdot\mathfrak{y}^*$ в точке P^* пропорционально скалярному произведению $\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ в точке P для всех пар векторов. (При нашем подходе объективный смысл имеет лишь данное понятие отображения *подобия*, прежняя же теория позволяла ввести более узкое понятие *конгруэнтного* отображения.) Что же касается операции *параллельного переноса вектора* из точки P в соседнюю точку P', то она определяется двумя аксиоматическими требованиями.

1. Параллельный перенос векторов из точки P в соседнюю точку P' осуществляет отображение подобия векторного пространства в P на векторное пространство в P'.

2. Если P_1 и P_2 — две точки, соседние к точке P, а бесконечно малый вектор $\overrightarrow{PP_2}$ в точке P при параллельном переносе в точку P_1 переходит в вектор $\overrightarrow{P_1P_{12}}$, тогда как при параллельном переносе в точку P_2 вектор $\overrightarrow{PP_1}$ переходит в $\overrightarrow{P_2P_{21}}$, то точки P_{12} и P_{21} совпадают (коммутативность).

Та часть требования 1, в которой говорится, что при параллельном переносе происходит аффинная «пересадка» векторного пространства из P в P', аналитически выражается следующим образом. Вектор ξ^i в точке $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при переносе переходит в вектор

$$\xi^i + d\xi^i \quad \text{в точке} \quad P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n),$$

компоненты которого линейно зависят от ξ^i:

$$d\xi^i = -\sum_r d\gamma^i{}_r \xi^r. \tag{4}$$

Требование 2 означает, что $d\gamma^i{}_r$ должны быть линейными дифференциальными формами:

$$d\gamma^i{}_r = \sum_s \Gamma^i{}_{rs}\, dx_s,$$

коэффициенты которых обладают свойством

$$\Gamma^i{}_{sr} = \Gamma^i{}_{rs}. \tag{5}$$

Если два вектора ξ^i и η^i в точке P при параллельном переносе в точку P' переходят в векторы $\xi^i + d\xi^i$ и $\eta^i + d\eta^i$, то, согласно требованию 1 относительно подобия, касающемуся аффинности, величина

$$\sum_{ik} (g_{ik} + dg_{ik})(\xi^i + d\xi^i)(\eta^k + d\eta^k)$$

должна быть пропорциональна величине

$$\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\eta^k.$$

Примем, что коэффициент пропорциональности бесконечно мало отличается от единицы и равен $1 + d\varphi$, а операцию опускания индекса определим, как обычно, формулой

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k.$$

Тогда

$$dg_{ik} - (d\gamma_{ki} + d\gamma_{ik}) = g_{ik}\, d\varphi. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $d\varphi$ есть линейная дифференциальная форма:

$$d\varphi = \sum_i \varphi_i \, dx_i. \tag{7}$$

Если она известна, то уравнение (6) или уравнение

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - g_{ik}\varphi_r$$

вместе с условием симметрии (5) дает однозначно величины Г. Итак, *внутренняя связь мер пространства зависит, кроме квадратичной формы* (2) (определенной с точностью до произвольного коэффициента пропорциональности), *также и от линейной формы* (7). Не изменяя систему координат, заменим g_{ik} на λg_{ik}; тогда величины $d\gamma^i{}_k$ не изменятся, но у $d\gamma_{ik}$ появится множитель λ, а dg_{ik} перейдет в $\lambda \, dg_{ik} + g_{ik} \, d\lambda$. Уравнение (6) показывает, что при этом $d\varphi$ перейдет в

$$d\varphi + \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi + d \ln \lambda.$$

Таким образом, в линейной форме $\sum \varphi_i \, dx_i$ не остается неопределенного коэффициента пропорциональности, который можно было бы зафиксировать произвольным выбором масштаба, но соответствующая степень произвола вносится *аддитивным полным дифференциалом*. С точки зрения аналитического описания геометрии формы

$$g_{ik} \, dx_i \, dx_k, \quad \varphi_i \, dx_i \tag{8}$$

эквивалентны формам

$$\lambda g_{ik} \, dx_i \, dx_k, \quad \varphi_i \, dx_i + d \ln \lambda, \tag{9}$$

где λ — произвольная положительная функция точки. Поэтому *инвариантный смысл имеет лишь антисимметричный тензор с компонентами*

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{10}$$

т. е. форма

$$F_{ik} \, dx_i \, \delta x_k = \frac{1}{2} F_{ik} \, \Delta x_{ik},$$

билинейно зависящая от двух произвольных сдвигов dx и δx в точке P, или, лучше, от элемента поверхности, натянутого на эти два сдвига, с компонентами

$$\Delta x_{ik} = dx_i \, \delta x_k - dx_k \, \delta x_i.$$

Прежняя теория, в которой элемент длины, произвольно выбранный в некоторой начальной точке, можно переносить во все точки пространства параллельно самому себе независимо от пути переноса, получается здесь как частный случай, когда компоненты g_{ik} можно определить абсолютно в том смысле, что величины φ_i обращаются в нуль. Тогда компоненты $\Gamma^i{}_{rs}$ становятся не чем иным, как трехиндексными символами Кристоффеля. Инвариантное условие, необходимое и достаточное для того, чтобы реализовался этот случай, сводится к равенству нулю тензора F_{ik}.

Теперь само собой напрашивается истолкование в геометрии мира величины φ_i как *4-потенциала*, а тензора F, следовательно, как *напряженности электромагнитного поля*. Ибо отсутствие электромагнитного поля — необходимое условие того, чтобы имела силу прежняя эйнштейновская теория, из которой вытекают лишь гравитационные явления. Встав на подобную точку зрения, мы увидим, что электрические величины — это величины такого рода, что числа, характеризующие их в определенной системе координат, не зависят от произвольного выбора метрического масштаба. В этой теории нужно вообще заново пересмотреть вопрос о масштабе и размерностях. Ранее называли некоторую величину, например, тензором второго порядка (ранга 2), если только одним значением этой величины, *после того как выбран произвольный масштаб*, в любой системе координат определяется числовая матрица a_{ik}, задающая коэффициенты инвариантной билинейной формы для двух произвольных бесконечно малых сдвигов:

$$a_{ik}\, dx_i\, \delta x_k. \tag{11}$$

Мы же называем величину тензором, если при задании некоторой системы координат и при определенном выборе коэффициента пропорциональности, содержащегося в g_{ik}, компоненты этой величины a_{ik} определяются однозначно, причем так, что при преобразованиях координат форма (11) остается неизменной, а при замене g_{ik} на λg_{ik} коэффициенты a_{ik} переходят в $\lambda^e a_{ik}$. Тогда мы говорим, что этот тензор обладает *весом* e или что он имеет размерность l^{2e} (линейному элементу ds приписывается размерность «длины» l). Абсолютно инвариантные тензоры могут обладать лишь весом 0. К этому типу относится и тензор напряженности с компонентами F_{ik}. Согласно формуле (10), он удовлетворяет первой системе уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}+\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}=0.$$

Определив понятие параллельного переноса, можно без затруднений построить геометрию и тензорное исчисление.

а. *Геодезическая линия.* Пусть дана точка P, а в ней — вектор. Тогда геодезическая линия, исходящая из данной точки в направлении данного вектора, определяется требованием, чтобы вдоль нее вектор сдвигался параллельно самому себе в своем собственном направлении. При соответствующем выборе параметра τ дифференциальное уравнение геодезической линии записывается в виде

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2}+\Gamma^i{}_{rs}\frac{dx_r}{d\tau}\frac{dx_s}{d\tau}=0.$$

(Естественно, что ее здесь нельзя считать линией кратчайшей длины, так как понятие длины кривой не имеет смысла.)

б. *Тензорное исчисление.* Чтобы, например, из ковариантного тензорного поля порядка 1 и веса 0 с компонентами f_i получить путем дифференцирования тензорное поле второго порядка, мы воспользуемся произвольным вектором ξ^i в точке P и построим инвариант $f_i\xi^i$ вместе с его бесконечно малым изменением при переходе из точки P с координатами x_i в соседнюю точку P' с координатами x_i+dx_i, причем вектор ξ параллельно переносится при этом переходе. Соответствующее изменение равно

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\xi^i\,dx_k+f_r\,d\xi^r=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\Gamma^r{}_{ik}f_r\right)\xi^i\,dx_k.$$

Таким образом, величины, объединенные в скобках справа, являются компонентами тензорного поля второго порядка и веса 0, построенного вполне инвариантным образом из поля f.

в. *Кривизна.* Чтобы построить аналог тензора кривизны Римана, обратимся к использованной выше бесконечно малой фигуре вида параллелограмма, образованного точками P, P_1, P_2 и $P_{12}=P_{21}$. Перенося вектор $\mathfrak{x}=(\xi^i)$, взятый в точке P, параллельно самому себе в точку P_1, а оттуда в P_{12} и перенося его в другой раз сначала в P_2, а затем в P_{21}, можно (так как точки P_{12} и P_{21} совпадают) построить разность двух полученных в этой точке векторов, $\Delta\mathfrak{x}$. Компоненты этой разности равны

$$\Delta\xi^i=R^i{}_j\xi^j, \tag{12}$$

где коэффициенты $R^i{}_j$ не зависят от переносимого вектора $\mathfrak{x}$, но зависят линейно от элемента поверхности, которая натянута на сдвиги $\overrightarrow{PP}_1=(dx_i)$ и $\overrightarrow{PP}_2=(\delta x_i)$:

$$R^i{}_j=R^i{}_{jkl}\,dx_k\,\delta x_l=\frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\,\Delta x_{kl}.$$

Компоненты кривизны $R^i{}_{jkl}$, зависящие лишь от точки P, обладают следующими свойствами симметрии:

1) они меняют знак при перестановке последних индексов k и l;

2) если взять для jkl все три их циклические перестановки и сложить соответствующие компоненты кривизны, то получится 0.

Опустив индекс i, мы получим R_{ijkl} — компоненты ковариантного тензора 4-го порядка и веса 1. Не производя расчетов, можно также просто показать, что R инвариантным образом распадается на два слагаемых:

$$R^i{}_{jkl}=P^i{}_{jkl}-\frac{1}{2}\delta^i{}_j F_{kl}, \qquad \delta^i{}_j=\begin{cases}1 \text{ при } i=j,\\ 0 \text{ при } i\neq j,\end{cases} \tag{13}$$

первое из которых, P_{ijkl}, антисимметрично не только по индексам k, l, но и по индексам i, j. Уравнения $F_{ik}=0$ характеризуют наше пространство как такое, в котором отсутствует электромагнитное поле, т. е. задача переноса длины интегрируема. Уравнения же $P^i{}_{jkl}=0$, как это видно из уравнений (13), представляют собой инвариантные условия того, что в нашем пространстве отсутствует гравитационное поле, т. е. интегрируема задача переноса направления. Лишь в евклидовом пространстве нет ни электричества, ни гравитации.

Простейшим инвариантом такого линейного отображения, как (12), которое каждому вектору $\mathfrak{x}$ ставит в соответствие вектор $\Delta\mathfrak{x}$, является «след»

$$\frac{1}{n}R^i{}_i.$$

Согласно уравнениям (13), последний имеет вид

$$-\frac{1}{2}F_{ik}\,dx_i\,\delta x_k,$$

уже встречавшийся нам выше. Простейшим инвариантом тензора типа $-{}^1/{}_2F_{ik}$ является квадрат его модуля

$$L=\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}.$$

Очевидно, что L есть инвариант веса -2, так как вес тензора F равен нулю. Обозначив через g определитель тензора g_{ik}, взятый с обратным знаком, запишем бесконечно малый элемент объема как

$$d\omega=\sqrt{g}\,dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\sqrt{g}\,dx.$$

Тогда, как известно, максвелловская теория будет определяться электрическим действием, равным интегралу от этого простейшего инварианта $\int L\,d\omega$, взятому по произвольной области. При этом если вариации g_{ik} и φ_i произвольны и обращаются в нуль на границах мировой области, то

$$\delta\int L\,d\omega=\int(S^i\,\delta\varphi_i+T^{ik}\,\delta g_{ik})\,d\omega,$$

где

$$S^i=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(\sqrt{g}F^{ik})}{\partial x_k}$$

— левая часть неоднородных уравнений Максвелла (в их правой части стоят компоненты 4-мерной плотности тока), а T^{ik} — тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Так как L — инвариант веса —2, а элемент объема в n-мерной геометрии является инвариантом веса $n/2$, интеграл $\int L\, d\omega$ имеет смысл, лишь если размерность мира равна $n = 4$. Итак, *при нашем толковании возможность максвелловской теории связана с размерностью 4.* В 4-мерном мире электромагнитное действие является просто числом. Что же касается выражения единицы действия в традиционных единицах измерения системы СГС, то о нем можно будет судить тогда, когда на основе нашей теории будет решена физическая задача, поддающаяся экспериментальной проверке, например задача об электроне.

Переходя от геометрии к физике, мы примем по аналогии с теорией Ми [5], что все закономерности природы зиждятся на некотором интегральном инварианте (ср. также [4]) — *действии*

$$\int W\, d\omega = \int \mathfrak{W}\, dx \quad (\mathfrak{W} = W\sqrt{g}),$$

а именно, от *всех возможных 4-мерных пространств реально существующий мир отличается тем, что в любой его области действие принимает экстремальное значение*, если рассматривать вариации потенциалов g_{ik} и φ_i, обращающиеся в нуль на границе области. Четырехмерная плотность действия W должна быть инвариантом веса —2. *Действие при любых условиях является просто числом*; таким образом, наша теория с самого начала учитывает атомистическую структуру мира, которая, согласно современным воззрениям, имеет фундаментальное значение: речь идет о кванте действия. Проще и естественнее всего построить W, приняв

$$W = R^i{}_{jkl} R_i{}^{jkl} = |R|^2. \tag{14}$$

Согласно уравнениям (13),

$$W = |P|^2 + 4L$$

[здесь можно было бы усомниться только в множителе 4, с которым прибавляется второй (электрический) член к первому]. Но еще до того, как конкретизировать действие, из принципа действия можно вывести некоторые общие следствия. А именно, мы покажем следующее. Точно таким же образом, как (согласно исследованиям Гильберта [6], Лоренца [7], Эйнштейна [8], Клейна [9] и автора [10]) *с инвариантностью действия относительно преобразований координат* (включающей 4 произвольные функции) *связаны четыре закона сохранения для материи* (тензора энергии-импульса), *с появившейся здесь новой «масштабной инвариантностью»* [переход от (8) к (9)], включающей пятую произвольную функцию, *связан закон сохранения электричества.* То, каким именно образом этот закон сохранения объединяется с принципом энергии-импульса, представляется мне одним из убедительнейших общих аргументов в поддержку представленной здесь теории — в той мере, в какой вообще можно говорить о подтверждении в сфере чисто спекулятивного.

Примем для произвольной вариации, обращающейся в нуль на границах рассматриваемой мировой области, выражение

$$\delta \int \mathfrak{W}\, dx = \int (\mathfrak{W}^{ik}\, \delta g_{ik} + \mathfrak{w}^i\, \delta\varphi_i)\, dx \quad (\mathfrak{W}^{ik} = \mathfrak{W}^{ki}). \tag{15}$$

Тогда уравнения законов природы принимают вид

$$\mathfrak{W}^{ik} = 0, \qquad \mathfrak{w}^i = 0. \tag{16}$$

Первый можно рассматривать как закон гравитации, а второй — как закон электромагнетизма. Величины $W^i{}_k$ и w^i, которые вводятся соотношениями

$$\mathfrak{W}^i{}_k = \sqrt{g}\, W^i{}_k, \qquad \mathfrak{w}^i = \sqrt{g}\, w^i,$$

представляют собой смешанные и контравариантные компоненты тензоров второго и первого порядков веса —2. В системе уравнений (16) ввиду свойств инвариантности пять уравнений должны быть избыточными. Это выражается следующими 5 инвариантными тождествами, выполняющимися для левых частей уравнений:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \equiv \mathfrak{W}^i{}_i; \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}^i{}_k}{\partial x_i} - \Gamma^s{}_{kr}\mathfrak{W}^r{}_s \equiv \frac{1}{2} F_{ik}\mathfrak{w}^i. \tag{18}$$

Первое тождество следует из масштабной инвариантности. Именно, если взять при переходе от (8) до (9) в качестве $\ln \lambda$ бесконечно малую функцию точки $\delta\varphi$, то получится вариация

$$\delta g_{ik} = g_{ik}\, \delta\varphi, \qquad \delta\varphi_i = \frac{\partial (\delta\rho)}{\partial x_i}.$$

При такой вариации выражение (15) должно давать нуль. Если к тому же еще учесть инвариантность действия относительно преобразований координат, соответствующих бесконечно малой деформации мирового континуума [9, 10], то получатся тождества

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}^i{}_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k}\mathfrak{W}^{rs}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i}\varphi_k - F_{ik}\mathfrak{w}^i\right) \equiv 0,$$

переходящие в (18), если, согласно (17), выразить $\partial\mathfrak{w}^i/\partial x_i$ через $g_{rs}\mathfrak{W}^{rs}$. Итак, одни только законы гравитации дают

$$\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0, \tag{19}$$

а одни только законы электромагнетизма дают

$$\frac{\partial \mathfrak{W}^i{}_k}{\partial x_i} - \Gamma^s{}_{kr}\mathfrak{W}^r{}_s = 0. \tag{20}$$

В теории Максвелла величина $\mathfrak{w}^i$ имеет вид

$$\mathfrak{w}^i \equiv \frac{\partial(\sqrt{g}F^{ik})}{\partial x_k} - \mathfrak{s}^i \quad (\mathfrak{s}^i = \sqrt{g}\, s^i),$$

где через s^i обозначена плотность 4-тока. Первый член здесь тождественно удовлетворяет уравнению (19), откуда следует закон сохранения электричества:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, s^i)}{\partial x_i} = 0.$$

В теории гравитации Эйнштейна величина $\mathfrak{W}^i{}_k$ тоже состоит из двух членов, первый из которых тождественно удовлетворяет уравнению (20), а второй представляет собой смешанные компоненты тензора энергии-импульса $T^i{}_k$, умноженные на $\sqrt{g}$. Таким образом, уравнения (20) приводят к 4 законам сохранения для материи. В нашей теории обнаруживается совершенно аналогичная ситуация, если принять действие в форме (14). Полученные 5 законов сохранения — это «элиминанты» уравнений поля, т. е. они двояким образом вытекают из этих уравнений и тем самым свидетельствуют о наличии пяти избыточных уравнений.

В качестве примера приведем здесь уравнения Максвелла, следующие из лагранжиана (14):

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, F^{ik})}{\partial x_k} = s^i, \tag{21}$$

где ток

$$s_i = \frac{1}{4}\left(R\varphi_i + \frac{\partial R}{\partial x_i}\right).$$

Через R обозначен тот инвариант с весом —1, который получается из $R^i{}_{jkl}$, если его свернуть сначала по i и k, а затем по j и l. Вычисления показывают, что

$$R = R^* - \frac{3}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\, \varphi^i)}{\partial x_i} + \frac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i),$$

где R^* — риманов инвариант кривизны, построенный только из компонент g^{ik}. В статическом случае, когда пространственные компоненты электромагнитного потенциала равны нулю и все величины не зависят от x_0, из уравнений (21) следует

$$R = R^* + \frac{3}{2}\varphi_0\varphi^0 = \text{const}.$$

Правда, и в самом общем случае в мировой области, где $R \neq 0$. можно путем соответствующего выбора произвольной единицы длины получить $R = \text{const} = \pm 1$. Но в случае изменяющихся во времени состояний должны, по-видимому, существовать поверхности $R = 0$, которые, очевидно, будут играть некоторую особую роль. Величину R нельзя использовать в качестве плотности действия (а в эйнштейновской теории гравитации в этой роли выступает R^*), так как вес ее не равен -2. Вследствие этого наша теория дает лишь уравнения Максвелла для электромагнетизма, но не дает уравнений Эйнштейна для гравитации; вместо них получаются дифференциальные уравнения 4-го порядка. Но, и действительно, крайне маловероятно, чтобы уравнения Эйнштейна для гравитационного поля выполнялись строго, и прежде всего потому, что входящая в них гравитационная постоянная совершенно не вписывается в ряд других естественных констант, так что гравитационный радиус заряда и массы электрона оказывается, например, совершенно иного порядка величины, чем радиус самого электрона [11] (они меньше последнего, первый в 10^{20}, а второй — в 10^{40} раз).

В мои цели здесь входило лишь краткое изложение общих оснований данной теории. Естественно, возникает задача вывести из предположений о специальном лагранжиане (14) физические следствия и сравнить их с данными опыта, выяснив, в частности, позволяет ли эта теория сделать заключения о существовании электрона и о специфике еще не объясненных процессов в атоме. Эта задача исключительно сложна в математическом отношении, так как в ней нельзя брать приближенные решения, учитывающие лишь линейные члены. Поскольку внутри электрона пренебрегать членами высших порядков явно недопустимо, линейные уравнения, полученные при таком приближенном подходе, будут давать по существу лишь тривиальное решение. Более обстоятельно я остановлюсь на этих вопросах в другом месте.

Добавление. Г-н Эйнштейн сделал такое замечание по поводу данной работы:

«Если бы лучи света были единственным средством передавать эмпирические данные о метрических соотношениях в окрестностях мировой точки, то интервал ds (равно как и тензор g_{ik}) содержал бы неопределенный множитель. Но такой неопределенности нет, если определять ds путем измерений при помощи (бесконечно малых) твердых тел (линеек) и часов. Тогда временноподобный интервал ds можно прямо измерить при помощи эталонных часов, мировая линия которых включает ds.

Подобное определение элементарного интервала ds стало бы лишь тогда иллюзорным, когда понятия «эталонной линейки» и «эталонных часов» основывались бы на принципиально ложных предпосылках, а это было бы в том случае, если бы длина эталонной линейки (или скорость хода эталонных часов) зависела от их предыстории. Если бы природа была именно такова, то не могли бы существовать химические элементы, спектральные линии которых имели бы определенную частоту, а относительная частота двух (соседних в пространстве) атомов одного и того же вида, вообще говоря, была бы неодинакова. Поскольку это не так, мне представляется, что основная гипотеза данной теории к сожалению неприемлема, хотя ее глубина и смелость должна восхитить любого читателя».

Ответ автора:

Я благодарю г-на Эйнштейна за то, что он дает мне возможность сразу же ответить на выдвинутое им возражение. Я думаю, что оно необоснованно. Согласно частной теории относительности, твердая линейка всегда принимает одно и то же значение своей длины покоя, возвращаясь в состояние покоя в допустимой системе отсчета, а исправные часы при тех же обстоятельствах снова идут с тем же периодом, измеренным в их собственном времени (опыт Майкельсона, эффект Доплера). Но не может быть и речи о том, чтобы часы продолжали измерять собственное время $\int ds$ при сколь угодно резком движении (так же, как если бы в термодинамике сколь угодно быстро и неравномерно разогреваемый газ проходил только через равновесные состояния); да так не происходит, кстати, и в том случае, когда на часы (атом) действует сильное переменное электромагнитное поле. Таким образом, в общей теории относительности можно, самое большее, утверждать, что *покоящиеся в статическом* гравитационном поле часы измеряют *в отсутствие электромагнитного поля* интеграл $\int ds$. О том же, как ведут себя часы при произвольном движении и одновременном действии произвольного электромагнитного и гравитационного поля, можно будет узнать лишь тогда, когда будет разработана динамика, основывающаяся на физических законах. Ввиду такой проблематичности поведения линеек и часов я ограничился в своей книге «Пространство, время и материя» [4, стр. 182 и далее] лишь наблюдением прихода световых сигналов как принципиальным основанием для измерения компонент g_{ik}. Таким путем в действительности можно определять (в выбранных фиксированных единицах измерения) их абсолютные, а не относительные величины, *если справедлива теория Эйнштейна*. К тем же соображениям независимо от меня пришел г-н Кречманн [12].

Согласно изложенной здесь теории, всюду (кроме центральных областей атома) при подходящем выборе координат и неопределенного коэффициента пропорциональности квадратичная форма ds^2 с высокой степенью приближения имеет тот же вид, что и в частной теории относительности, а линейная форма в том же приближении равна нулю. Если электромагнитное поле отсутствует (линейная форма точно равна нулю), то квадратичная форма ds^2 вообще оказывается однозначно определенной требованием, приведенным в скобках (с точностью до *постоянного* коэффициента пропорциональности, который остается произвольным и у Эйнштейна; то же самое справедливо и при наличии только электростатического поля). Правдоподобнее всего гипотеза, что покоящиеся в статическом поле часы измеряют интеграл от нормированного таким образом ds; и в моей, и в эйнштейновской теории еще не решена задача вывести это положение [1]) из динамики, сформулированной в явном виде. Но в любом случае колебательная система определенного устройства, которая длительное время покоится в заданном статическом поле, должна вести себя однозначно определенно (влияние быстропеременной предыстории быстро затухает). Я не думаю, что моя теория противоречит в этом отношении нашему опыту (который в случае атомов подтверждается существованием химических элементов). Нужно учитывать, что математически идеальный процесс переноса вектора, который должен быть положен в основу математического построения геометрии, не имеет никакого отношения к реальному процессу движения часов, ход которых определяется законами природы.

Изложенная мною геометрия, подчеркиваю с математической точки зрения — это настоящая «ближнегеометрия». Было бы удивительно, если бы в природе вместо нее реализовалась некая половинчатая и непоследовательная ближнегеометрия с приклеенным к ней электромагнитным полем. Но, конечно, я со всем своим подходом могу оказаться и на ложном пути. Здесь действительно речь идет о чистой спекуляции и, само собой разумеется, необходимо сравнение с опытом. Для этого нужно вывести следствия из теории, и в таком трудном деле я надеюсь на помощь коллег.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riemann B.*, Mathematische Werke, 2. Auflage, Leipzig, 1892, XIII, S. 272 (см. данный сборник, стр. 18).
2. *Levi-Civita T.*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 42 (1917).
3. *Hessenberg*, Math. Ann., 78 (1917).
4. *Weyl H.*, Raum, Zeit, Materie, Berlin, 1918.
5. *Mie G.*, Ann. d. Phys., 37, 39, 40 (1912—1913).
6. *Hilbert D.*, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1915, Heft 3, S. 395 (см. данный сборник, стр. 133).
7. *Lorentz H. A.*, в книге: Versl. K. Ak. van Wetensch., Amsterdam, 1915—1916.
8. *Einstein A.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1916, S. 1111 (перевод: Эйнштейн А., Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 524.)
9. *Klein F.*, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, 1918.
10. *Weyl H.*, Ann. d. Phys., 54, 121 (1917).
11. *Weyl H.*, Ann. d. Phys., 54, 133 (1917).
12. *Kretschmann E.*, Ann. d. Phys., 53, 575 (1917).

[1]) Экспериментальная проверка которого отчасти еще не проведена (красное смещение спектральных линий вблизи больших масс).

«Со времени установления общей теории относительности теоретики непрерывно работают над тем, чтобы рассмотреть законы гравитации и электричества с общей точки зрения. Вейль и Эддингтон пытались достигнуть этого обобщения геометрии Римана, используя некоторое общее выражение для параллельного переноса вектора. Калуца, напротив, пошел принципиально другим путем[1]*. Он оставил метрику Римана и воспользовался пятимерным континуумом, который он сводил до некоторой степени к четырехмерному континууму при помощи «условия цилиндричности».*

(А. Эйнштейн, «К теории связи гравитации и электричества Калуцы», 1927 г.)[2]

---

[1]) Эйнштейн цитирует работу Т. Калуцы, помещенную в сборнике (стр. 529).

[2]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 190.

Т. КАЛУЦА

К ПРОБЛЕМЕ ЕДИНСТВА ФИЗИКИ*

В общей теории относительности наряду с *тензорным потенциалом гравитации* — фундаментальным метрическим тензором четырехмерного многообразия $g_{\mu\nu}$ — для описания мировых событий должен привлекаться и *электромагнитный 4-потенциал* g_{μ}.

Сохраняющийся при этом *дуализм* гравитации и электромагнетизма не лишает этой теории ее пленяющей красоты, но бросает вызов — преодолеть его, дав полностью *единую картину мира.*

Несколько лет назад Г. Вейль [1] сделал поразительно смелый шаг к решению этой проблемы — одного из великих устремлений человеческого духа. Он еще раз радикально пересмотрел основания геометрии и ввел наряду с тензором $g_{\mu\nu}$ фундаментальный метрический *вектор*, истолковав его как электромагнитный потенциал q_{μ}. Эта полная мировая метрика оказывается у него единым источником всех явлений природы.

Здесь ставится та же цель, но выбран иной путь.

Если отвлечься от трудностей, связанных с разработкой глубокой теории Г. Вейля, то в принципе мыслима еще более полная реализация идеи единства, а именно, чтобы и гравитационное, и электромагнитное поля выводились из одного-единственного универсального тензора. Я и хочу здесь показать, что такое тесное объединение обеих мировых сил в принципе представляется возможным.

* * *

Роторный характер компонент электромагнитной напряженности $F_{\varkappa\lambda}$, а еще более того очевидное формальное соответствие между структурами уравнений гравитации и электромагнетизма [2] прямо-таки принуждают к мысли о том, что величины [1] $^1/_2 F_{\varkappa\lambda} = {}^1/_2 (q_{\varkappa\cdot\lambda} - q_{\lambda\cdot\varkappa})$ — это, может быть, каким-либо образом *«искалеченные» трехиндексные величины* $\left[{i\lambda \atop \varkappa}\right] = {}^1/_2 (g_{i\varkappa\cdot\lambda} + g_{\varkappa\lambda\cdot i} - g_{i\lambda\cdot\varkappa})$. Допустив такую мысль, исследователь почти неизбежно оказывается на пути, который поначалу кажется малообещающим: ведь в четырехмерном мире нет других трехиндексных величин, кроме уже используемых в качестве компонент гравитационной напря-

---

* *Kaluza Th.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1921, S. 966.

[1]) Индекс, перед которым стоит точка, имеет смысл *дифференцирования* по соответствующему мировому параметру.

женности, и указанный взгляд на величины $F_{\varkappa\lambda}$ вряд ли может означать иное, нежели весьма озадачивающее решение призвать на помощь *пятое измерение мира*.

Хотя пока что весь опыт, накопленный физикой, не дает никаких указаний на такой добавочный мировой параметр, наше пространство-время вполне можно рассматривать как *четырехмерную часть* некоего R_5— нужно только, учитывая, что никогда не отмечалось иных изменений характеристик состояния систем, кроме как в пространстве-времени, положить *производные* этих характеристик *по новому параметру равными нулю* или считать их малыми высшего порядка («условие цилиндричности»). Опасение же, что при этом введение пятого измерения будет снова зачеркнуто, неосновательно ввиду связи между мировыми параметрами в трехиндексных величинах.

* * *

Итак, перейдем к некоторому R_5 и перенесем туда предположения теории Эйнштейна. Пусть наряду с обычными параметрами $x^1 \div x^4$ существует также новый, x^0. Обозначив метрический тензор в R_5 через g_{rs} [1]), получим, в силу условия цилиндричности, для *трехиндексных величин* $\left[{ik \atop l}\right]$, обозначаемых здесь через $-\Gamma_{ikl}$, значения

$$\begin{aligned} &2\Gamma_{\varkappa\lambda\mu} = g_{\varkappa\lambda\cdot\mu} - g_{\lambda\mu\cdot\varkappa} - g_{\mu\varkappa\cdot\lambda} \text{ (как и раньше)},\\ &2\Gamma_{0\varkappa\lambda} = g_{0\varkappa\cdot\lambda} - g_{0\lambda\cdot\varkappa},\\ &2\Gamma_{\varkappa\lambda 0} = -(g_{0\varkappa\cdot\lambda} + g_{0\lambda\cdot\varkappa}),\\ &2\Gamma_{00\varkappa} = g_{00\cdot\varkappa},\ 2\Gamma_{0\varkappa 0} = -g_{00\cdot\varkappa},\ 2\Gamma_{000} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Пока что этот результат мало нас воодушевляет: компоненты $\Gamma_{0\varkappa\lambda}$ действительно имеют вид ротора, но 10 величин $\Gamma_{\varkappa\lambda 0}$, которые в предполагаемой трактовке также должны были бы обладать электрической природой, угрожают стать помехой. Пойдем, однако, дальше и положим

$$g_{0\varkappa} = 2\alpha q_\varkappa, \qquad g_{00} = 2\mathfrak{g}, \tag{2}$$

чтобы сохранить пропорциональность между $\Gamma_{0\varkappa\lambda}$ и $F_{\varkappa\lambda}$. Тогда *фундаментальный метрический тензор* пространства R_5 сводится к *тензорному потенциалу гравитации, дополненному 4-потенциалом электромагнитного поля*. Роль «угловой» компоненты $\mathfrak{g}$ пока остается неопределенной. Обозначив суммы $q_{\varkappa\cdot\lambda} + q_{\lambda\cdot\varkappa}$, соответствующие величинам $F_{\varkappa\lambda}$, через $\Sigma_{\varkappa\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\varkappa\lambda} = \alpha F_{\varkappa\lambda}, \qquad \Gamma_{\varkappa\lambda 0} = -\alpha\Sigma_{\varkappa\lambda},\\ \Gamma_{00\varkappa} = -\Gamma_{0\varkappa 0} = \mathfrak{g}_{\cdot\varkappa}. \end{aligned} \tag{3}$$

[1]) Латинские индексы пробегают значения от 0 до 4, а греческие — от 1 до 4.

Тем самым из *электромагнитного поля* $F_{\varkappa\lambda}$, соответствующего ему «побочного» поля $\Sigma_{\varkappa\lambda}$ и *градиентов* [1]) величины $\mathfrak{g}$ построено 35 *новых трехиндексных величин* (5 из которых равны нулю). При этом из общего тождества

$$(\Gamma_{ikl}+\Gamma_{kli}+\Gamma_{lik})_{\cdot m}=\Gamma_{mik\cdot l}+\Gamma_{mkl\cdot i}+\Gamma_{mli\cdot k} \tag{4}$$

с учетом условия цилиндричности следуют известные соотношения

$$F_{\varkappa\lambda\cdot\mu}+F_{\lambda\mu\cdot\varkappa}+F_{\mu\varkappa\cdot\lambda}=0, \qquad \mathfrak{g}_{\cdot\varkappa\lambda}=\mathfrak{g}_{\cdot\lambda\varkappa}. \tag{4a}$$

* * *

Ограничим теперь, как обычно, выбор параметров условием $g = |g_{rs}| = -1$ и предположим (*I приближение*), что компоненты g_{rs} лишь *мало* отличаются от своих «евклидовых» значений $-\delta_{rs}$. Взяв $\Gamma^l_{ik} = -\left\{ {ik \atop l} \right\} = -\Gamma_{ikl}$, найдем представляющие сейчас интерес компоненты второго *четырехиндексного тензора*:

$$\begin{gathered}\{\varkappa\lambda,\ \mu0\}=\alpha F^{\lambda}_{\varkappa\cdot\mu}, \qquad \{\varkappa0,\ 0\lambda\}=-\mathfrak{g}_{\cdot\varkappa\lambda},\\ \{\varkappa\lambda,\ 00\}=\{\varkappa0,\ 00\}=\{00,\ 00\}=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Приятно отметить, что побочное поле из формулы (3) сюда уже не входит — из электрических величин кривизну пространства R_5 определяют *только производные от напряженности*. Если построить теперь свернутый тензор $R_{ik} = \{ir,\ rk\}$, то, в силу сделанных предположений, получим в стандартной записи

$$\begin{aligned}&R_{\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\mu\nu\cdot\rho} \text{ (как и раньше)},\\ &R_{0\mu}=-\alpha(\operatorname{Div}F)_{\mu}\\ &R_{00}=-\square\mathfrak{g}.\end{aligned} \tag{6}$$

Итак, 15 компонент *тензора кривизны* распадаются на левые части следующих уравнений: 1) старых *уравнений гравитации*, 2) *основных уравнений электромагнетизма*, 3) уравнения Пуассона для неопределенного пока поля $\mathfrak{g}$. Мы получили первое подтверждение нашего предположения и поддержку надежды на возможность истолкования гравитации и электричества как проявлений некоторого универсального поля.

* * *

Для *тензора энергии* материи, определяющего правую часть уравнений поля, получим в R_5 в I приближении

$$T_{ik}=T^{ik}=\mu_0 u^i u^k, \tag{7}$$

[1]) В четырехмерном смысле.

где μ_0 — инвариантная плотность массы, $u^r = dx^r/ds$, $ds^2 = g_{lm}\,dx^l\,dx^m$.

Так как (для всех трех видов уравнений поля) $R_{0\mu} = -\varkappa T_{0\mu}$, в уравнения Максвелла, согласно (6), должны входить компоненты *4-тока*

$$I^\mu = \rho_0 v^\mu = \frac{\varkappa}{\alpha} T_{0\mu} = \frac{\varkappa}{\alpha} \mu_0 u^0 u^\mu, \tag{8}$$

где ρ_0 — инвариантная плотность заряда, $v^\rho = dx^\rho/d\sigma$, $d\sigma^2 = g_{\lambda\mu}\,dx^\lambda dx^\mu$. Таким образом, *пространственно-временной тензор энергии* по существу *дополняется плотностью тока*.

Мы будем продолжать свой анализ сначала в предположении, что u^0, u^1, u^2, $u^3 \ll 1$, $u^4 \sim 1$ (II приближение). Наряду с *малостью скорости* это подразумевает наличие у движущегося вещества лишь *очень малого удельного заряда* ρ_0/μ_0, так как, поскольку при этом $d\sigma^2 \sim ds^2$ и $v^\rho \sim u^\rho$, из выражения (8), если положить, забегая вперед [1]), $\alpha = \sqrt{\varkappa/2} = 3{,}06\cdot 10^{-14}$, следует, что

$$\rho_0 = \frac{\varkappa}{\alpha} \mu_0 u^0 = 2\alpha\mu_0 u^0 \ll \mu_0. \tag{8a}$$

Это соотношение указывает прежде всего на то, что в данном случае электрический заряд можно понимать по существу как *пятую компоненту импульса* массы, движущейся «наклонно» к пространствам $x^0 = \mathrm{const}$. Тем самым достигается объединение двух других, прежде разнородных, основных понятий.

Так как, к тому же, во II приближении T_{00}, T_{11}, T_{22}, $T_{33} \sim 0$, то, согласно выражению (7),

$$T = g^{ik} T_{ik} = -T_{44} = -\mu_0, \tag{9}$$

и для уравнений поля I рода получается обычное выражение

$$R_{00} = -R_{44} = \frac{\varkappa}{2} \mu_0. \tag{10}$$

В соответствии с уравнениями (6) «угловой» потенциал $\mathfrak{g}$ сводится *к гравитационному потенциалу с обратным знаком*, тогда как величина $\mathfrak{G} = g_{44}/2$ сохраняет свой прежний смысл.

* * *

Теперь, когда мы столь удовлетворительно распорядились основными величинами уравнений поля, встает вопрос, будут ли уравнения *«геодезического» движения* в R_5

$$\dot{u}^l = \frac{du^l}{ds} = \Gamma^l_{rs} u^r u^s \tag{11}$$

адекватно описывать движение заряженного вещества в гравита-

[1]) В соответствии с уравнениями движения; см. следующий раздел.

ционном и электромагнитном полях. Во II приближении сразу же видно, что это так: в силу взаимозаменяемости величин ds и $d\sigma$ и в соответствии с уравнениями (3)

$$\bar{v}^{\lambda} = \frac{dv^{\lambda}}{d\sigma} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} v^{\rho} v^{\sigma} + 2\alpha F^{\lambda}_{\varkappa} u^0 v^{\varkappa} - g_{\cdot\lambda} u^{02}, \tag{11a}$$

так что вследствие малости члена с u^{0^2} выражение для *плотности пондермоторной силы* имеет вид

$$\pi^{\lambda} = \mu_0 v^{\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma} + F^{\lambda}_{\varkappa} I^{\varkappa}, \tag{12}$$

где принято $\alpha = \sqrt{\varkappa/2}$ [формула (8a)]. Таким образом, полная сила автоматически распадается на гравитационную и электромагнитную части обычного вида.

Наконец, для 0-компоненты уравнения (11)

$$\dot{u}^0 = \alpha \Sigma_{44} = 2\alpha q_{4\cdot 4}, \tag{11б}$$

так что в квазистатическом случае, обусловленном II приближением, величины, стоящие в уравнении $(d/dx^4)(\rho_0/\mu_0) = 2\varkappa q_{4\cdot 4}$, будут малыми высших порядков [1]), чем и обеспечивается, видимо, требуемое постоянство плотности ρ_0.

Таким образом, в нашем приближении *побочное поле будет несущественным* и в уравнениях движения.

* * *

Если II приближение отвечает действительности, то вышеизложенное представляет собой удовлетворительную реализацию основных идей искомой *единой теории*. В ней *единственный тензорный потенциал* дает *универсальное поле*, распадающееся в обычных условиях на *гравитационную* и *электромагнитную части*.

Однако на уровне своих мельчайших кирпичиков материя заряжена, по меньшей мере, совсем не слабо, и можно повторить вслед за Г. Вейлем, что ее «покою в большом» противостоит «отсутствие покоя в малом». При подходе, изложенном выше, это особенно справедливо для нового мирового параметра x^0: электрону или ядру атома водорода соответствует совсем не малая величина ρ_0/μ_0, а вместе с ней и компонента «скорости» u^0! Поэтому в форме II приближения эта теория может в лучшем случае грубо феноменологически *описывать макроскопические явления*, и встает коренной вопрос о ее применимости к упомянутым частицам-кирпичикам.

Если теперь попробовать описать *движение электрона* геодезической пространства R_5, то сразу же возникает серьезная *трудность* [2]), угрожающая опрокинуть наши построения. Говоря

---

[1]) Формула (8а).

[2]) Указанием на излагаемое далее несоответствие я обязан очень ценимому мной интересу г-на Эйнштейна к генезису сделанных выше предположений.

коротко, она состоит в следующем: поскольку для электрона $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7$ (в пересчете на световые секунды), если буквально применить к нему предыдущие рассуждения, то величина u^0 будет столь высокого порядка, что последний член в формуле (11a), вместо того чтобы исчезнуть, будет доминировать и в корне противоречить всем данным опыта, если только все прочее оставить без изменения. Правда, при переходе к большим u^0 неизбежно потребуются некоторые *видоизменения* оценок (например, нельзя будет заменять ds на $d\sigma$), но едва ли представляется возможным развивать далее теорию в старых рамках, без новых гипотез.

Я же (при всей осторожности) вижу выход *в следующем направлении*, которое, если оно ведет к цели, откроет еще более удовлетворительную перспективу. Так как при не слишком высоких скоростях вещества, создающего поле, соотношение $R_{00} \sim -R_{44}$ сохраняется и при произвольных u^0, оба члена гравитационной природы в формуле (11a) оказываются противоположными по знаку, если должным образом определить реальный характер параметра x^0 (пока что бывший для нас совершенно несущественным). Тогда можно, по-видимому, ценой и без того сомнительной *гравитационной постоянной* $\varkappa$ добиться примирения противоречивых порядков величин, что позволит считать гравитацию своего рода разностным эффектом. Такой путь привлекателен тем, что позволяет дать упомянутой постоянной *статистическое толкование*. Однако следствия этой гипотезы пока недостаточно ясны, и нужно еще тщательно учесть другие возможности. Вообще любой гипотезе, претендующей на универсальное значение, угрожает сфинкс современной физики — квантовая теория.

* * *

Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности, громоздящиеся на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них *степени формального единства*,— всего лишь капризная игра обманчивой случайности. Но если удастся показать, что за предполагаемыми взаимосвязями стоит нечто большее, нежели пустой формализм, то это будет новым триумфом *общей теории относительности Эйнштейна*, о логическом *применении которой к случаю пятимерного мира* здесь шла речь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weyl H.*, Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1918, S. 465 (см. перевод в данном сборнике, стр. 513).
2. *Thirring H.*, Phys. Zeitschr., № 19, 204.

Э. КАРТАН

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ И О ПРОСТРАНСТВАХ С КРУЧЕНИЕМ*

Недавно в заметке [1] я показал, как можно определить геометрически в мире Эйнштейна с заданным ds^2 тензор энергии, относящийся к каждому элементу объема такого мира. Из равенства этого тензора нулю вытекают законы тяготения для всей области, где нет вещества (вакуум). В данном мной определении кривизна мира учитывается как некоторый поворот, ассоциированный с любым бесконечно малым замкнутым контуром, причем такой поворот вводится на основе понятия параллельного переноса, введенного Леви-Чивитой.

Точное определение этого понятия довольно трудно дать, не прибегая к аналитической записи, хотя самому Леви-Чивите оно представлялось в геометрической форме. Но мне кажется, что его глубокий смысл можно выявить, обобщив само понятие пространства; вместе с тем это приведет нас к геометрическому представлению материального мира, более богатого физическим содержанием, чем наш мир, по крайней мере как его обычно рассматривают. Мы увидим и истинный смысл основных законов, которым подчиняется тензор энергии (закон симметрии, закон сохранения).

Ограничимся случаем трех измерений (обобщение на случай четырех измерений не вызовет затруднений). Представим себе пространство, обладающее в непосредственной близости от каждой точки всеми свойствами евклидова пространства. Обитатели такого пространства смогут, например, координировать точки, бесконечно близкие к данной точке A, пользуясь прямоугольным трехгранником с вершиной в точке A; но мы предположим, кроме того, что у них есть некий закон, позволяющий им координировать относительно трехгранника с вершиной в A все референционные трехгранники с вершинами в точках A', лежащих вблизи A. Тогда, в частности, для них будет иметь смысл утверждение, что два направления — одно взятое в точке A, а другое в точке A' —

* *Cartan M. E.*, Compt. Rend., **174**, 593 (1922).

параллельны. В конечном счете *такое пространство будет определяться законом взаимной координации (евклидовского типа) двух трехгранников с бесконечно близкими вершинами.*

Описанное выше пространство не определяется вполне заданием ds^2. Действительно, величиной ds^2 определяется только часть операции перехода от трехгранника с вершиной A к трехграннику с вершиной A', а именно сдвиг $\overrightarrow{AA'}$. К сдвигу же, как известно, добавляется еще поворот, который при заданном ds^2 может быть определен произвольно.

В таком случае, если построить бесконечно малый замкнутый контур, исходящий из точки A и возвращающийся в нее, то отличие рассматриваемого пространства от пространства Евклида обнаружится в следующем. Припишем каждой точке M контура референционный трехгранник. Чтобы перейти от трехгранника точки M к трехграннику точки M', нужно осуществить бесконечно малые сдвиг и поворот, компоненты которых относительно подвижного трехгранника с вершиной в M известны. Пусть к тому же эта последовательность бесконечно малых перемещений производится *в евклидовом пространстве*, а значит, относительно начального трехгранника, выбранного произвольным образом. Если точка M неевклидова пространства выйдет из точки A и, описав замкнутый контур, вернется в нее, *она не найдет здесь в евклидовом пространстве первоначального трехгранника.* Чтобы снова его получить, необходимо дополнительное перемещение, компоненты которого вполне определяются по отношению к первоначальному трехграннику. В остальном это дополнительное перемещение не зависит от того, по какому закону каждой точке M контура приписывается свой трехгранник.

Таким образом, со всяким заданным бесконечно малым замкнутым контуром в пространстве ассоциируются сдвиг и поворот, которые тоже являются бесконечно малыми (того же порядка величины, что и площадь контура) и выражают различие между данным пространством и евклидовым пространством. Поворот можно представить вектором с началом в точке A, а сдвиг — векторной парой. Тогда можно также доказать следующий закон сохранения: *векторы и векторные пары, ассоциированные с различными элементами поверхности, ограничивающей любой бесконечно малый элемент объема, находятся во взаимном равновесии.*

Итак, мы пришли к геометрическому представлению непрерывной материальной среды, находящейся в равновесии под действием лишь своих собственных сил упругости, причем на каждый элемент поверхности эти силы действуют не только как просто сила (натяжение или давление), но и как пара сил (крутящий момент).

Вернемся теперь к тому случаю, когда задается только ds^2. Простой расчет показывает, что среди всех законов взаимной референции двух трехгранников с бесконечно близкими вершинами, совместимых с заданным ds^2, *имеется один и только один закон, при котором сдвиг, ассоциированный с произвольным бесконечно малым замкнутым контуром, равен нулю.* Именно этот закон и приводит к понятию параллельного переноса, введенному Леви-Чивитой. Если принять этот закон, то векторная пара, о которой говорилось выше, исчезает, и *в этом и есть причина того, что упругий тензор подчиняется закону симметрии.*

В общем случае, когда сдвиг, ассоциированный с любым бесконечно малым замкнутым контуром, не равен нулю, данное пространство может отличаться от евклидова пространства в двух отношениях: 1) наличием *кривизны* в смысле Римана, проявляющейся как поворот, и 2) наличием *кручения*, проявляющегося как сдвиг.

В пространстве с кривизной и кручением метод подвижного трехгранника позволяет, как и в евклидовом пространстве, построить теорию кривизны линий (а также поверхностей). Прямая линия будет характеризоваться тем свойством, что во всех ее точках (относительная) кривизна равна нулю, т. е. на малых отрезках она сохраняет одно и то же направление. *Но теперь прямая линия не будет обязательно кратчайшим путем из одной точки в другую* — она будет им лишь в пространствах без кручения и, как исключение, — в некоторых пространствах с кручением.

Приведем очень простой пример последнего случая. Представим себе пространство $\mathcal{E}$, каждая точка которого поставлена в соответствие точке евклидова пространства E, причем так, что длины сохраняются. Различие между этими пространствами будет таким: два прямоугольных трехгранника с бесконечно близкими вершинами A и A' в пространстве $\mathcal{E}$ будут параллельными, тогда как соответствующие трехгранники в пространстве E получаются один из другого в результате винтового перемещения с заданным шагом и в заданном направлении (например, в направлении правого винта) около прямолинейной оси, соединяющей их вершины. Тогда прямым линиям в пространстве E соответствуют прямые и в пространстве $\mathcal{E}$; они по-прежнему будут геодезическими. Введенное таким образом пространство допускает 6-параметрическую группу преобразований. Это будет наше обычное пространство, рассматриваемое наблюдателем, все восприятия которого «закручены». В механике это соответствует среде с постоянным давлением и с постоянным крутящим моментом.

В заключение добавлю, что изложенный подход, с точки зрения механики близкий к идеям прекрасных работ Э. и Ф. Коссера́ о принципе действия в евклидовой геометрии, близок и к теории обобщенных пространств Г. Вейля и сам допускает обобщение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cartan É.*, Compt. Rend., **174**, 437 (1922).

П. А. М. ДИРАК

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ*

Фундаментальные постоянные физики, такие, как скорость света c, постоянная Планка h, заряд электрона e и его масса m и т. д., позволяют установить систему абсолютных единиц измерения расстояния, времени, массы и пр. Но этих постоянных больше, чем необходимо для таких целей, и поэтому из них можно построить ряд безразмерных чисел. Вопрос о значении этих чисел вызвал большой интерес в последнее время, и Эддингтон выдвинул теорию, в которой каждое из них можно вывести чисто дедуктивным путем. Его рассуждения не всегда строги, и хотя в случае малых чисел (обратной величины постоянной тонкой структуры hc/e^2 и отношения массы протона к массе электрона) они, видимо, представляются в основном правильными, большие числа — отношение электрических и гравитационных сил, действующих между электроном и протоном, порядка 10^{39}, и отношение массы Вселенной к массе протона, порядка 10^{78},— столь огромны, что заставляют задумываться о каком-то совсем ином объяснении.

Согласно современным космологическим теориям, Вселенная возникла около $2 \cdot 10^9$ лет тому назад, когда все спиральные туманности вырвались из малой области пространства, может быть, из одной точки. Если выразить срок $2 \cdot 10^9$ лет в единицах, определяемых атомными постоянными, например в единицах e^2/mc^3, то мы получим число, близкое к 10^{39}. Это может означать, что указанные выше большие числа следует рассматривать не как константы, а как простые функции времени нашей эпохи, выраженного в атомных единицах. В качестве общего принципа можно принять, что все большие числа порядка 10^{39}, 10^{78} и т. д., встречающиеся в общей физической теории, с точностью до простых числовых множителей равны t, t^2 и т. д., где t — время в современ-

* *Dirac P. A. M.*, Nature, **139**, 323 (1937).

ную эпоху, выраженное в атомных единицах. Упомянутые простые числовые множители должны определяться теоретически, когда будет создана полная теория космологии и атомизма. При этом отпадает необходимость в теории, которая давала бы числа порядка 10^{39}.

Рассмотрим некоторые элементарные следствия нашего общего принципа. Прежде всего, получается, что число протонов и нейтронов во Вселенной должно увеличиваться пропорционально t^2. Современная физика — как теоретическая, так и экспериментальная — не располагает данными о таком увеличении, но она слишком несовершенна, чтобы утверждать, что это увеличение невозможно, поскольку оно так незначительно. Значит, это еще не основание, чтобы отвергнуть нашу теорию. Является ли такой рост общим свойством материи или он происходит только внутри звезд — вопрос будущих изысканий.

Второе следствие нашего принципа состоит в том, что, если принять систему единиц, определяемую атомными постоянными, то гравитационная «постоянная» со временем должна уменьшаться пропорционально t^{-1}. Назовем гравитационной способностью материального тела произведение его массы на гравитационную постоянную. Тогда получится, что гравитационная способность Вселенной (а вероятно, и каждой спиральной туманности) растет пропорционально t. Это до некоторой степени эквивалентно космологии Милна [1], в которой масса постоянна, а гравитационная постоянная растет пропорционально t. Следуя Милну, можно ввести новую временну́ю переменную $\tau = \ln t$ и преобразовать законы механики так, чтобы после перехода к этому новому времени они приняли свой обычный вид.

Чтобы объяснить эту теорию с точки зрения общей теории относительности, нужно предположить, что элемент длины, определяемый в римановой геометрии как $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, не равен элементу длины, выраженному через атомные единицы, а отличается от него неким множителем. (Первый соответствует милнову $d\tau$, а второй — милнову dt.) Такой множитель должен быть скалярной функцией точки, а его градиент должен указывать направление в ней среднего движения материи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Milne E. A.*, Proc. Roy. Soc., A158, 324 (1937).

А. ЭЙНШТЕЙН

АВТОБИОГРАФИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ*

Наша задача состоит в том, чтобы найти уравнения для полного поля. Искомая структура поля должна быть обобщением симметрического тензора. Группа не должна быть более узкой, чем группа непрерывных преобразований координат. Если теперь ввести более сложную структуру, то эта группа уже не будет так жестко определять уравнения, как в случае структуры, характеризуемой симметричным тензором. Поэтому прекраснее всего было бы, если бы удалось снова расширить группу, по аналогии с тем шагом, который привел от специальной теории относительности к общей. Я пробовал, в частности, привлечь сюда группу комплексных преобразований координат. Все такие попытки были безуспешны. Я отказался также и от явного или скрытого увеличения числа измерений пространства. Это направление было намечено Калуцой, и оно еще и сейчас имеет своих сторонников (в своем проективном варианте). Мы ограничиваемся четырехмерным пространством и группой непрерывных вещественных преобразований координат. После многих лет тщетных поисков я считаю логически наиболее удовлетворительным решение, набросок которого дается дальше.

Вместо симметричных g_{ik} ($g_{ik} = g_{ki}$) вводится несимметричный тензор g_{ik}. Эта величина составлена из симметричной части s_{ik} и из антисимметричной части a_{ik}, которая может быть вещественной или чисто мнимой. Мы имеем

$$g_{ik} = s_{ik} + a_{ik}.$$

С точки зрения групповых свойств такое объединение s_{ik} и a_{ik} является искусственным, поскольку каждая из этих величин и в отдельности имеет характер тензора. Однако оказывается, что эти g_{ik} (рассматриваемые как целое) играют в построении новой теории такую же роль, как симметричные g_{ik} в теории поля тяготения. Это обобщение структуры пространства представляется естественным и с точки зрения наших физических познаний, потому что мы знаем, что электромагнитное поле связано с кососимметричным тензором.

*) Autobiographisches (Autobiographical Notes), в книге: Albert Einstein — Philosopher-Scientist, ed. P. A. Schilpp, Evanston (Illinois), 1945, p. 1. (перевод: *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, Т. IV, «Наука», М., 1967, стр. 259—293; публикуется заключительная часть работы, посвященная варианту единой теории поля, стр. 292—293).

Далее, для теории тяготения существенно, что из симметричных g_{ik} можно образовать скалярную плотность $\sqrt{\| g_{ik} \|}$, а также и контравариантный тензор g^{ik}, согласно определению $g_{ik}g^{il} = \delta^l_k$ (δ^l_k — тензор Кронекера). Образованные таким путем величины, а также тензорные плотности допускают совершенно аналогичное определение и для несимметричных g_{ik}.

Далее, в теории тяготения существенно, что для данного симметричного поля g_{ik} можно определить симметричное в нижних значках поле Γ^l_{ik}, геометрический смысл которого состоит в том, что оно определяет параллельный перенос вектора. Аналогично для несимметричных g_{ik} можно определить несимметричные Γ^l_{ik} по формуле

$$g_{ik,l} - g_{sk}\Gamma^s_{il} - g_{is}\Gamma^s_{lk} = 0. \qquad \text{(A)}$$

Это соотношение совпадает с соответствующим соотношением для симметричных g с той только разницей, что здесь, конечно, нужно обращать внимание на положение нижних значков в величинах g и Γ.

Как и в вещественной теории, из Γ можно образовать кривизну R_{iklm} и из нее, путем свертывания, кривизну R_{kl}. Наконец, пользуясь некоторым вариационным принципом с соотношениями (A), можно найти совместные между собой уравнения поля:

$$\mathfrak{g}^{ik}_{s} = 0 \quad \left(\text{где } \mathfrak{g}^{ik} = \frac{1}{2}(g^{ik} - g^{ki})\sqrt{\| g_{ik} \|}\right), \qquad (\mathrm{B}_1)$$

$$\Gamma^s_{\underset{\vee}{is}} = 0 \quad \left(\text{где } \Gamma^s_{is} = \frac{1}{2}(\Gamma^s_{is} - \Gamma^s_{si})\right), \qquad (\mathrm{B}_2)$$

$$R_{\underline{kl}} = 0, \qquad (\mathrm{C}_1)$$

$$R_{\underset{\vee}{kl},m} + R_{\underset{\vee}{lm},k} + R_{\underset{\vee}{mk},l} = 0. \qquad (\mathrm{C}_2)$$

При этом каждое из уравнений (B_1), (B_2) является следствием другого, если выполнено (A). Символ $R_{\underline{kl}}$ означает симметричную, а символ $R_{\underset{\vee}{kl}}$ — антисимметричную часть величины R_{ik}. В случае равенства нулю антисимметричной части g_{ik} эти формулы приводятся к (A) и (C_1). Это будет случай чистого поля тяготения.

Мне кажется, что эти формулы представляют собой наиболее естественное обобщение уравнений тяготения [1]). Проверка их физической пригодности — задача чрезвычайно трудная, потому что здесь приближения ничего не дают. Вопрос в следующем. Какие существуют решения этих уравнений, не имеющие особенностей во всем пространстве?

Этот рассказ достиг своей цели, если он показал читателю, как связаны между собой усилия целой жизни и почему они привели к ожиданиям определенного рода.

[1]) Если только вообще можно идти по пути исчерпывающего представления физической реальности на основе понятия континуума, то, по моему мнению, весьма вероятно, что предложенная здесь теория подтвердится.

Ч. МИЗНЕР, ДЖ. УИЛЕР

КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА КАК ГЕОМЕТРИЯ*

Гравитация, электромагнетизм, неквантованные заряд и масса как свойства искривленного пустого пространства[1]

Если классическую физику рассматривать как совокупность теорий гравитации, свободного от источников электромагнитного поля, неквантованного заряда и неквантованной массы, связанной с концентрацией энергии электромагнитного поля (геонов), то классическая физика может быть описана с помощью искривленного пустого пространства и ничего больше. При этом существующая теория никак не меняется. Электромагнитное поле задается «максвелловским квадратным корнем» свернутого тензора кривизны Риччи и Эйнштейна. Как показал Райнич тридцать лет назад, уравнения Максвелла сводятся тогда к простому утверждению о связи кривизны Риччи со скоростью ее изменения. В противоположность другим единым теориям поля в этом случае обычные теории Максвелла и Эйнштейна приводят к «*исконно* единой теории поля». Детально рассматривается это чисто геометрическое описание электромагнетизма. Заряд получает естественную интерпретацию с помощью электромагнитных полей без источников, которые 1) всюду подчиняются уравнениям Максвелла для пустого пространства, но 2) загнаны в «ручки» пространства с многосвязной топологией. В таком пространстве электромагнетизм может быть подробно описан с помощью существующих и весьма полно разработанных разделов математики — топологии и теории гармонических векторных полей. Элементарные частицы и «реальные массы» полностью исключены из рассмотрения как относящиеся к области квантовой физики.

«Я передаю, но не творю;
я искренне уважаю древность».

Конфуций

I. ВВЕДЕНИЕ

Является ли пространственно-временной континуум лишь ареной для явлений или им исчерпывается все? Классическая физика как совокупность теорий гравитации, электромагнетизма, неквантованных заряда и массы.

*) *Misner C.*, *Wheeler J.*, Ann. of Phys., **2**, № 6, 525 (1957).

[1]) Настоящая работа представляет собой шестую часть исследования, посвященного критике классической теории поля. Пятая часть опубликована в журнале: Physical Review, **97**, 51 (1956).

Все эти четыре понятия описываются с помощью пустого искривленного пространства без каких-либо добавлений к принятой теории. Электромагнитное поле как «максвелловский квадратный корень» из свернутой кривизны. Неквантованный заряд описан с помощью максвелловского поля без источников в многосвязном пространстве. Неквантованная масса сопоставляется энергии электромагнитного поля, удерживаемого как одно целое его собственным гравитационным притяжением. История геометрической трактовки физики. Резюме статьи.

Таблица 1

РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ФИЗИКОЙ В СВЕТЕ НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЫ [1])

<table>
<tr><th>Разделы классической физики в определении настоящей работы</th><th>Описание с точки зрения геометрии пустого искривленного пространства</th><th>Описание с точки зрения квантовой физики, не рассматриваемой в данной работе</th></tr>
<tr><td>Гравитация</td><td>Проявляется в искривлении геодезических линий в римановом пространстве</td><td rowspan="4">Гравитоны; фотоны; спин; нейтрино; квантование заряда; квантование массы; электроны, мезоны и другие частицы; характерные поля с ненулевой массой покоя, по-видимому, связанные с некоторыми из этих частиц; процессы взаимопревращений частиц, а также все явления, при которых квантовые флуктуации метрики существеннее, чем любые статические гравитационные поля</td></tr>
<tr><td>Электромагнетизм</td><td>Определяется кривизной и быстротой ее изменения в том же самом римановом пространстве (фиг. 2)</td></tr>
<tr><td>Неквантованный заряд</td><td>Проявление силовых линий, заключенных в «ручку», образованную многосвязной топологии (фиг. 3)</td></tr>
<tr><td>Неквантованная масса</td><td>Геоны: метастабильное объединение энергии электромагнитных или гравитационных волн, сдерживаемое воедино своим собственным гравитационным притяжением</td></tr>
<tr><td colspan="2">Величинами $G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см^3/г·с^2 и c не определяются какие-либо характерные длина, масса или время. Напряженность электромагнитного поля [в гауссах, электростатических вольтах на 1 см или единицах (г/см·с^2)$^{1/2}$] преобразуется в чисто геометрические величины $f_{\mu\nu}$ (с размерностью см$^{-1}$) при умножении на $G^{1/2}/c^2 = 1/3,49 \cdot 10^{24}$ Гс·см.</td><td>Величинами G, c и $\hbar$ определяются характерные единицы, введенные впервые Планком: $L^* = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1,63 \cdot 10^{-33}$ см; $T^* = L^*/c$ и $M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2,18 \cdot 10^{-5}$ г.</td></tr>
</table>

[1]) Неквантованные классические заряд и масса, упоминаемые в данной таблице, не имеют *непосредственного* отношения ни к каким элементарным массам и зарядам, известным из области квантовой физики.

Имеются две прямо противоположные точки зрения на сущность физики:

1) Пространственно-временной континуум служит лишь *ареной* проявления полей и частиц. Эти последние сущности чужды геометрии. Их следует добавить к геометрии для того, чтобы вообще можно было говорить о какой-либо физике.

2) В мире нет ничего, кроме пустого искривленного пространства. Материя, заряд, электромагнетизм и другие поля являются лишь проявлением искривления пространства. *Физика есть геометрия.*

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы понять, в какой степени классическую физику можно рассматривать как геометрию. Здесь не будет идти речь о замечательном результате [1]) квантования этой чисто классической «геометродинамики» (табл. 1).

Описывая классическую физику как геометрию (в смысле табл. 1), мы не изобретаем новых идей. Мы опираемся на электродинамику Максвелла 1864 г. для пустого пространства, на его формулировку тензора энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля и на эйнштейновское описание гравитационного поля (1916 г.) с помощью искривленного пространства. Ограничиваясь классическими понятиями (табл. 1), мы берем в качестве источников метрического поля $g_{\mu\nu}$ *исключительно* электромагнитное поле $F_{\alpha\beta} = (c^2/G^{1/2})\, f_{\alpha\beta}$ и притом такое электромагнитное поле, которое само *не имеет никаких источников* [2]):

$$(3!)^{-1}[\alpha\beta\gamma\delta]\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}=0 \quad \text{(одна группа уравнений Максвелла)}, \qquad (1)$$

$$(-g)^{-1/2}\,\frac{\partial}{\partial x^\beta}(-g)^{1/2}\,f^{\alpha\beta}=0 \quad \text{(другая их группа)}, \qquad (2)$$

$$\text{“}\Box g_{\alpha\beta}\text{”} \equiv R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}R=2f_{\alpha\delta}f_\beta^\delta-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,(f_{\sigma\tau}f^{\sigma\tau})$$

(кривизна метрики при наличии максвелловской плотности энергии-импульса-натяжений). (3)

---

[1]) Частичное обсуждение некоторых аспектов этой проблемы см. в работах Мизнера [1] и Уилера [2].

[2]) Мы используем следующие обычные обозначения: греческие индексы относятся к 4-мерному пространству, а латинские — к 3-мерному. Четвертая координата $x^0 (= T = ct$ — «ковремя» в плоском пространстве) во избежание недоразумений берется с индексом 0, так как в специальной теории относительности x^4 означает ict. Собственный интервал длины ds, или собственный интервал ковремени $d\tau$, между двумя соседними событиями определяется как

$$(ds)^2=-(d\tau)^2=g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta.$$

В плоском пространстве и в декартовых координатах метрический тензор имеет диагональный вид и его диагональные элементы равны —1, 1, 1, 1.

Эти уравнения описывают электромагнетизм и гравитацию как самосогласованную, но замкнутую динамическую систему.

Решим уравнения (3) для приведенного электромагнитного поля $f_{\sigma\tau}$, выразив его через свернутый тензор кривизны $R_{\alpha\beta}$. Подставим полученные выражения в уравнения Максвелла. Тогда содержание уравнений Максвелла — Эйнштейна выразится *чисто*

В этой статье часто используются пространственно-подобные гиперповерхности, на которых удобнее вводить положительно определенную метрику, к чему и приводит настоящий ее выбор (см. также монографии Паули, Ландау и Лифшица, Яуха и Рорлиха). Детерминант $|g_{\alpha\beta}|$ метрики в 4-пространстве обозначается через g, а детерминант $|g_{ik}|$ метрики на пространственно-подобной гиперповерхности — через ${}^3g$. Среди других важных величин следует упомянуть : коэффициенты связности

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\right);$$

имеющий двадцать различных компонент тензор кривизны Римана

$$R_{\nu}{}^{\mu}{}_{\sigma\tau}=\frac{\partial\Gamma_{\nu\tau}{}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}-\frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\mu}}{\partial x^{\tau}}+\Gamma_{\sigma\eta}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\tau}{}^{\eta}-\Gamma_{\tau\eta}{}^{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}{}^{\eta};$$

симметричный тензор Риччи, или свернутый тензор Римана,

$$R_{\mu\sigma}=R_{\mu}{}^{\mu}{}_{\alpha\delta};$$

инвариант кривизны $R=R^{\alpha}_{\alpha}$ (скалярную кривизну); обобщение оператора Даламбера для гравитационных потенциалов

$$"\Box g_{\mu\nu}"=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

и, наконец, электромагнитные потенциалы A_{α}, связанные с тензором электромагнитного поля соотношением

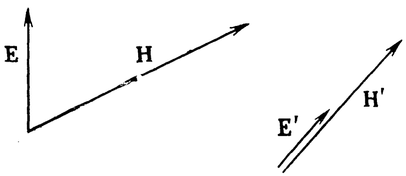
$$E_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

Символ преобразования дуальности, который часто пишется в виде $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, не является тензором и обозначается здесь через $[\alpha\beta\gamma\delta]$. Он меняет знак при перестановке любых двух индексов, причем его компонента $[0123]$ равна единице. Тензор $(*F)_{\mu\nu}$, дуальный антисимметричному тензору $F_{\alpha\beta}$, определен соотношением

$$(*F)_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\ (-g)^{1/2}\,[\mu\nu\sigma\tau]\,g^{\sigma\alpha}g^{\tau\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Геометризованным напряженностям электромагнитного поля $f_{\alpha\beta}=(G^{1/2}/c^2)\times$ $\times\ F_{\alpha\beta}$ сопоставляются геометризованные электромагнитные потенциалы $a_{\alpha}=(G^{1/2}/c^2)\,A_{\alpha}$, являющиеся безразмерными. В плоском пространстве и в декартовых координатах:

$dx^1=dx_1$ — сдвиг в направлении оси x,
$dx^0=-dx_0$ — интервал ковремени,
$A^1=A_1$ — x-компонента обычного векторного потенциала,
$A^0=-A_0$ — обычный скалярный потенциал V (в единицах СГСЭ),
$F_{23}=-F_{32}$ — x-компонента магнитного поля,
$F_{10}=-F_{01}$ — x-компонента электрического поля.



Фиг. 1

Упрощение рассмотрения тензора энергии-импульса-натяжений при переходе к локально лоренцевой системе отсчета, в которой векторы E и H параллельны (см. примечание 1 на стр. 52 кн. Дж. Уилера «Гравитация, нейтрино и Вселенная»).

Слева — векторы напряженности электрического и магнитного полей в исходной системе отсчета. Читателю предлагается вычислить поток энергии $c\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]/4\pi$, плотность энергии $(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)/8\pi$ и их отношение — скорость $\mathbf{v}$. *Справа* — конфигурация полей в системе координат, движущейся с этой скоростью. Поток энергии должен обращаться в нуль. Поэтому $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ будут параллельны. Назовем их общее направление осью x'. Вдоль этой оси существует максвелловское натяжение $(\mathbf{E}'^2+\mathbf{H}'^2)$, а вдоль двух перпендикулярных ей осей y' и z' — столь же сильное максвелловское давление. Поэтому тензор энергии-импульса-натяжений имеет вид

$$\frac{F'^2}{8\pi}\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

где F'^2 — сокращенная запись инварианта

$$\mathbf{F}'^2=\mathbf{E}'^2+\mathbf{H}'^2=[(\mathbf{E}'^2-\mathbf{H}'^2)^2+4\,(\mathbf{E}'\cdot\mathbf{H}')^2]^{1/2}=$$
$$=[(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+4\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})^2]^{1/2}=[(\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2)^2-4\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})^2]^{1/2}$$

Этот тензор обладает двумя важными свойствами: 1) его след равен нулю и 2) квадрат его пропорционален единичной матрице. Оба свойства не зависят от выбора координатной системы. Они выполняются независимо от того, является ли тензор Максвелла диагональным или нет.

Рассмотрим теперь, наоборот, вещественный симметричный тензор, обладающий свойствами (1) и (2). Можно найти координатную систему с выделенным направлением x', в которой этот тензор приводится к указанной выше диагональной форме. В частности, сразу же можно найти инвариантную величину напряженности поля

$$F'=\left[\frac{(8\pi\cdot\text{Тензор Максвелла})^2}{\text{Единичная матрица}}\right]^{1/4}.$$

Затем следует выбрать произвольный угол α и *определить* векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$, направленные вдоль выбранной оси x' и обладающие абсолютной величиной

$$E'=F'\sin\alpha,\quad H'=F'\cos\alpha.$$

Векторы $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ определены однозначно с точностью до единственного произвольного параметра α. Преобразуем определенное таким образом электромагнитное поле к исходной системе отсчета. Для этого поля максвелловский подход к тензору натяжений приводит к симметричному выражению, с которого мы начали это рассуждение.

Эти рассуждения теряют силу, когда электромагнитное поле является нулевым, когда вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен $\mathbf{H}$ и по абсолютной величине равен $\mathbf{H}$; однако утверждение в тексте все же остается справедливым.

геометрически. Такая программа была реализована Райничем в его важной работе [3] [1]), которая оставалась долгое время незамеченной. Результат этот прост.

[1]) Даже в вышедшей позже книге Райнича [4] эта работа не учтена, прежде всего ввиду его подхода к классической физике, отличного от исследуемого в настоящей статье. Мы занялись проблемой выражения уравнений (1) — (3) в рамках «исконно единой теории», и один из нас (Ч. Мизнер)

1) Симметричный тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ может быть определен, согласно уравнению (3), как «максвелловский квадрат» антисимметричного тензора $f_{\sigma\tau}$ в том и только в том случае, если, во-первых, след этого тензора (фиг. 1) равен нулю и, во-вторых, квадрат его пропорционален единичной матрице:

$$R \equiv R_{\alpha}^{\alpha} = 0, \tag{4}$$

$$R_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \left(\frac{R_{\sigma\tau} R^{\sigma\tau}}{4} \right). \tag{5}$$

Поэтому мы требуем, чтобы тензор Риччи удовлетворял этим условиям.

2) В этом случае свернутым тензором кривизны с точностью до некоторого произвольного угла α однозначно определяется локальное значение приведенного электромагнитного тензора напряженности $f_{\sigma\tau}$. Символически эту связь можно представить в форме [1])

$$f_{\sigma\tau} = (R_{\text{максв. корень}})_{\sigma\tau} \cos \alpha + (*R_{\text{максв. корень}})_{\sigma\tau} \sin \alpha. \tag{6}$$

3) В уравнения Максвелла подставляется напряженность электромагнитного поля, выраженная через кривизну Риччи. С этого момента законы электродинамики приобретают чисто геометрический характер. Во-первых, с помощью производной тензора Риччи мы строим вектор α_{τ}, *определяемый* соотношением

$$\alpha_{\tau} = (-g)^{1/2} \, [\tau\lambda\mu\nu] \, R^{\lambda\beta;\,\mu} \frac{R_{\beta}^{\nu}}{R_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta}}. \tag{7}$$

(В случае нулевого поля, когда $R_{\gamma\delta}R^{\gamma\delta}$ обращается в нуль, необходим особый подход.) Во-вторых, мы требуем, чтобы был равен нулю ротор этого вектора:

$$\alpha_{\tau;\,\eta} - \alpha_{\eta;\,\tau} = \alpha_{\tau,\,\eta} - \alpha_{\eta,\,\tau} = 0. \tag{8}$$

4) *Дифференциальное уравнение* (8) *в совокупности с алгебраическими уравнениями* (4) *и* (5) *содержит во вполне геометрической форме как всю электродинамику Максвелла в искривленном пространстве без источников, так и законы Эйнштейна искривления пространства этим полем.* Уравнения (4), (5) и (8) составляют то, что мы называем «*исконно* единой теорией». Электрическое

независимо пришел к результатам Райнича, еще не зная о его ценном исследовании. Возможность построения такой «исконно единой теории» была нам впервые подсказана д-ром X. Эвереттом.

[1]) Мы выражаем нашу признательность проф-ру В. Баргману, который два года назад обратил наше внимание на уравнения (5) и (6), заметив, что их содержание было независимо обнаружено различными исследователями, и выразил его сущность в изложенной выше исключительно простой форме. Первоначальное доказательство было дано самим Райничем [3]. Этот результат неявно фигурирует в теореме V в работе Синга [5] (см. также книгу Синга [6], статью Боннора [7] и диссертацию Л. Марио́ [8], за присылку которой мы выражаем Л. Марио́ признательность).

и магнитное поля не являются стимулами для *изобретения* единой теории поля или введения того или иного нового типа геометрии. «*Исконно* единая теория поля» Максвелла, Эйнштейна и Райнича, излагаемая в настоящей работе, описывает электрическое и магнитное поля скоростью изменения кривизны чисто римановой геометрии и ничем более.

Сущность этого объединения может быть следующим образом выражена математически: уравнения Максвелла, как и уравнения Эйнштейна, являются уравнениями 2-го порядка; две системы уравнений могут быть объединены в одну систему уравнений (8) 4-го порядка. С физической точки зрения это означает, что электромагнитное поле оставляет *отпечаток* [1]) на метрике и этот отпечаток настолько характерен (фиг. 2), что по нему можно прочесть все необходимые сведения об электромагнитном поле.

В случае, когда задано чисто метрическое поле, удовлетворяющее уравнениям (4), (5) и (8) исконно единой теории поля, электромагнитное поле можно найти следующим образом. Во-первых, вычислим всюду вектор электромагнитного поля α_μ, согласно (7). Во-вторых, вычислим, исходя из некоторой точки 0, интеграл

$$\alpha(x) = \int_0^x \alpha_\mu \, dx^\mu + \alpha_0. \tag{9}$$

Так как ротор величины α_μ равен нулю, этот интеграл не зависит от пути, поскольку различные пути могут быть переведены друг в друга непрерывным образом. (Для многосвязного пространства необходимо новое рассмотрение.) Поэтому мы имеем безразмерное число — угол α, определенный как функция точки с точностью до аддитивной *постоянной* α_0. Наконец, подставляем этот угол в соотношение (6) и находим электрическое и магнитное поле в любой точке пространства.

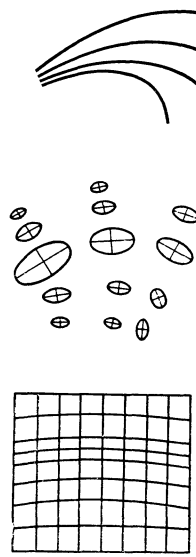
Мы видим, что давно уже сформулированная теория оказывается хорошо приспособленной для описания гравитации и электромагнетизма с помощью пустого искривленного пространства. Как же обстоит дело с зарядом?

Эйнштейн подчеркивал, что уравнения электромагнетизма и общей теории относительности носят чисто локальный характер. Они связывают условия в одной точке с условиями в другой, бесконечно близкой к ней точке. Они ничего не говорят о топологии пространства в целом. Эйнштейн [9] руководствовался принципом Маха при рассмотрении пространства, топологически не эквивалентного евклидову,— сферического или почти сферического мира. Однако Эйнштейн чувствовал себя в долгу перед мыслителем, которому принадлежали еще более далеко идущие идеи. Риман [2]) в своей знаменитой вступительной лекции рас-

[1]) Этим выражением мы обязаны проф-ру П. Бергману.

[2]) В вводной части своей лекции [10] Риман заявил, что «те свойства, которые выделяют пространство из других мыслимых трехмерных величин, могут быть почерпнуты не иначе, как из опыта» (цитировано по статье Клиффорда в работе [11]). (См. данный сборник, стр. 18.— *Прим. ред.*)

смотрел связь между физикой и кривизной пространства — связь, которая должна чувствоваться не только на очень больших расстояниях, но также и на очень малых расстояниях: «...мера кривизны может обладать тогда в каждой точке любым значением



Фиг. 2

Схематическое представление связи между электромагнитным полем и геометрией.

Вверху изображены силовые линии. *Посередине* — тензор натяжений Максвелла, соответствующий этим силовым линиям. Этот тензор натяжений служит источником гравитационного поля и, согласно Эйнштейну, с точностью до постоянного множителя равен свернутому тензору кривизны пространственно-временного континуума. *Внизу* — влияние этой кривизны на метрику 4-пространства. Иначе говоря, электромагнитное поле накладывает свой отпечаток на пространство. Более того, этот отпечаток на метрике так своеобразен и характерен, что может служить для обратной операции восстановления всех необходимых сведений об электромагнитном поле. Отсюда следует чисто геометрическое описание электромагнетизма.

в трех направлениях при том лишь условии, чтобы полная кривизна любой измеримой части пространства не отличалась заметно от нуля; ...». Умирая двадцатью годами позднее от туберкулеза и пытаясь дать единое объяснение гравитации и электромагнетизму, Риман сообщил Бетти свою систему рассмотрения топологии многосвязных пространств [1]). Каков же характер электро-

---

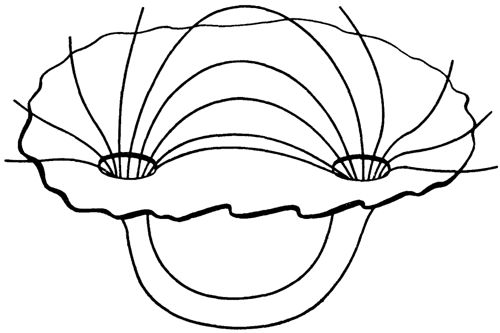
[1]) Вейль [12] подчеркивает, что уравнения поля никак не могут служить основой для исключения ни многосвязных, ни неориентируемых пространств,

динамики в отсутствие зарядов в пространстве, обладающем такой многосвязной топологией?

Можно развить полную классификацию всюду регулярных начальных условий для уравнений Максвелла в замкнутом пространстве. Этот анализ *приводит* к необходимости рассмотреть также ситуации — подобные описанной одним из нас [14] (фиг. 3), — когда имеется отличный от нуля суммарный поток силовых линий через ручку в многосвязном пространстве [термин «ручка» употребляют топологи; для физиков в этом случае был бы нагляднее более яркий термин «кротовая нора» (wormhole)]. Поток силовых линий, исходящий из горловины небольшой ручки, покажется наблюдателю, располагающему приборами с малой разрешающей силой, порожденным элементарным электрическим зарядом. Но здесь нет какой-либо точки, куда можно было бы указать: «Вот здесь локализован некоторый заряд [1])». Силовые линии нигде не кончаются. Этот факт нулевой дивергенции ни в какой мере не препятствует изменениям напряженности поля. Силовые линии, не захваченные в ручки, могут непрерывно сжиматься и исчезнуть, как и в знакомых примерах в электродинамике. Однако заключенные в ручки силовые линии не могут уменьшаться в числе. Поток из горловины ручки не может измениться со временем, как бы сильны ни были возмущения электромагнитного поля, как бы резко ни менялась метрика и как бы стремительно ни удалялись или сближались соответствующие ручки, до тех пор пока они не сольются и не изменится топология. И уравнения Максвелла, и эквивалентная

подобных бутылке Клейна. Он отмечает, «что более внимательное исследование поверхности, возможно, обнаружит у участка, рассматривавшегося ранее элементарным, наличие в действительности мельчайших выступающих из него «ручек», изменяющих характер связности этого участка, и что микроскоп с бо́льшим увеличением открыл бы и новые топологические усложнения этого типа ad infinitum. Точка зрения Римана допускает также и для реального пространства существование топологических условий, полностью отличных от условий, реализуемых в евклидовом пространстве. Я полагаю, что философски плодотворный подход к проблеме пространства возможен лишь с позиций более свободных и общих геометрических представлений, возникших в ходе развития математики в течение последнего столетия, и без предвзятого мнения в отношении воображаемых возможностей, обнаруженных при этом развитии». Эйнштейн и Розен [13] предложили в 1935 г. рассматривать обычное пространство связанным со своим зеркальным двойником посредством коротких трубок. Такая топология значительно более специальна, чем рассмотренная здесь или в следующей статье [2]. Эйнштейн и Розен вопреки эксперименту приписали также электромагнитному полю *отрицательно*-определенную плотность энергии. Мы узнали, что проф. Синг также отметил на одной из лекций в Дублине в 1947 г. возможность существования многосвязного пространства.

[1]) В 1895 г. известный физик Генри А. Роуланд сказал: «...более не существует электричества, так как слово «электричество», как оно использовалось до сего времени, означает, что подразумевается некоторая субстанция, а ведь нет ничего определеннее того факта, что электричество не есть субстанция». (Цитировано по Дарроу [15].) Его слова как раз кстати в нашем случае!



Фиг. 3

Символическое представление неквантованного заряда в классической теории.

Для наглядности вместо трех пространственных измерений даны два. Вместе с тем двумерное искривленное и многосвязное пространство изображено включенным в трехмерное евклидово пространство. Выходящее за пределы поверхности третье измерение не имеет физического смысла. Конечно, топология и геометрия 2-пространства наилучшим образом формулируется замкнутым образом, без такого вложения этого многообразия в пространство более высокого числа измерений.

Это 2-пространство многосвязно, но не обладает никакими особенностями. Воображаемый муравей, ползая по такой поверхности и проникнув в туннель (или ручку), обнаружил бы там то же самое двумерное пространство, которое встречалось ему во всех других местах. Электрические силовые линии, сходящиеся у правого входа в туннель, продолжают удовлетворять в каждой точке уравнению Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Поле нигде не имеет особенностей, а силовые линии продолжают углубляться в туннель. Затем они выходят из левого его отверстия. Вне туннеля ход силовых линий воспроизводит картину поля, создаваемого равными друг другу положительным и отрицательным зарядами.

Наблюдатель, не вооруженный микроскопом с достаточным увеличением, считает очевидным существование двух точечных зарядов. Он может даже окружить правый заряд границей, определить поток поля через нее, неправомерно применить теорему Гаусса и «доказать», что в ограниченной таким образом области содержится заряд. Он не заметит, что неявно использовал неправильные предположения о топологии пространства. Он не узнает, что его «граница» не ограничивает какую-либо область внутри нее. Он будет считать, что либо уравнения Максвелла теряют смысл вблизи заряда, либо существует некоторое чудесное вещество, на котором заканчиваются силовые линии и которому он даст название «электричество». Но более внимательное рассмотрение обнаружит, что силовые линии не имеют конца и что уравнения Максвелла справедливы в свободном от зарядов пространстве. Нельзя указать места, где расположен заряд. Такова чисто топологическая модель неквантованного электрического заряда, принятая в настоящей работе. Этот классический заряд не имеет *прямого* отношения к квантованному электрическому заряду. На таком классическом уровне имеет место полная свобода выбора величины заряда и нет никакого стандарта, касающегося связи одного заряда с другим. Это положение должно быть полностью изменено в любой собственно *квантовой* теории электричества.

Расстояние вдоль ручки от одной ее горловины до другой вовсе не должно быть каким-либо образом связано с расстоянием в открытом пространстве между этими двумя горловинами. Это расстояние может оказаться таким же коротким, как радиус самой ручки, даже если горловины очень удалены друг от друга во внешнем пространстве, как можно видеть, сгибая верхнее пространство вплоть до совпадения этих двух горловин. (Диаграмма взята из работы [14].)

им физическая картина силовых линий Фарадея плюс представление о многосвязном пространстве приводят нас к заключению о неизменности потока через ручку. *Эта константа движения и представляет собой заряд.*

Заряд, или поток через ручку, является неквантованным. Он в равной степени может иметь то или иное значение и непосредственно не может быть связан с квантованным зарядом, наблюдаемым в квантовой физике у элементарных частиц. Подобное обстоятельство не может служить возражением против понятия классического неквантованного заряда. Это есть предупреждение о совершенно ином содержании понятия квантованного заряда. Такое различие не будет неприемлемым в то время, когда будет понято, как велико различие между «голым» и «одетым» зарядом в квантовой электродинамике (см., например, [16]). Поэтому не представляется безосновательным ограничить рассмотрение чисто классическим неквантованным зарядом, тем более в статье, посвященной классической физике (табл. 1).

Вокруг горловины ручки сконцентрировано электромагнитное поле, придающее *массу* этой части пространства. Масса возникает даже в односвязном пространстве, где с полем Максвелла, не имеющим источников, не будет связан заряд. Уравнения Максвелла и Эйнштейна предсказывают возможность существования долгоживущих концентраций электромагнитной энергии, или «геонов», удерживаемых собственным притяжением. Как в многосвязном пространстве, так и в односвязном континууме масса, с которой мы имеем дело, является классической нелокализованной и неквантованной. Она не имеет ничего общего с квантованной массой элементарных частиц.

Можно дать несколько парадоксальное резюме этих рассуждений. Настоящая хорошо установленная исконно единая классическая теория [уравнения (4), (5), (8)] позволяет описывать с помощью пустого искривленного пространства:

1) гравитацию без гравитации,
2) электромагнетизм без электромагнетизма,
3) заряд без заряда,
4) массу без массы.

Она *ничего* непосредственно не дает нам для понимания:

5) спина без спина,
6) элементарных частиц без элементарных частиц и каких-либо других явлений квантовой физики. Однако мы едва ли взялись бы за исследование классической геометродинамики, если бы не надеялись в конечном счете выяснить, какое отношение имеет *квантовая* геометродинамика к физике элементарных частиц (если она вообще имеет к ней отношение). Нашей конечной целью является выяснение вопроса о том, может ли квантовая физика, подобно классической (табл. 1), быть описана с помощью геометрии.

В наши дни не принято придерживаться крайних точек зрения — взгляда на пространство-время только как на арену явлений и на пространство-время как на все содержание физики. Одни разлагают состояния частиц и полей по плоским волнам, движущимся как чуждые элементы в заранее определенном плоском пространстве. Другие же рассматривают кривизну пространства, хотя и не равную точно нулю, но весьма малую на расстояниях, незначительных по сравнению с протяженностью Вселенной. Эйнштейновское геометрическое описание гравитации принимается всерьез. Его попытки геометрического описания электромагнетизма — путем видоизменения римановой геометрии — были признаны несовместимыми [17, 18] с хорошо проверенным законом силы Лоренца и отвергнуты. Считается, что частицы и поля, отличные от гравитации, должны добавляться к геометрии, но не выводиться из нее. Можно сказать, что природу описывают в наши дни смешанным образом: частично с помощью чистой геометрии, а частично с помощью сущностей, чуждых геометрии.

Однако логическая крайность — мысль о чисто геометрическом описании природы — не была новой идеей даже до того времени, когда вообще могли различать квантовую и классическую физику. Известный математик Клиффорд представил 21 февраля 1870 г. Кембриджскому философскому обществу статью «О пространственной теории материи», в которой он высказал предположение о том, что «в физическом мире не происходит ничего, кроме таких изменений (кривизны пространства), подчиняющихся (возможно) закону непрерывности» [19]; далее он говорил о соображениях, «которые указывают на возможность выражения расстояния или количества через расположение в широком смысле топологии» [20], и затем вновь о конечном объеме пространства постоянной кривизны, но с явным упоминанием того обстоятельства, что «сделанные здесь предположения о связности пространства (лишь) простейшие» [20]. Был ли когда-либо до Эйнштейна, Клиффорда и Римана — и римановой геометрии — взгляд на физику, хоть чем-нибудь подобный представлению о физике как о геометрии? Каковы были взгляды Ньютона на теорию поля и на мысль о том, что пустое пространство является универсальным строительным материалом? Давно известно его письмо к Бентли: «Мне кажется до такой степени абсурдным положение, при котором одно тело может действовать на другое на расстоянии через вакуум, без посредства чего-либо иного, что я не верю, чтобы кто-нибудь, в достаточной степени способный мыслить философски, мог поверить в это» [21]. Максвелл говорил: «Из его «Вопросов оптики» и его писем Бойлю мы видим, что Ньютон давно сделал попытку объяснить гравитацию давлением среды и что причина того, что он не опубликовал этих исследований, «состоит лишь в том, что он не смог на основании опыта и наблюдений дать удовлетворительное объяснение этой среде и ее поведению при проявлении основных явлений природы» [21].

Новый взгляд на идеи Ньютона и их происхождение содержится в недавних исключительно интересных исследованиях Фирца [22].

Фирц особо цитирует Патрицци [23], который пишет о пространстве и веществе: «Итак, пространство есть то, что было прежде мира и будет после него, что стоит во главе мира, из него исходит и, наконец, обращается в нечто... Разве оно тогда не является субстанцией? Если субстанция есть то, что лежит в основе, то пространство и есть скорее всего сущность мира». Некоторые песни древнеиндийских Вед [24] также позволяют предположить, что эта идея — идея о том, что природа черпает всю свою структуру и поведение из свойств пространства — очень стара.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Misner C. W.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).
2. *Wheeler J. A.*, Ann. of Phys., **2**, 604 (1957). (Перевод: дополнение II к кн. Дж. А. Уилера «Гравитация, нейтрино и Вселенная».)
3. *Rainich G. Y.*, Trans. Am. Math. Soc., **27**, 106 (1925).
4. *Rainich G. Y.*, The Mathematics of Relativity, New York, 1950.
5. *Synge J. L.*, Principal Null-Directions Defined in Space-Time by an Electromagnetic Field, University of Toronto Press, Toronto, 1935.
6. *Synge J. L.*, Relativity: The Special Theory, Amsterdam, 1956, p. 326.
7. *Bonnor W. B.*, Proc. Phys. Soc., **A67**, 225 (1954).
8. *Mariot L.*, Thèse, Le champ électromagnétique pur en relativité générale, Université de Paris, 1957, Ch. IV.
9. *Einstein A.*, The Meaning of Relativity, 3rd ed., Princeton, 1950, p. 107. (Перевод: *Эйнштейн А.*, Сущность теории относительности, ИЛ, 1955, стр. 89.)
10. *Riemann B.*, в книге: *Riemann B.*, Gesammelte Mathematische Werke, 2nd ed., New York, 1953. (Перевод: *Риман Б.*, Сочинения, М.— Л., 1948, стр. 279.)
11. *Clifford W.*, Nature, 8, 14 (1873).
12. *Weyl H.*, Raum-Zeit-Materie, 4. Aufl., Berlin, 1921, § 34.
13. *Einstein A.*, *Rosen N.*, Phys. Rev., **48**, 73 (1935). (Перевод: *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. II, «Наука», М., 1966, стр. 424.)
14. *Wheeler J. A.*, Phys. Rev., **97**, 511 (1955).
15. *Darrow K. K.*, Phys. Today, **9**, № 8, 24 (1956).
16. *Dyson F.*, Advanced Quantum Mechanics, Mimeographed Notes, Cornell University, Ithaca, 1954, pp. 120, 167.
17. *Infeld L.*, Acta Phys. Polon., **10**, 284 (1950).
18. *Callaway J.*, Phys. Rev., **92**, 1567 (1953).
19. *Clifford W. K.*, Mathematical Papers, Macmillan, London, 1882, p 21. (См. данный сборник, стр. 36.)
20. *Clifford W. K.*, Lectures and Essays, Vol. 1, Macmillan, London, 1879, pp. 244, 322.
21. *Cajory F.*, Revision of Motte's English Translation of I. Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy, University of California Press, Berkeley, 1934.
22. *Fierz M.*, Über die Ursprung und die Bedeutung der Lehre Isaac Newton's vom absoluten Raum, Gesnerus, **11**, 62 (1954).
23. *Patrizzi F.*, Nova de Universis Philosophia, part IV, Pancosmia, книга 1 (de Spacio Physico), Meiettus, Venice, 1593.
24. The Taittirîya Upanishad with commentaries, Mysore, 1903, pp. 293, 305. См. также «The Upanishads», т. III, New York (см. перевод: Упанишады, М., 1967).

VIII

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВАНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

«Таким образом, новая теория гравитации существенно отличается в своих основных положениях от ньютоновской. Но ее практические результаты совпадают с результатами теории Ньютона столь близко, что трудно было найти хотя бы несколько случаев, в которых различие между теориями было бы доступно опытной проверке. До сих пор были предложены только следующие возможности.

1. Вращение эллиптических орбит планет около Солнца (подтверждено в случае Меркурия).

2. Искривление световых лучей под действием гравитационных полей (было подтверждено фотографиями полного затмения Солнца, сделанными английской астрономической экспедицией)[1].

3. Смещение спектральных линий к красному концу спектра для света, приходящего от звезд, обладающих большой массой (еще не подтверждено опытом) [2].

Привлекательной стороной этой теории является ее логическая завершенность. Если какой-либо ее вывод окажется неверным, то она должна быть отброшена; какая-либо модификация ее, не нарушающая всей структуры, представляется невозможной.

Однако не следует думать, что великое творение Ньютона можно реально ниспровергнуть этой или какой-либо другой теорией. Его ясные и всеобъемлющие идеи навсегда сохранят свое уникальное значение как фундамента, на котором построено здание современной физики».

(А. Эйнштейн, «Что такое теория относительности», 1919 г.)[3]

---

[1]) См. данный сборник, стр. 566.— *Прим. ред.*

[2]) В настоящее время данный эффект экспериментально подтвержден. См., например, аннотацию статьи Паунда и Снайдера на стр. 577.— *Прим. ред.*

[3]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965 г., стр. 680.

А. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

«...маршрут для теории оказывается практически полностью определенным, если предположить универсальность фундаментального эмпирического закона — закона равенства инертной и тяжелой массы тел. Еще со времени Галилея мы знаем, что ускорение свободного падения тел не зависит от их материала. Этот закон можно сформулировать следующим образом: та характеристическая постоянная, которая определяет инертность тела, определяет также и его гравитационное воздействие. Этот закон приобретает еще более фундаментальное значение в силу того, что, согласно теории относительности, существует общая связь между инертной массой и энергией тела. Таким образом, энергия, инерция и тяжесть тела сводятся друг к другу. Равенство инерции и тяжести было установлено экспериментально Этвешем около 20 лет назад с такой точностью, что исключаются относительное различие гравитационной и инерционной констант порядка 10^{-7}».

(А. Эйнштейн, «К теории гравитации», 1914 г.) [1]

«Следует заметить, что равенство (пропорциональность) тяжелой и инертной массы с большой точностью установлено исследованием Этвеша [2], представляющим для нас огромное значение. Этвеш установил эту пропорциональность, экспериментально показав, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы вращения Земли не зависит от природы материала (относительная разность обеих масс $<10^{-7}$)».

(А. Эйнштейн, «К современному состоянию проблемы тяготения», 1913 г.)[3]

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965 г., стр. 317.

[2]) *Eötvös R.*, Math. und naturwiss. Ber. aus Ungarn, Bb. VIII, 1890; Wiedemann Beibl., 15, 688 (1891).

[3]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 276.

В. Б. Брагинский, В. И. Панов
ЖЭТФ, **61**, 873 (1971)

ПРОВЕРКА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИНЕРТНОЙ И ГРАВИТАЦИОННОЙ МАСС

Аннотация. Описан эксперимент, в котором с точностью $0{,}9 \cdot 10^{-12}$ (с достоверностью 0,95) установлено равенство отношения инертной и гравитационной масс для алюминия и платины. В эксперименте был использован крутильный маятник с периодом собственных колебаний 5 ч 20 мин и временем релаксации, большим $6 \cdot 10^{7}$ с. Проведен анализ имитационных эффектов, которые ограничивали достигнутое разрешение. Величина $0{,}9 \cdot 10^{-12}$ близка к отношению констант энергий сильного и слабого взаимодействий.

Дж. Уильямс, Р. Дикке, П. Бендер, Ч. Аллей, У. Картер, Д. Кэрри, Д. Эккардт, Дж. Фоллер, У. Каула, Дж. Мэлхолланд, Г. Плоткин, С. Поултни, П. Шелэс, Э. Силверберг, У. Синклер, М. Слейд, Д. Уилкинсон

Williams J. G., Dicke R. H., Bender P. L., Alley C. O., Carter W. E., Currie D. G., Eckhardt D. H., Faller J. E., Kaula W. M., Mulholland J. D., Plotkin H. H., Poultney S. K., Shelus P. J., Silverberg E. C., Sinclair W. S., Slade M. A., Wilkinson D. T., Physical Review Letters, **36**, 551 (1976)

НОВАЯ ПРОВЕРКА ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПУТЕМ ЛАЗЕРНОЙ ЛОКАЦИИ ЛУНЫ

Аннотация. Анализ данных лазерной локации Луны за 6 лет показывает, что вклад члена Нордтведта в расстояние Земля — Луна имеет нулевую амплитуду, откуда для параметра Нордтведта следует значение $\eta = 0{,}00 \pm 0{,}03$. Поэтому гравитационная энергия связи Земли дает с точностью $\pm 3\%$ одинаковый вклад в ее инертную и пассивную гравитационную массы. На доверительном уровне 70% этот результат согласуется с теорией Бранса — Дикке только при $\omega > 29$. Для постньютоновских теорий гравитации с пятью параметрами и с сохранением энергии-импульса мы получили $|\beta - 1| \leqslant 0{,}02 \div 0{,}05$ или, если рассматриваются лишь параметры β и γ, $|\beta - 1| \leqslant 0{,}01$.

И. Шапиро, Ч. Коунселман, Р. Кинг

Shapiro Irwin I., Counselman Charles C. III, King Robert W.,
Physical Review Letters, **36**, 555 (1976)

ПРОВЕРКА ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ МАССИВНЫХ ТЕЛ

Аннотация. Анализ данных 1389 измерений (проведенных за период 1970—1974 гг.) задержки лазерных сигналов, посланных с Земли и отразившихся от уголковых отражателей на Луне, показывает, что гравитационная энергия связи дает с точностью 1,5% одинаковый вклад в инертную и пассивную гравитационную массы Земли. Соответствующее ограничение на параметры Эддингтона — Робертсона имеет вид $4\beta - \gamma - 3 = -0{,}001 \pm 0{,}015$. В комбинации с другими результатами, принятыми за независимые, это дает $\beta = 1{,}003 \pm 0{,}005$ и $\gamma = 1{,}008 \pm 0{,}008$ в согласии с общей теорией относительности.

Б. СМЕЩЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

«Согласно общей теории относительности, которая, конечно, отличается от теории Ньютона, должно также иметь место небольшое отклонение от движения планеты по орбите в соответствии с законами Кеплера — Ньютона, так что угол, описываемый радиусом, соединяющим Солнце и планету, от одного перигелия до другого должен превосходить угол, соответствующий полному обороту, на величину

$$+\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}.$$

(Один полный оборот соответствует углу 2π в абсолютной угловой мере, как это обычно принято в физике.) Здесь a — большая полуось эллипса, e — его эксцентриситет, c — скорость света, T — период обращения планеты. Этот результат можно представить также и в следующем виде: согласно общей теории относительности, большая ось эллипса вращается вокруг Солнца в направлении вращения планеты. Согласно теории, это вращение должно составлять для планеты Меркурий 43 угловые секунды в столетие, а у других планет нашей Солнечной системы оно должно быть настолько незначительным, что недоступно наблюдению.

В самом деле, астрономы нашли, что теория Ньютона недостаточна для того, чтобы рассчитать наблюдаемое движение Меркурия с точностью, которая может быть достигнута при наблюдениях в настоящее время. После того как были приняты в расчет все возмущающие влияния остальных планет на движение Меркурия, было найдено (Леверье, 1859; Ньюком, 1895), что остается необъясненным движение перигелия орбиты Меркурия, скорость которого не отличается заметно от упомянутых выше +43 угловых секунд в столетие. Ошибка этого эмпирического результата составляет лишь несколько секунд»

(А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности», 1917 г.)[1]

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 594.

И. Шапиро, Г. Петтенджилл, М. Эш, Р. Инголлс, Д. Кэмпбелл, Р. Дайс

Shapiro I. I., Pettengill G. H., Ash M. E., Ingalls R. P., Campbell D. B., Dyce R. B., Physical Review Letters, **28**, 1594 (1972)

РАДИОЛОКАЦИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

Аннотация. Измерения задержки радиолокационных сигналов, посланных от Земли к Меркурию и отраженных обратно, дали правильное значение смещения точки перигелия этой планеты. Если считать гравитационный квадрупольный момент Солнца пренебрежимо малым, то результат можно, пользуясь параметрами Эддингтона — Робертсона, представить в виде

$$(2 + 2\gamma - \beta)/3 \approx 1{,}005 \pm 0{,}007,$$

где общей теории относительности соответствуют значения $\gamma = \beta = 1$, а величина 0,007 — стандартная ошибка. С учетом возможных систематических ошибок неопределенность увеличивается приблизительно до 0,02.

В. ОТКЛОНЕНИЕ ЛУЧЕЙ СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СОЛНЦА

«...в гравитационных полях световые лучи распространяются, вообще говоря, по криволинейному пути. Этот вывод важен в двух отношениях. Во-первых, этот вывод можно проверить экспериментально. Хотя при ближайшем рассмотрении оказывается, что искривление световых лучей, согласно общей теории относительности, крайне незначительно для гравитационных полей, доступных нашему опыту, тем не менее для световых лучей, проходящих вблизи Солнца, искривление должно составлять 1,7 угловой секунды. Это должно было бы проявляться в том, что неподвижные звезды, видимые вблизи Солнца при полных солнечных затмениях, казались бы смещенными на указанную величину по сравнению с тем положением, которое они занимают в том случае, когда Солнце находится в другом месте неба. Проверка правильности этого вывода представляет собой задачу чрезвычайной важности, и мы надеемся на скорое решение ее астрономами. Во-вторых, этот вывод показывает, что закон постоянства скорости света в пустоте, представляющий собой одну из двух основных предпосылок специальной теории относительности, не может, согласно общей теории относительности, претендовать на неограниченную применимость. Изменение направления световых лучей может появиться лишь в том случае, если скорость распространения света меняется в зависимости от места» [1].

(А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности», 1917 г.)

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I. «Наука», М., 1965, стр. 567.

Ф. ДАЙСОН, А. ЭДДИНГТОН, К. ДЭВИДСОН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ЛУЧА СВЕТА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СОЛНЦА ПО ДАННЫМ НАБЛЮДЕНИЙ, ПРОВЕДЕННЫХ ВО ВРЕМЯ ПОЛНОГО СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ 29 МАЯ 1919 г.*

Содержание

I. ЦЕЛЬ ЭКСПЕДИЦИЙ

1. Целью экспедиций являлось определить, какое воздействие оказывает (если оно оказывает) гравитационное поле на траекторию проходящего через него луча света. Если не считать возможных неожиданностей, у нас было, по-видимому, три альтернативы, между которыми особенно желательно было провести выбор:

1) гравитационное поле не оказывает влияния на траекторию луча света;

2) гравитационное поле действует на энергию, или массу, светового луча так же, как и на обычное вещество; если закон тяготения носит строго ньютоновский характер, то это приводит к кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края солнечного диска, равному 0″,87;

3) ход луча света согласуется с общей теорией относительности Эйнштейна; это приводит к кажущемуся смещению во внешнем направлении звезды у края диска, равному 1″,75.

В обоих последних случаях смещение обратно пропорционально расстоянию от звезды до Солнца, причем в случае 3 оно ровно в 2 раза больше, чем в случае 2.

Отметим, что и в случае 2, и в случае 3 предполагается, что гравитационное поле действует на свет точно так же, как и на обыч-

---

* *Dyson F. W.*, *Eddington A. S.*, *Davidson C.*, Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A, **220**, 291 (1920) (здесь печатается перевод части статьи).

ное вещество. Разница же в том, что в случае 2 предполагается справедливость закона Ньютона, а в случае 3 — нового закона тяготения Эйнштейна. Небольшое отклонение от закона Ньютона, которое по теории Эйнштейна приводит к добавочному смещению перигелия Меркурия, возрастает с ростом скорости, пока не удваивает кривизну траектории при достижении предельной скорости — скорости света.

2. Смещение 2 было впервые вычислено проф. Эйнштейном [1]) в 1911 г. на основе принципа эквивалентности, который состоит в том, что гравитационное поле неотличимо от фиктивного поля сил, создаваемого ускорением системы отсчета. Но даже независимо от того, верен ли общий принцип эквивалентности, были основания полагать, что гравитационное поле должно оказывать воздействие на электромагнитную энергию луча света, особенно после того, как было доказано, что содержащаяся в уране энергия радиоактивности подвержена гравитационному воздействию. Однако в 1915 г. Эйнштейн обнаружил, что общий принцип эквивалентности требует модификации закона тяготения Ньютона и что новый закон приводит к смещению 3.

3. Единственную возможность наблюдать эти предполагаемые отклонения дает луч света от звезды, проходящей около Солнца. (Максимальное отклонение в поле Юпитера составляет всего лишь 0″,17.) Очевидно, что наблюдение необходимо проводить во время полного солнечного затмения.

Сразу же после того, как Эйнштейн впервые опубликовал указанное значение, этим занялся д-р Фрейндлих, который попытался извлечь нужную информацию из уже имеющихся снимков солнечных затмений; но ему не удалось собрать достаточно полных данных. Различные исследователи планировали проверку этого эффекта при последующих затмениях, но все такие планы остались невыполненными из-за наличия облачности или по другим причинам [2]). После того как появилось второе значение, вычисленное Эйнштейном, экспедиция Ликской обсерватории пыталась наблюдать этот эффект во время затмения 1918 г. Окончательные результаты пока еще не опубликованы. О некоторых результатах их предварительного анализа сообщалось в печати [3]), но в целом затмение было неблагоприятным и из опубликованных данных вытекает, что вероятная случайная ошибка слишком велика и потому точность измерений недостаточна для выбора между тремя альтернативами.

[1]) *Einstein A.*, Ann. Phys., **35**, 898 (1911) (перевод: *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 165).

[2]) Первая экспедиция по проверке отклонения света во время солнечного затмения была направлена уже в 1914 г. на территорию России. Но в связи с началом военных действий первой мировой войны немецкая экспедиция была интернирована.—*Прим. ред.*

[3]) Observatory, **42**, 298 (1919).

4. Результаты наблюдений, о которых идет речь в нашей статье, по-видимому, вполне определенно указывают на третью альтернативу и подтверждают общую теорию относительности Эйнштейна. Как хорошо известно, эта теория подтверждается также смещением перигелия Меркурия, которое превышает ньютоновское значение на 43″ в столетие, что практически совпадает с тем значением, которое дает теория Эйнштейна. В то же время его теория предсказывает смещение в красную область фраунгоферовых линий на Солнце, достигающее приблизительно 0,008 Å в фиолетовой области. По сообщению д-ра Сент-Джона [1]) наличие этого смещения не подтвердилось. Если факт этого несоответствия будет принят как окончательный, то это потребует значительных модификаций теории Эйнштейна, которые выходят за рамки нашей темы. Но независимо от того, нужны ли изменения в других частях теории, сейчас, по-видимому, можно считать установленным, что закон тяготения Эйнштейна правильно дает отклонения от закона Ньютона как для сравнительно медленно движущейся планеты Меркурий, так и для быстро движущихся световых волн.

По-видимому, не вызывает сомнения, что найденный здесь эффект обусловлен гравитационным полем Солнца, а не, например, рефракцией в веществе солнечной короны. Чтобы получить наблюдаемый эффект за счет рефракции, необходимо, чтобы Солнце было окружено веществом с показателем преломления, равным $1 + 0{,}00000414/r$, где r — расстояние от центра в единицах солнечного радиуса. На высоте одного радиуса от поверхности требуемый показатель преломления 1,00000212 соответствует показателю преломления воздуха, находящегося под давлением $^1/_{140}$, водорода — под давлением $^1/_{60}$ или гелия — под давлением $^1/_{20}$ атмосферного. Ясно, что о плотности такого порядка не может быть и речи.

II. ПОДГОТОВКА К ЭКСПЕДИЦИЯМ

5. В марте 1917 г. было опубликовано сообщение [2]) о том, что, как показало изучение фотографий, полученных при помощи гринвичского астрографического телескопа во время затмения 1905 г., этот инструмент пригоден для фотографирования звездной карты в окрестности Солнца в период полного затмения. При этом указывалось также, что очень важно провести наблюдения за затмением 29 мая 1919 г., поскольку оно представляет собой особенно благоприятный случай, когда в поле наблюдения оказывается необычное число ярких звезд, который не повторится в течение многих лет.

. . . .

[1]) *St. John*, Astrophysical Journ., **46**, 249 (1917).

[2]) Monthly Notices Roy. Astr. Soc., **72**, 445 (1917).

V. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

39. При окончательном анализе всех результатов двух экспедиций наиболее значимыми следует считать те из них, которые получены при помощи четырехдюймового объектива в Собрале. Учитывая более высокое качество изображений и более крупный масштаб фотографий, мы пришли к выводу, что эти снимки должны быть гораздо более надежными. Кроме того, согласие в результатах, независимо полученных из данных о прямых восхождениях и склонениях, а также в ошибках измерения положения на фотопластинах звезд [1]) обеспечивают более удовлетворительную проверку результатов измерений, чем было возможно для других инструментов.

Полученные фотопластины дают

на основании склонений. . . . . $1'',94$,
на основании прямых восхождений. . . . $2'',06$.

Результат, основанный на данных о склонениях, должен быть взят с приблизительно вдвое большим весом, чем результат, основанный на данных о прямых восхождениях, поэтому их среднее равно

$$1'',98$$

с вероятной ошибкой около $\pm 0'',12$.

Наблюдениям на Принсипи сильно мешала облачность. Правда, неблагоприятные обстоятельства частично компенсировались преимуществом крайне постоянной температуры на этом острове. Полученное там отклонение равно

$$1'',61.$$

Вероятная ошибка равна приблизительно $\pm 0'',30$, так что вес этого результата значительно меньше, чем предыдущего.

Оба эти результата указывают на полное отклонение $1'',75$, соответствующее общей теории относительности Эйнштейна, причем результаты, полученные в Собрале, указывают на это вполне определенно, а результаты, полученные на Принсипи,— возможно, с некоторой неопределенностью. Правда, остаются еще фотопластины из Собрала, которые дали отклонение

$$0'',93,$$

отличающееся от указанного значения на величину, намного превышающую случайную ошибку. По причинам, которые подробно разбирались выше, этому результату был приписан малый вес.

Было принято, что смещение обратно пропорционально расстоянию от центра Солнца, поскольку все теории согласуются

---

[1]) Phil. Trans. Roy. Soc., ser. A, **220**, 308 (1920).

в этом; и действительно из анализа размерностей прямо явствует, что, если смещение обусловлено гравитацией, оно должно изменяться по такому закону.

Данные, полученные с четырехдюймовым объективом, позволяют в какой-то мере проверить этот закон, хотя такая проверка может быть лишь весьма грубой. Соответствующие данные пред-

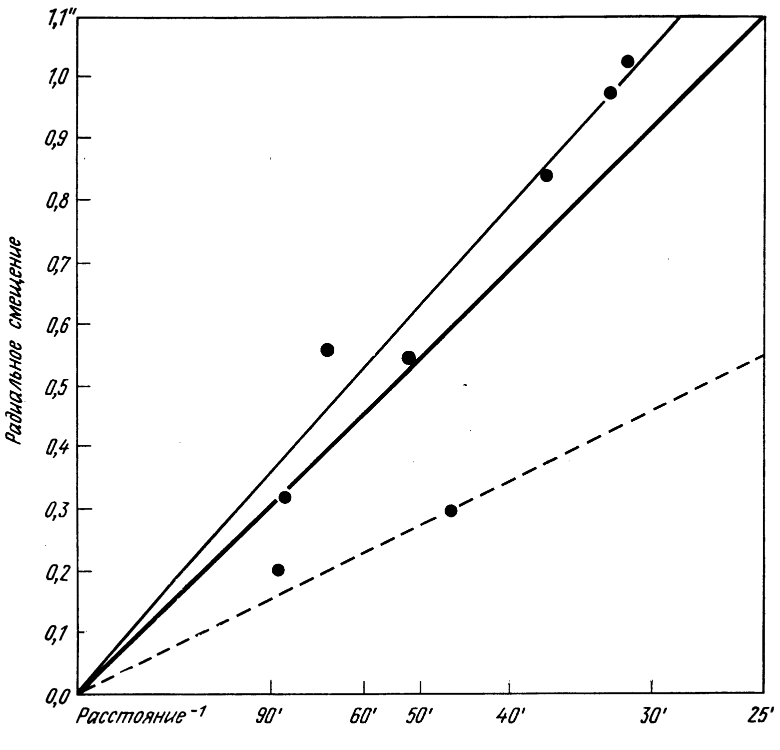


Диаграмма 2

ставлены ниже в таблице и (на диаграмме 2) в виде графика зависимости радиальных смещений отдельных звезд (усредненных по всем фотопластинам) от обратного расстояния до центра. На графике жирной линией отмечены смещения, соответствующие теории Эйнштейна, пунктиром — соответствующие закону Ньютона, а тонкой линией — соответствующие данным наших наблюдений.

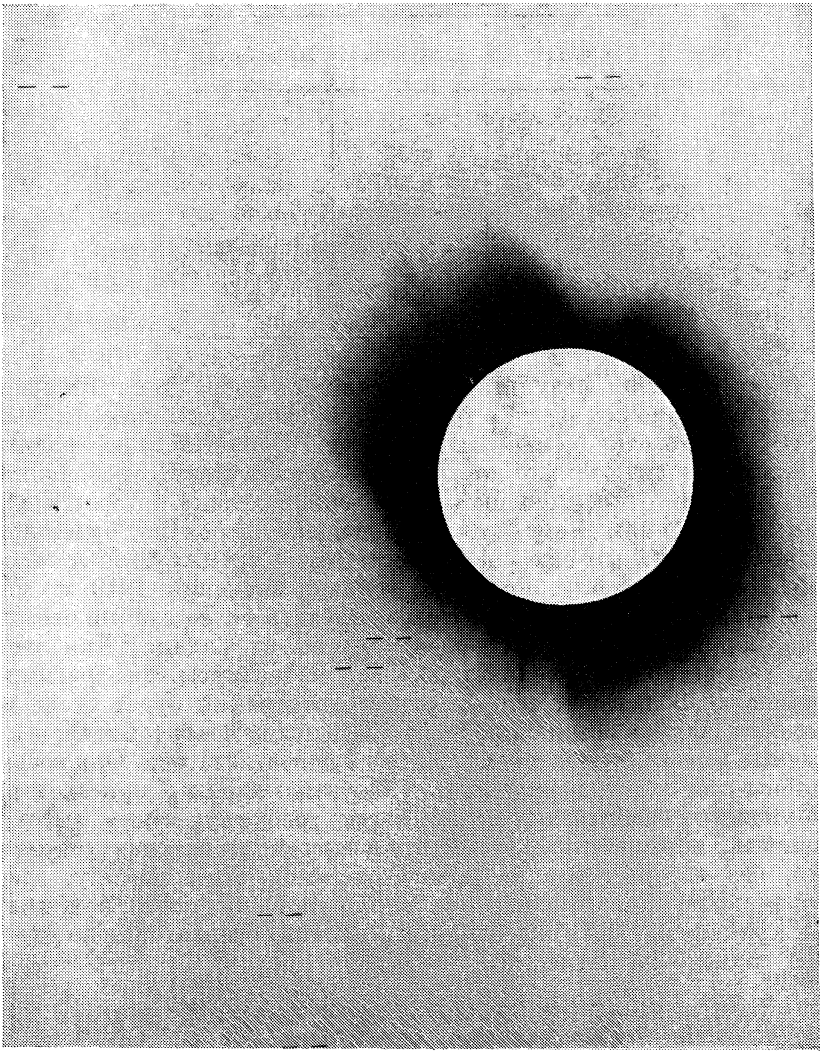


Фото 1

Полутоновая репродукция одного из негативов, полученных с четырехдюймовым объективом в Собрале. Отмечено положение звезд.

РАДИАЛЬНЫЕ СМЕЩЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗВЕЗД

Звезда	Вычисления	Наблюдения
11	0″,32	0″,20
10	0,33	0,32
6	0,40	0,56
5	0,53	0,54
4	0,75	0,84
2	0,85	0,97
3	0,88	1,02

Таким образом, результаты экспедиций в Собрал и на Принсипи оставляют мало сомнения в том, что луч света отклоняется вблизи Солнца и что отклонение, если приписать его действию гравитационного поля Солнца, по величине соответствует требованиям общей теории относительности Эйнштейна. Однако интерес к данным наблюдениям таков, что в дальнейшем, вероятно, будет признано желательным еще раз провести их во время будущих затмений. Необычайно благоприятные условия затмения 1919 г. уже не повторятся, и придется фотографировать более слабые звезды, которые, вероятно, будут более удалены от Солнца. Для этого *пригоден* астрографический телескоп с объективом, диафрагмированным до 8 дюймов, если качество фотографий будет столь же высоким, как и в обычной работе со звездными объектами. От целостатных зеркал, по-видимому, лучше будет отказаться. Они весьма удобны при фотографировании солнечной короны и при спектроскопических наблюдениях, но когда требуется очень высокая точность, нежелательно вводить в оптическую систему усложнения, без которых вполне можно обойтись. По-видимому, здесь нужен некий вариант экваториальной установки (такой, например, как применявшаяся в экспедициях Ликской обсерватории по изучению солнечного затмения).

. . . .

Ч. Коунселман, С. Кент, Ч. Найт, И. Шапиро, Т. Кларк, Г. Хинтереггер, А. Роджерс, А. Уитни

Counselman C. C. III, Kent S. M., Knight C. A., Shapiro I. I., Clark T. A., Hinteregger H. F., Rogers A. E. E., Whitney A. R.,
Physical Review Letters, 33, 1621 (1974)

ГРАВИТАЦИОННОЕ ОТКЛОНЕНИЕ СОЛНЦЕМ РАДИОВОЛН, ИЗМЕРЕННОЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИ ПРИ ОЧЕНЬ БОЛЬШОЙ БАЗЕ

Аннотация. Пользуясь методом 4 антенн, мы одновременно наблюдали на обоих концах базовой линии длиной 845 км радиоисточники 3C279 и 3C273B, угловое расстояние между которыми на небе равно 10°. Разности интерферометрических фаз на длине волны 3,7 см, измеренные при покрытии источника 3C279 Солнцем в 1972 г., дают для гравитационного отклонения луча значение, равное $0{,}99 \pm 0{,}03$ значения, предсказываемого общей теорией относительности, что соответствует значению $\gamma = 0{,}98 \pm 0{,}06$ (стандартная ошибка).

Э. Фомалонт, Р. Срамек

Fomalont E. B., Sramek R. A.,
Physical Review Letters, 36, 1475 (1976).

ИЗМЕРЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ОТКЛОНЕНИЯ РАДИОВОЛН СОЛНЦЕМ СОГЛАСУЮТСЯ С ОБЩЕЙ ТЕОРИЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Аннотация. В 1974 и 1975 гг. в ходе 2 экспериментов на протяжении месяца проводилось слежение при помощи радиоинтерферометра с 35-километровой базой за относительным положением трех радиоисточников, когда Солнце отстояло от них в пределах 10°. Среднее гравитационное отклонение составило $1{,}007 \pm 0{,}009$ (стандартная ошибка) значения, предсказываемого общей теорией относительности. Эти результаты на доверительном уровне 99% исключают теорию гравитации Бранса — Дикке с константой связи со скалярным полем $\omega < 23$.

И. Шапиро, Р. Ризенберг, П. Мак-Нил, Р. Голдстейн, Дж. Бренкл, Д. Кэйн, Т. Комарек, А. Цигельбаум, У. Кэддиги, У. Майкл, мл.

Shapiro I. I., Reasenberg R. D., McNeil P. E., Goldstein R. B., Brenkle J., Cain D., Komarek T., Zygelbaum A., Cuddihy W. F., Michael W. H., Jr.,
Journal of Geophysical Research, June 1977 (preprint)

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ «ВИКИНГ»

Аннотация. Для проверки предсказаний общей теории относительности Эйнштейна проводится анализ результатов измерения времени распространения в обе стороны радиосигналов, посылавшихся с Земли на космический корабль «Викинг». Согласно этой теории, задержка сигналов, обусловленная прямым влиянием гравитационного поля Солнца на процесс их распространения, должна достигать ~ 250 мкс. Весьма предварительные данные качественного анализа результатов эксперимента с кораблем «Викинг» вблизи верхнего соединения Марса в 1976 г. указывают на согласие с предсказаниями теории в пределах ошибки 0,5%.

Г. ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

«Атом поглощает или испускает свет, частота которого зависит от потенциала гравитационного поля, в котором находится атом.

Частота излучения атома, находящегося на поверхности небесного тела, будет несколько меньше частоты излучения атома такого же элемента, находящегося в свободном пространстве (или атома на поверхности меньшего небесного тела). Так как $\varphi = -KM/r$, где K — ньютоновская постоянная тяготения, M — масса небесного тела и r — его радиус, то должно происходить смещение спектральных линий излучения атомов, находящихся на поверхности звезд, к красному концу спектра по сравнению со спектральными линиями атомов того же элемента, находящихся на земной поверхности. При этом величина смещения будет равна

$$\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0}=\frac{KM}{c^2r}.$$

Для Солнца ожидаемое смещение спектральных линий к красному концу спектра составляет около двух миллионных длины волны».

(А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности», 1917 г.)[1]

[1]) *Эйнштейн А.*, Собрание научных трудов, т. I, «Наука», М., 1965, стр. 598.

Р. Паунд, Дж. Снайдер

Pound R. V., Snider J. L.,
Physical Review, **140** B, 788 (1965)

ДЕЙСТВИЕ ГРАВИТАЦИИ НА ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЕ

Аннотация. Проводился усовершенствованный вариант опыта Паунда и Ребки: мессбауэровское резонансное поглощение в Fe^{57} γ-лучей с энергией 14,4 кэВ было использовано для измерения влияния тяготения на вертикальном отрезке пути длиной 22,5 м в Джефферсоновской лаборатории. Удалось значительно повысить скорость счета, используя в качестве источника Co^{57} с первоначальной активностью 1,25 Ки, пропорциональные счетчики широкого обзора и обогащенный поглотитель — фольгу диаметром 38 см. Снижение систематических ошибок было достигнуто использованием термостатированных печей для источника и поглотителей, а также усовершенствованной контрольно-измерительной системы для определения изменений скорости источника. Для величины $2gh/c^2$ получено значение, равное $(0{,}9990 \pm 0{,}0076)$ значения $4{,}905 \cdot 10^{-15}$, вычисленного на основе принципа эквивалентности. Указанная ошибка есть стандартное отклонение, соответствующее числу отсчетов. Систематическая ошибка равна $\sim 0{,}010$.

Ч. Аллей, Л. Катлер, Р. Рейссе, Р. Уильямс, К. Стеггерда, Дж. Рейнер, Дж. Мэллендор, С. Дэйвис

Alley C. O., Cutler L. S., Reisse R., Williams R., Steggerda C., Rayner J., Mullendore J., Davis S., в книге: Experimental Gravitation, Proceedings of the Conference at Pavia (Sept. 1976), ed. B. Bertotti, Academic Press, 1977

ИЗМЕРЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ АТОМНЫХ ЧАСОВ ОБЩЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ РАЗНОСТЕЙ ВРЕМЕНИ ПРИ АВИАПОЛЕТАХ ПУТЕМ ПРЯМЫХ СВЕРОК ВРЕМЕНИ, А ТАКЖЕ ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИХ СВЕРОК, ПРОВОДИМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Аннотация. Разность показаний времени двух идентичных установок «атомные часы» в упаковке, обеспечивающей точный контроль за окружающими условиями, измерялась путем прямого сравнения до и после того, как одна из установок транспортировалась на самолете при сопровождении радиолокатором в течение ~ 15 ч на высоте $\sim 10^4$ м (пять независимых полетов). Нарастание разности времен регистрировалось телеметрически при помощи лазерных импульсов длительностью 0,1 нс. Типичные результаты измерения: $+47 \pm 1{,}5$ нс (самолет — земля). Теория: $+47{,}1 \pm \pm 0{,}25$ нс $= +52{,}8$ нс (гравитационный потенциал) — 5,7 нс (относительная скорость). Общий результат таков: (измеренная разность)/(предсказание ОТО) $= 0{,}987 \pm 0{,}016$.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

III. ВАЖНЕЙШИЕ РАБОТЫ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА, ИХ КЛАССИФИКАЦИИ И УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ В ОТО

IV. ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ ПО КОСМОЛОГИИ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ АСТРОФИЗИКЕ

V. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ФИЗИКА МИКРОМИРА

VI. ОБОБЩЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНОВСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

VII. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВАНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ