TOPOLOGY

VOLUME II

New edition, revised and augmented

K. KURATOWSKI

Professor of Mathematics,
University of Warsaw

1968
ACADEMIC PRESS
NEW YORK AND LONDON
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

К. КУРАТОВСКИЙ

ТОПОЛОГИЯ

ТОМ 2

Перевод с английского
М. Я. Антоновского

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1969

УДК 513.83

Монография известного ученого, вице-президента Академии наук Польской Народной Республики, иностранного члена АН СССР Казимира Куратовского — выдающееся явление в математической литературе. Она представляет собой наиболее полное и легко читаемое сочинение, охватывающее большинство разделов современной общей топологии. Монография выдержала три издания на французском языке.

В последние годы текст книги был значительно переработан автором. Перевод первого тома нового, исправленного и дополненного издания был выпущен в 1966 г. (изд-во «Мир») и получил высокую оценку советской научной общественности.

Книга заинтересует всех математиков, начиная от студентов и кончая специалистами, так как топологические методы в настоящее время широко проникли почти во все отрасли математики.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
10-69

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ТОМУ

Этот том составляет единое целое с первым. Согласно плану, изложенному в предисловии к первому тому, глава 4 посвящена компактным пространствам, глава 5 — связным пространствам, глава 6 — локально связным пространствам и глава 7 — ретрактам, окрестностным ретрактам и другим родственным вопросам (например, гомотопии). Последние две главы носят более специальный характер: глава 9 посвящена некоторым проблемам разбиения сферы $\mathscr{S}_n$, связанным с понятием когомотопии, а глава 10 — топологии плоскости. Глава 8, связанная с теорией групп, носит вспомогательный характер, однако некоторые изложенные в ней результаты важны с топологической точки зрения; например, представляет интерес изучение пространств, стягиваемых относительно окружности, и группы целочисленных мер, определенных на открыто-замкнутых подмножествах данного пространства.

Некоторые параграфы можно опустить без ущерба для понимания последующего. Таков, например, § 46, посвященный теории размерности и являющийся продолжением §§ 25 — 29 тома 1. Однако автор считает, что особая красота этой теории и используемых в ней методов является достаточным оправданием для ее включения в монографию. То же относится к § 51, посвященному теории кривых. Кроме того, § 48, в котором излагается теория неприводимых пространств и неразложимых пространств, в какой-то мере занимает изолированное положение в этом томе. Однако в последнее время эти вопросы приобрели интерес благодаря работам Бинга, Моиза и других (некоторые их результаты упоминаются в приложении к французскому изданию этой книги).

Английское и русское издания существенно отличаются от французского тем, что метрические сепарабельные пространства не являются в них главным объектом исследования. Они заменены (везде, где это было возможно и целесообразно) более общими топологическими пространствами. Так сделано, например, в §§ 41 — 44 (о компактных пространствах), написанных заново, в §§ 46, 47 (о связных пространствах), в §§ 49, 50 (о локально связных пространствах). Добавлен ряд новых утверждений в различных частях книги; приложение, имеющееся во французском издании, растворено в основном тексте.

В конце книги приводится обширный список литературы, содержащий известные монографии и учебники по топологии.

Я выражаю глубокую благодарность коллегам, помогавшим мне в подготовке этой монографии. Среди тех, которых я упоминал в предисловии к первому тому, я хочу еще раз поблагодарить Р. Энгелькинга и пани Карлович. Я также выражаю глубокую благодарность профессорам Хилтону, Беднареку и Лелеку и доктору Киркору за ценные замечания.

Я особенно благодарен профессору М. Я. Антоновскому за большой труд, который он взял на себя, переводя этот том на русский язык. Мне хочется также выразить благодарность издательству «Мир» за издание моей «Топологии».

К. Куратовский

ГЛАВА 4
КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 41. Компактность

I. Определения. Условия Бореля, Лебега, Рисса, Кантора и Больцано — Вейерштрасса. Лемма Александера. В § 5, VII, т. 1 было дано следующее определение:

Определение 1[1]). Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *компактным*, если оно удовлетворяет следующему условию (называемому *условием Бореля — Лебега*[2])):

(1) *каждое открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

Другими словами, *если* $\mathscr{X}=\bigcup\limits_{t} G_t$, *где* G_t *открыто для каждого* $t \in T$ (*множество* T *произвольно*), *то существует конечная система* $t_1, \ldots, t_n$, *такая, что* $\mathscr{X}=G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}$.

Определение 2. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *счетно-компактным*, если оно удовлетворяет условию (называемому *условием Бореля*[3])):

(1′) *каждое счетное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.*

Очевидно, что компактное пространство является счетно-компактным, тогда как обратное неверно (это видно на примере пространства порядковых чисел $\alpha<\Omega$; см. § 20, V, 2°). Однако для метрических пространств компактность и счетная компактность эквивалентны (см. § 21, IX, теорема 2).

---

[1]) Это определение по существу принадлежит П. С. Александрову и П. С. Урысону. Эти авторы называют *бикомпактностью* то, что мы называем здесь компактностью (термин «компактное пространство» использовался ими в смысле счетной или секвенциальной компактности). См. Александров и Урысон [1]. См. также Александров и Хопф [1, гл. II, § 1], Вьеторис [1].

[2]) См. Лебег [1, стр. 105]. Ср. Юнг [1, стр. 384].

[3]) Это условие называется также условием *Гейне — Бореля*. См. Борель [1, стр. 51]. Обширную библиографию см. в работе Гильдебрандта 1, стр. 423].

Классическими примерами компактных пространств являются интервал $\mathcal{J}$, куб $\mathcal{J}^n$ и, вообще, каждое замкнутое и ограниченное подмножество евклидова пространства $\mathcal{E}^n$ (см. п. VI). С другой стороны, пространство целых чисел и пространство $\mathcal{E}$ действительных чисел являются, очевидно, некомпактными.

Легко видеть, что следующее условие (называемое *условием Рисса* [2, т. 2, стр. 21]) эквивалентно (и двойственно) условию Бореля — Лебега:

(2) *если F_t замкнуто для каждого $t \in T$ и $\bigcap_t F_t = 0$, то существует конечная система $t_1, \ldots, t_n$, такая, что*

$$F_{t_1} \cap \ldots \cap F_{t_n} = 0.$$

Легко показать, что следующие два условия эквивалентны условию (1), а значит, и (2):

(3) *если семейство $\{G_t\}$ является открытым покрытием пространства $\mathcal{X}$ и направленным множеством относительно включения $\subset$ (т. е. для каждой пары t_1 и t_2 существует такое t_3, что $G_{t_1} \subset G_{t_3}$ и $G_{t_2} \subset G_{t_3}$), то существует такое t, что*

$$G_t = \mathcal{X};$$

(4) *если $F_t = \overline{F}_t \neq 0$ и семейство $\{F_t\}$ является направленным множеством относительно включения $\supset$ (т. е. для каждой пары t_1 и t_2 существует такое t_3, что $F_{t_3} \subset F_{t_1}$ и $F_{t_3} \subset F_{t_2}$), то*

$$\bigcap_t F_t \neq 0.$$

Условие Бореля (1′) эквивалентно следующему *условию Кантора* [1]:

(2′) *если $\overline{F}_n = F_n \neq 0$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, то*

$$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \neq 0.$$

Импликация (2′)⇒(1′) была выведена в § 20, V (замечание к теореме 3). Для того чтобы показать, что (1′)⇒(2′), допустим, что предположения условия (2′) выполняются. Пусть $k_1, \ldots, k_m$ — произвольная конечная система положительных целых чисел и j — наибольшее из них. Тогда $F_{k_1} \cap \ldots \cap F_{k_m} = F_j \neq 0$. Положим $G_n = \mathcal{X} - F_n$. Тогда $G_{k_1} \cup \ldots \cup G_{k_m} \neq \mathcal{X}$, и, согласно (1′), отсюда следует, что $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \neq \mathcal{X}$, т. е. $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \neq 0$.

Замечание 1. Легко видеть, что условие (4) можно следующим образом выразить при помощи логических символов:

Пусть задано семейство $\{\varphi_t(x)\}$ функций высказывания, таких, что множества $F_t = \mathop{\mathsf{E}}_x \varphi_t(x)$ замкнуты и для каждой *пары индексов* t_1, t_2 *существует такой индекс* t_3, *что* $\varphi_{t_3}(x) \Rightarrow \Rightarrow \varphi_{t_1}(x) \wedge \varphi_{t_2}(x)$; *тогда*

$$\text{(i)} \qquad \bigwedge_t \bigvee_x \varphi_t(x) \equiv \bigvee_x \bigwedge_t \varphi_t(x).$$

Аналогично, условие Кантора можно выразить следующим образом:

Пусть задана бесконечная последовательность функций высказывания $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots,$ *таких, что* $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi_{n-1}(x)$ *и множества* $\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi_n(x)$ *замкнуты; тогда*

$$\text{(ii)} \qquad \bigwedge_n \bigvee_x \varphi_n(x) \equiv \bigvee_x \bigwedge_n \varphi_n(x).$$

Эквивалентно: *если* $\varphi_n(x) \Rightarrow \varphi_{n+1}(x)$ *и* $\mathop{\mathsf{E}}_x \varphi_n(x)$ *открыто, то*

$$\text{(iii)} \qquad \bigwedge_x \bigvee_n \varphi_n(x) \equiv \bigvee_n \bigwedge_x \varphi_n(x).$$

Замечание 2. Следующее утверждение также эквивалентно условию Кантора:

(iv) *если* $A_n \neq 0$ *для* $n = 1, 2, \ldots,$ *то* $\mathrm{Ls}\, A_n \neq 0$.

Действительно, $\mathrm{Ls}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n \cup A_{n+1} \cup \ldots}$ (см. § 29, IV, 8).

Замечание 3. В метрических пространствах (и, более общо, в $\mathscr{L}^*$-пространствах) условие Кантора эквивалентно следующему *условию Больцано — Вейерштрасса* (называемому также *секвенциальной компактностью*; см. § 20, V):

(5) *каждая бесконечная последовательность точек* $p_1, p_2, \ldots$ *содержит сходящуюся подпоследовательность:* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{k_n} = p$, *где*

$$k_1 < k_2 < \ldots;$$

иными словами,

(5′) *множество* A^d *точек накопления множества* A *непусто при условии, что множество* A *бесконечно.*

Замечание 4. Отметим (без доказательства), что следующие условия эквивалентны компактности [1]):

(6) *если* $\{F_\alpha\}$ — *трансфинитная последовательность убывающих замкнутых непустых множеств, то* $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq 0$;

[1]) См. Куратовский и Серпинский [1, стр. 173]; Понтрягин [4, стр. 80, теорема 4]; Александров и Урысон [1, гл. I, § 2.7].

(7) *для каждого бесконечного подмножества E пространства $\mathscr{X}$ существует точка p порядка $\overline{\overline{E}}$ (т. е. такая точка p, что для каждой ее окрестности G мы имеем $\overline{\overline{G \cap E}} = \overline{\overline{E}}$).*

Покажем, что в определении I вместо открытых множеств можно ограничиться множествами данной открытой предбазы.

В дальнейшем будет удобно называть покрытие *существенно бесконечным*, если оно не содержит никакого конечного покрытия пространства (следовательно, компактные пространства — это пространства, не имеющие существенно бесконечных открытых покрытий).

Лемма Александера[1]. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — открытая предбаза топологического пространства $\mathscr{X}$. Предположим, что имеется существенно бесконечное открытое покрытие $\mathscr{X}$. Тогда найдется такое существенно бесконечное открытое покрытие $\mathscr{X}$, которое содержится в $\boldsymbol{A}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех существенно бесконечных открытых покрытий $\mathscr{X}$. По предположению $\mathfrak{M} \neq 0$. Покажем вначале, что $\mathfrak{M}$ обладает следующим свойством: если $\{\boldsymbol{P}_\alpha\}$ — монотонная трансфинитная последовательность (т. е. $\boldsymbol{P}_\alpha \subset \boldsymbol{P}_\beta$ при $\alpha < \beta$) элементов из $\mathfrak{M}$, то $\left(\bigcup\limits_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha\right) \in \mathfrak{M}$.

Очевидно, что $\bigcup\limits_\alpha \boldsymbol{P}_\alpha$ является покрытием $\mathscr{X}$. Это покрытие существенно бесконечно, ибо в противном случае оно содержало бы конечное покрытие $G_1, \ldots, G_n$, и, следовательно, существовала бы конечная система индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такая, что $G_i \in \boldsymbol{P}_{\alpha_i}$. Обозначим через β наибольшее из α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда $G_i \in \boldsymbol{P}_\beta$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, и отсюда следует, что $\boldsymbol{P}_\beta$ не является существенно бесконечным.

Из доказанного свойства $\mathfrak{M}$ следует (см. т. 1, введение, § 3, XI), что $\mathfrak{M}$ содержит максимальный элемент. Обозначим его через $\boldsymbol{P}$. Таким образом, если множество H открыто и не принадлежит $\boldsymbol{P}$, то $\boldsymbol{P} \cup (H)$ не является существенно бесконечным покрытием; тогда существует конечная система $G_1, \ldots, G_n$, такая, что

(8) $H \cup G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n = \mathscr{X}$ и $G_i \in \boldsymbol{P}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Покажем, что семейство открытых множеств, не принадлежащих $\boldsymbol{P}$, является фильтром, т. е. (H и G — открытые множества)

(9) если $H_1 \notin \boldsymbol{P}$ и $H_2 \notin \boldsymbol{P}$, то $(H_1 \cap H_2) \notin \boldsymbol{P}$,

---

[1]) См., например, Келли [1].

и

(10) если $H \notin \boldsymbol{P}$ и $H \subset G$, то $G \notin \boldsymbol{P}$.

Условие $H_j \notin \boldsymbol{P}$, $j = 1, 2$, влечет за собой (см. (8)) существование множеств $G_{j,1}, \ldots, G_{j,n_j}$, таких, что

(11) $H_j \cup G_{j,1} \cup G_{j,2} \cup \ldots \cup G_{j,n_j} = \mathscr{X}$ и $G_{j,i} \in \boldsymbol{P}$.

Отсюда следует, что

(12) $$(H_1 \cap H_2) \cup \bigcup_{j,i} G_{j,i} = \mathscr{X},$$

поэтому $(H_1 \cap H_2) \notin \boldsymbol{P}$, так как $\boldsymbol{P}$ является существенно бесконечным покрытием.

Таким образом, (9) доказано.

Пусть теперь $H \notin \boldsymbol{P}$. Можно предположить, что (8) выполняется. Поэтому если $H \subset G$, то мы имеем

$$G \cup G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n = \mathscr{X},$$

откуда следует, что $G \notin \boldsymbol{P}$.

Покажем, что из (9) и (10) следует, что $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}$ является покрытием $\mathscr{X}$.

Пусть $x_0 \in \mathscr{X}$. Так как $\boldsymbol{P}$ есть покрытие пространства $\mathscr{X}$, то существует $G \in \boldsymbol{P}$, такое, что $x_0 \in G$, а так как $\boldsymbol{A}$ есть предбаза $\mathscr{X}$, то существует конечная система $H_1, \ldots, H_n$ элементов $\boldsymbol{A}$, такая, что

$$x_0 \in (H_1 \cap \ldots \cap H_n) \subset G.$$

Отсюда, согласно (9) и (10), следует существование такого i, что $H_i \in \boldsymbol{P}$. Тогда $x_0 \in H_i \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}$ и, следовательно, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}$ есть покрытие $\mathscr{X}$.

Наконец, поскольку покрытие $\boldsymbol{P}$ существенно бесконечно, таким же является и покрытие $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}$.

II. Нормальность и другие свойства компактных пространств. Вначале докажем два элементарных свойства компактных пространств.

Теорема 1. *Всякое компактное подмножество $\mathcal{T}_2$-пространства замкнуто.*

Доказательство. Пусть множество $A \subset \mathscr{X}$ компактно. Мы должны показать, что $\mathscr{X} - A$ открыто, т. е. что для всякой точки $b \in \mathscr{X} - A$ существует открытое множество G, такое, что $b \in G \subset \mathscr{X} - A$.

Так как $\mathcal{X}$ является $\mathcal{T}_2$-пространством, то для каждой точки $x \in A$ существует пара открытых множеств U_x и V_x, таких, что

$$b \in U_x, \quad x \in V_x \quad \text{и} \quad U_x \cap V_x = 0.$$

Следовательно, семейство множеств $A \cap V_x$, где $x \in A$, есть открытое покрытие множества A (рассматриваемого как пространство). Так как A компактно, то существует конечное множество точек $x_1, \ldots, x_n$, такое, что

$$A = (A \cap V_{x_1}) \cup \ldots \cup (A \cap V_{x_n}), \quad \text{т. е.} \quad A \subset V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_n}.$$

Положим $G = U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$. Множество G открыто и $b \in G \subset \mathcal{X} - A$.

Теорема 2. *Всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и $\{G_t\}$, $t \in T$, — покрытие F, причем множества G_t открыты относительно F.

Тогда существует открытое (относительно $\mathcal{X}$) множество H_t, такое, что $G_t = F \cap H_t$. Следовательно, семейство множеств H_t, где $t \in T$, с добавленным множеством $H = \mathcal{X} - F$ является открытым покрытием $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X}$ компактно, то существует конечная система индексов $t_1, \ldots, t_n$, такая, что $\mathcal{X} = H \cup H_{t_1} \cup \ldots \cup H_{t_n}$. Следовательно, $F = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}$.

Теорема 3. *Всякое компактное $\mathcal{T}_2$-пространство нормально.*

Эта теорема является непосредственным следствием (с применением теоремы 2) следующей леммы.

Лемма. *Пусть A и B — два компактных непересекающихся подмножества пространства $\mathcal{X}$, и пусть $\boldsymbol{R}$ — семейство открытых множеств, такое, что для каждой пары точек $a \in A$ и $b \in B$ существует множество $G \in \boldsymbol{R}$, такое, что $a \in G$ и $b \notin \overline{G}$. Тогда в $\boldsymbol{R}$ существует конечная система $\{G_j^i\}$, где $i = 1, \ldots, k$ и $j = 1, \ldots, m_k$, такая, что*

$$(1) \quad A \subset (G_1^1 \cap \ldots \cap G_{m_1}^1) \cup \ldots \cup (G_1^k \cap \ldots \cap G_{m_k}^k)$$

и

$$(2) \quad B \cap \left[(\overline{G_1^1} \cap \ldots \cap \overline{G_{m_1}^1}) \cup \ldots \cup (\overline{G_1^k} \cap \ldots \cap \overline{G_{m_k}^k}) \right] = 0.$$

Доказательство. Пусть $a \in A$ — данная точка. Для каждой точки b обозначим через $G(b)$ элемент из $\boldsymbol{R}$, такой, что $a \in G(b)$ и $b \in \mathcal{X} - \overline{G(b)}$. Так как семейство множеств $\{\mathcal{X} - \overline{G(b)}\}$, где $b \in B$, является открытым покрытием компактного множества B, то существует конечное множество $(b_1, \ldots, b_r)$, где $r = r(a)$ зависит от a, такое, что

$$B \subset [\mathscr{X} - \overline{G(b_1)}] \cup \ldots \cup [\mathscr{X} - \overline{G(b_r)}] = \\ = \mathscr{X} - [\overline{G(b_1)} \cap \ldots \cap \overline{G(b_r)}].$$

Иначе говоря, полагая

$$H_1(a) = G(b_1), \ldots, H_r(a) = G(b_r) \text{ и } H(a) = H_1(a) \cap \ldots \cap H_r(a),$$

получаем $a \in H(a)$ и $B \cap \overline{H_1(a)} \cap \ldots \cap \overline{H_r(a)} = 0$.

Следовательно, $\{H(a)\}$, $a \in A$, есть открытое покрытие компактного множества A. Таким образом, существует конечное покрытие $H(a_1), \ldots, H(a_k)$ множества A. Полагая $G_j^i = H_j(a_i)$ и $m_i = r(a_i)$, получаем формулы (1) и (2).

Замечание 1. Компактное пространство не обязано быть ни *наследственно нормальным*, ни *совершенно нормальным*.

Это вытекает из следующих утверждений:

(i) существуют вполне регулярные $\mathcal{T}_1$-пространства, которые не являются нормальными (см. § 14, II);

(ii) каждое вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство гомеоморфно подмножеству компактного пространства (см. § 16, V, теорема 5);

(iii) каждое совершенно нормальное пространство является наследственно нормальным (см. § 14, VI).

Следствие 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — конечная система компактных подмножеств некоторого $\mathcal{T}_2$-пространства $\mathscr{X}$. Пусть $\boldsymbol{R}$, в соответствии с прежними нашими предположениями, — семейство открытых множеств, обладающее следующим свойством отделимости: если*

(3) $$A_r \cap A_s = 0, \quad x \in A_r \quad \text{и} \quad y \in A_s,$$

то существует $G \in \boldsymbol{R}$, такое, что

(4) $$x \in G \quad \text{и} \quad y \notin \overline{G}.$$

Тогда $\boldsymbol{R}$ содержит конечное семейство $\boldsymbol{R}^*$, обладающее указанным свойством отделимости.

Доказательство. Если $m = 2$, то следствие непосредственно вытекает из леммы в предположении, что $\boldsymbol{R}^*$ есть семейство всех множеств G_j^i.

Следовательно, если $A_r \cap A_s = 0$, то существует конечное семейство $\boldsymbol{R}_{r,s} \subset \boldsymbol{R}$, такое, что для каждых $x \in A_r$ и $y \in A_s$ существует $G \in \boldsymbol{R}_{r,s}$, удовлетворяющее (4).

Пусть $\boldsymbol{R}^*$ — объединение всех $\boldsymbol{R}_{r,s}$, таких, что $A_r \cap A_s = 0$; тогда $\boldsymbol{R}^*$ — искомое семейство.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{X}$ есть компактное $\mathcal{T}_2$-пространство со счетной открытой базой. Тогда $\mathscr{X}$ метризуемо.*

По теореме 3 пространство $\mathscr{X}$ является нормальным, а по метризационной теореме Урысона (см. § 22, II, теорема 1) каждое нормальное $\mathcal{T}_2$-пространство со счетной базой метризуемо.

Замечание 2. По определению нормальности если множества A и B замкнуты и не пересекаются, то существуют открытые непересекающиеся множества G и H, такие, что

$$A \subset G \quad \text{и} \quad B \subset H. \tag{5}$$

Если пространство компактно, то это утверждение можно усилить следующим образом.

Следствие 3. *Пусть $\mathscr{X}$ есть компактное $\mathcal{T}_2$-пространство, и пусть $\boldsymbol{B}$ — его открытая база. Пусть, далее, $\boldsymbol{B}_s$ обозначает семейство конечных объединений элементов $\boldsymbol{B}$. Если множества A и B замкнуты и не пересекаются, то существуют непересекающиеся множества $G \in \boldsymbol{B}_s$ и $H \in \boldsymbol{B}_s$, удовлетворяющие* (5).

Доказательство. По теореме 3 пространство $\mathscr{X}$ нормально. Следовательно, существуют открытые непересекающиеся множества G_0 и H_0, удовлетворяющие (5). Так как $\boldsymbol{B}$ — открытая база $\mathscr{X}$, то существует покрытие множества A, состоящее из элементов $\boldsymbol{B}$, содержащихся в G_0, и поскольку A компактно, это покрытие можно предполагать конечным. Обозначим через G объединение элементов этого покрытия. Множество H определяется аналогично.

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное совершенно нормальное $\mathcal{T}_1$-пространство. Пусть множество G открыто, а множество F замкнуто. Тогда существуют две бесконечные последовательности $G_1, G_2, \ldots$ и $H_1, H_2, \ldots$, такие, что*

$$G = \bigcup_n G_n, \quad \overline{G}_n \subset G_{n+1}, \quad G_n \in \boldsymbol{B}_s, \tag{6}$$

и

$$F = \bigcap_n H_n, \quad H_n \supset \overline{H}_{n+1}, \quad H_n \in \boldsymbol{B}_s \tag{7}$$

(где $\boldsymbol{B}_s$ — то же, что и в следствии 3).

Доказательство. Так как $\mathscr{X}$ совершенно нормально, то $G = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где F_n замкнуты. Определим G_n по индукции следующим образом. Так как F_1 компактно, существует $G_1 \in \boldsymbol{B}_s$, такое, что $F_1 \subset G_1$ и $\overline{G}_1 \subset G$. Так как $F_n \cup \overline{G}_{n-1}$ компактно, существует $G_n \in \boldsymbol{B}_s$, такое, что $(F_n \cup \overline{G}_{n-1}) \subset G_n$ и $\overline{G}_n \subset G$. Следовательно, (6) выполняется.

Для доказательства (7) представим F в виде $F = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots$, где Q_n открыты. Пусть множество $H_1 \in \boldsymbol{B}_s$ таково, что $F \subset H_1 \subset Q_1$, и вообще пусть $H_n \in \boldsymbol{B}_s$, $F \subset H_n \subset Q_n$ и $\overline{H}_n \subset H_{n-1}$.

Теорема 4. *Если компактное пространство имеет счетную открытую базу, то семейство множеств, одновременно замкнутых и открытых, счетно.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — открытая база рассматриваемого пространства. Для данного открытого множества G положим $G = R_{k_1} \cup R_{k_2} \cup \ldots$. Если G замкнуто, то мы имеем $G = R_{k_1} \cup \ldots \cup R_{k_n}$ для некоторого n. Положим $\sigma(G) = (k_1, \ldots, k_n)$. Так как $\sigma(G) \neq \sigma(G_1)$ при $G \neq G_1$, а множество всех конечных систем положительных целых чисел счетно, то теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{X} = A \cup B$, где A и B компактны; тогда $\mathcal{X}$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{G_t\}$ — покрытие $\mathcal{X}$. Так как A и B компактны, существуют две конечные системы $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_m$, такие, что

$$A \subset G_{u_1} \cup \ldots \cup G_{u_n} \quad \text{и} \quad B \subset G_{v_1} \cup \ldots \cup G_{v_m}.$$

Отсюда $\mathcal{X} \subset G_{u_1} \cup \ldots \cup G_{u_n} \cup G_{v_1} \cup \ldots \cup G_{v_m}$.

Теорема 6. (Обобщенная теорема Бэра[1].) *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство (или, более общо, счетно-компактное $\mathcal{T}_3$-пространство), и пусть $E = N_1 \cup N_2 \cup \ldots$, где N_n нигде не плотны. Тогда E является граничным множеством.*

Доказательство. Пусть G — произвольное открытое непустое множество. Мы должны показать, что

$$(8) \qquad G - E \neq 0.$$

Определим бесконечную последовательность открытых множеств $G_0, G_1, \ldots$, такую, что

$$(9) \qquad G_0 = G \quad \text{и} \quad 0 \neq \overline{G}_n \subset G_{n-1} - N_n \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

[1]) Чех [6, стр. 838]. Ср. Сикорский [1, стр. 256, примечание]. Ср. также § 34, IV (случай полных метрических пространств).

Доказательство проведем по индукции. Пусть $n \geqslant 1$. Так как N_n нигде не плотно и $G_{n-1} \neq 0$ (по предположению), существует открытое множество H_n, такое, что $0 \neq H_n \subset G_{n-1} - N_n$. Так как пространство $\mathscr{X}$ регулярно (по теореме 3), существует открытое множество G_n, такое, что $0 \neq \overline{G}_n \subset H_n$. Отсюда вытекает формула (9). Следовательно, по свойству Кантора (I (2')) мы имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \neq 0$. Отсюда получается (8), так как

$$(10) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (G - N_n) = G - \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = G - E.$$

Следующее утверждение будет использовано позже.

Следствие 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное совершенно нормальное $\mathscr{T}_1$-пространство. Пусть $\boldsymbol{B}$ — открытая база $\mathscr{X}$ и A — некоторое $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество.*

Тогда существует последовательность $G_1, G_2, \ldots$ в $\boldsymbol{B}$, такая, что

$$(11) \qquad A \subset \bigcup_n G_n,$$

$$(12) \qquad \overline{\bigcup_n G_n} \subset \bigcup_n \overline{G}_n \cup \overline{A}.$$

Доказательство. Положим

$$(13) \qquad A = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \quad \text{где} \quad F_k = \overline{F}_k.$$

Пусть в соответствии с (7)

$$(14) \quad \overline{A} = H_1 \cap H_2 \cap \ldots, \text{ где } H_k \text{ открыты и } \overline{H_{k+1}} \subset H_k.$$

Следовательно, $F_k \subset H_k$, и, поскольку F_k компактно, существует конечная система множеств $G_1^k, \ldots, G_{m_k}^k$ в $\boldsymbol{B}$, такая, что

$$(15) \quad F_k \subset G_1^k \cup \ldots \cup G_{m_k}^k \quad \text{и} \quad G_i^k \subset H_k \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant m_k.$$

Расположим множества G_i^k, где $k = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant i \leqslant m_k$, в бесконечную последовательность $G_1, G_2, \ldots$. Покажем, что условия (11) и (12) выполняются. Соотношение (11) есть прямое следствие (13) и (15).

Для того чтобы доказать (12), рассмотрим для данного k произвольное $j > k$. Согласно (15) и (14),

$$G_i^j \subset H_j \subset H_k, \quad \text{откуда} \quad G_n \subset H_k$$

для достаточно большого n. Поэтому $(G_n \cup G_{n+1} \cup \ldots) \subset H_k$ и, следовательно,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n \cup G_{n+1} \cup \ldots} \subset \overline{H}_k, \text{ откуда } \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n \cup G_{n+1} \cup \ldots} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{H}_k = \overline{A};$$

(12) следует отсюда в силу соотношения (см. § 4, III (9))

$$\overline{\bigcup_n G_n} = \bigcup_n \overline{G}_n \cup \bigcap_n \overline{G_n \cup G_{n+1} \cup \ldots} .$$

Замечание 3. Условия, появляющиеся в определениях $\mathcal{T}_2$-пространств, регулярных и вполне регулярных пространств, могут быть усилены следующим образом с помощью понятия компактности.

(i) *Если $\mathcal{X}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство и A, B — два непересекающихся компактных подмножества пространства $\mathcal{X}$, то существуют два непересекающихся открытых множества G и H, таких, что $A \subset G$ и $B \subset H$.*

Это следует из леммы к теореме 3.

(ii) *Если $\mathcal{X}$ регулярно, A компактно, F замкнуто и $A \cap F = 0$, то существует такое открытое множество G, что $A \subset G$ и $\overline{G} \cap F = 0$.*

В самом деле, для каждого $x \in A$ существует такое открытое множество G_x, что $x \in G_x$ и $\overline{G}_x \cap F = 0$. Так как A компактно, существуют такие $x_1, \ldots, x_n$, что $A \subset G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}$ и $\overline{G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}} \cap F = 0$.

(iii) *Если $\mathcal{X}$ является вполне регулярным $\mathcal{T}_1$-пространством, C компактно и F — такое замкнутое множество, что $F \cap C = 0$, то существует непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}$, такое, что*

$$f(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in C \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in F.$$

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{X}$ вполне регулярно, для каждой точки $p \in C$ существует непрерывное отображение $f_p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}$, такое, что $f_p(p) = 0$ и $f_p(x) = 1$ для $x \in F$. Обозначим через J интервал $0 \leqslant t < 1/2$. Очевидно, семейство $\{f_p^{-1}(J)\}$ есть открытое покрытие C. Поэтому в силу компактности C существуют такие $p_1, \ldots, p_n$, что

$$C \subset f_{p_1}^{-1}(J) \cup \ldots \cup f_{p_n}^{-1}(J).$$

Положим $h(x) = \min\{f_{p_1}(x), \ldots, f_{p_n}(x)\}$. Легко видеть, что функция f, определенная условием: $\frac{1}{2} f(x)$ есть наибольшее из двух чисел $h(x)-\frac{1}{2}$ и 0, является искомым отображением пространства $\mathcal{X}$ в $\mathcal{J}$.

III. Непрерывные отображения.

Теорема 1. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathcal{X}$ компактно и $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывное отображение на. Пусть $\{G_t\}$ — открытое покрытие $\mathcal{Y}$. Тогда $\{f^{-1}(G_t)\}$ есть открытое покрытие пространства $\mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X}$ компактно, существуют $t_1, \ldots, t_n$, такие, что

$$\mathcal{X}=f^{-1}(G_{t_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{t_n}), \quad \text{откуда} \quad \mathcal{Y}=G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}.$$

Теорема 2. *Каждое непрерывное отображение компактного пространства в $\mathcal{T}_2$-пространство есть замкнутое отображение.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ компактно и отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно. Пусть множество $F \subset \mathcal{X}$ замкнуто. По теореме II, 2 множество F компактно. Следовательно, по теореме 1 множество $f(F)$ компактно и потому, согласно теореме II, 1, замкнуто (так как $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство).

Теорема 3. *Всякое взаимно однозначное и непрерывное отображение компактного пространства в $\mathcal{T}_2$-пространство есть гомеоморфизм.*

Эта теорема следует из теоремы 2, так как всякое взаимно однозначное замкнутое отображение есть гомеоморфизм (см. § 13, XIII).

Теорему 3 можно обобщить следующим образом.

Пусть задано отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; обозначим через B множество тех значений f, которые принимаются точно в одной точке $x \in \mathcal{X}$, т. е.

$$y \in B \equiv \{f^{-1}(y) \text{ состоит из единственной точки}\}.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{X}$ компактно, $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство и отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно. Тогда сужение $f \mid f^{-1}(B)$ есть гомеоморфизм.*

Это следует из того факта (см. § 13, XIII, теорема 1), что если отображение f непрерывно и замкнуто, то для любого $C \subset \mathcal{Y}$ сужение $g=f \mid f^{-1}(C)$ замкнуто (а если $C=B$, то g, очевидно, взаимно однозначно).

Замечание 1. Предположение компактности пространства $\mathscr{X}$ существенно. Так, например, $z=e^{ix}$ есть непрерывное взаимно однозначное преобразование пространства $0 \leqslant x < 2\pi$ на окружность $|z|=1$, не являющееся гомеоморфизмом. (См. также следствие 4а ниже.)

Более того, можно определить *два не гомеоморфных пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, таких, что каждое из них может быть получено из другого с помощью непрерывного и взаимно однозначного отображения* [1]).

Именно, пусть $\mathscr{X}$ есть объединение открытых интервалов $(3n,\ 3n+1)$ и изолированных точек вида $3n+2$, где $n \geqslant 0$. Пространство $\mathscr{Y}$ получается из $\mathscr{X}$ заменой точки 2 на точку 1. Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ определяется условиями: $f(x)=x$ для $x \neq 2$ и $f(2)=1$.

Отображение $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ определяется следующим образом:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{для} \quad x \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{2}-1 & \text{для} \quad 3<x<4, \\ x-3 & \text{для} \quad x \geqslant 5. \end{cases}$$

Теорема 4 [2]). *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и F — непустое замкнутое подмножество в $\mathscr{X}$. Тогда существуют компактное $\mathcal{T}_2$-пространство $\mathscr{Y}$, точка $y_0 \in \mathscr{Y}$ и непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, такие, что $f(F)=(y_0)$ и f есть гомеоморфизм множества $\mathscr{X}-F$ на множество $\mathscr{Y}-(y_0)$.*

Именно, пространство $\mathscr{Y}$ есть пространство разбиения (с фактортопологией, см. § 19, I) пространства $\mathscr{X}$, состоящее из множества F и одноточечных подмножеств пространства $\mathscr{X}-F$.

(Следовательно, $\mathscr{Y}$ получается из $\mathscr{X}$ путем «отождествления» точек, принадлежащих F.)

Доказательство. Очевидно, рассматриваемое разбиение является полунепрерывным сверху (каким бы ни было $\mathcal{T}_1$-пространство $\mathscr{X}$), т. е. для каждого замкнутого множества $A \subset \mathscr{X}$ объединение всех элементов разбиения, которые пересекают A, замкнуто. Отсюда следует (по теореме 5 из § 19, II), что нормальность $\mathscr{X}$ влечет за собой нормальность $\mathscr{Y}$. Так как пространство $\mathscr{Y}$ есть непрерывный образ $\mathscr{X}$ (по теореме 2, § 19, II),

[1]) См. Куратовский [2]. По этим вопросам см. также де Гроот [3].

[2]) Для метрического $\mathscr{X}$ ср. с теоремой 1 из § 22, IV.

то $\mathcal{Y}$ — компактное пространство (по теореме 1), и доказательство завершено.

Следствие 4а. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и $G \subset \mathcal{X}$ — открытое множество. Тогда существуют (компактное) $\mathcal{T}_2$-пространство $\mathcal{Y}$ и непрерывное отображение f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такие, что $f \mid G$ есть взаимно однозначное отображение G на $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Пусть $a \in G$ — фиксированная точка; положим в теореме 4

$$F = (a) \cup (\mathcal{X} - G).$$

Замечание 2. Обратим внимание на следующие свойства непрерывных отображений компактных пространств (или, более общо, непрерывных замкнутых отображений топологических пространств).

Пусть $\mathcal{X}$ компактно, $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство и f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Справедливы следующие утверждения:

(i) *если $V \subset \mathcal{Y}$, то $\overline{V} \subset f\left[\overline{f^{-1}(V)}\right]$;*

(ii) *если $V_1 \cup V_2 \subset \mathcal{Y}$, $f^{-1}(V_1)$ и $f^{-1}(V_2)$ отделимы, то отделимы V_1 и V_2.*

Доказательство. (i) Мы имеем

$$V = ff^{-1}(V) \subset f\left[\overline{f^{-1}(V)}\right], \quad \text{откуда} \quad \overline{V} \subset \overline{f\left[\overline{f^{-1}(V)}\right]}.$$

Но по теореме 2 $\overline{f\left[\overline{f^{-1}(V)}\right]} = f\left[\overline{f^{-1}(V)}\right]$.

(ii) Согласно (i) и § 3, III (13), мы имеем

$$\overline{V}_1 \cap V_2 \subset f\left[\overline{f^{-1}(V_1)}\right] \cap V_2 = f\left[\overline{f^{-1}(V_1)} \cap f^{-1}(V_2)\right].$$

По предположению $\overline{f^{-1}(V_1)} \cap f^{-1}(V_2) = 0$, следовательно, $\overline{V}_1 \cap V_2 = 0$. Аналогично $V_1 \cap \overline{V}_2 = 0$.

IV. Прямые произведения.

Теорема 1 [1]). *Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное топологическое пространство, и пусть пространство $\mathcal{Y}$ компактно. Тогда проекция произведения $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ на $\mathcal{X}$-ось есть замкнутое отображение $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ на $\mathcal{X}$.*

Эквивалентно: *если G открыто в $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, то множество Q всех точек $x \in \mathcal{X}$, таких, что $(x) \times \mathcal{Y} \subset G$, открыто в $\mathcal{X}$.*

[1]) Для $\mathcal{L}^*$-пространств см. § 20, V, теорема 7.

Доказательство. Докажем теорему во второй формулировке. По определению топологии произведения множество G имеет вид $G = \bigcup_t (G_t \times H_t)$, где G_t открыты в $\mathscr{X}$, а H_t открыты в $\mathscr{Y}$. Пусть x_0 — фиксированная точка Q, т. е. $(x_0) \times \mathscr{Y} \subset G$. Тогда для каждого $y \in \mathscr{Y}$ существует индекс $t(y)$, такой, что $\langle x_0, y\rangle \in G_{t(y)} \times H_{t(y)} \subset G$. Следовательно,

$$(1) \qquad x_0 \in G_{t(y)}, \quad y \in H_{t(y)} \quad \text{и} \quad G_{t(y)} \times H_{t(y)} \subset G.$$

Так как семейство $\{H_{t(y)}\}$, где y пробегает $\mathscr{Y}$, есть открытое покрытие пространства $\mathscr{Y}$, то существует конечная система $y_1, \ldots, y_n$, такая, что

$$(2) \qquad \mathscr{Y} = H_{t(y_1)} \cup \ldots \cup H_{t(y_n)}.$$

Положим $R(x_0) = G_{t(y_1)} \cap \ldots \cap G_{t(y_n)}$. Тогда $R(x_0)$ открыто, $x_0 \in R(x_0)$ (согласно (1)) и, согласно (2) и (1),

$$[R(x_0) \times \mathscr{Y}] \subset \left[(G_{t(y_1)} \times H_{t(y_1)}) \cup \ldots \cup (G_{t(y_n)} \times H_{t(y_n)})\right] \subset G.$$

Отсюда $R(x_0) \subset Q$. Так как $R(x_0)$ открыто и содержит x_0, из этого следует, что Q открыто.

Следствие 1a. *При тех же предположениях проекция на $\mathscr{X}$-ось $\boldsymbol{F}_\sigma$-множества из $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество в пространстве $\mathscr{X}$.*

Следствие 1b. *При тех же предположениях пусть $\varphi(x, y)$ — функция высказывания, определенная на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тогда если множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x, y} \varphi(x, y)$ замкнуто (соотв. типа $\boldsymbol{F}_\sigma$), то таковым является и множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} \mathop{\bigvee}\limits_{y} \varphi(x, y)$; если $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x, y} \varphi(x, y)$ открыто (соотв. типа $\boldsymbol{G}_\delta$), то таковым будет и множество $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} \mathop{\bigwedge}\limits_{y} \varphi(x, y)$.*

В самом деле, $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x} \mathop{\bigvee}\limits_{y} \varphi(x, y)$ есть проекция $\mathop{\mathsf{E}}\limits_{x, y} \varphi(x, y)$ на $\mathscr{X}$-ось (см. § 2, V, теорема 1).

Замечание 1. В этом же направлении имеет место следующее утверждение (принадлежащее Уоллесу)[1].

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два (произвольных) топологических пространства, A и B — два компактных подмножества в $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, а U — открытое подмножество в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, содержащее $A \times B$. Тогда существуют два открытых подмножества G и H пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, таких, что $A \subset G$, $B \subset H$ и $G \times H \subset U$.

В качестве приложения следствия 1b рассмотрим следующее утверждение.

---

[1]) См. Келли [1].

Следствие 1с. *Пусть $\mathscr{X}$ компактно и совершенно нормально, $\mathscr{Y}$ — некоторое $\mathcal{T}_2$-пространство и отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно. Тогда множество B_f точек x, таких, что*

$$(3) \qquad (x' \neq x) \Rightarrow [f(x') \neq f(x)],$$

есть G_δ-множество.

Доказательство. Согласно (3), $B_f = \underset{x}{\mathsf{E}} \underset{x'}{\bigwedge} \{[f(x) = f(x')] \Rightarrow \Rightarrow (x = x')\}$. Так как множество $\underset{x,\, x'}{\mathsf{E}} [f(x) = f(x')]$ замкнуто (см. § 15, IV, теорема 3), то множество точек (x, x'), удовлетворяющих условию в скобках $\{\ \}$, является G_δ-множеством (объединением открытого и замкнутого множеств). Из этого следует, что B_f также является G_δ-множеством.

Замечание 2. Предположение относительно компактности $\mathscr{Y}$, сделанное в следствии 1а, можно заменить более слабым предположением: $\mathscr{Y}$ есть объединение счетной последовательности компактных множеств: $\mathscr{Y} = Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots$.

Действительно, если $S = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где $\overline{F}_i = F_i \subset \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, то мы имеем

$$\underset{y \in \mathscr{Y}}{\bigvee} \langle x, y \rangle \in S \equiv \underset{n,\, m}{\bigvee} \underset{y}{\bigvee} (\langle x, y \rangle \in F_n)(y \in Y_m),$$

откуда

$$\underset{x}{\mathsf{E}} \underset{y \in \mathscr{Y}}{\bigvee} (\langle x, y \rangle \in S) = \bigcup_{n,\, m} \Big\{ \underset{x}{\mathsf{E}} \underset{y \in Y_m}{\bigvee} (\langle x, y \rangle \in F_n) \Big\},$$

и для данных n и m множество в скобках $\{\ \}$ замкнуто по теореме 1.

Замечание 3. Напомним, что проекция открытого множества есть открытое множество (каково бы ни было пространство $\mathscr{Y}$). Но проекция G_δ-множества может и не быть G_δ-множеством. Действительно, проекции G_δ-множеств произведения $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ являются аналитическими множествами в $\mathcal{J}$ (см. § 38, IV).

Теорема 2. *Пусть $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда множество $I = \underset{x\ y}{\mathsf{E}} (y = f(x))$ замкнуто (в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$).*

Доказательство. Необходимость этого условия была доказана в § 15, V (теорема 2), ибо $\mathscr{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство.

Для того чтобы доказать его достаточность, предположим, что $F = \overline{F} \subset \mathscr{Y}$. Мы должны показать, что $f^{-1}(F)$ замкнуто в $\mathscr{X}$. Согласно теореме 1, достаточно показать, что множество $f^{-1}(F)$ есть проекция множества $I \cap (\mathscr{X} \times F) = \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} (y = f(x))(y \in F)$ на

$\mathscr{X}$-ось. Но это следует из очевидного соотношения

$$[x \in f^{-1}(F)] \equiv [f(x) \in F] \equiv \bigvee_y (y = f(x))(y \in F).$$

Замечание 4. Без предположения компактности пространства $\mathscr{Y}$ теорема перестает быть верной, как показывает следующий пример: $\mathscr{X} = \mathscr{S}$, $\mathscr{Y} = \mathscr{E}$, $f(x) = 1/x$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Теорема 3. *Прямое произведение $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ двух компактных пространств есть компактное пространство.*

Доказательство. Легко видеть, что всякое измельчение существенно бесконечного покрытия есть существенно бесконечное покрытие. Так как для всякого покрытия произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ существует измельчение, состоящее из множеств вида $G \times H$, где G открыто в $\mathscr{X}$, а H открыто в $\mathscr{Y}$, то достаточно показать, что каждое покрытие $\boldsymbol{C} = \{G_t \times H_t\}$ пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ содержит конечное подпокрытие.

Обозначим через $\boldsymbol{R}$ семейство всех открытых подмножеств Q пространства $\mathscr{X}$, таких, что для подходящей системы индексов $t_1, \ldots, t_n$ мы имеем

$$(4) \qquad Q \times \mathscr{Y} \subset (G_{t_1} \times H_{t_1}) \cup \ldots \cup (G_{t_n} \times H_{t_n}).$$

Покажем, что $\boldsymbol{R}$ есть покрытие пространства $\mathscr{X}$. Пусть $x_0 \in \mathscr{X}$. Так как $(x_0) \times \mathscr{Y} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{Y}$ и $\mathscr{Y}$ компактно, то $(x_0) \times \mathscr{Y}$ содержится в конечном подпокрытии покрытия $\boldsymbol{C}$:

$$(x_0) \times \mathscr{Y} \subset (G_{t_1} \times H_{t_1}) \cup \ldots \cup (G_{t_n} \times H_{t_n}).$$

По теореме 1 существует открытое множество Q, содержащее x_0 и удовлетворяющее (4). Следовательно, $\boldsymbol{R}$ есть покрытие $\mathscr{X}$. Так как $\mathscr{X}$ компактно, то мы имеем $\mathscr{X} = Q_1 \cup \ldots \cup Q_k$. Согласно (4),

$$Q_i \times \mathscr{Y} \subset (G_{t_{i,1}} \times H_{t_{i,1}}) \cup \ldots \cup (G_{t_{i,n(i)}} \times H_{t_{i,n(i)}}) \quad \text{для} \quad i \leqslant k.$$

Следовательно,

$$\mathscr{X} \times \mathscr{Y} = \bigcup_{i=1}^{k} (Q_i \times \mathscr{Y}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{n_i} G_{t_{i,j}} \times H_{i,j}.$$

Замечание 5. *Произведение двух счетно-компактных регулярных пространств может и не быть счетно-компактным* [1]).

Однако *произведение компактного пространства и счетно-компактного пространства есть счетно-компактное пространство* [2]).

---

[1]) См. Новак [1].

[2]) Теорема Катетова. См. Новак [1, стр. 111].

Напомним, что счетное произведение счетно-компактных $\mathscr{L}^*$-пространств есть счетно-компактное пространство (§ 20, V, теорема 4).

Замечание 6. Теорему 3 можно легко распространить на произведение любого конечного числа сомножителей. Менее элементарным путем ее можно распространить, как мы покажем ниже, на произвольное число сомножителей.

Теорема 4. (Теорема Тихонова о произведении[1].) *Произведение $\mathfrak{Z} = \prod_{t \in T} \mathscr{X}_t$ компактных пространств $\mathscr{X}_t$ есть компактное пространство. В частности, обобщенный куб $\mathscr{J}^{\aleph_\alpha}$ компактен при любом* α.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}$ — открытая предбаза пространства $\mathfrak{Z}$, состоящая из множеств (см. § 16, I (1))

(5) $\mathfrak{G}_{t,G} = \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{z}^t \in G)$, где $t \in T$ и множество $G \subset \mathscr{X}_t$ открыто.

Предположим, что $\mathfrak{Z}$ не является компактным. Тогда по лемме Александера (п. I) найдется существенно бесконечное покрытие $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{A}$.

Обозначим через $\boldsymbol{V}_t$ семейство множеств, определенных условием

$$(6) \qquad G \in \boldsymbol{V}_t \equiv \mathfrak{G}_{t,G} \in \boldsymbol{U}.$$

Предположим, что существует такое $t \in T$, что $\boldsymbol{V}_t$ есть покрытие $\mathscr{X}_t$. Так как $\mathscr{X}_t$ компактно, то мы имеем

(7) $\mathscr{X}_t = G_1 \cup \ldots \cup G_n$, где $G_i \in \boldsymbol{V}_t$, т. е. $\mathfrak{G}_{t,G_i} \in \boldsymbol{U}$ для $i \leqslant n$.

Согласно (5), отсюда следует, что

$$\bigcup_i \mathfrak{G}_{t,G_i} = \bigcup_i \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{z}^t \in G_i) = \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}} \bigvee_i (\mathfrak{z}^t \in G_i) = \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{z}^t \in \bigcup_i G_i) =$$
$$= \underset{\mathfrak{z}}{\mathsf{E}}(\mathfrak{z}^t \in \mathscr{X}_t) = \mathfrak{Z}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{U}$ содержит конечное покрытие пространства $\mathfrak{Z}$.

Таким образом, мы можем предположить, что, каково бы ни было $t \in T$, $\boldsymbol{V}_t$ не есть покрытие $\mathscr{X}_t$. Это означает, что существует такое $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$, что

$$(8) \qquad G \in \boldsymbol{V}_t \Rightarrow \mathfrak{z}^t \notin G, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{G}_{t,G} \in \boldsymbol{U} \Rightarrow \mathfrak{z}^t \notin G.$$

---

[1]) Тихонов [1]. Другие доказательства теоремы Тихонова см. в работах: Александер [8]; Чех [6, стр. 830]; Фринк и Шевалле [1]; Такки [1]; Бурбаки [1, гл. I, § 9, п. 5].

Так как U есть покрытие пространства $\mathfrak{Z}$ и $U \subset A$, то существует пара (t, G), такая, что $\mathfrak{z} \in \mathfrak{G}_{t,G} \in U$. Но это находится в противоречии с соотношениями (5) и (8), поскольку

$$\mathfrak{z} \in \mathfrak{G}_{t,G} \Rightarrow \mathfrak{z}^t \in G, \quad \text{тогда как} \quad \mathfrak{G}_{t,G} \in U \Rightarrow \mathfrak{z}^t \notin G.$$

Следствие. *Следующие свойства пространства $\mathcal{X}$ топологически эквивалентны:*

(i) *$\mathcal{X}$ — вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство;*

(ii) *$\mathcal{X}$ — подмножество обобщенного куба $\mathcal{I}^{\aleph_\alpha}$;*

(iii) *$\mathcal{X}$ — подмножество компактного $\mathcal{T}_2$-пространства.*

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) имеет место согласно § 16, V (теорема 5); (ii)$\Rightarrow$(iii), так как $\mathcal{Y}^{\aleph_\alpha}$ является компактным $\mathcal{T}_2$-пространством по теореме 3 и § 16, V (теорема 4); (iii)$\Rightarrow$(i), так как всякое компактное $\mathcal{T}_2$-пространство является по теореме 3 п. II нормальным и, следовательно, вполне регулярным, а последнее свойство наследственно (§ 14, I, теорема 2).

Из теоремы 4 вытекает следующая[1])

Теорема 5. *Пусть (T, X, f) — обратный спектр* (см. § 3, XIII, стр. 36), *и пусть X_t компактно для каждого $t \in T$. Тогда предел обратного спектра* $\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(T, X, f)$, *обозначаемый также* $\underset{t, t_0 \leqslant t_1}{\mathrm{Lim}} \{X_t, f_{t_0 t_1}\}$, *компактен.*

Более того, *если $X_t \neq 0$ для каждого $t \in T$, то этот предел не пуст.*

Замечание 7. Можно доказать следующую интересную теорему[2]).

Каждое компактное $\mathcal{T}_2$-пространство есть предел обратного спектра $\underset{t, t_0 \leqslant t_1}{\mathrm{Lim}} \{P_t, f_{t_0 t_1}\}$, *где P_t есть симплициальный полиэдр* (см. § 28, стр. 317), *а $f_{t_0 t_1}$ — симплициальное отображение $P_{t_1} \to P_{t_0}$.*

Добавим, что каждый полиэдр P_t есть нерв некоторого открытого конечного покрытия пространства $\mathcal{X}$ (см. § 28, стр. 326).

V. Компактификация вполне регулярных $\mathcal{T}_1$-пространств. Компактное пространство $\mathcal{Y}$ называется *компактификацией* пространства $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X}$ гомеоморфно всюду плотному подмножеству пространства $\mathcal{Y}$.

Например, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{S}_1$ являются компактификациями $\mathcal{E}$.

---

[1]) Доказательство см., например, в книге: Стинрод и Эйленберг [1, теорема 3.6].

[2]) См. Фрейденталь [2]; Пасынков [1, стр. 45]; Стинрод и Эйленберг [1].

В § 16, V (теорема 5) было показано, что для всякого вполне регулярного $\mathcal{T}_1$-пространства $\mathcal{X}$ существует обобщенный куб $\mathcal{I}^{\aleph_\alpha}$ (при подходящем α), который является компактификацией $\mathcal{X}$.

Более точно, $\aleph_\alpha = \overline{\overline{\Phi}}$, где $\Phi = \mathcal{I}^{\mathcal{X}}$, и требуемый гомеоморфизм $\mathfrak{z}: \mathcal{X} \to \mathfrak{W}$, где $\mathfrak{W} = (\mathcal{I}^{\Phi})_{\mathrm{set}}$, определяется условием:

(1) $[\mathfrak{z}(x)](\varphi) = \varphi(x)$ для каждого $\varphi \in \Phi$ и $x \in \mathcal{X}$.

Положим

(2) $$\beta\mathcal{X} = \overline{\mathfrak{z}(\mathcal{X})}.$$

Следовательно, $\beta\mathcal{X}$ есть компактификация пространства $\mathcal{X}$ (называемая *компактификацией Стоуна — Чеха* [1])).

Мы увидим, что эту компактификацию можно рассматривать как *максимальную* (среди $\mathcal{T}_2$-пространств)).

Обозначим через $\mathrm{pr}_\varphi(\mathfrak{w})$ для $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$ проекцию $\mathfrak{w}$ на φ-ю ось, т. е. (см. § 3, VIII)

(3) $$\mathrm{pr}_\varphi(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}(\varphi).$$

Мы имеем

(4) $$\mathrm{pr}_\varphi \circ \mathfrak{z} = \varphi,$$

так как, согласно (3) и (1),

$$(\mathrm{pr}_\varphi \circ \mathfrak{z})(x) = \mathrm{pr}_\varphi[\mathfrak{z}(x)] = [\mathfrak{z}(x)](\varphi) = \varphi(x).$$

Формула (4) дает

(5) $$\varphi \circ \mathfrak{z}^{-1} = \mathrm{pr}_\varphi \quad \text{для каждого} \quad \varphi \in \Phi,$$

так как $\varphi \circ \mathfrak{z}^{-1} = \mathrm{pr}_\varphi \circ \mathfrak{z} \circ \mathfrak{z}^{-1} \subset \mathrm{pr}_\varphi$, согласно § 3, III (20).

Отсюда следует

Лемма 1. *Пусть отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно. Тогда функция $f \circ \mathfrak{z}^{-1}: \mathfrak{z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ имеет непрерывное продолжение $f^*: \mathfrak{W} \to \mathcal{Y}$, а именно $f^* = \mathrm{pr}_f$.*

Другими словами, отождествляя $\mathcal{X}$ с $\mathfrak{z}(\mathcal{X})$, мы имеем

(6) $$f \subset f^*: \mathfrak{W} \to \mathcal{Y}.$$

Лемму 1 можно обобщить следующим образом.

---

[1]) См. Чех [6], где приводятся многочисленные свойства $\beta\mathcal{X}$; Стоун М. [2]. См. также Уолмен [1]; Скляренко [1, стр. 36]; Энгелькинг [1, стр. 231]; де Фрис [1]; Скляренко и Энгелькинг [1].

Лемма 2. *Пусть T — произвольное множество, и пусть отображение f: $\mathscr{X} \to (\mathcal{J}^T)_{\text{set}}$ непрерывно. Отождествим $\mathscr{X}$ с $\zeta(\mathscr{X})$. Тогда мы имеем*

(7) $\quad f \subset f^*$: $\mathfrak{W} \to (\mathcal{J}^T)_{\text{set}}$, *где f^* непрерывно.*

Действительно, обозначая t-ю координату f через f_t, мы получаем $f_t \subset f_t^*$: $\mathfrak{W} \to \mathcal{J}$, откуда следует, что составное отображение f^*, имеющее f_t^* своей t-й координатой (см. § 3, VIII (7)), удовлетворяет (7).

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство, $\mathscr{Y}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. Тогда, отождествляя $\mathscr{X}$ с $\zeta(\mathscr{X})$, мы имеем*

(8) $\quad f \subset g$: $\beta\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, *где g непрерывно.*

Доказательство. Так как $\mathscr{Y}$ является вполне регулярным $\mathcal{T}_1$-пространством, то (по теореме 3 п. II) его можно рассматривать как подмножество куба $(\mathcal{J}^T)_{\text{set}}$ для подходящего множества T. Таким образом, f: $\mathscr{X} \to (\mathcal{J}^T)_{\text{set}}$. Применяя соотношение (7), положим $g = f^* | \beta\mathscr{X}$. Отсюда следует, что $f \subset g$. Наконец, g: $\beta\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, так как из непрерывности g и компактности $\mathscr{Y}$ следует, что

$$g(\beta\mathscr{X}) = g(\overline{\mathscr{X}}) \subset \overline{g(\mathscr{X})} = \overline{f(\mathscr{X})} \subset \overline{\mathscr{Y}} = \mathscr{Y}.$$

Замечание. Компактификация, определенная выше, является *максимальной* в следующем смысле. Для любой заданной компактификации $\mathscr{Y}$ пространства $\mathscr{X}$ (где $\mathscr{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство) существует непрерывное отображение $\beta\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, которое тождественно на $\mathscr{X}$.

Сказанное является по существу другой формой предыдущей теоремы. Действительно, пусть h — топологическое вложение пространства $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ и $h \subset h^*$: $\beta\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Отождествляя x с $h(x)$, мы получим требуемое отображение $\beta\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$.

VI. Связь с метрическими пространствами.

Теорема 1. *Всякое компактное метрическое пространство является полным, вполне ограниченным и сепарабельным.*

Полнота компактных метрических пространств была доказана в § 33, II. По теореме 1 из § 21, IX каждое компактное метрическое пространство является вполне ограниченным, следовательно, сепарабельным (по теореме 3 из § 21, VIII).

Теорема 2. *Полное метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

Доказательство. Так как всякое компактное метрическое пространство вполне ограничено (по теореме 1), то нам нужно показать, что пространство $\mathscr{X}$ счетно-компактно, в предположении, что $\mathscr{X}$ полно и вполне ограничено.

Пусть A — произвольное бесконечное подмножество пространства $\mathscr{X}$. Согласно I (3′), достаточно показать, что $A^d \neq 0$.

Так как пространство $\mathscr{X}$ вполне ограничено, то мы имеем

$$\mathscr{X} = F_1^n \cup \ldots \cup F_{m_n}^n, \quad \text{где} \quad F_i^n = \overline{F_i^n} \quad \text{и} \quad \delta(F_i^n) < \frac{1}{n}.$$

Так как множество A бесконечно, то существует последовательность $k_1, k_2, \ldots$, такая, что множества $A \cap F_{k_1}^1$, $A \cap F_{k_1}^1 \cap F_{k_2}^2, \ldots$ бесконечны. По теореме Кантора о полных пространствах (§ 34, II) существует точка p, принадлежащая каждому множеству $F_{k_1}^1 \cap \ldots \cap F_{k_n}^n$ для $n = 1, 2, \ldots$. Так как диаметр этого множества меньше $1/n$, то отсюда следует, что шар с центром в точке p радиуса $1/n$ имеет бесконечное пересечение с множеством A. Следовательно, $p \in A^d$.

Замечание 1. Можно показать, что всякое некомпактное метрическое пространство гомеоморфно некоторому неполному пространству. Следовательно, метрическое пространство $\mathscr{X}$ компактно тогда и только тогда, когда всякое метрическое пространство, гомеоморфное $\mathscr{X}$, является полным [1].

Следствие 2а. *Подмножество пространства $\mathscr{E}^n$ $(n < \aleph_0)$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Если множество $A \subset \mathscr{E}^n$ компактно, то A замкнуто по теореме 1 п. II и ограничено по теореме 1 этого пункта.

С другой стороны, если множество $A \subset \mathscr{E}^n$ ограничено, то A является подмножеством некоторого куба $C \subset \mathscr{E}^n$. Так как C компактно, то, если A замкнуто, оно компактно (по теореме 2 п. II).

Замечание 2. *Всякое вполне ограниченное метрическое пространство $\mathscr{X}$ изометрично подмножеству некоторого компактного метрического пространства.*

По теореме Хаусдорфа (см. § 33, VII, стр. 420) пространство $\mathscr{X}$ изометрично подмножеству полного пространства $\mathscr{X}^*$. Замыкание $\overline{\mathscr{X}}$ (относительно $\mathscr{X}^*$) является вполне ограниченным и полным, следовательно, компактным (по теореме 2).

---

[1] См. Немыцкий и Тихонов [1].

Теорема 3. *Для $\mathcal{T}_2$-пространств свойство быть компактным и метризуемым инвариантно относительно непрерывных отображений.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство, $\mathcal{Y}$ — некоторое $\mathcal{T}_2$-пространство и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Мы должны показать, что пространство $\mathcal{Y}$ метризуемо (компактность $\mathcal{Y}$ есть следствие теоремы 1 п. III). Так как $\mathcal{Y}$ нормально (по теореме 3 п. II), то остается показать (согласно метризационной теореме Урысона, см. § 22, II, стр. 249), что $\mathcal{Y}$ имеет открытую счетную базу. Определим эту базу следующим образом. По теореме 1 пространство $\mathcal{X}$ сепарабельно. Следовательно, оно содержит открытую счетную базу $R_1, R_2, \ldots$. Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — последовательность всех конечных объединений множеств R_i. Докажем, что семейство множеств

$$(1) \qquad Q_n = \mathcal{Y} - f(\mathcal{X} - S_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

есть открытая база пространства $\mathcal{Y}$. Пусть множество $G \subset \mathcal{Y}$ открыто и $y \in G$. Покажем, что существует такое n, для которого

$$(2) \qquad y \in Q_n \subset G.$$

Действительно, множества $f^{-1}(y)$ и $f^{-1}(\mathcal{Y} - G)$ компактны и не пересекаются, поэтому (вследствие нормальности $\mathcal{X}$) существует такое n, что

$$(3) \qquad f^{-1}(y) \subset S_n \text{ и } S_n \cap f^{-1}(\mathcal{Y} - G) = 0, \text{ т. е. } S_n \subset f^{-1}(G).$$

Отсюда $\mathcal{X} - f^{-1}(G) \subset \mathcal{X} - S_n \subset \mathcal{X} - f^{-1}(y)$, т. е.

$$f^{-1}(\mathcal{Y} - G) \subset \mathcal{X} - S_n \subset f^{-1}(\mathcal{Y} - (y)),$$

и, следовательно, $\mathcal{Y} - G \subset f(\mathcal{X} - S_n) \subset \mathcal{Y} - (y)$, что дает соотношение (2).

Замечание 3. Теорему 3 можно усилить следующим образом. *Компактное $\mathcal{T}_2$-пространство, являющееся непрерывным образом сепарабельного метрического пространства, метризуемо* [1]).

Следствие 3а. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathcal{T}_2$-пространство $\mathcal{X}$ было компактным и метризуемым:*

---

[1]) Теорема Корсона. См. Майкл Э. [10, стр. 14]. См. также Корсон и Майкл [1] и Мищенко [1]. Аналогичные теоремы, в которых компактность не предполагается, но отображения (метрических пространств) предполагаются замкнутыми или открытыми, см. Стоун А. [2], Баланчандран [1]. Ср. также Произволов [1].

(i) $\mathscr{X}$ *гомеоморфно замкнутому подмножеству гильбертова куба* $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{\aleph_0}$;

(ii) $\mathscr{X}$ *является непрерывным образом канторова дисконтинуума* $\mathscr{C}$ (*при условии* $\mathscr{X} \neq 0$).

Доказательство. Предположим, что метрическое пространство $\mathscr{X}$ компактно. Тогда оно сепарабельно и по теореме Урысона (§ 22, II, теорема 1) $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{=} Y \subset \mathscr{H}$. Отсюда Y компактно и, следовательно, замкнуто. С другой стороны, если $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{=} Y = \overline{Y} \subset \mathscr{H}$, то Y, а, следовательно, $\mathscr{X}$ компактны.

Доказательство второй части следствия сводится к доказательству того, что если F $(\neq 0)$ есть замкнутое подмножество $\mathscr{H}$, то F есть непрерывный образ $\mathscr{C}$. Согласно следствиям 6а из § 16, II и 2 из § 26, II, существуют отображения g: $\mathscr{C} \to \mathscr{H}$ и h: $\mathscr{C} \to g^{-1}(F)$, оба непрерывные и на. Следовательно, и $g \circ h$: $\mathscr{C} \to F$ — непрерывное отображение на.

Теорема 4. (Теорема Вейерштрасса.) *Всякая непрерывная действительная функция f, определенная на компактном пространстве $\mathscr{X}$, ограничена и достигает своих точных нижней и верхней граней.*

Это следует из того факта, что $f(\mathscr{X})$ — замкнутое и ограниченное подмножество в $\mathscr{E}$ (по теореме 1 п. III, теореме 1 п. II и теореме 1 этого пункта).

Следствие 4а. *Всякое непустое компактное метрическое пространство $\mathscr{X}$ содержит две точки a и b, такие, что*

$$|a - b| = \delta(\mathscr{X}).$$

Это вытекает из теоремы 3 § 4 и теоремы 4, так как расстояние является непрерывным отображением пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ в $\mathscr{E}$.

Следствие 4b. *Если A компактно, B замкнуто и $A \cap B = 0$, то $\rho(A, B) > 0$ (мы предполагаем, что $A \neq 0 \neq B$).*

Доказательство. Очевидно, что $\rho(A, B) = \inf\limits_{x \in A} \rho(x, B)$. Так как $\rho(x, B)$ представляет собой непрерывную функцию, определенную на компактном множестве, то существует такое x_0, что $\inf \rho(x, B) = \rho(x_0, B)$, а так как $x_0 \notin \overline{B}$, то мы имеем $\rho(x_0, B) > 0$. Это завершает доказательство.

Следствие 4с. *Пусть $\{F_t\}$, где $t \in T$, — семейство замкнутых подмножеств компактного метрического пространства, такое, что $\bigcap\limits_t F_t = 0$; тогда существует $\varepsilon > 0$ (называемое коэффициен-*

том Лебега системы $\{F_t\}$), такое, что всякое множество A диаметра $<\varepsilon$ не пересекается хотя бы с одним из множеств F_t.

Доказательство. Заметим, что в силу компактности пространства мы имеем $F_{t_1} \cap \ldots \cap F_{t_n} = 0$ для подходящей системы индексов $t_1, \ldots, t_n$. Положим

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{i, j \leqslant n} |x_i - x_j|, \quad \text{где} \quad x_k \in F_{t_k},$$

и обозначим через ε нижнюю границу f (заметим, что $f\colon F_{t_1} \times \ldots \times F_{t_n} \to \mathscr{E}$ непрерывно). Так как $F_{t_1} \cap \ldots \cap F_{t_n} = 0$, мы имеем $\varepsilon > 0$.

Предположим, что $A \cap F_t \neq 0$ для каждого $t \in T$. Пусть $x_k \in A \cap F_{t_k}$. Тогда $\delta(A) \geqslant \delta(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \varepsilon$.

Следующее утверждение двойственно следствию 3а.

Следствие 4d. *Пусть* $\mathbf{C}$ — *открытое покрытие компактного метрического пространства* $\mathscr{X}$. *Тогда существует число* $\varepsilon > 0$, *такое, что всякое покрытие пространства* $\mathscr{X}$, *состоящее из множеств диаметра* $<\varepsilon$, *есть измельчение* $\mathbf{C}$.

Теорема 5 (Гейне[1]). *Если метрическое пространство* $\mathscr{X}$ *компактно и отображение* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ *непрерывно, то* f *равномерно непрерывно. Это означает, что для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что*

(1) $\quad |x - x'| < \delta$ *влечет за собой* $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Доказательство. Предположим, что справедливо противное. Тогда существуют две последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $x'_1, x'_2, \ldots$, такие, что

(2) $$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Так как пространство компактно, то можно предположить, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ сходится: $\lim x_n = x$. Отсюда

$$\lim x'_n = x \quad \text{и} \quad \lim f(x_n) = f(x) = \lim f(x'_n),$$

но это противоречит неравенствам (2).

Замечание 4. Теорему 5 можно легко доказать, используя логические символы. Положим (для данного $\varepsilon > 0$)

$$\varphi_n(x, x') \equiv \{[|x - x'| \leqslant 1/n] \Rightarrow [|f(x) - f(x')| < \varepsilon]\}.$$

Мы должны показать, что в формуле $\bigwedge_x \bigvee_n \bigwedge_{x'} \varphi_n(x, x')$ (которая

---

[1]) В случае интервала доказано Гейне [1].

истинна по предположению) кванторы $\bigwedge_x$ и $\bigvee_n$ можно переставить. Далее, так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,x'} \varphi_n(x, x')$ открыто, то множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x} \bigwedge_{x'} \varphi_n(x, x')$ также открыто (согласно следствию 1b, п. IV), и так как

$$\bigwedge_{x'} \varphi_n(x, x') \Rightarrow \bigwedge_{x'} \varphi_{n+1}(x, x'),$$

то, согласно I (iii),

$$\bigwedge_x \bigvee_n \Big(\bigwedge_{x'} \varphi_n(x, x')\Big) \equiv \bigvee_n \bigwedge_x \Big(\bigwedge_{x'} \varphi_n(x, x')\Big).$$

Теорема 6[1]). *Пусть $\mathscr{X}$ — сепарабельное метрическое пространство. Если $\mathscr{X}$ разреженно, то существует разреженная метрическая компактификация $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Так как $\mathscr{X}$ счетно (см. § 23, V), его можно рассматривать как подмножество в $\mathscr{N}$ (пространстве всех иррациональных чисел между 0 и 1). Далее, так как всякое метрическое сепарабельное разреженное множество есть множество типа G_δ (§ 24, III, теорема 1) и всякое G_δ-подмножество пространства $\mathscr{N}$ гомеоморфно замкнутому подмножеству в $\mathscr{N}$ (§ 36, II, следствие), то мы можем предположить, что $\mathscr{X}$ замкнуто относительно $\mathscr{N}$. Другими словами, обозначая через $\overline{\mathscr{X}}$ замыкание $\mathscr{X}$ относительно $\mathscr{J}$, мы имеем $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}} \cap \mathscr{N}$.

Замыкание $\overline{\mathscr{X}}$ и есть требуемая компактификация $\mathscr{X}$. Это следует из того факта, что $\overline{\mathscr{X}} - \mathscr{X} \subset \mathscr{R}$ (множеству рациональных чисел), и следовательно, $\overline{\mathscr{X}}$ счетно; таким образом, $\overline{\mathscr{X}}$ компактно и счетно и потому разреженно (согласно следствию 4 из § 34, IV).

Замечание 5. Более общо, для всякого полного сепарабельного нульмерного пространства $\mathscr{X}$ существует метрическая нульмерная компактификация $\mathscr{Y}$, такая, что разность $\mathscr{Y} - \mathscr{X}$ счетна.

Справедливость этого утверждения можно доказать, заменяя в приведенном выше рассуждении множество $\mathscr{N}$ множеством $\mathscr{C}$ с исключенными из него концами выброшенных интервалов, гомеоморфным $\mathscr{N}$.

Если $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, то утверждение I (4) можно сформулировать более точно следующим образом.

---

[1]) Теорема Кнастера — Урбаника [1]. Детальный анализ затрагиваемых здесь вопросов можно найти в книге Семадени [1, гл. 4].

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство и $\{F_t\}$ — направленное семейство замкнутых множеств относительно включения* $\supset$ (см. I (4)). *Тогда*

$$\delta\left(\bigcap_t F_t\right)=\inf_t \delta(F_t). \tag{3}$$

Иначе говоря,

$$\left\{\bigwedge_t \delta(F_t)\geqslant\varepsilon\right\}\Rightarrow\left\{\delta\left(\bigcap_t F_t\right)\geqslant\varepsilon\right\}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $\delta(F_t)\geqslant\varepsilon$ для каждого t. Тогда существуют x и x', такие, что

$$x\in F_t,\quad x'\in F_t,\quad |x-x'|\geqslant\varepsilon. \tag{5}$$

Положим

$$K_t=\underset{x,\,x'}{\mathsf{E}}(x\in F_t)(x'\in F_t)(|x-x'|\geqslant\varepsilon). \tag{6}$$

Ясно, что K_t замкнуто в $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$. Семейство $\{K_t\}$ направлено относительно $\supset$. В самом деле, пусть заданы t_1 и t_2, и пусть $F_{t_3}\subset F_{t_1}\cap F_{t_2}$; тогда $K_{t_3}\subset K_{t_1}\cap K_{t_2}$.

Так как $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ компактно, то отсюда следует (согласно I (4)), что $\bigcap_t K_t\neq 0$. Пусть $(x_0,\,x_0')\in\bigcap_t K_t$, т. е. $(x_0,\,x_0')\in K_t$ для каждого t. Тогда, согласно (6),

$$x_0\in\bigcap_t F_t,\quad x_0'\in\bigcap_t F_t\quad\text{и}\quad |x_0-x_0'|\geqslant\varepsilon.$$

Следовательно, $\delta\left(\bigcap_t F_t\right)\geqslant\varepsilon$.

Замечание 6. Вторая часть вышеприведенного доказательства есть простое применение формулы I (i). А именно:

$$\begin{aligned}\bigwedge_t\bigvee_{x,\,x'}&\{(|x-x'|\geqslant\varepsilon)(x\in F_t)(x'\in F_t)\}\equiv\\ &\equiv\bigvee_{x,\,x'}\bigwedge_t\{(|x-x'|\geqslant\varepsilon)(x\in F_t)(x'\in F_t)\}\equiv\\ &\equiv\bigvee_{x,\,x'}(|x-x'|\geqslant\varepsilon)\left(x,\ x'\in\bigcap_t F_t\right).\end{aligned}$$

Известно (см. IV, теорема 2), что если $f\colon\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}$ компактно, и если $I=\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}(y=f(x))$ замкнуто, то f непрерывно. Если пространство $\mathscr{Y}$ предполагается метрическим, то имеет место более точное утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $A \subset \mathcal{X}$ *и* $f\colon A \to \mathcal{Y}$, *где* $\mathcal{Y}$ — *компактное метрическое пространство. Тогда*

$$(7) \qquad \omega(x) = \delta[\overline{I} \cap ((x) \times \mathcal{Y})],$$

где $\omega(x)$ *обозначает колебание* f *в точке* x (см. § 21 (6)), *т. е.*

$$(8) \qquad \omega(x) = \inf_t \delta[f(G_t)],$$

где $\{G_t\}$ — *семейство всех открытых окрестностей* x.

Доказательство. Положим $F_t = \overline{f(G_t)}$. Семейство $\{F_t\}$ направлено относительно включения $\supset$. Действительно, пусть t_1 и t_2 заданы, и пусть $G_{t_3} = G_{t_1} \cap G_{t_2}$. Тогда G_{t_3} есть открытая окрестность x и

$$\overline{f(G_{t_3})} \subset \overline{f(G_{t_1}) \cap f(G_{t_2})} \subset \overline{f(G_{t_1})} \cap \overline{f(G_{t_2})}.$$

Применяя теорему 7, мы имеем, согласно (3) и (8),

$$(9) \qquad \omega(x) = \delta\left[\bigcap_t \overline{f(G_t)}\right].$$

Для доказательства формулы (7) остается показать, что имеет место следующее утверждение (справедливое для произвольных топологических пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$):

$$(10) \qquad (x_0, y_0) \in \overline{I} \equiv y_0 \in \bigcap_t \overline{f(G_t)},$$

где $\{G_t\}$ есть семейство всех открытых окрестностей точки x_0.

Предположим сначала, что $(x_0, y_0) \in \overline{I}$. Тогда для каждого t и каждого открытого H, содержащего y_0, существуют $x_1 \in G_t$ и $y_1 \in H$, такие, что $(x_1, y_1) \in I$, т. е. $y_1 = f(x_1)$, откуда $y_1 \in f(G_t)$ и, следовательно, $y_0 \in \overline{f(G_t)}$.

Таким образом, $y_0 \in \bigcap_t \overline{f(G_t)}$.

Далее, предположим, что $(x_0, y_0) \notin \overline{I}$. Тогда существуют t и открытое H, содержащее y_0, такие, что $(G_t \times H) \cap I = 0$. Отсюда следует, что $y_0 \notin \overline{f(G_t)}$, ибо в противном случае существовало бы $y \in H \cap f(G_t)$, следовательно, $y = f(x)$ для некоторого $x \in G_t$; но тогда $(x, y) \in (G_t \times H) \cap I$.

Теорему вложения Урысона можно усилить следующим образом.

Теорема 9[1]. *Пусть* $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{I}^{\aleph_0}$, *и пусть* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *непрерывное отображение на. Выберем* σ *так, что*

$$(11) \qquad \delta[f^{-1}(y)] < \sigma \quad \textit{для каждого} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

[1]) См. Куратовский [39].

Тогда существует вложение h: $\mathcal{Y} \to \mathcal{J}^{\aleph_0}$, *такое, что*

(12) $$|hf(x) - x| < \sigma \quad \textit{для каждого} \quad x \in \mathcal{X}.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* σ *удовлетворяет условию* (11), *то существует* $\eta > 0$, *такое, что*

(13) $$[\,|f(x) - f(x')| < \eta] \Rightarrow [\,|x - x'| < \sigma].$$

Следовательно, *если* $B \subset \mathcal{Y}$ *и* $\delta(B) < \eta$, *то* $\delta[f^{-1}(B)] < \sigma$.

Доказательство леммы. Предположим, что такое η не существует. Тогда существуют две последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $x_1', x_2', \ldots$, такие, что

(14) $$|f(x_k) - f(x_k')| < 1/k,$$

(15) $$|x_k - x_k'| \geqslant \sigma.$$

Поскольку $\mathcal{X}$ компактно, можно предположить, что эти последовательности сходятся:

(16) $$\lim_{k \to \infty} x_k = x \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} x_k' = x'.$$

Так как f непрерывна, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} f(x_k') = f(x');$$

следовательно, согласно (14), $f(x) = f(x')$.

Положим $y = f(x)$. Тогда $x, x' \in f^{-1}(y)$ и $|x - x'| < \sigma$, согласно (11). Но это несовместимо с (15) и (16).

Доказательство теоремы 9. Пусть η удовлетворяет условию (13), и пусть $G_0, \ldots, G_m$ — открытое покрытие пространства $\mathcal{Y}$, такое, что

(17) $$\mathcal{Y} = G_0 \cup \ldots \cup G_m, \quad \delta(G_i) < \eta/2, \quad G_i \neq 0.$$

Пусть $x_i \in f^{-1}(G_i)$. Рассмотрим $\varkappa$-отображение, определяемое системами $\{G_0, \ldots, G_m\}$ и $\{x_0, \ldots, x_m\}$ (см. § 28, VI):

$$\varkappa(y) = \lambda_0(y) \cdot x_0 + \ldots + \lambda_m(y) \cdot x_m,$$

где

$$\lambda_i(y) = \frac{\rho(y, F_i)}{\rho(y, F_0) + \ldots + \rho(y, F_m)} \quad \text{и} \quad F_i = \mathcal{Y} - G_i.$$

Покажем, что

(18) $$|\varkappa f(x) - x| < \sigma.$$

Пусть задано x. Обозначим через $i_0, \ldots, i_k$ систему всех индексов, таких, что $x \in f^{-1}(G_{i_j})$. Тогда точка $\varkappa f(x)$ принадлежит симплексу $x_{i_0} \ldots x_{i_k}$. Обозначим через S симплекс $xx_{i_0} \ldots x_{i_k}$. Тогда $\delta(S) < \sigma$. Так как условие $f(x) \in G_{i_j} \cap G_{i_m}$ влечет за собой, согласно (17), неравенство $\delta(G_{i_j} \cup G_{i_m}) < \eta$, то отсюда $|f(x_{i_j}) - f(x_{i_m})| < \eta$, а это, согласно (13), даст $|x_{i_j} - x_{i_m}| < \sigma$. С другой стороны, $f(x)$ и $f(x_{i_j})$ принадлежат G_{i_j}, поэтому $|x - x_{i_j}| < \sigma$. Следовательно, $\delta(S) < \sigma$, откуда вытекает (18), так как x и $\varkappa f(x)$ принадлежат S.

Далее, обозначим через h гомеоморфизм $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, достаточно близкий к $\varkappa$ (см. § 22, II, теорема 2), точнее, такой, что

(19) $|h(y) - \varkappa(y)| < \sigma - |\varkappa f(x) - x|$ для каждого $x \in \mathcal{X}$ и $y \in \mathcal{Y}$.

Отсюда следует неравенство (12), ибо, согласно (19), мы имеем

$$|hf(x) - x| \leqslant |hf(x) - \varkappa f(x)| + |\varkappa f(x) - x| < \sigma.$$

Лемма [1]). *Пусть $\mathcal{X}$ — топологическое пространство, $\mathcal{Y}$ — некоторое $\mathcal{T}_1$-пространство и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение. Пусть, далее, $\{U_t\}$, $t \in T$, — база окрестностей некоторого множества $A\ (\neq 0)$ в пространстве $\mathcal{X}$ (это означает, что для любого открытого множества $G \supset A$ существует такое $t \in T$, что $A \subset U_t \subset G$). Тогда*

$$\bigcap_{t \in T} f(U_t) = f\Big(\bigcap_{t \in T} U_t\Big) = f(A).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что $\bigcap_{t \in T} f(U_t) \subset f(A)$, или, что то же самое, для любого $y \notin f(A)$ существует такое t, что $y \notin f(U_t)$.

Пусть $y \notin f(A)$; тогда $A \cap f^{-1}(y) = 0$, т. е. $A \subset \mathcal{X} - f^{-1}(y)$. Так как $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство и f непрерывно, то множество $\mathcal{X} - f^{-1}(y)$ открыто. Следовательно, существует такое t, что $A \subset U_t \subset \mathcal{X} - f^{-1}(y)$. Поэтому $U_t \cap f^{-1}(y) = 0$, т. е. $y \notin f(U_t)$.

Теорема 10. *Пусть F — компактное подмножество метрического пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — некоторое $\mathcal{T}_2$-пространство и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение. Обозначим через S_k обобщенный шар с центром в F радиуса $1/k$, т. е.*

$$S_k = \mathop{\mathrm{E}}_{x}(\rho(x, F) < 1/k).$$

[1]) Этой формулировкой я обязан пани Карлович.

Тогда

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f(S_k)} = f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\right) = f(F).$$

Доказательство. Так как последовательность $S_1, S_2, \ldots$ есть база окрестностей множества F, то

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} f(S_k) = f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\right).$$

С другой стороны, так как $\overline{S}_k \subset S_{k-1}$ и $f(\overline{S}_k)$ замкнуты, то

$$\overline{f(S_k)} \subset \overline{f(\overline{S}_k)} = f(\overline{S}_k) \subset f(S_{k-1}),$$

и потому

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f(S_k)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(S_k).$$

VII. Инварианты отображений с малыми прообразами точек. Квазигомеоморфизм. Пусть $\mathscr{X}$ — метрическое пространство, и пусть задано отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Назовем *комножествами* отображения f полные прообразы отдельных точек пространства $\mathscr{Y}$, т. е. множества $f^{-1}(y)$ (обозначаемые также через $\overset{-1}{f}(y)$). Положим

$$\delta_f = \sup \delta\left[f^{-1}(y)\right], \quad \text{где} \quad y \in \mathscr{Y}.$$

Определение 1[1]). Свойство **P** пространства $\mathscr{X}$ называется *инвариантным относительно отображений с малыми комножествами*, если существует число $\alpha > 0$, такое, что $f(\mathscr{X})$ обладает свойством **P**, каково бы ни было непрерывное отображение f, удовлетворяющее условию $\delta_f < \alpha$.

Замечание. Очевидно, что всякий инвариант отображений с малыми комножествами есть топологический инвариант. Обратное не верно (даже для компактных пространств). Например, неравенство $\dim \mathscr{X} < n$ не является инвариантом отображений с малыми комножествами; но, с другой стороны, свойство $\dim \mathscr{X} \geqslant n$ является таким инвариантом (для компактного $\mathscr{X}$ см. § 45, IV, следствие 9).

Следовательно, доказать инвариантность некоторого свойства относительно отображений с малыми комножествами — это, вообще говоря, больше, чем показать, что оно является топологическим инвариантом.

Определение 2[2]). Два компактных метрических пространства $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$ называются *квазигомеоморфными*, если

---

[1]) Александров [5, гл. I].

[2]) См. Куратовский и Улам [1, стр. 252].

существуют непрерывные отображения $\mathscr{X}_1$ на $\mathscr{X}_2$ и $\mathscr{X}_2$ на $\mathscr{X}_1$ с произвольно малыми компножествами, или, другими словами, если для всякого $\varepsilon > 0$ существуют два непрерывных отображения на: f_1: $\mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ и f_2: $\mathscr{X}_2 \to \mathscr{X}_1$, таких, что $\delta_{f_1} < \varepsilon$ и $\delta_{f_2} < \varepsilon$.

Так, например, шар квазигомеоморфен объединению двух шаров, имеющих единственную общую точку [1]).

Проблема доказательства инвариантности относительно отображений с малыми компножествами может быть сведена к рассмотрению отображений g, таких, что $|g(x) - x| < \varepsilon$ для достаточно малого ε. Именно, справедлива следующая

Теорема [2]). *Пусть* $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}} \subset \mathscr{J}^{\aleph_0}$. *Всякое топологическое свойство* **P**, *инвариантное относительно непрерывных отображений* g: $\mathscr{X} \to \mathscr{J}^{\aleph_0}$, *таких, что* $|g(x) - x| < \varepsilon$ *для всех* $x \in \mathscr{X}$, *инвариантно относительно непрерывных отображений* f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, *таких, что* $\delta_f < \varepsilon$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 8 п. VI пусть h — гомеоморфизм пространства $\mathscr{Y}$ в $\mathscr{J}^{\aleph_0}$, такой, что $|hf(x) - x| < \varepsilon$. Положим $g = h \circ f$. Тогда по предположению множество $g(\mathscr{X})$ обладает свойством **P**. Так как $g(\mathscr{X})$ гомеоморфно $f(\mathscr{X})$ и свойство **P** топологическое, отсюда следует, что $f(\mathscr{X})$ также обладает свойством **P**.

Замечания и примеры. 1. Для двух заданных компактных метрических пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ рассмотрим следующий коэффициент:

$$\tau(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \inf \delta_f, \text{ где } f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \text{ — непрерывное отображение.}$$

Таким образом, $\tau(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ — это наибольшее число, такое, что для всякого непрерывного отображения f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ существуют две точки x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{и} \quad |x_1 - x_2| \geqslant \tau(\mathscr{X}, \mathscr{Y}).$$

Очевидно, что пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ квазигомеоморфны тогда и только тогда, когда $\tau(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = 0 = \tau(\mathscr{Y}, \mathscr{X})$.

2. Пусть $\mathfrak{Q}_n$ есть n-мерный шар, определенный уравнением $|p| \leqslant 1$, а $\mathscr{S}_n$ есть n-мерная сфера радиуса 1. Тогда [3])

$$\tau(\mathfrak{Q}_n, \mathscr{S}_n) = \frac{2n + 2 - \sqrt{2n^2 + 2n}}{n + 2}.$$

---

[1]) Как мы видим, квазигомеоморфность не влечет за собой гомеоморфность. Однако в классе замкнутых ориентируемых 2-многообразий эти два понятия эквивалентны. См. Форт [2, стр. 53].

[2]) См. Эйленберг [5].

[3]) См. Куратовский [30, стр. 206].

3. Хорошо известную теорему Борсука — Улама [1]), утверждающую, что для всякого непрерывного отображения $\mathscr{S}_n$ в $\mathscr{E}^n$ существуют две диаметрально противоположные точки на $\mathscr{S}_n$, которые переходят в одну и ту же точку $\mathscr{E}^n$, можно выразить следующим образом:

$$\tau(\mathscr{S}_n, X) = \delta(\mathscr{S}_n) = 2$$

для каждого компактного $X \subset \mathscr{E}^n$.

4. Пусть $\mathscr{T}$ — тор и отображение f: $\mathfrak{C}_2 \to \mathscr{T}$ непрерывно. Тогда [2]) существует комножество диаметра $\geqslant 1/6$.

VIII. Связь с булевыми кольцами [3]). Напомним, что (непустое) множество A, в котором определены операции сложения и умножения, называется *кольцом*, если оно является абелевой группой по сложению, а умножение ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению.

Кольцо A называется *булевым кольцом*, если оно содержит элемент 1, такой, что $1 \cdot a = a$, и если $a \cdot a = a$ для каждого a.

Булевым кольцом является, например, семейство всех подмножеств данного множества, если умножение понимается как пересечение, а сложение — как симметрическая разность.

Для любого булева кольца очевидны следующие соотношения:

$$ab = ba \text{ и } a + a = 0, \text{ откуда } -a = a.$$

Непустое подмножество I булева кольца A называется *идеалом* (ср. § 1, VII), если

(1) $$(a \in I,\ b \in I) \Rightarrow [(a+b) \in I];$$

(2) $$a \in I \Rightarrow (ab) \in I \text{ для каждого } b.$$

Если $B \subset A$, то множество элементов вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \text{ где } a_1, \ldots, a_n \in B,$$

есть наименьший идеал, содержащий B (говорят, что он *порожден* множеством B).

---

[1]) См. Борсук [7, стр. 177]; см. также § 57, I и § 59, V.

[2]) См. Форт [2] и Ганя [1]. Ср. с задачей 21 Улама в Scottish Book. См. также Войдыславский [2]; эта статья содержит несколько результатов о квазигомеоморфизмах.

[3]) Этим разделом я обязан профессору Мостовскому. Изложенная здесь теория принадлежит М. Стоуну [1]. Эту теорию можно распространить без существенных изменений на дистрибутивные структуры; см. Биркгоф Г. [1, гл. IX, § 5 и 6], где содержится обширная библиография. См. также Сикорский [2].

Обобщение, связанное с работами И. М. Гельфанда по нормированным кольцам, см. в работе Завадовского и Словиковского [1].

Можно доказать (с помощью аксиомы выбора), что всякий идеал ($\neq A$) содержится в некотором *максимальном* идеале $I \neq A$.

Очевидно, $0 \in I$ и $1 \in A - I$.

Легко видеть, что если I есть максимальный идеал и $a \in A - I$, то каждый элемент из A имеет вид

$$i + ax, \quad \text{где} \quad i \in I \text{ и } x \in A.$$

Следовательно,

$$(3) \qquad (a \in A - I) \equiv \bigvee_x (1 - ax) \in I.$$

Отсюда мы выведем следующую лемму.

Лемма. *Если I есть максимальный идеал булева кольца A, то*

$$(4) \qquad (a \in A - I) \equiv (1 + a \in I).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(1 - ax)(1 + a) = 1 + a + a(1 + a)x = 1 + a + (a + aa)x = 1 + a.$$

Следовательно, если $a \in A - I$, то мы имеем (согласно (3)) $1 - ax \in I$. Поэтому $1 + a \in I$ (согласно (2)).

Обратная импликация следует непосредственно из (3).

Теорема (М. Стоуна). *Пусть A — булево кольцо и $\boldsymbol{M}$ — семейство всех его максимальных идеалов. Введем топологию в $\boldsymbol{M}$, взяв в качестве открытой базы пространства $\boldsymbol{M}$ множества вида*

$$(5) \qquad \boldsymbol{G}_a = \mathop{\mathsf{E}}_I (a \in A - I), \quad \text{где } a \text{ пробегает } A.$$

В этой топологии пространство $\boldsymbol{M}$ становится компактным нульмерным $\mathcal{T}_2$-пространством.

Доказательство. Покажем прежде всего, что

$$(6) \qquad \boldsymbol{G}_a \cap \boldsymbol{G}_b = \boldsymbol{G}_{ab}.$$

Согласно (5) и (2), мы имеем

$$I \in \boldsymbol{G}_{ab} \Rightarrow ab \in A - I \Rightarrow (a \in A - I)(b \in A - I) \Rightarrow I \in \boldsymbol{G}_a \cap \boldsymbol{G}_b.$$

Обратно, пусть $I \in \boldsymbol{G}_a \cap \boldsymbol{G}_b$. Тогда, согласно (5), $a, b \in A - I$ и, следовательно,

$$(7) \qquad 1 = i_1 + ax_1 = i_2 + bx_2, \quad \text{где} \quad i_1,\ i_2 \in I.$$

Поскольку $1 \in A - I$, из (7) следует, что

$$(i_1 i_2 + i_1 b x_2 + i_2 a x_1 + ab x_1 x_2) \in A - I.$$

Так как I — идеал, то из этого следует, что $ab \in A - I$, откуда $I \in G_{ab}$ (согласно (5)).

Это завершает доказательство формулы (6).

Из формулы (5) вытекает, что пересечение двух множеств вида (5) снова есть множество того же вида. Следовательно, множество $\boldsymbol{M}$ становится *топологическим пространством*, если семейство множеств, указанных выше, принять за открытую базу множества $\boldsymbol{M}$.

Покажем теперь, что это пространство есть *$\mathcal{T}_2$-пространство*.

Пусть $I, J \in \boldsymbol{M}$ и $a \in I - J$. Тогда в силу (5) $J \in G_a$ и $I \in G_{1+a}$, так как $(1+a) \in (A-I)$ (согласно (4)). Кроме того, согласно (6),

$$G_a \cap G_{1+a} = G_0 = 0. \tag{8}$$

Докажем далее, что $\boldsymbol{M}$ *компактно*. Пусть

$$\boldsymbol{M} = \bigcup_{b \in B} G_b, \quad \text{где } B \subset A. \tag{9}$$

Пусть J — идеал, порожденный множеством B.

Мы имеем $1 \in J$. Действительно, предположим, что $1 \notin J$. Тогда существует максимальный идеал $I \supset J$ и $I \in \boldsymbol{M}$ (по определению $\boldsymbol{M}$); с другой стороны, для каждого $b \in B$ имеем $b \in I$, откуда $I \notin G_b$. Но это противоречит соотношению (9).

Так как $1 \in J$, то

$$1 = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n. \tag{10}$$

Покажем, что

$$\boldsymbol{M} = G_{b_1} \cup \ldots \cup G_{b_n}, \tag{11}$$

чем завершим доказательство компактности $\boldsymbol{M}$.

Пусть $I \in \boldsymbol{M}$. Так как $1 \notin I$, то существует (согласно (10)) $k \leqslant n$, такое, что $b_k \notin I$. Из этого вытекает, согласно (5), что $I \in G_{b_k}$. Следовательно, равенство (11) доказано.

Наконец, пространство $\boldsymbol{M}$ *нульмерно*, т. е. содержит базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств. Такой базой является семейство множеств G_a, где $a \in A$. Мы имеем

$$\boldsymbol{M} - G_a = G_{1+a} \tag{12}$$

вследствие равенства (8) и тождества $G_a \cup G_{1+a} = M$, которое следует из (4) и (5); именно,

$$I \notin G_a \equiv a \in I \equiv 1 + a \in A - I \equiv I \in G_{1+a}.$$

Замечание. *Булево кольцо A изоморфно кольцу $\mathbf{G}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\boldsymbol{M}$.*

Этот изоморфизм определим, положив

$$f(a)=\boldsymbol{G}_a, \text{ где } a\in A;$$

иначе говоря,

$$f(A)=\mathbf{G}, \tag{13}$$

$$f(a+b)=[f(a)-f(b)]+[f(b)-f(a)], \tag{14}$$

$$f(ab)=f(a)\cap f(b), \tag{15}$$

$$a\neq b\Rightarrow f(a)\neq f(b). \tag{16}$$

Доказательство. Для того чтобы доказать (13), достаточно (так как $\boldsymbol{G}_a$ — открыто-замкнутое множество) показать, что для всякого $\boldsymbol{F}\in\mathbf{G}$ существует такое a, что $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_a$.

Далее, так как множество $\boldsymbol{F}$ компактно и открыто-замкнуто (в $\boldsymbol{M}$), то $\boldsymbol{F}$ есть конечное объединение множеств $\boldsymbol{G}_x$. Следовательно, мы должны показать, что $\boldsymbol{G}_a\cup\boldsymbol{G}_b=\boldsymbol{G}_c$ для некоторого определенного c. В действительности мы покажем, что

$$\boldsymbol{G}_a\cup\boldsymbol{G}_b=\boldsymbol{G}_c, \text{ где } c=a+b+ab. \tag{17}$$

Так как из включения $I\in\boldsymbol{G}_a$ следует, что $a\in A-I$, то $c\in A-I$ (поскольку $a=ca$), откуда $I\in\boldsymbol{G}_c$. Таким образом, $\boldsymbol{G}_a\subset\boldsymbol{G}_c$, и, следовательно, $\boldsymbol{G}_a\cup\boldsymbol{G}_b\subset\boldsymbol{G}_c$.

Обратно, если $I\notin(\boldsymbol{G}_a\cup\boldsymbol{G}_b)$, то мы имеем $a,\ b\in I$, откуда $c\in I$ (согласно (1) и (2)), и поэтому $I\notin\boldsymbol{G}_c$. Это завершает доказательство соотношения (17).

Чтобы доказать (14), заменим в (17) a на $a+ab$ и b на $b+ab$. Очевидно, что

$$(a+ab)(b+ab)=0 \text{ и } (a+ab)+(b+ab)=a+b.$$

Отсюда, согласно (17), следует, что

$$\boldsymbol{G}_{a+ab}\cup\boldsymbol{G}_{b+ab}=\boldsymbol{G}_{a+b}.$$

Применяя (6) и (12), мы получаем

$$\boldsymbol{G}_{a+b}=(\boldsymbol{G}_a\cap\boldsymbol{G}_{1+b})\cup(\boldsymbol{G}_b\cap\boldsymbol{G}_{1+a})=(\boldsymbol{G}_a-\boldsymbol{G}_b)\cup(\boldsymbol{G}_b-\boldsymbol{G}_a). \tag{18}$$

Это соотношение эквивалентно (14). Соотношение (15) эквивалентно (6). Наконец, из равенства $\boldsymbol{G}_a=\boldsymbol{G}_b$, согласно (18), следует равенство $\boldsymbol{G}_{a+b}=0$, откуда $a+b=0$, и потому $a=b$.

IX. Диадические пространства [1]).

Определение [2]). Пространство называется *диадическим*, если оно является непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума $D^{\mathfrak{m}}$ (где D — двуэлементное множество $\{0, 1\}$).

Согласно следствию 2b п. VI, всякое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ канторова дисконтинуума $\mathscr{C} = D^{\aleph_0}$ и, следовательно, является диадическим. Легко показать, что всякое компактное $\mathcal{T}_2$-пространство веса $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ (ср. § 5, XI, замечание 3, стр. 59) есть непрерывный образ *замкнутого подмножества* пространства $D^{\mathfrak{m}}$. Однако оно не обязательно является диадическим (см. пример ниже).

Теорема 1. *Всякое семейство непересекающихся открытых подмножеств пространства $D^{\mathfrak{m}}$ счетно.*

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что элементы рассматриваемого семейства принадлежат базе пространства $D^{\mathfrak{m}}$. Следовательно, можно считать, что они имеют вид

$$(1) \qquad G = G^{j_1 \ldots j_n}_{t_1 \ldots t_n} = \bigcap_{i=1}^{n} G_{t_i, \{j_i\}} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathop{\mathsf{E}}_{z}\left(z^{t_i} = j_i\right),$$

где $t_i \in T$, $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{m}$, $j_i = 0, 1$ для $i = 1, \ldots, n$.

Назовем число n *длиной* множества G, а систему $t_1, \ldots, t_n$ — *системой отмеченных индексов*. Легко видеть, что два непересекающихся элемента базы должны иметь общий отмеченный индекс и различные проекции на соответствующие оси.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что при любом заданном n всякое семейство непересекающихся множеств длины n счетно. Будем рассуждать по индукции. Для $n = 1$ наше утверждение вытекает из только что указанного свойства пересекающихся элементов базы.

Предположим, что оно верно для $n - 1$. Пусть $\boldsymbol{G}$ — семейство множеств длины n. Предположим, что $\boldsymbol{G}$ несчетно. Пусть $G_0 \in \boldsymbol{G}$. Ни один элемент семейства $\boldsymbol{G}$ не пересекается с G_0, следовательно, каждый из них имеет общий с G_0 отмеченный индекс. Поэтому $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{G}_n$, где элементы $\boldsymbol{G}_i$ имеют общий отмеченный индекс. Так как $\boldsymbol{G}$ несчетно, то можно предположить, что $\boldsymbol{G}_1$ также несчетно; пусть t — общий отме-

---

[1]) Этим разделом я обязан профессору Энгелькингу.

[2]) См. Александров [9]. Данное выше определение является «внешним». «Внутреннее» определение довольно сложно; см. Александров и Пономарев [1].

По теории диадических пространств см. дополнительно следующие статьи: Ефимов [1, 2]; Ефимов и Энгелькинг [1]; Мардешич и Папич [1].

ченный индекс элементов G_1. Тогда либо для $i=0$, либо для $i=1$ существует несчетное семейство $H_i \subset G_1$, такое, что проекция элементов H_i на t-ось есть (i). Из этого следует, что любые два элемента семейства H_1 имеют еще другой общий отмеченный индекс и их проекции на соответствующую ось не пересекаются. Пусть K_1 получено из H_1 отбрасыванием (в равенстве (1)) индекса t (и соответствующего верхнего индекса i). Тогда K_1 несчетно, но это противоречит тому, что длина его элементов равна $(n-1)$.

Замечание 1. Из приведенных выше рассуждений видно, что теорема 1 верна для всякого прямого произведения пространств со счетной базой [1]).

Замечание 2. Теорема 1 следует также из того, что $D^{\mathfrak{m}}$ является компактной топологической группой и, следовательно, допускает меру Хаара [2]).

Заметим, что *всякая компактная топологическая группа является диадической* [3]).

Следствие 1. *В диадическом пространстве всякое семейство непересекающихся открытых множеств счетно.*

Пример. Пусть $\mathscr{X}$ — одноточечная компактификация несчетного дискретного пространства (см. X, теорема 5), и пусть открытые множества определяются как дополнения к конечным множествам. Очевидно, что $\mathscr{X}$ есть компактное не диадическое $\mathcal{T}_2$-пространство.

Замечание 3. Из существования недиадических компактных пространств следует, что $D^{\mathfrak{m}}$ при $\mathfrak{m} > \aleph_0$ содержит замкнутые подмножества, которые не являются не только ретрактами $D^{\mathfrak{m}}$, но и непрерывными образами $D^{\mathfrak{m}}$.

Заметим, что замкнутое подмножество пространства $D^{\mathfrak{m}}$ может быть непрерывным образом $D^{\mathfrak{m}}$ и в то же время не быть его ретрактом [4]).

Для заданного прямого произведения $Z = \prod\limits_{t \in T} \mathscr{X}_t$ обозначим через $\pi_{T'}$, где $T' \subset T$, его проекцию на частичное произведение $Z' = \prod\limits_{t \in T'} \mathscr{X}_t$ (т. е. $\pi_{T'}$ ставит в соответствие каждому отображению $z \in Z$ его сужение $(z \mid T') \in Z'$).

---

[1]) Это утверждение доказано Марчевским [1, стр. 525]. Более сильные результаты см. в работах: Марчевский [2] и Шанин [1].

[2]) См., например, Халмош [1, гл. 9].

[3]) См. Ивановский [1, стр. 785] и Кузьминов [1, стр. 727].

[4]) Это ответ на вопрос, поставленный Халмошем. См. Энгелькинг [5].

Теорема 2[1]). *Пусть $\mathscr{X}_t$ — сепарабельное пространство ($t \in T$), и пусть $\mathscr{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство, точки которого являются G_δ-множествами. Положим $Z = \prod_t \mathscr{X}_t$, и пусть отображение $f\colon Z \to \mathscr{Y}$ непрерывно. Тогда существуют счетное множество $T' \subset T$ и непрерывное отображение $f'\colon Z' \to \mathscr{Y}$, такие, что $f = f' \circ \pi_{T'}$.*

Доказательство. Для каждого $z \in Z$ множество $f^{-1}[f(z)]$ есть множество типа G_δ. Поэтому оно содержит счетное пересечение элементов базы пространства Z, содержащих z.

Следовательно, существует счетное множество $T(z) \subset T$, такое, что

(2) если $\pi_{T(z)}(x) = \pi_{T(z)}(z)$ для $x \in Z$, то $f(x) = f(z)$.

Определим по индукции последовательность Z_0, $Z_1, \ldots$ счетных подмножеств пространства Z, таких, что

$$(3) \qquad \overline{\pi_{T_i}(Z_{i+1})} = \prod_{t \in T_i} \mathscr{X}_t,$$

где

$$(4) \qquad T_i = \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{z \in Z_j} T(z).$$

Пусть $Z_0 = (z_0)$, где z_0 — произвольная точка пространства Z (которое можно предполагать непустым). Далее предположим, что $Z_0, \ldots, Z_k$ удовлетворяют условию (3). Согласно (4), множество T_k счетно, и, следовательно, произведение $\prod_{t \in T_k} \mathscr{X}_t$ содержит счетное всюду плотное подмножество. Отсюда следует, что существует счетное множество Z_{k+1}, удовлетворяющее (3) при $i = k$.

Положим $T' = T_0 \cup T_1 \cup \ldots$. Чтобы доказать существование такого f', что $f = f' \circ \pi_{T'}$, остается доказать, что для произвольных x_1 и x_2 из Z имеет место импликация

$$(5) \qquad [\pi_{T'}(x_1) = \pi_{T'}(x_2)] \Rightarrow [f(x_1) = f(x_2)].$$

(Заметим, что $\pi_{T'}$ есть открытое отображение, и потому отображение f' непрерывно.)

Предположим, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Пусть U_1 и U_2 — открытые подмножества в $\mathscr{Y}$, такие, что

$$(6) \qquad f(x_1) \in U_1, \quad f(x_2) \in U_2 \quad \text{и} \quad U_1 \cap U_2 = 0.$$

---

[1]) Теорема Глисона. См. Исбелл [2, стр. 130]. Аналогичная теорема имеется в работах: Мазур [1] и Энгелькинг [6].

Так как $x_i \in f^{-1}(U_i)$ при $i = 1, 2$, то x_i принадлежит произведению вида $\prod_{t \in T} U_t^i$, где U_t^i открыто в $\mathcal{X}_t$, $U_t^i = \mathcal{X}_t$ для всех, за исключением конечного числа, индексов $t \in T$ и $\prod_{t \in T} U_t^i \subset f^{-1}(U_i)$. Если предполагать, что левая часть (5) справедлива, то можно считать, что $U_t^1 = U_t^2$ при $t \in T'$. Тогда, согласно (3), существует точка $z \in (Z_0 \cup Z_1 \cup \ldots)$, такая, что $z_t \in U_t^1$ для $t \in T'$, и из этого следует, согласно (2) и (4), что $f(z_1) = f(z) = f(z_2)$ всякий раз, когда $z_i^t = z^t$ для $t \in T'$ и $z_i^t = x_i^t$ для $t \in T - T'$.

Так как $z_i \in \prod_{t \in T} U_t^i$, то $U_1 \cap U_2 \neq 0$, что противоречит (6).

Теорема 3. *Пусть f и Z такие же, как выше. Если $\mathcal{Y}$ — вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство веса $\mathfrak{m}$, то можно предположить, что T' имеет мощность $\leqslant \mathfrak{m}$.*

Доказательство. По предположению $\mathcal{Y}$ можно рассматривать как подмножество пространства $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ (ср. с теоремой 5, § 16, V, стр. 163). Напишем $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}} = \prod_{s \in S} I_s$, где $I_s = \mathcal{I}$ и $\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m}$. По теореме 2 существуют счетное множество $T_s \subset T$ и отображение f_s: $\prod_{t \in T_s} \mathcal{X}_t \to \mathcal{I}$, такие, что $\pi_s \circ f = f_s \circ \pi_{T_s}$ (где π_s есть проекция $\mathcal{I}^{\mathfrak{m}}$ на I_s). Для завершения доказательства положим $T' = \bigcup_{s \in S} T_s$, и пусть f' — отображение, имеющее в качестве своей s-й координаты $f_s \circ \pi_{T_s}$.

Теорема 4[1]). *Всякое диадическое пространство $\mathcal{X}$ веса $\mathfrak{m}$ есть непрерывный образ $D^{\mathfrak{m}}$.*

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{X}$ диадично, существуют кардинальное число $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$ и непрерывное отображение f: $D^{\mathfrak{n}} \to \mathcal{X}$. Положим $D^{\mathfrak{n}} = \prod_{t \in T} D_t$, где $D_t = D$ и $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{n}$. По теореме 3 существуют $T' \subset T$ и f': $\prod_{t \in T'} D_t \to \mathcal{X}$, такие, что $\overline{\overline{T'}} = \mathfrak{m}$ и $f = f' \circ \pi_{T'}$, где f' непрерывно. Очевидно, что f' — требуемое отображение пространства $D^{\mathfrak{m}}$ на $\mathcal{X}$.

Следствие 2[2]). *Всякое диадическое пространство со счетной локальной базой* (см. § 5, XI, стр. 59) *есть непрерывный образ канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$.*

---

[1]) Ср. Шанин [1]. По поводу приведенного здесь доказательства см. Пелчинский и Энгелькинг [1].

[2]) См. Есенин-Вольпин [1, стр. 441]. Более сильные утверждения см. в работах Ефимова [4, 5].

Это следствие из теоремы 2.

Замечание 3. Из теоремы 3 п. VI следует, что если $\mathcal{T}_2$-пространство есть непрерывный образ $\mathscr{C}$, то оно компактно и метризуемо и потому имеет счетную базу. Следовательно, если диадическое пространство имеет локальную счетную базу, то оно имеет счетную базу.

Замечание 4. Легко видеть, что совокупность всех диадических пространств есть наименьшая совокупность $\mathcal{T}_2$-пространств, содержащая конечные пространства (или, эквивалентно, содержащая метризуемые компактные пространства) и замкнутая относительно взятия прямого произведения и непрерывных отображений.

Теорема 5[1]). *Всякое замкнутое G_δ-подмножество диадического пространства диадично.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что всякое G_δ-множество A, замкнутое в $D^{\mathfrak{m}}$, есть ретракт пространства $D^{\mathfrak{m}}$. По теореме Веденисова (§ 14, VI, стр. 141) существует непрерывное отображение $f\colon D^{\mathfrak{m}} \to \mathcal{I}$, такое, что $f^{-1}(0) = A$. Положим $D^{\mathfrak{m}} = \prod_{t \in T} D_t$. По теореме 2 существуют счетное множество $T' \subset T$ и непрерывное отображение $f_1\colon \prod_{t \in T} D_t \to \mathcal{I}$, такие, что $f = f_1 \circ \pi_{T'}$. Поэтому $A = f_1^{-1}(0) \times \prod_{t \notin T'} D_t$. Так как $f_1^{-1}(0)$ есть ретракт произведения $\prod_{t \in T'} D_t$, то из этого следует, что A есть ретракт $D^{\mathfrak{m}}$.

Замечание 5. Теорему 5 нельзя распространить на замкнутые подмножества диадических пространств.

В самом деле, рассмотрим подмножество F пространства $D^{\aleph_1}$, состоящее из точек, имеющих по крайней мере одну координату, равную 1. Тогда F замкнуто, но не диадично, так как оно гомеоморфно одноточечной компактификации дискретного пространства мощности $\aleph_1$.

Замечание 6. Как указывалось выше, пространство $D^{\aleph_1}$ содержит компактификацию дискретного пространства мощности $\aleph_1$. Это утверждение можно обобщить следующим образом:

---

[1]) См. Ефимов [3]. По поводу приведенного здесь доказательства см. Пелчинский и Энгелькинг [1]; более сильные результаты см. в работе Энгелькинга [5].

Теорема 6[1]. *Пусть $\mathscr{X}$ — диадическое пространство. Если наименьшая мощность базы в точке $x \in \mathscr{X}$ равна $\mathfrak{m} (\geqslant \aleph_0)$, то существует дискретное множество $M \subset \mathscr{X}$, такое, что $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m}$ и $M \cup \{x\}$ компактно.*

Отсюда следует[2] (ср. замечание 3), что *все замкнутые подмножества диадического пространства $\mathscr{X}$ диадичны тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{X}$ метризуемо.*

X. Локально компактные пространства.

Определение. Пространство называется *локально компактным в точке p*, если существует компактная окрестность точки p, или, другими словами, если существует открытое множество G, такое, что $x \in G$ и $\overline{G}$ компактно.

Пространство называется *локально компактным*, если оно локально компактно в каждой своей точке.

Примеры. Евклидово n-мерное пространство локально компактно. Всякое дискретное пространство локально компактно.

Теорема 1. *Всякое замкнутое подмножество локально компактного пространства локально компактно.*

Доказательство. Пусть $F = \overline{F} \subset \mathscr{X}$ и $x \in F$. По предположению существует открытое множество G, такое, что $x \in G$ и $\overline{G}$ компактно. Таким образом, $G \cap F$ открыто в F и множество $\overline{G \cap F} \cap F$ есть замыкание $G \cap F$ относительно F. Это множество является замкнутым подмножеством компактного множества $\overline{G}$ и, следовательно, само компактно (по теореме 2 п. II).

Теорема 2. *Всякое локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство вполне регулярно.*

Более того, *если множество $C \subset \mathscr{X}$ компактно, множество $F \subset \mathscr{X}$ замкнуто и $C \cap F = 0$, то существует непрерывное отображение $f \colon \mathscr{X} \to \mathscr{I}$, такое, что*

(1) $\qquad f(x) = 0$ *при* $x \in C$, $\quad f(x) = 1$ *при* $x \in F$

и $f^{-1}([0, a])$ компактно для каждого $a < 1$.

Доказательство. Для каждого $x \in C$ пусть G_x — открытое множество, такое, что $x \in G_x$ и $\overline{G}_x$ компактно. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — конечное множество точек, такое, что $C \subset G =$

[1] Доказательство см. в работах: Ефимов [3] и Энгелькинг [5].

[2] См. Ефимов [3].

$= G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_k}$. Ясно, что $\overline{G}$ компактно и является $\mathcal{T}_2$-пространством (ср. II, теорема 5), следовательно, оно нормально (по теореме 3 п. II). Поэтому существует непрерывное отображение $g: \overline{G} \to \mathcal{I}$, такое, что

$$g(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in C \quad \text{и} \quad g(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in [(\overline{G} \cap F) \cup (\overline{G} - G)].$$

Положим $f(x) = g(x)$ при $x \in \overline{G}$ и $f(x) = 1$ при $x \notin \overline{G}$. Очевидно, отображение f непрерывно и удовлетворяет условию (1). Наконец, если $f(x) < 1$, то $x \in \overline{G}$, и, следовательно, при $a < 1$ множество $f^{-1}([0, a])$ есть замкнутое подмножество (компактного) множества $\overline{G}$ и потому компактно.

Теорема 3. *Всякое открытое подмножество локально компактного $\mathcal{T}_2$-пространства локально компактно.*

Доказательство. Пусть $H \subset \mathcal{X}$ открыто и $x \in H$. По предположению существует открытое множество G, такое, что $x \in G$ и $\overline{G}$ компактно. По теореме 2 пространство $\mathcal{X}$ регулярно. Поэтому существует открытое множество U, такое, что $x \in U$ и $\overline{U} \subset G \cap H$. Следовательно, U открыто относительно H и $\overline{U}$ компактно, поскольку $\overline{U} \subset \overline{G}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство и $A \subset \mathcal{X}$. Если A локально компактно, то A локально замкнуто в $\mathcal{X}$.*

Следовательно, *A есть разность двух замкнутых множеств, и потому множество $\overline{A} - A$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $p \in A$. По предположению существует компактная относительно A окрестность U точки p. Следовательно, существует окрестность E точки p (относительно $\mathcal{X}$), такая, что $U = E \cap A$ (можно положить $E = (\mathcal{X} - \overline{A - U}) \cup U$). Так как U замкнуто, это означает, что A локально замкнуто в точке p (см. § 7, V, теорема 2).

Вторая часть теоремы есть следствие первой части (см. § 7, V, следствие).

Теорема 5. (Теорема Александрова об одноточечной компактификации [1]).) *Всякое локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство $\mathcal{X}$ гомеоморфно подмножеству X_0 компактного $\mathcal{T}_2$-пространства $\mathcal{X}^*$, такому, что $\mathcal{X}^* - X_0$ состоит из единственной точки.*

[1]) См. Александров и Хопф [1, стр. 93].

Если пространство $\mathcal{X}$ метрическое сепарабельное, то $\mathcal{X}^*$ — тоже метрическое сепарабельное.

Доказательство. По теореме 2 пространство $\mathcal{X}$ вполне регулярно, и, следовательно, согласно теореме 5 § 16, V, пространстро $\mathcal{X}$ можно рассматривать как подмножество компактного $\mathcal{T}_2$-пространства C ($\subset$ обобщенному кубу). Кроме того, можно предположить, что $\mathcal{X}$ всюду плотно в C, т. е. $C=\bar{\mathcal{X}}$. По теореме 5 множество $C-\mathcal{X}$ замкнуто, поэтому, согласно теореме 4 п. III, существуют компактное $\mathcal{T}_2$-пространство $\mathcal{X}^*$, точка $p\in\mathcal{X}^*$ и непрерывное отображение f: $C\to\mathcal{X}^*$, такие, что $f(C-\mathcal{X})=(p)$ и f есть гомеоморфизм $\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}^*-(p)$.

Это завершает доказательство первой части теоремы.

Если $\mathcal{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, то по теореме Урысона C можно считать замкнутым подмножеством гильбертова куба. Так как $\mathcal{X}^*$ есть непрерывный образ компактного метрического пространства C, то $\mathcal{X}^*$ метризуемо по теореме 3 п. VI.

Замечание 2. Другое доказательство первой части теоремы 6, связанное с известным процессом присоединения бесконечно удаленной точки к евклидову пространству $\mathcal{E}^n$, состоит в следующем.

Пусть p — точка, не принадлежащая $\mathcal{X}$. Положим $\mathcal{X}^*=\mathcal{X}\cup(p)$ и определим топологию в $\mathcal{X}^*$, взяв в качестве элементов открытой базы $\mathcal{X}^*$

(i) открытые подмножества $\mathcal{X}$,

(ii) множества вида $(p)\cup(\mathcal{X}-F)$, где $F\subset\mathcal{X}$ компактно.

Мы должны показать, что $\mathcal{X}^*$ компактно. Пусть $\{G_t\}$, $t\in T$, — открытое покрытие $\mathcal{X}^*$. Пусть $p\in G_{t_0}$. Тогда $\mathcal{X}-G_{t_0}$ компактно, и поэтому $\{G_t\}$ содержит конечное покрытие $G_{t_1}, \ldots, G_{t_n}$ пространства $\mathcal{X}-G_{t_0}$. Отсюда следует, что $G_{t_0}, G_{t_1}, \ldots, G_{t_n}$ есть покрытие $\mathcal{X}^*$.

Замечание 3. Согласно теоремам 3 и 5, *понятия локально компактного $\mathcal{T}_2$-пространства и открытого подмножества компактного $\mathcal{T}_2$-пространства топологически эквивалентны.*

Эта эквивалентность непосредственно приводит к следующим утверждениям:

Теорема 6[1]). *Если $\mathcal{X}$ — локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение пространства $\mathcal{X}$ на некоторое компактное $\mathcal{T}_2$-пространство.*

[1]) См. Пархоменко [1].

Это вытекает из следствия 4а п. III.

Теорема 7. *Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — локально компактные $\mathcal{T}_2$-пространства, то $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ — тоже локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство.*

Это следует из инвариантности компактности и открытости по отношению к прямому произведению (см. IV, теорема 3, и § 15, VII, теорема 1).

Замечание 4. Относительно бесконечных прямых произведений справедливо следующее утверждение:

Произведение $\prod_t \mathscr{X}_t$ есть локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство тогда и только тогда, когда каждое $\mathscr{X}_t$ есть локально компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и все $\mathscr{X}_t$, за исключением конечного числа, компактны ($\mathscr{X}_t$ предполагаются непустыми).

Теорема 8. *Если $\mathscr{X}$ — локально компактное метрическое сепарабельное пространство, то существует последовательность компактных множеств F_1, F_2, ..., такая, что*

$$\mathscr{X} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n+1}).$$

Следовательно, $\mathscr{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Int}(F_n)$, и потому семейство $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ всех компактных подмножеств $\mathscr{X}$ конфинально с последовательностью F_1, F_2, ..., т. е. каждый элемент из $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ содержится в некотором члене указанной последовательности.

Это вытекает из следствия 4 п. II, так как для каждого открытого подмножества X компактного метрического пространства $\mathscr{X}^*$ существует последовательность открытых множеств G_1, G_2, ..., такая, что

$$X = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad \overline{G}_n \subset G_{n+1}.$$

Следовательно, множества $F_1 = \overline{G}_1$, $F_2 = \overline{G}_2$, ... образуют требуемую последовательность компактных множеств.

Замечание 5. Отметим следующую интересную теорему. *Если пространство $\mathscr{X}$ паракомпактно, пространство $\mathscr{Y}$ локально компактно и отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно и замкнуто, то $\operatorname{Fr}\left[\overset{-1}{f}(y)\right]$ компактно для каждого $y \in \mathscr{Y}$* [1]).

Замечание 6. *Локально компактное пространство может не быть нормальным.*

---

[1]) См. Майкл Э. [9]. В случае метрического пространства $\mathscr{X}$ см. Вайнштейн [1].

Примером (принадлежащим А. Н. Тихонову) является пространство $\underset{\alpha}{\mathsf{E}}(\alpha\leqslant\Omega)\times\underset{\beta}{\mathsf{E}}(\beta\leqslant\omega)$ с выброшенной точкой $(\Omega,\ \omega)$ (ср. § 14, V, замечание 1, и п. II, замечание 1).

§ 42. Пространство $2^{\mathscr{X}}$

1. Компактность пространства $2^{\mathscr{X}}$. Напомним, что топология в пространстве $2^{\mathscr{X}}$ (называемая *экспоненциальной*) определялась заданием открытой предбазы этого пространства как совокупности всех множеств

$$(1)\qquad \boldsymbol{B}(G)=\underset{F}{\mathsf{E}}(F\subset G)\quad\text{и}\quad \boldsymbol{C}(H)=\underset{F}{\mathsf{E}}(F\cap H\neq 0),$$

где G и H — открытые подмножества пространства $\mathscr{X}$, а F пробегает $2^{\mathscr{X}}$ (см. § 17, I).

Отсюда следует, что совокупность всех множеств

$$(2)\quad \boldsymbol{B}(G_0,\ G_1,\ \ldots,\ G_n)=\underset{F}{\mathsf{E}}(F\subset G_0)(F\cap G_1\neq 0)\ldots(F\cap G_n\neq 0),$$

где $G_0,\ \ldots,\ G_n$ открыты, есть база пространства $2^{\mathscr{X}}$.

Теорема 1 [1]). *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то пространство $2^{\mathscr{X}}$ также компактно.*

Доказательство. По лемме Александера (см. § 41, I) мы должны показать, что всякое покрытие пространства $2^{\mathscr{X}}$, элементы которого принадлежат какой-нибудь открытой предбазе пространства $2^{\mathscr{X}}$, содержит конечное подпокрытие. Поэтому пусть (в соответствии с (1))

$$(3)\qquad 2^{\mathscr{X}}=\bigcup_t \boldsymbol{B}(G_t)\cup\bigcup_s \boldsymbol{C}(H_s),$$

где G_t и H_s открыты в $\mathscr{X}$.

Положим $F_0=\mathscr{X}-\bigcup\limits_s H_s$. Тогда для каждого s мы имеем

$$F_0\cap H_s=0,\quad\text{т. е.}\quad F_0\notin \boldsymbol{C}(H_s),\quad\text{откуда}\quad F_0\in\bigcup_t \boldsymbol{B}(G_t).$$

Следовательно, существует такое t_0, что

$$F_0\in \boldsymbol{B}(G_{t_0}),\quad\text{т. е.}\quad F_0\subset G_{t_0},\quad\text{откуда}\quad \mathscr{X}-G_{t_0}\subset\mathscr{X}-F_0=\bigcup_s H_s.$$

Так как множество $\mathscr{X}-G_{t_0}$ компактно, то существует конечная система индексов $s_1,\ \ldots,\ s_n$, такая, что

$$(4)\qquad \mathscr{X}-G_{t_0}\subset H_{s_1}\cup\ldots\cup H_{s_n}.$$

[1]) См. Вьеторис [2] и Фринк [1, теорема 15].

Покажем, что

(5) $$2^{\mathscr{X}} = \boldsymbol{B}(G_{t_0}) \cup \boldsymbol{C}(H_{s_1}) \cup \ldots \cup \boldsymbol{C}(H_{s_n}),$$

завершив тем самым доказательство.

Пусть $F \in 2^{\mathscr{X}}$. Необходимо рассмотреть два случая:

(i) $F \subset G_t$; тогда $F \in \boldsymbol{B}(G_{t_0})$.

(ii) $F \not\subset G_{t_0}$, т. е. $F \cap (\mathscr{X} - G_{t_0}) \neq 0$. Тогда, согласно (4), существует такое j, что $F \cap H_{s_j} \neq 0$, т. е. $F \in \boldsymbol{C}(H_{s_j})$.

Таким образом, в обоих случаях F принадлежит правой части равенства (5).

Справедлива также обратная

Теорема 2[1]. *Если пространство $2^{\mathscr{X}}$ компактно, то и $\mathscr{X}$ компактно ($\mathscr{X}$ предполагается $\mathcal{T}_1$-пространством).*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X} = \bigcup G_t$, где G_t открыто. Тогда $2^{\mathscr{X}} - (0) = \bigcup \boldsymbol{C}(G_t)$. Так как $2^{\mathscr{X}} - (0)$ компактно, то $2^{\mathscr{X}} - (0) = \boldsymbol{C}(G_{t_1}) \cup \ldots \cup \boldsymbol{C}(G_{t_n})$. Пусть $x_0 \in \mathscr{X}$. Тогда $(x_0) \in \boldsymbol{C}(G_{t_j})$ для некоторого $j \leqslant n$; это означает, что $x_0 \in G_{t_j}$. Следовательно, $\mathscr{X} = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}$.

Замечание 1. Стоит заметить, что *если пространство $2^{\mathscr{X}}$ метризуемо, то пространство $\mathscr{X}$ компактно* (Майкл Э. [1, стр. 164]).

Замечание 2. Если $\mathscr{X}$ — счетное бесконечное компактное подмножество пространства $\mathscr{E}$, то пространство $2^{\mathscr{X}}$ гомеоморфно объединению канторова дисконтинуума $\mathscr{C}$ с множеством центров смежных интервалов. (Теорема Пелчинского [1, стр. 85].)

Между прочим, это утверждение показывает, что гомеоморфизм пространств $2^{\mathscr{X}}$ и $2^{\mathscr{Y}}$ не влечет за собой гомеоморфизм пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$[2].

Замечание 3. Для произвольного топологического пространства $\mathscr{X}$ обозначим через $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ множество всех его компактных подмножеств. Так как $\mathscr{C}(\mathscr{X}) \subset 2^{\mathscr{X}}$, то (экспоненциальная) топология $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ определяется естественно.

Можно показать (Майкл Э. [1]), что $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ обладает следующими интересными свойствами (соответствующими свойствам пространства $2^{\mathscr{X}}$, сформулированным в § 17): *$\mathscr{C}(\mathscr{X})$ регулярно, соответственно вполне регулярно, соответственно компактно тогда и только тогда, когда таковым является пространство $\mathscr{X}$.*

---

[1]) См. Майкл Э. [1, стр. 161].

[2]) Эта задача была поставлена Пономаревым [1, стр. 195].

Замечание 4. Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. *Пространство $\mathscr{X}$ локально компактно тогда и только тогда, когда $2^{\mathscr{X}}$ локально компактно* [1]).

II. Случай компактного метрического пространства $\mathscr{X}$. В § 21, VII мы для любого метрического пространства $\mathscr{X}$ обозначали через $(2^{\mathscr{X}})_m$ метрическое пространство всех замкнутых подмножеств $\mathscr{X}$; (хаусдорфово) расстояние $\operatorname{dist}(A, B)$ между двумя множествами $A \neq 0$ и $B \neq 0$ определялось как точная верхняя грань чисел $\rho(x, B)$ и $\rho(y, A)$, где $x \in A$, $y \in B$; пустое множество определялось как изолированная точка пространства $(2^{\mathscr{X}})_m$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство. Тогда*

$$2^{\mathscr{X}} \underset{\text{top}}{=} (2^{\mathscr{X}})_m.$$

Именно, *тождественное отображение $2^{\mathscr{X}} \to (2^{\mathscr{X}})_m$ есть гомеоморфизм на.*

Более общо,

$$\mathscr{C}(\mathscr{X}) \underset{\text{top}}{=} [\mathscr{C}(\mathscr{X})]_m,$$

где $[\mathscr{C}(\mathscr{X})]_m$ обозначает множество $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ с хаусдорфовым расстоянием.

Доказательство. 1. Сначала покажем, что каждое открытое множество $\boldsymbol{H}$ в $[\mathscr{C}(\mathscr{X})]_m$ открыто в $\mathscr{C}(\mathscr{X})$ (в его экспоненциальной топологии). Очевидно, достаточно доказать, что каждый шар с компактным центром A:

$$(0) \qquad \boldsymbol{R} = \underset{F}{\mathsf{E}}\,[\operatorname{dist}(A, F) < \varepsilon], \quad \text{где} \quad F \neq 0 \quad \text{и} \quad F \in 2^{\mathscr{X}},$$

открыт в $2^{\mathscr{X}}$.

Поскольку A вполне ограничено (см. § 41, VI, теорема 1), для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует конечная система точек $a_1^k, \ldots, a_{n_k}^k$ множества A, такая, что для каждого $x \in A$ и k мы имеем $|a_i^k - x| < 1/k$ при некотором i (см. § 21, VIII, теорема 1). Пусть

$$(1) \qquad G_i^k = \underset{x}{\mathsf{E}}\,[\,|x - a_i^k| < \varepsilon - 1/k],$$

$$(2) \qquad G = \underset{x}{\mathsf{E}}\,[\rho(x, A) < \varepsilon].$$

[1]) Майкл Э. [1, стр. 162]. См. также Ватсон [1].

Покажем, что (ср. I (2))

$$\text{(3)}\qquad \boldsymbol{R}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{B}\left(G,\ G_1,\ \ldots,\ G_{n_k}^k\right)=$$
$$=\bigcup_{k=1}^{\infty}\underset{F}{\mathrm{E}}\,(F\subset G)\left(F\cap G_1^k\neq 0\right)\ldots\left(F\cap G_{n_k}^k\neq 0\right),$$

завершив тем самым доказательство.

Во-первых, пусть $F\in\boldsymbol{R}$. Тогда $\operatorname{dist}(A,\ F)<\varepsilon-1/k$ для некоторого k. Отсюда следует, что

$$\text{(4)}\qquad x\in A\Rightarrow\rho(x,\ F)<\varepsilon-1/k$$

и

$$\text{(5)}\qquad y\in F\Rightarrow\rho(y,\ A)<\varepsilon-1/k.$$

Из соотношений (5) и (2) видно, что $F\subset G$. С другой стороны, для $x=a_i^k$, согласно (4), существует элемент $y\in F$, такой, что $|y-a_i^k|<\varepsilon-1/k$. Это означает (ср. (1)), что $F\cap G_i^k\neq 0$ для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_k$. Таким образом, F принадлежит правой части равенства (3).

Обратно, предположим, что $F\subset G$ и $F\cap G_i^k\neq 0$ для некоторого k и всех $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n_k$. Тогда, согласно (2), мы имеем

$$\text{(6)}\qquad y\in F\Rightarrow\rho(y,\ A)<\varepsilon.$$

С другой стороны, пусть $x\in A$ и i таково, что $|a_i^k-x|<1/k$. Так как $F\cap G_i^k\neq 0$, то существует $y\in F$, такой, что (ср. (1)) $|y-a_i^k|<\varepsilon-1/k$. Тогда $|y-x|<\varepsilon$ и, следовательно, $\rho(x,\ F)<\varepsilon$. Таким образом,

$$\text{(7)}\qquad x\in A\Rightarrow\rho(x,\ F)<\varepsilon.$$

Соотношения (6) и (7) дают $F\in\boldsymbol{R}$.

2. Далее мы должны показать, что для всякого открытого множества $\boldsymbol{H}$ в $2^{\mathscr{X}}$ множество $\boldsymbol{H}\cap\mathscr{C}(\mathscr{X})$ открыто в $[\mathscr{C}(\mathscr{X})]_m$. Мы можем, конечно, ограничиться случаем, когда $\boldsymbol{H}$ принадлежит предбазе пространства $2^{\mathscr{X}}$.

Случай 2a. $\boldsymbol{H}=\underset{F}{\mathrm{E}}\,(F\subset G)$, где G открыто в $\mathscr{X}$ (и $G\neq\mathscr{X}$). Пусть множество A компактно и содержится в G. Пусть $\varepsilon=\rho(A,\ \mathscr{X}-G)$. Согласно следствию 3b, § 41, VI, $\varepsilon>0$. Остается показать, что

$$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{H},\quad\text{т. е.}\quad F\in\boldsymbol{R}\Rightarrow F\subset G$$

(где $\boldsymbol{R}$ определяется формулой (0)).

Предположим, что $p \in F - G$. Тогда $\rho(p, A) \geqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\operatorname{dist}(F, A) \geqslant \varepsilon$ и $F \notin \boldsymbol{R}$.

Случай 2b. $\boldsymbol{H} = \underset{F}{\mathsf{E}}(F \cap G \neq 0)$. Пусть множество A компактно и $A \cap G \neq 0$. Пусть $a \in A \cap G$. Положим $\varepsilon = \rho(a, \mathscr{X} - G)$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{H}$. Это завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Легко показать [1]), что если $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, то условия

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(F_n, F) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} F_n = F$$

эквивалентны, каковы бы ни были замкнутые непустые множества F_n и F. Следовательно,

$$2^{\mathscr{X}} \underset{\text{top}}{=} (2^{\mathscr{X}})_L,$$

причем топология в $(2^{\mathscr{X}})_L$ индуцируется операцией Lim.

Заметим, что гомеоморфизм между пространствами $(2^{\mathscr{X}})_m$ и $(2^{\mathscr{X}})_L$ не имеет места для некомпактных метрических пространств (см. § 29, IX).

Замечание 2. Для каждого непустого компактного подмножества $F \subset \mathscr{E}$ обозначим через $\mu(F)$ *первую* (или *последнюю*) точку F. Тогда *отображение* μ: $2^{\mathscr{I}} \to \mathscr{I}$ *непрерывно*. Более общо, μ: $\mathscr{C}(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ *непрерывно*.

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ и $\mu(F_1) \leqslant \mu(F_2)$. Тогда

$$|\mu(F_1) - \mu(F_2)| = \rho[\mu(F_1), F_2] \leqslant \operatorname{dist}(F_1, F_2).$$

III. Семейства подмножеств пространства $\mathscr{X}$. Операции над множествами. Напомним, что если множество K замкнуто, а G открыто, то множество $\underset{F}{\mathsf{E}}(F \subset K)$ замкнуто, а $\underset{F}{\mathsf{E}}(F \subset G)$ открыто в $2^{\mathscr{X}}$, каково бы ни было топологическое пространство $\mathscr{X}$ (см. § 17, II, теорема 1).

Если $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство, то множество $\underset{F}{\mathsf{E}}(A \subset F)$ замкнуто в $2^{\mathscr{X}}$, каково бы ни было множество $A \subset \mathscr{X}$ (§ 17, II, теорема 2). Для компактных пространств мы имеем еще ряд утверждений.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное $\mathscr{T}_2$-пространство. Тогда если A является $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством, то таким же является множество $\underset{F}{\mathsf{E}}(F \subset A)$.*

---

[1]) См. Хаусдорф [1]; см. также § 29, IX.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентность

$$(1)\qquad F \not\subset A \equiv \bigvee_x (x \in F)(x \in \mathcal{X} - A).$$

Множество $\mathsf{E}_{x,F}(x \in F)$ замкнуто в $\mathcal{X} \times 2^{\mathcal{X}}$ (это верно для всякого $\mathcal{T}_2$-пространства $\mathcal{X}$, см. § 17, IV, теорема 1). Следовательно, $\mathsf{E}_{x,F}(x \in F)(x \in \mathcal{X} - A)$ есть F_σ-множество, а потому и его проекция на $2^{\mathcal{X}}$-ось есть F_σ-множество (согласно следствию 1а из § 41, IV); но это означает, что $\mathsf{E}_F(F \not\subset A)$ есть F_σ-множество.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство. Тогда если A есть множество проективного класса* $\boldsymbol{CA}$, *то таким является и множество $\mathsf{E}_F(F \subset A)$.*

Доказательство, основывающееся на эквивалентности (1), совершенно аналогично предыдущему доказательству.

Замечание. Аналогичное утверждение для случая, когда множество A типа F_σ, не верно. В самом деле, если $\mathcal{X} = \mathcal{J}$ и $A = \mathcal{R}$ (множество рациональных чисел), то $\mathsf{E}_F(F \subset A)$ не есть множество типа F_σ; более того, оно даже не является аналитическим множеством (см. § 43, VIII, следствие 3).

Теорема 3 [1]. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство. Тогда семейство* $\boldsymbol{P}$ *всех совершенных подмножеств пространства $\mathcal{X}$ есть G_δ-множество в пространстве $2^{\mathcal{X}}$.*

Сначала покажем, что имеет место следующая лемма (справедливая для любого регулярного $\mathcal{T}_1$-пространства $\mathcal{X}$).

Лемма. *Если $G \subset \mathcal{X}$ — открытое множество, то множество $\mathsf{E}_{x,F}[(F \cap G) = (x)]$ есть пересечение замкнутого множества с открытым множеством в $\mathcal{X} \times 2^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство леммы. Так как множество $\mathsf{E}_{x,F}(x \in F)$ замкнуто в $\mathcal{X} \times 2^{\mathcal{X}}$ (см. § 17, IV, следствие 5), то множество

$$\mathsf{E}_{x,F}[(x) \subset (F \cap G)] = \mathsf{E}_{x,F}(x \in F) \cap \mathsf{E}_{x,F}(x \in G)$$

есть пересечение замкнутого множества с открытым.

С другой стороны, (x) представляет собой непрерывное отображение (согласно следствию 3а из § 17, III), и поэтому $(x) \cup (\mathcal{X} - G)$ — тоже непрерывное отображение (как объединение двух

[1] Эта теорема принадлежит Банаху.

непрерывных отображений; см. § 17, III, теорема 4). Поскольку множество $\underset{F,H}{\mathsf{E}}(F\subset H)$ замкнуто в $2^{\mathscr{X}}\times 2^{\mathscr{X}}$ (так как $\mathscr{X}$ регулярно, см. § 17, IV, теорема 1), отсюда следует, что множество

$$\underset{x,F}{\mathsf{E}}[(F\cap G)\subset(x)]=\underset{x,F}{\mathsf{E}}[F\subset(x)\cup(\mathscr{X}-G)]$$

замкнуто в $\mathscr{X}\times 2^{\mathscr{X}}$.

Это завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 3. Обозначим через $\boldsymbol{P}$ семейство всех совершенных подмножеств пространства $\mathscr{X}$. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — открытая база пространства $\mathscr{X}$. Условие $F\in 2^{\mathscr{X}}-\boldsymbol{P}$ эквивалентно существованию точки x и индекса n, таких, что $F\cap G_n=(x)$, т. е.

$$2^{\mathscr{X}}-\boldsymbol{P}=\underset{F}{\mathsf{E}}\bigvee_n\bigvee_x[(F\cap G_n)=(x)]=\bigcup_n\underset{F}{\mathsf{E}}\bigvee_x[(F\cap G_n)=(x)].$$

По лемме $\underset{x,F}{\mathsf{E}}[(F\cap G_n)=(x)]$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество, а потому и множество $\underset{F}{\mathsf{E}}\bigvee_x[(F\cap G_n)=(x)]$ типа $\boldsymbol{F}_\sigma$. Следовательно, $2^{\mathscr{X}}-\boldsymbol{P}$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество.

Следствие 3а[1]). *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство. Тогда семейство всех счетных замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ есть множество проективного класса* $\boldsymbol{CA}$ *в* $2^{\mathscr{X}}$.

Доказательство. Обозначим через $\boldsymbol{U}$ семейство всех несчетных замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$. Так как каждое $F\in\boldsymbol{U}$ содержит совершенное непустое подмножество (по теореме Кантора — Бендиксона, см. § 23, V), то

$$\boldsymbol{U}=\underset{F}{\mathsf{E}}\bigvee_K(0\neq K\subset F)(K\in\boldsymbol{P}).$$

По теореме 3 множество $\underset{F,K}{\mathsf{E}}(0\neq K\subset F)(K\in\boldsymbol{P})$ есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество. Следовательно, $\boldsymbol{U}$ как проекция $\boldsymbol{G}_\delta$-множества есть аналитическое множество (см. § 38, I).

Замечание. Рассматриваемое семейство не обязательно является аналитическим (см. § 43, VII, следствие 3).

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство. Тогда семейство $\boldsymbol{N}$ всех нигде не плотных замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество в $2^{\mathscr{X}}$.*

---

[1]) Теорема Гуревича [4].

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — открытая база пространства $\mathscr{X}$ $(G_n \neq 0)$. Тогда

$$2^{\mathscr{X}} - \boldsymbol{N} = \mathop{\mathsf{E}}_{F} \bigvee_{n} (G_n \subset F) = \bigcup_{n} \mathop{\mathsf{E}}_{F} (G_n \subset F).$$

Так как $\mathop{\mathsf{E}}_{F}(G_n \subset F)$ замкнуто, то $2^{\mathscr{X}} - \boldsymbol{N}$ есть множество типа $\boldsymbol{F}_\sigma$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{T}_1$-пространство. Пусть $\boldsymbol{A} \subset 2^{\mathscr{X}}$ и $S = \mathsf{S}(\boldsymbol{A})$ (объединение элементов $\boldsymbol{A}$). Если $\boldsymbol{A}$ открыто, то S открыто. Если $\boldsymbol{A}$ компактно и $\mathscr{X}$ регулярно, то S замкнуто.*

Доказательство. Допустим, что $\boldsymbol{A}$ открыто в $2^{\mathscr{X}}$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\boldsymbol{A}$ есть элемент базы пространства $2^{\mathscr{X}}$. Пусть $G_0, \ldots, G_n$ — система открытых множеств (в $\mathscr{X}$), такая, что (ср. § 17, I)

$$(F \in \boldsymbol{A}) \equiv (F \subset G_0)(F \cap G_1 \neq 0) \ldots (F \cap G_n \neq 0)$$

и $0 \neq G_i \subset G_0$ для $i = 1, \ldots, n$.

Докажем, что $S = G_0$.

Очевидно, что $S \subset G_0$. Обратно, пусть $x_0 \in G_0$; обозначим через x_i любую точку G_i для $i = 1, \ldots, n$. Тогда множество $F = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ есть элемент $\boldsymbol{A}$ и, следовательно, $x_0 \in S$. Таким образом, $G_0 \subset S$ и $S = G_0$, что завершает доказательство первой части теоремы.

Теперь пусть множество $\boldsymbol{A}$ компактно. По определению

$$(x \in S) \equiv \bigvee_{F \in \boldsymbol{A}} (x \in F),$$

и, согласно теореме 1 из § 17, IV, множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x, F}(x \in F)$ замкнуто в $\mathscr{X} \times \boldsymbol{A}$. Так как S есть проекция этого множества на $\mathscr{X}$-ось, то из этого следует (в силу компактности $\boldsymbol{A}$), что S замкнуто (см. § 41, IV, теорема 1).

Замечание 1. Из теоремы 5 следует, что если $\boldsymbol{A}$ есть счетное объединение компактных множеств, то таким же является и множество $\mathsf{S}(A)$ (например, если $\boldsymbol{A}$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество, а $2^{\mathscr{X}}$ компактно).

Однако подобная теорема не имеет места для $\boldsymbol{G}_\delta$-множеств. Это видно на следующем примере.

Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{I}$, $F_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right)$ и $\boldsymbol{A}$ — семейство всех F_n, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $\boldsymbol{A}$ есть дискретное подмножество пространства $2^{\mathscr{I}}$ и, следовательно, множество типа $\boldsymbol{G}_\delta$ (см. § 24, III, теорема 1a). Множество $\mathsf{S}(A)$ есть множество всех рациональных чисел (в $\mathscr{I}$) и, следовательно, не является $\boldsymbol{G}_\delta$-множеством.

Замечание 2. *Семейство* $\boldsymbol{W}$ *всех вполне упорядоченных (по отношению* $<$*) замкнутых подмножеств пространства* $\mathcal{Y}$ *есть множество проективного класса* $\boldsymbol{CA}$ *в* $2^{\mathcal{Y}}$.

Для того чтобы доказать это утверждение, воспользуемся тем очевидным фактом, что подмножество $\mathcal{Y}$ не является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда оно содержит убывающую последовательность элементов. Поэтому, обозначая через $\mathfrak{z}=[\mathfrak{z}^{(1)}, \mathfrak{z}^{(2)}, \ldots]$ произвольную точку пространства $\mathcal{Y}^{\aleph_0}$, мы имеем

$$2^{\mathcal{X}}-\boldsymbol{W}=\mathop{\mathsf{E}}_{F}\bigvee_{\mathfrak{z}}\bigwedge_{n,k}(\mathfrak{z}^{(n)}\in F)(\mathfrak{z}^{(n)}>\mathfrak{z}^{(n+k)}).$$

Отсюда следует, что множество $2^{\mathcal{X}}-\boldsymbol{W}$ аналитическое.

Замечание 3. Легко показать, что *для любого* $\mathcal{T}_2$*-пространства семейство всех множеств, состоящих не более чем из* n *элементов, замкнуто (при фиксированном* n*) в пространстве* $2^{\mathcal{X}}$.

Отсюда следует

Замечание 4. *Семейство всех замкнутых конечных множеств есть* $\boldsymbol{F}_\sigma$*-множество в пространстве* $2^{\mathcal{X}}$.

Более того, *оно всюду плотно в* $2^{\mathcal{X}}$ (см. § 17, II, теорема 4).

Теорема 6. *Пусть пространство* $\mathcal{X}$ *компактно и* $F_t=\overline{F}_t\subset\mathcal{X}$ *для каждого* $t\in T$. *Предположим, что семейство* $\boldsymbol{A}=\{F_t\}$ *конечно-мультипликативно, т. е. для каждой конечной системы индексов* $t_1, \ldots, t_n$ *существует такое* $t\in T$, *что* $F_t=F_{t_1}\cap\ldots\cap F_{t_n}$. *Тогда* $\left(\bigcap_{t\in T}F_t\right)\in\overline{\boldsymbol{A}}$.

Доказательство. Положим $Z=\bigcap_t F_t$. Мы должны показать, что если $\boldsymbol{G}$ открыто в $2^{\mathcal{X}}$ и $Z\in\boldsymbol{G}$, то существует такое t, что $F_t\in\boldsymbol{G}$. Очевидно, можно предположить, что $\boldsymbol{G}$ принадлежит базе, рассмотренной в I (2). Другими словами, для данной системы открытых множеств $G_0, \ldots, G_n$ (в $\mathcal{X}$), таких, что

(2) $\qquad Z\subset G_0$ и $Z\cap G_i\neq 0$ при $i=1, \ldots, n$,

мы должны показать, что для некоторого $t\in T$

(3) $\qquad F_t\subset G_0$ и $F_t\cap G_i\neq 0$ при $i=1, \ldots, n$.

Предположим, что это неверно. Так как соотношение $F_t\cap G_i\neq 0$ следует из соотношений $Z\cap G_i\neq 0$ и $Z\subset F_t$, то наше предположение означает, что для каждого t мы имеем $F_t\not\subset G_0$, т. е. $F_t\cap H\neq 0$, где $H=\mathcal{X}-G_0$. Поэтому для любой конечной системы индексов $t_1, \ldots, t_n$ мы имеем $(F_{t_1}\cap H)\cap\ldots$ $\ldots\cap(F_{t_n}\cap H)\neq 0$; по предположению существует такое t, что

$$F_{t_1}\cap\ldots\cap F_{t_n}=F_t,$$

следовательно,

$$(F_{t_1} \cap H) \cap \ldots \cap (F_{t_n} \cap H) = (F_t \cap H) \neq 0.$$

Отсюда вытекает, согласно условию Рисса (см. § 41, I (2)), что $\bigcap_t (F_t \cap H) \neq 0$, т. е. $Z \not\subset G_0$ вопреки (2).

IV. Неприводимые множества. Насыщенные множества. Множество F называется *неприводимым* множеством (соответственно *насыщенным* множеством) семейства множеств $\boldsymbol{A}$, если $F \in \boldsymbol{A}$ и из соотношений $X \neq F$ и $X \subset F$ (соответственно $X \supset F$) следует, что $X \notin \boldsymbol{A}$ [1]).

Из теоремы 6 п. III вытекает

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство и $\boldsymbol{A} \subset 2^{\mathcal{X}}$ — вполне упорядоченное убывающее семейство множеств*

(1) $$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots, \quad \alpha < \gamma.$$

Тогда $\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right) \in \overline{\boldsymbol{A}}$.

Теорема 2 [2]). *Пусть пространство $\mathcal{X}$ компактно. Тогда всякое замкнутое семейство $\boldsymbol{C} \subset 2^{\mathcal{X}}$ содержит неприводимый элемент.*

Доказательство. Пусть F_0 — произвольный элемент $\boldsymbol{C}$. Если F_0 не является неприводимым, то существует $F_1 \in \boldsymbol{C}$, такое, что $F_1 \subset F_0$ и $F_1 \neq F_0$. Продолжая таким образом, мы определим с помощью трансфинитной индукции последовательность (1), считая, что $F_{\alpha+1}$ удовлетворяет условиям $F_{\alpha+1} \in \boldsymbol{C}$ и $F_{\alpha+1} \subset F_\alpha \neq F_{\alpha+1}$ (при условии что F_α не является неприводимым), и полагая $F_\lambda = \bigcap_{\xi < \lambda} F_\xi$, если λ есть предельное порядковое число. Так как множество $\boldsymbol{C}$ замкнуто, то в силу теоремы 1 отсюда следует, что $F_\alpha \in \boldsymbol{C}$ при каждом α. Ясно, что, начиная с определенного α_0, последовательность $\{F_\alpha\}$ не может продолжаться. Следовательно, F_{α_0} — неприводимый элемент $\boldsymbol{C}$.

Замечания. Если $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство, то можно ограничиться последовательностями (1) типа ω [3]).

В связи с этим стоит заметить, что следующее утверждение можно доказать аналогичным способом (см. Лелек [1]).

Пусть $\mathcal{X}$ — топологическое пространство со счетной открытой базой, и пусть $\boldsymbol{A}$ — семейство замкнутых подмножеств простран-

---

[1]) Эти понятия были введены Янишевским.
[2]) Ср. Брауэр [4, стр. 138].
[3]) Это доказано Мазуркевичем; см. Куратовский [1, стр. 27].

ства $\mathscr{X}$, такое, что для всякой последовательности (1) типа $\gamma=\omega$ пересечение $F_0\cap F_1\cap\ldots$ содержит элемент семейства $\boldsymbol{A}$. Тогда каждое множество, принадлежащее $\boldsymbol{A}$, содержит множество, неприводимое в $\boldsymbol{A}$.

Очевидно, последнее утверждение остается справедливым, если не предполагать, что пространство $\mathscr{X}$ имеет счетную открытую базу, а ввести условие $\left(\bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}\right)\in \boldsymbol{A}$ для всякой последовательности (1) подмножеств из $\mathscr{X}$ (каково бы ни было порядковое число γ). Это по существу было показано при доказательстве теоремы 2.

V. Операции $\delta(F)$ **и** $\rho(F_1, F_2)$. Пусть $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство. Так как $\mathscr{X}$ ограничено, то ограничен и диаметр $\delta(F)$ для каждого $F\subset\mathscr{X}$ (напомним, что $\delta(F)$ есть точная верхняя грань всевозможных расстояний между точками множества F; см. § 21, III).

Теорема 1. *Функция* $\delta\colon 2^{\mathscr{X}}\to\mathscr{E}$ *непрерывна.*

Более точно (ср. п. II, замечание),

(1) $$\delta(\operatorname{Li} F_n)\leqslant\liminf\delta(F_n),$$

(2) $$\limsup\delta(F_n)\leqslant\delta(\operatorname{Ls} F_n).$$

Доказательство. Пусть p и q таковы, что (ср. § 41, VI, следствие 2d)

(3) $$\delta(\operatorname{Li} F_n)=|p-q| \quad \text{и} \quad p\in\operatorname{Li} F_n,\ \ q\in\operatorname{Li} F_n.$$

Тогда существуют две последовательности $p_1, p_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$, такие, что

(4) $$p=\lim_n p_n,\quad q=\lim_n q_n,\quad p_n\in F_n,\quad q_n\in F_n.$$

Поэтому

$$|p_n-q_n|\leqslant\delta(F_n)\quad \text{и}\quad \lim|p_n-q_n|=|p-q|,$$

откуда

$$|p-q|\leqslant\liminf\delta(F_n).$$

На основании (3) отсюда следует (1).

Далее, предположим, что

(5) $$\limsup\delta(F_n)=\lim\delta(F_{k_n})\quad \text{и}\quad \delta(F_{k_n})=|p_{k_n}-q_{k_n}|,$$

где $p_{k_n}\in F_{k_n}$ и $q_{k_n}\in F_{k_n}$.

Очевидно, можно предположить, что последовательности $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ и $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots$ сходятся (в противном случае мы заменили бы последовательность $F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots$ последовательностью с требуемыми свойствами). Положим

(6) $\lim p_{k_n} = p$ и $\lim q_{k_n} = q$, откуда $p \in \mathrm{Ls}\, F_n$ и $q \in \mathrm{Ls}\, F_n$.

Отсюда следует, что

(7) $|p-q| \leqslant \delta(\mathrm{Ls}\, F_n)$ и $\lim |p_{k_n} - q_{k_n}| = |p-q|$.

На основании (5) отсюда следует (2). Итак, доказательство теоремы 1 завершено.

Далее, напомним, что $\rho(F_1, F_2)$ обозначает точную нижнюю грань всех расстояний $|x_1 - x_2|$, где $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ (см. § 21, IV). Если F_1 и F_2 — переменные замкнутые подмножества компактного метрического пространства $\mathscr{X}$, то ρ есть действительная функция, определенная на прямом произведении $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}}$.

Теорема 2. *Функция* ρ: $2^{\mathscr{X}} \times 2^{\mathscr{X}} \to \mathscr{E}$ *непрерывна.*

Более точно (в предположении, что $F_n \in 2^{\mathscr{X}}$ и $H_n \in 2^{\mathscr{X}}$), мы имеем

(8) $$\rho(\mathrm{Ls}\, F_n, \mathrm{Ls}\, H_n) \leqslant \liminf \rho(F_n, H_n),$$

(9) $$\limsup \rho(F_n, H_n) \leqslant \rho(\mathrm{Li}\, F_n, \mathrm{Li}\, H_n).$$

Доказательство. Положим

(10) $\liminf \rho(F_n, H_n) = \lim \rho(F_{k_n}, H_{k_n})$, $\rho(F_{k_n}, H_{k_n}) = |p_{k_n} - q_{k_n}|$,

где

$$p_{k_n} \in F_{k_n} \quad \text{и} \quad q_{k_n} \in H_{k_n}.$$

Очевидно, можно предположить, что последовательности $p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots$ и $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots$ сходятся, т. е. выполнено (6). Тогда

$$\rho(\mathrm{Ls}\, F_n, \mathrm{Ls}\, H_n) \leqslant |p-q| = \lim |p_{k_n} - q_{k_n}|,$$

что на основании (10) дает (8). Далее, положим

(11) $\rho(\mathrm{Li}\, F_n, \mathrm{Li}\, H_n) = |p-q|$, $p \in \mathrm{Li}\, F_n$, $q \in \mathrm{Li}\, H_n$.

Тогда

$$p = \lim p_n, \quad p_n \in F_n, \quad q = \lim q_n, \quad q_n \in H_n.$$

Поэтому

$$|p-q| = \lim |p_n - q_n| \quad \text{и} \quad |p_n - q_n| \geqslant \rho(F_n, H_n)$$

и, следовательно,

(12) $$|p-q| \geqslant \limsup \rho(F_n, H_n).$$

Из (11) и (12) вытекает (9).

§ 43. Полунепрерывность

I. Полунепрерывность и предположение компактности пространства $\mathcal{X}$[1]. Напомним (см. § 18, I), что отображение $F\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — топологические пространства, называется *полунепрерывным сверху*, если для всякого замкнутого множества $A \subset \mathcal{X}$ множество $\underset{y}{\mathsf{E}}\,[F(y) \cap A \neq 0]$ замкнуто в $\mathcal{Y}$.

Заменяя в этом определении слово «замкнутый» словом «открытый», мы получим определение *полунепрерывности снизу*.

Более точно, F называется *полунепрерывным сверху в точке* y_0, если

$$y_0 \in F^{-1}(2^G) \Rightarrow y_0 \in \operatorname{Int}[F^{-1}(2^G)],$$

каково бы ни было открытое множество G; F называется *полунепрерывным снизу в точке* y_0, если

$$y_0 \in \overline{F^{-1}(2^K)} \Rightarrow y_0 \in F^{-1}(2^K),$$

каково бы ни было замкнутое множество K.

В § 18 был сформулирован ряд свойств полунепрерывных отображений. Сейчас мы сформулируем еще ряд свойств, в предположении, что пространство $\mathcal{X}$ компактно, а $\mathcal{Y}$ — произвольное $\mathcal{T}_2$-пространство.

Сначала заметим, что если отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно, то f — замкнутое отображение (см. § 41, III, теорема 2). Отсюда и из теорем 5 и 5а § 18, III вытекает следующее утверждение:

Теорема 1. *Если отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ непрерывно, то отображение $f^{-1}\colon 2^{\mathcal{Y}} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно сверху.*

В частности, $\overset{-1}{f}\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ *полунепрерывно сверху.*

Теорема 2. *Пусть отображение $Q\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$ определено соотношением $Q(y) = \mathcal{X} \times (y)$. Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то отображение Q полунепрерывно сверху.*

Отображение Q полунепрерывно снизу при любом пространстве $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ — замкнутое множество. Мы имеем

(1) $$[Q(y) \cap A \neq 0] \equiv \bigvee_x (x, y) \in A;$$

---

[1]) Ср. Куратовский [26, стр. 148]. См. также Берж [2, гл. VI].

это означает, что множество $\underset{y}{\mathrm{E}}\,[Q(y)\cap A\neq 0]$ есть проекция множества A на $\mathcal{Y}$-ось. Это множество замкнуто, так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, а множество A замкнуто (ср. § 41, IV, теорема 1). Следовательно, отображение Q полунепрерывно сверху.

Если множество A открыто, то открытым будет и множество $\underset{y}{\mathrm{E}}\,[Q(y)\cap A\neq 0]$, так как формула (1) означает, что (ср. § 2, V(1))

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,[Q(y)\cap A\neq 0]=\bigcup_x \underset{y}{\mathrm{E}}\,[(x,\ y)\in A],$$

и $\underset{y}{\mathrm{E}}\,(x,\ y)\in A$ открыто для всякого x.

Замечание. *Для некомпактного пространства $\mathcal{X}$ отображение Q может не быть полунепрерывным сверху.* Пример: $\mathcal{X}=\mathcal{E}$, $\mathcal{Y}=\mathcal{J}$; рассмотрите множество

$$A=\underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,(x=1/y)\ \ (0<y\leqslant 1).$$

Теорема 3. *Пусть $D=\bar{D}\subset\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ и $F(y)=\underset{x}{\mathrm{E}}\,[(x,\ y)\in D]$ (горизонтальное сечение). Тогда F полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $K=\bar{K}\subset\mathcal{X}$. Так как отображение Q из теоремы 2 полунепрерывно сверху, то таким будет и $Q\cap D$ (ср. § 18, V, теорема 2). Так как $K\times\mathcal{Y}$ замкнуто в $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, то замкнуто и множество

$$\underset{y}{\mathrm{E}}\,[(Q(y)\cap D)\cap(K\times\mathcal{Y})\neq 0].$$

Остается показать, что это множество совпадает с множеством $\underset{y}{\mathrm{E}}\,[F(y)\cap K\neq 0]$. Но это вытекает из соотношений

$$((x,\ y)\in D)(x\in K)\equiv(x,\ y)\in[D\cap(K\times\mathcal{Y})]\equiv$$
$$\equiv(x,\ y)\in[Q(y)\cap D\cap(K\times\mathcal{Y})],$$

следовательно,

$$[F(y)\cap K\neq 0]\equiv\bigvee_x\,[x\in(F(y)\cap K)]\equiv$$
$$\equiv\bigvee_x\,[(x,\ y)\in Q(y)\cap D\cap(K\times\mathcal{Y})]\equiv$$
$$\equiv[Q(y)\cap D\cap(K\times\mathcal{Y})\neq 0].$$

Теорема 4. *Пусть $F\colon\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$. Отображение F полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда замкнуто множество*

$$D=\underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,[x\in F(y)]. \qquad (2)$$

Доказательство. Если отображение F полунепрерывно сверху, то D замкнуто (по теореме 1 из § 18, III, которая справедлива для любого регулярного пространства $\mathscr{Y}$).

Обратно, если D замкнуто, то наше утверждение следует из теоремы 3, так как $(x, y) \in D \equiv x \in F(y)$.

В § 18, V, стр. 189, было показано, что пересечение двух полунепрерывных сверху отображений полунепрерывно сверху, если пространство $\mathscr{X}$ нормально. Мы хотим распространить эту теорему на пересечение произвольного семейства полунепрерывных сверху отображений в предположении компактности пространства $\mathscr{X}$.

Сначала мы докажем лемму, соответствующую (в конечном случае) лемме из § 18, V, стр. 188.

Лемма[1]). *Пусть T — произвольное множество, $\mathscr{X}$ — компактное $\mathscr{T}_2$-пространство и F_t: $\mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$ для каждого $t \in T$. Положим $F(y) = \bigcap\limits_t F_t(y)$.*

Тогда для каждого открытого множества $G \subset \mathscr{X}$ мы имеем

$$F^{-1}(2^G) = \bigcup_U \bigcap_t F_t^{-1}(2^{U_t}), \tag{3}$$

где объединение распространяется на все семейства $\boldsymbol{U}$, состоящие из открытых множеств U_t, имеющих G в качестве их общего пересечения и таких, что, за исключением конечного числа индексов, $U_t = \mathscr{X}$.

Доказательство. 1. Пусть $y \in F^{-1}(2^G)$, т. е. $\left(\bigcap\limits_t F_t(y)\right) \subset G$ или, эквивалентно, $\bigcap\limits_t (F_t(y) - G) = 0$. Так как пространство $\mathscr{X}$ компактно, а множества $F_t(y) - G$ замкнуты, то существует (ср. с условием Рисса, § 41, I (2)) конечная система индексов $t_1, \ldots, t_k$, такая, что

$$(F_{t_1}(y) - G) \cap \ldots \cap (F_{t_n}(y) - G) = 0. \tag{4}$$

Так как множества $F_{t_i}(y) - G$ замкнуты, то существует, согласно (4), система открытых множеств $V_{t_1}, \ldots, V_{t_k}$, такая, что (см. § 14, III, стр. 131)

$$V_{t_1} \cap \ldots \cap V_{t_k} = 0 \quad \text{и} \quad F_{t_i}(y) - G \subset V_{t_i} \tag{5}$$

---

[1]) Эта лемма, а также приведенные далее теорема и следствия принадлежат Энгелькингу [1].

для $i=1, 2, \ldots, k$. Пусть $\boldsymbol{U}$ — семейство всех множеств $U_{t_i}=G\cup V_{t_i}$ при $i=1, 2, \ldots, k$ и $U_t=\mathscr{X}$ при $t\neq t_i$. Очевидно,

$$\bigcap_t U_t=U_{t_1}\cap \ldots \cap U_{t_k}=(G\cup V_{t_1})\cap \ldots \cap(G\cup V_{t_k})=G,$$

согласно первой части соотношения (5). Согласно второй части этого соотношения, $F_t(y)\subset U_t$, т. е. $y\in F_t^{-1}(2^{U_t})$ для каждого $t\in T$, и, следовательно, y принадлежит правой части соотношения (3).

2. Предположим теперь, что y принадлежит правой части равенства (3). Тогда существует семейство $\boldsymbol{U}$ открытых множеств U_t, таких, что $\bigcap_t U_t=G$ и $y\in F_t^{-1}(2^{U_t})$, т. е. $F_t(y)\subset U_t$ для каждого $t\in T$. Следовательно,

$$F(y)=\bigcap_t F_t(y)\subset\bigcap_t U_t=G, \quad \text{т. е.} \quad y\in F^{-1}(2^G).$$

Теорема 5. *Пусть пространство $\mathscr{X}$ и отображение F такие же, как в лемме. Если каждое F_t полунепрерывно сверху в точке y_0, то и отображение F полунепрерывно сверху в этой точке.*

Доказательство. Пусть множество G открыто и $y_0\in F^{-1}(2^G)$. Мы должны показать, что $y_0\in \operatorname{Int}|F^{-1}(2^G)|$. Применим лемму и рассмотрим семейство $\boldsymbol{U}$, такое, что $y_0\in F_t^{-1}(2^{U_t})$ для каждого $U_t\in\boldsymbol{U}$ и, кроме того, $U_t=\mathscr{X}$, за исключением тех t, которые принадлежат конечной системе $t_1, \ldots, t_k$. Так как F_{t_i} полунепрерывно сверху в y_0, отсюда следует, что $y_0\in\operatorname{Int}\left|F_{t_i}^{-1}(2^{U_{t_i}})\right|$, и поэтому

$$y_0\in\bigcap_{i=1}^{k}\operatorname{Int}\left|F_{t_i}^{-1}(2^{U_{t_i}})\right|=\operatorname{Int}\left[\bigcap_{i=1}^{k}F_{t_i}^{-1}(2^{U_{t_i}})\right].$$

Согласно равенству (3), $\bigcap_{i=1}^{k}F_{t_i}^{-1}(2^{U_{t_i}})\subset F^{-1}(2^G)$, откуда $y_0\in\operatorname{Int}|F^{-1}(2^G)|$.

Теорема 6. *Пусть пространство $\mathscr{X}_j$ компактно и $F_j\colon \mathscr{Y}\to 2^{\mathscr{X}_j}$, $j=0, 1$. Положим $F(y)=F_0(y)\times F_1(y)$. Тогда если F_0 и F_1 полунепрерывны сверху в точке y_0, то и отображение F полунепрерывно сверху в этой точке.*

Доказательство. Так как

$$F_0(y)\times F_1(y)=[F_0(y)\times\mathscr{X}_1]\cap[\mathscr{X}_0\times F_1(y)]$$

и пересечение двух отображений, полунепрерывных сверху в точке y_0, снова есть отображение, полунепрерывное сверху в y_0, то при доказательстве можно ограничиться частным случаем, когда $F_1(y) = \mathcal{X}_1$.

Пусть $G \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$ — открытое множество, такое, что $F_0(y_0) \times \mathcal{X}_1 \subset G$. Мы должны определить (ср. § 18, III, теорема 3) открытое множество $H \subset \mathcal{Y}$, содержащее y_0, такое, что

(6) $$y \in H \Rightarrow F_0(y) \times \mathcal{X}_1 \subset G.$$

Далее, вследствие компактности $\mathcal{X}_1$ существует открытое множество $U \subset \mathcal{X}_0$, такое, что (ср. § 41, IV, теорема 1)

(7) $$F_0(y_0) \times \mathcal{X}_1 \subset U \times \mathcal{X}_1 \subset G.$$

Следовательно, $F_0(y_0) \subset U$, и так как F_0 полунепрерывно сверху в y_0, то существует открытое множество $H \subset \mathcal{Y}$, содержащее y_0, такое, что

(8) $$y \in H \Rightarrow F_0(y) \subset U.$$

Очевидно, что из соотношений (8) и (7) следует (6).

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{X}_j$, F_j и F — такие же, как в теореме* 6. *Если отображения F_0 и F_1 полунепрерывны снизу в точке y_0, то и отображение F полунепрерывно снизу в этой точке.*

Доказательство. Пусть множество $K \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$ замкнуто; предположим, что

(9) $$y_0 \notin F^{-1}(2^K), \quad \text{т. е.} \quad F_0(y_0) \times F_1(y_0) \not\subset K.$$

Мы должны показать, что $y_0 \notin \overline{F^{-1}(2^K)}$. Другими словами, мы должны определить открытое множество $U \subset \mathcal{Y}$, содержащее y_0, такое, что

(10) $$U \cap F^{-1}(2^K) = 0, \quad \text{т. е.} \quad F_0(y) \times F_1(y) \not\subset K$$

для каждого $y \in U$.

Согласно (9), для $j = 0, 1$ существуют элементы $x_j \in F_j(y_0)$, такие, что $(x_0, x_1) \notin K$. Следовательно, существует открытое множество $V_j \subset \mathcal{X}_j$, такое, что

(11) $$x_j \in V_j \quad \text{и} \quad (V_0 \times V_1) \cap K = 0.$$

Из этого следует, что

(12) $$x_j \in V_j \cap F_j(y_0),$$

откуда

$$F_j(y_0) \not\subset \mathcal{X}_j - V_j, \quad \text{т. е.} \quad y_0 \notin F_j^{-1}(2^{\mathcal{X}_j - V_j}).$$

Так как F_j полунепрерывно снизу в точке y_0, то $y_0 \notin \overline{F_j^{-1}(2^{\mathcal{X}_j - V_j})}$. Следовательно, существует открытое множество $U_j \subset \mathcal{Y}$, содержащее y_0 и такое, что

(13) $$U_j \cap F_j^{-1}(2^{\mathcal{X}_j - V_j}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad F_j(y) \cap V_j \neq 0$$

для каждого $y \in U_j$.

Положим $U = U_1 \times U_2$. Из соотношения (13) следует, что для $y \in U$

$$(F_0(y) \times F_1(y)) \cap (V_0 \times V_1) \neq 0,$$

откуда в силу (11) получаем (10).

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{X}_j$, F_j и F — такие же, как в теореме 6. Если отображения F_0 и F_1 непрерывны в точке y_0, то и отображение F непрерывно в этой точке.*

Следствие 2. *Если пространства $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ компактны, то операция произведения $K \times L$ есть непрерывное отображение пространства $2^{\mathcal{X}_0} \times 2^{\mathcal{X}_1}$ в $2^{\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1}$.*

Замечание. Теоремы 6 и 7 и вытекающие из них следствия можно распространить на *бесконечные* прямые произведения.

II. Случай компактного метрического пространства $\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство и $F: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$.

Теорема 1[1]). *Отображение F является полунепрерывным сверху тогда и только тогда, когда*

(0) $$(\lim y_n = y) \Rightarrow (\mathrm{Ls}\, F(y_n) \subset F(y));$$

другими словами, F полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда из соотношений

(1) $$\lim y_n = y, \quad \lim x_n = x \quad \text{и} \quad x_n \in F(y_n)$$

вытекает соотношение

(2) $$x \in F(y).$$

Эта теорема следует из теоремы 4 п. I, так как импликация (1)$\Rightarrow$(2) означает, что множество D замкнуто.

[1]) См. Уилсон [1, стр. 165].

Теорема 2. *Отображение F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда*

$$(3) \qquad (\lim y_n = y) \Rightarrow (F(y) \subset \mathrm{Li}\, F(y_n)),$$

или, другими словами, *тогда и только тогда, когда из соотношений*

$$(4) \qquad \lim y_n = y \quad и \quad x \in F(y)$$

вытекает существование последовательности $x_1, x_2, \ldots$, такой, что

$$(5) \qquad \lim x_n = x \quad и \quad x_n \in F(y_n).$$

Доказательство. Пусть $M = \overline{M} \subset \mathscr{X}$ и $N = \underset{y}{\mathsf{E}}\,[F(y) \subset M]$.

1. Предположим, что (3) выполняется, и пусть $\lim y_n = y$ и $F(y_n) \subset M$; тогда $y_n \in N$ и $y \in \overline{N}$. Но, согласно (3), мы имеем

$$F(y) \subset \mathrm{Li}\, F(y_n) \subset M, \text{ откуда } y \in N.$$

Следовательно, множество N замкнуто, а это означает, что отображение F полунепрерывно снизу.

2. Далее, предположим, что соотношение (3) неверно. Тогда мы имеем

$$\lim y_n = y, \quad x \in F(y) \quad и \quad x \notin \mathrm{Li}\, F(y_n).$$

Следовательно, существуют открытое множество G и последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что $x \in G$ и $G \cap F(y_{k_n}) = 0$. Положим $M = \mathscr{X} - G$. Из этого следует, что $y_{k_n} \in N$ и $y \notin N$; поэтому множество N незамкнуто, а это означает, что отображение F не является полунепрерывным снизу.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 легко можно локализовать: отображение F полунепрерывно сверху (соотв. снизу) в точке y тогда и только тогда, когда выполняется высказывание (0) (соотв. (3)).

Теорема 3. *Отображение F полунепрерывно снизу тогда и только тогда, когда множество*

$$J_\eta = \underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,\{\rho\,[x, F(y)] < \eta\}$$

открыто для каждого $\eta > 0$.

Доказательство. 1. Предположим, что отображение F полунепрерывно снизу. Пусть

$$(6) \qquad (x, y) \in J_\eta, \quad \lim_n x_n = x \quad и \quad \lim_n y_n = y.$$

Мы должны показать, что для достаточно большого n имеет место включение $(x_n, y_n) \in J_n$, т. е.

$$(7) \qquad \rho[x_n, F(y_n)] < \eta.$$

Из включения $(x, y) \in J_\eta$ следует, что существует элемент $x' \in F(y)$, такой, что $|x - x'| < \eta$. Так как отображение F полунепрерывно снизу, то мы имеем $x' = \lim_n x'_n$ и $x'_n \in F(y_n)$.

Следовательно, $|x'_n - x_n| < \eta$ при достаточно больших n, и (7) доказано.

2. Далее, предположим, что отображение F не является полунепрерывным снизу в точке y. Тогда

$$x \in F(y) - \mathrm{Li}\, F(y_n) \text{ и } y = \lim_n y_n.$$

Следовательно, существуют число $\eta > 0$ и последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такие, что

$$\rho|x, F(y_{k_n})| > \eta > 0, \text{ откуда } (x, y_{k_n}) \notin J_\eta.$$

Так как $(x, y) \in J_\eta$, то из этого следует, что множество J_η не является открытым.

Теорема 4. *Если отображение F полунепрерывно сверху, то и отображение $\delta \circ F$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Пусть $\lim y_n = y$. Мы должны доказать, что

$$(8) \qquad \limsup \delta[F(y_n)] \leqslant \delta[F(y)],$$

где $\delta(A)$ обозначает диаметр множества A (заметим, что так как пространство $\mathcal{Y}$ компактно, то $F(y_n)$ и $F(y)$ ограничены).

Допустим, что соотношение (8) неверно. Тогда можно предположить, что

$$(9) \qquad \lim \delta[F(y_n)] > \delta[F(y)].$$

Так как множество $F(y_n)$ компактно, то существуют (см. § 41, VI, следствие 2d) x_n и x'_n, такие, что

$$(10) \qquad x_n \in F(y_n), \ x'_n \in F(y) \text{ и } \delta|F(y_n)| = |x_n - x'_n|.$$

Выберем $k_1 < k_2 < \ldots$ так, чтобы последовательности x_{k_n} и x'_{k_n} сходились:

$$(11) \qquad \lim x_{k_n} = x \quad \text{и} \quad \lim x'_{k_n} = x'.$$

Из соотношений (10) и (11) вытекает, что x и x' принадлежат $\mathrm{Ls}\, F(y_n)$ и, следовательно, по теореме 1 принадлежат $F(y)$. Поэтому $|x - x'| \leqslant \delta[F(y)]$.

С другой стороны, на основании (11), (10) и (9)

$$|x-x'|=\lim_n\left|x_{k_n}-x'_{k_n}\right|=\lim_n\delta\left[F\left(y_{k_n}\right)\right]>\delta[F(y)],$$

и мы пришли к противоречию.

III. Разбиения компактных пространств. Напомним (см. § 19, I), что если задано семейство $\boldsymbol{D}$ замкнутых непустых и непересекающихся подмножеств пространства $\mathscr{X}$, объединение которых есть $\mathscr{X}$ (называемое *разбиением* пространства $\mathscr{X}$), то топология в $\boldsymbol{D}$ (называемая *фактортопологией*) определяется с помощью следующего соглашения: *множество* $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{D}$ *открыто* (*в* $\boldsymbol{D}$) *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{S}(\boldsymbol{A})$ *открыто* (*в* $\mathscr{X}$).

Отображение P: $\mathscr{X}\to\boldsymbol{D}$, называемое *проекцией*, определяется условием $[D=P(x)]\equiv(x\in D\in\boldsymbol{D})$.

Легко видеть, что *отображение* P *непрерывно*.

Разбиение $\boldsymbol{D}$ называется *полунепрерывным сверху* (*снизу*), если для всякого открытого (замкнутого) множества $B\subset\mathscr{X}$ объединение всех $D\in\boldsymbol{D}$, содержащихся в B, открыто (замкнуто); это эквивалентно условию, что P — замкнутое (открытое) отображение.

Добавим, что понятие полунепрерывности можно локализовать (в $D\in\boldsymbol{D}$, см. § 19, стр. 194).

Теорема 1. *Если пространство* $\mathscr{X}$ *компактно, то разбиение* $\boldsymbol{D}$ (*в его фактортопологии*) *компактно.*

Если, кроме того, разбиение $\boldsymbol{D}$ *полунепрерывно сверху и* $\mathscr{X}$ *есть* $\mathcal{T}_2$*-пространство, то разбиение* $\boldsymbol{D}$ *тоже является* $\mathcal{T}_2$*-пространством* (*и, следовательно,* $\boldsymbol{D}$ — *нормальное пространство*).

Доказательство. Компактность разбиения $\boldsymbol{D}$ следует из непрерывности проекции P: $\mathscr{X}\to\boldsymbol{D}$ (по теореме 1 из § 41, III).

Если $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство, то $\mathscr{X}$ нормально (по теореме 3 из § 41, II). Следовательно, если разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно сверху, то $\boldsymbol{D}$ также нормально, ибо нормальность есть инвариант относительно полунепрерывных сверху разбиений (по теореме 5 из § 19, II).

Замечание 1. Из теоремы 1 видно, что *если* $\boldsymbol{D}$ — *полунепрерывное сверху разбиение компактного* $\mathcal{T}_2$*-пространства, то существуют компактное* $\mathcal{T}_2$*-пространство* $\mathscr{Y}$ (*а именно* $\boldsymbol{D}$) *и непрерывное отображение* f: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ (*а именно* P), *такие, что элементами разбиения* $\boldsymbol{D}$ *являются прообразы* $\overset{-1}{f}(y)$ *точек* $y\in\mathscr{Y}$.

Существует единственное (с точностью до гомеоморфизма) пространство $\mathscr{Y}$, удовлетворяющее этому условию; это означает, что если отображение $f_1\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}_1$ непрерывно и элементы разбиения $\boldsymbol{D}$ совпадают с множествами $\overset{-1}{f_1}(y)$, где $y \in \mathscr{Y}_1$, то пространство $\mathscr{Y}_1$ гомеоморфно пространству $\mathscr{Y}$.

Именно, сложное отображение $g = f_1 \circ \overset{-1}{f}$ есть гомеоморфизм $\mathscr{Y}$ на $\mathscr{Y}_1$ (ибо для $A = \bar{A} \subset \mathscr{Y}$ мы имеем $g(A) = \overline{g(A)}$ в $\mathscr{Y}_1$).

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — компактные $\mathcal{T}_2$-пространства и $F\colon \mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$ — полунепрерывное сверху отображение, такое, что*

$$\text{(i)} \qquad F(y) \cap F(y') = 0 \text{ при } y \neq y'$$

и

$$\text{(ii)} \qquad \mathscr{X} = \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} F(y).$$

Тогда соотношение (ii) *определяет полунепрерывное сверху разбиение пространства $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Пусть множество $A \subset \mathscr{X}$ замкнуто. Мы должны показать, что объединение U всех $F(y)$, таких, что $A \cap F(y) \neq 0$, замкнуто. Итак,

$$x \in U \equiv \bigvee_{y} [x \in F(y)] [A \cap F(y) \neq 0] \equiv \bigvee_{y, x'} [x \in F(y)] [x' \in F(y)] [x' \in A].$$

По теореме 1 из § 18, III множества $\mathop{\mathsf{E}}_{x, y} [x \in F(y)]$ и $\mathop{\mathsf{E}}_{x', y} [x' \in F(y)]$ замкнуты. Следовательно, в силу компактности пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ множество U замкнуто (см. § 41, IV, следствие 1b).

Теорема 3. *Если $\mathscr{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение на, то разбиение*

$$\mathscr{X} = \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} \overset{-1}{f}(y)$$

полунепрерывно сверху.

Это следует из теоремы 2 и теоремы 1 п. I.

IV. Разбиения компактных метрических пространств. В этом пункте мы будем предполагать, что $\mathscr{X}$ — *компактное метрическое пространство.*

Теорема 1. (Александров [1]).) *Всякое полунепрерывное сверху разбиение $\boldsymbol{D}$ пространства $\mathscr{X}$ (в своей фактортопологии) гомеоморфно компактному метрическому пространству.*

---

[1]) См. Александров [4]. По поводу проблем, связанных с метризуемостью и паракомпактностью разбиения $\boldsymbol{D}$, см. также Архангельский [1, 2].

Доказательство. По теореме 1 п. III разбиение $\boldsymbol{D}$ является T_1-пространством.

Кроме того, $\boldsymbol{D}$ является непрерывным образом компактного метрического пространства $\mathcal{X}$. Следовательно, $\boldsymbol{D}$ компактно и метризуемо (по теореме 3 из § 41, VI).

Теорема 2. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы разбиение $\boldsymbol{D}$ пространства $\mathcal{X}$ было полунепрерывным сверху:*

(i) $(D \cap \mathrm{Li}\, D_n \neq 0) \Rightarrow (\mathrm{Ls}\, D_n \subset D)$ (*где* $D,\ D_n \in \boldsymbol{D}$),

(ii) *если последовательность* $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ *сходится, то ее предел содержится в единственном элементе разбиения* $\boldsymbol{D}$.

Доказательство. 1. Предположим, что разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно сверху. Тогда, согласно замечанию к теореме 3 из п. III, существуют компактное (метрическое) пространство $\mathcal{Y}$ и непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такие, что каждое $D \in \boldsymbol{D}$ имеет вид $D = f^{-1}(y)$, $y \in \mathcal{Y}$.

Предположим далее, что $x \in (D \cap \mathrm{Li}\, D_n)$. Отсюда

$$x \in f^{-1}(y) \cap \mathrm{Li}\, f^{-1}(y_n),$$

т. е.

$$f(x) = y \quad \text{и} \quad x = \lim x_n, \quad \text{где} \quad f(x_n) = y_n.$$

Положим

$$x' \in \mathrm{Ls}\, D_n, \quad \text{т. е.} \quad x' = \lim x'_{k_n}, \quad \text{где} \quad f\left(x'_{k_n}\right) = y_{k_n}.$$

Мы должны показать, что $x' \in D$, т. е. что $f(x') = y$. Так как отображение f непрерывно, то мы имеем

$$f(x') = \lim f\left(x'_{k_n}\right) = \lim y_{k_n} = \lim f\left(x_{k_n}\right) = f(x) = y.$$

Следовательно, $x' \in f^{-1}(y)$, т. е. $x' \in D$. Это завершает доказательство.

2. Ясно, что (i) $\Rightarrow$ (ii).

3. Предположим, что выполняется условие (ii). Мы должны показать, что разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно сверху; это означает, что если множество $B \subset \mathcal{X}$ замкнуто, то замкнутым является и объединение всех D, таких, что $D \cap B \neq 0$. Другими словами, предположим, что

(1) $$x_n \in D_n, \quad \lim_n x_n = x \in D, \quad D_n \cap B \neq 0;$$

мы должны показать, что $D \cap B \neq 0$.

Так как пространство $2^{\mathcal{X}}$ компактно, то можно считать, что последовательность $D_1, D_2, \ldots$ сходится: $\lim D_n = L$. По предположению L содержится в единственном элементе пространства $\boldsymbol{D}$. Более того, $L \cap B \neq 0$, так как семейство всех элементов пространства $2^{\mathcal{X}}$, имеющих общие точки с B, замкнуто (по теореме 1 из § 17, II) и, следовательно,

$$(D_n \cap B \neq 0) \Rightarrow (L \cap B \neq 0) \Rightarrow (D \cap B \neq 0).$$

Теорема 3. *Для того чтобы разбиение* $\boldsymbol{D}$ *пространства* $\mathcal{X}$ *было полунепрерывным снизу, необходимо и достаточно следующее условие*:

(iii) $\quad (D \cap \mathrm{Li}\, D_n \neq 0) \Rightarrow (D \subset \mathrm{Li}\, D_n) \quad$ (*где* $D, D_n \in \boldsymbol{D}$).

Доказательство. 1. *Необходимость*. Пусть $D \cap \mathrm{Li}\, D_n \neq 0$. Тогда

(2) $$x \in D, \quad x = \lim_n x_n \quad \text{и} \quad x_n \in D_n.$$

Пусть $x' \in D$. Мы должны показать, что $x' \in \mathrm{Li}\, D_n$, в предположении, что разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно снизу; это означает, что, каково бы ни было открытое множество G, содержащее x', мы имеем $D_n \cap G \neq 0$ для $n > n_0$.

Теперь обозначим через U объединение всех $D' \in \boldsymbol{D}$, таких, что $D' \cap G \neq 0$. Так как $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно снизу, то U открыто. Так как $x' \in D \cap G$, то мы имеем $D \subset U$, и, согласно (5), существует такое n_0, что $D_n \cap U \neq 0$ для $n > n_0$. Из этого следует, что $D_n \subset U$ (так как элементы разбиения $\boldsymbol{D}$ не пересекаются). Но это означает, что $D_n \cap G \neq 0$.

2. *Достаточность*. Предположим, что $\boldsymbol{D}$ не является полунепрерывным снизу. Это означает, что существует открытое множество G, такое, что объединение U всех таких $D \in \boldsymbol{D}$, для которых $D \cap G \neq 0$, не является открытым.

Следовательно, существуют такие x и D, что

(3) $$x \in D \subset U, \quad x = \lim_n x_n \quad \text{и} \quad x_n \notin U.$$

Обозначим через D_n такой элемент $\boldsymbol{D}$, что $x_n \in D_n$. Следовательно, $D_n \cap G = 0$. Так как $D \subset U$, то мы имеем $D \cap G \neq 0$; положим $x_0 \in D \cap G$. Поскольку $x_0 \in G$, тогда как $D_n \cap G = 0$, то мы имеем $x_0 \notin \mathrm{Li}\, D_n$, и поэтому $D \not\subset \mathrm{Li}\, D_n$.

С другой стороны, $x \in D \cap \mathrm{Li}\, D_n$ (согласно (6)). Следовательно, импликация (iii) не выполняется.

V. Непрерывные разбиения компактных пространств. Напомним, что разбиение $\boldsymbol{D}$ произвольного топологического пространства $\mathcal{X}$ называется *непрерывным*, если оно полунепрерывно одновременно сверху и снизу (см. § 19, стр. 194).

Из этого определения следует, что $\boldsymbol{D}$ — непрерывное разбиение тогда и только тогда, когда проекция $P\colon \mathcal{X} \to \boldsymbol{D}$ есть отображение, одновременно замкнутое и открытое.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Разбиение $\boldsymbol{D}$ пространства $\mathcal{X}$ на прообразы отдельных точек пространства $\mathcal{Y}$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f открыто.*

Доказательство. 1. Предположим, что разбиение $\boldsymbol{D}$ непрерывно. Тогда отображение $\overset{-1}{f}\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ непрерывно (здесь топологии в $\boldsymbol{D}$ и в $2^{\mathcal{X}}$ совпадают, см. § 19, стр. 196) и, согласно теореме 5 из § 18, III, отображение f открыто.

2. Предположим, что отображение f открыто. Пусть $G \subset \mathcal{X}$ — произвольное открытое множество; обозначим через U объединение всех $\overset{-1}{f}(y)$, таких, что $\overset{-1}{f}(y) \cap G \neq 0$. Очевидно, $U = f^{-1} f(G)$, и так как $f(G)$ открыто, а f непрерывно, то из этого следует, что множество U открыто. Это означает, что $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно снизу. По теореме 3 п. III $\boldsymbol{D}$ также полунепрерывно сверху, следовательно, разбиение $\boldsymbol{D}$ непрерывно.

Замечание. В п. VII мы покажем, что всякое полунепрерывное разбиение компактного метрического пространства содержит элементы непрерывности.

Следующая теорема будет использована ниже (в § 46, VI):

Теорема 2[1]. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на. Если все множества $\overset{-1}{f}(y)$ счетны (или, более общо, содержат изолированные точки), то существует последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots$, такая, что*

$$(1)\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n) = \mathcal{Y} \text{ и } f \mid F_n \text{ есть гомеоморфизм при } n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Нам достаточно определить последовательность $\boldsymbol{F}_\sigma$-множеств $A_1, A_2, \ldots$, такую, что

$$(2)\qquad \bigcup_{m=1}^{\infty} f(A_m) = \mathcal{Y}$$

---

[1]) Ср. Александров [10, стр. 283].

и сужения $f \mid A_m$ взаимно однозначны, так как если мы положим

$$A_m = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_m^i, \quad \text{где} \quad A_m^i \text{ замкнуты,}$$

то требуемая последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ получается в результате расположения двойной последовательности $\{A_m^i\}$ в простую последовательность.

Далее, пусть $R_1, R_2, \ldots$ — счетная открытая база пространства $\mathscr{X}$; положим

$$(3) \qquad A_m = \mathop{\mathsf{E}}_{x} \bigvee_{y} \left[R_m \cap \overset{-1}{f}(y) = (x)\right].$$

Так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,F} [R_m \cap F = (x)]$, согласно лемме из § 42, III, является F_σ-множеством (в пространстве $\mathscr{X} \times 2^{\mathscr{X}}$), то таким является и множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y} \left[R_m \cap \overset{-1}{f}(y) = (x)\right]$ (в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$), поскольку отображение f открыто, и поэтому $\overset{-1}{f}$ непрерывно (на основании следствия 2 из § 13, XIV). Проекция этого множества на $\mathscr{X}$-ось есть множество A_m (по формуле (3)), и поэтому A_m также есть F_σ-множество (согласно следствию 1а из § 41, IV).

Для доказательства утверждения (1) возьмем $y \in \mathscr{Y}$. По предположению множество $\overset{-1}{f}(y)$ содержит изолированную точку, скажем x. Следовательно, существует такое m, что

$$R_m \cap \overset{-1}{f}(y) = (x), \quad \text{когда} \quad x \in A_m \quad \text{и} \quad y \in f(A_m).$$

Наконец, докажем, что отображение $f \mid A_m$ взаимно однозначно. Пусть $x \in A_m$, $x' \in A_m$ и $f(x) = f(x')$. По определению A_m существуют y и y', такие, что

$$(4) \qquad R_m \cap \overset{-1}{f}(y) = (x) \quad \text{и} \quad R_m \cap \overset{-1}{f}(y') = (x').$$

Поэтому $y = f(x)$ и $y' = f(x')$, а так как $f(x) = f(x')$, то и $y = y'$. Заменим y' на y во втором из равенств (4). Мы увидим, что $x = x'$, и тем самым доказательство будет завершено.

VI. Примеры. Отождествление точек.

1. Пусть $\mathscr{X}$ обозначает n-мерный шар и $\boldsymbol{D}$ — его разбиение, один элемент которого — граница $\mathscr{S}_{n-1}$ шара $\mathscr{X}$, а другие элементы — одноточечные множества (x), где $x \in \mathscr{X} - \mathscr{S}_{n-1}$. Тогда разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно сверху и гомеоморфно сфере $\mathscr{S}_n$ (в этом случае мы говорим, что точки сферы $\mathscr{S}_{n-1}$ отождествлены).

2. Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{S}_n$; отождествим пары диаметрально противоположных точек. Тогда разбиение $\boldsymbol{D}$ гомеоморфно *n-мерному проективному пространству*. При этом $\boldsymbol{D}$ — непрерывное разбиение сферы $\mathcal{S}_n$.

3. Положим $\mathcal{X} = \mathcal{I}^2$. Отождествим диаметрально противоположные точки вертикальных сторон квадрата $\mathcal{X}$. Получаемое таким образом разбиение пространства $\mathcal{I}^2$ есть *лист Мёбиуса*.

Отождествляя точки вертикальных сторон, имеющие одну и ту же ординату, мы получаем *цилиндрическую поверхность*.

Если мы, кроме того, отождествим точки горизонтальных сторон, имеющие одну и ту же абсциссу, то получим поверхность *тора*.

4. *Всякое (непустое) компактное метрическое пространство $\mathcal{Y}$ можно рассматривать как полунепрерывное сверху разбиение канторова дисконтинуума $\mathcal{C}$.*

В самом деле, согласно следствию 2b из § 41, VI, пространство $\mathcal{Y}$ есть непрерывный образ $\mathcal{C}$ и, следовательно, гомеоморфно разбиению пространства $\mathcal{C}$ на прообразы отдельных точек пространства $\mathcal{Y}$.

VII. Связь полунепрерывных отображений с отображениями класса 1.

Теорема 1. *Если $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство, то всякое полунепрерывное отображение $F\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ есть (B-измеримое) отображение класса* 1 *(т. е. прообразы открытых множеств есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множества).*

Доказательство. Так как $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство, то этими свойствами обладает и пространство $2^{\mathcal{X}}$; следовательно, $2^{\mathcal{X}}$ имеет счетную открытую базу. Так как совокупность множеств вида $\underset{K}{\mathsf{E}}(K \subset G)$ или вида $\underset{K}{\mathsf{E}}(K \cap G \neq 0)$ (где множество $G \subset \mathcal{X}$ открыто) есть предбаза пространства $2^{\mathcal{X}}$ (см. § 42, I), то достаточно доказать, что прообразы множеств, принадлежащих этой предбазе, являются $\boldsymbol{F}_\sigma$-множествами (ср. § 31, II, теорема 1). Другими словами, мы должны доказать, что в предположении полунепрерывности отображения F каждое из множеств

(i) $\underset{y}{\mathsf{E}}[F(y) \subset G]$,

(ii) $\underset{y}{\mathsf{E}}[F(y) \cap G \neq 0]$

есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество.

В нашем доказательстве мы воспользуемся следующим представлением множества G (ср. § 41, II, следствие 4):

(1) $G = K_1 \cup K_2 \cup \ldots$, где K_n замкнуто и $K_n \subset \operatorname{Int}(K_{n+1})$.

Сначала предположим, что F полунепрерывно сверху. Тогда по определению множество (i) открыто и, следовательно, является $\boldsymbol{F}_\sigma$-множеством.

Кроме того, из (1) следует, что

$$\mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \cap G \neq 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \cap K_n \neq 0],$$

и так как $\mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \cap K_n \neq 0]$ замкнуто, то (ii) есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество.

Далее, предположим, что отображение F полунепрерывно снизу. Тогда множество (ii) открыто по определению. Кроме того, если $F(y) \subset G$, то в силу формулы (1) и компактности $F(y)$ существует такое n, что $F(y) \subset K_n$. Следовательно,

$$\mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \subset G] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \subset K_n],$$

и так как множество $\mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \subset K_n]$ открыто, то (i) есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{Y}$ — метрическое, а $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство. Если отображение F: $\mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно, то множество точек разрыва отображения F есть множество первой категории.*

Следовательно, *если пространство $\mathcal{Y}$ полно, то множество точек непрерывности отображения F, т. е. множество точек y, таких, что* (ср. замечание 1 п. II)

$$(\lim y_n = y) \Rightarrow (\operatorname{Lim} F(y_n) = F(y)),$$

всюду плотно в $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Первая часть следствия вытекает из теоремы 1 § 31, X, утверждающей, что множество точек разрыва функции класса 1 есть множество первой категории. Вторая часть вытекает из известной теоремы Бэра, утверждающей, что в полном пространстве дополнение множества первой категории всюду плотно (см. § 34, IV).

Замечание. Следствие 1 может быть доказано при более общих предположениях, именно: $\mathcal{Y}$ — топологическое пространство, $\mathcal{X}$ — метрическое пространство и $F(y)$ компактно для каждого $y \in \mathcal{Y}$ (см. Форт [1]).

Следствие 2[1]). *Пусть, как в теореме* 3 п. I, D — *замкнутое подмножество произведения* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (*где* $\mathcal{X}$ — *компактное, а* $\mathcal{Y}$ — *метрическое пространство*) *и* $F(y)$ — *его горизонтальное сечение, т. е.*

$$(2) \qquad F(y) = \mathop{\mathsf{E}}_{x}[(x,\ y) \in D].$$

Тогда если $\boldsymbol{P}$ — *борелевское подмножество пространства* $2^{\mathcal{X}}$, *то множество* $B = \mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \in \boldsymbol{P}]$ *есть борелевское подмножество пространства* $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Так как F — полунепрерывное сверху отображение (по теореме 3 п. I), то F есть отображение класса 1 и, следовательно, множество $F^{-1}(\boldsymbol{P}) = B$ есть борелевское множество.

Следствие 3[2]). *Семейство* $\boldsymbol{P}_1$ *замкнутых счетных множеств и семейство* $\boldsymbol{P}_2$ *замкнутых множеств, не содержащих иррациональных чисел, не являются борелевскими множествами пространства* $2^{\mathcal{I}}$.

Доказательство. Пусть A — аналитическое неборелевское подмножество пространства $\mathcal{I}$ (ср. § 38, VI). Определим замкнутое подмножество D пространства $\mathcal{I}^2$ так, чтобы из (2) следовало

$$(3) \qquad \mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \in \boldsymbol{P}_1] = \mathcal{I} - A = \mathop{\mathsf{E}}_{y}[F(y) \in \boldsymbol{P}_2].$$

Это соотношение завершит доказательство, так как из следствия 2 будет вытекать, что множества $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ не являются борелевскими.

Пусть $f: \mathcal{N} \to A$ — непрерывное отображение на, такое, что оно принимает каждое свое значение несчетное число раз (ср. § 39, VII, замечание 1; заметим, что последнее предположение относительно f при доказательстве того, что множество $\boldsymbol{P}_2$ не является борелевским, можно опустить). Положим

$$D = \overline{\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}[y = f(x)]}, \qquad \text{где } x \in \mathcal{I} \text{ и } y \in \mathcal{I}.$$

Так как f непрерывно, то множество $\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}[y = f(x)]$ замкнуто в $\mathcal{N} \times \mathcal{I}$, т. е.

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}[y = f(x)] = D \cap (\mathcal{N} \times \mathcal{I}).$$

---

[1]) См. Куратовский и Марчевский [1, стр. 160].
[2]) См. Гуревич [4].

Таким образом, соотношения $x \in \mathcal{N}$ и $(x, y) \in D$ дают $y = f(x)$, откуда $y \in \Lambda$. Другими словами, если $y \in \mathcal{Y} - \Lambda$, то из включения $(x, y) \in D$ следует включение $x \in \mathcal{Y} - \mathcal{N}$, т. е. $F(y) \subset \subset \mathcal{Y} - \mathcal{N}$, и поэтому $F(y) \in \boldsymbol{P}_2$.

Обратно, если $y \in \Lambda$, то множество $\overset{-1}{f}(y)$ несчетно, а потому несчетно множество $F(y)$, так как $\overset{-1}{f}(y) \subset F(y)$. Следовательно, $F(y) \notin \boldsymbol{P}_1$.

Это завершает доказательство соотношения (3) (так как $\boldsymbol{P}_2 \subset \boldsymbol{P}_1$).

Следствие 4[1]). *Всякое полунепрерывное сверху разбиение* $\boldsymbol{D}$ *компактного метрического пространства* $\mathcal{X}$ *содержит элементы непрерывности.*

Более точно, *семейство всех элементов непрерывности есть всюду плотное* $\boldsymbol{G}_\delta$*-множество в* $\boldsymbol{D}$ *(в его фактортопологии).*

Доказательство. Согласно замечанию из п. III, существует непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такое, что элементы рассматриваемого разбиения совпадают с множествами $\overset{-1}{f}(y)$, где $y \in \mathcal{Y}$ (здесь $\mathcal{Y}$ можно отождествить с $\boldsymbol{D}$). Так как отображение $\overset{-1}{f}: \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ полунепрерывно сверху (ср. § 19, IV, теорема 2), то остальная часть доказательства вытекает из следствия 1.

VIII. Примеры отображений класса 2, не являющихся отображениями класса 1.

1. *Граница* (т. е. отображение F, определяемое условием $F(K) = K \cap \overline{\mathcal{X} - K}$ для $K \in 2^{\mathcal{X}}$) *есть отображение* $2^{\mathcal{X}}$ *в* $2^{\mathcal{X}}$ *класса* 2 (предполагается, что $\mathcal{X}$ — компактное метрическое пространство).

Отображение F есть композиция двух полунепрерывных отображений: отображения пересечения и отображения замыкания дополнения (по теореме 1 из § 18, V и следствию из § 18, VI), т. е. композиция двух отображений класса 1 (согласно теореме 1 п. VII) и, следовательно, есть отображение класса 2 (по теореме 1 из § 31, III).

Кроме того, граница может и не быть отображением класса 1. Например, в случае, когда $\mathcal{X}$ есть канторов дисконтинуум, легко видеть[2]), что F разрывно в каждой точке $K (\neq 0)$.

---

[1]) См. Куратовский [13, стр 176, теорема VII]. Ср. также Хилл [1].
[2]) См. Куратовский [26, стр. 156].

2. *Производная множества* K (т. е. множество всех точек накопления множества K) *есть отображение класса* 2[1]. Кроме того, если $\mathcal{X}=\mathcal{C}$, то это отображение разрывно в каждой точке $K\neq 0$, так как всякое конечное множество имеет пустую производную, но (если оно непусто) является пределом бесконечных множеств, т. е. множеств, имеющих непустые производные; аналогично, всякое бесконечное множество есть предел конечных множеств.

Предыдущие примеры показывают, что среди многозначных отображений (в отличие от действительных функций действительного переменного) очень простые и важные отображения не являются ни непрерывными, ни даже класса 1.

Добавим, что в силу следствия 3 п. VII характеристические функции, определенные на $2^{\mathcal{Y}}$ для семейства счетных замкнутых подмножеств пространства $\mathcal{Y}$, *не являются B-измеримыми.*

IX. Замечания о селекторах. Пусть задано многозначное отображение F: $\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$, где $F(y)\neq 0$ для каждого $y\in\mathcal{Y}$; отображение $f:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ называется *селектором отображения* F, если $f(y)\in F(y)$ для каждого $y\in\mathcal{Y}$.

Можно показать[2], что *если $\mathcal{Y}$ — метрическое пространство, $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное пространство и F — полунепрерывное отображение, то существует селектор класса* 1.

Это утверждение вытекает из следующей общей теоремы:

Пусть $\boldsymbol{L}$ — алгебра подмножеств пространства $\mathcal{Y}$ (т. е. если A и B — элементы $\boldsymbol{L}$, то $A\cup B$, $A\cap B$ и $\mathcal{Y}-A$ — также элементы $\boldsymbol{L}$). Обозначим через $\boldsymbol{L}_\sigma$ счетно-аддитивное семейство, порождаемое $\boldsymbol{L}$ (т. е. семейство всех счетных объединений элементов $\boldsymbol{L}$). Предположим, далее, что $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное пространство и F: $\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$ — такое отображение, что $F(y)\neq 0$ для каждого $y\in\mathcal{Y}$ и

$$\underset{y}{\mathsf{E}}\,[F(y)\cap G\neq 0]\in\boldsymbol{L}_\sigma,$$

каково бы ни было открытое множество $G\subset\mathcal{X}$.

Тогда существует селектор f: $\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$, такой, что

$f^{-1}(G)\in\boldsymbol{L}_\sigma$, *каково бы ни было открытое множество $G\subset\mathcal{X}$.*

Эту теорему можно применить к B-измеримым отображениям, к измеримым (по Лебегу) функциям, к отображениям со свойством Бэра и т. д. (см. замечание ниже). Среди разнообразных приложений этой теоремы отметим следующее утверждение:

---

[1]) См. Куратовский [26, стр. 157].

[2]) См. Куратовский и Рылль-Нардзевский [1].

Для всякого полного сепарабельного пространства $\mathcal{X}$ существует функция выбора $f\colon |2^{\mathcal{X}}-(0)|\to\mathcal{X}$ класса 1, т. е. $f(A)\in A$ для всякого $0\neq A=\bar{A}\subset\mathcal{X}$; f можно считать непрерывной, если $\dim\mathcal{X}=0$.

Элементарное рассуждение показывает, что для $\mathcal{X}=\mathcal{I}^2$ непрерывной функции выбора не существует (конечно, для $\mathcal{X}=\mathcal{I}$ существует непрерывная функция выбора)[1]).

Замечание. Напомним, что отображение $f\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ называется *B-измеримым класса* $\alpha<\Omega$, если $f^{-1}(G)$ есть борелевское множество аддитивного класса α для всякого открытого множества $G\subset\mathcal{X}$, или, эквивалентно, если $f^{-1}(K)$ есть множество мультипликативного класса α для всякого замкнутого множества $K\subset\mathcal{X}$.

Обобщение понятий полунепрерывности сверху и снизу приводит к следующим определениям:

Отображение $F\colon\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$ будем называть *отображением класса* α^{-}, соответственно *класса* α_{-}, если множество

$$\mathop{\mathsf{E}}_{y}\{F(y)\subset G\}$$

есть множество аддитивного класса α для открытого G, соответственно множество

$$\mathop{\mathsf{E}}_{y}\{F(y)\subset K\}$$

есть множество мультипликативного класса α для замкнутого K.

Следующее утверждение, касающееся B-измеримости селекторов, вытекает из теоремы, сформулированной выше.

Пусть пространство $\mathcal{Y}$ метрическое, а пространство $\mathcal{X}$ полное сепарабельное. Если $F\colon\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{X}}$ — отображение класса α_{-} (где $\alpha>0$) и $F(y)\neq 0$, то существует B-измеримый селектор $f\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$, $f(y)\in F(y)$, класса α.

Наконец, нашу теорему можно применить к отображениям, измеримым в следующем смысле. Пусть $\boldsymbol{L}$ — счетно-аддитивное (следовательно, счетно-мультипликативное) поле подмножеств $\mathcal{Y}$ (например, поле измеримых по Лебегу подмножеств интервала). Отображение $f\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ (где $\mathcal{X}$ — топологическое пространство) называется ***L**-измеримым*, если

$$f^{-1}(G)\in\boldsymbol{L},\ \text{каково бы ни было открытое множество } G\subset\mathcal{X}.$$

[1]) Различные условия, из которых вытекает существование непрерывного селектора, см. в работе Майкла Э. [8]. Ср. также для банаховых пространств Линденштраус [1]. По этим вопросам см. также Дэй и Куратовский [1] и Майкл Э. [4, стр. 374].

Конечно, отображение $F\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ является L-измеримым, если множества

$$\underset{y}{\mathsf{E}}\{F(y) \cap G \neq 0\} \text{ и } \underset{y}{\mathsf{E}}\{F(y) \cap K \neq 0\}$$

принадлежат L для любого открытого в $\mathcal{X}$ множества G и замкнутого в $\mathcal{X}$ множества K.

Отсюда вытекает следующее утверждение:

Если $\mathcal{X}$ — полное сепарабельное пространство, $F\colon \mathcal{Y} \to 2^{\mathcal{X}}$ есть L-измеримое отображение и $F(y) \neq 0$, то существует L-измеримый селектор $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, $f(y) \in F(y)$.

§ 44. Пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$

I. Компактно-открытая топология пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — произвольные топологические пространства. В пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ введем топологию, называемую *естественной*, или *компактно-открытой*, следующим образом.

Определение[1]). Для $C \subset \mathcal{X}$ и $H \subset \mathcal{Y}$ положим

(1) $$\Gamma(C,\ H) = \underset{f}{\mathsf{E}}[f(C) \subset H], \text{ где } f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}.$$

Компактно-открытая топология пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ определяется соглашением, что *совокупность множеств* $\Gamma(C,\ H)$, *где C компактно и H открыто, образует открытую предбазу пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Теорема 1. *Если множество $F \subset \mathcal{Y}$ замкнуто, то множество $\Gamma(C,\ F)$ для любого $C \subset \mathcal{X}$ также замкнуто (в $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$).*

Доказательство. Ясно, что

$$f \in \Gamma(C,\ F) \equiv \{f(x) \in F \text{ для каждого } x \in C\} \equiv$$
$$\equiv \{f \in \Gamma[(x),\ F] \text{ для каждого } x \in C\}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} - \Gamma(C,\ F) \equiv \bigcup_{x \in C} \Gamma[(x),\ \mathcal{Y} - F].$$

Так как (x) компактно и $\mathcal{Y} - F$ открыто, то $\Gamma[(x),\ \mathcal{Y} - F]$ открыто (по определению), а потому открыто и $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} - \Gamma(C,\ F)$.

Теорема 2. *Если пространство $\mathcal{Y}$ регулярно, то пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ также регулярно*[2]).

---

[1]) Это определение принадлежит Фоксу [1]. См. также Аренс [1] и Келли [1].

[2]) По поводу *вполне регулярности* см. п. III, теорема 5.

Доказательство. Пусть $f \in \Gamma(C, H)$, где C компактно и H открыто. Определим открытое множество G в пространстве $\mathcal{Y}$, такое, что

$$(2) \qquad f \in \Gamma(C, G) \text{ и } \overline{\Gamma(C, G)} \subset \Gamma(C, H).$$

Так как $f(C) \subset H$, то в силу регулярности пространства $\mathcal{Y}$ отсюда следует, что для каждого $x \in C$ существует открытое множество G_x, такое, что

$$(3) \qquad f(x) \in G_x \text{ и } \overline{G}_x \subset H.$$

Так как множество $f(C)$ компактно, то его покрытие $\{G_x\}$ содержит конечное подпокрытие $G_{x_1}, \ldots, G_{x_n}$. Положим $G = G_{x_1} \cup \ldots \cup G_{x_n}$. Тогда, согласно (3),

$$(4) \qquad f(C) \subset G \text{ и } \overline{G} = \overline{G}_{x_1} \cup \ldots \cup \overline{G}_{x_n} \subset H.$$

Первое из соотношений (4) дает первое из соотношений (2), а, согласно второму, $\Gamma(C, \overline{G}) \subset \Gamma(C, H)$; так как $\Gamma(C, \overline{G})$ замкнуто (по теореме 1), мы получаем второе соотношение (2):

$$\overline{\Gamma(C, G)} \subset \overline{\Gamma(C, \overline{G})} = \Gamma(C, \overline{G}) \subset \Gamma(C, H).$$

Из (2) мы легко выводим, что пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ регулярно [1]).

Замечание 1. Можно также доказать, что

(α) *если $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство, то $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ тоже $\mathcal{T}_2$-пространство* [2]);

(β) *если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — сепарабельные метрические пространства, то пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ нормально (и даже наследственно нормально).*

В действительности можно доказать при тех же предположениях, что пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ наследственно является пространством Линделёфа и наследственно сепарабельно [3]).

Но регулярное пространство Линделёфа (т. е. пространство, в котором каждое покрытие содержит счетное подпокрытие; см. § 5, VII, стр. 56) является нормальным (см. § 14, II, теорема 1); кроме того, если пространство $\mathcal{Y}$ метрическое (следовательно, регулярное), то пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ регулярное (по теореме 2) и регулярность наследственна (см. § 5, X, стр. 58).

Замечание 2. Интересно отметить, что пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ может и не быть нормальным, даже если пространство $\mathcal{Y}$ компактно [4]).

---

[1]) См., например, Энгелькинг [3, гл. I, § 5, теорема 3].

[2]) См. Келли [1].

[3]) См. Майкл Э. [7, стр. 921]. Ср. Рудин и Кли [1].

[4]) См. Стоун А. [3]. Случай, когда пространство $\mathcal{Y}$ паракомпактно, см. Фейделл [1].

Замечание 3. Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — топологические пространства и отображение $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ непрерывно. Положим $\gamma(f) = g \circ f$ для любого $f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Тогда отображение $\gamma\colon \mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \to \mathscr{Z}^{\mathscr{X}}$ непрерывно.

Это утверждение есть следствие соотношения $\gamma^{-1}(\Gamma(C, H)) = \Gamma(C, g^{-1}(H))$, которое само следует из соотношения $[gf(C) \subset H] \equiv [f(C) \subset g^{-1}(H)]$ для любого $f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.

II. Совместная непрерывность и связанные с ней проблемы. В п. II—IV мы будем предполагать, что пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ *имеет компактно-открытую топологию.*

Теорема 1. *Пусть задано $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$; положим $w(f, x) = f(x)$. Если $\mathscr{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство, а $\mathscr{Y}$ — произвольное пространство, то отображение $w\colon \mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \times \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно.*

Более того, *компактно-открытая топология является слабейшей топологией пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$, в которой w непрерывно.*

Доказательство. Пусть множество $H \subset \mathscr{Y}$ открыто. Мы должны показать, что множество

$$w^{-1}(H) = \mathop{\mathsf{E}}_{f,\, x}[f(x) \in H]$$

открыто в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \times \mathscr{X}$, или, другими словами, для каждого $f_0(x_0) \in H$ существует множество Q, открытое в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \times \mathscr{X}$, такое, что

$$(1) \qquad (f_0, x_0) \in Q$$

и

$$(2) \qquad Q \subset w^{-1}(H), \quad \text{т. е.} \quad [(f, x) \in Q] \Rightarrow [f(x) \in H].$$

Так как f_0 непрерывно и пространство $\mathscr{X}$ регулярно (ср. § 41, II, теорема 3), то существует открытое множество G в $\mathscr{X}$, такое, что

$$x_0 \in G \quad \text{и} \quad f_0(\overline{G}) \subset H, \quad \text{т. е.} \quad f_0 \in \Gamma(\overline{G}, H).$$

Положим

$$(3) \qquad Q = \Gamma(\overline{G}, H) \times G.$$

Из этого следует, что Q открыто в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \times \mathscr{X}$ и включение (1) выполняется.

Соотношение (2) также верно, поскольку включение $(f, x) \in Q$ означает (согласно (3)), что $f(\overline{G}) \subset H$ и $x \in G$, следовательно, $f(x) \in H$. Это завершает доказательство первой части теоремы.

Для доказательства второй части предположим, что $\mathcal{T}$ — топология пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$, в которой отображение w непрерывно. Мы должны показать, что любое множество G, открытое в компактно-открытой топологии пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, открыто в топологии $\mathcal{T}$. Очевидно, можно предположить, что G принадлежит предбазе пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, рассмотренной в п. I; таким образом, положим $G = \Gamma(C, H)$, где множество $C \subset \mathcal{X}$ компактно, а множество $H \subset \mathcal{Y}$ открыто.

Пусть $f \in \Gamma(C, H)$, т. е. $f(C) \subset H$. Для данного $x \in C$ существуют (в силу непрерывности w) два открытых множества V_x в пространстве $\mathcal{X}$ и W_x в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (относительно $\mathcal{T}$-топологии), таких, что

$$x \in V_x, \quad f \in W_x \quad \text{и} \quad w(f', x') \in H \quad \text{для всех} \quad x' \in V_x \quad \text{и} \quad f' \in W_x.$$

Так как множество C компактно, то покрытие $\{V_x\}$ содержит конечное покрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ множества C. Положим $W = W_{x_1} \cap \ldots \cap W_{x_n}$. Очевидно, множество W открыто в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (относительно $\mathcal{T}$-топологии) и $f \in W$.

Кроме того, $W \subset \Gamma(C, H)$. Действительно, предположим, что $f' \in W$ и $x' \in C$. Тогда существует такое $k \leqslant n$, что $x' \in V_{x_k}$; так как $f' \in W_{x_k}$, то из этого следует, что $w(f', x') \in H$, т. е. $f'(x') \in H$. Таким образом, $f'(C) \subset H$, т. е. $f' \in \Gamma(C, H)$.

Теорему 1 можно обобщить следующим образом:

Теорема 2[1]). *Пусть f и $\mathcal{X}$ — такие же, как в теореме 1, а $\mathcal{Y}$ — некоторое $\mathcal{T}_2$-пространство. Пусть $F(f, K) = f(K)$. Тогда отображение F: $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \times 2^{\mathcal{X}} \to 2^{\mathcal{Y}}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть заданы $f_0 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $K_0 \in 2^{\mathcal{X}}$. Пусть множество $\boldsymbol{W} \subset 2^{\mathcal{Y}}$ открыто и $f_0(K_0) \in \boldsymbol{W}$. Мы должны определить два открытых подмножества V пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $\boldsymbol{U}$ пространства $2^{\mathcal{X}}$, таких, что

(4) $\quad f_0 \in V, \quad K_0 \in \boldsymbol{U} \quad$ и $\quad f(K) \in \boldsymbol{W} \quad$ для всех $\quad f \in V \quad$ и $\quad K \in \boldsymbol{U}$.

Очевидно, можно считать, что $\boldsymbol{W}$ принадлежит открытой предбазе пространства $2^{\mathcal{Y}}$. Следовательно, можно предположить, что либо

(i) $$\boldsymbol{W} = \underset{B}{\mathsf{E}}\,(B \subset G),$$

либо

(ii) $$\boldsymbol{W} = \underset{B}{\mathsf{E}}\,(B \cap G) \neq 0,$$

где множество $G \subset \mathcal{X}$ открыто.

---

[1]) Для метрических пространств теоремы 2—6 были доказаны во французском издании этой книги (более простым способом); см. гл. IV, п. VI и VII (см. также замечание Чассара, там же, стр. 502). Приведенными здесь формулировками этих теорем я обязан проф. Энгелькингу.

Сначала рассмотрим случай (i). Тогда $f_0(K_0) \subset G$, т. е. для каждого $x \in K_0$ мы имеем $f_0(x) \in G$. Так как отображение w непрерывно (по теореме 1), то существуют открытое множество $V_x \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и открытое множество $H_x \subset \mathcal{X}$, такие, что

(5) $f_0 \in V_x, \quad x \in H_x \quad$ и $\quad f(x') \in G$ для всех $f \in V_x$ и $x' \in H_x$.

Так как $\{H_x\}$ — открытое покрытие (компактного) множества K_0, то существует конечное подмножество $x_1, \ldots, x_k$ множества K_0, такое, что $K_0 \subset H_{x_1} \cup \ldots \cup H_{x_k}$. Положим

(6) $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_k} \quad$ и $\quad \boldsymbol{U} = \mathop{\mathsf{E}}_{K} (K \subset H_{x_1} \cup \ldots \cup H_{x_k})$.

Первое и второе из соотношений (4) непосредственно следуют из (6) и первой части соотношения (5). Для доказательства последнего соотношения (4) положим $f \in V$ и $K \in \boldsymbol{U}$. Тогда, согласно (6),

(7) $f \in V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_k} \quad$ и $\quad K \subset H_{x_1} \cup \ldots \cup H_{x_k}$.

Пусть $x' \in K$; тогда существует такое i, что $x' \in H_{x_i}$, и так как $f \in V_{x_i}$, то, согласно последней из формул (5), мы имеем $f(x') \in G$. Таким образом, $f(K) \subset G$ и $f(K) \in \boldsymbol{W}$, согласно (i).

Далее рассмотрим случай (ii). Так как $f_0(K_0) \in \boldsymbol{W}$, то $f_0(K_0) \cap G \neq 0$; следовательно, существует $x_0 \in K_0$, такое, что $f_0(x_0) \in G$. Так как отображение w непрерывно (по теореме 1), то существуют открытые множества $V \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $H \subset \mathcal{X}$, такие, что

(8) $f_0 \in V, \ x_0 \in H \quad$ и $\quad f(x) \in G$ для всех $f \in V$ и $x \in H$.

Положим $\boldsymbol{U} = \mathop{\mathsf{E}}_{K} (K \cap H \neq 0)$. Очевидно, множество $\boldsymbol{U}$ открыто в пространстве $2^{\mathcal{X}}$, и, так как $x_0 \in K_0 \cap H$, мы имеем $K_0 \in \boldsymbol{U}$. Следовательно, первые два из соотношений (4) верны. Чтобы доказать последнее, предположим, что $f \in V$ и $K \in \boldsymbol{U}$, т. е. $K \cap H \neq 0$. Пусть $x \in K \cap H$. Тогда, согласно (8), $f(x) \in G$, и, следовательно, $f(K) \cap G \neq 0$; это означает (согласно (ii)), что $f(K) \in \boldsymbol{W}$.

Замечание. В теореме 2 (так же как и в теореме 1) предположение компактности пространства $\mathcal{X}$ не может быть опущено (ср. Аренс [1]). Однако его можно заменить предположением локальной компактности.

Следствие. *Пусть задано отображение* $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$; *положим*

$$\gamma(f, K, L) = f(K, L) = \mathop{\mathsf{E}}_{z} \mathop{\mathsf{V}}_{x, y} [z = f(x, y)] (x \in K)(y \in L).$$

Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — компактные $\mathcal{T}_2$-пространства, $\mathcal{Z}$ — произвольное $\mathcal{T}_2$-пространство, то отображение γ: $\mathcal{Z}^{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\times 2^{\mathcal{X}}\times 2^{\mathcal{Y}}\to 2^{\mathcal{Z}}$ непрерывно.

В частности, *отображение η: $2^{\mathcal{X}}\times\mathcal{Y}\to 2^{\mathcal{Z}}$, определяемое равенством*

$$\eta(K, y)=\mathop{\mathsf{E}}_{z}\bigvee_{x}[z=f(x, y)](x\in K),$$

непрерывно (при фиксированном f).

Доказательство. Положим

$$\psi(f, M)=f(M)\quad \text{для}\quad f\in\mathcal{Z}^{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\quad \text{и}\quad M\in 2^{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$$

и

$$\alpha(K, L)=K\times L\quad \text{при}\quad K\in 2^{\mathcal{X}}\quad \text{и}\quad L\in 2^{\mathcal{Y}}.$$

Тогда γ является составным отображением:

$$\gamma(f, K, L)=\psi[f, \alpha(K, L)].$$

Так как отображение ψ непрерывно (по теореме 2) и отображение α непрерывно (согласно следствию 2 из § 43, I), то непрерывно и отображение γ.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и $\mathcal{Y}$ — произвольное $\mathcal{T}_2$-пространство. Тогда множество*

$$\Phi=\mathop{\mathsf{E}}_{f, x, y}[y=f(x)]$$

замкнуто в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$.

Доказательство. Покажем, что дополнение множества Φ открыто. Пусть (f_0, x_0, y_0) принадлежит этому дополнению, т. е. $f_0(x_0)\neq y_0$. Так как $\mathcal{Y}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство, то в $\mathcal{Y}$ существуют открытые множества U и V, такие, что

$$(9)\qquad f_0(x_0)\in U,\quad y_0\in V\quad \text{и}\quad U\cap V=0.$$

Так как отображение f_0 непрерывно, а пространство $\mathcal{X}$ регулярно, то существует открытое множество $G\subset\mathcal{X}$, такое, что $x_0\in G$ и $f_0(\overline{G})\subset U$. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$(10)\qquad (f_0, x_0, y_0)\in\Gamma(\overline{G}, U)\times G\times V,$$

т. е.

$$f_0(\overline{G})\subset U,\quad x_0\in G,\quad y_0\in V,$$

и

$$(11)\qquad [\Gamma(\overline{G}, U)\times G\times V]\cap\Phi=0,$$

т. е.

$$\{(f(\overline{G})\subset U)(x\in G)(y\in V)\}\Rightarrow[f(x)\neq y].$$

Остается доказать только соотношение (11). Если $x\in G$ и $f(\overline{G})\subset U$, то $f(x)\in U$, откуда, согласно (9), $f(x)\notin V$, тогда как $y\in V$. Таким образом, $f(x)\neq y$.

При тех же предположениях относительно пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ справедливы такие следствия:

Следствие 4. *Множество* $\underset{f}{\mathsf{E}}[f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}]$ *замкнуто в пространстве* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

В самом деле, $\underset{f}{\mathsf{E}}[f(\mathcal{X})=\mathcal{Y}]=\bigcap\limits_{y}\underset{f}{\mathsf{E}}\bigvee\limits_{x}[y=f(x)]$.

Следствие 5. *Если* $F=\overline{F}$, *то множество* $\underset{f,x}{\mathsf{E}}[f(x)\in F]$ *замкнуто в пространстве* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{X}$.

В самом деле, $\underset{f,x}{\mathsf{E}}[f(x)\in F]=w^{-1}(F)$, где $w(f,\ x)=f(x)$; так как w непрерывно (по теореме 1), то это завершает доказательство.

Следствие 6. *Пусть множество* G *открыто, а множество* F *замкнуто (в* $\mathcal{X}$*). Тогда множества*

$$\underset{f,y}{\mathsf{E}}[\overset{-1}{f}(y)\subset G]\quad и\quad \underset{f}{\mathsf{E}}[f^{-1}(F)\subset G]$$

открыты соответственно в пространствах $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}\times\mathcal{Y}$ *и* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Первая часть этого следствия вытекает из соотношения эквивалентности

$$[\overset{-1}{f}(y)\not\subset G]\equiv\bigvee_{x}\{[y=f(x)](x\in\mathcal{X}-G)\},$$

так как множество точек $(f,\ x,\ y)$, удовлетворяющих условию в фигурных скобках, замкнуто (по теореме 3, ср. также с теоремой 1 § 41, IX).

Аналогично, вторая часть (на основании следствия 5) вытекает из соотношения эквивалентности

$$[f^{-1}(F)\not\subset G]\equiv\bigvee_{x}\{[f(x)\in F](x\in\mathcal{X}-G)\}.$$

Замечание. Большую часть теорем этого раздела, сформулированных для компактных пространств, можно распространить на локально компактные пространства.

III. Операция сужения. Обратные спектры. Пусть $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Обозначим через ρ_C операцию сужения: $\rho_C(f) = f \mid C$ для данного $C \subset \mathcal{X}$; таким образом, ρ_C: $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}^C$.

Теорема 1. *Если множество C компактно, то операция сужения ρ_C непрерывна.*

Доказательство. Мы должны показать, что если множество $\Phi \subset \mathcal{Y}^C$ открыто, то множество $\rho_C^{-1}(\Phi)$ открыто в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Очевидно, можно предположить, что Φ имеет вид $\Phi = \Gamma(C_1, H)$, где

$$(1) \qquad \Gamma(C_1, H) = \mathop{\mathsf{E}}_{g}[g(C_1) \subset H], \qquad g \in \mathcal{Y}^C,$$

а множество $C_1 \subset C$ компактно. Поэтому

$$f \in \rho_C^{-1}(\Phi) \equiv (f \mid C) \in \Phi \equiv (f \mid C)(C_1) \subset H \equiv f(C_1) \subset H,$$

т. е.

$$\rho_C^{-1}(\Phi) = \Gamma(C_1, H).$$

Это завершает доказательство.

Положим, как раньше, $f \mid C = \rho_C(f)$, и для $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ пусть $\Phi \mid C = \rho_C(\Phi)$, т. е. $\Phi \mid C$ есть множество всех элементов $g \in \mathcal{Y}^C$ вида $g = f \mid C$, где $f \in \Phi$.

Теорема 2. *Следующее соотношение эквивалентности верно для любого множества $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$:*

$$(2) \quad (f \in \overline{\Phi}) \equiv [(f \mid C) \in \overline{\Phi \mid C} \text{ для любого компактного } C \subset \mathcal{X}].$$

Доказательство. Импликация слева направо есть прямое следствие теоремы 1.

Для доказательства обратной импликации допустим, что $f_0 \notin \overline{\Phi}$. Мы должны определить компактное множество $C \subset \mathcal{X}$, такое, что

$$(3) \qquad f_0 \mid C \notin \overline{\Phi \mid C}.$$

По предположению существуют две конечные системы $C_1, \ldots, C_n$ и $H_1, \ldots, H_n$ (соответственно компактных и открытых множеств), такие, что

$$(4) \qquad f_0 \in \Gamma(C_1, H_1) \cap \ldots \cap \Gamma(C_n, H_n) \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} - \Phi.$$

Положим $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ и напишем для сокращения $g_0 = f_0 | C$. Для доказательства соотношения (3) достаточно, очевидно, показать, что

(5) $$g_0 \in \Gamma(C_1, H_1) \cap \ldots \cap \Gamma(C_n, H_n) \subset \mathscr{Y}^C - (\Phi | C).$$

Так как $C_i \subset C$, то мы имеем $g_0(C_i) = f_0(C_i)$, а так как (согласно (4)) $f_0 \in \Gamma(C_i, H_i)$, то из этого следует, что $g_0(C_i) \subset H_i$, откуда $g_0 \in \Gamma(C_i, H_i)$.

С другой стороны, если $g \in \Phi | C$, то $g = f | C$ для некоторого $f \in \Phi$, а из этого следует, согласно (4), что для некоторого $i \leqslant n$ мы имеем $f \notin \Gamma(C_i, H_i)$, т. е. $f(C_i) \not\subset H_i$. Но это означает, что $g(C_i) \not\subset H_i$ и, следовательно, $g \notin \Gamma(C_i, H_i)$.

Следствие 2a. *Если Φ_0 и Φ_1 — два замкнутых подмножества пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$, то*

$$(\Phi_0 = \Phi_1) \equiv [(\Phi_0 | C) = (\Phi_1 | C) \text{ для каждого компактного } C \subset \mathscr{X}].$$

Теорема 3. *Пусть f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\mathscr{X}$ — метрическое пространство (или, более общо, $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_2$-пространство, обладающее k-свойством; см. ниже). Если сужение $f | C$ непрерывно, каково бы ни было компактное множество $C \subset \mathscr{X}$, то отображение f непрерывно, т. е. $f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.*

Другими словами (ввиду теоремы 2),

(6) $$(f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}) \equiv [(f | C) \in \mathscr{Y}^C \text{ для любого компактного } C \subset \mathscr{X}].$$

Доказательство. Доказательство будет основано на следующем k-свойстве подмножеств метрического пространства:

(k) *если множество $A \cap C$ замкнуто для любого компактного C, то множество A замкнуто*[1]).

Действительно, предположим, что множество A не замкнуто; тогда существует точка $p_0 \notin A$, такая, что $p_0 = \lim p_n$, где $p_n \in A$ для $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через C множество $(p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$. Очевидно, множество C компактно, а множество $A \cap C$ не замкнуто.

Остается показать, что если $f | C$ непрерывно для любого компактного множества $C \subset \mathscr{X}$, то f непрерывно (на $\mathscr{X}$), т. е. что множество $f^{-1}(F)$ замкнуто для каждого F, замкнутого в $\mathscr{Y}$. Положим $A = f^{-1}(F)$. Очевидно (ср. § 3, III, (14)), что

$$A \cap C = f^{-1}(F) \cap C = (f | C)^{-1}(F).$$

[1]) Детальное изучение пространств, обладающих k-свойством, проводится в работе Архангельского [3].

Но последнее множество замкнуто (потому что $f|C$ непрерывно), а из этого в силу k-свойства вытекает, что замкнуто множество A.

Замечание. Эту теорему можно также применить к случаю, когда $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются $\mathcal{L}^*$-пространствами.

Для каждого $\mathcal{X}$ обозначим через $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ *семейство всех компактных подмножеств пространства* $\mathcal{X}$ (см. § 42, I). Очевидно, что $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ упорядочено отношением включения и, более того, является направленным множеством (так как если $C_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ и $C_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, то $(C_1 \cup C_2) \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$, $C_1 \subset C_1 \cup C_2$ и $C_2 \subset C_1 \cup C_2$).

Определим отображение $\pi_{C_0C_1}$ для $C_0 \subset C_1$ условием

$$\pi_{C_0C_1}(g) = g \,|\, C_0 \quad \text{для} \quad g \in \mathcal{Y}^{C_1}.$$

Следовательно, $\pi_{C\mathcal{X}} = \rho_C$, если $\mathcal{X}$ компактно. Ясно, что $\pi_{CC}(g) = g$ и

$$\pi_{C_0C_1} \circ \pi_{C_1C_2} = \pi_{C_0C_2} \quad \text{для} \quad C_0 \subset C_1 \subset C_2.$$

Таким образом, $[\mathcal{C}(\mathcal{X}), \mathcal{Y}^C, \pi]$ является *обратным спектром* (ср. § 3, XIII). Обозначим через L предел этого обратного спектра:

$$(7) \qquad L = \operatorname*{Lim}_{C,\, C_0 \subset C_1} \{\mathcal{Y}^C, \pi_{C_0C_1}\}.$$

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}$ — метрическое пространство (или, более общо, $\mathcal{X}$ обладает k-свойством), то $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} L$.*

Именно, отображение ρ, имеющее ρ_C своей C-й координатой, есть гомеоморфизм пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ на L.

Доказательство. Отображение ρ есть гомеоморфизм, так как по теореме 2 (для $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$) мы имеем

$$(8) \qquad (f \in \overline{\Phi}) \equiv \{\rho_C(f) \in \overline{\rho_C(\Phi)} \ \text{для каждого}\ C \in \mathcal{C}(\mathcal{X})\},$$

а последнее условие эквивалентно включению $\rho(f) \in \overline{\rho(\Phi)}$ (по теореме 3 из § 16, VI, где вместо $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{Z}$ и T мы подставляем соответственно $\rho(f)$, $\rho(\Phi)$ и $\mathcal{C}(\mathcal{X})$).

Остается показать, что ρ есть отображение на L.

Пусть $\{g_C\} \in L$. Мы должны определить $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ так, чтобы

$$(9) \qquad f \,|\, C = g_C \quad \text{для каждого} \quad C \in \mathcal{C}(\mathcal{X}).$$

Требуемое отображение f получается, если предположить, что

$$(10) \qquad f(x) = g_{(x)}(x) \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathcal{X}.$$

Равенство (9) верно вследствие того, что $g_C(x)=g_{(x)}(x)$ для каждого $x\in C$. Кроме того, по теореме 3 отображение f непрерывно (т. е. $f\in\mathcal{Y}^\mathcal{X}$), так как, согласно (9), $f\,|\,C=g_C\in\mathcal{Y}^C$, а это означает, что отображение f непрерывно на любом компактном подмножестве пространства $\mathcal{X}$.

Теорема 5. *Если $\mathcal{Y}$ — вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство, то и $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$ — также вполне регулярное $\mathcal{T}_1$-пространство.*

Доказательство. Пусть $f_0\in\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, и пусть Φ_0 — открытое множество в $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, содержащее f_0. Мы должны определить непрерывное отображение

$$\gamma\colon \mathcal{Y}^\mathcal{X}\to\mathcal{I}, \quad \text{такое, что} \quad \gamma(f_0)=0 \quad \text{и} \quad \gamma(f)=1 \quad \text{для} \quad f\notin\Phi_0.$$

Очевидно, мы можем считать, что $\Phi_0=\Gamma(C,\,H)$, где $C\subset\mathcal{X}$ компактно и $H\subset\mathcal{Y}$ открыто. Тогда $f_0(C)$ компактно и содержится в H. Поэтому (см. § 41, II, замечание (iii)) существует непрерывное отображение

$$g\colon \mathcal{Y}\to\mathcal{I}, \quad \text{такое, что} \quad gf_0(C)=0 \text{ и } g(\mathcal{Y}-H)=1.$$

Обозначим через $\gamma(f)$ последнюю точку множества $gf(C)$. Следовательно, $\gamma\colon \mathcal{Y}^\mathcal{X}\to\mathcal{I}$. Покажем, что γ — непрерывное отображение. Очевидно, $gf(C)=(gf\,|\,C)(C)$. Положим

$$F(f)=gf(C) \quad \text{при} \quad f\in\mathcal{Y}^\mathcal{X} \quad \text{и} \quad U(u)=gu(C) \quad \text{при} \quad u\in\mathcal{Y}^C.$$

Следовательно,

$$F\colon \mathcal{Y}^\mathcal{X}\to 2^\mathcal{I}, \quad U\colon \mathcal{Y}^C\to 2^\mathcal{I} \quad \text{и} \quad F(f)=U\rho_C(f).$$

По теореме 2 п. II отображение U является непрерывным, и так как по теореме 1 п. III отображение ρ_C непрерывно, то и F непрерывно. Отсюда следует, что отображение γ непрерывно (см. замечание 2, § 42, II).

Очевидно, $\gamma(f_0)=0$. Наконец, пусть $f\notin\Phi_0$; тогда существует $x\in C$, такое, что $f(x)\notin H$, и потому $gf(x)=1$. Таким образом, $\gamma(f)=1$.

IV. Связь между пространствами $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{T}}$ и $(\mathcal{Y}^\mathcal{X})^\mathcal{T}$. Пусть $g\colon \mathcal{X}\times\mathcal{T}\to\mathcal{Y}$; положим

$$(1)\qquad f_t(x)=g(x,\,t).$$

Таким образом, отображение f, рассматриваемое как функция от t, ставит в соответствие каждому $t\in\mathcal{T}$ отображение, для которого x является независимой переменной (ср. § 20, VII).

Теорема 1 [1]. *Если отображение g непрерывно, то непрерывно и отображение f, т. е.*

$$(2)\qquad g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}\times\mathcal{T}} \Rightarrow f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}.$$

Доказательство. Пусть множество Q открыто в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Мы должны показать, что множество $f^{-1}(Q)$ открыто в $\mathcal{T}$. Мы можем, конечно, считать, что Q имеет вид $Q = \Gamma(C, H)$, где множество C компактно в $\mathcal{X}$, а множество H открыто в $\mathcal{Y}$. Следовательно, для данного $t_0 \in f^{-1}(Q)$ мы должны определить открытое множество U в пространстве $\mathcal{T}$, такое, что

$$(3)\qquad t_0 \in U \quad \text{и} \quad U \subset f^{-1}(Q).$$

Далее, мы имеем

$$(4)\quad |t \in f^{-1}(Q)| \equiv (f_t \in Q) \equiv [f_t(x) \in H \quad \text{для каждого} \quad x \in C].$$

Так как $t_0 \in f^{-1}(Q)$, то отсюда на основании (1) следует, что

$$g(x, t_0) \in H \quad \text{для каждого} \quad x \in C, \quad \text{т. е.} \quad C \times (t_0) \subset g^{-1}(H).$$

Так как отображение g непрерывно, то множество $g^{-1}(H)$ открыто в $\mathcal{X} \times \mathcal{T}$ и потому является объединением произведений $G_s \times U_s$ открытых множеств (в пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{T}$ соответственно):

$$g^{-1}(H) = \bigcup_s G_s \times U_s.$$

Так как множество $C \times (t_0) \subset g^{-1}(H)$ компактно, то покрытие $\{G_s \times U_s\}$ содержит конечное подпокрытие:

$$(5)\quad C\times(t_0)\subset(G_{s_1}\times U_{s_1}) \cup \ldots \cup (G_{s_n}\times U_{s_n}), \text{ где } t_0 \in U_{s_1} \cap \ldots \cap U_{s_n}.$$

Положим $U = U_{s_1} \cap \ldots \cap U_{s_n}$. Тогда $t_0 \in U$ и множество U открыто в пространстве $\mathcal{T}$.

Для доказательства второй части соотношения (3) допустим, что $t \in U$. Так как $C \subset G_{s_1} \cup \ldots \cup G_{s_n}$, то мы имеем для каждого $x \in C$

$$(x, t) \in (G_{s_1} \times U_{s_1}) \cup \ldots \cup (G_{s_n} \times U_{s_n}) \subset g^{-1}(H),$$

т. е. $g(x, t) \in H$, откуда $f_t(x) \in H$, и вследствие (4) $t \in f^{-1}(Q)$.

Обратной к теореме 1 является следующая

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — регулярное локально компактное пространство. Тогда если отображение f непрерывно, то непрерывно и отображение g.*

---

[1] См. Фокс [1, стр. 430, лемма 1]. Ср. также Браун [2].

Это означает (в силу теоремы 1), что

(6) $$g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}} \equiv f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}.$$

Доказательство. Пусть множество H открыто в пространстве $\mathcal{Y}$. Мы должны показать, что множество $g^{-1}(H)$ открыто в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{T}$. Таким образом, для заданного $g(x_0, t_0) \in H$ мы должны определить два открытых множества G (в $\mathcal{X}$) и U (в $\mathcal{T}$), таких, что

(7) $$x_0 \in G, \quad t_0 \in U \quad \text{и} \quad G \times U \subset g^{-1}(H).$$

Так как $f_{t_0} \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $f_{t_0}(x_0) = g(x_0, t_0) \in H$, то существует открытое множество G_0 в пространстве $\mathcal{X}$, такое, что $x_0 \in G_0$ и $f_{t_0}(G_0) \subset H$. В силу регулярности и локальной компактности пространства $\mathcal{X}$ существует открытое множество G, такое, что $x_0 \in G$, множество $\bar{G}$ компактно и $\bar{G} \subset G_0$. Отсюда следует, что

(8) $$f_{t_0}(\bar{G}) \subset f_{t_0}(G_0) \subset H, \quad \text{т. е.} \quad f_{t_0} \in \Gamma(\bar{G}, H).$$

Положим

(9) $$U = f^{-1}[\Gamma(\bar{G}, H)], \quad \text{т. е.} \quad t \in U \equiv f_t \in \Gamma(\bar{G}, H).$$

Так как отображение f непрерывно и множество $\Gamma(\bar{G}, H)$ открыто (по определению компактно-открытой топологии), то множество U открыто. Кроме того, $t_0 \in U$, согласно (8). Для доказательства второго соотношения (7) допустим, что $x \in G$ и $t \in U$. Мы должны показать, что $g(x, t) \in H$, т. е. что $f_t(x) \in H$. Но включение $t \in U$, согласно (9), означает, что $f_t \in \Gamma(\bar{G}, H)$, а так как $\Gamma(\bar{G}, H) \subset \Gamma(G, H)$, то $f_t \in \Gamma(G, H)$, т. е. $f_t(x) \in H$ для каждого $x \in G$.

Замечание 1 [1]. В связи с формулами (2) и (6) следует отметить, что, поставив в соответствие каждому $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$ отображение $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$, определенное формулой (1), мы зададим гомеоморфизм $\mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}}$ в $(\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}$. Этот гомеоморфизм становится отображением на при выполнении условий теоремы 2. Таким образом, для регулярного и локально компактного пространства $\mathcal{X}$ выполнено соотношение

(10) $$\mathcal{Y}^{\mathcal{X} \times \mathcal{T}} \underset{(\mathrm{op})}{=} (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}})^{\mathcal{T}}.$$

Замечание 2. Подобным же образом следующие утверждения, которые были доказаны для топологии непрерывной

---

[1] См. Джексон [2]. Ср. § 20, VII, теорема 3, для пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ с непрерывной сходимостью.

сходимости (см. § 20, VII, теоремы 1 и 2, и VIII, теорема 3), могут быть доказаны для открыто-компактной топологии:

(11) $$\prod_{t \in T} \mathcal{Y}_t^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} \Big(\prod_{t \in T} \mathcal{Y}_t\Big)^{\mathcal{X}};$$

(12) $$\mathcal{Y}^A \times \mathcal{Y}^B \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Y}^{A \cup B}$$

при условии, что A и B замкнуты в $A \cup B$ и $A \cap B = 0$;

(13) $$\mathcal{Y}^{f(\mathcal{X})} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$$

при условии, что f непрерывно, $\mathcal{X}$ компактно и $f(\mathcal{X})$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство.

Замечание 3. Наконец, можно доказать (ср. § 21, X, теорема 8) следующую формулу:

(14) $$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{\subset} 2^{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}$$

при условии, что $\mathcal{X}$ компактно. А именно, поставим в соответствие каждому $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ его график.

Лемма. *Пусть отображение f: $\mathcal{T} \to \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ непрерывно и множество $C \subset \mathcal{X}$ компактно. Положим $v(t) = f_t \mid C$. Тогда v: $\mathcal{T} \to \mathcal{Y}^C$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathcal{T}$ и $t \in \overline{A}$. Покажем, что $v(t) \in \overline{v(A)}$. Так как f непрерывно, то из $t \in \overline{A}$ вытекает, что $f_t \in \overline{f(A)}$. Положим $\Phi = f(A)$ в III (2). Тогда $(f_t \mid C) \in \overline{\Phi \mid C}$. Этим завершается доказательство, ибо $\Phi \mid C = v(A)$.

Теорема 3. *Если $\mathcal{X}$ — метрическое пространство (или, более общо, $\mathcal{T}_2$-пространство, обладающее k-свойством), то справедливо соотношение* (6).

Доказательство. Принимая во внимание теорему 1, мы должны лишь доказать, что если f непрерывно, то и g непрерывно; для этого достаточно показать, что $g \mid C \times \mathcal{T}$ непрерывно для каждого компактного $C \subset \mathcal{X}$ (ср. III (6)).

Напишем (как выше) $v(t) = f_t \mid C$. Так как f непрерывно, то (согласно лемме) и v непрерывно, т. е. $v \in (\mathcal{Y}^C)^{\mathcal{T}}$, и на основании теоремы 2 (где $\mathcal{X}$ следует заменить на C и g на $g \mid C \times \mathcal{T}$) $g \mid C \times \mathcal{T}$ непрерывно.

Замечание 4. Предположение о том, что $\mathcal{T}$ — метрическое пространство, можно опустить, так как произведение пространства, обладающего k-свойством, и компактного пространства обладает k-свойством [1]).

V. Топология равномерной сходимости пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Напомним, что для данного произвольного множества $\mathscr{X}$ и метрического пространства $\mathscr{Y}$ через $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ мы обозначаем *семейство всех ограниченных отображений* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Это семейство можно рассматривать как метрическое пространство, определив расстояние следующим образом (см. § 21, X, стр. 228):

$$(1) \qquad |f_1 - f_2| = \sup_{x \in \mathscr{X}} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Добавим, что сходимость в пространстве $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ совпадает с равномерной сходимостью (см. следствие 1а, § 21, X).

Топология пространства $\Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, индуцированная определенным выше расстоянием, называется *топологией равномерной сходимости*.

Теорема 1. *Если $\mathscr{X}$ компактное, а $\mathscr{Y}$ — метрическое пространство, то $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \subset \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, и, следовательно, пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ метрическое (в топологии равномерной сходимости).*

Эта теорема есть непосредственное следствие того факта, что если отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно, то множество $f(\mathscr{X})$ ограничено (см. § 41, VI, теорема 1).

Замечание 1. Если $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, то равномерная сходимость непрерывных отображений совпадает с непрерывной сходимостью, которая означает (см. § 21, X, теорема 5), что

$$(2) \qquad \left(\lim_n x_n = x\right) \Rightarrow \left[\lim_n f_n(x_n) = f(x)\right].$$

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ — компактное, а $\mathscr{Y}$ — метрическое пространство, то топология равномерной сходимости пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ совпадает с его компактно-открытой топологией.*

Доказательство. 1. Сначала покажем, что каждое множество, открытое в топологии равномерной сходимости, открыто в компактно-открытой топологии. Очевидно, достаточно доказать, что для каждого $f_0 \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют две системы $C_1, \ldots, C_n$ и $H_1, \ldots, H_n$ (множества $C_i \subset \mathscr{X}$ компактны, а $H_i \subset \mathscr{Y}$ открыты), такие, что

$$(3) \qquad f_0 \in [\Gamma(C_1, H_1) \cap \ldots \cap \Gamma(C_n, H_n)] \subset K(f_0, \varepsilon),$$

где $K(f_0, \varepsilon)$ — шар с центром в точке f_0 радиуса ε, т. е. $K(f_0, \varepsilon) = \mathop{E}\limits_{f} |f - f_0| < \varepsilon$.

[1]) См. Архангельский [3, стр. 18]. Ср. также Браун [1, 2].

Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, а отображение f_0 непрерывно, то существует конечное открытое покрытие $\mathcal{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_n$, такое, что $\delta[f_0(G_i)] < \varepsilon/2$ и $G_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, n$. Выберем $x_i \in G_i$ и положим

$$(4)\quad G_i = \overline{G}_i \text{ и } H_i = K[f_0(x_i), \varepsilon/2] = \underset{y}{\mathsf{E}}[|y - f_0(x_i)| < \varepsilon/2].$$

Далее, так как $\delta[f_0(C_i)] < \varepsilon/2$, то для $x \in C_i$ мы имеем неравенство $|f_0(x) - f_0(x_i)| < \varepsilon/2$ и, следовательно, $f_0(x) \in H_i$, т. е. $f_0 \in \Gamma(C_i, H_i)$. Это верно для каждого $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, доказательство первой части соотношения (3) завершено.

Для доказательства второй части предположим, что $f \in \Gamma(C_i, H_i)$. Тогда для каждого $x \in C_i$ мы имеем $f(x) \in H_i$ и, согласно (4), $|f(x) - f_0(x_i)| < \varepsilon/2$. Так как $\delta[f_0(C_i)] < \varepsilon/2$, то

$$|f(x) - f_0(x)| \leqslant |f(x) - f_0(x_i)| + |f_0(x_i) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому $f \in K(f_0, \varepsilon)$.

2. Пусть множество G открыто в компактно-открытой топологии пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Мы должны показать, что оно открыто в топологии равномерной сходимости[1]). Не ограничивая общности, можно предположить, что $G = \Gamma(C, H)$.

Пусть $f_0 \in \Gamma(C, H)$. Мы должны определить такое число $\varepsilon > 0$, что

$$(5)\qquad |f - f_0| < \varepsilon \text{ влечет за собой } f \in \Gamma(C, H).$$

Положим

$$(6)\qquad \varepsilon = \inf \rho[f_0(x), \mathcal{Y} - H], \quad \text{где} \quad x \in C.$$

Так как $f_0(x) \in H$ для каждого $x \in C$, то $\rho[f_0(x), \mathcal{Y} - H] > 0$, а так как множество C компактно и ρ — непрерывная функция x (ср. § 21, IV, (5)), то ρ достигает своей нижней грани на множестве C (см. § 41, VI, следствие 2с). Следовательно, $\varepsilon > 0$.

Пусть $|f - f_0| < \varepsilon$. Допустим в противоположность (5), что $f \notin \Gamma(C, H)$, т. е. что $f(x_0) \in \mathcal{Y} - H$ для некоторого $x_0 \in C$. Тогда

$$\rho[f_0(x_0), \mathcal{Y} - H] \leqslant |f_0(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Но это противоречит равенству (6).

Замечание 2. Из теоремы 2 следует, что топология равномерной сходимости в случае, когда пространство $\mathcal{X}$ компактное, а пространство $\mathcal{Y}$ метрическое, есть топологический инвариант (она не зависит от метрики пространства $\mathcal{Y}$); в случае,

[1]) См. Джексон [1].

когда $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, это утверждение следует также из соотношения (2).

Теорема 3. *Если $\mathscr{X}$ — компактное, а $\mathscr{Y}$ — полное (метрическое) пространство, то пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ полно в своей топологии равномерной сходимости.*

Это непосредственное следствие теоремы 2 из § 33, V.

Замечание 3. Напомним, что *если $\mathscr{X}$ — компактное метрическое пространство, а $\mathscr{Y}$ — сепарабельное, то пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ сепарабельно* (см. § 22, III).

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{Y}$ — компактное метрическое пространство, а $\mathscr{X}$ — произвольное пространство. Пусть $A \subset \mathscr{X}$; положим $H(f) = \overline{f(A)}$. Отображение H: $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \to 2^{\mathscr{Y}}$ непрерывно (в топологии равномерной сходимости пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$).*

Более точно, $\mathrm{dist}\,[H(f), H(g)] \leqslant |f-g|$, *где* $f, g \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.

Доказательство. Мы имеем

$$\mathrm{dist}\,[H(f), H(g)] = \mathrm{dist}\,[f(A), g(A)] \leqslant |f-g|,$$

так как (ср. § 21, X, стр. 231) для каждого $y \in f(A)$ существует $y' \in g(A)$, такой, что $|y-y'| \leqslant |f-g|$; именно, $y' = g(x)$, где $x \in A$ — такой элемент, что $y = f(x)$.

Замечание 4. Можно показать, что для компактно-открытой топологии пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ теорема 4 не верна.

Следствие 4а. *Пусть $\mathscr{Y}$ — компактное метрическое, а $\mathscr{X}$ — произвольное пространство. Пусть $A \subset \mathscr{X}$ и $B \subset \mathscr{X}$. Тогда множество*

$$\underset{f}{\mathsf{E}}\,[\overline{f(A)} \cap \overline{f(B)} = 0] \tag{7}$$

открыто в пространстве $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.

В самом деле, множество $\underset{K,L}{\mathsf{E}}\,(K \cap L = 0)$ открыто в пространстве $2^{\mathscr{Y}} \times 2^{\mathscr{Y}}$, ибо пространство $\mathscr{Y}$ нормально (ср. § 17, V, теорема 1).

Замечание 5. Теорему 4 и следствие 4а можно выразить в следующем более общем виде.

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное множество и $\mathscr{Y}$ — метрическое пространство. Для $A \subset \mathscr{X}$ обозначим через Ψ_A множество элементов $f \in \Phi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, таких, что $\overline{f(A)}$ компактно, и положим $H(f) = \overline{f(A)}$. Тогда отображение H: $\Psi_A \to \mathscr{C}(\mathscr{Y})$ непрерывно (ср. с теоремой из § 42, II), а множество (7) открыто в $\Psi_A \cap \Psi_B$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что экспоненциальная топология пространства $\mathscr{C}(\mathcal{Y})$ совпадает с его топологией, определяемой хаусдорфовым расстоянием (согласно § 42, II), и множество $\underset{K, L}{\mathsf{E}}(K \cap L = 0)(K, L \in \mathscr{C}(\mathcal{Y}))$ открыто в пространстве $\mathscr{C}(\mathcal{Y}) \times \mathscr{C}(\mathcal{Y})$.

VI. Гомеоморфизмы.

Теорема 1[1]). *Если $\mathcal{X}$ — совершенно нормальное компактное $\mathcal{T}_2$-пространство и $\mathcal{Y}$ — произвольное $\mathcal{T}_2$-пространство, то множество Φ всех гомеоморфизмов $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ есть G_δ-множество в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Очевидно,

$$(f \notin \Phi) \equiv \bigvee_{x, x'} [f(x) = f(x')] (x \neq x').$$

Далее, множество $\underset{f, x, x'}{\mathsf{E}} [f(x) = f(x')]$ замкнуто (по теореме 3 п. II), а множество $\underset{f, x, x'}{\mathsf{E}} (x \neq x')$ открыто (по теореме 2 § 15, IV); следовательно, их пересечение есть F_σ-множество, а поэтому и Φ как проекция, параллельная компактной оси, является F_σ-множеством (в силу следствия 1а § 41, IV).

Замечание. Предположение компактности существенно[2]).

Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство, $\mathcal{Y} = \mathcal{J}^{\aleph_0}$, A и B — два замкнутых непересекающихся подмножества пространства $\mathcal{X}$. Пусть $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, такое, что*

$$(1) \qquad \overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = 0 \quad \textit{и} \quad |g - f| < \varepsilon.$$

Иначе говоря,

$$(2) \qquad \overline{\underset{g}{\mathsf{E}} [\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = 0]} = \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}.$$

Доказательство. Положим $f(x) = [f^1(x), f^2(x), \ldots]$, где $f^n(x) \in \mathcal{J}$. Пусть n такое, что $2^{-n} < \varepsilon$. Определим g следующим образом:

$$1) \qquad g^i(x) = f^i(x) \quad \text{для} \quad i \leqslant n,$$

$$2) \qquad g^{n+1}(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)},$$

$$3) \qquad g^i(x) = 0 \quad \text{для} \quad i > n + 1.$$

---

[1]) См. Куратовский [25, стр. 270].

[2]) Ср. Робертс [3, стр. 126].

Следовательно, $g^{n+1}(x)=0$ для $x\in A$, откуда $y^{n+1}=0$ для $y\in g(A)$. Из этого следует, что $y^{n+1}=0$ для $y\in\overline{g(A)}$.

С другой стороны, для $y\in\overline{g(B)}$ мы имеем $y^{n+1}=1$. Это завершает доказательство первого соотношения (1). Второе можно доказать следующим образом:

$$|g(x)-f(x)|=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}|g^i(x)-f^i(x)|=$$
$$=\sum_{i=n+1}^{\infty}2^{-i}|g^i(x)-f^i(x)|\leqslant 2^{-n}<\varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{Y}$ — компактное метрическое пространство и для любой пары замкнутых непересекающихся подмножеств A и B пространства $\mathcal{X}$ справедливо равенство* (2) *(таким является, например, случай $\mathcal{Y}=\mathcal{J}^{\aleph_0}$). Тогда множество элементов пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, которые не являются гомеоморфизмами, есть множество первой категории в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Более точно, *если F — замкнутое подмножество пространства $\mathcal{X}$ и равенство* (2) *справедливо для любой пары замкнутых непересекающихся подмножеств A и B множества F, то множество всех $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, таких, что $f|F$ не является гомеоморфизмом, есть множество первой категории в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — счетная открытая база по отношению к F. Положим

$$\Phi_{kl}=\mathop{\mathsf{E}}_{g}\left[\overline{g(\overline{R}_k)}\cap\overline{g(F-R_l)}=0\right]$$

для каждой пары индексов k, l, таких, что $\overline{R}_k\subset R_l$.

Так как пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ полное (по теореме 2 из § 33, V) и так как множества Φ_{kl} всюду плотны (согласно (2)) и открыты (в силу следствия 4а п. IV), то их пересечение Φ есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество, дополнение которого есть множество первой категории (по теореме Бэра). Наконец, если $f\in\Phi$, то $f(R_k)\cap\cap\overline{f(F-R_l)}=0$, каково бы ни было $\overline{R}_k\subset R_l$. Но из этого следует, что $f|F$ есть гомеоморфизм (по теореме 3 из § 22, I).

VII. Случай локально компактного пространства $\mathcal{X}$. В этом пункте мы будем предполагать, что $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, причем пространство $\mathcal{X}$ локально компактно.

По теореме 8 из § 41, X мы имеем

(1) $$\mathcal{X}=F_1\cup F_2\cup\ldots,$$

где $F_i\subset\operatorname{Int}(F_{i+1})$ и множества F_i компактны.

Отсюда следует, что для каждого компактного множества $C \subset \mathcal{X}$ существует такой индекс i, что $C \subset F_i$. Другими словами, семейство $\mathscr{C}(\mathcal{X})$ всех компактных подмножеств пространства $\mathcal{X}$ *конфинально* с последовательностью $\{F_1, F_2, \ldots \ldots, F_i, \ldots\}$.

Из этого вытекает по теореме 2 п. III, что

$$(2)\qquad (f \in \overline{\Phi}) \equiv [(f \mid F_i) \in \overline{\Phi \mid F_i}]$$

для каждого подмножества Φ пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (снабженного компактно-открытой топологией).

Теорема 1. *Пространство* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (*в своей компактно-открытой топологии*) *метризуемо. Метрика этого пространства может быть задана формулой*

$$(3)\qquad |f-g| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|(f \mid F_i) - (g \mid F_i)|}{1 + |(f \mid F_i) - (g \mid F_i)|}.$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$(4)\qquad \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{Y}^{F_1} \times \mathcal{Y}^{F_2} \times \ldots .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 из п. III. Положим $\rho_i(f) = f \mid F_i$; тогда $\rho_i\colon \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}^{F_i}$. Положим $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots)$; тогда $\rho\colon \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}^{F_1} \times \mathcal{Y}^{F_2} \times \ldots$ и, согласно (1),

$$(5)\qquad (f \in \overline{\Phi}) \equiv \bigwedge_i [\rho_i(f) \in \overline{\rho_i(\Phi)}] \equiv [\rho(f) \in \overline{\rho(\Phi)}].$$

Это означает, что ρ есть гомеоморфизм, и, таким образом, (4) доказано.

Далее, так как пространство $\mathcal{Y}^{F_i}$ метризуемо (ср. V (1)), то расстояние между двумя элементами $f = (f_1, f_2, \ldots)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots)$ пространства $\mathcal{Y}^{F_1} \times \mathcal{Y}^{F_2} \times \ldots$ можно положить равным (ср. § 21, VI, стр. 222)

$$(6)\qquad |f-g| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|f_i - g_i|}{1 + |f_i - g_i|}.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Кроме того, при помощи этих рассуждений, как и в случае теоремы 4 п. III, получается следующая

Теорема 2. $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \underset{\text{top}}{=} \operatorname*{Lim}_{i,\, i<k} \{\mathcal{Y}^{F_i}, \pi_{ik}\}$, *где* $\pi_{ik}(g) = g \mid F_i$ *для* $g \in \mathcal{Y}^{F_k}$.

Определенное выше отображение ρ есть требуемый гомеоморфизм. Из (3) легко получаем, что

$$(7)\quad \left(f=\lim_{k\to\infty} f_k\right)\equiv\left[(f\mid F_i)=\lim_{k\to\infty}(f_k\mid F_i)\ \text{для}\ i=1,\ 2,\ \ldots\right]\equiv$$
$$\equiv\left[(f\mid C)=\lim_{k\to\infty}(f_k\mid C)\ \text{для каждого компактного}\ C\right];$$

$$(8)\qquad \left(\lim_{k\to\infty} x_k=x\right)\Rightarrow\left[\lim_{k\to\infty} f_k(x_k)=f(x)\right];$$

это означает, что сходимость в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ есть непрерывная сходимость.

Теорема 3. *Если пространство $\mathcal{Y}$ сепарабельно, то пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ также сепарабельно. Если пространство $\mathcal{Y}$ полно, то полно и пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Первое утверждение следует из (4), так как пространство $\mathcal{Y}^{F_i}$ сепарабельно (см. замечание 3 п. V).

Для доказательства второго утверждения воспользуемся формулой (4) и тем фактом, что произведение $\mathcal{Y}^{F_1}\times\mathcal{Y}^{F_2}\times\ldots$ полных пространств (см. теорему 3 п. V), метризованное по формуле (6), является полным пространством (см. теорему 2 из § 33, III). Кроме того, ρ есть изометрическое отображение пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ на замкнутое подмножество произведения $\mathcal{Y}^{F_1}\times\mathcal{Y}^{F_2}\times\ldots$ (по теореме 2).

Теорема 4. *Пусть заданы последовательность множеств $0\neq\Phi_k\subset\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, где $k=1,\ 2,\ \ldots$, и последовательность натуральных чисел $m_1,\ m_2,\ \ldots$, такие, что*

$$(9)\qquad \Phi_k\mid F_i=\Phi_{m_i}\mid F_i\quad \textit{для}\quad k>m_i\quad \textit{и}\quad i=1,\ 2,\ \ldots.$$

Тогда существует сходящаяся последовательность $f_1,\ f_2,\ \ldots$, где $f_k\in\Phi_k$.

Более точно, *существует отображение $f\in\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, такое, что*

$$(10)\qquad f(x)=f_k(x)\quad \textit{для}\quad x\in F_i\quad \textit{и}\quad k>m_i,$$

откуда $f=\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ (согласно (7)).

Доказательство. Очевидно, можно предположить, что $m_1<m_2<\ldots$. Во-первых, определим последовательность f_{m_1}, f_{m_2}, …, такую, что

$$(11)\qquad f_{m_i}\in\Phi_{m_i}$$

и

(12) $$f_{m_{i+1}}(x) = f_{m_i}(x) \quad \text{для} \quad x \in F_i.$$

Проведем рассуждение по индукции. Пусть f_{m_1} — произвольное отображение, удовлетворяющее условию (11) при $i=1$. Предположим, что условие (11) выполняется для данного $i\ (\geqslant 1)$. Положим в равенстве (9) $k = m_{i+1}$. Из этого, согласно (11), вытекает, что $(f_{m_i} | F_i) \in (\Phi_{m_{i+1}} | F_i)$. Следовательно, существует такое $f_{m_{i+1}}$, что (11) справедливо для $i+1$ (т. е. $f_{m_{i+1}} \in \Phi_{m_{i+1}}$) и $f_{m_i} | F_i = F_{m_{i+1}} | F_i$, т. е. справедливо равенство (12).

Этим завершается определение последовательности f_{m_1}, f_{m_2}, ...

Далее, из (12) следует существование отображения f, такого, что

(13) $$f(x) = f_{m_i}(x) \quad \text{для} \quad x \in F_i \quad \text{и} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Так как $F_i \subset \operatorname{Int}(F_{i+1})$, то отображение f непрерывно, т. е. $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

Остается определить f_k для $m_i < k < m_{i+1}$ (если $k < m_1$, то f_k — произвольный элемент Φ_k). Теперь, согласно (9) и (11), мы имеем $(f_{m_i} | F_i) \in (\Phi_k | F_i)$. Следовательно, можно считать, что

(14) $$f_k \in \Phi_k \quad \text{и} \quad f_k(x) = f_{m_i}(x) \quad \text{для} \quad x \in F_i$$

и соотношение (10) следует из (12)—(14).

Замечание. *Если пространство $\mathcal{X}$ не является локально компактным, то пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (с компактно-открытой топологией) не метризуемо* [1]). Однако оно является псевдометрическим (ср. § 21, XV, стр. 241) относительно семейства псевдометрик ψ_C, таких, что

$$\psi_C(f, g) = \max_{x \in C} |f(x) - g(x)| \quad \text{и} \quad C \in \mathcal{C}(\mathcal{X}).$$

Если пространство $\mathcal{X}$ сепарабельно и локально компактно, то семейство $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ можно заменить семейством $F_1, F_2, \ldots$; из этого вытекает метризуемость пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (см. § 21, XV, замечание 2).

[1]) См. Мрувка [1, стр. 274]. Ср. также Аренс [1] и Аренс и Дугунджи [1].

VIII. Топология поточечной сходимости пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. В § 16 мы определили топологию (называемую также тихоновской) в прямом произведении $\prod_{x \in \mathscr{X}} \mathscr{Y}_x$ топологических пространств $\mathscr{Y}_x$ (где $\mathscr{X}$ — не обязательно топологическое пространство). В частном случае, когда все пространства $\mathscr{Y}_x$ совпадают, т. е. $\mathscr{Y}_x = \mathscr{Y}$, множество всех отображений $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, обозначенное символом $(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})_{\text{set}}$, становится топологическим пространством. Если же ограничиться непрерывными отображениями f (предполагая пространство $\mathscr{X}$ топологическим), то пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ снабжается указанным способом топологией, называемой *топологией поточечной сходимости.*

Это название связано с тем фактом, что сеть (см. § 20, IX) $\{f_t\}$ сходится к g тогда и только тогда, когда $\{f_t(x)\}$ сходится к $g(x)$ в каждой точке $x \in \mathscr{X}$ (случай счетного произведения см. в § 20, IV).

Легко показать, что множества $\Gamma(F, H)$, где F — конечное подмножество пространства $\mathscr{X}$, а H — открытое подмножество пространства $\mathscr{Y}$, образуют базу указанной топологии пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Из этого следует, что топология поточечной сходимости слабее, чем компактно-открытая топология пространства $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.

§ 45. Вопросы теории размерности (продолжение)

Настоящий параграф является продолжением § 25—28 первого тома. Здесь будет использовано понятие компактности, изученное в предыдущих параграфах этой главы.

В § 45 пространство $\mathscr{X}$ предполагается сепарабельным метрическим [1]).

I. Отображения порядка k. Точка y называется *значением* отображения f *порядка* k, если множество $f^{-1}(y)$ состоит из k элементов. Говорят, что отображение *имеет порядок* $\leqslant k$, если каждое его значение имеет порядок $\leqslant k$.

Лемма 1. *Пусть $A_0, \ldots, A_r$ — система непересекающихся подмножеств пространства $\mathscr{X}$ и f — отображение пространства $\mathscr{X}$ порядка $k \geqslant r$. Предположим, что*

$$B = f(A_0) \cap \ldots \cap f(A_r). \tag{1}$$

Тогда сужение $f_i = f \mid [A_i \cap f^{-1}(B)]$ имеет порядок $\leqslant k - r$.

Кроме того, если мы положим $C_i = f^{-1}f(A_i) - A_i$, то сужение $f \mid C_i$ имеет порядок $\leqslant k - 1$.

---

[1]) Более общий подход см. в работе Нагата [1].

Доказательство. Предположим, что $y \in f[A_i \cap f^{-1}(B)]$. Так как (ср. § 3, II (13))

$$f[A_i \cap f^{-1}(B)] = B \cap f(A_i) = B, \tag{2}$$

то существует система из $(r+1)$ точек $x_0, \ldots, x_r$, такая, что

$$x_0 \in A_0, \ \ldots, \ x_r \in A_r \quad \text{и} \quad y = f(x_0) = \ldots = f(x_r).$$

Поскольку множества $A_0, \ldots, A_r$ не пересекаются, множество $f^{-1}(y) \cap A_i$ состоит не более чем из $k-r$ точек, и тем же свойством обладает множество

$$f^{-1}(y) \cap A_i \cap f^{-1}(B), \quad \text{т. е.} \quad f_i^{-1}(y)$$

почти по той же причине.

Аналогично, если $y \in f(C_i) = f(A_i) \cap f(\mathscr{X} - A_i)$, то y есть точка порядка $\leqslant k-1$ отображения $f \mid \mathscr{X} - A_i$ и, следовательно, отображения $f \mid C_i$.

Теорема 2[1]. (Гуревич.) *Если непрерывное отображение f порядка $\leqslant k$ $(k \geqslant 1)$ отображает компактное пространство $\mathscr{X}$, то*

$$\dim f(\mathscr{X}) \leqslant \dim \mathscr{X} + k - 1.$$

Более общо, *если $A_0, \ldots, A_r$ $(0 \leqslant r \leqslant k)$ — система непересекающихся замкнутых множеств, то*

$$\dim (f(A_0) \cap \ldots \cap f(A_r)) \leqslant \dim A_i + k - r - 1.$$

Доказательство. Первая часть теоремы будет доказана по индукции. Пусть $\dim \mathscr{X} = n$.

В случае, когда либо $n = -1$, либо $k = 1$, утверждение очевидно. Предположим, что оно имеет место для $n-1$, каково бы ни было значение k, и что оно также имеет место для пары n и $k_0 - 1$.

Пусть $y \in f(\mathscr{X})$ и S — открытый шар с центром в точке y. Мы хотим определить окрестность E точки y в $f(\mathscr{X})$, такую, что

$$E \subset S \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Fr}(E) \leqslant n + k_0 - 2.$$

По теореме 1 из § 27, II существует открытое множество G в n-мерном пространстве $\mathscr{X}$, такое, что

$$f^{-1}(y) \subset G, \quad \overline{G} \subset f^{-1}(S) \quad \text{и} \quad \dim(\overline{G} - G) \leqslant n - 1.$$

---

[1] См. Гуревич [1, стр. 164]. Ср. Нагами [1], Судзуки [1, стр. 201], Вайнштейн и Каждан [1], Вайнштейн [2, стр. 431] и [3, стр. 19].

Положим $E = f(\bar{G})$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}(E) = \mathrm{Fr}[f(\bar{G})] = f(\bar{G}) \cap \overline{f(\mathscr{X}) - f(\bar{G})} \subset \\ \subset f(\bar{G}) \cap \overline{f(\mathscr{X}) - f(G)} \subset f(\bar{G}) \cap \overline{f(\mathscr{X} - G)} = \\ = f(\bar{G}) \cap f(\mathscr{X} - G),\end{aligned}$$

потому что $f(\mathscr{X}) - f(G) \subset f(\mathscr{X} - G)$ (ср. § 3, III (3)).

Точка $y \in E$, так как $f^{-1}(y) \subset G$ и, следовательно, $y \in f(G) \subset E$. С другой стороны, $y \notin \mathrm{Fr}(E)$, поскольку

$$\mathscr{X} - G \subset \mathscr{X} - f^{-1}(y) = f^{-1}[f(\mathscr{X}) - y];$$

но тогда $f(\mathscr{X} - G) \subset f(\mathscr{X}) - y$, и поэтому $y \notin f(\mathscr{X} - G) \supset \mathrm{Fr}(E)$. Таким образом, E есть окрестность точки y. Наконец, мы получаем (ср. § 3, III (13))

$$\begin{aligned}f(\bar{G}) \cap f(\mathscr{X} - G) = f[\bar{G} \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)] = \\ = f[(\bar{G} - G) \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G) \cup G \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)] = \\ = f[(\bar{G} - G) \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)] \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} f[F_m \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)],\end{aligned}$$

представляя множество G в виде объединения

$$G = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \quad \text{где} \quad F_m = \bar{F}_m.$$

По предположению из неравенства $\dim(\bar{G} - G) \leqslant n - 1$ вытекает неравенство

$$\dim f[(\bar{G} - G) \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)] \leqslant n + k_0 - 2;$$

тот факт, что отображение f имеет порядок $\leqslant k_0 - 1$ на множестве $G \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)$ (по второй части леммы 1 при $A_l = \mathscr{X} - G$), влечет за собой неравенство

$$\dim f[F_m \cap f^{-1}f(\mathscr{X} - G)] \leqslant n + k_0 - 2.$$

По теореме сложения (§ 27, I теорема 1) из этого неравенства вытекает неравенство

$$\dim [f(\bar{G}) \cap f(\mathscr{X} - G)] \leqslant n + k_0 - 2,$$

и, следовательно,

$$\dim \mathrm{Fr}(E) \leqslant n + k_0 - 2.$$

Вторая часть теоремы 2 есть следствие первой ее части, так как, согласно лемме 1, (1) и (2), мы получаем

$$\dim B = \dim f\left[A_i \cap f^{-1}(B)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \dim\left[A_i \cap f^{-1}(B)\right] + k - r - 1 \leqslant \dim A_i + k - r - 1.$$

II. Параметрическое представление n-мерных совершенных компактных пространств на канторовом множестве $\mathscr{C}$ [1]). Согласно следствию 3а § 41, VI, каждое компактное пространство имеет параметрическое представление на множестве $\mathscr{C}$ (т. е. является непрерывным образом $\mathscr{C}$). Этот факт можно сформулировать более точно следующим образом:

Теорема 1. *Если совершенное подмножество P компактного пространства $\mathscr{X}$ n-мерно (или, более общо, P удовлетворяет условию* D_n *из* § 27, III), *то существует непрерывное отображение множества $\mathscr{C}$ на $\mathscr{X}$, такое, что каждая точка множества P имеет порядок $\leqslant n+1$.*

Кроме того, если Φ — множество функций f, таких, что $f \in \mathscr{X}^{\mathscr{C}}$ и $f(\mathscr{C}) = \mathscr{X}$, то подмножество Ψ множества Φ, состоящее из функций, имеющих точки порядка $> n+1$ в P, есть множество первой категории в Φ.

Доказательство. Так как Φ — непустое (§ 41, VI, следствие 3а) и замкнутое (§ 44, II, следствие 4) подмножество полного пространства $\mathscr{X}^{\mathscr{C}}$ (§ 44, VII, теорема 3), то достаточно доказать вторую часть теоремы 1, ибо по теореме Бэра подмножество первой категории не может заполнять полное пространство.

По определению Ψ каждой функции $f \in \Psi$ соответствуют положительное целое число l и система точек $x_0, \ldots, x_{n+1}$, такие, что

$$(1)\quad f(x_i) = f(x_j) \in P \quad \text{и} \quad |x_i - x_j| \geqslant 1/l \quad \text{при} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant n+1.$$

Пусть Ψ_l — множество функций f, для которых существует система точек $x_0, \ldots, x_{n+1}$, удовлетворяющих соотношению (1); тогда

$$\Psi = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Psi_l.$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что множество Ψ_l нигде не плотно в Φ.

---

[1]) См. Куратовский [27, стр. 285].

Так как Ψ_l замкнуто, то, как легко видеть [1]), наша задача — показать, что Ψ_l есть граничное множество, т. е. каждому элементу $f \in \Phi$ и каждому $\varepsilon > 0$ соответствует отображение f^*, такое, что

(2) $$f^* \in \Phi - \Psi_l$$

и

(3) $$|f - f^*| \leqslant \varepsilon.$$

Так как отображение f равномерно непрерывно на пространстве $\mathscr{C}$, последнее можно разбить на непересекающиеся замкнутые части таким образом, что

$$\mathscr{C} = C_0 \cup \ldots \cup C_m, \quad \delta[f(C_i)] < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \delta(C_i) < 1/l.$$

Пусть G_i — открытый шар с центром $f(C_i)$ радиуса $\varepsilon/4$. Тогда

(4) $$\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m, \quad f(C_i) \subset G_i \neq 0, \quad \delta(G_i) < \varepsilon.$$

Так как P — совершенное множество, то из условия D_n вытекает (ср. § 27, III, теорема 5(5)) существование системы замкнутых множеств H_i, таких, что

(5) $$\mathscr{X} = H_0 \cup \ldots \cup H_m, \; 0 \neq H_i \subset G_i, \; P \cap H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}} = 0$$

для любых различных индексов $i_0, \ldots, i_{n+1}$.

Пусть f^* — непрерывная функция, такая, что $f^*(C_i) = H_i$. Так как

$$f^*(\mathscr{C}) = f^*(C_0) \cup \ldots \cup f^*(C_m) = \mathscr{X},$$

то f^* принадлежит множеству Φ. Допустим в противоположность (2), что $f^* \in \Psi_l$. Пусть $x_0, \ldots, x_{n+1}$ — система точек, удовлетворяющих условию (1) (в котором f заменено на f^*). Так как $\delta(C_i) < 1/l$, то ни одно множество C_i не содержит двух различных точек, принадлежащих этой системе; поэтому существует система различных индексов $i_0, \ldots, i_{n+1}$, такая, что $x_j \in C_{i_j}$, $j = 0, \ldots, n+1$. Следовательно, $f^*(x_j) \in f^*(C_{i_j}) = H_{i_j}$, и так как $f^*(x_0) = f^*(x_j) \in P$ (ср. (1)), то

$$f^*(x_0) \in P \cap H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_{n+1}}$$

вопреки (5).

---

[1]) Например, определяя Ψ_l через логические символы:

$$(f \in \Psi_l) \equiv \bigvee_{x_0, \ldots, x_{n+1}} \bigwedge_{i,\, j} \{(0 \leqslant i < j \leqslant n+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\,|x_i - x_j| \geqslant 1/l]\,[f(x_i) = f(x_j) \in P]\}.$$

Таким образом, условие (2) доказано этим противоречием. Отсюда получаем неравенство (3). Действительно, на основании (4) и (5) имеем

$$f(x)\in f(C_i)\subset G_i \quad \text{и} \quad f^*(x)\in H_i\subset G_i$$

для любого $x\in C_i$ и, следовательно, согласно (4),

$$|f(x)-f^*(x)|\leqslant\delta(G_i)<\varepsilon.$$

Из теоремы 1 вытекают следующие три теоремы:

Теорема 2. *Совершенное компактное пространство имеет размерность $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда оно имеет параметрическое представление порядка $\leqslant n+1$ на множестве $\mathscr{C}$.*

Это вытекает из предыдущей теоремы (если мы положим $\mathscr{X}=P$) и теоремы 2 п. I.

Теорема 3. *Для компактного*[1]) *пространства $\mathscr{X}$ условие* D_n *эквивалентно неравенству* $\dim\mathscr{X}\leqslant n$.

Доказательство. Принимая во внимание теорему 4 из § 27, III, достаточно показать, что из условия D_n вытекает неравенство $\dim\mathscr{X}<n$.

Пусть $\mathscr{X}_0$ — совершенное подмножество пространства $\mathscr{X}$, такое, что множество $\mathscr{X}-\mathscr{X}_0$ счетно (теорема Кантора — Бендиксона, § 23, V). Так как открытое множество $\mathscr{X}-\mathscr{X}_0$ имеет размерность $\leqslant 0$, то мы получаем (ср. § 27, I, теорема 1) $\dim\mathscr{X}=\dim\mathscr{X}_0$ (за исключением случая, когда $\mathscr{X}_0=0$, который можно опустить, так как при этом $\dim\mathscr{X}\leqslant 0$). Следовательно, остается только показать, что $\dim\mathscr{X}_0\leqslant n$, или, согласно теоремам 1 и 2 п. I, что $\mathscr{X}_0$ удовлетворяет условию D_n. Пусть

$$\mathscr{X}_0=A_1\cup\ldots\cup A_m \tag{6}$$

— разбиение на множества, которые открыты в $\mathscr{X}_0$. Пусть G_i — открытое множество в $\mathscr{X}$, такое, что $A_i=G_i\cap\mathscr{X}_0$, где $i=1,\ldots,m$, и пусть $G_0=\mathscr{X}-\mathscr{X}_0$; тогда

$$\mathscr{X}=G_0\cup\ldots\cup G_m.$$

Поэтому из свойства D_n пространства $\mathscr{X}$ вытекает существование системы открытых множеств $H_0,\ldots,H_m$, такой, что

$$\mathscr{X}=H_0\cup\ldots\cup H_m,\quad H_i\subset G_i \quad \text{и} \quad H_{i_0}\cap\ldots\cap H_{i_{n+1}}=0.$$

Полагая $B_i=H_i\cap\mathscr{X}_0$, мы получаем $B_0=0$ и

$$\mathscr{X}_0=B_1\cup\ldots\cup B_m,\quad B_i\subset A_i,\quad B_{i_0}\cap\ldots\cap B_{i_{n+1}}=0.$$

[1]) Случай произвольного пространства см. в п. VII, следствие 3.

Эти соотношения вместе с (6) показывают, что $\mathscr{X}_0$ удовлетворяет условию D_n.

Теорема 4. *Пусть $P_1, P_2, \ldots$ — последовательность совершенных множеств в компактном пространстве $\mathscr{X}$. Тогда существует непрерывное отображение множества $\mathscr{C}$ на $\mathscr{X}$, такое, что каждая точка множества $P_i (i = 1, 2, \ldots)$ имеет порядок $\leqslant \dim P_i + 1$.*

Доказательство. Пусть Φ имеет тот же смысл, что и в теореме 1, и пусть Ψ — множество функций $f \in \Phi$, не удовлетворяющих условиям теоремы 4. Мы имеем $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_2 \cup \ldots$, где Ψ_i — множество функций $f \in \Phi$, обладающих точками порядка $> \dim P_i + 1$ на множестве P_i.

Так как Ψ_i — множество первой категории в Φ (согласно теореме 1), то же самое верно для Ψ. Поэтому $\Phi - \Psi \neq 0$.

Перейдем к рассмотрению параметрического представления замкнутых множеств (не обязательно совершенных).

Лемма 5. *Всякое замкнутое подмножество F совершенного компактного пространства $\mathscr{X}$ содержится в совершенном множестве P, таком, что $\dim P = \dim F$.*

Следовательно (*если подставить вместо $\mathscr{X}$ гильбертов куб $\mathscr{J}^{\aleph_0}$*), *отсюда вытекает, что всякое компактное пространство топологически содержится в совершенном компактном пространстве той же размерности.*

Доказательство. Если $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность изолированных точек в F и P_i — совершенное множество, такое, что $p_i \in P_i$, $\delta(P_i) < 1/i$ и $\dim P_i = 0$, то множество

$$P = F \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots$$

совершенно и $\dim P = \dim F$ по теореме сложения (§ 27, I, теорема 2).

Теорема 6. *Всякое n-мерное компактное пространство имеет параметрическое представление порядка $n + 1$ на нульмерном компактном пространстве*[1]).

Более общо, *теорема 4 остается верной, если отбросить предположение, что множества P_i совершенны (но сохранить предположение, что множества P_i замкнуты), а множество $\mathscr{C}$ заменить нульмерным компактным пространством $\mathscr{C}_0$, выбранным надлежащим образом.*

---

[1]) См. обобщение у Робертса [2, стр. 565].

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathscr{X}$ как подмножество пространства $\mathscr{I}^{\aleph_0}$, и пусть P_i^* — совершенное множество (в $\mathscr{I}^{\aleph_0}$), такое, что

$$P_i \subset P_i^* \quad \text{и} \quad \dim P_i = \dim P_i^*.$$

Пусть f в соответствии с теоремой 4 есть непрерывное отображение $\mathscr{C}$ на $\mathscr{I}^{\aleph_0}$, такое, что каждая точка множества P_i^* имеет порядок $\leqslant \dim P_i^* + 1$. Положим $\mathscr{C}_0 = f^{-1}(\mathscr{X})$; тогда $f|\mathscr{C}_0$ — требуемое отображение $\mathscr{C}_0$ на $\mathscr{X}$.

Теорема 7. *Если G есть n-мерное открытое подмножество компактного пространства $\mathscr{X}$, то существует нульмерное компактное пространство $\mathscr{C}_0$ и непрерывное отображение f пространства $\mathscr{C}_0$ на $\mathscr{X}$, такое, что каждая точка множества G имеет порядок $\leqslant n+1$.*

Доказательство. Если $P_1, P_2, \ldots$ — последовательность замкнутых множеств, такая, что $G = P_1 \cup P_2 \cup \ldots$, то остается только применить вторую часть теоремы 6.

Замечания. При $n=0$ из теоремы 2 следует, что всякое нульмерное совершенное пространство гомеоморфно канторову множеству $\mathscr{C}$. Все эти пространства имеют один и тот же топологический тип и обладают всеми топологическими свойствами пространства $\mathscr{C}$ (например, свойством однородности).

Для счетных компактных пространств $\mathscr{X}$ справедлива следующая

Теорема Мазуркевича — Серпинского[1]. *Если $\mathscr{X}^{(\alpha)}$ есть последняя производная* (ср. § 24, IV) *пространства $\mathscr{X}$ и n есть число элементов в $\mathscr{X}^{(\alpha)}$, то пространство $\mathscr{X}$ гомеоморфно вполне упорядоченному подмножеству сегмента типа* $\omega^\alpha \cdot n + 1$.

Следовательно, топологический тип счетного компактного пространства *характеризуется* парой (α, n). Отсюда вытекает, что счетные компактные пространства могут быть расположены по $\aleph_1$ топологическим типам.

Однако существуют $\mathfrak{c}$ различных топологических типов *разреженных* пространств, которые являются метрическими сепарабельными, но не обязательно компактными[2]).

III. Теоремы о разбиении. Тот факт, что всякое n-мерное пространство удовлетворяет условию D_n, является весьма частным случаем следующей теоремы:

[1]) См. Мазуркевич и Серпинский [1, стр. 21].
[2]) Мазуркевич и Серпинский [1].

Теорема 1[1]. *Пусть задана последовательность замкнутых множеств $P_1, P_2, \ldots$ в компактном*[2] *пространстве $\mathscr{X}$. Тогда всякому разбиению на открытые множества $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ соответствует разбиение на замкнутые множества*

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_m, \quad \textit{где} \quad F_i \subset G_i$$

и

$$\dim(P_j \cap F_{i_0} \cap \ldots \cap F_{i_r}) \leqslant \dim P_j - r$$

для любых целых чисел $j = 1, 2, \ldots, r \leqslant \dim P_j + 1$ и $i_0 < \ldots < i_r \leqslant m$.

Доказательство. Согласно теореме 6 п. II, существуют нульмерное компактное пространство $\mathscr{C}_0$ и непрерывное отображение f, такие, что $f(\mathscr{C}_0) = \mathscr{X}$ и каждая точка множества P_j имеет порядок $\leqslant \dim P_j + 1$. Так как множества $f^{-1}(G_i)$ открыты, то из разбиения

$$\mathscr{C}_0 = f^{-1}(G_0) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_m)$$

следует существование системы непересекающихся открыто-замкнутых множеств A_i, таких, что

$$\mathscr{C}_0 = A_0 \cup \ldots \cup A_m \quad \text{и} \quad A_i \subset f^{-1}(G_i).$$

Положим $F_i = f(A_i)$. Тогда

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_m \quad \text{и} \quad F_i \subset G_i.$$

Наконец, положим $Q_j = f^{-1}(P_j)$; тогда сужение $f \mid Q_j$ имеет порядок $\leqslant \dim P_j + 1$; отсюда по теореме 2 п. I (при $k = \dim P_j + 1$) и по условию $\dim A_i = 0$ получаем неравенство

$$\dim [f(A_{i_0} \cap Q_j) \cap \ldots \cap f(A_{i_r} \cap Q_j)] \leqslant \dim P_j - r.$$

Но это неравенство завершает доказательство теоремы, так как (ср. § 3, III (13))

$$f[A_i \cap f^{-1}(P_j)] = f(A_i) \cap P_j = F_i \cap P_j.$$

Следствие[3]. *Всякое компактное n-мерное пространство для любого $\varepsilon > 0$ можно разбить на конечное число замкнутых множеств, таких, что диаметр каждого из них $< \varepsilon$ и любое*

---

[1]) См. Куратовский [27, стр. 290]. Частный случай (когда последовательность $P_1, P_2, \ldots$ конечная) см. у Менгера [1, стр. 170].

[2]) От предположения компактности можно освободиться, как будет показано в п. VII (теорема 5).

[3]) См. Менгер [1, стр. 156].

пересечение r множеств имеет размерность $\leqslant n-r+1$ $(r=1, 2, \ldots, n+2)$.

Доказательство. Достаточно положить

$$\mathscr{X}=P_1=P_2=\ldots \quad \text{и} \quad \delta(G_i)<\varepsilon.$$

Замечания. Это следствие более просто выводится из первой части теоремы 6 п. II. Пусть $\mathscr{C}_0$ — нульмерное пространство и f — требуемая функция. Разобьем $\mathscr{C}_0$ на достаточно малые непересекающиеся замкнутые множества $A_0, \ldots, A_m$ так, что $\delta[f(A_i)]<\varepsilon$; тогда требуемое разбиение имеет вид

$$\mathscr{X}=f(A_0)\cup \ldots \cup f(A_m).$$

Кроме того, если вместо числа ε рассматривать сходящуюся к 0 последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то получится последовательность разбиений, удовлетворяющих условиям следствия и таких, что $(i+1)$-е разбиение есть подразделение i-го разбиения. Для этого необходимо только подразделить множества $A_0, \ldots, A_m$.

IV. *n*-мерная степень. n-мерная степень пространства $\mathscr{X}$ (обозначается $d_n(\mathscr{X})$) определяется[1]) как точная нижняя грань таких чисел ε, что существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющих условиям

(1) $$\mathscr{X}=G_0\cup \ldots \cup G_m,$$
(2) $$\delta(G_i)<\varepsilon,$$
(3) $$G_{i_0}\cap \ldots \cap G_{i_n}=0 \quad \text{для} \quad i_0<\ldots<i_n\leqslant m.$$

Другими словами, *неравенство* $d_n(\mathscr{X})<\varepsilon$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует система открытых множеств, удовлетворяющих условиям* (1) — (3).

В частности, неравенство $d_1(\mathscr{X})<\varepsilon$ означает, что пространство $\mathscr{X}$ можно разбить на конечное число непересекающихся открыто-замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$.

Условие (3) можно заменить следующим условием:

(4) $$\overline{G}_{i_0}\cap \ldots \cap \overline{G}_{i_n}=0 \quad \text{для} \quad i_0<\ldots<i_n\leqslant m.$$

Можно также брать множества G_i замкнутыми вместо открытых (см. § 14, III).

Теорема 1. *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то условие* $d_{n+1}(\mathscr{X})=0$ *эквивалентно условию* D_n *и, следовательно, условию* $\dim\mathscr{X}\leqslant n$ (ср. II, теорема 3).

---

[1]) Ср. с поперечником Урысона [5, стр. 353].

Доказательство. Применяя условие D_n к покрытию пространства $\mathscr{X}$ открытыми множествами диаметра $<\varepsilon$, получаем $d_{n+1}(\mathscr{X})=0$.

С другой стороны, пусть $\mathscr{X}=A_0\cup\ldots\cup A_m$ — разбиение на открытые множества. Согласно следствию 4d, § 41, VI, существует число $\varepsilon>0$, такое, что всякое множество диаметра $<\varepsilon$ содержится по крайней мере в одном из множеств A_i. Предположим, что $d_{n+1}(\mathscr{X})=0$, и рассмотрим множества $G_0, \ldots, G_m$, которые удовлетворяют условиям (1) — (3), где n заменено на $(n+1)$. Пусть I_i — множество индексов j, таких, что $G_j\subset A_i$, и пусть H_0 — объединение всех G_j, таких, что $j\in I_0$, и, вообще, пусть H_{i+1} — объединение всех G_j, таких, что $j\in I_{i+1}-(I_0\cup\ldots\cup I_i)$. Из этого следует, что

$$\mathscr{X}=H_0\cup\ldots\cup H_m,\quad H_i\subset A_i \quad \text{и} \quad H_{i_0}\cap\ldots\cap H_{i_{n+1}}=0,$$

а это показывает, что $\mathscr{X}$ удовлетворяет условию D_n.

Если E — подмножество пространства $\mathscr{X}$, то условие $d_n(E)<\varepsilon$ означает, что существует система множеств $A_0, \ldots, A_m$, открытых в E и удовлетворяющих условиям

$$E=A_0\cup\ldots\cup A_m,\quad \delta(A_i)<\varepsilon \quad \text{и} \quad A_{i_0}\cap\ldots\cap A_{i_n}=0.$$

Пусть $G_0, \ldots, G_m$ — система открытых множеств, подобная системе $A_0, \ldots, A_m$ и такая, что $A_i=E\cap G_i$ и $\delta(G_i)<\varepsilon$ (ср. § 21, XI, теорема 2); тогда *условие* $d_n(E)<\varepsilon$ *эквивалентно существованию открытых множеств* $G_0, \ldots, G_m$, *удовлетворяющих условиям* (2) *и* (3), *а также включению* $E\subset G_0\cup\ldots\cup G_m$. Кроме того, условие (3) можно заменить условием (4).

Замечание. Предположение компактности пространства $\mathscr{X}$ не может быть опущено. В самом деле, *существует множество* $A\subset\mathscr{E}^3$ *размерности* 2, *такое, что для каждого* $\varepsilon>0$ *найдется непрерывное отображение множества* A *в одномерный полиэдр, при котором образ каждой точки имеет диаметр* $<\varepsilon$. Таким образом, $d_2(A)=0$. Более того, A является G_δ-множеством (см. Ситников [2, 4]).

Теорема 2. *Предположим, что пространство* $\mathscr{X}$ *компактно. Тогда семейство всех замкнутых множеств* F, *таких, что* $d_n(F)<\varepsilon$, *открыто в пространстве* $2^{\mathscr{X}}$ *для каждого* $\varepsilon>0$.

Иными словами, *функция* $d_n(F)$ *полунепрерывна сверху в пространстве* $2^{\mathscr{X}}$.

Доказательство. Если Γ — система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), то семейство

$$\Phi_\Gamma=\mathop{\mathsf{E}}_{F}(F\subset G_0\cup\ldots\cup G_m)$$

открыто в $2^{\mathcal{X}}$ (ср. § 17, II, теорема 1). То же самое верно для семейства

$$\underset{F}{\mathsf{E}}\,[d_n(F)<\varepsilon]=\bigcup_{\Gamma}\Phi_\Gamma.$$

Теорему 2 можно обобщить следующим образом:

Теорема 2′. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то множество*

$$\underset{F_1,\ldots,F_k}{\mathsf{E}}\,[d_n(F_1\cap\ldots\cap F_k)<\varepsilon]$$

открыто в пространстве $(2^{\mathcal{X}})^k$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения достаточно положить

$$\Phi_\Gamma=\underset{F_1,\ldots,F_k}{\mathsf{E}}\,(F_1\cap\ldots\cap F_k\subset G_0\cup\ldots\cup G_m)$$

и применить теорему 1 из § 17, V вместо теоремы 1 из § 17, II. Отсюда вытекает, что множество Φ_Γ открыто в пространстве $(2^{\mathcal{X}})^k$.

Теорема 3. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то существует множество $F\in 2^{\mathcal{X}}$, такое, что $d_n(F)=d_n(\mathcal{X})$ и из условий $X\in 2^{\mathcal{X}}$ и $X\subset F\neq X$ следует, что $d_n(X)<d_n(F)$; это означает, что множество F неприводимо по отношению к своей n-мерной степени.*

Доказательство. Так как множество $\underset{F}{\mathsf{E}}\,[d_n(F)\geqslant d_n(\mathcal{X})]$ замкнуто, то оно содержит неприводимый элемент (согласно теореме 2 из § 42, IV).

Теорема 4. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то $\underset{F}{\mathsf{E}}\,(\dim F\leqslant n)$ есть G_δ-множество в пространстве $2^{\mathcal{X}}$. Следовательно, функция $\dim F$ есть функция второго класса на пространстве $2^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из соотношения

$$\underset{F}{\mathsf{E}}\,(\dim F\leqslant n)=\underset{F}{\mathsf{E}}\,[d_{n+1}(F)=0]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\underset{F}{\mathsf{E}}\,[d_{n+1}(F)<1/k]$$

и из того, что множество $\underset{F}{\mathsf{E}}\left[d_{n+1}(F)<\frac{1}{k}\right]$ по теореме 2 открыто.

Множество $\underset{F}{\mathsf{E}}\,(m\leqslant\dim F\leqslant n)$ есть разность двух G_δ-множеств. Следовательно, оно есть $F_{\sigma\delta}$-множество, и поэтому размерность замкнутого множества F, рассматриваемая как функция от F, есть функция второго класса Бэра.

Применение теоремы 2′ вместо теоремы 2 дает следующую теорему.

Теорема 4′. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то множество*

$$\mathop{\mathsf{E}}_{F_1, \ldots, F_k} [\dim (F_1 \cap \ldots \cap F_k) \leqslant n]$$

есть G_δ-множество в пространстве $(2^{\mathcal{X}})^k$.

Замечания. (i) *Функция* $\dim F$ *есть предел возрастающей последовательности полунепрерывных сверху функций* $\Delta_k(F)$.

Доказательство. Пусть $\Delta_k(F)$ обозначает наименьшее целое число $n \geqslant -1$, такое, что существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющая условиям

$$F \subset G_0 \cup \ldots \cup G_m, \qquad \delta(G_i) < \frac{1}{k} \qquad \text{и} \qquad G_{i_0} \cap \ldots \cap G_{i_{n+1}} = 0$$

для любого множества индексов $i_0 < \ldots < i_{n+1} \leqslant m$.

Таким образом, условие $\Delta_k(F) \leqslant n$ эквивалентно условию $d_{n+1}(F) < 1/k$. Следовательно, по теореме 2 функция $\Delta_k(F)$ полунепрерывна сверху. Положим $\dim F = n$; тогда $\Delta_k(F) > n-1$ для достаточно больших значений k, так как в этом случае $d_n(F) \geqslant 1/k$. С другой стороны, из условия D_n вытекает неравенство $\Delta_k(F) \leqslant n$, а из этого следует, что

$$n = \dim F = \lim_{k \to \infty} \Delta_k(F).$$

(ii) *Множество* $\mathop{\mathsf{E}}_F (\dim F \leqslant n)$ *не обязательно типа* F_σ *и, следовательно, функция* $\dim F$ *не обязательно первого класса.*

Например, если $\mathcal{X} = \mathcal{J}$, то семейства F_0 и F_1, состоящие из 0-мерных и 1-мерных множеств F соответственно, всюду плотны в пространстве $2^{\mathcal{X}}$. Поэтому F_0 не может быть F_σ-множеством, согласно теореме Бэра (§ 34, IV).

(iii) *Если $\mathcal{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, то функция* $f(p) = \dim_p \mathcal{X}$ *является функцией второго класса.*

Доказательство. В самом деле, согласно теореме 2 из § 25, III, множество $\mathop{\mathsf{E}}_p (\dim_p \mathcal{X} \leqslant n)$ является G_δ-множеством (которое не обязано быть F_σ-множеством).

Теорема 5. *Если пространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ компактны, то множество*

$$\mathop{\mathsf{E}}_f \bigwedge_y \{d_n [f^{-1}(y)] < \varepsilon\}$$

открыто в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Множество $\mathop{\mathsf{E}}_{f}\bigwedge_{y}\{\dim[f^{-1}(y)]\leqslant n\}$ *есть* G_δ*-множество.*

Доказательство. Пусть $\Phi_y=\mathop{\mathsf{E}}_{f}\{d_n[f^{-1}(y)]<\varepsilon\}$. Включение $f\in\Phi_y$ означает, что существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющих условиям (2), (3) и включению $f^{-1}(y)\subset G_0\cup\ldots\cup G_m$. Так как множество пар (f, y), удовлетворяющих этому включению, открыто (§ 44, II, следствие 6), то открыто и множество $\mathop{\mathsf{E}}_{f,\,y}[f\in\Phi_y]$, а также множество $\mathop{\mathsf{E}}_{f}\bigwedge_{y}(f\in\Phi_y)$ (ср. § 41, IV, следствие 1b).

Наконец,

$$\begin{aligned}\bigwedge_y\{\dim[f^{-1}(y)\leqslant n]\}&\equiv\bigwedge_y\{d_{n+1}[f^{-1}(y)]=0\}\equiv\\&\equiv\bigwedge_y\bigwedge_k\left\{d_{n+1}[f^{-1}(y)]<\frac{1}{k}\right\}\equiv\\&\equiv\bigwedge_k\bigwedge_y\left\{d_{n+1}[f^{-1}(y)]<\frac{1}{k}\right\},\end{aligned}$$

что доказывает вторую часть теоремы.

Теорема 6. *Пусть A и B — компактные множества; тогда из неравенств $d_n(A)<\varepsilon$, $d_n(B)<\varepsilon$ и $\dim(A\cap B)\leqslant n-2$ следует неравенство $d_n(A\cup B)<\varepsilon$.*

Доказательство. По предположению существуют две системы открытых множеств $A_0, \ldots, A_l$ и $B_0, \ldots, B_m$, такие, что

$$\begin{aligned}&A\subset A_0\cup\ldots\cup A_l, &&\delta(A_i)<\varepsilon, &&A_{i_0}\cap\ldots\cap A_{i_n}=0,\\&B\subset B_0\cup\ldots\cup B_m, &&\delta(B_j)<\varepsilon, &&B_{j_0}\cap\ldots\cap B_{j_n}=0.\end{aligned}$$

Используя теорему III, 1 в случае, когда $\mathcal{X}=A$ и $P_1=P_2=\ldots=A\cap B$, получаем, что существует такая система замкнутых множеств $A_0^*, \ldots, A_l^*$, что

$$A=A_0^*\cup\ldots\cup A_l^*,\qquad A_i^*\subset A_i$$

и

$$\dim\left(B\cap A_{i_0}^*\cap\ldots\cap A_{i_r}^*\right)\leqslant n-r-2$$

для любого $r\leqslant n-1$.

Эта же теорема, примененная к случаю $\mathcal{X}=B$, влечет за собой существование системы замкнутых множеств $B_0^*, \ldots, B_m^*$, такой, что

$$B=B_0^*\cup\ldots\cup B_m^*,\qquad B_j^*\subset B_j$$

$$\text{и } A_{i_0}^*\cap\ldots\cap A_{i_r}^*\cap B_{j_0}^*\cap\ldots\cap B_{j_{n-r-1}}^*=0$$

(где множества $B \cap A^*_{i_0} \cap \ldots \cap A^*_{i_r}$ играют роль P_l и где $0 \leqslant \leqslant r \leqslant n-1$).

Таким образом, получается разбиение

$$A \cup B = A^*_0 \cup \ldots \cup A^*_l \cup B^*_0 \cup \ldots \cup B^*_m$$

на замкнутые множества диаметра $<\varepsilon$, такие, что не существует точки, общей для $(n+1)$ из этих множеств. Следовательно, $d_n(A \cup B) < \varepsilon$.

Замечание. Условие $\dim(A \cap B) \leqslant n-2$ нельзя заменить условием $d_{n-1}(A \cap B) \leqslant \varepsilon$.

Теорема 7 [1]). *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то $d_n(\mathscr{X})$ есть точная нижняя грань чисел ε, для которых существует непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$, такое, что*

(i) $\dim f(\mathscr{X}) \leqslant n-1$,

(ii) $\delta[f^{-1}(y)] < \varepsilon$ *для любого* $y \in f(\mathscr{X})$.

Более точно, *если* $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$, *то существует непрерывное отображение* f, *удовлетворяющее условию* (ii), *пространства* $\mathscr{X}$ *в* $(n-1)$*-мерный полиэдр; с другой стороны, если* f — *непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям* (i) *и* (ii), *то* $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$ *для компактного пространства* $\mathscr{X}$.

Доказательство. Предположим, что $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$. Тогда существует система открытых множеств $G_0, \ldots, G_m$, удовлетворяющих условиям (1)—(3). Пусть $p_0 \ldots p_m$ есть m-мерный симплекс. Отображение

$$f(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0 + \ldots + \lambda_m(x) \cdot p_m,$$

где

$$\lambda_l(x) = \frac{\rho(x, \mathscr{X} - G_l)}{\rho(x, \mathscr{X} - G_0) + \ldots + \rho(x, \mathscr{X} - G_m)}$$

(т. е. отображение $\varkappa$, ассоциированное с системами $p_0, \ldots, p_m$ и $G_0, \ldots, G_m$), является требуемым отображением (ср. § 28, VI, теорема 4).

С другой стороны, пусть f — отображение, удовлетворяющее условиям (i) и (ii). Так как множество $f(\mathscr{X})$ компактно, то, согласно (ii), существует (ср. § 41, VI, лемма) число $\eta > 0$, такое, что из соотношений $f(\mathscr{X}) = H_0 \cup \ldots \cup H_m$ и $\delta(H_l) < \eta$ вытекает $\delta[f^{-1}(H_l)] < \varepsilon$.

[1]) Ср. Александров [2, стр. 640], а также Куратовский и Улам [1, стр. 246].

Согласно условию (i), можно считать, что множества H_i открыты и $H_{i_0} \cap \ldots \cap H_{i_n} = 0$. Если мы положим $G_i = f^{-1}(H_i)$, то будут удовлетворяться условия (1)—(3); следовательно, $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$.

Следствие 8. *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то*

1) *соотношение* $\dim \mathscr{X} \geqslant n$ *есть инвариант отображений с малыми прообразами точек*[1]), *а именно прообразами точек диаметра* $< d_n(\mathscr{X})$;

2) *в случае, когда*[2]) $\mathscr{X} \subset \mathscr{E}^{\aleph_0}$, *условие* $\dim \mathscr{X} \leqslant n$ *эквивалентно существованию для каждого* $\varepsilon > 0$ ε*-сдвига пространства* $\mathscr{X}$ *в* n*-мерный полиэдр*[3]);

3) *степень* $d_n(\mathscr{X})$ *есть точная нижняя грань чисел* $\tau(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$[4]), *где* $\mathscr{Y}$ *пробегает множество всех компактных пространств размерности* $< n$.

Используя следующую теорему, коэффициент d_n можно определить с помощью d_1.

Теорема 9[5]). *Для компактного пространства $\mathscr{X}$ степень $d_n(\mathscr{X})$ есть точная нижняя грань чисел ε, таких, что существует система замкнутых множеств $A_1, \ldots, A_n$, обладающих следующими свойствами:*

$$(+) \quad \mathscr{X} = A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad и \quad d_1(A_i) < \varepsilon \quad для \quad i = 1, \ldots, n.$$

Более точно, *условие $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$ эквивалентно существованию разбиения такого вида.*

Доказательство. Пусть сначала $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$. Воспользуемся индукцией. При $n = 1$ существование требуемого разбиения очевидно. Покажем, что такое разбиение существует для числа n при условии, что оно существует для числа $n-1$.

Так как $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$, то существует система замкнутых множеств $F_0, \ldots, F_m$, такая, что

$$\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_m, \quad F_{i_0} \cap \ldots \cap F_{i_n} = 0, \quad \delta(F_i) < \varepsilon.$$

Пусть F — объединение всех пересечений из n множеств, принадлежащих этой системе. Так как эти пересечения попарно не пересекаются, то $d_1(F) < \varepsilon$. В соответствии с теоремой 2 пусть S — открытый шар с центром F достаточно малого радиуса, такого, что $d_1(\bar{S}) < \varepsilon$. Из условий

$$\mathscr{X} - S = (F_0 - S) \cup \ldots \cup (F_m - S), \quad \delta(F_i - S) < \varepsilon$$

---

[1]) Определение см. § 41, VII. Следствие 8, 1) принадлежит Брауэру.

[2]) Стоит заметить, что, согласно недавнему результату Андерсона [2], *пространство $\mathscr{E}^{\aleph_0}$ гомеоморфно гильбертову пространству.*

[3]) Ср. § 28, VI, замечание 1

[4]) Ср. § 41, VII.

[5]) Теорема Эйленберга [8, стр 147].

и

$$F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} - S \subset F - S = 0$$

вытекает, что

$$d_{n-1}(\mathscr{X} - S) < \varepsilon.$$

Таким образом, согласно предположению,

$$\mathscr{X} - S = A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \overline{A}_i = A_i, \quad d_1(A_i) < \varepsilon \quad \text{для} \quad i = 2, \ldots, n.$$

Полагая $A_1 = \overline{S}$, получаем разбиение (+).

Обратно, предположим, что система замкнутых множеств $A_1, \ldots, A_n$ удовлетворяет условию (+).

Итак, для каждого i существует разбиение множества A_i на замкнутые непересекающиеся множества

$$A_i = A_1^i \cup \ldots \cup A_{k_i}^i, \quad \text{где} \quad \delta(A_j^i) < \varepsilon \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, k_i.$$

Таким образом, $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{i,j} A_j^i$ есть разбиение пространства $\mathscr{X}$ на замкнутые множества, никакие $(n+1)$ из которых не имеют общей точки. Следовательно, $d_n(\mathscr{X}) < \varepsilon$.

Из теорем 1 и 9 вытекает такое следствие:

Теорема 10. *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то* $\dim \mathscr{X} < n$ *тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует система замкнутых множеств $A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющая условию* (+).

V. Размерностное ядро компактного пространства. Множество N называется *размерностным ядром* (ср. § 27, V) n-мерного пространства $\mathscr{X}$, если N есть множество всех точек p, таких, что $\dim_p \mathscr{X} = n$. В общем случае размерностное ядро метрического сепарабельного пространства имеет размерность $\geqslant n-1$, но не обязано быть n-мерным (именно, если пространство слабо n-мерно; ср. § 27, VI). Однако если пространство компактно, то имеет место следующая теорема Менгера[1]):

Теорема. *Размерностное ядро N компактного n-мерного пространства $\mathscr{X}$ является n-мерным в каждой из своих точек. Таким образом*, $\dim N = n$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $p \in N$ и $\dim_p N < n$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует открытое множество G, такое, что

(1) $\quad p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad$ и $\quad \dim[N \cap \mathrm{Fr}(G)] \leqslant n-2.$

[1]) Менгер [5, стр. 138].

В соответствии с § 27, IV пусть P есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество, такое, что

(2) $$N \cap \operatorname{Fr}(G) \subset P \quad \text{и} \quad \dim P \leqslant n-2.$$

Из включения (2) вытекает, что $N \cap [\operatorname{Fr}(G) - P] = 0$. Поэтому

(3) $$\dim_x \mathcal{X} \leqslant n-1 \quad \text{для} \quad x \in [\operatorname{Fr}(G) - P].$$

Следовательно, существует семейство открытых множеств, таких, что каждой точке $x \in [\operatorname{Fr}(G) - P]$ и каждому положительному числу k соответствует множество H этого семейства, удовлетворяющее следующим условиям:

(4) $$x \in H, \quad \delta(H) < \varepsilon/k \quad \text{и} \quad \dim \operatorname{Fr}(H) \leqslant n-2.$$

Так как P есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество, то множество $\operatorname{Fr}(G) - P$ есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество. Следовательно, в указанном семействе можно выбрать последовательность $H_1, H_2, \ldots$, такую, что (ср. § 41, II, следствие 5)

(5) $$\overline{\bigcup_m H_m} \subset \bigcup_m \overline{H}_n \cup \operatorname{Fr}(G) \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr}(G) - P \subset \bigcup_m H_m;$$

отсюда

$$\operatorname{Fr}(G) - \bigcup_m H_m \subset P,$$

следовательно,

(6) $$\dim \left[\operatorname{Fr}(G) - \bigcup_m H_m\right] \leqslant n-2,$$

согласно (2). Положим

(7) $$Q = G \cup \bigcup_m H_m.$$

Тогда из (1) и (4) следует, что $p \in Q$ и $\delta(Q) \leqslant 2\varepsilon$. Мы покажем, что

$$\dim \operatorname{Fr}(Q) \leqslant n-2,$$

откуда получится требуемое противоречие, так как, согласно предположению, $p \in N$ и, следовательно, $\dim_p \mathcal{X} = n$.

Из (5) следует, что

$$\operatorname{Fr}(Q) = \overline{Q} - Q = (\overline{G} - Q) \cup \left(\overline{\bigcup_m H_m} - Q\right) \subset$$
$$\subset \left(\overline{G} - G - \bigcup_m H_m\right) \cup \left\{\left[\bigcup_m \overline{H}_m \cup \operatorname{Fr}(G)\right] - G - \bigcup_m H_m\right\} \subset$$
$$\subset \left[\operatorname{Fr}(G) - \bigcup_m H_m\right] \cup \bigcup_m \operatorname{Fr}(H_m),$$

поскольку

$$\bigcup_m \overline{H}_m - \bigcup_m H_m \subset \bigcup_m (\overline{H}_m - H_m) = \bigcup_m \operatorname{Fr}(H_m).$$

Наконец, согласно (6) и (4) (ср. § 22, I, теорема 2),

$$\dim \operatorname{Fr}(Q) \leqslant \dim \left\{ \left[\operatorname{Fr}(G) - \bigcup_m H_m \right] \cup \bigcup_m \operatorname{Fr}(H_m) \right\} \leqslant n-2.$$

VI. Отображения с k-мерными прообразами точек.

Теорема 1[1]. *Пусть f — непрерывное отображение компактного пространства $\mathscr{X}$. Если для всех $y \in f(\mathscr{X})$ удовлетворяется условие $\dim f^{-1}(y) \leqslant k$, то*

$$\dim f(\mathscr{X}) \geqslant \dim \mathscr{X} - k.$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathscr{X} = n$ и $\dim f(\mathscr{X}) = m$. Мы покажем, что

$$m \geqslant n - k.$$

Очевидно, теорема верна для $m = -1$; следовательно, можно предположить, что она имеет место для числа $m-1$. Так как $d_n(\mathscr{X}) \neq 0$, то можно также предположить (ср. IV, теорема 3), что пространство $\mathscr{X}$ неприводимо по отношению к своей n-мерной степени. Пусть A_1 и A_2 — два замкнутых множества, таких, что

$$f(\mathscr{X}) = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \neq f(\mathscr{X}) \neq A_2 \quad \text{и} \quad \dim(A_1 \cap A_2) \leqslant m-1.$$

Из среднего неравенства следует, что

$$f^{-1}(A_1) \neq \mathscr{X} \neq f^{-1}(A_2),$$

откуда

$$d_n[f^{-1}(A_1)] < d_n(\mathscr{X}) \quad \text{и} \quad d_n[f^{-1}(A_2)] < d_n(\mathscr{X}).$$

Так как $\mathscr{X} = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$, то, согласно теореме 6 п. IV,

$$\dim[f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2)] \geqslant n-1, \quad \text{т. е.} \quad \dim f^{-1}(A_1 \cap A_2) \geqslant n-1.$$

С другой стороны, так как $\dim(A_1 \cap A_2) \leqslant m-1$, то, согласно предположению,

$$\dim(A_1 \cap A_2) \geqslant \dim f^{-1}(A_1 \cap A_2) - k.$$

Отсюда мы получаем, что

$$m - 1 \geqslant n - 1 - k.$$

Следствие 2[2]. *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно и f — открытое отображение пространства $\mathscr{X}$, такое, что множества $f^{-1}(y)$ счетны, то*

$$\dim f(\mathscr{X}) = \dim \mathscr{X},$$

---

[1] См. Гуревич [1, стр. 164].

[2] См. Александров [10].

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\dim \mathscr{X} \leqslant \dim f(\mathscr{X})$, а, согласно теореме 2 из § 43, V, существует последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots$, такая, что

$$f(\mathscr{X}) = f(F_1) \cup f(F_2) \cup \ldots$$

и $f(F_i)$ гомеоморфно F_i, следовательно, такая, что

$$\dim f(F_i) = \dim F_i \leqslant \dim \mathscr{X}.$$

Отсюда по теореме об объединении (§ 27, I, теорема 2) следует, что

$$\dim f(\mathscr{X}) \leqslant \dim \mathscr{X}.$$

Замечание. Предположение счетности множеств $f^{-1}(y)$ не может быть заменено[1]) условием $\dim f^{-1}(y) = 0$ (которое означает, что *отображение* f *0-мерно*).

В самом деле, *для каждого компактного пространства* $\mathscr{Y}$ *положительной размерности существует 1-мерное компактное пространство* $\mathscr{X}$ *и открытое 0-мерное отображение* f *пространства* $\mathscr{X}$ *на* $\mathscr{Y}$[2]).

Теорема 3. *Пусть заданы три компактных пространства* $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}_1$ *и* $\mathscr{Y}_2$ *и два отображения* f_i: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}_i$, $i = 1, 2$. *Определим отображение* f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2$, *положив* $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$. *Если* $\dim f^{-1}(z) \leqslant k$ *для всех* $z \in \mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2$, *то*

$$\dim f_1^{-1}(y_1) \leqslant \dim \mathscr{Y}_2 + k \quad \textit{для каждого} \quad y_1 \in \mathscr{Y}_1.$$

Доказательство. Зафиксируем точку $y_1 \in \mathscr{Y}_1$. Положим $h = f_2 \big| \left[f_1^{-1}(y_1)\right]$. Из соотношений

$$\{h(x) = y_2\} \equiv \{[f_1(x) = y_1][f_2(x) = y_2]\} \equiv \{f(x) = (y_1, y_2)\}$$

следует, что $h^{-1}(y_2) \subset f^{-1}(y_1, y_2)$, поэтому $\dim h^{-1}(y_2) \leqslant k$. Из теоремы 1 (с заменой $\mathscr{X}$ на $f_1^{-1}(y_1)$ и f на h) получаем

$$\dim f_1^{-1}(y_1) - k \leqslant \dim h\left[f_1^{-1}(y_1)\right] \leqslant \dim \mathscr{Y}_2.$$

---

[1]) Это доказывается с помощью примера Колмогорова (см. Александров [10]). Некомпактный пример был дан Робертсом; см. Гуревич и Уолмен [1].

[2]) См. Пасынков [2]. Ранее Л. Келдыш [4] доказала эту теорему для $\mathscr{Y} = \mathscr{I}^2$. См. также Л. Келдыш [2] и [3].

По поводу теорем об открытых отображениях, повышающих размерность, см. Андерсон [1], где показано, например, что для любых $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ существует монотонное открытое отображение $\mathscr{S}_n$ на $\mathscr{S}_m$.

VII. Пространство $(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$ при $r \geqslant 2 \dim \mathcal{X} + 1$.

Теорема 1. (Теорема вложения Менгера и Нёбелинга[1].) *Всякое n-мерное метрическое сепарабельное пространство топологически содержится в кубе $\mathcal{I}^{2n+1}$:*

$$\text{если } \dim \mathcal{X} = n, \text{ то } \mathcal{X} \underset{\text{top}}{\subset} \mathcal{I}^{2n+1}.$$

Более точно[2], *если замкнутое множество $E \subset \mathcal{X}$ удовлетворяет условию D_n и если $r \geqslant 2n+1$, то функции $f \in (\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$, такие, что сужение $f|E$ есть гомеоморфизм, образуют остаточное множество (т. е. дополнение множества первой категории) в пространстве $(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Если A и B — два замкнутых непересекающихся подмножества из E, то обозначим через Φ_{AB} семейство функций $g \in (\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$, таких, что

$$\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = 0.$$

Так как множество E удовлетворяет условию D_n и $r \geqslant 2n+1$, то теорема 4 из § 28, VII показывает, что

$$\overline{\Phi}_{AB} = (\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}.$$

Отсюда по теореме 2 из § 44, VI непосредственно следует вторая часть теоремы 1.

Для того чтобы получить первую часть теоремы из второй, положим $E = \mathcal{X}$ и воспользуемся тем фактом, что пространство $(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$ полно (ср. § 33, V, теорема 1) и потому каждое его остаточное подмножество не пусто (по теореме Бэра).

Замечания. (i) В теореме 1 показатель степени $2n+1$ *не может быть уменьшен*. В самом деле, существуют n-мерные пространства, не гомеоморфные никакому подмножеству куба $\mathcal{I}^{2n}$. Например, доказано[3], что таким пространством является объединение всех граней размерности не более n $(2n+2)$-мерного симплекса.

(ii) Теорему Менгера и Нёбелинга можно усилить следующим образом[4]:

---

[1]) Менгер [4, стр. 1125] и Нёбелинг [1, стр. 71].

[2]) Гуревич [5, стр. 754] (случай, когда $\mathcal{X}$ компактно). Общий случай см. в статье Куратовского [32, стр. 336].

[3]) Флорес [1, стр. 4].

[4]) Нёбелинг [1].

Пусть N_n — подмножество куба $\mathcal{I}^{2n+1}$, точки которого имеют самое большее n рациональных координат. Из условия $\dim \mathscr{X} = n$ *следует включение* $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{\subset} N_n$.

Следовательно, *пространство N_n имеет самый высокий топологический ранг среди всех метрических сепарабельных пространств размерности не более n.*

Сначала мы докажем следующее утверждение:

Если $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, *то множество* Φ *функций* g, *таких, что*

$$(1) \qquad \overline{g(\mathscr{X})} \subset N_n,$$

является остаточным $\boldsymbol{G}_\delta$*-множеством в пространстве* $\left(\mathcal{I}^{2n+1}\right)^{\mathscr{X}}$.

Доказательство. Пусть $n+1 \leqslant m \leqslant 2n+1$ и задана система m рациональных чисел $r_1, \ldots, r_m$ и m целых чисел $i_1 < \ldots < i_m$ $(\leqslant 2n+1)$; тогда множество точек

$$x = \left(x^1, \ldots, x^{2n+1}\right), \quad \text{где} \quad x^{i_1} = r_1, \ldots, x^{i_m} = r_m,$$

есть $(2n+1-m)$-мерное линейное многообразие.

Для переменных $m, r_1, \ldots, r_m$ и $i_1, \ldots, i_m$ получается последовательность $L_1, L_2, \ldots$ линейных многообразий, такая, что

$$\mathcal{I}^{2n+1} - N_n = \mathcal{I}^{2n+1} \cap (L_1 \cup L_2 \cup \ldots).$$

Так как $\dim L_k \leqslant n$, то множество $\underset{g}{\mathsf{E}} \left[\overline{g(\mathscr{X})} \cap L_k = 0\right]$ всюду плотно в пространстве $\left(\mathcal{I}^{2n+1}\right)^{\mathscr{X}}$ (согласно замечанию к теореме 3 из § 28, VII). Но это множество и открыто в указанном пространстве (ср. § 17, II, теорема 1 и § 44, V, теорема 4); следовательно, Φ есть остаточное $\boldsymbol{G}_\delta$-множество, согласно следующему соотношению:

$$\Phi = \underset{g}{\mathsf{E}} \left[\overline{g(\mathscr{X})} \subset N_n\right] = \underset{g}{\mathsf{E}} \left[\overline{g(\mathscr{X})} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k = 0\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underset{g}{\mathsf{E}} \left[\overline{g(\mathscr{X})} \cap L_k = 0\right].$$

Так как множество гомеоморфизмов также остаточно, то гомеоморфизмы, удовлетворяющие условию (1), составляют остаточное множество в пространстве $\left(\mathcal{I}^{2n+1}\right)^{\mathscr{X}}$. Поэтому $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{\subset} N_n$.

Остается только показать, что $\dim N_n \leqslant n$.

Обозначим через $R_{k,m}$ подмножество из $\mathcal{I}^m$, точки которого имеют k рациональных и $(m-k)$ иррациональных координат; тогда

$$N_n = R_{0,\,2n+1} \cup \ldots \cup R_{n,\,2n+1}.$$

Так как объединение $(n+1)$ нульмерных множеств имеет размерность $\leqslant n$ (ср. § 27, I, теорема 1), то остается только показать, что[1])

$$(2)\qquad \dim R_{k,m}=0 \qquad (0\leqslant k\leqslant m)$$

Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность рациональных чисел, содержащихся в интервале 01, и пусть $Z_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ — множество точек $(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})$, для которых $x^{(i_1)}=r_{j_1}, \ldots, x^{(i_k)}=r_{j_k}$, а все остальные координаты иррациональны. Тогда

$$R_{k,m}=\bigcup Z_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k},$$

где суммирование распространяется на все системы $i_1<\ldots$ $\ldots<i_k\leqslant m$ и $j_1, \ldots, j_k$.

Пространство $Z_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ гомеоморфно $(m-k)$-й степени пространства $\mathscr{N}$ (всех иррациональных чисел в интервале $\mathscr{J}$) и, следовательно, самому $\mathscr{N}$; поэтому оно имеет размерность 0. Кроме того, оно замкнуто в $R_{k,m}$, так как каждая точка x множества $\overline{Z_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}}-Z_{j_1,\ldots,j_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ имеет в дополнение к координатам $x^{i_1}=r_{j_1}, \ldots, x^{i_k}=r_{j_k}$ по крайней мере одну рациональную координату и, следовательно, $x\notin R_{k,m}$.

Множество $R_{k,m}$ имеет размерность 0, так как оно есть объединение последовательности 0-мерных множеств, замкнутых в $R_{k,m}$ (§ 26, III, следствие 1).

Теорема 2 (теорема о компактификации[2])). *Всякое n-мерное пространство топологически содержится в некотором n-мерном компактном пространстве.*

Более точно, *если пространство $\mathscr{X}$ удовлетворяет условию D_n, то гомеоморфизмы h, такие, что $\dim\overline{h(\mathscr{X})}\leqslant n$, образуют остаточное множество в пространстве $(\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$.*

Доказательство. Положим $H(f)=\overline{f(\mathscr{X})}$; функционал H непрерывен в пространстве $(\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$, согласно теореме 4 из § 44, V. По теореме 4 п. IV (если $\mathscr{X}$ там заменить на $\mathscr{J}^r$) отсюда следует, что

$$\Phi=\mathop{\mathsf{E}}_{f}[\dim\overline{f(\mathscr{X})}\leqslant n]$$

есть G_δ-множество в пространстве $(\mathscr{J}^r)^{\mathscr{X}}$.

[1]) См. Менгер [1, стр. 147].
[2]) Гуревич [2, стр. 425].

Так как пространство $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию D_n, то множество Φ всюду плотно в пространстве $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$ (согласно теореме 3 из § 28, VII). Следовательно, оно является остаточным множеством в этом пространстве (Борсук [16, стр. 97]) и таковым является пересечение Φ с множеством всех гомеоморфизмов, ибо последнее множество является остаточным, согласно теореме 1.

Замечания. (i) Замечание (ii) к теореме 1 в сочетании с теоремой 2 приводит к следующему заключению.

Существует n-мерное компактное пространство, имеющее наивысший топологический ранг среди всех метрических сепарабельных пространств размерности $\leqslant n$.

Таковым является n-мерное компактное пространство, которое топологически содержит множество N_n.

(ii) Теорему 2 можно обобщить следующим образом [1].

Если $\dim \mathcal{X} \leqslant n$, *то множество гомеоморфизмов* g, *таких, что* $\dim \overline{g(\mathcal{X})} \leqslant n$ *и для любого* $x \in \mathcal{X}$ *размерность пространства* $\mathcal{X}$ *в точке* x *равна размерности множества* $\overline{g(\mathcal{X})}$ *в точке* $g(x)$, *есть остаточное множество в пространстве* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Следствие 3. *Неравенство* $\dim \mathcal{X} \leqslant n$ *и условие* D_n *эквивалентны.*

Доказательство. Условие D_n вытекает из неравенства $\dim \mathcal{X} \leqslant n$, согласно теореме 4 § 27, III. Обратно, из условия D_n, согласно теореме 2, следует, что пространство $\mathcal{X}$ гомеоморфно подмножеству некоторого множества размерности не более n, а потому $\dim \mathcal{X} \leqslant n$.

Легко видеть, что доказательство теоремы 1 по существу опирается на следующее утверждение (которое является прямым следствием теорем § 28, VII, 4 и § 44, V, 4а).

Теорема 4. *Если A и B — два замкнутых непересекающихся n-мерных множества, причем $\mathcal{X} = A \cup B$, то совокупность всех функций g, удовлетворяющих условию*

$$\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = 0,$$

есть всюду плотное открытое множество в пространстве $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Теорема 4′. *Пусть в метрическом сепарабельном пространстве $\mathcal{X}$ заданы $l+1$ замкнутых множеств $A_0, \ldots, A_l$*

1) Доказательство см. Куратовский [34, стр. 13]. Ср. также Гуревич [2, стр. 430].

размерности $\leqslant n$; *тогда множество* Φ *функций* g, *удовлетворяющих условию*

$$(3) \qquad \dim[\overline{g(A_0)} \cap \ldots \cap \overline{g(A_l)}] \leqslant \dim(A_0 \cap \ldots \cap A_l),$$

является остаточным G_δ*-множеством в пространстве* $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$.

Доказательство. По теореме 4′ из п. IV множество

$$\underset{F_0, \ldots, F_l}{\mathsf{E}} [\dim(F_0 \cap \ldots \cap F_l) \leqslant \dim(A_0 \cap \ldots \cap A_l)]$$

есть G_δ-множество в пространстве $(2^{\mathcal{J}^r})^{l+1}$. Так как операция $\overline{g(A_l)}$ (если ее рассматривать как функцию от g) непрерывна (§ 44, VI, теорема 2), то множество Φ является G_δ-множеством в пространстве $(\mathcal{J}^r)^{\mathcal{X}}$. Наконец, оно всюду плотно в этом пространстве по теореме 5 из § 28, VII.

Теорема 5. *Пусть* $A_0, A_1, \ldots$ — *последовательность замкнутых множеств в пространстве* $\mathcal{X}$. *С топологической точки зрения пространство* $\mathcal{X}$ *можно рассматривать как всюду плотное подмножество такого компактного пространства* $\mathcal{X}^*$, *что если* A^* *обозначает замыкание* A *в* $\mathcal{X}^*$, *то*

$$(4) \qquad \dim(A^*_{i_0} \cap \ldots \cap A^*_{i_l}) = \dim(A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_l})$$

для любых индексов $i_0, \ldots, i_l$ $(l \geqslant 0)$.

Следовательно, *условие компактности в теореме* III, 1 *можно опустить*.

Доказательство. По теореме 2 из § 44, VI множество гомеоморфизмов Ψ является остаточным в пространстве $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$, а потому, согласно теореме 4′, таким же является множество $\Phi(i_0, \ldots, i_l)$ функций g, удовлетворяющих условию

$$(5) \qquad \dim[\overline{g(A_{i_0})} \cap \ldots \cap \overline{g(A_{i_l})}] \leqslant \dim(A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_l});$$

следовательно, таким будет и $\Gamma = \Psi \cap \bigcap \Phi(i_0, \ldots, i_l)$, где $i_0, \ldots, i_l$ пробегают все системы неотрицательных целых чисел.

Пусть $g \in \Gamma$. Предположим, что $\mathcal{X}^* = \overline{g(\mathcal{X})}$, и отождествим $\mathcal{X}$ с $g(\mathcal{X})$. Тогда

$$\dim[g(A_{i_0}) \cap \ldots \cap g(A_{i_l})] = \dim(A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_l}).$$

Поэтому, согласно (5),

$$\dim[\overline{g(A_{i_0})} \cap \ldots \cap \overline{g(A_{i_l})}] = \dim(A_{i_0} \cap \ldots \cap A_{i_l}),$$

откуда вытекает равенство (4).

Теперь рассмотрим вторую часть теоремы 5.

Пусть $P_0, P_1, \ldots$ — последовательность замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ и $G_0, \ldots, G_m$ — такая система открытых множеств, что $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$. Положим

$$(6) \qquad Q_i = \mathscr{X} - G_i; \quad \text{тогда} \quad Q_0 \cap \ldots \cap Q_m = 0.$$

По доказанному пространство $\mathscr{X}$ можно рассматривать как всюду плотное подмножество компактного пространства $\mathscr{X}^*$, такого, что

$$(7) \qquad \dim P_j^* = \dim P_j \quad \text{и} \quad Q_0^* \cap \ldots \cap Q_m^* = 0$$

(последовательность $A_0, A_1, \ldots$ мы заменили на $Q_0, \ldots, Q_m, P_0, P_1, \ldots$). Положим $U_i = \mathscr{X}^* - Q_i^*$; тогда

$$U_0 \cup \ldots \cup U_m = \mathscr{X}^* - (Q_0^* \cap \ldots \cap Q_m^*) = \mathscr{X}^*.$$

Так как множества U_i открыты, то, согласно теореме 1 из п. III, существ ег система замкнутых множеств $W_0, \ldots, W_m$ (в $\mathscr{X}^*$), такая, что

$$(8) \qquad \begin{gathered} \mathscr{X}^* = W_0 \cup \ldots \cup W_m, \quad W_i \subset U_i, \\ \dim \left(P_j^* \cap W_{i_0} \cap \ldots \cap W_{i_l}\right) \leqslant \dim P_j^* - l \end{gathered}$$

для любых $j = 1, 2, \ldots, l \leqslant \dim P_j + 1$ и $i_0 < \ldots < i_l \leqslant m$.

Положим $F_i = \mathscr{X} \cap W_i$. Тогда

$$(9) \qquad \begin{gathered} F_0 \cup \ldots \cup F_m = \mathscr{X} \cap (W_0 \cup \ldots \cup W_m) = \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^* = \mathscr{X}, \\ F_i = \mathscr{X} \cap W_i \subset \mathscr{X} \cap U_i = \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^* - Q_i^* = \mathscr{X} - Q_i^*, \end{gathered}$$

а так как Q_i замкнуты в $\mathscr{X}$, то, согласно (6),

$$\mathscr{X} \cap Q_i^* = Q_i, \quad \text{откуда} \quad \mathscr{X} - Q_i^* = \mathscr{X} - Q_i = G_i,$$

и, следовательно, $F_i \subset G_i$ в соответствии с (9). Наконец, согласно (8) и (7), имеем

$$\dim (P_j \cap F_{i_0} \cap \ldots \cap F_{i_l}) \leqslant \dim \left(P_j^* \cap W_{i_0} \cap \ldots \cap W_{i_l}\right) \leqslant \dim P_j - l.$$

Теорема 6 [1]). *Пусть в метрическом сепарабельном пространстве $\mathscr{X}$ заданы два замкнутых множества A и B размерности $\leqslant n$, таких, что пересечение $A \cap B$ компактно. Тогда функции g, удовлетворяющие условию*

$$(10) \qquad \overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} = g(A \cap B),$$

образуют остаточное множество в пространстве $(\mathscr{Y}')^{\mathscr{X}}$.

[1]) См. Куратовский [34]. См. также Морита [1].

Доказательство. Положим $S_k = \underset{x}{\mathrm{E}}\,[\rho(x, A \cap B) < 1/k]$ и $A_k = A - S_k$; тогда $A_k \cap B = 0$ и $A - B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. По теореме 4 множество $\Phi_k = \underset{g}{\mathrm{E}}\,[\overline{g(A_k)} \cap \overline{g(B)} = 0]$ открыто и всюду плотно в пространстве $(\mathcal{J}^r)^{\mathfrak{X}}$; поэтому множество $\Phi = \Phi_1 \cap \cap \Phi_2 \cap \ldots$ — остаточное в том же пространстве.

Пусть $g \in \Phi$. Докажем, что выполняется равенство (10). Имеем

$$\overline{g(A)} = \bigcup_k \overline{g(A_k)} \cup [\overline{g(A)} - \bigcup_k \overline{g(A_k)}] =$$
$$= \bigcup_k \overline{g(A_k)} \cup \bigcap_k [\overline{g(A)} - \overline{g(A_k)}] \subset$$
$$\subset \bigcup_k \overline{g(A_k)} \cup \bigcap_k \overline{g(A - A_k)} \subset \bigcup_k \overline{g(A_k)} \cup \bigcap_k \overline{g(S_k)}.$$

Так как (ср. § 41, VI, теорема 10) $\bigcap_k \overline{g(S_k)} = g\left(\bigcap_k S_k\right) = g(A \cap B)$, мы получаем

$$\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} \subset \bigcup_k \overline{g(A_k)} \cap \overline{g(B)} \cup g(A \cap B),$$

и потому

$$\overline{g(A)} \cap \overline{g(B)} \subset g(A \cap B),$$

ибо предположение $g \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \ldots$ означает, что

$$\bigcup_k \overline{g(A_k)} \cap \overline{g(B)} = 0.$$

Следующая теорема представляет собой приложение теоремы 4.

Теорема 7 [1]). *Пусть в кубе $\mathcal{J}^r$ задана последовательность множеств $A_1, A_2, \ldots$ размерности $\leqslant n$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует последовательность гомеоморфизмов $h_0, h_1, \ldots$, таких, что*

$$h_i(A_i) \subset \mathcal{J}^r, \quad h_i(A_i) \cap h_j(A_j) = 0 \quad (\textit{если} \quad j \neq i),$$
$$|h_i(x) - x| < \varepsilon.$$

Доказательство. Каждой точке $x = [x^1, x^2, \ldots]$ множества A_i поставим в соответствие точку $f_i(x) = [i, x^1, x^2, \ldots]$ пространства $\mathcal{E}^{r+1}$. Очевидно, что f_i — гомеоморфизм и множества $B_i = f_i(A_i)$ попарно не пересекаются и открыто-замкнуты в своем объединении $S = B_0 \cup B_1 \cup \ldots$. Так как $\dim B_i \leqslant n$, то из этого следует, что $\dim S \leqslant n$.

---

[1]) См. Александров [8, стр. 210] и Гуревич [5, стр. 760].

Пусть g — функция, равная f_i^{-1} на B_i для $i=0, 1, \ldots$. Тогда $g \in (\mathcal{I}^r)^S$ и, следовательно, согласно теоремам 1 и 4, существует гомеоморфизм $h \in (\mathcal{I}^r)^S$, такой, что

$$|h-g|<\varepsilon \quad \text{и} \quad h(B_i) \cap h(B_j)=0 \quad \text{при} \quad j \neq i.$$

Таким образом, достаточно положить $h_i(x)=hf_i(x)$ для $x \in A_i$.

VIII. Пространство $(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$ при $r>\dim \mathcal{X}$.

Теорема Гуревича[1]). *Если $\dim \mathcal{X} \leqslant n$, то существует функция $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^r$, никакое значение которой не принимается более чем в m точках, где m — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $m \geqslant \frac{n+1}{r-n}$.*

Более общо, *если V_k — множество значений порядка $>k$ функции g, то*

(1) $$\dim V_k \leqslant n-k(r-n) \quad \textit{при} \quad k \leqslant \frac{n+1}{r-n}.$$

Более того, *множество Ψ_k функций g, удовлетворяющих условию (1), и, следовательно, множество $\Psi_0 \cap \Psi_1 \cap \ldots$ являются остаточными в пространстве $(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{X}$, и пусть $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^r$ и $y \in V_k$. Тогда существует система из таких $(k+1)$ различных точек $x_0, \ldots, x_k$, что $y=g(x_0)=\ldots=g(x_k)$. Следовательно, существует система индексов $S=(i_0, \ldots, i_k)$, такая, что множества $\overline{R_{i_0}}, \ldots, \overline{R_{i_k}}$ не пересекаются и

$$y \in g(\overline{R_{i_0}}) \cap \ldots \cap g(\overline{R_{i_k}}) \subset \overline{g(\overline{R_{i_0}})} \cap \ldots \cap \overline{g(\overline{R_{i_k}})},$$

откуда

(2) $$V_k \subset \bigcup_S \overline{g(\overline{R_{i_0}})} \cap \ldots \cap \overline{g(\overline{R_{i_k}})}.$$

Это счетное объединение замкнутых множеств; поэтому из предположения, что функция g не удовлетворяет условию (1), вытекает существование системы S, такой, что

(3) $$\dim\left[\overline{g(\overline{R_{i_0}})} \cap \ldots \cap \overline{g(\overline{R_{i_k}})}\right]>n-k(r-n).$$

Другими словами, если $g \notin \Psi_k$, то существует система S, удовлетворяющая условию (3). Если Γ_S есть множество функций g, удовлетворяющих условию (3), то

$$(\mathcal{I}^r)^{\mathcal{X}}-\Psi_k \subset \bigcup_S \Gamma_S.$$

[1]) См. Гуревич [5, стр. 755]. См. также Эйленберг [3, стр. 156].

Так как Γ_S — граничное множество (по теореме 6 из § 28, VII) и F_σ-множество (IV, теорема 4, и § 44, V, теорема 4), то Ψ_k — остаточное множество.

Пример. Если $\dim \mathscr{X} = 1$ (например, в случае, когда $\mathscr{X}$ — некоторая кривая), то $\mathscr{X}$ можно отобразить на плоскость таким образом, что ни одна из точек плоскости не будет накрываться более чем двумя точками $\mathscr{X}$ и при этом множество точек плоскости, которые накрываются двумя точками множества $\mathscr{X}$, имеет меру 0.

IX. Пространство $(\mathscr{I}^r)^{\mathscr{X}}$ при $r \leqslant \dim \mathscr{X}$.

Теорема Гуревича[1]). *Если $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, то существует функция $g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{I}^r$, такая, что*

(1) $\dim [g^{-1}(y)] \leqslant n - r$ *для каждого* $y \in g(\mathscr{X})$.

Более того, *если пространство $\mathscr{X}$ компактно и $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, то множество функций g, удовлетворяющих условию* (1), *является остаточным G_δ-множеством в пространстве $(\mathscr{I}^r)^{\mathscr{X}}$.*

Доказательство. Так как всякое пространство содержится в некотором компактном пространстве той же размерности (VII, теорема 2), то достаточно установить справедливость второй части теоремы.

Вначале рассмотрим случай, когда $r = n$. Так как множество $g^{-1}(y)$ компактно, то условие $\dim [g^{-1}(y)] = 0$ эквивалентно (IV, теорема 1) условию $d_1 [g^{-1}(y)] = 0$, которое означает, что

(2) $$d_1 [g^{-1}(y)] < 1/k$$

для $k = 1, 2, \ldots$.

Наконец, условие (2) эквивалентно существованию разбиения множества $g^{-1}(y)$ на конечное число замкнутых непересекающихся множеств диаметра $< 1/k$ (ср. п. IV). Если множество функций g, удовлетворяющих условию (1), обозначить через Ψ, а множество функций g, удовлетворяющих условию (2), — через Ψ_k, то

$$\Psi = \Psi_1 \cap \Psi_2 \cap \ldots .$$

Так как множество Ψ_k всюду плотно (теорема 7 из § 28, VII) и открыто (IV, теорема 5), то Ψ — остаточное G_δ-множество.

Теперь рассмотрим случай, когда $r < n$. Поскольку Ψ есть G_δ-множество (IV, теорема 5), остается только показать, что оно всюду плотно.

[1]) См. Гуревич [5]. В случае, когда $\mathscr{X}$ — полиэдр, первая часть теоремы становится элементарной. См. также Болтянский и Солтан [1].

Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^r$ и $\varepsilon > 0$. Определим функцию $f_*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^n$ следующим образом:

$$f_*^i(x) = \begin{cases} f^i(x) & \text{для } i \leqslant r, \\ 0 & \text{для } r < i \leqslant n. \end{cases}$$

Как мы только что показали, существует функция $g_*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^n$ с 0-мерными прообразами точек, такая, что $|g_* - f_*| < \varepsilon$.

Положим $g(x) = [g_*^1(x), \ldots, g_*^r(x)]$. Тогда

$$g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{I}^r \quad \text{и} \quad |g - f| < \varepsilon.$$

Наконец, $g \in \Psi$, так как условие (1) непосредственно следует из теоремы 3 п. VI, если положить

$$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{I}^r, \quad \mathcal{Y}_2 = \mathcal{I}^{n-r},$$

$$f_1 = g, \quad f_2 = (g_*^{r+1}, \ldots, g_*^n), \quad \text{следовательно,} \quad f = g_*.$$

ГЛАВА 5

СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 46. Связность

I. Определение. Общие свойства. Монотонные отображения. Говорят, что пространство $\mathscr{X}$ *связно* [1]), если оно не содержит такого множества X, что

$$(1) \qquad 0 \neq X \neq \mathscr{X} \quad \text{и} \quad \overline{X} \cap \overline{\mathscr{X} - X} = 0;$$

иными словами, если не существует множества X, удовлетворяющего условию $0 \neq X \neq \mathscr{X}$ и имеющего пустую *границу*.

Теорема 0. *Пространство связно тогда и только тогда, когда оно не является объединением двух непересекающихся замкнутых непустых множеств.*

В самом деле, если пространство можно разбить таким образом на множества X и Y, то условие (1) выполняется; обратно, если X удовлетворяет условию (1), то $\mathscr{X} = \overline{X} \cup \overline{\mathscr{X} - X}$ есть разложение пространства $\mathscr{X}$ на два непересекающихся замкнутых и непустых множества.

Отсюда следует, что *множество* C (лежащее в данном пространстве) связно тогда и только тогда, когда всякое подмножество X множества C, такое, что $0 \neq X \neq C$, удовлетворяет условию $C \cap \overline{X} \cap \overline{C - X} \neq 0$; другими словами, C нельзя разбить на два непустых непересекающихся множества X и Y, замкнутых в C, или на два непустых *отделимых* множества X и Y, т. е. удовлетворяющих условиям

$$(2) \qquad C = X \cup Y, \ (\overline{X} \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = 0, \quad X \neq 0 \neq Y.$$

Открытое связное множество называется *областью*.

Теорема 1. *Если множество C связно и $C \cap A \neq 0 \neq C - A$, то $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq 0$.*

---

[1]) Принятое здесь определение связности восходит к Жордану [1, стр. 25]. Ср. Леннес [1, стр. 303]. Его цель — выразить на топологическом языке интуитивное понятие непрерывности точечного множества.

Действительно, $0 \neq C \cap \overline{C \cap A} \cap \overline{C - A} \subset C \cap \bar{A} \cap \overline{\mathscr{X} - A} = C \cap \mathrm{Fr}(A)$.

Теорема 2. *Если множество C не связно, то существует открытое множество G, такое, что*

$$C \cap G \neq 0 \neq C - \bar{G} \quad \text{и} \quad C \cap \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

(Пространство предполагается метрическим; более общо, можно считать, что оно наследственно нормально.)

Доказательство. Допустим, что X и Y удовлетворяют условиям (2); положим

$$G = \mathop{\mathsf{E}}_{x} [\rho(x, X) < \rho(x, Y)].$$

Тогда

$$X \subset G \text{ и } \bar{G} \cap Y = 0, \text{ следовательно, } (X \cup Y) \cap (\bar{G} - G) = 0.$$

Теорема 3. *Связность есть инвариант непрерывных отображений.*

Доказательство. Если $f(C) = X \cup Y$, где X и Y — два непересекающихся замкнутых непустых множества, то

$$C = f^{-1} f(C) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y),$$

причем множества $f^{-1}(X)$ и $f^{-1}(Y)$ также не пересекаются, замкнуты и непусты.

Примеры и замечания. *Пространство $\mathscr{E}$ действительных чисел связно.* Это простое следствие аксиомы Дедекинда.

Множество, состоящее из *одной точки*, и *пустое множество* связны.

Легко видеть, что не существует других связных подмножеств $\mathscr{E}$ (содержащих более одной точки), кроме следующих: *замкнутые или открытые интервалы, замкнутые или открытые лучи, интервалы без одной концевой точки.*

Так как пространство $\mathscr{J}$ связно, то связным является и график $\mathop{\mathsf{E}}_{x, y} [y = f(x)]$, где отображение $f: \mathscr{J} \to \mathscr{Y}$ непрерывно, а $\mathscr{Y}$ — произвольное пространство, так как этот график гомеоморфен $\mathscr{J}$ (см. теорему 1 из § 15, V).

Следствие 3а. *Пространство $\mathscr{X}$ связно тогда и только тогда, когда каждая непрерывная функция $f: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$ обладает свойством Дарбу (т. е. переходит от одного значения к другому, принимая все промежуточные значения).*

Доказательство. Пусть пространство $\mathscr{X}$ связно и отображение f непрерывно; тогда по теореме 3 множество $f(\mathscr{X})$ связно и в силу предыдущих замечаний отсюда сейчас же следует, что f обладает свойством Дарбу.

Если пространство $\mathscr{X}$ несвязно, то $\mathscr{X}=A\cup B$, где A и B — непересекающиеся замкнутые непустые множества. Положим $f(x)=0$ для $x\in A$ и $f(x)=1$ для $x\in B$. Тогда функция f непрерывна, но не обладает свойством Дарбу.

Теорема 4. *Мощность вполне регулярного связного пространства C, содержащего более чем одну точку, не меньше $\mathfrak{c}$.*

Доказательство. Пусть a и b — две различные точки пространства C. Тогда существует непрерывная функция $f\colon C\to\mathscr{I}$, такая, что $f(a)=0$ и $f(b)=1$. Согласно следствию 3a, $\mathscr{I}\subset f(C)$, что завершает доказательство.

Замечание. Существуют (бесконечные) счетные связные $\mathscr{T}_2$-пространства[1]).

Теорема 5. *Если C — связное метрическое сепарабельное пространство (содержащее более одной точки), то $\dim_p C\neq 0$ для каждого $p\in C$.*

Действительно, в противном случае существовала бы открыто-замкнутая окрестность точки p, отличная от C.

Теорема 6. *Пусть $f\colon\mathscr{I}\to\mathscr{E}^n$ — функция первого класса Бэра, такая, что $f(x)\in\overline{f(xx')}$ и $f(x')\in\overline{f(xx')}$ для каждого открытого интервала xx'. Пусть $\mathscr{Y}=f(\mathscr{I})$. Тогда $\mathscr{Y}$ связно.*

Доказательство. Допустим, что F — открыто-замкнутое подмножество пространства $\mathscr{Y}$ и $0\neq F\neq\mathscr{Y}$. Положим $A=f^{-1}(F)$. Из связности $\mathscr{I}$ следует, что $\operatorname{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{\mathscr{I}-A}\neq 0$. Так как f — функция первого класса, то сужение $f|\operatorname{Fr}(A)$ имеет точку непрерывности a (§ 34, VII). Поскольку F и $\mathscr{Y}-F$, а, следовательно, A и $\mathscr{I}-A$ удовлетворяют тем же предположениям, можно считать, что $a\in A$ и потому $a\in A\cap\overline{\mathscr{I}-A}$.

Множество $A=f^{-1}(F)$ содержит окрестность точки a относительно множества $\operatorname{Fr}(A)$, так как функция $f|\operatorname{Fr}(A)$ непрерывна в точке a и F — окрестность $f(a)$; поэтому существует число $\varepsilon>0$, такое, что из условий $x\in\operatorname{Fr}(A)$ и $|x-a|<\varepsilon$ следует, что $x\in A$. Пусть b — точка множества $\mathscr{I}-A$, такая, что

---

[1]) Первый пример такого пространства был дан Урысоном [2]. См. также Раухваргер [1] и Бурбаки [1].

$|a-b|<\varepsilon$ (в соответствии с условием $a \in \overline{\mathcal{J}-A}$). Следовательно, $b \notin \operatorname{Fr}(A)$, откуда $b \in \mathcal{J}-\bar{A}$. Пусть cd — (открытый) интервал, смежный к $\bar{A}$ и содержащий b. Один из концов этого интервала, скажем c, лежит между a и b; это дает: $|c-a|<\varepsilon$, а так как $c \in \operatorname{Fr}(A)$, то из этого следует, что $c \in A$, и поэтому $f(c) \in F$. Но это противоречит формуле

$$f(c) \in \overline{f(cd)} \subset \overline{f(\mathcal{J}-A)} = \overline{ff^{-1}(\mathcal{Y}-F)} = \mathcal{Y}-F.$$

Из теоремы 6 вытекает следующая

Теорема 7. *Пусть g: $\mathcal{J} \to \mathcal{E}$ — действительная функция. Если g — функция первого класса, обладающая свойством Дарбу, то множество $C = \underset{x,y}{\mathrm{E}}\,[y=g(x)]$ связно*[1].

Доказательство. Из свойства Дарбу вытекает[2], что каждому x соответствуют две последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, сходящиеся к x, одна из которых возрастает, а другая убывает, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n') = g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n'').$$

Следовательно, составное отображение $f(x) = [x, g(x)]$ удовлетворяет условиям теоремы 6. Отсюда вытекает, что множество $C = f(\mathcal{J})$ связно.

Из теоремы 7 непосредственно следует

Теорема 8. *Если производная $dg(x)/dx$ конечна для любого x, то множество $\underset{x,y}{\mathrm{E}}\left[y=\frac{dg(x)}{dx}\right]$ связно*[3].

Более того, будучи G_δ-множеством (ср. § 31, VII, теорема 1), *это множество является топологически полным пространством* (§ 33, VI).

Замечания. Теоремы 7 и 8 позволяют определить связные множества, обладающие целым рядом замечательных свойств (ср. VI, (iii)[4]).

Для функций, не являющихся функциями первого класса, условие Дарбу (как легко доказать) остается *необходимым* для связности графика, но не является более достаточным.

---

[1]) См. Куратовский и Серпинский [2, стр. 304]. Ср. Хаусдорф [1]. См. также и Йонес и Томас [1].

[2]) Для функций первого класса имеет место и обратная импликация; см. Юнг [2, стр. 187].

[3]) См. Кнастер и Куратовский [4].

[4]) В тех же целях могут быть использованы функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(x+y)=f(x)+f(y)$, ср. Йонес [1, стр. 115].

В самом деле, рассмотрим функцию Чезаро (второго класса)

$$\omega(x) = \limsup \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \quad \text{где} \quad 0 < x < 1$$

и $x = (0, a_1 a_2 \ldots)_2$ — двоичное разложение x.

Функция ω принимает каждое значение между 0 и 1 в любом интервале. Следовательно, она удовлетворяет условию Дарбу, а потому этому условию удовлетворяет и функция $g(x)$, определяемая следующим образом: $g(x) = 0$, если $x = \omega(x)$, и $g(x) = \omega(x)$ в противном случае. Отсюда следует, что прямая линия $y = x$ не пересекает множество $\underset{x, y}{\mathsf{E}} [y = g(x)]$, а потому это множество не связно [1]).

Определение. Непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *монотонным*, если прообраз $f^{-1}(C)$ каждого связного множества $C \subset \mathcal{Y}$ есть связное множество [2]).

Таковы, например, действительные функции действительного переменного (определенные на интервале), монотонные в обычном смысле.

Теорема 9. *Если прообразы точек при замкнутом отображении $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ связны, то отображение f монотонно.*

Доказательство. Пусть множество $C \subset \mathcal{Y}$ связно. Пусть A и B — два отделимых множества, таких, что $f^{-1}(C) = A \cup B$. Отсюда следует, что если $y \in C$ и $f^{-1}(y) \cap A \neq 0$, то $f^{-1}(y) \subset A$. Пусть M — множество всех точек $y \in C$, таких, что $f^{-1}(y) \subset A$. Тогда $A = f^{-1}(M)$.

Аналогично, существует множество N, такое, что $B = f^{-1}(N)$. Так как множества A и B отделимы, то M и N — тоже отделимы (ср. § 41, III, замечание 2 (ii)). Следовательно, из предположения связности множества $C = M \cup N$ вытекает, что либо $M = 0$, либо $N = 0$, и поэтому или $A = 0$, или $B = 0$.

II. Операции над связными множествами.

Теорема 1. *Если C — связное подмножество объединения $M \cup N$ двух отделимых множеств M и N, то либо $C \cap M = 0$, либо $C \cap N = 0$.*

---

[1]) Йонес [1]. Однако множество $\underset{x\ y}{\mathsf{E}} [y = \omega(x)]$ связно как доказал Вьеторис [1, стр 173]

[2]) Ср Уайберн [1, стр 127] См. также Уоллес [1, стр. 136] (обобщение понятия монотонного отображения).

Доказательство. Действительно, в противном случае множество C было бы объединением множеств $C \cap M$ и $C \cap N$, которые непусты и отделимы.

Теорема 2[1]). *Пусть $\{C_t\}$ — семейство связных множеств. Объединение $\bigcup_t C_t$ связно при условии, что существует множество C_0, не отделимое от любого множества C_t.*

Доказательство. Пусть объединение $\bigcup_t C_t$ есть все пространство $\mathcal{X}$. Предположим, что $\mathcal{X} = M \cup N$, где M и N — открыто-замкнутые и непересекающиеся множества. Покажем, что либо $M = 0$, либо $N = 0$. Согласно теореме 1, можно предположить, что $C_0 \cap M = 0$; тогда $C_0 \subset N$, и поэтому N есть (открытая) окрестность множества C_0. Так как множества C_0 и C_t неотделимы, отсюда следует, что $C_t \cap N \neq 0$, и потому, согласно теореме 1, $C_t \cap M = 0$ для любого t. Следовательно, $M = 0$.

Теорему 2 можно также вывести из следующей теоремы 2′:

Теорема 2′. *Пусть $\{C_t\}$ — направленное семейство связных множеств (это означает, что для каждой пары t_1, t_2 существует такое t_3, что $C_{t_1} \subset C_{t_3}$ и $C_{t_2} \subset C_{t_3}$). Тогда объединение $S = \bigcup_t C_t$ связно.*

Доказательство. Предположим, что $S = M \cup N$, где M и N — отделимые множества. По теореме 1 для каждого t либо $C_t \subset M$, либо $C_t \subset N$. Пусть $C_{t_0} \neq 0$. Очевидно, можно предположить, что $C_{t_0} \subset M$; следовательно, $C_{t_0} \not\subset N$. Покажем, что $S \subset M$, завершив тем самым доказательство.

Пусть t — произвольный индекс, и пусть t' — такой индекс, что $C_{t_0} \subset C_{t'}$ и $C_t \subset C_{t'}$. Первое включение дает $C_{t'} \not\subset N$. Отсюда $C_{t'} \subset M$, и потому $C_t \subset M$. Из этого следует, что $S \subset M$.

Следствие 3. (i) *Объединение связных множеств, имеющих общую точку, представляет собой связное множество.*

(ii) *Если C связно и $C \subset X \subset \overline{C}$, то X связно.*

(iii) *Если каждая пара точек пространства содержится в некотором связном множестве, то все пространство связно.*

Доказательство. (i) вытекает непосредственно из теоремы 2.

Чтобы доказать (ii), положим $X = M \cup N$, где M и N отделимы. Согласно теореме 1, можно считать, что $C \subset M$. Отсюда

[1]) См. Кнастер и Куратовский [2, стр. 210].

вытекает, что $\overline{C} \subset \overline{M}$ и, следовательно, $\overline{C} \cap N = 0$. Так как $X \subset \overline{C}$, то мы получаем $X \cap N = 0$, а отсюда $N = 0$.

Теорема 4[1]). *Если C — связное подмножество связного пространства $\mathscr{X}$ и если M и N — два отделимых множества, таких, что $\mathscr{X} - C = M \cup N$, то множества $C \cup M$ и $C \cup N$ связны.*

Более того, если C замкнуто, то $C \cup M$ и $C \cup N$ также замкнуты.

Доказательство. Предположим, что $C \cup M = A \cup B$, где A и B отделимы. Покажем, что либо $A = 0$, либо $B = 0$. В соответствии с теоремой 1 можно предположить, что $C \cap A = 0$, откуда $A \subset M$, так как $A \subset C \cup M$. Поскольку множества M и N отделимы, множество A отделимо от N, а следовательно, и от $N \cup B$, ибо A и B отделимы (ср. § 6, V, теорема 4). Соотношение

$$\mathscr{X} = C \cup M \cup N = A \cup B \cup N$$

дает разложение связного пространства на два отделимых множества A и $B \cup N$. Следовательно, одно из них пусто, что и завершает доказательство.

Наконец, если C замкнуто, то

$$\overline{C \cup M} = C \cup \overline{M} = (C \cup \overline{M}) \cap (C \cup M \cup N) = C \cup M,$$

так как $\overline{M} \cap N = 0$.

Следствие 5[2]). *Пусть A и B — два замкнутых (или два открытых) множества. Если множества $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то множества A и B также связны.*

Доказательство. Пусть $A \cup B$ — все пространство $\mathscr{X}$; положим в теореме 4

$$M = A - B, \quad N = B - A \text{ и } C = A \cap B.$$

Так как множества $A - B$ и $B - A$ отделимы (ср. § 6, V, теорема 2), то множества

$$A = A \cap B \cup (A - B) \text{ и } B = A \cap B \cup (B - A)$$

связны.

Теорема 6. *Если E не является объединением n связных множеств, то существуют $n+1$ попарно отделимых множеств $A_1, \ldots, A_{n+1}$, таких, что*

$$E = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}, \quad A_i \neq 0 \quad \textit{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

---

[1]) Кнастер и Куратовский [2, теорема VI].

[2]) См. Куратовский и Янишевский [1, стр. 211, теорема I].

Доказательство. При $n=1$ утверждение, очевидно, верно; предположим, что оно верно для $n-1$. Таким образом, $E=A_1\cup\ldots\cup A_n$ и A_j являются попарно отделимыми непустыми множествами. По предположению одно из них, скажем A_n, не связно, т. е. существуют два отделимых непустых множества A_n^* и A_{n+1}, таких, что $A_n=A_n^*\cup A_{n+1}$; отсюда следует требуемый результат.

Теорема 7 (обобщенная теорема 4[1]). *Если $C_1, \ldots, C_n$ — связные подмножества связного пространства $\mathscr{X}$, а M и N — два отделимых множества, таких, что*

$$\mathscr{X}-(C_1\cup\ldots\cup C_n)=M\cup N,$$

то множество $C_1\cup\ldots\cup C_n\cup M$ состоит из n связных множеств (различных или совпадающих).

Доказательство. Предположим, что существует разложение на $n+1$ попарно отделимых, непустых множеств (ср. с теоремой 6):

$$C_1\cup\ldots\cup C_n\cup M=A_1\cup\ldots\cup A_{n+1}.$$

Ни одно из множеств A_i не отделимо от N для $i\leqslant n+1$, ибо в противном случае существовало бы разложение

$$\mathscr{X}=A_i\cup(A_1\cup\ldots\cup A_{i-1}\cup A_{i+1}\cup\ldots\cup A_{n+1}\cup N)$$

на два отделимых непустых множества, вопреки связности пространства $\mathscr{X}$. Множества M и N отделимы, следовательно, $A_i\not\subset M$, и потому $A_i\cap C_j\neq 0$ для некоторого $j\leqslant n$. Так как C_j — связное подмножество объединения отделимых множеств $A_1, \ldots, A_{n+1}$, отсюда следует, что $C_j\subset A_i$.

Наконец, мы заключаем, что каждое из множеств $A_1, \ldots, A_{n+1}$ содержит (непустое) множество, принадлежащее системе $\{C_1, \ldots, C_n\}$, что, очевидно, невозможно.

Теорема 7'. *Всякое связное пространство, содержащее более одной точки, есть объединение двух связных множеств, отличных от всего пространства и содержащих более одной точки*[2].

Доказательство. Если для каждого x множество $\mathscr{X}-x$ связно, то существует разложение $\mathscr{X}=(\mathscr{X}-x_1)\cup(\mathscr{X}-x_2)$,

[1]) См. Кнастер и Куратовский [5; стр. 648]. Ср. также (в случае $n=2$) Уайбери [3, стр. 181].

[2]) Более точный результат А. Стоуна и связанные с этим вопросы см. Эрдёш [1, стр. 442].

где $x_1 \neq x_2$. С другой стороны, если существует такое x, что $\mathscr{X} - x$ не связно, то $\mathscr{X} - x = M \cup N$, где M и N отделимы и непусты; поэтому (ср. с теоремой 4) $\mathscr{X} = (x \cup M) \cup (x \cup N)$.

Замечание. Однако существуют пространства, называемые *бисвязными*, которые не допускают никакого разложения на два связных непересекающихся собственных подмножества, содержащих более одной точки.

Рассмотрим следующий пример[1]). Соединим точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ с каждой точкой канторова множества $\mathscr{C}$ прямолинейным отрезком (рис. 1). Если этот отрезок содержит конец интервала, смежного с $\mathscr{C}$, то возьмем все его точки с рациональными ординатами; в противном случае берем точки с иррациональными ординатами. Все эти точки образуют требуемое бисвязное множество.

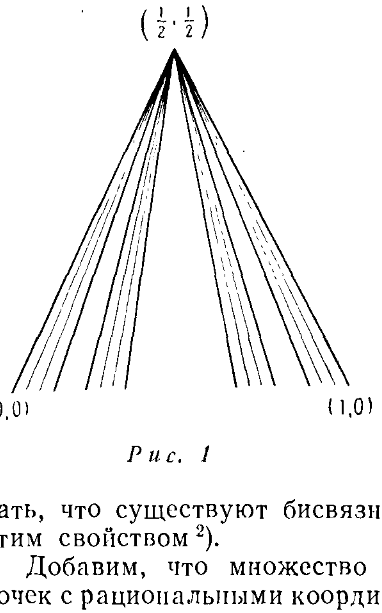

Рис. 1

Определенное так бисвязное пространство $\mathscr{X}$ имеет точку p, называемую «точкой дисперсии», а именно точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, такую, что *$\mathscr{X} - p$ не содержит никакого связного множества* (имеющего более одной точки). С помощью гипотезы континуума можно доказать, что существуют бисвязные пространства, не обладающие этим свойством[2]).

Добавим, что множество всех рациональных точек (т. е. точек с рациональными координатами) гильбертова пространства становится бисвязным при присоединении одной точки[3]).

Теорема 8. *Если C — связное пространство и $\{G_i\}$ — открытое покрытие C, то каждую пару точек можно соединить цепью со звеньями, принадлежащими этому покрытию, т. е. каждой*

---

[1]) Доказательство см. в цитированной выше статье Кнастера и Куратовского [2, стр. 241]. Другие примеры см. в статье Кнастера и Куратовского [4, стр. 3].

См. также Суппгл [1], Эрдёш [1], Дуда [3] и Рудин [1]. Ср. Мартин [1, стр. 165—167] и Рой [1].

[2]) См. Миллер [1].

[3]) Робертс [4]. См. также Уилдер [2].

паре (x, y) соответствует конечное множество индексов $t_1, \ldots, t_n$, таких, что

$$(1)\quad x \in G_{t_1}, \quad G_{t_k} \cap G_{t_{k+1}} \neq 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad y \in G_{t_n}.$$

Доказательство. Пусть x — фиксированная точка и E — множество всех точек y, которые можно соединить с точкой x цепью. Наша задача показать, что $E = C$. Так как $E \neq 0$ (поскольку $x \in E$) и так как E, очевидно, открыто, задача сводится к тому, чтобы показать, что множество E замкнуто.

Пусть $p \in \bar{E}$ и $p \in G_t$. Так как G_t открыто, то существует точка $y \in E \cap G_t$. Если цепь $G_{t_1}, \ldots, G_{t_n}$ удовлетворяет условию (1), то цепь $G_{t_1}, \ldots, G_{t_n}, G_t$ соединяет точку x с точкой p. Следовательно, $p \in E$, и потому $\bar{E} = E$.

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 9. *При тех же предположениях относительно C и $\{G_t\}$ каждой паре непустых множеств (A, B) соответствует неприводимая цепь между A и B, т. е. существует система множеств $R_1, \ldots, R_n$ $(n > 0)$, принадлежащих семейству $\{G_t\}$, такая, что если мы положим $R_0 = A$ и $R_{n+1} = B$, то условие $R_i \cap R_{i'} \neq 0$ эквивалентно неравенству $|i - i'| \leqslant 1$.*

Теорема 10. *Если при предположениях теоремы 8 индексы t пробегают множество натуральных чисел, то существует перестановка $k_1, k_2, \ldots$ этого множества, такая, что*

$$(2)\quad (G_{k_1} \cup \ldots \cup G_{k_n}) \cap G_{k_{n+1}} \neq 0 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

при условии, что множества G_k непусты.

Доказательство. Пусть $k_1 = 1$. Для $n > 0$ пусть k_{n+1} — наименьшее положительное целое число, удовлетворяющее условию (2) и отличное от чисел $k_1, \ldots, k_n$.

Такое целое число существует, так как в противном случае множество $G_{k_1} \cup \ldots \cup G_{k_n}$ было бы открыто-замкнутым и отличным от всего пространства.

Мы хотим показать, что последовательность $\{k_n\}$ содержит все положительные целые числа.

Предположим, что это неверно, и пусть $l_1, l_2, \ldots$ — последовательность (конечная или бесконечная) положительных целых чисел, не принадлежащих последовательности $\{k_n\}$. Так как пространство связно, то из этого вытекает, что

$$(G_{k_1} \cup G_{k_2} \cup \ldots) \cap (G_{l_1} \cup G_{l_2} \cup \ldots) \neq 0.$$

Следовательно, существуют два индекса n и m, такие, что

$$G_{k_n} \cap G_{l_m} \neq 0.$$

По определению k_{n+1} отсюда следует, что $k_{n+1} < l_m$ и аналогично $k_{n+2} < l_m$ и т. д. Но это невозможно, так как последовательность $\{k_n\}$ неограничена.

Теорема 11. *Прямое произведение $\mathcal{X} = \prod_{t \in T} C_t$ связных пространств связно.*

В частности, евклидово пространство $\mathcal{E}^n$, пространство Фреше $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ и гильбертов куб $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ связны.

Доказательство. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две точки пространства $C_1 \times C_2$, то множество $(C_1 \times y_1) \cup (x_2 \times C_2)$ связно как объединение двух связных множеств, имеющих общую точку (x_2, y_1). Таким образом, пространство $C_1 \times C_2$ связно, согласно следствию 3 (iii).

Итак, произведение двух связных пространств (а следовательно, любого их конечного числа) связно.

Рассмотрим теперь общий случай, когда T произвольно. Можно считать, что $C_t \neq 0$ для каждого $t \in T$.

Пусть f_0 — фиксированный элемент $\mathcal{X}$ (например, точка $(0, 0, \ldots)$, если $\mathcal{X}$ — гильбертов куб). Поставим в соответствие каждой конечной системе $S = (t_1, \ldots, t_n)$ произведение K_S множеств C_t для $t \in S$ и одноэлементных множеств $(f_0(t))$ для $t \notin S$. Иначе говоря, если $f \in \mathcal{X}$, мы имеем

$$(3) \qquad (f \in K_S) \equiv [f(t) = f_0(t) \quad \text{для} \quad t \notin S].$$

Прежде всего заметим, что K_S связно. Это вытекает из связности (только что доказанной) множества $L_S = C_{t_1} \times \ldots \times C_{t_n}$ и того факта, что K_S можно получить из этого множества с помощью непрерывного отображения, а именно с помощью отображения $h\colon L_S \to K_S$, где $h^{t_i}(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = x_{t_i}$, если $t_i \in S$, и $h^t(x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) = f_0(t)$, если $t \notin S$.

Ясно, что $(S \subset S') \Rightarrow (K_S \subset K_{S'})$, а из этого следует, что семейство всех K_S направлено; это означает, что для любой пары S_1 и S_2 существует S_3, такое, что $S_1 \subset S_3$ и $S_2 \subset S_3$ (а именно $S_3 = S_1 \cup S_2$). Следовательно, по теореме 2′ объединение $U = \bigcup_S K_S$ связно, а потому связно и $\overline{U}$ (согласно следствию 3 (ii)). Остается показать, что $\overline{U} = \mathcal{X}$, т. е. что для всякого открытого непустого множества $Q \subset \mathcal{X}$ мы имеем $U \cap Q \neq 0$.

Очевидно, можно считать, что Q принадлежит базе пространства $\mathcal{X}$. Следовательно, мы можем предположить, что существуют $S = (t_1, \ldots, t_n)$ и множества G_{t_i}, открытые относительно C_{t_i} (для $t_i \in S$), такие, что Q есть произведение этих множеств и множеств C_t при $t \notin S$:

$$Q = \prod_t G_t, \quad \text{где} \quad G_t = C_t \quad \text{для} \quad t \notin S.$$

Пусть $f \in Q$ — такой элемент, что $f(t) = f_0(t)$ для $t \notin S$. Согласно (3), $f \in K_S$. Следовательно, $f \in U \cap Q$.

Лемма. *Пусть отображения f_i: $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ непрерывны для $i = 1, \ldots, n$ (где $\mathscr{X}$ есть $\mathscr{T}_1$-пространство). Положим $F(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$. Тогда отображение F: $\mathscr{Y} \to 2^{\mathscr{X}}$ непрерывно* (заметим, что $F(y)$ есть *множество*, составленное самое большее из n элементов, а не конечная *последовательность*).

Доказательство. Чтобы доказать непрерывность F, достаточно показать, что прообраз $F^{-1}(\mathfrak{G})$ всякого открытого множества $\mathfrak{G}$ из $2^{\mathscr{X}}$ есть открытое множество в $\mathscr{Y}$. Очевидно, что область изменения $\mathfrak{G}$ можно ограничить открытой предбазой пространства $2^{\mathscr{X}}$. Таким образом, мы должны показать, что множества

$$\underset{y}{\mathsf{E}}[F(y) \subset H] \quad \text{и} \quad \underset{y}{\mathsf{E}}[F(y) \cap H \neq 0]$$

открыты в $\mathscr{Y}$ для каждого множества H, открытого в $\mathscr{Y}$.

В первом случае мы должны показать, что если $F(y_0) \subset H$, то существует Q, открытое в $\mathscr{Y}$, такое, что $y_0 \in Q$ и $F(Q) \subset H$. Но включение $F(y_0) \subset H$ означает, что $f_i(y_0) \in H$ для каждого $i \leqslant n$. Так как отображение f_i непрерывно, существует открытое в $\mathscr{Y}$ множество Q_i, такое, что $y_0 \in Q_i$ и $f_i(Q_i) \subset H$. Остается положить $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$.

Во втором случае мы должны показать, что если $F(y_0) \cap H \neq 0$, то существует открытое множество Q, такое, что $y_0 \in Q$ и $F(y) \cap H \neq 0$ для каждого $y \in Q$. Соотношение $F(y_0) \cap H \neq 0$ означает, что существует $i \leqslant n$, такое, что $f_i(y_0) \in H$. Пусть множество Q_i определено, как выше. Очевидно, остается положить $Q = Q_i$.

Теорема 12[1]). *Если C — связное $\mathscr{T}_1$-пространство, то семейство $\boldsymbol{F}_n \subset 2^C$ всех подмножеств, составленных не более чем из n элементов, связно.*

Следовательно, *семейство $\boldsymbol{F}$ всех конечных подмножеств пространства C связно.*

[1]) См. Майкл Э. [1, стр. 165].

Доказательство. Положим в лемме $\mathscr{X}=C$, $\mathscr{Y}=C^n$ и $f_i(x_1, \ldots, x_n)=x_i$. Тогда $F(x_1, \ldots, x_n)$ — подмножество в C, составленное из элементов $x_1, \ldots, x_n$. Очевидно, $F\colon C^n \to \boldsymbol{F}_n$ есть непрерывное отображение на (так как отображения f_i непрерывны по теореме 1 из § 15, II). Так как пространство C^n связно (по теореме 11), то связно и $\boldsymbol{F}_n$ (по теореме 3 п. I).

Так как $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1 \cup \boldsymbol{F}_2 \cup \ldots$ и $\boldsymbol{F}_k \subset \boldsymbol{F}_{k+1}$, то $\boldsymbol{F}$ связно, согласно теореме 2.

Следствие 13. *Если C — связное $\mathcal{T}_1$-пространство, то таким же является пространство 2^C.*

В самом деле, $2^C=\overline{\boldsymbol{F}}$ (по теореме 4 из § 17, II).

Теорема 14. *Семейство $\boldsymbol{C}$ всех замкнутых связных подмножеств нормального пространства $\mathscr{X}$ замкнуто в $2^{\mathscr{X}}$* [1]).

Доказательство. Пусть $A \subset \mathscr{X}$ — несвязное замкнутое множество. Тогда $A=M \cup N$, где M и N замкнуты и $M \cap N=0$, $M \neq 0 \neq N$. Так как пространство $\mathscr{X}$ нормально, существуют два открытых множества G и H, таких, что $M \subset G$, $N \subset H$ и $G \cap H=0$. Обозначим через $\boldsymbol{V}$ семейство всех замкнутых множеств F, таких, что

(4) $$F \subset G \cup H \quad \text{и} \quad F \cap G \neq 0 \neq F \cap H.$$

Очевидно, $\boldsymbol{V}$ открыто в $2^{\mathscr{X}}$. Кроме того, $A \in \boldsymbol{V}$, и никакое связное множество F не удовлетворяет условию (4), т. е. $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{C}=0$. Следовательно, множество $2^{\mathscr{X}}-\boldsymbol{C}$ открыто.

III. Компоненты. Множество называется *компонентой* пространства, если оно насыщено относительно свойства быть связным [2]); другими словами, C — компонента, если C связно и если для любого связного множества C_1 из включения $C \subset C_1$ вытекает, что $C=C_1$.

Легко видеть (см. теорему 2 и следствие 3 п. II), что справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Компоненты являются непересекающимися замкнутыми множествами.*

Теорема 2. *Всякое непустое связное множество содержится в одной и только в одной компоненте пространства.*

Теорема 3. *Если C — компонента множества A и если $C \subset B \subset A$, то C есть компонента множества B.*

---

[1]) См. Майкл Э. [1, стр. 166, теорема 4.13.5].

[2]) По Хаусдорфу [1].

Теорема 4. *Всякое открыто-замкнутое множество F есть объединение семейства компонент пространства. В частности, если множество F связно и непусто, то оно — компонента.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1 п. II не существует компоненты C, такой, что $C \cap F \neq 0 \neq C - F$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — связное пространство. Если A — связное множество и C — компонента множества $\mathscr{X} - A$, то множество $\mathscr{X} - C$ связно.*

Доказательство. Предположим, что

$$\mathscr{X} - C = M \cup N, \quad (\bar{M} \cap N) \cup (M \cap \bar{N}) = 0.$$

Наша задача — показать, что либо $M = 0$, либо $N = 0$. Так как

$$A \subset \mathscr{X} - C = M \cup N,$$

то, согласно теореме 1 п. II, можно считать, что $A \cap M = 0$, откуда следует, что

$$A \cap (C \cup M) = 0, \quad \text{и поэтому} \quad C \subset (C \cup M) \subset \mathscr{X} - A.$$

Так как множество $C \cup M$ связно (по теореме 4 п. II), то из этого двойного включения следует в соответствии с определением компоненты, что $C = C \cup M$, откуда $M = 0$.

Из теоремы 5 вытекают такие следствия:

Теорема 6. *Если пространство $\mathscr{X}$ связно, то всякая конечная система S (содержащая по крайней мере два элемента) непересекающихся связных подмножеств содержит по крайней мере два элемента X и Y, обладающих следующим свойством:*

(**P**) *Существует связное множество, не пересекающееся с X (соответственно с Y), которое содержит все элементы S, отличные от X (соответственно от Y).*

Доказательство. Пусть $S = (C_0, C_1, \ldots, C_n)$; воспользуемся индукцией. При $n = 1$ утверждение очевидно; предположим, что оно имеет место для $n - 1$ ($\geqslant 1$).

Покажем, что существует число $k > 0$, такое, что множество C_k обладает свойством (**P**).

Предположим, что множество C_1 не обладает этим свойством. Тогда существуют по крайней мере две компоненты A и B множества $\mathscr{X} - C_1$, содержащие множества системы S; пусть A — та компонента, которая не содержит C_0.

Пусть $m_1, \ldots, m_j$ — последовательность индексов множеств C_i, содержащихся в A. Тогда

(1) $$1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

(2) $$0 \neq m_1, \ldots, 0 \neq m_j,$$

(3) *если* $r \neq m_1, \ldots, r \neq m_j$ *и* $r \leqslant n$, *то* $C_r \subset \mathscr{X} - A$.

Так как множество $\mathscr{X} - A$ связно (по теореме 5) и система

$$S^* = (X - A, C_{m_1}, C_{m_2}, \ldots, C_{m_j})$$

содержит не более n элементов (согласно (1)), то по предположению существует индекс $s \leqslant j$, такой, что множество C_{m_s} обладает свойством (**P**) по отношению к системе S^*. Следовательно, существует связное множество K, такое, что

$$(\mathscr{X} - A) \cup C_{m_1} \cup \ldots \cup C_{m_{s-1}} \cup C_{m_{s+1}} \cup \ldots \cup C_{m_j} \subset K \subset \mathscr{X} - C_{m_s}.$$

Согласно (3), $C_q \subset K$ для каждого $q \neq m_s$. Это означает, что множество C_{m_s} обладает свойством (**P**) (по отношению к системе S).

Наконец, $m_s > 0$, согласно (2); следовательно, m_s есть искомый индекс k.

Теорема 7. *Пусть S — бесконечное семейство непересекающихся связных множеств в связном пространстве $\mathscr{X}$. Если S_0 и S_1 — два произвольных элемента S, то в $\mathscr{X} - S_0$ или $\mathscr{X} - S_1$ имеется связное множество, содержащее бесконечно много элементов из S.*

Доказательство. Пусть C_j (для $j = 0, 1$) — компонента множества $\mathscr{X} - S_j$, содержащая S_{1-j}. Из условия $S_j \subset C_{1-j} \subset \mathscr{X} - S_{1-j}$ вытекает двойное включение

$$S_{1-j} \subset \mathscr{X} - C_{1-j} \subset \mathscr{X} - S_j,$$

из которого в свою очередь следует, что

(4) $$\mathscr{X} - C_{1-j} \subset C_j,$$

так как множество $\mathscr{X} - C_{1-j}$ связно (по теореме 5).

Предположим, что C_0 содержит только конечное число элементов из S. Тогда существует бесконечно много элементов S, содержащихся в $\mathscr{X} - C_0$ и, следовательно, согласно (4), в C_1. Таким образом, множество $\mathscr{X} - S_1$ содержит связное множество, а именно C_1, которое содержит бесконечно много элементов семейства S.

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{Z} = \prod_t \mathcal{X}_t$, $\mathfrak{z} = \{\mathfrak{z}^t\} \in \mathfrak{Z}$ *и* C_t — *компонента* $\mathfrak{z}^t$ *в* $\mathcal{X}_t$. *Тогда* $C = \prod_t C_t$ — *компонента* $\mathfrak{z}$ *в* $\mathfrak{Z}$.

Доказательство. Так как C_t связно для каждого t, то C связно по теореме 11 п. II, и, очевидно, $\mathfrak{z} \in C$. Пусть D — связное множество, такое, что $C \subset D \subset \mathfrak{Z}$. Покажем, что $D = C$.

Пусть D_t — проекция D на $\mathcal{X}_t$. Тогда D_t связно и $C_t \subset D_t$. Так как C_t — компонента $\mathcal{X}_t$, то $D_t = C_t$. Следовательно, $\prod_t D_t = C$. Но $C \subset D \subset \prod_t D_t$. Таким образом, $D = C$.

Теорема 9. *Пусть* $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *монотонное непрерывное отображение на. Множество* C *является компонентой множества* $D \subset \mathcal{Y}$ *тогда и только тогда, когда* $f^{-1}(C)$ — *компонента множества* $f^{-1}(D)$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\text{из } f^{-1}(C) \subset E \subset f^{-1}(D) \quad \text{следует} \quad C \subset f(E) \subset D.$$

Далее, если предположить, что C — компонента D и E связно, то

$$C = f(E), \quad \text{откуда} \quad f^{-1}(C) = f^{-1}f(E) \supset E \quad \text{и} \quad f^{-1}(C) = E,$$

т. е. $f^{-1}(C)$ есть компонента множества $f^{-1}(D)$.

Обратно, если предположить, что $f^{-1}(C)$ — компонента $f^{-1}(D)$, и если H — такое связное множество, что $C \subset H \subset D$, то

$$f^{-1}(C) \subset f^{-1}(H) \subset f^{-1}(D),$$

и так как множество $f^{-1}(H)$ связно, то

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(H), \quad \text{что дает} \quad C = H.$$

Следовательно, C есть компонента D.

IV. Связность между множествами. Пространство называется *связным между* A *и* B, если не существует открыто-замкнутого множества F, такого, что $A \subset F$ и $F \cap B = 0$ [1]).

Связность между двумя множествами есть симметричное отношение, ибо множество $\mathcal{X} - F$ открыто-замкнуто, $B \subset \mathcal{X} - F$ и $(\mathcal{X} - F) \cap A = 0$.

---

[1]) Ср. Мазуркевич [1].

Легко доказать следующие утверждения.

Теорема 1a. *Если пространство $\mathcal{X}$ связно между A и B, то $A \neq 0 \neq B$, а если $A \subset A_1$ и $B \subset B_1$, то $\mathcal{X}$ связно между A_1 и B_1.*

Теорема 1b. *Если $\mathcal{X}$ связно между $\overline{A}$ и $\overline{B}$, то оно связно и между A и B.*

Если $A \cap B \neq 0$, то $\mathcal{X}$ связно между A и B.

Теорема 1c. *Связное пространство связно между любой парой своих непустых подмножеств.*

Теорема 1d. *Если подмножество пространства связно между A и B, то и все пространство обладает этим свойством.*

Теорема 2. *Метрическое (сепарабельное) пространство имеет размерность 0 тогда и только тогда, когда не существует пары непересекающихся замкнутых множеств, между которыми оно связно* (§ 26, II, теорема 2); *оно имеет положительную размерность в точке a тогда и только тогда, когда оно связно между a и некоторым замкнутым множеством B, не содержащим a.*

Теорема 3. *Если пространство не является связным ни между A и B_0, ни между A и B_1, то оно не является связным между A и $B_0 \cup B_1$.*

Доказательство. Пусть F_j, где $j = 0, 1$, — такое открыто-замкнутое множество, что $A \subset F_j$ и $F_j \cap B_j = 0$. Положим $F = F_0 \cap F_1$. Тогда множество F открыто-замкнуто и удовлетворяет следующим условиям:

$$A \subset F \quad \text{и} \quad F \cap (B_0 \cup B_1) = 0.$$

Теорема 4. *Пусть $A_0, \ldots, A_n$ — такая система множеств, что пространство не является связным между любой парой множеств A_i, A_j, где $i \neq j$; тогда существует система открыто-замкнутых непересекающихся множеств $F_0, \ldots, F_n$, такая, что*

$$(1) \quad \mathcal{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_n \quad \textit{и} \quad A_i \subset F_i \quad \textit{для} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Достаточно доказать его для $n > 1$, предполагая, что оно верно для $n - 1$.

Положим $A_i^* = A_i$ для $i < n - 1$ и $A_{n-1}^* = A_{n-1} \cup A_n$. Согласно теореме 3, пространство не является связным между любой парой A_i^*, A_j^* для $i \neq j$. Таким образом, по предположению существует система непересекающихся замкнутых множеств $F_0^*, \ldots, F_{n-1}^*$, такая, что

$$(2) \quad \mathcal{X} = F_0^* \cup \ldots \cup F_{n-1}^* \quad \text{и} \quad A_i^* \subset F_i^* \quad \text{для} \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Так как пространство не является связным между A_{n-1} и A_n, то этим свойством обладает и множество F'_{n-1} (ср. с теоремой 1d). Следовательно, существуют два непересекающихся замкнутых множества F_{n-1} и F_n, удовлетворяющих условиям

$$(3)\qquad F^*_{n-1}=F_{n-1}\cup F_n,\quad A_{n-1}\subset F_{n-1}\quad \text{и}\quad A_n\subset F_n.$$

Положим $F_i=F^*_i$ для $i<n-1$. Соотношение (1) следует из (2) и (3).

Теорема 5. *Если пространство не является связным между A и B, то функцию f, равную 1 на A и 0 на B, можно непрерывно продолжить на все пространство так, чтобы она принимала только два значения 0 и 1.*

Обратно, если f — непрерывная функция с целочисленными значениями, и если множества $f(A)$ и $f(B)$ не пересекаются, то пространство не связно между A и B.

Доказательство. Во-первых, характеристическая функция открыто-замкнутого множества F, такого, что $A\subset F$ и $F\cap B=0$, есть искомое продолжение f.

Во-вторых, если положить $F=f^{-1}[f(A)]$, то $A\subset F$ и $F\cap B=0$, так как

$$A\subset f^{-1}[f(A)]\ \text{ и }\ F\cap B\subset f^{-1}[f(A)]\cap f^{-1}[f(B)]=f^{-1}[f(A)\cap f(B)]=0.$$

Теорема 6. *В любом пространстве со счетной открытой базой существует такая последовательность $F_1, F_2, \ldots$ открыто-замкнутых множеств, что каждой паре точек p, q, между которыми пространство не является связным, соответствует индекс n, такой, что F_n содержит p, но не содержит q.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства, состоящая из открытых множеств. Если пространство не связно между R_i и R_j, то обозначим через F_{ij} открыто-замкнутое множество, такое, что $R_i\subset F_{ij}$ и $F_{ij}\cap R_j=0$. Расположим множества F_{ij} в простую последовательность $F_1, F_2, \ldots$. Это и есть искомая последовательность. Действительно, если F — открыто-замкнутое множество, такое, что $p\in F$ и $q\in\mathcal{X}-F$, то существуют множества R_i и R_j, такие, что $p\in R_i\subset F$ и $q\in R_j\subset\mathcal{X}-F$. Это означает, что $\mathcal{X}$ не является связным между R_i и R_j. Следовательно, существует такое n, что $p\in R_i\subset F_n$ и $q\in R_j\subset\mathcal{X}-F_n$.

Замечание 1. Если пространство компактно, то в качестве семейства $\{F_n\}$ можно взять семейство всех открыто-замкнутых множеств. Указанное семейство счетно, согласно теореме 4 из § 41, II.

Замечание 2. Теорему 6 можно обобщить следующим образом. Если $\mathscr{X}$ — пространство бесконечного веса $\mathfrak{m}$, т. е. если оно имеет открытую базу $\boldsymbol{B}$ мощности $\mathfrak{m}$, то существует такое семейство $\boldsymbol{C}$ мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, состоящее из открыто-замкнутых множеств, что для любой пары точек p, q, между которыми пространство не связно, найдется элемент из $\boldsymbol{C}$, содержащий точку p, но не содержащий точку q.

Теорема 7. *Подмножество E наследственно нормального пространства $\mathscr{X}$ связно между двумя подмножествами A и B тогда и только тогда, когда не существует открытого множества G (в $\mathscr{X}$), такого, что*

$$E \cap \operatorname{Fr}(G) = 0, \quad A \subset G, \quad \bar{G} \cap B = 0.$$

Доказательство. Если такое множество G существует, то множество $E \cap G$ открыто-замкнуто в E. Обратно, если F открыто-замкнуто в E, то множества F и $E - F$ отделимы и существует (по теореме 3 из § 14, V) множество G, такое, что

$$F \subset G \quad \text{и} \quad \bar{G} \cap E \subset F, \quad \text{откуда} \quad E \cap \bar{G} - G = 0.$$

Теорема 8. *Если пространство $\mathscr{X}$ связно, то всякое собственное замкнутое подмножество A связно между своей границей (т. е. между множеством $A \cap \overline{\mathscr{X} - A}$) и каждой своей точкой.*

Если метрическое сепарабельное пространство $\mathscr{X}$ имеет положительную размерность в точке a, то существует число $\varepsilon > 0$, такое, что всякое замкнутое множество A, содержащее a и имеющее диаметр $< \varepsilon$, связно между a и $A \cap \overline{\mathscr{X} - A}$.

Доказательство. Предположим, что F — замкнутое подмножество множества A, такое, что множество $A - F$ замкнуто, $a \in F$ и $F \cap \overline{\mathscr{X} - A} = 0$. Тогда имеет место разложение

$$\mathscr{X} = F \cup [(A - F) \cup \overline{\mathscr{X} - A}]$$

на два непересекающихся непустых замкнутых множества (причем $\delta(F) < \varepsilon$).

Теорема 9. *Если в метрическом пространстве множества $C_1, C_2, \ldots$ связны, $a \in \operatorname{Li}_{n\to\infty} C_n$ и $b \in \operatorname{Li}_{n\to\infty} C_n$, то множество $E = a \cup b \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ связно между a и b.*

Доказательство. В противном случае в E существовало бы открыто-замкнутое множество F, такое, что $a \in F$ и $b \in E - F$. Так как $a \in F \cap \operatorname{Li}_{n\to\infty} C_n$, то $F \cap C_n \neq 0$ для достаточно больших значений n, следовательно, $C_n \subset F$ (поскольку C_n связно, а F отделимо от $E-F$). Но тогда $\underset{n\to\infty}{\mathrm{Li}}\, C_n \subset \overline{F}$, откуда следует, что $b \in F$.

Пример. Пусть

$$C_n = \underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[(-1 \leqslant x \leqslant 1)(y = 1/n)], \quad a = (-1,\, 0), \quad b = (+1,\, 0).$$

Множество E связно между a и b, однако a и b принадлежат двум различным компонентам множества E.

Более того, $E-(b)$ связно между a и множеством B точек $(1,\, 1/n)$, $n = 1,\, 2,\, \ldots$, но оно *не связно между a и любой отдельной точкой множества B* (ср. также § 47, II, теорема 1).

Пусть $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{J}_2$-пространство. Введем сокращенное обозначение

$$(x_0 \approx x_1) \equiv (\mathscr{X} \textit{ связно между } x_0 \textit{ и } x_1).$$

Очевидно, что отношение $x_0 \approx x_1$ есть *отношение эквивалентности.*

Теорема 10. *Отношение $x_0 \approx x_1$ мультипликативно.*

Это означает, что если задано семейство пространств $\{\mathscr{X}_t\}$, $t \in T$, то для каждой пары точек $\mathfrak{z}$ и $\mathfrak{y}$ пространства $\mathscr{X} = \prod\limits_t \mathscr{X}_t$ справедливо соотношение

$$(1) \qquad (\mathfrak{z} \approx \mathfrak{y}) \equiv \bigwedge_t (\mathfrak{z}^t \approx \mathfrak{y}^t).$$

Доказательство. Вначале предположим, что для данного $t = t_0$ соотношение $\mathfrak{z}^t \approx \mathfrak{y}^t$ не имеет места. Тогда существуют два открытых множества G_t и H_t, таких, что

$$G_t \cap H_t = 0, \quad G_t \cup H_t = \mathscr{X}_t, \quad \mathfrak{z}^t \in G_t, \quad \mathfrak{y}^t \in H_t.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — прямое произведение множества G_t на множество всех осей $\mathscr{X}_{t'}$, где $t' \neq t$. Аналогично определим $\mathfrak{H}$. Тогда

$$(2) \qquad \mathfrak{G} \cap \mathfrak{H} = 0, \quad \mathfrak{G} \cup \mathfrak{H} = \mathscr{X}, \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{y} \in \mathfrak{H}.$$

Это означает, что соотношение $\mathfrak{z} \approx \mathfrak{y}$ не имеет места.

Далее предположим, что $\mathfrak{z}^t \approx \mathfrak{y}^t$ для каждого t. Мы должны показать, что $\mathfrak{z} \approx \mathfrak{y}$.

Рассмотрим случай, когда T конечно: $T = (1,\, 2,\, \ldots,\, n)$, и применим индукцию. Очевидно, наше утверждение верно для $n = 1$. Предположим, что оно верно для $n-1$. Положим $\mathfrak{w} = (\mathfrak{z}^1,\, \ldots,\, \mathfrak{z}^{n-1},\, \mathfrak{y}^n)$. По предположению

$$(\mathfrak{z}^1,\, \ldots,\, \mathfrak{z}^{n-1}) \approx (\mathfrak{y}^1,\, \ldots,\, \mathfrak{y}^{n-1}) \quad \text{в} \quad \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_{n-1}.$$

Поэтому

$$\mathfrak{z} \approx \mathfrak{w} \;\text{ в }\; (\mathfrak{z}^1,\, \ldots,\, \mathfrak{z}^{n-1}) \times \mathscr{X}_n \;\text{ и }\; \mathfrak{w} \approx \mathfrak{y} \;\text{ в }\; \mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_{n-1} \times (\mathfrak{y}^n),$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{z} \approx \mathfrak{y} \quad \text{в} \quad ((\mathfrak{z}^1, \ldots, \mathfrak{z}^{n-1}) \times \mathscr{X}_n) \cup (\mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_{n-1} \times (\mathfrak{y}^n)),$$

и, следовательно, в $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2 \times \ldots \times \mathscr{X}_n$.

Это завершает доказательство в случае конечного T.

Рассмотрим общий случай, когда T произвольно, и предположим, что $\mathfrak{z}^t \approx \mathfrak{y}^t$ для каждого $t \in T$, тогда как соотношение $\mathfrak{z} \approx \mathfrak{y}$ не верно. Тогда в $\mathscr{X}$ существуют два открытых множества $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условиям (2). По определению топологии в $\mathscr{X}$ (ср. § 16, I) существует конечная система индексов $t_1, \ldots, t_n$, такая, что

$$\mathfrak{z} \in \prod_t G_t \subset \mathfrak{G},$$

где G_t открыто в $\mathscr{X}_t$ и $G_{t'} = \mathscr{X}_{t'}$, если $t' \neq t_i$ для каждого $i \leqslant n$.

Определим точку $\mathfrak{w} \in \mathscr{X}$ условием

$$\mathfrak{w}^t = \begin{cases} \mathfrak{z}^t & \text{для} \quad t = t_i,\ i \leqslant n, \\ \mathfrak{y}^t & \text{для других } t. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{w} \in \prod_t G_t$, откуда $\mathfrak{w} \in \mathfrak{G}$. Покажем, что $\mathfrak{w} \approx \mathfrak{y}$ в $\mathscr{X}$; это и приведет нас к противоречию (с условиями (2)).

Итак, пусть

$$\mathfrak{K} = \prod_t K_t, \quad \text{где} \quad K_t = \begin{cases} \mathscr{X}_t & \text{для} \quad t = t_i, \quad i \leqslant n, \\ (\mathfrak{y}^t) & \text{для других } t. \end{cases}$$

Как показано выше,

$$(\mathfrak{z}^{t_1}, \ldots, \mathfrak{z}^{t_n}) \approx (\mathfrak{y}^{t_1}, \ldots, \mathfrak{y}^{t_n}) \quad \text{в} \quad \mathscr{X}_{t_1} \times \ldots \times \mathscr{X}_{t_n},$$

а из этого вытекает, что $\mathfrak{w} \approx \mathfrak{y}$ в $\mathfrak{K}$ и, следовательно, в $\mathscr{X}$.

Теорема 11. *Отношение $x_0 \approx x_1$ замкнуто.*

Иначе говоря, *множество $\mathfrak{F} = \underset{x_0, x_1}{\mathsf{E}} (x_0 \approx x_1)$ замкнуто в пространстве $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$.*

Доказательство. Пусть $\langle x_0, x_1 \rangle \notin \mathfrak{F}$. Тогда существует открыто-замкнутое множество A, такое, что $x_0 \in A$ и $x_1 \notin A$, т. е. $\langle x_0, x_1 \rangle \in [A \times (\mathscr{X} - A)]$. Далее, если $x \in A$ и $x' \in \mathscr{X} - A$, то $\mathscr{X}$ не связно между x и x'. Отсюда

$$[A \times (\mathscr{X} - A)] \cap \mathfrak{F} = 0$$

и, следовательно,

$$\langle x_0, x_1 \rangle \in [A \times (\mathscr{X} - A)] \subset \mathscr{X} \times \mathscr{X} - \mathfrak{F}.$$

Поэтому множество $\mathscr{X} \times \mathscr{X} - \mathfrak{F}$ открыто.

Теорема 12. *Пусть $\mathscr{X}$ — наследственно нормальное пространство и $A \subset \mathscr{X}$. Множество A связно между x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда каждое открытое множество $G \supset A$ связно между этими точками.*

Доказательство. Очевидно, что если A связно между x_1 и x_2, то между этими точками связно и G (это верно для произвольного пространства $\mathscr{X}$).

Предположим теперь, что A не связно между x_1 и x_2. Тогда существуют два отделимых множества P_1 и P_2, таких, что $x_1 \in P_1$ и $x_2 \in P_2$. Так как пространство $\mathscr{X}$ наследственно нормально, существуют открытые множества G_1 и G_2, такие, что $P_1 \subset G_1$, $P_2 \subset G_2$ и $G_1 \cap G_2 = 0$ (ср. § 14, V, теорема 1). Очевидно, множество $G = G_1 \cup G_2$ не связно между x_1 и x_2.

V. Квазикомпоненты. *Квазикомпонентой* точки p называется пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку p[1]). Другими словами, это множество всех точек x, таких, что пространство связно между p и x.

Ясно, что квазикомпоненты — это классы эквивалентности, определяемые отношением $x_1 \approx x_2$. Их семейство есть *фактор-семейство* $\mathscr{X}/\approx$ (ср. § 2, VII, стр. 18).

Легко устанавливаются следующие утверждения.

Теорема 1. *Компонента точки p содержится в квазикомпоненте точки p.*

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно (как показывает пример из п. IV). Однако оно верно для компактных $\mathscr{T}_2$-пространств (см. § 47, II, теорема 2).

Теорема 2. *Квазикомпоненты представляют собой непересекающиеся замкнутые множества.*

Теорема 3. *Для всякого $\mathscr{T}_2$-пространства $\mathscr{X}$ существуют обобщенный канторов дисконтинуум $D^{\mathfrak{m}}$ (где D — двуэлементное множество $(0, 1)$) и непрерывное отображение $f: \mathscr{X} \to D^{\mathfrak{m}}$, такое, что квазикомпоненты пространства $\mathscr{X}$ совпадают с прообразами точек при отображении f.*

В частности, *если $\mathscr{X}$ имеет счетную открытую базу, то $D^{\mathfrak{m}}$ можно заменить канторовым дисконтинуумом $\mathscr{C}$*[2]).

---

[1]) См. Хаусдорф [2, стр. 248].

[2]) См. Куратовский [37, стр. 245], где показано, что если $\mathscr{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, то функции f, удовлетворяющие условию теоремы 3, образуют остаточное множество в пространстве $\mathscr{C}^{\mathscr{X}}$.

Доказательство. Пусть $A=\{F_t\}$, $t\in T$, — семейство всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$, и пусть f — его характеристическая функция; это значит (см. § 3, VII), что $f^t(x)=1$, если $x\in F_t$, и $f^t(x)=0$, если $x\in\mathscr{X}-F_t$. Пусть $\mathfrak{m}=\overline{\overline{T}}$ — кардинальное число множества T. Следовательно, $f\colon\mathscr{X}\to D^{\mathfrak{m}}$. Очевидно, f^t непрерывно для каждого $t\in T$, а поэтому непрерывно и f.

Далее, если $x\approx x'$, то $f^t(x)=f^t(x')$ для каждого $t\in T$; следовательно, $f(x)=f(x')$. Обратно, если отношение $x\approx x'$ не выполняется, то для некоторого t мы имеем $x\in F_t$, тогда как $x'\in\mathscr{X}-F_t$, т. е. $f^t(x)=1$ и $f^t(x')=0$, откуда $f(x)\neq f(x')$.

Это завершает доказательство первой части теоремы.

Теперь заметим, что вместо семейства A можно рассматривать подсемейство $\{F_t\}$, $t\in T_0$, со следующим свойством: для всякой пары точек x, x', такой, что $x\approx x'$ не имеет места, существует $t\in T_0$, такое, что $x\in F_t$, тогда как $x'\in\mathscr{X}-F_t$.

В частности, если $\mathscr{X}$ имеет счетную базу, то можно предположить, что множество T_0 счетно (по теореме 6 из п. IV); это завершает доказательство второй части теоремы.

Теорема 4. *Всякое метрическое сепарабельное пространство $\mathscr{X}$ топологически содержится в таком компактном пространстве $\mathscr{X}^*$, что две различные квазикомпоненты пространства $\mathscr{X}$ всегда содержатся в двух различных квазикомпонентах пространства $\mathscr{X}^*$*[1]).

Более того, *в функциональном пространстве $(\mathscr{I}^{\aleph_0})^{\mathscr{X}}$ гомеоморфизмы f, такие, что множество $\mathscr{X}^*=\overline{f(\mathscr{X})}$ удовлетворяет указанным выше условиям, образуют остаточное множество.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2, ... — последовательность открыто-замкнутых множеств, рассмотренных в теореме 6 п. IV (пространство $\mathscr{X}$ не предполагается связным). Согласно следствию 4а § 44, V и теореме 2 § 44, VI, множество Φ_n гомеоморфизмов f, таких, что

$$(0)\qquad f\in(\mathscr{I}^{\aleph_0})^{\mathscr{X}} \quad\text{и}\quad \overline{f(F_n)}\cap\overline{f(\mathscr{X}-F_n)}=0,$$

является остаточным в пространстве $(\mathscr{I}^{\aleph_0})^{\mathscr{X}}$. Следовательно, этим свойством обладает и множество $\Phi=\Phi_1\cap\Phi_2\cap\ldots$.

Пусть $f\in\Phi$. Пусть p и q — две точки, принадлежащие двум различным квазикомпонентам P и Q пространства $\mathscr{X}$. Тогда существует такой индекс n, что

$$p\in F_n \quad\text{и}\quad q\in\mathscr{X}-F_n,\quad\text{откуда}\quad f(p)\in f(F_n) \quad\text{и}\quad f(q)\in f(\mathscr{X}-F_n).$$

[1]) Куратовский [37, стр. 243]. Эта теорема была сформулирована Кнастером.

Так как

$$\mathscr{X}^* = \overline{f(\mathscr{X})} = \overline{f(F_n)} \cup \overline{f(\mathscr{X} - F_n)}$$

и $f \in \Phi_n$, то в силу тождества (0) $\mathscr{X}^*$ не связно между $f(p)$ и $f(q)$; поэтому эти точки принадлежат двум различным квазикомпонентам пространства $\mathscr{X}^*$.

Теорему 10 п. IV можно переформулировать следующим образом.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{z} = \{\mathfrak{z}^t\}$ — точка произведения $Z = \prod\limits_{t \in T} \mathscr{X}_t$, и пусть Q — квазикомпонента точки $\mathfrak{z}$ в Z. Тогда $Q = \prod\limits_t Q_t$, где Q_t — квазикомпонента точки $\mathfrak{z}^t$ в $\mathscr{X}_t$.*

Va. Пространство квазикомпонент. Обозначим через $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$ фактортопологию пространства $\mathscr{X}/\approx$, где $x_0 \approx x_1$ означает, что пространство $\mathscr{X}$ связно между x_0 и x_1 (в соответствии с п. IV). Другими словами, множество $G \subset \mathfrak{C}(\mathscr{X})$ открыто в $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$, если объединение всех квазикомпонент в G открыто в пространстве $\mathscr{X}$ (см. § 19, I).

Кроме $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$, рассматривается еще другая топология семейства всех квазикомпонент (обозначим ее $Q(\mathscr{X})$).

Именно, в качестве открытой базы топологии $Q(\mathscr{X})$ берутся все множества вида

$$\mathop{\mathrm{E}}_A (A \subset F), \tag{1}$$

где F — открыто-замкнутое множество в $\mathscr{X}$ и A — квази-компонента пространства $\mathscr{X}$[1]).

Следующие два утверждения очевидны.

Теорема 1. *Топология $Q(\mathscr{X})$ слабее, чем $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$.*

Другими словами, *тождественное отображение есть взаимно однозначное непрерывное отображение $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$ на $Q(\mathscr{X})$.*

Теорема 2. *Множества вида $\mathop{\mathrm{E}}\limits_A (A \subset F)$ открыто-замкнуты в $Q(\mathscr{X})$. Следовательно, $Q(\mathscr{X})$ нульмерно и вполне регулярно.*

Замечание. Очевидно, что если каждая квазикомпонента пространства $\mathscr{X}$ состоит из одной точки, то $\mathfrak{C}(\mathscr{X})$ гомеоморфно $\mathscr{X}$. Следовательно, если $\mathscr{X}$ имеет положительную раз-

[1]) Ср. де Гроот [2], где рассматривается случай метрического сепарабельного пространства $\mathscr{X}$. Общий случай см. Майкл Э. [10, стр. 15]. См. также де Фрис [1, гл. 3] и Лелек [3, стр. 81].

мерность (а такие пространства, безусловно, существуют; см. п. VI), то топологии $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ и $Q(\mathcal{X})$ различны.

Теорема 3. *Обозначим через $P(x)$ квазикомпоненту, содержащую x. Тогда (естественное) отображение P: $\mathcal{X} \to Q(\mathcal{X})$ непрерывно.*

Это вытекает из соотношения эквивалентности

$$(P(x) \subset F) \equiv (x \in F),$$

где F — открыто-замкнутое множество.

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}$ — компактное $\mathcal{T}_2$-пространство, то таким же является и пространство $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$. Более того, пространства $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ и $Q(\mathcal{X})$ гомеоморфны.*

(В этом случае квазикомпоненты $\mathcal{X}$ совпадают с компонентами, см. § 47, II, теорема 2.)

Доказательство. По теореме 3 п. IV существует непрерывное отображение f: $\mathcal{X} \to D^{\mathfrak{m}}$, такое, что $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ совпадает с разложением пространства $\mathcal{X}$ на прообразы точек $\overset{-1}{f}(y)$, где $y \in f(\mathcal{X})$. Отсюда следует (по теореме 2 из § 19, II), что $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ гомеоморфно $f(\mathcal{X})$.

Так как $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ компактно, то компактно и $Q(\mathcal{X})$ (по теореме 1).

Теорему 3 п. V можно усилить следующим образом.

Теорема 5. *Для всякого $\mathcal{T}_2$-пространства $\mathcal{X}$ существует взаимно однозначное непрерывное отображение g: $Q(\mathcal{X}) \to D^{\mathfrak{m}}$ (для подходящего $\mathfrak{m}$).*

Именно, $(g(A) = y) \equiv (\overset{-1}{f}(y) = A)$ *для каждого* $A \in Q(\mathcal{X})$.

Доказательство. По теореме 3 отображение g взаимно однозначно. Остается показать, что g непрерывно. Так как $D^{\mathfrak{m}}$ имеет открыто-замкнутую базу, достаточно показать, что если множество G открыто-замкнуто в $D^{\mathfrak{m}}$, то $g^{-1}(G)$ открыто в $Q(\mathcal{X})$.

Далее, так как f непрерывно, то множество $f^{-1}(G)$ открыто-замкнуто в $\mathcal{X}$. Покажем, что

$$(A \in g^{-1}(G)) \equiv (A \subset f^{-1}(G));$$

это завершит доказательство.

Пусть $A \in g^{-1}(G)$. Тогда $g(A) \in G$. Положим $g(A) = y$. Тогда $A = \overset{-1}{f}(y)$ и $A \subset f^{-1}(G)$. Обратно, если $A \subset f^{-1}(G)$, то $f(A) \subset G$ и $g(A) \in G$. Следовательно, $A \in g^{-1}(G)$.

VI. Наследственно несвязные пространства. Вполне несвязные пространства.

Определения. Пространство называется *наследственно несвязным* (или *дисперсным*), если оно не содержит никакого связного множества, состоящего более чем из одной точки, другими словами, если каждая его компонента состоит из одной точки.

Пространство называется *вполне несвязным* (или *нигде не связным*), если оно не связно между любой парой точек, другими словами, если каждая квазикомпонента состоит из одной точки.

Следующее утверждение очевидно.

Теорема 1. *Всякое нульмерное пространство вполне несвязно, а всякое вполне несвязное пространство наследственно несвязно.*

Теорема 2. *Любое слабо одномерное пространство* (т. е. *такое, что множество N точек, в которых оно имеет положительную размерность, нульмерно*; ср. § 27, VI) *наследственно несвязно*[1]).

Доказательство. Если C — связное множество, содержащее более одной точки, то $\dim_p C > 0$ для каждой точки $p \in C$ (ср. с теоремой 5 п. I). Поэтому $C \subset N$ и, следовательно, $\dim N > 0$.

Следующая теорема очевидна.

Теорема 3. *Всякое пространство, допускающее взаимно однозначное непрерывное отображение во вполне несвязное пространство, само вполне несвязно.*

В частности, слабо одномерное множество, определенное в § 27, VI, является *вполне несвязным G_δ-множеством положительной размерности*[2]).

Действительно, это множество допускает взаимно однозначную проекцию на канторово множество.

Замечания. (i) *Существуют вполне несвязные пространства произвольной конечной или бесконечной размерности.*

Действительно, канторово множество $\mathscr{C}$ есть взаимно однозначный непрерывный образ метрического сепарабельного пространства произвольной размерности (конечной или бесконечной[3])).

---

[1]) Менгер [1, стр. 204].

[2]) Первый пример вполне несвязного пространства положительной размерности был дан Серпинским в его статье [8].

[3]) Теорема Хильгерса [1].

Более того, существуют полные сепарабельные вполне несвязные пространства произвольной размерности[1]).

(ii) *Существуют (полные сепарабельные) наследственно несвязные пространства, которые не являются вполне несвязными*[2]).

Доказательство. Пусть E — слабо одномерное G_δ-множество в компактном пространстве (например, множество, определенное в § 27, VI). Пусть $\dim_a E = 1$. Тогда, как легко показать (ср. § 42, II, теорема 8), существует точка $b \neq a$, такая, что множество $E \cup (b)$ связно между точками a и b. Кроме того, множество $E \cup (b)$ наследственно несвязно, так как оно слабо одномерно.

(iii) Помпейю определил функцию g на $\mathcal{J}$, производная g' которой конечна в каждой точке и принимает нулевое значение в любом интервале, но не постоянна ни в одном из них. Эту функцию можно задать с помощью формулы [3])

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (y - a_n)^{1/3}, \quad \text{где} \quad a_n = (2k+1)/2^{m+1},$$

k и m — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$n = 2^m + k \quad \text{и} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1.$$

Согласно теореме 8 п. I и теореме 1 § 27, VII, множество $C = \underset{x,\,y}{\mathrm{E}}\,[y = g(x)]$ является связным G_δ-множеством.

Пусть $g'(a) \neq 0$. *Множество* $A = C - \mathcal{J} \cup (a, 0)$ *связно между точками* $p = [a, 0]$ *и* $q = [a, g'(a)]$.

Предположим противное, а именно, что M и N — отделимые множества и

$$A = M \cup N, \quad p \in M \quad \text{и} \quad q \in N.$$

Пусть bc такой интервал, что

$$b < a < c, \quad \overline{N} \cap bc = 0 \quad \text{и} \quad g'(b) = 0 = g'(c).$$

Обозначим через N_1 подмножество из N, проекция которого лежит в интервале bc; тогда множество N_1 отделимо от $N - N_1$, а также от множества $\mathcal{J}$ и, следовательно, от множества $N - N_1 \cup M \cup \mathcal{J}$. Так как

$$C \subset N_1 \cup (N - N_1 \cup M \cup \mathcal{J})$$

и $p \in M$, $g \in N$, то это противоречит связности множества C.

---

[1]) Теорема Мазуркевича [14]. По поводу λ-проблемы Урысона см. Мазуркевич [12, стр. 324]. См. также Кнастер [8].

[2]) Теорема Серпинского [8].

[3]) См. Помпейю [1]. См. также Кёпке [1—3] и Кнастер и Куратовский [

Из этого следует (ср. § 26, III, теорема 3), что множество $C-\mathcal{J}$ имеет размерность 1 в каждой своей точке.

Заметим далее, что из тождества $\overline{C\cap\mathcal{J}}=\mathcal{J}$ следует, что $C-\mathcal{J}$ *вполне несвязно*. Следовательно, множество A *наследственно несвязно* (не будучи вполне несвязным) (см. Куратовский [11]).

(iv) Пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание всякого открытого множества открыто (см. Стоун М. [3]).

Очевидно, всякое экстремально несвязное регулярное пространство имеет открытую базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств (а именно из замыканий открытых множеств), следовательно, оно нульмерно. Обратное неверно.

VII. Разделители. По определению (ср. § 6, V) множество C *разделяет пространство* $\mathcal{X}$ *между множествами* A *и* B (является *разделителем* между A и B), если $\mathcal{X}-C$ не связно между множествами A и B, другими словами, если существуют два множества M и N, такие, что

$$\text{(i)}\qquad \mathcal{X}-C=M\cup N,\quad (\overline{M}\cap N)\cup(\overline{N}\cap M)=0,$$
$$A\subset M,\quad B\subset N.$$

Множество C (коротко) называется *разделителем пространства* $\mathcal{X}$, если существует пара замкнутых множеств A и B, между которыми пространство $\mathcal{X}$ связно, а множество $\mathcal{X}-C$ не связно.

Если пространство $\mathcal{X}$ *связно*, то C является разделителем тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{X}-C$ не связно (так как всякое связное пространство связно между любой парой своих точек).

Множество C называется *неприводимым разделителем между точками* a *и* b, если C — разделитель между этими точками, но любое множество X, такое, что $X\subset C\neq X$, таковым не является.

Множество C называется *вполне неприводимым разделителем*, если C — неприводимый разделитель между любой парой точек, которые разделяются множеством C (и если существует по крайней мере одна пара таких точек).

Говорят, что множество C *локально разделяет* пространство, если оно разделяет некоторое содержащее его открытое множество, т. е. если существуют открытое множество G и два множества A и B, замкнутых в G, таких, что $A\cup B\cup C\subset G$ и множество G связно между A и B, а множество $G-C$ — нет.

Теорема 1. *Если $\bar{D}=\mathscr{X}$, то каждый замкнутый разделитель представляет собой разделитель между парой точек, принадлежащих D.*

Доказательство. Действительно, если M и N — два непустых открытых множества, таких, что $\mathscr{X}-C=M\cup N$ и $M\cap N=0$, то $M\cap D\neq 0\neq N\cap D$.

Теорема 2. *Замкнутое множество C разделяет пространство между A и B тогда и только тогда, когда существуют два замкнутых множества P и Q, таких, что*

(ii) $\mathscr{X}=P\cup Q,\quad C=P\cap Q,\quad A\cap Q=0=B\cap P.$

Более того, *если множества A, B и C не пересекаются, то двойное тождество можно заменить включениями $A\subset P$ и $B\subset Q$.*

Доказательство. С одной стороны, если удовлетворяется условие (i), то можно считать, что

$$P=M\cup C \quad \text{и} \quad Q=N\cup C.$$

С другой стороны, если P и Q удовлетворяют условиям (ii), то можно предположить, что

$$M=\mathscr{X}-Q \quad \text{и} \quad N=\mathscr{X}-P.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — наследственно нормальное пространство. Если множество E разделяет всякую пару множеств, принадлежащих системе $A_1, \ldots, A_n$, то множество E содержит замкнутое множество F, обладающее тем же свойством.*

Доказательство. По предположению и согласно теореме 4 п. IV,

$$\mathscr{X}-E=X_1\cup \ldots \cup X_n, \quad A_i\subset X_i,$$

где множества X_i не пересекаются и открыты в $\mathscr{X}-E$. В соответствии с теоремой 4 § 14, V существует такая система непересекающихся открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$, что $X_i\subset G_i$. Достаточно положить $F=\mathscr{X}-(G_1\cup \ldots \cup G_n)$.

Теорема 4. *Всякое множество C, являющееся общей границей двух компонент A и B его дополнения, есть неприводимый разделитель между каждой парой точек (a, b), таких, что $a\in A$ и $b\in B$.*

Доказательство. С одной стороны, множество $C=$ $=\bar{A}\cap\overline{\mathscr{X}-A}$ разбивает пространство на два отделимых множества $\bar{A}-C$ и $\overline{\mathscr{X}-A}-C$, одно из которых содержит точку a, а другое — точку b. С другой стороны, если $X \subset C \neq X$, то при условии $c \in C - X$ множество $A \cup (c) \cup B$ связно и соединяет точку a с точкой b вне X. Поэтому множество X не является разделителем между точками a и b. Таким образом, множество C — неприводимый разделитель между точками a и b.

VIII. Разделение связных пространств[1]). В п. VIII—XI *пространство* $\mathscr{X}$ *предполагается связным метрическим и сепарабельным.*

Если множество C — замкнутый разделитель между точками a и b, то, согласно VII (i), существуют два открытых множества M и N, таких, что

(1) $$\mathscr{X} - C = M \cup N, \quad M \cap N = 0, \quad a \in M, \quad b \in N.$$

Вообще говоря, существует много разложений, удовлетворяющих условиям (1); так обстоит дело, например, в случае пространства, состоящего из трех сегментов ac, bc и dc, имеющих только одну общую точку c.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{C}$ — *семейство замкнутых непересекающихся связных разделителей между точками a и b. Если мы поставим в соответствие каждому множеству $C \in \boldsymbol{C}$ пару открытых множеств $M(C)$ и $N(C)$, удовлетворяющих условиям* (1), *и положим $A(C) = M(C) \cup C$, то семейство $\boldsymbol{F}$ всех множеств $A(C)$, где $C \in \boldsymbol{C}$, строго монотонно*[2]).

Более того, *если $C \neq D$, то либо $A(D) \subset M(C)$, либо $A(C) \subset M(D)$.*

Доказательство. Пусть $C \neq D$ — два элемента семейства $\boldsymbol{C}$. Так как множества $M(C)$ и $N(C)$ отделимы и D — связное подмножество их объединения, то одно из них содержит D, тогда как другое не пересекается с ним. Предположим, что $D \subset M(C)$. Покажем, что тогда $M(D) \subset M(C)$.

Во-первых, $C \subset N(D)$. Действительно, иначе имело бы место включение $C \subset M(D)$ (по указанным выше причинам). Но из условий

(2) $$\mathscr{X} = M(C) \cup C \cup N(C) \quad \text{и} \quad \mathscr{X} = M(D) \cup D \cup N(D)$$

вытекает, что

$$\mathscr{X} = M(C) \cup M(D) \cup C \cup D \cup (N(C) \cap N(D)),$$

[1]) См. Уайберн [15] и Куратовский [35].

[2]) Напомним, что семейство множеств называется *строго монотонным*, если для каждой пары $X \neq Y$ его элементов либо $X \subset \operatorname{Int}(Y)$, либо $Y \subset \operatorname{Int}(X)$. Теорема 1 позволяет применить к семейству $\boldsymbol{F}$ теоремы, установленные в § 24, VIII.

а так как $D \subset M(C)$, то из включения $C \subset M(D)$ следует разложение пространства

$$\mathscr{X} = [M(C) \cup M(D)] \cup [N(C) \cap N(D)]$$

на два непустых непересекающихся открытых множества (содержащих соответственно a и b), что противоречит предположению связности пространства. Итак, $C \subset N(D)$.

Теперь рассмотрим разложение

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= M(C) \cup N(D) \cup C \cup D \cup (N(C) \cap M(D)) = \\ &= [M(C) \cup N(D)] \cup [N(C) \cap M(D)],\end{aligned}$$

которое также следует из соотношений (2).

Оба члена второго объединения суть непересекающиеся открытые множества, и первое из них непусто; поэтому

$$N(C) \cap M(D) = 0, \text{ откуда } M(D) \subset M(C) \cup C,$$

а так как $C \cap M(D) = 0$ (ибо $C \subset N(D)$), то

$$M(D) \subset M(C).$$

Это дает

$$A(D) = D \cup M(D) \subset M(C) \subset \operatorname{Int}[A(C)],$$

так как $M(C)$ — открытое подмножество множества $A(C)$.

Аналогично, если мы предположим, что $D \subset N(C)$, то $C \subset M(D)$, и по симметрии

$$A(C) \subset M(D) \subset \operatorname{Int}[A(D)],$$

что и завершает доказательство.

Теорема 1 в сочетании с теоремой 1 из § 24, VII и тем фактом, что из условия $C \neq D$ следует соотношение $A(C) \neq A(D)$, приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *Элементы C семейства $\mathbf{C}$ можно снабдить такими индексами y, что $0 < y < 1$ и что из условия $u < y$ следует $M(C_u) \subset A(C_u) \subset M(C_y)$.*

Отсюда следует, что *если $u < y < z$, то C_y разделяет C_u и C_z.*

Теорема 3. *За исключением счетного множества элементов семейства $\mathbf{C}$, каждый элемент $C \in \mathbf{C}$ удовлетворяет следующим условиям:*

(3) $\operatorname{Int}[A(C)] = M(C)$, *следовательно*, $\operatorname{Fr}[A(C)] = C$,

(4) $C = \operatorname{Fr}[M(C)] = \operatorname{Fr}[N(C)]$;

в семействе C существуют две последовательности $\{D_n\}$ и $\{E_n\}$, такие, что

(5) $$C = \bigcap_n M(D_n) \cap N(E_n) = \bigcap_n A(D_n) \cap [\overline{\mathscr{X} - A(E_n)}],$$

(6) $$M(C) \text{ и } N(C) \text{ связны.}$$

Доказательство. Согласно теореме 2, имеет место включение

$$\bigcup_{u<y} \operatorname{Int}[A(C_u)] \subset M(C_y) \subset \operatorname{Int}[A(C_y)].$$

В соответствии с теоремой 4 § 24, VII положим

$$\operatorname{Int}[A(C_y)] = \bigcup_{u<y} \operatorname{Int}[A(C_u)].$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Int}[A(C_y)] = M(C_y),$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Fr}[A(C_y)] = A(C_y) - \operatorname{Int}[A(C_y)] = C_y.$$

В силу (3) из § 24, VIII (5) вытекает, что

$$C = \operatorname{Fr}[A(C)] = A(C) - \operatorname{Int}[A(C)] =$$
$$= \overline{\operatorname{Int}[A(C)]} - \operatorname{Int}[A(C)] = \operatorname{Fr}[\operatorname{Int}(A(C))] = \operatorname{Fr}[M(C)].$$

Соотношение (5) следует из (3) и § 24, VIII (9):

$$C_y = \bigcap_n \{\operatorname{Int}[A(D_n)] - A(E_n)\} \subset \bigcap_n M(D_{n-1}) \cap N(E_n) \subset$$
$$\subset \bigcap_n A(D_{n-1}) \cap [\overline{\mathscr{X} - A(E_n)}] = C_y,$$

так как $A(D_n) \subset M(D_{n-1})$ по теореме 2.

И, наконец, как мы увидим, из (5) следует (6).

Пусть $M(C) = M_1 \cup M_2$, где M_i — непересекающиеся открытые множества и $a \in M_1$. Покажем, что $M_2 = 0$.

Так как множества $M(C)$ и $N(C)$ отделимы, а $\mathscr{X}$ и C связны, то множества $C \cup M(C)$ и $C \cup N(C)$ связны (по теореме 4 п. II). На том же основании множества $C \cup N(C) \cup M_1$ и $C \cup N(C) \cup M_2$ связны. Но так как множество $C \cup N(C) \cup M_1$ соединяет точки a и b, а E_n — разделитель между этими точками, то из этого следует, что $E_n \cap [C \cup N(C) \cup M_1] \neq 0$. Так как множество $A(E_n)$ предшествует множеству $A(C)$, то $E_n \cap N(C) = 0$. Но тогда $E_n \cap M_1 \neq 0$ и, следовательно, $E_n \cap M_2 = 0$. Так как множества M_2 и $M_1 \cup N(C)$ отделимы, то множество $M_2 \cup C$ связно и, согласно последнему равенству, не пересекается с E_n. Из включения $C \subset N(E_n)$, которое получается из (5), следует, что

$$M_2 \cup C \subset N(E_n), \text{ и тогда } M_2 \subset N(E_n).$$

С другой стороны, согласно теореме 2,

$$M_2 \subset A(C) \subset M(D_n),$$

и потому

$$M_2 \subset \bigcap_n M(D_n) \cap N(E_n) = C,$$

а так как $C \cap M_2 = 0$, то из этого следует, что $M_2 = 0$.

Теорема 4. *Во всяком семействе непересекающихся замкнутых и связных разделителей каждый разделитель, за исключением самое большее $\aleph_0$ из них, разделяет пространство на два связных множества и является их общей границей; следовательно, он является вполне неприводимым разделителем.*

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность точек, всюду плотная в пространстве.

По теореме 1 п. VII рассматриваемое семейство можно разложить в (счетную) последовательность подсемейств C_{ij} разделителей между точками p_i и p_j. Поэтому наша теорема вытекает из утверждений (4) и (6), ибо неприводимость есть следствие теоремы 4 п. VII.

Теорема 5. *Пусть в пространстве $\mathcal{X}$ задано семейство $\boldsymbol{C}$ разделителей между точками a и b, не пересекающихся, замкнутых, связных и снабженных индексами в соответствии с теоремой 2. Тогда существует непрерывное отображение f пространства $\mathcal{X}$ на $\mathcal{I}$, такое, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ и для каждого индекса y*

$$\textit{либо } f^{-1}(0y) = A(C_y), \quad \textit{либо } f^{-1}(0y) = \bigcap_{z>y} A(C_z),$$

в соответствии с тем, существует ли индекс, непосредственно следующий за y, или нет.

Доказательство. Пусть F^* — семейство множеств $A_y = A(C_y)$, где $0 < y < 1$, пополненное множествами $A_0 = (a)$ и $A_1 = \mathcal{X}$. Рассмотрим функцию f, определенную в § 24, IX, теорема 3. Очевидно, $f(a) = 0$ и $f(b) = 1$, если не существует индекса, непосредственно предшествующего 1. В противном случае если r — индекс, непосредственно предшествующий 1, то необходимо только изменить определение функции f на множестве $\mathcal{X} - A_r$, а именно

$$f(x) = r + (1-r)\frac{\rho(x, A_r)}{\rho(x, A_r) + |x - b|}.$$

Используя теорему 5, многие свойства семейств $\boldsymbol{C}$ можно вывести из соотношений (13) — (18) § 24, IX. В частности, справедливо следующее утверждение (в силу (3) и § 24, IX (17)):

Теорема 6. *Соотношение* $C_y = f^{-1}(y)$ *имеет место для всех, за исключением самое большее* $\aleph_0$, *множеств* C_y.

IX. Разделяющие точки. Как и в п. VIII, предположим, что $\mathcal{X}$ — *связное метрическое сепарабельное пространство*. Пусть $S(a, b)$ — множество всех точек, разделяющих точки a и b. Эти точки можно снабдить индексами в соответствии с теоремой 2 п. VIII; таким образом, из условия $u < y < z$ следует, что точка p_y разделяет точки p_u и p_z.

Из теоремы 4 п. VIII вытекает следующая

Теорема 1 [1]. *Множество* $\mathcal{X} - (x)$ *либо связно, либо представляет собой объединение двух связных множеств для каждой точки* x, *за исключением самое большее счетного множества этих точек.*

Теорема 2. *Если множество* A *связно, то каждая точка множества* $A \cap S(a, b)$, *за исключением первой и последней (если они существуют), разделяет множество* A.

Отсюда в силу теоремы 1 п. VII вытекает следующее утверждение:

Теорема 3 [2]. *Каждая точка связного множества* A, *являющаяся разделяющей точкой пространства (за исключением счетного множества таких точек), является также и разделяющей точкой множества* A.

Замечание. Отметим без доказательства следующее утверждение:

Если $\boldsymbol{C}$ — *семейство невырожденных непересекающихся связных множеств, каждое из которых содержит разделяющую точку пространства, то* $\boldsymbol{C}$ *счетно* [3].

Теорема 4. *Если множество* C *представляет собой топологический предел* (ср. § 29, VI) *последовательности* $C_1, C_2, \ldots$ *непересекающихся связных множеств, то множество* $C \cap S(a, b)$ *содержит самое большее две точки. Следовательно, множество точек множества* C, *разделяющих пространство, счетно.*

Доказательство. Предположим, что $p_u, p_y, p_z \in C$ и $u < y < z$. Тогда $p_u \in M(p_y)$ и $p_z \in N(P_y)$ (ср. VIII, теорема 2).

---

[1]) См. Заранкевич и Куратовский [1].

[2]) См. Заранкевич [1] и при более ограничительных предположениях Мур [4].

[3]) Теорема Заранкевича [2]. Доказательство см. в ранее цитированной статье Куратовского [35, стр. 30].

Так как множества $M(p_y)$ и $N(p_y)$ открыты, то из условия $p_y \in \operatorname{Lim}_{n\to\infty} C_n$ следует, что для достаточно больших n

$$C_n \cap M(p_y) \neq 0 \neq C_n \cap N(p_y),$$

откуда

$$C_n \cap \operatorname{Fr} M(p_y) = 0, \quad \text{т. е.} \quad p_y \in C_n.$$

Следовательно, множества C_n пересекаются.

Теорема 5. *Существует непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, такое, что множество точек, в которых f взаимно однозначно, пополненное подходящим счетным множеством, совпадает с множеством $S(a, b) \cup a \cup b$.*

Именно, f есть функция из теоремы 5 п. VIII, где $\mathbf{C}$ — семейство множеств, сводящихся к отдельным точкам и разделяющих a и b.

Доказательство. Если p — точка, отличная от a и b, в которой функция f взаимно однозначна, то существует число y, такое, что $p = f^{-1}(y)$ и $0 \neq y \neq 1$. Поэтому

$$\mathcal{X} - p = f^{-1}(0y - y) \cup f^{-1}(y1 - y)$$

есть разбиение на два открытых множества, одно из которых содержит a, а другое b. Отсюда следует, что $p \in S(a, b)$.

С другой стороны, в каждой точке множества $S(a, b)$, за исключением счетного подмножества, функция f взаимно однозначна, согласно VIII (7).

Теорема 6 (Леннес[1]). *Если $\mathcal{X} = S(a, b) \cup a \cup b$, т. е. если каждая точка, отличная от a и b, разделяет пространство между a и b, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение f пространства $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Предположим, что $f(p_y) = y$, $f(a) = 0$ и $f(b) = 1$. Так как очевидно, что функция f взаимно однозначна, остается только показать, что она непрерывна, т. е. множество $f^{-1}(G)$ открыто (в пространстве $\mathcal{X}$) при условии, что G — открытый интервал в $\mathcal{Y}$. Но это следует из соотношений (ср. VIII, теорема 2)

$$f^{-1}(0y - y) = M(p_y) \quad \text{и} \quad f^{-1}(y1 - y) = N(p_y),$$

так как множества $M(p_y)$ и $N(p_y)$ открыты.

---

[1]) См. Леннес [1], где эта теорема доказана при дополнительных предположениях. Ср. также Хаусдорф [1] и § 2 статьи Кнастера и Куратовского [2], где изучаются пространства этого вида (там они названы связными пространствами, *неприводимыми между a и b*).

Замечания. Очевидно, что условие теоремы 6 эквивалентно такому условию: *каждой точке x соответствуют два замкнутых множества A и B, таких, что*

$$\mathcal{X}=A\cup B,\quad a\in A,\quad b\in B,\quad A\cap B=(x).$$

Оно также эквивалентно следующему предположению: *точки a и b нельзя соединить никаким собственным связным подмножеством пространства.*

Доказательство. Предположим, что $p\in(\mathcal{X}-a-b)$ — точка, не отделяющая a от b. Тогда существует связное множество C, такое, что a, $b\in C\neq\mathcal{X}$. В самом деле, если множество $\mathcal{X}-p$ несвязно, то существуют два открытых множества G и H, такие, что

$$\mathcal{X}-p=G\cup H,\quad G\cap H=0,\quad H\neq 0\quad \text{и}\quad a,\ b\in G,$$

ибо p не отделяет точку a от точки b.

Таким образом, множество $C=(p)\cup G$ есть связное собственное подмножество (ср. II, теорема 4) пространства, соединяющее точки a и b.

X. Уникогерентность. Дискогерентность.

Определение. Топологическое пространство $\mathcal{X}$ называется *уникогерентным*, если оно связно и если для каждой пары A, B замкнутых связных множеств, таких, что $\mathcal{X}=A\cup B$, пересечение $A\cap B$ связно.

Пространство $\mathcal{X}$ называется *дискогерентным*, если для любой пары замкнутых множеств A и B, таких, что

$$(1)\qquad \mathcal{X}=A\cup B\quad \text{и}\quad A\neq\mathcal{X}\neq B,$$

пересечение $A\cap B$ несвязно.

Согласно теореме 5 п. II, если связное пространство не является дискогерентным, то существуют два замкнутых *связных* множества A и B, имеющих связное пересечение и удовлетворяющих условиям (1).

Очевидно, что всякое дискогерентное пространство связно.

Примеры. Интервал $\mathcal{J}$ уникогерентен, а окружность $\mathcal{S}$ дискогерентна. Позже мы увидим, что $\mathcal{J}^n$ уникогерентно для всякого n, а $\mathcal{S}_n$ уникогерентно для $n\geqslant 2$.

Теорема 1. *Связное пространство $\mathcal{X}$ дискогерентно тогда и только тогда, когда дополнение любого замкнутого связного подмножества C связно.*

Доказательство. Если

(1′) $\mathscr{X} - C = M \cup N, \quad (\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M) = 0 \quad$ и $\quad M \neq 0 \neq N,$

то множества $A = C \cup M$ и $B = C \cup N$ замкнуты,

$$A \neq \mathscr{X} \neq B \quad \text{и} \quad A \cap B = C.$$

С другой стороны, если замкнутые множества A и B удовлетворяют условиям (1) и если пересечение $A \cap B$ связно, то (1′) справедливо при условии, что $M = \mathscr{X} - A$ и $N = \mathscr{X} - B$. Таким образом, (замкнутое и связное) множество C является разделителем пространства.

Теорема 2. *Если пространство $\mathscr{X}$ дискогерентно, а множества C и D замкнуты, связны и таковы, что*

(2) $$\mathscr{X} = C \cup D \quad \textit{и} \quad C \neq \mathscr{X} \neq D,$$

то множества $A = \overline{\mathscr{X} - C}$ и $B = \overline{\mathscr{X} - A}$ связны, удовлетворяют соотношению (1) *и $A = \overline{\mathscr{X} - B}$.*

Доказательство. Множество $\mathscr{X} - C$ связно по теореме 1. Следовательно, связно и множество $A = \overline{\mathscr{X} - C}$. Отсюда вытекает, что множество $\mathscr{X} - A$ связно, а поэтому связно и множество $B = \overline{\mathscr{X} - A}$.

Согласно соотношению (2), $\mathscr{X} - C \subset D \neq \mathscr{X}$, откуда $\overline{\mathscr{X} - C} \subset \subset D \neq \mathscr{X}$; следовательно, $A \neq \mathscr{X}$. Так как $0 \neq \mathscr{X} - C \subset \operatorname{Int}(A) = \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A}$, то из этого следует, что $B \neq \mathscr{X}$. Тогда

$$A \cup B = A \cup \overline{\mathscr{X} - A} = \mathscr{X}.$$

Наконец, в соответствии с § 8, VIII

$$\overline{\mathscr{X} - B} = \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A}} = \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}}} = \overline{\mathscr{X} - C} = A.$$

Теорема 3. *Свойства уникогерентности и дискогерентности инвариантны относительно непрерывных монотонных отображений.*

Доказательство. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное монотонное отображение на. Пусть A и B — два замкнутых связных множества, таких, что $f(\mathscr{X}) = A \cup B$. Тогда $\mathscr{X} = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ и множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ замкнуты и связны. Следовательно, если пространство $\mathscr{X}$ уникогерентно, то множество

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

связно, и потому связно множество

$$A \cap B = f[f^{-1}(A \cap B)].$$

Таким образом, пространство $f(\mathscr{X})$ уникогерентно.

Если пространство $\mathscr{X}$ дискогерентно, то множества $f^{-1}(A \cap B)$ и $A \cap B$ несвязны. Следовательно, пространство $f(\mathscr{X})$ дискогерентно.

***XI. n-мерная связность**[1]. Понятие связности можно следующим образом уточнить.

Пусть $\mathscr{X}$ — метрическое сепарабельное пространство (содержащее более одной точки). Говорят, что $\mathscr{X}$ *не более чем n-мерно связно*, если существуют два замкнутых множества M и N, таких, что

(1) $\mathscr{X} = M \cup N, \quad M \neq \mathscr{X} \neq N$ и $\dim(M \cap N) \leqslant n - 1$;

другими словами, если существует открытое множество G, такое, что

(2) $0 \neq G, \quad \overline{G} \neq \mathscr{X}$ и $\dim \mathrm{Fr}(G) \leqslant n - 1$,

или если существует замкнутое не более чем $(n-1)$-мерное множество, разделяющее пространство $\mathscr{X}$.

Наименьшее целое число, обладающее этим свойством (конечное или бесконечное), называется *размерностью связности* пространства $\mathscr{X}$ и обозначается $\mathrm{dc}\,\mathscr{X}$[2].

Таким образом, если $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} < \infty$, то существует замкнутый разделитель размерности $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} - 1$, но не существует замкнутого разделителя размерности $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} - 2$.

Далее, положим $\mathrm{dc}(p) = 0$ и $\mathrm{dc}\,0 = -1$.

Легко установить, что $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} \leqslant \dim \mathscr{X}$ и что условие $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} \geqslant 1$ эквивалентно предположению, что пространство $\mathscr{X}$ связно и содержит более одной точки.

Компактные пространства $\mathscr{X}$, удовлетворяющие условию $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} = \dim \mathscr{X}$, называются *канторовыми многообразиями*.

Замечания. Если пространство представляет собой объединение двух кубов, имеющих только одну общую вершину, то $\mathrm{dc} = 1$; если они имеют только одно общее ребро, то $\mathrm{dc} = 2$; наконец, если они имеют только одну общую грань, то $\mathrm{dc} = 3$.

Отсюда видно, что число $\mathrm{dc}\,\mathscr{X}$ позволяет выразить более точно геометрическую идею более или менее «сильной» связности полиэдра, состоящего из двух кубов, в соответствии с тем, соединяются ли они по грани, ребру или вершине.

---

[1]) См. Куратовский и Отто [1].

[2]) См. Куратовский [37]; там n следует заменить на $n+1$.

Из теорем 6 и 3 § 45, IV вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если $\mathscr{X}$ — компактное пространство, неприводимое по отношению к своей n-мерной степени, то* $\operatorname{dc}\mathscr{X} \geqslant n$.

Теорема 2. *Во всяком компактном пространстве размерности $\geqslant n$ содержится замкнутое множество F, такое, что $\operatorname{dc} F \geqslant n$; следовательно, в нем содержится, в частности, компонента размерности $\geqslant n$* [1]).

Многие теоремы теории связных множеств можно обобщить и переформулировать таким образом, чтобы они стали теоремами о размерности связности. Сформулируем некоторые из них без доказательства.

Теорема 3. *Если C — множество, содержащее более одной точки, то условие $\operatorname{dc} C \leqslant n$ эквивалентно существованию двух множеств M и N, таких, что*

$$C = M \cup N, \quad C - M \neq 0 \neq C - N, \tag{3}$$
$$\dim [(\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M)] \leqslant n - 1,$$

а также существованию открытого множества G, такого, что

$$C \cap G \neq 0 \neq C - \overline{G}, \quad \dim [C \cap \operatorname{Fr}(G)] \leqslant n - 1. \tag{4}$$

Теорема 4. *Если $\operatorname{dc} C \geqslant n$, $C \subset M \cup N$ и если $\dim [(\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M)] \leqslant n - 2$, то либо $C \subset \overline{M}$, либо $C \subset \overline{N}$.*

Теорема 5. *Если $\{C_t\}$ — семейство таких множеств, что $\operatorname{dc} C_t \geqslant n$, и если оно содержит такое множество C_0, что $\dim (C_0 \cap C_t) \geqslant n - 1$ для каждого t, то $\operatorname{dc}\left(\bigcup_t C_t\right) \geqslant n$.*

Теорема 6. *Если $C \subset E \subset \overline{C}$ и $\operatorname{dc} C \geqslant n$, то $\operatorname{dc} E \geqslant n$.*

Теорема 7. $\operatorname{dc}(\mathscr{X} - C) \geqslant \operatorname{dc}\mathscr{X} - \dim C - 1$.

Теорема 8. *Если $\mathscr{X} - C = M \cup N$, $(\overline{M} \cap N) \cup (\overline{N} \cap M) = 0$ и $\operatorname{dc} C \leqslant \operatorname{dc}\mathscr{X}$, то $\operatorname{dc} C \leqslant \operatorname{dc}(C \cup M)$ и $\operatorname{dc} C \leqslant \operatorname{dc}(C \cup N)$.*

Теорема 9. *Если A и B — два замкнутых множества, таких, что $\operatorname{dc}(A \cap B) \leqslant \operatorname{dc}(A \cup B)$, то $\operatorname{dc}(A \cap B) \leqslant \operatorname{dc} A$ и $\operatorname{dc}(A \cap B) \leqslant \operatorname{dc} B$.*

Теорема 10. *Если f — непрерывное отображение (связного) компактного пространства $\mathscr{X}$, такое, что $\dim f^{-1}(y) \leqslant k$ для каждого y, то*

$$\operatorname{dc} f(\mathscr{X}) \geqslant \operatorname{dc}\mathscr{X} - k.$$

---

[1]) Ср. с понятием «размерностной компоненты», введенным П. С. Александровым [8, стр. 215]. Ср. также Тумаркин [1].

***XII. n-мерная связность между двумя множествами.** Пространство $\mathscr{X}$ называется *n-мерно связным между двумя подмножествами A и B* (записывается: $\mathrm{dc}_{A,B}\mathscr{X}=n$), если n — наименьшее целое число, такое, что существуют два замкнутых множества M и N, удовлетворяющих условиям

$$\mathscr{X}=M\cup N,\quad A\cap N=0=B\cap M,\quad \dim(M\cap N)\leqslant n-1;$$

это означает, что существует замкнутое множество размерности $\leqslant n-1$, которое разделяет $\mathscr{X}$ между A и B.

Можно доказать следующие утверждения[1]):

Теорема 1. *Множество C пространства $\mathscr{X}$ не более чем n-мерно связно между двумя подмножествами A и B тогда и только тогда, когда существует открытое множество G, такое, что*

$$A\subset G,\quad \bar{G}\cap B=0,\quad \dim[C\cap \mathrm{Fr}(G)]\leqslant n-1.$$

Теорема 2. *Если* $\mathrm{dc}_{A_1,B}\mathscr{X}\leqslant n$ *и* $\mathrm{dc}_{A_2,B}\mathscr{X}\leqslant n$, *то* $\mathrm{dc}_{A_1\cup A_2,B}\mathscr{X}\leqslant n$.

Теорема 3. *Во всяком компактном пространстве из n-мерной связности между двумя замкнутыми множествами A и B вытекает n-мерная связность между парой точек $a\in A$ и $b\in B$.*

Более точно, *если в компактном пространстве заданы два подмножества A и B третьего подмножества C, то существуют две точки $a\in\bar{A}$ и $b\in\bar{B}$, такие, что*

$$\mathrm{dc}_{A,B}C\leqslant \mathrm{dc}_{a,b}(C\cup a\cup b).$$

Теорема 4. $\dim_a\mathscr{X}\leqslant n$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{dc}_{a,B}\mathscr{X}\leqslant n$ *для всякого замкнутого множества B, такого, что $a\in\mathscr{X}-B$.*

Теорема 5. $\dim\mathscr{X}\leqslant n$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{dc}_{A,B}\mathscr{X}\leqslant n$ *для любых замкнутых непересекающихся множеств A и B.*

Если $\mathscr{X}$ компактно, то $\dim\mathscr{X}\leqslant n$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{dc}_{a,b}\mathscr{X}\leqslant n$ *для любых точек $a\neq b$.*

Теорема 6. *Если C — подмножество компактного пространства, то каждой точке $a\in C$ соответствует точка $b\neq a$, такая, что*

$$\mathrm{dc}_{a,b}(C\cup b)=\dim_a C \text{ при условии } \dim_a C<\infty.$$

[1]) См. примечание 1 на стр. 173 и стр. 268—269.

Теорема 7[1]). *Каждое сепарабельное метрическое пространство можно компактифицировать без увеличения размерности связности между любой парой точек.*

Более того, *множество гомеоморфизмов $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}^{\aleph_0}$, таких, что размерность связности пространства $\mathcal{X}$ между точками p и q равна размерности связности множества $\overline{f(\mathcal{X})}$ между $f(p)$ и $f(q)$ для любой пары точек $p, q \in \mathcal{X}$, представляет собой остаточное множество в пространстве $(\mathcal{J}^{\aleph_0})^{\mathcal{X}}$.*

§ 47. Континуумы

I. Определение. Непосредственные следствия. Компактное связное $\mathcal{T}_2$-пространство называется *континуумом*[2]). Предполагается, что все пространства, рассматриваемые в § 47, являются $\mathcal{T}_2$-пространствами.

Теорема 0. *Компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ есть континуум тогда и только тогда, когда*[3]) *каждой паре точек a, $b \in \mathcal{X}$ и каждому числу $\varepsilon > 0$ соответствует конечная система точек*

$$p_0 = a, \ p_1, \ \ldots, \ p_{n-1}, \ p_n = b, \quad \text{где} \quad |p_i - p_{i+1}| < \varepsilon.$$

Доказательство. Условие необходимо, так как множество $F(a, \varepsilon)$ точек, которые можно соединить с точкой a «цепью» со звеньями $<\varepsilon$, замкнуто и открыто; оно совпадает с пространством $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X}$ связно. Условие достаточно, так как если $\mathcal{X} = A \cup B$ — разложение компактного пространства $\mathcal{X}$ на два непустых непересекающихся замкнутых множества, то $\rho(A, B) > 0$, и, следовательно, не существует цепи, соединяющей a и b, со звеньями длины $<\rho(A, B)$.

Следующие утверждения вытекают непосредственно из соответствующих теорем о связных множествах § 46.

Теорема 1. *Объединение двух континуумов, имеющих общую точку, есть континуум* (ср. § 46, II, следствие 3 (i)).

Теорема 2. *Если A и B — два таких компактных множества, что $A \cup B$ и $A \cap B$ — континуумы, то A и B — континуумы* (ср. § 46, II, следствие 5).

---

[1]) См. Куратовский [37, стр. 243]. Теорема 7 является обобщением теоремы 4 п. V.

[2]) Термин «континуум» используется разными авторами также для обозначения замкнутого связного множества.

[3]) Это первоначальное канторовское определение континуума; см. Кантор [2].

Теорема 3. *Если C — подконтинуум континуума $\mathscr{X}$ и если M и N — два отделимых множества, таких, что $\mathscr{X} - C = M \cup N$, то множества $C \cup M$ и $C \cup N$ — континуумы* (ср. § 46, II, теорема 4).

Теорема 4. *Прямое произведение (конечное или бесконечное) континуумов есть континуум* (§ 46, II, теорема 11).

Теорема 5. *Непрерывный образ континуума есть континуум* (§ 46, I, теорема 3).

Теорема 6. *Компоненты компактного пространства представляют собой континуумы* (§ 46, III, теорема 1).

II. Связные подмножества компактных пространств.

Теорема 1. *Всякое компактное пространство обладает следующим свойством:*

(M) *Если пространство связно между двумя замкнутыми множествами A и B, то оно связно между некоторой парой точек a и b, где $a \in A$ и $b \in B$* [1]).

Доказательство. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ не связно между любой парой точек a и b, где $a \in A$ и $b \in B$. Пусть M_{ab} — открыто-замкнутое множество, такое, что

$$a \in M_{ab} \quad \text{и} \quad b \notin M_{ab}.$$

Для данной точки $b \in B$ семейство $\{M_{ab}\}_{a \in A}$ есть открытое покрытие (компактного) множества A; следовательно, существует конечное подмножество A' множества A, такое, что $\{M_{ab}\}_{a \in A'}$ — тоже открытое покрытие A. Положим для $b \in B$

$$M_b = \bigcup_{a \in A'} M_{ab}.$$

Множество M_b есть открыто-замкнутое подмножество пространства $\mathscr{X}$ и $A \subset M_b$, тогда как $b \notin M_b$. Далее, семейство $\{\mathscr{X} - M_b\}_{b \in B}$ есть открытое покрытие (компактного) множества B; следовательно, существует конечное множество $B' \subset B$, такое, что $\{\mathscr{X} - M_b\}_{b \in B'}$ тоже покрывает B.

Таким образом, открыто-замкнутое множество $\bigcap_{b \in B'} M_b$ содержит A и не пересекается с B, что приводит к противоречию.

Теорема 1'. *Всякое компактное наследственно нормальное пространство обладает следующим свойством: если*

---

[1]) Ср. Мазуркевич [1].

подмножество E связно между двумя множествами A и B (где $A \cup B \subset E$), то существует пара точек $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$, такая, что множество $E \cup a \cup b$ связно между a и b.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{G}$ — семейство всех открытых множеств G, таких, что $E \cap \mathrm{Fr}(G) = 0$. Предположим, что множество $E \cup a \cup b$ не связно между a и b для любых $a \in \overline{A}$ и $b \in \overline{B}$; это значит (ср. § 46, IV, теорема 7), что каждой паре точек $a \in \overline{A}$ и $b \in \overline{B}$ соответствует открытое множество G, такое, что

$$a \in G, \quad b \notin \overline{G} \quad \text{и} \quad (E \cup a \cup b) \cap \mathrm{Fr}(G) = 0,$$

т. е. $G \in \boldsymbol{G}$.

Согласно лемме § 41, II, существует множество

$$H = (G_1^1 \cap \ldots \cap G_{i_1}^1) \cup \ldots \cup (G_1^k \cap \ldots \cap G_{i_k}^k), \quad \text{где} \quad G_j^i \in \boldsymbol{G},$$

такое, что $\overline{A} \subset H$ и $\overline{B} \cap \overline{H} = 0$. Так как (ср. § 6, II (8) и (9))

$$\mathrm{Fr}(H) \subset \bigcup_{i,j} \mathrm{Fr}(G_j^i),$$

то отсюда вытекает, что $E \cap \mathrm{Fr}(H) = 0$. Следовательно, E не связно между A и B.

Теорема 2[1]). *В компактных пространствах (или в пространствах со свойством (M)) квазикомпоненты связны и поэтому совпадают с компонентами.*

Доказательство. Предположим, что квазикомпонента Q точки p не связна. Тогда существуют (ср. § 46, I, теорема 2) открытое множество G и точка q, такие, что

$$(1) \qquad p \in G, \quad q \in Q - \overline{G} \quad \text{и} \quad Q \cap \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

Последнее равенство означает, что пространство не связно между p и любой точкой множества $\mathrm{Fr}(G)$. Следовательно, из свойства (M) вытекает, что пространство не связно между точкой p и множеством $\mathrm{Fr}(G)$. Поэтому существует открыто-замкнутое множество F, такое, что

$$p \in F \quad \text{и} \quad F \cap \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

---

[1]) Более прямое доказательство см. Шура-Бура [1]; см. также Куратовский [50, стр. 227].

Отсюда следует, что $p \in F \cap G$ и $q \in \mathscr{X} - (F \cap G)$; кроме того, $F \cap G$ — открыто-замкнутое множество, так как

$$\overline{F \cap G} \subset \overline{F} \cap \overline{G} = F \cap \overline{G} = F \cap \mathrm{Fr}(G) \cup (F \cap G) = F \cap G.$$

Таким образом, пространство не связно между точками p и q.

Теорема 3. *Если компактное пространство (или пространство, обладающее свойством* (M)) *связно между двумя замкнутыми множествами A и B, то существует компонента C, такая, что $C \cap A \neq 0 \neq C \cap B$.*

Доказательство. Пусть (a, b) — такая пара точек, что $a \in A$, $b \in B$ и пространство связно между a и b; тогда C — компонента (и, следовательно, квазикомпонента) точки a.

Теорема 4[1]. *Во всяком компактном метрическом пространстве предел сходящейся последовательности связных множеств есть связное множество.*

Это вытекает непосредственно из теоремы 14 § 46, II.

Теорема 5. *Если $C_1, C_2, \ldots$ — последовательность континуумов, такая, что*

$$(2) \qquad C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots,$$

то пересечение $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap \ldots$ есть континуум.

Доказательство. Действительно, из условия (2) по теореме 1 § 42, IV следует, что $C_1 \cap C_2 \cap \ldots$ принадлежит замыканию семейства всех подконтинуумов множества C_1. Но по теореме 14 из § 46, II это семейство замкнуто.

Замечание. Если в некотором полном пространстве $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ — *убывающая последовательность замкнутых связных множеств, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha(C_n) = 0$, то пересечение $C_1 \cap C_2 \cap \ldots$ есть континуум*[2].

Доказательство. Предположим, что

$$(3) \qquad \bigcap_n C_n = A \cup B,$$

$$(4) \qquad A = \overline{A}, \quad B = \overline{B}, \quad A \neq 0 \neq B, \qquad A \cap B = 0.$$

Пусть G — открытое множество, такое, что

$$(5) \qquad A \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G} \cap B = 0.$$

---

[1]) Ср. Зоретти [1, стр. 8].

[2]) См. Куратовский [24, стр. 304]. Определение $\alpha(C)$ см. § 37, IV, замечание 2.

Так как множество C_n связно, то из условия $C_n \cap G \neq 0 \neq C_n - G$ следует, что $C_n \cap \operatorname{Fr}(G) \neq 0$. Положим $F_n = C_n \cap \operatorname{Fr}(G)$. Так как

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots, \qquad 0 \neq F_n = \overline{F}_n$$

и

$$\alpha(F_n) \leqslant \alpha(C_n), \quad \text{откуда} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0,$$

то, согласно § 34, II,

$$\bigcap_n F_n \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad \bigcap_n C_n \cap \operatorname{Fr}(G) \neq 0.$$

Но это противоречит условиям (3) и (5).

Таким образом, установлено, что множество $\bigcap\limits_n C_n$ связно. Компактность этого множества вытекает из условия $\alpha\left(\bigcap\limits_n C_n\right) = 0$, которое означает, что множество $\bigcap\limits_n C_n$ вполне ограничено (ср. § 41, VI, теорема 2).

Теорема 6. *Если $C_1, C_2, \ldots$ — последовательность подконтинуумов компактного метрического пространства, такая, что $\operatorname{Li}\limits_{n\to\infty} C_n \neq 0$, то множество $\operatorname{Ls}\limits_{n\to\infty} C_n$ есть континуум.*

Доказательство. Согласно следствию из § 29, VIII, $\operatorname{Ls}\limits_{n\to\infty} C_n$ есть объединение пределов сходящихся подпоследовательностей $\{C_{k_n}\}$. Так как эти пределы связны (по теореме 4) и содержат множество $\operatorname{Li}\limits_{n\to\infty} C_n$ (ср. § 29, II, теорема 5), то их объединение связно (ср. § 46, II, теорема 2).

Теорема 7. *Если f — непрерывное отображение континуума $\mathscr{X}$, то существует подконтинуум C континуума $\mathscr{X}$, неприводимый по отношению к свойству: быть таким континуумом, что $f(C) = f(\mathscr{X})$.*

Доказательство. Это утверждение — следствие теоремы 2 из § 42, IV и того факта, что семейства континуумов и замкнутых множеств X, таких, что $f(X) = f(\mathscr{X})$, замкнуты в пространстве $2^{\mathscr{X}}$ (ср. § 44, II, теорема 2).

Теорема 8. *Пусть E — подмножество компактного метрического пространства. Если $\dim_a E > 0$ (где a — некоторая заданная точка E), то существует точка $b \neq a$, такая, что $E \cup (b)$ связно между a и b* [1]).

---

[1]) Теорема Менгера [1, стр. 207].

Доказательство. Пусть B_0 — замкнутое множество в E, такое, что $a \in E - B_0$ и E связно между a и B_0 (ср. § 46, IV, теорема 2); положим в теореме 1 $A = a$ и $B = B_0$.

Теорема 9. *Если компактное метрическое пространство (или пространство, обладающее свойством (M)) имеет положительную размерность в точке p, то точка p лежит в некотором связном множестве (содержащем более одной точки).*

Доказательство. Согласно теореме 8, пространство связно между p и некоторой точкой $q \neq p$. Квазикомпонента точки p, совпадающая со своей компонентой, содержит точку q.

III. Замкнутые подмножества континуума.

Теорема 1[1]. *Если A — собственное замкнутое подмножество континуума $\mathcal{X}$ и если C — компонента множества A, то*

$$C \cap \overline{\mathcal{X} - A} \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq 0.$$

Доказательство. Действительно (ср. II, теорема 3), множество A связно между каждой точкой $a \in A$ и множеством $A \cap \overline{\mathcal{X} - A}$ (§ 46, IV, теорема 8).

Теорему 1 можно обобщить следующим образом:

Теорема 2. *Если X — произвольное собственное подмножество континуума $\mathcal{X}$ и C — компонента множества X, то*

$$\bar{C} \cap \overline{\mathcal{X} - X} \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad \bar{C} \cap \mathrm{Fr}(X) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $a \in C$. Очевидно, можно предположить, что $a \notin \overline{\mathcal{X} - X}$. Рассмотрим семейство $\mathbf{A}$ всех открытых множеств G, таких, что $\overline{\mathcal{X} - X} \subset G$ и $a \notin \bar{G}$. Обозначим через C_G компоненту точки a в $\mathcal{X} - G$. По теореме 1 имеем $C_G \cap \bar{G} \neq 0$.

Так как $\mathcal{X} - X \subset G$, то $\mathcal{X} - G \subset X$. Следовательно,

$$C_G \subset C, \quad \text{откуда} \quad C \cap \bar{G} \neq 0.$$

Так как семейство $\mathbf{A}$ направлено по включению $\supset$, т. е. для каждой пары множеств G_1 и G_2 существует множество G_3, такое, что $G_3 \subset G_1$ и $G_3 \subset G_2$ (а именно $G_3 = G_1 \cap G_2$), то направленным будет и семейство всех множеств $\bar{C} \cap \bar{G}$, где $G \in \mathbf{A}$. Так как множества $\bar{C} \cap \bar{G}$ компактны и непусты, то

[1] Теорема Янишевского [2, стр. 907]. См. также Вьеторис [1] и Шиманский [1], где приводятся библиографические ссылки. Более современный подход см. Шура-Бура [1, стр. 386].

(согласно § 41, I (4)) их пересечение F непусто. Очевидно, пересечение всех множеств $\overline{G}$, где $G \in \mathbf{A}$, равно $\overline{\mathscr{X} - X}$, откуда $0 \neq F = \overline{C} \cap \overline{\mathscr{X} - X}$.

Теорема 3. *Если A — собственное замкнутое подмножество континуума, то всякая компонента A содержит по крайней мере одну компоненту границы A.*

Следовательно, *мощность семейства компонент множества A не превосходит мощности семейства компонент* $\mathrm{Fr}(A)$.

Доказательство. Если C — компонента множества A, то по теореме 1 $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq 0$. Пусть D — такая компонента $\mathrm{Fr}(A)$, что $C \cap D \neq 0$. Так как $D \subset \mathrm{Fr}(A) \subset A$, то $D \subset C$.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ и $K \subset \mathscr{X}$ — континуумы, а G — такое открытое множество, что $K \subset G$ и $\overline{G} \neq \mathscr{X}$. Тогда существует такой континуум C, что $K \subset C \subset \overline{G}$ и $K \neq C$.*

В частности, *если $\mathscr{X}$ — метрическое пространство* (*содержащее более одной точки*), *то каждая точка пространства $\mathscr{X}$ принадлежит некоторому континууму* (*содержащему более одной точки*) *произвольно малого диаметра.*

Доказательство. Заменим в теореме 1 A на $\overline{G}$ и обозначим через C компоненту множества $\overline{G}$, содержащую K.

Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 4.

Теорема 5[1]. *Если K — собственный подконтинуум континуума $\mathscr{X}$, то существует континуум C, такой, что*

$$K \subset C \quad \text{и} \quad K \neq C \neq \mathscr{X}.$$

Теорема 6 (Серпинский [5]). *Никакой континуум нельзя разложить в объединение счетного семейства непустых непересекающихся замкнутых множеств.*

Доказательство. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ — такой континуум, что

$$\mathscr{X} = \bigcup_n A_n,$$

где множества A_n замкнуты, не пересекаются и по крайней мере два из них непусты. Определим последовательность континуумов $C_1, C_2, \ldots$, таких, что

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots, \quad C_n \cap A_n = 0 \quad \text{и} \quad C_n \neq 0;$$

[1]) См. также п. VII и § 48, VI, теорема 1.

это приводит к противоречию, так как

$$\bigcap_n C_n \cap \bigcup_n A_n = 0, \quad \text{откуда} \quad \bigcap_n C_n = 0,$$

вопреки теореме Кантора.

Наша задача свелась к доказательству существования такого континуума C, что $C \cap A_1 = 0$ и по крайней мере два из элементов последовательности $C \cap A_2$, $C \cap A_3$, ... непусты (C будем обозначать через C_1, а для того чтобы определить C_2, будем рассматривать C_1 как все пространство, и т. д.).

Но, очевидно, можно предположить, что $A_1 \neq 0$ (так как в противном случае можно было бы считать, что $C = \mathcal{X}$). Пусть $A_m \neq 0$ при $m \neq 1$. Пусть F — замкнутая окрестность множества A_m (т. е. $A_m \cap \overline{\mathcal{X} - F} = 0$), такая, что $F \cap A_1 = 0$, и пусть C — компонента множества F, такая, что $C \cap A_m \neq 0$. Так как $F \cap A_1 = 0$, то $C \cap A_1 = 0$. С другой стороны, согласно теореме 1,

$$C \cap \overline{\mathcal{X} - F} \neq 0, \quad \text{откуда} \quad C \not\subset A_m, \quad \text{т. е.} \quad C - A_m \neq 0,$$

а так как

$$C - A_m \subset (C \cap A_2) \cup \ldots \cup (C \cap A_{m-1}) \cup (C \cap A_{m+1})) \cup \ldots,$$

то существует такой индекс $n \neq m$, что $C \cap A_n \neq 0$.

З а м е ч а н и я. (i) Из теоремы 6 вытекает следующая

Т е о р е м а 6а. *Если компактное пространство допускает разложение на (непустые) непересекающиеся континуумы C_1, C_2, ..., то каждый континуум C_n — компонента этого пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в противном случае существовал бы континуум K, такой, что $K \supset C_n$ и $K \neq C_n$, и ряд

$$K = (K \cap C_1) \cup (K \cap C_2) \cup \ldots$$

содержал бы по крайней мере два непустых члена.

(ii) В теореме 6 *предположение компактности существенно.* Построим пример связного *локально компактного* пространства E, допускающего разложение в ряд непересекающихся замкнутых связных множеств (рис. 2). Пусть E — объединение 1) сегментов $x = 2^{-n}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 2) сегмента $x = 0$, $0 < y \leqslant 1$, из которого выброшены точки с ординатами $3/2^n$; 3) дуг $\rho = 2^{-n}$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (в полярных координатах) [1]).

[1]) См. Серпинский [9, стр. 5] и [6, стр. 188]. Ср. также Кнастер и Куратовский [3, стр. 58].

Множество E можно гомеоморфно отобразить на замкнутое связное множество, лежащее в *трехмерном* евклидовом пространстве. Однако *на плоскости* не существует замкнутого связного множества, допускающего разложение в ряд непересекающихся замкнутых *связных* множеств [1]).

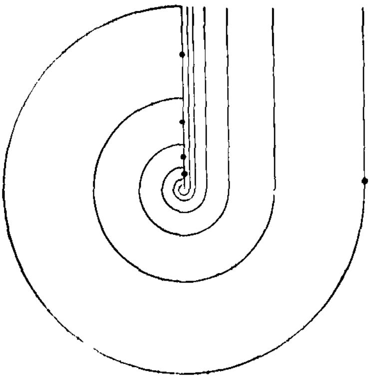

Рис. 2

С другой стороны, на плоскости можно построить замкнутое связное множество, допускающее разложение в ряд непересекающихся (несвязных) замкнутых множеств [2]).

(iii) Точка p называется *достижимой из множества A*, если существует такой континуум C, что

$$(1)\quad p\in C\subset A\cup p \quad \text{и} \quad C\neq p.$$

Так, например, если E — кривая $y=\sin(1/x)$, $0<|x|\leqslant 1$, пополненная сегментом $|y|\leqslant 1$, $x=0$, то только концы этого сегмента достижимы из множества $\mathcal{E}^2-E$, а все остальные точки этого сегмента недостижимы.

Теорема 7 (Урысон [3])). *Если E есть F_σ-множество в компактном метрическом пространстве $\mathcal{X}$, то множество E_a точек, достижимых из множества $\mathcal{X}-E$, является аналитическим.*

Доказательство. Действительно (ср. § 41, IV, следствие 1b),

$$(x\in E_a)\equiv(x\in E)\left(\bigvee_C\left\{(C\neq x)\bigwedge_y[(y\in C)(y\neq x)\Rightarrow(y\in\mathcal{X}-E)]\right\}\right),$$

где C пробегает компактное пространство (ср. II, теорема 4) подконтинуумов пространства $\mathcal{X}$.

Замечание. Примеры замкнутых множеств, лежащих в $\mathcal{E}^3$, показывают, что E_a может быть неборелевским множеством [4]).

Если E — компактное подмножество *плоскости*, то E_a — борелевское множество (см. Мазуркевич [28, стр. 153]).

---

[1]) См. Мазуркевич [11] и Мур [6].

[2]) Мазуркевич [11].

[3]) См. Урысон [3]. Доказательство см. в статье Куратовского [25, стр. 263]. По поводу аналогичных теорем, касающихся прямолинейной достижимости, ср. § 38, VIII, стр. 475.

[4]) См. Урысон [3] и Никодим [1].

IV. Разделение компактных метрических пространств. Из теоремы 3 п. II вытекает следующая

Теорема 1. *Если $\mathcal{X}$ — компактное пространство, то множество C является его разделителем тогда и только тогда, когда существует компонента Q пространства $\mathcal{X}$, содержащая две точки, между которыми множество $\mathcal{X} - C$ не связно.*

В этом случае, очевидно, $C \cap Q$ — разделитель множества Q. Однако разделитель компоненты пространства $\mathcal{X}$ не обязательно является разделителем $\mathcal{X}$.

Теорему 1 из § 46, VII можно усилить следующим образом.

Теорема 2. *Во всяком компактном пространстве $\mathcal{X}$ существует последовательность точек $p_1, p_2, \ldots$, такая, что каждый замкнутый разделитель F является разделителем между парой точек (p_i, p_j), между которыми пространство $\mathcal{X}$ связно.*

Более точно, *если $\{Q_n\}$ — семейство компонент, всюду плотное в семействе всех компонент пространства $\mathcal{X}$, и если $P = \{p_n\}$ — такое счетное множество точек, что $\overline{P \cap Q_n} = Q_n$ для $n = 1, 2, \ldots$, то каждому замкнутому разделителю F соответствуют три индекса i, j, k, таких, что $p_i, p_j \in Q_k$ и F разделяет пространство между p_i и p_j.*

Доказательство. Согласно предположению, существуют два открытых множества M и N и компонента C пространства $\mathcal{X}$, такие, что

(1) $$\mathcal{X} - F = M \cup N, \qquad M \cap N = 0,$$

(2) $$C \cap M \neq 0 \neq C \cap N.$$

Так как множество C — предел последовательности, содержащейся в семействе $\{Q_n\}$, то существует такой индекс k, что

$$Q_k \cap M \neq 0 \neq Q_k \cap N.$$

Наконец, из условия $\overline{P \cap Q_k} = Q_k$ вытекает существование двух индексов i и j, таких, что $p_i \in Q_k \cap M$ и $p_j \in Q_k \cap N$. Согласно (1), множество F — разделитель пространства между точками p_i и p_j.

Теорема 3 (Уайберн [11, стр. 151]). *Если $\mathcal{X}$ — континуум, то множество $S(a, b)$ всех точек, разделяющих пространство $\mathcal{X}$ между точками a и b, есть объединение G_δ-множества с некоторым счетным множеством.*

Доказательство. Согласно теореме 5 из § 46, IX, множество $S(a, b)$ после удаления из него некоторого счетного множества точек совпадает с множеством точек, в которых непрерывное отображение пространства $\mathcal{X}$ взаимно однозначно, а последнее является G_δ-множеством (ср. со следствием 1с § 41, III).

Теорема 4. *Множество всех точек, разделяющих $\mathcal{X}$, есть множество типа $G_{\delta\sigma}$.*

Доказательство. Это следует из теорем 2 и 3.

Замечание. Если $\mathcal{X}$ не компактно, то $S(a, b)$ может быть неборелевским множеством. Пусть $\mathcal{X}$ — подмножество квадрата $\mathcal{J}^2$, состоящее из основания квадрата и вертикальных сегментов с абсциссами, принадлежащими некоторому множеству D, всюду плотному в $\mathcal{J}$. Положим $a=(0, 0)$ и $b=(1, 0)$. Тогда $S(a, b)=\mathcal{J}-D$.

Теорема 5 (Мур [1])). *Во всяком континууме $\mathcal{X}$ (содержащем более одной точки) существуют по крайней мере две точки, которые его не разделяют.*

Доказательство. Покажем, что для каждой точки p существует точка $q \neq p$, которая не разделяет пространство $\mathcal{X}$. Пусть $p_0, p_1, p_2 \ldots$ — последовательность точек, всюду плотная в $\mathcal{X}$, где $p_0=p$ и $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$. Можно считать, что точки p_n разделяют пространство $\mathcal{X}$ при $n>0$.

Пусть $i_0=0$, i_1, i_2, ... — некоторая последовательность индексов, и пусть $A_0=\mathcal{X}$, A_1, A_2, ... — последовательность открытых множеств, определяемая следующими условиями:

(i) i_n — наименьший индекс $>i_{n-1}$, такой, что $p_{i_n} \in A_{n-1}$;

(ii) A_n — открытое множество, такое, что

$$\overline{A}_n = A_n \cup p_{i_n} \quad \text{и} \quad p_{i_{n-1}} \in \mathcal{X} - A_n.$$

(Существование множества A_n вытекает из того факта, что $\mathcal{X}-p_{i_n}$ допускает разложение на два непустых непересекающихся открытых множества; то из них, которое не содержит точки $p_{i_{n-1}}$, обозначается через A_n.)

Так как множество A_n — континуум (ср. § 46, II, теорема 4), то из условий

(1) $p_{i_n} \in \overline{A}_n \cap A_{n-1}$ и $\mathrm{Fr}(A_{n-1})=p_{i_{n-1}}$, откуда $\overline{A}_n \cap \mathrm{Fr}(A_{n-1})=0$,

следует, что $\overline{A}_n \subset A_{n-1}$ (ср. § 46, I, теорема 1).

---

[1]) См. Мур [3, стр. 340, теорема 2] и [4] Обобщения см. в п. VI. Ср. также Мазуркевич [8], Гёман [2, стр. 433], Бинг [6, стр. 501] и Кураговский [5, стр 113].

Поэтому $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \neq 0$ (ср. § 41, I, замечание 4). Пусть

(2) $q \in (A_1 \cap A_2 \cap \ldots)$, откуда $q \neq p_{i_n}$ для $n = 0, 1, \ldots$.

Пусть M и N — два таких открытых множества, что

$$(3) \qquad \mathcal{X} - q = M \cup N \quad \text{и} \quad M \cap N = 0.$$

Покажем, что одно из них пусто. Предположим, что существует бесконечно много индексов i_n, таких, что $p_{i_n} \in N$; тогда, согласно (1), (2) и (3),

$$(4) \qquad (M \cup q) \cap \operatorname{Fr}(A_n) = 0.$$

Так как множество $M \cup q$ — континуум (ср. § 46, II, теорема 4), то из условия $(M \cup q) \cap A_n \neq 0$ (ср. (2) и (4)) по теореме 1 из § 46, I следует, что

$$(5) \qquad M \cup q \subset A_n, \text{ откуда } M \cup q \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots.$$

Если $M \neq 0$, то существует точка $p_k \in M$; но в этом случае если n удовлетворяет условиям $i_n > k \geqslant i_{n-1}$, то $p_k \in M \subset A_n$ (согласно (5)), а потому $k \neq i_{n-1}$, $p_k \in A_{n-1}$ и i_n не является наименьшим индексом $> i_{n-1}$, удовлетворяющим условию $p_{i_n} \in A_{n-1}$, что противоречит условию (i). Следовательно, $M = 0$.

V. Дуги. Простые замкнутые кривые. *Дугой* называется пространство, гомеоморфное интервалу $\mathcal{J}$. Пространство, гомеоморфное окружности $x^2 + y^2 = 1$, называется *простой замкнутой кривой.*

Всякий интервал содержит точно две точки, которые его не разделяют, а потому этим свойством обладает и каждая дуга. Эти две точки называются *концами* дуги («дуга ab» — это дуга с концами в точках a и b).

Теорема 1. *Если каждая точка x метрического континуума $\mathcal{X}$, за исключением двух точек a и b, является разделителем, то $\mathcal{X}$ — дуга* [1]).

Доказательство. Пусть $a \neq x \neq b$ и $\mathcal{X} - x = M \cup N$, где M и N — два непустых, непересекающихся открытых множества. Пусть $a \in M$. Тогда $b \in N$, так как в противном случае, обозначив через y (в соответствии с теоремой 5 п. IV) ту точку множества N, которая не разделяет континуум $N \cup x$, мы получили бы, что множество

$$\mathcal{X} - y = (N \cup x) - y \cup (M \cup x)$$

связно вопреки предположению.

---

[1]) Ср. с примечанием к теореме Ленеса (§ 46, IX, теорема 6). См. также Мур [3, стр. 340].

Так как каждая точка x есть разделяющая точка между точками a и b, интервал $\mathcal{J}$ представляет собой непрерывный взаимно однозначный образ $\mathcal{X}$ (теорема 6 из § 46, IX). Следовательно, как компактное пространство, $\mathcal{X}$ гомеоморфно этому интервалу (ср. с теоремой 3 из § 41, III).

Теорема 1′. *Если метрический континуум $\mathcal{X}$ содержит две точки a и b, такие, что каждой точке x соответствуют два замкнутых множества A и B, удовлетворяющих условиям*

$$\mathcal{X} = A \cup B, \quad a \in A, \quad b \in B \quad \text{и} \quad A \cap B = x,$$

то $\mathcal{X}$ — дуга [1]).

Доказательство. Действительно, каждая точка $x \in \mathcal{X} - a - b$ является разделителем.

Замечание. Условия, данные в теоремах 1 и 1′, являются не только достаточными, но также и необходимыми для того, чтобы метрический континуум был дугой. Вообще, так как все дуги имеют один и тот же топологический тип, всякое топологическое условие, достаточное для того, чтобы пространство было дугой (и выполняющееся хотя бы для одного пространства), является одновременно и необходимым.

Теорема 2 (Мур [2])). *Если любая пара точек разделяет метрический континуум $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ — простая замкнутая кривая.*

Доказательство. Покажем, во-первых, что для каждой точки a множество $\mathcal{X} - a$ связно. Действительно, в противном случае существовали бы два континуума P и Q, таких, что

$$\mathcal{X} = P \cup Q \quad \text{и} \quad P \cap Q = a.$$

Следовательно, согласно теореме 5 п. IV, существовали бы две точки $p \in P$, $q \in Q$, $p \neq a \neq q$, такие, что множества $P - p$ и $Q - q$ связны. Но в этом случае множество

$$\mathcal{X} - p - q = (P - p) \cup (Q - q)$$

было бы связно (так как $a \in (P - p) \cap (Q - q)$) вопреки предположению.

По предположению каждая точка $x \neq a$ есть разделитель множества $\mathcal{X} - a$. Согласно теореме 4 из § 46, VIII, среди этих точек x имеется некоторая точка b, разделяющая множество $\mathcal{X} - a$ на два непустых связных отделимых множества M и N. Следовательно,

$$\mathcal{X} - a - b = M \cup N.$$

[1]) Ср. Серпинский [2] и [4], Страшевич [1].

[2]) Мур [3, стр. 342]. Ср. также Бинг [6, стр. 505].

Отсюда вытекает, что $\overline{M}=M\cup a\cup b$, так как предположение $a\notin\overline{M}$ повлекло бы за собой существование разложения (связного) множества $\mathcal{X}-b$ на два отделимых множества M и $N\cup a$. Аналогично $\overline{N}=N\cup a\cup b$.

Покажем, что $\overline{M}$ и $\overline{N}$ — две дуги ab.

Предположим, например, что $\overline{M}$ не является дугой ab. Тогда по теореме 1 существует точка $x\in M$, такая, что $\overline{M}-x$ связно. Следует различать два случая в соответствии с тем, является ли $\overline{N}$ дугой ab или нет.

Если $\overline{N}$ не является дугой ab, то существует точка $y\in N$, такая, что $\overline{N}-y$ связно. Но тогда множество

$$\mathcal{X}-x-y=(\overline{M}-x)\cup(\overline{N}-y)$$

связно вопреки предположению.

Если $\overline{N}$ — дуга, то каждая точка $y\in N$ определяет разбиение множества $\overline{N}$ на два связных множества $ay-y$ и $by-y$, что приводит к тому же противоречию, так как множество

$$\mathcal{X}-x-y=(\overline{M}-x)\cup(ay-y)\cup(by-y)$$

связно.

Следующие два утверждения вытекают непосредственно из теоремы 2.

Теорема 2′. *Если каждой паре точек a, b метрического континуума $\mathcal{X}$ соответствуют два замкнутых множества A и B, таких, что*

$$\mathcal{X}=A\cup B,\quad A\cap B=(a,\ b)\quad \textit{и}\quad A\neq\mathcal{X}\neq B,$$

то $\mathcal{X}$ — простая замкнутая кривая [1]).

Теорема 2″. *Если не существует связного подмножества, разделяющего метрический континуум $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ — простая замкнутая кривая* [2]).

Теорема 3. *Пусть в компактном метрическом пространстве задана последовательность $\{C_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, связных множеств, содержащих точки a и b и таких, что каждой точке $x\in\bigcap\limits_n C_n$ соответствует разбиение $C_n=A_n\cup B_n$, удовлетворяющее*

[1]) Более ограничительное условие, получающееся из теоремы 2′ в предположении, что A и B — континуумы, принадлежит Янишевскому [1].

[2]) Ср. Клайн [2].

следующим условиям:

$$\text{(i)} \qquad a \in A_n, \quad b \in B_n, \quad x \in A_n \cap B_n;$$

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n \to \infty} \delta(A_n \cap B_n) = 0;$$

$$\text{(iii)} \qquad \bar{A}_{n+1} \subset A_n, \quad \bar{B}_{n+1} \subset B_n;$$

тогда пересечение $\bigcap\limits_n C_n$ *есть дуга* ab.

Более общо, *вместо предположения компактности рассматриваемого пространства можно считать, что оно полно и* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(C_n) = 0$.

Доказательство. Так как $\bar{C}_{n+1} = \bar{A}_{n+1} \cup \bar{B}_{n+1} \subset A_n \cup B_n = C_n$, то пересечение $\bigcap\limits_n \bar{C}_n$ есть континуум (ср. II, замечание к теореме 5) и

$$\bigcap_n \bar{C}_{n+1} \subset \bigcap_n C_n \quad \text{влечет за собой} \quad \bigcap_n C_n = \bigcap_n \bar{C}_n.$$

Пусть (для фиксированного x)

$$A = \bigcap_n A_n, \quad B = \bigcap_n B_n.$$

Покажем, что A и B удовлетворяют теореме 1′ $\left(\text{если } \mathscr{X} = \bigcap\limits_n C_n\right)$. Так как $\bar{A}_{n+1} \subset A_n \subset \bar{A}_n$, то $A = \bigcap\limits_n \bar{A}_n$, откуда следует, что множество A замкнуто. Множество B замкнуто по той же причине. Из включений $A_{n+1} \subset A_n$ и $B_{n+1} \subset B_n$ следует, что

$$\bigcap_n C_n = \bigcap_n (A_n \cup B_n) = \bigcap_n A_n \cup \bigcap_n B_n = A \cup B.$$

Наконец, $x \in \bigcap\limits_n (A_n \cap B_n) = A \cap B$, и так как $\delta(A \cap B) = 0$, то $A \cap B = x$.

VI. Разбиение компактных пространств на континуумы.

Теорема 1 [1]). *Разбиение компактного пространства* $\mathscr{X}$ *на компоненты полунепрерывно сверху.*

Доказательство. По теореме 3 из § 46, V существует такое непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$ в обобщенный канторов дисконтинуум $D^{\mathfrak{m}}$, что квазикомпоненты $\mathscr{X}$ (следовательно, и его компоненты; см. II, теорема 2) совпадают с прообразами точек при отображении f. Так как пространство $\mathscr{X}$

[1]) См. Брауэр [3]. См. также Веденисов [1].

компактно, то его разбиение на прообразы точек при непрерывном отображении полунепрерывно сверху (по теореме 3 из § 41, III).

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 2. *В разбиении компактного пространства на счетное семейство C_1, C_2, ... непустых непересекающихся континуумов имеется по крайней мере одно открытое множество C_n* [1]).

Доказательство. Согласно теореме 6а п. III, континуумы C_k являются компонентами пространства, а по теореме 1 указанная выше функция f отображает пространство на счетное замкнутое множество; пусть y — изолированная точка этого множества; тогда $f^{-1}(y)$ — искомый открытый континуум.

Следствие 3. *Всякое замкнутое множество F, являющееся объединением семейства компонент компактного метрического пространства, представляет собой пересечение последовательности открыто-замкнутых множеств.*

Доказательство. Пусть f: $\mathscr{X} \to \mathscr{C}$ — рассматривавшееся выше отображение; положим $A = f(F)$. Тогда

$$A = \bar{A}, \quad F = f^{-1}(A) \quad \text{и} \quad \dim A = 0.$$

Следовательно, в $\mathscr{C}$ существует (ср. § 26, I, следствие 1b) такая последовательность $\{G_n\}$ открыто-замкнутых множеств, что

$$A = G_1 \cap G_2 \cap \ldots .$$

Поэтому $f^{-1}(G_n)$ открыто-замкнуто и

$$F = f^{-1}(A) = f^{-1}(G_1) \cap f^{-1}(G_2) \cap \ldots .$$

Теорема 5 п. IV допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Если C — собственное связное подмножество метрического континуума $\mathscr{X}$, то в множестве $\mathscr{X} - C$ существует точка, не разделяющая $\mathscr{X}$* [2]).

Доказательство. Так как в случае, когда $\bar{C} = \mathscr{X}$, теорема очевидна (ср. § 46, II, следствие 3 (ii)), то предположим, что $\bar{C} \neq \mathscr{X}$. Пусть f: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — такое непрерывное отображение континуума $\mathscr{X}$ на континуум $\mathscr{Y}$, что множество $f(\bar{C})$ состоит из одной точки y_0, а при $y \neq y_0$ множество $f^{-1}(y)$ состоит из одной точки множества $\mathscr{X} - \bar{C}$ (ср. § 22, IV, теорема 1). Согласно

[1]) См. Мур [5].
[2]) Теорема Гемана [2, стр. 435].

теореме 5 из п. IV, существует точка $y_1 \neq y_0$, такая, что множество $\mathcal{Y} - y_1$ связно. Следовательно, множество $f^{-1}(\mathcal{Y} - y_1) = \mathcal{X} - f^{-1}(y_1)$ также связно.

Сформулируем без доказательства следующее обобщение теоремы 5 п. IV.

Теорема 5. *Пусть метрический континуум $\mathcal{X}$ представляет собой объединение (по крайней мере двух) связных множеств C_t; тогда существуют два индекса $t_1 \neq t_2$, таких, что множества $\bigcup\limits_{t \neq t_1} C_t$ и $\bigcup\limits_{t \neq t_2} C_t$ связны*[1].

В доказательстве теоремы 7 мы используем следующую теорему[2].

Теорема 6. *Если $\boldsymbol{D}$ — полунепрерывное разбиение компактного метрического пространства $\mathcal{X}$, то семейство $\boldsymbol{F}$ компонент элементов разбиения $\boldsymbol{D}$ само является полунепрерывным разбиением.*

Доказательство. Пусть $F_0, F_1, \ldots$ — последовательность множеств, являющихся элементами семейства $\boldsymbol{F}$, такая, что

$$(1) \qquad F_0 \cap \operatorname{Li} F_n \neq 0.$$

Мы должны показать, что

$$(2) \qquad \operatorname{Ls} F_n \subset F_0.$$

Пусть D_n $(n \geqslant 0)$ — элемент разбиения $\boldsymbol{D}$, компонентой которого является F_n. Согласно (1), $D_0 \cap \operatorname{Li} D_n \neq 0$, откуда следует, что $\operatorname{Ls} D_n \subset D_0$, так как разбиение $\boldsymbol{D}$ полунепрерывно.

Поэтому $\operatorname{Ls} F_n \subset D_0$. Согласно (1) и теореме 6 из п. II, $\operatorname{Ls} F_n$ — континуум. Но так как F_0 — компонента множества D_0 и $\operatorname{Ls} F_n$ — подконтинуум множества D_0, имеющий общие точки с F_0 (согласно (1)), то из этого следует включение (2).

Теорема 7. *Всякое непрерывное отображение f компактного метрического пространства $\mathcal{X}$ можно представить в виде композиции двух непрерывных отображений h и g*

$$f(x) = gh(x), \quad x \in \mathcal{X},$$

где отображение h монотонно, а отображение g имеет нульмерные прообразы точек.

Более точно, *если h* (в соответствии с теоремой 6) — *непрерывное отображение, прообразы точек которого суть компоненты*

[1]) Эйленберг [2]. См. также Лелек [1].

[2]) Теоремы 6 и 7 см. Эйленберг [1]; Уайберн [20]; Хокинг и Юнг [1], где эти теоремы доказаны без предположения метризуемости.

прообразов точек отображения f, то отображение g, определенное равенством

$$(3) \qquad g(y)=f\left[h^{-1}(y)\right], \quad \text{где} \quad y\in h(\mathcal{X}),$$

непрерывно и

$$(4) \qquad \dim g^{-1}(z)=0 \quad \text{для} \quad z\in f(\mathcal{X}).$$

Доказательство. Вначале заметим, что правая часть равенства (3) состоит из одного элемента, ибо множество $h^{-1}(y)$ содержится в одном прообразе точки отображения f.

Отображение g непрерывно, поскольку (ср. § 41, IV, теорема 2) множество

$$\underset{y,\,z}{\mathsf{E}}\,[z=g(y)]=\underset{y,\,z}{\mathsf{E}}\,\underset{x}{\mathsf{V}}\,[z=f(x)]\left[x\in h^{-1}(y)\right]= \\ =\underset{y,\,z}{\mathsf{E}}\,\underset{x}{\mathsf{V}}\,[z=f(x)]\,[y=h(x)],$$

как проекция замкнутого множества, замкнуто.

Для доказательства соотношения (4) рассмотрим континуум C, такой, что

$$(5) \qquad C\subset g^{-1}(z).$$

Покажем, что континуум C состоит только из одной точки. Из (3) и (5) следует, что

$$h^{-1}(C)\subset f^{-1}f\left[h^{-1}(C)\right]=f^{-1}g(C)\subset f^{-1}g\left[g^{-1}(z)\right]=f^{-1}(z).$$

Так как функция h монотонна (по теореме 9 из § 46, I), то множество $h^{-1}(C)$ — континуум и, следовательно, подконтинуум компоненты Q в множестве $f^{-1}(z)$. Так как отображение h постоянно на Q и, следовательно, на $h^{-1}(C)$, то множество $C=h\left[h^{-1}(C)\right]$ состоит только из одной точки.

Теорема 8. *Пусть G — открытое подмножество континуума $\mathcal{X}$ и p — изолированная точка множества* $\mathrm{Fr}(G)$. *Тогда p достижима из множества G.*

Доказательство. Обозначим через C компоненту точки p в $\overline{G}$ и положим $F=\mathrm{Fr}(G)-(p)$. Так как точка p изолирована в $\mathrm{Fr}(G)$, то множество F замкнуто.

Рассмотрим сначала случай, когда $C\cap F\neq 0$. Согласно теореме 4 п. III (где мы положим $\mathcal{X}=C$, $K=(p)$ и $\overline{G}\cap F=0$), существует такой континуум C_0, что $C_0\neq(p)$, $p\in C_0\subset C-F$ и, следовательно, $C_0-(p)\subset G$. Итак, в этом случае точка p достижима из множества G.

Теперь рассмотрим случай, когда $C \cap F = 0$, т. е. когда $C \cap \mathrm{Fr}(G) = (p)$. Остается показать, что $C \cap G \neq 0$ (т. е. что C не сводится к точке p). Обозначим через U объединение всех компонент множества $\overline{G}$, имеющих общие точки с F. Так как F замкнуто и разбиение множества $\overline{G}$ на компоненты (по теореме 1) полунепрерывно сверху, то множество U замкнуто. Поскольку каждая компонента множества $\overline{G}$ имеет общие точки с $\mathrm{Fr}(\overline{G})$, а следовательно, с $\mathrm{Fr}(G)$ (ибо $\mathrm{Fr}(\overline{G}) \subset \mathrm{Fr}(G)$), то $C \cup U = \overline{G}$.

Отсюда вытекает, что $C \cap G \neq 0$, ибо иначе $G \subset U$ и, следовательно, $\overline{G} \subset U$, а тогда $C \subset U$; но последнее означает, что $C \cap F \neq 0$ вопреки нашему предположению.

Это завершает доказательство.

VII. Пространство $2^{\mathcal{X}}$. Согласно теореме 14 § 46, II, семейство C всех подконтинуумов компактного пространства $\mathcal{X}$ замкнуто в пространстве $2^{\mathcal{X}}$. Имеет место также следующий аналогичный результат:

Теорема 1. *Если A и B — два подмножества компактного пространства $\mathcal{X}$, то семейство множеств $X \in 2^{\mathcal{X}}$, связных между множествами A и B, замкнуто.*

Доказательство. Множество X не связно между множествами A и B тогда и только тогда, когда существует открытое множество G, такое, что (ср. § 46, IV, теорема 7)

$$A \subset G, \quad B \cap \overline{G} = 0 \quad \text{и} \quad X \cap \mathrm{Fr}(G) = 0.$$

Так как семейство множеств X, удовлетворяющих этим условиям для данного множества G, открыто (ср. с теоремой 1 § 17, II), отсюда непосредственно следует требуемый вывод.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{F}$ — монотонное семейство замкнутых множеств в компактном метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Если $\boldsymbol{F}$ — континуум (в $2^{\mathcal{X}}$), то $\boldsymbol{F}$ — дуга.*

Доказательство. Пусть E — элемент семейства $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — такие подсемейства $\boldsymbol{F}$, состоящие из множеств X, что

$$X \subset E \neq X, \text{ соответственно } E \subset X \neq E.$$

Предположим, что E не является ни первым, ни последним элементом $\boldsymbol{F}$; тогда $\boldsymbol{M} \neq 0 \neq \boldsymbol{N}$. Более того, семейства $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ отделимы, так как из условия $L = \operatorname{Lim}_{n \to \infty} X_n$ следует, что либо

$L \subset E$, либо $E \subset L$, в соответствии с тем, выполняется ли включение $X_n \in \boldsymbol{M}$ или $X_n \in \boldsymbol{N}$ для всех n.

Таким образом, легко видеть, что, за исключением первого и последнего элементов, каждый элемент $\boldsymbol{F}$ есть разделяющая точка. Следовательно, семейство $\boldsymbol{F}$ — дуга в силу теоремы 1 п. V.

Теорема 3. *Если A и C — два (непустых) метрических континуума, таких, что $A \subset C \neq A$, то существует монотонное семейство континуумов, образующее в пространстве 2^C дугу с концами в точках A и C*[1]).

Доказательство. Сначала покажем, что если $0 < \varepsilon \leqslant \leqslant \operatorname{dist}(A, C)$, то существует континуум A_ε, такой, что

$$A \subset A_\varepsilon \subset C \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(A, A_\varepsilon) = \varepsilon.$$

Пусть S — множество таких точек x, что $\rho(x, A) \leqslant \varepsilon$ и $x \in C$, и пусть A_ε — компонента множества S, содержащая A; тогда $A_\varepsilon = C$ в случае, когда $\varepsilon = \operatorname{dist}(A, C)$, и $A_\varepsilon \cap (\overline{X - S}) \neq 0$ в противном случае (ср. III, теорема 1); но если $p \in A_\varepsilon \cap (\overline{X - S})$, то $\rho(p, A) = \varepsilon$ и, следовательно, $\operatorname{dist}(A, A_\varepsilon) = \varepsilon$.

В случае, когда $\operatorname{dist}(A_\varepsilon, C) > 0$, поступаем аналогичным образом: определим множество $A_{\varepsilon, \varepsilon}$, заменяя A на A_ε в определении множества A, далее определим $A_{\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon}$ и т. д.

После конечного числа шагов обязательно получим континуум, расстояние которого до C не превосходит ε, ибо в противном случае существовала бы бесконечная последовательность точек пространства 2^C, расстояния которых друг от друга были бы $\geqslant \varepsilon$ (но это невозможно, так как пространство 2^C компактно).

Таким образом, каждому числу $\varepsilon > 0$ соответствует конечная система континуумов

$$B_0 = A \subset B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n = C,$$

где $\operatorname{dist}(B_{i-1}, B_i) \leqslant \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, существует монотонное (счетное) семейство $\boldsymbol{D}$ континуумов, такое, что $A \in \boldsymbol{D}$, $C \in \boldsymbol{D}$ и для каждой пары $D_1, D_2 \in \boldsymbol{D}$ и каждого $\varepsilon > 0$ в $\boldsymbol{D}$ существует система $B_0, B_1, \ldots, B_n$, такая, что

$$B_0 = D_1, \quad B_n = D_2 \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(B_{i-1}, B_i) \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому семейство $\bar{\boldsymbol{D}}$ есть континуум (в 2^C, ср. п. I), и его элементы — тоже континуумы (в C).

Следовательно, согласно теореме 2, это семейство — дуга, так как оно монотонно.

[1]) Эта теорема и ее следствие принадлежат Борсуку и Мазуркевичу [1].

С л е д с т в и е 4. *Если C — метрический континуум, то каждую пару A, B элементов, принадлежащих 2^C, можно соединить дугой в 2^C* [1]).

Более точно, *если $A \in 2^C$ и $A \neq C$, то существует монотонное семейство замкнутых подмножеств множества C, образующее в пространстве 2^C дугу с концами A и C.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in A$. В пространстве 2^C существует дуга $\boldsymbol{A}$ с концами в точках p и C (по теореме 3). Семейство $\boldsymbol{B}$ всех множеств $A \cup X$, где $X \in \boldsymbol{A}$, монотонно, содержит A и C и, как непрерывный образ $\boldsymbol{A}$ (ср. § 17, III, следствие 4а), представляет собой континуум и, следовательно, дугу (по теореме 2).

Для того чтобы вывести первую часть теоремы из второй, рассмотрим две дуги: дугу $\boldsymbol{A}_0$, соединяющую A с C, и дугу $\boldsymbol{A}_1$, соединяющую B с C. Пусть E — первый элемент дуги $\boldsymbol{A}_1$ (ориентированной от B к C), принадлежащий $\boldsymbol{A}_0$; тогда поддуги $\boldsymbol{B}_0$ дуги $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_1$ дуги $\boldsymbol{A}_1$ с концами A, E и соответственно B, E образуют дугу, соединяющую A с B.

З а м е ч а н и е. Следствие 4 допускает такое обобщение. *Если C — метрический континуум, то пространство 2^C представляет собой непрерывный образ континуума, который получается соединением точки* (1/2, 1/2) *с каждой точкой канторова множества* $\mathscr{C}$ (ср. § 46, II, замечание) [2]). Заметим, что $\mathcal{J}^{\aleph_0}_{\text{top}} \subset 2^C$ [3]).

VIII. Полуконтинуумы. Разрезы пространства.

О п р е д е л е н и е 1. Пространство, любую пару точек которого можно соединить континуумом, называется *полуконтинуумом*.

Объединение всех континуумов, содержащих данную точку p, называется *конституантой* этой точки. Следовательно, конституанта точки p — это наибольший полуконтинуум, содержащий точку p. Ясно, что два различных полуконтинуума не пересекаются.

Т е о р е м а 1. *Всякий полуконтинуум связен.*

Конституанта точки p содержится в компоненте точки p; поэтому разбиение пространства на конституанты является измельчением его разбиения на компоненты.

---

1) Ср. Кох [1].
2) См. Мазуркевич [23].
3) См. Мазуркевич [21].

Теорема 2. *Всякий локально компактный (но не компактный) метрический полуконтинуум $\mathcal{X}$ есть объединение возрастающей (счетной) последовательности континуумов.*

Доказательство. Любое локально компактное пространство гомеоморфно некоторому компактному пространству с одной выброшенной точкой (§ 41, X, теорема 5); поэтому мы должны показать, что если C — континуум и p — такая точка C, что $C-p$ — полуконтинуум (гомеоморфный $\mathcal{X}$), то существует последовательность континуумов $K_1, K_2, \ldots$, удовлетворяющая условиям

(1) $$C-p=K_1 \cup K_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad K_1 \subset K_2 \subset \ldots .$$

Пусть $q \in C-p$, S_n — открытый шар с центром в точке p диаметра $\frac{1}{n}|q-p|$ и K_n — компонента точки q в $C-S_n$. Так как $C-p$ есть полуконтинуум, то каждой точке $x \in C-p$ соответствует континуум Q_x, такой, что x, $q \in Q_x \subset C-p$, и, следовательно, $Q_x \subset K_n$ для достаточно больших значений n. Отсюда следует условие (1).

Определение 2. Говорят, что множество *разрезает* пространство (или является *разрезом* пространства), если его дополнение не является полуконтинуумом. Говорят, что множество E *разрезает* пространство $\mathcal{X}$ *между точками* a и b, если эти две точки принадлежат двум различным конституантам множества $\mathcal{X}-E$ (это означает, что они принадлежат $\mathcal{X}-E$, но их нельзя соединить континуумом вне E). Говорят, что множество E *неприводимо разрезает* пространство $\mathcal{X}$ между точками a и b, если никакое его собственное замкнутое подмножество не разрезает $\mathcal{X}$ между этими точками.

Ясно, что *если E разделяет пространство между точками a и b, то оно разрезает пространство между этими точками.*

Обратное неверно. Так, например, замыкание кривой $y=\sin(1/x)$, $0<x\leqslant 1$, рассматриваемое как пространство, разрезается точкой $(0, 0)$ между точками $(0, +1)$ и $(0, -1)$, но не разделяется между этими точками.

Однако *открытое множество разделяет компактное пространство между точками a и b тогда и только тогда, когда оно разрезает пространство между ними.*

Действительно, всякое компактное пространство, связное между двумя данными точками, содержит континуум, соединяющий их (II, теорема 3 и I, теорема 6), Теорема 3 [1]. *Метрический континуум C представляет собой простую замкнутую кривую, если его не разрезает никакой подконтинуум.*

IX. Наследственно разрывные пространства.

Определение. Пространство называется *наследственно разрывным* («ponctiforme»), если оно не содержит никакого континуума, состоящего более чем из одной точки, иными словами, если всякая конституанта пространства сводится к одной точке.

Очевидно, что всякое наследственно несвязное пространство наследственно разрывно. Для компактных (метрических) пространств следующие понятия совпадают: наследственная разрывность, наследственная несвязность, полная несвязность и нульмерность.

Действительно, всякое пространство положительной размерности связно между двумя непересекающимися замкнутыми множествами (§ 46, IV, теорема 2) и, следовательно, содержит как компактное пространство континуум, соединяющий эти множества (согласно теореме 3 п. II).

Существуют также *наследственно разрывные, связные* (*полные сепарабельные*) *пространства* [2]. Так, например, если g — функция Помпейю (§ 46, VI, (iii)), то множество

$$(1) \qquad C = \underset{x,\, y}{\mathsf{E}} \left[y = \frac{dg(x)}{dx} \right]$$

связно по теореме 8 из § 46, I и наследственно разрывно, поскольку производная $dg(x)/dx$ имеет точки разрыва во всяком интервале (и, следовательно, C не может содержать ни дуги, ни континуума, имеющих более одной точки).

Простой пример (полного сепарабельного) пространства, наследственно разрывного и связного, можно построить путем сгущения сингулярности функции, определенной следующим образом: $\varphi(x) = \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $\varphi(0) = 0$. Так, если

$$(2) \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(x - r_n)}{2^n},$$

где $\{r_n\}$ — последовательность рациональных чисел, то множество $\underset{x,\, y}{\mathsf{E}} [y = \psi(x)]$ связно (по теореме 7 из § 46, I) и наследственно разрывно, так как функция ψ разрывна в каждой точке r_n [3].

---

[1] Доказательство см. Куратовский [5, стр. 119].

[2] Первый пример пространства такого вида был дан Мазуркевичем [6].

[3] См. Куратовский и Серпинский [2, стр. 306].

§ 48 [1]). Неприводимые и неразложимые пространства

Пространство $\mathscr{X}$ предполагается *метрическим сепарабельным.*

I. Определение. Примеры. Общие свойства. Пространство называется *неприводимым между точками a и b*, если оно связно и если эти две точки нельзя соединить никаким замкнутым связным множеством, отличным от всего пространства; другими словами, если пространство неприводимо относительно свойства быть замкнутым связным множеством, содержащим точки a и b [2]).

Точка a называется *точкой неприводимости* пространства.

Примеры. 1. Всякий интервал неприводим между своими концами.

2. Кривая «$\sin(1/x)$», определенная условиями

$$y=\sin(1/x) \quad \text{при} \quad 0<|x|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad -1\leqslant y\leqslant 1 \quad \text{при} \quad x=0,$$

является неприводимым континуумом между точками $[-1, \sin(-1)]$ и $[1, \sin 1]$.

Ее «половина», состоящая из точек с абсциссами $\geqslant 0$, неприводима между точкой $(1, \sin 1)$ и каждой точкой $(0, y)$, где $-1\leqslant y\leqslant 1$.

2а. Если ψ — функция, определенная в § 47, IX (2), то множество

$$\overline{\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}\,[y=\psi(x)]\,[0\leqslant x\leqslant 1]}$$

есть неприводимый континуум.

3. Кривая $r=1+(1/\theta)$, $\theta\geqslant 1$ (r и θ — полярные координаты), пополненная окружностью $r=1$, является неприводимой между точкой $r=2$, $\theta=1$ и каждой точкой окружности.

4. Пусть C_0 — канторово множество, расположенное на оси x, а C_1 — то же множество, расположенное на прямой $y=1$ (плоскости x, y). Соединим каждую точку множества C_0 с соответствующей точкой множества C_1 вертикальным отрезком и добавим смежные интервалы к C_0 длины $1/3$, $1/3^3$, ... и смежные интервалы к C_1 длины $1/3^2$, $1/3^4$, ... Полученный таким образом континуум (на рис. 3 слева) неприводим между каждой точкой с абсциссой 0 и каждой точкой с абсциссой 1.

---

[1]) Ср. Куратовский [4] и [10].

[2]) Это определение принадлежит Зоретти [2], который ввел его при попытке топологически охарактеризовать интервал 01. Понятие континуума, неприводимого между двумя точками, изучено Янишевским [1] в его диссертации; см. также Янишевский [4].

5. Соединим прямолинейным отрезком каждую точку x интервала 01 на оси x, абсциссу которой можно записать без цифры 1 в системе счисления с основанием 4, с точкой (или с двумя точками) прямой $y=1$, абсциссу которой можно получить из абсциссы x, заменяя в разложении последней цифру 2 на цифру 1 [1]). Этот континуум (на рис. 3 справа) неприводим между теми же точками, что и континуум в примере 4.

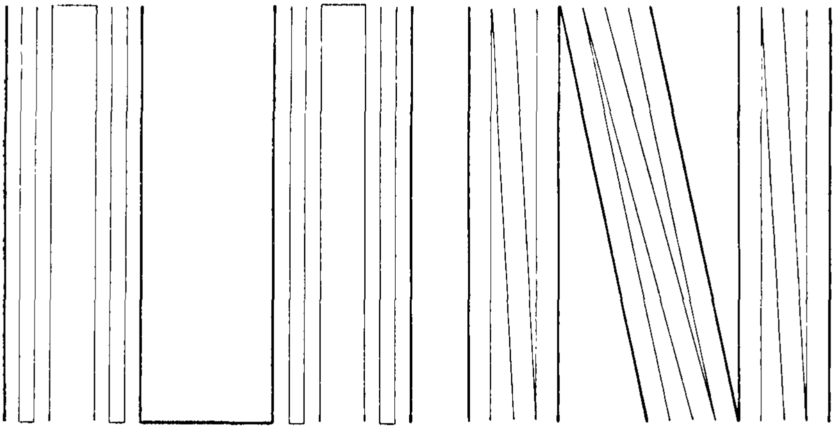

Рис. 3

Если $\mathscr{X}$ — континуум, то семейство всех подконтинуумов, содержащих две данные точки a, $b \in \mathscr{X}$, замкнуто в пространстве $2^{\mathscr{X}}$ (ср. § 47, II, теорема 4). Отсюда на основании теоремы 1 § 42, IV вытекает следующее утверждение:

Теорема 1 [2]). *Всякий континуум, соединяющий две точки a и b, содержит неприводимый между ними континуум.*

Пример «левой половины кривой $\sin(1/x)$» (пример 2) с выброшенной точкой (0, 0) показывает, что связное локально компактное пространство допускает отбрасывание подмножеств, неприводимых между двумя данными точками (точки (0, 1) и (0, − 1)).

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ — континуум и f — непрерывное отображение $\mathscr{X}$, такое, что $f(\mathscr{X})$ неприводим между двумя точками, то $\mathscr{X}$ содержит континуум C, неприводимый между двумя точками и такой, что $f(C)=f(\mathscr{X})$.*

---

[1]) Этот пример принадлежит Кнастеру. См. также Уилсон [1].

[2]) Эта теорема принадлежит Мазуркевичу и Янишевскому [1]. Ср. Мазуркевич [2].

Доказательство. Пусть C — континуум, неприводимый по отношению к свойству $f(C)=f(\mathcal{X})$ (ср. § 47, II, теорема 7); если a и b — две такие точки C, что $f(\mathcal{X})$ неприводим между $f(a)$ и $f(b)$, то C неприводим между a и b.

Теорема 3. *Если $\mathcal{X}$ — неприводимый континуум между точками a и b и f — непрерывное монотонное отображение $\mathcal{X}$, то $f(\mathcal{X})$ — неприводимый континуум между $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Пусть C — континуум, такой, что $f(a)$, $f(b)\in C\subset f(\mathcal{X})$. Поскольку f монотонно, множество $f^{-1}(C)$ — континуум. Так как a, $b\in f^{-1}(C)$, то $f^{-1}(C)=\mathcal{X}$ и $C=ff^{-1}(C)=$ $=f(\mathcal{X})$.

Теорема 4[1]). *Если $\mathcal{X}$ — континуум и a — такая точка $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}$ не является объединением двух собственных подконтинуумов, содержащих точку a, то a — точка неприводимости $\mathcal{X}$.*

II. Связные подмножества неприводимых пространств. Пусть $\mathcal{X}$ — неприводимое пространство между точками a и b.

Теорема 1. *Если C — связное подмножество пространства $\mathcal{X}$, соединяющее точки a и b, то C неприводимо между a и b.*

Доказательство. Если F — связное подмножество, содержащее точки a и b, то $\overline{F}=\mathcal{X}$. Следовательно, если предположить, что F замкнуто в C, т. е. $F=\overline{F}\cap C$, то из этого следует, что $F=C$.

Теорема 2. *Пространство $\mathcal{X}$ не является объединением двух замкнутых связных подмножеств A и B, таких, что $a\in A\cap B$ и $A\neq\mathcal{X}\neq B$.*

Доказательство. В противном случае одно из этих множеств содержало бы точку b, а потому обе точки a и b, но это противоречило бы неприводимости пространства $\mathcal{X}$.

Теорема 3. *Пусть C — замкнутое связное множество. Если множество $\mathcal{X}-C$ несвязно, то оно представляет собой объединение двух открытых связных множеств, одно из которых содержит точку a, а другое — точку b.*

Таким образом, *если $a\in C$, то множество $\mathcal{X}-C$ связно.*

---

[1]) Доказательство см. Куратовский [10, стр. 270].

Доказательство. Предположим, что множество $\mathscr{X}-C$ несвязно; тогда существуют два открытых множества P и Q, таких, что

$$\mathscr{X}-C=P\cup Q,\quad P\cap Q=0,\quad P\neq 0\neq Q.$$

Согласно теореме 4 из § 46, II, множества $A=C\cup P$ и $B=C\cup Q$ связны и замкнуты; из этого следует, что

$$\text{(i)}\qquad \mathscr{X}=A\cup B,\quad A\cap B=C\quad \text{и}\quad A\neq\mathscr{X}\neq B.$$

Отсюда по теореме 2 $a\notin C$. Таким образом, вторая часть теоремы доказана.

В силу соотношений (i) ни множество A, ни множество B не могут содержать обе точки a и b. Пусть $a\in A$ и $b\in B$. Поскольку множество A замкнуто и связно, его дополнение Q, как только что было показано, связно и $b\in Q$. По соображениям симметрии множество P также связно и $a\in P$.

Теорема 4. *Если A и B — два замкнутых связных множества, таких, что $a\in A$ и $b\in B$, то множество $\mathscr{X}-(A\cup B)$ связно.*

Доказательство. Можно предположить, что $A\cap B=0$, так как в противном случае $A\cup B=\mathscr{X}$. Множество $C=\mathscr{X}-A$ связно по теореме 3. Допустим, что

$$C-B=U\cup V,\quad U\cap V=0,\quad U\ \text{и}\ V\ \text{открыты}.$$

Мы должны показать, что

$$\text{либо}\quad U=0,\quad \text{либо}\quad V=0.$$

Согласно теореме 4 из § 46, II, множества $B\cup U$ и $B\cup V$ связны, а потому связны множества $B\cup\overline{U}$ и $B\cup\overline{V}$. Так как

$$\mathscr{X}=A\cup B\cup\overline{\mathscr{X}-A-B}\quad \text{и}\quad A\cap B=0,$$

то

$$A\cap\overline{\mathscr{X}-A-B}\neq 0,\quad \text{т. е.}\quad A\cap\overline{U}\cup\overline{V}\neq 0.$$

Следовательно, либо $A\cap\overline{U}\neq 0$, либо $A\cap\overline{V}\neq 0$. Предположим, например, что $A\cap\overline{U}\neq 0$. Тогда множество $A\cup\overline{U}\cup B$ связно. Так как $a,\ b\in(A\cup\overline{U}\cup B)$, то из этого следует, что

$$A\cup\overline{U}\cup B=\mathscr{X},\quad \text{откуда}\quad \mathscr{X}-A-B\subset\overline{U}.$$

А так как $V\subset C-B=\mathscr{X}-A-B$, то $V\subset\overline{U}$.

Поскольку $U\cap V=0$ и V открыто, отсюда вытекает, что $V=0$.

Теорема 5. *Если замкнутое множество C связно, то связно и множество* $\mathrm{Int}(C)$.

Доказательство. Можно считать, что $C\neq\mathcal{X}$ и, следовательно, что $a\in\mathcal{X}-C$. Следует различать два случая.

Если $\mathcal{X}-C$ связно, то связно и $\overline{\mathcal{X}-C}$, а так как $a\in\overline{\mathcal{X}-C}$, то множество $\mathrm{Int}(C)=\mathcal{X}-\overline{\mathcal{X}-C}$ связно по теореме 3.

Если $\mathcal{X}-C$ не связно, то $\mathcal{X}-C=P\cup Q$ есть объединение двух связных множеств и $a\in P$, $b\in Q$. Полагая в теореме 4 $A=\overline{P}$ и $B=\overline{Q}$, мы заключаем, что множество $\mathrm{Int}(C)=\mathcal{X}-(\overline{P}\cup\overline{Q})$ связно.

Теорема 6. *Если C — замкнутое связное множество и $a\in\mathrm{Fr}(C)$, то множество C нигде не плотно.*

Доказательство. Множество $\mathcal{X}-C$ связно по теореме 3. Следовательно, если мы положим $A=C$ и $B=\overline{\mathcal{X}-C}$, то из теоремы 2 следует, что $\overline{\mathcal{X}-C}=\mathcal{X}$.

Теорема 7. *Если C — замкнутое связное множество и $a\in C$, то множество $\overline{\mathcal{X}-C}$ неприводимо между точкой b и каждой точкой множества* $\mathrm{Fr}(C)$.

В частности, *если C нигде не плотно, то пространство $\mathcal{X}$ неприводимо между точкой b и каждой точкой множества C.*

Доказательство. Множество $\overline{\mathcal{X}-C}$ связно по теореме 3. С другой стороны, если F — замкнутое связное множество, $b\in F\subset\overline{\mathcal{X}-C}$ и $F\cap\mathrm{Fr}(C)\neq 0$, то множество $C\cup F$ связно, откуда вытекает, что $C\cup F=\mathcal{X}$. Поэтому $\mathcal{X}-C\subset F$ и, следовательно, $F=\overline{\mathcal{X}-C}$.

III. Замкнутые связные подобласти. Как и выше, пусть $\mathcal{X}$ — пространство, неприводимое между точками a и b. Пусть $\boldsymbol{D}$ — семейство всех замкнутых связных областей, содержащих точку a; кроме того, пусть $0\in\boldsymbol{D}$. Напомним, что по определению (ср. § 8, VIII) D — замкнутая область, если

(0) $$D=\overline{\mathcal{X}-\overline{\mathcal{X}-D}}.$$

Теорема 1. *Если $0\neq D\in\boldsymbol{D}$, то D неприводимо между точкой a и каждой точкой* $\mathrm{Fr}(D)$. (Последнее множество не пусто, за исключением случая $D=\mathcal{X}$.)

Доказательство. Если $D\neq\mathcal{X}$, то множество $\overline{\mathcal{X}-D}$ связно и содержит точку b. Следовательно, согласно теореме 7 п. II, множество $D = \overline{\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - D}}$ связно между точкой a и каждой точкой множества $\mathrm{Fr}(\overline{\mathcal{X} - D})$.

Но D — замкнутая область, поэтому $\mathrm{Fr}(\overline{\mathcal{X} - D}) = \mathrm{Fr}(D)$ (ср. § 8, VIII).

Теорема 2. *Семейство $\boldsymbol{D}$ строго монотонно.*

Доказательство. Покажем, что

$$\text{если} \quad D_1, D_2 \in \boldsymbol{D} \quad \text{и} \quad D_1 \neq D_2 \not\subset \mathrm{Int}(D_1), \quad \text{то} \quad D_1 \subset \mathrm{Int}(D_2).$$

Условие $D_2 \not\subset \mathrm{Int}(D_1)$ эквивалентно соотношению $D_2 \cap \overline{\mathcal{X} - D_1} \neq 0$, а из него следует, что $D_2 \cup \overline{\mathcal{X} - D_1} = \mathcal{X}$ (ибо $D_1 \neq \mathcal{X}$ и поэтому $b \in \overline{\mathcal{X} - D_1}$; таким образом, множество $\overline{\mathcal{X} - D_1}$ связно по теореме 3 п. II). Итак,

$$\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - D_1} \subset D_2, \quad \text{откуда} \quad D_1 \subset D_2,$$

согласно (0).

Так как D_2 неприводимо между точкой a и каждой точкой множества $D_2 \cap \overline{\mathcal{X} - D_2}$ (по теореме 1), то из условия $D_1 \neq D_2$ следует, что

$$D_1 \cap \overline{\mathcal{X} - D_2} = 0, \quad \text{откуда} \quad D_1 \subset \mathrm{Int}(D_2).$$

Теорема 3. *Семейство $\boldsymbol{D}$, упорядоченное отношением $D_1 \subset D_2 \neq D_1$, не имеет дыр.*

Иначе говоря, если семейство $\boldsymbol{D}$ разложено на два подсемейства $\boldsymbol{D}_1$ и $\boldsymbol{D}_2$ так, что каждый элемент из $\boldsymbol{D}_1$ есть подмножество любого элемента из $\boldsymbol{D}_2$, то либо в $\boldsymbol{D}_2$ существует первый элемент, либо в $\boldsymbol{D}_1$ — последний элемент. В самом деле, таким элементом будет множество $\overline{S}$, где S — объединение всех элементов из $\boldsymbol{D}_1$ ($\overline{S}$ — замкнутая область; ср. § 8, VIII).

Сочетая теоремы 2 и 3 с теоремой 2 из § 24, VII, получим следующее утверждение:

Теорема 4. *Элементы D семейства $\boldsymbol{D}$ можно снабдить индексами, образующими замкнутое подмножество $J \subset \mathcal{Y}$, таким образом, что*

$$[y_1 < y_2] \equiv [D_{y_1} \subset D_{y_2} \neq D_{y_1}].$$

Теорема 5. *Пусть $\boldsymbol{E}$ — семейство (пополненное пустым множеством) всех замкнутых связных областей, содержащих точку b. Тогда $\boldsymbol{E}$ совпадает с семейством множеств $\overline{\mathcal{X} - D}$, где $D \in \boldsymbol{D}$.*

В других обозначениях

$$\boldsymbol{E}=\{E_y\},\quad E_y=\overline{\mathscr{X}-D_y},\quad \overline{\mathscr{X}-E_y}=D_y.$$

Более общо, *если c — точка неприводимости пространства, то семейство $\boldsymbol{F}$ замкнутых связных областей, содержащих c (пополненное пустым множеством), совпадает либо с $\boldsymbol{D}$, либо с $\boldsymbol{E}$.*

Первая часть теоремы очевидна, а вторая часть вытекает из следующего утверждения.

Лемма[1]). *Если пространство $\mathscr{X}$ неприводимо как между точками a и b, так и между точками c и d, то $\mathscr{X}$ неприводимо либо между точками a и c, либо между точками b и c.*

Доказательство. Предположим, что пространство $\mathscr{X}$ не является неприводимым ни между точками a и c, ни между точками b и c. Тогда существуют два замкнутых связных множества K и L, таких, что

$$c\in K\cap L,\quad a\in K,\quad b\in L,\quad K\neq\mathscr{X}\neq L.$$

Так как $\mathscr{X}$ неприводимо между точками c и d, то

$$d\in(\mathscr{X}-K)\cap(\mathscr{X}-L)=\mathscr{X}-(K\cup L),\quad \text{откуда}\quad K\cup L\neq\mathscr{X}.$$

Но это противоречит предположению, что пространство $\mathscr{X}$ неприводимо между a и b, так как $a,\ b\in(K\cup L)$.

Замечание. Обозначим через α порядковый тип семейства $\boldsymbol{D}$ (и, следовательно, множества J); порядковый тип α^*, обратный к α, есть тип семейства $\boldsymbol{E}$. Если $|\alpha|$ — «абсолютное значение α», не зависящее от «знака» порядка (мы условимся, что $|\alpha|=|\alpha^*|$), то из теоремы 5 следует, что $|\alpha|$ *однозначно определяется неприводимым пространством* (т. е. независимо от выбора его точек неприводимости).

Все пространства в примерах 1—5 п. I имеют один и тот же тип $|\alpha|$, а именно тип интервала $\mathscr{J}$[2]). Как будет показано в п. VII, каждому подмножеству $J=\overline{J}\subset\mathscr{J}$ соответствует пространство того же типа, что и J.

Пусть

I_y — множество таких точек x, что D_y неприводимо между точками a и x,

J_y — множество таких точек x, что E_y неприводимо между точками b и x.

---

[1]) См. Нонеяма [1, теорема 3, стр. 48].

[2]) Пространства этого типа называют также пространствами типа λ.

Теорема 6. *Для* D_y *и* E_y *выполняются следующие условия*:

(1) $\operatorname{Fr}(D_y) = \operatorname{Fr}(E_y) = D_y \cap E_y = I_y \cap J_y$;

(2) *если* $y_1 < y_2$, *то* $D_{y_1} \cap I_{y_2} = 0 = E_{y_2} \cap J_{y_1}$ *и* $D_{y_1} \cap E_{y_2} = 0$;

(3) *если* $y_1 < y_2$, *то* $I_{y_1} \cap I_{y_2} = 0 = J_{y_1} \cap J_{y_2}$ *и* $I_{y_1} \cap J_{y_2} = 0$;

(4) *если* $y_1 < y_2 < y_3$, *то* $I_{y_3} \cap J_{y_1} = 0$.

Доказательство. Соотношение (1) — прямое следствие теоремы 1. Условия (2) и (3) следуют из (1).

Согласно (2), $E_{y_2} \cap J_{y_1} = 0$, следовательно, $J_{y_1} \subset \mathscr{X} - E_{y_2} \subset D_{y_2}$; если $y_2 < y_3$, то $D_{y_2} \cap I_{y_3} = 0$, откуда следует, что $J_{y_1} \cap I_{y_3} = 0$.

Теорема 7. $\mathscr{X} = \bigcup\limits_{y \in J} (I_y \cup J_y)$.

Иными словами, *каждой точке* p *соответствует замкнутая область, неприводимая либо между точками* a *и* p, *либо между точками* b *и* p.

Доказательство. Так как семейство $\mathbf{D}$ не имеет дыр, следует рассмотреть два случая в соответствии с тем, существует ли наименьший элемент $D \in \mathbf{D}$, такой, что $p \in D$, или существует наибольший элемент $D \in \mathbf{D}$, такой, что $p \in \mathscr{X} - D$.

В первом случае предположим, что D неприводимо между точками a и p; тогда существует такое связное множество C, что

$$a,\ p \in C, \quad C = \overline{C} \subset D \neq C.$$

Множество $\overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}}$ есть собственное подмножество D (как подмножество C); более того, согласно теоремам 5 и 6 п. II, оно принадлежит семейству $\mathbf{D}$. Поэтому

$$p \in \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}} \subset \overline{\mathscr{X} - C},$$

откуда следует, что $p \in \operatorname{Fr}(C)$. Следовательно, множество $\overline{\mathscr{X} - C}$ есть замкнутая область, неприводимая между точками b и p (согласно теореме 7 п. II).

Во втором случае предположим, что $E = \overline{\mathscr{X} - D}$. Тогда $E \in \mathbf{E}$. По соображениям симметрии можно допустить, что в $\mathbf{E}$ не существует наименьшего множества, содержащего точку p. Поэтому пусть

$$F \in \mathbf{E}, \quad p \in F \subset E \neq F.$$

Отсюда следует, что

$$D = \overline{\mathscr{X} - E} \subset \overline{\mathscr{X} - F} \neq D \quad \text{и потому} \quad p \in \overline{\mathscr{X} - F} \in \mathbf{D},$$

согласно определению множеств D. Следовательно, $p \in \operatorname{Fr}(F)$ и F неприводимо между точками b и p.

Следствие[1]). *Если существуют два замкнутых множества, неприводимых между точками a и p, то существует только одно замкнутое множество, неприводимое между точками b и p.*

Это следствие вытекает из теоремы 7 в сочетании со следующим утверждением:

Лемма. *Если D — замкнутая область, неприводимая между точками a и p, то D является единственным замкнутым множеством, неприводимым между этими точками.*

Доказательство. Предположим, что

$$a,\ p \in F = \overline{F} \not\subset D, \quad \text{откуда} \quad F \cap \overline{\mathcal{X} - D} \neq 0.$$

Так как множество F связно, то связно и множество $F \cup \overline{\mathcal{X} - D}$, а поскольку $D \neq \mathcal{X}$, отсюда следует, что $b \in \overline{\mathcal{X} - D}$, а потому $F \cup \overline{\mathcal{X} - D} = \mathcal{X}$. Таким образом,

$$\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - D} \subset F,$$

откуда

$$D = \overline{\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - D}} \subset F \quad \text{и, следовательно,} \quad F = D.$$

Теорема 8. *Если $y_1 < y_2$, то $D_{y_2} \cap E_{y_1} = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ и множество $D_{y_2} - D_{y_1}$ связно.*

Доказательство. Имеем

$$D_{y_2} \cap E_{y_1} = D_{y_2} \cap \overline{\mathcal{X} - D_{y_1}} = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}},$$

где последнее равенство является следствием включения $D_{y_1} \subset \operatorname{Int}(D_{y_2})$.

Действительно, пусть $A \subset \operatorname{Int}(B)$ и $B = \overline{B}$. Тогда

$$A \cap \overline{\mathcal{X} - A} \subset \overline{\mathcal{X} - A} - \overline{\mathcal{X} - B} \subset \overline{(\mathcal{X} - A) - (\mathcal{X} - B)} = \overline{B - A},$$

откуда

$$B \cap \overline{\mathcal{X} - A} = (A \cap \overline{\mathcal{X} - A}) \cup ((B - A) \cap \overline{\mathcal{X} - A}) \subset \overline{B - A} \subset$$
$$\subset \overline{B} \cap \overline{\mathcal{X} - A} = B \cap \overline{\mathcal{X} - A}.$$

Следовательно, $B \cap \overline{\mathcal{X} - A} = \overline{B - A}$.

Так как a — точка неприводимости D_{y_2} (по теореме 1), то из теоремы 3 п. II следует, что $D_{y_2} - D_{y_1}$ связно, а потому связно множество $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$.

[1]) См. Янишевский [2]. Ср. это следствие с примером 3 из п. I.

IV. Слои неприводимого пространства. Подставим $\boldsymbol{D}$ вместо $\boldsymbol{F}$ в п. X § 24 и рассмотрим функцию g. Прообразы точек $g^{-1}(t)$ этой функции назовем *слоями* T_t *пространства* $\mathscr{X}$, *неприводимого между точками* a *и* b.

Согласно теореме 2 из § 24, X,

$$(1)\qquad T_t = g^{-1}(t) = \bigcap_{\Gamma(t) < z} D_z \cap \bigcap_{u < \gamma(t)} E_u, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Слои не зависят от выбора точек неприводимости пространства $\mathscr{X}$.

Если $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \leqslant \aleph_0$, то $\mathscr{X}$ сводится к одному слою ($\mathscr{X}$ *однослойно*). Если $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} > \aleph_0$, то разбиение на слои дает линейное расслоение (частичное упорядочение) пространства $\mathscr{X}$ на непустые замкнутые множества.

Теорема 1. *Пусть* $h\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — *непрерывное отображение; если множества* $h^{-1}(0t)$ *связны и содержат точку* a *для всех, за исключением самое большее* $\aleph_0$, *значений* t, *то каждый прообраз точки при отображении* h *есть объединение некоторых прообразов точек при отображении* g.

Доказательство. Это утверждение представляет собой следствие теоремы 4 § 24, X (согласно теореме 2 из § 24, IX и VIII (5), $h^{-1}(0t)$ можно считать замкнутой областью).

Теорема 2. *Слои неприводимого континуума являются континуумами.*

Доказательство. Если $\gamma(t) \neq 0$ и $\Gamma(t) \neq 1$, то в J имеются две такие последовательности, что

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad u_n < u_{n+1} \quad \text{и} \quad \Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} z_n, \quad z_n > z_{n+1}.$$

Отсюда (ср. § 24, X, теорема 2) получаем

$$T_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_{z_n} \cap E_{u_n} \quad \text{и} \quad D_{z_n} \cap E_{u_n} \supset D_{z_{n+1}} \cap E_{u_{n+1}}.$$

Так как по теореме 8 п. III $D_{z_n} \cap E_{u_n}$ — континуумы, то, согласно теореме 5 § 47, II, континуумом будет и множество T_t.

Если $\gamma(t) = 0$ или $\Gamma(t) = 1$, то

$$\bigcap_{u<\gamma(t)} E_u = \mathscr{X} \quad \text{или} \quad \bigcap_{\Gamma(t)<z} D_z = \mathscr{X}$$

и на основании теоремы 1 п. III и теоремы 5 § 47, II T_t — континуум.

Теорема 3. *Разбиение неприводимого континуума на слои является самым мелким из всех линейных полунепрерывных разбиений на континуумы*[1]).

Другими словами, *если $h\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — непрерывное отображение на и каждое множество $h^{-1}(t)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$, есть континуум, то этот континуум представляет собой объединение некоторых слоев континуума $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Пусть

$$h(a)=t_0,\quad h(b)=t_1.$$

Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, множества $h^{-1}(t)$ связны и, следовательно, отображение h монотонно, можно применить теорему 4 из § 47, VI. Другими словами, если C — связно, то связно и $h^{-1}(C)$. Поэтому множество $h^{-1}(t_0t_1)$ (соответственно множество $h^{-1}(t_1t_0)$, если $t_1<t_0$) есть континуум. Так как ему принадлежат точки a и b, он совпадает с пространством $\mathcal{X}$. Следовательно, можно предположить, что $t_0=0$ и $t_1=1$.

Пусть $0<t<1$. Как только что было доказано, множество $h^{-1}(0t)$ связно. Более того, это множество содержит точку a. Применяя теорему 1, мы приходим к требуемому заключению.

Замечания. Согласно теореме 2 из § 24, IX, *все слои T_t, за исключением (бесконечного) счетного их числа, удовлетворяют условию*

$$T_t=\overline{\bigcup_{u<t}T_u}\cap\overline{\bigcup_{v>t}T_v}.$$

Слои такого вида называются *слоями кохезии*. Слой T_t является слоем кохезии, если t — точка непрерывности обеих функций $g^{-1}(0t)$ и $g^{-1}(t1)$. Однако слой кохезии T_t не обязательно должен быть *слоем непрерывности*[2]).

Так, например, вертикальный сегмент кривой $\sin(1/x)$ (см. п. I, пример 2) является слоем разрыва, будучи в то же время слоем кохезии.

В примере 4 вертикальные сегменты континуума — слои разрыва; те из них, которые содержат концы интервалов, смежных к канторовскому множеству, не являются слоями кохезии.

[1]) См. Куратовский [10, стр. 259]. Менее тонкие разбиения или такие, которые требуют дополнительных предположений относительно пространства, рассматривались Ханом («Primteile»), Вьеторисом («Schichten») и Уилсоном («complete oscillatory sets»). Ср. Куратовский [10, стр. 226–229, 261]. См. также Томас [1].

[2]) Слой T_t называется *слоем непрерывности*, если он представляет собой элемент непрерывности разбиения $\mathcal{T}$ на слои (ср. § 19, II, стр. 191), иными словами, если t — точка непрерывности отображения $\overset{-1}{g}$.

Легко видеть, что в примере 5 имеется всюду плотное множество индексов t, таких, что T_t не являются слоями кохезии; это слои вида $\vee$ или $\wedge$. Все другие слои представляют собой слои непрерывности.

Кнастер [7] доказал, что *существует неприводимый континуум, такой, что* $J=\mathcal{J}$ *и каждый его слой является слоем непрерывности, содержащим более одной точки.*

Однако, как показал Моиз [2], *случай, когда все слои являются дугами, невозможен* (более сильный результат см. п. V, замечание 3)[1]).

С другой стороны, существует такой континуум, что *все слои гомеоморфны* (они представляют собой псевдодуги); см. Андерсон [1].

Наконец, напомним, что, согласно следствию 1, § 43, VII, *множество таких индексов t, что T_t — слой непрерывности, образует всюду плотное G_δ-множество в интервале $\mathcal{J}$.*

Теорема 4. $T_t=\bigcup\limits_{\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)}(I_y\cup J_y)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)$. Тогда

$$I_y\subset D_y\subset\bigcap_{\Gamma(t)<z}D_z,$$

и, согласно теореме 6(2) п. III, для $u<\gamma(t)$

$$I_y\subset\mathcal{X}-D_u\subset E_u,\quad\text{откуда}\quad I_y\subset\bigcap_{u<\gamma(t)}E_u.$$

Следовательно, $I_y\subset T_t$ (ср. (1)), и по соображениям симметрии $J_y\subset T_t$. Отсюда получаем

$$\bigcup_{\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)}(I_y\cup J_y)\subset T_t.$$

Так как слои попарно не пересекаются, то это включение в сочетании с теоремой 7 п. III дает и обратное включение.

Теорема 5. $g^{-1}(0t-t)=D_{\gamma(t)}-I_{\gamma(t)}$, $g^{-1}(t1-t)=E_{\Gamma(t)}-J_{\Gamma(t)}$. *Следовательно, оба эти множества связны (не пересекаются и открыты).*

Доказательство. Введем сокращенные обозначения: $\gamma(t)=\gamma$ и $\Gamma(t)=\Gamma$. По теореме 4 имеем

$$g^{-1}(0t-t)=\bigcup_{t'<t}T_{t'}=\bigcup_{u<\gamma}(I_u\cup J_u).$$

Покажем, что

$$\bigcup_{u<\gamma}(I_u\cup J_u)=D_\gamma-I_\gamma.$$

[1]) См. также Хамстром [1].

Пусть $u<\gamma$. По определению γ существует такое u_1, что $u<u_1<\gamma$. Поэтому, согласно теореме 6 (2) п. III,

$$E_{u_1}\cap J_u=0, \quad \text{откуда} \quad J_u\subset\mathscr{X}-E_{u_1}\subset D_{u_1}$$

и, следовательно,

$$I_u\cup J_u\subset D_{u_1}.$$

С другой стороны, $D_{u_1}\cap I_\gamma=0$, откуда $D_{u_1}=D_{u_1}-I_\gamma\subset D_\gamma-I_\gamma$. Таким образом, $I_u\cup J_u\subset D_\gamma-I_\gamma$, и, следовательно,

$$\bigcup_{u<\gamma}(I_u\cup J_u)\subset D_\gamma-I_\gamma.$$

Для доказательства обратного включения предположим, что $p\in D_\gamma-I_\gamma$ и $p\in I_u\cup J_u$ (ср. с теоремой 4). Покажем, что $u<\gamma$. Если $p\in I_u$, то $u\neq\gamma$ (так как $p\notin I_\gamma$) и D_γ не может быть собственным подмножеством D_u. Следовательно, $u<\gamma$. Если $p\in J_u$, то из предположения $p\in D_\gamma-I_\gamma$ по теореме 6 (1) п. III следует, что $p\in\mathscr{X}-E_\gamma$. Так как $p\in E_u$, то $E_\gamma\subset E_u\neq E_\gamma$, откуда $u<\gamma$.

Теорема 6. $T_t=I_{\gamma(t)}\cup(D_{\Gamma(t)}\cap E_{\gamma(t)})\cup J_{\Gamma(t)}$.

Доказательство. Положим, как раньше, $\gamma(t)=\gamma$ и $\Gamma(t)=\Gamma$. Взяв пересечение объединений $\mathscr{X}=D_\gamma\cup E_\gamma$ и $\mathscr{X}=D_\Gamma\cup E_\Gamma$ и используя условия

$$D_\gamma\cap D_\Gamma=D_\gamma,\quad E_\gamma\cap E_\Gamma=E_\Gamma\quad \text{и}\quad D_\gamma\cap E_\Gamma\subset D_\Gamma\cap E_\gamma,$$

которые следуют из неравенства $\gamma\leqslant\Gamma$, получим

$$\mathscr{X}=D_\gamma\cup(D_\Gamma\cap E_\gamma)\cup E_\Gamma,$$

откуда

$$\mathscr{X}=(D_\gamma-I_\gamma)\cup(I_\gamma\cup(D_\Gamma\cap E_\gamma)\cup J_\Gamma)\cup(E_\Gamma-J_\Gamma).$$

Элементы этого объединения не пересекаются, так как, согласно теореме 6 (1) п. III,

$$D_\gamma\cap J_\Gamma\subset D_\gamma\cap E_\Gamma\subset D_\gamma\cap E_\gamma\subset I_\gamma$$

и

$$E_\Gamma\cap I_\gamma\subset E_\Gamma\cap D_\gamma\subset E_\Gamma\cap D_\Gamma\subset J_\Gamma.$$

По теореме 5 имеем

$$\begin{aligned}T_t&=\mathscr{X}-[g^{-1}(0t-t)\cup g^{-1}(t1-t)]=\\&=\mathscr{X}-[(D_\gamma-I_\gamma)\cup(E_\Gamma-J_\Gamma)]=I_\gamma\cup(D_\Gamma\cap E_\gamma)\cup J_\Gamma.\end{aligned}$$

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — континуум и $f\colon\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ — непрерывное отображение на. Если все слои $f^{-1}(y)$, $0\leqslant y\leqslant 1$, — нигде не плотные континуумы, то существует связное множество C, содержащее точно по одной точке из каждого слоя.*

Следовательно, *если* $a \in C \cap f^{-1}(0)$ *и* $b \in C \cap f^{-1}(1)$, *то* C *неприводимо по отношению к свойству: быть связным множеством, соединяющим точки* a *и* b [1]).

V. Неразложимые пространства [2]).

Определение. Пространство $\mathscr{X}$ называется *неразложимым*, если оно связно и не допускает представления в виде объединения двух замкнутых связных множеств, отличных от $\mathscr{X}$.

Примеры. 1. Простейший пример неразложимого континуума можно построить следующим образом [3]).

Континуум состоит из

(i) всех полуокружностей с ординатами $\geqslant 0$ с центром $(1/2, 0)$, проходящих через каждую точку канторова множества $\mathscr{C}$;

(ii) всех полуокружностей с ординатами $\leqslant 0$, имеющих для $n \geqslant 1$ центр в точке $(5/(2 \cdot 3^n), 0)$ и проходящих через каждую точку множества $\mathscr{C}$, лежащую в интервале $2/3^n \leqslant x \leqslant 1/3^{n-1}$.

Доказательство того, что построенное множество неразложимо, будет дано в замечании к теореме 8 п. VI.

2. Если точку $(^1/_2, {}^1/_2)$ выбросить из континуума примера 1, то получится неразложимое пространство (ср. с теоремой 3) [4]), имеющее следующую особенность. Дуга, соединяющая точку $(0, 0)$ с выброшенной точкой $(^1/_2, {}^1/_2)$, насыщена относительно свойства быть замкнутым связным собственным подмножеством (рис. 4—5).

3. Пусть E — множество чисел интервала $\mathscr{J}$, которые в системе счисления с основанием 5 можно представить без цифр 1 и 3. Положим

$$E_n = \mathop{\mathsf{E}}_{x} (x \in E)\left(2/5^{n+1} \leqslant x \leqslant 1/5^n\right) \quad \text{и} \quad F_n = \mathop{\mathsf{E}}_{x} [(1-x) \in E_n].$$

Искомый континуум представляет собой объединение

---

[1]) Теорема Кнастера [6, стр. 277].

[2]) Неразложимые континуумы были открыты Брауэром [1], который опроверг гипотезу (Шёнфлиса) о том, что всякая общая граница двух плоских областей неразложима. Как мы увидим ниже, они рассматриваются во многих топологических вопросах. По поводу применения неразложимых континуумов в теории топологических групп см. Данциг [1], Вьеторис [4], Хеемерт [1].

Кроме Брауэра, примеры неразложимых континуумов были сообщены Данжуа [1] и Йонеяма [1, стр. 60] (пример принадлежит Ваде).

[3]) Это построение принадлежит Кнастеру [1]. Оно получается упрощением построения Янишевского [1, стр. 36], которое в свою очередь тесно связано с упомянутым примером Брауэра.

[4]) Ясно, что это пространство гомеоморфно замкнутому плоскому множеству, которое получается из континуума примера 1 с помощью инверсии с центром в точке $(1/2, 1/2)$. См. Кнастер и Куратовский [2, стр. 43, рис. 11].

(i) всех полуокружностей с ординатами $\leqslant 0$ с центром в точке $7/10 \cdot 5^n$, проходящих через все точки E_n;

(ii) всех полуокружностей с ординатами $\geqslant 0$ с центром в точке $1 - 7/(10 \cdot 5^n)$, проходящих через все точки F_n $(n \geqslant 0)$[1].

Существенное различие между континуумами примеров 1 и 3 состоит в том, что первый континуум имеет только одну композанту (в смысле п. VI), содержащую достижимые точки,

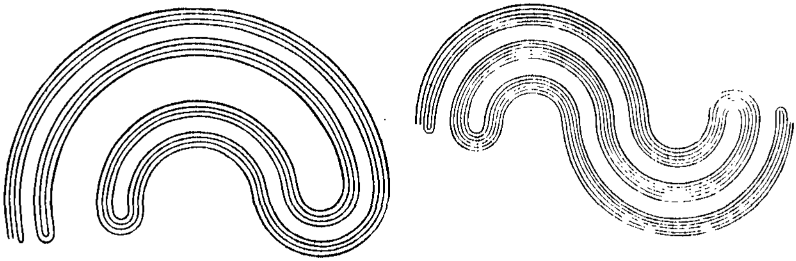

Рис. 4–5

тогда как второй континуум — две (одну — композанту точки 0, а другую — точки 1).

Замечание 1[2]. (i) Объединение композант неразложимого плоского континуума, содержащих достижимую точку, есть множество первой категории в этом континууме.

(ii) Семейство композант неразложимого плоского континуума, содержащих более одной достижимой точки, (не более чем) счетно.

Замечание 2. Много примеров неразложимых континуумов можно получить при помощи следующей теоремы[3]:

Всякое компактное пространство размерности $\geqslant 2$ содержит неразложимый континуум.

Замечание 3. Всякий неприводимый континуум, такой, что $J = \mathcal{J}$ и каждый слой есть слой непрерывности (содержащий более одной точки; ср. IV, замечания), содержит неразложимые континуумы[4].

---

[1]) Этот пример также принадлежит Б. Кнастеру.

[2]) См. Мазуркевич [16] и [17]. Ср. также Куратовский [19].

[3]) Доказательство см. Мазуркевич [27]. Эта теорема отвечает на вопрос, поставленный П. Александровым.

[4]) Доказательство см. Дайер [1]. См. также Бетел [1].

Замечание 4. Существуют *наследственно неразложимые* континуумы, т. е. континуумы, всякий подконтинуум которых неразложим [1]).

Более того [2]), *в пространстве всех подконтинуумов квадрата $\mathcal{I}^2$ множество всех наследственно неразложимых континуумов есть всюду плотное G_δ-множество и, следовательно, остаточное множество.*

Этот факт кажется весьма удивительным: среди подконтинуумов квадрата наиболее сингулярные континуумы наиболее часты.

Ясно, что наследственно неразложимый континуум не содержит дуг [3]).

Замечание 5. Тот факт, что в пространстве всех подконтинуумов компактного пространства неразложимые или наследственно неразложимые континуумы образуют G_δ-множество, следует непосредственно из их определений (ср. § 17, IV, теорема 1; § 17, III, следствие 4а; § 41, VI):

$$\{C \text{ разложим}\} \equiv \bigvee_{K,L} (C = K \cup L)(K \neq C \neq L),$$

$$\{C \text{ не является наследственно неразложимым}\} \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{K} (K \subset C)(K \text{ разложим}),$$

где C, K и L — элементы пространства континуумов.

Теорема 1. *Никакое замкнутое связное подмножество C неразложимого пространства не является его разделителем.*

Доказательство. Если

$$\mathcal{X} - C = M \cup N, \quad M \neq 0 \neq N, \quad M \cap N = 0,$$

где M и N — открытые множества, то множества $C \cup M$ и $C \cup N$ замкнуты и связны, поэтому (ср. § 46, II, теорема 4)

$$\mathcal{X} = (C \cup M) \cup (C \cup N), \quad C \cup M \neq \mathcal{X} \neq C \cup N.$$

Теорема 2. *Связное пространство $\mathcal{X}$ неразложимо тогда и только тогда, когда всякое связное подмножество либо всюду плотно, либо нигде не плотно, или тогда и только тогда, когда всякое замкнутое связное собственное подмножество нигде не плотно.*

---

[1]) Доказательство см. Кнастер [2]. По поводу интересных приложений см. Моиз [1].

[2]) Мазуркевич [19].

[3]) О существовании континуумов, не содержащих дуг, сообщил Янишевский на Международном конгрессе математиков в Кембридже в 1912 г.

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{X} = A \cup B$, где A и B — замкнутые связные множества, такие, что $A \neq \mathscr{X} \neq B$. Следовательно, ни множество A, ни множество B не являются нигде не плотными (или всюду плотными).

Обратно, пусть C — связное множество, которое не является ни всюду плотным, ни нигде не плотным, т. е. $\overline{C} \neq \mathscr{X} \neq \overline{\mathscr{X} - \overline{C}}$. Так как множество $\mathscr{X} - \overline{C}$ связно (по теореме 1), то пространство $\mathscr{X}$ разложимо, ибо $\mathscr{X} = \overline{C} \cup \overline{\mathscr{X} - \overline{C}}$.

Теорема 3. *Всякое всюду плотное связное подмножество неразложимого пространства неразложимо.*

Доказательство. Пусть C — всюду плотное связное множество, и пусть D — связное подмножество множества C. Согласно теореме 2, нам нужно доказать, что D либо всюду плотно, либо нигде не плотно в C. Но D по теореме 2 либо всюду плотно, либо нигде не плотно в пространстве (т. е. в $\overline{C}$), поэтому требуемое заключение следует из теорем 2 и 4 § 8, VI.

Теорема 4. *Если $\mathscr{X}$ — континуум и f — такое непрерывное отображение $\mathscr{X}$, что $f(\mathscr{X})$ неразложимо, то $\mathscr{X}$ содержит неразложимый подконтинуум.*

Таким является каждый континуум, неприводимый относительно условия $f(C) = f(\mathscr{X})$.

Доказательство. Если A и B — два подконтинуума C, такие, что

$$A \neq C \neq B \quad \text{и} \quad C = A \cup B,$$

то

$$f(A) \neq f(C) \neq f(B) \quad \text{и} \quad f(C) = f(A) \cup f(B).$$

VI. Композанты.

Определение. Множество C всех точек пространства $\mathscr{X}$, которые можно соединить с точкой p замкнутым связным собственным подмножеством пространства $\mathscr{X}$, называется *композантой*[1]) *точки p*.

Примеры и замечания. 1. Композанты несвязного пространства совпадают с его компонентами (ср. § 46, III).

Если пространство $\mathscr{X}$ связно, то множество $\mathscr{X} - C$ совпадает с множеством точек x, таких, что пространство неприводимо между точками p и x.

---

[1]) Ср. с понятием нерва, введенным Брауэром. Дальнейшие свойства композант см. также Кук [1].

Если пространство связно, но p не является ни одной из его точек неприводимости, то $C = \mathcal{X}$.

Таким образом, очевидно, что понятие композанты точки p не представляет никакого интереса, за исключением того случая, когда p — точка неприводимости пространства.

2. Легко доказать (Куратовский [5]), что композанта точки 0 в примере 1 п. V состоит из бесконечной последовательности полуокружностей, проходящих через концы интервалов, смежных к $\mathscr{C}$. Эта композанта представляет собой взаимно однозначный непрерывный образ полупрямой $x \geqslant 0$. Все другие композанты этого континуума — взаимно однозначные непрерывные образы всей прямой.

3. Семейство композант данного континуума *строго транзитивно в смысле категории* [1]), т. е. если множество, обладающее свойством Бэра, есть объединение некоторых композант, то либо это множество, либо его дополнение (по отношению к континууму, рассматриваемому как пространство) является множеством первой категории [2]).

Теорема 1. *Если C — композанта точки p, то существует последовательность замкнутых связных множеств $K_1, K_2, \ldots$, такая, что*

$$(1) \qquad C = K_1 \cup K_2 \cup \ldots, \quad p \in K_n, \quad K_n \neq \mathcal{X}.$$

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — элементы открытой базы пространства, которые не содержат точки p. Пусть K_n — композанта точки p в множестве $\mathcal{X} - R_n$. Тогда

$p \in K_n = \overline{K}_n \neq \mathcal{X}$, следовательно, $K_n \subset C$ и $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \subset C$.

Обратно, если $x \in C$ и Q — замкнутое связное множество, такое, что $p, x \in Q \neq \mathcal{X}$, то существует множество R_n, не пересекающееся с Q. Следовательно, $Q \subset \mathcal{X} - R_n$, откуда $Q \subset K_n$ и $x \in K_n$; наконец, $C \subset K_1 \cup K_2 \cup \ldots$.

Теорема 2. *Если композанта C не является всюду плотной, то она замкнута. Поэтому она насыщена относительно свойства быть замкнутым связным собственным подмножеством пространства.*

Следовательно (ср. § 47, III, теорема 5), *всякая композанта континуума есть всюду плотное множество.*

Доказательство. Предположим, что $\overline{C} \neq \mathcal{X}$; тогда $\overline{C} \subset C$, так как $\overline{C}$ — замкнутое связное собственное подмножество пространства.

---

[1]) Это свойство является аналогом строгой транзитивности (в смысле меры), рассматриваемой в статистической механике. См., например, Биркгоф Дж. [1], [2].

[2]) См. Куратовский [28].

Замечания. 1. Пример 2 п. V показывает, что существуют множества, удовлетворяющие условиям теоремы 2.

2. Существование множества, насыщенного относительно свойств, указанных в теореме 2, тесно связано с существованием неразложимых подмножеств. Имеют место следующие две теоремы [1]):

Теорема 2′. *Если в связном пространстве $\mathcal{X}$ подмножество S насыщено относительно свойства быть замкнутым связным собственным подмножеством пространства $\mathcal{X}$, то множество $\overline{\mathcal{X}-S}$ неразложимо.*

Теорема 2″. *Всякое связное пространство, содержащее два непересекающихся множества, насыщенных относительно указанных выше свойств, неразложимо.*

Теорема 3. *Если C — композанта континуума $\mathcal{X}$, то множество $\mathcal{X}-C$ связно.*

Доказательство. Можно предположить, что пространство $\mathcal{X}$ неприводимо между точками a и b и что C — композанта точки a (ср. пример и замечание 1). Пусть

(2) $\qquad \mathcal{X}-C=M\cup N, \quad \overline{M}\cap N=0=\overline{N}\cap M, \quad b\in M.$

Покажем, что $N=0$.

Так как множества M и N отделимы, то (ср. § 14, V, теорема 1) существует открытое множество G, такое, что

(3) $M\subset G$ и $\overline{G}\cap N=0$, откуда $(\overline{G}-G)\cap(M\cup N)=0.$

Пусть K — композанта точки b в G. Предположим, что $N\neq 0$ и, следовательно, $G\neq\mathcal{X}$; тогда $\overline{K}-G\neq 0$ (согласно теореме 2 из § 47, III). Пусть

$$p\in\overline{K}-G; \quad \text{тогда} \quad p\in\overline{G}-G\subset\mathcal{X}-(M\cup N)=C,$$

согласно (3) и (2). Таким образом, существует континуум P, такой, что $a,\ p\in P\subset C$. Так как $b,\ p\in\overline{K}$, то множество $\overline{K}\cup P$ — континуум, соединяющий точки a и b; отсюда

$$\overline{K}\cup P=\mathcal{X} \quad \text{и потому} \quad N\subset\overline{K}\cup P.$$

Так как $K\subset G$, то, согласно (3), $N\cap\overline{K}\subset N\cap\overline{G}=0$, а так как $P\subset C$, то на основании (2) имеет место соотношение $N\cap P\subset$ $\subset N\cap C=0$. Следовательно, $N=0$.

[1]) См. Кнастер и Куратовский [2, стр. 45].

По теореме 2 дополнение композанты континуума всегда есть граничное множество. В связи с этим сформулируем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть C — композанта континуума $\mathscr{X}$. Если $\mathscr{X} - C$ не является граничным множеством, то оно есть неразложимая область.*

Доказательство. Предположим, как раньше, что пространство $\mathscr{X}$ неприводимо между точками a и b и что C — композанта точки a.

Пусть $Q = \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}$. Предположим, что $\overline{\mathscr{X} - C}$ не является граничным множеством, т. е. $Q \neq \mathscr{X}$.

Так как множество $\overline{\mathscr{X} - C}$ представляет собой континуум, содержащий точку b (по теореме 3), то множество Q — также континуум (согласно теореме 3 п. II). Отсюда следует, что $Q \subset C$. В самом деле, если мы предположим, что $Q \neq 0$ и, следовательно, что $\overline{\mathscr{X} - C} \neq \mathscr{X}$, то $a \in \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C} \subset Q$ (так как $\mathscr{X}$ неприводимо между точками a и b) и $Q \subset C$, поскольку $Q \neq \mathscr{X}$. Отсюда вытекает, что $\mathscr{X} - C \subset \mathscr{X} - Q$ и

$$\overline{\mathscr{X} - C} \subset \overline{\mathscr{X} - Q} = \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}}} \subset \overline{\mathscr{X} - C},$$

и потому

$$\overline{\mathscr{X} - C} = \overline{\mathscr{X} - Q}. \tag{4}$$

Это показывает, что $\overline{\mathscr{X} - C}$ — замкнутая область.

Предположим, что множество $\overline{\mathscr{X} - C}$ разложимо. Пусть M и N — два континуума, таких, что

$$\overline{\mathscr{X} - C} = M \cup N \quad \text{и} \quad M \neq \overline{\mathscr{X} - C} \neq N. \tag{5}$$

Тогда

$$M - C \neq 0 \neq N - C. \tag{6}$$

Действительно, из равенства $N - C = 0$ следует включение $\mathscr{X} - C \subset \mathscr{X} - N$; следовательно, согласно (5),

$$\mathscr{X} - C \subset \overline{\mathscr{X} - C} - N \subset M, \quad \text{а потому} \quad \overline{\mathscr{X} - C} \subset M$$

вопреки неравенству (5).

Рассмотрим два случая в соответствии с тем, будет ли $Q = 0$ или $Q \neq 0$. В первом случае $\overline{\mathscr{X} - C} = \mathscr{X} = M \cup N$. Пусть $a \in M$. Но тогда из (6) следует, что $M = \mathscr{X}$, что противоречит неравенству (5).

Теперь рассмотрим второй случай. В этом случае, как мы уже показали, $a \in Q$. Поскольку пространство связно, из равенства

$$\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - C}} \cup \overline{\mathscr{X} - C} = Q \cup M \cup N$$

(ср. (5)) следует, что $Q \cap (M \cup N) \neq 0$. Можно предположить, что $Q \cap M \neq 0$. Поэтому множество $Q \cup M$ есть континуум, соединяющий точку a с некоторой точкой множества $M - C$ (согласно (6)). Следовательно,

$$Q \cup M = \mathscr{X}, \quad \text{т. е.} \quad \mathscr{X} - Q \subset M, \quad \text{и потому} \quad \overline{\mathscr{X} - Q} \subset M,$$

а из равенств (4) и (5) следует, что $\overline{\mathscr{X} - C} = M$ вопреки неравенству (5).

Теорема 5. *Композанты неразложимого пространства попарно не пересекаются.*

Доказательство. Пусть P — композанта точки p, а Q — композанта точки q. Предположим, что $a \in P \cap Q$ и $b \in P - Q$. Таким образом, существуют три замкнутых связных множества A, B и C, таких, что

$$p,\ a \in A \neq \mathscr{X}, \quad p,\ b \in B \neq \mathscr{X}, \quad q,\ a \in C \neq \mathscr{X}.$$

Следовательно, $A \cup B \cup C$ — замкнутое связное множество, соединяющее точку b с точкой q. Отсюда

$$A \cup B \cup C = \mathscr{X}.$$

Из этого следует, что пространство разложимо. Этот вывод очевиден, если $A \cup B = \mathscr{X}$; с другой стороны, если $A \cup B \neq \mathscr{X}$, то из соотношения $\mathscr{X} = (A \cup B) \cup C$ следует искомое разложение.

Из теоремы 1 в сочетании с теоремой 2 п. V вытекает следующая теорема:

Теорема 6. *Всякая композанта неразложимого пространства есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество первой категории*[1]).

Нижеследующая теорема вытекает из теоремы Бэра.

Теорема 7. *Всякое полное неразложимое пространство содержит (бесконечное) счетное множество композант.*

Каждая точка этого пространства есть точка неприводимости.

Более точно, *множество точек x, таких, что пространство неприводимо между точками a и x, есть всюду плотное $\boldsymbol{G}_\delta$-множество.*

[1]) Теорема Мазуркевича [5].

Замечания. (i) Первую часть теоремы 7 можно усилить следующим образом:

Во всяком неразложимом континууме существует совершенное множество (мощности $\mathfrak{c}$), содержащее не более одной точки из каждой композанты[1]).

(ii) Из теоремы 7 вытекает следующее утверждение:

Теорема 7′. *Полное связное пространство $\mathcal{X}$ неразложимо тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ содержит три точки a, b и c, между любой парой которых оно неприводимо, или, эквивалентно, если любая точка пространства $\mathcal{X}$ есть точка неприводимости.*

Доказательство. Необходимость этого условия следует из того факта, что пространство содержит по крайней мере три композанты. Для доказательства достаточности предположим, что K и L замкнуты, связны и

$$\mathcal{X} = K \cup L, \qquad K \neq \mathcal{X} \neq L.$$

Если a, b и c — любые три точки пространства $\mathcal{X}$, то либо K, либо L (либо оба) содержат две из этих точек. Таким образом, пространство $\mathcal{X}$ не является неприводимым между ними.

Теорема 8. *Всякое связное пространство, содержащее композанту, являющуюся граничным множеством, неразложимо.*

Следовательно (ср. с теоремой 7), *полное связное пространство неразложимо тогда и только тогда, когда оно содержит композанту, являющуюся граничным множеством.*

Доказательство. Пусть p — точка, композанта которой P есть граничное множество, т. е. $\overline{\mathcal{X} - P} = \mathcal{X}$. Если пространство разложимо, то

$$\mathcal{X} = A \cup B, \qquad A \neq \mathcal{X} \neq B,$$

где A и B замкнуты и связны.

Пусть $p \in A$. Тогда $A \subset P$, откуда

$$\mathcal{X} - P \subset \mathcal{X} - A \subset B, \text{ и поэтому } \mathcal{X} = \overline{\mathcal{X} - P} \subset B,$$

что противоречит неравенству $B \neq \mathcal{X}$.

Замечание. Из теоремы 8 в сочетании с замечанием 2 (стр. 216) вытекает, что континуум из примера 1 п. V является неразложимым.

Теорема 9. *Континуум $\mathcal{X}$, неприводимый между точками a и b, неразложим тогда и только тогда, когда он содержит*

---

[1]) См. Мазуркевич [13].

полуконтинуум S, являющийся всюду плотным граничным множеством, содержащим точку a[1]).

Доказательство. Пусть S — композанта точки a. Ясно, что сформулированное условие необходимо (ср. с теоремами 2 и 6).

Для доказательства достаточности нужно (согласно теореме 8) только показать, что композанта C точки b есть граничное множество, или что $C \cap S = 0$ (так как S всюду плотно).

Но если $C \cap S \neq 0$, то существуют два континуума K и L, таких, что

$$a \in K \subset S, \qquad b \in L \subset C \quad \text{и} \quad K \cap L \neq 0.$$

Так как пространство неприводимо между точками a и b, то из этого вытекает, что

$$K \cup L = \mathcal{X}, \text{ следовательно, } \mathcal{X} - S \subset \mathcal{X} - K \subset L \text{ и } \overline{\mathcal{X} - S} \subset L.$$

По предположению $\overline{\mathcal{X} - S} = \mathcal{X}$, следовательно, $L = \mathcal{X}$, а так как $L \subset C$, то из этого следует, что $a \in C$. Но это противоречит предположению, что $\mathcal{X}$ неприводимо между точками a и b.

VII. Неразложимые подмножества неприводимых пространств.

Теорема 1. *Если C — неразложимое замкнутое подмножество пространства $\mathcal{X}$, неприводимого между точками a и b, то C — либо замкнутая область, либо нигде не плотное множество. В первом случае (если $C \neq 0$) в семействе $\boldsymbol{D}$ (рассмотренном в п. III) имеется такое множество D, что D и $D \cup C$ образуют скачок.*

Доказательство. По теореме 5 п. II множество $A = \mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - C}$ связно. Поэтому, согласно теореме 2 п. V, множество A либо всюду плотно, либо нигде не плотно в C.

В первом случае $\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - C} = C$, а это означает, что C — замкнутая область.

Во втором случае множество A нигде не плотно (в $\mathcal{X}$), а потому оно пусто (как открытое множество), следовательно, $\overline{\mathcal{X} - C} = \mathcal{X}$.

Теперь рассмотрим вторую часть теоремы. Пусть C — неразложимая непустая замкнутая область. Если $C = \mathcal{X}$, то достаточно предположить, что $D = 0$. Поэтому пусть $C \neq \mathcal{X}$. Тогда либо $a \in \mathcal{X} - C$, либо $b \in \mathcal{X} - C$. По соображениям симметрии можно предположить, что $a \in \mathcal{X} - C$. Согласно теореме 3 п. II,

[1]) Теорема Урысона [5, стр. 225].

множество $\overline{\mathcal{X} - C}$ состоит из двух замкнутых связных областей, одна из которых, скажем D, содержит точку a, а другая либо пуста, либо содержит точку b. Так как $D \cap C \neq 0$, то множество $D \cup C$ связно и принадлежит $\boldsymbol{D}$ (ибо оно является замкнутой областью; ср. § 8, VIII). Пусть

$$D^* \in \boldsymbol{D}, \quad D \subset D^* \subset D \cup C.$$

Покажем, что либо $D^* = D$, либо $D^* = D \cup C$.

Согласно теореме 1 п. III, a — точка неприводимости множества D^*. Следовательно, по теореме 3 п. II множество $\overline{D^* - D}$ связно. Так как $\overline{D^* - D}$ — замкнутая область относительно множества D^*, которое само представляет собой замкнутую область, то $\overline{D^* - D}$ — замкнутая область (ср. § 8, VIII). Поэтому $\overline{D^* - D}$ как подмножество C является его связной и относительно замкнутой подобластью. Поскольку C неразложимо, то из теоремы 2 п. V следует, что либо $\overline{D^* - D} = 0$, либо $\overline{D^* - D} = C$. В первом случае $D^* = D$, а во втором

$$D \cup C = D \cup \overline{D^* - D} \subset D \cup D^* = D^*, \text{ следовательно, } D^* = D \cup C.$$

Обратно, имеет место следующая

Теорема 2. *Если элементы D_{y_1} и D_{y_2} семейства $\boldsymbol{D}$ образуют скачок, то множество $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ неразложимо.*

Доказательство. По теореме 1 п. III и теореме 3 п. II множество $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ связно. Пусть A и B — два замкнутых связных множества, таких, что $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}} = A \cup B$. Покажем, что одно из них совпадает с $\overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$.

Пусть $A^* = \mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - A}$ и $B^* = \mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - B}$. По теореме 5 п. II множества A^* и B^* связны. Более того, множество $A \cup B = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}}$ есть замкнутая область (как замкнутая область, относительно замкнутая в замкнутой области D_{y_2}),

$$A \cup B = \overline{\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - (A \cup B)}},$$

откуда (ср. § 8, VII (i))

$$\overline{A^* \cup B^*} = A \cup B = \overline{D_{y_2} - D_{y_1}}.$$

Если $D_{y_1} \neq 0$, то либо $D_{y_1} \cap A^* \neq 0$, либо $D_{y_1} \cap B^* \neq 0$. Можно предположить, что имеет место первое неравенство. Следовательно, $\overline{(D_{y_1} \cup A^*)} \in \boldsymbol{D}$. Это же включение выполняется при условии, что $D_{y_1} = 0$, а A^* означает то из множеств A^* и B^*, которое содержит точку a.

По предположению

$$\text{либо} \quad \overline{D_{y_1} \cup A^*} = D_{y_1}, \quad \text{либо} \quad \overline{D_{y_1} \cup A^*} = D_{y_2}.$$

В первом случае

$$D_{y_2}=D_{y_1}\cup\overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=D_{y_1}\cup A^*\cup B^*=D_{y_1}\cup B^*.$$

Следовательно,

$$D_{y_2}-D_{y_1}\subset B^*\subset B,\quad \text{и потому}\quad \overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=B.$$

Во втором случае

$$D_{y_2}-D_{y_1}\subset A^*\subset A,\quad \text{откуда}\quad \overline{D_{y_2}-D_{y_1}}=A.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Семейство* $\boldsymbol{D}$ *имеет порядковый тип интервала тогда и только тогда, когда рассматриваемое неприводимое пространство не содержит замкнутого неразложимого подмножества, не являющегося граничным множеством.*

Замечание. *Если* F *— замкнутое подмножество* $\mathcal{J}$, *содержащее точки* 0 *и* 1, *то существует неприводимый между точками* 0 *и* 1 *континуум, для которого* $J=F$ (другими словами, такой, что $\boldsymbol{D}$ подобно F).

Действительно, необходимо только заменить каждый интервал, смежный к F, континуумом из примера 3 п. V, подходящим образом уменьшенным и имеющим те же концы, что и соответствующий интервал.

В частности, для всякого непустого неразложимого континуума пара (0, 1) совпадает с множеством J.

Теорема 4. *Слои континуума* $\mathcal{X}$, *неприводимого между точками* a *и* b, *совпадают с множествами, насыщенными относительно свойства быть континуумом, являющимся объединением (конечной или бесконечной) последовательности нигде не плотных континуумов и неразложимых континуумов.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное монотонное отображение, такое, что $f(\mathcal{X})=\mathcal{J}$. Пусть C — нигде не плотный континуум, $\overline{\mathcal{X}-C}=\mathcal{X}$. Покажем, во-первых, что $f(C)$ состоит из одной точки.

Предположим, что $f(C)=\alpha\beta$, где $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1$. Множества $f^{-1}(0\alpha)$ и $f^{-1}(\beta 1)$ — континуумы (ср. § 47, VI, теорема 4), один из которых содержит точку a, а другой — точку b и которые имеют общие точки с C; поэтому

$$f^{-1}(0\alpha)\cup C\cup f^{-1}(\beta 1)=\mathcal{X},\quad \text{откуда}\quad \mathcal{X}-C\subset f^{-1}(0\alpha)\cup f^{-1}(\beta 1);$$

следовательно, $\overline{\mathcal{X}-C}\subset f^{-1}(0\alpha)\cup f^{-1}(\beta 1)$, и так как $\overline{\mathcal{X}-C}=\mathcal{X}$, то отсюда мы получаем, наконец, что $\mathcal{X}=f^{-1}(0\alpha)\cup f^{-1}(\beta 1)$; это противоречит формуле $f(\mathcal{X})=\mathcal{J}$.

Таким образом, $f(C)$ состоит только из одной точки, и $f(S)=(p)$ при условии, что S — полуконтинуум и объединение последовательности нигде не плотных континуумов. Так как каждый неразложимый континуум K по теоремам 1 и 6 п. VI является замыканием некоторого полуконтинуума S такого вида, то отсюда следует, что $f(K)=(p)$. Наконец, из этого вытекает, что если Q — континуум, являющийся объединением последовательности нигде не плотных континуумов и неразложимых континуумов, то $f(Q)$ также состоит только из одной точки; другими словами, Q содержится в одном слое (теперь необходимо только подставить функцию g из п. IV вместо функции f).

Обратно, согласно теореме 4 п. IV,

$$T_t=\bigcup(I_y\cup J_y)=\bigcup(\overline{I}_y\cup\overline{J}_y),$$

где y пробегает (счетное) множество индексов, таких, что $y\in J$ и $\gamma(t)\leqslant y\leqslant\Gamma(t)$. Так как каждое из множеств $\overline{I}_y$ и $\overline{J}_y$ есть либо нигде не плотный континуум, либо неразложимый континуум (ср. с теоремой 4 п. VI), то слой T_t является объединением последовательности нигде не плотных континуумов и неразложимых континуумов. А так как каждое множество такого вида, как мы показали, содержится в одном слое и слои попарно не пересекаются, то из этого следует, что слой насыщен относительно указанных свойств.

Теорема 5. *Слои неприводимого континуума, имеющего порядковый тип интервала, совпадают с нигде не плотными насыщенными континуумами*[1]) *(т. е. с нигде не плотными континуумами, не являющимися собственными подконтинуумами никаких других нигде не плотных континуумов).*

Доказательство. Всякий нигде не плотный континуум (как мы только что показали) содержится в одном слое. С другой стороны, так как пространство не содержит никакого неразложимого континуума, не являющегося нигде не плотным множеством, то каждый слой по теореме 4 представляет собой объединение последовательности нигде не плотных континуумов; таким образом, он и сам является нигде не плотным континуумом.

Теорема 6. *Всякий неприводимый между двумя точками континуум, который не содержит никакого нигде не плотного*

[1]) Многие свойства нигде не плотных насыщенных континуумов изложены в статье Куратовского [10, § 2].

подконтинуума (состоящего более чем из одной точки), является дугой [1]).

Доказательство. Рассматриваемый континуум не содержит никакого неразложимого подконтинуума (состоящего более чем из одной точки), потому что всякий неразложимый континуум имеет нигде не плотный подконтинуум (состоящий более чем из одной точки; ср. с теоремой 2 п. V). Следовательно, согласно теоремам 3 и 5, слои представляют собой нигде не плотные подконтинуумы, т. е. отдельные точки. Поэтому функция g (из п. IV) есть гомеоморфизм.

Теорема 7 [2]). *Всякое дискогерентное разложимое пространство $\mathscr{X}$, неприводимое между точками a_0 и a_1, представляет собой объединение двух неразложимых множеств A_0 и A_1, таких, что*

$$(1) \qquad A_0 = \overline{\mathscr{X} - A_1} \quad \text{и} \quad A_1 = \overline{\mathscr{X} - A_0}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 из § 46, X пусть A_0 и A_1 — два связных множества, удовлетворяющих условию (1) и таких, что $A_0 \neq \mathscr{X} \neq A_1$. Пусть $a_0 \in A_0$ и $a_1 \in A_1$. Предположим, что

$$A_1 = B_0 \cup B_1, \quad B_0 \neq A_1 \neq B_1,$$

где B_0 и B_1 — замкнутые связные множества. Пусть $a_1 \in B_1$. По теореме 1 из § 46, X множество $\overline{\mathscr{X} - B_0}$ связно. Но

$$\overline{\mathscr{X} - B_0} = \overline{A_0 - B_0} \cup \overline{A_1 - B_0} = \overline{A_0 - B_0} \cup \overline{B_1 - B_0}$$

и

$$A_0 - B_0 \neq 0 \neq B_1 - B_0,$$

следовательно,

$$0 \neq \overline{A_0 - B_0} \cap \overline{B_1 - B_0} \subset A_0 \cap B_1.$$

Поэтому множество $A_0 \cup B_1$ связно, а так как $a_0 \in A_0$ и $a_1 \in B_1$, то $A_0 \cup B_1 = \mathscr{X}$, т. е. $\mathscr{X} - A_0 \subset B_1$, и поэтому $A_1 = \overline{\mathscr{X} - A_0} \subset B_1$, вопреки неравенству $A_1 \neq B_1$.

VIII. Пространства, неприводимо связные между множествами *A* и *B*. Пространство $\mathscr{X}$ называется *неприводимо связным между множествами A и B*, если оно связно между A и B,

---

[1]) Теорема Янишевского [1]. См. также § 47, V, теорема 1. Ср. Холлет [1].
[2]) См. Куратовский [12, стр. 403]. Ср. Александров [3, стр. 537].

но никакое подмножество вида $F \cup A \cup B$ ни для какого $F = \overline{F} \neq \mathscr{X}$ не является связным между A и B, другими словами, если пространство неприводимо относительно свойства быть замкнутым множеством X, таким, что $X \cup A \cup B$ связно между A и B.

Теорема 1. *Если пространство $\mathscr{X}$ неприводимо связно между A и B, то множества A и B отделимы и не пусты, а пространство $\mathscr{X}$ связно.*

Следовательно, *если $A \neq 0 \neq B$, то связность пространства $\mathscr{X}$ между A и B можно заменить в определении просто связностью.*

Доказательство. Мы должны показать, что пространство связно, так как остальная часть теоремы есть прямое следствие § 46, IV, 1a. Предположим, что

$$\mathscr{X} = M_0 \cup M_1, \quad M_0 \cap M_1 = 0, \quad M_j = \overline{M}_j \neq \mathscr{X}, \quad \text{где} \quad j = 0,\ 1.$$

Последнее неравенство вытекает из предположения, что множество $M_j \cup A \cup B$ не является связным между A и B, и поэтому M_j не является связным между $A \cap M_j$ и $B \cap M_j$. Отсюда вытекает, что

$$M_j = P_j \cup Q_j, \quad P_j = \overline{P_j}, \ Q_j = \overline{Q}_j, \quad P_j \cap Q_j = 0, \quad A \cap P_j = 0 = B \cap Q_j.$$

Предположим, что $P = P_0 \cup P_1$ и $Q = Q_0 \cup Q_1$. Тогда

$$\mathscr{X} = P \cup Q, \quad \overline{P} = P, \quad \overline{Q} = Q, \quad P \cap Q = 0 \quad \text{и} \quad A \cap P = 0 = B \cap Q,$$

а это означает, что пространство не связно между A и B.

Теорема 2. *Пространство, неприводимо связное между множествами A и B, неприводимо между любой парой точек $a \in A$, $b \in B$.*

Доказательство. Если C — замкнутое связное множество, такое, что $a, b \in C$, то множество $C \cup A \cup B$, очевидно, связно между A и B; следовательно, $C = \mathscr{X}$.

Замечание. Обратная теорема, вообще говоря, неверна (она имеет место в компактных пространствах; ср. с теоремой 2 п. IX).

Для того чтобы доказать это, рассмотрим пример 2 п. V. Построенное там пространство неприводимо между точками $a = (0, 0)$ и $b = (1, 0)$. Тем не менее оно не является неприводимо связным между этими точками, так как последовательность полуокружностей с центром $(1/2, 0)$, проходящих через точки $(3^{-n}, 0)$, где $n = 0, 1, \ldots$ (при $n = 0$ точка $(1/2, 1/2)$ полуокружности выбрасывается), образуют замкнутое множество, связное между точками a и b.

Теорема 3. *Если пространство неприводимо связно между A и B, то оно также неприводимо связно между любой парой A_1, B_1, где $0 \neq A_1 \subset A$ и $0 \neq B_1 \subset B$.*

Доказательство. Так как $A_1 \neq 0 \neq B_1$ и пространство связно, то оно связно между A_1 и B_1; с другой стороны, если $F \cup A \cup B$ не связно между A и B, то $F \cup A_1 \cup B_1$ также не связно между A_1 и B_1.

Теорема 4. *Если пространство $\mathscr{X}$ неприводимо связно между A и $B_0 = \overline{B}_0$, а также между A и $B_1 = \overline{B}_1$, то $\mathscr{X}$ неприводимо связно между A и $B_0 \cup B_1$.*

Доказательство. Согласно теореме 1а из § 46, IV, пространство $\mathscr{X}$ связно между A и $B_0 \cup B_1$ (так как $B_0 \subset B_0 \cup B_1$). С другой стороны, пусть $F = \overline{F} \neq \mathscr{X}$. Тогда множество $F \cup A \cup B_j$, $j = 0, 1$, не связно между A и B_j и поэтому отлично от $\mathscr{X}$; таким образом, $F \cup B_j \neq \mathscr{X}$. Из этого вытекает, что множество $(F \cup B_0) \cup A \cup B_1$ не связно ни между A и B_1, ни между A и B_0 (по соображениям симметрии); следовательно, согласно теореме 3 из § 46, IV, это множество не связно также между A и $B_0 \cup B_1$.

Теорема 5. *Если пространство $\mathscr{X}$ неприводимо связно между замкнутыми множествами A и B, то множество $\mathscr{X} - (A \cup B)$ связно и всюду плотно в $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Предположим, что множество $\mathscr{X} - (A \cup B)$ не связно. Пусть G и H — два открытых множества, таких, что

$$\mathscr{X} - (A \cup B) = G \cup H, \quad G \cap H = 0, \quad G \neq 0 \neq H.$$

Так как множество $G \cup A \cup B = \mathscr{X} - H \neq \mathscr{X}$ замкнуто, то оно не связно между A и B. Отсюда следует, что

$$G \cup A \cup B = P \cup Q, \quad 0 = P \cap Q = A \cap P = B \cap Q,$$
$$H \cup A \cup B = W \cup Z, \quad 0 = W \cap Z = A \cap W = B \cap Z,$$

где множества P, Q, W и Z замкнуты.

Следовательно, $\mathscr{X} = (P \cup W) \cup (Q \cup Z)$ есть разложение пространства на два замкнутых непересекающихся множества, ибо

$$P \cap Z = [P \cap (Z \cap H)] \cup [P \cap (Z \cap A)] =$$
$$= [(P \cap G) \cap (Z \cap H)] \cup [(P \cap B) \cap (Z \cap H)] = 0,$$

причем одно из них содержит множество B, а другое — множество A. Так как пространство связно, то из соотношений

$$\mathcal{X} = A \cup \overline{\mathcal{X} - (A \cup B)} \cup B \quad \text{и} \quad A \cap B = 0$$

следует, что

$$A \cap \overline{\mathcal{X} - (A \cup B)} \neq 0 \neq B \cap \overline{\mathcal{X} - (A \cup B)}.$$

Поскольку множество $\overline{\mathcal{X} - (A \cup B)}$ связно, множество $\overline{\mathcal{X} - (A \cup B)} \cup A \cup B$ связно между A и B. Отсюда по предположению следует, что

$$\overline{\mathcal{X} - (A \cup B)} = \mathcal{X}.$$

Теорема 6. *Если два замкнутых множества E_j, $j = 0, 1$, неприводимо связны между множествами $A_j = \bar{A}_j$ и $E_0 \cap E_1$, то объединение $E_0 \cup E_1$ неприводимо связно между A_0 и A_1* [1]).

Доказательство. Так как множество $E_0 \cup E_1$ связно, то достаточно показать, что для любого данного множества

$$F = \bar{F} \subset E_0 \cup E_1 \neq F$$

множество $F \cup A_0 \cup A_1$ не связно между A_0 и A_1.

Но из условия $F \neq E_0 \cup E_1$ следует, что либо $F \cap E_0 \neq E_0$, либо $F \cap E_1 \neq E_1$. Предположим, что $F \cap E_0 \neq E_0$; тогда множество $(F \cap E_0) \cup A_0 \cup (E_0 \cap E_1)$ не связно между A_0 и $E_0 \cap E_1$, т. е.

$$(F \cap E_0) \cup A_0 \cup (E_0 \cap E_1) = M \cup N, \quad M = \bar{M}, \quad N = \bar{N},$$

$$0 = M \cap N = M \cap E_1 = N \cap A_0.$$

Отсюда следует, что

$$F \cup A_0 \cup A_1 = (F \cap E_0) \cup A_0 \cup (F \cap E_1) \cup A_1 \subset M \cup (N \cup E_1),$$

где $M \cap (N \cup E_1) = 0$, $A_0 \subset M$ (так как $A_0 \cap N = 0$) и $A_1 \subset N \cup E_1$. Эти соотношения показывают, что множество $F \cup A_0 \cup A_1$ не связно между A_0 и A_1.

IX. Неприводимо связные компактные пространства.

Теорема 1. *Всякое компактное пространство, связное между двумя замкнутыми непересекающимися множествами A и B, содержит замкнутое множество C, неприводимо связное между множествами $C \cap A$ и $C \cap B$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 из § 47, VII, семейство замкнутых множеств F, связных между множествами A и B, замкнуто. Замкнуто также и семейство $\boldsymbol{F}$ замкнутых

[1]) Ср. Клайн [3, стр. 315].

множеств X, таких, что множество $X \cup A \cup B$ связно между A и B, ибо $X \cup A \cup B$ — непрерывная функция переменного X (ср. § 17, III, следствие 4а).

Пусть C — неприводимый элемент семейства $\boldsymbol{F}$. Тогда C связно между $C \cap A$ и $C \cap B$, так как в противном случае

$$C = M \cup N, \quad C \cap A \subset M = \overline{M}, \quad C \cap B \subset N = \overline{N}, \quad M \cap N = 0,$$

и разложение

$$C \cup A \cup B = (A \cup M) \cup (B \cup N)$$

на два замкнутых непересекающихся множества противоречит соотношению $C \in \boldsymbol{F}$.

Кроме того, если $H = \overline{H} \subset C \neq H$, то множество $H \cup (C \cap A) \cup \cup (C \cap B)$ не связно между $C \cap A$ и $C \cap B$, так как $H \cup A \cup B$ не связно между A и B.

Теорема 2. *Компактное пространство $\mathscr{X}$ неприводимо связно между двумя замкнутыми непересекающимися множествами A и B тогда и только тогда, когда $\mathscr{X}$ неприводимо между любой парой точек a, b, где $a \in A$ и $b \in B$.*

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 п. VIII, достаточно показать, что если пространство $\mathscr{X}$ неприводимо между любой парой точек $a \in A$ и $b \in B$, а C — замкнуто и неприводимо связно между $A \cap C$ и $B \cap C$, то $C = \mathscr{X}$.

Пусть $a \in A \cap C$ и $b \in B \cap C$. Так как множество C замкнуто, связно (согласно теореме 1 п. VIII) и соединяет точку a с точкой b, то $C = \mathscr{X}$.

Теорема 3. *Если неразложимый континуум $\mathscr{X}$ неприводимо связен между двумя замкнутыми множествами A_0 и A_1, то существует композанта C, такая, что $C \cap (A_0 \cup A_1) = 0$.*

Доказательство. Пусть $R_0, R_1, \ldots$ — база континуума $\mathscr{X}$, и пусть S_{jn}, $j = 0, 1$, есть объединение компонент множества $\mathscr{X} - R_n$, пересекающихся с множеством A_j. Объединение

$$(1) \qquad S_j = S_{j0} \cup S_{j1} \cup \ldots$$

совпадает с объединением композант пространства, пересекающихся с множеством A_j; действительно, если K — такой континуум, что $K \cap A_j \neq 0$ и $K \neq \mathscr{X}$, то существует такое число n, что $K \subset \mathscr{X} - R_n$ и, следовательно, $K \subset S_{jn} \subset S_j$.

Таким образом, достаточно показать, что S_j — множество первой категории, или, так как S_j есть $\boldsymbol{F}_\sigma$-множество (согласно (1)), что S_j — граничное множество, т. е.

$$(2) \qquad \overline{\mathscr{X} - S_j} = \mathscr{X}.$$

Но каждая композанта, содержащаяся в S_{1-j}, всюду плотна в пространстве (ср. VI, теорема 2), поэтому

$$(3) \qquad \overline{S}_{1-j} = \mathcal{X}.$$

Так как пространство $\mathcal{X}$ неприводимо между любой парой точек $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$, то из этого следует, что

$$S_0 \cap S_1 = 0, \quad \text{значит,} \quad S_{1-j} \subset \mathcal{X} - S_j, \quad \text{откуда} \quad \overline{S}_{1-j} \subset \overline{\mathcal{X} - S_j},$$

а это на основании (3) дает (2).

Теорема 4. *Если E_0 и E_1 — два неразложимых континуума и A_0 и A_1 — два замкнутых множества, таких, что $E_0 \cap E_1 = A_0 \cup A_1$ и E_j (где $j = 0, 1$) неприводимо связны между множествами A_0 и A_1, то объединение $E_0 \cup E_1$ неприводимо между двумя точками.*

Доказательство. Согласно теореме 3, существует композанта C_j множества E_j, где $j = 0, 1$, такая, что

$$C_j \cap (A_0 \cup A_1) = 0, \text{ следовательно, } C_j \cap E_0 \cap E_1 = 0.$$

Пусть $a_j \in C_j$. Континуум E_j неприводим между a_j и каждой точкой множества $E_0 \cap E_1$, а потому (по теореме 2) неприводимо связен между a_j и $E_0 \cap E_1$.

Отсюда следует, согласно теореме 6 п. VIII, что множество $E_0 \cup E_1$ неприводимо между точками a_0 и a_1.

X. Дополнительные замечания. *Цепь* — это конечная совокупность открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$, таких, что $G_i \cap G_j \neq 0$ тогда и только тогда, когда $|i-j| \leqslant 1$. Если $\delta(G_i) < \varepsilon$ при $i = 1, \ldots, n$, то цепь называется *ε-цепью*. Континуум называется *змеевидным*, если для каждого положительного ε его можно покрыть ε-цепью [1]).

Сформулируем без доказательства следующие интересные утверждения о змеевидных континуумах:

1. Змеевидный континуум неприводим между любой парой своих точек.

2. Всякий подконтинуум змеевидного континуума змеевидный.

3. Всякие два змеевидных наследственно неразложимых континуума (содержащих более одной точки) гомеоморфны. Эти континуумы называются *псевдодугами* (см. Моиз [1, стр. 583]). Таким является, например, континуум Кнастера, упомянутый в замечании 4 п. V.

[1]) По поводу определений и большинства дальнейших теорем см. Бинг [7]. Ср. также Баррет [1], Берджесс [4], Фугейт [1, 2], Скори [1].

4. Псевдодуга обладает свойством неподвижной точки (см. Гамильтон [1]).

5. Всякий змеевидный континуум топологически содержится в плоскости.

6. Существуют наследственно неразложимые континуумы *всех размерностей* (см. Бинг [8]; бесконечномерный случай см. Келли [2]).

7. Совокупность топологических типов (плоских) наследственно неразложимых континуумов имеет *мощность* $\mathfrak{c}$ (см. Бинг [9]).

8. Существует монотонное открытое отображение $f\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_2$, такое, что все прообразы точек $f^{-1}(y)$ являются псевдодугами (см. Андерсон [1]).

9. Псевдодуга гомеоморфна каждому своему подконтинууму (содержащему более одной точки) [1]).

10. Всякий разложимый континуум, гомеоморфный каждому своему подконтинууму (содержащему более одной точки), есть дуга (Хендерсон [2]).

11. В пространстве всех подконтинуумов квадрата псевдодуги, а также однородные континуумы образуют остаточное множество. Псевдодуга однородна (см. Бинг [4], Моиз [3], Бинг и Йонес [1]).

12. Всякий однородный змеевидный континуум (содержащий более одной точки) есть псевдодуга (см. Бинг [10]).

Отсюда следует, что *на плоскости существует однородный континуум, отличный от простой замкнутой кривой* (вопрос был поставлен Кнастером и Куратовским [1, стр. 223]). Напомним, что по теореме Мазуркевича *всякий плоский однородный и локально связный континуум есть простая замкнутая кривая* [2]).

13. Прямое произведение n змеевидных континуумов топологически содержится в $\mathscr{E}^{n+1}$ (Беннет [1]).

14. Каждый змеевидный континуум представляет собой непрерывный образ псевдодуги (Мёдушевский [1], Лехнер [1]).

15. Каждый змеевидный континуум представляет собой предел обратного спектра дуг, причем проекции являются непрерывными отображениями на [3]).

---

[1]) Теорема Моиза [1, стр. 594]. Эта теорема дает решение проблемы Мазуркевича [9] (вопрос состоял в том, существует ли континуум, отличный от дуги и обладающий указанным свойством).

[2]) См. Мазуркевич [10]. В этом направлении см. Коэн [1], Йонес [2] и [3], Берджесс [1], [3], [5] и [2].

[3]) См. Исбелл [1]. См. также Хендерсон [1], Пасынков [3, стр. 474].

О непрерывных образах змеевидных континуумов см. Лелек [2] и Фирнли [4], [5] и [6].

ГЛАВА 6

ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 49. Локальная связность

I. Точки локальной связности.

Определение. Топологическое пространство называется *локально связным в точке* p (*л. с. в точке* p)[1]), если всякая открытая окрестность G точки p содержит некоторую ее связную окрестность; другими словами, если C — компонента точки p в G, то $p \in \operatorname{Int}(C)$. Если пространство метрическое, то это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует связная окрестность E точки p, такая, что $\delta(E) < \varepsilon$.

Замечание. В сформулированном выше определении можно ограничиться окрестностями G, принадлежащими открытой базе $\boldsymbol{B}$ пространства.

Действительно, пусть $p \in G$, где G — произвольное открытое множество. Тогда существует элемент $R \in \boldsymbol{B}$, такой, что $p \in R \subset G$. Пусть C — компонента точки p в R, а D — компонента точки p в G. По предположению $p \in \operatorname{Int}(C)$; но $C \subset D$, откуда $\operatorname{Int}(C) \subset \operatorname{Int}(D)$ и, следовательно, $p \in \operatorname{Int}(D)$. Это означает, что пространство л. с. в точке p.

Локальная связность — топологический инвариант (по определению). Это свойство является локальным, а именно справедлива следующая

Теорема 0. *Если G открыто и $p \in G$, то G л. с. в точке p тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{X}$ л. с. в точке p.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathcal{X}$ л. с. в точке p. Пусть $p \in H$, где H — множество, открытое относительно G, т. е. H открыто и $H \subset G$. Пусть C — компонента точки p в H. По предположению $p \in \operatorname{Int}(C)$, т. е. $p \notin \overline{\mathcal{X} - C}$, откуда $p \in C - \overline{G - C}$. Но это означает, что p — внутренняя точка множества C относительно G. Следовательно, G л. с. в точке p.

---

[1]) Ср. Налли [1], Мазуркевич [3], Хан [2].

Обратно, пусть G л. с. в точке p. Пусть H — открытое множество и $p \in H$. Так как множество $G \cap H$ открыто, то p — внутренняя точка своей компоненты в $G \cap H$ и, следовательно, своей компоненты в H. Таким образом, $\mathcal{X}$ л. с. в точке p.

Теорема 1. *Множество точек, в которых метрическое пространство локально связно, есть $\boldsymbol{G}_\delta$-множество.*

Доказательство. Это множество есть бесконечное пересечение $G_1 \cap G_2 \cap \ldots$ множеств G_n, где G_n — объединение всех множеств $\operatorname{Int}(E)$, таких, что E связно и $\delta(E) < 1/n$.

Теорема 2. *Метрическое пространство локально связно в точке p тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$, такое, что из условия $|x-p| < \eta$ следует существование связного подмножества C, такого, что $x,\ p \in C$ и $\delta(C) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если пространство л. с. в точке p, то существует связная окрестность E точки p, такая, что $\delta(E) < \varepsilon$, поэтому остается положить $C = E$ и обозначить через η радиус сферы с центром в точке p, содержащейся в E.

Обратно, если условие теоремы выполнено, то каждому x, такому, что $|x - p| < \eta$, поставим в соответствие связное множество C_x, такое, что $x,\ p \in C_x$ и $\delta(C_x) < \varepsilon$. Положим $E = \bigcup_x C_x$; тогда $p \in \operatorname{Int}(E)$ и $\delta(E) \leqslant 2\varepsilon$.

Теорема 3. *Если $p \in A_0 \cap A_1$ и каждое из множеств A_0 и A_1 л. с. в точке p, то в точке p л. с. и множество $A_0 \cup A_1$.*

Доказательство. Пусть E_j — связная окрестность точки p в A_j, где $j = 0,\ 1$. Тогда

$$p \notin \overline{A_j - E_j}, \quad \text{т. е.} \quad p \notin \overline{(A_0 - E_0) \cup (A_1 - E_1)}.$$

Так как

$$(A_0 - E_0) \cup (A_1 - E_1) \supset [A_0 - (E_0 \cup E_1)] \cup [A_1 - (E_0 \cup E_1)] = \\ = (A_0 \cup A_1) - (E_0 \cup E_1),$$

то

$$p \notin \overline{(A_0 \cup A_1) - (E_0 \cup E_1)},$$

откуда следует, что множество $E_0 \cup E_1$ есть связная окрестность точки p в множестве $A_0 \cup A_1$.

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}_j$ л. с. в точке a_j ($j = 0,\ 1$), то прямое произведение $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$ л. с. в точке $(a_0,\ a_1)$.*

Доказательство. Пусть G — открытое подмножество произведения $\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_1$, содержащее точку (a_0, a_1). Пусть H_j — открытое множество (в $\mathcal{X}_j$), такое, что (ср. с теоремой 3 § 15, I)

$$a_j \in H_j \subset \mathcal{X}_j \quad \text{и} \quad H_0 \times H_1 \subset G.$$

Пусть C_j — компонента точки a_j в H_j. По предположению $a_j \in \operatorname{Int}(C_j)$, откуда (ср. § 15, III (2)) имеем

$$(a_0, a_1) \in \operatorname{Int}(C_0) \times \operatorname{Int}(C_1) = \operatorname{Int}(C_0 \times C_1) \text{ и } C_0 \times C_1 \subset H_0 \times H_1 \subset G.$$

Следовательно, $C_0 \times C_1$ — содержащаяся в G связная окрестность точки (a_0, a_1) (как прямое произведение двух связных множеств; ср. с теоремой 11 из § 46, II).

Очевидно, теорему 4 можно распространить на любое *конечное* число множителей. Если число множителей произвольно, то справедлива следующая

Теорема 4′. *Пусть* $\mathfrak{Z} = \prod\limits_{t \in T} \mathcal{X}_t$, *где все* $\mathcal{X}_t$, *за исключением конечного числа, связны. Пусть* $\mathfrak{z} = \{\mathfrak{z}^t\} \in \mathfrak{Z}$. *Если* $\mathcal{X}_t$ *л. с. в точке* $\mathfrak{z}^t$ *для каждого* t, *то* $\mathfrak{Z}$ *л. с. в точке* $\mathfrak{z}$.

Доказательство. Пусть множество $G \subset \mathfrak{Z}$ открыто, $\mathfrak{z} \in G$ и C — некоторая компонента точки $\mathfrak{z}$ в G. Нам нужно показать, что $\mathfrak{z} \in \operatorname{Int}(C)$. Согласно замечанию к определению, можно считать, что $G = \prod\limits_t G_t$, где G_t открыты в $\mathcal{X}_t$ и, за исключением конечной системы индексов, скажем $t_1, \ldots, t_n$, $G_t = \mathcal{X}_t$ и $\mathcal{X}_t$ связны.

Для каждого $t \in T$ обозначим через C_t компоненту точки $\mathfrak{z}^t$ в G_t. Тогда, согласно теореме 8 из § 46, III, $C = \prod\limits_{t \in T} C_t$. Для $t' \neq t_i$, где $i = 1, \ldots, n$, мы имеем $G_{t'} = \mathcal{X}_{t'}$. Отсюда $C_{t'} = \mathcal{X}_{t'}$ (ибо $\mathcal{X}_{t'}$ связно). Следовательно, $\operatorname{Int}(C) = \prod\limits_{t \in T} \operatorname{Int}(C_t)$ (ср. § 16, III (3)). Но $\mathfrak{z}^t \in \operatorname{Int}(C_t)$, поэтому $\mathfrak{z} \in \operatorname{Int}(C)$.

Замечание. Предположение связности пространств $\mathcal{X}_t$, за исключением конечного числа индексов, существенно. Это видно на примере, где $\mathcal{X}_n$ состоят из элементов 0 и 1 для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots$ — канторов дисконтинуум.

Примеры. (i) Пространства $\mathcal{E}^n$ и $\mathcal{J}^n$ локально связны в каждой точке для любого n (конечного или бесконечного).

(ii) Всякая изолированная точка есть точка локальной связности.

(iii) Кривая $\sin(1/x)$, определенная следующим образом: $y = \sin(1/x)$ для $0 < |x| \leqslant 1$ и $-1 \leqslant y \leqslant 1$ для $x = 0$, не является л. с. ни в одной точке оси y.

(iv) Континуум, получающийся в результате соединения сегментами точки $(0,\ 1)$ с точками 0 и $1/n$, $n=1,\ 2,\ \ldots$, оси x, не является л. с. ни в какой точке $0 \leqslant y < 1$ оси y.

(v) Аналогично, если точка $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ соединяется с каждой точкой канторова множества $\mathscr{C}$ (см. § 46, II, замечание), то получающийся в результате континуум не является л. с. ни в одной точке, за исключением $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

(vi) В п. VII будет показано, что неразложимый континуум не является л. с. ни в одной точке.

(vii) Отрезки, соединяющие точки $1/(n-1)$, $n=2,\ 3,\ \ldots$, оси x с точками $(1/nk,\ 1/n)$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, вместе с отрезком 01 оси x составляют континуум, который л. с. в начале координат. Однако не существует никакой малой окрестности этой точки, которая была бы связной и открытой.

(viii) Существуют связные и локально связные пространства, не содержащие никакой дуги [1]) и даже вполне не совершенные [2]).

II. Локально связные пространства.

Определение. Пространство, локально связное в каждой точке, называется *локально связным.*

Пространство $\mathscr{X}$ в п. II предполагается локально связным.

Из теорем 3 и 4 п. I вытекают следующие теоремы:

Теорема 1. *Конечное объединение замкнутых л. с. множеств локально связно.*

Теорема 2. *Конечное прямое произведение л. с. пространств локально связно.*

Теорема 3. *Всякое открытое подмножество л. с. пространства локально связно.*

Действительно, локальная связность — локальное свойство (ср. с теоремой 0 п. I).

Теорема 4. *Всякая компонента открытого подмножества G пространства $\mathscr{X}$ — открытое множество* [3]) *и, следовательно, область* [4]).

В частности, *всякая компонента пространства $\mathscr{X}$ есть открыто-замкнутое множество.*

---

[1]) См. Мур [10].

[2]) См. Кнастер и Куратовский [6]. Ср. также § 51, I, 7.

[3]) См. Хан [3].

[4]) Напомним, что область есть открытое связное множество.

Действительно, $p \in \operatorname{Int}(C)$, если C — компонента точки p в G. Обратно, справедлива следующая

Теорема 4'. *Если всякая компонента каждого открытого подмножества G данного топологического пространства открыта, то пространство локально связно.*

Более того, *здесь можно ограничиться множествами G, принадлежащими некоторой открытой базе пространства.*

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{X}$ — наследственно нормальное пространство, и пусть A и B — два отделимых множества. Если A связно, то существует область R, такая, что*

$$(1) \qquad A \subset R \quad и \quad \bar{R} \cap B = 0.$$

Если оба множества A и B связны, то существуют две области R и S, такие, что

$$(2) \qquad A \subset R, \quad B \subset S \quad и \quad R \cap S = 0.$$

Доказательство. Так как пространство $\mathscr{X}$ наследственно нормально, существует открытое множество G, такое, что $A \subset G$ и $\bar{G} \cap B = 0$. Пусть R — компонента G, содержащая A, а в случае, когда B связно, пусть S — компонента множества $\mathscr{X} - \bar{G}$, содержащая B. Согласно теореме 4, R и S — области.

Теорема 6. *Семейство компонент открытого множества в л. с. пространстве со счетной базой счетно.*

Действительно, любое семейство непересекающихся открытых множеств в таком пространстве счетно (ср. § 24, I, теорема 2).

Теорема 7. *Семейство компонент компактного л. с. пространства конечно.*

Поэтому *каждое компактное локально связное $\mathcal{T}_2$-пространство есть объединение конечного числа локально связных континуумов.*

Это утверждение следует из теоремы 4.

Теорема 8. *Всякое л. с. пространство $\mathscr{X}$ имеет базу, состоящую из областей.*

Если пространство $\mathscr{X}$ регулярно, то всякое открытое множество G есть объединение областей:

$$G = \bigcup_t R_t, \quad где \quad \bar{R}_t \subset G.$$

Если $\mathscr{X}$ — метрическое сепарабельное пространство, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность областей $R_1, R_2, \ldots,$ что

(i) $\delta(R_n) < \varepsilon$ *для* $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) *всякое открытое множество* G *есть объединение*

$$G = \bigcup_{n=1} R_{k_n}, \text{ где } \overline{R}_{k_n} \subset G.$$

Доказательство. 1. Пусть $\boldsymbol{B}$ — открытая база пространства $\mathscr{X}$. Тогда семейство $\boldsymbol{C}$ всех компонент элементов из $\boldsymbol{B}$ есть требуемая база, состоящая из областей.

2. Если пространство $\mathscr{X}$ регулярно, то G есть объединение открытых множеств G_s, таких, что $\overline{G}_s \subset G$. Следовательно, G есть объединение всех компонент множеств G_s. Обозначим через $\{R_t\}$ семейство этих компонент.

3. Если $\boldsymbol{B}$ счетно, то и $\boldsymbol{C}$ счетно (так как каждый элемент $\boldsymbol{B}$ имеет счетное семейство компонент). Кроме того, если $\boldsymbol{B} = (G_1, G_2, \ldots)$ и пространство $\mathscr{X}$ метрическое, то можно предположить, что условия (i) и (ii) выполняются, когда R_n заменено на G_n (ср. § 22, II). Отсюда легко получаем, что $\boldsymbol{C} = (R_1, R_2, \ldots)$ — требуемая база, удовлетворяющая (i) и (ii).

Теорема 9. *Всякая область C относительно множества E имеет вид $C = E \cap H$, где H — область.*

Доказательство. Пусть G — открытое множество, такое, что $C = E \cap G$, и пусть H — компонента множества G, содержащая C.

Теорема 10. *Пусть A и B — замкнутые множества, такие, что множества $A \cup B$ и $A \cap B$ локально связны; тогда A и B локально связны.*

Доказательство. Можно считать, что $A \cup B = \mathscr{X}$. Так как множество $A - B = \mathscr{X} - B$ открыто, то множество A л. с. в каждой точке множества $A - B$. Поэтому нам нужно показать, что A л. с. в каждой точке $p \in A \cap B$.

Пусть G — открытая окрестность точки p. По предположению компонента C множества $A \cap B \cap G$, содержащая точку p, открыта относительно этого множества. По теореме 9 (для $\mathscr{X} = G$ и $E = A \cap B \cap G$) существует область H, такая, что $H \subset G$ и $C = A \cap B \cap H$. Объединение и пересечение множеств $H \cap A$ и $H \cap B$ (замкнутые в H) связны, так как

$$(H \cap A) \cup (H \cap B) = H \cap (A \cup B) = H$$

и

$$(H \cap A) \cap (H \cap B) = H \cap A \cap B = C,$$

и поэтому множества $H \cap A$ и $H \cap B$ связны (§ 46, II, теорема 5). Так как множество $H \cap A$ есть связная окрестность точки p относительно множества A, содержащаяся в G, то A л. с. в точке p.

Теорему 10 можно следующим образом обобщить.

Теорема 10а. *Если* $\mathcal{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, $\overline{F}_j = F_j$ *и* $F_j \cap F_k$ *л. с. (для* $j \neq k$*), то множества* F_j *локально связны.*

Доказательство. Положим

$$A = F_j \quad \text{и} \quad B = F_1 \cup \ldots \cup F_{j-1} \cup F_{j+1} \cup \ldots \cup F_n.$$

Так как множества $F_j \cap F_k$ л. с., то $A \cap B$ л. с. по теореме 1. Следовательно, множество A л. с., согласно теореме 10.

Теорема 11. *Если множество* F *замкнуто и л. с., а* C — *компонента множества* $\mathcal{X} - F$, *то* $\mathcal{X} - C$ *и* $C \cup F$ *локально связны.*

Более того, *если* S — *объединение некоторых компонент множества* $\mathcal{X} - F$, *то* $\mathcal{X} - S$ *и* $S \cup F$ *локально связны.*

Доказательство. Это утверждение есть следствие теоремы 10, так как

$$\mathcal{X} = (\mathcal{X} - S) \cup (S \cup F) \quad \text{и} \quad (\mathcal{X} - S) \cap (S \cup F) = F,$$

поскольку S — открыто-замкнутое множество.

Теорема 12. *Пусть* F *и* S — *непустые множества, удовлетворяющие условиям теоремы* 11. *Если пространство* $\mathcal{X}$ *связно, то каждая компонента* C *множества* $\mathcal{X} - S$ *содержит компоненту множества* F.

Следовательно, *множество* $\mathcal{X} - S$ *имеет компонент не больше, чем* F *(если* F *связно, то связно и* $\mathcal{X} - S$*).*

Доказательство. Так как $F \subset \mathcal{X} - S$, то мы должны показать, что $C \cap F \neq 0$. Допустим, что $C \cap F = 0$, т. е. что $C \subset \mathcal{X} - F$. Пусть R есть компонента множества $\mathcal{X} - F$, содержащая C. По определению множества S каждая компонента $\mathcal{X} - F$, не содержащаяся в S, не пересекается с S. Следовательно,

$$R \cap S = 0, \quad \text{т. е.} \quad R \subset \mathcal{X} - S, \quad \text{откуда} \quad R \subset C,$$

так как $R \cap C \neq 0$ и C — компонента множества $\mathcal{X} - S$.

Таким образом, мы получаем $C = R$; это означает, что C открыто-замкнуто (как компонента замкнутого множества $\mathcal{X} - S$ и открытого множества $\mathcal{X} - F$). Но это несовместимо со связностью пространства $\mathcal{X}$.

Теорема 13[1]). *Если $\{A_t\}$ — семейство компонент множества A, то*

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup_t \operatorname{Int}(A_t).$$

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{Int}(A_t) \subset \operatorname{Int}(A)$. С другой стороны, пусть $p \in \operatorname{Int}(A)$, A_t — компонента точки p в A и G — компонента точки p в $\operatorname{Int}(A)$. Так как G связно, то $G \subset A_t$. Поскольку пространство $\mathscr{X}$ л. с. и G открыто, $G \subset \operatorname{Int}(A_t)$ и, наконец, $p \in \operatorname{Int}(A_t)$.

Теорема 14[2]). *Пусть R — область в метрическом сепарабельном пространстве; тогда существует последовательность областей R_1, R_2, ..., такая, что*

(3) $$R = R_1 \cup R_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad \bar{R}_n \subset R_{n+1}.$$

Доказательство. По теореме 8 существует последовательность областей Q_1, Q_2, ..., такая, что

(4) $$R = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots,$$

(5) $$\bar{Q}_n \subset R.$$

Так как R связно, то можно предположить (ср. § 46, II, теорема 10), что

(6) $$(Q_1 \cup \ldots \cup Q_n) \cap Q_{n+1} \neq 0 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Множества $\bar{Q}_1$ и $\mathscr{X} - R$ замкнуты и не пересекаются (ср. (5)), поэтому они отделимы, и, согласно теореме 5, существует область R_1, такая, что

$$\bar{Q}_1 \subset R_1 \quad \text{и} \quad \bar{R}_1 \subset R.$$

Продолжаем построение по индукции. Пусть

(7) $$\overline{Q_1 \cup \ldots \cup Q_n} \subset R \quad \text{и} \quad \bar{R}_n \subset R;$$

тогда множество $\overline{R_n \cup Q_{n+1}}$ связно (согласно (6)) и отделимо от $\mathscr{X} - R$ (согласно (5) и (7)). Поэтому в соответствии с теоремой 5 существует область R_{n+1}, такая, что

$$\overline{R_n \cup Q_{n+1}} \subset R_{n+1} \quad \text{и} \quad \bar{R}_{n+1} \subset R.$$

Следовательно, условия (7) выполняются для $n = 1, 2, \ldots$. В сочетании с (4) из них вытекает условие (3).

Теорема 15. *Пусть пространство $\mathscr{X}$ регулярно. Если F — компактное подмножество области R, то существует область Q, такая, что $F \subset Q$ и $\bar{Q} \subset R$.*

---

[1]) Ср. Хаусдорф [2, стр. 331].
[2]) Ср. Уилдер [3, стр. 650].

Доказательство. Так как $\mathcal{X}$ — регулярное пространство, то существует открытое покрытие $A=\{G_t\}$ области R, такое, что G_t — область и $\overline{G_t}\subset R$ (по теореме 8). Так как множество F компактно, мы имеем $F\subset G_{t_1}\cup\ldots\cup G_{t_n}$. Соединим G_{t_1} с каждым G_{t_j}, где $1<j\leqslant n$, конечной цепью элементов семейства A (ср. с теоремой 8 из § 46, II). Объединение этих цепей есть требуемая область Q.

Теорема 16[1]. *Если F — компактное подмножество открытого множества G, то F пересекает только конечное число компонент множества G.*

Более того, *если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то все компоненты множества $\mathcal{X}-F$, за исключением конечного числа, содержатся в G.*

Доказательство. Так как компоненты множества G открыты, среди них имеется конечное число $R_1, \ldots, R_n$ таких, что $F\subset R_1\cup\ldots\cup R_n$. Поэтому если R — компонента G, отличная от $R_1, \ldots, R_n$, то $F\cap R=0$.

Для доказательства второй части теоремы положим $\mathcal{X}-F=G^*$ и $\mathcal{X}-G=F^*$. Так как $F\subset G$, то из этого вытекает, что $F^*\subset G^*$. Следовательно, F^* пересекает только конечное число компонент множества G^*, а это означает, что все эти компоненты, за исключением конечного числа, не пересекаются с F^* и, следовательно, содержатся в G.

Теорема 17. *Если пространство $\mathcal{X}$ связно между множествами M и N, то оно содержит компоненту C, такую, что*

$$C\cap M\neq 0\neq C\cap N.$$

Доказательство. Допустим противное. Пусть S — объединение компонент, пересекающихся с M; тогда $M\subset S$ и $N\cap S=0$. Так как множество S открыто-замкнуто, то пространство $\mathcal{X}$ не связно между M и N.

Из теоремы 17 следует, что всякое л. с. пространство обладает свойством (M) (ср. § 47, II, теорема 1).

Теорема 18. *Квазикомпоненты л. с. пространства совпадают с его компонентами.*

Доказательство. Пусть C и Q — соответственно компонента и квазикомпонента точки p. Очевидно, $C\subset Q$. Так как C открыто-замкнуто, то $Q\subset C$, откуда $Q=C$.

---

[1] Ср. Борсук [9].

Теорема 19. *Если л. с. пространство $\mathcal{X}$ связно и C — компонента произвольного множества $X \neq \mathcal{X}$, то*

$$\overline{C} \cap \overline{\mathcal{X} - X} \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $p \in C$. Можно предположить, что $p \in \mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - X} = \operatorname{Int}(X)$. Пусть C_0 — компонента $\operatorname{Int}(X)$, содержащая p. Так как множество $\operatorname{Int}(X)$ открыто, то открыто и множество $\operatorname{Int}(X) - C_0$, как объединение компонент $\operatorname{Int}(X)$, отличных от C_0. Тогда $\overline{C_0} \cap \overline{\mathcal{X} - X} \neq 0$, ибо в противном случае соотношение

$$\mathcal{X} = \{\overline{\mathcal{X} - X} \cup [\operatorname{Int}(X) - C_0]\} \cup C_0$$

означало бы разбиение (связного) пространства на два непустых отделимых множества. Так как $C_0 \subset C$, то $\overline{C} \cap \overline{\mathcal{X} - X} \neq 0$.

Множество $L(A)$[1]).

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное метрическое пространство (л. с. или нет) и A — подмножество $\mathcal{X}$. Обозначим через $L(A)$ множество всех тех точек $x \in \overline{A}$, для которых существуют открытые множества G произвольно малого диаметра, содержащие x и такие, что $G \cap A$ связно.

Теорема 20. *Множество $L(A)$ есть множество типа G_δ.*

Доказательство. Действительно, $L(A) = \overline{A} \cap G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где G_n — объединение открытых множеств G, таких, что $G \cap A$ связно и $\delta(G) < 1/n$.

Теорема 21. *Если A локально связно, то $A \subset L(A)$.*

Теорема 22. *Если $A \subset B \subset L(A)$, то B локально связно.*

Доказательство. В самом деле, из включений $G \cap A \subset G \cap B \subset G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}$ следует, что множество $G \cap B$ связно (при условии, что $G \cap A$ связно).

Теорема 23. *Если $\mathcal{Y}$ — полное пространство, A — локально связное подмножество $\mathcal{X}$ и $f\colon A \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение, то существует непрерывное продолжение $g\colon B \to \mathcal{Y}$ отображения f, где B — л. с. G_δ-множество.*

Более того, $A \subset B \subset L(A)$.

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 из § 35, I, существуют G_δ-множество A^*, содержащее A, и продолжение $f^*\colon A^* \to \mathcal{Y}$ отображения f. Остается положить

$$B = A^* \cap L(A) \quad \text{и} \quad g = f^* \mid B.$$

[1]) См. Эйленберг [7, стр. 83].

III. Свойства границы[1]).

Теорема 1. *Пусть $\{A_t\}$ — семейство произвольных множеств в л. с. пространстве $\mathscr{X}$; тогда*

$$(1)\qquad \mathrm{Fr}\Big(\bigcup_t A_t\Big) \subset \overline{\bigcup_t \mathrm{Fr}(A_t)}.$$

Более точно, *если* $p \in \mathrm{Fr}\Big(\bigcup_t A_t\Big) - \overline{\bigcup_t \mathrm{Fr}(A_t)}$, *то $\mathscr{X}$ не является л. с. в точке p.*

Доказательство. Если бы пространство $\mathscr{X}$ было л. с. в точке p, то существовала бы связная окрестность E точки p, такая, что

$$(2)\qquad E \subset \mathscr{X} - \overline{\bigcup_t \mathrm{Fr}(A_t)}, \text{ так что } p \in \mathrm{Int}(E) \cap \mathrm{Fr}\Big(\bigcup_t A_t\Big).$$

Но тогда (ср. § 7, II, следствие 1а)

$$\mathrm{Int}(E) \cap \bigcup_t A_t \neq 0 \neq \mathrm{Int}(E) - \bigcup_t A_t.$$

и, таким образом,

$$E \cap \bigcup_t A_t \neq 0 \neq E - \bigcup_t A_t.$$

Следовательно, существует такой индекс t_0, что

$$E \cap A_{t_0} \neq 0 \neq E - A_{t_0}, \qquad \text{откуда} \qquad E \cap \mathrm{Fr}(A_{t_0}) \neq 0,$$

так как E связно (ср. § 46, I, теорема 1). Но это противоречит условию (2), ибо

$$E \subset \mathscr{X} - \overline{\bigcup_t \mathrm{Fr}(A_t)} \subset \mathscr{X} - \bigcup_t \mathrm{Fr}(A_t).$$

Замечание. *Соотношение* (1) *характеризует л. с. пространства*. Действительно, всякое пространство, не являющееся л. с., содержит бесконечную последовательность непересекающихся открытых множеств, не удовлетворяющих соотношению (1)[2]).

Теорема 2. *Если $G_1, G_2, \ldots$ — последовательность непересекающихся открытых множеств в л. с. метрическом пространстве, то*

$$\mathop{\mathrm{Ls}}_{n\to\infty} G_n \subset \mathop{\mathrm{Ls}}_{n\to\infty} \mathrm{Fr}(G_n).$$

[1]) См. Куратовский [8, стр. 140].

[2]) Куратовский [8, стр. 142], где это утверждение доказано для общих топологических пространств.

Доказательство. Если $p \in \operatorname{Ls} G_n$, то $p \in \mathscr{X} - G_n$ для каждого n (так как множества G_n не пересекаются). Таким образом, $p \in \mathscr{X} - \bigcup_n G_n$, и из включения $\operatorname{Ls}_{n \to \infty} G_n \subset \overline{\bigcup_n G_n}$ вытекает, что

$$p \in \overline{\bigcup_n G_n} - \bigcup_n G_n = \operatorname{Fr}\left(\bigcup_n G_n\right) \subset \overline{\bigcup_n \operatorname{Fr}(G_n)},$$

согласно теореме 1. Следовательно,

$$\operatorname{Ls}_{n \to \infty} G_n \subset \overline{\bigcup_n \operatorname{Fr}(G_n)},$$

откуда

$$\operatorname{Ls}_{n \to \infty} G_n = \operatorname{Ls}_{n \to \infty} G_{m+n} \subset \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} \operatorname{Fr}(G_n)}$$

для любого m (ср. § 29, IV, теорема 7). Таким образом (ср. § 29, IV, теорема 8),

$$\operatorname{Ls}_{n \to \infty} G_n \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=m}^{\infty} \operatorname{Fr}(G_n)} = \operatorname{Ls}_{n \to \infty} \operatorname{Fr}(G_n).$$

Теорема 3. *Если A — подмножество л. с. пространства и C — компонента A, то* $\operatorname{Fr}(C) \subset \operatorname{Fr}(A)$.

Более того, *если* $p \in \operatorname{Fr}(C) - \operatorname{Fr}(A)$, *то пространство не является л. с. в точке p.*

Доказательство. Пусть

$$p \in \operatorname{Fr}(C) - \operatorname{Fr}(A) = \bar{C} \cap \overline{\mathscr{X} - C} - (\bar{A} \cap \overline{\mathscr{X} - A}).$$

Тогда

$$p \in \bar{A} - (\bar{A} \cap \overline{\mathscr{X} - A}) \subset \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A}.$$

Если бы пространство $\mathscr{X}$ было локально связным в точке p, то существовала бы такая связная окрестность E точки p, что

$$E \subset \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - A} \text{ и, следовательно, } p \in \operatorname{Int}(E) \cap \operatorname{Fr}(C);$$

отсюда (ср. § 7, II, следствие 1a, и § 46, I, теорема 1) имеем

$$\operatorname{Int}(E) \cap C \neq 0 \neq \operatorname{Int}(E) - C \quad \text{и} \quad E \cap C \neq 0 \neq E - C.$$

Но это противоречит предположению, что C — компонента множества A, так как из условий $E \subset A$ и $E \cap C \neq 0$ следует, что $E \subset C$, поскольку E связно.

Теорема 4. *Пусть A — подмножество л. с. пространства. Если $\operatorname{Fr}(A)$ локально связно, то локально связно и $\bar{A}$.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 10 п. II, так как

$$\bar{A} \cup \overline{\mathcal{X} - A} = \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \bar{A} \cap \overline{\mathcal{X} - A} = \mathrm{Fr}(A).$$

IV. Разделение локально связных пространств. *Пусть $\mathcal{X}$ — л. с. регулярное пространство.*

Теорема 1. *Если F — замкнутое множество, не разделяющее множества M и N, не пересекающиеся с F (это означает, что $\mathcal{X} - F$ связно между M и N), то существует область R, такая, что*

(1) $$R \cap M \neq 0 \neq R \cap N \quad \text{и} \quad \bar{R} \cap F = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 17 п. II, существует компонента C множества $\mathcal{X} - F$, такая, что $C \cap M \neq \neq 0 \neq C \cap N$. Пусть $p \in C \cap M$ и $q \in C \cap N$. Согласно теореме 15 п. II, существует область R, такая, что p, $q \in R$ и $\bar{R} \subset C$, откуда следует соотношение (1).

Теорема 2. *Множество G точек множества $\mathcal{X} - (M \cup N)$, не разделяющих пространство между M и N, открыто в $\mathcal{X} - (M \cup N)$.*

Доказательство. Пусть $x \in G$, и пусть R — связное множество, такое, что $R \cap M \neq 0 \neq R \cap N$ и $x \in \mathcal{X} - \bar{R}$. Тогда ни одна точка множества $\mathcal{X} - \bar{R}$ не отделяет M от N.

Лемма. *Если Z — произвольное множество пар (m, n) положительных целых чисел, то существует бесконечная последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что для всех индексов i*

(2) $$\text{либо} \quad (k_i, k_{i+1}) \in Z, \quad \text{либо} \quad (k_i, k_{i+1}) \notin Z.$$

Доказательство. Предположим, что не существует последовательности первого типа; тогда существует число m (более того, m может быть как угодно большим), такое, что из условия $n > m$ вытекает, что $(m, n) \notin Z$. Обозначая последовательность этих чисел m через $\{k_i\}$, получаем требуемую последовательность второго типа.

Обозначим через $S(a, b)$ множество точек, отделяющих a от b (ср. § 46, IX).

Теорема 3 (Уайберн[1]). *Множество $S(a, b) \cup a \cup b$ компактно (пространство $\mathcal{X}$ предполагается связным и метрическим).*

[1] См. Уайберн [4] и [13, стр. 927].

Доказательство. По теореме 2 множество $S(a, b) \cup \cup a \cup b$ замкнуто. Предположим, что оно не компактно. Тогда $S(a, b)$ содержит бесконечную последовательность (различных) точек $p_1, p_2, \ldots$, всякая подпоследовательность которой образует замкнутое множество. По предположению для каждого n существуют два открытых множества, таких, что

$$(3) \qquad \mathscr{X} - p_n = M_n \cup N_n, \quad M_n \cap N_n = 0, \quad a \in M_n, \quad b \in N_n.$$

Пусть Z — множество пар (m, n), таких, что $p_m \in M_n$. Согласно предыдущей лемме, существует бесконечная последовательность $k_1 < k_2 < \ldots$, такая, что для всех индексов i

$$\text{либо} \quad p_{k_i} \in M_{k_{i+1}}, \quad \text{либо} \quad p_{k_i} \notin M_{k_{i+1}}, \quad \text{т. е. } p_{k_i} \in N_{k_{i+1}}.$$

По соображениям симметрии можно считать, что имеет место первая формула. Так как $\operatorname{Fr}(M_n) = (p_n)$, то, согласно теореме 1 п. III, имеем

$$\operatorname{Fr}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{k_n}\right) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{Fr}\left(M_{k_n}\right)} = \overline{\left(p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots\right)} =$$
$$= \left(p_{k_1}, p_{k_2}, \ldots\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{k_{n+1}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{k_n}.$$

Это означает, что множество $M_{k_1} \cup M_{k_2} \cup \ldots$ замкнуто (ср. § 6, II (7)). Но это множество открыто и отлично от $\mathscr{X}$ (потому что $b \notin M_n$ для любого n), что противоречит связности пространства $\mathscr{X}$.

Теорема 4. *Если метрическое пространство $\mathscr{X}$ связно и $\mathscr{X} = S(a, b) \cup a \cup b$, то оно есть дуга ab.*

Доказательство. Это пространство компактно по теореме 3 и, следовательно, согласно теореме 1, § 47, V, представляет собой дугу.

Замечание. Объединение двух множеств A и B, неприводимо связных между одной и той же парой точек (p, q) и таких, что $A \cap B = (p, q)$, не обязательно есть простая замкнутая кривая, даже если оно локально связно (см. Бинг [5]).

Теорема 5. *Связное метрическое пространство $\mathscr{X}$ (содержащее более одной точки), которое разделяется каждой парой своих точек, но не разделяется никакой отдельной точкой, представляет собой простую замкнутую кривую.*

Доказательство. Пусть a_0 — фиксированная точка. По предположению множество $\mathcal{X}-a_0$ связно и каждая точка $x\in(\mathcal{X}-a_0)$ разделяет множество $\mathcal{X}-a_0$. Согласно теореме 4 из § 46, VIII, все эти точки x, за исключением, может быть, счетного их множества, разделяют множество $\mathcal{X}-a_0$ на две области. Пусть a_1 — одна из таких точек x. Таким образом, существуют две области R_0 и R_1, такие, что

$$\mathcal{X}-a_0-a_1=R_0\cup R_1,\quad R_0\cap R_1=0 \text{ и } R_j\neq 0 \text{ для } j=0,\ 1.$$

Из этого следует, что $\mathrm{Fr}(R_j)=(a_0,\ a_1)$, потому что если бы $\mathrm{Fr}(R_j)$ состояло из единственной точки, то эта точка разделяла бы пространство. Следовательно, наша задача сводится к доказательству того, что $\overline{R}_j$ есть дуга a_0a_1.

Так как множество $\mathrm{Fr}(R_j)$ л. с., то л. с. и множество $\overline{R}_j$ (по теореме 4 п. III). Из предположения, что $\overline{R}_j$ не есть дуга a_0a_1, следует по теореме 4 существование точки $p\in R_j$, такой, что множество $\overline{R}_j-p$ связно между a_0 и a_1. Покажем теперь, что $\overline{R}_j-p$ — связное множество. Из предположения

$$(4)\qquad \overline{R}_j=U\cup V,\quad U=\overline{U},\quad V=\overline{V},\quad U\cap V=p,$$
$$U\neq\overline{R}_j\neq V,\qquad a_0\in U$$

следовало бы, что $a_1\in U$ (так как $\overline{R}_j-p$ связно между точками a_0 и a_1), и поэтому

$$\overline{R}_{1-j}\cap V=0,\ \text{откуда}\ (\overline{R}_{1-j}\cup U)\cap V=U\cap V=p.$$

Но разложение $\mathcal{X}=(\overline{R}_{1-j}\cup U)\cup V$ противоречит предположению, что p не разделяет пространство.

Предположим далее, что $\overline{R}_0$ не есть дуга a_0a_1. Тогда существует точка $p_0\in R_0$, такая, что множество $\overline{R}_0-p_0$ связно. Рассмотрим два случая, в зависимости от того, является ли множество $\overline{R}_1$ дугой a_0a_1 или нет. В первом случае пусть $p_1\in R_1$; во втором случае пусть p_1 — такая точка множества R_1, что $\overline{R}_1-p_1$ связно (существование такой точки только что доказано). В обоих случаях пара $p_0,\ p_1$ не разделяет пространство вопреки предположению.

Теорема 6[1]). *Если метрическое пространство $\mathcal{X}$ (содержащее более одной точки) дискогерентно (т. е. никакое замкнутое связное подмножество не разделяет его), то $\mathcal{X}$ — простая замкнутая кривая.*

[1]) См. Уилдер [6, стр. 54].

Доказательство. Пусть Q — такая область, что $0 \neq \overline{Q} \neq \mathscr{X}$. Пусть

$$R_0 = \mathscr{X} - \overline{Q} \quad \text{и} \quad R_1 = \mathscr{X} - \overline{R}_0.$$

Множества R_0 и R_1 связны по предположению, не пусты и (согласно § 8, VIII)

$$R_j = \mathscr{X} - \overline{R}_{1-j} \quad \text{для} \quad j = 0, 1. \tag{5}$$

Пусть $F = \mathrm{Fr}(R_0)$. Это дает

$$F = \overline{R}_0 - R_0 = \overline{R}_0 \cap \overline{R}_1 = \mathrm{Fr}(R_1) = \mathscr{X} - (R_0 \cup R_1). \tag{6}$$

Следовательно, множество F содержит более одной точки (потому что никакая точка не разделяет пространство). Покажем, что F содержит в точности две точки.

Предположим, что F содержит три различные точки a_0, a_1 и a_2. Так как пространство $\mathscr{X}$ локально связно, то пусть A_0, A_1 и A_2 — три такие области, что

$$a_k \in A_k \quad (k = 0, 1, 2) \quad \text{и} \quad \overline{A}_0 \cap \overline{A}_1 = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \overline{A}_2 \cap \overline{A}_0 = 0. \tag{7}$$

Поскольку $a_k \in F = \mathrm{Fr}(R_j)$, то

$$A_k \cap \mathrm{Fr}(R_j) \neq 0, \text{ следовательно, } R_j \cap A_k \neq 0 \tag{8}$$

для $j = 0, 1$ и $k = 0, 1, 2$.

Поэтому множество $R_j^+ = R_j \cup \overline{A}_0 \cup \overline{A}_1$ связно, откуда следует, что множество

$$R_{1-j}^- = R_{1-j} - (\overline{A}_0 \cup \overline{A}_1) = \mathscr{X} - \overline{R}_j - \overline{A}_0 - \overline{A}_1 = \mathscr{X} - \overline{R}_j^+ \tag{9}$$

есть область. Согласно (6), (7) и (9), $a_2 \in \overline{R}_j \cap \overline{R_{1-j}^-}$. Следовательно, множество $\overline{R}_j \cup \overline{R_{1-j}^-}$ связно, а потому связно и множество (ср. (5))

$$\mathscr{X} - (\overline{R}_j \cup \overline{R_{1-j}^-}) = R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-}.$$

Так как множества $\overline{A}_0$ и $\overline{A}_1$ отделимы (ср. (7)) и

$$R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-} = R_{1-j} - \overline{R_{1-j} - (\overline{A}_0 \cup \overline{A}_1)} \subset \overline{A}_0 \cup \overline{A}_1,$$

то одно из следующих множеств:

$$\overline{A}_0 \cap R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-} \quad \text{или} \quad \overline{A}_1 \cap R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-}$$

пусто. Предположим, что первое множество пусто:

$$\overline{A}_0 \cap R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-} = 0. \tag{10}$$

Но, согласно (9), $A_0 \cap R_{1-j}^- = 0$, откуда $A_0 \cap \overline{R_{1-j}^-} = 0$ (так как A_0 открыто), и поэтому, согласно (10),

$$0 = A_0 \cap R_{1-j} - \overline{R_{1-j}^-} = A_0 \cap R_{1-j},$$

что противоречит соотношению (8).

Таким образом, доказано, что множество $F = \mathrm{Fr}(R_j)$ состоит из двух точек. Пусть $F = (a_0, a_1)$. Согласно теореме 4 п. III, множество $\overline{R}_j$ локально связно. Остается показать, что $\overline{R}_j$ есть дуга a_0a_1, т. е. (ср. с теоремой 4) каждая точка множества R_j разделяет $\overline{R}_j$ между a_0 и a_1.

Предположим, что $p \in R_0$ и $\overline{R}_0 - p$ связно между a_0 и a_1. По теореме 1 существует замкнутое связное множество C, такое, что

$$a_0,\ a_1 \in C \subset \overline{R}_0 - p, \text{ откуда } F \subset C \subset \mathcal{X} - R_1.$$

Из этого соотношения, согласно (6), следует, что

$$\mathcal{X} - C = (F \cup R_0 \cup R_1) - C = (R_0 - C) \cup R_1.$$

Но это равенство дает разложение множества $\mathcal{X} - C$ на два непустых непересекающихся открытых множества (ибо $p \in R_0 - C$), что противоречит предположению о дискогерентности пространства.

Теорема 7. *Множество E разделяет метрическое пространство $\mathcal{X}$ на n отделимых (непустых) частей тогда и только тогда, когда E содержит замкнутое множество F, такое, что каждое множество H, удовлетворяющее условиям $F \subset H = \overline{H} \subset E$, разделяет пространство $\mathcal{X}$ на n (непересекающихся и непустых) открытых множеств.*

Доказательство. Сформулированное условие необходимо, согласно теореме 3 из § 46, VII.

Для доказательства его достаточности предположим, что множество $\mathcal{X} - E$ не состоит из n непустых отделимых частей. Тогда по теореме 6 из § 46, II существуют k связных множеств $C_1, \ldots, C_k$, таких, что

$$\mathcal{X} - E = C_1 \cup \ldots \cup C_k, \text{ где } k < n.$$

Пусть $F = \overline{F} \subset E$, и пусть $G_1, \ldots, G_j$ $(j \leqslant k)$ — система компонент множества $\mathcal{X} - F$, такая, что

$$\mathcal{X} - E \subset G_1 \cup \ldots \cup G_j.$$

Положим $H = \mathcal{X} - (G_1 \cup \ldots \cup G_j)$. Тогда $F \subset H = \overline{H} \subset E$, так как $\mathcal{X} - E \subset G_1 \cup \ldots \cup G_j \subset \mathcal{X} - F$. Однако множество H не разделяет пространство $\mathcal{X}$ на n непустых открытых множеств.

Теорема 8. *Пусть a и b — две точки компактного л. с. $\mathcal{T}_2$-пространства и $\{F_n\}$ — последовательность замкнутых множеств. Если ни одно из множеств F_n не разрезает никакой области между точками a и b, то и объединение $F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ не разрезает никакой такой области*[1].

Доказательство. Пусть R — область, содержащая точки a и b. Определим по индукции последовательность областей R_0, R_1, ..., удовлетворяющих следующим условиям:

(11) $$a,\ b \in R_n,$$

(12) $$\overline{R}_{n+1} \subset R_n - F_n.$$

Положим $R_0 = R$. Пусть R_n удовлетворяет условию (11), и пусть R_n^* — компонента множества $R_n - F_n$, содержащая двуэлементное множество $(a,\ b)$. Согласно теореме 15 п. II, существует область R_{n+1}, такая, что $a,\ b \in R_{n+1}$ и $\overline{R}_{n+1} \subset R_n^*$, откуда получаем включение (12).

Далее, пусть $K = \overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \ldots$. Так как $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$, ... — убывающая последовательность континуумов, то K — континуум (согласно теореме 5, § 47, II). Кроме того, из (11) и (12) следует, что

$$a,\ b \in K \subset R - (F_1 \cup F_2 \cup \ldots).$$

V. Неприводимые разделители. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связное (л. с.) пространство.*

Теорема 1. *Пусть C — некоторое замкнутое множество, A и B — две различные компоненты множества $\mathcal{X} - C$, и пусть $a \in A$, $b \in B$. Множество C является неприводимым разделителем между a и b тогда и только тогда, когда*

(1) $$\mathrm{Fr}(A) = C = \mathrm{Fr}(B).$$

Доказательство. Условие (1) является достаточным по теореме 4 из § 46, VII, поэтому остается показать, что оно необходимое. По теореме 3 п. III имеем

$$\mathrm{Fr}(A) \subset \mathrm{Fr}(\mathcal{X} - C) \subset C.$$

Так как $\mathrm{Fr}(A)$ есть разделитель между a и b (ср. с теоремой 6 из § 6, V), а C — неприводимый разделитель между a и b (по предположению), то $C = \mathrm{Fr}(A)$. Аналогично $C = \mathrm{Fr}(B)$.

Теорема 2. *Если A — область, а B — компонента множества $\mathcal{X} - \overline{A}$, то $\mathrm{Fr}\,(B)$ есть неприводимый разделитель между каждой парой точек $a \in A$ и $b \in B$.*

[1]) Ср Клайн [1].

Доказательство. Мы имеем (ср. с теоремой 3 п. III)

(2) $\operatorname{Fr}(B) \subset \operatorname{Fr}(\mathscr{X} - \bar{A}) = \bar{A} \cap \overline{\mathscr{X} - \bar{A}} \subset \bar{A} \cap \overline{\mathscr{X} - A} = \bar{A} - A.$

Следовательно, $a \notin \operatorname{Fr}(B)$, откуда вытекает, что $a \in \mathscr{X} - \bar{B}$, и потому $\operatorname{Fr}(B)$ отделяет a от b. С другой стороны, из (2) видно, что $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ для всех $x \in \operatorname{Fr}(B)$, следовательно, $A \cup x \cup B$ связно и потому никакое собственное подмножество $\operatorname{Fr}(B)$ не отделяет a от b.

Теорема 3 (Мазуркевич[1]). *Всякий замкнутый разделитель C между точками a и b содержит замкнутый неприводимый разделитель F между a и b.*

Доказательство. Пусть A — компонента точки a в $\mathscr{X} - C$. Тогда $b \in \mathscr{X} - \bar{A}$, так как $\bar{A} = A \cup \operatorname{Fr}(A) \subset A \cup C$. Если B — компонента точки b в $\mathscr{X} - \bar{A}$, то (ср. (2)) $\operatorname{Fr}(B) \subset \operatorname{Fr}(A) \subset C$. Таким образом, согласно теореме 2, достаточно положить $F = \operatorname{Fr}(B)$.

Теорема 4. *Пусть в нормальном пространстве $a_0 \in F_0 = \bar{F}_0$, $a_1 \in F_1 = \bar{F}_1$ и $F_0 \cap F_1 = 0$. Тогда существует замкнутый разделитель C, неприводимый между a_0 и a_1 и не пересекающийся с $F_0 \cup F_1$.*

Доказательство. Если G — такое открытое множество, что $F_0 \subset G$ и $\bar{G} \cap F_1 = 0$, то $\operatorname{Fr}(G)$ содержит искомый разделитель C.

VI. Множество точек, в которых континуум не является локально связным. Континуумы сходимости. В п. VI и VII пространство предполагается метрическим.

Определение. Континуум K называется *континуумом сходимости*[2] пространства $\mathscr{X}$, если он является топологическим пределом такой последовательности континуумов, что

$$K = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} K_n \quad \text{и} \quad K \cap K_n = 0.$$

Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то континуумы $K_1, K_2, \ldots$ можно считать попарно непересекающимися, ибо их можно заменить континуумами $K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots$, где $n_1 = 1$ и

$$\operatorname{dist}(K, K_{n_i}) < \rho(K, K_{n_{i-1}}), \quad n_i > n_{i-1} \quad \text{для} \quad i > 1.$$

[1]) См. Мазуркевич [11, стр. 193, лемма 1].

[2]) По Заранкевичу [1, стр. 127]. Ср. Урысон [6].

Пример. У кривой $\underset{x,\,y}{\mathsf{E}}[y=\sin(1/x)]$ $(0<|x|\leqslant 1)$ сегмент $-1\leqslant y\leqslant 1$, $x=0$ есть континуум сходимости.

Теорема 1. *Если пространство $\mathcal{X}$ — континуум и N — множество точек, в которых $\mathcal{X}$ не является локально связным, то каждая точка $p\in N$ принадлежит континууму сходимости $K\subset N$ (причем $K\neq p$)*[1].

Доказательство. По условию существует такая замкнутая окрестность E точки p, что если C — компонента точки p в E, то p не принадлежит ее внутренности, т. е. $p\in\overline{E-C}$. Положим

$$(1)\qquad p=\lim_{n\to\infty} p_n,$$

$$(2)\qquad p_n\in E-C.$$

Пусть C_n — компонента точки p_n в E. Тогда

$$(3)\qquad C\cap C_n=0.$$

Действительно, в противном случае множество $C\cup C_n$ было бы континуумом в E, следовательно, $C\cup C_n\subset C$, откуда $p_n\in C$ вопреки (2).

Пусть F — замкнутая окрестность точки p, такая, что

$$(4)\qquad F\subset \mathrm{Int}(E).$$

Можно считать, что $p_n\in F$ для $n=1, 2, \ldots$. Пусть D_n — компонента точки p_n в F. Так как $F\subset E$, то

$$(5)\qquad D_n\subset C_n.$$

Из последовательности $\{D_n\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность (ср. § 42, I, теорема 1, и § 42, II) и положим

$$(6)\qquad K=\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} D_{m_n}.$$

В силу (1) отсюда следует, что

$$(7)\qquad p\in K\subset F.$$

Но тогда (ср. (4)) $K\subset E$, а так как K — континуум (ср. § 47, II, теорема 4), то

$$(8)\qquad K\subset C.$$

[1]) Ср. Мур [2], Заранкевич [1, стр. 132] и Урысон [6, стр. 48].

Условие $K \neq p$ выполняется, поскольку, согласно теореме 2 из § 47, III,

$$D_n \cap \mathrm{Fr}(F) \neq 0, \quad \text{откуда} \quad K \cap \mathrm{Fr}(F) \neq 0,$$

тогда как $p \notin \mathrm{Fr}(F)$ (ибо F — окрестность точки p).

Далее, $K \subset N$. Предположим противное: $x \in K - N$. В силу (7) и (4) E есть окрестность точки x, а так как K — подконтинуум множества E, соединяющий точку x с p, то C — компонента точки x в E. Следовательно, $x \in \mathrm{Int}(C)$ (так как мы предполагаем, что $x \notin N$). Но

$$x \in \mathrm{Ls}\, D_n \subset \mathrm{Ls}\, C_n$$

(ср. (5) и § 29, IV, теорема 2) и существует индекс n, при котором $C \cap C_n \neq 0$, что противоречит (3).

Наконец, K является континуумом сходимости, так как из (8), (5) и (3) следует, что $K \cap D_n = 0$.

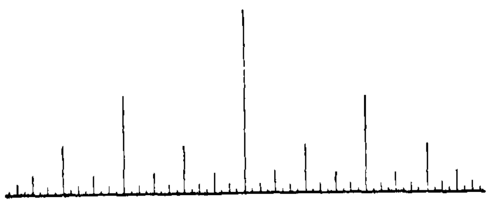

Рис. 6

Теорема 2. *Всякий континуум, не содержащий никакого нигде не плотного подконтинуума (состоящего более чем из одной точки*[1]*), является локально связным.*

Доказательство. Действительно, всякий континуум сходимости является нигде не плотным.

Замечание. Нигде не плотный континуум не обязан быть континуумом сходимости. Это показывает следующий пример (рис. 6).

Пространство состоит из сегмента 01 оси x и последовательности вертикальных сегментов

$$0 \leqslant y \leqslant 1/2^n \quad \text{и} \quad x = (2k-1)/2^n,$$

где $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$ и $n = 1, 2, \ldots$.

---

[1]) Нигде не плотный континуум, состоящий более чем из одной точки, называется также *континуумом конденсации*.

Горизонтальный сегмент представляет собой нигде не плотное множество, но не является континуумом сходимости.

Теорема 3 (Мур[1]). *Пусть $\mathcal{X}$ — континуум и N — множество точек, в которых $\mathcal{X}$ не является л. с.; тогда разбиение пространства $\mathcal{X}$ на компоненты множества $\overline{N}$ и отдельные точки множества $\mathcal{X} - \overline{N}$ является л. с. континуумом.*

Другими словами, *существует непрерывное отображение f пространства $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$, такое, что $\mathcal{Y}$ есть л. с. континуум и семейство множеств $f^{-1}(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, совпадает с семейством компонент множества $\overline{N}$ и отдельных точек множества $\mathcal{X} - \overline{N}$.*

Доказательство. Функция f, индуцированная рассматриваемым разбиением, является гомеоморфизмом в каждой точке множества $\mathcal{X} - \overline{N}$ (ср. с теоремой 1 из § 43, IV). Следовательно, точки множества $f(\mathcal{X} - \overline{N})$ суть точки локальной связности пространства $\mathcal{Y}$. Если Q — множество точек, в которых $\mathcal{Y}$ не является л. с., то $Q \subset f(\overline{N})$. Так как $\dim f(\overline{N}) \leqslant 0$ (см. § 46, V, теорема 3, и § 47, VI, теорема 1), то $\dim Q \leqslant 0$ и, следовательно, $Q = 0$ в силу теоремы 1.

Сочетая теорему 3 с теоремой 6 п. IV, получаем следующее утверждение:

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}$ — дискогерентный континуум и $\overline{N} \neq \mathcal{X}$, то пространство $\mathcal{Y}$, рассмотренное в теореме 3, является простой замкнутой кривой.*

Отсюда вытекает следующий результат:

Теорема 5. *Всякий дискогерентный континуум $\mathcal{X}$ локально является дугой в каждой точке множества $\mathcal{X} - \overline{N}$.*

Доказательство. Простая замкнутая кривая локально является дугой, а функция f есть локальный гомеоморфизм в каждой точке множества $\mathcal{X} - \overline{N}$.

Замечание. Теорему 3 можно легко обобщить следующим образом[2]). Напомним, что свойство называют локальным, если пространство обладает им в точке p тогда и только тогда, когда каждая окрестность этой точки обладает в p этим свойством. Пусть **P** обозначает локальное топологическое свойство в точке, такое, что множество точек, в которых континуум

[1]) См. Мур [7].

[2]) См. Уайберн [21].

обладает им, не является нульмерным (т. е. либо пусто, либо имеет положительную размерность). Тогда имеет место следующая

Теорема 6. *Если N — множество точек, в которых пространство $\mathscr{X}$ обладает свойством* **P**, *то теорема* 3 *остается справедливой.*

Под **P** можно понимать следующие свойства:

(i) $\dim_p \mathscr{X} \geqslant n$ $(n \geqslant 1)$;

(ii) $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \geqslant \aleph_0$ (см. § 51, III, теорема 5);

(iii) $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \geqslant \mathfrak{c}$;

(iv) p — элемент континуума сходимости (или нигде не плотного континуума), который содержит не только точку p.

Доказательство, аналогичное доказательству теоремы 1, позволяет установить следующее утверждение:

Теорема 7. *Всякий континуум, который не является л. с., содержит*

(i) *связное множество, не являющееся полуконтинуумом;*

(ii) *несвязное множество, которое, однако, связно между двумя точками.*

Доказательство. Пересмотрим доказательство теоремы 1, сохраняя смысл символов p, E, F, C и C_n. Можно считать, что континуумы C_n попарно не пересекаются и образуют сходящуюся последовательность:

$$L = \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} C_n. \tag{9}$$

Согласно (1), $p \in L$, откуда $L \subset C$, так как L — континуум (§ 47, II, теорема 4). Согласно теореме 1 из § 47, III, $C_n \cap \operatorname{Fr}(E) \neq 0$, откуда $L \cap \operatorname{Fr}(E) \neq 0$ в силу (9). Из равенства $F \cap \operatorname{Fr}(E) = 0$, вытекающего из (4), следует, что $L - [F \cup \operatorname{Fr}(E)] \neq 0$, так как L связно. Таким образом, существует точка $q \in L \cap \operatorname{Int}(E) - F$. Пусть H — замкнутая окрестность точки q, такая, что $H \subset E - F$. Пусть D — компонента точки p в F и I — компонента точки q в H. Тогда $D \cup I \subset C$ и $D \cap I = 0$. Поэтому множества D, I, C_1, C_2, ... попарно не пересекаются и, согласно теореме 7 из § 46, III, существуют бесконечная последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots$ и связное множество W, такие, что

$$C_{k_1} \cup C_{k_2} \cup \ldots \subset W \quad \text{и либо} \quad W \cap D = 0, \quad \text{либо} \quad W \cap I = 0.$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть первый случай.

Так как $p \in L$, то множество $P = W \cup p$ связно. Однако оно не является полуконтинуумом, ибо в противном случае существовал бы континуум R (ср. § 47, III, теорема 4), такой, что

$$p \in R \subset P \cap F \quad \text{и} \quad R \neq p$$

(так как F — окрестность точки p).

Но из условия $p \in R \subset F$ следует, что $R \subset D$, откуда $R \cap W = 0$, а поскольку $R \subset p$, то $R = p$.

Наконец, множество $p \cup q \cup \bigcup_n C_n$ связно между точками p и q (§ 46, IV, теорема 9), хотя оно и не является связным множеством.

VII. Относительное расстояние. Колебание [1]).

Определение 1. Точная нижняя грань диаметров $\delta(E)$, где E означает произвольное связное множество, соединяющее точки x и y, называется *относительным расстоянием между точками x и y* [2]):

$$\rho_r(x, y) = \inf \delta(E). \tag{1}$$

Из определения следует, что условие $\rho_r(x, y) < \varepsilon$ имеет место тогда и только тогда, когда существует связное множество E, такое, что

$$x, y \in E \quad \text{и} \quad \delta(E) < \varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 1. *Относительное расстояние определяет метрику во всяком пространстве, в котором любую пару точек можно соединить связным ограниченным множеством.*

Другими словами, *выполняются следующие соотношения* (ср. § 21, I):

$$[\rho_r(x, y) = 0] \equiv (x = y); \tag{3}$$

$$\rho_r(y, z) \leqslant \rho_r(x, y) + \rho_r(x, z). \tag{4}$$

Доказательство. Соотношение (3) очевидно. Докажем (4). Пусть Y и Z — два связных ограниченных множества, соединяющих соответственно x с y и x с z. Тогда (ср. § 21, III (4))

$$\rho_r(y, z) \leqslant \delta(Y \cup Z) \leqslant \delta(Y) + \delta(Z).$$

---

[1]) Эти понятия принадлежат С. Мазуркевичу [3], [4] и [7]. Много теорем, касающихся этих понятий, можно найти в докладе того же автора в «Трудах I конгресса математиков славянских стран» (Варшава, 1930); см. также Урысон [6].

Дальнейшие результаты см. Локуциевский [1], Штанько [1].

[2]) Более общо, если множество E пробегает семейство $\boldsymbol{F}$, то можно определить относительное расстояние по отношению к семейству $\boldsymbol{F}$. Ср. Ароншайн [2, стр. 97].

Предположим далее, что

$$\delta(Y) < \rho_r(x, y) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \delta(Z) < \rho_r(x, z) + \varepsilon;$$

тогда $\rho_r(y, z) < \rho_r(x, y) + \rho_r(x, z) + 2\varepsilon$, откуда и следует соотношение (4).

Теорема 2. *Если пространство есть континуум, то в определении* (1) *множество E можно считать континуумом: число $\rho_r(x, y)$ при этом не изменится.*

Доказательство. Действительно, если E связно, то $\overline{E}$ — континуум и $\delta(\overline{E}) = \delta(E)$.

Теорема 3. *Относительное расстояние является метрикой в любом связном и локально связном пространстве.*

Кроме того, *в определении* (1) *множество E можно считать областью.*

Доказательство. Для того чтобы установить первую часть, достаточно, согласно теореме 1, показать, что всякую пару точек рассматриваемого пространства можно соединить связным ограниченным множеством. Но это следует непосредственно из теоремы 8 § 46, II при условии, что $\{G_t\}$ — семейство ограниченных областей.

Для доказательства второй части достаточно заметить, что если C — связное множество, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такая область R, что

$$C \subset R \quad \text{и} \quad \delta(R) \leqslant \delta(C) + \varepsilon,$$

а именно R есть компонента множества C в открытом шаре с центром C радиуса $\varepsilon/2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — пространство, удовлетворяющее условиям теоремы* 1. *Пусть $\mathcal{X}_r$ — то же самое пространство с метрикой, порождаемой относительным расстоянием. Тождественное отображение f: $\mathcal{X}_r \to \mathcal{X}$ непрерывно; обратное отображение f^{-1} непрерывно в точке p тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ локально связно в этой точке.*

Доказательство. Функция f непрерывна, так как

$$|x - y| \leqslant \rho_r(x, y).$$

Обратно, если функция f^{-1} непрерывна в точке x, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\eta > 0$, что из условия $|x - y| < \eta$ следует $\rho_r(x, y) < \varepsilon$. Это означает, что существует связное множество E, удовлетворяющее условию (2). Согласно теореме 2 п. I, пространство $\mathscr{X}$ л. с. в точке x.

Из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Если пространство $\mathscr{X}$ связно и л. с., то обычная метрика и относительное расстояние топологически эквивалентны* (*т. е.* f — *гомеоморфизм*).

Это следует из того, что связное метрическое пространство локально связно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно пространству, в котором всякий открытый шар связен (см. Ньюман [1, стр. 75]).

Определение 2. Число

$$\delta_r(A) = \sup \rho_r(x, y), \quad \text{где} \quad x, y \in A,$$

называется *относительным диаметром* множества A.

Колебание функции f^{-1} в точке p (которое называют также *колебанием пространства в точке* p) есть по определению (ср. § 21, III) число

$$\omega(p) = \inf \delta_r(X) = \limsup_{x, y \to p} \rho_r(x, y), \quad \text{где} \quad p \in \operatorname{Int}(X).$$

Примеры. Рассмотрим кривую $\sin(1/x)$ из примера 3 п. I; для нее $\omega(p) = 2$ во всякой точке этой кривой с абсциссой 0. В примере 4 $\omega(y) = 1 - y$ на оси y.

Теорема 6. *На всяком неразложимом континууме $\mathscr{X}$ колебание постоянно* ($= \delta(\mathscr{X})$).

Доказательство. Действительно, во всякой окрестности данной точки p существует точка q, такая, что пространство $\mathscr{X}$ неприводимо между p и q (§ 48, VI, теорема 6); поэтому $\rho_r(p, q) = \delta(\mathscr{X})$.

§ 50. Локально связные метрические континуумы[1])

I. Дугообразная связность.

Определение. Пространство называется *дугообразно связным* (*д. с.*), если любую пару его точек можно соединить дугой. Оно называется *локально дугообразно связным* (*л. д. с.*) в точке p, если в любой окрестности точки p существует д. с. окрестность точки p, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\eta > 0$, что из условия $|x - p| < \eta$ вытекает существование дуги A, такой, что $x, p \in A$ и $\delta(A) < \varepsilon$.

[1]) Локально связные метрические континуумы называются также *континуумами Пеано*.

Теорема 1. *Если пространство локально дугообразно связно в точке p, то оно локально связно в этой точке.*

Теорема 2. *Если связное пространство локально дугообразно связно, то оно также дугообразно связно.*

Более общо, *всякая область* (*и, в частности, всякая компонента*) *л. д. с. пространства дугообразно связна.*

Доказательство. Первая часть является прямым следствием теоремы 8 из § 46, II, если G_p означает д. с. окрестность точки p.

Вторая часть следует из первой, поскольку компоненты л. с. пространства — области (§ 49, II, теорема 4).

Теорема 3. *Во всяком связном и л. д. с. пространстве относительное расстояние $\rho_r(x, y)$ равно точной нижней грани диаметров дуг, соединяющих точки x и y. Поэтому условие $\rho_r(x, y) < \varepsilon$ означает, что существует дуга xy диаметра $< \varepsilon$.*

Доказательство. Это утверждение есть следствие теоремы 2 и § 49, VII, теоремы 3.

Теорема 4. *Если F — компактное подмножество связного л. д. с. пространства $\mathscr{X}$, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\eta > 0$, что для каждой пары точек $x, y \in F$ из условия $|x - y| < \eta$ следует $\rho_r(x, y) < \varepsilon$, т. е. точки x и y можно соединить в $\mathscr{X}$ дугой диаметра $< \varepsilon$.*

Доказательство. Действительно, функция расстояния $\rho_r(x, y)$ непрерывна на пространстве $\mathscr{X}$ (§ 49, VII, теорема 4) и, следовательно, равномерно непрерывна на F.

Поскольку F — непустое компактное множество, то существует непрерывное отображение f, такое, что (ср. § 41, VI, следствие 2b)

$$(1) \qquad f\colon \mathscr{C} \to F \quad \text{и} \quad f(\mathscr{C}) = F.$$

Это утверждение можно усилить следующим образом:

Теорема 5. *Если F — непустое компактное подмножество связного и л. д. с. пространства $\mathscr{X}$, то всякая непрерывная функция f, удовлетворяющая условиям* (1), *имеет продолжение $f^*\colon \mathscr{J} \to \mathscr{X}$, являющееся гомеоморфизмом в любом интервале, смежном к $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... — последовательность интервалов, смежных к $\mathscr{C}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |f(b_n)-f(a_n)|=0,$$

и по теореме 4 в $\mathcal{X}$ существует последовательность дуг A_n ($n=1, 2, \ldots$) с концами $f(a_n)$ и $f(b_n)$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(A_n)=0$. Пусть f_n — гомеоморфное отображение интервала a_nb_n на дугу A_n, такое, что $f_n(a_n)=f(a_n)$ и $f_n(b_n)=f(b_n)$. Функция f^* определяется следующим образом:

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t) & \text{для } t\in\mathcal{C},\\ f_n(t) & \text{для } a_n\leqslant t\leqslant b_n, \quad n=1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Следующее утверждение является частным случаем теоремы 5.

Теорема 6. *Всякий непустой л. д. с. континуум является непрерывным образом интервала.*

Доказательство. Достаточно положить $F=\mathcal{X}$.

В п. II будет показано, что теорему 6 можно обобщить, заменяя условие локальной дугообразной связности условием локальной связности.

II. Характеризация локально связных континуумов.

Теорема 1 (Мазуркевича — Мура — Менгера [1]). *Всякое полное л. с. пространство является л. д. с.*

Доказательство. Можно считать, что пространство связно (ср. § 49, II, теоремы 3 и 4).

Пусть $p\neq q$ — две фиксированные точки. Пусть $\boldsymbol{G}$ — семейство областей диаметра <1. Согласно теореме 9 из § 46, II, это семейство содержит конечную систему областей $R_1, \ldots, R_k$, которые составляют «неприводимую цепь» между точками p и q; это означает, что

(1) $\qquad p\in R_1, \quad q\in R_k, \quad R_i\cap R_{i+1}\neq 0$ (для $i<k$),

(2) $\qquad R_i\cap R_{i'}=0, \quad$ если $\quad |i-i'|>1$.

Пусть $\boldsymbol{G}^*$ — семейство областей S, таких, что $\delta(S)<1/2$ и $\overline{S}\subset R_1$. Пусть (ср. § 46, II, теорема 9) $S_1, \ldots, S_{l_1}$ — цепь со звеньями, принадлежащими $\boldsymbol{G}^*$, неприводимая между p и $R_1\cap R_2$ (или между p и q, если $k=1$). Аналогично строится цепь, неприводимая между $S_{l_1}\cap R_2$ и $R_2\cap R_3$, и т. д., и наконец строится

[1]) Мазуркевич [7]. См. более ранние статьи [3, стр. 305 и 941] и [4, стр. 428] того же автора. Мур [1, стр. 135]. Менгер [8, стр. 212]. Ср. также Аронцшайн [1, стр. 228] и Куратовский [24, стр. 307].

цепь, неприводимая между $S_{l_{k-1}} \cap R_k$ и q. Таким образом, для $l_{i-1} < j \leqslant l_i$ $(l_0 = 0)$ имеем

(3) $$\bar{S}_j \subset R_i,$$

и легко видеть, что цепь

(4) $$S_1, \ldots, S_{l_1}, S_{l_1+1}, \ldots, S_{l_2}, \ldots, S_{l_{k-1}}, S_{l_{k-1}+1}, \ldots, S_{l_k}$$

неприводима между p и q.

Так как цепь $R_1, \ldots, R_k$ неприводима, то для любой ее точки x существуют индексы α и α', такие, что

(5) $$\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \alpha + 1, \quad x \in R_\alpha \cap R'_\alpha, \quad x \notin R_i \quad \text{для} \quad \alpha \neq i \neq \alpha'.$$

Аналогично, если x принадлежит цепи (4), то существуют два индекса β и β', таких, что

$$\beta \leqslant \beta' \leqslant \beta + 1, \quad x \in S_\beta \cap S_{\beta'}, \quad x \notin S_j \quad \text{для} \quad \beta \neq j \neq \beta'.$$

Из (3) вытекает следующее соотношение между α и β:

(6) $$l_{\alpha-1} < \beta \leqslant \beta' \leqslant l_{\alpha'}.$$

Действительно, если, например, $\beta \leqslant l_{\alpha-1}$, то, согласно (3),

$$x \in S_\beta \subset R_1 \cup \ldots \cup R_{\alpha-1}$$

вопреки соотношению (5).

Из соотношений (3) и (6) легко получаем, что

(7) $$\begin{cases} \bar{S}_1 \cup \ldots \cup \bar{S}_\beta \cup \bar{S}_{\beta'} \subset R_1 \cup \ldots \cup R_\alpha \cup R_{\alpha'}, \\ \bar{S}_\beta \cup \bar{S}_{\beta'} \cup \ldots \cup \bar{S}_{l_k} \subset R_\alpha \cup R_{\alpha'} \cup \ldots \cup R_k. \end{cases}$$

В (обобщенной) теореме 3 из § 47, V положим

$$A_1 = R_1 \cup \ldots \cup R_{\alpha'}, \quad B_1 = R_\alpha \cup \ldots \cup R_k, \quad C_1 = A_1 \cup B_1,$$
$$A_2 = S_1 \cup \ldots \cup S_{\beta'}, \quad B_2 = S_\beta \cup \ldots \cup S_{l_k}, \quad C_2 = A_2 \cup B_2.$$

Легко видеть, что условие (i) указанной теоремы выполняется для $n = 1, 2$, а условие (iii) — для $n = 1$. Кроме того,

$$x \in A_1 \cap B_1 = R_\alpha \cup R_{\alpha'} \quad \text{и} \quad x \in A_2 \cap B_2 = S_\beta \cup S_{\beta'},$$

и, следовательно,

$$\delta(A_1 \cap B_1) \leqslant \delta(R_\alpha) + \delta(R_{\alpha'}) < 2 \quad \text{и} \quad \delta(A_2 \cap B_2) < 1.$$

Процедуру построения цепи (4) из цепи $R_1, \ldots, R_k$ можно продолжить при помощи индукции и получить бесконечную последовательность цепей, неприводимых между точками p и q. Если C_n — объединение звеньев n-й из этих цепей, то выполняются все предположения цитированной теоремы и, в частности,

$$\alpha(C_n) < 1/n \quad \text{и} \quad \delta(A_n, B_n) < 2/n.$$

Отсюда следует, что множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ есть дуга pq.

Теорема 2 (Хана — Мазуркевича — Серпинского [1])). *Если $\mathscr{X}$ — непустой континуум, то следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathscr{X}$ — непрерывный образ интервала;*

(ii) *каждому $\varepsilon > 0$ соответствует разбиение пространства $\mathscr{X}$ на конечное число континуумов диаметра $< \varepsilon$;*

(iii) *пространство $\mathscr{X}$ локально связно.*

Доказательство. *Из условия* (i) *следует условие* (ii). Действительно, если $f: \mathscr{J} \to \mathscr{X}$ — непрерывное и, следовательно, равномерно непрерывное отображение на, то

$$\mathscr{J} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n, \quad \mathscr{X} = f(A_1) \cup \ldots \cup f(A_n) \quad \text{и} \quad \delta[f(A_i)] < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

при условии, что $A_1, \ldots, A_n$ — достаточно малые интервалы.

Из условия (ii) *следует условие* (iii). Предположим, что задана система континуумов $C_1, \ldots, C_n$, такая, что

$$\mathscr{X} = C_1 \cup \ldots \cup C_n \quad \text{и} \quad \delta(C_i) < \varepsilon.$$

Пусть $p \in \mathscr{X}$, и пусть $i_1, \ldots, i_k$ — система всех индексов, таких, что

$$p \in C_{i_1}, \ldots, p \in C_{i_k}.$$

Тогда множество $C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_k}$ есть связная окрестность точки p диаметра $< 2\varepsilon$.

Из условия (iii) *следует условие* (i) [2]). Так как континуум $\mathscr{X}$ л. с. и, следовательно, л. д. с. (по теореме 1), то он является непрерывным образом интервала, согласно теореме 6 п. I.

Теорема 3. *Всякое компактное л. с. пространство $\mathscr{X}$ допускает разбиение на конечное число л. с. континуумов с произвольно малыми диаметрами.*

---

[1]) См. названные выше статьи Мазуркевича, а также Хан [1], [2]; Серпинский [7].

Простое доказательство дугообразной связности непрерывных образов интервала (которое следует из теорем 1 и 2), принадлежащее Келли, можно найти в книге Уайберна [1, стр. 39 (3)].

[2]) Это утверждение содержит как частный случай известную теорему Пеано [1], согласно которой квадрат $\mathscr{J}^2$ является непрерывным образом интервала $\mathscr{J}$. Более прямое доказательство приводится в § 16, II, следствие 6b.

Доказательство. Так как всякое компактное л. с. пространство является объединением конечного числа л. с. континуумов (§ 49, II, теорема 7), то достаточно рассмотреть случай, когда $\mathscr{X}$ — л. с. континуум и, следовательно, непрерывный образ интервала. Повторяя доказательство первой части теоремы 2 (из (i) следует (ii)), мы приходим к заключению, что $\mathscr{X}$ есть объединение конечного числа континуумов диаметра $<\varepsilon$, каждый из которых есть непрерывный образ интервала; из этого вытекает требуемый результат (ибо (i) влечет за собой (iii)).

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{X}$ — л. с. континуум и $\varepsilon>0$ некоторое заданное число. Тогда существует такое $\eta>0$, что любую пару точек, расстояние между которыми $<\eta$, можно соединить дугой диаметра $<\varepsilon$.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 4 п. I.

Теорема 5. *Свойство быть л. с. континуумом является инвариантом непрерывных отображений.*

Доказательство. Это вытекает из эквивалентности условий (i) и (iii).

Из теоремы 1 вытекает следующая

Теорема 6. *Всякое полное пространство, которое связно, л. с. и неприводимо между двумя точками $a \neq b$, является дугой ab.*

Замечание. Теорема 6 вместе с теоремой 2 из § 49, VI дают теорему 6 из § 48, VII.

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — континуум, неприводимый между двумя точками, и пусть N — множество точек, в которых $\mathscr{X}$ не является л. с. Пространство $\mathscr{Y}$ разбиения пространства $\mathscr{X}$ на компоненты множества $\overline{N}$ и точки множества $\mathscr{X} - \overline{N}$ является дугой (при условии что $\overline{N} \neq \mathscr{X}$)* [1]).

Доказательство. Действительно, $\mathscr{Y}$ — континуум, неприводимый между двумя точками (по теореме 3 из § 48, I) и л. с. (согласно теореме 3 из § 49, VI).

Теорема 8. *Замкнутое множество разделяет полное л. с. пространство между двумя точками тогда и только тогда, когда оно разрезает это пространство между этими точками,*

[1]) Теорема Мура [7].

Другими словами, *если полное л. с. пространство связно между двумя точками, то оно содержит континуум, соединяющий их.*

Доказательство. Так как пространство связно между a и b, то существует область R, содержащая эти точки (а именно, компонента точек a и b; ср. § 49, II, теорема 17). Поскольку область R локально связна и топологически полна, она содержит континуум, соединяющий точки a и b (по теореме 1).

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{X}$ — сепарабельное связное и л. с. пространство, которое локально компактно, но не компактно. Каждая точка $\mathcal{X}$ является вершиной замкнутого топологического луча (т. е. замкнутого множества, гомеоморфного полупрямой)* [1]).

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}^*$ обозначает пространство $\mathcal{X}$, к которому добавлена «бесконечно удаленная точка» ∞ (ср. § 41, X, теорема 5). Тогда $\mathcal{X}^*$ есть л. с. континуум (ибо все точки, за исключением ∞, являются точками локальной связности в пространстве $\mathcal{X}^*$, следовательно, такой является и точка ∞ по теореме 1 из § 49, VI). Если A — дуга $p\infty$ (существование которой следует из теоремы 1), то $A-(\infty)$ есть требуемый луч.

Сформулируем без доказательства следующую теорему (Мазуркевич [24]).

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{X}$ — одномерный локально связный континуум и $\varepsilon>0$ — данное число. Тогда существует такое непрерывное отображение f: $\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, что*

(i) *$f(x)$ гомеоморфно ломаной линии,*

(ii) *$\delta[f^{-1}(y)]<\varepsilon$ для любого y.*

Замечание 2. Не предполагая, что пространство метрическое, можно установить следующие теоремы (аналогичные теореме 2).

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{X}$ есть некоторый континуум. Пространство $\mathcal{X}$ локально связно тогда и только тогда, когда для каждого открытого покрытия существует конечное измельчение, состоящее из континуумов.*

Доказательство. 1. Условие необходимо. Пусть $\{G_t\}$ — открытое покрытие $\mathcal{X}$. Для каждого $p\in\mathcal{X}$ пусть $p\in G_{t(p)}$. Так как пространство $\mathcal{X}$ нормально (и, следовательно, регу-

---

[1]) См. Куратовский [3].

лярно; см. § 41, II, теорема 3), то существует открытое множество H_p, такое, что

(8) $$p \in H_p \quad \text{и} \quad \overline{H}_p \subset G_{t(p)}.$$

Пространство $\mathscr{X}$ предполагается локально связным, поэтому (согласно теореме 4 из § 49, II) компоненты множества H_p открыты. Следовательно, семейство всех компонент всех множеств H_p является открытым покрытием пространства $\mathscr{X}$. Так как пространство $\mathscr{X}$ компактно, это покрытие содержит конечное подпокрытие $S_1, \ldots, S_n$. Положим $C_i = \overline{S}_i$. Тогда

(9) $$\mathscr{X} = C_1 \cup \ldots \cup C_n,$$

а так как S_i связно, то C_i — континуум. Наконец, для каждого i существует такое t, что $C_i \subset G_t$; именно, мы полагаем $t = t(p)$, где S_i — компонента H_p.

2. Условие достаточно. Пусть G открыто и $p \in G$. Нам нужно определить связное множество E, такое, что

(10) $$p \in \operatorname{Int}(E) \quad \text{и} \quad E \subset G.$$

Рассмотрим покрытие, состоящее из двух элементов: G и $H = \mathscr{X} - (p)$ (H открыто, так как $\mathscr{X}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство и потому $\mathcal{T}_1$-пространство). По предположению формула (9) имеет место и каждое C_i — подконтинуум либо множества G, либо множества H.

Пусть $C_{k_1}, C_{k_2}, \ldots, C_{k_r}$ — те континуумы, которые содержат точку p, а $C_{m_1}, \ldots, C_{m_s}$ — те, которые ее не содержат. Положим

$$E = C_{k_1} \cup \ldots \cup C_{k_r}.$$

Тогда $\mathscr{X} - E \subset C_{m_1} \cup \ldots \cup C_{m_s}$ и $\overline{\mathscr{X} - E} \subset C_{m_1} \cup \ldots \cup C_{m_s}$. Таким образом, $p \in \mathscr{X} - \overline{\mathscr{X} - E}$, т. е. $p \in \operatorname{Int}(E)$. Включение (10) также справедливо, ибо $p \in C_{k_i}$, откуда $C_{k_i} \not\subset H$ и, следовательно, $C_{k_i} \subset G$ для $i = 1, \ldots, r$.

Теорема 12. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два $\mathcal{T}_2$-пространства. Пусть отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно и на. Если $\mathscr{X}$ — локально связный континуум, то таковым является и $\mathscr{Y}$.*

Доказательство. Пусть $\{H_t\}$ — открытое покрытие $\mathscr{Y}$. Согласно теореме 11, мы должны определить конечное измельчение, состоящее из континуумов.

Далее, так как $\{f^{-1}(H_t)\}$ — открытое покрытие локально связного континуума $\mathscr{X}$, то существуют континуумы $C_1, \ldots, C_n$, такие, что формула (9) имеет место и $C_i \subset f^{-1}(H_i)$. Следовательно,

$$\mathcal{Y} = f(C_1) \cup \ldots \cup f(C_n) \quad \text{и} \quad f(C_i) \subset ff^{-1}(H_i) \subset H_i.$$

Это завершает доказательство.

Замечание 3. Условие (ii) (Серпинского), которое характеризует локально связные метрические континуумы, легко получается из теоремы 11.

III. Области и подконтинуумы локально связного континуума $\mathcal{X}$. Пусть F — замкнутое множество и G — его дополнение.

Теорема 1. *Существует последовательность замкнутых л. с. множеств F_1, F_2, ..., такая, что*

(i) $F = F_1 \cap F_2 \cap \ldots$;

(ii) $F_n \supset F_{n+1}$;

(iii) *всякая компонента множества F_n содержит компоненту множества F;*

(iv) *никакая компонента G не содержит двух различных компонент множества $\mathcal{X} - F_n$;*

(v) *множество $\mathcal{X} - F_n$ имеет конечное число компонент.*

В частности, *если F — континуум, то и F_n — континуум; если F не разделяет пространство, то F_n также его не разделяет.*

Более того, *число компонент множества F_n не превосходит числа компонент множества F, а число компонент множества $\mathcal{X} - F_n$ не превосходит числа компонент множества G.*

Доказательство. Сначала определим последовательность замкнутых л. с. множеств F_1^*, F_2^*, ..., удовлетворяющую условиям (i)—(iii).

Воспользуемся индукцией. Положим $F_1^* = \mathcal{X}$. Предположим, что F_n^* замкнуто и л. с. и что $F \subset F_n^*$. Определим F_{n+1}^*.

Согласно теореме 3 п. II, для каждого n существует система л. с. континуумов K_1^n, ..., $K_{m_n}^n$, таких, что

$$F_n^* = K_1^n \cup \ldots \cup K_{m_n}^n \quad \text{и} \quad \delta(K_i^n) < \frac{1}{n}.$$

Пусть F_{n+1}^* — объединение всех таких множеств K_i^n, что $F \cap K_i^n \neq 0$. Тогда

$$F \subset F_{n+1}^* \subset F_n^* \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(F, F_{n+1}^*) < 1/n,$$

откуда следуют условия (i) и (ii).

Кроме того, F^*_{n+1} локально связно, как объединение л. с. континуумов (ср. § 49, II, теорема 1).

Наконец, выполняется условие (iii), так как каждая компонента множества F^*_{n+1} пересекается с множеством F, ибо она является объединением некоторых множеств K^n_i, пересекающихся с F.

Итак, последовательность $\{F^*_n\}$ определена. Переходим к определению последовательности $\{F_n\}$.

Пусть $Q_1, Q_2, \ldots$ — (конечная или бесконечная) последовательность компонент множества G. По теореме 14 из § 49, II существует двойная последовательность областей $\{R^i_k\}$, такая, что

$$Q_i = R^i_1 \cup R^i_2 \cup \ldots, \tag{1}$$

$$\overline{R^i_k} \subset R^i_{k+1}. \tag{2}$$

Расположим эту последовательность $\{R^i_k\}$ в простую последовательность $R_1, R_2, \ldots$. Тогда

$$G = R_1 \cup R_2 \cup \ldots, \tag{3}$$

$$\overline{R}_k \subset G. \tag{4}$$

Для фиксированного n рассмотрим все области R_k с индексами $k \leqslant n$, не пересекающиеся с F^*_n. Пусть S_n — объединение компонент множества $\mathcal{X} - F^*_n$, содержащих эти области. Положим $F_n = \mathcal{X} - S_n$. Тогда $S_n \subset \mathcal{X} - F^*_n$, откуда $F^*_n \subset \mathcal{X} - S_n = F_n$, а так как $F = F^*_1 \cap F^*_2 \cap \ldots$, то

$$F \subset F_1 \cap F_2 \cap \ldots .$$

Условие (i) эквивалентно равенству $G = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ и, следовательно, равенству

$$R_1 \cup R_2 \cup \ldots = S_1 \cup S_2 \cup \ldots$$

(согласно (3)); поэтому наша задача состоит теперь в том, чтобы показать, что для данного целого числа k существует целое число $n \geqslant k$, такое, что $R_k \cap F^*_n = 0$.

Но $\mathcal{X} - \overline{R}_k$ — окрестность множества $F = \operatorname{Lim} F^*_n$ (согласно (4)), поэтому для достаточно большого n мы имеем $F^*_n \subset \mathcal{X} - \overline{R}_k$, откуда $R_k \cap F^*_n = 0$.

Так как $F^*_n \supset F^*_{n+1}$, то $S_n \subset S_{n+1}$, откуда следует (ii).

Поскольку F^*_n локально связно, то, согласно теореме 11 из § 49, II, множество $F_n = \mathcal{X} - S_n$ также л. с. По теореме 12 из § 49, II каждая компонента множества F_n содержит компоненту множества F_n^*, а потому она содержит компоненту множества F (так как F_n^* удовлетворяет условию (iii)).

Предположим, что условие (iv) не выполнено; это означает, что существуют две (различные) компоненты U и V множества S_n, содержащиеся в одной компоненте Q_i множества G. Согласно определению множества S_n, U и V — две компоненты множества $\mathscr{X} - F_n^*$, содержащие два различных члена последовательности R_1^i, R_2^i, ... Но это противоречит включению (2).

Наконец, условие (v) выполняется, так как число компонент множества S_n не превосходит n.

Теорема 2. *Существует такая последовательность замкнутых л. с. множеств H_1, H_2, ..., что*

(i) $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots$;

(ii) $H_n \subset \operatorname{Int}(H_{n+1})$;

(iii) *никакая компонента множества G не содержит двух различных компонент множества H_n;*

(iv) *каждая компонента множества $\mathscr{X} - H_n$ содержит компоненту множества F, а потому*

(v) *множество $\mathscr{X} - H_n$ имеет конечное число компонент.*

В частности, *если G — область, то H_n — континуум; если F — континуум, то $\mathscr{X} - H_n$ — область*[1]).

Более того, *число компонент множества H_n не превосходит числа компонент множества G, а число компонент множества $\mathscr{X} - H_n$ не превосходит числа компонент множества F.*

Доказательство. Пусть $\{Q_i\}$, $\{R_k^i\}$ и $\{R_k\}$ — последовательности, рассмотренные в предыдущем доказательстве. Положим

$$(5) \qquad U_k = R_1 \cup \ldots \cup R_k, \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

По теореме 1 существует замкнутое л. с. множество A_k, такое, что

$$(6) \qquad \overline{U}_k \subset A_k \subset G, \quad \text{где} \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

а каждая компонента множества A_k содержит компоненту множества U_k.

Пусть H_k обозначает объединение множества A_k и всех компонент множества $\mathscr{X} - A_k$, содержащихся в G.

По теореме 11 из § 49, II множество H_k замкнуто и л. с.

[1]) Частный случай и некоторые родственные утверждения см. Кинкейд [1].

Условие (i) является прямым следствием соотношений (3), (5) и (6). Кроме того, поскольку

(7) $\quad G = U_1 \cup U_2 \cup \ldots, \quad U_k \subset U_{k+1} \quad$ и $\quad U_k \subset H_k,$

условие (i) удовлетворяется, если последовательность $\{H_k\}$ заменить любой подпоследовательностью $\{H_{m_k}\}$, где $m_1 < m_2 < \ldots$.

Чтобы выполнялось условие (ii), заменим последовательность $\{H_k\}$ подпоследовательностью $\{H_{m_k}\}$, определяемой по индукции следующим образом:

1) $m_1 = 1$, 2) m_{k+1} — наименьший индекс r, такой, что $H_{m_k} \subset U_r$ (существование такого индекса r следует из (7) и из того факта, что H_{m_k} — компактное подмножество G).

Согласно (2), никакая компонента Q_l множества G не содержит двух различных компонент множества U_k, а потому и множеств A_k и H_k (так как каждая компонента множества H_k содержит компоненту множества A_k, согласно теореме 12 § 49, II).

Так как каждая компонента C множества $\mathcal{X} - H_k$ является компонентой множества $\mathcal{X} - A_k$, не содержащейся в G, то отсюда вытекает, что $C - G \neq 0$, т. е. $C \cap F \neq 0$. Следовательно, существует компонента K множества F, такая, что $C \cap K \neq 0$. Из этого неравенства в сочетании с включением $K \subset \mathcal{X} - H_k$ (которое следует из включений $H_k \subset G$ и $K \subset F$) вытекает, что $K \subset C$, так как C — компонента множества $\mathcal{X} - H_k$, а K — подконтинуум.

Лемма 3. *Пусть R — область и S — система $n+1$ непересекающихся континуумов, лежащих в R. Пусть $C_0 \in S$. Если элементы системы S перенумеровать соответствующим образом, то можно найти n областей $R_1, \ldots, R_n$, таких, что для $k = 1, \ldots, n$ выполняются следующие условия*:

(8) $\quad \overline{R}_k \subset R_{k-1} - C_k, \quad C_0 \cup C_{k+1} \cup C_{k+2} \cup \ldots \cup C_n \subset R_k$

$$(\textit{где} \quad R_0 = R).$$

Согласно теореме 6 § 46, III, существует континуум $C_1 \in S - (C_0)$, такой, что все элементы множества $S - (C_1)$ расположены в одной компоненте Q множества $R - C_1$. Поэтому они содержатся в области R_1, такой, что $\overline{R}_1 \subset Q$ (ср. § 49, II, теорема 15).

Аналогично, существуют элемент C_2 системы $S - (C_0, C_1)$ и область R_2, такие, что все элементы системы $S - (C_1, C_2)$ содержатся в R_2 и $\overline{R}_2 \subset R_1 - C_2$.

Продолжая шаг за шагом таким образом, мы получим требуемую нумерацию элементов системы S.

Теорема 4. *Пусть F — замкнутое множество, состоящее из бесконечной последовательности компонент, каждая из которых, за исключением одной, скажем C_0, открыта в F.*

Если эти компоненты упорядочить подходящим образом в виде бесконечной последовательности $C_0, C_1, C_2, \ldots$, то можно найти последовательность открытых множеств $G_1, G_2, \ldots$, такую, что G_n состоит из $n+1$ компонент:

$$G_n = R_{n,0} \cup \ldots \cup R_{n,n}, \tag{9}$$

и при этом

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \tag{10}$$

$$\bar{G}_{n+1} \subset G_n, \tag{11}$$

$$C_j \subset R_{n,j} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{12}$$

$$C_0 \cup C_{n+1} \cup C_{n+2} \cup \ldots \subset R_{n,0}. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим сначала, что существует последовательность континуумов $K_1, K_2, \ldots$, такая, что

$$C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \tag{14}$$

$$K_{n+1} \subset K_n \tag{15}$$

и для каждого n все компоненты множества F, за исключением конечного числа, содержатся в K_n.

Если $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность замкнутых л. с. множеств, удовлетворяющих условиям (i) и (ii) теоремы 1, то пусть K_n — компонента F_n, содержащая C_0. Пересечение $K_1 \cap K_2 \cap \ldots$ совпадает с C_0 как подконтинуум множества F. Кроме того, так как число компонент множества F_n конечно (согласно теореме 7 из § 49, II), то K_n содержит все компоненты множества F, за исключением конечного числа.

Пусть S_n — система, элементами которой являются континуум K_n и все компоненты множества F, не пересекающиеся с K_n. Из условий (14) и (15) легко следует, что все компоненты множества F, отличные от C_0, являются элементами объединения $S_1 \cup S_2 \cup \ldots$.

Пусть $l_n + 1$ — число элементов в S_n. Можно считать, что $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$. Согласно лемме 3, элементы из $S_n - S_{n-1}$, отличные от K_n, можно снабдить индексами $k = l_{n-1} + 1, \ldots, l_n$ и найти такую систему $l_n - l_{n-1}$ областей R_k, что

$$\bar{R}_k \subset R_{k-1} - C_k, \quad R_0 = \mathscr{X}, \tag{16}$$

$$K_n \cup C_{k+1} \cup C_{k+2} \cup \ldots \cup C_{l_n} \subset R_k. \tag{17}$$

Так, например,

$$C_1 \cap \overline{R}_1 = 0, \quad K_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_{l_1} \subset R_1, \quad K_1 \subset R_{l_1},$$
$$\overline{R}_{l_1} \subset R_{l_1 - 1} - C_{l_1}.$$

Можно также считать, что область R_{l_n} содержится в шаре Z_n с центром K_n радиуса $1/n$; это означает, что

$$(18) \qquad \rho(x, K_n) < 1/n \quad \text{для} \quad x \in R_{l_n}.$$

Действительно, R_{l_n} можно заменить, если необходимо, компонентой множества $Z_n \cap R_{l_n}$, содержащей K_n.

Далее, определим области $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$, где $n = 0, 1, \ldots$. Пусть n фиксировано. Положим $R_{n,0} = R_n$. Предполагая, что $C_j \subset R_{n-1,j}$, где $1 \leqslant j \leqslant n-1$, обозначим через $R_{n,j}$ область, для которой

$$(19) \qquad C_j \subset R_{n,j},$$

$$(20) \qquad \overline{R}_{n,j} \subset R_{n-1,j},$$

$$(21) \qquad \rho(x, C_j) < 1/n \quad \text{для} \quad x \in R_{n,j}.$$

Кроме того, пусть (ср. (16))

$$(22) \qquad C_n \subset R_{n,n},$$

$$(23) \qquad \overline{R}_{n,n} \subset R_{n-1} - \overline{R}_n.$$

Определим G_n соотношением (9). Тогда области $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$ являются его компонентами; другими словами, они не пересекаются. В самом деле, для $0 < i < j \leqslant n$ мы имеем (ср. (20), (22) и (16))

$$R_{n,i} \subset R_{i,i} \subset R_{i-1} - R_i \subset R_{i-1} - R_{j-1}, \qquad \text{откуда} \qquad R_{n,i} \cap R_{n,j} = 0,$$

а, с другой стороны,

$$R_{n,0} \cap R_{n,j} \subset R_n - R_j = 0.$$

Условие (10) следует из соотношений

$$C_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_{n,0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n \quad \text{и} \quad C_j = \bigcap_{n=j}^{\infty} R_{n,j} \qquad (j > 0),$$

которые в свою очередь вытекают из (14), (18), (16) и (21).

Далее, включение (11) получается из следующих соотношений (ср. (20) и (8)):

$$\overline{R}_{n,j} \subset R_{n-1,j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1), \quad \overline{R}_{n,0} = \overline{R}_n \subset R_{n-1,0}, \quad \overline{R}_{n,n} \subset R_{n-1,0}.$$

Наконец, включения (12) и (13) следуют из (19), (22) и (8).

Теорема 5. *Если задана конечная система областей $R_1, \ldots, R_n$, такая, что $\mathscr{X} = R_1 \cup \ldots \cup R_n$, то существует система л. с. континуумов $C_1, \ldots, C_n$, такая, что*

(24) $$\mathscr{X} = C_1 \cup \ldots \cup C_n \quad и \quad C_i \subset R_i.$$

Доказательство. Согласно следствию из § 14, III, существует система замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_n$, такая, что

$$\mathscr{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_n \quad \text{и} \quad F_i \subset R_i.$$

По теореме 15 § 49, II из последнего включения вытекает существование такого континуума C_i, что $F_i \subset C_i \subset R_i$. Согласно теореме 1, можно считать, что C_i — л. с. континуум, откуда следует (24).

Теорема 6. *Если л. с. континуум $\mathscr{X}$ не является уникогерентным, то он представляет собой объединение двух л. с. континуумов, пересечение которых несвязно.*

Доказательство. По предположению существуют два континуума K и L, таких, что $\mathscr{X} = K \cup L$ и пересечение $K \cap L$ несвязно. В соответствии с теоремой 1 пусть $K_1, K_2, \ldots$ и $L_1, L_2, \ldots$ — две последовательности л. с. континуумов, таких, что

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n, \quad L = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_n, \quad K_{n+1} \subset K_n \quad \text{и} \quad L_{n+1} \subset L_n.$$

Отсюда следует, что

$$\mathscr{X} = K_n \cup L_n \quad \text{и} \quad K \cap L = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap L_n).$$

При достаточно большом значении n множество $K_n \cap L_n$ несвязно, ибо в противном случае $K \cap L$ было бы связным (согласно теореме 5 из § 47, II).

Теорема 7. *Если R — подобласть пространства $\mathscr{X}$, то*

(i) *множество всех точек* $\mathrm{Fr}(R)$, *достижимых из R, всюду плотно в* $\mathrm{Fr}(R)$;

(ii) *если $p \in \mathrm{Fr}(R)$ и $R \cup p$ локально связно, то точка p достижима из R;*

(iii) *всякая точка p, достижимая из R, достижима при помощи л. д. с. континуума и, следовательно, при помощи дуги, т. е. существует такая дуга L, что $p \in L \subset R \cup p$.*

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{Fr}(R)$ и ε — положительное число. Так как $\mathscr{X}$ локально связно, существует дуга qp, такая, что $q \in R$ и $\delta(qp) < \varepsilon$. Поэтому если r — первая точка границы $\mathrm{Fr}(R)$ на qp, то r — достижимая точка и $|p-r|<\varepsilon$; отсюда вытекает утверждение (i).

(ii) следует из теоремы 1 п. II на том основании, что $R \cup p$ есть G_δ-множество и потому топологически полно (ср. § 33, VI).

Наконец, пусть C — такой континуум, что

$$p \in C \subset R \cup p \quad \text{и} \quad C \cap R \neq 0.$$

Положим

$$A_n = C \cap \underset{x}{\mathrm{E}}\,[1/n \leqslant |x-p| \leqslant 1/(n-1)]; \tag{25}$$

тогда

$$C - p = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{26}$$

Таким образом, $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} A_n = p$. По теореме 1 существует такое замкнутое л. с. множество F_n, что

$$A_n \subset F_n \subset R, \tag{27}$$

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} F_n = p \tag{28}$$

и все компоненты множества F_n (число которых конечно; ср. § 49, II, теорема 7) имеют точки, общие с A_n. Согласно (26)—(28), множество $C^* = p \cup F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ есть континуум. Согласно (27), никакая точка не принадлежит бесконечному числу множеств F_n, следовательно, континуум C^* л. с. в каждой точке объединения $F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, а потому в каждой своей точке (так как p не может быть единственной точкой, в которой C^* не является л. с.; ср. § 49, VI, теорема 1).

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

(iv) *если* $\dim \mathrm{Fr}(R) = 0$ *и* $p \in \mathrm{Fr}(R)$, *то* $R \cup p$ *л. с.* (Уайберн [11, стр. 315]).

Теорема 8. *Пусть G — открытое подмножество л. с. континуума, и пусть $R_1, R_2, \ldots$ — последовательность его компонент. Если* $\lim_{n\to\infty} \delta(R_n) = 0$, *то*

$$d_1(G) = \max_n \delta(R_n);$$

другими словами (ср. § 45, IV), *существует конечная система открытых множеств $H_1, \ldots, H_m$, такая, что*

$$G = H_1 \cup \ldots \cup H_m, \quad H_i \cap H_j = 0 \ \text{для}\ i \neq j \ \text{и}\ \delta(H_i) \leqslant \max_n \delta(R_n).$$

Доказательство. Положим $\mu = \max \delta(R_n)$. Пусть k — такой индекс, что $\delta(R_n) < \mu/3$ для $n > k$. Так как множество G

вполне ограничено, пусть $A_1, \ldots, A_r$ — такая система множеств, что

$$G = A_1 \cup \ldots \cup A_r \quad \text{и} \quad \delta(A_i) < \mu/3 \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, r.$$

Положим $m = k + r$, $H_i = R_i$ для $i \leqslant k$, и пусть H_{k+j} — объединение множеств R_n, таких, что $n > k$ и

$$R_n \cap A_j \neq 0 = R_n \cap A_s \quad \text{для} \quad s < j \quad (1 \leqslant j \leqslant r).$$

IV. Наследственно локально связные (н. л. с.) континуумы[1]). Так называется всякий л. с. континуум, каждый подконтинуум которого также л. с.

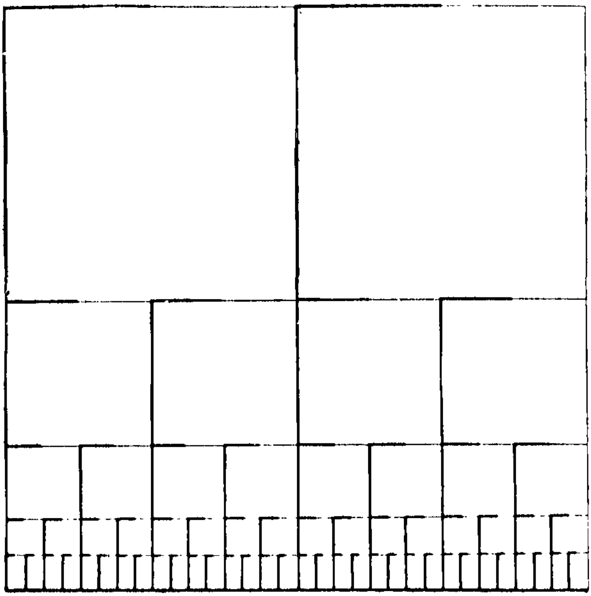

Рис. 7

Примером множества такого вида является дуга, а также континуум из § 49, VI (замечание). Однако квадрат $\mathcal{J}^2$ — л. с., но не н. л. с. континуум. То же самое относится к следующему континууму, являющемуся объединением двух н. л. с. континуумов (рис. 7).

Пусть C — континуум, состоящий из сегмента $(0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0)$, вертикальных сегментов $(x = m/2^{n+1},\ 0 \leqslant y \leqslant 1/2^n)$, где

[1]) Ср. Уайберн [14].

$0 \leqslant m \leqslant 2^{n+1}$, и горизонтальных сегментов ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 1/2^n$), где $n = 0, 1, \ldots$. Континуум C представляет собой объединение двух н. л. с. континуумов, симметричных относительно прямой $x = 1/2$; один из них отмечен на чертеже жирными линиями.

Из теоремы 2 § 49, VI вытекает (ср. также § 51, IV, теоремы 3 и 2) следующая

Теорема 1. *Всякий континуум, который не содержит никакого нигде не плотного подконтинуума (состоящего более чем из одной точки), является н. л. с.*

Теорема 2 [1]. *Континуум является н. л. с. тогда и только тогда, когда он не содержит никакого континуума сходимости (состоящего более чем из одной точки).*

Доказательство. Условие достаточно по теореме 1 из § 49, VI, поэтому докажем его необходимость, а именно если задана такая последовательность континуумов $K_1, K_2, \ldots$, что

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n = K, \quad K_i \cap K_j = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j, \quad K \cap K_n = 0, \quad p \in K \neq p,$$

то существует континуум, не являющийся л. с.

Итак, можно считать, что пространство л. с. Тогда существует континуум Q, такой, что $p \in \operatorname{Int}(Q)$ и $K - Q \neq 0$. Так как $p \in \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n$, то существует число n_0, такое, что $Q \cap K_n \neq 0$ для $n \geqslant n_0$. Континуум

$$C = K \cup Q \cup K_{n_0} \cup K_{n_0+1} \cup \ldots$$

не является л. с. ни в какой точке $q \in K - Q$, ибо в противном случае существовал бы континуум $L \subset C - Q$, содержащий точку q в своей внутренности относительно C, причем

$$L \cap (K_{n_0} \cup K_{n_0+1} \cup \ldots) \neq 0.$$

Но тогда равенство

$$L = (L \cap K) \cup (L \cap K_{n_0}) \cup (L \cap K_{n_0+1}) \cup \ldots$$

было бы разбиением континуума L на последовательность замкнутых попарно непересекающихся множеств, по крайней мере два из которых непусты, что противоречит теореме Серпинского (§ 47, III, теорема 6).

Теорема 3. *Если $R_1, R_2, \ldots$ — последовательность непересекающихся областей в н. л. с. континууме, то* $\lim_{n\to\infty} \delta(R_n) = 0$.

[1]) См. Заранкевич [1, стр. 134] и Урысон [6, стр. 49].

Доказательство. Действительно, в противном случае существовали бы число $\varepsilon > 0$ и сходящаяся последовательность континуумов $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots$, такие, что $K_{i_n} \subset R_{i_n}$ и $\delta(K_{i_n}) > \varepsilon$. Но тогда предел $K = \operatorname{Lim}_{n \to \infty} K_{i_n}$ был бы континуумом сходимости, содержащим более одной точки, ибо $\delta(K) \geqslant \varepsilon$.

Замечание. Однако может существовать такая последовательность попарно непересекающихся континуумов $C_1, C_2, \ldots$, что $\lim_{n \to \infty} \delta(C_n) \neq 0$. Примером служит следующий континуум [1]).

Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность простых чисел, начинающаяся с 3; C — интервал 01 оси x в пространстве x, y, z; C_n — дуга, состоящая из полуокружностей, соединяющих последовательно точки

$$1/p_n,\ 2/p_n,\ \ldots,\ (p_n - 1)/p_n$$

и лежащих в плоскости $z = y/n$.

Континуум $C \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ является н. л. с., однако $\lim_{n \to \infty} \delta(C_n) = 1$.

Теорема 4. *Пусть G — открытое подмножество н. л. с. континуума и $R_1, R_2, \ldots$ — последовательность компонент G. Если $\delta(R_n) < \varepsilon$ для каждого n, то $d_1(G) < \varepsilon$, т. е. G допускает разбиение на конечное число непересекающихся открытых множеств диаметра $< \varepsilon$.*

Доказательство. Теорема 4 следует из теоремы 3 и теоремы 8 п. III.

Из теорем 3 и 4 легко выводится следующая

Теорема 5. *Всякий н. л. с. континуум обладает следующим свойством:*

(*) *если $G_1, G_2, \ldots$ — последовательность непересекающихся открытых множеств, то $\lim_{n \to \infty} d_1(G_n) = 0$, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такой индекс n_ε, что для $n > n_\varepsilon$ множество G_n допускает разбиение на конечное число непересекающихся открытых множеств диаметра $< \varepsilon$.*

Эту теорему можно сформулировать в более общем виде:

Теорема 5а. *Если A — подмножество н. л. с. континуума, то A, рассматриваемое как пространство, обладает свойством* (*).

Теорема 5а вытекает из следующего утверждения:

---

[1]) Ср. Урысон [6, стр. 46] и Уайберн [10, стр. 333].

Заметим, что на плоскости рассматриваемая особенность не появляется (ср. § 59, II, теорема 13).

Теорема 6. *Свойство (*) наследственно, т. е. если A — некоторое подмножество пространства, обладающего свойством (*), то это свойство сохраняется для A при условии, что в качестве «открытых» рассматриваются множества, открытые относительно A.*

Доказательство. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся множества, открытые в A; тогда существует последовательность $H_1, H_2, \ldots$ попарно непересекающихся множеств, открытых в пространстве, такая, что $G_n = A \cap H_n$ (ср. § 21, XI, теорема 2). По предположению для $n > n_\varepsilon$ существует разбиение $H_n = H_n^1 \cup \ldots \cup H_n^{m_n}$ на непересекающиеся открытые множества диаметра $<\varepsilon$. Равенство

$$G_n = (A \cap H_n^1) \cup \ldots \cup (A \cap H_n^{m_n})$$

дает разбиение множества G_n на открытые в A непересекающиеся множества диаметра $<\varepsilon$.

Лемма 7. *Пусть в сепарабельном пространстве, обладающем свойством (*), заданы замкнутое множество A и семейство открыто-замкнутых множеств $\{G_t\}$, такие, что $A \subset \bigcup_t G_t$. Тогда существуют бесконечная последовательность индексов $t_1, t_2, \ldots$ и бесконечная последовательность открыто-замкнутых множеств $H_1, H_2, \ldots$, такие, что*

$$H_n \subset G_{t_n}, \tag{1}$$

$$A \subset \bigcup_n H_n = \overline{\bigcup_n H_n}. \tag{2}$$

Доказательство. По теореме Линделёфа (§ 5, XI) существует такая последовательность $t_1, t_2, \ldots$, что

$$A \subset \bigcup_n G_{t_n}.$$

Положим

$$F_1 = G_{t_1} \quad \text{и} \quad F_n = G_{t_n} - (G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_{n-1}}) \quad \text{для } n > 1. \tag{3}$$

Таким образом, множества $F_1, F_2, \ldots$ открыто-замкнуты и не пересекаются, следовательно,

$$A \subset \bigcup_n F_n. \tag{4}$$

Так как $\lim_{n\to\infty} d_1(F_n) = 0$, то

$$F_n = F_{n1} \cup \ldots \cup F_{nl_n}, \quad \text{где} \quad \delta(F_{nl_n}) < \varepsilon_n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{5}$$

и множества $F_{n1}, \ldots, F_{nl_n}$ открыто-замкнуты и не пересекаются. Пусть H_n — объединение тех из них, которые имеют общие точки с A. Из соотношений (3) и (5) вытекает включение (1). Первая часть соотношения (2) вытекает из (3)—(5). Для доказательства второй части положим

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n, \text{ где } x_n \in H_{m_n} \text{ и } m_1<m_2< \ldots .$$

Следовательно, $x_n \in F_{m_n l_{m_n}}$, где $A \cap F_{m_n l_{m_n}} \neq 0$; пусть $y_n \in A \cap F_{m_n l_{m_n}}$. Таким образом, $|x_n - y_n| < \delta\left(F_{m_n l_{m_n}}\right) < \varepsilon_{m_n}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. Поэтому $x \in \overline{A} = A$, откуда следует, что $x \in \bigcup\limits_n H_n$, согласно включению (2).

Теорема 8. *Если сепарабельное пространство обладает свойством* (*), *то из связности этого пространства между двумя замкнутыми множествами A и B следует его связность между некоторой парой точек $a \in A$ и $b \in B$.*

Другими словами, *из свойства* (*) *вытекает свойство* (M) (рассмотренное в § 47, II, теорема 1).

Доказательство. Сначала покажем, что пространство, не связное между B и любой точкой $a \in A$, не связно между A и B. По предположению каждой точке $a \in A$ соответствует открыто-замкнутое множество $G(a)$, такое, что

$$a \in G(a) \quad \text{и} \quad B \cap G(a) = 0.$$

Из леммы вытекает существование открыто-замкнутого множества H, такого, что

$$A \subset H \subset \bigcup_{a \in A} G(a), \quad \text{откуда} \quad B \cap H = 0.$$

Таким образом, пространство не связно между множествами A и B. Итак, из связности между двумя замкнутыми множествами A и B вытекает связность между множеством B и некоторой точкой $a \in A$. Применяя эту импликацию к случаю, когда $A=(a)$, получаем, наконец, что пространство связно между точкой a и некоторой точкой $b \in B$.

Теорема 9. *Всякое подмножество E н. л. с. континуума* (*любое сепарабельное пространство, обладающее свойством* (*)) *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *если E связно между двумя множествами A и B, замкнутыми в E, то существует компонента C множества E, такая, что*

$$A \cap C \neq 0 \neq B \cap C;$$

(ii) *квазикомпоненты множества E связны, и потому совпадают с компонентами множества E;*

(iii) *если* $\dim_p E > 0$, *то p принадлежит связному множеству (состоящему более чем из одной точки), содержащемуся в E;*

(iv) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует только конечное число компонент множества E с диаметрами $> \varepsilon$;*

(v) [1] *если множество E связно, то оно локально связно.*

Доказательство. Утверждения (i), (ii) и (iii) имеют место в силу теоремы 8 или теорем 3, 2 и 9 из § 47, II соответственно.

Чтобы доказать (iv), рассмотрим, в соответствии с теоремой 3 из § 46, V, такое непрерывное отображение $f\colon E \to \mathscr{C}$, что множества $f^{-1}(y)$ совпадают с квазикомпонентами множества E $(y \in f(E))$.

Если E имеет бесконечно много компонент и, следовательно, согласно (ii), бесконечно много квазикомпонент диаметра $> \varepsilon$, то существует такое бесконечное множество $A \subset f(E)$, что $\delta\left[f^{-1}(y)\right] > \varepsilon$ для $y \in A$. Пусть H_1, H_2, ... — бесконечная последовательность непересекающихся множеств, открытых в $\mathscr{C}$ и таких, что $A \cap H_n \neq 0$. Тогда никакое множество $G_n = f^{-1}(H_n)$ не допускает разбиения на непересекающиеся открытые множества диаметра $< \varepsilon$ (ибо G_n содержит связное множество диаметра $> \varepsilon$). Но это противоречит свойству (*), так как множества G_1, G_2, ... не пересекаются и открыты.

Перейдем к доказательству (v). Будем считать, что E — пространство. Предположим, что пространство E не является л. с. в точке p; тогда существует замкнутая окрестность F точки p, такая, что p не является внутренней точкой своей компоненты в F. Следовательно, существует последовательность точек p_1, p_2, ..., сходящихся к p и принадлежащих различным компонентам Q_1, Q_2, ... множества F. Так как $p \in \operatorname{Int}(F)$, то, согласно теореме 6 и (iv), существует такой индекс n, что $Q_n \subset \operatorname{Int}(F)$, т. е. $Q_n \cap \operatorname{Fr}(F) = 0$. Согласно (ii), Q_n — квазикомпонента точки p_n в F. Поэтому F не связно между p_n и любой точкой $\operatorname{Fr}(F)$, а, следовательно, по теореме 8 между p_n и $\operatorname{Fr}(F)$. Другими словами, F содержит замкнутое множество H, такое, что $p_n \in H$, $H \cap \operatorname{Fr}(F) = 0$ и H открыто в F и, следовательно, в $\operatorname{Int}(F)$ (так как $H \subset \operatorname{Int}(F)$). Но в таком случае H открыто-замкнуто, что противоречит связности пространства.

Теорема 10. *Если всякое связное подмножество континуума $\mathscr{X}$ есть полуконтинуум, то любое подмножество E, связное между двумя точками a и b, содержит дугу ab.*

---

[1] Уилдер [4, стр. 616].

Доказательство. Согласно теореме 7 § 49, VI, $\mathscr{X}$ есть н. л. с. пространство. Так как E связно между двумя точками, то оно содержит связное множество (по теореме 9 (i)) и, следовательно, полуконтинуум S (по предположению), содержащий точки a и b. Таким образом, S содержит дугу ab, ибо всякий полуконтинуум в $\mathscr{X}$ дугообразно связен.

§ 51. Теория кривых. Порядок пространства в точке

I. Определения и примеры [1]**.** Если $\mathfrak{n}$ — кардинальное число $\leqslant \mathfrak{c}$ или порядковое число ω, то говорят, что пространство $\mathscr{X}$ имеет *порядок* $\leqslant \mathfrak{n}$ *в точке* p:

$$\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, такое, что [2])

$$(1) \qquad p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Положим

$$\mathscr{X}^{[\mathfrak{n}]} = \underset{p}{\mathsf{E}}\,(\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}).$$

Равенство $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} = \mathfrak{n}$ означает, что $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ и что соотношение $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{m}$ не имеет места ни при каком $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

Соотношение $\operatorname{ord} \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ означает, что $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$ для любой точки p.

Говорят, что пространство $\mathscr{X}$ имеет *порядок* $\leqslant \mathfrak{n}$ *между двумя множествами* A *и* B:

$$\operatorname{ord}_{A, B} \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n},$$

если существует открытое множество G, такое, что

$$(2) \qquad A \subset G, \quad \overline{G} \cap B = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{n};$$

другими словами, если существует замкнутое множество F мощности $\leqslant \mathfrak{n}$, разделяющее пространство $\mathscr{X}$ между множествами A и B.

[Ясно, что символу $\operatorname{ord}_{A, B} \mathscr{X}$ нельзя приписать никакого смысла, если множества A и B не отделимы; в этом случае $\operatorname{ord}_{A, B} \mathscr{X} > \mathfrak{n}$ для любого $\mathfrak{n}$, если считать, что знак $>$ есть отрицание знака $\leqslant$.]

---

[1]) Ср. Менгер [2], где можно найти много литературных ссылок. Основные определения и теоремы теории кривых содержатся в работах Менгера [3, 8] и Урысона [1, 5].

[2]) $\overline{\overline{X}}$ обозначает мощность множества X. Неравенство $\overline{\overline{X}} \leqslant \omega$ означает, что множество X конечное.

Точки порядка $\leqslant \aleph_0$ называются *рациональными*; точки порядка $\leqslant \omega$ называются *регулярными* (это те точки, для которых множество $\mathrm{Fr}(G)$ конечно). Точки порядка 1 называются *концевыми точками*. Очевидно, что точки p порядка 0 совпадают с теми точками, в которых $\dim_p \mathscr{X} = 0$.

Пространство, которое состоит только из регулярных (соответственно рациональных) точек, т. е.

$$\mathscr{X} = \mathscr{X}^{[\omega]} \quad (\text{соответственно } \mathscr{X} = \mathscr{X}^{[\aleph_0]}),$$

называется *регулярным в смысле теории порядка* (соответственно *рациональным*).

Всякий одномерный континуум называется *кривой*. Следовательно, рациональный континуум — кривая.

Примеры. 1. Точки 0 и 1 — концевые точки интервала $\mathscr{J} = 01$. Если $\mathscr{S}$ — окружность $x^2 + y^2 = 1$, то

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}^{[2]}, \quad \mathscr{S}^{[1]} = 0.$$

2. Пусть A_n — отрезок, определяемый в полярных координатах условиями

$$\alpha = \pi/n, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1/n,$$

и пусть $\mathscr{X} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ и $p = (0, 0)$; тогда

$$\mathrm{ord}_p \mathscr{X} = \omega.$$

3. В примере (iv) из § 49, I для каждой точки p сегмента 01 оси y имеет место равенство

$$\mathrm{ord}_p \mathscr{X} = \aleph_0.$$

4. Если $\mathscr{X}$ — континуум из § 46, II (замечание), то для любой точки p

$$\mathrm{ord}_p \mathscr{X} = \mathfrak{c}.$$

Это же соотношение имеет место, если $\mathscr{X}$ — произвольный *неразложимый континуум*.

5. *Универсальная кривая Серпинского является плоским нигде не плотным и локально связным континуумом, состоящим исключительно из точек порядка* $\mathfrak{c}$ (Серпинский [3]).

Эта кривая определяется так. Разобьем квадрат $\mathscr{J}^2$ на девять конгруэнтных квадратов и выбросим внутренность центрального квадрата. Аналогично разобьем каждый из оставшихся 8 квадратов и выбросим из них центральные квадраты. Продолжим этот процесс далее шаг за шагом. Невыброшенные точки образуют указанный выше континуум (рис. 8).

6. *Треугольная кривая Серпинского* определяется следующим образом (см. Серпинский [1] и [2]).

Пусть T — равносторонний треугольник. Разобьем его на 4 конгруэнтных треугольника. Пусть T_0, T_1, T_2 — те из них, которые имеют общую вершину с T. Аналогично разобьем

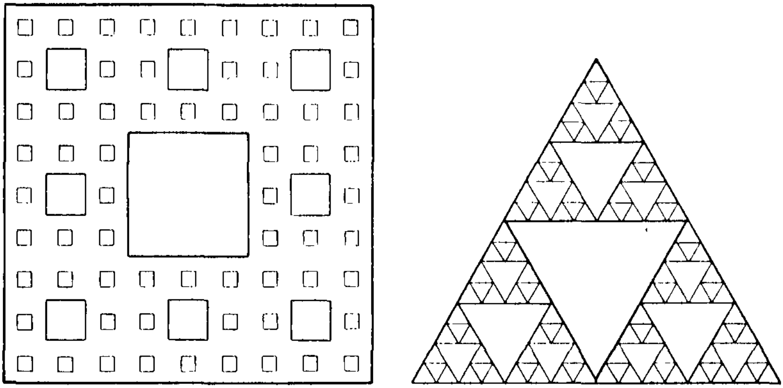

Рис. 8—9

каждый из треугольников T_0, T_1, T_2 на 4 конгруэнтных треугольника, и пусть T_{00}, T_{01}, T_{02}, T_{10}, ..., T_{22} — те из них, которые имеют общую вершину с одним из треугольников T_0, T_1, T_2. Будем продолжать таким образом шаг за шагом.

Положим

$$B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \operatorname{Fr}(T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}) \quad \text{и} \quad \mathscr{X} = \overline{\bigcup B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}},$$

где индексы α_i принимают значения 0, 1 и 2, а $k = 0, 1, \ldots$.

Континуум $\mathscr{X}$ имеет три точки порядка 2 (вершины треугольника T), счетное множество точек порядка 4 (вершины других треугольников), а все остальные точки имеют порядок 3.

Легко построить континуум, состоящий исключительно из точек порядка 3 и 4. Для этого достаточно к $\mathscr{X}$ добавить топологически эквивалентный континуум, имеющий общими точками с $\mathscr{X}$ только вершины треугольника T.

7. *Существуют связные и вполне несовершенные регулярные пространства* (Кнастер и Куратовский [6]).

Доказательство. Разобьем плоскость на два вполне несовершенных непересекающихся множества A и B. Пусть $\mathscr{X}$ — континуум из примера 6, и пусть S — множество вершин треугольников $T_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$; можно доказать, что множество $(A \cap \mathscr{X}) \cup S$ обладает указанными свойствами.

8. *Объединение n дуг $pa_1, \ldots, pa_n$, которые попарно не пересекаются, за исключением точки p, имеет порядок n в точке p.*

Обратно, имеет место следующая замечательная теорема [1]: *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связный континуум. Если $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant n$, то существуют n дуг $pa_1, \ldots, pa_n$, которые попарно не пересекаются, за исключением точки p.*

II. Общие свойства.

Теорема 1. *Точка p принадлежит множеству $(E \cup p)^{[n]}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям*

$$(1) \qquad p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\overline{E \cap \operatorname{Fr}(G)}} \leqslant n.$$

Необходимым и достаточным условием того, что $\operatorname{ord}_{A,B} E \leqslant n$, где $A, B \subset E$, является существование открытого множества G, такого, что

$$(2) \qquad A \subset G, \quad \overline{G} \cap B = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{E \cap \operatorname{Fr}(G)}} \leqslant n.$$

Доказательство. Если $p \in (E \cup p)^{[n]}$, то существует множество H, открытое в $E \cup p$ и такое, что

$$(3) \qquad p \in H, \quad \delta(H) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\overline{(E \cup p) \cap \overline{H} - H}} \leqslant n.$$

Так как множества H и $E - \overline{H}$ отделимы, то (согласно теореме 1 из § 14, V) существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям

$$H \subset G, \quad \overline{G} \cap E - \overline{H} = 0 \quad \text{и} \quad \delta(G) < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$E \cap \overline{G} - G \subset E \cap \overline{H} - H, \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{E \cap \operatorname{Fr}(G)}} \leqslant \overline{\overline{E \cap \overline{H} - H}} \leqslant n.$$

Обратно, если открытое множество G удовлетворяет условиям (1), то множество $H = E \cap G \cup p$ открыто в $E \cup p$ и удовлетворяет условиям (3), ибо

$$\begin{aligned}(E \cup p) \cap \overline{H} - H &= (E \cup p) \cap (\overline{E \cap G} \cup p) - (E \cap G \cup p) = \\ &= (E \cap \overline{E \cap G} \cup p) - (E \cap G \cup p) = \\ &= E \cap \overline{E \cap G} - (E \cap G) - p \subset E \cap \overline{G} - G.\end{aligned}$$

Следовательно, $p \in (E \cup p)^{[n]}$.

[1] Теорема Менгера («n-Beinsatz»), см. Менгер [6, стр. 98]. Доказательство см. Менгер [2, гл. VI, 1] и Уайберн [23]. Доказательство для $n = 2$ будет дано в § 52, II, теорема 15.

Рассмотрим вторую часть теоремы. Пусть $\operatorname{ord}_{A,B} E \leqslant n$ и H — множество, открытое в E и такое, что

(4) $$A \subset H, \quad \overline{H} \cap B = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{E \cap \overline{H} - H}} \leqslant n.$$

Если G — открытое множество, такое, что

$$H \subset G \quad \text{и} \quad \overline{G} \cap E - \overline{H} = 0,$$

то условия (2) удовлетворяются.

Обратно, если условия (2) выполняются и если $H = E \cap G$, то выполняются и условия (4), откуда $\operatorname{ord}_{A,B} E \leqslant n$.

Теорема 2. *Множество* $\mathscr{X}^{[n]}$ *и вообще множество*

$$\mathop{\mathsf{E}}_{p}\left[p \in (E \cup p)^{[n]}\right]$$

есть $\boldsymbol{G}_\delta$*-множество.*

Доказательство. Это множество равно $G_1 \cap G_2 \cap \ldots$, где G_k состоит из точек p, для которых существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям (1) с $\varepsilon = 1/k$.

Теорема 3. $E \cap \mathscr{X}^{[n]} \subset E^{[n]}$, *т. е. если* $p \in E$, *то*

$$\operatorname{ord}_p E \leqslant \operatorname{ord}_p \mathscr{X}.$$

Теорема 4. *Если множество* G *открыто, то* $G \cap \mathscr{X}^{[n]} = G \cap G^{[n]}$, *т. е.*

$$\operatorname{ord}_p G = \operatorname{ord}_p \mathscr{X} \quad \textit{для} \quad p \in G.$$

Доказательства теорем 3 и 4 очевидны.

Теорема 5. *Если* $\mathscr{X} = \mathscr{X}^{[n]}$, *то существует база, состоящая из открытых множеств* $R_1, R_2, \ldots$, *таких, что* $\overline{\overline{\operatorname{Fr}(R_i)}} \leqslant n$.

Доказательство. Поставим в соответствие каждой точке p и каждому положительному целому k открытое множество $G_k(p)$, удовлетворяющее условиям I (1) для $\varepsilon = 1/k$. По теореме Линделёфа (§ 5, XI) для каждого k существует последовательность $G_k(p_1), G_k(p_2), \ldots$, такая, что $\mathscr{X} = G_k(p_1) \cup G_k(p_2) \cup \ldots$. Если двойную последовательность $\{G_k(p_l)\}$, где $k = 1, 2, \ldots$ и $l = 1, 2, \ldots$, упорядочить в простую последовательность, то получится требуемая база $R_1, R_2, \ldots$.

Теорема 6. *Для того чтобы* $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое множество* F, *такое, что* $p \in \mathscr{X} - F$, *удовлетворяло условию* $\operatorname{ord}_{p,F} \mathscr{X} \leqslant n$.

Доказательство. Так как это условие, очевидно, необходимо, остается показать, что оно достаточно.

Пусть $\varepsilon > 0$; положим $F = \mathop{\mathrm{E}}_x [\,|x-p| \geqslant \varepsilon]$. По предположению существует открытое множество G, такое, что $p \in G$, $\overline{\overline{\mathrm{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{n}$ и $\overline{G} \cap F = 0$; отсюда $\delta(G) \leqslant \varepsilon$ и, следовательно, $\mathrm{ord}_p \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{n}$.

III. Порядок $\aleph_0$ и $\mathfrak{c}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{n} = \aleph_0$ *или* $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$. *Если* $\mathscr{X}$ — *компактное пространство порядка* $\mathfrak{n}$ *между двумя замкнутыми множествами* A *и* B, *то* $\mathscr{X}$ *имеет порядок* $\mathfrak{n}$ *между двумя точками* $a \in A$ *и* $b \in B$.

Более общо, *если подмножество* E *компактного пространства имеет порядок* $\mathfrak{n}$ *между множествами* A *и* B (*где* $A \cup B \subset E$), *то существует пара точек* a *и* b, *таких, что*

$$(1) \qquad a \in \overline{A}, \quad b \in \overline{B} \quad \text{и} \quad \mathrm{ord}_{a,b}(E \cup a \cup b) \geqslant \mathfrak{n}.$$

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично теореме 1 из § 47, II[1]).

Пусть $\boldsymbol{G}$ — семейство всех открытых множеств G, таких, что $\overline{\overline{E \cap \mathrm{Fr}(G)}} < \mathfrak{n}$. Предположим, что для всех точек $a \in \overline{A}$ и $b \in \overline{B}$ условие (1) не имеет места, т. е. (ср. с теоремой 1 п. II) что существует открытое множество G, для которого

$$a \in G, \quad b \notin \overline{G} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{(E \cup a \cup b) \cap \mathrm{Fr}(G)}} < \mathfrak{n}, \quad \text{откуда} \quad G \in \boldsymbol{G}.$$

Таким образом, согласно лемме из § 37, II, существует множество

$$H = \left(G_1^1 \cap \ldots \cap G_{i_1}^1\right) \cup \ldots \cup \left(G_1^k \cap \ldots \cap G_{i_k}^k\right), \quad \text{где} \quad G_j^i \in \boldsymbol{G},$$

такое, что $\overline{A} \subset H$ и $\overline{B} \cap \overline{H} = 0$. Так как (ср. § 6, II (8))

$$\mathrm{Fr}(H) \subset \bigcup_{i,j} \mathrm{Fr}\left(G_j^i\right), \quad \text{откуда} \quad \overline{\overline{E \cap \mathrm{Fr}(H)}} < \mathfrak{n},$$

то $\mathrm{ord}_{A,B} E < \mathfrak{n}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{n} = \aleph_0$ *или* $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$. *Если пространство* $\mathscr{X}$ *компактно и* $\mathrm{ord}_p \mathscr{X} = \mathfrak{n}$, *то существует точка* q, *такая, что* $\mathrm{ord}_{p,q} \mathscr{X} = \mathfrak{n}$.

Более общо, *если* E — *подмножество компактного пространства* $\mathscr{X}$, *то каждой точке* p *порядка* $\mathfrak{n}$ *в* E *соответствует точка* q, *такая, что* $\mathrm{ord}_{p,q}(E \cup q) = \mathfrak{n}$.

---

[1]) По поводу аналогий между теорией размерности и теорией порядка следует упомянуть, что многие теоремы обеих теорий можно получить из теории семейств, определяющих размерность (ср. § 27, VII).

Доказательство. С одной стороны, для любых $q \neq p$ имеет место неравенство $\operatorname{ord}_{p,q}(E \cup q) \leqslant \operatorname{ord}_p E$, а с другой стороны, если в теореме 1 множество B заменить замкнутым множеством E, таким, что $p \in E - B$ и $\operatorname{ord}_p E \leqslant \operatorname{ord}_{p,B} E$ (ср. II, теорема 6), то существует точка $q \in \bar{B}$, такая, что

$$\operatorname{ord}_{p,B} E \leqslant \operatorname{ord}_{p,q}(E \cup q), \quad \text{откуда} \quad \operatorname{ord}_{p,q}(E \cup q) = \mathfrak{n}.$$

Теорема 3. *Если пространство* $\mathcal{X}$ *компактно и* $\operatorname{ord}_{p,x} \mathcal{X} \leqslant \aleph_0$ *для каждого* $x \neq p$, *то* $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \leqslant \aleph_0$.

Доказательство. Если $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} > \aleph_0$, то, согласно теореме 6 п. II, существует замкнутое множество F, такое, что $p \in \mathcal{X} - F$ и $\operatorname{ord}_{p,F} \mathcal{X} = \mathfrak{c}$. Но тогда (по теореме 1) существует точка $x \in F$, такая, что $\operatorname{ord}_{p,x} \mathcal{X} = \mathfrak{c}$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{n} = \aleph_0$ *или* $\mathfrak{n} = \mathfrak{c}$. *Если* $\mathcal{X}$ — *компактное пространство и* p — *фиксированная точка* $\mathcal{X}$, *то множество*

$$P = p \cup \underset{x}{\mathrm{E}} (\operatorname{ord}_{p,x} \mathcal{X} \geqslant \mathfrak{n})$$

есть континуум [1]).

Доказательство. Сначала заметим, что P замкнуто, так как множество $\mathcal{X} - P$ является объединением открытых множеств A, таких, что $p \in \mathcal{X} - \bar{A}$ и $\overline{\overline{\operatorname{Fr}(A)}} < \mathfrak{n}$. Для доказательства связности P обозначим через G открытое множество, такое, что $p \in G$ и $P \cap \operatorname{Fr}(G) = 0$. Покажем, что $P \subset G$.

По теореме 1 из равенства $P \cap \operatorname{Fr}(G) = 0$ следует, что $\operatorname{ord}_{p, \operatorname{Fr}(G)} \mathcal{X} < \mathfrak{n}$. Поэтому существует открытое множество H, такое, что

$$p \in H, \quad \bar{H} \cap \operatorname{Fr}(G) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(H)}} < \mathfrak{n}.$$

Отсюда следует, что

$$p \in H \cap G \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr}(H \cap G) \subset \operatorname{Fr}(H),$$

так как

$$\operatorname{Fr}(H \cap G) = \overline{H \cap G} - (H \cap G) \subset (\bar{H} \cap \bar{G} - H) \cup (\bar{H} \cap \bar{G} - G) \subset \bar{H} - H$$

(ибо $\bar{H} \cap \bar{G} - G = 0$). Поэтому $\overline{\overline{\operatorname{Fr}(H \cap G)}} < \mathfrak{n}$. Так как $p \in H \cap G$, то (по определению P)

$$P \subset \overline{H \cap G}, \quad \text{откуда} \quad P \subset \bar{H} \cap \bar{G} = \bar{H} \cap G \subset G.$$

---

[1]) Очевидно, что *квазикомпонента точки* p (§ 46, V) *совпадает с множеством* $\underset{x}{\mathrm{E}} (\operatorname{ord}_{p,x} \mathcal{X} \geqslant 1)$.

Следующее утверждение является простым следствием теорем 2 и 4.

Теорема 5. *Во всяком компактном пространстве множество иррегулярных точек* (т. е. множество $\mathscr{X}-\mathscr{X}^{[\omega]}$), *так же как и множество иррациональных точек* (т. е. множество $\mathscr{X}-\mathscr{X}^{[\aleph_0]}$) *являются объединениями континуумов* (*содержащих более одной точки*[1])).

Теорема 6. *Если $\mathscr{X}$ — компактное пространство, то множество*[2]) *точек порядка $\leqslant$ иррегулярно в каждой из своих точек, т. е.*

$$(2)\qquad (\mathscr{X}-\mathscr{X}^{[\aleph_0]})^{[\omega]}=0\ ^{3)}.$$

Доказательство. Предположим, что $p\in(\mathscr{X}-\mathscr{X}^{[\aleph_0]})^{[\omega]}$. Пусть $\varepsilon>0$. Существует открытое множество G, такое, что

$$(3)\qquad p\in G,\quad \delta(G)<\varepsilon\quad \text{и}\quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(G-\mathscr{X}^{[\aleph_0]})}}<\omega.$$

С другой стороны, существует семейство $\boldsymbol{G}$ открытых множеств, таких, что каждому $x\in\mathrm{Fr}(G)\cap\mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ и каждому положительному целому k соответствует множество $H\in\boldsymbol{G}$, удовлетворяющее условиям

$$(4)\qquad x\in H,\quad \delta(H)<\varepsilon/k\quad \text{и}\quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(\overline{H})}}<\aleph_0.$$

Так как множество $\mathrm{Fr}(G)-\mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ конечно (согласно (3)), то множество $\mathrm{Fr}(G)\cap\mathscr{X}^{[\aleph_0]}$ является множеством типа $\boldsymbol{F}_\sigma$. Поэтому можно применить следствие 5 из § 41, II. Таким образом, существует последовательность множеств $H_1, H_2, \ldots,$ принадлежащих $\boldsymbol{G}$ и удовлетворяющих условиям

$$(5)\qquad \mathrm{Fr}(G)\cap\mathscr{X}^{[\aleph_0]}\subset\bigcup_m H_m,$$

$$(6)\qquad \overline{\bigcup_m H_m}\subset\bigcup_m \overline{H}_m\cup\mathrm{Fr}(G).$$

Положим

$$(7)\qquad Q=G\cup\bigcup_m H_m.$$

Из этого следует, согласно (3) и (4), что

$$(8)\qquad p\in Q\quad \text{и}\quad \delta(Q)\leqslant 3\varepsilon.$$

---

[1]) См. Менгер [3, стр. 287], Урысон [6, стр. 19] и Гуревич [3, стр. 759].

[2]) Это множество называется *порядковым ядром* по аналогии с размерностным ядром (рассмотренным в § 27, V).

[3]) См. Менгер [3, стр. 289] и Урысон [6, стр. 21]. Данное здесь доказательство теоремы 6 совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы о размерностном ядре (§ 45, V).

Кроме того, согласно (7) и (6), имеем

$$\operatorname{Fr}(Q)=\overline{Q}-Q=(\overline{G}-Q)\cup\Big(\overline{\bigcup_m H_m}-Q\Big)\subset$$
$$\subset\Big(\overline{G}-G-\bigcup_m H_m\Big)\cup\Big\{\Big[\bigcup_m \overline{H}_m\cup\operatorname{Fr}(G)\Big]-G-\bigcup_m H_m\Big\}\subset$$
$$\subset\Big[\operatorname{Fr}(G)-\bigcup_m H_m\Big]\cup\bigcup_m\operatorname{Fr}(H_m),$$

ибо

$$\bigcup_m \overline{H}_m-\bigcup_m H_m\subset\bigcup_m(\overline{H}_m-H_m)=\bigcup_m\operatorname{Fr}(H_m).$$

В силу (4)

$$\overline{\overline{\operatorname{Fr}(Q)}}\leqslant\aleph_0, \tag{9}$$

так как, согласно (5) и (3),

$$\overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)-\bigcup_m H_m}}\leqslant\overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)-\mathscr{X}^{[\aleph_0]}}}<\omega.$$

Из условий (8) и (9) следует, что $p\in\mathscr{X}^{[\aleph_0]}$, а это противоречит нашим предположениям.

Замечание. Термин *иррегулярный* нельзя заменить термином *иррациональный*. Действительно, существует компактное пространство $\mathscr{X}$, множество точек которого порядка c рационально (т. е. не имеет ни в одной точке порядка c) и не пусто.

Рассмотрим следующий пример[1]).

Для $x\in\mathscr{C}$ пусть

$$x=2/3^{n_1}+2/3^{n_2}+\ldots,\quad\text{где}\quad n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots,$$

и

$$f(x)=(-1)^{n_1}/(3/2)+(-1)^{n_2}/(3/2)^2+\ldots+(-1)^{n_k}/(3/2)^k+\ldots,$$
$$f(0)=0.$$

Пространство $\mathscr{X}$ состоит из сегментов с концевыми точками (x, i_x) и (x, s_x), где i_x и s_x обозначают соответственно нижний и верхний пределы функции f в точке x, где $x\in\mathscr{C}$.

IV. Регулярные пространства, рациональные пространства.

Теорема 1. *Всякое связное регулярное пространство локально связно.*

Более точно, *если $\mathscr{X}$ связно и* $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}\leqslant\omega$, *то $\mathscr{X}$ локально связно в точке p.*

[1]) См. Отто [1]. Ср. Куратовский [29]. Первый пример с этим свойством был найден Мазуркевичем [18]. Частичное решение см. Куратовский и Мазуркевич [1].

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ и G — такое открытое множество, что

$$(1)\qquad p\in G,\quad \delta(G)<\varepsilon\quad \text{и}\quad \operatorname{Fr}(G)=(q_1,\ \ldots,\ q_n).$$

Множество $\mathcal{X}-\operatorname{Fr}(G)$ является объединением двух отделимых множеств G и $\mathcal{X}-\overline{G}$, а множество $\operatorname{Fr}(G)$ — объединением n связных множеств (согласно (1)). По теореме 7 из § 46, II множество $\overline{G}=G\cup\operatorname{Fr}(G)$ есть объединение не более n связных отделимых множеств

$$(2)\qquad \overline{G}=S_1\cup\ldots\cup S_k,\quad p\in S_1\quad \text{и}\quad k\leqslant n.$$

Так как множество S_1 отделимо от множеств S_2, S_3, ..., S_k, то оно отделимо от их объединения $S_2\cup\ldots\cup S_k$ и, следовательно, S_1 есть окрестность точки p относительно $\overline{G}$, а потому и относительно $\mathcal{X}$ (ибо $p\in G$).

Наконец, $\delta(S_1)<\varepsilon$, согласно (1) и (2). Поэтому $\mathcal{X}$ локально связно в точке p.

Теорема 2. *Всякий регулярный континуум наследственно локально связен.*

Более точно, *всякое связное подмножество регулярного пространства локально связно.*

Доказательство. Действительно, всякое подмножество регулярного пространства регулярно.

Замечания. (i) Обратная теорема неверна. *Существуют наследственно локально связные пространства, которые не регулярны.*

Таким является, например, (плоский) континуум [1]), состоящий из сегмента $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$, полуокружностей

$$\left(x-\frac{2k-1}{2^n}\right)^2+y^2=\frac{1}{4^n},\qquad y\geqslant 0,$$

где $n=1,\ 2,\ \ldots$ и $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2^{n-1}$, и полуокружностей

$$\left(x-\frac{2k-1}{2\cdot 3^n}\right)^2+y^2=\frac{1}{4\cdot 9^n},\qquad y\leqslant 0,$$

где $n=0,\ 1,\ \ldots$ и $k=1,\ 2,\ \ldots,\ 3^n$ (рис. 10).

(ii) Однако имеет место следующая теорема: *всякое наследственно локально связное пространство рационально* [2]).

Наконец, *существует рациональный континуум, не являющийся локально связным.* (См. пример (iii) в § 49, I.)

---

[1]) Этот пример принадлежит Кнастеру; см. Менгер [2, стр. 258]. См. также Геман [1, стр. 43].

[2]) Доказательство см. Менгер [2, стр. 251] или Уайберн [1, стр. 94].

Теорема 3. *Всякий континуум, не содержащий нигде не плотных подконтинуумов (за исключением отдельных точек), является регулярным.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ иррегулярный континуум; согласно теореме 5 п. III, существует континуум

(3) $$K \subset \mathcal{X} - \mathcal{X}^{[\omega]},$$

содержащий более одной точки. Предположим, что $\mathcal{X}$ не содержит нигде не плотных континуумов (состоящих более чем из одной точки); тогда он наследственно локально связен (по теореме 1 из § 50, IV). Поэтому континуум K локально связен и (ср. § 50, II, теорема 1) содержит некоторую дугу A. Эта дуга не является нигде не плотной в $\mathcal{X}$, поэтому пусть p — внутренняя точка A. Очевидно, что

$$\operatorname{ord}_p \mathcal{X} = \operatorname{ord}_p A \leqslant 2$$

вопреки соотношению (3).

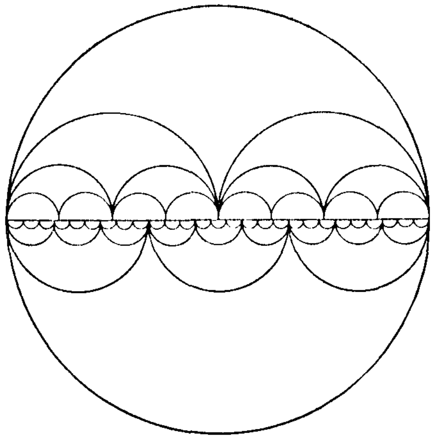

Рис. 10

Теорема 4. *Пространство рационально тогда и только тогда, когда оно является объединением двух множеств, одно из которых самое большее нульмерно, а другое счетно*[1]).

Доказательство. Пусть пространство $\mathcal{X}$ рационально, и пусть в соответствии с теоремой 5 п. II $R_1, R_2, \ldots$ — база пространства $\mathcal{X}$, такая, что $\overline{\overline{\operatorname{Fr}(R_i)}} \leqslant \aleph_0$. Положим

(4) $$D = \bigcup_m \operatorname{Fr}(R_m).$$

Тогда

(5) $$\overline{\overline{D}} \leqslant \aleph_0 \text{ и } \dim(\mathcal{X} - D) \leqslant 0,$$

так как множества $R_m - D$ открыто-замкнуты в $\mathcal{X} - D$ и образуют базу в $\mathcal{X} - D$.

Обратно, пусть D — множество, удовлетворяющее условиям (5). Пусть $p \in \mathcal{X}$. Тогда

(6) $$\dim_p(\mathcal{X} - D \cup p) = 0,$$

согласно неравенству (5) и следствию 2 § 26, III.

[1]) Эта теорема есть частный случай теоремы 1 из § 27, VII.

Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно (6) и теореме 2_0 § 25, II, существует открытое множество G, удовлетворяющее следующим условиям:

(7) $p \in G$, $\delta(G) < \varepsilon$ и $\operatorname{Fr}(G) \subset D$, откуда $\overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}} \leqslant \aleph_0$

в силу (5).

Из условий (7) следует, что $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \leqslant \aleph_0$.

Теорема 5. *Всякое семейство непересекающихся связных подмножеств (содержащих более одной точки) рационального пространства счетно.*

Доказательство. Предположим, что это семейство несчетно. Пусть D — счетное множество; тогда в этом семействе существует связное множество C, не пересекающееся с D (и даже несчетная совокупность таких множеств), т. е. $C \subset \mathcal{X} - D$. Так как C связно, то множество $\mathcal{X} - D$ не может быть нульмерным, что противоречит теореме 4.

Теорема 6. *Объединение бесконечной последовательности замкнутых рациональных множеств есть рациональное множество*[1]).

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — рассматриваемое объединение, а A_1, A_2, ... — его члены. Полагая $A_1^* = A_1$ и $A_n^* = A_n - (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$, получаем, согласно теореме 4, что

$$A_n^* = B_n \cup D_n,$$

где

$$\dim B_n \leqslant 0, \qquad \overline{\overline{D}}_n \leqslant \aleph_0 \quad \text{и} \quad B_n \cap D_n = 0.$$

Поэтому

$$(8) \quad \mathcal{X} = \bigcup_n B_n \cup \bigcup_n D_n, \qquad \dim\Big(\bigcup_n B_n\Big) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\bigcup_n D_n}} \leqslant \aleph_0,$$

так как B_n есть F_σ-множество в $\bigcup\limits_n B_n$, а объединение бесконечной последовательности нульмерных F_σ-множеств нульмерно (ср. § 26, III, следствие 1).

Из соотношений (8) и теоремы 4 следует, что пространство $\mathcal{X}$ рационально.

Замечание. Пример, рассмотренный в замечании (i), показывает, что *объединение двух регулярных континуумов может быть иррегулярным континуумом.*

---

[1]) Ср. § 27, VII, 1.

Тем не менее имеет место следующая

Теорема 7. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное пространство. Если $\mathscr{X} = A \cup B$, где множества A и B замкнуты и регулярны, то множество $C = \mathscr{X} - \mathscr{X}^{[\omega]}$ есть граничное множество как в A, так и в B.*

Доказательство. Так как $A - B \subset \mathscr{X}^{[\omega]}$ и $B - A \subset \mathscr{X}^{[\omega]}$, то $C \subset A \cap B$. Покажем, что

(9) $$C \subset \overline{A - C}.$$

Имеем

(10) $$\mathscr{X} - \overline{A - C} = [A - \overline{A - C}] \cup [B - \overline{A - C}] \subset A \cap C \cup B \subset B,$$

потому что $C \subset A \cap B$.

Множество $\mathscr{X} - \overline{A - C}$ регулярно как подмножество регулярного множества B. Как открытое множество оно содержится в $\mathscr{X}^{[\omega]}$ (ср. с теоремой 4 п. II); отсюда получаем включение (9).

Теорема 8. *Допустим, что выполняются предположения теоремы 7. Если, кроме того, выполняется одно из следующих условий:*

(i) $\dim A \cap B = 0$;

(ii) *B не содержит континуума (состоящего более чем из одной точки), нигде не плотного в B,*

то пространство $\mathscr{X}$ регулярно.

Это непосредственное следствие теорем 7 и 5 п. III.

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{m} = \omega$ или $\mathfrak{m} = \aleph_0$. Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathscr{X} = \mathscr{X}^{[\mathfrak{m}]}$, т. е. для того, чтобы $\mathscr{X}$ было регулярным или рациональным в соответствии с тем, какое из значений: ω или $\aleph_0$ принимает $\mathfrak{m}$:*

(i) $\operatorname{ord}_{x,y} \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{m}$ *для любых точек $x \neq y$;*

(ii) $\operatorname{ord}_{A,B} \mathscr{X} \leqslant \mathfrak{m}$ *для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B.*

Доказательство. Условия необходимы, ибо условие (i), очевидно, выполняется, если пространство $\mathscr{X}$ регулярно (рационально), а из (i), согласно теореме 1 п. III, вытекает (ii).

Условия достаточны, согласно теореме 6 п. II.

Теорема 10 (о разбиении). *Пусть задано открытое покрытие компактного регулярного (или рационального) пространства:*

$\mathcal{X} = G_1 \cup \ldots \cup G_k$; *тогда существует система замкнутых множеств* $F_1, \ldots, F_k$, *удовлетворяющих условиям*

(11) $\mathcal{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_k$, $F_i \subset G_i$ *и* $\overline{\overline{F_i \cap F_j}} \leqslant \mathfrak{m}$ *для* $i \neq j$,

где $\mathfrak{m} = \omega$ (*или соответственно* $\mathfrak{m} = \aleph_0$).

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Для $k = 2$ справедливость теоремы вытекает из теоремы 9 (ii). Действительно, полагая

$$\mathcal{X} = G_1 \cup G_2, \quad A = \mathcal{X} - G_1 \quad \text{и} \quad B = \mathcal{X} - G_2,$$

получаем $A \cap B = 0$, откуда $\operatorname{ord}_{A,B} \mathcal{X} \leqslant \mathfrak{m}$. Поэтому существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям

$$A \subset G, \quad \bar{G} \cap B = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Следовательно, множества $F_1 = \mathcal{X} - G$ и $F_2 = \bar{G}$ удовлетворяют условиям (11).

Предположим теперь, что теорема верна для $k - 1$. Как мы только что показали, существуют два замкнутых множества H и F_k, таких, что

(12) $\mathcal{X} = H \cup F_k$, $H \subset G_1 \cup \ldots \cup G_{k-1}$, $F_k \subset G_k$ и $\overline{\overline{H \cap F_k}} \leqslant \mathfrak{m}$.

Так как множество H компактно и регулярно (соответственно рационально), то из равенства $H = (H \cap G_1) \cup \ldots \cup (H \cap G_{k-1})$ в силу предположений вытекает существование системы замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_{k-1}$, удовлетворяющих условиям

(13) $H = F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1}$, $F_i \subset H \cap G_i$

и $\overline{\overline{F_i \cap F_j}} \leqslant \mathfrak{m}$ для $i < j < k$.

Условия (11) легко выводятся из (12) и (13).

Из теоремы (10) вытекает следующая

Теорема 11. *Если* $\mathcal{X}$ — *компактное регулярное* (*или рациональное*) *пространство, то каждому* $\varepsilon > 0$ *соответствует конечная система замкнутых множеств* $F_1, \ldots, F_k$, *удовлетворяющих условиям*

(14) $\mathcal{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_k$, $\delta(F_i) < \varepsilon$, $\overline{\overline{F_i \cap F_j}} \leqslant \mathfrak{m}$, $F_h \cap F_i \cap F_j = 0$

для любой системы различных индексов ($\mathfrak{m}$ *обозначает* ω *или* $\aleph_0$).

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{X} \leqslant 1$, то (ср. § 45, IV, теорема 1) существует система открытых множеств $G_1, \ldots, G_k$, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{X} = G_1 \cup \ldots \cup G_k, \quad \delta(G_i) < \varepsilon, \quad G_h \cap G_i \cap G_j = 0.$$

Если $F_1, \ldots, F_k$ — система замкнутых множеств, удовлетворяющих условиям (11), то выполняются условия (14).

Замечания. 1. Существует регулярный континуум, не являющийся объединением континуумов диаметра $<\varepsilon$, *таких, что каждые два из них имеют не более одной общей точки*[1]).

2. *Если $\mathcal{X}$ — регулярный континуум, то множества $F_1, \ldots, F_k$ в теореме* 11 *можно также считать регулярными континуумами.*

Доказательство. Так как объединение $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ связно и всякое пересечение $F_i \cap F_j$, где $i \neq j$, имеет конечное число компонент, то легко видеть, что каждое множество F_i имеет конечное число компонент. Пусть $C_i^1, \ldots, C_i^{m_i}$ — компоненты F_i. Заменяя равенство

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} F_i \quad \text{на} \quad \mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{r=1}^{m_i} C_i^r,$$

получаем требуемое разбиение.

Теорема 12[2]). *Пусть $\mathcal{X}$ — регулярный (или рациональный) континуум. Тогда существует непрерывная функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{J}$, такая, что множество точек y, для которых $\overline{\overline{f^{-1}(y)}} \leqslant \mathfrak{m}$ (где $\mathfrak{m} = \omega$ или $\aleph_0$), всюду плотно в $\mathcal{J}$.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечную последовательность замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots$, определенную по индукции следующим образом:

F_1 — замкнутое множество, такое, что

$$(15) \qquad \operatorname{Int}(F_1) \neq 0, \quad F_1 \neq \mathcal{X} \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(F_1)}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Предположим, что система множеств $F_1, F_2, \ldots, F_{3^k}$ (где $k \geqslant 0$) строго монотонна и удовлетворяет условиям (15) (где индекс 1 заменяется на $i \leqslant 3^k$); тогда существует система множеств $F_{3^k+1}, \ldots, F_{3^{k+1}}$, удовлетворяющая условиям (15) и такая, что система $F_1, \ldots, F_{3^{k+1}}$ строго монотонна.

Чтобы доказать это, заметим, что если три замкнутых множества $A \subset F \subset B$ образуют строго монотонную систему, то (по теореме 9 (ii)) существуют два множества ${}^*F$ и F^*, таких, что $A \subset {}^*F \subset F \subset F^* \subset B$ и эти пять множеств образуют строго монотонную систему. Кроме того, множества ${}^*F$ и F^* удовлетворяют

---

[1]) Робертс [1].

[2]) Теорема Уайберна [18]. Случай, когда множество $f^{-1}(y)$ конечно при любом y, изучался Чехом [3], Мазуркевичем [22], Эйчисоном [1] и Харольдом [1].

условиям (15), если им удовлетворяет F. Наконец, можно предположить, что из соотношения $\rho(x, \mathcal{X} - F) > 1/k$ следует $x \in {}^*F$.

Пусть $\boldsymbol{F}$ — семейство множеств F_n, $n = 1, 2, \ldots$. Порядковый тип семейства $\boldsymbol{F}$ (упорядоченного по включению) плотный, ибо из условий $F_m \subset \operatorname{Int}(F_n)$ и $0 \neq F_m \neq \mathcal{X}$ следует, что $F_m \neq F_n$.

Согласно теореме 1 § 24, VII, элементы семейства $\boldsymbol{F}$ можно представить в виде A_r, где индекс r пробегает двоично-рациональные числа между 0 и 1. Из определения ${}^*F$ и F^* следует, что

$$A_r = \bigcap_{s > r} A_s \quad \text{и} \quad \operatorname{Int}(A_r) = \bigcup_{q < r} \operatorname{Int}(A_q).$$

Отсюда, согласно § 24, IX (14), получаем, что если $f: \mathcal{X} \to \mathcal{J}$ — отображение, рассмотренное в теореме 3 § 24, IX, то

$$\operatorname{Fr}(A_r) \subset f^{-1}(r) \subset \bigcap_{s > r} A_s - \bigcup_{q < r} \operatorname{Int}(A_q) = A_r - \operatorname{Int}(A_r) = \operatorname{Fr}(A_r),$$

откуда $f^{-1}(r) = \operatorname{Fr}(A_r)$ для любого r.

Теорема 13[1]). *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно и рационально, то существует порядковое число $\alpha < \Omega$, такое, что для каждой точки $p \in \mathcal{X}$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество G, удовлетворяющее условиям*

$$p \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{и} \quad [\operatorname{Fr}(G)]^{(\alpha)} = 0,$$

где $\mathcal{X}^{(\alpha)}$ — производное множество пространства $\mathcal{X}$ порядка α (ср. § 24, IV).

Доказательство. В соответствии с теоремой 5 п. II пусть $R_1, R_2, \ldots$ — база, состоящая из открытых множеств R_i, таких, что $\overline{\operatorname{Fr}(R_i)} \leqslant \aleph_0$. Таким образом, существует (ср. § 24, IV) порядковое число $\alpha_i < \Omega$, такое, что $[\operatorname{Fr}(R_i)]^{(\alpha_i)} = 0$, и достаточно выбрать $\alpha \geqslant \alpha_i$ для $i = 1, 2, \ldots$.

Замечание. Итак, *компактные рациональные пространства можно распределить по $\aleph_1$ классам* в соответствии с наименьшим возможным числом[2]) α, которое было определено выше. Можно доказать[3]), что ни один из этих классов не пуст (в частности, класс 0 есть класс нульмерных пространств, а класс 1 — класс регулярных пространств). Отсюда следует, что *среди*

---

[1]) См. Решовски [1, стр. 19].

[2]) Менгер [6] назвал его «Geschlecht» (род). Более подробно об этом понятии см. Решовски [1] и Менгер [2, гл. IX].

[3]) Менгер [2, стр. 294].

рациональных пространств нет пространства, имеющего наивысший топологический ранг.

В дополнение приведем здесь без доказательства три теоремы.

Теорема 15 (о компактификации[1]). *Всякое регулярное пространство топологически содержится в компактном регулярном пространстве.*

Теорема 16[2]. *Множество гомеоморфизмов f: $\mathscr{X} \to \mathscr{J}^{\aleph_0}$, таких, что*

$$\operatorname{ord}_{p,q} \mathscr{X} = \operatorname{ord}_{f(p),f(q)} \overline{f(\mathscr{X})}, \quad \text{где} \quad \operatorname{ord}_{p,q} \mathscr{X} < \infty,$$

является остаточным множеством в пространстве $\left(\mathscr{J}^{\aleph_0}\right)^{\mathscr{X}}$.

Теорема 17. *Всякое регулярное множество (лежащее в произвольном пространстве) содержится в регулярном G_δ-множестве.*

Теорема 17 является простым следствием теоремы 15 и теоремы Лаврентьева (§ 35, II, следствие).

Замечания. 1. Теорема 15 не имеет места для *рациональных* пространств. Рассмотрим (плоское) множество, состоящее из сегментов, соединяющих точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ со всеми рациональными точками интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$. Это множество нельзя компактифицировать, так как точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ становится точкой порядка континуум.

2. Теорема 15 не имеет места для регулярных пространств фиксированного порядка n. Существует пространство порядка 4 (т. е. порядка $\leqslant 4$ в каждой точке), которое топологически не содержится ни в каком компактном пространстве порядка 4[3].

3. Среди регулярных пространств не существует пространства, имеющего наибольший топологический ранг[4].

V. Точки конечного порядка. Характеризация дуг и простых замкнутых кривых.

Теорема 1. *Если $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant 1$, то p не является разделяющей точкой пространства $\mathscr{X}$. Следовательно, если пространство $\mathscr{X}$ связно, то связно и множество $\mathscr{X} - p$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{X} - p$ не является связным между двумя замкнутыми множествами A и B, между

[1] См. Нёбелинг [2], Куратовский [34].
[2] См. Куратовский [37, стр. 246].
[3] См. Беер [1].
[4] См. Нёбелинг [2, стр. 82].

которыми связно пространство $\mathscr{X}$ (ср. § 46, VII). Тогда существуют два открытых множества A^* и B^*, удовлетворяющих условиям

(1) $\mathscr{X}-p=A^*\cup B^*,\quad A^*\cap B^*=0,\quad A\subset A^*\quad$ и $\quad B\subset B^*$.

Согласно условию $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}\leqslant 1$, существует открытое множество G, такое, что

(2) $$p\in G,\quad \overline{G}\cap(A\cup B)=0\quad \text{и}\quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}}\leqslant 1.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\text{либо}\quad \operatorname{Fr}(G)\cap A^*=0,\quad \text{либо}\quad \operatorname{Fr}(G)\cap B^*=0.$$

Предположим, что $\operatorname{Fr}(G)\cap B^*=0$. Тогда

$$B^*-\overline{G}=B^*-[G\cup\operatorname{Fr}(G)]=B^*-G,$$

откуда видно, что множество B^*-G открыто.

С другой стороны, согласно (1) и (2),

$$\mathscr{X}=(A^*\cup G)\cup(B^*-G),\quad (A^*\cup G)\cap(B^*-G)=0,$$
$$A\subset A^*\cup G,\quad B\subset B^*-G.$$

Следовательно, пространство $\mathscr{X}$ не связно между A и B, что противоречит предположениям.

Теорема 2. $\dim\mathscr{X}^{[1]}\leqslant 0$.

Доказательство. Пусть S — множество разделяющих точек пространства $\mathscr{X}$; тогда $\mathscr{X}^{[1]}\cap S=0$ по теореме 1. Таким образом, достаточно показать, что для каждого $p\in\mathscr{X}^{[1]}$ и каждого $\varepsilon>0$ существует открытое множество G, такое, что

(3) $$p\in G,\quad \delta(G)<\varepsilon$$

и

(3′) $$\operatorname{Fr}(G)\subset S.$$

Если $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}=0$, то $\dim_p\mathscr{X}=0$. Поэтому существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям (3) и такое, что $\operatorname{Fr}(G)=0$, откуда получаем включение (3′).

Если $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}=1$, то $\dim_p\mathscr{X}\neq 0$. Следовательно, пространство $\mathscr{X}$ связно (ср. § 46, IV, теорема 2) между точкой p и замкнутым множеством F, таким, что $p\in\mathscr{X}-F$. С другой стороны, из равенства $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}=1$ следует, что существуют точка q и открытое множество G, удовлетворяющее условиям (3) и такое, что $\overline{G}\cap F=0$ и $\operatorname{Fr}(G)=q$. Следовательно, точка q разделяет пространство между p и F, откуда получаем, что $q\in S$, и условие (3′) выполнено.

Теорема 3. *Пусть пространство* $\mathcal{X}$ *неприводимо между* a *и* b; *тогда* $\mathcal{X}^{[1]} \subset (a, b)$.

Другими словами, *из равенства* $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} = 1$ *следует, что либо* $p = a$, *либо* $p = b$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} = 1$ и $a \neq p \neq b$. Пусть G — открытое множество и q — такая точка, что

$$p \in G, \tag{4}$$

$$a, \; b \in \mathcal{X} - \bar{G}, \tag{4'}$$

$$\operatorname{Fr}(G) = q. \tag{4''}$$

Так как множества G и $\mathcal{X} - \bar{G}$ отделимы, то из равенства

$$\mathcal{X} - q = \mathcal{X} - (\bar{G} - G) = G \cup (\mathcal{X} - \bar{G})$$

следует, что множество $q \cup (\mathcal{X} - \bar{G}) = \mathcal{X} - G$ связно (ср. § 46, II, теорема 4). Таким образом, $\mathcal{X} - G$ — замкнутое связное множество, содержащее точки a и b (согласно (4')). Так как пространство $\mathcal{X}$ неприводимо между этими точками, то отсюда следует, что $\mathcal{X} - G = \mathcal{X}$ вопреки (4).

Теорема 4. *Если* $\mathcal{X}$ — *континуум, то* $\mathcal{X} - \mathcal{X}^{[1]}$ — *полуконтинуум.*

Доказательство. Пусть $a, \; b \in \mathcal{X} - \mathcal{X}^{[1]}$ и C — неприводимый континуум между a и b (ср. § 48, I, теорема 1). Согласно теореме 3 п. II и теореме 3,

$$C \cap \mathcal{X}^{[1]} \subset C^{[1]} \subset (a, b), \quad \text{следовательно,} \quad C \cap \mathcal{X}^{[1]} = 0,$$
$$\text{откуда} \quad C \subset \mathcal{X} - \mathcal{X}^{[1]}.$$

Теорема 5. *Всякое связное пространство* $\mathcal{X}$, *содержащее такие две точки* a *и* b, *что*

$$\operatorname{ord}_a \mathcal{X} = 1 = \operatorname{ord}_b \mathcal{X}, \quad a \neq b, \tag{5}$$

$$\operatorname{ord}_x \mathcal{X} = 2 \quad \text{для} \quad a \neq x \neq b, \tag{6}$$

является дугой ab [1]).

Доказательство. Пусть $F = S(a, b) \cup a \cup b$, где $S(a, b)$ — множество точек, разделяющих пространство $\mathcal{X}$ между a и b. Так как $\mathcal{X}$ локально связно (согласно теореме 1 п. IV), то достаточно показать, что $\mathcal{X} = F$ (ср. § 49, IV, теорема 4).

Предположим, что $\mathcal{X} - F \neq 0$. Пусть R — компонента множества $\mathcal{X} - F$. Тогда $R \neq \mathcal{X}$ и, так как $\mathcal{X}$ связно, существует

[1]) Ср. Франкль [1].

точка $p \in \mathrm{Fr}(R)$. Поскольку пространство локально связно, имеем $\mathrm{Fr}(R) \subset \mathrm{Fr}(F)$ (согласно теореме 3 из § 49, III), а так как множество F замкнуто (согласно теореме 3 из § 49, IV), то $\mathrm{Fr}(F) \subset F$. Поэтому $p \in F$, т. е.

$$p \in [S(a, b) \cup a \cup b]. \tag{7}$$

С другой стороны, $a \neq p \neq b$. В самом деле, пусть $p = a$. Тогда, согласно (5), существуют точка c и открытое множество G достаточно малого порядка, такие, что

$$a = p \in G, \quad b \in \mathscr{X} - \overline{G}, \quad R - G \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Fr}(G) = c.$$

Отсюда $c \in S(a, b)$, т. е. $c \in F$, и потому $c \in \mathscr{X} - R$, т. е. $R \cap \mathrm{Fr}(G) = 0$.

Однако условие $p \in G \cap \mathrm{Fr}(R)$ влечет за собой $R \cap G \neq 0$, и так как $R - G \neq 0$, то вследствие связности R (ср. § 46, I, теорема 1) мы получаем $R \cap \mathrm{Fr}(G) \neq 0$. Таким образом,

$$a \neq p \neq b. \tag{8}$$

Согласно (6), $\mathrm{ord}_p \mathscr{X} = 2$. Поэтому существуют открытое множество G и две точки q и r, такие, что

$$p \in G, \quad a, b \in \mathscr{X} - \overline{G}, \quad R - G \neq 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Fr}(G) = (q, r). \tag{9}$$

Так же как и выше, отсюда получаем $R \cap \mathrm{Fr}(G) \neq 0$ и, следовательно,

$$\text{либо} \quad q \in R, \quad \text{либо} \quad r \in R. \tag{10}$$

Более того, так как $p \in S(a, b)$ (согласно (7) и (8)), то существуют два открытых множества A и B, таких, что

$$a \in A, \quad b \in B, \quad \mathscr{X} - p = A \cup B \quad \text{и} \quad A \cap B = 0. \tag{11}$$

Так как множество $A \cup p$ связно (ср. § 46, II, теорема 4), то из соотношений $p \in G \cap (A \cup p)$ и $a \in (A \cup p) - G$ (ср. (9) и (11)) следует, что $(A \cup p) \cap \mathrm{Fr}(G) \neq 0$ (ср. § 46, I, теорема 1), откуда получаем $A \cap \mathrm{Fr}(G) \neq 0$ (ср. (9)). Аналогично $B \cap \mathrm{Fr}(G) \neq 0$. Итак, пусть $q \in A$, $r \in B$ и в соответствии с (10)

$$r \in R, \quad \text{следовательно,} \quad r \in \mathscr{X} - F. \tag{12}$$

Положим $H = A \cup G$. Согласно (11) и (9),

$$\overline{A} = A \cup p \quad \text{и} \quad \overline{G} = G \cup q \cup r.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Fr}(H) = (A \cup p \cup G \cup q \cup r) - (A \cup G) = r, \quad a \in H \quad \text{и} \quad b \in \mathscr{X} - \overline{H}.$$

Отсюда $r \in S(a, b) \subset F$, что противоречит (12).

Теорема 6. *Всякий континуум, все точки которого имеют порядок 2, является простой замкнутой кривой.*

Доказательство. Согласно теореме 2 из § 47, V, достаточно показать, что рассматриваемый континуум $\mathscr{X}$ разделяется всякой парой своих точек.

Предположим, что это не так; пусть $a \neq b$ и множество $\mathscr{X}-(a, b)$ связно. Так как $\mathscr{X}$ локально связно (по теореме 1 п. IV), то пусть ab — дуга. Тогда $\mathscr{X} \neq ab$ (ибо в противном случае $\operatorname{ord}_a \mathscr{X}=1$). Пусть

$$c \in [ab-(a, b)] \quad \text{и} \quad d \in [\mathscr{X}-ab].$$

Так как множество $\mathscr{X}-(a, b)$ открыто и связно, то существует (согласно теореме 1 из § 50, II) дуга $cd \subset \mathscr{X}-(a, b)$. Пусть e — последняя точка дуги cd, принадлежащая дуге ab. Тогда

$$e \neq d, \quad a \neq e \neq b \quad \text{и} \quad ed \cap ab=(e).$$

Очевидно, что e — точка порядка 3 множества $ab \cup ed$, следовательно,

$$\operatorname{ord}_e \mathscr{X} \geqslant 3.$$

Пусть $\mathscr{X}^{[n, k]}$ — объединение открытых множеств G, таких, что

$$\delta(G)<1/k \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(G)}} \leqslant n. \tag{13}$$

Лемма 7. *Пусть A и B — два замкнутых множества, таких, что $\mathscr{X}=A \cup B$, и p — изолированная точка множества $A \cap B$, такая, что $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \leqslant 2n-1$ $(n \geqslant 1)$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ и каждого целого $k>0$ существует открытое множество P, такое, что*

$$p \in P, \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(P)}}<\infty, \quad \delta(P)<\varepsilon, \tag{14}$$

и при этом

$$\text{либо} \quad A \cap \operatorname{Fr}(P) \subset \mathscr{X}^{[n, k]}, \quad \text{либо} \quad B \cap \operatorname{Fr}(P) \subset \mathscr{X}^{[n, k]}. \tag{15}$$

Доказательство. По предположению существует открытое множество H, удовлетворяющее условиям

$$\bar{H} \cap A \cap B=p \in H, \quad \delta(H)<1/k \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(H)}} \leqslant 2n-1. \tag{16}$$

Так как

$$\operatorname{Fr}(H)=[\operatorname{Fr}(H) \cap A] \cup[\operatorname{Fr}(H) \cap B] \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr}(H) \cap A \cap B=\operatorname{Fr}(H) \cap p=0,$$

то

$$\overline{\overline{\operatorname{Fr}(H)}}=\overline{\overline{\operatorname{Fr}(H) \cap A}}+\overline{\overline{\operatorname{Fr}(H) \cap B}},$$

откуда, согласно (16),

$$\text{либо} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(H) \cap A}}<n, \quad \text{либо} \quad \overline{\overline{\operatorname{Fr}(H) \cap B}}<n.$$

Предположим, что

(17) $$\overline{\operatorname{Fr}(H) \cap A} < n.$$

Так как

$$\begin{aligned}\operatorname{Fr}(H-B) &= \overline{H-B} - (H-B) = \\ &= \overline{H-B} - H \cup [\overline{H-B} \cap B] \subset \\ &\subset [(\overline{H} - H) \cap \overline{\mathscr{X} - B}] \cup [\overline{H} \cap \overline{\mathscr{X} - B} \cap B] \subset \\ &\subset (\operatorname{Fr}(H) \cap A) \cup (\overline{H} \cap A \cap B),\end{aligned}$$

то, согласно (16) и (17), $\overline{\operatorname{Fr}(H-B)} \leqslant n$, откуда, согласно (13), получаем включение

(18) $$H - B \subset \mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}.$$

Пусть P — открытое множество, удовлетворяющее условиям (14) и такое, что $\overline{P} \subset H$. Тогда

$$(\overline{P} - P) \cap A \cap B = 0, \quad \text{т. е.} \quad \overline{P} - P \subset (\mathscr{X} - A) \cup (\mathscr{X} - B).$$

Следовательно,

$$A \cap \overline{P} - P \subset H - B,$$

так как $\overline{P} \subset H$. Отсюда в силу (18) следует соотношение (15).

Теорема 8 (Айреса[1]). $\dim\left(\mathscr{X}^{\cdot[2n-1]} - \mathscr{X}^{\cdot[n]}\right) \leqslant 0$ (*для* $n \geqslant 1$).

Доказательство. Ясно, что

$$\mathscr{X}^{\cdot[n]} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}, \quad \text{откуда} \quad \mathscr{X}^{\cdot[2n-1]} - \mathscr{X}^{\cdot[n]} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathscr{X}^{\cdot[2n-1]} - \mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}\right).$$

Так как множество $\mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}$ открыто, то (согласно теореме 1 из § 21, III) достаточно показать, что

$$\dim\left(\mathscr{X}^{\cdot[2n-1]} - \mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}\right) \leqslant 0$$

для любого k; другими словами, что для каждой точки $q \in \mathscr{X}^{\cdot[2n-1]}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям

(19) $$q \in G, \quad \delta(G) < \varepsilon \quad \text{и} \quad Q(G) = 0,$$

где для любого X

$$Q(X) = \mathscr{X}^{\cdot[2n-1]} \cap \operatorname{Fr}(X) - \mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}.$$

[1]) Айрес [5].

Так как $q \in \mathscr{X}^{[2n-1]}$, то существует открытое множество H, такое, что

$$(20) \qquad q \in H, \quad \delta(H) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(H)}} < \infty.$$

Положим

$$(21) \qquad m = \overline{\overline{Q(H)}}.$$

Определим множество G по индукции. Если $m = 0$, то положим $G = H$. Условия (19) при этом выполняются. Пусть $m > 0$. Предположим, что для любого открытого множества H_1, такого, что $\overline{\overline{Q(H_1)}} \leqslant m - 1$, и удовлетворяющего условиям (20) (в которых H заменяется на H_1), существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям (19). Таким образом, остается установить существование множества H_1 указанного вида.

Пусть $p \in Q(H)$. Положим в теореме 7 $A = \overline{H}$ и $B = \mathscr{X} - H$. Согласно (20), существует такое открытое множество P, что

$$(22) \qquad p \in P, \quad q \in \mathscr{X} - \overline{P}, \quad \delta(P) < \varepsilon - \delta(H), \quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(P)}} < \infty$$

и что

$$(23) \qquad \text{либо} \quad \overline{H} \cap \mathrm{Fr}(P) \subset \mathscr{X}^{[n,\, k]},$$

$$(24) \qquad \text{либо} \quad \mathrm{Fr}(P) - H \subset \mathscr{X}^{[n,\, k]}.$$

В соответствии с тем, имеет ли место (23) или (24), положим

$$(25) \qquad H_1 = H - \overline{P}$$

или

$$(26) \qquad H_1 = H \cup P.$$

В обоих случаях из (20) и (22) следует, что

$$(27) \qquad q \in H_1, \quad \delta(H_1) < \varepsilon \quad \text{и} \quad p \in \mathscr{X} - \mathrm{Fr}(H_1),$$

так как, поскольку P открыто, имеем (ср. § 5, III и § 6, II (8))

$$P \cap \mathrm{Fr}(H - \overline{P}) \subset P \cap \overline{H - \overline{P}} \subset \overline{P \cap H - \overline{P}} = 0 \quad \text{и} \quad P \cap \mathrm{Fr}(H \cup P) = 0.$$

Кроме того, в обоих случаях

$$(28) \qquad \mathrm{Fr}(H_1) \subset \mathrm{Fr}(H) \cup \mathscr{X}^{[n,\, k]},$$

ибо, с одной стороны, из (25) вытекает (ср. § 6, II (9) и (5)), что

$$\mathrm{Fr}(H_1) \subset \mathrm{Fr}(H) \cup (\overline{H} \cap \mathrm{Fr}(\overline{P})) \subset \mathrm{Fr}(H) \cup (\overline{H} \cap \mathrm{Fr}(P)),$$

а с другой стороны, согласно (26),

$$\mathrm{Fr}(H_1) = \overline{H \cup P} - H - P \subset \mathrm{Fr}(H) \cup [\mathrm{Fr}(P) - H].$$

Из включения (28) следует, что

$$\mathrm{Fr}(H_1)-\mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]}\subset \mathrm{Fr}(H)-\mathscr{X}^{\cdot[n,\,k]},\quad \text{откуда}\quad Q(H_1)\subset Q(H),$$

и потому $\overline{\overline{Q(H_1)}}\leqslant m$, согласно (21).

Таким образом, $\overline{\overline{Q(H_1)}}\leqslant m-1$, так как $p\in[Q(H)-Q(H_1)]$, согласно (27). Наконец, в силу (27) множество H_1 удовлетворяет условиям (20) (в которых H следует заменить на H_1), ибо

$$\mathrm{Fr}(H_1)\subset \mathrm{Fr}(H)\cup \mathrm{Fr}(P)\quad \text{и}\quad \overline{\overline{\mathrm{Fr}(H)\cup \mathrm{Fr}(P)}}<\infty,$$

согласно (20) и (22).

Из теоремы 8 вытекают следующие две теоремы.

Теорема 8′. *Для всякого $n\neq 2$ имеем*

$$\dim\left(\mathscr{X}^{\cdot[n]}-\mathscr{X}^{\cdot[n-1]}\right)\leqslant 0.$$

Доказательство. Для $n=1$ это следует из теоремы 2. Если $n\geqslant 3$, т. е. если $n\leqslant 2n-3$, то $\mathscr{X}^{\cdot[n]}\subset \mathscr{X}^{\cdot[2(n-1)-1]}$, откуда по теореме 8 следует требуемое заключение.

Теорема 8″. *Если все точки $\mathscr{X}$ имеют один и тот же конечный порядок $n>0$, то $n=2$.*

Следовательно, *если $\mathscr{X}$ — континуум, то он является простой замкнутой кривой.*

Доказательство. По предположению $\mathscr{X}=\mathscr{X}^{\cdot[n]}-\mathscr{X}^{\cdot[n-1]}$. Следовательно, из условия $n\neq 2$, согласно теореме 8′, получаем, что $\dim\mathscr{X}\leqslant 0$; но в таком случае $n=0$.

Вторая часть теоремы получается с помощью теоремы 6.

Теорема 9[1]). *Если $\mathscr{X}$ — континуум, то все его разделяющие точки, за исключением, возможно, их счетного множества, имеют порядок 2.*

Доказательство. По теореме 1 из § 46, VII существует последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$, такая, что всякая разделяющая точка является разделителем между некоторой подходящей парой (a_i, a_j). Поэтому достаточно показать, что для заданной пары точек (a, b) равенство $\mathrm{ord}_p\mathscr{X}=2$ имеет место для каждой точки $p\in S(a, b)$, за исключением, возможно, счетного множества таких точек.

Представим себе, что точки $p\in S(a, b)$ снабжены индексами в соответствии с теоремой 2 из § 46, VIII. Согласно теореме 3

[1]) См. Уайбери [6, стр. 606]. Обобщение теоремы 6 на *точки локального разделения* см. Уайберн [9, стр. 309].

из § 46, VIII, каждому индексу y, за исключением, может быть, счетного множества, соответствуют две последовательности индексов $\{z_n\}$ и $\{u_n\}$, такие, что

$$p_y = \bigcap_n A(p_{z_n}) \cap \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})}.$$

Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, то (ср. § 42, V, теорема 1)

$$\lim_{n \to \infty} \delta \left\{ A(p_{z_n}) \cap \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})} \right\} = 0.$$

Так как множество $A(p_{z_n}) \cap \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})}$ есть окрестность точки p_y, то $\operatorname{ord}_{p_y} \mathcal{X} = 2$ в силу следующей формулы:

$$\operatorname{Fr} \left\{ A(p_{z_n}) \cap \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})} \right\} =$$

$$= A(p_{z_n}) \cap \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})} \cap \left\{ \overline{\mathcal{X} - A(p_{z_n})} \cup \overline{\mathcal{X} - \overline{\mathcal{X} - A(p_{u_n})}} \right\} \subset$$

$$\subset \operatorname{Fr} \left[A(p_{z_n}) \right] \cup \operatorname{Fr} \left[A(p_{u_n}) \right] \subset (p_{z_n}) \cup (p_{u_n}).$$

Теорема 10. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связный континуум и p — точка, которая его не разделяет. Если $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant 2$, то существует точка $q \neq p$, такая, что $\operatorname{ord}_{p,q} \mathcal{X} \geqslant 2$.*

Доказательство. Из соотношения $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant 2$ вытекает (ср. с теоремой 6 из п. II) существование замкнутого множества F, удовлетворяющего условиям

$$(29) \qquad F \subset \mathcal{X} - p \quad \text{и} \quad \operatorname{ord}_{p,F} \mathcal{X} \geqslant 2.$$

Так как множество $\mathcal{X} - p$ связно, то, согласно теореме 15 из § 49, II, существует континуум C, такой, что

$$(30) \qquad F \subset C \subset \mathcal{X} - p.$$

Пусть pq — такая дуга, что $pq \cap C = q$.

Предположим, что $\operatorname{ord}_{p,q} \mathcal{X} = 1$. Тогда существует точка r, разделяющая пространство $\mathcal{X}$ между p и q, откуда получаем $r \in (pq - p - q)$. Так как C — континуум, то из соотношений $r \in \mathcal{X} - C$ и $q \in C$ следует, что r — разделяющая точка между p и C.

Следовательно, $\operatorname{ord}_{p,C} \mathcal{X} = 1$ и, согласно (30), $\operatorname{ord}_{p,F} \mathcal{X} = 1$, что противоречит (29).

VI. Дендриты.

Определение. Локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых кривых, называется *дендритом*.

Примеры. (i) Всякая дуга есть дендрит. Объединение трех дуг ab, ac, ad, имеющих попарно только одну общую точку a, есть дендрит (называемый *триодом*).

(ii) Пример 2 п. I — дендрит, содержащий точку порядка ω. Легко сконденсировать эту особенность.

(iii) Континуум из § 49, VI есть дендрит, содержащий нигде не плотный подконтинуум, а именно сегмент 01 оси x.

(iv) Очевидно, что объединение двух дендритов не обязательно должно быть дендритом. Кроме того, из рисунка в § 50, IV видно, что объединение двух дендритов может содержать континуум, который не является локально связным. Ср. с замечанием 1 п. VII.

(v) На плоскости существует дендрит, топологически содержащий каждый другой дендрит [1]).

Если $\mathcal{X}$ — дендрит, то имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пространство $\mathcal{X}$ уникогерентно.*

Более точно, *если K и L — два континуума в пространстве $\mathcal{X}$, то множество $K \cap L$ — континуум.*

Доказательство. Если $\mathcal{X}$ — локально связный континуум, то каждый подконтинуум континуума $\mathcal{X}$ есть пересечение бесконечной убывающей последовательности локально связных континуумов (ср. § 50, III, теорема 1). А так как пересечение всякой убывающей последовательности континуумов является континуумом (ср. § 47, II, теорема 5), то доказательство сводится к случаю, когда K и L — локально связные континуумы.

Предположим, что $K \cap L$ не связно:

$$K \cap L = P \cup Q, \quad P \cap Q = 0, \quad 0 \neq P = \bar{P}, \quad 0 \neq Q = \bar{Q};$$

тогда существуют (ср. § 50, II, теорема 1) дуга A и две точки p и q, такие, что

$$A \subset K, \quad A \cap P = (p) \quad \text{и} \quad A \cap Q = (q).$$

Пусть B — дуга $pq \subset L$; тогда

$$A \cap B \subset A \cap K \cap L = A \cap (P \cup Q) = (p) \cup (q).$$

Следовательно, $A \cup B$ — простая замкнутая кривая.

Замечание. Обратно, каждый одномерный локально связный уникогерентный континуум есть дендрит; см. § 57, III, теорема 8.

---

[1]) Доказательство см., например, Менгер [2, гл. X, 6]. Ср. Важевский [1, стр. 57].

Следствие 2. *Всякую пару точек $a \neq b$ в дендрите можно соединить единственной дугой ab, имеющей в качестве концов эти точки.*

Теорема 3. *Если подконтинуумы K и L дендрита $\mathscr{X}$ не пересекаются, то* $\operatorname{ord}_{K,L}\mathscr{X} = 1$, *т. е. существует точка p, разделяющая K и L.*

В частности,

(1) $$\operatorname{ord}_{x,y}\mathscr{X} = 1 \quad \text{для любых} \quad x \neq y.$$

Более того, *если K — континуум, а L — объединение n континуумов и $K \cap L = 0$, то* $\operatorname{ord}_{K,L}\mathscr{X} \leqslant n$.

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Пусть A — дуга qr, такая, что $A \cap K = q$ и $A \cap L = r$. Каждая точка $p \in A - q - r$ разделяет K и L, ибо если бы K и L содержались в одной и той же компоненте множества $\mathscr{X} - p$, то существовала бы (ср. § 50, II, теорема 1) дуга $B \subset \mathscr{X} - p$ с концами q и r и, следовательно, $A \neq B$, что противоречит теореме 2.

Пусть, далее, $L = L_1 \cup \ldots \cup L_n$ есть объединение n ($n \geqslant 1$) континуумов. Как только что было показано, существуют точка p_i и открытое множество G_i (где $i = 1, \ldots, n$), такие, что

$$K \subset G_i, \quad \operatorname{Fr}(G_i) = p_i \quad \text{и} \quad L_i \subset \mathscr{X} - \overline{G}_i.$$

Положим $G = G_1 \cap \ldots \cap G_n$. Тогда

$$K \subset G, \quad \operatorname{Fr}(G) \subset \operatorname{Fr}(G_1) \cup \ldots \cup \operatorname{Fr}(G_n) = (p_1, \ldots, p_n)$$

и

$$L \subset (\mathscr{X} - \overline{G}_1) \cup \ldots \cup (\mathscr{X} - \overline{G}_n) = \mathscr{X} - (\overline{G}_1 \cap \ldots \cap \overline{G}_n) \subset \mathscr{X} - \overline{G}.$$

Следовательно, множество $\operatorname{Fr}(G)$ разделяет $\mathscr{X}$ между K и L и состоит не более чем из n точек.

Согласно теореме 9 п. IV, из условия (1) вытекает следующая

Теорема 4. *Пространство $\mathscr{X}$ есть регулярный континуум.* Следовательно, *всякий подконтинуум дендрита — дендрит.*

Замечание. Та же импликация показывает, что условие (1) *характеризует* дендриты в классе континуумов. Действительно, с одной стороны, всякий регулярный континуум локально связен (согласно теореме 1, п. IV), а с другой стороны, не существует пространства, содержащего простую замкнутую кривую и удовлетворяющего условию (1).

Теорема 5 (разложения). *Для каждого* $\varepsilon>0$ *существует конечная система дендритов* $F_1, \ldots, F_k$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathscr{X}=F_1\cup\ldots\cup F_k,\quad \delta(F_i)<\varepsilon,\quad \overline{\overline{F_i\cap F_j}}\leqslant 1 \quad \text{и} \quad F_h\cap F_i\cap F_j=0$$

для любой системы различных индексов.

Доказательство. Так как $\mathscr{X}$ — регулярный континуум (по теореме 4), рассмотрим разложение (14) из п. IV. Множество F_i, как подконтинуум $\mathscr{X}$, — дендрит (согласно теореме 4). Так как пересечение $F_i\cap F_j$ конечно и связно (по теореме 1), то оно содержит не более одной точки.

Теорема 6. *Если число компонент множества* $\mathscr{X}-p$ *конечно, то оно равно* $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}$.

Доказательство. Пусть это число равно n. Ясно, что $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}\geqslant n$; поэтому достаточно показать, что $\operatorname{ord}_p\mathscr{X}\leqslant n$; другими словами (ср. II, теорема 6), что для всякого замкнутого множества F, такого, что $p\in\mathscr{X}-F$, существует множество, состоящее из n точек и разделяющее $\mathscr{X}$ между p и F.

Пусть $\mathscr{X}-p=R_1\cup\ldots\cup R_n$ — объединение n областей. Множество $F\cap R_i$ замкнуто, так как $\overline{F\cap R_i}\subset F\cap(R_i\cup p)=F\cap R_i$; следовательно, существует континуум K_i, такой, что $F\cap R_i\subset K_i$ (ср. § 49, II, теорема 15). Таким образом, согласно теореме 3, существует множество, состоящее (не более чем) из n точек, которое разделяет $\mathscr{X}$ между $K_1\cup\ldots\cup K_n$ и p и, следовательно, между F и p.

Теорема 7. $\overline{\overline{\mathscr{X}-\mathscr{X}^{[2]}}}<\aleph_0$.

Другими словами, *в дендрите множество точек «разветвления» счетно.*

Доказательство. Это следует из теоремы 6 и теоремы 1 из § 46, IX.

Теорема 8. $\mathscr{X}=\overline{\mathscr{X}^{[2]}-\mathscr{X}^{[1]}}$ (*при условии что* $\mathscr{X}$ *состоит более чем из одной точки*) [1].

Доказательство. Пусть G — (непустое) открытое множество и A — дуга $ab\subset G$. Очевидно, что

$$A\cap\mathscr{X}^{[1]}\subset(ab),\quad \text{поэтому}\quad \overline{\overline{A\cap\mathscr{X}^{[1]}}}\leqslant 2,$$

и по теореме 7

$$\overline{\overline{A-\mathscr{X}^{[2]}}}\leqslant\aleph_0.$$

---

[1]) См. Менгер [7].

Следовательно,

$$\overline{(A \cap \mathscr{X}^{\cdot[2]} - \mathscr{X}^{\cdot[1]})} = c,$$

откуда

$$G \cap \mathscr{X}^{\cdot[2]} - \mathscr{X}^{\cdot[1]} \neq 0.$$

Теорема 9. *Пусть $\mathscr{X}$ — дендрит; тогда всякое непрерывное отображение f: $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ имеет неподвижную точку* [1]).

VII. Локальные дендриты.

Определение. Континуум называется *локальным дендритом*, если всякая его точка имеет окрестность, являющуюся дендритом.

Из теоремы 4 п. VI непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. *Всякий локальный дендрит есть регулярный континуум.*

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ — локальный дендрит, то существует такое $\varepsilon > 0$, что всякий подконтинуум C диаметра $< \varepsilon$ является дендритом.*

Доказательство. В силу компактности $\mathscr{X}$ существует конечная система дендритов $D_1, \ldots, D_n$, такая, что

$$\mathscr{X} = \operatorname{Int}(D_1) \cup \ldots \cup \operatorname{Int}(D_n).$$

Поэтому существует (ср. § 41, VI, следствие 4d) такое $\varepsilon > 0$, что всякое множество диаметра $< \varepsilon$ содержится в одном из множеств $\operatorname{Int}(D_i)$, а следовательно, в дендрите D_i. Пусть C — континуум диаметра $< \varepsilon$. Так как всякий подконтинуум дендрита — дендрит (по теореме 4 п. VI), то C — дендрит.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{X}$ — локально связный континуум и ε — точная нижняя грань диаметров простых замкнутых кривых, содержащихся в $\mathscr{X}$. Если $\varepsilon > 0$, то $\mathscr{X}$ — локальный дендрит.*

Доказательство. Если $p \in \mathscr{X}$ и C — локально связный континуум, являющийся окрестностью точки p, такой, что $\delta(C) < \varepsilon$ (ср. § 50, II, теорема 3), то C не содержит простых замкнутых кривых, а это и означает, что C — дендрит.

Теорема 4. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы $\mathscr{X}$ было локальным дендритом:*

(i) *$\mathscr{X}$ — локально связный континуум, содержащий не более конечного числа простых замкнутых кривых;*

[1]) Ср. § 53, III, теоремы 8 и 16. Частный случай теоремы 9, когда f — гомеоморфизм, был установлен Шерером [1]. См. также Айрес [4].

(ii) *$\mathcal{X}$ — континуум, являющийся конечным объединением дендритов*:

(1) $\mathcal{X} = D_1 \cup \ldots \cup D_k$, *где* $\overline{D_i \cap D_j} < \omega$ *для* $i \neq j$.

Доказательство. 1. Из условия (i) вытекает, что $\mathcal{X}$ — локальный дендрит. Это прямое следствие теоремы 3.

2. Если $\mathcal{X}$ — локальный дендрит, то $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию (ii). Действительно, $\mathcal{X}$ — регулярный континуум (по теореме 1), поэтому (согласно замечанию 2 из п. IV) существуют континуумы $D_1, \ldots, D_k$, удовлетворяющие условию (1) и имеющие диаметр $< \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число. Предположим, что ε — число, определенное в теореме 2; тогда континуумы $D_1, \ldots, D_k$ суть дендриты.

3. Из условия (ii) следует условие (i). Для доказательства положим

$$(2) \qquad F = \bigcup_{i \neq j} D_i \cap D_j,$$

и пусть $\boldsymbol{A}$ — семейство всех дуг A, удовлетворяющих следующим двум условиям:

(I) A содержится в одном из дендритов D_i;

(II) концевые точки дуги A принадлежат F.

Так как множество F конечно, то конечно и семейство $\boldsymbol{A}$ (ср. VI, теорема 2).

Пусть C — простая замкнутая кривая, содержащаяся в $\mathcal{X}$. Тогда $C \cap F \neq 0$, так как C не содержится ни в каком D_i. Если R — компонента множества $C - F$, то $\overline{R} \in \boldsymbol{A}$. Отсюда следует, что C — объединение некоторых дуг, принадлежащих семейству $\boldsymbol{A}$. Так как это семейство конечно, то конечно и семейство простых замкнутых дуг, содержащихся в $\mathcal{X}$.

Теорема 5. *Если в локально связном континууме содержится бесконечное множество простых замкнутых кривых, то среди них имеются кривые произвольно малых диаметров* [1]).

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{X}$ — локальный дендрит, если точная нижняя грань диаметров простых замкнутых кривых, содержащихся в $\mathcal{X}$, положительна. Но в таком случае $\mathcal{X}$ содержит только конечное число простых замкнутых кривых (ср. (i)).

Теорема 6. *Теоремы 7 и 8 п.* VI *остаются верными, если предполагать, что $\mathcal{X}$ — локальный дендрит.*

---

[1]) Теорема Заранкевича [1, стр. 146].

Доказательство. Применим условие (ii) теоремы 4. Пусть F определяется равенством (2); тогда $\operatorname{ord}_p(D_i - F) = \operatorname{ord}_p \mathscr{X}$ для любого p (ср. II, теорема 4). Поэтому

$$D_i^{[2]} - F \subset \mathscr{X}^{[2]},$$

следовательно,

$$\mathscr{X} - \mathscr{X}^{[2]} = \bigcup_{i=1}^{k} (D_i - \mathscr{X}^{[2]}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (D_i - D_i^{[2]}) \cup F.$$

Отсюда, согласно теореме 7 п. VI,

$$\overline{\overline{\mathscr{X} - \mathscr{X}^{[2]}}} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \overline{\overline{(D_i - D_i^{[2]})}} + \overline{\overline{F}} \leqslant \aleph_0.$$

Аналогично (ср. II, теорема 4)

$$\mathscr{X}^{[2]} - \mathscr{X}^{[1]} - F = \bigcup_{i=1}^{k} D_i \cap (\mathscr{X}^{[2]} - \mathscr{X}^{[1]}) - F = \bigcup_{i=1}^{k} (D_i^{[2]} - D_i^{[1]}) - F,$$

а так как множество F конечно, то, согласно теореме 8 п. VI,

$$\overline{\mathscr{X}^{[2]} - \mathscr{X}^{[1]}} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{D_i^{[2]} - D_i^{[1]}} = \bigcup_{i=1}^{k} D_i = \mathscr{X}.$$

Теорема 7. *Всякий локальный дендрит, топологически не содержащийся в плоскости, топологически содержит одну из двух следующих ломаных* (рис. 11 — 12):

(i) *объединение ребер тетраэдра и сегмента, соединяющего два непересекающихся ребра;*

(ii) *объединение ребер тетраэдра и четырех сегментов, соединяющих центр тетраэдра с его вершинами*[1]).

Теорема 7 и теорема 10 из § 50, II дают следующее утверждение:

Теорема 7′. *Пусть $\mathscr{X}$ есть одномерный локально связный континуум. Если не существует непрерывного отображения $\mathscr{X}$ в плоскость с прообразами точек диаметра $< \varepsilon$, где ε — положительное число, выбранное должным образом, то*

---

[1]) Доказательство см. Куратовский [23].

Если локальный дендрит представляет собой ломаную (граф), то теорему можно доказать проще. См. Дирак и Шустер [1], [2]; Берж [1]; Халин [1]; Бусэкер и Саати [1, стр. 70—73]; Тутти и Харари [1].

См. также Уитни [1]; Мак-Лейн [1], [2]; Лефшец [5]; Холл [2]; Бинг [3]; Вагнер [1]; Оре [1]; Харари [1].

Что касается других ссылок на литературу, см. очень подробную библиографию в работе Зыкова [1].

континуум $\mathscr{X}$ топологически содержит одну из двух ломаных, определенных выше [1]).

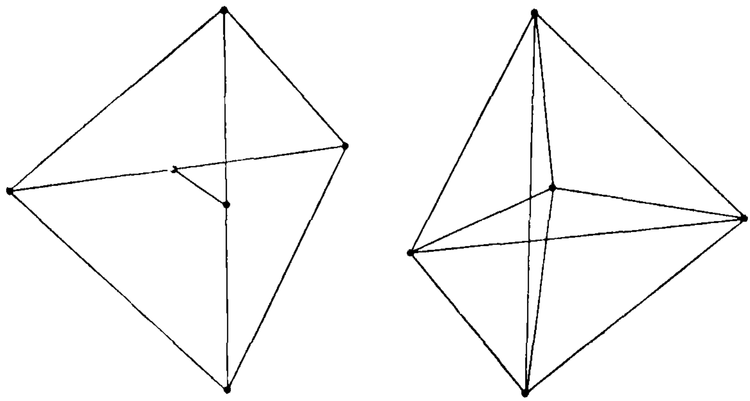

Рис. 11–12

Теорема 8 [2]). *Континуум $\mathscr{X}$ есть локальный дендрит тогда и только тогда, когда его можно деформировать в топологическую ломаную с помощью малого непрерывного сдвига; другими словами, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная функция $f: \mathscr{X} \times \mathscr{I} \to \mathscr{X}$ и ломаная линия L, такая, что*

$$f(x, 0) = x, \quad |f(x, t) - x| < \varepsilon \quad \text{и} \quad f(\mathscr{X}, 1) \underset{\text{top}}{=} L.$$

Теорема 9. *Всякий локальный дендрит есть объединение двух дендритов* [3]).

Замечание 1. Объединение двух дендритов (даже двух дуг) не обязательно должно быть локальным дендритом. Более того, для каждого n существует (на плоскости) регулярный континуум порядка 3, являющийся объединением ровно n и никакого меньшего числа дендритов [4]).

Замечание 2. В теореме 7 предположение о том, что пространство есть локальный дендрит, можно заменить предположением: *пространство есть локально связный континуум, не содержащий точек разреза* [5]).

---

[1]) Теорема Мазуркевича [24].
[2]) Теорема Александрова [6].
[3]) Теорема Стинрода [1, стр. 565].
[4]) См. Борсук [11].
[5]) Это утверждение доказано Клейтором [1]. Простое доказательство см. Моиз [4].

Клейтор [1] рассматривал общую проблему характеризации произвольного локально связного континуума, содержащегося в плоскости.

Замечание 3. Всякая не лежащая в плоскости двумерная полиэдральная поверхность, за исключением сферы $\mathcal{S}^2$, содержит каждый из элементарных графов (i) и (ii)[1]).

§ 52. Циклические элементы локально связного метрического континуума[2])

I. Вполне дугообразно связные множества[3]**).** Так мы будем называть всякое подмножество L локально связного континуума $\mathcal{X}$, удовлетворяющее следующему условию:

(1) *если $x, y \in L$, то всякая дуга xy содержится в L.*

Из этого определения, очевидно, вытекают следующие два утверждения.

Теорема 1. *Пересечение произвольного семейства вполне дугообразно связных множеств является вполне дугообразно связным.*

Теорема 2. *Всякое вполне дугообразно связное множество локально и глобально дугообразно связно.*

Теорема 3. *Если объединение и пересечение двух множеств M и N, замкнутых в $M \cup N$, являются вполне дугообразно связными, то и сами множества M и N вполне дугообразно связные.*

Доказательство. Пусть ab — дуга с концевыми точками $a, b \in M$. Покажем, что $ab \subset M$. По предположению

(2) $\quad ab \subset M \cup N$, т. е. $ab = (ab \cap M) \cup (ab \cap N)$.

Пусть $c \in ab \cap N$. Покажем, что $c \in M$.

Множества $ac \cap M$ и $ac \cap N$ замкнуты в $M \cup N$, а следовательно, в ac; поэтому из равенства (ср. (2)) $ac = (ac \cap M) \cup (ac \cap N)$

---

[1]) См. Куратовский [23, стр. 282].

[2]) Ср. Куратовский и Уайберн [2]. По поводу некоторых обобщений понятия циклического элемента и разбиений на более тонкие элементы см. Уайберн [19], Холл [1], Радо и Рейхельдерфер [1] и [2], Юнгс [1], Альберт и Юнгс [1], Уоллес [4]. См. также Мак-Аллистер [1], где имеется много литературных ссылок.

[3]) Ср. с понятием *дуги-кривой* (arc-curve) Айреса [1]. Это понятие является вспомогательным в теории циклических элементов, которая будет изучаться в п. II.

вытекает, что $ac \cap M \cap N \neq 0$. Пусть $p \in ac \cap M \cap N$ и $q \in cb \cap M \cap N$. По предположению дуга pcq содержится в $M \cap N$. Поэтому $c \in M$.

Пусть L — *замкнутое вполне дугообразно связное множество.* Имеет место следующая

Теорема 4. *Граница любой компоненты R множества $\mathscr{X} - L$ состоит из одной точки (принадлежащей L).*

Доказательство. Действительно, в противном случае граница $\operatorname{Fr}(R)$ содержала бы две различные точки p и q, достижимые из R (ср. § 50, III, теорема 6). Поэтому существовала бы дуга $pq \subset R \cup p \cup q$, откуда $pq - L \neq 0$, что противоречит предположению.

Теорема 5. *Всякое замкнутое множество F, разделяющее L между A и B (где $A \cup B \subset L$), разделяет все пространство $\mathscr{X}$ между этими множествами.*

Доказательство. Если F не разделяет пространство между A и B, то существует дуга ab, такая, что $a \in A$, $b \in B$ и $ab \cap F = 0$. Так как $ab \subset L$, то последнее равенство показывает, что F не разделяет множество L между A и B.

Теорема 5′. *Если $A \cup B \subset L \cap Z$ и Z связно между A и B, то между A и B связно и множество $L \cap Z$.*

Доказательство. Предположим, что $L \cap Z$ не связно между A и B, т. е. что $L - Z$ разделяет L между A и B. Тогда множество $L - Z$ содержит (ср. § 46, VII, теорема 3) замкнутое множество F, разделяющее L между A и B. По теореме 5 множество F разделяет все пространство $\mathscr{X}$ между этими множествами и, следовательно, $\mathscr{X} - F$ не связно между A и B. То же самое имеет место для Z, ибо $Z \subset \mathscr{X} - F$.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает следующая

Теорема 6. *Если $A \cup B \subset L$, то* $\operatorname{ord}_{A,B} L = \operatorname{ord}_{A,B} \mathscr{X}$.

Теорема 7. *Если последовательность компонент $R_1, R_2, \ldots$ множества $\mathscr{X} - L$ бесконечна, то* $\lim\limits_{n \to \infty} \delta(R_n) = 0$.

Доказательство. Действительно, в противном случае можно было бы выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{R_{n_k}\}$, предел которой содержит две точки $a \neq b$. Полагая $Z = \bigcup\limits_k R_{n_k} \cup a \cup b$, мы получили бы, что $a, b \in L \cap Z$. Таким образом, множество Z оказалось бы связным между a и b (ср. § 46, IV, теорема 9), тогда как $L \cap Z$ не связно (поскольку оно состоит из двух точек a и b).

Теорема 8. *Если A и B — два замкнутых вполне дугообразно связных множества, таких, что $A \cap B \neq 0$, то множество $A \cup B$ вполне дугообразно связно.*

Более того, *множество $A \cap B$ разделяет пространство между $A - B$ и $B - A$.*

Доказательство. Пусть ab — дуга, концевые точки которой принадлежат $A \cup B$. Мы должны показать, что $ab \subset A \cup B$.

Предположим, что это не так. Пусть a_1b_1 — интервал дуги a', смежный к множеству $ab \cap (A \cup B)$. Так как оба множества A и B вполне дугообразно связны, ни одно из них не может содержать обе точки a_1 и b_1. Поэтому можно считать, что

(3) $$a_1 \in A - B$$

и

(4) $$b_1 \in B - A.$$

Следовательно,

(5) $$a_1b_1 \cap A = a_1$$

и

(6) $$a_1b_1 \cap B = b_1.$$

Пусть $c \in A \cap B$. Так как $b_1,\ c \in B$, то всякая дуга b_1c удовлетворяет условиям

(7) $$b_1c \subset B, \quad \text{откуда} \quad a_1b_1 \cap b_1c = b_1,$$

согласно (6). Следовательно, $a_1b_1 \cup b_1c$ — дуга, концевые точки которой принадлежат A. Но в таком случае $a_1b_1 \cup b_1c \subset A$, а отсюда $b_1 \in A$ вопреки (4).

Вторая часть теоремы следует непосредственно из теоремы 5, так как множество $A \cap B$ разделяет $A \cup B$ между $A - B$ и $B - A$.

Теорема 9. *Если пространство $\mathscr{X}$ уникогерентно, то уникогерентно и множество L.*

Доказательство. Пусть A и B — два таких континуума, что $L = A \cup B$. Мы должны показать, что их пересечение $A \cap B$ — континуум.

Пусть M — объединение всех компонент R множества $\mathscr{X} - L$, таких, что $\mathrm{Fr}(R) \subset A$. Пусть S — объединение всех остальных компонент множества $\mathscr{X} - L$. Так как (по теореме 4) множество $\mathrm{Fr}(R)$ состоит из одной точки, принадлежащей L, то граница компонент, составляющих S, содержится в B. Отсюда следует, что

$$\mathscr{X}=(A\cup M)\cup(B\cup S) \tag{8}$$

и

$$(A\cup M)\cap(B\cup S)=A\cap B. \tag{9}$$

Так как множества $A\cup M$ и $B\cup S$ — континуумы (ср. § 49, III, теорема 1) и пространство $\mathscr{X}$ уникогерентно, то $A\cap B$ — континуум.

Теорема 10. *Пусть K, K_1, K_2, ... — последовательность континуумов, такая, что*

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} K_n=K\subset L, \tag{10}$$

$$L\cap K_n\neq 0. \tag{11}$$

Тогда

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} L\cap K_n=K. \tag{12}$$

Доказательство. Согласно (10) и § 29, IV, 2,

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty}(L\cap K_n)\subset \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} K_n=K.$$

Покажем, что

$$K\subset \operatorname*{Li}_{n\to\infty}(L\cap K_n). \tag{13}$$

Пусть $p\in K$. Определим такую последовательность p_1, p_2, ..., что

$$p_n\in L\cap K_n \tag{14}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} p_n=p. \tag{15}$$

Согласно (10), $p\in \operatorname*{Li}_{n\to\infty} K_n$. Поэтому существует последовательность q_1, q_2, ..., такая, что

$$q_n\in K_n \tag{16}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} q_n=p. \tag{17}$$

Определим p_n следующим образом. Если $q_n\in L$, то положим $p_n=q_n$; если $q_n\in\mathscr{X}-L$, то в соответствии с теоремой 4 положим

$$p_n=\operatorname{Fr}(R_n),\quad \text{где}\quad q_n\in R_n \tag{18}$$

и R_n — компонента множества $\mathscr{X}-L$.

Мы утверждаем, что соотношение (14) удовлетворяется. В случае $q_n\in L$ это видно непосредственно из (16), поэтому предположим, что $q_n \in \mathcal{X} - L$ и, следовательно, $q_n \in K_n - L$ (согласно (16)). Отсюда следует, что

$$(19) \qquad K_n \cap R_n \neq 0 \neq K_n - R_n,$$

так как $0 \neq L \cap K_n \subset K_n - R_n$, согласно (11).

Из условия (19) вытекает (ср. § 46, I, теорема 1), что

$$K_n \cap \operatorname{Fr}(R_n) \neq 0, \quad \text{поэтому} \quad p_n \in K_n$$

(согласно (18)), а так как $\operatorname{Fr}(R_n) \subset L$ (ср. § 49, III, теорема 3), то отсюда следует условие (14).

Предположим, что условие (15) не удовлетворяется. Тогда существует такая последовательность $m_1 < m_2 < \ldots$, что никакая подпоследовательность последовательности $\{p_{m_n}\}$ не сходится к p.

Следовательно, в соответствии с (17) можно считать, что $p_{m_n} \neq q_{m_n}$ при любом n, а потому, согласно (18),

$$(20) \qquad p_{m_n} = \operatorname{Fr}\{R_{m_n}\}.$$

Далее необходимо различать два случая.

(i) Существует последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$, такая, что компоненты $R_{m_{i_1}}, R_{m_{i_2}}, \ldots$ попарно различны. Тогда, согласно теореме 7 и (20), имеем

$$\lim_{n\to\infty} \delta\left(R_{m_{i_n}}\right) = 0, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n\to\infty} \left| p_{m_{i_n}} - q_{m_{i_n}} \right| = 0;$$

следовательно, согласно (17),

$$\lim_{n\to\infty} p_{m_{i_n}} = p.$$

(ii) Существуют индекс r и последовательность индексов $i_1 < i_2 < \ldots$, такие, что $R_{m_{i_1}} = R_{m_{i_2}} = \ldots = R_r$. Положим

$$(21) \qquad a = \operatorname{Fr}(R_r).$$

Из (20) вытекает, что

$$(22) \qquad p_{m_{i_1}} = p_{m_{i_2}} = \ldots = a, \quad \text{откуда} \quad \lim_{n\to\infty} p_{m_{i_n}} = a.$$

С другой стороны, $q_{m_{i_n}} \in R_r$ (согласно (18)); следовательно, $p \in \bar{R}_r$ (согласно (17)). Так как (ср. (10)) $p \in L$, то $p \in \operatorname{Fr}(R_r)$, а это означает, что $p = a = \lim\limits_{n\to\infty} p_{m_{i_n}}$, согласно (21) и (22).

Итак, в обоих случаях последовательность $\{p_{m_n}\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к p, что противоречит определению последовательности $\{m_n\}$.

II. Циклические элементы.

Определение. *Циклическими элементами*[1]) *пространства* $\mathcal{X}$ мы называем следующие объекты:

(i) каждую точку, разделяющую $\mathcal{X}$;

(ii) каждое множество

$$E_p = \mathop{\mathsf{E}}_{x} (\operatorname{ord}_{p,x} \mathcal{X} \geqslant 2) \tag{1}$$

(т. е. множество таких точек x, для которых не существует точек, разрезающих $\mathcal{X}$ между p и x) при условии, что p не разделяет $\mathcal{X}$.

Пример. Пусть пространство $\mathcal{X}$ состоит из двух окружностей, касающихся внешним образом, и некоторого радиуса. Циклическими элементами являются каждая из окружностей, а также их общая точка и каждая точка радиуса.

Легко доказать следующие утверждения:

Теорема 1. *Если p не разделяет пространство, то $p \in E_p$. Следовательно, пространство является объединением своих циклических элементов.*

Теорема 2. *Если* $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} = 1$, *то* $E_p = p$.

Однако из теоремы 10 § 51, V вытекает следующая

Теорема 3. *Если точка p не разделяет пространство и если* $\operatorname{ord}_p \mathcal{X} \geqslant 2$, *то* $E_p - p \neq 0$.

Теорема 4. *Если $E_a \neq E_b$, то множество $E_a \cap E_b$ либо пусто, либо состоит из одной точки, которая разделяет пространство.*

Доказательство. Пусть $c \in E_a - E_b$. Тогда существует точка q, разделяющая пространство между c и b. Пусть $p \in E_a \cap E_b$. Покажем, что $p = q$. По предположению

$$\operatorname{ord}_{a,p} \mathcal{X} \geqslant 2, \quad \operatorname{ord}_{p,b} \mathcal{X} \geqslant 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{ord}_{c,a} \mathcal{X} \geqslant 2. \tag{2}$$

Более того, $q \neq a$, так как a не является разделяющей точкой.

Предположим, что $p \neq q$. Тогда (согласно (2)) следующие точки можно соединить дугами, минуя q: a с p, p с b, c с a и, следовательно, c с b. Но в таком случае q не отделяет c от b, что противоречит определению точки q.

Теорема 5. *Если b не разделяет пространство и $b \in E_a$, то $E_b = E_a$.*

---

[1]) Понятие циклического элемента принадлежит Уайберну [5]. Ср. также Мур [11].

Доказательство. Действительно, $b \in E_a \cap E_b$ по теореме 1, а $E_a \cap E_b \neq b$ по теореме 4.

Теорема 6. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы множество E (содержащее более одной точки) было циклическим элементом:*

(i) *существуют две точки $a \neq b$, такие, что*

(3) $$\operatorname{ord}_{a,b} \mathscr{X} \geqslant 2,$$

и множество E является пересечением всех замкнутых вполне дугообразно связных множеств, содержащих a и b;

(ii) *E связно и насыщено относительно свойства не содержать точек, разделяющих его.*

Доказательство. 1. Пусть E_a — циклический элемент, причем $E_a \neq a$. Пусть $b \in E_a - a$ и L — пересечение всех замкнутых вполне дугообразно связных множеств, содержащих a и b. Покажем, что

(4) $$E_a = L.$$

Пусть $x \in \mathscr{X} - L$, R — компонента множества $\mathscr{X} - L$, содержащая x, и $y = \operatorname{Fr}(R)$ в соответствии с теоремой 1. п. I и теоремой 4. Так как y разделяет пространство, а a его не разделяет, то $y \neq a$, и, поскольку $a \in L$, а $x \in R$, точка y разделяет пространство между a и x. Следовательно, $x \in \mathscr{X} - E_a$, откуда вытекает, что $E_a \subset L$.

Обратно, пусть $x \in \mathscr{X} - E_a$; тогда существует точка y, разделяющая пространство между a и x. Поэтому

(5) $$\mathscr{X} = M \cup N, \quad \overline{M} = M, \quad \overline{N} = N, \quad a \in M, \quad x \in N, \quad M \cap N = y.$$

Так как $b \in E_a - a$, то отсюда вытекает равенство (3), а поэтому, согласно (5), $b \in M$. Применим теорему 3 п. 1; тогда из условий (5) следует, что M вполне дугообразно связно; поэтому из определения L получаем, что $L \subset M$, откуда $x \in \mathscr{X} - L$, ибо, согласно последним двум соотношениям (5), $x \in \mathscr{X} - M$.

Итак $L \subset E_a$, откуда получается равенство (4).

2. Мы утверждаем, что из условия (i) вытекает условие (ii).

Если E удовлетворяет условию (i) и $x \in E$, то множество $E - x$ связно. Предположим, что

(6) $$E = M \cup N, \quad \overline{M} = M, \quad \overline{N} = N \quad \text{и} \quad M \cap N = x.$$

Покажем, что либо $M = E$, либо $N = E$.

Так как имеет место хотя бы одно из неравенств $x \neq a$ или $x \neq b$, то пусть, например, $x \neq a$. Более того, можно предположить, что $a \in M$. Согласно (3), точка x не разделяет пространство между a и b, следовательно, и множество E не разделяет пространство между этими точками (ср. теоремы 1, 4 и

5 п. I). Таким образом, согласно условию (6) и теореме 3 п. I, множество M замкнуто, вполне дугообразно связно и содержит точки a и b. Поэтому $E \subset M$, откуда в силу (6) получаем $M = E$.

Далее, пусть C — связное множество, такое, что $E \subset C \neq E$. Покажем, что C содержит точку, которая его разделяет.

Пусть $p \in C - E$, и пусть R — компонента множества $\mathscr{X} - E$, содержащая p. В соответствии с теоремой 4 п. I положим $q = \operatorname{Fr}(R)$. Очевидно, что C разделяется точкой q.

3. Далее, из условия (ii) следует, что E — циклический элемент.

В самом деле, по предположению никакая точка не разделяет множество E, поэтому множество точек из E, разделяющих пространство, не более чем счетно (ср. § 46, IX, теорема 3). Пусть p — точка множества E, не разделяющая пространство. Покажем, что $E = E_p$.

По предположению $\operatorname{ord}_{p,x} E \geqslant 2$ для каждого $x \in E$, следовательно, $\operatorname{ord}_{p,x} \mathscr{X} \geqslant 2$, откуда, согласно (1), $x \in E_p$. Таким образом, $E \subset E_p$.

Итак, $E = E_p$, поскольку (как было доказано) E_p удовлетворяет условию (ii), из которого следует, что E_p связно и не содержит разделяющих точек; с другой стороны, E насыщено относительно этого свойства.

Замечание. Теорему 4 можно переформулировать следующим образом:

Если A и B — два циклических элемента и p — такая точка, что $A \cap B = p$, то точка p разделяет пространство между $A - B$ и $B - A$.

Это непосредственное следствие теоремы 8 п. I, ибо множества A и B вполне дугообразно связны (согласно теореме 6 (i) и теореме 1 п. I).

Теорема 7. *Всякий циклический элемент является локально связным континуумом.*

Доказательство. Это непосредственное следствие условия (i) теоремы 6, теоремы 1 п. I и теоремы 2.

Теорема 8. *Если E — циклический элемент, то множество A его точек, принадлежащих другим циклическим элементам, счетно.*

Доказательство. Согласно условию (ii) теоремы 6, не существует точек, разделяющих множество E. Поэтому (ср. § 46, IX, теорема 3) множество B разделяющих точек пространства, принадлежащих E, не более чем счетно. Наконец, по теореме 4 $A \subset B$.

Теорема 9. *Если $E^1, E^2, \ldots$ — последовательность различных циклических элементов, то* $\lim_{n\to\infty} \delta(E^n) = 0$.

Поэтому *семейство всех циклических элементов, не сводящихся к точкам, счетно.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие две последовательности точек $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что

$$a_n,\ b_n \in E^n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \text{и} \quad a \neq b.$$

Из этого следует, что для достаточно больших значений n существуют две непересекающиеся дуги $a_n a_{n+1}$ и $b_n b_{n+1}$ (ср. § 50, II, теорема 4). Но в таком случае пересечение связного множества

$$Z = E^{n+1} \cup a_n a_{n+1} \cup b_n b_{n+1}$$

с множеством E^n не связно, так как

$$Z \cap E^n = (E^n \cap a_n a_{n+1}) \cup ((E^n \cap b_n b_{n+1}) \cup (E^n \cap E^{n+1})),$$

а множество $E^n \cap E^{n+1}$ либо пусто, либо состоит из одной точки (по теореме 4). Этот вывод противоречит теореме 5' п. I, так как E^n вполне дугообразно связно (по теореме 6 (i) и теореме 1 п. I).

Теорема 10. *Всякое связное множество C, которое не разделяется никакой точкой, содержится в некотором циклическом элементе.*

Более точно, *если a и b — две (различные) точки множества C, то пересечение E всех замкнутых, вполне дугообразно связных множеств, содержащих эти точки, является требуемым циклическим элементом.*

Доказательство. Множество E есть циклический элемент по теореме 6 (i), так как $\operatorname{ord}_{a,b} \mathscr{X} \geqslant 2$. С другой стороны, если $p \in C - E$ и R — компонента множества $\mathscr{X} - E$, содержащая p, то точка $\operatorname{Fr}(R)$ (ср. I, теорема 4) разделяет C между a и p или между b и p (в зависимости от того, какое из условий $a \neq \operatorname{Fr}(R)$ или $b \neq \operatorname{Fr}(R)$ имеет место).

Теорема 11. *Для того чтобы континуум L (содержащий более одной точки) был вполне дугообразно связным, необходимо и достаточно, чтобы он был объединением циклических элементов.*

Доказательство. 1. Условие необходимо. Предположим, что точка $p \in L$ не принадлежит никакому циклическому элементу L. Тогда сама точка p не является циклическим элементом и потому не разделяет пространство. Следовательно (ср. с теоремой 4), E_p — единственный циклический элемент, содержащий p.

По предположению $E_p - L \neq 0$. Пусть R — компонента множества $E_p - L$. Так как множество $L \cap E_p$ вполне дугообразно связно относительно множества E_p (рассматриваемого как пространство), то граница R относительно E_p содержит (по теореме 4 из п. I) единственную точку, скажем q. Таким образом, точка q разделяет E_p между $E_p - L$ и $L \cap E_p - q$, откуда, согласно теореме 6 (ii), вытекает, что $L \cap E_p - q = 0$, т. е. $L \cap E_p = q$; а так как $p \in L \cap E_p$, то $q = p$ и $L \cap E_p = p$. Поэтому (ср. I, теорема 8) точка p разделяет пространство между $E_p - L$ и $L - E_p$, и, следовательно, $L - E_p = 0$, т. е. $L - p = 0$, откуда $L = p$, что и противоречит предположению.

2. Условие достаточно. Предположим, что континуум L есть объединение циклических элементов, что $a, b \in L$ и $ab - L \neq 0$. Тогда дуга ab содержит поддугу cd, такую, что

$$(7) \qquad L \cap cd = (c, d) \text{ и } L - cd \neq 0.$$

Очевидно, что $\operatorname{ord}_{c,d} \mathscr{X} \geqslant 2$. Поэтому существует циклический элемент E, такой, что $c, d \in E$, откуда $E - L \neq 0$, согласно (7). Это неравенство приводит к противоречию, так как из теоремы 8 вытекает, что множество $E \cap L$ счетно, а из теорем 6 (i) и 5' п. I вытекает, что $E \cap L$ — континуум (содержащий по крайней мере две точки c и d).

Замечание. Вообще можно доказать, что *связные множества, являющиеся объединениями циклических элементов, совпадают с вполне дугообразно связными множествами*[1]).

Теорема 12. *Всякий континуум сходимости (содержащий более одной точки) пространства $\mathscr{X}$ является континуумом сходимости содержащего его циклического элемента.*

Доказательство. Пусть $K, K_1, \ldots$ — такая последовательность континуумов и a, b — такая пара (различных) точек, что

$$(8) \qquad \operatorname*{Lim}_{n \to \infty} K_n = K,$$

$$(9) \qquad a, b \in K,$$

$$(10) \qquad K_i \cap K_j = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j,$$

$$(11) \qquad K \cap K_n = 0 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

[1]) Ср. Уайберн [1, стр. 80].

Тогда множество $Z = a \cup b \cup K_1 \cup K_2 \cup \ldots$ связно между a и b (согласно теореме 9 из § 46, IV). Из этого следует, что

(12) $$\operatorname{ord}_{a,b} \mathscr{X} \geqslant 2.$$

Действительно, предположим, что p разделяет $\mathscr{X}$ между a и b; тогда одно из множеств K_n, скажем K_1, содержит p. Но в таком случае, согласно (10), точка p не принадлежит множеству $(a \cup b \cup \overline{K_2} \cup \overline{K_3} \cup \ldots)$, которое также связно между a и b.

Таким образом, условие (12) установлено. В соответствии с теоремой 6 (i) пусть E — циклический элемент, содержащий точки a и b.

Так как точки a и b выбираются произвольным образом, то

(13) $$K \subset E.$$

Покажем, что K — континуум сходимости множества E, а именно, что $E \cap K_n$ — континуум, такой, что

(14) $$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} (E \cap K_n) = K,$$

(15) $$K \cap (E \cap K_n) = 0.$$

Но $E \cap K_n$ — континуум (по теореме 5′ из п. I). Кроме того,

(16) $$E \cap K_n \neq 0 \text{ для достаточно больших } n.$$

Действительно, если предположить, что $m_1 < m_2 < \ldots$ и $E \cap K_{m_i} = 0$, то окажется, что множество $V = a \cup b \cup K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup \ldots$ связно между a и b (согласно теореме 9 из § 46, IV), а множество $E \cap V = (a, b)$ не связно; это противоречит теореме 5′ п. I.

Итак, соотношение (16) установлено; соотношение (14) получается из теоремы 10 п. I (если положить $L = E$). Наконец, соотношение (15) есть непосредственное следствие (11).

Лемма 13. *Пусть заданы четыре дуги a_1c_1, a_2c_2, ab и c_1c_2, такие, что* (рис. 13)

(17) $$a_1c_1 \cap a_2c_2 = 0 = ab \cap c_1c_2,$$

(18) $$a_1c_1 \cap c_1c_2 = c_1, \quad a_2c_2 \cap c_1c_2 = c_2.$$

Тогда объединение $a_1c_1 \cup a_2c_2 \cup ab$ содержит две дуги M и N, соединяющие множество (a_1, a_2, a) с точкой b и множество (a_1, a_2) с множеством (c_1, c_2) соответственно, причем таким образом, что

(19) $$M \cap (N \cup c_1c_2) = 0.$$

Доказательство. Следует рассмотреть два случая.

1. $ab \cap (a_1c_1 \cup a_2c_2) = 0$. В этом случае мы полагаем

$$M = ab \quad \text{и} \quad N = a_1c_1 \quad (\text{или } a_2c_2).$$

2. $ab \cap (a_1c_1 \cup a_2c_2) \neq 0$. Пусть p — первая точка (ориентированной) дуги ba, принадлежащая объединению $a_1c_1 \cup a_2c_2$. По соображениям симметрии можно считать, что $p \in a_1c_1$. Тогда

$$a_1p \cap pb = p \neq c_1 \quad \text{и} \quad pb \cap a_2c_2 = 0,$$

и достаточно положить

$$M = a_1p \cup pb \quad \text{и} \quad N = a_2c_2.$$

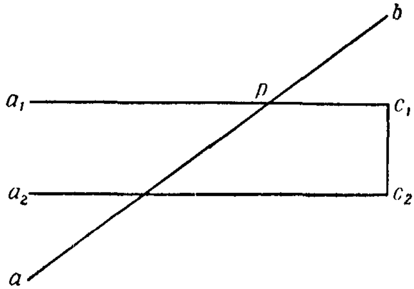

Рис. 13

Лемма 14. *Пусть в локально и глобально дугообразно связном пространстве $\mathcal{X}$ заданы два непересекающихся замкнутых множества A и B, для которых не существует точки x, разделяющей множества $A - x$ и $B - x$. Тогда существуют две непересекающиеся дуги, соединяющие A с B.*

Доказательство[1]. Пусть E — множество таких точек x, что существуют две непересекающиеся дуги, соединяющие A с x и A с B соответственно. Мы должны показать, что $E \cap B \neq 0$. Покажем, что $E = \mathcal{X}$.

Так как пространство связно, то достаточно установить, что

(20) $\qquad E \neq 0,$

(21) $\qquad E$ открыто,

(22) $\qquad E$ замкнуто.

Пусть ab — дуга, неприводимая между A и B. Пусть $a_1 \in (A - a)$. Так как пространство локально дугообразно связно, то существует дугообразно связная окрестность R точки a_1,

[1]) См. Уайберн [16].

не пересекающаяся с ab. Поэтому $R \subset E$, откуда получаем соотношение (20).

Пусть $p \in E$. Тогда существуют две непересекающиеся дуги M и N, соединяющие A с p и с B соответственно. Если R — дугообразно связная окрестность точки p, не пересекающаяся с N, то легко видеть, что $R \subset E$. Поэтому множество E открыто.

Покажем, что $E = \overline{E}$. Пусть $q \in \overline{E}$; мы должны показать, что $q \in E$. В силу предположения точка q не разделяет пространство между $A - q$ и $B - q$. Следовательно, множество $\mathscr{X} - q$ содержит дугу ab, неприводимую между A и B. Пусть R — дугообразно связная окрестность точки q, не пересекающаяся с ab. Тогда существует точка $r \in E \cap R$, а потому — дуга $qr \subset R$, такая, что

$$qr \cap ab = 0, \tag{23}$$

а также две дуги P и Q, соединяющие A с r и с B соответственно и такие, что

$$P \cap Q = 0. \tag{24}$$

Можно предположить, что $Q \cap qr \neq 0$, ибо в противном случае дугу S, соединяющую A с q, можно выбрать в $P \cup qr$, откуда $S \cap Q = 0$ и, следовательно, $q \in E$.

Далее, пусть a_1c_1 и a_2c_2 — две такие дуги, что

$$a_1c_1 \subset Q, \quad a_1 \in A, \tag{25}$$

$$a_1c_1 \cap qr = c_1, \quad a_2 \in A, \tag{26}$$

$$a_2c_2 \subset P, \tag{27}$$

$$a_2c_2 \cap qr = c_2. \tag{28}$$

Предположения леммы выполняются, а именно (17) вытекает из (25), (27), (24) и (23), а (18) следует из (26) и (28).

Итак, множество $a_1c_1 \cup a_2c_2 \cup ab$ содержит две дуги M и N, соединяющие A с B и с (c_1, c_2) соответственно, причем таким образом, что удовлетворяется (19); поэтому (ср. (26), (28) и (23)) имеем

$$M \cap (N \cup c_1c_2 \cup qc_1) = 0. \tag{29}$$

В множестве $N \cup c_1c_2 \cup qc_1$ можно выбрать дугу, соединяющую A с q, и из соотношения (29) вытекает, что $q \in E$.

Теорема 15. *В локально связном континууме $\mathscr{X}$ всякая точка p порядка $\geqslant 2$ расположена на некоторой дуге apb (где $a \neq p \neq b$)*[1].

[1]) Ср. Айрес [3]. Более прямое доказательство см. Айрес [6].

Доказательство. Сначала установим эту теорему при дополнительном предположении, что ни одна точка не разделяет $\mathscr{X}$, т. е. что $\mathscr{X}$ — циклический элемент.

Можно считать, что p не разделяет никакой локально связный континуум C, поскольку всякая дуга, соединяющая в C две точки a и b, принадлежащие различным компонентам множества $C-p$, содержала бы точку p (являющуюся их общей границей).

При этих предположениях определим по индукции две последовательности точек $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$, а также последовательность не содержащих разделяющих точек локально связных континуумов $E_0, E_1, \ldots$, удовлетворяющие следующим условиям:

(30) $$a_n \neq b_n,$$

(31) $$a_n,\ b_n \in E_n - p,$$

(32) $$p \in E_n \subset E_{n-1},$$

(33) $$\delta(E_n) < 1/n.$$

Пусть $E_0 = \mathscr{X}$, а a_0 и b_0 — две такие точки, что

$$a_0 \neq b_0 \quad \text{и} \quad a_0 \neq p \neq b_0.$$

Предполагая, что a_{n-1}, b_{n-1} и E_{n-1} удовлетворяют условиям

(34) $$a_{n-1} \neq b_{n-1}, \quad a_{n-1},\ b_{n-1} \in E_{n-1} - p,$$

(35) $$p \in E_{n-1},$$

обозначим через C_n локально связный континуум, такой, что

(36) $$C_n \subset E_{n-1},$$

(37) $$a_{n-1},\ b_{n-1} \in E_{n-1} - C_n,$$

(38) $$\delta(C_n) < 1/n,$$

а через p — точку множества C_n, внутреннюю относительно E_{n-1}; тогда (ср. § 51, II, теорема 4)

(39) $$\operatorname{ord}_p C_n = \operatorname{ord}_p E_{n-1} \geqslant 2,$$

так как E_{n-1} не содержит разделяющих точек.

Согласно (39), теореме 6 (i) и теореме 10 из § 51, V, точка p принадлежит циклическому элементу множества C_n, скажем E_n, такому, что $E_n \neq p$. Согласно (37), отсюда следует, что a_{n-1}, $b_{n-1} \in E_{n-1} - E_n$. Так как множество E_{n-1} не содержит разделяющих точек, то по теореме 14 существуют две дуги $a_{n-1}a_n$ и $b_{n-1}b_n$, такие, что

(40) $$a_{n-1}a_n \cup b_{n-1}b_n \subset E_{n-1},$$

(41) $$a_{n-1}a_n \cap b_{n-1}b_n = 0, \quad a_{n-1}a_n \cap E_n = a_n \quad \text{и} \quad b_{n-1}b_n \cap E_n = b_n.$$

Из (41) и (38) следует, что выполняются условия (30)—(33) ($a_n \neq p$, ибо в противном случае точка p разделяла бы континуум $E_n \cup a_{n-1}a_n$).

Положим $A = a_0a_1 \cup a_1a_2 \cup \ldots$ и $B = b_0b_1 \cup b_1b_2 \cup \ldots$.

Покажем, что $A \cup p \cup B$ есть дуга a_0pb_0.

Действительно, $A \cup p$ (так же как и $B \cup p$) — дуга, ибо $p \in \mathscr{X} - A$, согласно (32) и (41), и $a_{m-1}a_m \subset (E_{m-1} - E_m) \cup a_m$, согласно (40) и (41), откуда получаем (в силу (32)), что

$$(a_0a_1 \cup \ldots \cup a_{n-1}a_n) \cap a_na_{n+1} \subset (E_0 - E_n \cup a_n) \cap (E_n - E_{n+1} \cup a_{n+1}) = a_n,$$

и, согласно (32), (33) и (40),

$$\operatorname*{Lim}_{n \to \infty} a_{n-1}a_n = p.$$

Наконец, дуги $A \cup p$ и $B \cup p$ имеют единственную общую точку p, так как, согласно (41), $A \cap B = 0$.

Таким образом, в случае, когда $\mathscr{X}$ — циклический элемент, теорема доказана.

Общий случай сводится к предыдущему. Как и раньше, можно считать, что p не является разделяющей точкой. Но тогда из соотношения $\operatorname{ord}_p \mathscr{X} \geqslant 2$ вытекает по теореме 6 (i) и теореме 10 из § 51, V, что p принадлежит циклическому элементу, содержащему более одной точки.

Теорема 16. *Всякая пара точек $p \neq q$ локально связного континуума $\mathscr{X}$, не содержащего разделяющих точек (следовательно, любая пара точек циклического элемента), содержится в некоторой простой замкнутой кривой.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что p принадлежит простой замкнутой кривой. По теореме 15 существует дуга apb; с другой стороны, так как множество $\mathscr{X} - p$ связно по предположению, оно содержит дугу cd, неприводимую между ap и pb. Искомая простая замкнутая кривая, содержащая p, получается путем добавления к cd дуг cp и pd (содержащихся в apb).

Далее, пусть P и Q — две простые замкнутые кривые, содержащие p и q соответственно. Необходимо рассмотреть три случая.

(α) $P \cap Q = 0$. В этом случае по теореме 14 существуют две непересекающиеся дуги A и B, неприводимые между P и Q. Легко видеть, что объединение $P \cup Q \cup A \cup B$ содержит простую замкнутую кривую, соединяющую p с q.

(β) Пересечение $P \cap Q$ состоит из единственной точки r. Пусть R — дуга, содержащаяся в $\mathscr{X} - r$ и неприводимая между

P и Q; тогда объединение $P \cup Q \cup R$ содержит простую замкнутую кривую, соединяющую p с q.

(γ) Наконец, если пересечение $P \cap Q$ содержит (по крайней мере) две точки, то точки p и q принадлежат простой замкнутой кривой, содержащейся в $P \cup Q$.

Теорема 17. *Для того чтобы множество, содержащее более одной точки, было циклическим элементом, необходимо и достаточно, чтобы оно было насыщенным относительно существования для любой пары его точек простой замкнутой кривой, содержащей эти точки.*

Доказательство. Условие необходимо. Если E — циклический элемент, то по теореме 16 всякая пара его точек принадлежит простой замкнутой кривой, содержащейся в E. Согласно теореме 6 (ii), множество E насыщено относительно этого свойства, ибо всякое множество, обладающее им, не содержит разделяющих точек.

Условие достаточно. Всякое множество E, удовлетворяющее этому условию, не содержит разделяющих точек. Поэтому оно содержится (ср. с теоремой 10) в некотором циклическом элементе E^*. Так как всякая пара точек E^* содержится (как только что было доказано) в простой замкнутой кривой, лежащей в E^*, а E насыщено относительно этого свойства, то отсюда следует, что $E^* \subset E$ и потому $E = E^*$.

III. Продолжимые свойства[1]**.** Полезность разбиения локально связного континуума на циклические элементы объясняется, вообще говоря, тем, что континуум имеет дендритообразную структуру относительно своих циклических элементов[2]. Многие свойства всего пространства связаны только с аналогичными свойствами его циклических элементов. Такими являются *продолжимые* свойства. Так мы будем называть всякое свойство (множества), которым обладает все пространство, если этим свойством обладает каждый циклический элемент.

Свойство, которым обладает всякий циклический элемент, при условии, что им обладает все пространство, мы будем называть *приводимым*.

---

[1]) См. Куратовский и Уайберн [2, стр. 322]. Там можно найти много примеров продолжимых свойств.

[2]) Ср. также Уоллес [2]; ациклическими элементами автор называет компоненты множества разделяющих точек и концевых точек; теория ациклических элементов двойственна по отношению к теории циклических элементов.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *семейство замкнутых подмножеств локально связного континуума* $\mathscr{X}$, *такое, что*

(1) $(x) \in \mathbf{F}$ *для любого* $x \in \mathscr{X}$.

Следующее свойство $\mathbf{P}$ *множества* E *продолжимо:*

Для всякой пары (различных) точек $x, y \in E$ *существует множество* $F \in \mathbf{F}$, *разделяющее эти точки.*

Доказательство. Предположим, что всякий циклический элемент обладает свойством $\mathbf{P}$. Пусть a и b — две различные точки. Покажем, что существует множество $F \in \mathbf{F}$, которое их разделяет.

Если a и b принадлежат некоторому циклическому элементу E, то по предположению существует множество $F \subset \mathbf{F}$, разделяющее E между a и b. Это множество разделяет и все пространство между этими точками (по теореме 6 (i) п. II и теоремам 1 и 5 п. I).

С другой стороны, если не существует циклического элемента, содержащего a и b, то по теореме 6 (i) из п. II мы имеем $\mathrm{ord}_{a,b}\mathscr{X} \leqslant 1$ и, следовательно, существует точка x, разделяющая a и b. В соответствии с (1) для завершения доказательства достаточно положить $F = (x)$.

Если в качестве $\mathbf{F}$ последовательно берутся семейства

1) конечных множеств,

2) замкнутых счетных множеств,

3) замкнутых множеств размерности $\leqslant n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$),

то из теоремы 1 в сочетании с теоремой 9 § 51, IV и следствием 1b § 27, II вытекает следующая

Теорема 2. *Следующие свойства множества* E *продолжимы:*

(i) *быть регулярным,*

(ii) *быть рациональным,*

(iii) $\dim E \leqslant n$ (*для* $n = 1, 2, \ldots$).

Теорема 3. *Наследственная локальная связность — продолжимое свойство.*

Доказательство. Предположим, что локально связный континуум $\mathscr{X}$ не является наследственно локально связным. Тогда он содержит (по теореме 2 из § 50, IV) континуум сходимости K (состоящий более чем из одной точки). Согласно теореме 12 п. II, множество K является континуумом сходимости некоторого циклического элемента E.

Отсюда следует (согласно теореме 2 § 50, IV), что E не является наследственно локально связным.

Теорема 4. *Дугообразная связность связных подмножеств множества E — продолжимое свойство.*

Доказательство. Пусть C — связное множество, и пусть a и b — две (различные) точки C. Пусть A — дуга ab и S — множество всех точек, разделяющих пространство $\mathscr{X}$ между a и b. Положим $F = S \cup a \cup b$. Очевидно, что $F \subset C \cap A$.

Так как $F = \overline{F}$ (ср. § 49, IV, теорема 3), то множество $A - F$ является объединением последовательности (открытых) смежных интервалов

$$a_1b_1 - a_1 - b_1, \qquad a_2b_2 - a_2 - b_2, \; \ldots .$$

Из этого вытекает, что

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{ord}_{a_ib_i}\mathscr{X} \geqslant 2.$$

Действительно, в противном случае существовала бы точка p, разделяющая пространство между a_i и b_i, а следовательно, между a и b, поэтому выполнялось бы включение

$$p \in F \cap (a_ib_i - a_i - b_i),$$

что невозможно.

Пусть E^i — циклический элемент, содержащий a_i и b_i. Так как множество $C \cap E^i$ связно (по теореме 5′ п. I) и, следовательно, дугообразно связно (по предположению), то существует дуга $(a_ib_i)^* \subset C \cap E^i$. Положим

$$\text{(3)} \qquad B = F \cup \bigcup_i (a_ib_i)^*.$$

Так как $B \subset C$, то остается только показать, что B — дуга.

Рассмотрим отображение $f\colon A \to B$, такое, что

(i) $f(x) = x$ для $x \in F$,

(ii) сужение $f \mid a_ib_i$ есть гомеоморфизм дуги a_ib_i на $(a_ib_i)^*$.

Покажем, что отображение f взаимно однозначно и непрерывно. Для этого покажем, что

$$\text{(4)} \qquad A \cap E^i = a_ib_i.$$

Из включения a_i, $b_i \in E^i$ по теореме 5′ п. I следует, что

$$\text{(5)} \qquad a_ib_i \subset E^i.$$

С другой стороны,

$$\text{(6)} \qquad (aa_i - a_i) \cap E^i = 0 = (bb_i - b_i) \cap E^i.$$

Действительно, точка a_i разделяет $\mathscr{X}$ между $aa_i - a_i$ и b_i (так как $a_i \in F$). Поэтому из включения $x \in (aa_i - a_i)$ следует, что

$\operatorname{ord}_{x, b_i}\mathcal{X} = 1$, откуда, согласно теореме 6 (ii) п. II, получаем $x \in \mathcal{X} - E^i$.

Таким образом, первое равенство (6) установлено, а второе получается из соображений симметрии.

Из соотношений (5) и (6) непосредственно вытекает (4), следовательно, $E^i \neq E^j$ для $i \neq j$.

В соответствии с замечанием к теореме 6 п. II пересечение $E^i \cap E^j$ либо пусто, либо состоит из единственной точки p, разделяющей пространство между любой парой $x \in E^i - p$ и $y \in E^j - p$. Принимая во внимание включение (5), получаем, что точка p разделяет пространство между a и b, а потому $p \in F$.

Таким образом,

$$E^i \cap E^j \subset F \text{ и } F \cap E^i \subset (a_i, b_i), \tag{7}$$

где последнее включение является следствием (4).

Из включений (7) вытекает, что функция f взаимно однозначна. Действительно, имеем

$$f(A) = f(F) \cup \bigcup_i f(a_i b_i - a_i - b_i),$$

$$f(F) \cap f(a_i b_i - a_i - b_i) = F \cap (a_i b_i)^* - a_i - b_i \subset F \cap E^i - (a_i, b_i) = 0,$$

$$f(a_i b_i - a_i - b_i) \cap f(a_j b_j - a_j - b_j) =$$

$$= [(a_i b_i)^* - a_i - b_i] \cap [(a_j b_j)^* - a_j - b_j] \subset$$

$$\subset E^i \cap E^j \cap F - (a_i, b_i, a_j, b_j) = 0.$$

Наконец, функция f непрерывна. Это очевидно, если семейство дуг $a_i b_i$ конечно. Если это семейство бесконечно, то, согласно теореме 9 п. II,

$$\lim_{i \to \infty} \delta(E^i) = 0, \quad \text{поэтому} \quad \lim_{i \to \infty} \delta(a_i b_i)^* = 0,$$

откуда следует непрерывность функции f.

Замечание. Применяя теорему 10 из § 50, IV или слегка изменяя доказательство теоремы 4, можно показать, что следующие свойства продолжимы:

(i) *всякое связное подмножество множества E есть полуконтинуум*;

(ii) *всякое подмножество множества E, связное между двумя точками, является дугообразно связным между этими точками.*

Теорема 5. *Уникогерентность является продолжимым и приводимым свойством.*

Доказательство. Предположим, что локально связный континуум $\mathcal{X}$ не является уникогерентным. Пусть (в соответствии с теоремой 6 из § 50, III) K и L — два локально связных континуума, а A и B — два замкнутых множества, удовлетворяющих условиям

$$(8)\quad \mathcal{X}=K\cup L,\quad K\cap L=A\cup B,\quad A\cap B=0,\quad A\neq 0\neq B.$$

Пусть ab — такая дуга, что $ab\subset K$, $ab\cap A=a$ и $ab\cap B=b$. Отсюда следует, что

$$(9)\qquad \operatorname{ord}_{a,b}\mathcal{X}\geqslant 2.$$

Действительно, если бы точка p разделяла $\mathcal{X}$ между a и b, то мы получили бы, что

$$p\in(ab\cap L),$$

и, следовательно,

$$p\in(ab\cap K\cap L)=(ab\cap A)\cup(ab\cap B)=(a,\ b),$$

т. е. либо $p=a$, либо $p=b$.

Пусть E — некоторый циклический элемент, содержащий a и b. Тогда, согласно (8),

$$E=(E\cap K)\cup(E\cap L),\quad (E\cap K)\cap(E\cap L)=(E\cap A)\cup(A\cap B),$$
$$(E\cap A)\cap(E\cap B)=0,\quad E\cap A\neq 0\neq E\cap B.$$

Так как множества $E\cap K$ и $E\cap L$ — континуумы (по теореме 5′ п. I), то установленные выше соотношения показывают, что циклический элемент E не является уникогерентным.

Итак, уникогерентность — продолжимое свойство. Согласно теореме 9 из п. I, оно, кроме того, и приводимо.

Замечания. Континуум $\mathcal{X}$ называется *n-когерентным*, если для любого разбиения $\mathcal{X}=K\cup L$ на два континуума пересечение $K\cap L$ содержит не более n компонент [1]).

Для n-когерентного континуума $\mathcal{X}$ положим $r(\mathcal{X})=n-1$. Тогда [2])

$$r(\mathcal{X})=\sum_i r(E^i),$$

где E^1, E^2, ... — последовательность циклических элементов, не сводящихся к отдельным точкам.

Следующая формула позволяет вычислить порядок пространства в точке p, если он конечен [3]):

$$\operatorname{ord}_p\mathcal{X}=m(p)-n(p)+\sum_{i=1}^{n(p)}\operatorname{ord}_pE^i,$$

---

[1]) Эйленберг [10].
[2]) См., например, Уайберн [1, стр. 85].
[3]) См. Куратовский и Уайберн [2, стр. 326].

где $m(p)$ — число компонент множества $\mathcal{X} - p$, а E^1, E^2, ..., $E^{n(p)}$ — система циклических элементов, содержащих p, но не сводящихся к p.

IV. θ-кривые. Так называется континуум, являющийся объединением трех дуг, имеющих одни и те же концевые точки и не имеющих никаких других общих точек (подобно букве θ).

Класс локально связных континуумов, не содержащих θ-кривых, представляет собой важное обобщение дендритов (так, например, всякий континуум такого вида гомеоморфен границе некоторой области, расположенной на плоскости[1])).

Теорема 1. *Всякий локально связный континуум $\mathcal{X}$, не содержащий θ-кривых и разделяющих точек, является простой замкнутой кривой (за исключением случая, когда он состоит из одной точки).*

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{X}$ не является дендритом, пусть C — простая замкнутая кривая, содержащаяся в $\mathcal{X}$. Предположим, что $\mathcal{X} \neq C$. Пусть R — компонента множества $\mathcal{X} - C$. По предположению $\mathrm{Fr}(R)$ содержит по крайней мере две точки. Следовательно, существуют (ср. § 50, III теорема 7) две (различные) точки p, $q \in \mathrm{Fr}(R)$, достижимые из области R, а поэтому дуга $pq \subset R \cup p \cup q$. Так как $\mathrm{Fr}(R) \subset C$ (ср. § 49, III, теорема 3), то p, $q \in C$, следовательно, $C \cup pq$ есть θ-кривая.

Теорема 2. *Каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы локально связный континуум $\mathcal{X}$ не содержал θ-кривых:*

(i) *всякий циклический элемент (содержащий более одной точки) является простой замкнутой кривой;*

(ii) *для всякой пары точек p, q имеем* $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X} \leqslant 2$.

Доказательство. 1. Условие (i) необходимо по теореме 1.

2. Из условия (i) вытекает (ii). Если точки p и q не принадлежат циклическому элементу, то $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X} = 1$ (по теореме 6 (i) п. II). Если E — циклический элемент и, следовательно, простая замкнутая кривая, содержащая p и q, то $\mathrm{ord}_{p,q}E = 2$, откуда по теореме 6 из п. I получаем $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X} = 2$.

3. Условие (ii) является достаточным. Если p и q — точки ветвления θ-кривой θ, то $\mathrm{ord}_{p,q}\theta = 3$. Итак, если $\theta \subset \mathcal{X}$, то $\mathrm{ord}_{p,q}\mathcal{X} \geqslant 3$.

Теорема 3. *Всякий локально связный континуум $\mathcal{X}$, не содержащий θ-кривых, регулярен, и всякое связное подмножество континуума $\mathcal{X}$ дугообразно связно.*

[1]) См. Айрес [2].

Доказательство. Это следует из теоремы 2 (i) и теорем 2 (i) и 4 п. III.

Теорема 4. *Если K не является локально связным подконтинуумом локально связного континуума $\mathscr{X}$, то существует кривая $\theta=(ab)_0\cup(ab)_1\cup(ab)_2$, такая, что для $i=0, 1, 2$ дугу $(ab)_i$ можно соединить с K континуумом Q_i, не пересекающимся с $(ab)_{i+1}\cup(ab)_{i+2}$ (индексы берутся по* mod 3[1])*).*

Доказательство. Согласно теореме 1 из § 49, VI, множество K содержит континуум сходимости (не сводящийся к точке). Поэтому в K существуют последовательность непересекающихся континуумов $K_1, K_2, \ldots$ и две сходящиеся последовательности точек, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq \lim_{n\to\infty} v_n, \text{ и } u_n,\ v_n \in K_n.$$

Так как пространство локально дугообразно связно, то можно считать, что A и B — два локально связных континуума, таких, что

$$(1)\qquad u_0,\ u_1,\ u_2 \in A,\qquad v_0,\ v_1,\ v_2 \in B \text{ и } A\cap B=0.$$

По теореме 3 из § 50, II пространство $\mathscr{X}$ является объединением конечного семейства $\boldsymbol{F}$ локально связных континуумов, которые настолько малы, что если K_i^*, A^*, B^* обозначают объединение элементов $\boldsymbol{F}$, пересекающихся с K_i, A, B соответственно, то

$$(2)\qquad A^*\cap B^*=0=K_0^*\cap K_1^*=K_1^*\cap K_2^*=K_2^*\cap K_0^*.$$

Пусть p_iq_i — такая дуга, что

$$(3)\quad p_iq_i\cap A=p_i,\quad p_iq_i\cap B=q_i \quad\text{и}\quad p_iq_i\subset K_i^* \qquad (i=0,\ 1,\ 2).$$

Пусть p_0p_1 и q_0q_1 — две дуги, содержащиеся в A и B соответственно. Кривая

$$C=p_0p_1\cup p_1q_1\cup q_1q_0\cup q_0p_0,$$

очевидно, является простой замкнутой кривой. Соединим дуги p_0p_1 и q_0q_1 в континууме $A\cup K_2^*\cup B$ некоторой дугой, скажем $(ab)_2$, так, чтобы только ее концевые точки принадлежали p_0p_1 и q_0q_1 соответственно. Тогда $C\cup(ab)_2$ есть θ-кривая.

Действительно, согласно (2) и (3),

$$p_0q_0\cap(ab)_2\subset(p_0,\ q_0)\quad\text{и}\quad p_1q_1\cap(ab)_2\subset(p_1,\ q_1).$$

[1]) См. Куратовский [22]. Эта теорема будет применяться в § 59, II, 4.

Полагая $C=(ab)_0 \cup (ab)_1$, получаем

(4) $$(ab)_i \subset A \cup K_i^* \cup B, \quad a \in A, \quad b \in B \quad (i=0,\ 1,\ 2).$$

Из соотношений $A^* \cap (ab)_i \neq 0 \neq B^* \cap (ab)_i$ и $A^* \cap B^*=0$ вытекает, что $(ab)_i \not\subset A^* \cup B^*$. Следовательно, согласно (4), существует точка $c_i \in K_i^* - (A^* \cup B^*)$. По определению K_i^* точка c_i принадлежит континууму $Q_i \in \boldsymbol{F}$, такому, что

(5) $$Q_i \cap K_i \neq 0 \quad \text{и} \quad Q_i \subset K_i^*.$$

Так как $c_i \in Q_i \not\subset (A^* \cup B^*)$, то по определению A^* и B^*

(6) $$Q_i \cap (A \cup B)=0.$$

С другой стороны, включение (5) вместе с равенствами (2) дает

(7) $$Q \cap K_{i+1}^* = 0 = Q_i \cap K_{i+2}^*.$$

Из соотношений (4), (6) и (7) вытекает, что

$$Q_i \cap (ab)_{i+1} = 0 = Q_i \cap (ab)_{i+2}.$$

Таким образом, в силу (5), Q_i — искомый континуум.

ГЛАВА 7

АБСОЛЮТНЫЕ РЕТРАКТЫ. ПРОСТРАНСТВА, СВЯЗНЫЕ В РАЗМЕРНОСТИ n. СТЯГИВАЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 53. Продолжение непрерывных функций. Ретракция

I. Отношения τ и τ_v. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два метрических пространства, и пусть $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ и $A \subset \mathcal{X}$; обозначим через $\Phi \mid A$ множество всех сужений $f \mid A$, где $f \in \Phi$. В частности, $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid A$ — множество функций, принадлежащих $\mathcal{Y}^A$ и допускающих непрерывное продолжение на $\mathcal{X}$.

По определению символ $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$ означает, что

$$\mathcal{Y}^F = \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid F \quad \text{для любого} \quad F = \overline{F} \subset \mathcal{X},$$

т. е. что всякая (непрерывная) функция $f\colon F \to \mathcal{Y}$ допускает (непрерывное) продолжение $f^*\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ [1]). Положим

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid_v A = \bigcup_E (\mathcal{Y}^E \mid A),$$

где E пробегает все окрестности множества A.

Таким образом, соотношение $f \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid_v A)$ означает, что функция f допускает продолжение f^* на окрестность E множества A, т. е.

$$f \subset f^* \in \mathcal{Y}^E, \quad \text{где} \quad A \cap \overline{\mathcal{X} - E} = 0.$$

Мы используем символ $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$ для обозначения того, что $\mathcal{Y}^F = (\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid_v F)$ для любого $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$; другими словами, это будет означать, что каждая функция, принадлежащая $\mathcal{Y}^F$, допускает продолжение на окрестность F.

Примеры и замечания. (i) По теореме Титце (§ 14, IV) интервал $\mathcal{I}$ обладает следующим свойством:

$\mathcal{X}\tau\mathcal{I}$ для любого метрического пространства $\mathcal{X}$.

Пространства $\mathcal{Y}$, обладающие указанным свойством интервала, называются *абсолютными ретрактами* (AR) (см. п. III).

(ii) *Если $\mathcal{Y}$ — полиэдр, то $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$ для любого $\mathcal{X}$* (см. п. III).

Пространства $\mathcal{Y}$, обладающие этим свойством, называются *абсолютными окрестностными ретрактами* (ANR).

---

[1]) Ср. Уоллес [3].

(iii) Если $\mathcal{Q}_n$ есть n-мерный шар и $\mathcal{S}_{n-1}$ — соответствующая сфера, то отношение $\mathcal{Q}_n \tau \mathcal{S}_{n-1}$ не имеет места (§ 23, III, следствие 1a).

(iv) Из условия $\mathcal{J}\tau\mathcal{X}$ следует, что $\mathcal{X}$ дугообразно связно (ср. п. IV). Соотношение $\mathcal{J}^n\tau_v\mathcal{X}$ характеризует пространства, называемые *связными в размерности* $< n$ (они будут изучены в п. IV).

(v) Соотношение $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_n$ эквивалентно соотношению $\dim\mathcal{X} \leqslant n$ (см. п. VI).

(vi) Соотношение $\dim\mathcal{X} \leqslant 0$ эквивалентно предположению, что $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$ для любого $\mathcal{Y} \neq 0$.

Рассматриваемое предположение вытекает из этого соотношения согласно IV (i). Обратная импликация следует из такого утверждения:

(vii) *Если* $\dim\mathcal{X} > 0$ *и* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$, *то* $\mathcal{Y}$ *связно.*

Доказательство. Предположим, что

$$A_0 \cup A_1 \subset \mathcal{X}, \quad A_0 \cap A_1 = 0, \quad A_j = \overline{A}_j \qquad (j = 0,\ 1),$$

$$\mathcal{Y} = B_0 \cup B_1, \quad B_0 \cap B_1 = 0, \quad b_j \in B_j = \overline{B}_j.$$

Если $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$, то отображение f: $A_0 \cup A_1 \to \mathcal{Y}$, определяемое равенствами $f(A_j) = b_j$, имеет продолжение g: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Полагая $F_j = g^{-1}(B_j)$, получаем

$$\mathcal{X} = F_0 \cup F_1, \quad F_0 \cap F_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_j \subset F_j = \overline{F}_j.$$

Отсюда следует, что $\dim\mathcal{X} = 0$.

(viii) *Отношение* τ *не транзитивно.*

Доказательство. Имеем $\mathcal{J}^2\tau\mathcal{J}\tau\mathcal{S}$ (согласно (i) и (v)), в то время как отношение $\mathcal{J}^2\tau\mathcal{S}$ не имеет места (ср. (iii)).

(ix) *Отношение* τ *не рефлексивно.*

Согласно (vii), никакое несвязное пространство $\mathcal{X}$ положительной размерности не удовлетворяет отношению $\mathcal{X}\tau\mathcal{X}$.

II. Операции. По определению функция g есть продолжение функции f, если

$$\mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\,[y = f(x)] \subset \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\,[y = g(x)].$$

В таком случае мы будем коротко писать: $f \subset g$.

Если f: $A \to \mathcal{Y}$ и g: $B \to \mathcal{Y}$, то положим

$$f + g = \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\,[y = f(x)] \cup \mathop{\mathsf{E}}_{x,\,y}\,[y = g(x)]^{1)}.$$

[1]) Для того чтобы избежать недоразумений, мы будем писать $f \overset{\circ}{+} g$ вместо $f + g$, если в пространстве $\mathcal{Y}$ определено сложение.

Напомним (ср. § 13, V, теорема 3), что если множества A и B замкнуты, а непрерывные функции f и g совпадают на $A\cap B$, т. е. $f(x)=g(x)$ при $x\in A\cap B$, то $(f+g)\colon A\cup B\to\mathscr{Y}$ — непрерывная функция.

Теорема 1. *Пусть $F=\overline{F}\subset\mathscr{X}$. Из условия $\mathscr{X}\tau_v\mathscr{Y}$ вытекает $F\tau_v\mathscr{Y}$, а из условия $\mathscr{X}\tau\mathscr{Y}$ следует $F\tau\mathscr{Y}$.*

Доказательство очевидно.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{Y}=A_0\cup A_1$, $A_0=\overline{A}_0$ и $A_1=\overline{A}_1$. Если $\mathscr{X}\tau_vA_0$, $\mathscr{X}\tau_vA_1$ и $\mathscr{X}\tau_vA_0\cap A_1$, то $\mathscr{X}\tau_v(A_0\cup A_1)$.*

Если $\mathscr{X}\tau A_0$, $\mathscr{X}\tau A_1$ и $\mathscr{X}\tau A_0\cap A_1$, то $\mathscr{X}\tau(A_0\cup A_1)$.

Теорему 2 мы выведем из следующей леммы, которая также будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 2′. *Пусть (для $j=0,1$)*

(1) $$\mathscr{Y}=A_0\cup A_1,\quad A_j=\overline{A}_j,$$

(2) $$\mathscr{X}=B_0\cup B_1,\quad B_j=\overline{B}_j,$$

(3) $$F=\overline{F}\subset\mathscr{X},\quad f\colon F\to\mathscr{Y}\ \textit{непрерывно},$$

(4) $$F\cap B_j=f^{-1}(A_j),$$

(5) $$B_j\tau_vA_j,$$

(6) $$(f\,|\,F\cap B_0\cap B_1)\in\left[(A_0\cup A_1)^{B_0\cap B_1}\,|_v\,F\cap B_0\cap B_1\right].$$

При этих предположениях

(7) $$f\in\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}\,|_v\,F.$$

Более того, *если индекс v вычеркнут в соотношениях* (5) *и* (6), *то его можно вычеркнуть и в* (7).

Доказательство. Согласно (6), имеем

(8) $$(f\,|\,F\cap B_0\cap B_1)\subset g\in(A_0\cap A_1)^H,$$

где H — замкнутая окрестность множества $F\cap B_0\cap B_1$ относительно $B_0\cap B_1$; поэтому

(9) $$\overline{F\cap B_0\cap B_1}-H=0.$$

Положим $f_j=f\,|\,F\cap B$. Согласно (8), получаем, что

(10) $$f_j(x)=f(x)=g(x)\quad\text{для}\quad x\in F\cap B_0\cap B_1.$$

Так как $F\cap B_j\cap H\subset F\cap B_0\cap B_1$, то из (10) следует, что

(11) $$(f_j+g)\in A_j^{F\cap B_j\cap H}.$$

Множество $F \cap B_j \cap H$ есть замкнутое подмножество B_j; следовательно, в силу (5)

$$(12)\qquad f_j + g \subset g_j \in A_j^{V_j},$$

где V_j — замкнутая окрестность $F \cap B_j \cup H$ относительно B_j; поэтому

$$(13)\qquad F \cap \overline{B_j - V_j} = 0.$$

Положим $E = (V_0 \cup V_1) - V_0 \cap V_1 \cap H$ и $h_j = g_j \mid E \cap V_j$. Так как $E \cap V_0 \cap V_1 = H$, то, согласно (8), (11) и (12),

$$h_j(x) = g_j(x) = g(x) \quad \text{для} \quad x \in E \cap V_0 \cap V_1,$$

а так как $(E \cap V_0) \cup (F \cap V_1) = E$, то $(h_0 + h_1)\colon E \to \mathcal{Y}$ — непрерывная функция. Остается показать, что E — окрестность F, т. е. что

$$(14)\qquad F \cap \overline{\mathcal{X} - E} = 0$$

и

$$(15)\qquad f \subset h_0 + h_1.$$

Соотношение (14) выводится следующим образом:

$$\mathcal{X} - E \subset [\mathcal{X} - (V_0 \cup V_1)] \cup (V_0 \cap V_1 - H),$$

$$F \cap \overline{\mathcal{X} - (V_0 \cup V_1)} = F \cap \overline{B_0 - (V_0 \cup V_1)} \cup F \cap \overline{B_1 - (V_0 \cup V_1)} \subset$$

$$\subset (F \cap \overline{B_0 - V_0}) \cup (F \cap \overline{B_1 - V_1}) = 0 \quad (\text{ср. } (13));$$

$$F \cap \overline{V_0 \cap V_1 - H} \subset F \cap \overline{B_0 \cap B_1 - H} = 0 \quad (\text{ср. } (9)).$$

Наконец, так как $F \cap B_j \subset E \cap V_j$, то, согласно (12), $f_j \subset h_j$, а это дает включение (15).

Чтобы доказать вторую часть леммы 2′, достаточно положить $H = B_0 \cap B_1$ и $V_j = B_j$ в предыдущем доказательстве. Тогда мы получим, что $E = \mathcal{X}$.

Доказательство теоремы 2. Предполагая, что условия (3) удовлетворяются, положим

$$C_j = f^{-1}(A_j) \quad \text{и} \quad B_j = \underset{x}{\mathsf{E}}\,[\rho(x, C_j) \leqslant \rho(x, C_{1-j})].$$

Из этих соотношений немедленно вытекают условия (2) и (4). Из отношения $\mathcal{X} \tau_v A_j$ вытекает (5) (по теореме 1). Наконец, отношение $\mathcal{X}\tau_v A_0 \cap A_1$ дает (6). Следовательно, из леммы 2' вытекает (7), откуда получаем $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$.

Если индекс v опустить в предположениях, то его можно опустить и в заключении; отсюда получаем вторую часть теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{Y} = A_0 \cup A_1$, $A_0 = \overline{A}_0$ *и* $A_1 = \overline{A}_1$.

Если $\mathcal{X}\tau_v(A_0 \cup A_1)$ *и* $\mathcal{X}\tau_v(A_0 \cap A_1)$, *то* $\mathcal{X}\tau_v A_j$ *для* $j = 0, 1$.

Если $\mathcal{X}\tau(A_0 \cup A_1)$ *и* $\mathcal{X}\tau(A_0 \cap A_1)$, *то* $\mathcal{X}\tau A_j$ *для* $j = 0, 1$.

Доказательство. Пусть $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и отображение $f\colon F \to A_0$ непрерывно. Нужно определить окрестность V множества F, такую, что $f \in A_0^V \mid F$. Из предположения $\mathcal{X}\tau_v(A_0 \cup A_1)$ вытекает существование продолжения $h\colon E \to (A_0 \cup A_1)$ отображения f, где E — замкнутая окрестность множества F. Пусть $E_j = h^{-1}(A_j)$. Тогда

(16) $$E = E_0 \cup E_1, \quad F \subset E_0 \quad \text{и} \quad h(E_0 \cap E_1) \subset A_0 \cap A_1.$$

Из последнего включения вытекает (в силу отношения $\mathcal{X}\tau_v(A_0 \cup A_1)$) существование продолжения $g\colon Q \to (A_0 \cap A_1)$ отображения $h \mid E_0 \cap E_1$, где Q — замкнутая окрестность множества $E_0 \cap E_1$ в E_1, т. е.

(17) $$\overline{E_1 - Q} \cap E_0 = 0.$$

Положим

(18) $$V = E_0 \cup Q \quad \text{и} \quad f^* = (h \mid E_0) + g.$$

Из этого следует, что $f \subset f^* \in A_0^V$, так как (ср. (16) и (18)) $F \subset V$ и $E_0 \cap Q \subset E_0 \cap E_1$.

Наконец, V — окрестность множества F. Действительно, согласно (16) и (17), имеем

$$\overline{(E - V)} \cap F = \overline{E_1 - (E_0 \cup Q)} \cap F \subset \overline{E_1 - Q} \cap F \cap E_0 = 0,$$

а это показывает, что V — окрестность F в E и потому в $\mathcal{X}$ (ибо E — окрестность F в $\mathcal{X}$).

Для доказательства второй части теоремы 3 положим $E = \mathcal{X}$ и $Q = E_1$, откуда получаем $V = \mathcal{X}$ (согласно (16) и (18)).

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots$ — (*конечная или бесконечная*) *последовательность пространств;* $\mathcal{X}\tau(\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}_k$ *для каждого* k.

Если последовательность конечна, то τ *можно заменить на* τ_v.

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$. Предположим, что $\mathcal{X}\tau\mathcal{Z}$. Покажем, что $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}_1$. Пусть p_k — фиксированная точка пространства $\mathcal{Y}_k$ для $k = 2, 3, \ldots$. Пусть $F = \bar{F} \subset \mathcal{X}$ и отображение f: $F \to \mathcal{Y}_1$ непрерывно. Обозначим через g функцию, отображающую точку $x \in F$ в точку $[f(x), p_2, p_3, \ldots]$ из $\mathcal{Z}$. По предположению существует продолжение h: $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ отображения g. Полагая

$$h(x) = [h^1(x), \; h^2(x), \ldots],$$

получаем, что $f \subset h^1 \in \mathcal{Y}_1^{\mathcal{X}}$. Следовательно, $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}_1$.

Обратно, предположим, что $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}_k$ для $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $F = \bar{F} \subset \mathcal{X}$ и отображение f: $F \to \mathcal{Z}$ непрерывно. Пусть $f = [f^1, f^2, \ldots]$. Для каждого k по предположению существует функция g^k, такая, что

$$f^k \subset g^k \in \mathcal{Y}_k^{\mathcal{X}}, \quad \text{откуда} \quad f \subset g = [g^1, \; g^2, \ldots] \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}.$$

Поэтому $\mathcal{X}\tau\mathcal{Z}$.

Для того чтобы перейти к отношению τ_v, необходимо только произвести в предыдущих рассуждениях следующие изменения:

(i) вместо h: $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ положим h: $E \to \mathcal{Z}$, где E — окрестность множества F;

(ii) вместо g^k: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}_k$ положим g^k: $E_k \to \mathcal{Y}_k$, где E^k — окрестность F; тогда множество $E = E_1 \cap \ldots \cap E_n$ — окрестность F, а из этого вытекает, что $f \subset g = [g^1, \ldots, g^n] \in \mathcal{Z}^E$.

Теорема 5. *Если $\mathcal{T}$ компактно, то из отношения $\mathcal{T} \times \mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$ вытекает отношение $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$, а из отношения $\mathcal{T} \times \mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$ вытекает отношение $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$.*

Доказательство. Пусть $F = \bar{F} \subset \mathcal{X}$ и f: $F \to \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ непрерывно. Таким образом, f сопоставляет каждому $x \in F$ непрерывную функцию f_x: $\mathcal{T} \to \mathcal{Y}$. Положим

$$f_x(t) = g(t, \; x);$$

тогда отображение g: $\mathcal{T} \times F \to \mathcal{Y}$ непрерывно, согласно теореме 2 из § 44, IV. Если $\mathcal{T} \times \mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$, то существует продолжение g^*: $\mathcal{T} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ отображения g. Поэтому функция f^*, определяемая равенством

$$f_x^*(t) = g^*(t, \; x),$$

непрерывна и $f \subset f^*$: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$.

Если $\mathcal{T} \times \mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$, то существует (ср. § 41, IV, теорема 1) окрестность E множества F и продолжение g^*: $\mathcal{T} \times E \to \mathcal{Y}$ отображения g (g определяется, как выше). Тогда $f \subset f^* \in (\mathcal{Y}^{\mathcal{T}})^E$.

Замечание. Топологией пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ является, как обычно, его компактно-открытая топология. Следует заметить, что первая часть теоремы 5 справедлива также для топологии непрерывной сходимости в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (ср. § 20, VI, определение 2) без предположения компактности $\mathcal{T}$ [1]).

Напомним (ср. § 13, V), что подмножество A пространства $\mathcal{X}$ называется *ретрактом* $\mathcal{X}$, если существует непрерывное отображение, называемое *ретракцией*, f: $\mathcal{X} \to A$, такое, что $f(x) = x$ для $x \in A$.

Назовем A *окрестностным ретрактом пространства* $\mathcal{X}$, если существует ретракция некоторой окрестности E множества A на A.

Теорема 6. *Если* $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$ *и* $\mathcal{Z}$ — *окрестностный ретракт пространства* $\mathcal{Y}$, *то* $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Z}$. *Если* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$ *и* $\mathcal{Z}$ — *ретракт* $\mathcal{Y}$, *то* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Z}$.

Доказательство. Пусть $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и f: $F \to \mathcal{Z}$ — непрерывная функция. Из предположений следует, что

$$f \subset g \in \mathcal{Y}^E \quad \text{и} \quad r\colon G \to \mathcal{Z},$$

где E — окрестность F, G — окрестность $\mathcal{Z}$ и r — ретракция G на $\mathcal{Z}$.

Следовательно, множество $H = E \cap g^{-1}(G)$ — окрестность F и $f \subset rg \in \mathcal{Z}^H$. Поэтому $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Z}$.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, в предыдущих рассуждениях следует положить $E = \mathcal{X}$ и $G = \mathcal{Y}$. Тогда $H = \mathcal{X}$, откуда получаем $\mathcal{X}\tau\mathcal{Z}$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{T} \neq 0$ — *компактное метрическое пространство. Тогда* $\mathcal{Y}$ *является ретрактом пространства* $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$. *Следовательно* (ср. с теоремой 6), *из отношения* $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *вытекает отношение* $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$, *а из отношения* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *следует отношение* $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in \mathcal{T}$. Отождествим пространство $\mathcal{Y}$ с семейством постоянных функций, принадлежащих $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$, и поставим в соответствие каждой функции $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ постоянную функцию $f(t_0)$. Это соответствие есть ретракция $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ на $\mathcal{Y}$. В самом деле, оно непрерывно, ибо

$$\text{из} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{следует} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0),$$

и тождественно на $\mathcal{Y}$.

---

[1]) См. также Ху Сы-цзян [3, стр. 187].

III. Абсолютные ретракты.

Определение. Метрическое пространство $\mathcal{Y}$ называется *абсолютным ретрактом* (AR), соответственно *абсолютным окрестностным ретрактом* (ANR), если

$$\mathcal{X}\,\tau\,\mathcal{Y}, \quad \text{соответственно} \quad \mathcal{X}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$$

для любого (метрического сепарабельного) пространства $\mathcal{X}$ [1]).

Примеры и замечания. (i) Согласно теореме Титце, *евклидово пространство* $\mathcal{E}^n$ *и куб* $\mathcal{J}^n$ — *абсолютные ретракты*.

Более того, *всякое выпуклое подмножество пространства* $\mathcal{E}^{\aleph_0}$ есть абсолютный ретракт (см. § 28, IX, теорема 1, замечание).

(ii) Очевидно, что

$$0^{\mathcal{X}} = 0 \quad \text{для} \quad \mathcal{X} \neq 0 \quad \text{и} \quad 0^0 = (0);$$

следовательно, пустое множество не является абсолютным ретрактом. Однако оно есть абсолютный окрестностный ретракт.

(iii) *Всякий абсолютный ретракт дугообразно связен*, а *всякий абсолютный окрестностный ретракт локально дугообразно связен*.

(iv) *Всякий полиэдр есть* ANR (Борсук [6, стр. 227]). *Всякий дендрит есть* AR (см. теорему 16, а по поводу более сильного утверждения см. теорему 7 § 54, VII).

Это легко получается (по индукции) из теоремы 1 ниже.

(v) *Группы Бетти* (*компактных*) ANR *имеют конечное число образующих* (см. Борсук [10, стр. 97] и Лефшец [1, стр. 129]).

(vi) В пространстве $\mathcal{E}^3$ существуют AR, которые нельзя представить в виде *конечного объединения* меньших AR (см. Борсук и Мазуркевич [2]). Кроме того, существует двумерный AR, никакое собственное замкнутое двумерное подмножество которого не является AR (см. Борсук [24]).

Если $\mathcal{Y}$ — конечномерное пространство, то из условия $\mathcal{Y} \times \mathcal{J}\,\tau\,\mathcal{Y}$ следует, что $\mathcal{Y}$ является AR, а из условия $\mathcal{Y} \times \mathcal{J}\,\tau_v\,\mathcal{Y}$ следует, что $\mathcal{Y}$ есть ANR (ср. § 54, VII, теорема 6).

Из теорем 2, 3 и 4 п. II непосредственно вытекает следующее утверждение (см. Ароншайн и Борсук [1]):

Теорема 1. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых множества; если A_0, A_1 и $A_0 \cap A_1$ суть* AR (*соответственно* ANR), *то таким же является $A_0 \cup A_1$; если $A_0 \cup A_1$ и $A_0 \cap A_1$ суть* AR (*соответственно* ANR), *то такими же являются множества A_0 и A_1.*

---

1) Это понятие принадлежит Борсуку [1]. Терминология связана с теоремой из п. IV. Более детальное изложение см. в книге Ху Сы-цзяна [3]. См. также Борсук [30] и [22], [23], [27]—[29]; ср. Мольский [1], [2].

Замечание. Однако из предположения, что A_0, A_1 и $A_0 \cup A_1$ суть AR, не следует, что $A_0 \cap A_1$ — тоже AR (даже для полиэдра). (См. Бегль [1].)

Теорема 2. *Декартово произведение* $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$ (*соответственно конечное произведение* $\mathcal{Y}_1 \times \ldots \times \mathcal{Y}_n$) *есть* AR (*соответственно* ANR) *тогда и только тогда, когда каждое* $\mathcal{Y}_k$ *есть* AR (*соответственно* ANR).

Замечание. Вторая часть теоремы 2, касающаяся ANR, не допускает обобщения на *бесконечные* последовательности. Действительно, пусть все $\mathcal{Y}_k$ равны между собой и состоят из двух элементов; тогда пространство $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2 \times \ldots$ гомеоморфно канторову множеству $\mathcal{C}$ и, следовательно, не является ANR, хотя каждое из $\mathcal{Y}_k$ есть ANR.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{T}$ — *компактное метрическое пространство. Тогда пространство* $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *есть* AR, *соответственно* ANR, *тогда и только тогда, когда таким является пространство* $\mathcal{Y}$.

Следовательно, $\mathcal{I}^{\mathcal{T}}$ *и* $\mathcal{E}^{\mathcal{T}}$ *суть* AR, *а если* $\mathcal{Y}$ — *замкнутый полиэдр, то* $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *есть* ANR.

Доказательство. Если $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ есть AR (соответственно ANR), то по теореме 7 из п. II таким является и $\mathcal{Y}$.

Обратно, если $\mathcal{Y}$ есть AR, то $\mathcal{T} \times \mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$ для каждого $\mathcal{X}$, а отсюда $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ по теореме 5 из п. II. Но это означает, что $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ есть AR.

Аналогично, если $\mathcal{Y}$ есть ANR, то $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ — тоже ANR.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Теорема 4. *Если* $\mathcal{X}$ — *локально связный континуум, то пространство* $2^{\mathcal{X}}$ *есть* AR [1]).

Теорема 5. *Для того чтобы (метрическое сепарабельное) пространство* $\mathcal{Y}$ *было абсолютным ретрактом (соответственно абсолютным окрестностным ретрактом), необходимо и достаточно, чтобы для любого пространства* $\mathcal{Z}$, *содержащего* $\mathcal{Y}$ *как замкнутое подмножество,* $\mathcal{Y}$ *было ретрактом* $\mathcal{Z}$ (*соответственно окрестностным ретрактом* $\mathcal{Z}$).

Доказательство. 1. Если $\mathcal{Y}$ есть AR, то $\mathcal{Z} \tau \mathcal{Y}$. Поэтому если $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ — тождественное отображение, то $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Z}} | \mathcal{Y}$, а это показывает, что $\mathcal{Y}$ — ретракт $\mathcal{Z}$. Если $\mathcal{Y}$ есть ANR, то $f \in \mathcal{Y}^{E} | \mathcal{Y}$, где E — окрестность $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{Z}$.

2. Для доказательства того, что условие достаточно, предположим, что $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и $f: F \to \mathcal{Y}$ — непрерывная функция.

[1]) Доказательство см. Войдыславский [1].

Согласно следствию 2а § 28, IX, $\mathcal{Y}$ можно рассматривать как замкнутое подмножество пространства $\mathcal{Z}$, такого, что $f \in \mathcal{Z}^{\mathcal{X}}|F$. Следовательно, существует непрерывная функция $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, такая, что $g(x) = f(x)$ для $x \in F$. Предполагая, что r — ретракция $\mathcal{Z}$ на $\mathcal{Y}$ (соответственно открытого множества E на $\mathcal{Y}$), получаем, что $f \subset rg$, откуда $\mathcal{X}\tau\mathcal{Y}$ (соответственно $\mathcal{X}\tau_v\mathcal{Y}$).

Теорема 6. *Всякий ретракт абсолютного ретракта является абсолютным ретрактом. Окрестностный ретракт абсолютного окрестностного ретракта есть абсолютный окрестностный ретракт.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Y}$ есть ANR, G — открытое подмножество $\mathcal{Y}$, $r\colon G \to A$ — ретракция, $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ и $f\colon F \to A$ — непрерывная функция. Тогда $f \subset f^* \in \mathcal{Y}^E$, где E — окрестность F. Положим $H = f^{*-1}(G)$. Из этого следует, что $F \subset H$; таким образом, H — окрестность F, и $f \subset rf^* \in A^H$. Следовательно, A есть ANR.

Если $\mathcal{Y}$ есть AR, то рассуждаем аналогично, полагая $G = \mathcal{Y}$ и $E = \mathcal{X}$. Тогда $H = \mathcal{X}$ и $f \subset rf^* \in A^{\mathcal{X}}$. Следовательно, A есть AR.

Теорема 7. *Компактные* AR *совпадают (топологически) с ретрактами гильбертова куба* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$. *Компактные* ANR *совпадают с ретрактами открытых подмножеств куба* $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ [1]).

Доказательство. С одной стороны, так как $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ есть AR, то всякий ретракт куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ есть AR, а всякий ретракт открытого подмножества куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ есть ANR (согласно теореме 6).

С другой стороны, если замкнутое подмножество $\mathcal{Y}$ пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ является AR, то оно — ретракт пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ (по теореме 5); если это подмножество — ANR, то оно — ретракт открытого подмножества куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$.

Теорема 8. *Пусть $\mathcal{Y}$ — компактное пространство. Если $\mathcal{J}^{\aleph_0}\tau\mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y}$ есть* AR. *Если $\mathcal{J}^{\aleph_0}\tau_v\mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y}$ есть* ANR.

Доказательство. Будем рассматривать $\mathcal{Y}$ как подмножество $\mathcal{J}^{\aleph}$; пусть $f\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ — тождественное отображение. Если $\mathcal{J}^{\aleph}\tau\mathcal{Y}$, то $f \subset r \in \mathcal{Y}^{\mathcal{J}^{\aleph_0}}$, т. е. $\mathcal{Y}$ — ретракт пространства $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, а, следовательно, по теореме 7 и абсолютный ретракт.

Аналогично, если $\mathcal{J}^{\aleph_0}\tau_v\mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y}$ — ретракт открытого подмножества куба $\mathcal{J}^{\aleph_0}$, а потому ANR.

Лемма 9. *Пусть $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$. Положим*

$$(0) \qquad F^0 = F \times \mathcal{J} \cup \mathcal{X} \times 0.$$

---

[1]) Борсук [6, стр. 223].

Тогда

$$\mathscr{Y}^{\mathfrak{X}\times\mathscr{I}}\,|_v F^0 = \mathscr{Y}^{\mathfrak{X}\times\mathscr{I}}\,|\,F^0.$$

Другими словами, *всякая непрерывная функция* $h\colon F^0\to\mathscr{Y}$, *допускающая продолжение на окрестность* E *множества* F^0, *допускает продолжение на все пространство* $\mathscr{X}\times\mathscr{I}$.

Доказательство. Так как $\mathscr{I}$ компактно, то существует открытое множество G, такое, что $F\subset G$ и $G\times\mathscr{I}\subset E$.

Пусть[1]) $\varphi\colon\mathscr{X}\to\mathscr{I}$ — непрерывная функция, такая, что

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x\in F,\\ 0, & \text{если}\quad x\in\mathscr{X}-G;\end{cases}$$

например,

$$\varphi(x)=\frac{\rho(x,\mathscr{X}-G)}{\rho(x,\mathscr{X}-G)+\rho(x,F)}.$$

В соответствии с предположением пусть h_0 — продолжение h на $G\times\mathscr{I}\cup\mathscr{X}\times 0$. Положим

$$h^*(x,t)=h_0(x,t\cdot\varphi(x)).$$

Тогда отображение

$h^*\colon\mathscr{X}\times\mathscr{I}\to\mathscr{Y}$ непрерывно и $h^*(x,t)=h(x,t)$ для $(x,t)\in F^0$.

Теорема 10. *Пусть* $\mathscr{Y}$ *есть* ANR. *Если пространство* $\mathscr{Y}^{\mathscr{Y}}$ *дугообразно связно, то* $\mathscr{Y}$ *есть* AR[2]).

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}$ — пространство, содержащее $\mathscr{Y}$ как замкнутое подмножество. Покажем (в соответствии с теоремой 5), что $\mathscr{Y}$ — ретракт $\mathscr{X}$.

Пусть $f_i\colon\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$ $(i=0,1)$ — такие функции, что $f_0(y)=c$ и $f_1(y)=y$ для $y\in\mathscr{Y}$. По предположению существует дуга, соединяющая f_0 с f_1 в пространстве $\mathscr{Y}^{\mathscr{Y}}$. Пусть $g\colon\mathscr{I}\to\mathscr{Y}^{\mathscr{Y}}$ — такая непрерывная функция, что $g_0=f_0$ и $g_1=f_1$. Положим

$$h(x,t)=g_t(x)\quad\text{для}\quad x\in\mathscr{Y}\quad\text{и}\quad h(x,0)=c\quad\text{для}\quad x\in\mathscr{X}.$$

Положим $\mathscr{Y}^0=(\mathscr{Y}\times\mathscr{I})\cup(\mathscr{X}\times 0)$. Тогда отображение $h\colon\mathscr{Y}^0\to\mathscr{Y}$ непрерывно, согласно теореме 3 § 44, IV. Так как $\mathscr{Y}$ есть ANR, то из предыдущей леммы вытекает, что $h\subset h^*\in\mathscr{Y}^{\mathfrak{X}\times\mathscr{I}}$.

Положим $r(x)=h^*(x,1)$. Тогда $f_1\subset r\in\mathscr{Y}^{\mathfrak{X}}$, и, следовательно, $r\colon\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ — ретракция.

---

[1]) Ср. с доказательством Даукера [1, стр. 232].

[2]) Случай компактного $\mathscr{Y}$ см. Борсук [6, стр. 229].

Теорема 11. *Всякий компактный* AR *обладает свойством неподвижной точки*[1]).

Доказательство. Теорема 11 следует из теоремы 7 и теорем 12 и 14, приводимых ниже.

Теорема 12. *Если $\mathcal{Y}$ — ретракт пространства $\mathcal{X}$, обладающего свойством неподвижной точки, то $\mathcal{Y}$ также обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — ретракция и $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ — непрерывная функция. Так как $gf\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, то $gf\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, и по предположению существует точка x_0, такая, что $gf(x_0) = x_0$. Так как $gf(x_0) \in \mathcal{Y}$, то $x_0 \in \mathcal{Y}$, откуда $f(x_0) = x_0$, и, следовательно, $g(x_0) = x_0$.

Лемма 13. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство. Если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, такое, что*

$$(1) \qquad |f(x) - x| < \varepsilon,$$

и если множество $f(\mathcal{X})$ обладает свойством неподвижной точки, то пространство $\mathcal{X}$ также обладает этим свойством.

Доказательство. Предположим, что непрерывное отображение $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ не имеет неподвижной точки. Так как пространство $\mathcal{X}$ компактно, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$(2) \qquad |g(x) - x| > \varepsilon$$

для любого x. Пусть f — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы; положим $h(x) = fg(x)$ и $F = f(\mathcal{X})$. Так как отображение $h\colon \mathcal{X} \to F$ непрерывно, то непрерывно и отображение $(h|F)\colon F \to F$, а потому существует точка $x_0 \in F$, такая, что $h(x_0) = x_0$, т. е. $fg(x_0) = x_0$. Согласно (1), $|fg(x_0) - g(x)| < \varepsilon$, а следовательно, $|x_0 - g(x_0)| < \varepsilon$, что противоречит (2).

Теорема 14. *Пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ обладает свойством неподвижной точки*[2]).

Доказательство. Представим точки $z \in \mathcal{J}^{\aleph_0}$ в виде $z = [z^1, z^2, \ldots]$, где $0 \leqslant z^n \leqslant 1$, и положим

$$f_n(z) = [z^1, \ldots, z^n, 0, 0, \ldots].$$

[1]) То есть для всякого непрерывного отображения $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ существует такая точка x, что $f(x) = x$. Ср. Борсук [6, стр. 230].

[2]) Ср. Шаудер [1, стр. 173]. Ср. также Биркгоф и Келлог [1].

Тогда $|f_n(z)-z|<1/2^n$ и множество $f_n(\mathcal{J}^{\aleph_0})$, как гомеоморфный образ замыкания n-мерного симплекса, обладает свойством неподвижной точки (по теореме 1 § 28, III).

По лемме 13 пространство $\mathcal{J}^{\aleph_0}$ также обладает этим свойством.

Теорема 15. *Всякий циклический элемент (и, более общо, всякое замкнутое вполне дугообразно связное подмножество) некоторого абсолютного ретракта является абсолютным ретрактом.*

Более того, если $\mathcal{X}$ — локально связный континуум, то всякий циклический элемент (и, более общо, всякое замкнутое вполне дугообразно связное множество) является его ретрактом.

Доказательство. Пусть F — замкнутое вполне дугообразно связное множество, и пусть $R_1, R_2, \ldots$ — последовательность компонент множества $\mathcal{X}-F$. По теореме 4 из § 52, I множество $\mathrm{Fr}(R_n)$ состоит из единственной точки p_n. Положим $f(x)=p_n$ для $x\in R_n$ и $f(x)=x$ для $x\in F$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(R_n)=0$ (ср. § 52, I, теорема 7), то функция f непрерывна. Следовательно, F — ретракт пространства $\mathcal{X}$.

С другой стороны, имеет место следующая [1])

Теорема 16. *Если всякий циклический элемент локально связного континуума является* AR, *то весь континуум есть* AR.

В частности, *всякий дендрит есть* AR.

Приведем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 17 (вложения). *Если $\mathcal{Y}$ — компактное пространство ($\subset\mathcal{J}^{\aleph_0}$), то существует бесконечный полиэдр P, такой, что $\mathcal{Y}\cup P$ — абсолютный ретракт* [2]).

Эта теорема является обобщением теоремы 1 из § 28, IX.

Теорема 18 (вложения). *Для каждого n существует $(n+1)$-мерный абсолютный ретракт, который топологически содержит любое метрическое сепарабельное n-мерное пространство* [3]).

Теорема 19. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство, F — замкнутое его подмножество и f: $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ непрерывная функция, такая, что*

$$(f|\mathcal{X}-F):\ \mathcal{X}-F\to\mathcal{Y}-f(F)$$

[1]) См. Борсук [5, стр. 211]

[2]) Доказательство см. Борсук [14, стр. 240].

[3]) Доказательство см. Боте [1].

— гомеоморфизм. Если $\mathscr{X}$, F *и* $f(F)$ *суть* ANR, *то и* $\mathscr{Y}$ *есть* ANR [1]).

Замечания о локальной характеризации ANR. Пространство называется ANR *в точке* p, если существует окрестность точки p, являющаяся ANR.

Теорема 20 (Ханнера). *Пространство является* ANR *тогда и только тогда, когда оно локально* ANR *в каждой из своих точек* [2]).

Доказательство основывается на следующих утверждениях:

(i) *Всякое открытое подмножество* ANR *есть* ANR.

(ii) *Объединение открытых* ANR *есть* ANR.

IV. Связность в размерности n. Случай, когда $\mathscr{S}^n \tau \mathscr{Y}$. Пространство $\mathscr{Y}$ называется *связным в размерности* n, если

$$\mathscr{Y}^{\mathscr{S}_n} = \mathscr{Y}^{\mathfrak{Q}_{n+1}} \mid \mathscr{S}_n;$$

это означает, что всякое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{S}^n \to \mathscr{Y}$ имеет непрерывное продолжение $f^*\colon \mathfrak{Q}_{n+1} \to \mathscr{Y}$ [3]).

Пространство $\mathscr{Y}$ называется *локально связным в размерности n в точке p*, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\eta > 0$, такое, что всякая непрерывная функция $f\colon \mathscr{S}_n \to \mathscr{Y}$, для которой $\delta[p \cup f(\mathscr{S}_n)] < \eta$, имеет непрерывное продолжение

$$f^*\colon \mathfrak{Q}_{n+1} \to \mathscr{Y}, \quad \text{такое, что} \quad f^*(0) = p \quad \text{и} \quad \delta[p \cup f^*(\mathfrak{Q}_{n+1})] < \varepsilon \text{ [4]).}$$

Пространство $\mathscr{Y}$ называется *локально связным в размерности* n, если оно обладает этим свойством в каждой точке.

Более точно, под (л. с. n)-пространством (соответственно (с. n)-пространством) мы будем понимать пространство, локально связное (соответственно связное) в размерностях $< n$. Пространство $\mathscr{Y}$ мы будем называть LC^n-*пространством*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что всякое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{S}_m \to \mathscr{Y}$, где $m = -1, 0, \ldots, n$, для которого $\delta f(\mathscr{S}_m) < \eta$, допускает непрерывное продолжение $f^*\colon \mathfrak{Q}_{m+1} \to \mathscr{Y}$, такое, что $\delta f^*(\mathfrak{Q}_{m+1}) \leqslant \varepsilon$.

---

[1]) См. Уайтхед Дж. [1, стр. 1125] и (в случае конечной размерности) Борсук [13, стр. 250].

[2]) Доказательство см. Ханнер [1]. В случае компактного пространства см. Ядзима [1].

[3]) Напомним, что

$$\mathfrak{Q}_{n+1} = \mathop{\mathsf{E}}_{p} [(|p| \leqslant 1)(p \in \mathscr{E}^{n+1})],$$

$$\mathscr{S}_n = \mathop{\mathsf{E}}_{p} [(|p| = 1)(p \in \mathscr{E}^{n+1})].$$

[4]) Это понятие принадлежит Александеру и Лефшецу (см. Лефшец [1]). См. также Куратовский [31].

Очевидно, что если $\mathcal{Y}$ компактно, то оно является LC^n-пространством тогда и только тогда, когда оно является (л. с. $n+1$)-пространством.

Для того чтобы установить условия, характеризующие (л. с. n)-пространства, рассмотрим сначала одно вспомогательное понятие.

Пусть $f \in \mathcal{Y}^{Q_{n+1}} | \mathcal{S}_n$. Положим

$$\chi(f) = \inf \delta [f^* (Q_{n+1})],$$

где f^* пробегает $\mathcal{Y}^{Q_{n+1}}$ и удовлетворяет условию $f \subset f^*$.

Очевидно, что если f — константа, то $\chi(f) = 0$.

Для л. д. с. пространства $\mathcal{Y}$ легко доказать следующую лемму:

Лемма. *Для того чтобы $\mathcal{Y}$ было локально связным в размерности n в точке p, необходимо и достаточно, чтобы функция χ была определена в некоторой окрестности (относительно $\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n}$) постоянной функции f, принимающей значение p, и чтобы f была точкой непрерывности χ.*

Другими словами, *необходимо и достаточно, чтобы из условия* $\lim\limits_{j \to \infty} \delta [p \cup f_j (\mathcal{S}_n)] = 0$ (*означающего, что последовательность* $f_1, f_2, \ldots$ *равномерно сходится к постоянной функции* f) *вытекало, что* $\lim\limits_{j \to \infty} \chi (f_j) = 0$.

Теорема 1. *Следующие условия* (*для* $\mathcal{Y} \neq 0$) *эквивалентны*:

(1) $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. n)-*пространство*;

(2) $\mathcal{Y}$ *есть окрестностный ретракт всякого пространства* $\mathcal{Z}$, *такого, что* $\mathcal{Y}$ *замкнуто в* $\mathcal{Z}$ *и* $\dim(\mathcal{Z} - \mathcal{Y}) \leqslant n$;

(3) *если* $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$ *и* $\dim(\mathcal{X} - F) \leqslant n$, *то* $\mathcal{Y}^F = \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} |_v F$;

(4) *если* $\dim \mathcal{X} \leqslant n$, *то* $\mathcal{X} \tau_v \mathcal{Y}$;

(5) $\mathcal{I}^n \tau_v \mathcal{Y}$;

(6) *если* $T_k = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathop{\mathrm{E}}\limits_p [\,|p| = 1/j) (p \in Q_{k+1})] \cup (0)$,

то $\mathcal{Y}^{T_k} = \mathcal{Y}^{Q_{k+1}} |_v T_k$ *для* $k < n$.

Теорема 1′. *Условие*

(1′) $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. n)-*пространство и* (с. n)-*пространство*

эквивалентно каждому из условий (обозначим их номерами (2′)—(6′)), *получаемых соответственно из условий* (2)—(6) *заме-*

ной слов «окрестностный ретракт» на «ретракт» и вычеркиванием индекса v.

Доказательство теоремы 1. (Доказательство теоремы 1′ легко получить отсюда, заменяя E и G на $\mathscr{X}$ и V на $\mathfrak{Z}$.)

(1)$\Rightarrow$(2). Если $\overline{\mathscr{Y}}=\mathscr{Y}$ и $\dim(\mathfrak{Z}-\mathscr{Y})\leqslant n$, то, согласно следствию 2а § 28, IX, существуют пространство $\mathscr{X}$, содержащее $\mathscr{Y}$, в котором $\mathscr{Y}$ замкнуто, а $\mathscr{X}-\mathscr{Y}$ — бесконечный полиэдр размерности $\leqslant n$, и непрерывное отображение $g\colon \mathfrak{Z}\to\mathscr{X}$, такое, что $g(y)=y$ для $y\in\mathscr{Y}$. Таким образом, достаточно показать, что $\mathscr{Y}$ — ретракт одной из своих окрестностей E в $\mathscr{X}$ (так как $g^{-1}(E)$ — окрестность $\mathscr{Y}$ в $\mathfrak{Z}$). Последнее утверждение докажем по индукции; покажем, что

(i) оно имеет место, когда $\dim(\mathscr{X}-\mathscr{Y})=0$;

(ii) если оно имеет место для $\dim(\mathscr{X}-\mathscr{Y})\leqslant k$, то оно также имеет место для $\dim(\mathscr{X}-\mathscr{Y})=k+1$.

В случае, когда $\mathscr{X}-\mathscr{Y}$ есть нульмерный (бесконечный) полиэдр, он является дискретным множеством, состоящим из (конечной или бесконечной) последовательности точек $p_1, p_2, \ldots$. Обозначим через $f_0(p_i)$ точку множества $\mathscr{Y}$ (которое не пусто по условию), такую, что

$$|f_0(p_i)-p_i|<2\rho(p_i, \mathscr{Y});$$

очевидно, это соответствие дает ретракцию $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$.

Теперь рассмотрим (ii). Пусть бесконечный полиэдр $\mathscr{X}-\mathscr{Y}$ (размерности $k+1$) представлен как объединение симплексов бесконечного комплекса; обозначим через R объединение всех симплексов размерности $\leqslant k$, а через $D_1, D_2, \ldots$ обозначим $(k+1)$-мерные симплексы. Таким образом, симплексы D_i не пересекаются, и их границы $\overline{D}_i-D_i$ содержатся в R. Кроме того, можно допустить, что $\lim\limits_{i\to\infty}\delta(D_i)=0$ [1].

Так как $\dim R\leqslant k$, то по предположению существуют окрестность G множества $\mathscr{Y}$ (в $\mathscr{X}$) и непрерывное отображение $f\colon (R\cap G\cup\mathscr{Y})\to\mathscr{Y}$, являющееся тождественным отображением на $\mathscr{Y}$. Положим $f_i=f\,|\,\overline{D}_i-D_i$ для $\overline{D}_i\subset G$. Пусть E — объединение множества $R\cap G\cup\mathscr{Y}$ и всех симплексов D_i (содержащихся в G), таких, что отображение f_i имеет продолжение $f_i^*\colon D_i\to\mathscr{Y}$. Выберем f_i^* таким образом, чтобы

$$(7)\qquad \delta\left[f_i^*(\overline{D}_i)\right]\leqslant 2\chi(f_i).$$

Симплексы D_i не пересекаются друг с другом и с $\mathscr{Y}$, поэтому

[1]) Ср. Александров и Хопф [1, стр. 144, «Hilfssatz»].

пусть $f^* = f + f_1^* + f_2^* + \ldots$. Мы должны показать, что E — окрестность множества $\mathcal{Y}$ и отображение f^* непрерывно.

Пусть $p \in \mathcal{Y}$ и $p = \lim_{j\to\infty} p_j$, где $p_j \in \mathcal{X} - (\mathcal{Y} \cup R)$. Так как $\overline{D}_i \cap \mathcal{Y} = 0$, то, полагая $p_j \in D_{i_j}$, можно допустить, что все индексы i_j различны. Следовательно,

$$(8) \qquad \lim_{j\to\infty} \delta(D_{i_j}) = 0$$

и

$$(9) \qquad \lim_{j\to\infty} \delta[p \cup D_{i_j}] = 0.$$

Так как $p \in G$, то для достаточно больших j получаем

$$\overline{D}_{i_j} \subset G, \text{ откуда } \overline{D}_{i_j} - D_{i_j} \subset R \cap G,$$

так что отображение f определено на множестве $\overline{D}_{i_j} - D_{i_j}$, гомеоморфном $\mathcal{S}_k$. Так как отображение f непрерывно в точке p, то из условия (9) вытекает, что

$$(10) \qquad \lim_{j\to\infty} \delta[f(p) \cup f(\overline{D}_{i_j} - D_{i_j})] = 0.$$

Поскольку пространство $\mathcal{Y}$ локально связно в размерности k в точке p, то из соотношения (10), которое, очевидно, эквивалентно соотношению

$$(11) \qquad \lim_{j\to\infty} \delta[p \cup f_{i_j}(\overline{D}_{i_j} - D_{i_j})] = 0,$$

вытекает, что $\lim_{j\to\infty} \chi(f_{i_j}) = 0$ (ср. с леммой).

Таким образом, начиная с достаточно большого j, каждое отображение f_{i_j} имеет продолжение на $\overline{D}_{i_j}$. Тем самым показано, что $D_{i_j} \subset E$, следовательно, $p_{i_j} \in E$. Таким образом, p — внутренняя точка E.

Кроме того, из неравенства (7) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} \delta\left[f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j})\right] = 0.$$

Принимая во внимание (11) и соотношение

$$0 \neq f_{i_j}(\overline{D}_{i_j} - D_{i_j}) \subset f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j}),$$

приходим к выводу, что

$$\lim_{j\to\infty} \delta\left[p \cup f_{i_j}^*(\overline{D}_{i_j})\right] = 0,$$

откуда

$$\lim_{j\to\infty} f^*(p_{i_j}) = p.$$

Следовательно, отображение f^* непрерывно.

(2)$\Rightarrow$(3). Если $F=\overline{F}\subset\mathscr{X}$, $\dim(\mathscr{X}-F)\leqslant n$ и отображение $f\colon F\to\mathscr{Y}$ непрерывно, то существуют (согласно следствию 2a § 28, IX) пространство $\mathfrak{Z}$, содержащее $\mathscr{Y}$, такое, что $\dim(\mathfrak{Z}-\mathscr{Y})\leqslant n$ и $\mathscr{Y}$ замкнуто в $\mathfrak{Z}$, и продолжение $f_0\colon\mathscr{X}\to\mathfrak{Z}$ отображения f. Предположим, что имеет место условие (2); тогда существуют окрестность V множества $\mathscr{Y}$ (в $\mathfrak{Z}$) и ретракция $g\colon V\to\mathscr{Y}$. Отображение $f^*=gf_0$ — искомое, так как оно является продолжением отображения f, определенным на множестве $E=f_0^{-1}(V)$, которое представляет собой окрестность множества F (в $\mathscr{X}$).

Импликации (3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(6) очевидны.

(6)$\Rightarrow$(1). В соответствии с леммой мы должны показать, что при условии (6) имеет место следующее: если $k<n$, $p\in\mathscr{Y}$ и $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность функций, принадлежащих $\mathscr{Y}^{\mathscr{S}_k}$ и сходящихся к постоянной функции $g\colon\mathscr{S}_k\to\mathscr{Y}$, принимающей значение p, то

$$\lim_{j\to\infty}\chi(f_j)=0.$$

Положим $f(x)=f_j(jx)$ для $|x|=1/j$ и $f(0)=p$.

Очевидно, что $f\in\mathscr{Y}^{T_k}$. Поэтому, согласно (6), $f\subset f^*\in\mathscr{Y}^{E_k}$, где E_k — окрестность множества T_k. Так как $0\in T_k$, то существует индекс j_0, такой, что $x\in E_k$ для $|x|\leqslant 1/j_0$. Положим

$$f_j^*(x)=f^*\left(\frac{x}{j}\right)\ \text{для}\ x\in\mathfrak{Q}_{k+1}\ \text{и}\ j\geqslant j_0.$$

Для $x\in\mathscr{S}_k$ получаем

$$f_j(x)=f\left(\frac{x}{j}\right)=f^*\left(\frac{x}{j}\right)=f_j^*(x),$$

откуда

$$f_j\subset f_j^*\in\mathscr{Y}^{\mathfrak{Q}_{k+1}},$$

а так как $f^*(0)=f(0)=p$, то мы имеем

$$\lim_{x\to 0}f^*(x)=p;\quad\text{следовательно,}\quad\lim_{j\to\infty}\delta\left[f_j^*(\mathfrak{Q}_{k+1})\right]=0,$$

$$\text{откуда}\ \lim_{j\to\infty}\chi(f_j)=0.$$

Следствия 2 и 2′. *Каждое из следующих условий эквивалентно условию* (1) (*для* $\mathscr{Y}\neq 0$):

(12) *Если $\mathscr{T}$ компактно и* $\dim\mathscr{T}=k<n$, *то* $\mathscr{S}^{n-k}\tau_v\mathscr{Y}^{\mathscr{T}}$.

(13) *Если* $k<n$, *то* $\mathscr{S}\tau_v\mathscr{Y}^{\mathscr{S}_k}$.

Условие (1′) эквивалентно условиям (12′) и (13′), которые получаются из (12) и (13) вычеркиванием индекса v; в этом случае предположение компактности пространства $\mathcal{T}$ может быть опущено.

Доказательство. Из (4) вытекает (12), так как если $\dim \mathcal{T} = k < n$, то (ср. § 27, VIII) $\dim(\mathcal{T} \times \mathcal{I}^{n-k}) \leqslant n$, откуда $(\mathcal{T} \times \mathcal{I}^{n-k})\tau_v \mathcal{Y}$, и, следовательно, $\mathcal{I}^{n-k}\tau_v \mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ по теореме 5 из п. II.

Так как из (12) вытекает (13), то остается показать, что из (13) следует (1).

Пусть $k < n$, $p \in \mathcal{Y}$ и $\varepsilon > 0$. Так как пространство $\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$ локально связно в размерности 0 в точке p (по предположению), то существует такое $\eta > 0$, что каждой непрерывной функции h: $\mathcal{S}_k \to \mathcal{Y}$, для которой $\delta[p \cup h(\mathcal{S}_k)] < \eta$, соответствует непрерывная функция f: $\mathcal{I} \to \mathcal{Y}^{\mathcal{S}_k}$, такая, что $f_0 = p$, $f_1 = h$ и $|f_x - p| < \varepsilon/2$, так что

$$\delta[p \cup f_x(\mathcal{S}_k)] < \varepsilon \text{ для каждого } x \in \mathcal{I}.$$

Положим $h^*(t \cdot x) = f_x(t)$ для $t \in \mathcal{S}_k$. Тогда

$$h^* \in \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{k+1}}, \quad h^*(t) = f_1(t) = h(t), \quad h^*(0) = f_0(t) = p,$$
$$|h^*(t \cdot x) - h^*(0)| = |f_x(t) - p| < \varepsilon/2,$$

следовательно, $\delta[p \cup h^*(\mathcal{Q}_{k+1})] < \varepsilon$.

Наконец, чтобы установить импликацию (13′)⇒(1′), опустим условия $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ в предыдущем доказательстве. Таким образом, каждому непрерывному отображению h: $\mathcal{S}_k \to \mathcal{Y}$ соответствует непрерывное отображение h^*: $\mathcal{Q}_{k+1} \to \mathcal{Y}$, такое, что $h \subset h^*$ (где p — произвольная точка).

Теорема 3. *Пусть $n > 0$. Если каждый подконтинуум пространства $\mathcal{Y}$ связен в размерности n, то пространство $\mathcal{Y}$ связно и локально связно в размерности n.*

Доказательство. Пусть $p \in G \subset \mathcal{Y}$, где G открыто, и пусть f: $\mathcal{S}_n \to G$ — непрерывное отображение. Так как $n > 0$, то сфера $\mathcal{S}_n$ есть континуум, поэтому и $f(\mathcal{S}_n)$ — континуум. По предположению

$$f \subset f^*: \mathcal{Q}_{n+1} \to f(\mathcal{S}_n), \text{ где } f^* \text{ непрерывно.}$$

Так как $f(\mathcal{S}_n) \subset G$, то f^* — непрерывное продолжение f в G. Поэтому $\mathcal{Y}$ локально связно в размерности n в точке p.

Для доказательства связности $\mathcal{Y}$ в размерности n достаточно в предыдущем доказательстве заменить G на $\mathcal{Y}$.

Примеры и замечания. (i) Если $\mathcal{Y} \neq 0$, то, очевидно, $\mathcal{I}^0 \tau \mathcal{Y}$ ($\mathcal{I}^0$ состоит из единственной точки, а $\mathcal{S}_{-1} = 0$). Поэтому (ср. (2')) *если* $\mathcal{Y}$ — *замкнутое подмножество пространства* $\mathfrak{Z}$, *такое, что* $\dim(\mathfrak{Z} - \mathcal{Y}) = 0$, *то* $\mathcal{Y}$ — *ретракт пространства* $\mathfrak{Z}$.

Если $\dim \mathcal{X} = 0$, *то* $\mathcal{X} \tau \mathcal{Y}$ *для любого* $\mathcal{Y} \neq 0$ (ср. (4')).

(ii) Соотношение $\mathcal{I} \tau_v \mathcal{Y}$ означает, что $\mathcal{Y}$ локально дугообразно связно, а $\mathcal{I} \tau \mathcal{Y}$ означает, что $\mathcal{Y}$, более того, дугообразно связно.

Поэтому *локальная связность в размерности* 0 *эквивалентна локальной дугообразной связности.*

(iii) Следующее пространство является (л. с. n)-пространством для любого n и тем не менее не является абсолютным окрестностным ретрактом.

А именно, $\mathcal{Y}$ есть объединение бесконечной последовательности сфер $\mathcal{S}_0^*$, $\mathcal{S}_1^*$, ..., расположенных таким образом, что $\mathcal{S}_n^* \cap \mathcal{S}_{n+1}^*$ состоит из единственной точки, $\mathcal{S}_n^* \cap \mathcal{S}_{n+i}^* = 0$ при $i > 1$, $\mathcal{S}_n^* \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_n$, и эта последовательность сходится к точке $p \in \mathcal{Y} - (\mathcal{S}_0^* \cup \mathcal{S}_1^* \cup \ldots)$.

(iv) Множество $\mathcal{Y}$ предыдущего примера можно рассматривать как множество, расположенное в гильбертовом пространстве таким образом, что абсциссы его точек стремятся к нулю. Пусть q — точка $(1, 0, 0, \ldots)$. Соединим q с каждой точкой пространства $\mathcal{Y}$ прямолинейным отрезком. Полученное множество будет (л. с. n)- и (с. n)-пространством для любого n, но тем не менее не является абсолютным ретрактом.

(v) Пусть $\dim \mathcal{Y} = n$. Если $\mathcal{Y}$ есть (л. с. $n+1$)-пространство, то $\mathcal{Y}$ есть ANR. Если, более того, $\mathcal{Y}$ есть (с. $n+1$)-пространство, то $\mathcal{Y}$ есть AR (ср. § 54, VII, теорема 6).

(vi) Компактное (л. с. n)-пространство ($n > 0$) является (с. n)-пространством тогда и только тогда, когда его группы Бетти размерности $< n$ и его фундаментальная группа тривиальны (Гуревич [8] и [9]).

(vii) Если $\mathcal{Y}$ — компактное пространство ($\subset \mathcal{I}^{\aleph_0}$), то для каждого n существует бесконечный полиэдр P_n размерности $\leqslant n$, такой, что $\mathcal{Y} \cup P_n$ есть (л. с. n)- и (с. n)-пространство (Борсук [14, стр. 242]).

(viii) Пространство, локально связное в размерности n, может не быть локально связным в размерностях $< n$. Так, например, множество точек 1, 1/2, 1/3, ..., 0 локально связно в размерности n для любого $n > 0$, но не является локально связным в размерности 0 в точке 0.

(ix) Предположение, что пространство $\mathcal{Y}$ связно в размерности 1, эквивалентно предположению, что его фундаментальная группа тривиальна.

(x) При изучении локальной связности в размерности n мы ограничились рассмотрением метрических сепарабельных пространств. Однако многие теоремы можно распространить на произвольные метрические пространства (и даже нормальные пространства [1])).

V. Операции.

Теорема 1. *Объединение двух замкнутых* (л. с. n)-*множеств, пересечение которых есть* (л. с. $(n-1)$)-*множество, является* (л. с. n)-*множеством.*

Теорема остается справедливой, если «л. с.» *заменить на* «л. с. *и* с.».

Доказательство. Пусть $\mathscr{Y}=A_0\cup A_1$, $\overline{A}_j=A_j$, $F\subset\overline{F}\subset\mathscr{I}^n$, $\mathfrak{f}\colon F\to\mathscr{Y}$ непрерывно и $C_j=\mathfrak{f}^{-1}(A_j)$.

В соответствии со следствием 1d § 27, II пусть

$$\mathscr{I}^n=B_0\cup B_1,\quad \overline{B}_j=B_j,\quad F\cap B_j=C_j$$

и

$$\dim[(B_0\cap B_1)-(C_0\cap C_1)]\leqslant n-1.$$

Из последнего неравенства в сочетании с условием $\mathscr{I}^{n-1}\tau_v(A_0\cap A_1)$ и условием (3) п. IV вытекает условие (6) п. II. Предполагая, что $\mathscr{I}^n\tau_vA_0$ и $\mathscr{I}^n\tau_vA_1$, и используя лемму 2′ п. II, получаем необходимые заключения (ср. IV (5)).

Следствие 2. *Сфера* $\mathscr{S}_n$ *есть* (с. n)-*пространство* (*но не является* (с. $n+1$)-*пространством*; ср. I (iii)).

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Случай $n=0$ очевиден, а именно $\mathscr{I}^0\tau\mathscr{S}_0$, так как $\mathscr{I}^0$ состоит из одной точки, а $\mathscr{S}_0$ состоит из двух точек.

Пусть $n>0$. Предположим, что $\mathscr{I}^{n-1}\tau\mathscr{S}_{n-1}$, и разобьем $\mathscr{S}_n$ на две замкнутые полусферы $\mathscr{S}_n^+$ и $\mathscr{S}_n^-$, такие, что $\mathscr{S}_n^+\cap\mathscr{S}_n^-=\mathscr{S}_{n-1}$. Тогда $\mathscr{I}^{n-1}\tau\mathscr{S}_n^+\cap\mathscr{S}_n^-$, а так как $\mathscr{S}_n^+$ и $\mathscr{S}_n^-$ — абсолютные ретракты, то

$$\mathscr{I}^n\tau\mathscr{S}_n^+\quad\text{и}\quad\mathscr{I}^n\tau\mathscr{S}_n^-,\quad\text{следовательно,}\quad\mathscr{I}^n\tau(\mathscr{S}_n^+\cup\mathscr{S}_n^-)=\mathscr{S}_n$$

по теореме 1.

Из теорем 3—6 п. II непосредственно вытекают следующие теоремы:

---

[1]) См. Дугунджи [1]. Ср. также Ханнер [2], Катетов [1], Кодама [1] и [2], Майкл Э. [2] и [3], Даукер [2].

См. также цитированные выше монографии: Борсук [30], Ху Сы-цзян [3] и Дугунджи [2, гл. VII].

Теорема 3. *Если объединение и пересечение двух замкнутых множеств суть* (л. с. n)*-пространства, то такими являются и сами эти множества.*

Теорема остается верной, если «л. с. n» *заменить на* «л. с. n *и* с. n».

Теорема 4. *Для того чтобы декартово произведение (конечное или бесконечное) последовательности сомножителей было* (л. с. n *и* с. n)*-пространством, необходимо и достаточно, чтобы таким был каждый сомножитель.*

Для конечной последовательности «с. n» *можно опустить.*

Теорема 5. *Пусть* $\dim\mathcal{T}=k$. *Если* $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. $n+k$ *и* с. $n+k$)*-пространство, то* $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. n и с. n)*-пространство. Если* $\mathcal{T}$ *компактно и* $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. $n+k$)*-пространство, то* $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *есть* (л. с. n)*-пространство.*

Доказательство. В самом деле, из соотношения $\mathcal{J}^{n+k}\tau\mathcal{Y}$ вытекает соотношение $\mathcal{T}\times\mathcal{J}^{n}\tau\mathcal{Y}$ (согласно IV(4′) и (5′)), откуда получаем $\mathcal{J}^{n}\tau\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ по теореме 5 п. II.

Теорема 6. *Окрестностный ретракт* (л. с. n)*-пространства является* (л. с. n)*-пространством.*

Ретракт (л. с. n *и* с. n)*-пространства является* (л. с. n *и* с. n)*-пространством.*

Поэтому справедлива следующая (ср. с теоремой 7 п. II)

Теорема 7. *Если* $\mathcal{Y}^{\mathcal{T}}$ *(где* $\mathcal{T}$ *компактно и непусто) есть* (л. с. n)*-пространство (соответственно* (л. с. n *и* с. n)*-пространство), то таким является* $\mathcal{Y}$.

VI. Характеризация размерности[1]).

Теорема 1. *Если* $\mathcal{X}$ — *метрическое сепарабельное пространство, то соотношения* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ *и* $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_n$ *эквивалентны.*

Эту теорему мы выведем из теорем 2 и 5, приводимых ниже.

Теорема 2. *Из соотношения* $\dim\mathcal{X}\leqslant n$ *следует соотношение* $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_n$.

Доказательство. Так как $\mathcal{S}_n$ есть (л. с. n и с. n)-пространство (по теореме 2 п. V), то по теореме 1′ (4′) п. IV имеем $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_n$, когда $\dim\mathcal{X}\leqslant n$.

Теорема 3. *Из соотношения* $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_n$ *следует, что* $\mathcal{X}\tau\mathcal{S}_l$ *для* $l>n$.

---

[1]) См. Александров [8, § 1]. Ср. Гуревич [7].

Доказательство. Доказательство сводится к проверке того, что из $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_n$ вытекает $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}$. Пусть, как обычно, $\mathscr{S}_{n+1}^+$ и $\mathscr{S}_{n+1}^-$ — две (замкнутые) полусферы сферы $\mathscr{S}_{n+1}$, такие, что $\mathscr{S}_{n+1}^+ \cap \mathscr{S}_{n+1}^- = \mathscr{S}_n$. Тогда

$$\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}^+, \quad \mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}^- \quad \text{и} \quad \mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}^+ \cap \mathscr{S}_{n+1}^-,$$

откуда по теореме 2 п. II получаем, что $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}$.

Пусть S — невырожденный m-мерный симплекс $p_0 \ldots p_m$.

Пусть A_n — полиэдр, являющийся объединением всех граней S размерности не более n. Тогда имеет место следующая

Лемма 4. *Из соотношения $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_n$ вытекает, что $\mathscr{X}\tau A_n$ для любого $n < m$.*

Более точно, *если $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_n$, то для каждой непрерывной функции f: $\mathscr{X} \to \overline{S}$ существует непрерывная функция f^*: $\mathscr{X} \to A_n$, такая, что*

(1) $\qquad$ *из $f(x) \in A_n$ следует $f^*(x) = f(x)$,*

(2) $\qquad$ *из $f(x) \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ следует $f^*(x) \in \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}}$.*

Доказательство. Пусть $d = m - n$; проведем индукцию по d.

Для $d = 1$ имеем $A_n = A_{m-1} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_{m-1}$. Поэтому если f^*: $\mathscr{X} \to A_n$ — любое (непрерывное) продолжение сужения $f \mid f^{-1}(A_n)$, то условия (1) и (2) выполняются.

Предположим, что лемма имеет место для $d - 1$, и покажем, что она справедлива для d.

Пусть f: $\mathscr{X} \to \overline{S}$ — непрерывная функция. По теореме 3 из соотношения $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_n$ вытекает, что $\mathscr{X}\tau\mathscr{S}_{n+1}$. Следовательно, по предположению существует непрерывная функция g: $\mathscr{X} \to A_{n+1}$, такая, что

(3) $\qquad$ из $f(x) \in A_{n+1}$ вытекает $g(x) = f(x)$,

(4) $\qquad$ из $f(x) \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ вытекает $g(x) \in \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}}$.

В соответствии с определением A_{n+1} пусть $T_1, \ldots, T_r$ суть $(n+1)$-мерные грани S, такие, что

(5) $$A_{n+1} = \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_r.$$

Пусть B_i — граница T_i (т. е. объединение всех граней размерности $\leqslant n$). Положим

(6) $$U_i = g^{-1}(\overline{T}_i),$$

(7) $$C_i = g^{-1}(B_i).$$

Тогда $U_i \tau B_i$, так как $B_i \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_n$ и $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_n$ по предположению. Таким образом, $g \mid C_i$ имеет непрерывное продолжение g_i: $U_i \to B_i$. Пусть

$$f^* = g_1 + \ldots + g_r, \tag{8}$$

т. е. $f^*(x) = g_i(x)$ для $x \in U_i$, где $1 \leqslant i \leqslant r$.

Для $i \neq j$ получаем

$$U_i \cap U_j = g^{-1}(\overline{T}_i \cap \overline{T}_j) = g^{-1}(B_i \cap B_j) = C_i \cap C_j,$$

следовательно,

$$(g_i \mid U_i \cap U_j) = (g_i \mid C_i \cap C_j) = (g \mid C_i \cap C_j) =$$
$$= (g_j \mid C_i \cap C_j) = (g_j \mid U_i \cap U_j).$$

Таким образом, f^*: $\mathscr{X} \to A_n$ — непрерывная функция, ибо $B_1 \cup \ldots \ldots \cup B_r = A_n$.

Пусть $f(x) \in A_n$. Тогда $f(x) = g(x)$. Предположим, что $g(x) \in B_i$; тогда $x \in C_i$, а отсюда $g(x) = g_i(x) = f^*(x)$. Следовательно, условие (1) выполняется.

Для установления условия (2) предположим, что $f(x) \in \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}$. Тогда $g(x) \in \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}}$, согласно (4).

Поэтому можно считать, что $g(x) \in p_{i_0} \ldots p_{i_j}$, где $j \leqslant k$. Если $j \leqslant n$, то $g(x) \in A_n$, поэтому $f^*(x) = g(x)$, откуда получаем условие (2).

Пусть теперь $j > n$; это означает, что $j = n + 1$ (ибо $g(x) \in A_{n+1}$). Отсюда следует, что $p_{i_0} \ldots p_{i_{n+1}} = T_s$ для некоторого подходящего s. Следовательно, $x \in U_s$, согласно (6), а при помощи (8) находим, что

$$f^*(x) = g_s(x) \in B_s \subset \overline{T}_s \subset \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}}.$$

Теорема 5. *Из соотношения $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_n$ вытекает неравенство* $\dim \mathscr{X} \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_n$. Пусть $G_0, \ldots, G_m$ — система открытых множеств, такая, что $\mathscr{X} = G_0 \cup \ldots \cup G_m$ и нерв ее имеет размерность $l > n$. Согласно теореме 7 § 28, VI и следствию 3 § 45, VII, доказательство сводится к определению непрерывной функции f: $\mathscr{X} \to A_{l-1}$, такой, что

$$f^{-1}(P_i) \subset G_i \quad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots, m, \tag{9}$$

где P_i — объединение граней симплекса S, имеющих вершину p_i, Рассмотрим преобразование $\varkappa$, соответствующее системам $\{G_0, \ldots, G_m\}$ и $\{p_0, \ldots, p_m\}$[1]):

$$\varkappa(x) = \lambda_0(x) \cdot p_0 + \ldots + \lambda_m(x) \cdot p_m,$$

где

$$\lambda_i(x) = \frac{\rho(x, F_i)}{\rho(x, F_0) + \ldots + \rho(x, F_m)} \quad \text{и} \quad F_i = \mathscr{X} - G_i.$$

Так как нерв системы $\{G_0, \ldots, G_m\}$ является l-мерным, то из этого следует, что $\varkappa$: $\mathscr{X} \to A_l$ — непрерывное отображение. Поскольку $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_{l-1}$ (по теореме 3), то существует (по теореме 4) непрерывное отображение f: $\mathscr{X} \to A_{l-1}$, такое, что

(10) из $\varkappa(x) \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}$ следует $f(x) \in \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}}$.

Отсюда мы получим включение (9).

Пусть $x \in f^{-1}(P_i)$; тогда $f(x) \in P_i$. С другой стороны, пусть

$$\varkappa(x) \in p_{i_0} \ldots p_{i_k}, \quad \text{откуда} \quad f(x) \in \overline{p_{i_0} \ldots p_{i_k}},$$

согласно (10). Отсюда сразу получаем, что i — один из индексов $i_0, \ldots, i_k$; таким образом,

$\varkappa(x) \in P_i$, следовательно, $x \in \varkappa^{-1}(P_i)$, а потому $x \in G_i$, ибо $\varkappa^{-1}(P_i) \subset G_i$, согласно § 28, VI (10).

Следствие 6[2]). *Для того чтобы* $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого непрерывного отображения* f: $\mathscr{X} \to \mathfrak{G}_{n+1}$ *существовало непрерывное отображение* g: $\mathscr{X} \to (\mathfrak{G}_{n+1} - 0)$ (*где* 0 *означает начало координат*), *такое, что*

(11) *если* $f(x) \in \mathscr{S}_n$, *то* $g(x) = f(x)$.

Доказательство. Пусть f: $\mathscr{X} \to \mathfrak{G}_{n+1}$ — непрерывное отображение и $F = f^{-1}(\mathscr{S}_n)$. Предположим, что $\dim \mathscr{X} \leqslant n$; тогда $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_n$, и поэтому $(f \mid F) \subset g \in \mathscr{S}_n^{\mathscr{X}}$, откуда получается условие (11).

Обратно, пусть $F = \overline{F} \subset \mathscr{X}$ и h: $F \to \mathscr{S}_n$ — непрерывное отображение. Так как $\mathfrak{G}_{n+1}$ — абсолютный ретракт, то пусть $h \subset f \in \mathfrak{G}_{n+1}^{\mathscr{X}}$. Предположим, что непрерывное отображение g: $\mathscr{X} \to (\mathfrak{G}_{n+1} - 0)$ удовлетворяет условию (11), и положим

$$f^*(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Тогда $h \subset f^* \in \mathscr{S}_n^{\mathscr{X}}$. Поэтому $\mathscr{X} \tau \mathscr{S}_n$, откуда по теореме 5 $\dim \mathscr{X} \leqslant n$.

---

[1]) Ср. § 28, VI. О покрытиях произвольными множествами (не обязательно открытыми) см. Кодаира [1].

[2]) См. Александров [7].

Теорему 2 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 7 (двойственности)[1]. *Пусть* $F=\overline{F}\subset\mathscr{X}$ *и* $\dim(\mathscr{X}-F)=m$. *Для каждого непрерывного отображения* $f\colon F\to\mathscr{S}_n$ (*где* $n\leqslant m$) *существуют множество* Z, *такое, что*

$$Z=\overline{Z}\subset\mathscr{X}-F \quad \text{и} \quad \dim Z\leqslant m-n-1,$$

и непрерывное продолжение $f^*\colon(\mathscr{X}-Z)\to\mathscr{S}_n$ *отображения* f.

Доказательство. Так как очевидно, что теорема верна для $m=-1$, а также для $n=-1$, то можно предположить, что она имеет место для $m-1$ и $n\geqslant 0$.

Как обычно, пусть $\mathscr{S}_n^+$ и $\mathscr{S}_n^-$ — (замкнутые) полусферы, на которые $\mathscr{S}_{n-1}$ разбивает $\mathscr{S}_n$. Пусть $f\colon F\to\mathscr{S}_n$ — непрерывная функция, $C_0=f^{-1}(\mathscr{S}_n^+)$, $C_1=f^{-1}(\mathscr{S}_n^-)$ и в соответствии со следствием 1d § 27, II

$$\mathscr{X}=B_0\cup B_1,\ \overline{B}_j=B_j,\ F\cap B_j=C_j,\ \dim[(B_0\cap B_1)-(C_0\cap C_1)]\leqslant m-1.$$

Так как мы предположили, что теорема верна для $m-1$, то

$$(f\,|\,C_0\cap C_1)\subset g\in\mathscr{S}_{n-1}^{B_0\cap B_1-Z},$$

где $Z=\overline{Z}\subset(B_0\cap B_1)-(C_0\cap C_1)$ и

$$\dim Z\leqslant\dim[(B_0\cap B_1)-(C_0\cap C_1)]-(n-1)-1.$$

Следовательно, $\dim Z\leqslant m-n-1$. Отсюда

$$B_0\cap B_1\cap F=C_0\cap C_1 \quad \text{и} \quad (B_0\cap B_1)-(C_0\cap C_1)=B_0\cap B_1-F,$$

следовательно, $Z\subset\mathscr{X}-F$.

Если в лемме 2′ п. II подставить $\mathscr{S}_n^+$ вместо A_0, $\mathscr{S}_n^-$ вместо A, $\mathscr{X}-Z$ вместо $\mathscr{X}$ и опустить индекс v, то можно заключить, что существует непрерывное продолжение $f^*\colon(\mathscr{X}-Z)\to\mathscr{S}_n$ отображения f.

Замечания. (i) Если множество $\mathscr{X}-F$ — бесконечный полиэдр, то можно предположить, что Z есть *полиэдр*[2].

(ii) Теорему 7 (пополненную замечанием (i)) можно обобщить, заменяя $\mathscr{S}_n$ произвольным (л. с. m и с. n)-пространством[3].

---

[1]) Эйленберг [9]; ср. также Гуревич [5, стр. 765].

[2]) Эйленберг, [9, стр. 281].

[3]) Борсук [18, стр. 162].

Другое обобщение (отбрасывающее предположение сепарабельности) см. Акасаки [1].

VII. Пространство $LC^n(\mathcal{Y})$. Напомним (см. п. IV), что пространство $\mathcal{X}$ называется LC^n, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что всякое непрерывное отображение $f\colon \mathcal{S}_m \to \mathcal{X}$, где $m = -1, 0, \ldots, n$, для которого $\delta f(\mathcal{S}_m) < \eta$, допускает непрерывное продолжение $f^*\colon \mathfrak{Q}_{m+1} \to \mathcal{X}$, такое, что $\delta f^*(\mathfrak{Q}_{m+1}) \leqslant \varepsilon$.

Пусть $a_{\mathcal{X}}(\varepsilon)$ (для фиксированного n) — точная верхняя грань чисел $\eta (\leqslant \varepsilon)$. Пусть $LC^n(\mathcal{Y})$ обозначает семейство всех компактных подмножеств пространства $\mathcal{Y}$, являющихся LC^n. Это семейство наделяется топологией следующим образом: последовательность элементов $A_1, A_2, \ldots$ сходится к A (обозначается $A_i \xrightarrow[n]{} A$), если эта последовательность сходится в смысле Хаусдорфа, т. е.

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{dist}(A_i, A) = 0,$$

и, кроме того, если она *равномерно* LC^n, т. е. число η, соответствующее ε, не зависит от индекса i [1]).

Теорема 1. *Если пространство $\mathcal{Y}$ полное, то можно определить расстояние в пространстве $LC^n(\mathcal{Y})$ таким образом, что оно станет полным пространством.*

Именно, *для каждой пары элементов A и $B \in LC^n(\mathcal{Y})$ положим*

$$\sigma(A, B) = \operatorname{dist}(A, B) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{|f_m(A) - f_m(B)|}{1 + |f_m(A) - f_m(B)|},$$

где

$$f_m(X) = 1 : \int_0^{1/m} a_X(t)\, dt.$$

Можно показать, что определенное таким образом расстояние согласуется со сходимостью $A_i \xrightarrow[n]{} A$, определенной выше. Доказательство [2]) по существу опирается на теорему о полной измеримости, сформулированную в § 33, VI, замечание 2.

---

[1]) По поводу этого понятия сходимости, называемой также регулярной сходимостью в смысле Кертиса, см. Кертис [1], Уайт [1]. Ср. также с понятием регулярной сходимости Уайберна [22].

[2]) См. Куратовский [45]. По поводу гомологической локальной связности см. Бегль [2]. По поводу постановки задачи и связанных с ней результатов см. Борсук [25].

По поводу полной измеримости пространства локально связных подконтинуумов полного пространства см. Мазуркевич [25] и Куратовский [45].

Следующие утверждения относятся к пространству $LC^n(\mathcal{Y})$, когда $\mathcal{Y}$ полное[1]).

Теорема 2. *Пусть $B_i \xrightarrow[n]{} A$ в пространстве $LC^n(\mathcal{Y})$. Пусть $\mathcal{X}$ — совершенное компактное пространство размерности $\leqslant n+1$ и $f\colon \mathcal{X} \to A$ — непрерывное отображение на. Тогда существует последовательность непрерывных отображений g_i, равномерно сходящаяся к f и такая, что $g_i(\mathcal{X}) = B_i$ для любого положительного целого i, большего некоторого фиксированного i_0.*

Таким образом, *для каждого $A \in LC^n(\mathcal{Y})$ и каждого $\varepsilon > 0$ в пространстве $LC^n(\mathcal{Y})$ существует окрестность A, каждый элемент B которой имеет вид $B = g(\mathcal{X})$, где $|g - f| < \varepsilon$.*

Полагая $\mathcal{X} = A$ и $f(x) = x$ для всех x, заключаем, что имеет место

Теорема 3. *Если $A \in LC^n(\mathcal{Y})$ — совершенное множество размерности $m \leqslant n+1$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность A в $LC^n(\mathcal{Y})$, каждый элемент B которой можно получить из A путем непрерывного преобразования g, такого, что $|g(x) - x| < \varepsilon$.*

Теорема 4. *При тех же предположениях относительно A существует окрестностность A в $LC^n(\mathcal{Y})$, состоящая исключительно из множеств размерности $\geqslant m$.*

Доказательство. Последняя теорема вытекает из предыдущей на основании инвариантности неравенства $\dim A \geqslant n$ при преобразованиях с малыми прообразами точек. В действительности условие на размерность в теореме 4 можно заменить любым другим свойством, инвариантным при указанных преобразованиях.

§ 54. Гомотопия. Стягиваемость

I. Гомотопные отображения. Два непрерывных отображения $f_0\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и $f_1\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называются *гомотопными* (по отношению к $\mathcal{Y}$), обозначается $f_0 \simeq f_1$, если существует непрерывное отображение $h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Y}$, такое, что

$$h(x, 0) = f_0(x) \quad \text{и} \quad h(x, 1) = f_1(x). \tag{1}$$

Другими словами, если отображение $g\colon (\mathcal{X} \times 0 \cup \mathcal{X} \times 1) \to \mathcal{Y}$, такое, что $g \mid \mathcal{X} \times 0$ совпадает с f_0 и $g \mid \mathcal{X} \times 1$ совпадает с f_1, имеет непрерывное продолжение $h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Y}$.

[1]) См. Куратовский [46].

Примеры и замечания[1]). (i) Говорят также, что два отображения f_0 и f_1 гомотопны, если они получаются одно из другого с помощью (*непрерывной*) *деформации*. Эта терминология естественно возникает в том случае, когда переменная $t \in \mathcal{J}$ рассматривается как параметр времени.

(ii) Если $\mathcal{X} \times \mathcal{J} \tau \mathcal{Y}$ (в частности, если $\mathcal{Y}$ — абсолютный ретракт), то $f_0 \simeq f_1$ для любой пары f_0, f_1: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Следовательно, две непрерывные функции с действительными (комплексными и т. д.) значениями всегда гомотопны.

(iii) Пусть $\mathcal{P}$ — плоскость $\mathcal{E}^2$ с выброшенной точкой 0. Пусть f: $\mathcal{X} \to \mathcal{P}$ — непрерывное отображение; f гомотопно постоянному отображению тогда и только тогда, когда $f(x) = e^{g(x)}$, где g: $\mathcal{X} \to \mathcal{E}^2$ — непрерывное отображение.

Достаточность условия очевидна: можно, например, положить $h(x, t) = e^{(1-t)g(x)}$. Необходимость будет установлена в теореме 3 § 56, IX.

(iv) Локально связный континуум $\mathcal{X}$ уникогерентен тогда и только тогда, когда каждое непрерывное отображение f: $\mathcal{X} \to \mathcal{P}$ гомотопно постоянному отображению (см. § 57, III, теорема 3).

(v) Если $\mathcal{X} = \mathcal{S}_n$, то понятие гомотопии естественным образом приводит к понятию группы гомотопий в смысле Гуревича [8].

Теоремы 1—3. *Гомотопия является рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением, т. е. $f \simeq f$; если $f \simeq g$, то $g \simeq f$; если $f \simeq g$ и $g \simeq h$, то $f \simeq h$.*

Доказательство. Для того чтобы доказать 3, предположим, что u: $\mathcal{X} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Y}$ непрерывно,

$$u(x, 0) = f(x), \quad u\left(x, \frac{1}{2}\right) = g(x) \quad \text{и} \quad u(x, 1) = h(x).$$

Теорема 4. *Если f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ и g_j: $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ $(j = 0, 1)$ — непрерывные отображения и $g_0 \simeq g_1$, то $g_0 f \simeq g_1 f$.*

Доказательство. Пусть h: $\mathcal{Y} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Z}$ — непрерывное отображение, такое, что $h(y, j) = g_j(y)$. Положим $u(x, t) = h[f(x), t]$. Тогда u: $\mathcal{X} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Z}$ непрерывно и

$$u(x, j) = h[f(x), j] = g_j f(x), \text{ следовательно, } g_0 f \simeq g_1 f.$$

Теорема 4a. *Пусть f_0, f_1: $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$. Если $\mathcal{Z}$ — ретракт пространства $\mathcal{Y}$, то*

$$(f_0 \simeq f_1 \text{ отн. } \mathcal{Y}) \equiv (f_0 \simeq f_1 \text{ отн. } \mathcal{Z}).$$

[1]) Подробно эта теория излагается в книге Ху Сы-цзяна [1]. Более алгебраический подход см. Хилтон [1] и Уайтхед Г. [1].

Доказательство. Докажем импликацию слева направо. Пусть h: $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Y}$ непрерывно и $h(x, j)=f_j(x)$. Пусть r: $\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ — ретракция. Тогда $g=r\circ h$ — искомая гомотопия, т. е.

$$g\colon \mathcal{X}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Z} \quad \text{и} \quad g(x, j)=r[h(x, j)]=r[f_j(x)]=f_j(x).$$

Теорема 5. *Пусть f_0, f_1: $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — непрерывные отображения и $\{F_t\}$ — семейство открыто-замкнутых множеств, такое, что $\mathcal{X}=\bigcup\limits_t F_t$. Если $f_0|F_t\simeq f_1|F_t$ при каждом t, то $f_0\simeq f_1$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Линделёфа (§ 5, XI) пусть

$$\mathcal{X}=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{t_n}=F_{t_1}\cup(F_{t_2}-F_{t_1})\cup(F_{t_3}-F_{t_1}-F_{t_2})\cup\ldots.$$

Пусть G_{t_1}, G_{t_2}, ... — члены этого объединения.

По предположению для $n=1, 2, \ldots$ существует непрерывное отображение h_n: $G_{t_n}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Y}$, такое, что $h_n(x, j)=f_j(x)$ для $x\in G_{t_n}$ и $j=0, 1$.

Пусть h равно h_n на $G_{t_n}\times\mathcal{J}$. Так как множества G_{t_n} открыты и не пересекаются, то h: $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Y}$ — непрерывное отображение и $h(x, j)=f_j(x)$. Следовательно, $f_0\simeq f_1$.

Теорема 6. *Условие $f_0\simeq f_1$ имеет место тогда и только тогда, когда существует дуга (или, что эквивалентно, локально связный континуум), соединяющая f_0 с f_1 в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.*

Доказательство. С одной стороны, если непрерывное отображение h: $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Y}$ удовлетворяет условию (1) и если каждому $t\in\mathcal{J}$ соответствует отображение g_t: $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$, определяемое равенством

$$g_t(x)=h(x, t), \tag{2}$$

то g: $\mathcal{J}\to\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ непрерывно (ср. § 44, IV, теорема 1). Так как $g(\mathcal{J})$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство (поскольку $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ есть $\mathcal{T}_2$-пространство; ср. § 44, I, замечание 1), то $g(\mathcal{J})$ метризуемо (по теореме 3 из § 41, VI) и, следовательно, является локально связным континуумом, соединяющим точки $g_0=f_0$ и $g_1=f_1$ в $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

С другой стороны, если g: $\mathcal{J}\to\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ непрерывно и $g_0=f_0$, $g_1=f_1$, то отображение h: $\mathcal{X}\times\mathcal{J}\to\mathcal{Y}$ удовлетворяет условию (1) и непрерывно по теореме 3 из § 44, IV.

Теорема 7. *Если отображения f_j: $\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ ($j=0, 1$) постоянны, $f_j(x)\equiv c_j$, то $f_0\simeq f_1$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{Y}$ существует дуга, соединяющая точки c_0 и c_1.*

Доказательство. Если $h\colon \mathscr{X}\times\mathscr{I}\to\mathscr{Y}$ — непрерывное отображение и $h(x, j)=c_j$, то условие $g(t)=h(x_0, t)$, где x_0 — фиксированная точка в $\mathscr{X}$, определяет непрерывное отображение $g\colon \mathscr{I}\to\mathscr{Y}$, и поэтому $g(\mathscr{I})$ — локально связный континуум. Следовательно, он содержит дугу, соединяющую точку $g(0)=c_0$ с точкой $g(1)=c_1$.

Обратно, если точки c_0 и c_1 можно соединить дугой в $\mathscr{Y}$, то отображения f_0 и f_1 можно соединить дугой в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$, ибо

$$\mathscr{Y}\underset{\mathrm{top}}{\subset}\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}.$$

Пусть $\mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$ — множество последовательностей $z=[z^1, z^2, \ldots]$, таких, что $z^1=-1$ и $z^n\in\mathscr{E}$.

Пусть $\mathscr{X}\subset\mathscr{E}^{\aleph_0}_{-1}$. Обозначим через $\Lambda(\mathscr{X})$ объединение прямолинейных отрезков, соединяющих точку 0 (начало координат) с каждой точкой множества $\mathscr{X}$[1]), т. е. множество точек вида tx, где $x\in\mathscr{X}$ и $0\leqslant t\leqslant 1$. Если $\mathscr{X}$ пусто, то будем считать, что $\Lambda(\mathscr{X})$ — начало координат.

Теорема 8. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное пространство. Для того чтобы f было гомотопно константе c, необходимо и достаточно, чтобы f имело непрерывное продолжение $f^*\colon \Lambda(\mathscr{X})\to\mathscr{Y}$, где $f^*(0)=c$.*

Доказательство. Функция tx непрерывна на $\mathscr{X}\times\mathscr{I}$ и, за исключением точек, для которых $t=0$, взаимно однозначна. Следовательно, если $f\subset f^*\in\mathscr{Y}^{\Lambda(\mathscr{X})}$ и если $h(x, t)=f^*(tx)$, то $h\colon \mathscr{X}\times\mathscr{I}\to\mathscr{Y}$ непрерывно и

$$h(x, 0)=f^*(0) \quad\text{и}\quad h(x, 1)=f^*(x)=f(x),$$

откуда $f\simeq f^*(0)$.

Обратно, если $h\colon \mathscr{X}\times\mathscr{I}\to\mathscr{Y}$ — непрерывное отображение, $h(x, 1)=f(x)$ и $h(x, 0)=c$, то можно положить $f^*(0)=c$ и $f^*(z)=h(x, t)$ для $z=tx\neq 0$. Тогда $f\subset f^*\in\mathscr{Y}^{\Lambda(\mathscr{X})}$.

Теорема 9. *Отображение $(x\,|\,\mathscr{S}_n)$ не гомотопно 1 относительно $\mathscr{S}_n$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 8 и следствия 1а § 28, III.

---

[1]) Ср. Лефшец [4, стр. 94].

Отметим еще следующие очевидные формулы:

(3) $$\dim \Lambda(A) \leqslant \dim A + 1;$$

(4) $$\Lambda(A \cup B) = \Lambda(A) \cup \Lambda(B);$$

(5) $$\Lambda(A \cap B) = \Lambda(A) \cap \Lambda(B);$$

(6) $$\Lambda(\mathcal{S}_n) \underset{\text{top}}{=} Q_{n+1}.$$

II. Гомотопия относительно (л. с. n)-пространств. Рассмотрим случай, когда пространство $\mathcal{Y}$ является (л. с. n)-пространством. Очевидно, что все теоремы будут верны, в частности, для абсолютных окрестностных ретрактов; в этом последнем случае предположения, касающиеся размерности (например, $\dim(\mathcal{X} - F) \leqslant n - 1$), можно опустить.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — (л. с. n)-*пространство,* $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$, $\dim(\mathcal{X} - F) \leqslant n - 1$ *и* f_0, f_1: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *два непрерывных отображения. Если* $(f_0 | F) \simeq (f_1 | F)$, *то существует открытое множество* $G \supset F$, *такое, что* $(f_0 | G) \simeq (f_1 | G)$.

Если, более того, $\mathcal{Y}$ *есть* (с. n)-*пространство, то* $f_0 \simeq f_1$.

Доказательство. Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{X} \times \mathcal{J}, \quad F_1 = (F \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{X} \times 0) \cup (\mathcal{X} \times 1)$$

и отображение g: $F_1 \to \mathcal{Y}$ непрерывно и удовлетворяет условию $g(x, j) = f_j(x)$.

Так как $\dim(\mathcal{X}_1 - F_1) \leqslant \dim[(\mathcal{X} - F) \times \mathcal{J}] \leqslant n$ и $\mathcal{Y}$ есть (л. с. n)-пространство, то существует, согласно § 53, IV, 1 (3), открытое множество $G_1 \supset F_1$ и продолжение g^*: $G_1 \to \mathcal{Y}$ отображения g. Пусть G — открытое множество, такое, что $F \subset G$ и $G \times \mathcal{J} \subset G_1$ (ср. § 41, IV, теорема 1). Тогда $(f_0 | G) \simeq (f_1 | G)$.

Если $\mathcal{Y}$ — (с. n)-пространство, то нужно положить $G_1 = \mathcal{X}_1$.

Теорема 2. *Пусть заданы: компактное пространство* $\mathcal{X}$ *размерности* $\leqslant n - 1$, (л. с. n)-*пространство* $\mathcal{Y}$ *и две непрерывные функции* f_0, f_1: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$; *тогда семейство замкнутых подмножеств* F *пространства* $\mathcal{X}$, *таких, что* $f_0 | F \simeq f_1 | F$, *открыто в пространстве* $2^{\mathcal{X}}$.

Действительно, рассматриваемое семейство есть объединение семейств $\boldsymbol{A}_G = \underset{F}{\mathsf{E}}(F \subset G)$, где G — открытое переменное множество, такое, что $f_0 | G \simeq f_1 | G$ (семейство $\boldsymbol{A}_G$ открыто согласно теореме 1 § 17, II).

Те же предположения приводят к следующему заключению:

Теорема 2а. *Если* $F_1 \supset F_2 \supset \ldots, F_n = \overline{F}_n$ *и* $(f_0 | F_n)$ *не гомотопно* $(f_1 | F_n)$ *ни при каком* n, *то*

$$\left(f_0 \,|\, \bigcap_n F_n\right) \text{ не гомотопно } \left(f_1 \,|\, \bigcap_n F_n\right).$$

Теорема 3[1]. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — (л. с. n)-*пространство*, $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$, $\dim(\mathcal{X} - F) \leqslant n-1$, *и пусть* f_0, f_1: $F \to \mathcal{Y}$ — *два непрерывных отображения, таких, что* $f_0 \simeq f_1$. *Если* f_0 *имеет продолжение* f_0^* *на* $\mathcal{X}$, *то* f_1 *также имеет продолжение* f_1^* *на* $\mathcal{X}$. *Более того,* $f_0^* \simeq f_1^*$.

Доказательство. Положим $F^0 = (F \times \mathcal{J}) \cup (\mathcal{X} \times 0)$. Так как $f_0 \simeq f_1$, то существует непрерывное отображение h: $F^0 \to \mathcal{Y}$, такое, что

$$h(x, 0) = f_0^*(x) \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{X}, \qquad h(x, 1) = f_1(x) \quad \text{для} \quad x \in F.$$

Так как $\mathcal{Y}$ есть (л. с. n)-пространство, то из неравенства $\dim(\mathcal{X} \times \mathcal{J} - F^0) \leqslant n$ вытекает (ср. § 53, IV, 1(3)), что отображение h имеет продолжение на окрестность множества F^0; следовательно, согласно лемме 9 из § 53, III, оно имеет продолжение h^* на пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{J}$.

Остается только положить $f_1^*(x) = h^*(x, 1)$.

Теорема 4[2]. *Пусть* $\mathcal{X}$ — *компактное пространство,* $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. n)-*пространство и* $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$. *Если* $\dim \mathcal{X} \leqslant n-1$, *то множество* $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} | F$ (*т. е. множество непрерывных отображений* f: $F \to \mathcal{Y}$, *продолжаемых на* $\mathcal{X}$) *открыто-замкнуто в* $\mathcal{Y}^F$.

Доказательство. Так как пространство $\mathcal{Y}^F$ локально дугообразно связно (согласно § 53, IV (12)), то каждая компонента Φ множества $\mathcal{Y}^F$ дугообразно связна (§ 50, I, теорема 2). Таким образом (ср. I, теорема 6), если $f_0, f_1 \in \Phi$, то $f_0 \simeq f_1$; поэтому если $f_0 \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} | F$, то $\Phi \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} | F$. Другими словами, множество $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} | F$ есть объединение семейства компонент пространства $\mathcal{Y}^F$. Так как последнее пространство локально связно, то каждая компонента открыто-замкнута (ср. § 49, II, теорема 4); следовательно, тем же свойством обладает множесто $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} | F$.

Замечание. Если $\mathcal{Y}$ — сфера, то имеет место следующее более сильное утверждение.

Теорема 4а. *Пусть* $\mathcal{X}$ — *компактное пространство и* $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$. *Если* $f_0 \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{X}} | F$ *и* $|f_1 - f_2| < 2$, *то* $f_1 \in \mathcal{S}_m^{\mathcal{X}} | F$.

---

[1] Борсук [19].
[2] Борсук [17, стр. 106].

Доказательство. Согласно теореме 3, достаточно показать, что

(1) если $f_0, f_1\colon \mathscr{X}\to\mathscr{S}_m$ непрерывны и
$$|f_0-f_1|<2, \quad \text{то} \quad f_0\simeq f_1.$$

Положим
$$p(x,\ t)=f_0(x)+tf_1(x)-tf_0(x) \quad \text{и} \quad h(x,\ t)=\frac{p(x,\ t)}{|p(x,\ t)|}$$
для $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда $p(x,\ t)\neq 0$. Действительно,
$$|p(x,\ t)|\geqslant|f_0(x)|-t|f_1(x)-f_0(x)|>1-2t$$
и
$$|p(x,\ t)|\geqslant|f_1(x)|-(1-t)|f_1(x)-f_0(x)|>1-2(1-t).$$
Кроме того, $h(x,\ 0)=f_0(x)$ и $h(x,\ 1)=f_1(x)$.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{Y}$ есть* (л. с. n)-*пространство и* (с. m)-*пространство* (*где* $m\leqslant n$), *и пусть F, F_0 и F_1 — замкнутые подмножества $\mathscr{X}$, такие, что*

(2) $$F\subset F_0\cap F_1,$$

(3) $$\dim(F_j-F)\leqslant n-1,$$

(4) $$\dim(F_0\cap F_1-F)\leqslant m-1.$$

Тогда $(\mathscr{Y}^{F_0}|F)\cap(\mathscr{Y}^{F_1}|F)=(\mathscr{Y}^{F_0\cup F_1}|F)$, *т. е. каждое непрерывное отображение $f\colon F\to\mathscr{Y}$, продолжаемое на F_0 и F_1, продолжаемо на $F_0\cup F_1$.*

Доказательство. Пусть $f\subset f_j\in\mathscr{Y}^{F_j}$, $j=0,\ 1$. Так как $\mathscr{Y}$ — (л. с. n и с. m)-пространство, то из условий (4) и соотношения $f_0|F=f=f_1|F$ следует, согласно теореме 1 (если подставить m вместо n и $F_0\cap F_1$ вместо $\mathscr{X}$), что $(f_0|F_0\cap F_1)\simeq(f_1|F_0\cap F_1)$.

Согласно теореме 3 (если подставить F_0 вместо $\mathscr{X}$, $F_0\cap F_1$ вместо F и $f_j|F_0\cap F_1$ вместо f_j), отображение $f_1|F_0\cap F_1$ имеет непрерывное продолжение $f_2\colon F_0\to\mathscr{Y}$. Следовательно, $f\subset(f_2+f_1)\in\in\mathscr{Y}^{F_0\cup F_1}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{Y}$ —* (л. с. n *и* с. m)-*пространство* (*где* $m\leqslant n$), $\dim\mathscr{X}\leqslant n-2$, $\mathscr{X}=F_0\cup F_1$, $\overline{F}_j=F_j$ *и* $\dim F_0\cap F_1\leqslant m-2$.

Если $f_j\colon\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ — непрерывные отображения и $(f_0|F_j)\simeq(f_1|F_j)$ для $j=0,\ 1$, то $f_0\simeq f_1$.

Доказательство. Положим
$$\mathscr{X}^*=\mathscr{X}\times\mathscr{I},\quad F^*=(\mathscr{X}\times(0))\cup(\mathscr{X}\times(1)),\quad F_j^*=F^*\cup(F_j\times\mathscr{I}).$$
Пусть $f\colon F^*\to\mathscr{Y}$ — (непрерывное) отображение, определяемое равенством $f(x,\ j)=f_j(x)$.

Так как $(f_0 | F_j) \simeq (f_1 | F_j)$, то $f \in (\mathscr{Y}^{F_0} | F^*) \cap (\mathscr{Y}^{F_1} | F^*)$. Поскольку выполняются предположения теоремы 5, имеем $f \in \mathscr{Y}^{\mathscr{X}^*} | F^*$, так как $\mathscr{X}^* = F_0^* \cup F_1^*$, откуда $f_0 \simeq f_1$.

Из теорем 3, 5 и 6 непосредственно вытекают (ср. § 53, III (iv) и V, теорема 3) следующие три утверждения:

Теорема 7. *Если $F = \bar{F} \subset \mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то всякое непрерывное отображение f: $F \to \mathscr{Y}$, гомотопное константе, имеет продолжение f^*: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.*

Теорема 8. *Если $F = \bar{F}$, $F_j = \bar{F}_j$, $F \subset F_0 \cap F_1$ и $\dim(F_0 \cap F_1 - F) \leqslant m - 1$, то*

$$(\mathscr{S}_m^{F_0} | F) \cap (\mathscr{S}_m^{F_1} | F) = (\mathscr{S}_m^{F_0 \cup F_1} | F).$$

Теорема 9. *Если $F_j = \bar{F}_j$, $\dim F_0 \cap F_1 \leqslant m - 2$, f: $(F_0 \cup F_1) \to \to \mathscr{S}_m$ — непрерывное отображение и $f | F_j \simeq 1$ для $j = 0, 1$, то $f \simeq 1$.*

Теорема 10. *Пусть $\mathscr{Y}$ — полное* (л. с. *n)-пространство и $\mathscr{X}$ — компактное пространство размерности $< n$. Пусть f, g: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывные отображения. Тогда $f \simeq g$ в том и только в том случае, если f и g принадлежат одной и той же компоненте пространста $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$.*

Доказательство. Согласно следствию 2 § 53, IV, пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ локально связно. По теореме 3 из § 44, V это пространство полно, следовательно, каждая его компонента представляет собой связное, локально связное и полное множество, а потому она дугообразно связна (ср. § 50, II, теорема 1, и I, теорема 2).

Теорема 10 вытекает, таким образом, из теоремы 6 п. I.

III. Отношение $f_0 \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} f_1$. Этот символ будет означать, что пространство $\mathscr{X}$ неприводимо относительно негомотопности отображений f_0 и f_1; другими словами, что

(1) $$f_0 \not\simeq f_1,$$

(2) из $F = \bar{F} \neq \mathscr{X}$ следует $f_0 | F \simeq f_1 | F$.

Так как $\mathscr{S}_n$ — p — абсолютный ретракт, то (ср. п. I, теорема 9, и (ii))

(3) $$(x | \mathscr{S}_n) \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1 \text{ относительно } \mathscr{S}_n.$$

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — компактное пространство, $\dim \mathscr{X} \leqslant \leqslant n - 1$, $\mathscr{Y}$ —* (л. с. *n)-пространство и f_0, f_1: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерыв-*

ные отображения. Если $f_0 \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} f_1$, *то* $\mathcal{X}$ *содержит замкнутое множество* F, *такое, что* $f_0|F \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} f_1|F$.

Доказательство. Эта теорема является непосредственным следствием теорем 2а из п. II и 2 из § 42, IV.

Следствие 1а. *Если* $\mathcal{X}$ *— компактное пространство,* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}_m$ *— непрерывное отображение и* $f \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$, *то* $\mathcal{X}$ *содержит замкнутое множество* F, *такое, что* $f|F \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. n *и* с. m)*-пространство* ($m \leqslant n$), $\dim \mathcal{X} \leqslant n-2$ *и* $f_0, f_1\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *— два непрерывных отображения. Если* $f_0 \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} f_1$, *то никакое замкнутое множество размерности* $\leqslant m-2$ *не разделяет пространство* $\mathcal{X}$; *другими словами,* $\mathcal{X}$ *нельзя представить в виде* $\mathcal{X} = F_0 \cup F_1$, *где* $F_j = \overline{F}_j$ *для* $j=0, 1$ *и* $\dim(F_0 \cap F_1) \leqslant m-2$.

Эта теорема представляет собой непосредственное следствие теоремы 6 из п. II.

Следствие 2а. *Если* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}_m$ *— непрерывное отображение и* $f \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$, *то никакое замкнутое множество размерности* $\leqslant m-2$ *не разделяет пространство* $\mathcal{X}$.

Отсюда следует (ср. (3)), что $\mathcal{S}_n$ — канторово многообразие (ср. § 46, XI).

Теорема 3. *Если* $\mathcal{X}$ *— локально связный континуум,* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}_m$ *— непрерывное отображение,* $m \geqslant 2$[1]) *и* $f|E \simeq 1$ *для каждого циклического элемента* E *множества* $\mathcal{X}$, *то* $f \simeq 1$.

В противном случае, согласно следствию 1а, существовало бы замкнутое множество F, такое, что $f|F \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$. Согласно следствию 2а, множество F связно и никакая точка не разделяет его. Поэтому (ср. § 52, II, теорема 10) F содержится в одном циклическом элементе E. Так как $f|E \simeq 1$, то $f|F \simeq 1$, что противоречит определению F.

IV. Деформация. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. Если непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ гомотопно тождественному, т. е. если существует непрерывное отображение $h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{J} \to \mathcal{Y}$, такое, что

$$(1) \qquad h(x, 0) = x \quad \text{и} \quad h(x, 1) = f(x),$$

то говорят, что множество $f(\mathcal{X})$ получается из $\mathcal{X}$ с помощью *деформации* в $\mathcal{Y}$ (а именно, h и есть эта деформация).

[1]) Теорема 3 имеет место также для $m=1$. См. § 56, X, 5.

Если $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — ретракция, гомотопная тождественному отображению, то множество $f(\mathcal{X})$ называется *деформационным ретрактом пространства* $\mathcal{X}$, а функция h называется *ретракционной деформацией* [1]).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}^*$ — два подмножества пространства $\mathcal{Y}$, и пусть второе получается из первого деформацией. Пусть $g_0, g_1\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ — непрерывные отображения. Если $g_0 | \mathcal{X}^* \simeq g_1 | \mathcal{X}^*$, то $g_0 | \mathcal{X} \simeq g_1 | \mathcal{X}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ и $h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$ — отображения, удовлетворяющие условию (1) и такие, что $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^*$. Тогда

$$g_j h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{Z}, \quad g_j h(x, 0) = g_j(x) \quad \text{и} \quad g_j h(x, 1) = g_j f(x),$$

откуда следует, что $g_j | \mathcal{X} \simeq g_j f$. Положим по определению $g_j^* = g_j | \mathcal{X}^*$. По предположению $g_0^* \simeq g_1^*$, поэтому, согласно теореме 4 из п. I, $g_0^* f \simeq g_1^* f$. Так как $g_j^* f = g_j f \simeq g_j | \mathcal{X}$, то $g_0 | \mathcal{X} \simeq g_1 | \mathcal{X}$.

Теорема 2. *Множество $\Lambda(\mathcal{X})$ можно деформировать в его вершину (точку 0) в нем самом.*

Доказательство. Точки z множества $\Lambda(\mathcal{X})$ имеют вид $z = tx$, где $x \in \mathcal{X}$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть $h(z, u) = utx$ для $0 \leqslant u \leqslant 1$. Тогда отображение h непрерывно и

$$h\colon \Lambda(\mathcal{X}) \times I \to \Lambda(\mathcal{X}), \quad h(z, 0) = 0, \quad h(z, 1) = z.$$

Теорема 3. *Всякий ретракт R пространства $\mathcal{X}$, который можно получить из $\mathcal{X}$ с помощью деформации, является деформационным ретрактом пространства $\mathcal{X}$.*

Доказательство. В соответствии с предположениями пусть $r\colon \mathcal{X} \to R$ — ретракция; следовательно, $r(x) = x$ для $x \in R$. Пусть $f\colon \mathcal{X} \to R$ и $h\colon \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ — непрерывные отображения, такие, что

$$h(x, 0) = x, \quad h(x, 1) = f(x) \quad \text{и} \quad f(\mathcal{X}) = R.$$

Положим

$$g(x, t) = \begin{cases} h(x, 2t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ r[h(x, 2-2t)] & \text{для} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $g\colon \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ непрерывно, так как $h(x, 1) = r[h(x, 1)]$, и что $g(x, 0) = x$ и $g(x, 1) = r(x)$.

---

[1]) См. Борсук [10].

Теорема 4. *Если $\mathscr{X} \times \mathscr{J} \tau \mathscr{Y}$ (следовательно, если $\mathscr{Y}$ — абсолютный ретракт), то $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$, а если $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение, то $\mathscr{X}$ допускает деформацию в $f(\mathscr{X})$.*

Действительно, f гомотопно тождественному отображению (ср. п. I (ii)).

Теорема 5. *Пусть $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. Если $\mathscr{Z}$ — деформационный ретракт $\mathscr{Y}$, то существует непрерывное отображение $f^*\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$, такое, что*

$$f^* \simeq f \quad \text{и} \quad f^*(x) = f(x), \quad \text{когда} \quad f(x) \in \mathscr{Z}.$$

Доказательство. Пусть $h\colon \mathscr{Y} \times \mathscr{J} \to \mathscr{Y}$ непрерывно, $h(y, 0) = y$, $h(y, 1) = r(y)$, где $r\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ — ретракция. Положим

$$f^* = rf \quad \text{и} \quad g(x, t) = g(f(x), t).$$

Тогда $g(x, 0) = f(x)$ и $g(x, 1) = f^*(x)$. Наконец, если $f(x) \in \mathscr{Z}$, то $r[f(x)] = f(x)$, т. е. $f^*(x) = f(x)$.

Теорема 6 [1]). *Если $\mathscr{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт, а $\mathscr{Z}$ — деформационный ретракт пространства $\mathscr{Y}$, то существует непрерывное отображение $h\colon \mathscr{Y} \times \mathscr{J} \to \mathscr{Y}$, такое, что $h(y, 0) = y$, $h(y, 1) \in \mathscr{Z}$ и $h(y, t) = y$ для любых $y \in \mathscr{Z}$ и $t \in \mathscr{J}$.*

Примеры. (i) Если $\mathscr{Y} = \mathscr{E}^n$ и $\mathscr{Y} = \mathscr{J}^n$ ($n \leqslant \aleph_0$), то деформацию $\mathscr{X}$ на $f(\mathscr{X})$ в $\mathscr{Y}$ можно определить следующим образом:

$$h(x, t) = (1 - t) \cdot x + t \cdot f(x).$$

(ii) Положим $f(x) = x/|x|$. Тогда функция h является ретракционной деформацией пространства $(\mathscr{E}^n - 0)$ на $\mathscr{S}_{n-1}$.

V. Стягиваемость.

Определение. Пространство $\mathscr{X}$ называется *стягиваемым* относительно пространства $\mathscr{Y}$, если всякая непрерывная функция $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гомотопна постоянной [2]).

Теорема 1. *Если пространство $\mathscr{Y}$ дугообразно связно, то стягиваемость пространства $\mathscr{X}$ относительно пространства $\mathscr{Y}$ означает, что любая пара непрерывных отображений $f_0, f_1\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гомотопна (в $\mathscr{Y}$).*

Действительно, в дугообразно связном пространстве все постоянные функции гомотопны (ср. с теоремой 7 п. I).

Теорема 2. *Пространство $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ дугообразно связно тогда и только тогда, когда $\mathscr{X}$ стягиваемо относительно $\mathscr{Y}$, а $\mathscr{Y}$ дугообразно связно.*

---

[1]) Доказательство см. Самельсон [1].

[2]) Борсук [13, стр. 250]. Ср. Люстерник и Шнирельман [1].

Доказательство. Если $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{Y}$ дугообразно связно, то $f_0 \simeq f_1$ для каждой пары непрерывных отображений $f_0, f_1: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (ср. с теоремой 1). Из гомотопии $f_0 \simeq f_1$ вытекает (ср. с теоремой 6 п. I), что существует дуга, соединяющая f_0 с f_1 в $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$.

С другой стороны, если $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ дугообразно связно, то $f_0 \simeq f_1$ для любой пары непрерывных функций $f_0, f_1: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ (согласно теореме 6 п. I). Поэтому $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{Y}$ дугообразно связно (по теореме 7 п. I).

Теорема 3. *Стягиваемость пространства $\mathcal{X}$ относительно пространства $\mathcal{Y}$ инвариантна при ретракции $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Пусть r — ретракция $\mathcal{X}$ и $f: r(\mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение. Тогда $fr: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, и так как $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$, то $fr \simeq \mathrm{const}$. Следовательно, f гомотопно постоянной, ибо $f(x) = fr(x)$ для $x \in r(\mathcal{X})$.

Теорема 4. *Нестягиваемость пространства $\mathcal{X}$ относительно $\mathcal{Y}$ инвариантна при деформации $\mathcal{X}$ на подмножество.*

Это утверждение следует из теоремы 1 п. IV.

Теоремы 3 и 4 имеют такие следствия:

Теорема 4'. *Пусть $\mathcal{X}^*$ — деформационный ретракт $\mathcal{X}$. Пространство $\mathcal{X}^*$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда этим свойством обладает пространство $\mathcal{X}$.*

Теорема 5. *Если пространство $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то нестягиваемость компактного пространства $\mathcal{X}$ относительно $\mathcal{Y}$ инвариантна при отображениях с малыми прообразами точек* [1]).

Доказательство. Согласно следствию 4с § 41, VI, достаточно показать, что если $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}} \subset \mathcal{J}^{\aleph_0}$ и если непрерывное отображение $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ не гомотопно постоянной, то существует число $\alpha > 0$, такое, что для любой непрерывной функции $g: \mathcal{X} \to \mathcal{J}^{\aleph_0}$, удовлетворяющей неравенству $|g(x) - x| < \alpha$ при каждом x, множество $g(\mathcal{X})$ нестягиваемо относительно $\mathcal{Y}$.

Но так как $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то существует открытая окрестность G множества $\mathcal{X}$ и продолжение $f^*: G \to \mathcal{Y}$ отображения f. Положим $\alpha = \rho(\mathcal{X}, \mathcal{J}^{\aleph_0} - G)$. Тогда из условий $x \in \mathcal{X}$, $x' \in \mathcal{J}^{\aleph_0}$ и $|x - x'| < \alpha$ вытекает, что сегмент xx' содержится в G. Следовательно, если $g: \mathcal{X} \to \mathcal{J}^{\aleph_0}$ — непре-

---

[1]) Теорема Борсука и Улама [1]. Доказательство см. Эйленберг [6]. См. также Александров [8, стр. 226].

рывное отображение и $|g(x)-x|<\alpha$, то множество $\mathscr{X}^*=g(\mathscr{X})$ можно получить из $\mathscr{X}$ с помощью следующей деформации h в G:

$$h(x,\ t)=(1-t)\cdot x+t\cdot g(x).$$

Тогда $f^*|\mathscr{X}^*$ не гомотопно постоянной. В самом деле, в противном случае в силу теоремы 1 п. IV (если заменить там $\mathscr{Y}$ на G, $\mathfrak{Z}$ на $\mathscr{Y}$ и g_0 на f^*) $f^*|\mathscr{X}$ было бы гомотопно постоянной; но тогда и f было бы гомотопно постоянной, что противоречит предположению.

Замечание 1. Если $\mathscr{Y}=\mathscr{S}_n$, то имеет место следующее, более сильное утверждение (Куратовский [30]):

Пусть $\mathscr{X}$ — компактное пространство, g: $\mathscr{X}\to\mathscr{S}_n$ — непрерывное отображение, не гомотопное постоянной, и η — положительное число, такое, что из $|x-x'|<\eta$ вытекает

$$|g(x)-g(x')|<\sqrt{2(n+2)/(n+1)}\ ^{1)}.$$

Если f — непрерывное отображение, прообразы точек которого имеют диаметр $<\eta$, то пространство $f(\mathscr{X})$ не стягиваемо относительно $\mathscr{S}_n$.

Теорема 6. *Если $\mathscr{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт и если A_0 и A_1 — замкнутые множества, такие, что $A_0\cap A_1$ и $A_0\cup A_1$ стягиваемы относительно $\mathscr{Y}$, то и множества A_0 и A_1 стягиваемы относительно $\mathscr{Y}$.*

Доказательство. Пусть f_0: $A_0\to\mathscr{Y}$ — непрерывное отображение. По предположению $f_0|A_0\cap A_1$ гомотопно постоянной. Тогда (ср. с теоремой 7 п. II) оно имеет продолжение f_1: $A_1\to\mathscr{Y}$. Положим $f=f_0+f_1$. Так как $(f_0|A_0\cap A_1)=$ $=(f_1|A_0\cap A_1)$, то f: $(A_0\cup A_1)\to\mathscr{Y}$ непрерывно. По предположению f гомотопно постоянной, а потому и f_0 гомотопно постоянной.

Из теорем 9 п. II и 2′ п. III вытекают следующие теоремы 7 и 8.

Теорема 7. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых множества, таких, что $\dim(A_0\cap A_1)\leqslant m-2$. Если A_0 и A_1 стягиваемы относительно $\mathscr{S}_m$ $(m\geqslant 1)$, то и множество $A_0\cup A_1$ обладает этим свойством.*

Замечание 2. Как будет показано в § 58, I (теорема 5), условие $\dim(A_0\cap A_1)\leqslant m-2$ в случае $m=1$ можно заменить менее ограничительным условием стягиваемости $A_0\cap A_1$ относительно $\mathscr{S}_{m-1}$ (которое в этом случае эквивалентно связности $A_0\cap A_1$). В случае $m=2$ это не так: если $\mathscr{S}_3$ разложить на две

---

1) Это длина ребра регулярного $(n+1)$-мерного симплекса, вписанного в $\mathscr{S}_n$.

полусферы, то их пересечение $\mathcal{S}_2$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}_1$, хотя $\mathcal{S}_3$ не стягиваемо относительно $\mathcal{S}_2$. См. также замечание 3.

Теорема 8. *Если $\mathcal{X}$ неприводимо по отношению к свойству быть нестягиваемым относительно $\mathcal{S}_m$ (т. е. если каждое собственное замкнутое подмножество пространства $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}_m$), то никакое замкнутое множество размерности $\leqslant m-2$ не разделяет пространство $\mathcal{X}$* [1]).

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт. Если каждое из компактных множеств $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$, то этим же свойством обладает их пересечение $P = A_0 \cap A_1 \cap \ldots$.*

Доказательство. Пусть $f\colon P \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение и f^* — его продолжение на окрестность E множества P. Так как множества A_i компактны, то $A_i \subset E$ для достаточно больших значений i. По предположению отображение $f^* \mid A_i$ гомотопно постоянной; следовательно, гомотопно постоянной и f, ибо $f = f^* \mid P \subset f^* \mid A_i$.

Теорема 10. *Для того чтобы локально связный континуум был стягиваемым относительно $\mathcal{S}_m$ $(m \geqslant 2)$* [2]), *необходимо и достаточно, чтобы такими же были все его циклические элементы* [3]).

Условие необходимо, согласно теореме 15 из § 53, III, и теореме 3. По теореме 3 п. III оно также и достаточно.

Теорема 11. *Пространство $\mathcal{Y}$ связно в размерности n тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}_n$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$.*

Доказательство. Действительно, связность в размерности n означает, что

$$\mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n} = \mathcal{Y}^{\mathcal{Q}_{n+1}} \mid \mathcal{S}_n, \quad \text{следовательно,} \quad \mathcal{Y}^{\mathcal{S}_n} = \mathcal{Y}^{\Lambda(\mathcal{S}_n)} \mid \mathcal{S}_n,$$

так как $\mathcal{Q}_{n+1} \underset{\text{top}}{=} \Lambda(\mathcal{S}_n)$; таким образом, $\mathcal{S}_n$ стягиваемо относительно $\mathcal{Y}$ (ср. I, теорема 8).

Замечание 3. Возникает проблема: определить индексы m и n так, чтобы сфера $\mathcal{S}_m$ была стягиваема относительно сферы $\mathcal{S}_n$.

Заметим, например, что $\mathcal{S}_5$ стягиваема относительно $\mathcal{S}_2$,

---

[1]) См. Александров [8, стр. 161].

[2]) Теорема 10 имеет место также для $m = 1$. См. § 56, X, теорема 5.

[3]) Борсук [5, стр. 206].

тогда как $\mathcal{S}_3$ и $\mathcal{S}_4$ нестягиваемы; $\mathcal{S}_{n+2}$ стягиваема относительно $\mathcal{S}_n$ при $n \geqslant 3$, а $\mathcal{S}_{2n-1}$ нестягиваема при четных n [1]).

Стягиваемость (произвольных) пространств относительно $\mathcal{S}_1$ будет изучаться в § 58.

VI. Пространства, стягиваемые в себе. Так мы будем называть всякое пространство, стягиваемое относительно самого себя.

Теорема 1. *Всякое пространство, стягиваемое в себе, дугообразно связно* [2]).

Доказательство. Так как по условию тождественное отображение гомотопно постоянной, то предположим, что

(0) $h: \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ непрерывно и $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) = c$.

Пусть $p \in \mathcal{X}$. Положим $f(t) = h(p, t)$. Отсюда следует, что f — непрерывное отображение, такое, что

$$f: \mathcal{I} \to \mathcal{X}, \quad f(0) = p \quad \text{и} \quad f(1) = c.$$

Таким образом, точку c можно соединить с любой точкой $p \in \mathcal{X}$ локально связным континуумом и, следовательно, дугой.

Теорема 2. *Следующие 5 условий эквивалентны:*

(1) *$\mathcal{X}$ стягиваемо в себе,*

(2) *$\mathcal{X}$ деформируемо в одну точку,*

(3) *$\mathcal{X}$ стягиваемо относительно любого пространства $\mathcal{Y}$,*

(4) *любое пространство $\mathcal{T}$ стягиваемо относительно $\mathcal{X}$,*

(5) *$\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ дугообразно связно.*

Доказательство. Из (1) вытекает (2), так как условие (1) означает, что тождественное отображение (пространства $\mathcal{X}$) гомотопно постоянной.

Из (2) вытекает (3). Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение. Если отображение h удовлетворяет условиям (0), то $f \simeq f(c)$, ибо отображение $fh: \mathcal{X} \times \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$ непрерывно, $fh(x, 0) = f(x)$ и $fh(x, 1) = f(c)$.

Из (2) вытекает (4). Пусть $f: \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ — непрерывное отображение. Если функция h удовлетворяет условиям (0), то определим функцию

$$g(t, u) = h[f(t), u], \quad \text{где} \quad u \in \mathcal{I}.$$

---

[1]) Нестягиваемость $\mathcal{S}_3$ относительно $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_{2n-1}$ относительно $\mathcal{S}_n$ (для четных n) была установлена Хопфом [1] и [2]. Другие результаты и более подробное изложение см. Эйленберг [14, стр. 57] и [12]; Фрейденталь [3] и [4]; Гуревич [6]; Понтрягин [1], [2] и [3].

[2]) Это частный случай теоремы 4.

Тогда $f \simeq c$. Действительно,

$$g\colon \mathcal{T} \times \mathcal{J} \to \mathcal{X} \text{ непрерывно,} \quad g(t, 0) = f(t) \quad \text{и} \quad g(t, 1) = c.$$

Импликации (3)$\Rightarrow$(1) и (4)$\Rightarrow$(1) очевидны. Наконец, соотношение эквивалентности (5)$\equiv$(1) следует непосредственно из теоремы 2 п. V и теоремы 1.

Теорема 3. *Всякий абсолютный ретракт и всякое множество $\Lambda(\mathcal{X})$ стягиваемы в себе.*

Это утверждение вытекает из (2) в силу теорем 4 и 2 из п. IV.

Теорема 4. *Всякое стягиваемое в себе пространство $\mathcal{X}$ связно в любой размерности $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Согласно теореме 2 (4), сфера $\mathcal{S}_n$ стягиваема относительно $\mathcal{X}$, откуда по теореме 11 п. V следует требуемое заключение.

VII. Локальная стягиваемость. Пространство $\mathcal{Y}$ называется *стягиваемым в себе в точке* y_0, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\eta > 0$, что каждое множество A, для которого $\delta(y_0 \cup A) < \eta$, может быть деформировано в y_0 в шаре Q с центром y_0 радиуса ε, т. е. если тождественное отображение A гомотопно y_0 относительно Q [1]).

Пространство $\mathcal{Y}$ называется *локально стягиваемым в себе*, если оно стягиваемо в себе в каждой точке.

Теорема 1. *Если $\mathcal{Y}$ стягиваемо в себе в точке y_0, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\eta > 0$, что для любого компактного пространства $\mathcal{X}$ всякое непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, для которого $\delta[y_0 \cup f(\mathcal{X})] < \eta$, имеет продолжение $f^*\colon \Lambda(\mathcal{X}) \to \mathcal{Y}$, такое, что*

$$\text{(i)} \qquad f^*(0) = y_0 \quad \text{и} \quad \delta\{y_0 \cup f^*[\Lambda(\mathcal{X})]\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как тождественное отображение множества $f(\mathcal{X})$ гомотопно y_0 относительно шара Q с центром y_0 радиуса $\varepsilon/2$, то $f \simeq y_0$ относительно Q. Отсюда по теореме 8 п. I (при $\mathcal{Y} = Q$) следуют условия (i).

Теорема 2. *Из стягиваемости в себе в точке y_0 вытекает локальная связность в этой точке во всех размерностях $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно подставить $\mathcal{S}_n$ вместо $\mathcal{X}$ в теореме 1, принимая во внимание гомеоморфизм $\Lambda(\mathcal{S}_n) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{Q}_{n+1}$.

---

[1]) Это понятие принадлежит Борсуку [6, стр. 236].

Теорема 3. *Всякое пространство, локально стягиваемое в себе, является* (л. с. n)*-пространством, а всякое пространство, стягиваемое и локально стягиваемое в себе, является* (л. с. n *и* с. n)*-пространством для каждого* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 2 и теоремы 4 п. VI.

Теорема 4. *Из условия* $(\mathcal{Y} \times \mathcal{J})\tau_v\mathcal{Y}$ *вытекает, что* $\mathcal{Y}$ *локально стягиваемо в себе.*

Из условия $(\mathcal{Y} \times \mathcal{J})\tau\mathcal{Y}$ *вытекает, что* $\mathcal{Y}$ *стягиваемо и локально стягиваемо в себе.*

Доказательство. Пусть $y_0 \in \mathcal{Y}$ и $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность замкнутых окрестностей точки y_0, такая, что

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Покажем, что для фиксированного и достаточно большого n существует непрерывная деформация $h\colon F_n \times \mathcal{J} \to \mathcal{Y}$ множества F_n в точку y_0, такая, что $\delta[h(F_n \times \mathcal{J})] < \varepsilon$. Пусть

$$F = (F_1 \times (0)) \cup \left(F_2 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \cup \ldots \cup \left(F_n \times \left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \cup \ldots \cup (\mathcal{Y} \times (1)).$$

Тогда $F = \bar{F} \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{J}$. Положим

$$f\left(y, \frac{n-1}{n}\right) = y \quad \text{для} \quad y \in F_n \quad \text{и} \quad f(y, 1) = y_0 \quad \text{для} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Отсюда, согласно (ii), следует, что $f\colon F \to \mathcal{Y}$ непрерывно.

Так как $(\mathcal{Y} \times \mathcal{J})\tau_v\mathcal{Y}$, то существует открытая окрестность G множества F и продолжение $f^*\colon G \to \mathcal{Y}$ отображения f. Поскольку множество G открыто, существуют (ср. § 41, IV, теорема 1) открытая окрестность H точки y_0 (в $\mathcal{Y}$) и замкнутый интервал $\mathcal{J}' = \langle t_0, 1\rangle$, такие, что $H \times \mathcal{J}' \subset G$. Более того, так как f^* непрерывно, можно считать, что $\delta[f^*(H \times \mathcal{J}')] < \varepsilon$.

Рассмотрим такое n, при котором $\frac{n-1}{n} > t_0$ и $F_n \subset H$ (ср. (ii)). Положим $\mathcal{J}'_n = \langle (n-1)/n, 1\rangle$; тогда

$$F_n \times \mathcal{J}'_n \subset H \times \mathcal{J}', \quad \text{откуда} \quad \delta[f^*(F_n \times \mathcal{J}'_n)] < \varepsilon.$$

Положим

$$h(y, t) = f^*\left(y, \frac{t+n-1}{n}\right), \quad \text{где} \quad y \in F_n \quad \text{и} \quad t \in \mathcal{J}.$$

Тогда

$$h(y, 0) = f^*\left(y, \frac{n-1}{n}\right) = f\left(y, \frac{n-1}{n}\right) = y; \quad h(y, 1) = f^*(y, 1) = y_0,$$

$h\colon F_n \times \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$ непрерывно и

$$\delta[h(F_n \times \mathcal{I})] = \delta[f^*(F_n \times \mathcal{I}_n)] < \varepsilon.$$

Таким образом, локальная стягиваемость $\mathcal{Y}$ установлена.

Наконец, из соотношения $(\mathcal{Y} \times \mathcal{I})\tau\mathcal{Y}$ вытекает существование непрерывного отображения $f\colon \mathcal{Y} \times \mathcal{I} \to \mathcal{Y}$, такого, что $f(y, 0) = y$ и $f(y, 1) = y_0$, откуда следует стягиваемость $\mathcal{Y}$ (ср. VI (2)). Отсюда вытекает следующая

Теорема 5. *Всякий абсолютный окрестносгный ретракт локально стягиваем в себе, а всякий абсолютный ретракт стягиваем и локально стягиваем в себе*[1]).

Для конечномерных пространств имеют место следующие теоремы, обратные к теоремам 3 и 5.

Теорема 6. *Пусть* $\dim \mathcal{Y} = n$. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathcal{Y}$ *есть* (л. с. $n+1$)-*пространство*;

(2) $(\mathcal{Y} \times \mathcal{I})\tau_v\mathcal{Y}$;

(3) $\mathcal{Y}$ *локально стягиваемо в себе*;

(4) $\mathcal{Y}$ — *абсолютный окрестностный ретракт*.

Аналогично, *эквивалентны следующие условия*:

(1′) $\mathcal{Y}$ — (л. с. $n+1$ *и* с. $n+1$)-*пространство*;

(2′) $(\mathcal{Y} \times \mathcal{I})\tau\mathcal{Y}$;

(3′) $\mathcal{Y}$ *стягиваемо и локально стягиваемо в себе*;

(4′) $\mathcal{Y}$ — *абсолютный ретракт*.

Доказательство. (1)⇒(2). Из условия (1) и неравенства $\dim(\mathcal{Y} \times \mathcal{I}) \leqslant n+1$, по теореме 1 (4) из § 53, IV, вытекает (2).

Импликация (2)⇒(3) следует из теоремы 4.

(3)⇒(4). В соответствии с теоремой 1 из § 45, VII предположим, что

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}_{2n+1} \quad \text{и} \quad R = \mathcal{Y} \cup (\mathfrak{G}_{2n+2} - \mathcal{S}_{2n+1}).$$

Так как пространство $\mathcal{Y}$ локально связно в размерностях $< 2n+2$ (ср. с теоремой 2), то $\mathcal{Y}$ является окрестностным ретрактом пространства R (ср. § 53, IV, теорема 1, (2)). А так как последнее пространство — абсолютный ретракт (ср. § 53, III (i)), то $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт (по теореме 6, § 53, III).

Импликация (4)⇒(1) очевидна; таким образом, первая часть теоремы 6 установлена. Доказательство второй части аналогично.

---

[1]) См. Борсук [6, стр. 237] и Лефшец [2, стр. 93].

Замечание. Теорема 6 неверна для бесконечномерных пространств. Существует (компактное) пространство, стягиваемое и локально стягиваемое в себе, не являющееся абсолютным окрестностным ретрактом (Борсук [21]).

Следствие 7. *Всякое связное подмножество E дендрита является абсолютным ретрактом.*

Доказательство. Во-первых, E глобально и локально дугообразно связно (ср. с теоремой 3 § 52, IV и следствием 2 § 51, VI). Далее, E — (с. n и л. с. n)-пространство для любого n (по теореме 3 из § 53, IV), так как всякий подконтинуум дендрита является дендритом, а следовательно, абсолютным ретрактом (по теореме 16 § 53, III). Таким образом, E удовлетворяет условию (1′) и потому условию (4′).

VIII. Компоненты пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт. В п. VIII — X символ $\mathcal{X}$ обозначает метрическое пространство, а $\mathcal{Y}$ — сепарабельный абсолютный окрестностный ретракт; C обозначает произвольное компактное подмножество пространства $\mathcal{X}$, т. е. $C \in \boldsymbol{C}(\mathcal{X})$.

Теорема 0. *Если $\mathcal{X}$ — компактное пространство, то $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ (с компактно-открытой топологией) является абсолютным окрестностным ретрактом. Следовательно, его компоненты — открыто-замкнутые и дугообразно связные подмножества пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, и потому любые два элемента каждой компоненты гомотопны.*

Это вытекает непосредственно из теоремы 3 § 53, III и теоремы 6 п. I.

Обозначим, как и в § 44, III, через ρ_C операцию сужения, т. е. $\rho_C(f) = f \mid C$ для $C \subset \mathcal{X}$ и $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Таким образом,

$$\rho_C\colon \mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}^{C}.$$

Кроме того, операция сужения непрерывна (по теореме 1 из § 44, III).

Пусть $\Gamma \subset \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$. Как обычно, $\rho_C(\Gamma) = \Gamma \mid C$ есть образ C при операции сужения, т. е. множество всех сужений $f \mid C$, где $f \in \Gamma$.

Теорема 1[1]. *Если Γ — компонента отображения f в пространстве $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, то $\Gamma \mid C$ — компонента отображения $f \mid C$ в $\mathcal{Y}^{C}$.*

Доказательство. Так как операция сужения непрерывна и Γ связно, то связно и $\rho_C(\Gamma) = \Gamma \mid C$,

[1] См. Куратовский [49].

Обозначим через Δ компоненту $f|C$ в $\mathcal{Y}^C$. Так как $(f|C)\in(\Gamma|C)$, то $(\Gamma|C)\subset\Delta$. Покажем, что $\Delta=\Gamma|C$. Для этого нам нужно показать, что

$$(g\in\Delta)\Rightarrow(g\in(\Gamma|C)).$$

Так как C компактно, то элементы множества Δ попарно гомотопны (по теореме 0). В частности, $g\simeq(f|C)$, и по теореме Борсука (см. II, 3) существует $f^*\in\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, такое, что $g=(f^*|C)$ и $f^*\simeq f$. По теореме 6 п. I отсюда следует, что существует дуга в $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, соединяющая f^* с f. Поэтому $f^*\in\Gamma$, а так как $g=f^*|C$, то мы, наконец, получаем $g\in(\Gamma|C)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ — *компонента пространства* $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$; *тогда*

$$(f\in\Gamma)\equiv[(f|C)\in(\Gamma|C)\quad \textit{для каждого}\quad C\in \boldsymbol{C}(\mathcal{X})].$$

Это утверждение вытекает из § 44, III (2), так как Γ и $\Gamma|C$ — замкнутые подмножества пространств $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}^C$ соответственно.

Следствие 2а. *Пусть* Γ_0 *и* Γ_1 — *две компоненты пространства* $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$. *Тогда*

$$(\Gamma_0=\Gamma_1)\equiv[(\Gamma_0|C)=(\Gamma_1|C)\quad \textit{для каждого}\quad C\in \boldsymbol{C}(\mathcal{X})].$$

Теорема 3. *Пусть* $\Phi\subset\mathcal{Y}^\mathcal{X}$ *замкнуто. Множество* Φ *есть компонента пространства* $\mathcal{Y}^C$ *тогда и только тогда, когда* $\Phi|C$ — *компонента пространства* $\mathcal{Y}^C$ *для каждого* $C\in\boldsymbol{C}(\mathcal{X})$.

Доказательство. В силу теоремы 1 остается показать, что это условие достаточно. Пусть $f\in\Phi$ и Γ — компонента f в $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, и пусть $C\in\mathcal{X}$ — компактное множество. Покажем, что $\Phi=\Gamma$. Согласно следствию 2а из § 44, III, достаточно показать, что $\Phi|C=\Gamma|C$.

Но множества $\Phi|C$ и $\Gamma|C$ суть компоненты $\mathcal{Y}^C$ (первое — по предположению, а второе — по теореме 1), и оба содержат $f|C$. Следовательно, они совпадают.

Теорема 4. *Квазикомпоненты пространства* $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$ *связны, а потому совпадают со своими компонентами.*

Доказательство. Пусть f_0 и f_1 — два элемента из $\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, пусть Γ — компонента элемента f_0, и пусть $f_1\notin\Gamma$. Мы должны показать, что f_1 не принадлежит квазикомпоненте f_0, т. е. существует открыто-замкнутое множество $\Phi\subset\mathcal{Y}^\mathcal{X}$, такое, что $f_0\in\Phi$ и $f_1\notin\Phi$.

Так как $f_1 \notin \Gamma$, то по теореме 2 существует компактное множество $C \subset \mathcal{X}$, такое, что $(f_1 | C) \notin (\Gamma | C)$. Положим

$$\Phi = \rho_C^{-1}(\Gamma | C), \quad \text{т. е.} \quad (f \in \Phi) \equiv [(f | C) \in (\Gamma | C)].$$

Тогда $f_0 \in \Phi$ и $f_1 \notin \Phi$. Кроме того, Φ открыто-замкнуто в $\mathcal{Y}^x$, так как ρ_C непрерывно и $\Gamma | C$ (по теореме 1) есть компонента локально связного пространства $\mathcal{Y}^C$ и, следовательно, открыто-замкнутое подмножество этого пространства.

IX. Пространство $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ компонент пространства $\mathcal{Y}^x$. Обозначим (ср. § 49, Va) через $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ пространство разбиения пространства $\mathcal{Y}^x$ на квазикомпоненты (следовательно, — по теореме 4 п. VIII — на компоненты). Это означает, что $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ открыто в $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{S}\mathfrak{Z}$ (т. е. объединение компонент, принадлежащих $\mathfrak{Z}$) открыто в $\mathcal{Y}^x$.

Обозначим через $P(f)$ компоненту f в $\mathcal{Y}^x$. Следовательно, P является (естественной) *проекцией* пространства $\mathcal{Y}^x$ на $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$. По теореме 1 из § 19, II P *взаимно непрерывно*, т. е. $P^{-1}(\mathfrak{Z})$ открыто в $\mathcal{Y}^x$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Z}$ открыто в $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ (ср. § 13, XV).

Аналогично, для компактного множества $C \subset \mathcal{X}$ обозначим через $Q_C(g)$ компоненту Λ элемента g в $\mathcal{Y}^C$ и положим

$$S_{C_0, C_1}(\Lambda) = \Lambda | C_0 \quad \text{для} \quad C_0 \subset C_1 \quad \text{и} \quad \Lambda \in \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^{C_1}).$$

Наконец, положим $R_C(\Gamma) = \Gamma | C$ для $\Gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$. По теореме 1 п. VIII мы имеем $(\Gamma | C) \in \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C)$. Следовательно,

$$R_C\colon \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \to \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C) \quad \text{и} \quad R\colon \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \to \prod \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C),$$

где $R(\Gamma) = \{R_C(\Gamma)\}$.

Теорема 1. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}^x \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\rho_C"'] & \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \arrow[d, "R_C"] \\ \mathcal{Y}^C \arrow[r, "Q_C"'] & \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Следовательно, R_C непрерывно, а потому и R непрерывно.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{Y}^x$ и $f \in \Gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$, т. е. $\Gamma = P(f)$. Тогда $R_C[P(f)] = P(f) | C = \Gamma | C$, и по теореме 1 п. I $\Gamma | C$ — компонента $f | C$ в $\mathcal{Y}^C$. Следовательно,

$$\Gamma | C = Q_C(f | C) = Q_C[\rho_C(f)].$$

Это завершает доказательство коммутативности диаграммы. Непрерывность R_C вытекает из теоремы 3 § 13, XV в силу взаимной непрерывности P и непрерывности $Q_C \circ \rho_C$ (по теореме 1 из § 44, III ρ_C непрерывно).

Теорема 2. *Если пространство $\mathscr{X}$ компактно, то пространство $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$ дискретно.*

Действительно, элементы пространства $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$ — открыто-замкнутые множества (по теореме 0 п. VIII).

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$. Тогда*

$$(0) \qquad (\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}) \equiv [R_C(\Gamma) \in R_C(\mathfrak{Z}) \text{ для каждого } C],$$

т. е.

$$(\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}) \equiv [(\Gamma | C) \in (\mathfrak{Z} | C) \text{ для каждого } C].$$

Доказательство. Импликация слева направо вытекает из непрерывности R_C (теорема 1) и того факта, что $\mathfrak{Z} | C$ замкнуто в пространстве $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^C)$ (так так последнее дискретно по теореме 2).

Далее предположим, что справедлива правая часть соотношения (0). Покажем, что $\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}$.

Пусть $f \in \Gamma$. Тогда

$$(f|C) \in (\Gamma|C) \in (\mathfrak{Z}|C), \text{ т. е. } (f|C) \in \mathbf{S}(\mathfrak{Z}|C).$$

Очевидно, $\mathbf{S}(\mathfrak{Z}|C) = \mathbf{S}(\mathfrak{Z})|C$, поэтому $(f|C) \in [\mathbf{S}(\mathfrak{Z})|C]$ и, следовательно, $f \in \overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})}$ (согласно § 44, III (2)); так как f — произвольный элемент Γ, то из этого вытекает, что $\Gamma \subset \overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})}$. Но $\overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})} \subset \mathbf{S}(\overline{\mathfrak{Z}})$ (ибо $\overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})} \subset \overline{\mathbf{S}(\overline{\mathfrak{Z}})} = \mathbf{S}(\overline{\mathfrak{Z}})$ по определению фактортопологии), поэтому $\Gamma \subset \mathbf{S}(\overline{\mathfrak{Z}})$, т. е. $\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}$.

Теорема 4. *Проекция P: $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}} \to \mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$ — открытое отображение.*

Доказательство. Пусть $G \subset \mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$ открыто, и пусть $\Gamma \in P(G)$, т. е. $\Gamma \cap G \neq 0$; пусть $f \in \Gamma \cap G$.

Предположим, вопреки нашему утверждению, что $P(G)$ не является открытым, а именно, что $\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}$, где $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}) - P(G)$. По теореме 3 отсюда следует, что $(\Gamma|C) \in (\mathfrak{Z}|C)$ для каждого компактного множества C. Так как $(f|C) \in (\Gamma|C)$, то $(f|C) \in \mathbf{S}(\mathfrak{Z}|C)$. Далее, $\mathbf{S}(\mathfrak{Z}|C) = \mathbf{S}(\mathfrak{Z})|C$, откуда $(f|C) \in [\mathbf{S}(\mathfrak{Z})|C]$, поэтому $f \in \overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})}$. Следовательно, $\overline{\mathbf{S}(\mathfrak{Z})} \cap G \neq 0$, поэтому $\mathbf{S}(\mathfrak{Z}) \cap G \neq 0$ (так как G открыто), т. е. существует компонента пространства $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$, принадлежащая $\mathfrak{Z}$ и имеющая общие точки с G. Но это противоречит определению $\mathfrak{Z}$.

Замечание. Разбиение пространства $\mathcal{Y}^x$ на компоненты *полунепрерывно снизу*, так как свойство P быть открытым отображением эквивалентно открытости множества $\underset{\Gamma}{\mathsf{E}}(\Gamma \cap G \neq 0)$ (при условии что $G \subset \mathcal{Y}^x$ открыто).

Очевидно, $S_{C_0C_1} \circ S_{C_1C_2} = S_{C_0C_2}$ для $C_0 \subset C_1 \subset C_2$. Поэтому пространства $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C)$ и отображения $S_{C_0C_1}$ образуют *обратный спектр* (переменные C, C_0, C_1 пробегают семейство $\boldsymbol{C}(\mathcal{X})$, которое, очевидно, направлено относительно включения $C_0 \subset C_1$; ср. § 44, III).

Теорема 5. $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \subset \underset{\text{top}\ C,\ C_0 \subset C_1}{\mathrm{Lim}} \{\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C),\ S_{C_0C_1}\}$.

Именно, *отображение* R: $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \to \prod \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C)$ *есть требуемый гомеоморфизм пространства* $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ *в указанный предел обратного спектра.*

Доказательство. Обозначим сокращенно этот предел через $\mathfrak{L}$. Сначала мы должны показать, что

(1) $$\Gamma \in \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x) \Rightarrow R(\Gamma) \in \mathfrak{L}.$$

По определению $R(\Gamma) = \{R_C(\Gamma)\}$. Следовательно, чтобы доказать (1), достаточно показать, что

$$S_{C_0C_1}[R_{C_1}(\Gamma)] = R_{C_0}(\Gamma).$$

Но это означает, что $(\Gamma|C_1)|C_0 = \Gamma|C_0$; последнее очевидно.

Осталось показать, что R — гомеоморфизм, т. е. что

(2) $$(\Gamma \in \overline{\mathfrak{Z}}) \equiv [R(\Gamma) \in \overline{R(\mathfrak{Z})}] \text{ для каждого } \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x).$$

Так как $R(\Gamma) \in \mathfrak{L}$ (согласно (1)), то мы имеем (см. § 16, VI, теорема 3)

(3) $[R(\Gamma) \in \overline{R(\mathfrak{Z})}] \equiv [R_C(\Gamma) \in \overline{R_C(\mathfrak{Z})}$ для каждого компактного $C]$,

откуда в силу теоремы 3 вытекает (2).

Следствие. *Пространство* $\mathfrak{C}(\mathcal{Y}^x)$ *вполне регулярно.*

Действительно, это пространство гомеоморфно подмножеству произведения $\prod\limits_C \mathfrak{C}(\mathcal{Y}^C)$ вполне регулярных (в действительности дискретных) пространств.

Теперь мы усилим теорему 5 для случая, когда $\mathcal{X}$ сепарабельно и локально компактно

Во-первых, напомним (см. теорему 8 из § 41, X), что в рассматриваемом случае существует последовательность $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ компактных подмножеств пространства $\mathcal{X}$, такая, что каждое компактное подмножество пространства $\mathscr{X}$ представляет собой подмножество некоторого C_n.

Теорема 6. *Если пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно и локально компактно, то*

$$\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}) = \operatorname*{Lim}_{\text{top } n,\, n\leqslant k} \{\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n}),\ S_{C_n C_k}\}.$$

Именно, *обозначим через $R(\Gamma)$ элемент $\{R_{C_n}(\Gamma)\}$ произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n})$; тогда R — искомый гомеоморфизм.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 5, легко показать, что R — отображение *в* рассматриваемый выше предел обратного спектра. Для того чтобы доказать, что R — *гомеоморфизм*, достаточно (согласно (3) и (0)) показать, что если

(4) $\qquad (\Gamma|C_n)\in(\mathfrak{Z}|C_n)$ для каждого $n=1, 2, \ldots,$

то

(5) $\qquad (\Gamma|C)\in(\mathfrak{Z}|C)$ для каждого $C\in \boldsymbol{C}(\mathscr{X})$.

Пусть $C\in \boldsymbol{C}(\mathscr{X})$ и $C\subset C_n$. По предположению

$$(\Gamma|C_n)\in(\mathfrak{Z}|C_n), \text{ следовательно, } [(\Gamma|C_n)|C]\in[(\mathfrak{Z}|C_n)|C].$$

Но $(\Gamma|C_n)|C=\Gamma|C$ и $(\mathfrak{Z}|C_n)|C=\mathfrak{Z}|C$. Таким образом, $(\Gamma|C)\in(\mathfrak{Z}|C)$. Это завершает доказательство импликации $(4)\Rightarrow(5)$.

Теперь перейдем к доказательству самой существенной части теоремы, а именно того, что R является отображением *на*. Мы должны показать, что для каждой последовательности $\Delta_n\in \in\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n})$, $n=1, 2, \ldots$, такой, что

(6) $\qquad \Delta_k|C_n=\Delta_n$, каково бы ни было $n<k$,

существует $\Gamma\in\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$, такое, что

(7) $\qquad \Gamma|C_n=\Delta_n$ для $n=1, 2, \ldots$.

Для этого определим по индукции последовательность $f_1, f_2, \ldots,$ такую, что

(8) $\qquad f_i\in\Delta_i \quad$ и $\quad f_i|C_{i-1}=f_{i-1}$.

Пусть f_1 — произвольный элемент из Δ_1. Предположим, что $f_i\in\Delta_i$ для некоторого $i\geqslant 1$; так как $\Delta_{i+1}|C_i=\Delta_i$, согласно (6), то существует $f_{i+1}\in\Delta_{i+1}$, такое, что $f_{i+1}|C_i=f_i$. Следовательно, условие (8) удовлетворяется для $i+1$.

Последовательность $f_1, f_2, \ldots$ порождает отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, определяемое следующим образом:

(9) $f(x)=f_i(x)$, *где i — наименьший индекс, такой, что $x \in C_i$.*

Отображение f непрерывно (по теореме 3 из § 44, III), так как оно непрерывно на каждом C_n, а следовательно, на каждом компактном подмножестве C пространства $\mathscr{X}$ (ибо C содержится в некотором C_i с подходящим индексом i).

Пусть Γ — компонента f в $\mathscr{Y}^{\mathscr{X}}$. Из соотношений (8) и (9) вытекает, что $f|C_i=f_i$. Следовательно, $f_i \in \Delta_i \cap (\Gamma|C_i)$, откуда вытекает (7), так как Δ_n и $\Gamma|C_n$ — компоненты одного и того же пространства, а именно пространства $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n})$ (ср. с теоремой 1 из п. VIII).

Следствие 6а. *Если $\mathscr{X}$ сепарабельно и локально компактно, то пространство $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{\mathscr{X}})$ гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства иррациональных чисел $\mathscr{N}$, следовательно, полному сепарабельному нульмерному пространству.*

Действительно, пространство $\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n})$ дискретно и счетно, следовательно, $\prod_{n=1}^{\infty}\mathfrak{C}(\mathscr{Y}^{C_n})$ гомеоморфно $\mathscr{N}$.

ГЛАВА 8

ГРУППЫ $\mathcal{G}^\tau$, $\mathcal{S}^x$ И $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$

§ 55. Группы $\mathcal{G}^x$ и $\mathfrak{B}_0(\mathcal{X})$

I. Общие свойства коммутативных групп. Прежде всего мы сформулируем здесь элементарные свойства коммутативных групп, которые нам понадобятся позже.

Множество $\mathcal{X}$ произвольных элементов называется *коммутативной* (или *абелевой*) *группой* относительно операции $a+b$, сопоставляющей каждой паре элементов $a, b \in \mathcal{X}$ некоторый элемент из $\mathcal{X}$, если при этом выполняются следующие условия:

(i) $(a+b)+c=a+(b+c)$;

(ii) $a+b=b+a$;

(iii) существует один (и только один) элемент 0, такой, что $a+0=a$ [1]);

(iv) для каждого $a \in \mathcal{X}$ существует один (и только один) элемент $-a$, такой, что $a+(-a)=0$ [2]).

Если m — целое число, то произведение $m \cdot a$ определяется следующим образом:

$0 \cdot a=0$, $m \cdot a=(m-1) \cdot a+a$ и $(-m) \cdot a=m \cdot (-a)$ для $m>0$.

Говорят, что $a \neq 0$ есть элемент *конечного порядка* (порядка m), если существует целое число $m \neq 0$, такое, что $m \cdot a=0$.

Подмножество группы $\mathcal{X}$ называется *подгруппой*, если вместе с элементами a и b оно содержит $a+b$ и если вместе с каждым элементом a оно содержит $-a$. Поэтому любая подгруппа содержит 0; в частности, она может состоять только из нуля.

---

[1]) Этот элемент называется *нейтральным элементом* группы $\mathcal{X}$. В п. I—VIII нуль везде будет обозначать нейтральный элемент.

[2]) Групповая операция (называемая *композицией*) обозначается здесь знаком $+$. Иногда более удобно рассматривать композицию как умножение; в таком случае 0 заменяют на 1, а вместо $-a$ пишут $1:a$ (и, следовательно, вместо $a-b$ пишут $a:b$).

Здесь под «группой» мы всегда будем понимать *коммутативную группу*.

Определение. Если в группе $\mathcal{X}$ определена топология, относительно которой операции $a+b$ и $-a$ непрерывны, то $\mathcal{X}$ называется *топологической группой*.

II. Гомоморфизм. Изоморфизм. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — две группы. Поставим в соответствие каждому элементу x из $\mathcal{X}$ элемент $h(x)$ из $\mathcal{Y}$. Соответствие h называется *гомоморфизмом* (или аддитивной операцией), если

$$h(a+b) = h(a) + h(b).$$

Тогда

$$h(0) = 0 \text{ и } h(-a) = -h(a),$$

так как $h(0) = h(0+0) = h(0) + h(0)$ и $0 = h(0) = h(a-a) = h(a) + h(-a)$.

Кроме того, $h(\mathcal{X})$ — *подгруппа* группы $\mathcal{Y}$, и если G — подгруппа $\mathcal{Y}$, то $h^{-1}(G)$ — *подгруппа* $\mathcal{X}$. Группа $h^{-1}(0)$ называется *ядром* гомоморфизма h.

Гомоморфизм h, при котором из соотношения $h(a) + h(b) = h(c)$ вытекает, что $a+b=c$, другими словами, при котором

$$[a+b=c] \equiv [h(a) + h(b) = h(c)],$$

называется *изоморфизмом* между $\mathcal{X}$ и $h(\mathcal{X})$.

Для того чтобы гомоморфизм был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы он был *взаимно однозначным*, т. е. чтобы его ядро сводилось к элементу 0 (следовательно, чтобы из равенства $h(x) = 0$ вытекало равенство $x = 0$).

С теоретико-групповой точки зрения две изоморфные группы неразличимы (точно так же, как с топологической точки зрения нельзя различить два гомеоморфных пространства). В таком случае мы будем писать

$$\mathcal{X} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathcal{Y}.$$

III. Факторгруппы. Если G — подгруппа группы $\mathcal{X}$, то отношение $a \sim b \bmod G$ означает, что $(a-b) \in G$. В частности,

$$(a \sim 0 \bmod G) \equiv (a \in G).$$

Легко проверить, что отношение $a \sim b \bmod G$ *рефлексивно, симметрично и транзитивно*.

Таким образом, если считать, что два элемента a и b принадлежат одному и тому же множеству тогда и только тогда, когда $a \sim b \bmod G$, то группа $\mathcal{X}$ разобьется на попарно не пересекающиеся подмножества. Семейство этих множеств называется *факторгруппой* $\mathcal{X}/G$; композиция элементов факторгруппы определяется следующим образом: C есть сумма множеств A и B, $C = A \dotplus B$, если $c \sim a + b \bmod G$ для любых $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Легко видеть, что при этом $\mathcal{X}/G$ — коммутативная группа, а G — ее нейтральный элемент; мы будем обозначать его также символом O. Ясно, что

$$(1) \qquad \mathcal{X}/\mathcal{X} \underset{\text{gr}}{=} (0),$$

$$(2) \qquad \mathcal{X}/(0) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{X}.$$

Теорема 1. *Отображение $P\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}/G$ (называемое проекцией), сопоставляющее каждому элементу x из $\mathcal{X}$ элемент $P(x)$ из $\mathcal{X}/G$, такой, что $x \in P(x)$, является гомоморфизмом $\mathcal{X}$ на $\mathcal{X}/G$.*

Кроме того,

$$(3) \qquad [x \sim x' \bmod G] \equiv [P(x) = P(x')],$$

$$(4) \qquad P^{-1}(O) = G,$$

$$(5) \qquad [x \sim 0 \bmod G] \equiv [P(x) = O].$$

Теорема 2. *Если A — такая группа, что $G \subset A \subset \mathcal{X}$, то $A = P^{-1}(A/G)$, откуда $P(A) = A/G$.*

Следующая теорема является обратной к теореме 1.

Теорема 3. *Если $h\colon \mathcal{X} \to h(\mathcal{X})$ — гомоморфизм, то группы $h(\mathcal{X})$ и $\mathcal{X}/h^{-1}(0)$ изоморфны:*

$$(6) \qquad h(\mathcal{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{X}/h^{-1}(0),$$

а факторгруппа $\mathcal{X}/h^{-1}(0)$ совпадает с семейством прообразов точек при отображении h (т. е. с семейством множеств $h^{-1}(y)$, где y пробегает группу $h(\mathcal{X})$).

Доказательство. Отображение $h^{-1}\colon h(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}/h^{-1}(0)$ есть именно тот изоморфизм, который выражается соотношением (6). Действительно, оно взаимно однозначно и является гомоморфизмом, так как из соотношений $x_1 \in h^{-1}(y_1)$ и $x_2 \in h^{-1}(y_2)$ вытекает, что $(x_1 + x_2) \in h^{-1}(y_1 + y_2)$.

Теорема 4. *Если $h\colon \mathcal{X} \to h(\mathcal{X})$ — гомоморфизм и A — такая группа, что $h^{-1}(0) \subset A \subset \mathcal{X}$, то $A = h^{-1}h(A)$.*

Доказательство. Пусть $F(x) = h^{-1}h(x)$ и $G = h^{-1}(0)$. Согласно теореме 2, $F(A) = A/G$, следовательно, $F(a) \subset A$ при $a \in A$, и потому

$$h^{-1}h(A) = \bigcup_{a \in A} h^{-1}h(a) = \bigcup_{a \in A} F(a) = A.$$

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$ — *две группы*, $A \subset \mathcal{X}$ *и* $B \subset \mathcal{Y}$ — *подгруппы. Пусть* h: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — *такое отображение, что*

(i) *из* $x \sim 0 \bmod A$ *вытекает* $h(x) \sim 0 \bmod B$ (*т. е.* $h(A) \subset B$);

(ii) $h(x_1 + x_2) \sim (h(x_1) + h(x_2)) \bmod B$;

(iii) *для каждого* $y \in \mathcal{Y}$ *существует элемент* $x \in \mathcal{X}$, *такой, что* $y \sim h(x) \bmod B$.

Каждому $X \in \mathcal{X}/A$ *поставим в соответствие элемент* $e(X) \in X$, *а также элемент* $H(X)$ *факторгруппы* $\mathcal{Y}/B$, *содержащий* $h[e(X)]$. *Отображение* H: $(\mathcal{X}/A) \to (\mathcal{Y}/B)$ (*индуцированное отображением* h) *не зависит от определения операции* e: $(\mathcal{X}/A) \to \mathcal{X}$ *и является гомоморфизмом на.*

Отображение H — *изоморфизм, если, кроме того,*

(iv) *из* $h(x) \sim 0 \bmod B$ *вытекает* $x \sim 0 \bmod A$ (*т. е.* $h^{-1}(B) \subset A$).

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 пусть

$$y \in F(y) \in \mathcal{Y}/B \quad \text{и} \quad [y \sim y'] \equiv [F(y) = F(y')]\ ^{1)}.$$

Отсюда следует, что $H(X) = F\{h[e(X)]\}$.

Для того чтобы показать, что H не зависит от e, предположим, что $e'(X) \in X$. Мы должны показать, что

$$F\{h[e(X)]\} = F\{h[e'(X)]\}.$$

Но так как $e(X) \sim e'(X)$, то $e(X) - e'(X) \sim 0$, откуда $h[e(X) - e'(X)] \sim 0$, согласно (i). Так как $h[e(X) - e'(X)] \sim \sim h[e(X)] - h[e'(X)]$, согласно (ii), то

$$F\{h[e(X)] - h[e'(X)]\} = F(0) = 0.$$

Отображение H — гомоморфизм, ибо

$$e(X_1 \dotplus X_2) \sim e(X_1) + e(X_2),$$

следовательно,

$$he(X_1 \dotplus X_2) \sim he(X_1) + he(X_2),$$

поэтому

$$F\{h[e(X_1 \dotplus X_2)]\} = F\{h[e(X_1)] + h[e(X_2)]\} = \\ = F\{h[e(X_1)]\} \dotplus F\{h[e(X_2)]\}.$$

Кроме того, каждому $Y \in \mathcal{Y}/B$ соответствует $X \in \mathcal{X}/A$, такое, что $Y = H(X)$. Действительно, пусть $y \in Y$, тогда $Y = F(y)$. Пусть (ср. (iii)) $y \sim h(x)$, где $x \in X$. Тогда $x \sim e(X)$, откуда (ср. (i) и (ii)) $h(x) \sim he(X)$, следовательно, $y \sim he(X)$ и

$$Y = F(y) = F\{h[e(X)]\} = H(X).$$

[1]) Для краткости мы опускаем здесь символы $\bmod A$ и $\bmod B$.

Наконец, из условия (iv) вытекает, что H — взаимно однозначное отображение. Действительно, пусть $F\{h[e(X_1)]\} = F\{h[e(X_2)]\}$. Тогда

$$h[e(X_1)] \sim h[e(X_2)], \quad \text{откуда} \quad h[e(X_1)] - h[e(X_2)] \sim 0,$$

следовательно,

$$h[e(X_1) - e(X_2)] \sim 0$$

и, согласно (iv),

$$e(X_1) - e(X_2) \sim 0, \quad \text{т. е.} \quad e(X_1) \sim e(X_2),$$

и потому $X_1 = X_2$.

Из теорем 4 и 5 (при $\mathscr{Y} = h(\mathscr{X})$ и $B = h(A)$) вытекает следующая

Теорема 6. *При предположениях теоремы 4 имеет место изоморфизм*

$$\mathscr{X}/A \underset{\mathrm{gr}}{=} h(\mathscr{X})/h(A).$$

Теорема 7. *Если A, G и $\mathscr{X}$ — группы, такие, что $G \subset A \subset \mathscr{X}$, то*

$$\mathscr{X}/A \underset{\mathrm{gr}}{=} [\mathscr{X}/G]/[A/G]. \tag{7}$$

Действительно, если F — гомоморфизм, определенный в теореме 1, то по теореме 2 отсюда следует, что

$$F(\mathscr{X}) = \mathscr{X}/G \quad \text{и} \quad F(A) = A/G,$$

откуда в силу теоремы 6 получаем (7).

IV. Операция $\widehat{A}$. Если A — подмножество группы $\mathscr{X}$, то обозначим через $\widehat{A}$ наименьшую подгруппу $\mathscr{X}$, содержащую A. Группа $\widehat{A}$ всегда существует, так как пересечение произвольного семейства групп (в данном случае семейства всех групп, содержащих A) есть группа. Легко установить следующие теоремы:

Теоремы 1—3. $A \subset \widehat{A}$; $\mathscr{X} = \widehat{\mathscr{X}}$; $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$.

Теорема 4. *Из $A \subset B$ вытекает $\widehat{A} \subset \widehat{B}$, так что $\widehat{A} \cup \widehat{B} \subset \widehat{A \cup B}$ и $\widehat{A \cap B} \subset \widehat{A} \cap \widehat{B}$.*

Теорема 5. $(A = \widehat{A}) \equiv$ *(A — группа).*

Теорема 6. $[(x) = \widehat{(x)}] \equiv [x = 0]$.

Теорема 7. *Группа $\widehat{A}$ есть множество всех элементов вида*

$$m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n,$$

где $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $m_1, \ldots, m_n$ — целые числа.

Доказательство. Действительно, с одной стороны, эти элементы образуют группу, а с другой стороны, группа, содержащая A, содержит также все эти элементы.

Отсюда вытекает следующая

Теорема 8. *Если A и B — две подгруппы $\mathcal{X}$, то $\widehat{A \cup B}$ — множество всех элементов x вида*

$$(1) \qquad x = a + b, \quad \text{где} \quad a \in A \quad \text{и} \quad b \in B.$$

Более того, если $A \cap B = (0)$, т. е. если группы A и B имеют общим только нейтральный элемент, то каждый элемент $x \in \widehat{A \cup B}$ имеет одно и только одно представление в виде (1).

В последнем случае $\widehat{A \cup B}$ называется *прямой суммой* A и B; в этом случае соответствие, которое каждому $x \in \widehat{A \cup B}$ сопоставляет элемент a (соответственно b), такой, что имеет место (1), является гомоморфизмом группы $\widehat{A \cup B}$ на A (соответственно на B).

Теорема 9. *Если $h\colon \mathcal{X} \to h(\mathcal{X})$ — гомоморфизм, то*

$$h(\widehat{A}) = \widehat{h(A)} \quad \text{для любого} \quad A \subset \mathcal{X}.$$

Это следует непосредственно из теоремы 7, ибо

$$h(m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n) = h(m_1 \cdot a_1) + \ldots + h(m_n \cdot a_n) = \\ = m_1 \cdot h(a_1) + \ldots + m_n \cdot h(a_n).$$

Теорема 10. *Если A и B — две группы, то*

$$\widehat{A \cup B}/A \cap B = (\widehat{A/A \cap B) \cup (B/A \cap B}).$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 п. III пусть $F\colon \widehat{A \cup B} \to \widehat{A \cup B}/A \cap B$ — естественный гомоморфизм. Тогда (ср. с теоремой 1 п. III и с теоремой 9)

$$\widehat{A \cup B}/A \cap B = F(\widehat{A \cup B}) = \widehat{F(A \cup B)} = \\ = \widehat{F(A) \cup F(B)} = (\widehat{A/A \cap B) \cup (B/A \cap B}).$$

Теорема 11. *Если $\widehat{A \cup B}$ — прямая сумма групп A и B, то*

$$(2) \qquad \widehat{A \cup B}/A \underset{\text{gr}}{=} B.$$

Доказательство. Существуют (ср. с теоремой 8) функции g и h, такие, что

$$g\colon \widehat{A \cup B} \to A, \qquad h\colon \widehat{A \cup B} \to B$$

и

$$x = g(x) + h(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \widehat{A \cup B}.$$

Так как h — гомоморфизм и так как $h^{-1}(0) = A$, то, согласно теореме 3 п. III, получаем соотношение (2) (если $\mathscr{X}$ заменить на $\widehat{A \cup B}$).

V. Линейная независимость, ранг, базис. Подмножество A группы $\mathscr{X}$ называется *линейно независимым*, если для любой конечной системы $a_1, \ldots, a_n$ элементов из A равенство

$$m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n = 0$$

с целыми коэффициентами $m_1, \ldots, m_n$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$m_1 = \ldots = m_n = 0.$$

Элементы линейно независимого подмножества также называют *линейно независимыми.* Максимальное число линейно независимых элементов в $\mathscr{X}$, если оно существует, называется *рангом* $\mathscr{X}$; если такого числа не существует, то говорят, что $\mathscr{X}$ — группа *бесконечного ранга.*

Так, например, группа $\mathscr{G}$ целых чисел имеет ранг 1, группа $\mathscr{G}^2$ комплексных целых чисел имеет ранг 2, группа $\mathscr{G}^{\omega}$ бесконечных последовательностей целых чисел, каждая из которых содержит только конечное число членов, отличных от 0, имеет бесконечный ранг. Бесконечный ранг имеет также группа $\mathscr{G}^{\aleph_0}$ всех бесконечных последовательностей целых чисел.

Если множество A линейно независимо и если $\widehat{A} = \mathscr{X}$, то A называется *базисом* (в теоретико-групповом смысле) группы $\mathscr{X}$. Тогда каждый элемент $x \in \mathscr{X}$ допускает одно и только одно представление в виде

$$x = m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n, \quad \text{где} \quad a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Теорема 1. *Если $\mathscr{X}$ имеет базис, состоящий из n элементов, то $\mathscr{X} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathscr{G}^n$. Если $\mathscr{X}$ имеет счетный базис, то*

$$\mathscr{X} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathscr{G}^{\omega}.$$

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — (конечный или бесконечный) базис группы $\mathscr{X}$. Определим функцию $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{G}^n$ (или $\mathscr{G}^{\omega}$) следующим образом:

$$f(x) = [m_1, m_2, \ldots] \quad \text{для} \quad x = m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \ldots .$$

Тогда f — искомый изоморфизм.

Теорема 2. *Если $h\colon \mathfrak{X} \to h(\mathfrak{X})$ — гомоморфизм, то*

$$\text{ранг } \mathfrak{X} = \text{ранг } h^{-1}(0) + \text{ранг } h(\mathfrak{X})$$[1].

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — линейно независимая система элементов в $h^{-1}(0)$, а $h(a_{k+1}), \ldots, h(a_n)$ — линейно независимая система элементов в $h(\mathfrak{X})$. Покажем, что элементы $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ линейно независимы. Предположим, что

(1) $$m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_k \cdot a_k + \ldots + m_n \cdot a_n = 0.$$

Так как $(m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_k \cdot a_k) \in h^{-1}(0)$, то

$$h(m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_k \cdot a_k) = 0;$$

следовательно (ср. (1)),

$$m_{k+1} \cdot h(a_{k+1}) + \ldots + m_n \cdot h(a_n) = 0,$$

откуда вытекает, что $m_{k+1} = \ldots = m_n = 0$. Таким образом (ср. (1)),

$$m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_k \cdot a_k = 0, \quad \text{так что} \quad m_1 = \ldots = m_k = 0.$$

Итак, линейная независимость системы $(a_1, \ldots, a_n)$ установлена. Отсюда следует, что

$$\text{ранг } \mathfrak{X} \geqslant \text{ранг } h^{-1}(0) + \text{ранг } h(\mathfrak{X}).$$

Для доказательства обратного неравенства можно предположить, что ранги групп $h^{-1}(0)$ и $h(\mathfrak{X})$ конечны. Пусть

(2) $$\text{ранг } h^{-1}(0) = k,$$

(3) $$\text{ранг } h(\mathfrak{X}) = n - k.$$

Мы должны показать, что ранг $\mathfrak{X} \leqslant n$. Это означает, что если $p_1, \ldots, p_{n+1}$ — некоторая система элементов $\mathfrak{X}$, то существует такая система целых чисел $r_1, \ldots, r_{n+1}$, не все из которых равны нулю, что

(4) $$r_1 \cdot p_1 + \ldots + r_{n+1} \cdot p_{n+1} = 0.$$

Прежде всего покажем, что каждый элемент $x \in \mathfrak{X}$ имеет следующий вид:

(5) $$m \cdot x = m_1 \cdot a_1 + \ldots + m_n \cdot a_n, \quad \text{где} \quad m \neq 0.$$

---

[1] Ср. Александров и Хопф [1, стр. 573] и Александров [1, стр. 634].

Так как элементы $h(a_{k+1}), \ldots, h(a_n)$ линейно независимы, то из условия (3) вытекает существование такой системы целых чисел $s, s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_n$, что

$$s \cdot h(x) - s_{k+1} \cdot h(a_{k+1}) - \ldots - s_n \cdot h(a_n) = 0 \quad \text{и} \quad s \neq 0.$$

Отсюда следует, что $sx - s_{k+1}a_{k+1} - \ldots - s_n a_n$ принадлежит $h^{-1}(0)$; поэтому, согласно (2), существует такая система целых чисел $m_0, m_1, \ldots, m_n$, что

$$m_0(sx - s_{k+1}a_{k+1} - \ldots - s_n a_n) = m_1 a_1 + \ldots + m_k a_k.$$

Более того, $m_0 \neq 0$, так как элементы $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы. Положим

$$m = m_0 s, \quad m_{k+1} = m_0 s_{k+1}, \ldots, m_n = m_0 s_n.$$

Тогда условие (5) удовлетворяется.

Отсюда следует, что каждому p_j (где $j = 1, \ldots, n+1$) соответствует система целых чисел $m_j, m_{j_1}, \ldots, m_{j_n}$, такая, что

$$(6) \qquad m_j p_j = m_{j_1} a_1 + \ldots + m_{j_n} a_n$$

и

$$(7) \qquad m_j \neq 0.$$

Пусть $c_1, \ldots, c_{n+1}$ — система целых решений (не все из которых равны нулю) n однородных уравнений

$$m_{1i}x_1 + \ldots + m_{n+1,i}x_{n+1} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

т. е.

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{n+1} m_{ji} c_j = 0, \qquad \text{где} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть $r_j = c_j m_j$, $j = 1, \ldots, n+1$. Тогда (ср. (6) и (8))

$$\sum_{j=1}^{n+1} r_j p_j = \sum_{j=1}^{n+1} c_j m_j p_j = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} c_j m_{ji} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n+1} m_{ji} c_j = 0.$$

Более того, согласно (7), хотя бы одно из чисел $r_j \neq 0$.

Теорема 3. *Если G — подгруппа группы $\mathscr{X}$, то*

$$\text{ранг } \mathscr{X} = \text{ранг } G + \text{ранг } (\mathscr{X}/G).$$

Это следует из теоремы 2 в сочетании с формулой (4) п. III.

Теорема 4. *Если $\widehat{A \cup B}$ — прямая сумма групп A и B, то*

$$\text{ранг } \widehat{A \cup B} = \text{ранг } A + \text{ранг } B.$$

Это вытекает из теоремы 3 и теоремы 11 п. IV.

VI. Линейная независимость по mod G. Пусть G — подгруппа $\mathcal{X}$. Подмножество A множества $\mathcal{X}$ называется *линейно независимым по* mod G, если для любой конечной системы $a_1, \ldots, a_n$ элементов A из соотношения

$$m_1a_1 + \ldots + m_na_n \sim 0 \mod G$$

вытекает, что $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Если

$$x \sim m_1a_1 + \ldots + m_na_n, \quad \text{где} \quad a_1, \ldots, a_n \in A,$$

для каждого элемента x из $\mathcal{X}$, то A называется *множеством образующих* группы $\mathcal{X}$ по mod G.

Если это множество A, кроме того, линейно независимо по mod G, то оно называется *базисом* группы $\mathcal{X}$ по mod G.

Пусть P — функция, рассмотренная в теореме 1 п. III. Согласно формуле (5) п. III, множество A линейно независимо тогда и только тогда, когда семейство $P(A)$ (т. е. семейство элементов $P(a)$ факторгруппы $\mathcal{X}/G$, где $a \in A$) линейно независимо. Таким образом, имеют место следующие соотношения эквивалентности:

$$\{A \text{ — базис } \mathcal{X} \text{ по } \operatorname{mod} G\} \equiv \{P(A) \text{ — базис } \mathcal{X}/G\},$$

$$\{A \text{ — множество образующих группы } \mathcal{X} \text{ по } \operatorname{mod} G\} \equiv$$
$$\equiv \{P(A) \text{ — множество образующих } \mathcal{X}/G\}.$$

Ранг группы $\mathcal{X}/G$ равен максимальному числу элементов группы $\mathcal{X}$, линейно независимых по mod G.

VII. Декартовы произведения. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — две группы; их декартово произведение $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ становится группой, если композиция определяется следующим образом:

(1) $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Следовательно, $(0, 0)$ — нейтральный элемент группы $\mathcal{Z}$ и

(2) $$-(x, y) = (-x, -y), \quad m \cdot (x, y) = (mx, my).$$

Проекция $h: \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$, определяемая условием $h(x, y) = x$, является гомоморфизмом на.

Очевидно, что

(3) $$\mathcal{X} \times (0) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{X}, \quad (0) \times \mathcal{Y} \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{Y},$$

(4) $$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \underset{\text{gr}}{=} \overline{\mathcal{X} \times (0) \cup (0) \times \mathcal{Y}}.$$

Группа $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ является *прямой суммой* групп $\mathcal{X} \times (0)$ и $(0) \times \mathcal{Y}$, и по теореме 4 п. V имеем

(5) $$\text{ранг } (\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = \text{ранг } \mathcal{X} + \text{ранг } \mathcal{Y}.$$

Если $f\colon \mathcal{X}\to f(\mathcal{X})$ и $g\colon \mathcal{Y}\to g(\mathcal{Y})$ — гомоморфизмы, то функция $h\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to f(\mathcal{X})\times g(\mathcal{Y})$, определяемая условием $h(x, y) = [f(x), g(y)]$, есть *гомоморфизм на*.

Если A и B — подгруппы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно, то

$$(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})/(A\times B) \underset{\text{gr}}{=} (\mathcal{X}/A)\times(\mathcal{Y}/B). \tag{6}$$

Действительно, если F — гомоморфизм, который каждому $x\in\mathcal{X}$ ставит в соответствие элемент $F(x)$ из $\mathcal{X}/A$, такой, что $x\in F(x)$, и если G — определенный аналогично гомоморфизм, такой, что $y\in G(y)\in\mathcal{Y}/B$, то положим $H(x, y) = [F(x), G(y)]$. Отображение $H\colon \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to(\mathcal{X}/A)\times(\mathcal{Y}/B)$ является гомоморфизмом на, а $A\times B$ — его ядро. Отсюда на основании теоремы 3 п. III получаем соотношение (6).

В частности (ср. (3) и III(1) и (2)),

$$(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})/\mathcal{X} \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{Y} \tag{7}$$

(мы отождествляем группу $\mathcal{X}\times(0)$ с $\mathcal{X}$).

Приведенные выше утверждения, касающиеся произведения двух групп $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, можно легко распространить на *обобщенные произведения* $\mathfrak{Z} = \prod\limits_{t\in T}\mathcal{X}_t$, где $\mathcal{X}_t$ — (абелева) группа, а T — произвольное множество. Именно, положим для каждой пары $\mathfrak{z} = \{\mathfrak{z}^t\}$ и $\mathfrak{y} = \{\mathfrak{y}^t\}$ элементов $\mathfrak{Z}$

$$\mathfrak{z}+\mathfrak{y} = \{\mathfrak{z}^t+\mathfrak{y}^t\}, \quad \text{где} \quad t\in T.$$

Тогда $\mathfrak{Z}$ становится (абелевой) группой. Более того, *если каждая группа $\mathcal{X}_t$ — топологическая группа, то $\mathfrak{Z}$ — тоже топологическая группа.*

Теперь предположим, что T — направленное множество, $\{\mathcal{X}_t, f_{t_0t_1}\}$ — обратный спектр, $\mathcal{X}_t$ — группа (для каждого $t\in T$) и $f_{t_0t_1}\colon \mathcal{X}_{t_1}\to\mathcal{X}_{t_0}$ — гомоморфизм (для $t_0\leqslant t_1$). Положим

$$\mathcal{X}_\infty = \operatorname*{Lim}_{t,\, t_0\leqslant t_1}\{\mathcal{X}_t, f_{t_0t_1}\}.$$

Теорема 1. *$\mathcal{X}_\infty$ — подгруппа группы $\prod\limits_t\mathcal{X}_t$.*

Более того, *если каждое $\mathcal{X}_t$ — топологическая группа, то $\mathcal{X}_\infty$ — тоже топологическая группа.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{w} = \mathfrak{z}+\mathfrak{y}$, где $\mathfrak{z}, \mathfrak{y}\in\mathcal{X}_\infty$. Пусть $t_0\leqslant t_1$. Покажем, что $f_{t_0t_1}(\mathfrak{w}^{t_1}) = \mathfrak{w}^{t_0}$. Действительно,

$$f_{t_0t_1}(\mathfrak{w}^{t_1}) = f_{t_0t_1}(\mathfrak{z}^{t_1}+\mathfrak{y}^{t_1}) = f_{t_0t_1}(\mathfrak{z}^{t_1}) + f_{t_0t_1}(\mathfrak{y}^{t_1}) = \mathfrak{z}^{t_0}+\mathfrak{y}^{t_0} = \mathfrak{w}^{t_0}.$$

Вторая часть утверждения теоремы является очевидным следствием того, что $\prod\limits_t\mathcal{X}_t$ — топологическая группа.

Добавим еще утверждение (которое легко доказать), аналогичное следствию 4а § 16, VI:

Теорема 2. *Пусть, как выше, $\{\mathcal{X}_t, f_{t_0t_1}\}$ и $\{\mathcal{Y}_t, g_{t_0t_1}\}$ — два обратных спектра групп; предположим, что h ставит в соответствие каждому $t \in T$ отображение h_t: $\mathcal{X}_t \to \mathcal{Y}_t$ так, что при этом коммутативна диаграмма (для $t_0 \leqslant t_1$)*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{t_0} \arrow[d, "h_{t_0}"'] & \mathcal{X}_{t_1} \arrow[l, "f_{t_0t_1}"'] \arrow[d, "h_{t_1}"] \\ \mathcal{Y}_{t_0} & \mathcal{Y}_{t_1} \arrow[l, "g_{t_0t_1}"] \end{tikzcd}$$

Пусть h_∞: $\mathcal{X}_\infty \to \mathcal{Y}_\infty$ — такое отображение, что $h^t(\mathfrak{z}) = h_t(\mathfrak{z}^t)$. Если h_t — изоморфизм (для каждого $t \in T$), то h_∞ — также изоморфизм.

VIII. Группа $\mathcal{Y}^x$. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — два метрических пространства (или, более общо, два $\mathcal{L}^*$-пространства). Предположим, что $\mathcal{Y}$ — *топологическая абелева группа*. Семейство $\mathcal{Y}^x$ непрерывных функций f: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ наделяется групповой структурой, если композицию элементов f_1, f_2 из $\mathcal{Y}^x$ определить следующим образом:

(1) $\{f_3 = f_1 + f_2\} \equiv \{f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}\}$.

Так как группа $\mathcal{Y}$ коммутативна, то группа $\mathcal{Y}^x$ тоже коммутативна. Нейтральным элементом группы $\mathcal{Y}^x$ является постоянная функция со значением 0.

Постоянные функции образуют подгруппу группы $\mathcal{Y}^x$, изоморфную $\mathcal{Y}$. Часто эту подгруппу полезно обозначать тем же символом $\mathcal{Y}$.

Группа $\mathcal{Y}^x$, рассматриваемая как $\mathcal{L}^*$-пространство (ср. § 20, VI), является топологической группой.

Для того чтобы доказать это утверждение, положим

$$h_n = f_n + g_n, \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad \lim_{n\to\infty} g_n = g \quad \text{и} \quad h = f + g.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x_n) = \lim_{n\to\infty} [f_n(x_n) + g_n(x_n)] =$$
$$= \lim_{n\to\infty} f_n(x_n) + \lim_{n\to\infty} g_n(x_n) = f(x) + g(x) = h(x),$$

следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$.

Пусть A — фиксированное подмножество $\mathcal{X}$; положим

(2) $$\zeta(f) = f \mid A.$$

Таким образом, операция ζ каждому элементу $f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ ставит в соответствие элемент группы $\mathcal{Y}^{A}$, а именно сужение $f \mid A$. Следовательно, если Φ — подмножество $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, то (ср. § 53, I)

(3) $$\zeta(\Phi) = \Phi \mid A.$$

Теорема 1. *Операция ζ — гомоморфизм*:

(4) $$\zeta(f_1 + f_2) = \zeta(f_1) + \zeta(f_2).$$

Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. *Если Φ — подгруппа $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, то $\Phi \mid A$ — подгруппа $\mathcal{Y}^{A}$.*

В частности, *непрерывные функции g: $A \to \mathcal{Y}$, имеющие (непрерывные) продолжения на $\mathcal{X}$, образуют подгруппу группы $\mathcal{Y}^{A}$* (а именно подгруппу $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} \mid A$).

Положим

(5) $$\Delta(A) = \zeta^{-1}(0), \quad \text{т. е.} \quad \Delta(A) = \mathop{\mathrm{E}}_{f} [f \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}][f(A) = (0)].$$

Из (3) и теоремы 3 п. III вытекает следующая

Теорема 3. *Если Φ — подгруппа $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, то*

$$\Phi/\Delta(A) \underset{\text{gr}}{=} \Phi \mid A.$$

Теорема 4. *Если Φ_1 и Φ_2 — две подгруппы $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, такие, что $\Delta(A) \subset \Phi_1 \subset \Phi_2$, то*

$$\Phi_2/\Phi_1 \underset{\text{gr}}{=} (\Phi_2 \mid A)/(\Phi_1 \mid A).$$

Это следует из теоремы 3 в сочетании с теоремой 7 п. III (где A заменено на $\Delta(A)$).

Теорема 5. *Пусть f: $\mathcal{X} \to Z$ — непрерывное отображение $\mathcal{X}$ на Z. Если Φ — подгруппа $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, состоящая из сложных функций gf, где g: $Z \to \mathcal{Y}$ — непрерывные функции, то*

(6) $$\mathcal{Y}^{Z} \underset{\text{gr}}{=} \Phi,$$

(7) $$\mathcal{Y}^{Z}/\mathcal{Y} \underset{\text{gr}}{=} \Phi/\mathcal{Y}.$$

Доказательство. Положим $h_g(x) = gf(x)$, где $g \in \mathcal{Y}^{Z}$ и $x \in \mathcal{X}$; тогда h — изоморфизм $\mathcal{Y}^{Z}$ на Φ, так как

$$h_{g_1+g_2}(x) = g_1 f(x) + g_2 f(x) = h_{g_1}(x) + h_{g_2}(x)$$

и

$$\text{из } h_g = 0 \quad \text{вытекает} \quad g = 0$$

(так как если $h_g=0$, то $gf(x)=0$ для любого x и, следовательно, $g(z)=0$ для любого $z\in Z$).

Формула (7) следует из формулы (6) и из соотношения эквивалентности $(h_g=\text{const})\equiv(g=\text{const})$ (ср. III, 5).

IX. Группа $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}$. Пусть $\mathscr{G}$, как обычно, обозначает группу, целых чисел. Положим

$$\mathfrak{B}_0(\mathscr{X})=\mathscr{G}^{\mathscr{X}}/\mathscr{G} \quad \text{и} \quad b_0(\mathscr{X})=\text{ранг } \mathfrak{B}_0(\mathscr{X}).$$

Следовательно, элементы факторгруппы получаются в результате «отождествления» тех элементов группы $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}$, которые отличаются на постоянную.

Условимся считать, что $b_0(\mathscr{X})=0$, если $\mathscr{X}$ пусто.

Теорема 1. *Если $\mathscr{X}$ связно, то $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}=\mathscr{G}$ и, следовательно* $b_0(\mathscr{X})=0$.

Действительно, всякая непрерывная функция $d\colon \mathscr{X}\to\mathscr{G}$ постоянна.

Приведенная ниже теорема 3 является обобщением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $F_0, \ldots, F_n$ — такая система замкнутых непересекающихся непустых множеств, что $\mathscr{X}=F_0\cup\ldots\cup F_n$. Система характеристических функций $d_1, \ldots, d_n$ множеств $F_1, \ldots, F_n$ линейно независима по* $\operatorname{mod}\mathscr{G}$.

Доказательство. Пусть $(a_{kl})=d_k(F_l)$. Тогда $a_{ll}=1$ и $a_{kl}=0$ для $k\neq l$. Так как определитель системы $n+1$ однородных уравнений

$$\text{(i)} \qquad m_0+a_{1l}m_1+\ldots+a_{nl}m_n=0 \qquad (l=0, \ldots, n)$$

равен 1, то из этого следует, что $m_0=m_1=\ldots=m_n=0$.

Теорема 3. *Если (непустое) пространство $\mathscr{X}$ имеет конечное число, скажем $n+1$, компонент $F_0, \ldots, F_n$, то*

$$\mathfrak{B}_0(\mathscr{X})=\mathscr{G}^n \quad \text{и} \quad b_0(\mathscr{X})=n.$$

Доказательство. Характеристические функции $d_1, \ldots, d_n$ множеств $F_1, \ldots, F_n$ являются образующими группы $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}$ по $\operatorname{mod}\mathscr{G}$. В самом деле, пусть d — произвольный элемент группы $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}$ и $(m_l)=d(F_l)$. Тогда

$$d=m_0+(m_1-m_0)d_1+\ldots+(m_n-m_0)d_n.$$

Теорема 4. *Пусть $d_1, \ldots, d_n$ — система элементов группы $\mathscr{G}^{\mathscr{X}}$. Если*

$$\mathscr{X}=F_1\cup\ldots\cup F_n$$

и $d_k\,|\,F_l$ — постоянная для всякой пары k, l, то функции $d_1, \ldots, d_n$ линейно зависимы по $\operatorname{mod}\mathscr{G}$, Доказательство. Пусть $(a_{kl}) = d_k(F_l)$. Искомые целые числа $m_0, \ldots, m_n$, последние n из которых не все равны нулю, определяются системой n уравнений (i) для $l = 1, \ldots, n$.

Теорема 5. *Если функции $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{G}^{\mathcal{X}}$ линейно независимы по* $\bmod \mathcal{G}$, *то* $\mathcal{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_n$, *где* $F_0, \ldots, F_n$ — *открыто-замкнутые непустые множества, такие, что для каждой пары различных индексов* l, r *существует такой индекс* k, *что* $d_k(F_l) \cdot d_k(F_r) = 0$.

Доказательство. Докажем сначала следующую (теоретико-множественную) лемму.

Пусть $\mathfrak{z}_0, \ldots, \mathfrak{z}_m$ — система $m+1$ различных точек декартова произведения $A = A^{(1)} \times \ldots \times A^{(n)}$. Тогда $A = B_0 \cup \ldots \cup B_m$, где

(i) $\mathfrak{z}_i \in B_i$ для $i = 0, \ldots, m$,

(ii) для каждой пары различных индексов l, r существует число k, такое, что $B_l^{(k)} \cap B_r^{(k)} = 0$, где $X^{(k)}$ обозначает проекцию X на ось $A^{(k)}$.

Применим индукцию. При $m = 0$ положим $B_0 = A$. При $n = 1$ и $m > 0$ положим $B_i = \mathfrak{z}_i$, если $i < m$, и $B_m = A - (B_0 \cup \ldots \cup B_{m-1})$.

Предположим, что лемма имеет место для индексов $j < m$ (и для каждого n). Пусть $n > 1$. Так как точки $\mathfrak{z}_0, \ldots, \mathfrak{z}_m$ различны, можно предположить, что существует такой индекс $j < m$, что $\mathfrak{z}_i^{(1)} = \mathfrak{z}_0^{(1)}$ при $i \leqslant j$ и $\mathfrak{z}_i^{(1)} \neq \mathfrak{z}_0^{(1)}$ при $i > j$.

Так как $j < m$, то по предположению существует разбиение

$$\mathfrak{z}_0^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(n)} = B_0 \cup \ldots \cup B_j,$$

и условия (i) и (ii) (где m заменено на j) выполняются. Из тех же предположений следует, что $A = C_{j+1} \cup \ldots \cup C_m$, где $\mathfrak{z}_i \in C_i$ для $i > j$, и условие (ii) выполняется (если B заменено на C).

Пусть $B_i = C_i - \mathfrak{z}_0^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(n)}$ для $i > j$. Множества B_i — искомые. Действительно, если l, $r \leqslant j$ или если l, $r > j$, то условие (ii) удовлетворяется в силу определения множеств B_i $(i \leqslant j)$ и C_i $(i > j)$. Если $l \leqslant j < r$, то $B_l^{(1)} = \mathfrak{z}_0^{(1)}$ и $B_r^{(1)} = C_r^{(1)} - \mathfrak{z}_0^{(1)}$.

Лемма доказана; пусть $\delta(x)$ — такая точка группы $\mathcal{G}^n$, что $\delta^{(k)}(x) = d_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$ (т. е. точка пространства $\mathcal{E}^n$ с координатами $d_1(x), \ldots, d_n(x)$). Рассмотрим разбиение $\mathcal{X} = \bigcup \delta^{-1}(\mathfrak{z})$ на открыто-замкнутые множества, где $\mathfrak{z}$ пробегает $\mathcal{G}^n$. Так как каждая из суженных функций $d_k \mid \delta^{-1}(\mathfrak{z})$ постоянна $(= \mathfrak{z}^{(k)})$, то по теореме 4 в $\mathcal{G}^n$ существуют $n+1$ различных элементов $\mathfrak{z}_0, \ldots, \mathfrak{z}_n$, таких, что

$$\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i) = 0, \qquad i = 0, \ldots, n.$$

Положим в лемме $A^{(1)} = \ldots = A^{(n)} = \mathscr{I}$, $m = n$ и рассмотрим множества $F_i = \delta^{-1}(B_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Так как $\mathscr{I}^n = B_0 \cup \ldots \cup B_n$, то $\mathscr{X} = F_0 \cup \ldots \cup F_n$. Так как $\mathfrak{z}_i \in B_i$, то $\delta^{-1}(\mathfrak{z}_i) \subset \delta^{-1}(B_i)$, откуда $F_i \neq 0$. Наконец, в силу равенства $d_k(F_i) = d_k|\delta^{-1}(B_i)| = B_i^{(k)}$ из условия $B_i^{(k)} \cap B_r^{(k)} = 0$ вытекает, что $d_k(F_i) \cdot d_k(F_r) = 0$.

Следующая теорема позволяет свести изучение группы $\mathscr{I}^{\mathscr{X}}$ для компактных пространств $\mathscr{X}$ к случаю, когда $\mathscr{X}$ нульмерно.

Теорема 6. *Если $\mathscr{X}$ — компактное пространство и $\boldsymbol{D}$ — пространство разбиения $\mathscr{X}$ на компоненты, то $\mathscr{I}^{\mathscr{X}} \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathscr{I}^{\boldsymbol{D}}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon \mathscr{X} \to \boldsymbol{D}$ — непрерывное отображение, прообразы точек которого — компоненты пространства $\mathscr{X}$ (ср. § 47, VI, теорема 1). Принимая во внимание VIII, 5 (6), покажем, что каждому $d \in \mathscr{I}^{\mathscr{X}}$ соответствует функция $g \in \mathscr{I}^{\boldsymbol{D}}$, такая, что $d(x) = gf(x)$.

Пусть $n_1, \ldots, n_k$ — значения функции d. Положим $F_i = d^{-1}(n_i)$, где $i = 1, \ldots, k$. Тогда множества F_i не пересекаются, открыто-замкнуты и $\mathscr{X} = F_1 \cup \ldots \cup F_k$.

Таким образом, каждая компонента C пространства $\mathscr{X}$ содержится только в одном множестве F_i. Положим $g(C) = n_i$. Тогда $gf(x) = d(x)$ для $x \in C$, а так как $f(F_i)$ замкнуто, то из тождества $g^{-1}(n_i) = f(F_i)$ вытекает, что функция g непрерывна.

X. Теоремы аддитивности. Пусть $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$, и пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества. Положим

$$\Theta_0(A_0, A_1) = \overline{\mathscr{I}^{A_0} | (A_0 \cap A_1) \cup \mathscr{I}^{A_1} | (A_0 \cap A_1)};$$

это означает (ср. IV, теорема 8), что $d \in \Theta_0(A_0, A_1)$, если существуют две функции $d_j \in \mathscr{I}^{A_j}$, где $j = 0, 1$, такие, что $d(x) = d_0(x) - d_1(x)$ для каждого $x \in A_0 \cap A_1$ [1]).

Следовательно, $\Theta_0(A_0, A_1)$ — подгруппа группы $\mathscr{I}^{A_0 \cap A_1}$, и $\mathscr{I} \subset \Theta_0(A_0, A_1)$. Положим

$$\mathfrak{D}_0(A_0, A_1) = \Theta_0(A_0, A_1)/\mathscr{I}$$

и

$$d_0(A_0, A_1) = \text{ранг } \mathfrak{D}_0(A_0, A_1).$$

Теорема 1. *Если A_0 связно, то* $\Theta_0(A_0, A_1) = \mathscr{I}^{A_1} | (A_0 \cap A_1)$.

Действительно, так как A_0 связно, то

$$\mathscr{I}^{A_0} | (A_0 \cap A_1) = \mathscr{I} | (A_0 \cap A_1) = \mathscr{I}.$$

Следствие 2. *Если A_0 и A_1 связны, то $\Theta_0(A_0, A_1) = \mathscr{I}$, а потому $\mathfrak{D}_0(A_0, A_1)$ сводится к нейтральному элементу.*

[1]) Ср. Куратовский и Эйленберг [1].

Теорема 3. *Пусть $p_j \in A_0 \cap A_1$, где $j=0, 1$. Если множества A_0 и A_1 связны между точками p_0 и p_1, тогда как $A_0 \cap A_1$ — не связно между ними, то*

$$\Theta_0(A_0, A_1) \neq \mathcal{G}^{A_0 \cap A_1}.$$

Доказательство. По предположению существует открыто-замкнутое в $A_0 \cap A_1$ множество F, такое, что

$$(1) \qquad p_0 \in F \text{ и } p_1 \in A_0 \cap A_1 - F.$$

Пусть $d \in \mathcal{G}^{A_0 \cap A_1}$ определяется следующими условиями:

$$(2) \qquad d(F) = 0 \quad \text{и} \quad d(A_0 \cap A_1 - F) = 1.$$

Если $d \in \Theta_0(A_0, A_1)$, то

$$d = d_0 | (A_0 \cap A_1) - d_1 | (A_0 \cap A_1) \quad \text{и} \quad d_j \in \mathcal{G}^{A_j}.$$

Поэтому, в частности,

$$d(p_0) = d_0(p_0) - d_1(p_0) \quad \text{и} \quad d(p_1) = d_0(p_1) - d_1(p_1),$$

и, следовательно (согласно (1) и (2)),

$$d_0(p_0) - d_1(p_0) = 0 \quad \text{и} \quad d_0(p_1) - d_1(p_1) = 1.$$

Таким образом,

$$\text{либо } d_0(p_0) \neq d_0(p_1), \quad \text{либо } d_1(p_0) \neq d_1(p_1),$$

и поэтому либо A_0, либо A_1 не связно между p_0 и p_1.

Определение 1. Пусть $\Pi_0(A_0, A_1)$ — подгруппа группы $\mathcal{G}^{A_0 \cup A_1}$, состоящая из функций, постоянных на A_0 и на A_1. Положим

$$\mathfrak{P}_0(A_0, A_1) = \Pi_0(A_0, A_1)/\mathcal{G},$$
$$p_0(A_0, A_1) = \text{ранг } \mathfrak{P}_0(A_0, A_1).$$

Легко доказать следующие утверждения:

Теорема 4. *Если либо $A_0 \cap A_1 \neq 0$, либо $A_0 = 0$, либо $A_1 = 0$, то*

$$\Pi_0(A_0, A_1) = \mathcal{G}, \quad \text{и поэтому} \quad p_0(A_0, A_1) = 0.$$

Теорема 5. *Если $A_0 \cap A_1 = 0$ и $A_0 \neq 0 \neq A_1$, то $\Pi_0(A_0, A_1) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}^2$, откуда* (ср. VII (7))

$$\mathfrak{P}_0(A_0, A_1) \underset{\text{gr}}{=} \mathcal{G}, \quad \text{и потому} \quad p_0(A_0, A_1) = 1.$$

Определение 2. Пусть $\Lambda_0(A_0, A_1)$ — подгруппа декартова произведения $\mathcal{G}^{A_0} \times \mathcal{G}^{A_1}$, состоящая из таких пар d_0, d_1, что

$$d_0 | (A_0 \cap A_1) - d_1 | (A_0 \cap A_1) = \text{const},$$

Положим
$$\mathfrak{L}_0(A_0,\ A_1)=\Lambda_0(A_0,\ A_1)/\mathcal{G}^2,$$
$$l_0(A_0,\ A_1)=\text{ранг } \mathfrak{L}_0(A_0,\ A_1).$$

Теорема 6.
$$\mathcal{G}^{A_0}\times\mathcal{G}^{A_1}/\Lambda_0(A_0,\ A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{D}_0(A_0,\ A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}$$
$$\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0)\times\mathfrak{B}_0(A_1)/\mathfrak{L}_0(A_0,\ A_1).$$

Теорема 7.
$$\mathcal{G}^{A_0\cup A_1}/\Pi_0(A_0,\ A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{L}_0(A_0,\ A_1)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathfrak{B}_0(A_0\cup A_1)/\mathfrak{P}_0(A_0,\ A_1).$$

Доказательство. Для того чтобы установить первые изоморфизмы теорем 6 и 7, положим соответственно
$$h_{d_0,d_1}=(d_0\,|\,(A_0\cap A_1))-(d_1\,|\,(A_0\cap A_1)),\quad \text{где}\quad d_i\in\mathcal{G}^{A_i},$$
$$h_d=(d\,|\,A_0,\ d\,|\,A_1),\quad \text{где}\quad d\in\mathcal{G}^{A_0\cup A_1}.$$

В первом случае первый изоморфизм теоремы 6 получается в силу теоремы 5 п. III (если заменить группу $\mathcal{X}$ на $\mathcal{G}^{A_0}\times\mathcal{G}^{A_1}$, группу $\mathcal{Y}$ на $\Theta_0(A_0,\ A_1)$, A на $\Lambda_0(A_0,\ A_1)$ и B на $\mathcal{G}$). Во втором случае $\mathcal{X}$ заменяется на $\mathcal{G}^{A_0\cup A_1}$, $\mathcal{Y}$ — на $\Lambda_0(A_0,\ A_1)$, A — на $\Pi_0(A_0,\ A_1)$ и B — на $\mathcal{G}^2$ и принимается во внимание тот факт, что если $(d_0,\ d_1)\in\Lambda_0(A_0,\ A_1)$, то при $d_0(x)-d_1(x)=c$ для $x\in A_0\cap A_1$ функция d, определяемая условиями $d(x)=d_0(x)$ на A_0 и $d(x)=d_1(x)+c$ на A_1, удовлетворяет соотношению $[h_d-(d_0,d_1)]\in\mathcal{G}^2$ (откуда следует условие (iii) теоремы 5 п. III).

Остальные утверждения теорем 6 и 7 вытекают из теоремы 7 п. III и из формулы (6) п. VII.

Теорема 8.
$$b_0(A_0\cup A_1)+d_0(A_0,\ A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)+p_0(A_0,\ A_1).$$

Действительно, из теорем 6 и 7, согласно теореме 3 п. V и формуле (5) п. VII, вытекает, что
$$b_0(A_0)+b_0(A_1)=d_0(A_0,\ A_1)+l_0(A_0,\ A_1),$$
$$b_0(A_0\cup A_1)=l_0(A_0,\ A_1)+p_0(A_0,\ A_1);$$
наше утверждение получается, если сложить эти равенства (для $l_0(A_0,\ A_1)\leqslant\infty$).

Из теоремы 8 в сочетании с теоремами 4 и 5 вытекают следующие утверждения:

Теорема 9. *Если либо* $A_0\cap A_1\neq 0$, *либо* $A_0=0$, *либо* $A_1=0$, *то*
$$b_0(A_0\cup A_1)+d_0(A_0,\ A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1).$$

Теорема 10. *Если* $A_0\cap A_1=0$ *и* $A_0\neq 0\neq A_1$, *то*
$$b_0(A_0\cup A_1)=b_0(A_0)+b_0(A_1)+1.$$

Действительно, в последнем случае

$$d_0(A_0, A_1) = 0 \quad \text{и} \quad p_0(A_0, A_1) = 1.$$

Эти формулы позволяют вычислить число компонент объединения двух замкнутых или двух открытых множеств.

XI. Связность между множествами[1]. Положим

$$\Xi(Z, \mathscr{X}) = \bigcap \mathscr{G}^{Z \cup F} \mid Z,$$

где F пробегает семейство всех множеств $F = \bar{F} \neq \mathscr{X}$.

Другими словами, функция $f \in \mathscr{G}^Z$ принадлежит множеству $\Xi(Z, \mathscr{X})$, если она имеет продолжение $f_F \in \mathscr{G}^{Z \cup F}$ для каждого $F = \bar{F} \neq \mathscr{X}$.

Теорема 1. *Если $\mathscr{X}$ неприводимо связно между открыто-замкнутыми непересекающимися множествами A и B и если функция f: $A \cup B \to \mathscr{G}$ принимает значение 0 на A и 1 на B, то $f \in \Xi(A \cup B, \mathscr{X})$.*

Действительно, если F замкнуто и отлично от $\mathscr{X}$, то множество $F \cup A \cup B$ не связно между A и B. Тогда по теореме 5 § 46, IV существует продолжение $f_F \in \mathscr{G}^{F \cup A \cup B}$.

Теорема 2. *Если $\mathscr{X}$ связно между $A = \bar{A}$ и $B = \bar{B}$ и если $f \in \Xi(A \cup B, \mathscr{X})$ и $f(A) \cap f(B) = 0$, то пространство $\mathscr{X}$ неприводимо связно между A и B.*

Доказательство. Предположим, что $F = \bar{F} \neq \mathscr{X}$ и $f \subset f^* \in \mathscr{G}^{F \cup A \cup B}$. Так как $f^*(A) \cap f^*(B) = f(A) \cap f(B) = 0$, то множество $F \cup A \cup B$ не связно между A и B, согласно теореме 5 § 46, IV.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$, и пусть A_0 и A_1 — два замкнутых связных множества. Положим*

$$\Xi_j = \Xi(A_0 \cap A_1, A_j). \tag{1}$$

Для того чтобы существовала система множеств $F_0, \ldots, F_n$ $(n \geqslant 1)$, такая, что

(i) $A_0 \cap A_1 = F_0 \cup \ldots \cup F_n$, $F_k = \bar{F}_k$, $F_l \cap F_r = 0$ *для* $l \neq r$;

(ii) A_j $(j = 0, 1)$ *неприводимо связно между* F_k *и* $H_k = A_0 \cap A_1 - F_k$ *для* $k = 0, \ldots, n$,

необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ранг } [(\Xi_0 \cap \Xi_1)/\mathscr{G}] \geqslant n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть сначала $F_0, \ldots, F_n$ — система множеств, удовлетворяющая условиям (i) и (ii). Согласно тео-

[1] Ср. Куратовский [38].

реме 1а § 46, IV, $F_k \neq 0$. Пусть d_k — функция, принадлежащая $\mathcal{G}^{A_0 \cap A_1}$, такая, что $d_k(F_k) = 1$ и $d_k(H_k) = 0$. Согласно теореме 1, $d_k \in \Xi_0 \cap \Xi_1$, а по теореме 2 п. IX функции $d_1, \ldots, d_n$ линейно независимы по mod $\mathcal{G}$. Отсюда следует неравенство (2).

Обратно, предположим, что имеет место неравенство (2); пусть $d_1, \ldots, d_n$ — система элементов из $\Xi_0 \cap \Xi_1$, линейно независимая по mod $\mathcal{G}$.

По теореме 5 п. IX существует система $F_0, \ldots, F_n$ непустых множеств, удовлетворяющая условию (i) и такая, что для каждой пары индексов $l \neq r$ существует индекс k, такой, что $d_k(F_l) \cap d_k(F_r) = 0$. Так как $d_k \in \Xi_j$ и $F_l \cup F_r \subset A_0 \cap A_1$, то

$$(d_k \mid F_l \cup F_r) \in \Xi(F_l \cup F_r, A_j).$$

По теореме 2 (связное) множество A_j неприводимо связно между F_l и F_r для любых $r \neq l$ (нужно только заменить $\mathcal{X}$ на A_j, A на F_l и B на F_r). Следовательно, согласно теореме 4 из § 48, VIII, множество A_j неприводимо связно между множествами F_l и

$$F_1 \cup \ldots \cup F_{l-1} \cup F_{l+1} \cup \ldots \cup F_n = H_l.$$

§ 56[1]). Группы $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$

I. Общие свойства. Пусть $\mathcal{E}$ — группа действительных чисел со сложением в качестве групповой операции. Пусть $\mathcal{S}$ — окружность $|z| = 1$ на комплексной плоскости, рассматриваемая как группа комплексных чисел с умножением в качестве групповой операции («группа вращений»). Положим

$$(1) \qquad e(t) = e^{2\pi i t} \quad \text{для} \quad t \in \mathcal{E}.$$

Функция $e\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$ представляет собой непрерывный гомоморфизм на, а группа $\mathcal{G}$ целых чисел является его ядром:

$$(2) \qquad e(t + t') = e(t) + e(t') \quad \text{и} \quad [e(t) = 1] \equiv [t \in \mathcal{G}].$$

Если $\mathcal{X}$ — произвольное пространство и $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{X}}$ (ср. § 55, VIII), то пусть e_φ — элемент группы $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, определяемый соотношением

$$(3) \qquad e_\varphi(x) = e[\varphi(x)] = e^{2\pi i \varphi(x)}.$$

Операция e является гомоморфизмом $\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$ на подгруппу (обозначим ее $\Psi(\mathcal{X})$) группы $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Таким образом, группа $\Psi(\mathcal{X})$ состоит из тех элементов $f \in \mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, которые имеют вид $f = e_\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{X}}$, т. е.

$$(4) \qquad f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)} \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{X}.$$

Ядром этого гомоморфизма является группа $\mathcal{G}^{\mathcal{X}}$.

---

[1]) Основные теоремы § 56 содержатся в диссертации Эйленберга [7].

Легко установить следующие утверждения:

Теорема 1. *Если* $f(x)=e_\varphi(x)=e_\psi(x)$ *и* $|\varphi(x)-\psi(x)|<1$, *то* $\varphi(x)=\psi(x)$.

Теорема 2. *Если* $\mathcal{X}$ *связно,* $\varphi, \psi\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$ *и* $e_\varphi=e_\psi$, *то функция* $\varphi-\psi$ — *постоянная.*

Это можно выразить в более общем виде следующим образом:

Теорема 3. *Если* $\mathcal{X}$ *связно между* a *и* b *и* $e_\varphi=e_\psi$, *где* $\varphi, \psi\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$, *то* $\varphi(a)-\psi(a)=\varphi(b)-\psi(b)$.

Действительно, положим $d=\varphi-\psi$; тогда d — непрерывная функция, $d\colon \mathcal{X}\to\mathcal{S}$, и множество таких x, что $d(x)=d(a)$, открыто-замкнуто, содержит a и, следовательно, содержит b.

Теорема 4. *Пусть* $f\in\Psi(\mathcal{X})$ *и* $x_0\in\mathcal{X}$. *Тогда функцию* φ *из формулы* (4) *можно выбрать так, чтобы она удовлетворяла* («*начальному*») *условию* $\varphi(x_0)=c_0$, *где* $2\pi i c_0$ — *любое значение* $\log f(x_0)$.

Следовательно (ср. с теоремой 2), *если* $\mathcal{X}$ *связно, то указанное условие однозначно определяет функцию* φ.

Доказательство. По предположению $f(x)=e^{2\pi i\psi(x)}$, где $\psi\in\mathcal{E}^{\mathcal{X}}$. Пусть $k=\psi(x_0)-c_0$; тогда k — целое число. Достаточно положить $\varphi(x)=\psi(x)-k$.

Замечание. Пусть $\mathcal{P}$ обозначает плоскость $\mathcal{E}^2$ без 0. Операция $e\colon \mathcal{E}^2\to\mathcal{P}$, определяемая условием (1) для $t\in\mathcal{E}^2$, является непрерывным гомоморфизмом (аддитивной) группы $\mathcal{E}^2$ на (мультипликативную) группу $\mathcal{P}$. Аналогично, операция e_φ, определяемая формулой (3), является гомоморфизмом группы $(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{X}}$ на подгруппу группы $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$, состоящую из элементов группы $\mathcal{P}^{\mathcal{X}}$ вида (4). Следовательно, эта подгруппа состоит из тех функций, *логарифм которых имеет единственную непрерывную ветвь.* Функция $2\pi i\varphi(x)$ и есть эта ветвь логарифма.

Теоремы § 56 и 57 сформулированы для групп $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$, однако легко видеть, что их можно применить и к группам $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{P}$ [1]).

II. Группа $\Gamma(A)$. Пусть $A\subset\mathcal{X}$. В соответствии с обозначениями § 55, III под «$f\sim 1 \bmod \Psi(A)$» мы будем понимать, что $f\in\Psi(A)$. Более кратко символ $f\sim 1$ [2]), где $f\in\mathcal{P}^A$, будет озна-

---

[1]) По поводу обобщений на топологические группы см. Куратовский [38].

[2]) В п. IX будет показано, что отношение $f\sim 1$ эквивалентно отношению $f\simeq 1$.

чать, что f имеет вид

(1) $$f = e_\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi \in \mathscr{E}^A.$$

Положим

(2) $$\Gamma(A) = \mathop{\mathsf{E}}_f (f \in \mathscr{S}^{\mathscr{X}})(f \mid A \sim 1).$$

Легко установить следующие утверждения (ср. § 55, VIII, теорема 2):

Теорема 1. $\Gamma(A) = \zeta^{-1}[\Psi(A)]$.

Теорема 2. $\Gamma(\mathscr{X}) = \Psi(\mathscr{X})$.

Теорема 3. $\Gamma(A)$ — *подгруппа группы* $\mathscr{S}^{\mathscr{X}}$.

Теорема 4. *Из* $A \subset B$ *вытекает* $\Gamma(B) \subset \Gamma(A)$.

Теорема 5. *Если* $A = (p)$, *то* $\Gamma(A) = \mathscr{S}^{\mathscr{X}}$.

Теорема 6. *Пусть* R — *луч с началом в* 0. *Если* $f \in (\mathscr{E}^2 - R)^{\mathscr{X}}$, *то* $f \sim 1$.

Ясно, что $\log z$ можно определить таким образом, чтобы он был непрерывным на множестве $\mathscr{E}^2 - R$.

Теорема 7. *Для всякой непрерывной функции* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ ($f: \mathscr{X} \to \mathscr{P}$) *существуют два открытых множества* A_0 *и* A_1, *таких, что* $f \mid A_j \sim 1$ *для* $j = 0, 1$ *и* $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$.

Доказательство. Пусть R_0 и R_1 — полуокружности соответственно с положительными и отрицательными абсциссами; тогда достаточно положить $A_j = f^{-1}(\mathscr{S} - R_j)$ (или $A_j = f^{-1}(\mathscr{P} - R_j)$).

Теорема 8. *Если* $F = \bar{F}$, *то* $\Psi(F) = \Gamma(\mathscr{X}) \mid F$.

Другими словами, *если* $f \in \mathscr{S}^F$ *и* $f \sim 1$, *то существует функция* f^*, *такая, что* $f \subset f^* \in \mathscr{S}^{\mathscr{X}}$ *и* $f^* \sim 1$.

Доказательство. По предположению (ср. (1))

(3) $$f = e_\varphi \text{ и } \varphi \in \mathscr{E}^F, \text{ следовательно, } \varphi \subset \varphi^* \in \mathscr{E}^{\mathscr{X}}$$

по теореме Титце (§ 14, IV). Остается только положить $f^* = e_{\varphi^*}$.

Теорема 9. $\Gamma(A) = \bigcup \Gamma(G)$, *где* G *пробегает семейство открытых множеств, содержащих* A.

Другими словами, *для каждого* $f \in \Gamma(A)$ *существует открытое множество* G, *такое, что*

(4) $$A \subset G \quad \text{и} \quad f \in \Gamma(G).$$

Сначала рассмотрим случай, когда A состоит из одной точки a, а именно установим следующее утверждение:

Теорема 10. *Пусть f: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Для каждой точки $a \in \mathcal{X}$ существует открытое множество G_a, такое, что $a \in G_a$ и $f \mid G_a \sim 1$.*

Доказательство. Пусть H — плоскость $\mathcal{E}^2$ с выброшенным лучом, начинающимся в 0 и не проходящим через a. Достаточно (ср. с теоремой 6) положить $G = f^{-1}(H)$.

Доказательство теоремы 9. Пусть

(5) $\qquad A \subset \mathcal{X}, \quad f \in \mathcal{S}^{\mathcal{X}}, \quad f \mid A = e_\varphi \quad$ и $\quad \varphi \in \mathcal{E}^A.$

В силу теоремы 10 для каждой точки $a \in A$ существуют открытое множество G_a и непрерывная функция ψ_a: $G_a \to \mathcal{E}$, такие, что

(6) $\qquad a \in G_a, \quad f(x) = e_{\psi_a}(x) \quad$ для $\quad x \in G_a$

и (ср. с (5) и с теоремой 4 п. I)

(7) $\qquad \psi_a(a) = \varphi(a).$

Уменьшая, если необходимо, множество G_a, можно считать, что

(8) $\qquad |\psi_a(x) - \psi_a(a)| < 1/3, \quad$ если $\quad x \in G_a,$

(9) $\qquad |\varphi(x) - \varphi(a)| < 1/3, \quad$ если $x \in A \quad$ и $\quad |x - a| < 2\delta(G_a).$

Покажем, что

(10) $\quad$ из $\quad x \in G_a \cap G_b, \; a \in A \quad$ и $\quad b \in A$ вытекает $\psi_a(x) = \psi_b(x).$

Согласно (7) и (8), имеем

(11) $\qquad |\psi_a(x) - \varphi(a)| < 1/3 \quad$ и $\quad |\psi_b(x) - \varphi(b)| < 1/3;$

считая (по симметрии), что $\delta(G_b) \leqslant \delta(G_a)$, мы (с помощью (9)) получаем, что $|\varphi(b) - \varphi(a)| < 1/3$. Из этого неравенства в сочетании с неравенствами (11) вытекает, что $|\psi_a(x) - \psi_b(x)| < 1$, следовательно, $\psi_a(x) = \psi_b(x)$ в силу (6) и теоремы 1 п. I.

Пусть G — объединение всех множеств G_a для $a \in A$. В соответствии с (10) пусть ψ — функция, тождественно равная $\psi_a(x)$ для $x \in G_a$; тогда ψ: $G \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция и, согласно (6), $f = e_\varphi$. Следовательно, $f \mid G \sim 1$.

III. Группа $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})$.

Определение. Пусть $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})$ обозначает факторгруппу $\mathscr{S}^{\mathscr{X}}/\Psi(\mathscr{X})$, а $b_1(\mathscr{X})$ — ее ранг[1]). Условимся считать, что $b_1(0)=0$.

Теорема 1. *Группа $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})$ не содержит элементов конечного порядка (не имеет «кручения»).*

Другими словами, *если $f^n \sim 1$ и $n \neq 0$, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Пусть

$$f^n(x)=e^{2\pi i\varphi(x)}, \quad \varphi_k(x)=\frac{1}{n}[\varphi(x)+k], \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

и

$$F_k = \mathop{\mathsf{E}}_x\left[f(x)=e^{2\pi i\varphi_k(x)}\right].$$

Покажем, что $\mathscr{X}=F_0 \cup \ldots \cup F_{n-1}$.

Пусть $x \in \mathscr{X}$. Нам нужно определить такое число k, что $x \in F_k$. Пусть

$$t \in \mathscr{E} \quad \text{выбрано так, что } f(x)=e^{2\pi i t},$$

$$q \in \mathscr{J} \quad \text{выбрано так, что} \quad -q \leqslant \frac{1}{n}[nt-\varphi(x)] < -q+1.$$

Поскольку $e^{2\pi i\varphi(x)}=f^n(x)=e^{2\pi i n t}$, то $[nt-\varphi(x)] \in \mathscr{J}$. Поэтому целое число $k=[nt-\varphi(x)+qn]$ удовлетворяет условиям $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $\varphi_k(x)=t+q$, следовательно, $f(x)=e^{2\pi i\varphi_k(x)}$, откуда $x \in F_k$.

Так как множества $F_0, \ldots, F_{n-1}$ замкнуты и не пересекаются, то функция ψ, определяемая условиями $\psi(x)=\varphi_k(x)$ для $x \in F_k$, непрерывна и $f=e_\psi$.

Теорема 2. *Условия $b_1(\mathscr{X})=0$, $\mathscr{S}^{\mathscr{X}}=\Psi(\mathscr{X})$ и $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})=(0)$ эквивалентны (для $\mathscr{X} \neq 0$).*

Это прямое следствие § 55, III (1).

Теорема 3. $\mathfrak{B}_1(\mathscr{J})=0$, *следовательно*, $b_1(\mathscr{J})=0$.

Другими словами, *если $f\colon \mathscr{J} \to \mathscr{S}$ — непрерывная функция, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Следуя теореме 10 п. II, каждой точке a из $\mathscr{J}$ поставим в соответствие открытое множество G_a, такое, что $a \in G_a$ и $f \mid G_a \sim 1$. Очевидно, семейство $\{G_a\}$ можно

---

[1]) Если $\mathscr{X}$ — полиэдр, то группа $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})$ изоморфна первой приведенной группе Бетти полиэдра $\mathscr{X}$. См. Брушлинский [1], где рассматривается более общий случай компактного $\mathscr{X}$. В § 60, III (теорема 5) будет показано, что если $\mathscr{X}$ — компактное подмножество плоскости, то $b_1(\mathscr{X})+1$ — число компонент его дополнения.

заменить конечным семейством. Иными словами, существует конечная система $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, где $a_0 = 0$ и $a_n = 1$, такая, что для $k = 1, \ldots, n$ мы имеем $f \mid a_{k-1}a_k \sim 1$, следовательно, $f(x) = e^{2\pi i \varphi_k(x)}$ при $a_{k-1} \leqslant x \leqslant a_k$ (где φ_k непрерывна). Кроме того, по теореме 4 п. I можно считать, что

$$\varphi_{k+1}(a_k) = \varphi_k(a_k) \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом, функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ определяют непрерывную функцию φ: $\mathcal{J} \to \mathcal{E}$, такую, что $\varphi \mid a_{k-1}a_k = \varphi_k$. Следовательно,

$$f(x) = e^{2\pi i \varphi(x)} \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{J}, \quad \text{откуда } f \sim 1.$$

Теорема 4. $\mathfrak{B}_1(\mathcal{S}) \underset{\text{гг}}{=} \mathcal{G}$, *следовательно,* $b_1(\mathcal{S}) = 1$.

Более точно, *тождественное отображение образует базис по* $\operatorname{mod} \Psi(\mathcal{S})$.

Другими словами,

(i) $x \nsim 1$ *на* $\mathcal{S}$,

(ii) *для всякой непрерывной функции* f: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ *существуют целое число* n (*именно, приращение ее логарифма*) *и непрерывная функция* φ: $\mathcal{S} \to \mathcal{E}$, *такие, что*

$$(1) \qquad f(x) = x^n e^{2\pi i \varphi(x)}.$$

Доказательство. Докажем (i); пусть A — окружность $\mathcal{S}$ с выброшенной точкой (1, 0), и пусть $0 < \alpha(x) < 2\pi$ — аргумент x. Следовательно, α: $A \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция и $x = e^{i\alpha(x)}$ для $x \in A$; более того, функцию α нельзя продолжить в точку (1, 0) непрерывным образом.

Предположим, что (i) неверно, т. е. что $x \sim 1$ на $\mathcal{S}$. Тогда $x = e^{i\beta(x)}$, где β: $\mathcal{S} \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Но тогда по теореме 2 п. I отсюда следовало бы (так как A связно), что

$$\alpha(x) = \beta(x) + 2k\pi \quad \text{для} \quad x \in A,$$

и функция $\beta(x) + 2k\pi$ была бы непрерывным продолжением $\alpha(x)$ на всю окружность $\mathcal{S}$.

Теперь рассмотрим утверждение (ii). Так как $f(e^{2\pi i t})$ определена для каждого $t \in \mathcal{J}$, то по теореме 3

$$(2) \qquad f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \psi(t)}, \text{ где } \psi\colon \mathcal{J} \to \mathcal{E} \text{ непрерывно.}$$

Следовательно, разность $\psi(1) - \psi(0)$ — целое число; пусть

$$(3) \qquad n = \psi(1) - \psi(0).$$

Поставим в соответствие каждой точке $x \in \mathcal{S}$ точку

$$(4) \qquad y = \psi(t) - nt$$

при условии, что $2\pi t$ — аргумент точки x. Хотя точке (1, 0) соответствуют два значения t, а именно 0 и 1, значение y с помощью (3) и (4) определяется однозначно. Полагая $y=\varphi(x)$, легко вывести, что $\varphi\colon \mathcal{S}\to\mathcal{E}$ — непрерывная функция; предположим, что $x=e^{2\pi it}$; тогда из условия (2) вытекает, что

$$f(x)=e^{2\pi i\psi(t)} \quad \text{и} \quad x^n=e^{2n\pi it},$$

следовательно,

$$f(x)=x^n e^{2\pi i[\psi(t)-nt]}=x^n e^{2\pi i\varphi(x)}.$$

IV. Теоремы сложения[1]. Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества, таких, что $\mathcal{X}=A_0\cup A_1$. Положим

$$(0)\qquad \Theta_1(A_0, A_1)=\overline{\mathcal{S}^{A_0}|(A_0\cap A_1)\cup\mathcal{S}^{A_1}|(A_0\cap A_1)}.$$

Теорема 1. *Каждой непрерывной функции* $\varphi\colon A_0\cap A_1\to\mathcal{E}$ *соответствуют две непрерывные функции* $\varphi_j\colon A_j\to\mathcal{E}$, *где* $j=0, 1$, *такие, что* $\varphi_1(x)-\varphi_0(x)=\varphi(x)$ *для* $x\in A_0\cap A_1$.

Это означает, что

$$\mathcal{E}^{A_0\cap A_1}=\overline{\mathcal{E}^{A_0}|(A_0\cap A_1)\cup\mathcal{E}^{A_1}|(A_0\cap A_1)}.$$

Доказательство. Пусть (см. § 14, III) A_0^* и A_1^* — два замкнутых множества, таких, что $\mathcal{X}=A_0^*\cup A_1^*$ и $A_j^*\subset A_j$ (и $A_j^*=A_j$, если $A_0=\overline{A_0}$ и $A_1=\overline{A_1}$), пусть φ^* — продолжение $\varphi|(A_0^*\cap A_1^*)$ на $\mathcal{X}$ (ср. с теоремой Титце, § 14, IV), и, наконец, пусть

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad x\in A_0^*,\\ \varphi^*(x)-\varphi(x), & \text{если}\quad x\in A_0\cap A_1^*;\end{cases}$$

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} \varphi^*(x), & \text{если}\quad x\in A_1^*,\\ \varphi(x), & \text{если}\quad x\in A_1\cap A_0^*.\end{cases}$$

Заметим, что $\varphi_0=0$ и $\varphi_1=\varphi^*|A_1$ для замкнутых A_j.

Теорема 2. *Для каждой функции* $f\in\Gamma(A_0\cap A_1)$ *существуют две функции* $f_j\in\Gamma(A_j)$, *где* $j=0, 1$, *такие, что* $f_1:f_0=f$.

Это означает, что

$$\Gamma(A_0\cap A_1)=\overline{\Gamma(A_0)\cup\Gamma(A_1)}.$$

---

[1]) По поводу п. IV и V см. Куратовский и Эйленберг [1].

Доказательство. Пусть $f|(A_0\cap A_1)=e_\varphi$, где φ: $A_0\cap A_1\to\to\mathcal{E}$ — непрерывная функция. Используя обозначения теоремы 1, положим

$$f_0(x)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\in A_0^*,\\ e_{\varphi^*}(x):f(x), & \text{если} \quad x\in A_1^*;\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{если} \quad x\in A_0^*,\\ e_{\varphi^*}(x), & \text{если} \quad x\in A_1^*.\end{cases}$$

Тогда $f_j(x)=e_{\varphi_j}(x)$ для $x\in A_j$, откуда следует требуемое заключение.

Теорема 3. *Для всякой пары непрерывных функций f_j: $A_j\to\mathcal{S}$, где $j=0, 1$, связанных соотношением $f_0|(A_0\cap A_1)\sim\sim f_1|(A_0\cap A_1)$, существует непрерывная функция f: $A_0\cup A_1\to\mathcal{S}$, такая, что $f|A_j\sim f_j$ для $j=0, 1$.*

Доказательство. По предположению (для $x\in A_0\cap A_1$)

$$f_0(x):f_1(x)=e_\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi\colon (A_0\cap A_1)\to\mathcal{E},$$

а по теореме 1

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_0(x), \quad \text{где} \quad \varphi_j\colon A_j\to\mathcal{E}.$$

Принимая во внимание тождество

$$[f_0(x)\cdot e_{\varphi_0}(x)]:[f_1(x)\cdot e_{\varphi_1}(x)]=e_\varphi(x)\cdot e_{\varphi_0}(x):e_{\varphi_1}(x)=1,$$

выполняющееся в $A_0\cap A_1$, определим функцию f, полагая

$$f|A_j=f_j\cdot e_{\varphi_j} \quad \text{для} \quad j=0, 1.$$

Теорема 4. $\Psi(A_0\cap A_1)\subset\Theta_1(A_0, A_1)$. *Это означает, что каждая непрерывная функция f: $(A_0\cap A_1)\to\mathcal{S}$, такая, что $f\sim 1$, имеет вид $f(x)=f_1(x):f_0(x)$, где f_j: $A_j\to\mathcal{S}$, $j=0, 1$, — непрерывные функции.*

Доказательство. По предположению и по теореме 1 имеем $f=e_\varphi$, функция φ: $(A_0\cap A_1)\to\mathcal{E}$ непрерывна, $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_0(x)$ и φ_j: $A_j\to\mathcal{E}$ непрерывны. Достаточно положить $f_j=e_{\varphi_j}$.

Теорема 5. *Пусть φ_j: $A_j\to\mathcal{E}$, $j=0, 1$, — непрерывные функции, такие, что $(\varphi_1-\varphi_0)$: $(A_0\cap A_1)\to\mathcal{G}$. Тогда существует непрерывная функция $f:(A_0\cup A_1)\to\mathcal{S}$, такая, что $f|A_j=e_{\varphi_j}$.*

Более того, *если φ_j': $A_j\to\mathcal{E}$ непрерывны, $\varphi_1'-\varphi_0'=\varphi_1-\varphi_0$, f': $A_0\cup A_1\to\mathcal{S}$ и $f'|A_j=e_{\varphi_j'}$, то $f'\sim f$.*

Доказательство. Из условия $(\varphi_1-\varphi_0)$: $A_0\cap A_1\to\mathscr{G}$ вытекает, что $e_{\varphi_1-\varphi_0}=1$, поэтому f: $(A_0\cup A_1)\to\mathscr{S}$, где $f(x)=e^{2\pi i\varphi_j(x)}$ для $x\in A_j$ и $j=0$, 1, — непрерывная функция.

Для того чтобы установать отношение $f'\sim f$, положим $\psi_j=\varphi'_j-\varphi_j$. Так как $(\psi_1-\psi_0)|(A_0\cap A_1)=0$, то существует непрерывная функция ψ: $\mathscr{X}\to\mathscr{E}$, такая, что $\psi_j=\psi|A_j$. Отсюда $e_{\varphi'_j}:e_{\varphi_j}=e_{\varphi'_j-\varphi_j}=e_{\psi_j}$, следовательно, $f':f=e_\psi$, так что $f'\sim f$.

Теорема 6. *В соответствии с теоремой* 1 *каждой непрерывной функции* d: $(A_0\cap A_1)\to\mathscr{G}$ *сопоставим две непрерывные функции* $\varphi_{d,j}:j=0$, 1, *такие, что*

(1) $\varphi_{d,j}$: $A_j\to\mathscr{E}$ *и* $\varphi_{d,1}(x)-\varphi_{d,0}(x)=d(x)$ *для* $x\in A_0\cap A_1$.

Пусть h_d — *непрерывная функция, такая, что* (*ср. с теоремой* 5)

(2) h_d: $(A_0\cup A_1)\to\mathscr{S}$ *и* $h_d|A_j=e_{\varphi_{d,j}}$, $j=0$, 1.

Тогда

(i) $\Theta_0(A_0,\ A_1)=h^{-1}[\Psi(A_0\cup A_1)]$

(*т. е.* $h_d\sim 1$ *тогда и только тогда, когда*

(3) $dx=d_1(x)-d_0(x)$ *для* $x\in A_0\cap A_1$ *и* d_j: $A_j\to\mathscr{G}$ *непрерывны*),

(ii) $h_{d+d'}\sim h_d\cdot h_{d'}$,

(iii) *для каждой* $f\in\Gamma(A_0)\cap\Gamma(A_1)$ *существует такая* d, *что*

$$f\sim h_d.$$

Доказательство. Пусть $h_d\sim 1$. Тогда $h_d=e_\psi$ и отображение ψ: $A_0\cup A_1\to\mathscr{E}$ непрерывно. Функции $d_j=\varphi_{d,j}-\psi$, $j=0$, 1, удовлетворяют условию (3), так как

$$e_{\varphi_{d,j}-\psi}=e_{\varphi_{d,j}}:e_\psi=1.$$

Обратно, предположим, что условия (3) удовлетворяются и что (в соответствии с теоремой 5) отображение

$$h'_d\text{: } (A_0\cup A_1)\to\mathscr{S} \text{ непрерывно и } h'_d|A_j=e_{d_j}.$$

Так как $e_{d_j}=1$ и $h_d\sim h'_d$ (по теореме 5), то $h_d\sim 1$. Следовательно, соотношение (i) установлено.

Пусть $\varphi'_{(d+d'),j}=\varphi_{d,j}+\varphi_{d',j}$. Согласно (1),

$$\varphi'_{(d+d'),1}-\varphi'_{(d+d'),0}=d+d'=\varphi_{(d+d'),1}-\varphi_{(d+d'),0},$$

Таким образом, согласно теореме 5, существует непрерывная функция $h'_{d+d'}$: $A_0 \cup A_1 \to \mathcal{S}$, такая, что

$$(4) \qquad h'_{d+d'} \mid A_j = e_{\varphi'(d+d'),\, j},$$

$$(5) \qquad h'_{d+d'} \sim h_{d+d'}.$$

Так как

$$e_{\varphi'_{(d+d'),\, j}} = e_{\varphi_{d,\, j}} \cdot e_{\varphi_{d',\, j}} = (h_d \mid A_j) \cdot (h_{d'} \mid A_j),$$

то из формулы (4) вытекает, что $h'_{d+d'} = h_d \cdot h_{d'}$, и, таким образом, согласно (5), получаем (ii).

Пусть $f \in \Gamma(A_j)$. Предположим, что $f \mid A_j = e_{\psi_j}$, ψ_j: $A_j \to \mathcal{E}$ непрерывны и $d = \psi_1 - \psi_0$. Отсюда следует, что d: $(A_0 \cap A_1) \to \mathcal{G}$ — непрерывная функция. Следовательно, из условий (1) и (2) по теореме 5 вытекает, что $f \sim h_d$.

V. Соотношения между факторгруппами. Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества, таких, что $\mathcal{X} = A_0 \cup A_1$ (как в п. IV). Рассмотрим следующие группы (соответствующие группам, изученным в § 55, X):

$$(1) \quad \Pi_1(A_0,\ A_1) = \underset{f}{\mathrm{E}}\,(f \in \mathcal{S}^{A_0 \cup A_1})\,(f \mid A_j \sim 1,\ j = 0,\ 1) = \Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1);$$

$$(2) \quad \Lambda_1(A_0,\ A_1) = \underset{f_0,\, f_1}{\mathrm{E}}\,(f_j \in \mathcal{S}^{A_j},\ j = 0,\ 1)\,(f_0 \mid A_0 \cap A_1 \sim f_1 \mid A_0 \cap A_1);$$

$$(3) \qquad \mathfrak{D}_1(A_0,\ A_1) = \Theta_1(A_0,\ A_1)/\Psi(A_0 \cap A_1);$$

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1(A_0,\ A_1) = \Pi_1(A_0,\ A_1)/\Psi(A_0 \cup A_1);$$

$$(5) \qquad \mathfrak{L}_1(A_0,\ A_1) = \Lambda_1(A_0,\ A_1)/[\Psi(A_0) \times \Psi(A_1)].$$

Имеют место следующие три теоремы об изоморфизмах [1]):

Теорема 1.

$$\mathcal{S}^{A_0} \times \mathcal{S}^{A_1}/\Lambda_1(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{D}_1(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(A_0) \times \mathfrak{B}_1(A_1)/\mathfrak{L}_1(A_0,\ A_1).$$

Теорема 2.

$$\mathcal{S}^{A_0 \cup A_1}/\Pi_1(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{L}_1(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(A_0 \cup A_1)/\mathfrak{P}_1(A_0,\ A_1).$$

Теорема 3.

$$\mathcal{G}^{A_0 \cap A_1}/\Theta_0(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{P}_1(A_0,\ A_1) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{B}_0(A_0 \cap A_1)/\mathfrak{D}_0(A_0,\ A_1).$$

---

[1]) По поводу теорем 1 и 2 см. Куратовский и Эйленберг [1, стр. 197]; по поводу теоремы 3 — Куратовский [38, стр. 239]. Эти три теоремы соответствуют формулам Вьеториса [5, стр. 162]. Ср. Александров и Хопф [1, гл. VII, § 2]; приведенные группы $N^j(A_0 \cdot A_1)$ и $S^j(A_0 + A_1)$ («Nahtzyklen» и «Summenzyklen») изоморфны соответственно группам $\mathfrak{B}_j(A_0 \cap A_1)/\mathfrak{D}_j(A_0, A_1)$ и $\mathfrak{B}_j(A_0 \cup A_1)/\mathfrak{P}_j(A_0, A_1)$. Ср. также Чех [4].

Доказательство. Доказательства теорем 1 и 2 совершенно аналогичны доказательствам теорем 6 и 7 из § 55, X. Положим соответственно

$$h_{f_0,\,f_1}=(f_0\,|\,A_0\cap A_1):(f_1\,|\,A_0\cap A_1),\quad \text{где}\quad f_j\in\mathscr{S}^{A_j},$$
$$h_f=(f\,|\,A_0,\ f\,|\,A_1),\quad \text{где}\quad f\in\mathscr{S}^{A_0\cup A_1},$$

и сошлемся на теоремы 5 и 7 из § 55, III и формулу (6) § 55, VII.

Теорема 3 следует непосредственно из теоремы 6 п. IV и теоремы 5 § 55, III, где $\mathscr{X}$ заменяется на $\mathscr{G}^{A_0\cap A_1}$, $\mathscr{Y}$ — на $\Pi_1(A_0,\ A_1)$, A — на $\Theta_1(A_0,\ A_1)$ и B — на $\Psi(A_0\cup A_1)$.

Пусть $d_1(A_0,\ A_1)$ и $p_1(A_0,\ A_1)$ — соответственно ранги групп $\mathfrak{D}_1(A_0,\ A_1)$ и $\mathfrak{P}_1(A_0,\ A_1)$. Они связаны между собой следующим образом:

Теорема 4.

$$p_1(A_0,\ A_1)\leqslant b_1(A_0\cup A_1).$$

Теорема 5.

$$b_1(A_0\cup A_1)+d_1(A_0,\ A_1)=b_1(A_0)+b_1(A_1)+p_1(A_0,\ A_1).\ ^{1})$$

Теорема 6.

$$p_1(A_0,\ A_1)+d_0(A_0,\ A_1)=b_0(A_0\cap A_1).$$

Доказательство. Теорема 4 вытекает из включения $\mathfrak{P}_1(A_0,\ A_1)\subset\mathfrak{B}_1(A_0\cup A_1)$; теорема 5 следует из теорем 1 и 2 (ср. с импликацией 6, 7 $\Rightarrow$ 8 из § 55, X); теорема 6 представляет собой следствие теоремы 3 из § 55, V.

Теорема 7. *Если* $A_0\cap A_1\neq 0$, то

$$b_0(A_0)+b_0(A_1)+p_1(A_0,\ A_1)=b_0(A_0\cup A_1)+b_0(A_0\cap A_1), \tag{7.1}$$

$$b_1(A_0\cup A_1)+b_0(A_0)+b_0(A_1)+d_1(A_0,\ A_1)= \tag{7.2}$$
$$=b_0(A_0\cup A_1)+b_1(A_0)+b_1(A_1)+b_0(A_0\cap A_1).$$

Доказательство. Соотношение (7.1) вытекает из теоремы 6 и теоремы 9 § 55, X; соотношение (7.2) получается в результате применения теоремы 5 к соотношению (7.1).

В случае, когда рассматриваемые ранги конечны, положим

$$\operatorname{ind}(A)=b_0(A)-b_1(A)\ ^{2}). \tag{*}$$

---

[1]) Ср. с аналогичной формулой Майера [1, стр. 40], касающейся чисел Бетти.

[2]) Для полиэдра этот индекс совпадает с *характеристикой Эйлера — Пуанкаре* при условии, что все числа Бетти, начиная со второго, — нули.

Тогда из (7.2) следует, что

(7.3) *если* $A_0 \cap A_1 \neq 0$, *то* $\operatorname{ind}(A_0 \cup A_1) + \operatorname{ind}(A_0 \cap A_1) =$
$$= \operatorname{ind}(A_0) + \operatorname{ind}(A_1) - b_1(A_0 \cap A_1) + d_1(A_0, A_1).$$

Теорема 8. *Если* $A_0 \cap A_1 = 0$, *то* $\mathfrak{B}_1(A_0 \cup A_1) \underset{gr}{=} \mathfrak{B}_1(A_0) \times \mathfrak{B}_1(A_1)$, *следовательно,* $b_1(A_0 \cup A_1) = b_1(A_0) + b_1(A_1)$.

Доказательство. Если каждой функции $f \in \mathscr{S}^{A_0 \cup A_1}$ мы поставим в соответствие пару $(f \mid A_0, f \mid A_1)$, то получим изоморфизм между $\mathscr{S}^{A_0 \cup A_1}$ и $\mathscr{S}^{A_0} \times \mathscr{S}^{A_1}$. Этот изоморфизм отображает $\Psi(A_0 \cup A_1)$ на $\Psi(A_0) \times \Psi(A_1)$. Следовательно (ср. § 55, III, теорема 5, и VII (6)),

$$\mathscr{S}^{A_0 \cup A_1}/\Psi(A_0 \cup A_1) \underset{gr}{=} [\mathscr{S}^{A_0} \times \mathscr{S}^{A_1}]/[\Psi(A_0) \times \Psi(A_1)] \underset{gr}{=}$$
$$\underset{gr}{=} [\mathscr{S}^{A_0}/\Psi(A_0)] \times [\mathscr{S}^{A_1}/\Psi(A_1)].$$

VI. Связность. В соответствии с прежними обозначениями, пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества, таких, что
$$\mathscr{X} = A_0 \cup A_1.$$

Теорема 1. *Если A_0 связно, то*

(1) $$\mathfrak{P}_1(A_0, A_1) \underset{gr}{=} \mathscr{G}^{A_0 \cap A_1}/(\mathscr{G}^{A_1} \mid (A_0 \cap A_1)).$$

Теорема 2. *Если множества A_0 и A_1 связны, то*

(2) $\mathfrak{P}_1(A_0, A_1) \underset{gr}{=} \mathfrak{B}_0(A_0 \cap A_1)$, *следовательно,*
$$p_1(A_0, A_1) = b_0(A_0 \cap A_1) \leqslant b_1(A_0 \cup A_1).$$

Теорема 3. *Если $A_0 \cap A_1$ связно, то* $\Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1) = \Gamma(A_0 \cup A_1)$, *т. е. из соотношений $f \mid A_j \sim 1$, $j = 0, 1$, вытекает, что $f \sim 1$.*

Теорема 4. *Если множества A_0 и A_1 связны, тогда как $A_0 \cap A_1$ не связно, то* $\Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1) \neq \Gamma(A_0 \cup A_1)$.

Более общо, *если множество $A_0 \cap A_1$ не связно между точками p_0 и p_1, тогда как A_0 и A_1 связны между этими точками, то* $\Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1) \neq \Gamma(A_0 \cup A_1)$.

Доказательство. Теорема 1 вытекает из теоремы 1 § 55, X и теоремы 3 п. V. Теорема 2 вытекает из теорем 2 § 55, X и 3, 4 п. V. Для того чтобы доказать теорему 3, заметим, что $\mathscr{G}^{A_0 \cap A_1} = \mathscr{G} = \Theta_0(A_0, A_1)$, если $A_0 \cap A_1$ связно; поэтому, согласно первому изоморфизму теоремы 3 п. V, $\mathfrak{P}_1(A_0, A_1) = (0)$, откуда вытекает, что $\Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1) = \Gamma(A_0 \cup A_1)$. Из того же изоморфизма в силу теоремы 3 § 55, X следует теорема 4.

Замечания. 1. Изоморфизмы (1) и (2) определяются преобразованием h, рассмотренным в теореме 6 п. IV.

2. Первую часть теоремы 3 можно доказать более прямым способом.

Пусть $f \mid A_j = e_{\varphi_j}$, где $\varphi_j\colon A_j \to \mathscr{E}$ непрерывны. На множестве $A_0 \cap A_1$ имеет место тождество $e_{\varphi_0} = e_{\varphi_1}$. Следовательно, по теореме 2 п. I существует число $k \in \mathscr{G}$, такое, что $(\varphi_0 - \varphi_1) \mid (A_0 \cap A_1) = k$. Так как функции φ_0 и $\varphi_1 + k$ совпадают на $A_0 \cap A_1$, то существует непрерывная функция $\psi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, такая, что $\psi \mid A_0 = \varphi_0$ и $\psi \mid A_1 = \varphi_1 + k$. Так как $k \in \mathscr{G}$, то

$$e_{\varphi_1 + k} = e_{\varphi_1} \cdot e_k = e_{\varphi_1}, \text{ следовательно, } f = e_\psi, \text{ откуда } f \sim 1.$$

3. В случае когда $\overline{A}_j = A_j$, теорему 4 можно доказать более прямо, полагая

$$A_0 \cap A_1 = P_0 \cup P_1, \quad \overline{P}_j = P_j, \quad P_0 \cap P_1 = 0, \quad P_0 \neq 0 \neq P_1,$$

$$\varphi(x) = \frac{\rho(x, P_0)}{\rho(x, P_0) + \rho(x, P_1)} \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A_0, \\ e^{2\pi i \varphi(x)}, & \text{если } x \in A_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $f \not\sim 1$.

Теорема 5. *Если C_0, C_1 и C_2 — три связных множества, таких, что $C_0 \cap C_1 \cap C_2 \neq 0$ и $\mathscr{X} = C_0 \cup C_1 \cup C_2$, то*

$$\Gamma(C_0 \cup C_1) \cap \Gamma(C_1 \cup C_2) \cap \Gamma(C_2 \cup C_0) = \Gamma(C_0 \cup C_1 \cup C_2),$$

т. е. из соотношения $f \mid C_k \cup C_{k+1} \sim 1$, где $k = 0, 1, 2$ (индексы приведены по mod 3), *вытекает, что $f \sim 1$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in C_0 \cap C_1 \cap C_2$. Положим $f \mid (C_k \cup C_{k+1}) = e_{\varphi_{k-1}}$, где $\varphi_{k-1}\colon C_k \cup C_{k+1} \to \mathscr{E}$ — непрерывные функции. Можно считать, что $\varphi_0(x_0) = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Отсюда в силу теоремы 2 п. I (если заменить $\mathscr{X}$ на C_k) вытекает, что $\varphi_{k-1}(x) - \varphi_{k+1}(x) = 0$ для $x \in C_k$. Следовательно, функции φ_0, φ_1 и φ_2 согласованы и потому определяют непрерывную функцию $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, такую, что $\varphi \mid C_k \cup C_{k+1} = \varphi_{k-1}$. Из этого следует, что $f = e_\varphi$, откуда $f \sim 1$.

Теорема 6. *Если C_0, C_1 и C_2 — три связных множества, таких, что $\mathscr{X} = C_0 \cup C_1 \cup C_2$, то*

$$\text{ранг } [\Gamma(C_0 \cup C_1) \cap \Gamma(C_1 \cup C_2) \cap \Gamma(C_2 \cup C_0) / \Gamma(C_0 \cup C_1 \cup C_2)] \leqslant 1.$$

Другими словами, *если $f, g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ — две непрерывные функции, такие, что*

$$f \mid C_k \cup C_{k+1} \sim 1 \quad \text{и} \quad g \mid C_k \cup C_{k+1} \sim 1 \qquad (k = 0, 1, 2),$$

то существуют два целых числа m и n, не обращающихся в нуль одновременно и таких, что $f^m \cdot g^n \sim 1$.

Доказательство. По предположению

$$(3)\qquad f\,|\,C_k \cup C_{k+1} = e_{\varphi_{k-1}} \quad \text{и} \quad g\,|\,C_k \cup C_{k+1} = e_{\psi_{k-1}}.$$

Так как множество C_k связно, существуют два целых числа a_k и b_k, таких, что

$$(4)\quad \varphi_{k+1}(x) - \varphi_{k-1}(x) = a_k \;\text{ и }\; \psi_{k+1}(x) - \psi_{k-1}(x) = b_k \;\text{ для }\; x \in C_k.$$

Пусть

$$a = a_0 + a_1 + a_2 \quad \text{и} \quad b = b_0 + b_1 + b_2;$$

определим целые числа m и j так, чтобы

$$(5)\qquad ma + jb = 0 \quad \text{и} \quad |m| + |j| \neq 0.$$

Пусть

$$(6)\quad \begin{aligned} &\chi_0(x) = m\varphi_0(x) + j\psi_0(x), && x \in C_1 \cup C_2,\\ &\chi_1(x) = m[\varphi_1(x) + a_2] + j[\psi_1(x) + b_2], && x \in C_2 \cup C_0,\\ &\chi_2(x) = m[\varphi_2(x) + a_2 + a_0] + j[\psi_2(x) + b_2 + b_0], && x \in C_0 \cup C_1. \end{aligned}$$

С помощью (4) и (5) легко показать, что

$$\chi_{k-1}(x) - \chi_{k+1}(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in C_k.$$

Следовательно, существует непрерывная функция $\chi: \mathcal{X} \to \mathcal{E}$, такая, что

$$(7)\qquad \chi\,|\,C_k \cup C_{k+1} = \chi_{k-1}.$$

Поэтому $f^m \cdot g^j \sim 1$; на самом деле

$$f^m \cdot g^j = e_\chi.$$

Действительно, пусть $x \in C_k \cup C_{k+1}$. На основании (6) и (7) имеем

$$f^m(x) \cdot g^j(x) = e^{2\pi i\,[m\varphi_{k-1}(x) + j\psi_{k-1}(x)]} = e^{2\pi i \chi_{k-1}(x)} = e^{2\pi i \chi(x)}.$$

Замечание. Теоремы 5 и 6 допускают следующее обобщение [1]).

Пусть $\mathcal{X} = A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$. Положим $C_k = A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-2}$ (индексы приведены по $\operatorname{mod} n$).

Если множества $C_0, \ldots, C_{n-1}$ связны, то имеют место следующие утверждения:

Теорема 5′. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $C_0 \cap \ldots \cap C_{n-1} \neq 0$ и если $f \sim 1$ в $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-1}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то $f \sim 1$ в $\mathcal{X}$.*

---

[1]) Доказательство см. Куратовский [42].

Теорема 6′. *Пусть* f, g: $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$ — *непрерывные функции. Если* $f \sim 1$ *и* $g \sim 1$ *в* $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-1}$, *то существуют два целых числа* m *и* j, *не обращающихся одновременно в нуль и таких, что* $f^m \cdot g^j \sim 1$ *в* $\mathscr{X}$.

Теорема 7. *Если* C *связно, то*

$$\bigcap_x \Gamma(C \cup x) = \Gamma(\overline{C}),$$

т. е. (полагая $C = \mathscr{X}$*) если* f: $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$ — *непрерывная функция,* $f \mid C \sim 1$ *и* $f \nsim 1$, *то существует такая точка* p, *что* $(f \mid C \cup p) \nsim 1$; *более точно, если* $f \mid C = e_\varphi$, *то колебание функции* φ *не обращается в нуль в точке* p[1]).

Доказательство. Во-первых, существует точка p, в которой колебание функции φ не обращается в нуль. В самом деле, в противном случае существовало бы (непрерывное) продолжение ψ: $\mathscr{X} \to \mathscr{E}$ функции φ (ср. § 35, I, теорема 1); но тогда $f = e_\psi$, так как из соотношений $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ и $x_n \in C$ вытекает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \psi(x)$, так что

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} e_\varphi(x_n) = e_\psi(x), \quad \text{следовательно,} \quad f \sim 1.$$

С другой стороны, предположим, что $(f \mid C \cup p) \sim 1$, так что $f \mid C \cup p = e_\chi$, где χ: $C \cup p \to \mathscr{E}$ — непрерывная функция. Из этого соотношения в сочетании с соотношением $f \mid C = e_\varphi$ вытекает в силу связности C, что $\chi \mid C = \varphi + k$, где $k \in \mathscr{I}$. Следовательно, функция $\chi - k$ представляет собой непрерывное продолжение φ на $C \cup p$, а поэтому колебание функции φ обращается в нуль в точке p, что противоречит предположению.

Теорема 8. *Пусть* $C_0, C_1, \ldots$ — *последовательность связных множеств, такая, что*

$$\mathscr{X} = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \quad \text{и} \quad C_n \subset \operatorname{Int}(C_{n+1}).$$

Если f: $\mathscr{X} \to \mathscr{S}$ — *непрерывная функция и* $f \mid C_n \sim 1$ *для каждого* n, *то* $f \sim 1$.

Доказательство. Можно считать, что $C_0 \neq 0$. Пусть $a_0 \in C_0$. Пусть $f \mid C_n = e_{\varphi_n}$, функции φ_n: $C_n \to \mathscr{E}$ непрерывны и $\varphi_n(a) = \varphi_0(a)$. Так как C_n связно, то из соотношения $\varphi_{n+1}(a) = \varphi_n(a)$ вытекает, что $\varphi_n = \varphi_{n+1} \mid C_k$. Поэтому функции φ_n согласованы

[1]) См. Эйленберг [4, стр. 171].

и определяют непрерывную функцию $\varphi: \mathscr{X} \to \mathscr{E}$, такую, что $\varphi | C_n = \varphi_n$. Отсюда следует, что $f = e_\varphi$, так что $f \sim 1$.

VII. Отношение $f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1$. Говорят, что непрерывная функция $f: \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ *неприводимо* $\nsim 1$ $\left(f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1\right)$, если $f \nsim 1$, тогда как $f | F \sim 1$ для каждого собственного замкнутого подмножества F пространства $\mathscr{X}$.

Положим

$$(1) \qquad \Omega(\mathscr{X}) = \bigcap_F \Gamma(F), \quad \text{где} \quad F = \overline{F} \neq \mathscr{X};$$

таким образом, соотношения $f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1$ и $f \in \Omega(\mathscr{X}) - \Gamma(\mathscr{X})$ эквивалентны.

Теорема 1. *Если* $f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1$, *то* $\mathscr{X}$ — *связное дискогерентное пространство.*

Доказательство. Если $\mathscr{X}$ не дискогерентно, то существует замкнутое связное множество C (которое может быть и пустым), разделяющее $\mathscr{X}$ (ср. § 46, X, теорема 1):

$$(2) \quad \mathscr{X} = A_0 \cup A_1, \quad A_0 \cap A_1 = C, \quad A_j = \overline{A_j} \neq \mathscr{X}, \quad \text{где} \quad j = 0, 1.$$

Но тогда $f | A_j \sim 1$, откуда по теореме 3 п. VI имеем $f \sim 1$.

Теорема 2. *Если* $f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1$ *и* $\mathscr{X}$ *локально связно, то* $\mathscr{X}$ — *простая замкнутая кривая.*

Это следует из теоремы 1 в сочетании с теоремой 6 § 49, IV.

Из теоремы 1, согласно теоремам 2 § 46, X и 2 § 48, V, вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. *Если* $f \underset{\text{непр.}}{\nsim} 1$ *и* $\mathscr{X}$ *разложимо, то существуют два связных множества* A_0 *и* A_1, *таких, что* $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$ *и*

$$(3) \qquad A_0 = \overline{\mathscr{X} - A_1} \neq \mathscr{X} \quad \text{и} \quad A_1 = \overline{\mathscr{X} - A_0} \neq \mathscr{X}.$$

В частности (ср. § 48, VII, теорема 7), *если* $\mathscr{X}$ *неприводимо между двумя точками, то множества* A_0 *и* A_1 *неразложимы.*

Теорема 4. *Если* A_0 *и* A_1 — *два замкнутых связных множества, таких, что* $\mathscr{X} = A_0 \cup A_1$, *то* (ср. § 55, XI (1))

$$(4) \quad (\Xi_0 \cap \Xi_1)/G \underset{\text{gr}}{=} \Big[\bigcap_{K_0, K_1} \Gamma(A_0 \cup K_1) \cap \Gamma(A_1 \cup K_0)\Big] \Big/ \Gamma(X) \subset$$
$$\subset \Omega(X)/\Gamma(X),$$

где K_j пробегает семейство собственных замкнутых подмножеств множества A_j.

Более того, *если условия* (3) *удовлетворяются, то включение можно заменить равенством.*

Доказательство. Пусть $K = \bar{K} \subset A_1$. Используя обозначения теоремы 6 п. VI, положим

(5) $$k_d = (h_d \mid A_0 \cup K).$$

Так как

$$A_0 \cup (A_0 \cap A_1 \cup K) = A_0 \cup K,$$
$$A_0 \cap (A_0 \cap A_1 \cup K) = A_0 \cap A_1,$$

то из теоремы 6 (i) п. IV (если заменить $\mathcal{X}$ на $A_0 \cup K$) следует, что

(6) $$\Theta_0(A_0,\ A_0 \cap A_1 \cup K) = k^{-1}[\Psi(A_0 \cup K)].$$

Но так как A_0 связно, то из теоремы 1 § 55, X вытекает, что

(7) $$\Theta_0(A_0,\ A_0 \cap A_1 \cup K) = \mathcal{G}^{A_0 \cap A_1 \cup K} \mid A_0 \cap A_1.$$

С другой стороны, согласно (5),

$$(k_d \sim 1) \equiv (h_d \mid A_0 \cup K \sim 1), \quad \text{откуда следует,}$$
$$\text{что } [k_d \in \Psi(A_0 \cup K)] \equiv [h_d \in \Gamma(A_0 \cup K)],$$

и поэтому

(8) $$k^{-1}[\Psi(A_0 \cup K)] = h^{-1}[\Gamma(A_0 \cup K)].$$

Таким образом, в силу соотношений (6)—(8) имеем

$$\mathcal{G}^{A_0 \cap A_1 \cup K} \mid A_0 \cap A_1 = h^{-1}[\Gamma(A_0 \cup K)].$$

Беря пересечение всех этих групп по всем $K \neq A_1$, получаем

$$\Xi_1 = \bigcap_K (\mathcal{G}^{A_0 \cap A_1 \cup K} \mid A_0 \cap A_1) = h^{-1}\left|\bigcap_K \Gamma(A_0 \cup K)\right|,$$

следовательно,

$$\Xi_0 \cap \Xi_1 = h^{-1}\left|\bigcap_{K_0,\ K_1} \Gamma(A_0 \cup K_1) \cap \Gamma(A_1 \cup K_0)\right|,$$

где $K_j \subset A_j \neq K_j$.

Изоморфизм (4) вытекает из теоремы 5 § 55, III и из равенств (ср. IV, 6 (i) и § 55, X, теорема 2)

$$\mathcal{G} = \Theta_0(A_0,\ A_1) = h^{-1}[\Gamma(\mathcal{X})].$$

Доказательство включения (4) сводится к доказательству включения

$$(9)\quad \bigcap_{K_0,\,K_1} \Gamma(A_0 \cup K_1) \cap \Gamma(A_1 \cup K_0) \subset \bigcap_F \Gamma(F), \quad \text{где} \quad F = \bar{F} \neq \mathcal{X}.$$

Но из неравенства $F \neq \mathcal{X}$ вытекает, что либо $F \cap A_0 \neq A_0$, либо $F \cap A_1 \neq A_1$. Положим $K_1 = F \cap A_1 \neq A_1$. Так как $F \subset A_0 \cup K_1$, то (ср. II, теорема 4) $\Gamma(A_0 \cup K_1) \subset \Gamma(F)$, откуда следует включение (9).

Наконец, предположим, что имеют место соотношения (3) и что $K_1 \neq A_1$. Отсюда следует, что $A_0 \cup K_1 \neq \mathcal{X}$, ибо в противном случае $\mathcal{X} - A_0 \subset K_1$, так что $A_1 = \mathcal{X} - A_0 \subset K_1$ и $K_1 = A_1$. Пусть $f \in \Omega(\mathcal{X})$. Положим $F = A_0 \cup K_1$. Тогда $f \in \Gamma(A_0 \cup K_1)$. Отсюда следует, что

$$\Omega(\mathcal{X}) \subset \bigcap_{K_0,\,K_1} \Gamma(A_0 \cup K_1) \cap \Gamma(A_1 \cup K_0),$$

откуда, согласно (9), вытекает требуемое равенство.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{X}$ — разложимое пространство. Непрерывная функция $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$, такая, что $f \underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1$, существует тогда и только тогда, когда существуют разбиение пространства $\mathcal{X}$ на два замкнутых связных множества A_0 и A_1 и разбиение $A_0 \cap A_1$ на два замкнутых множества F_0 и F_1, между которыми A_j $(j = 0,\ 1)$ неприводимо связны.*

Более точно, *для $n \geqslant 1$ соотношение*

$$(10)\qquad \text{ранг}\ [\Omega(\mathcal{X})/\Gamma(\mathcal{X})] \geqslant n$$

эквивалентно существованию разбиения $\mathcal{X} = A_0 \cup A_1$, где A_0 и A_1 — замкнутые связные множества (которые можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли соотношению (3)), и разбиения $A_0 \cap A_1$ на $n+1$ непересекающихся замкнутых множеств $F_0, \ldots, F_n$, таких, что A_j неприводимо связны между F_k и $H_k = A_0 \cap A_1 - F_k$ для $j = 0,\ 1$ и $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Если $f \underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1$, то по теореме 3 существуют два связных множества A_0 и A_1, удовлетворяющих условию (3), а согласно теореме 4,

$$(11)\qquad \Omega(\mathcal{X})/\Gamma(\mathcal{X}) \underset{\text{gr}}{=} (\Xi_0 \cap \Xi_1)/\mathcal{G}.$$

Из соотношений (10), (11) и условия (2) § 55, XI вытекает, что существует система множеств $F_0, \ldots, F_n$, удовлетворяющая требуемым условиям.

Обратно, если существует система множеств $F_0, \ldots, F_n$, удовлетворяющая указанным выше условиям, то из соотношения (2) § 55, XI в сочетании с формулами (4) вытекает соотношение (10).

Теорема 6. *Если $\mathcal{X}$ разложимо и ранг группы $\Omega(\mathcal{X})/\Gamma(\mathcal{X})$ больше или равен 2, то $\mathcal{X}$ является объединением двух замкнутых неразложимых множеств.*

Более того, *если $\mathcal{X}$ компактно, то $\mathcal{X}$ — континуум, неприводимый между двумя точками* [1]).

Доказательство. Положим $n=2$ в теореме 5 и выберем точку p_k из F_k ($k=0, 1, 2$). Тогда A_j неприводимо между p_0 и p_1, между p_1 и p_2 и между p_0 и p_2. Следовательно, A_j неразложимо.

Вторая часть теоремы 6 вытекает непосредственно из теоремы 4 § 48, IX.

Замечание. Теория неприводимых пространств естественным образом приводит к *линейному* расслоению (не «монослойных») неприводимых между двумя точками пространств на замкнутые «слои» (§ 48, IV). Из этого линейного расслоения в свою очередь по теореме 5 получается циклическое расслоение всякого (не «монослойного») пространства, допускающего преобразование $f \underset{\text{непр}}{\not\sim} 1$ [2]). В случае когда пространство — континуум, его слои континуумы (ср. § 48, IV, теорема 2); в частном случае, когда пространство является простой замкнутой кривой, слои сводятся к отдельным точкам.

VIII. Компактные множества. Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство.

Теорема 1. *Пусть $f: \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Семейство замкнутых множеств F, таких, что $f \mid F \sim 1$, открыто (в пространстве $2^{\mathcal{X}}$).*

Доказательство. По теореме 9 п. II

$$\mathop{\mathsf{E}}_{F}(f \mid F \sim 1) = \bigcup_{G} \mathop{\mathsf{E}}_{F}(F \subset G),$$

где G — открытое множество, такое, что $f \mid G \sim 1$.

Так как семейство $\mathop{\mathsf{E}}_{F}(F \subset G)$ открыто (по теореме 1 § 17, II), то открыто и его объединение.

Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 1.

---

[1]) Ср. с аналогичной теоремой Александрова [3, стр. 531].

[2]) См. Куратовский [14].

Теорема 2. *Если множества $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ замкнуты, то*

$$\Gamma\left(\bigcap_n F_n\right) = \bigcup_n \Gamma(F_n),$$

т. е. если $(f|F_n) \not\sim 1$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $\left(f|\bigcap_n F_n\right) \not\sim 1$.

Теорема 3. *Если $f \not\sim 1$, то $\mathcal{X}$ содержит континуум C, такой, что $f|C \underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1$.*

Доказательство. Из теоремы 1 и теоремы 2 § 42, IV следует существование замкнутого множества C, такого, что $f|C \underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1$. Согласно теореме 1 п. VII, множество C — континуум.

Следующее утверждение является прямым следствием предыдущего.

Теорема 4. *Если $f|Q \sim 1$ для каждой компоненты Q пространства $\mathcal{X}$, то $f \sim 1$.*

Замечание. Из теоремы 3 следует, что если $\mathcal{X}$ — дуга, то $f \sim 1$ для каждой непрерывной функции $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ (ср. III, теорема 3). Действительно, иначе $\mathcal{X}$ содержало бы дискогерентный континуум (согласно теореме 3 и теореме 1 п. VII).

IX. Декартовы произведения. Связь с гомотопией.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — связное пространство, $\mathcal{Y}$ — произвольное пространство, $f\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция, $f \sim 1$ и, наконец, $\psi\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{E}$. Если ψ непрерывна по x при каждом y и непрерывна по y в некоторой точке $a \in \mathcal{X}$ и если $e_\psi = f$, то ψ непрерывна (в $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$).*

Доказательство. Пусть $f = e_\varphi$, где $\varphi\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Так как разность $\psi(x, y) - \varphi(x, y)$ постоянна при фиксированном y (по теореме 2 п. I), положим $\psi(x, y) - \varphi(x, y) = k(y)$. В частности,

$\psi(a, y) - \varphi(a, y) = k(y)$, следовательно,

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(a, y) - \varphi(a, y),$$

откуда вытекает требуемое заключение.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — континуум, $\mathcal{Y}$ — произвольное пространство, $a \in \mathcal{X}$ и $f\colon \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $(f|a \times \mathcal{Y}) \sim 1$ и $(f|\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \sim 1$ для каждого $y \in \mathcal{Y}$, то $f \sim 1$.*

Доказательство. По предположению существуют непрерывная функция χ: $\mathcal{Y} \to \mathcal{E}$ и для каждого y непрерывная функция ψ_y: $\mathcal{X} \to \mathcal{E}$, такие, что

$$f(a,\ y) = e_{\chi}(y) \quad \text{и} \quad f(x,\ y) = e_{\psi_y}(x) \quad \text{для любых} \quad x \text{ и } y.$$

Положим

$$(1) \qquad \psi(x,\ y) = \psi_y(x) - \psi_y(a) + \chi(y).$$

Отсюда следует, что

$$e_{\psi}(x,\ y) = e_{\psi_y}(x) : e_{\psi_y}(a) \cdot e_{\chi}(y) = f(x,\ y).$$

Покажем, что функция ψ непрерывна. Для этого достаточно доказать, что если $y_1,\ y_2,\ \ldots$ — последовательность, сходящаяся к y_0, и если $\mathcal{Y}^* = (y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots)$, то сужение $\psi \,|\, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}^*$ непрерывно.

Но так как множество $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}^*$ компактно, а множества $\mathcal{X} \times y_n$ — его компоненты, то по теореме 4 п. VIII мы имеем $(f \,|\, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}^*) \sim 1$. Поскольку $f = e_{\psi}$, то по теореме 1 функция $\psi \,|\, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}^*$ непрерывна.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее важное утверждение:

Теорема 3 (Эйленберга[1]). *Пусть $\mathcal{Y}$ — произвольное пространство и g: $\mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ — непрерывное отображение. Для того чтобы $g \sim 1$, необходимо и достаточно, чтобы $g \simeq 1$, т. е. чтобы g было гомотопно 1.*

Следовательно, *соотношения $\mathcal{S}^{\mathcal{Y}} = \Psi(\mathcal{Y})$, $b_1(\mathcal{Y}) = 0$ эквивалентны стягиваемости $\mathcal{Y}$ относительно $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Пусть $g \sim 1$; тогда $g = e_{\varphi}$, где φ: $\mathcal{Y} \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Положим

$$f(x,\ y) = e^{2\pi i x \varphi(y)} \quad \text{для} \quad x \in \mathcal{J} \quad \text{и} \quad y \in \mathcal{Y}.$$

Тогда

$$(2) \quad f\colon\ \mathcal{J} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}, \quad f(0,\ y) = 1 \quad \text{и} \quad f(1,\ y) = g(y).$$

Следовательно, g гомотопно 1.

Обратно, предположим, что $g \simeq 1$; тогда условия (2) удовлетворяются. Полагая в лемме 2 $\mathcal{X} = \mathcal{J}$ и считая a точкой 0, мы заключаем (на основании теоремы 3, п. III), что $f \sim 1$, откуда следует, что $g \sim 1$.

Теорему 3 можно обобщить следующим образом:

Теорема 4. *Условия $f \sim g$ и $f \simeq g$ эквивалентны.*

---

[1]) См. Эйленберг [7, стр. 68].

Доказательство. Отношение $f \sim g$ эквивалентно отношению $f : g \sim 1$ и, следовательно, отношению $(f : g) \simeq 1$ (согласно теореме 3); это означает, что оно эквивалентно существованию непрерывной функции h: $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, такой, что

$$h(x, 0) = f(x) : g(x) \quad \text{и} \quad h(x, 1) = 1.$$

Положим $u(x, t) = g(x) \cdot h(x, t)$; тогда

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{и} \quad u(x, 1) = g(x).$$

Теорема 5. *Если $\mathcal{X}$ компактно, то группа $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ совпадает с семейством компонент пространства $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$. Ее нейтральный элемент совпадает с компонентой, содержащей постоянные функции.*

Доказательство. Так как $\mathcal{S}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то отношение $f \simeq g$ (а следовательно, $f \sim g$, где f, g: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывные функции) выполняется тогда и только тогда, когда f и g принадлежат одной и той же компоненте пространства $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ (ср. § 54, II, теорема 10).

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{X}$ — континуум, $\mathcal{Y}$ — связное пространство, $x_0 \in \mathcal{X}$, $y_0 \in \mathcal{Y}$ и f: $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $f \mid x_0 \times \mathcal{Y} \sim 1$ и $f \mid \mathcal{X} \times y_0 \sim 1$, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Пусть $g_y(x) = f(x, y)$. Согласно теореме 3 § 44, IV, функция g, ставящая в соответствие каждому элементу y элемент $g_y \in \mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, непрерывна. Поэтому $\Phi = g(\mathcal{Y})$ — связное подмножество $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$.

По предположению $g_{y_0} \simeq 1$, следовательно, $g_{y_0} \sim 1$. Значит, Φ — подмножество той компоненты пространства $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$, которая содержит постоянные функции. По теореме 5 $h \sim 1$ для каждого $h \in \Phi$. Поэтому $g_y \sim 1$, откуда вытекает, что $f \mid \mathcal{X} \times y \sim 1$ для каждого y. Следовательно, $f \sim 1$ по лемме 2.

Теорема 7. *Если $\mathcal{X}$ — континуум, а $\mathcal{Y}$ — связное пространство, то*

(3) $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \underset{\text{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(\mathcal{X}) \times \mathfrak{B}_1(\mathcal{Y})$, *следовательно,*

$$b_1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) = b_1(\mathcal{X}) + b_1(\mathcal{Y}).$$

Доказательство. Этот изоморфизм определяется путем сопоставления каждой паре непрерывных функций f: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$, g: $\mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ функции $h = f \cdot g$ вида

$$h(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Для доказательства положим

$$f^*(x, y) = f(x), \quad g^*(x, y) = g(y), \quad x_0 \in \mathcal{X} \quad \text{и} \quad y_0 \in \mathcal{Y}.$$

Из условий $f \sim 1$ и $g \sim 1$ вытекает, что $f^* \sim 1$ и $g^* \sim 1$, следовательно, $h \sim 1$.

Обратно, если $h \sim 1$, то $(f^* \cdot g^*) | (\mathcal{X} \times y_0) \sim 1$, а так как $g^* | (\mathcal{X} \times y_0) \sim 1$, то из этого следует, что $f^* | (\mathcal{X} \times y_0) \sim 1$, так что $f \sim 1$. Аналогично $g \sim 1$.

Наконец, каждой непрерывной функции $l: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ соответствует такая пара непрерывных функций $f: \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ и $g: \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, что $l \sim f \cdot g$, а именно

$$f(x) = l(x, y_0) \quad \text{и} \quad g(y) = l(x_0, y).$$

Действительно,

$$(l : fg) | (\mathcal{X} \times y_0) \sim 1 \quad \text{и} \quad (l : fg) | (x_0 \times \mathcal{Y}) \sim 1;$$

таким образом, в силу теоремы 6 $l : fg \sim 1$.

Наконец, условие (3) следует из теоремы 5 § 55, III и формулы (4) п. VII.

X. Локально связные множества.

Теорема 1. *Если $f | Q \sim 1$ для каждой компоненты Q локально связного пространства $\mathcal{X}$, то $f \sim 1$.*

Это утверждение является следствием теоремы 5 § 54, I, так как Q — открыто-замкнутое множество (ср. § 49, II, теорема 4).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — связное и локально связное пространство, $\mathcal{Y}$ — произвольное пространство, $a \in \mathcal{X}$ и $f: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $(f | a \times \mathcal{Y}) \sim 1$ и $(f | \mathcal{X} \times y) \sim 1$ для каждого y, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Пусть ψ и $\mathcal{Y}^*$ определены так же, как в доказательстве теоремы 2 п. IX. Покажем, что сужение $\psi_0 = \psi | \mathcal{X} \times \mathcal{Y}^*$ непрерывно. Пусть C — множество таких x, что функция ψ_0 непрерывна в точке (x, y_0). Так как $\mathcal{X}$ связно, то достаточно показать, что C замкнуто, открыто и непусто.

Пусть $x_1 \in \mathcal{X}$. По теореме 10 п. II существуют два открытых множества G в $\mathcal{X}$ и H в $\mathcal{Y}^*$, таких, что $x_1 \in G$, $y_0 \in H$ и $f | G \times H \sim 1$ (в теореме 10 п. II нужно заменить точку a точкой (x_1, y_0)). Более того, так как $\mathcal{X}$ локально связно, то можно считать, что G связно.

Необходимо рассмотреть два случая. Если существует точка $x_0 \in G$, такая, что при $x = x_0$ функция ψ_0 непрерывна по переменной y, то она непрерывна в $G \times H$, согласно теореме 1 п. IX (нужно заменить там $\mathcal{X}$ на G, $\mathcal{Y}$ на H и a на x_0), а из этого следует, что $G \subset C$. В частности, $a \in C$, так как при $x = a$ функция ψ_0 непрерывна по y (согласно равенству $\psi(a, y) = \chi(y)$, ср. IX (1)).

В случае когда G не содержит точек x_0 указанного вида, функция ψ_0, рассматриваемая как функция переменного y, разрывна при каждом $x \in G$; следовательно, она разрывна в точке y_0 (так как y_0 — единственная точка накопления пространства $\mathcal{Y}^*$), и поэтому $x \notin C$, откуда $x_1 \in G \subset \mathcal{X} - C$.

Следовательно, множество C открыто, непусто и замкнуто.

Теорема 3. *Пусть $A \subset B \subset A \cup L(A)$ и g: $B \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $g \mid A \sim 1$, то $g \sim 1$.*

Доказательство. Пусть $g \mid A = e_\varphi$, где φ: $A \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Пусть $p \in B - A$. Покажем, что колебание $\omega_\varphi(p)$ обращается в нуль.

Пусть (ср. § 49, II) $p \in G$, где G — множество, открытое в B, такое, что $G \cap A$ связно и $g(G) \neq \mathcal{S}$. Следовательно, $g \mid G \sim 1$ (см. теорему 6 п. II). Пусть $g \mid G = e_\psi$, где ψ: $G \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Так как множество $G \cap A$ связно, то из равенства $e_\varphi(x) = e_\psi(x)$ при $x \in G \cap A$ вытекает, что разность $\varphi(x) - \psi(x)$ постоянна в $G \cap A$ (см. теорему 2 п. I). Так как функция ψ непрерывна в точке p, то $\omega_\psi(p) = 0$, откуда $\omega_\varphi(p) = 0$ (ибо G — окрестность точки p в B).

Следовательно, существует (согласно теореме 1 § 35, I) непрерывное продолжение $\varphi^*: B \to \mathcal{E}$ отображения φ. Так как $B \subset \bar{A}$ и $g \mid A = e_\varphi$, то $g = e_{\varphi^*}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X}$ — дугообразно связное пространство и f: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $f \mid C \sim 1$ для каждой простой замкнутой кривой C, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, можно считать, что $\mathcal{X}$ связно. Можно также предположить, что существует точка a, в которой $f(a) = 1$.

Поставим в соответствие каждой точке x дугу $A_x = ax$ и непрерывную функцию ψ_x, такие, что

(1) $$\psi_x: A_x \to \mathcal{E}, \quad f \mid A_x = e_{\psi_x} \quad \text{и} \quad \psi_x(a) = 0,$$

в соответствии с теоремой 3 п. III и теоремой 4 п. I. Положим $\varphi(x) = \psi_x(x)$. Тогда $e_\varphi = f$.

Покажем, что функция φ непрерывна. Пусть $p \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$. По теореме 10 п. II имеем $p \in G$, где G — такое открытое множество, что $f \mid G = e_\lambda$, и λ: $G \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция. Более того, можно предположить (уменьшая, если необходимо, множество G), что $\delta[\lambda(G)] < \varepsilon$.

Так как пространство локально связно, то существует число $\eta > 0$, такое, что каждой точке q, для которой $|q - p| < \eta$, соответствует дуга $Q = pq \subset G$. Из этого следует, что

(2) $$f \mid Q = e_{\lambda} \quad \text{и} \quad |\lambda(q) - \lambda(p)| < \varepsilon.$$

Покажем, что $|\varphi(q) - \varphi(p)| < \varepsilon$.

Континуум $K = A_p \cup A_q \cup Q$ наследственно локально связен, так как он состоит из трех дуг (ср. § 51, IV, теоремы 2 и 8). Таким образом,

(3) $$f \mid K \sim 1,$$

ибо в противном случае K содержало бы (согласно теореме 3 п. VIII) подконтинуум и, следовательно, локально связный подконтинуум C, такой, что $f \mid C \not\sim 1$. По теореме 2 п. VII мно-
непр.
жество C было бы простой замкнутой кривой, вопреки предположению.

Принимая во внимание (3), положим

(4) $$f \mid K = e_{\chi}, \quad \chi\colon K \to \mathscr{E} \quad \text{и} \quad \chi(a) = 0,$$

где χ — некоторая непрерывная функция.

Из соотношений (1) и (4) вытекает, что $\psi_p(a) = \psi_q(a) = \chi(a)$, так что по теореме 2 п. I

$$\chi(x) = \begin{cases} \lambda(x) + k & \text{для} \quad x \in Q, \\ \psi_p(x) & \text{для} \quad x \in A_p, \\ \psi_q(x) & \text{для} \quad x \in A_q. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(q) - \varphi(p) = \psi_q(q) - \psi_p(p) = \chi(q) - \chi(p) = \lambda(q) - \lambda(p),$$

и потому, согласно (2),

$$|\varphi(q) - \varphi(p)| < \varepsilon.$$

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связный континуум и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Если $f \mid E \sim 1$ для каждого циклического элемента E из $\mathcal{X}$, то $f \sim 1$.*

Доказательство. Если $f \not\sim 1$, то $\mathcal{X}$ содержит простую замкнутую кривую C, такую, что $f \mid C \not\sim 1$. Следовательно, если E — циклический элемент пространства $\mathcal{X}$, содержащий C (ср. § 52, II, теорема 10), то $f \mid E \not\sim 1$.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{X}$ — локально связный континуум, $F = \overline{F} \subset \mathcal{X}$, $f_k\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция и $f_k \mid F \sim 1$ для $k = 1, \ldots, n$. Тогда существует такой локально связный континуум C, что $F \subset C$ и $f_k \mid C \sim 1$ для $k = 1, \ldots, n$* [1].

---

[1]) См. Эйленберг [10, стр. 172].

Доказательство. Так как F есть пересечение последовательности множеств, каждое из которых состоит из конечного числа локально связных континуумов (§ 50, III, теорема 1 (i), и § 49, II, теорема 7), то доказательство можно свести к случаю (согласно теореме 9 п. III), когда $F = C_1 \cup \ldots \cup C_m$, где множества $C_1, \ldots, C_m$ — непересекающиеся локально связные континуумы.

Применим индукцию. Очевидно, что теорема справедлива при $m = 1$. Предположим, что она справедлива для числа $m-1$. Пусть L — дуга ab, такая, что $L \cap F$ состоит только из двух точек a и b, которые содержатся в различных множествах C_n, скажем в C_{m-1} и C_m.

Из соотношений (ср. с теоремой 3 п. III)

$$f_k | C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1} \sim 1, \quad f_k | L \sim 1 \quad \text{и} \quad (C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1}) \cap L = a$$

вытекает, согласно теореме 3 п. VI, что

$$f_k | C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1} \cup L \sim 1, \quad \text{следовательно,}$$

$$f_k | C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1} \cup L \cup C_m \sim 1,$$

так как

$$(C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1} \cup L) \cap C_m = b \quad \text{и} \quad f | C_m \sim 1.$$

Поскольку множество $C_{m-1} \cup L \cup C_m$ — локально связный континуум, доказательство сводится к случаю $m-1$.

Теорема 7. *Пусть* $\mathcal{X}$ *— локально связный континуум и* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ *— непрерывная функция. Существуют два локально связных континуума* C_0 *и* C_1, *таких, что* $\mathcal{X} = C_0 \cup C_1$ *и* $f | C_j \sim 1$ *для* $j = 0, 1$.

Доказательство. Пусть A_0 и A_1 — половинки окружности $\mathcal{S}$ с ординатами соответственно $\geqslant 0$ и $\leqslant 0$. Пусть $F_j = f^{-1}(A_j)$. Тогда по теореме 6 п. II $\mathcal{X} = F_0 \cup F_1$ и $f | F_j \sim 1$, а отсюда, согласно теореме 6 (в случае когда $n = 1$), вытекает требуемое заключение.

Теорема 8. *Пусть* $\mathcal{X}$ *— локально дугообразно связное пространство,* $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ *— непрерывная функция и* $G_1, G_2, \ldots$ *— последовательность открытых множеств, такая, что*

$$\mathcal{X} = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \quad \text{и} \quad G_n \subset G_{n+1}.$$

Если $f | G_n \sim 1$ *для каждого числа* n, *то* $f \sim 1$.

Это следует из теоремы 4.

XI. Отображения.

Теорема 1. *Если* A *— ретракт* $\mathcal{X}$, *то* $\mathfrak{B}_1(A)$ *— гомоморфный образ* $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ *и, следовательно,* $b_1(A) \leqslant b_1(\mathcal{X})$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{X}$ допускает деформацию на A, то*

$$\mathfrak{B}_1(\mathcal{X}) \underset{\mathrm{gr}}{=} (\mathcal{S}^{\mathcal{X}} \mid A)/\Psi(A)$$

и, следовательно, $b_1(\mathcal{X}) \leqslant b_1(A)$.

Теорема 3. *Если A — деформационный ретракт $\mathcal{X}$, то*

$$\mathfrak{B}_1(A) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{B}_1(\mathcal{X}) \quad \textit{и, следовательно,} \quad b_1(A) = b_1(\mathcal{X}).$$

Доказательство. Операция ретракции $\zeta\colon \mathcal{S}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{S}^A$, т. е. $\zeta(f) = f \mid A$, есть гомоморфизм (ср. § 55, VIII, теорема 1) пространства $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ на $\mathcal{S}^{\mathcal{X}} \mid A$, а из условия $f \sim 1$ вытекает, что $f \mid A \sim 1$. Отсюда следует теорема 1, так как A — ретракт $\mathcal{X}$ и, следовательно, $\mathcal{S}^{\mathcal{X}} \mid A = \mathcal{S}^A$.

С другой стороны, если $\mathcal{X}$ допускает деформацию на A, то из условия $f \mid A \sim 1$ вытекает $f \sim 1$(согласно теореме 1 § 54, IV); таким образом, теорема 2 доказана.

Теорема 3 вытекает из теоремы 2 в силу равенства

$$\mathcal{S}^{\mathcal{X}} \mid A = \mathcal{S}^A.$$

Теорема 4[1]). *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное пространство, $g\colon \mathcal{X} \to g(\mathcal{X})$ и $f\colon g(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}$ — два непрерывных отображения. В следующих двух случаях из условия $fg \sim 1$ вытекает $f \sim 1$:*

(i) *g монотонно;*

(ii) *g открыто.*

Следовательно, *в обоих случаях группа $\mathfrak{B}_1[g(\mathcal{X})]$ изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{B}_1(\mathcal{X})$ и $b_1[g(\mathcal{X})] \leqslant b_1(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Пусть $fg(x) = e_\psi(x)$, где $\psi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{E}$ — непрерывная функция.

Случай (i). Пусть $y_0 \in g(\mathcal{X})$ и $x_0 \in g^{-1}(y_0)$.

Для всех $x \in g^{-1}(y_0)$ имеем

$$e_\psi(x) = fg(x) = f(y_0) = fg(x_0) = e_\psi(x_0).$$

Следовательно, функция $\psi(x) - \psi(x_0)$ принимает целочисленные значения (на $g^{-1}(y_0)$), поэтому она постоянна, так как $g^{-1}(y)$ связно; отсюда следует, что

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi(x_0) - \psi(x_0) = 0.$$

Таким образом, условие $\varphi(y) = \psi(x)$ для $x \in g^{-1}(y)$ однозначно определяет функцию $\varphi\colon g(\mathcal{X}) \to \mathcal{E}$. Эта функция непрерывна, так как (ср. § 20, V, теорема 8)

$$[t = \varphi(y)] \equiv \bigvee_x [y = g(x)]\,[t = \psi(x)].$$

Более того, $e_\varphi(y) = e_\psi(x) = fg(x) = f(y)$, следовательно, $f \sim 1$.

---

[1]) Ср. Эйленберг [4, стр. 165 и 174].

Случай (ii). Если g открыто, то g^{-1}: $g(\mathcal{X}) \to 2^{\mathcal{X}}$ — непрерывная функция (ср. § 43, V, теорема 1). Следовательно, функция ψg^{-1} также непрерывна, а потому непрерывна и функция φ: $g(\mathcal{X}) \to \mathcal{E}$, определяемая условием

$$\varphi(y) = \inf \psi[g^{-1}(y)]$$

(ср. § 42, II, замечание 2); если x — точка из $g^{-1}(y)$, такая, что $\varphi(y) = \psi(x)$, то, как и выше, $e_{\varphi} = f$.

Замечание. Часть (ii) теоремы 4 остается верной, если $\mathcal{S}$ заменить на $\mathcal{P} = \mathcal{E}^2 - (0)$.

Так как $fg(x) = |fg(x)| e_{\psi}(x)$, где функция ψ: $\mathcal{X} \to \mathcal{E}$ непрерывна, то $f(y) = |f(y)| e_{\psi}(y)$; чтобы доказать это, достаточно каждому y поставить в соответствие точку $x \in g^{-1}(y)$, в которой $\psi[g^{-1}(y)]$ принимает свою нижнюю грань.

§ 57. Пространства, стягиваемые относительно $\mathcal{S}$. Уникогерентные пространства

I. Стягиваемость относительно $\mathcal{S}$. По определению (§ 54, V) пространство $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$, если всякая непрерывная функция f: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$ гомотопна постоянной.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 2 § 54, V, теоремы 3 § 56, IX и теоремы 1 § 50, II.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$;*

(ii) *пространство $\mathcal{S}^{\mathcal{X}}$ дугообразно связно;*

(iii) *$f \sim 1$ для всякой непрерывной функции f: $\mathcal{X} \to \mathcal{S}$;*

(iv) *$b_1(\mathcal{X}) = 0$.*

Более того, *если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то дугообразную связность можно заменить связностью* (в (ii)).

Из теоремы 3 § 54, V и теоремы 4 § 56, XI вытекает следующая

Теорема 2. *Если $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$, то каждое множество, которое можно получить из $\mathcal{X}$*

(i) *ретракцией,*

(ii) *непрерывным монотонным преобразованием (если $\mathcal{X}$ компактно),*

(iii) *открытым отображением (если $\mathcal{X}$ компактно),*

тоже стягиваемо относительно $\mathcal{S}$.

Из теорем 4 и 5 § 54, V вытекает следующая

Теорема 3. *Свойство нестягиваемости компактного пространства $\mathcal{X}$ относительно $\mathcal{S}$ является инвариантом деформаций $\mathcal{X}$ и преобразований с малыми прообразами точек.*

Из теоремы 2 § 56, IX и теоремы 2 § 56, X вытекает следующая

Теорема 4. *Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ стягиваемы относительно $\mathcal{S}$ и если, кроме того, $\mathcal{X}$ — континуум или связное и локально связное пространство, то пространство $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$.*

Следующие две теоремы сложения вытекают из теорем 3 и 8 § 56, VI.

Теорема 5. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых (или открытых) множества, пересечение которых $A_0 \cap A_1$ связно. Если A_0 и A_1 стягиваемы относительно $\mathcal{S}$, то и их объединение $A_0 \cup A_1$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$.*

Теорема 6. *Пусть C_0, C_1, ... — последовательность связных множеств, такая, что*

$$\mathcal{X} = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \quad и \quad C_n \subset \operatorname{Int}(C_{n+1}).$$

Если каждое множество C_n стягиваемо относительно $\mathcal{S}$, то и множество $\mathcal{X}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$.

Теорема 7. *Если каждое из компактных множеств $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$, то и их пересечение $A_0 \cap A_1 \cap \ldots$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Это утверждение является следствием теоремы 9 § 54, V.

Теорема 8. *Если $\mathcal{X}$ компактно или локально связно и если каждая компонента пространства $\mathcal{X}$ стягиваема относительно $\mathcal{S}$, то и само пространство $\mathcal{X}$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Это прямое следствие теорем 4 п. VIII и 1 п. X § 56.

Теорема 9. *Следующие пространства стягиваемы относительно $\mathcal{S}$:*

(i) *всякое пространство, стягиваемое в себе и, следовательно, всякий абсолютный ретракт; в частности, $\mathcal{I}^n$ и $\mathcal{E}^n$ для любого $n \leqslant \aleph_0$;*

(ii) *сфера $\mathcal{S}_n$ при $n \neq 1$;*

(iii) *проективное пространство размерности $\neq 1$;*

(iv) *любое подмножество A пространства $\mathcal{I}$.*

Доказательство. В случае (i) утверждение следует из теоремы 3 и теоремы 2 (3) § 54, VI (ср. также § 56, III, теорема 3).

(ii) вытекает из теоремы 5 (а также из теоремы 2 (ii)).

(iii) следует из теоремы 2 (iii), так как проективное пространство является образом сферы при открытом отображении (см. § 43, VI, теорема 2).

(iv) Пусть $f\colon A \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. Так как каждая компонента C множества A стягиваема относительно $\mathcal{S}$ (ср. (i)), то $f \mid C \sim 1$. Поэтому C содержится (ср. § 56, II, теорема 9) в открытом интервале $p_C q_C$, таком, что $f \mid F_C \sim 1$ для $F_C = A \cap p_C q_C$. Очевидно, можно считать, что точки p_C и q_C не принадлежат A. Таким образом, множество F_C открыто-замкнуто в A, и из соотношений

$$A = \bigcup_C F_C \quad \text{и} \quad f \mid F_C \sim 1$$

вытекает, что $f \sim 1$ (по теореме 5 § 54, I).

Замечание. Использование того, что $\mathcal{S}_2$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$ (теорема 9 (ii)), позволяет получить очень простое доказательство теоремы об антиподах (см. § 41, VII) для $n=2$ [1]).

Доказательство. Мы должны показать, что для любой непрерывной функции $g\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}^2$ существует точка $x_0 \in \mathcal{S}_2$, в которой $g(x_0) = g(-x_0)$.

Допустим, что это не так. Другими словами, предположим, что

$$(1) \qquad f(x) = g(x) - g(-x) \neq 0$$

при каждом $x \in \mathcal{S}_2$. Это означает, что f — непрерывная функция $f\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}$. Так как сфера $\mathcal{S}_2$ стягиваема относительно $\mathcal{S}$, то $f \sim 1$, и поэтому существует непрерывная функция $u\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{E}^2$, такая, что

$$(2) \qquad f(x) = e^{u(x)} \text{ для любого } x \in \mathcal{S}_2.$$

Заменим x на $-x$; тогда из (2) вытекает, что

$$f(-x) = e^{u(-x)},$$

и, согласно (1),

$$f(-x) = g(-x) - g(x) = -f(x) = -e^{u(x)} = e^{u(x)+\pi i},$$

откуда следует, что $e^{u(-x)} = e^{u(x)+\pi i}$. Так как сфера $\mathcal{S}_2$ связна, мы приходим к заключению (ср. с теоремой 2 § 56, I), что

$$(3) \qquad u(-x) = u(x) + \pi i + 2k\pi i,$$

где k — целое число, не зависящее от x. Заменим x на $-x$ в (3); тогда $u(x) = u(-x) + (2k+1)\pi i$, откуда в сочетании с (3) следует, что $4k+2=0$, и мы получаем противоречие.

---

[1]) Аналогичное доказательство дал Г. Штейнгауз.

II. Свойства пространств, стягиваемых относительно $\mathcal{S}$ [1]**.** Пусть $\mathcal{X}$ — стягиваемое относительно $\mathcal{S}$ (с. о. $\mathcal{S}$) пространство. Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества, таких, что $\mathcal{X} = A_0 \cup A_1$.

Теорема 1. *$\mathcal{S}x = \Gamma(A_0) = \Gamma(A_1) = \Gamma(\mathcal{X})$, следовательно, $\mathfrak{P}_1(A_0, A_1) = (0)$ и $p_1(A_0, A_1) = 0$.*

Это прямое следствие теоремы 1 (iii) п. I (см. также (1) и (4) из § 56, V).

Теорема 2. *Если множества A_0 и A_1 связны, то связно и их пересечение $A_0 \cap A_1$.*

Другими словами (*положим $B_j = \mathcal{X} - A_j$*), *если B_0 и B_1 — два открытых или два замкнутых непересекающихся множества, ни одно из которых не разделяет (связное) пространство $\mathcal{X}$, то их объединение $B_0 \cup B_1$ также не разделяет $\mathcal{X}$.*

Следовательно, *всякое связное с. о. $\mathcal{S}$ пространство уникогерентно.*

Это следует из неравенства $b_0(A_0 \cap A_1) \leqslant b_1(A_0 \cup A_1)$ (ср. § 56, VI, теорема 2) и теоремы 1 (iv) п. I.

Теорема 2 допускает два обобщения.

Теорема 3. *Теорема 2 остается справедливой, если связность множеств A_0, A_1 и $A_0 \cap A_1$ заменить их связностью между двумя точками p_0 и p_1 (а также свойство разделять пространство — свойством разделять его между точками p_0 и p_1).*

В противном случае (по теореме 4 из § 56, VI) мы имели бы $\Gamma(A_0) \cap \Gamma(A_1) \neq \Gamma(\mathcal{X})$, а это противоречит теореме 1.

Теорема 4. *Если $A_0 \cap A_1 \neq 0$, то $b_0(A_0) + b_0(A_1) = b_0(A_0 \cup A_1) + b_0(A_0 \cap A_1)$.*

Это следствие теоремы 1 и теоремы (7.1) § 56, V.

Теорема 5. *Всякое замкнутое множество F, неприводимо разделяющее $\mathcal{X}$ между двумя точками p_0 и p_1, связно.*

Доказательство. Допустим, что это не так и что

$$F = B_0 \cup B_1, \quad B_0 \cap B_1 = 0 \quad \text{и} \quad B_j = \overline{B}_j \neq F.$$

Тогда по предположению B_j не разделяет пространство между p_0 и p_1 (при $j = 0, 1$); следовательно, $B_0 \cup B_1$ также не разделяет пространство между этими точками (по теореме 3).

Теорема 6. *Если A и $\mathcal{X}$ связны и C — компонента множества $\mathcal{X} - A$, то граница $\mathrm{Fr}(C)$ связна.*

[1]) Ср. Эйленберг [7, I, § 3]. Ср. также (для локально связных континуумов) Куратовский [17, § 1], [8, § 3].

Доказательство. Множество $\mathcal{X}-C$ связно по теореме 5 из § 46, III. Положим $A_0=\overline{C}$ и $A_1=\overline{\mathcal{X}-C}$; по теореме 2 множество $\mathrm{Fr}(C)=\overline{C}\cap\overline{\mathcal{X}-C}$ связно.

Теорема 7. *Если R — область в пространстве $\mathcal{X}$, то никакая квазикомпонента множества $\mathcal{X}-R$ не содержит двух различных квазикомпонент границы* $\mathrm{Fr}(R)$.

Если $\mathcal{X}$ — континуум, то

(1) $$b_0[\mathrm{Fr}(R)]=b_0(\mathcal{X}-R).$$

Доказательство. Пусть p_0 и p_1 — две точки множества $\mathrm{Fr}(R)$, принадлежащие некоторой квазикомпоненте множества $\mathcal{X}-R$. Пусть $A_0=\mathcal{X}-R$ и $A_1=\overline{R}$. Из теоремы 3 вытекает, что множество $\mathrm{Fr}(R)$ связно между p_0 и p_1; следовательно, эти две точки принадлежат одной и той же квазикомпоненте множества $\mathrm{Fr}(R)$.

Если $\mathcal{X}$ — континуум, то $C\cap\mathrm{Fr}(R)\neq 0$ для каждой компоненты C множества $\mathcal{X}-R$ (по теореме 1 из § 47, III). Следовательно, C содержит одну и, как только что было показано, только одну компоненту множества $\mathrm{Fr}(R)$ (ибо квазикомпоненты компактного множества совпадают с его компонентами; ср. § 47, II, теорема 2). Отсюда вытекает равенство (1).

III. Локальная связность и уникогерентность.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ — связное, локально связное с. о. $\mathcal{S}$ пространство. Всякий разделитель E между точками a и b содержит замкнутое связное множество, которое разделяет эти точки.*

Доказательство. Множество E содержит замкнутое множество F, которое разделяет a и b (ср. § 14, V, теорема 1); в свою очередь F содержит замкнутое множество C, которое неприводимо разделяет $\mathcal{X}$ между точками a и b (§ 49, V, теорема 3). По теореме 5 п. II множество C связно.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ удовлетворяет тем же предположениям, что и в теореме 1. Пусть*

$$p_i\in F_i=\overline{F}_i \quad \text{и} \quad F_0\cap F_1=0.$$

Существует разделитель C между точками p_0 и p_1, замкнутый, связный и не пересекающийся с $F_0\cup F_1$.

Более того, *если $\mathcal{X}$ компактно, то можно считать разделитель C локально связным континуумом.*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 4 § 49, V в сочетании с теоремой 5 п. II и теоремой 1 § 50, III.

Теорема 3. *Для того чтобы локально связный континуум был с. о. $\mathcal{S}$, необходимо и достаточно, чтобы он был уникогерентен.*

Доказательство. Условие необходимо в силу теоремы 2 п. II.

С другой стороны, предположим, что локально связный континуум $\mathcal{X}$ уникогерентен и что $f: \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция.

Согласно теореме 7 из § 56, X, существуют два континуума C_0 и C_1, таких, что $\mathcal{X} = C_0 \cup C_1$ и $f \mid C_j \sim 1$ при $j = 0, 1$. По предположению $C_0 \cap C_1$ связно. По теореме 3 из § 56, VI $f \sim 1$.

Замечание. Теорему 3 можно обобщить, заменяя термин *континуум* термином *связное пространство* [1]).

Теорема 4. *Всякий локально связный континуум $\mathcal{X}$, не являющийся уникогерентным, содержит простую замкнутую кривую, являющуюся ретрактом $\mathcal{X}$* [2]).

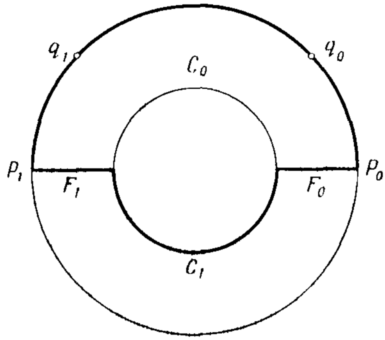

Рис. 14

Доказательство. По предположению существуют непрерывная функция $f: \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ (ср. § 56, X, теорема 7) и два локально связных континуума C_0, C_1, такие, что

$$f \not\sim 1, \quad \mathcal{X} = C_0 \cup C_1 \quad \text{и} \quad f \mid C_j \sim 1 \quad \text{для} \quad j = 0, 1.$$

Согласно теореме 3 из § 56, VI, множество $C_0 \cap C_1$ несвязно. Таким образом (рис. 14),

$$(1) \quad C_0 \cap C_1 = F_0 \cup F_1, \quad F_0 \cap F_1 = 0, \quad \bar{F}_j = F_j \neq 0 \text{ для } j = 0, 1.$$

Пусть A_0 — дуга, содержащаяся в C_0 и неприводимо связная между F_0 и F_1. Положим $A_0 \cap F_j = p_j$. Пусть A_1 — дуга $p_0 p_1$, содержащаяся в C_1. Тогда

$$A_0 \cap A_1 \subset A_0 \cap C_0 \cap C_1 = (A_0 \cap F_0) \cup (A_0 \cap F_1) = (p_0, p_1).$$

Поэтому множество $A_0 \cup A_1$ — простая замкнутая кривая.

[1]) Доказательство см. Эйленберг [7, стр. 70]. Частичное обобщение см. Борсук [2, стр. 190]. Относительно эквивалентности между уникогерентностью и обращением в нуль первого числа Бетти см. Борсук [8, стр. 203] и Чех [5, стр. 233].

[2]) Борсук [2, стр. 184].

Пусть f_0 — ретракция множества $F_0 \cup A_0 \cup F_1$ на A_0, такая, что

(2) $$f_0(F_0) = p_0 \quad \text{и} \quad f_0(F_1) = p_1.$$

В соответствии с теоремой Титце (§ 14, IV) пусть

(3) $$f_0 \subset g_0 \in A_0^{C_0}.$$

Пусть q_0 и q_1 — две различные точки, принадлежащие множеству $A_0 - (p_0, p_1)$, и q_0q_1 и q_1q_0 — две поддуги дуги $A_0 \cup A_1$, где $q_0q_1 \subset A_0$. Пусть

(4) $$D_0 = g_0^{-1}(q_0q_1),$$

(5) $$D_1 = g_0^{-1}(p_0q_0 \cup q_1p_1) \cup C_1.$$

Тогда

(6) $$\mathcal{X} = D_0 \cup D_1,$$

(7) $$D_0 \cap D_1 = g_0^{-1}(q_0) \cup g_0^{-1}(q_1),$$

(8) $$g_0^{-1}(q_0) \cap g_0^{-1}(q_1) = 0,$$

так как (ср. (1) — (3)) из соотношения

$$C_0 \cap C_1 = F_0 \cup F_1 \subset g_0^{-1}g_0(F_0 \cup F_1) = g_0^{-1}(p_0, p_1)$$

вытекает, что

$$g_0^{-1}(q_0q_1) \cap C_1 \subset g_0^{-1}[q_0q_1 \cap (p_0, p_1)] = 0.$$

С другой стороны,

(9) $$q_1q_0 \cap g_0^{-1}(q_j) = q_j,$$

так как g_0 — ретракция, и, следовательно (см. (1) и (2)), из условий

$$q_1q_0 \subset q_1p_1 \cup C_1 \cup p_0q_0 \quad \text{и} \quad C_1 \cap g_0^{-1}(q_j) = C_1 \cap C_0 \cap g_0^{-1}(q_j) = 0$$

вытекает, что

$$q_1q_0 \cap g_0^{-1}(q_j) = (q_1p_1 \cup p_0q_0) \cap g_0^{-1}(q_j) = g_0[(q_1p_1 \cup p_0q_0) \cap g_0^{-1}(q_j)] \subset$$
$$\subset g_0(q_1p_1 \cup p_0q_0) \cap g_0g_0^{-1}(q_j) = (q_1p_1 \cup p_0q_0) \cap q_j = q_j.$$

Из соотношений (8) и (9) непосредственно следует, что существует ретракция f_1 множества $g_0^{-1}(q_0) \cup q_1q_0 \cup g_0^{-1}(q_1)$ на q_1q_0, такая, что

(10) $$f_1g_0^{-1}(q_j) = q_j \quad \text{для} \quad j = 0, 1.$$

Пусть

(11) $$f_1 \subset g_1 \in (q_1q_0)^{D_1}.$$

Тогда

(12) $$g_0(x) = g_1(x) \quad \text{для} \quad x \in g_0^{-1}(q_j),$$

так как из условия $x \in g_0^{-1}(q_j)$ вытекает, с одной стороны, что $g_0(x) = q_j$, а с другой стороны, что $f_1(x) = q_j$ (согласно (10)); следовательно, $g_1(x) = q_j$ (ср. (11)).

Из условий (6), (7) и (12) следует, что функция $g_0|D_0 + g_1$ есть ретракция множества $\mathscr{X}$ на $A_0 \cup A_1$.

Следствие 5. *Если $\mathscr{X}$ — локально связный континуум, не являющийся уникогерентным, то существует непрерывное отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, не имеющее неподвижной точки*[1]).

Замечание. Теоремы 4 и 5 можно обобщить, заменяя термин *локально связный континуум* термином *локально и глобально дугообразно связное пространство* (Борсук [2, стр. 184 и 188]).

Теорема 6. *Пусть $\mathscr{X}$ — локально связный уникогерентный континуум, который не разделяется никакой точкой. Если R — область и* $\dim E = 0$, *то множество $R - E$ связно*[2]).

Доказательство. Предположим, что $R - E$ не связно между точками p и q. Тогда существует (по теореме 1) континуум $C \subset E \cup (\mathscr{X} - R)$, разделяющий пространство между p и q. Так как $\dim E = 0$, то $C \subset \mathscr{X} - R$ (напомним, что по предположению C не сводится к одной точке). Но это невозможно, так как множество $\mathscr{X} - R$ не разделяет точки p и q.

Следствие 7. *При тех же предположениях* $\dim \mathscr{X} \geqslant 2$ (*при условии, что $\mathscr{X}$ содержит более одной точки*).

Более точно, $\mathrm{dc}\,\mathscr{X} \geqslant 2$ (ср. § 46, XI).

Следствие 8. *Всякий локально связный уникогерентный одномерный континуум представляет собой дендрит*[3]).

В противном случае этот континуум содержал бы циклический элемент C (состоящий более чем из одной точки), и так как при этом C был бы уникогерентен (по теореме 5 § 52, III), то из этого следовало бы, что $\dim C \geqslant 2$.

IV. Замечания о продолжении гомеоморфизмов в с. о. $\mathscr{S}$ континуумах. Сформулируем без доказательства следующую теорему.

---

[1]) См. Куратовский [20, стр. 307].

[2]) Ср. Уилдер [5, стр. 349]. Случай когда $\mathscr{X} = \mathscr{S}_2$, ср. Фрагмен [1] и Брауэр [2].

[3]) Ср. Веторис [3].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$ — два с. о. $\mathcal{S}$ метрических континуума, и пусть $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{Y}_1$ — два связных множества, дополнения которых $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{X}_0$ и $\mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}_1$ наследственно разрывны (т. е. не содержат континуумов, за исключением отдельных точек).*

Тогда, если $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ гомеоморфны, то гомеоморфны и $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$.

Более того, *всякий гомеоморфизм h пространства $\mathcal{X}_0$ на $\mathcal{X}_1$ можно продолжить до гомеоморфизма $\bar{h}$ пространства $\mathcal{Y}_0$ на $\mathcal{Y}$* [1]).

Отождествляя x с $h(x)$, можно предыдущее утверждение сформулировать в следующей эквивалентной форме:

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$ — две компактификации связного пространства $\mathcal{X}$, и пусть $\mathcal{Y}_0 - \mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}$ вполне несвязны.*

Если $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$ — с. о. $\mathcal{S}$ континуумы, то они гомеоморфны.

Более того, *существует гомеоморфизм пространства $\mathcal{Y}_0$ на $\mathcal{Y}_1$, который тождествен на $\mathcal{X}$* [2]).

Из теоремы 1 легко вывести следующую теорему об инвариантности.

Теорема 3. *Пусть R — связное, открытое множество, $R \subset \mathcal{S}_n$. Тогда мощность множества компонент дополнения $\mathcal{S}_n - R$ инвариантна при гомеоморфных отображениях R.*

Действительно, существует непрерывное отображение h пространства $\mathcal{S}_n$ на с. о. $\mathcal{S}$ континуум $\mathcal{Y}$, такое, что $h \mid R$ — гомеоморфизм и прообразы точек $h^{-1}(y)$ являются либо отдельными точками R, либо компонентами множества $\mathcal{S}_n - R$ (ср. I, теорема 2 (ii), и § 46, V, теорема 4) [3]).

Добавим, что в теореме 3 условие связности опустить нельзя (ср. § 62, X).

§ 58. Группа $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$

0 (Введение). Семейство $(0, 1)^{\mathcal{X}}$. Этим символом мы обозначим *семейство всех открыто-замкнутых подмножеств* пространства $\mathcal{X}$. Это обозначение мотивировано тем, что открыто-замкнутые подмножества $\mathcal{X}$ можно отождествить с их характеристическими функциями (определенными на $\mathcal{X}$).

---

[1]) Доказательство см. Скляренко [2] и Куратовский и Энгелькинг [2]. Теорема 1 является обобщением более ранних результатов Фрейденталя [5], [6]; де Гроота [1] и Дуды [1] и [2].

[2]) По поводу случая связного открытого $\mathcal{X}$ см. Куратовский и Эйленберг [2].

[3]) Прямое доказательство см. Форт [3]. Значительно раньше случай $n = 2$ рассматривал Брауэр; ср. § 61, V.

Определения. Пусть $\boldsymbol{C}$ обозначает произвольное покрытие пространства $\mathcal{X}$ открытыми непустыми непересекающимися множествами. Таким образом,

$$(1)\qquad \begin{gathered} \boldsymbol{C} \subset (0,\ 1)^{\mathcal{X}},\ \mathbf{S}\boldsymbol{C} = \mathcal{X}, \\ [(Z_0,\ Z_1 \in \boldsymbol{C})(Z_0 \neq Z_1) \Rightarrow (Z_0 \cap Z_1 = 0)]; \end{gathered}$$

$\mathbf{R}(\mathcal{X})$ обозначает совокупность таких покрытий.

Говорят, что семейство $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})$ всех объединений элементов покрытия $\boldsymbol{C}$ *порождается* покрытием $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{C}$ является его *базой*. Очевидно, эти объединения открыто-замкнуты.

Теорема 1. *Семейство* $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ *направлено по отношению измельчения:* $\boldsymbol{C}_1$ *есть измельчение* $\boldsymbol{C}_0$ (*обозначается* $\boldsymbol{C}_0 \leqslant \boldsymbol{C}_1$, *или, эквивалентно,* $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_0) \subset \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_1)$).

Именно, если $\boldsymbol{C}_0,\ \boldsymbol{C}_1 \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$ и если $\boldsymbol{C}_2$ обозначает покрытие, состоящее из (непустых) пересечений $Z_{0,\,t} \cap Z_{1,\,s}$, где $\boldsymbol{C}_0 = \{Z_{0,\,t}\}$ и $\boldsymbol{C}_1 = \{Z_{1,\,s}\}$, то $\boldsymbol{C}_0 \leqslant \boldsymbol{C}_2$ и $\boldsymbol{C}_1 \leqslant \boldsymbol{C}_2$.

Теорема 2. *Семейство* $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ *имеет последний элемент (т. е. существует самое мелкое покрытие пространства* $\mathcal{X}$) *тогда и только тогда, когда компоненты пространства* $\mathcal{X}$ *открыты. Таким элементом является семейство* $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ *всех компонент пространства* $\mathcal{X}$.

Доказательство. 1. Предположим, что $\boldsymbol{C}$ — последний элемент в $\mathbf{R}(\mathcal{X})$. Достаточно показать, что каждое множество $Z \in \boldsymbol{C}$ связно. Но если Z не связно, то $Z = P \cup Q$, где P и Q — открытые непустые и непересекающиеся множества; следовательно, $\boldsymbol{C} \leqslant \boldsymbol{C}^* \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$, где $\boldsymbol{C}^*$ получается из $\boldsymbol{C}$ заменой Z на пару P, Q.

2. Если компоненты пространства $\mathcal{X}$ открыты, то $\mathfrak{C}(\mathcal{X})$ — последний элемент в $\mathbf{R}(\mathcal{X})$, так как любое открыто-замкнутое множество Z является объединением некоторых компонент пространства $\mathcal{X}$.

Лемма. *Пусть* $F \subset \mathcal{I}$ — *бесконечное нигде не плотное замкнутое множество. Тогда существует система замкнутых множеств* $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, *определенных для систем* $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ (*может быть, не для всех*) *чисел* 0 *и* 1, *такая, что*

$$F = F_0 \cup F_1, \quad F_0 \cap F_1 = 0, \quad F_\alpha \neq 0, \quad \delta(F_\alpha) < 1$$

и (*при условии, что* $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ *содержит более одной точки*)

$$F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0} \cup F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1}, \quad F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0} \cap F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1} = 0,$$
$$F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}} \neq 0, \quad \delta(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}}) < 1/2^n.$$

Множества $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ определяются без всяких затруднений.

Назовем *множествами порядка* n множества $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, а также одноэлементные множества $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ при $m < n$. Легко видеть, что *всякое открыто-замкнутое множество в* F *является объединением некоторых множеств порядка* n *для достаточно большого* n.

Теорема 3. *Если* $\mathcal{X}$ — *компактное метрическое пространство, то* $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ *счетно, а каждое* $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$ *конечно.*

Более того, $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ *конфинально с бесконечной последовательностью* $\boldsymbol{C}_1 < \boldsymbol{C}_2 < \ldots$ (*при условии, что* $\mathcal{X}$ *имеет бесконечное множество компонент*).

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Доказательство второй части можно свести к частному случаю, когда $\mathcal{X} \subset \mathcal{J}$ и $\dim \mathcal{X} = 0$, так как существует непрерывное отображение пространства $\mathcal{X}$ в канторов дисконтинуум, при котором прообразы точек суть компоненты пространства $\mathcal{X}$ (см. теорему 3 из § 46, V).

Далее, в этом частном случае обозначим через $\boldsymbol{C}_n$ семейство множеств порядка n, рассмотренных в лемме.

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{Y}$ — *метрическое пространство и* $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$. *Обозначим через* $\mathcal{X} \circ \boldsymbol{D}$ *для* $\boldsymbol{D} \in \mathbf{R}(\mathcal{Y})$ *семейство всех (непустых) множеств* $\mathcal{X} \cap V$, *где* $V \in \boldsymbol{D}$. *Тогда* $(\mathcal{X} \circ \boldsymbol{D}) \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$.

Более того, *для каждого* $\boldsymbol{C} \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$ *существуют открытое в* $\mathcal{Y}$ *множество* G *и* $\boldsymbol{D} \in \mathbf{R}(G)$, *такие, что* $\boldsymbol{C} = \mathcal{X} \circ \boldsymbol{D}$.

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Для доказательства второй части положим $\boldsymbol{C} = \{Z_t\}$. Так как множества Z_t не пересекаются и открыты в $\mathcal{X}$, то существуют множества $\{V_t\}$, непересекающиеся и открытые в $\mathcal{Y}$, такие, что $\mathcal{X} \cap V_t = Z_t$ (по теореме 2 из § 21, XI). Положим $G = \bigcup_t V_t$ и $\boldsymbol{D} = \{V_t\}$.

Определение. Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$; предположим, что компоненты R_t пространства $\mathcal{Y}$ открыты. Тогда $\boldsymbol{Q}_{\mathcal{Y}}$ обозначает семейство всех (непустых) множеств $\mathcal{X} \cap R_t$. Другими словами,

$$\boldsymbol{Q}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{X} \circ \mathfrak{C}(\mathcal{Y}).$$

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ *и* $\mathcal{Y}$ — *локально связное метрическое пространство. Тогда* $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ *конфинально с множеством покрытий* $\boldsymbol{Q}_G$, *где* G *пробегает семейство открытых подмножеств пространства* $\mathcal{Y}$, *таких, что* $\mathcal{X} \subset G$.

Доказательство. Пусть $C \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$. По теореме 4 $C = \mathcal{X} \circ D$ и $D \in \mathbf{R}(G)$ для некоторого G, открытого в $\mathcal{Y}$. Так как G локально связно, то, согласно теореме 2,

$$D \leqslant \mathfrak{C}(G), \text{ откуда } \mathcal{X} \circ D \leqslant \mathcal{X} \circ \mathfrak{C}(G), \text{ т. е. } C \leqslant Q_G.$$

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — два локально связных пространсгва, содержащих $\mathcal{X}$. Тогда*

$$(2) \qquad (\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}) \Rightarrow (Q_{\mathcal{Z}} \leqslant Q_{\mathcal{Y}}).$$

Доказательство. Если $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$, то каждая компонента R пространства $\mathcal{Y}$ содержится в некоторой компоненте S пространства $\mathcal{Z}$, поэтому $\mathcal{X} \cap R \subset \mathcal{X} \cap S$. Следовательно, $Q_{\mathcal{Z}} \leqslant Q_{\mathcal{Y}}$.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{Y}$ — компактное локально связное метрическое пространство, $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$ локально компактно; тогда*

$$(3) \quad \mathcal{Y} - \mathcal{X} = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \text{ где } F_i \text{ компактны и } F_i \subset \mathrm{Int}_{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}(F_{i+1})$$

($\mathrm{Int}_{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}$ обозначает внутренность относительно $\mathcal{Y} - \mathcal{X}$).

Положим $G_i = \mathcal{Y} - F_i$. Тогда $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ конфинально с последовательностью

$$(4) \qquad Q_{G_1} \leqslant Q_{G_2} \leqslant \ldots .$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} \subset G \subset \mathcal{Y}$, где G открыто (в $\mathcal{Y}$). Тогда

$$\mathcal{Y} - G \subset \mathcal{Y} - \mathcal{X} = \bigcup_i \mathrm{Int}_{\mathcal{Y}-\mathcal{X}}(F_{i+1}).$$

Так как $\mathcal{Y} - G$ компактно, то существует индекс i, такой, что $\mathcal{Y} - G \subset F_i$, т. е. $G_i \subset G$. Таким образом, $\mathcal{X} \subset G_i \subset G$ (так как $F_i \subset \mathcal{Y} - \mathcal{X}$), а потому $Q_G \leqslant Q_{G_i}$ (согласно (2)). Следовательно, по теореме 5, $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ конфинально с $\{Q_{G_i}\}$. Соотношение (4) справедливо, так как включения $F_i \subset F_{i+1}$ и $G_{i+1} \subset G_i$ эквивалентны.

I. $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ как топологическое пространство.

Определения. Пусть $\mathcal{X}$ — метрическое пространство[1]; $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ обозначает семейство вполне аддитивных функций μ (называемых *мерами*), ставящих в соответствие каждому $Z \in (0, 1)^{\mathcal{X}}$ целое число $\mu(Z)$; это означает, что, каковы бы ни были непересекающиеся множества $Z_i \in (0, 1)^{\mathcal{X}}$, такие, что $\left(\bigcup_i Z_i\right) \in (0, 1)^{\mathcal{X}}$,

[1]) При более общих предположениях см. Куратовский и Энгелькинг [1].

имеет место равенство

$$(0) \qquad \mu\left(\bigcup_t Z_t\right) = \sum_t \mu(Z_t).$$

Очевидно, что в этом случае *только конечное число слагаемых Z_t имеют ненулевую меру.*

Пусть $C \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$ обозначает (как в п. 0) произвольное покрытие пространства $\mathcal{X}$ непустыми непересекающимися открытыми множествами; пусть $\mathfrak{F}(C)$ — множество вполне аддитивных функций, определенных на элементах множества $A(C)$ и принимающих целочисленные значения.

Для $C_0 \leqslant C_1$ (это означает, как в п. 0, что C_1 — измельчение C_0, или, эквивалентно, что $A(C_0) \subset A(C_1)$) обозначим через $\sigma_{C_0C_1}$ операцию сужения

$$\sigma_{C_0C_1}\colon \mathfrak{F}(C_1) \to \mathfrak{F}(C_0),$$

определяемую условием

$$\sigma_{C_0C_1}(\nu) = \nu \mid A(C_0) \quad \text{для} \quad \nu \in \mathfrak{F}(C_1).$$

Легко видеть, что $\{\mathfrak{F}(C), \sigma_{C_0C_1}\}$, где $C \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$ и $C_0 \leqslant C_1$, — *обратный спектр.*

Обозначим, наконец, через σ_C операцию сужения

$$\sigma_C\colon \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{F}(C), \quad \text{где} \quad \sigma_C(\mu) = \mu \mid A(C),$$

и положим $\sigma = \{\sigma_C\}$. Тогда

$$\sigma\colon \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \prod_C \mathfrak{F}(C), \quad \text{где} \quad C \in \mathbf{R}(\mathcal{X}).$$

Теорема 1. *σ представляет собой взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ на $\mathfrak{L} = \operatorname*{Lim}_{C,\, C_0 \leqslant C_1} \{\mathfrak{F}(C), \sigma_{C_0C_1}\}$.*

Следовательно, *$\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ станет топологическим пространством (вполне регулярным нульмерным пространством), если мы определим замыкание $\overline{\mathfrak{H}}$ для $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ с помощью отношения эквивалентности*

$$(1) \qquad (\mu \in \overline{\mathfrak{H}}) \equiv [(\mu \mid C \in (\mathfrak{H} \mid C) \text{ для каждого } C \in \mathbf{R}(\mathcal{X})];$$

это означает, что для каждого C существует $\nu \in \mathfrak{H}$, такое, что $\nu(Z) = \mu(Z)$ для $Z \in C$.

Кроме того, *отображение $\sigma\colon \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{L}$ есть гомеоморфизм на.*

Доказательство. Во-первых, σ является отображением *в*. Это означает, что $\sigma_{C_0C_1}(\mu \mid A(C_1)) = \mu \mid A(C_0)$, или, иначе, что

$$[\mu \mid A(C_1)] \mid A(C_0) = \mu \mid A(C_0),$$

но это немедленно следует из транзитивности операции сужения.

Далее, σ — *взаимно однозначное отображение*. Действительно, предположим, что $\mu_0(Z)=\mu_1(Z)$ для данного $Z\in(0, 1)^{\mathfrak{X}}$, и обозначим через $\boldsymbol{C}$ двуэлементное покрытие $\boldsymbol{Z}^*=(Z, \mathscr{X}-Z)$. Тогда

$$\mu_0\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})\neq\mu_1\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}), \quad \text{т. е.} \quad \sigma_{\boldsymbol{C}}(\mu_0)\neq\sigma_{\boldsymbol{C}}(\mu_1),$$

следовательно, $\sigma(\mu_0)\neq\sigma(\mu_1)$.

Покажем, что σ есть отображение *на*. Другими словами, предположим, что каждому $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}(\mathscr{X})$ соответствует $\nu_{\boldsymbol{C}}\in\mathfrak{F}(\boldsymbol{C})$, такое, что

$$(2) \qquad \nu_{\boldsymbol{C}_0}=\nu_{\boldsymbol{C}_1}\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_0) \quad \text{при условии} \quad \boldsymbol{C}_0\leqslant\boldsymbol{C}_1,$$

и определим $\mu\in\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ так, чтобы

$$(3) \qquad \mu\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})=\nu_{\boldsymbol{C}} \quad \text{для каждого} \quad \boldsymbol{C}\in\mathbf{R}(\mathscr{X}).$$

Покажем, что этим же свойством обладает мера μ, определенная соотношением [1])

$$(4) \qquad \mu(Z)=\nu_{\boldsymbol{Z}^*}(Z), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{Z}^*=(Z, \mathscr{X}-Z).$$

Во-первых, необходимо показать, что $\mu\in\mathfrak{M}(\mathscr{X})$, т. е. $\mu(Z)=\sum\limits_t\mu(Z_t)$, при условии, что $Z=\bigcup\limits_t Z_t$ и множества Z_t не пересекаются.

Пусть $\boldsymbol{C}$ — покрытие пространства $\mathscr{X}$, состоящее из всех множеств Z_t и множества $\mathscr{X}-Z$ (которое опускается, если $Z=\mathscr{X}$).

Очевидно, что $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}(\mathscr{X})$, $\boldsymbol{Z}^*\leqslant\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{Z}_t^*\leqslant\boldsymbol{C}$. Согласно (2),

$$(5) \qquad \nu_{\boldsymbol{Z}^*}=\nu_{\boldsymbol{C}}\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}^*) \quad \text{и} \quad \nu_{\boldsymbol{Z}_t^*}=\nu_{\boldsymbol{C}}\,|\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Z}_t^*),$$

откуда

$$(6) \qquad \nu_{\boldsymbol{Z}^*}(Z)=\nu_{\boldsymbol{C}}(Z) \quad \text{и} \quad \nu_{\boldsymbol{Z}^*}(Z_t)=\nu_{\boldsymbol{C}}(Z_t).$$

Так как $\nu_{\boldsymbol{C}}\in\mathfrak{F}(\boldsymbol{C})$, то из (4) и (6) вытекает, что

$$\mu(Z)=\nu_{\boldsymbol{Z}^*}(Z)=\nu_{\boldsymbol{C}}(Z)=\sum_t\nu_{\boldsymbol{C}}(Z_t)=\sum_t\nu_{\boldsymbol{Z}_t^*}(Z_t)=\sum_t\mu(Z_t).$$

Остается доказать (3). Пусть $Z\in\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C})$. Покажем, что $\mu(Z)=\nu_{\boldsymbol{C}}(Z)$. Но так как $\boldsymbol{Z}^*\leqslant\boldsymbol{C}$, то это равенство следует непосредственно из (4) и (6).

Этим завершается доказательство первой части теоремы.

---

[1]) Мы обозначаем обычно через $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{C}$ и μ переменные, пробегающие соответственно $(0, 1)^{\mathfrak{X}}$, $\mathbf{R}(\mathscr{X})$ и $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$.

Вторая часть вытекает из теоремы 3 § 16, VI, если предположить, что $\mathfrak{F}(C)$ имеет дискретную топологию (откуда следует, что $\prod\limits_{C}\mathfrak{F}(C)$ и $\mathfrak{L}$ — вполне регулярные пространства).

Теорема 2. *Если компоненты пространства $\mathcal{X}$ открыты (в частности, если $\mathcal{X}$ локально связно), то пространство $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ дискретно.*

Доказательство. Пусть C — семейство компонент пространства $\mathcal{X}$. Семейство $(0, 1)^{\mathcal{X}}$ порождается семейством C, следовательно, функция μ однозначно определяется своими значениями на элементах Z из C. Таким образом, из условия $(\mu|C)\in(\mathfrak{H}|C)$ вытекает, что $\mu\in\mathfrak{H}$, откуда, согласно (1), $\mathfrak{H}=\overline{\mathfrak{H}}$.

Теорема 3. *Отображение σ_C: $\mathfrak{M}(\mathcal{X})\to\mathfrak{F}(C)$ непрерывно; отображение φ_Z: $\mathfrak{M}(\mathcal{X})\to\mathcal{S}$ для каждого Z, где $\varphi_Z(\mu)=\mu(Z)$, также непрерывно.*

Первая часть теоремы 3 следует из теоремы 1; для того чтобы вывести вторую часть, положим $C=(Z, \mathcal{X}-Z)$.

Теорема 4. *Если пространство $\mathcal{X}$ компактно, то $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ гомеоморфно полному сепарабельному нульмерному пространству.*

Действительно, в этом случае $\mathbf{R}(\mathcal{X})$ счетно (ср. § 54, IX, 6a).

Замечание. Если предположить, что пространство $\mathcal{X}$ компактно, то *полную* аддитивность функций $\mu\in\mathfrak{M}(\mathcal{X})$, очевидно, можно заменить *конечной* аддитивностью (ибо каждое покрытие C пространства $\mathcal{X}$ конечно).

При тех же предположениях легко показать, что

$$(7)\quad \left(\mu=\lim_{k\to\infty}\mu_k\right)\equiv\left|(\mu|C)=\lim_{k\to\infty}(\mu_k|C)\ \textit{для каждого}\ C\right|\equiv$$
$$\equiv\left|\mu(Z)=\lim_{k\to\infty}\mu_k(Z)\ \textit{для каждого}\ Z\right|.$$

Теоремы 5 и 6 являются прямыми следствиями теорем 5 и 7 § 1, VII.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{X}\subset\mathcal{Y}$, где $\mathcal{Y}$ — метрическое локально связное пространство. Тогда для каждого $\mu\in\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ и каждого $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ мы имеем*

$$(8)\quad (\mu\in\overline{\mathfrak{H}})\equiv[(\mu|Q_G)\in(\mathfrak{H}|Q_G)\ \textit{для каждого открытого}\ G,\ \textit{такого, что}\ \mathcal{X}\subset G\subset\mathcal{Y}];$$

$$(9)\quad (\mu_0=\mu_1)\equiv[(\mu_0|Q_G)=(\mu_1|Q_G)\ \textit{для каждого открытого}\ G,\ \textit{такого, что}\ \mathcal{X}\subset G\subset\mathcal{Y}].$$

Теорема 6. *При предположениях теоремы 7 п. 0 имеем*

(10) $(\mu \in \overline{\mathfrak{H}}) \equiv [(\mu | Q_{G_i}) \in (\mathfrak{H} | Q_{G_i})$ *для* $i = 1, 2, \ldots]$.

Более того, $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ *метризуемо, и*

(11) $(\mu_0 = \mu_1) \equiv [(\mu_0 | Q_{G_i}) = (\mu_1 | Q_{G_i})$ *для* $i = 1, 2, \ldots]$.

II. $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ как топологическая группа. Положим для μ_0, μ_1 и μ_2 из $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$

(1) $(\mu_0 = \mu_1 + \mu_2) \equiv$

$$\equiv [\mu_0(Z) = \mu_1(Z) + \mu_2(Z) \text{ для каждого } Z \in (0, 1)^{\mathfrak{T}}].$$

Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ становится *абелевой группой.*

Более общо, $\mathfrak{F}(C)$ станет абелевой группой, если считать, что μ_0, μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathfrak{F}(C)$, и заменить $(0, 1)^{\mathfrak{T}}$ в (1) на $A(C)$. Очевидно, что

$(\mu_0 = \mu_1 + \mu_2) \equiv [(\mu_0 | A(C)) = (\mu_1 | A(C)) + (\mu_2 | A(C))$ для каждого $C]$;

легко показать, что имеет место следующее утверждение (ср. также п. I).

Теорема 1. *Следующие отображения представляют собой гомоморфизмы:*

$$\varphi_Z\colon \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathcal{G}, \quad \sigma_C\colon \mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{F}(C), \quad \sigma_{C_0C_1}\colon \mathfrak{F}(C_1) \to \mathfrak{F}(C_0).$$

Из последнего утверждения вытекает (см. § 55, VII и теорему 1 п. I, согласно которой отображение σ взаимно однозначно) следующая

Теорема 1′.

$$\mathfrak{M}(\mathcal{X}) \underset{\text{нг}}{=} \underset{C_1,\, C_0 \leq C_1}{\operatorname{Lim}} \{\mathfrak{F}(C),\ \sigma_{C_0C_1}\}.$$

Именно, отображение $\sigma = \{\sigma_C\}$, *где* $\sigma_C(\mu) = \mu | A(C)$, *представляет собой искомый изоморфизм.*

Имеет место также следующая

Теорема 2. $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ — *топологическая группа.*

Другими словами, сложение, определяемое по формуле (1), и вычитание непрерывны (относительно топологии, определяемой в соответствии с I (1)).

Определение. Пусть Q — квазикомпонента пространства $\mathcal{X}$ и

(2) $$a_Q(Z) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q \subset Z, \\ 0, & \text{если } Q \cap Z = 0. \end{cases}$$

Тогда a_Q называется *характеристической мерой* Q.

Лемма. $\alpha_Q \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$.

Доказательство. Всякое открыто-замкнутое подмножество Z пространства $\mathcal{X}$, такое, что $Q \cap Z \neq 0$, удовлетворяет условию $Q \subset Z$; поэтому формула (2) определяет функцию α_Q для каждого Z. Более того, функция α_Q вполне аддитивна, ибо если $Q \subset Z = \bigcup_t Z_t$, где множества Z_t не пересекаются, то существует единственное Z_{t_0}, содержащее Q, а все остальные Z_t не пересекаются с Q; следовательно, равенство I (0) выполняется.

Теорема 3. *Если квазикомпоненты $Q_1, \ldots, Q_m$ попарно различны, то их характеристические меры линейно независимы, т. е.*

$$(3) \quad (k_1\alpha_{Q_1} + \ldots + k_m\alpha_{Q_m} = 0) \Rightarrow (k_1 = 0, \ldots, k_m = 0).$$

Доказательство. По предположению существуют такие непересекающиеся открыто-замкнутые множества $Z_1, \ldots, Z_m$, что $Q_i \subset Z_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что правая часть импликации (3) не имеет места, например пусть $k_1 \neq 0$. Так как $\alpha_{Q_1}(Z_1) = 1$ и $\alpha_{Q_i}(Z_1) = 0$ для $i > 1$, то

$$k_1\alpha_{Q_1}(Z_1) + \ldots + k_m\alpha_{Q_m}(Z_1) = k_1.$$

Следовательно, левая часть импликации (3) также не имеет места.

Теорема 4. *Если компоненты пространства $\mathcal{X}$ открыты (в частности, если $\mathcal{X}$ локально связно), то их характеристические меры являются образующими группы $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$.*

Более общо, *если $C = \{Z_t\} \in \mathbf{R}(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — произвольное пространство, и если $Q_t \subset Z_t$, где Q_t — квазикомпонента $\mathcal{X}$, то функции $\gamma_{Q_t} = (\alpha_{Q_t} \mid A(C))$ являются образующими группы $\mathfrak{F}(C)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathfrak{F}(C)$. Положим $k_t = \mu(Z_t)$. Мы должны показать, что

$$(4) \quad \mu = \sum_t k_t\gamma_{Q_t}, \quad \text{т. е. что} \quad \mu(Z_t) = \sum_s k_s\alpha_{Q_s}(Z_t) \quad \text{для всех } t$$

(сумма конечна, так как существует только конечное число ненулевых k_t).

Согласно (2), $\alpha_{Q_t}(Z_t) = 1$ и $\alpha_{Q_s}(Z_t) = 0$ для $s \neq t$, следовательно,

$$\sum_s k_s\alpha_{Q_s}(Z_t) = k_t\alpha_{Q_t}(Z_t) = k_t = \mu(Z_t).$$

Отсюда следует первая часть теоремы 4 для $C=\mathscr{X}$, ибо

$$A(C)=(0,\ 1)^{\mathscr{X}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{J}(C)=\mathfrak{M}(\mathscr{X}).$$

Из теорем 3 и 4 немедленно вытекает следующая

Теорема 5. *Если пространство $\mathscr{X}$ имеет конечное число, скажем m, компонент, то группа $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ изоморфна группе $\mathscr{G}^m$, т. е.*

$$(5) \qquad \mathfrak{M}(\mathscr{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathscr{G}^m.$$

Если компоненты пространства $\mathscr{X}$ открыты и семейство компонент счетно, то

$$(5') \qquad \mathfrak{M}(\mathscr{X}) \underset{\text{gr}}{=} \mathscr{G}^\omega$$

($\mathscr{G}^\omega$ — группа бесконечных последовательностей целых чисел, каждая из которых состоит только из конечного числа ненулевых членов).

Из теоремы 4 выведем следующее важное утверждение:

Теорема 6. *Пусть $\{Q_s\}$ — такое семейство квазикомпонент (произвольного) пространства $\mathscr{X}$, что*

$$(6) \qquad Q \cap \overline{\bigcup_s Q_s} \neq 0$$

для всех квазикомпонент Q пространства $\mathscr{X}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — подгруппа группы $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$, порожденная мерами α_{Q_s} (т. е. $\mathfrak{A}$ — множество их линейных комбинаций); тогда

$$(7) \qquad \overline{\mathfrak{A}}=\mathfrak{M}(\mathscr{X}).$$

Доказательство. Пусть $C=\{Z_t\}\in \mathsf{R}(\mathscr{X})$. Пусть Q_t — квазикомпонента $\mathscr{X}$ и $Q_t\subset Z_t$. Согласно (6), $Z_t\cap \bigcup\limits_s Q_s\neq 0$. Поэтому существует (так как множество Z_t открыто) число $s(t)$, такое, что $Z_t\cap Q_{s(t)}\neq 0$, и, следовательно, такое, что $Q_{s(t)}\subset Z_t$. Отсюда на основании теоремы 4 следует, что функции $\alpha_{Q_{s(t)}}\,|\,A(C)$ являются образующими группы $\mathfrak{J}(C)$, и, следовательно, $\mathfrak{J}(C)\subset \subset(\mathfrak{A}\,|\,A(C))$.

Поэтому $(\mu\,|\,C)\in(\mathfrak{A}\,|\,C)$ для всех $\mu\in\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ и, согласно I (1), $\mu\in\overline{\mathfrak{A}}$.

Следствие 7. *Если пространство $\mathscr{X}$ сепарабельно, то и пространство $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ сепарабельно.*

Действительно, при этом предположении индекс s в теореме 6 можно считать целым положительным числом; поэтому множество $\mathfrak{A}$ счетно.

Теорема 8. *Если $\mathscr{X}$ — компактное пространство, имеющее бесконечное множество компонент, то*

$$\mathfrak{M}(\mathscr{X}) \underset{\text{gr. top.}}{=} \mathscr{G}^{\aleph_0}, \tag{8}$$

т. е. существует изоморфизм $\varkappa$ группы $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ на (аддитивную) группу $\mathscr{G}^{\aleph_0}$, являющийся в то же время гомеоморфизмом.

Доказательство. При доказательстве того, что $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ изоморфна $\mathscr{G}^{\aleph_0}$, мы воспользуемся леммой п. 0[1]). Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathscr{X}(=\mathfrak{F}) \subset \mathscr{I}$ бесконечно, нигде не плотно и замкнуто (ср. п. 0). Вновь рассмотрим множества $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ из леммы и расположим все множества $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}$ (где $n \geqslant 0$) в бесконечную последовательность $A_1, A_2, \dots$. Положим $A_0 = \mathscr{X}$.

Для $\mu \in \mathfrak{M}(\mathscr{X})$ положим

(9) $\varkappa(\mu) = \{\mu(A_0), \mu(A_1), \dots\}$, следовательно, $\varkappa$: $\mathfrak{M}(\mathscr{X}) \to \mathscr{G}^{\aleph_0}$.

Покажем, что $\varkappa$ — искомый изоморфизм.

Во первых, $\varkappa$ — гомоморфизм, ибо

$$\varkappa(\mu_1+\mu_2) = \{\mu_1(A_0)+\mu_2(A_0), \mu_1(A_1)+\mu_2(A_1), \dots\} = \varkappa(\mu_1)+\varkappa(\mu_2).$$

Ясно, что из условия $\varkappa(\mu) = \{0, 0, \dots\}$ вытекает $\mu(A_m) = 0$ для $m = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $\mu(Z) = 0$ для любого открыто-замкнутого подмножества Z пространства $\mathscr{X}$.

Очевидно, достаточно показать, что $\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) = 0$. Применим индукцию. Так как $\mathscr{X} = A_0$, то $\mu(\mathscr{X}) = 0$, а так как $\mu(F_0) = 0$, то $\mu(F_1) = 0$. Далее, предположим, что $\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) = 0$ и $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ содержит более одной точки; тогда

$$\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}) + \mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 1}) = 0,$$

а так как $F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}$ принадлежит последовательности $\{A_m\}$, то

$$\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}) = 0 = \mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 1}).$$

Остается показать, что для каждой последовательности целых чисел $k_0, k_1, \dots$ существует $\mu \in \mathfrak{M}(\mathscr{X})$, такая, что

$$\mu(A_m) = k_m \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \dots. \tag{9'}$$

Так как функция μ определена для $Z = A_m$ (согласно (9')), то $\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 1})$ можно определить по индукции (относительно n) следующим образом:

$$\mu(F_1) = \mu(A_0) - \mu(F_0)$$

и

$$\mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 1}) = \mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n}) - \mu(F_{\alpha_1 \dots \alpha_n 0}). \tag{9''}$$

---

[1]) Это доказательство принадлежит А. Мостовскому.

Наконец, если Z — объединение некоторых множеств порядка n (n — наименьшее возможное), $Z = P_1 \cup \ldots \cup P_r$, то мы полагаем

$$\mu(Z) = \mu(P_1) + \ldots + \mu(P_r), \quad \text{причем} \quad \mu(0) = -\mu(A_0).$$

Из (9″) следует, что если $P_1 = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0} \cup F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1}$, то

$$\mu(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 0}) + \mu(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_n 1}) + \mu(P_2) + \ldots + \mu(P_r) = \mu(F).$$

Следовательно, если Z представлено в виде объединения множеств порядка $n+1$ (или, более общо, порядка $p > n$) $Z = R_1 \cup \ldots \cup R_s$, то

$$\mu(R_1) + \ldots + \mu(R_s) = \mu(F).$$

Отсюда следует, что функция μ аддитивна, т. е. $\mu \in \mathfrak{M}(\mathscr{X})$.

Таким образом, доказано, что $\varkappa$ — (алгебраический) *изоморфизм* $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ на $\mathscr{G}^{\aleph_0}$.

Теперь покажем, что $\varkappa$ — *гомеоморфизм*, т. е. что

$$\left(\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_k\right) \equiv \left[\varkappa(\mu) = \lim_{k\to\infty} \varkappa(\mu_k)\right],$$

или (ср. (9))

$$(10) \quad \left(\mu = \lim_{k\to\infty} \mu_k\right) \equiv \left[\mu(A_m) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A_m) \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \ldots\right].$$

Импликация слева направо является следствием непрерывности φ_Z (где $\varphi_Z(\mu) = \mu(Z)$) при фиксированном Z (ср. с теоремой 3 п. I).

С другой стороны, предположим, что справедлива правая часть соотношения (10). Тогда все сводится к тому, чтобы показать (ср. I (7)), что для каждого $Z \in (0, 1)^{\mathfrak{r}}$

$$(11) \qquad \mu(Z) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(Z).$$

Более того, так как μ аддитивна, можно считать, что множества Z имеют вид $Z = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$.

Так как равенство (11) выполняется при $m = 0$, т. е. при $Z = \mathscr{X} = A_0$, то можно применить индукцию и предположить, что оно выполняется для некоторого $m \geqslant 0$. Тогда $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 1} = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} - F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 0}$, и, следовательно,

$$\mu(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 1}) = \mu(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}) - \mu(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 0}),$$
$$\mu_k(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 1}) = \mu_k(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}) - \mu_k(F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 0}).$$

В пределе мы получим равенство (11) для $Z = F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 1}$, так как $F_{\alpha_1 \ldots \alpha_m 0}$ — член последовательности $A_0, A_1, \ldots$ (и, следовательно, по предположению удовлетворяет равенству (11)).

III. Нормированные меры.

Определение. Мера $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ называется *нормированной*, если $\mu(\mathcal{X}) = 1$; $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ обозначает *множество нормированных мер.*

Очевидно, $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ можно отождествить с факторгруппой $\mathfrak{M}(\mathcal{X})/\mathcal{S}$ (где $\mathcal{S}$ обозначает группу постоянных мер)[1]).

Легко видеть, что $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ — *подгруппа* группы $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ и *замкнутое подмножество* пространства $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ (так как отображение φ_x: $\mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}$ непрерывно; ср. с теоремой 3 п. I).

Теорема 1. *Пусть* ∞ — *фиксированная точка пространства* $\mathcal{X}$[2]). *Положим для* $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$

$$(1) \qquad \mu^*(Z) = \begin{cases} \mu(Z), & \text{если} \quad \infty \in \mathcal{X} - Z, \\ \mu(Z) - \mu(\mathcal{X}), & \text{если} \quad \infty \in Z. \end{cases}$$

Тогда μ^*: $\mathfrak{M}(\mathcal{X}) \to \mathfrak{N}(\mathcal{X})$ — *гомоморфизм и непрерывная ретракция.*

Доказательство. Очевидно, $\mu^*(\mathcal{X}) = 0$. Далее, предположим, что $Z = \bigcup\limits_t Z_t$, где множества Z_t не пересекаются. Покажем, что $\mu^*(Z) = \sum\limits_t \mu^*(Z_t)$. Это очевидно, если $\infty \in \mathcal{X} - Z$. Поэтому предположим, что $\infty \in Z_{t_0}$. Тогда

$$\mu^*(Z) - \mu^*(Z_{t_0}) = \mu(Z) - \mu(Z_{t_0}) = \mu\Bigl(\sum_{t \neq t_0} Z_t\Bigr) =$$
$$= \sum_{t \neq t_0} \mu(Z_t) = \sum_{t \neq t_0} \mu^*(Z_t),$$

откуда следует требуемое равенство.

Таким образом, установлено, что $\mu^* \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$. Очевидная импликация

$$[\mu_1(Z) + \mu_2(Z) = \mu_3(Z)] \Rightarrow [\mu_1^*(Z) + \mu_2^*(Z) = \mu_3^*(Z)]$$

показывает, что μ^* — гомоморфизм.

Наконец, покажем, что μ^* непрерывно. Пусть $\mu \in \overline{\mathfrak{Z}}$, где $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{X})$; покажем, что $\mu^* \in \overline{\mathfrak{Z}^*}$, т. е. что $\mu^* \mid \boldsymbol{C} \in \mathfrak{Z}^* \mid \boldsymbol{C}$. По предположению $\mu \mid \boldsymbol{C} \in \mathfrak{Z} \mid \boldsymbol{C}$, т. е. существует $\mu_C \in \mathfrak{Z}$, такое, что

$\mu_C \mid \boldsymbol{C} = \mu \mid \boldsymbol{C}$, откуда $\mu_C^* \mid \boldsymbol{C} = \mu^* \mid \boldsymbol{C}$, следовательно, $\mu^* \mid \boldsymbol{C} \in \mathfrak{Z}^* \mid \boldsymbol{C}$ (ибо $\mu_C^* \in \mathfrak{Z}^*$).

---

[1]) Как показал Николаишвили [1], группа $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ изоморфна группе гомологий Александрова — Чеха $H_0(\mathcal{X})$.

[2]) Это обозначение мотивируется приложениями, рассматриваемыми в § 60.

Запишем кратко

$$\beta_Q = \alpha^*_Q. \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$\textit{если} \quad \infty \in Q, \quad \textit{то} \quad \beta_Q = 0, \tag{3}$$

а если $\infty \in \mathcal{X} - Q$, то

$$\beta_Q(Z) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad Q \subset Z \quad \text{и} \quad \infty \in \mathcal{X} - Z, \\ 0, & \text{если} \quad Q \subset Z \quad \text{и} \quad \infty \in Z \\ & \text{или} \quad Q \cap Z = 0 \quad \text{и} \quad \infty \in \mathcal{X} - Z, \\ -1, & \text{если} \quad Q \cap Z = 0 \quad \text{и} \quad \infty \in Z. \end{cases} \tag{4}$$

Из теорем 3—8 п. II вытекают следующие утверждения:

Теорема 2. *Если квазикомпоненты $Q_0, \ldots, Q_m$ пространства $\mathcal{X}$ различны и $\infty \in Q_0$, то меры $\beta_{Q_1}, \ldots, \beta_{Q_m}$ линейно независимы.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3 п. II.

Теорема 3. *Пусть $\{Q_t\}$ — семейство компонент пространства $\mathcal{X}$ и $\infty \in Q_0$. Если эти компоненты открыты, то меры β_{Q_t} при $t \neq 0$ являются образующими группы $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Так как операция μ^* — гомоморфизм $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ на $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$, то теорема 3 следует из теоремы 4 п. II.

Теорема 4. *Если пространство $\mathcal{X}$ имеет $m+1$ компонент, то*

$$\mathfrak{N}(\mathcal{X}) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathcal{G}^m. \tag{5}$$

Если $\mathcal{X}$ компактно и имеет бесконечное множество компонент, то $\mathfrak{N}(\mathcal{X}) = \mathcal{G}^{\aleph_0}$.

Теорема 5. *При предположениях теоремы 6 п. II подгруппа $\mathfrak{B}$ группы $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$, порождаемая мерами β_{Q_s}, всюду плотна в $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$.*

Действительно, операция μ^* непрерывна.

Теорема 6. *Если пространство $\mathcal{X}$ сепарабельно, то $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$ также сепарабельно.*

Теорема 7. *Теорема 8 п. II остается верной, если $\mathfrak{M}(\mathcal{X})$ заменить на $\mathfrak{N}(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Достаточно вычеркнуть член $\mu(A_0)$ в формуле (9) п. II.

Теорема 8. *Если $\mathcal{X}$ — компактное пространство, имеющее бесконечную последовательность компонент $Q_0, Q_1, \ldots$, которые все, за исключением Q_0, открыты, то любую меру $\mu \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$ можно разложить в бесконечный ряд*

$$(6) \qquad \mu = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\beta_i, \quad \textit{где} \quad k_i = \mu(Q_i) \quad \textit{и} \quad \beta_i = \beta_{Q_i}.$$

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathfrak{N}(\mathcal{X})$ и $\mu_j = k_1\beta_1 + \ldots + k_j\beta_j$. Покажем, что $\mu = \lim\limits_{j\to\infty} \mu_j$ и, следовательно, что (ср. I (7)) если Z — данное открыто-замкнутое множество, то

$$(7) \qquad \mu Z = \lim_{j\to\infty} \mu_j(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\beta_i(Z).$$

Легко видеть, что либо Z имеет вид

$$Z = Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_s} \text{ (где } 0 < i_1 < \ldots < i_s),$$

либо этот вид имеет $\mathcal{X} - Z$ (в зависимости от того, какое из соотношений: $Q_0 \cap Z = 0$ или $Q_0 \subset Z$ имеет место). В первом случае

$$\mu(Z) = \mu\left(Q_{i_1}\right) + \ldots + \mu\left(Q_{i_s}\right) = k_{i_1}\beta_{i_1}(Z) + \ldots + k_{i_s}\beta_{i_s}(Z),$$

откуда получается (7), так как для индекса i', отличного от индексов $i_1, \ldots, i_s$, мы имеем $\beta_{i'}(Z) = 0$; во втором случае

$$\mu(\mathcal{X} - Z) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\beta_i(\mathcal{X} - Z),$$

следовательно,

$$\mu(Z) = -\mu(\mathcal{X} - Z) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\beta_i(Z),$$

так как $\beta_i(\mathcal{X} - Z) + \beta_i(Z) = \beta_i(\mathcal{X}) = 0$.

IV. Продолжение мер. В этом пункте мы предполагаем, что *$\mathcal{Y}$ — метрическое локально связное пространство, содержащее $\mathcal{X}$*.

Определение. Пусть $\mu^{\mathcal{Y}}$ обозначает *продолжение* меры $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, определенное следующим образом:

(1) $\quad \mu^{\mathcal{Y}}(H) = \mu(\mathcal{X} \cap H)$ для любого $H \in (0, 1)^{\mathcal{Y}}$.

Теорема 1. $\mu^{\mathcal{Y}} \in \mathfrak{M}(\mathcal{Y})$.

Доказательство. Пусть $H = \bigcup_t H_t$, где H_t не пересекаются. Тогда

$$\mu^{\mathscr{Y}}\left(\bigcup_t H_t\right) = \mu\left(\mathscr{X} \cap \bigcup_t H_t\right) = \mu\left(\bigcup_t (\mathscr{X} \cap H_t)\right) = \\ = \sum_t \mu(\mathscr{X} \cap H_t) = \sum_t \mu^{\mathscr{Y}}(H_t).$$

Напомним, что $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{Y}}$ по определению (см. § 1, VII) обозначает семейство множеств $\mathscr{X} \cap Q$, где Q — компонента $\mathscr{Y}$. Так как каждое множество $H \in (0, 1)^{\mathscr{Y}}$ порождается компонентами $\mathscr{Y}$, то, согласно (1),

$$\bigwedge_{Z \in \boldsymbol{Q}_{\mathscr{Y}}} [\mu_0(Z) = \mu_1(Z)] \equiv \bigwedge_H [\mu_0(\mathscr{X} \cap H) = \mu_1(\mathscr{X} \cap H)] \equiv \\ \equiv \bigwedge_H \left[\mu_0^{\mathscr{Y}}(H) = \mu_1^{\mathscr{Y}}(H)\right];$$

поэтому

$$\text{(2)} \qquad \left[(\mu_0 \,|\, \boldsymbol{Q}_{\mathscr{Y}}) = (\mu_1 \,|\, \boldsymbol{Q}_{\mathscr{Y}})\right] \equiv (\mu_0^{\mathscr{Y}} = \mu_1^{\mathscr{Y}}).$$

Теорема 2. *При тех же предположениях*

(3) $(\mu_0 = \mu_1) \equiv \left[(\mu_0^G = \mu_1^G)\right.$ *для каждого открытого* G, *такого, что* $\left.\mathscr{X} \subset G \subset \mathscr{Y}\right]$;

$$\text{(4)} \qquad (\mu \in \overline{\mathfrak{Y}}) \equiv \bigwedge_G (\mu^G \in \mathfrak{Y})^G).$$

Доказательство. Соотношение (3) следует непосредственно из (2) и I (6), а (4) получается, если применить (2) и I (5):

$$(\mu \in \overline{\mathfrak{Y}}) \equiv \bigwedge_G [(\mu \,|\, \boldsymbol{Q}_G) \in (\mathfrak{Y} \,|\, \boldsymbol{Q}_G)] \equiv \\ \equiv \bigwedge_G \bigvee_{\mu_1} (\mu_1 \in \mathfrak{Y}) [(\mu_1 \,|\, \boldsymbol{Q}_G) = (\mu \,|\, \boldsymbol{Q}_G)] \equiv \\ \equiv \bigwedge_G \bigvee_{\mu_1} (\mu_1 \in \mathfrak{Y})(\mu_1^G = \mu^G) \equiv \bigwedge_G (\mu^G \in \mathfrak{Y})^G).$$

Теорема 3. *Продолжение* $\mu^{\mathscr{Y}}$ *является непрерывным гомоморфизмом* $\mathfrak{M}(\mathscr{X})$ *в* $\mathfrak{M}(\mathscr{Y})$.

Доказательство. Непрерывность $\mu^{\mathscr{Y}}$ следует непосредственно из (4); $\mu^{\mathscr{Y}}$ — гомоморфизм, так как

$$(\mu_0 + \mu_1)^{\mathscr{Y}}(H) = (\mu_0 + \mu_1)(\mathscr{X} \cap H) = \\ = \mu_0(\mathscr{X} \cap H) + \mu_1(\mathscr{X} \cap H) = \mu_0^{\mathscr{Y}}(H) + \mu_1^{\mathscr{Y}}(H).$$

Теорема 4. *Предыдущее отображение представляет собой непрерывный гомоморфизм* $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ *в* $\mathfrak{N}(\mathscr{Y})$.

Действительно, $\mu^{\mathscr{Y}}(\mathscr{X}) = \mu(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y}) = \mu(\mathscr{X})$.

Теорема 5. *Если G — открытое множество в $\mathcal{Y}$, такое, что $\mathcal{X} \subset G \subset \mathcal{Y}$, то для каждого $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$*

$$(5) \qquad (\mu^G)^{\mathcal{Y}} = \mu^{\mathcal{Y}}.$$

Доказательство. Пусть $H \in (0, 1)^{\mathcal{Y}}$. Тогда, согласно теореме 1, $\mu^G \in \mathfrak{M}(G)$, а в силу (1)

$$(\mu^G)^{\mathcal{Y}}(H) = \mu^G(G \cap H) = \mu(\mathcal{X} \cap G \cap H) = \mu(\mathcal{X} \cap H) = \mu^{\mathcal{Y}}(H).$$

Теорема 6. *Если каждому множеству G, открытому в $\mathcal{Y}$ и содержащему $\mathcal{X}$, поставлена в соответствие мера $\nu_G \in \mathfrak{M}(G)$ таким образом, что*

$$(6) \qquad \nu_{G_0}^{G_1} = \nu_{G_1} \text{ при условии } G_0 \subset G_1,$$

то существует мера $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$, такая, что

$$(7) \qquad \mu^G = \nu_G \text{ для каждого } G.$$

Доказательство. Пусть Z — фиксированное множество, открыто-замкнутое в $\mathcal{X}$. Пусть H и H^* — два непересекающихся открытых в $\mathcal{Y}$ множества, таких, что $Z = \mathcal{X} \cap H$ и $\mathcal{X} - Z = \mathcal{X} \cap H^*$. Положим $G = H \cup H^*$. Тогда $H \in (0, 1)^G$. Положим по определению

$$(8) \qquad \mu(Z) = \nu_G(H).$$

Прежде всего покажем, что это определение корректно (т. е. не зависит от выбора H и H^* при фиксированном Z), а затем — что мера μ, определенная таким образом, является искомой, т. е. $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ и выполняется условие (7).

С этой целью предположим, что G_1 и G_2 — два множества, содержащих $\mathcal{X}$ и таких, что

$$(9) \qquad H_1 \in (0, 1)^{G_1}, \quad H_2 \in (0, 1)^{G_2} \quad \text{и} \quad \mathcal{X} \cap H_1 = \mathcal{X} \cap H_2.$$

Покажем, что

$$(10) \qquad \nu_{G_1}(H_1) = \nu_{G_2}(H_2).$$

Пусть G_0 — объединение компонент множества $G_1 \cap G_2$, пересекающихся с $\mathcal{X}$. Согласно (6),

$$\nu_{G_0}^{G_1} = \nu_{G_1} \quad \text{и} \quad \nu_{G_0}^{G_2} = \nu_{G_2},$$

откуда (согласно (1), если заменить там μ на ν_{G_0} и $\mathcal{Y}$ на G_1 и G_2 соответственно)

$$\nu_{G_1}(H_1) = \nu_{G_0}^{G_1}(H_1) = \nu_{G_0}(G_0 \cap H_1),$$
$$\nu_{G_2}(H_2) = \nu_{G_0}^{G_2}(H_2) = \nu_{G_0}(G_0 \cap H_2).$$

Следовательно, равенство (10) вытекает из равенства $G_0 \cap H_1 = G_0 \cap H_2$. Теперь предположим, что $G_0 \cap H_1 - H_2 \neq 0$; тогда это множество содержит (по крайней мере) одну компоненту множества G_0 (как открыто-замкнутое подмножество G_0); поскольку эта компонента пересекается с $\mathscr{X}$, то $\mathscr{X} \cap G_0 \cap H_1 - H_2 \neq 0$, что противоречит (9).

Теперь покажем, что μ вполне аддитивна. Положим $Z_0 = \mathscr{X} - Z$ и $Z = \bigcup\limits_t Z_t$, где Z_t не пересекаются и открыты в $\mathscr{X}\,(t \neq 0)$. Таким образом, существует (ср. с теоремой 2 из § 21, XI) семейство $\{H_t\}$ (где t может принимать значение 0) непересекающихся множеств, открытых в $\mathscr{Y}$ и таких, что $\mathscr{X} \cap H_t = Z_t$. Пусть $G = \bigcup\limits_t H_t$. Тогда $\mathscr{X} \subset G$ и $H_t \in (0, 1)^G$. Согласно (8),

$$\mu(Z) = \nu_G\Big(\bigcup_{t \neq 0} H_t\Big) = \sum_{t \neq 0} \nu_G(H_t) = \sum_{t \neq 0} \mu(Z_t).$$

Наконец, справедливо равенство (7), т. е.

$$\mu^G(H) = \nu_G(H) \text{ для каждого } H \in (0, 1)^G.$$

Действительно, пусть $Z = \mathscr{X} \cap H$; согласно (1) и (8),

$$\mu^G(H) = \mu(\mathscr{X} \cap H) = \mu(Z) = \nu_G(H).$$

С л е д с т в и е 7. *Если $\nu_G \in \mathfrak{N}(G)$ и выполнены условия предыдущей теоремы, то функция μ, определенная условием* (8), *принадлежит $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (8), $\mu(\mathscr{X}) = \nu_G(G) = 0$.

Т е о р е м а 8. *Пусть $\mathrm{ext}_{G_0G_1}$ — операция продолжения, определенная для каждой пары $G_0 \supset G_1$ следующим образом:*

$$(11) \qquad \mathrm{ext}_{G_0G_1}(\nu) = \nu^{G_0} \quad \textit{для каждого} \quad \nu \in \mathfrak{M}(G_1).$$

Так как семейство множеств G, открытых в $\mathscr{Y}$ и таких, что $G \supset \mathscr{X}$, направлено по отношению $G_0 \supset G_1$, то множество $\mathfrak{M}(G)$ и отношения $\mathrm{ext}_{G_0G_1}$ образуют обратный спектр.

Заметим, что

$$\mathrm{ext}_{G_0G_1}[\mathrm{ext}_{G_1G_2}(\nu)] = \mathrm{ext}_{G_0G_1}(\nu^{G_1}) = (\nu^{G_1})^{G_0} = \nu^{G_0} = \mathrm{ext}_{G_0G_2}(\nu),$$

согласно теореме 5 и (11).

Поэтому из теоремы 6 вытекает следующая

Т е о р е м а 9. $\mathfrak{M}(\mathscr{X}) \underset{\text{gr. top.}}{=} \underset{G,\, G_0 \supset G_1}{\mathrm{Lim}} \{\mathfrak{M}(G), \mathrm{ext}_{G_0G_1}\}$, *где G открыто и $\mathscr{X} \subset G \subset \mathscr{Y}$.*

Искомый изоморфизм, являющийся в то же время гомеоморфизмом, получится, если каждой $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{X})$ поставить в соответствие элемент

$$\{\mu^G\} \in \prod_G \mathfrak{M}(G).$$

Теорема 10. *Теорема* 9 *остается справедливой, если* $\mathfrak{M}$ *заменить на* $\mathfrak{N}$.

Это утверждение вытекает из следствия 7.

ГЛАВА 9

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕСВЯЗНОСТИ СФЕРЫ $\mathcal{S}_n$

§ 59. Качественные проблемы

I. Ломаные в $\mathcal{E}^n$. Всякая дуга, состоящая из конечного числа прямолинейных сегментов, называется *ломаной*.

Теорема 1. *Любую пару точек области $R \subset \mathcal{E}^n$ можно соединить в R ломаной.*

Доказательство. Пусть p — фиксированная точка области R. Мы должны показать, что множество P точек, которые можно соединить с точкой p ломаной, содержащейся в R, открыто-замкнуто в R (и, следовательно, совпадает с R). Но это очевидное следствие того факта, что если точки x и y принадлежат (n-мерному) шару, содержащемуся в R, и если одна из них принадлежит P, то и другая точка тоже принадлежит P.

Лемма 2. *Пусть c — фиксированное число, такое, что $0 < c < 1$. Пусть R_1 — прямоугольник $c - 1 \leqslant x \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1 - c$, R_c — прямоугольник $c(c-1) \leqslant x \leqslant c$, $|y| \leqslant c(1-c)$, L — сегмент $0 \leqslant x \leqslant c$ оси X, и пусть M и N — сегменты, соединяющие точку* (0, 0) *соответственно с границей F_c области R_c и границей F_1 области R_1 и составляющие с осью X данный угол θ или $\theta + \pi$, где $0 < \theta < \pi$. Тогда существует гомеоморфизм h, такой, что*

$$h(R_1) = R_1, \quad h(L) = M \quad \text{и} \quad h(x, y) = (x, y) \quad \text{для} \quad (x, y) \in F_1 \cup N.$$

Доказательство. Пусть φ — возрастающая непрерывная функция, такая, что

$$(1) \qquad \varphi(0) = \theta, \quad \varphi(\theta + \pi) = \theta + \pi, \quad \varphi(2\pi) = \theta + 2\pi.$$

Рассмотрим функцию g, определенную следующим образом:

$$(2) \quad g(\alpha, u) = \begin{cases} \varphi(\alpha) & \text{для} \quad 0 \leqslant u \leqslant c, \\ \dfrac{1}{1-c}\left[\alpha(u-c) + \varphi(\alpha)(1-u)\right] & \text{для} \quad c \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко показать, что

(i) $g(2\pi, u) - g(0, u) = 2\pi$;

(ii) $g(\alpha, u)$ — возрастающая функция от α при фиксированном u;

(iii) $g(\alpha, 0) = \varphi(\alpha)$, $g(\alpha, 1) = \alpha$;

(iv) $g(\theta + \pi, u) = \theta + \pi$.

Пусть вообще R_u обозначает прямоугольник

$$u(c-1) \leqslant x \leqslant u, \quad |y| \leqslant u(1-c),$$

и пусть F_u — его граница (рис. 15). Тогда

(3) $\quad R_1 = \bigcup\limits_{0 \leqslant u \leqslant 1} F_u, \quad$ где $\quad F_u \cap F_{u'} = 0 \quad$ для $\quad u \neq u'$.

Функция h определяется следующим образом. Пусть (x, y) — точка области R_1, отличная от начала, α — ее аргумент $\left(= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right)$

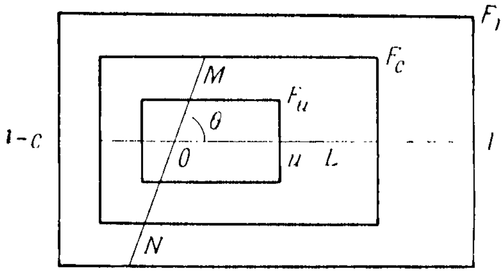

Рис. 15

и $(x, y) \in F_u$. Пусть $h(x, y)$ — точка множества F_u с аргументом $g(\alpha, u)$. Кроме того, будем считать, что $h(0, 0) = (0, 0)$.

Из (ii) и (i) следует, что h — гомеоморфизм F_u на F_u и, следовательно (на основании (3)), R_1 на R_1.

Далее, $h(L) = M$, так как $\alpha = 0$ и $u \leqslant c$ для $(x, y) \in L$. Поэтому, согласно (2), $g(0, u) = \varphi(0) = \theta$ в силу (1).

Наконец, если $(x, y) \in F_1$, то $u = 1$, следовательно, $g(\alpha, 1) = \alpha$ на основании (iii), откуда вытекает, что $h(x, y) = (x, y)$.

Это же равенство выполняется, если $(x, y) \in N$, ибо в этом случае $\alpha = \theta + \pi$, откуда $g(\alpha, u) = \alpha$ на основании (iv).

Обобщенная лемма 3. *Пусть P есть n-мерный прямоугольник в $\mathscr{E}^n$:*

$$c - 1 \leqslant x_1 \leqslant 1, \quad |x_2| \leqslant 1 - c, \; \ldots, \; |x_n| \leqslant 1 - c.$$

Пусть L, M и N имеют тот же смысл, что и в лемме 2 (если заменить там x на x_1, а y на x_2). Тогда существует гомеоморфизм f, такой, что

$$f(P)=P, \quad f(L)=M \quad и \quad f(x)=x \quad для \quad x \in \mathrm{Fr}(P) \cup N$$

(x *означает точку* $(x_1, \ldots, x_n)$).

Доказательство. Пусть v_x — наибольшее из $n-1$ чисел

$$u, \quad |x_3|:(1-c), \ \ldots, \ |x_n|:(1-c),$$

где u определяется условием $(x_1, x_2) \in F_u$.

Точка $(y_1, \ldots, y_n)=f(x_1, \ldots, x_n)$ определяется следующим образом: (y_1, y_2) — точка F_u, аргумент которой равен $g(\alpha, v_x)$, где α — аргумент (x_1, x_2); кроме того, $y_3=x_3, \ldots, y_n=x_n$; наконец, $f(0)=0$.

Пусть задана система из $n-2$ чисел $x_3^0, \ldots, x_n^0$; через $P_{x_3^0 \ldots x_n^0}$ обозначим сечение P, состоящее из точек $x_1, \ldots, x_n$, таких, что $x_3=x_3^0, \ldots, x_n=x_n^0$.

Множество точек $P_{x_3^0 \ldots x_n^0}$, таких, что $(x_1, x_2) \in F_u$ (где u задано заранее), будем обозначать через $P_{x_3^0 \ldots x_n^0 u}$.

Легко видеть, что v_x постоянно, когда x пробегает множество $P_{x_3^0 \ldots x_n^0 u}$. Следовательно (ср. (i) и (ii)), f есть гомеоморфизм этого множества на себя. С другой стороны,

$$P=\bigcup P_{x_3 \ldots x_n u},$$

где объединение берется по всем таким системам $x_3 \ldots x_n u$, что

$$|x_3| \leqslant 1-c, \ \ldots, \ |x_n| \leqslant 1-c, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Так как члены этого объединения не пересекаются, то f — гомеоморфизм, такой, что $f(P)=P$.

На плоскости X_1X_2 выполняется равенство $v_x=u$, так что функция f совпадает с h. Поэтому $f(L)=M$ и $f(x)=x$ для $x \in N$.

Наконец, пусть $x \in \mathrm{Fr}(P)$. Покажем, что $f(x)=x$. Граница P состоит из таких точек x, что $(x_1, x_2) \in F_1$, а также из точек x, для которых либо $|x_3|=1-c, \ldots,$ либо $|x_n|=1-c$. Если $(x_1, x_2) \in F_1$, то $u=1$, откуда $v_x=1$ и, следовательно, $f(x)=x$, согласно (iii). К такому же заключению мы приходим, если $|x_j|=1-c$ для индекса $j \geqslant 3$.

Теорема 4 [1]). *В $\mathscr{E}^n$ все ломаные топологически эквивалентны; это означает, что для любой пары ломаных существует*

---

[1]) Обобщение этой теоремы на произвольные дуги (для $n=2$) см. в § 60 V, теорема 2.

гомеоморфизм $\mathscr{E}^n$ на $\mathscr{E}^n$, отображающий одну из этих ломаных на другую.

Доказательство. Применим индукцию по числу m сторон рассматриваемой ломаной. Так как теорема очевидна при $m=1$ (прямолинейный сегмент), то предположим, что она справедлива для $m-1$ ($m \geqslant 2$). Пусть $A = a_0a_1 \ldots a_{m-1}a_m$ — ломаная. Очевидно, можно считать, что точка a_{m-1} совпадает с началом координат, что сторона $a_{m-1}a_m$ лежит на оси X_1, $a_{m-2}a_{m-1}$ — в плоскости X_1X_2 и что $\theta = \angle a_{m-2}a_{m-1}a_m < \pi$. Пусть $c = |a_m - a_{m-1}|$. Пусть $\varepsilon > 0$ — такое число, что (n-мерный) прямоугольник P, определяемый условиями

$$-\varepsilon \leqslant x_1 \leqslant c + \varepsilon, \quad |x_2| \leqslant \varepsilon, \ \ldots, \ |x_n| \leqslant \varepsilon,$$

не пересекается с дугой $a_0a_1 \ldots a_{m-2}$.

Предположим, что $c + \varepsilon = 1$; тогда в лемме 3 можно положить $L = a_{m-1}a_m$ и $N = P \cap a_{m-2}a_{m-1}$, а через M обозначим прямолинейное продолжение сегмента $a_{m-2}a_{m-1}$ от точки a_{m-1} до F_c.

Пусть f — гомеоморфизм, рассмотренный в лемме 3; обозначим через h отображение $\mathscr{E}^n$ на $\mathscr{E}^n$, определяемое следующим образом:

$$h(x) = f(x) \quad \text{для} \quad x \in P, \qquad h(x) = x \quad \text{для} \quad x \in \mathscr{E}^n - P.$$

Так как $f(x) = x$ на границе P, то h непрерывно, а так как $f(P) = P$, то h — гомеоморфизм $\mathscr{E}^n$ на $\mathscr{E}^n$. Более того, h отображает дугу A на ломаную $B = a_0a_1 \ldots a_{m-1} \cup M$ с $m-1$ сторонами, так как из условия $f(x) = x$ для $x \in N$ вытекает, что $h(x) = x$ при $x \in a_0 \ldots a_{m-1}$, а поскольку $f(a_{m-1}a_m) = M$, то из этого следует, что $h(A) = B$.

Так как теорема по предположению имеет место для B, то она верна также и для A.

Теорема 5. *Если A — ломаная, то*

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k, \quad \text{где} \quad F_{k+1} \subset \operatorname{Int}(F_k) \quad \text{и} \quad F_k \underset{\text{top}}{=} \mathop{\mathsf{E}}_x (x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1).$$

Доказательство. В силу теоремы 4 доказательство сводится к случаю, когда A — прямолинейный сегмент. Но в этом случае утверждение очевидно; действительно, всякий сегмент представляет собой пересечение бесконечной убывающей последовательности эллипсоидов.

Теорема 6. *Если A — ломаная, то $\mathscr{E}^n - A \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}^n - (0)$. Более того, можно считать, что рассматриваемый гомеоморфизм есть* *тождественное отображение вне некоторой окрестности ломаной A.*

Доказательство. Предположим, что A — прямолинейный сегмент и что множества F_k из теоремы 5 — эллипсоиды. Пусть K_m — шар $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1/m$. Легко определить отображение $\mathscr{E}^n - F_1$ на $\mathscr{E}^n - K_1$ и вообще $F_m - F_{m+1}$ на $K_m - K_{m+1}$ и гомеоморфизм $\mathscr{E}^n - A$ на $\mathscr{E}^n - (0)$.

Теорема 7 (линейная достижимость). *Пусть A — ломаная, R — область в $\mathscr{E}^n$, $p \in A \subset R$ и $q \in R - A$. Существует ломаная B, такая, что p, $q \in B \subset R$ и $A \cap B = (p)$.*

Доказательство. Заключим точку p в достаточно малый шар; легко видеть, что в этом шаре существует прямолинейный сегмент $pq' \subset R$, имеющий с A только одну общую точку p. По теореме 6 множество $\mathscr{E}^n - A$ является областью, поэтому областью будет и множество $R - A$ (так как $R - A = R \cap (\mathscr{E}^n - A)$ и $R \cup (\mathscr{E}^n - A) = \mathscr{E}^n$; ср. § 57, II, теорема 2). Следовательно (по теореме 1), существует ломаная $q'q \subset R - A$. Обозначим через B дугу pq, содержащуюся в $pq' \cup q'q$.

Теоремы 5—7, примененные к пространству $\mathscr{S}_n$, приводят к следующему утверждению:

Теорема 8. *Пусть $a_0, \ldots, a_m$ — система точек области $R \subset \mathscr{S}_n$; тогда существуют дуга A и область R^*, такие, что*

(i) $a_0, \ldots, a_m \in A \subset R^*$, $\overline{R^*} \subset R$;

(ii) $\mathscr{S}_n - A \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}^n$;

(iii) $\overline{R^*} \underset{\text{top}}{=} \underset{x}{\mathsf{E}}\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1)$, $R^* \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}^n$ *и* $\operatorname{Fr}(R^*) \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_{n-1}$.

Доказательство. Пусть $a_0, \ldots, a_m$ — система точек в области $R \subset \mathscr{E}^n$; принимая во внимание теоремы 1 и 7, легко доказать (по индукции), что в R существует ломаная, содержащая эти точки. Рассматривая $\mathscr{S}_n$ как пространство $\mathscr{E}^n$, пополненное бесконечно удаленной точкой, мы приходим к заключению, что существуют дуга A, такая, что $a_0, \ldots, a_m \in A \subset R$, и гомеоморфизм h множества $\mathscr{E}^n - A$ на $\mathscr{E}^n - (0)$, оставляющий инвариантной бесконечно удаленную точку (согласно теореме 6); следовательно, h определяет гомеоморфизм $\mathscr{S}_n - A$ на $\mathscr{S}_n - (0)$; так как последнее множество гомеоморфно $\mathscr{E}^n$, то условие (ii) доказано.

Оставшаяся часть теоремы 8 вытекает из теоремы 5.

II. Разрезы сферы $\mathcal{S}_n$ [1]. Согласно теореме 2′ из § 54, III, размерность связности $\mathcal{S}_n$ и $\mathcal{E}^n$ равна n. Другими словами, никакое замкнутое подмножество размерности $\leqslant n-2$ не разделяет эти пространства. Покажем, что никакое множество размерности $\leqslant n-2$ (замкнутое или нет) не разрезает их. Более точно, справедлива следующая

Теорема 1 (Мазуркевича [2]). *Пусть R — область в $\mathcal{E}^n$ (или в $\mathcal{S}_n$).*

Если $\dim A \leqslant n-2$, то $R - A$ — полуконтинуум.

Лемма 2. *Пусть $S = p_0 \ldots p_n$ есть n-мерный симплекс. Если $E \subset \overline{S} - \overline{p_1 \ldots p_n} - p_0$ и $\dim E \leqslant n-2$, то существует подконтинуум множества $\overline{S} - E$, соединяющий p_0 с $p_1 \ldots p_n$.*

Доказательство. Положим

$$Q_i = p_0 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n \quad \text{и} \quad G_i = \overline{S} - \overline{Q}_i - \overline{Q}_0.$$

Так как $G_1 \cup \ldots \cup G_n = \overline{S} - p_0 - \overline{Q}_0 \supset E$, то из неравенства $\dim E \leqslant n-2$ в силу теоремы 4 § 27, III следует существование системы открытых множеств $H_1, \ldots, H_n$, такой, что

$$E \subset H_1 \cup \ldots \cup H_n, \quad H_1 \cap \ldots \cap H_n = 0, \quad H_i \subset G_i,$$

следовательно,

$$H_i \cap \overline{Q}_i = 0.$$

На основании теоремы 8 § 28, II отсюда следует, что множество $H_1 \cup \ldots \cup H_n$ не разделяет $\overline{S}$ между p_0 и Q_0. Поэтому существует континуум, соединяющий p_0 с Q_0 в $\overline{S} - (H_1 \cup \ldots \ldots \cup H_n) \subset \overline{S} - E$.

Таким образом, лемма доказана. Пусть $\mathfrak{Q}_n$ — шар $\underset{x}{\mathsf{E}}\,[|x| \leqslant 1]$ в $\mathcal{E}^n$, а p_N и p_S — его полюсы. Покажем, что никакое подмножество A множества $\mathfrak{Q}_n - p_N - p_S$ размерности $\leqslant n-2$ не разрезает $\mathfrak{Q}_n$ между p_N и p_S. Пусть $f\colon \overline{S} \to \mathfrak{Q}_n$ — непрерывное отображение, такое, что

$$f(\overline{S}) = \mathfrak{Q}_n, \quad f(p_0) = p_n, \quad f^{-1}(p_S) = \overline{Q}_0,$$

[1]) Теоремы 3—11 ср. Борсук [4]. Ср. также Борсук [3] и Александров [8, стр. 218].

[2]) См. Мазуркевич [15, стр. 211].

и $f|S-p_0-\bar{Q}_0$ — гомеоморфизм; тогда множество $E=f^{-1}(A)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть C — континуум, такой, что

$$p_0\in C\subset \bar{S}-E \quad \text{и} \quad C\cap Q_0\neq 0.$$

Тогда $f(C)$ — континуум, соединяющий точку p_N с точкой p_S в G_n-A.

Отсюда следует, что никакое множество размерности $\leqslant n-2$ не разрезает $\mathscr{E}^n$ между двумя точками a и b, так как оно не разрезает шар с центром $\frac{1}{2}(a+b)$ диаметра $|a-b|$ между a и b.

Наконец, пусть R — область в $\mathscr{E}^n$; a, $b\in R$ и $\dim A\leqslant n-2$. По теореме 8 п. I существует область $R^*\subset R$, гомеоморфная $\mathscr{E}^n$ и содержащая a и b. Как только что было доказано, существует континуум, соединяющий a с b в R^*-A и, следовательно, в $R-A$.

Замечание. К. Ситников показал (для $n=3$), что *существует множество A размерности $n-1$, такое, что $R-A$ — полуконтинуум, какова бы ни была область R*[1]).

Это множество типа G_δ. Ни одно F_σ-множество не обладает этим свойством. Подобного примера на плоскости не существует.

Теорема 3. *Пусть $F=\bar{F}\subset\mathscr{S}_n\neq F$ и $f\colon F\to\mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$f\simeq 1$ (т. е. гомотопно единице);*

(ii) *f допускает продолжение на $\mathscr{S}_n$;*

(iii) *f допускает продолжение на $\mathscr{S}_n$ с выброшенной одной точкой.*

Доказательство. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) непосредственно следует из теоремы 7 § 54, II, а импликация (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидна. Остается показать, что (iii)$\Rightarrow$(i). Пусть $p\in\mathscr{S}_n-F$ и $g\colon\mathscr{S}_n-p\to\mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывное продолжение f. Так как множество $\mathscr{S}_n-p$ стягиваемо в себе (будучи гомеоморфным $\mathscr{E}^n$), то $g\simeq 1$ (ср. § 54, VI, 2(3)), откуда $f\simeq 1$.

Теорема 4. *Пусть $p\neq q$, $F=\bar{F}\subset\mathscr{S}_n-p-q$ и $f\colon\mathscr{S}_n-p-q\to\mathscr{S}_{n-1}$ непрерывно. Если F не есть разрез между p и q, то $f|F\simeq 1$.*

Доказательство. Пусть L — ломаная, такая, что p, $q\in L\subset\mathscr{S}_n-F$. Так как $\mathscr{S}_n-L$ гомеоморфно $\mathscr{E}^n$ (ср. I, 8 (ii)), то оно стягиваемо в себе. Следовательно, $(f|\mathscr{S}_n-L)\simeq 1$, откуда $f|F\simeq 1$.

---

[1]) См. Ситников [3] и [4].

Теорема 5. *Пусть* $p \neq q$, $f\colon \mathcal{S}_n - p - q \to \mathcal{S}_{n-1}$ — *непрерывно и* $f \not\simeq 1$. *Если* X *разделяет* p *и* q, *то* $f \mid X \not\simeq 1$.

Доказательство. Так как X разделяет p и q, то оно содержит замкнутое множество F, разделяющее эти точки (§ 14, V, теорема 1). Поэтому

$$\mathcal{S}_n = A \cup B, \quad p \in A = \bar{A}, \quad q \in B = \bar{B} \quad \text{и} \quad A \cap B = F.$$

Без ограничения общности можно считать, что p — северный полюс $\mathcal{S}_n$, q — южный полюс и A содержится в замкнутом северном полушарии.

Предположим, что $f \mid X \simeq 1$, откуда $f \mid F \simeq 1$, и, следовательно, $(f \mid F) \subset g \in \mathcal{S}_{n-1}^{\mathcal{S}_n}$, согласно теореме 3. Положим

$$f^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{для} \quad x \in A, \\ f(x) & \text{для} \quad x \in B - q. \end{cases}$$

Тогда $f^*\colon \mathcal{S}_n - q \to \mathcal{S}_{n-1}$ — непрерывная функция и $(f \mid \mathcal{S}_{n-1}) \subset f^*$, так как $\mathcal{S}_{n-1} \subset B$. В силу теоремы 3 имеем $f \mid \mathcal{S}_{n-1} \simeq 1$. Так как множество $\mathcal{S}_n - p - q$ деформируемо на $\mathcal{S}_{n-1}$ в себе (ср. § 54, IV, пример 2), то (согласно теореме 1 из § 54, IV) $f \simeq 1$.

Следствие 6. *Пусть* p_N *и* p_S — *северный и южный полюсы* $\mathcal{S}_n$ *и* $r\colon \mathcal{S}_n - p_N - q_S \to \mathcal{S}_{n-1}$ — *проекция на экватор* $\mathcal{S}_{n-1}$ *вдоль меридианов.*

Замкнутое[1] *подмножество* F *множества* $\mathcal{S}_n - p_N - p_S$ *является разрезом между полюсами тогда и только тогда, когда* $r \mid F \not\simeq 1$.

Доказательство. Так как $r(x) = x$ для $x \in \mathcal{S}_{n-1}$, то (ср. § 54, I, теорема 9) $r \mid \mathcal{S}_{n-1} \not\simeq 1$ и, следовательно, $r \not\simeq 1$.

Лемма 7. *Всякая непрерывная функция* $f\colon \mathcal{S}_{n-1} \to \mathcal{Y}$ *допускает (непрерывное) продолжение* $f^*\colon \mathfrak{E}_n - (0) \to \mathcal{Y}$.

Доказательство. Достаточно положить $f^*(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right)$ для $0 \neq x \in \mathfrak{E}_n$.

Лемма 8. *Пусть* R — *область в* $\mathcal{S}_n$, $p, q \in R$ *и* $f\colon \bar{R} - p \to \mathcal{Y}$ *непрерывно. Тогда существует непрерывная функция* $g\colon \bar{R} - q \to \mathcal{Y}$, *такая, что* $f \mid \mathrm{Fr}(R) \subset g$.

Доказательство. Согласно теореме 8 п. I, существует область R^*, такая, что

$$p, q \in R^*, \quad \bar{R}^* \subset R, \quad \bar{R}^* \underset{\text{top}}{=} \mathfrak{E}_n \quad \text{и} \quad \mathrm{Fr}(R^*) \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}_{n-1}.$$

[1]) Предположение, что F замкнуто, для $n = 2$ можно опустить; см. § 60, II, теорема 1.

Пусть, в соответствии с теоремой 7, h: $\overline{R}^* - q \to \mathscr{Y}$ — непрерывное продолжение $f \mid \mathrm{Fr}(R^*)$. Достаточно положить

$$g(x) = \begin{cases} h(x) & \text{для} \quad x \in \overline{R}^* - q, \\ f(x) & \text{для} \quad x \in \overline{R} - R^*. \end{cases}$$

Теорема 9. *Пусть $F = \overline{F} \subset \mathscr{S}_n$ и f: $F \to \mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывное отображение. Существуют конечное множество $A \subset \mathscr{S}_n - F$ и (непрерывное) продолжение f^*: $\mathscr{S}_n - A \to \mathscr{S}_{n-1}$ отображения f* [1].

Более точно, *существует конечная система (которая может быть и пустой) различных компонент $R_0, \ldots, R_k$ множества $\mathscr{S}_n - F$, такая, что*

(i) $f \mid \mathrm{Fr}(R_j) \not\simeq 1$ *для* $j \leqslant k$;

(ii) $k \neq 0$;

(iii) *если E обозначает систему точек $p_0, \ldots, p_k$, где $p_j \in R_j$, то существует непрерывное продолжение f^*: $\mathscr{S}_n - E \to \mathscr{S}_{n-1}$ отображения f.*

Доказательство. Так как $\mathscr{S}_{n-1}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то f допускает продолжение на окрестность F и, следовательно, на полиэдр, содержащий F. Таким образом, существует (замкнутый несингулярный) комплекс $T_1, \ldots, T_r$, такой, что $\mathscr{S}_n = \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_m \cup \ldots \cup \overline{T}_r$ и $\dim T_j = n$, а также непрерывное продолжение f_1: $P \to \mathscr{S}_{n-1}$ отображения f, где $P = \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_m$. Пусть $Q = \mathrm{Fr}(T_{m+1}) \cup \ldots \cup \mathrm{Fr}\, T_r$. Тогда $\dim Q \leqslant$ $\leqslant n - 1$. Так как сфера $\mathscr{S}_{n-1}$ связна и локально связна в размерностях $< n - 1$ (ср. § 53, V, теорема 2), то f_1 допускает непрерывное продолжение f_2: $P \cup Q \to \mathscr{S}_{n-1}$ (по теореме 1′ § 53, IV).

Пусть a_j — центр T_j. Положим $A = (a_{m+1}, \ldots, a_r)$. По теореме 8 функция $f_2 \mid \mathrm{Fr}(T_j)$ допускает (для каждого $j > m$) продолжение $f_{2,j}$: $\overline{T}_j - a_j \to \mathscr{S}_{n-1}$. Функция f_3, совпадающая с f_2 на $P \cup Q$ и с $f_{2,j}$ на $\overline{T}_j - a_j$, где $j = m + 1, \ldots, r$, является непрерывным продолжением f и f_3: $\mathscr{S}_n - A \to \mathscr{S}_{n-1}$.

Итак, первая часть теоремы 9 доказана.

Пусть $B = (b_0, \ldots, b_k)$ — подмножество $\mathscr{S}_n - F$, такое, что функция f имеет непрерывное продолжение g: $\mathscr{S}_n - B \to \mathscr{S}_{n-1}$ и B неприводимо относительно этого свойства; это означает, что f не допускает продолжения на $\mathscr{S}_n - B \cup b_j$ ни для какого $j \leqslant k$.

[1] См., например, Эйленберг [9]. Ср. с теоремой 7 § 53, VI.

Пусть R_j — компонента множества $\mathscr{S}_n - F$, содержащая b_j. Покажем, что $R_i \neq R_j$ при $i \neq j$.

Допустим, что это не так и что $b_0, b_1 \in R_0$. Разность $R_0 - (b_2, \ldots, b_k)$ представляет собой область (ср. с теоремой 1); пусть (в соответствии с теоремой 8) R^* — такая область, что

$$b_0, b_1 \in R^*, \quad \bar{R}^* \subset R_0 - (b_2, \ldots, b_k), \quad \bar{R}^* \underset{\text{top}}{=} Q_n \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr}(R^*) \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_{n-1}.$$

По теореме 7

$$[g \mid \operatorname{Fr}(R^*)] \subset g_1 \in \mathscr{S}_{n-1}^{\bar{R}^* - b_1}.$$

Но тогда функция g^*, совпадающая с g на $\mathscr{S}_n - R^* - B$ и с g_1 на $\bar{R}^* - b_1$, является продолжением f на $\mathscr{S}_n - (b_1, \ldots, b_k)$, что противоречит определению B.

Если предположить, вопреки (i), что $f \mid \operatorname{Fr}(R_j) \simeq 1$, то по теореме 3 существует продолжение h: $\mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_{n-1}$ отображения $f \mid \operatorname{Fr}(R_j)$. Но тогда функция g^*, совпадающая с g на $\mathscr{S}_n - R_j - B$ и с h на $\bar{R}_j$, была бы продолжением f на $\mathscr{S}_n - B \cup b_j$, что невозможно.

Если предположить, что $k = 0$, то тогда $B = b_0$ и, следовательно, g: $\mathscr{S}_n - b_0 \to \mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывное отображение; поэтому f допускало бы продолжение на все пространство $\mathscr{S}_n$ (по теореме 3).

Для того чтобы доказать (iii), предположим в соответствии с теоремой 8, что $g \mid \operatorname{Fr}(R_j)$ имеет продолжение f_j: $\bar{R}_j - p_j \to \mathscr{S}_{n-1}$.

Обозначим через f^* функцию, совпадающую с g на $\mathscr{S}_n - (R_0 \cup \ldots \cup R_k)$ и с f_j на $\bar{R}_j - p_j$ для $j = 0, \ldots, k$.

Теорема 10 (Борсука[1]). *Пусть* $F = \bar{F} \subset \mathscr{S}_n \neq F$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathscr{S}_n - F$ *связно*;

(ii) $\mathscr{S}_{n-1}^F$ *связно*;

(iii) F *стягиваемо относительно* $\mathscr{S}_{n-1}$;

(iv) $\mathscr{S}_{n-1}^F = \mathscr{S}_{n-1}^{\mathscr{S}_n} \mid F$.

Доказательство. (ii) $\equiv$ (iii) следует из теоремы 2 § 54, V; (iii) $\equiv$ (iv) вытекает из теоремы 3. Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) следует из теоремы 6. Остается показать, что (i) $\Rightarrow$ (iv). Предположим, что F не есть разрез и что f: $F \to \mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывная функция. Так как множество $\mathscr{S}_n - F$ — область, то f допускает продолжение f^*: $\mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_{n-1}$ (согласно теореме 9 (ii)).

---

[1]) См. примечание 1 на стр. 464.

Теорема 11. *Если ни одно из замкнутых множеств F_0 и F_1 не разрезает $\mathscr{S}_n$ между точками p и q и если $\dim(F_0 \cap F_1) \leqslant \leqslant n-3$, то их объединение $F_0 \cup F_1$ также не разрезает $\mathscr{S}_n$ между этими точками* [1]).

Доказательство. Положим $p = p_N$ и $q = p_S$; по теореме 6 имеем $r \mid F_0 \simeq 1$ и $r \mid F_1 \simeq 1$, а, согласно теореме 9 из § 54, II, $r \mid F_0 \cup F_1 \simeq 1$. Отсюда в силу теоремы 6 следует требуемое заключение.

III. Неприводимые разрезы.

Теорема 1. *Пусть $F = \overline{F} \subset \mathscr{S}_n - p - q$, $f\colon \mathscr{S}_n - p - q \to \mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывная функция и $f \not\simeq 1$. Множество F есть неприводимый разрез $\mathscr{S}_n$ между p и q тогда и только тогда, когда $f \mid F \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$.*

Другими словами, *условие: F представляет собой разрез между p и q, тогда как никакое подмножество $A = \overline{A} \subset F \neq A$ не является разрезом, эквивалентно условию: $f \mid F \not\simeq 1$, тогда как $f \mid A \simeq 1$ для каждого $A = \overline{A} \subset F \neq A$.*

Это прямое следствие теорем 4 и 5 п. II.

Замечание. Если $p = p_N$ и $q = p_S$, то функцию f можно заменить функцией r из следствия 6 п. II.

Теорема 2 [2]). *Пусть $F = \overline{F} \neq \mathscr{S}_n$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *F — неприводимый разрез между двумя точками;*

(ii) *F — общая граница двух компонент множества $\mathscr{S}_n - F$;*

(iii) *существует непрерывная функция $f\colon F \to \mathscr{S}_{n-1}$, такая, что $f \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$.*

Доказательство. (i) $\equiv$ (ii) следует из теоремы 1 § 49, V, а импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) получается из теоремы 1. Остается показать, что (iii) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $f\colon F \to \mathscr{S}_{n-1}$ — непрерывная функция, такая, что $f \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$. Так как $f \not\simeq 1$, то существуют две компоненты $R_0 \neq R_1$ множества $\mathscr{S}_n - F$, такие, что $f \mid \mathrm{Fr}(R_j) \not\simeq 1$ для $j = 0, 1$ (ср. II, 9 (ii), и II, 3 (ii)). Тогда $F = \mathrm{Fr}(R_j)$, ибо в противном случае $f \mid \mathrm{Fr}(R_j) \simeq 1$, согласно условию $f \underset{\text{непр.}}{\not\simeq} 1$.

---

[1]) Для $n = 2$ предположение о том, что множество $F_0 \cap F_1$ пусто, можно заменить условием его связности. См. § 59, I, теорема 6. Для $n = 3$ теорема 11 вытекает из уникогерентности $\mathscr{S}_3$; см. § 57, II, теорема 3.

[2]) Эйленберг [7, стр. 101].

Теорема 3. *Если F — замкнутый разрез, неприводимый между p и q, то никакое замкнутое подмножество размерности $\leqslant n-3$ не разделяет F* [1].

Это прямое следствие теоремы 11 п. II.

Теорема 4. *Пусть C — континуум в $\mathcal{S}_n$, R — компонента множества $\mathcal{S}_n - C$ и $F = \bar{F} \subset \mathrm{Fr}(R)$. Если $\dim F \leqslant n-3$ и $C - F$ связно, то связно и множество $\mathrm{Fr}(R) - F$.*

Доказательство. Предположим, что множество $\mathrm{Fr}(R) - F$ не связно, так что

$$\mathrm{Fr}(R) - F = M \cup N, \quad (\bar{M} \cap N) \cup (\bar{N} \cap M) = 0, \quad M \neq 0 \neq N.$$

Пусть $K = \mathcal{S}_n - R$. Тогда

$$K = \mathrm{Fr}(R) \cup (\mathcal{S}_n - \bar{R}) \quad \text{и} \quad \mathcal{S}_n - \bar{R} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$$

есть (бесконечный, конечный или пустой) ряд компонент множества $\mathcal{S}_n - \bar{R}$. Согласно теореме 2 § 49, V, множество $\mathrm{Fr}(B_i)$ представляет собой неприводимый разрез $\mathcal{S}_n$. Из соотношения

$$\mathrm{Fr}(B_i) \subset \mathrm{Fr}(\bar{R}) \subset \mathrm{Fr}(R) = M \cup F \cup N$$

вытекает, что либо $M \cap \mathrm{Fr}(B_i) = 0$, либо $N \cap \mathrm{Fr}(B_i) = 0$, так как множество F не разделяет $\mathrm{Fr}(B_i)$ (по теореме 3), ибо $\dim F \leqslant n-3$.

Обозначим через M^* объединение множества $M \cup F$ и всех множеств B_i, таких, что $N \cap \mathrm{Fr}(B_i) = 0$, а через N^* — объединение множества $N \cup F$ и всех остальных множеств B_i. Тогда (ср. § 49, III, теорема 3)

$$K = M^* \cup N^*, \quad \bar{M}^* = M^*, \quad \bar{N}^* = N^* \quad \text{и} \quad M^* \cap N^* = F.$$

Так как

$$M \cup N \subset \mathrm{Fr}(R) \subset C \subset \mathcal{S}_n - R = K,$$

то

$$C = (C \cap M^*) \cup (C \cap N^*),$$
$$F = (C \cap M^*) \cap (C \cap N^*) \quad \text{и} \quad C \cap M^* \neq C \neq C \cap N^*;$$

следовательно, $C - F$ не связно.

IV. Инварианты. Понятие замкнутого разреза множества $\mathcal{S}_n$, а также понятие неприводимого замкнутого разреза *являются топологическими инвариантами*, так как они характеризуются внутренними свойствами (теорема 10 п. II и теорема 2 (iii) п. III). В частности, отсюда следует, что *подмножество сферы $\mathcal{S}_n$, гомеоморфное $\mathcal{S}_{n-1}$, является неприводимым разрезом $\mathcal{S}_n$.*

---

[1]) Ср. Александров [8, стр. 227] и Куратовский [33]. Теорема 3 принадлежит Урысону [4] и [5, стр. 312].

Более точно, имеет место следующая

Теорема 1. *Понятие замкнутого разреза инвариантно относительно преобразований с малыми прообразами точек.*

Это следует из теоремы 5 § 54, V и теоремы 10 (iii) п. II.

Теорема 2. *Пусть $F=\overline{F}\subset\mathscr{S}_n-p-q$. Если F — разрез между p и q, то каждое множество, получающееся из F с помощью деформации в $\mathscr{S}_n-p-q$, является разрезом между p и q.*

Это следует из теоремы 1 § 54, IV и теоремы 6 п. II.

Так как понятие замкнутого неприводимого разреза есть внутренний инвариант, то из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Никакой замкнутый неприводимый разрез не допускает деформации на собственное подмножество.*

Из теоремы 2 вытекает также

Теорема 4. *Если замкнутый разрез между p и q можно деформировать в одну точку, то в процессе этой деформации обязательно придется пройти либо через точку p, либо через точку q.*

А вот другая форма теоремы 4[1]):

Теорема 4а. *Если F — замкнутое подмножество пространства $\mathscr{E}^n$, то каждая ограниченная компонента множества $\mathscr{E}^n-F$ заметается в процессе всякой деформации F в одну точку.*

Доказательство. В теореме 4 можно считать, что p — произвольная точка некоторой ограниченной компоненты, а q — бесконечно удаленная точка.

Теорема 5. *Всякое множество $F=\overline{F}\subset\mathscr{S}_n-p-q$, не являющееся резрезом между p и q, можно преобразовать в точку при помощи деформации, выполненной в $\mathscr{S}_n-p-q$.*

Доказательство. Пусть A — ломаная $pq\subset\mathscr{S}_n-F$; тогда множество $\mathscr{S}_n-A$ стягиваемо в себе, так как оно является гомеоморфным образом $\mathscr{E}^n$ (ср. с теоремой 8 п. I).

Теорема 6. *Понятие разделителя есть внутренний инвариант; другими словами, если A и B — два гомеоморфных подмножества сферы $\mathscr{S}_n$ и $\mathscr{S}_n-A$ связно, то связно и множество $\mathscr{S}_n-B$.*

Доказательство. Если $\mathscr{S}_n-B$ не связно, то по теореме 7 § 49, IV существует замкнутое множество $F\subset B$, такое,

[1]) Борсук [3, стр. 383]. См. также Голомб [1] и Лейа [1].

что из условий $F \subset H = \overline{H} \subset B$ вытекает, что H — разрез $\mathcal{S}_n$. Так как понятие замкнутого разреза — внутренний инвариант, то на основании той же теоремы A — разделитель $\mathcal{S}_n$.

Замечание. Понятие (незамкнутого) разреза сферы $\mathcal{S}_2$ не является внутренним инвариантом.

Это подтверждается следующим примером:

$$A = \underset{x,\,y}{\mathrm{E}} \left\{ \left(y = \sin\frac{1}{x} \right) (0 < |x| < 1) \right\} \cup (0,\ 1) \cup (0,\ -1),$$

$$B = \underset{x,\,y}{\mathrm{E}} \left\{ \left(y = \sin\frac{1}{x} \right) (0 < x < 1) \right\} \cup \underset{x,\,y}{\mathrm{E}} \left\{ \left(y = x + \sin\frac{1}{x} \right) (0 < x < 1) \right\} \cup$$
$$\cup (0,\ 1) \cup (0,\ -1).$$

Лемма 7. *Если G — ограниченное открытое подмножество пространства $\mathcal{E}^n$, то не существует ретракции $\overline{G}$ на* $\mathrm{Fr}(G)$[1].

Доказательство. Можно считать, что $G \subset \mathcal{Q}_n$ и что точка 0 принадлежит G. Пусть r: $\overline{G} \to \mathrm{Fr}(G)$ — ретракция. Полагая

$$f(x) = \begin{cases} r(x) : |r(x)| & \text{для} \quad x \in \overline{G}, \\ x : |x| & \text{для} \quad x \in \mathcal{Q}_n - G, \end{cases}$$

мы определим ретракцию $\mathcal{Q}_n$ на $\mathcal{S}_{n-1}$, что противоречит теореме 2 § 28, III.

Теорема 8. *Если A — ретракт компактного подмножества F пространства $\mathcal{E}^n$, то число компонент множества $\mathcal{E}^n - A$ не превосходит числа компонент множества $\mathcal{E}^n - F$.*

Если A — деформационный ретракт F, то эти числа равны.

Доказательство. Пусть r: $F \to A$ — ретракция и R — компонента $\mathcal{E}^n - A$. Тогда $\mathrm{Fr}(R) \subset A$. Отсюда следует, что $R - F \neq 0$, так как иначе $r | \overline{R}$ было бы ретракцией $\overline{R}$ на $A \cap \overline{R} = \mathrm{Fr}(R)$, что противоречит теореме 7.

Таким образом, некоторая точка $p_R \in R - F$ может быть поставлена в соответствие множеству R. Пусть Q_R — компонента $\mathcal{E}^n - F$, содержащая p_R. Так как $\mathcal{E}^n - F \subset \mathcal{E}^n - A$, то $Q_R \subset R$; таким образом, первая часть теоремы 8 доказана.

Вторая часть следует из первой на основании теоремы 2.

Теорема 9. *Если A — компактный абсолютный окрестностный ретракт, лежащий в $\mathcal{E}^n$, то число областей в $\mathcal{E}^n - A$ конечно.*

[1] Борсук [1, стр. 161].

Если A — абсолютный ретракт, то это число равно 1, т. е. A не разрезает пространство.

Доказательство. Так как A представляет собой ретракт ограниченного открытого подмножества $\mathscr{E}^n$, то A — ретракт некоторого полиэдра, а следовательно, компактного множества, разрезающего пространство на конечное число областей.

Если A — абсолютный ретракт, то можно считать, что этот полиэдр есть n-мерный куб.

Теорема 10. *Для подмножеств сферы $\mathscr{S}_n$ понятие внутренней точки, а следовательно, понятие открытого множества и граничного множества являются внутренними инвариантами* [1]).

Доказательство. Пусть $A \subset \mathscr{S}_n$, G — открытое множество, $p \in G \subset A$ и h — гомеоморфизм, определенный на A. Покажем, что $h(p)$ — внутренняя точка множества $h(A)$.

Пусть F — замкнутое множество, а P и R — две (непустые) области, такие, что

$$(1) \quad F \subset G - p, \quad \mathscr{S}_n - F = P \cup R, \quad p \in P \subset G \quad \text{и} \quad P \cap R = 0$$

(например, F можно определить как пересечение $\mathscr{S}_n$ с достаточно малой сферой с центром в точке p).

Так как F — разрез $\mathscr{S}_n$ (между P и R), то $h(F)$ — тоже разрез (ср. с теоремой 6); следовательно, существуют два открытых множества M и N, таких, что

$$\mathscr{S}_n - h(F) = M \cup N, \quad M \cap N = 0, \quad M \neq 0 \neq N.$$

Так как множество $h(P)$ связно, то либо $h(P) \subset M$, либо $h(P) \subset N$. Предположим, что

$$(2) \qquad h(P) \subset M, \quad \text{откуда} \quad N \cap h(P) = 0.$$

Тогда

$$\mathscr{S}_n - h(F \cup P) = \mathscr{S}_n - [h(F) \cup h(P)] = [M - h(P)] \cup [N - h(P)] = \\ = [M - h(P)] \cup N.$$

Множество $F \cup P$ не является разрезом (ибо область R — его дополнение); $h(F \cup P)$ также не является разрезом. Другими словами, множество $[M - h(P)] \cup N$ связно. Так как множества $M - h(P)$ и N отделимы (ибо таковыми являются M и N), то одно из них пусто. Поскольку $N \neq 0$, то $M - h(P) = 0$, откуда следует, что $M \subset h(P)$, и потому $M = h(P)$ (согласно (2)). Таким образом, множество $h(P)$ открыто.

---

[1]) Для $n = 2$ теорема установлена Шёнфлисом [2]. Общий случай ср. Лебег [2, стр. 270] и [3], Шпернер [1] и Эйленберг [7, стр. 94].

Так как $h(p) \in h(P) \subset h(G) \subset h(A)$, то $h(p)$ — внутренняя точка множества $h(A)$.

Замечание. *Для локально связного континуума $\mathcal{X}$ из инвариантности понятия замкнутого разреза вытекает инвариантность понятия внутренней точки.*

Доказательство. Так как $\mathcal{X}$ содержит точку, которая его не разрезает (ср. § 47, IV, теорема 5), то из инвариантности разреза следует, что никакая точка $\mathcal{X}$ не является разрезом. Поэтому существует (ср. § 50, III, теорема 1) замкнутое множество H, такое, что $p \in \operatorname{Int}(H) \subset G$ и множество $R = \mathcal{X} - H$ — область. Пусть P обозначает компоненту точки p в $\operatorname{Int}(H)$ и $F = H - P$; тогда условия (1) удовлетворяются и предыдущее доказательство остается справедливым (если $\mathcal{S}_n$ заменить на $\mathcal{X}$).

Добавим без доказательства следующее утверждение[1]).

Теорема 11. *Всякое счетное множество, всюду плотное в $\mathcal{E}^n$, топологически эквивалентно множеству рациональных точек $\mathcal{E}^n$.*

Отсюда вытекает следующая

Теорема 12. *В $\mathcal{E}^n$ всякое граничное множество A имеет размерность $< n$.*

Доказательство. Доказательство сводится к случаю, когда A состоит из точек, каждая из которых имеет по крайней мере одну иррациональную координату. Обозначим через A_k множество точек $\mathcal{E}^n$, имеющих k рациональных и $n-k$ иррациональных координат; тогда

$$A = A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}, \quad \text{следовательно,} \quad \dim A_i = 0\,^{2)},$$

поэтому $\dim A \leqslant n-1$ по теореме 3 из § 27, I.

V. Замечания по поводу теоремы Борсука — Улама. Согласно этой теореме (приведенной в § 41, VIII), известной как теорема об антиподах, *для каждой непрерывной функции f: $\mathcal{S}_n \to \mathcal{E}^n$ существует точка $p \in \mathcal{S}_n$, такая, что $f(p) = f(-p)$*[3]).

Сформулируем (без доказательства) несколько теорем, касающихся аналогичных проблем.

---

[1]) См., например, Менгер [1, стр. 263] или Гуревич и Уолмен [1].

[2]) Менгер [1, стр. 147], Гуревич и Уолмен [1].

[3]) Простое доказательство этой теоремы в случае $n=2$ см. в § 57, I. В этом случае теорему об антиподах можно интерпретировать следующим образом: в каждый момент на земной поверхности существуют две диаметрально противоположные точки, в которых одинаковая температура и одинаковое давление.

1. Для каждой непрерывной функции $f\colon \mathscr{S}_n \to \mathscr{E}$ существует система n ортогональных точек $p_1, \ldots, p_n$, такая, что $f(p_1) = f(-p_1) = \ldots = f(p_n) = f(-p_n)$ [1].

В случае $n = 2$ эта теорема была ранее доказана Дайсоном [2].

2. Для каждой непрерывной функции $f\colon \mathscr{S}_n \to \mathscr{E}$ существует система $n+1$ ортогональных точек $p_0, \ldots, p_n$, такая, что $f(p_0) = \ldots = f(p_n)$ [3].

3. Если сфера $\mathscr{S}_n$ покрыта $(n+1)$ замкнутыми множествами, то по крайней мере одно из таких множеств содержит пару диаметрально противоположных точек [4].

Цель других обобщений упомянутых выше теорем состоит в следующем:

(i) заменить сферу $\mathscr{S}_n$ более общим пространством (понимая под антиподальным преобразованием непрерывную инволюцию) [5];

(ii) заменить (однозначное) преобразование f многозначным [6];

(iii) применить эти теоремы (например, теорему об антиподах) к линейным топологическим пространствам (бесконечной размерности) [7];

(iv) распространить теоремы о пространстве $(\mathscr{E}^n)^{\mathscr{S}_n}$ на пространства $(\mathscr{E}^k)^{\mathscr{S}_n}$ при $k \leqslant n$ (проблема Кнастера) [8].

§ 60. Количественные проблемы. Когомотопное умножение. Теоремы двойственности

I. Введение. Положим $\mathscr{S}_n = \mathscr{E}^n - (0)$, $X \subset \mathscr{E}^n$ и $n \geqslant 2$. Когомотопное умножение, введенное Борсуком (для компактного X), — это операция, определенная на элементах множества $\mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X)$

[1] См. Янг [1]. Используя гомологические методы, Янг обобщил свою теорему и теорему об антиподах. Ср. Ливсей [1], Бургин [4, стр. 338].

[2] Дайсон [1]. Простое доказательство теоремы Дайсона было дано Заранкевичем [3].

[3] Юдзёбо и Ямабе [1]. В случае $n = 2$ эта теорема была доказана Какутани [1]. Теорема Какутани служит отправным пунктом многих исследований (см. ранее цитируемые статьи). Цель обобщения теоремы Какутани состоит в распространении ее на произвольные треугольники (без предположения ортогональности вершин; ср. с проблемой Штейнгауза [1, стр. 30]). См. Флойд [1]. Ср. также Фернандес [1] и Бургин [2].

[4] Борсук [7].

[5] Что касается обобщения теоремы об антиподах, см. (в дополнение к цитируемой статье Янга) Яворовский [1], Красносельский [2]. Случай, когда $\mathscr{S}_n$ заменяется n-мерным замкнутым многообразием, см. Хопф [3]. Ср. также Бургин [1], Бэкон [1].

[6] Ср. Яворовский [2], Гранас [3], Гранас и Яворовский [1].

[7] Ср. Красносельский [1], Альтман [1], Гранас [3] и [4].

[8] Кнастер [9, стр. 30, проблема 4]. Частичное решение см. Ливсей [2] и Бургин [3].

(множества компонент пространства $\mathcal{S}_n^X$), превращающая $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_n^X)$ в топологическую группу.

В частном случае $n=2$ умножение элементов $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_2^X)$ индуцируется умножением функций $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_2^X$ (ср. § 62, I), которое в свою очередь индуцируется умножением комплексных чисел:

(1) $(f_0 = f_1 \cdot f_2) \equiv [f_0(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ *для любого* $x \in X]$,

(2) $(\Gamma_0 = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2) \equiv [$*существуют* $f_1 \in \Gamma_1$, $f_2 \in \Gamma_2$, *такие, что* $(f_1 \cdot f_2) \in \Gamma_0]$;

аналогично деление индуцируется делением ненулевых комплексных чисел.

Если $n > 2$, эта процедура не применима, так как не существует умножения точек в $\mathcal{E}^n$. Однако соотношение (1) можно использовать в частном случае, когда для каждого $x \in X$ либо $f_1(x) = 1$, либо $f_2(x) = 1$ (в этом случае функции f_1 и f_2 будем называть «мультипликативными»); при этом мы считаем, что

$$1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad p \cdot 1 = p = 1 \cdot p \quad \text{для} \quad p \in \mathcal{E}^n;$$

деление $1 : f(x)$ определяется с помощью следующего правила: если $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то $1 : p = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, -x_n) : |p|^2$. (Очевидно, это деление зависит от n.)

В дальнейшем мы покажем, как умножение элементов $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_n^X)$ можно получить из умножения мультипликативных функций [1]).

Замечание. Если X компактно, то компоненты пространства $\mathcal{S}_n^X$ дугообразно связны (теорема 3 § 53, III); другими словами, они совпадают с гомотопическими классами. В этом случае группа $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_n^X)$ называется n-й *группой когомотопий* множества X (обозначается $\pi^n(X)$) [2]).

Далее, если X компактно, то $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_2^X)$ совпадает с фактор-группой $\mathcal{S}_2^X$ по группе функций, гомотопных единице (ср. § 62, I). См. также замечание 2 п. VII.

II. Формулировка проблемы. Пусть Ω — множество произвольных элементов и $f \cdot g$ (или, короче, fg) — операция, определенная на некоторых парах f, g элементов Ω. Во всех

---

[1]) В этом изложении мы следуем общей идее К. Борсука и распространяем ее на множества $X \subset \mathcal{E}^n$, не обязательно компактные. См. Борсук [15] и [23]. Идеи Борсука были развиты Спаньером [1], Морита [2], Грапасом [2]. Некоторые обобщения см. Генба [1] и Яворовский [3], [4]. Из исторических соображений упомянем работу Фрейденталя [1].

[2]) По поводу связей группы $\pi^n(X)$ с n-й группой когомологий см. Спаньер [1] и Петерсон [1], [2].

случаях, когда можно производить эту операцию (т. е. когда рассматриваемые элементы «мультипликативны»), должны выполняться следующие обычные условия[1]):

(α) $fg \in \Omega$,

(β) $fg = gf$,

(γ) $f(gh) = (fg)h$,

(δ) существует элемент 1, такой, что $f \cdot 1 = f$.

Далее, предположим, что $f \approx g$ — отношение эквивалентности, определенное для каждой пары элементов из Ω, что $1 : f$ — отображение Ω на Ω и что при этом выполняются следующие условия:

(i) *каждой паре* f, g *соответствует мультипликативная пара* f', g', *такая, что* $f' \approx f$ *и* $g' \approx g$; *более общо, каждой тройке* f, g, h *соответствует тройка* f', g', h', *для которой существуют все произведения, фигурирующие в условии* (γ), *и при этом* $f' \approx f$, $g' \approx g$, $h' \approx h$;

(ii) *если* $f_0 \approx g_0$ *и* $f_1 \approx g_1$, *то* $f_0 \cdot f_1 \approx g_0 \cdot g_1$ *при условии, что эти произведения существуют*;

(iii) *для каждого* f *существует пара* g, h, *такая, что*

$$g \approx f, \quad h \approx 1 : f, \quad gh \approx 1;$$

(iv) *из* $f \approx g$ *следует, что* $(1 : f) \approx (1 : g)$.

При этих условиях *умножение* fg *индуцирует умножение классов эквивалентности, так что множество этих классов, которое мы обозначим* $\mathfrak{G}(\Omega)$, *образует абелеву группу*.

Более точно, умножение классов эквивалентности определяется следующим образом:

$$(1) \quad (\Gamma_0 = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2) \equiv [\text{существуют } f_1 \in \Gamma_1,\ f_2 \in \Gamma_2, \text{ такие, что } (f_1 \cdot f_2) \in \Gamma_0].$$

Единицей этой группы является класс, содержащий единицу множества Ω. Элемент $1 : \Gamma$ — это класс, содержащий элемент $1 : f$, где $f \in \Gamma$.

Мы опускаем простое доказательство этой теоремы.

Обозначения. Для $f \in \Omega$ обозначим через $\hat{f}$ класс эквивалентности, содержащий f, т. е.

$$f \in \hat{f} \in \mathfrak{G}(\Omega).$$

Введем следующие обозначения:

$$(2) \qquad f_0 \approx f_1 \cdot f_2, \quad \text{если} \quad \hat{f}_0 = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2,$$

$$(3) \qquad f_1 \cdot f_2 \approx f_3 \cdot f_4, \quad \text{если} \quad \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2 = \hat{f}_3 \cdot \hat{f}_4,$$

[1]) Ср. с понятием «группоида»; Брандт [1]. Ср. также с понятием мультипликативной системы; Стинрод и Эйленберг [1].

и аналогично для произвольного числа сомножителей, а также в случае, когда произведения для пар (f_1, f_2), (f_3, f_4) и т. д. не определены.

Легко показать, что

1) каждой паре f, $g \in \Omega$ соответствует элемент $h \in \Omega$, такой, что $h \approx f \cdot g$;

2) соотношения (β) и (γ) имеют место для всех элементов Ω, если знак $=$ заменить знаком $\approx$;

3) утверждение (ii) имеет место независимо от существования входящих в него произведений; другими словами, соотношения эквивалентности можно умножать (а также делить);

4) $f \cdot (1 : f) \approx 1$.

Положив $\Omega = \mathscr{P}_n^X$, легко показать, что условия (α)—(δ) удовлетворяются, если под умножением функций f и g понимать умножение мультипликативных функций (определенных в п. 1). С другой стороны, будем считать, что $f \approx g$ означает, что функции f и g принадлежат одной и той же компоненте пространства $\mathscr{P}_n^X$ (т. е. одному и тому же элементу множества $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$). Покажем, что если умножение $f \cdot g$ и отношение $f \approx g$ понимаются указанным образом, то условия (i)—(iv) выполняются для каждого $X \subset \mathscr{E}^n$ $(n \geqslant 2)$.

В частности, условия (i) и (ii) можно сформулировать следующим образом (если вместо пространства $\mathscr{P}_n^X$ рассматривать пространство $\mathscr{S}_n^X$ с $X \subset \mathscr{E}^{n+1}$, что не приводит к существенным различиям; ср. V, теорема 6). Условимся считать, что

$$\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n = [\mathscr{S}_n \times (1)] \cup [(1) \times \mathscr{S}_n], \tag{4}$$

$$\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n = \tag{5}$$

$$= [\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times (1)] \cup [\mathscr{S}_n \times (1) \times \mathscr{S}_n] \cup [(1) \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n],$$

$$\mathscr{U}_n = [\mathscr{S}_n \times (1) \times (1)] \cup [(1) \times \mathscr{S}_n \times (1)] \cup [(1) \times (1) \times \mathscr{S}_n]. \tag{6}$$

Тогда существование произведения $f \cdot g$, где f, $g \in \mathscr{S}_n^X$, означает, что «составное» отображение $\varphi = (f, g)$ является элементом множества $(\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n)^X$. Аналогично, предположение, что функции f, g и h мультипликативны, эквивалентно включению $(f, g, h) \in \mathscr{U}_n^X$.

Таким образом, условия (i) и (ii) эквивалентны (в рассматриваемом случае) следующим условиям:

(i′) *каждому* $\varphi \in (\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n)^X$ *соответствует* $\varphi' \in \mathscr{U}_n^X$, *такое, что* $\varphi' \approx \varphi$;

(ii′) *если* $\varphi' = (f', g') \in (\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n)^X$, $\varphi'' = (f'', g'') \in (\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n)^X$ *и* $\varphi' \approx \varphi''$, *то* $f'g' \approx f''g''$.

III. Дополнительные гомотопические свойства.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — метрические сепарабельные пространства, и пусть $\mathscr{Y}$ локально евклидово в некоторой точке; другими словами, $\mathscr{Y}$ содержит открытое множество G, такое, что $\overline{G}$ гомеоморфно $\mathscr{T}^r$. Пусть $\dim \mathscr{X} \leqslant r-1$ и $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — непрерывная функция. Тогда существует непрерывная функция $f^*\colon \mathscr{X} \to (\mathscr{Y} - G)$, такая, что*

$$f^*(x) = f(x), \text{ если } f(x) \in \mathscr{Y} - G; \text{ следовательно, } f^* \simeq f.$$

Доказательство[1]. Пусть $\mathscr{X}^* = f^{-1}(\overline{G})$ и $F = \mathscr{X}^* - f^{-1}(G)$. Так как $\dim(\mathscr{X}^* - F) \leqslant r-1$, то существует (ср. § 28, IX, теорема 1) непрерывное продолжение $g\colon \mathscr{X}^* \to \overline{G}$ отображения $f|F$, такое, что $\dim g(\mathscr{X}^* - F) \leqslant r-1$. Таким образом, существует точка $p \in G - g(\mathscr{X}^* - F)$.

Пусть $r(y)$ обозначает проекцию точки $y \in G$ в $\overline{G} - G$ из точки p ($\overline{G}$ отождествляется с $\mathscr{T}^r$). Положим $f^*(x) = rg(x)$ для $x \in \mathscr{X}^*$ и $f^*(x) = f(x)$ для $x \in \mathscr{X} - f^{-1}(G)$.

Теорема 2. *При тех же предположениях относительно $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и f пусть $P = (p_1, \ldots, p_m)$ — конечное множество точек, в которых пространство $\mathscr{Y}$ локально евклидово (размерности r). Тогда существует непрерывное отображение $f^*\colon \mathscr{X} \to (\mathscr{Y} - P)$, такое, что $f^* \simeq f$.*

Доказательство. Это утверждение при $m = 1$ следует непосредственно из теоремы 1. Предположим, что оно имеет место для $m-1$; тогда его можно вывести из теоремы 1, если $\mathscr{Y}$ заменить на $\mathscr{Y} - (p_1, \ldots, p_{m-1})$.

IV. Дополнительные свойства сферы. Используя обозначения (4) — (6) п. II, можно получить следующие теоремы[2]:

Теорема 1. *Множество $\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n$ есть деформационный ретракт множества $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n - (p)$ для каждой точки $p \in (\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n) - (\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n)$.*

Теорема 2. *Множество $\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n$ есть деформационный ретракт множества $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n - (p)$ для каждой точки $p \in (\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n) - (\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n)$.*

Теорема 3[3]. *Если F_1, F_2, F_3 — три члена правой части формулы* (5) *п.* II, *то множество $\mathscr{U}_n$ есть деформационный ретракт множества $\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n - (p_1, p_2, p_3)$, где $p_i \in F_i - \mathscr{U}_n$.*

---

1) Ср. Гуревич и Уолмен [1, гл. VI, § 1].
2) Доказательства теорем 1 и 2 см. Спаньер [1, стр. 209]. Ср. Борсук [20].
3) Ср. Борсук [26].

Доказательство. Принимая во внимание теорему 1, легко показать, что $F_i \cap (F_j \cup F_k)$ — деформационный ретракт множества $F_i - p_i$ (где $i \neq j \neq k \neq i$). Так как $F_i - p_i$ — абсолютный окрестностный ретракт, пусть (ср. с теоремой 6 § 54, IV)

$$h_i\colon (F_i - p_i) \times \mathscr{I} \to (F_i - p_i)$$

— непрерывная функция, такая, что

$$h_i(x, 0) = x, \quad h_i(x, 1) \in F_i \cap (F_j \cup F_k) \text{ для каждого } x,$$
$$h_i(x, t) = x \text{ для } x \in F_i \cap (F_j \cup F_k) \text{ и } t \in \mathscr{I}.$$

Положим $h(x, t) = h_i(x, t)$ для $x \in F_i - p_i$; отсюда следует требуемое заключение, так как

$$\mathscr{U}_n = \bigcup F_i \cap (F_j \cup F_k), \quad \text{где} \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

V. Группа $\mathfrak{E}(\mathscr{S}_n^X)$ при $\dim X \leqslant 2n - 2$. В теореме 1 (а также в теоремах 3 и 4) можно заменить это неравенство менее ограничительным условием

$$(1) \qquad \dim X \leqslant 2n - 1.$$

Будем пользоваться обозначениями п. IV. Принимая во внимание теорему п. II, достаточно показать, что условия (i′), (ii′), (iii) и (iv) п. II удовлетворяются, если под соотношением $f \approx g$ понимать, что f и g принадлежат одному и тому же элементу группы $\mathfrak{E}(\mathscr{S}_n^X)$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi = (f, g, h) \in (\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n)^X$. *Тогда существует функция* $\varphi' \in \mathscr{U}_n^X$, *такая, что* $\varphi' \simeq \varphi$.

Доказательство. Пусть

$$p \in (\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n) - (\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n).$$

По теореме 1 п. III (где $r = 3n$) существует непрерывная функция $\psi\colon X \to [\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n - (p)]$, такая, что $\psi \simeq \varphi$. Так как $\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n$ есть деформационный ретракт множества $\mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n \times \mathscr{S}_n - (p)$ (согласно теореме 2 п. IV), то по теореме 5 § 54, IV существует непрерывная функция $\psi^*\colon X \to \mathscr{S}_n \vee \vee \mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n$, такая, что $\psi^* \simeq \psi$; следовательно, $\psi^* \simeq \varphi$.

Пусть $p_i \in F_i - \mathscr{U}_n$, $i = 1, 2, 3$. По теореме 2 п. III (где $r = 2n$) существует непрерывная функция $\psi'\colon X \to [\mathscr{S}_n \vee \mathscr{S}_n \vee \vee \mathscr{S}_n - (p_1, p_2, p_3)]$, такая, что $\psi' \simeq \psi^*$. Наконец, по теореме 3 п. IV из теоремы 5 § 54, IV следует, что существует непрерывная функция $\varphi'\colon X \to \mathscr{U}_n$, такая, что $\varphi' \simeq \psi'$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi=(f_0, f_1)\in(\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n)^X$, $\psi=(g_0, g_1)\in\in(\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n)^X$ *и* $\varphi\approx\psi$ *(относительно* $\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_n$*). Тогда* $f_0f_1\simeq g_0g_1$ *(относительно* $\mathscr{S}_n$*).*

Доказательство. Сначала предположим, что $\varphi\simeq\psi$, и покажем, что $f_0f_1\simeq g_0g_1$.

По предположению существует непрерывная функция h: $X\times\times\mathcal{J}\to\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_n$, такая, что $h(x, 0)=\varphi(x)$ и $h(x, 1)=\psi(x)$. Пусть $p\in(\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_n)-(\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n)$. Так как $\dim(X\times\mathcal{J})\leqslant 2n-1$, то по теореме 1 п. III существует непрерывное отображение h^*: $X\times\mathcal{J}\to[\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_n-(p)]$, где $h^*(x, t)=h(x, t)$, если $h(x, t)\in\in(\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n)$.

Отсюда следует, что $h^*(x, 0)=h(x, 0)$ и $h^*(x, 1)=h(x, 1)$. Таким образом, функции φ и ψ гомотопны относительно множества $\mathscr{S}_n\times\mathscr{S}_n-(p)$, а потому (ср. § 54, I, теорема 4a) относительно множества $\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n$, являющегося его ретрактом (согласно теореме 1 п. IV).

Следовательно, существует непрерывная функция α: $X\times\times\mathcal{J}\to\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n$, такая, что

$$\alpha(x, 0)=\varphi(x)=[f_0(x), f_1(x)],$$
$$\alpha(x, 1)=\psi(x)=[g_0(x), g_1(x)].$$

Пусть α^0 и α^1 — координаты α, т. е.

$$\alpha(x, t)=[\alpha^0(x, t), \alpha^1(x, t)].$$

Так как функции α^0 и α^1 мультипликативны, можно положить

$$\beta(x, t)=\alpha^0(x, t)\cdot\alpha^1(x, t).$$

Так как умножение точек $p\cdot q$ есть непрерывная функция на $\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n$, то функция β: $X\times\mathcal{J}\to\mathscr{S}_n$ непрерывна. Более того,

$$\beta(x, 0)=f_0(x)\cdot f_1(x) \quad \text{и} \quad \beta(x, 1)=g_0(x)\cdot g_1(x),$$

а это означает, что $f_0\cdot f_1\simeq g_0\cdot g_1$.

Рассмотрим общий случай, когда $\varphi\approx\psi$. Если F — произвольное компактное подмножество X, то $\varphi|F\approx\psi|F$, так что $\varphi|F\simeq\psi|F$, и поэтому $(f_0\cdot f_1)|F\simeq(g_0\cdot g_1)|F$, как уже было доказано. На основании следствия 2a § 54, VIII отсюда вытекает, что $f_0\cdot f_1\approx g_0\cdot g_1$.

Теорема 3. *Каждой функции* $f\in\mathscr{S}_n^X$ *соответствует пара функций* $(g, h)\in(\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n)^X$*, такая, что*

$$g\simeq f, \quad h\simeq 1:f \quad \text{и} \quad g\cdot h\simeq 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{S}_n^+$ и $\mathscr{S}_n^-$ обозначают, как обычно, две (замкнутые) полусферы $\mathscr{S}_n$; положим

$$k(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\in\mathscr{S}_n^+, \\ 1:f(x), & \text{если } f(x)\in\mathscr{S}_n^-. \end{cases}$$

Тогда k: $X\to\mathscr{S}_n$ — непрерывная функция, так как $p=1:p$ для $p\in\mathscr{S}_n^+\cap\mathscr{S}_n^-=\mathscr{S}_{n-1}$.

Более точно, k: $X\to\mathscr{S}_n^+$ — непрерывная функция, так как из $p\in\mathscr{S}_n^-$ следует, что $(1:p)\in\mathscr{S}_n^+$. А поскольку множество $\mathscr{S}_n^+$ — абсолютный ретракт, то $k\simeq 1$.

Пусть φ: $\mathscr{S}_n\to\mathscr{S}_n$ — такое отображение, что $\varphi(\mathscr{S}_n^-)=1$ и $\varphi(y)\simeq y$. Полагая

$$g=\varphi(f) \quad\text{и}\quad h=\varphi(1:f),$$

получаем

$$g\simeq f \quad\text{и}\quad h\simeq 1:f.$$

Далее, отображение (g, h): $X\to\mathscr{S}_n\vee\mathscr{S}_n$ непрерывно. Действительно,

$$[f(x)\in\mathscr{S}_n^+]\Rightarrow[(1:f(x))\in\mathscr{S}_n^-]\Rightarrow[\varphi(1:f(x))=1]\Rightarrow[h(x)=1],$$
$$[f(x)\in\mathscr{S}_n^-]\Rightarrow[\varphi f(x)=1]\Rightarrow[g(x)=1].$$

Остается показать, что $gh\simeq 1$ и, следовательно, что $gh\simeq k$.

Напомним, что $\varphi(y)\simeq y$; пусть α: $\mathscr{S}_n\times\mathscr{J}\to\mathscr{S}_n$ — непрерывная функция, такая, что

$$\alpha(y, 0)=\varphi(y), \quad \alpha(y, 1)=y,$$

и пусть

$$u(x, t)=\begin{cases} \alpha[f(x), t], & \text{если } f(x)\in\mathscr{S}_n^+, \\ \alpha[(1:f(x)), t], & \text{если } f(x)\in\mathscr{S}_n^-. \end{cases}$$

Очевидно, что u: $X\times\mathscr{J}\to\mathscr{S}_n$ непрерывно. Более того,

(i) если $f(x)\in\mathscr{S}_n^+$, то $u(x, 0)=\alpha[f(x), 0]=\varphi f(x)=g(x)=$ $=g(x)\cdot h(x)$, так как $h(x)=1$; кроме того, $u(x, 1)=\alpha[f(x), 1]=$ $=f(x)=k(x)$;

(ii) если $f(x)\in\mathscr{S}_n^-$, то $u(x, 0)=\alpha[(1:f(x)), 0]=\varphi[1:f(x)]=$ $=h(x)=g(x)\cdot h(x)$, так как $g(x)=1$; более того, $u(x, 1)=$ $=\alpha[(1:f(x)), 1]=1:f(x)=k(x)$.

Таким образом, в обоих случаях $u(x, 0)=g(x)\cdot h(x)$ и $u(x, 1)=k(x)$, откуда следует, что $gh\simeq k$.

Теорема 4. *Из* $(f\approx g)$ *вытекает, что* $(1:f)\approx(1:g)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $f \simeq g$. Тогда существует непрерывная функция h: $X \times \mathcal{I} \to \mathcal{S}_n$, такая, что $h(x, 0) = f(x)$ и $h(x, 1) = g(x)$. Положим $k(x, t) = 1 : h(x, t)$; тогда k — непрерывная функция, k: $X \times \mathcal{I} \to \mathcal{S}_n$, $k(x, 0) = 1 : f(x)$ и $k(x, 1) = 1 : g(x)$. Следовательно, $(1 : f) \simeq (1 : g)$.

В общем случае, когда $f \approx g$, пусть F — компактное подмножество X. Тогда $(f \mid F) \simeq (g \mid F)$, откуда следует, как мы только что доказали, что $(1 : f) \mid F \simeq (1 : g) \mid F$. Так как F — произвольное компактное подмножество X, то отсюда в силу следствия 2а § 54, VIII вытекает, что $(1 : f) \approx (1 : g)$.

Теорема 5. *Если* $\dim X \leqslant 2n - 2$, *то* $\mathfrak{G}(\mathcal{S}_n^X)$ — *абелева группа относительно когомотопного умножения ее элементов, определенного условием* II (1).

Теорема 6. *В предыдущей теореме пространство* $\mathcal{S}_n$ *можно заменить пространством* $\mathcal{P}_{n+1}$.

Доказательство. Мы должны показать, что в теоремах 1 — 4 можно сделать эту замену.

1. Прежде всего заметим, что для каждой непрерывной функции f: $X \to \mathcal{P}_{n+1}$ (ср. § 54, IV, примеры) мы имеем

$$(2) \qquad f \simeq \vec{f}, \quad \text{где} \quad \vec{f}(x) = f(x) : |f(x)|.$$

Далее, предположим, что $\varphi \in (\mathcal{P}_{n+1}^3)^X$; тогда $\varphi \simeq \vec{\varphi} \in (\mathcal{S}_n^3)^X$ и $\vec{\varphi} \simeq \varphi' \in \mathcal{U}_n^X$.

2. Сначала заметим, что если $F \subset X$, а f_0 и f_1 мультипликативны, то

$$(3) \qquad (f_2 = f_0 \cdot f_1) \Rightarrow (f_2 \mid F) = (f_0 \mid F) \cdot (f_1 \mid F).$$

Пусть $\varphi = (f_0, f_1) \in (\mathcal{P}_{n+1} \vee \mathcal{P}_{n+1})^X$, $\psi = (g_0, g_1) \in (\mathcal{P}_{n+1} \vee \mathcal{P}_{n+1})^X$ и $\varphi \simeq \psi$; тогда $\vec{\varphi} \simeq \vec{\psi}$. Следовательно, по теореме 2

$$\vec{f}_0 \cdot \vec{f}_1 \simeq \vec{g}_0 \cdot \vec{g}_1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{f_0(x)}{|f_0(x)|} \cdot \frac{f_1(x)}{|f_1(x)|} \simeq \frac{g_0(x)}{|g_0(x)|} \cdot \frac{g_1(x)}{|g_1(x)|},$$

так что $f_0 \cdot f_1 \simeq g_0 \cdot g_1$.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\varphi \approx \psi$. Так как для любого компактного подмножества F пространства X мы имеем $\varphi \mid F \simeq \psi \mid F$, то

$$(f_0 \mid F) \cdot (f_1 \mid F) \simeq (g_0 \mid F) \cdot (g_1 \mid F)$$

и, согласно (3), $(f_0 \cdot f_1) \mid F \simeq (g_0 \cdot g_1) \mid F$. Поэтому в силу следствия 2а § 54, VIII $f_0 \cdot f_1 \approx g_0 \cdot g_1$.

3 и 4. Соответствующие доказательства легко получаются из (2).

VI. Группа $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$ для $X \subset \mathscr{E}^n$ и $n \geqslant 2$. В этом пункте мы докажем, что $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$ — *топологическая группа*, если умножение ее элементов (называемое *когомотопным умножением*) определено формулой (1) п. II.

Прежде всего докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *$\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$ — абелева группа.*

Доказательство. Для $n \geqslant 4$ и произвольного подмножества X пространства $\mathscr{E}^n$, а также для $n=3$ и $\dim X \leqslant 2$ теорема 1 вытекает из теоремы 6 п. V (где требуется, чтобы $\dim X \leqslant 2n-4$).

Остается доказать теорему 2 п. V для $n=2$, если X — трехмерное подмножество в $\mathscr{E}^3$.

Сначала рассмотрим случай, когда X — *элементарный континуум*, т. е. X имеет следующий вид:

(0) $X = \mathscr{S}_3 - (R_0 \cup \ldots \cup R_m)$, $\quad \overline{R}_i \cap \overline{R}_j = 0 \quad$ для $\quad i \neq j$,

где $R_0, \ldots, R_m$ — (трехмерные) открытые шары.

Пусть C — объединение поверхностей $\operatorname{Fr}(R_1), \ldots, \operatorname{Fr}(R_m)$ и попарно не пересекающихся дуг, соединяющих каждую из этих поверхностей со следующей. Пусть

(1) $\quad \varphi = (f_0, f_1) \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^X, \quad \psi = (g_0, g_1) \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^X$

и $\quad \varphi \simeq \psi.$

Покажем, что

(2) $$f_0 \cdot f_1 \simeq g_0 \cdot g_1.$$

Так как $\dim C = 2$, то (2) имеет место на C, согласно теореме 5 п. V. Поэтому (2) имеет место также на всем континууме X, ибо (см. теорему 1 § 54, IV) C — его деформационный ретракт [1]).

Теперь рассмотрим случай, когда X — произвольное *компактное* подмножество $\mathscr{E}^3$. Предположим, что выполняются соотношения (1). Для того чтобы доказать (2), достаточно (как мы только что показали) убедиться в существовании элементарного континуума $X^* \supset X$ и функций φ^* и ψ^*, таких, что

(3) $\quad \varphi \subset \varphi^* \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^{X^*}, \quad \psi \subset \psi^* \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^{X^*}$

и $\quad \varphi^* \simeq \psi^* \quad$ (относительно $\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2$).

---

[1]) Простое доказательство этого утверждения см. Борсук [23, стр. 229].

Согласно теореме 9 § 59, II, каждая из функций f_0 и f_1 имеет непрерывное продолжение на сферу $\mathscr{S}_3$, из которой выброшено конечное число точек.

Поэтому существует элементарный континуум $X^* \supset X$, такой, что

(4) $$\varphi \subset \varphi' \in (\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2)^{X^*}.$$

То же самое имеет место для ψ. Более того, так как $\psi \simeq \varphi$ (согласно (1)), то функцию ψ можно продолжить, не нарушая этой гомотопии (см. теорему 3 § 54, II), т. е. следующим образом:

(5) $$\psi \subset \psi' \in (\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2)^{X^*} \quad \text{и} \quad \psi' \simeq \varphi'.$$

Пусть $p \in (\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2) - (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)$. Так как $\dim X^* = 3$, $\dim(\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2) = 4$ и $\varphi(X) \subset \mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2$, то по теореме 1 п. III (если $\mathscr{Y}$ заменить на $\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2$, $\mathscr{X}$ — на X^*, f — на φ' и положить $r = 4$) существует непрерывная функция φ^*: $X \to [\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2 - (p)]$, такая, что $\varphi \subset \varphi^* \simeq \varphi'$. Более того, так как $\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2$ — деформационный ретракт множества $\mathscr{S}_2 \times \mathscr{S}_2 - (p)$ (согласно теореме 1 п. IV), то можно считать (ср. § 54, IV, теорема 5), что $\varphi^*(X^*) \subset \mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2$. Следовательно,

(6) $$\varphi \subset \varphi^* \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^{X^*}, \quad \varphi^* \simeq \varphi',$$

и аналогично

(7) $$\psi \subset \psi^* \in (\mathscr{S}_2 \vee \mathscr{S}_2)^{X^*}, \quad \psi^* \simeq \psi'.$$

Из соотношений (5)—(7) вытекает (3).

Таким образом, наша теорема доказана для компактных множеств X.

Наконец, предположим, что X — *произвольное* подмножество $\mathscr{E}^3$, что выполняются первые два соотношения (1) и что $\varphi \approx \psi$. Тогда $\varphi | F \simeq \psi | F$ для каждого компактного подмножества F множества X. Как мы только что показали, при этом

$$(f_0 | F) \cdot (f_1 | F) \simeq (g_0 | F) \cdot (g_1 | F),$$

следовательно,

$$(f_0 \cdot f_1) | F \simeq (g_0 \cdot g_1) | F,$$

согласно формуле (3) п. V. А отсюда на основании следствия 2а § 54, VIII получаем, что $f_0 \cdot f_1 \approx g_0 \cdot g_1$.

Теорема 2. *Пусть F — компактное подмножество X. Положим $R_F(\Gamma) = \Gamma | F$. Тогда отображение R_F: $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X) \to \mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^F)$ представляет собой гомоморфизм.*

Другими словами,

(8) $(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2) | F = (\Gamma_1 | F) \cdot (\Gamma_2 | F)$ *и* $(\Gamma_1 : \Gamma_2) | F = (\Gamma_1 | F) : (\Gamma_2 | F)$,

т. е. (ср. с обозначениями II, (2) и (3))

(9) $(f_1 \cdot f_2)|F \approx (f_1|F) \cdot (f_2|F)$ *и* $(f_1 : f_2)|F \approx (f_1|F) : (f_2|F)$.

Доказательство. Пусть $g \in (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)|F$. Тогда существует $f \in (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)$, такое, что $g = f|F$. Следовательно, $f \approx f_0 = f_1 \cdot f_2$, где $f_1 \in \Gamma_1$ и $f_2 \in \Gamma_2$. Отсюда следует, что (ср. V (3))

$$f|F \approx f_0|F = (f_1|F) \cdot (f_2|F), \quad \text{поэтому} \quad f|F \in (\Gamma_1|F) \cdot (\Gamma_2|F).$$

Таким образом, включение левой части (8) в правую доказано.

Обратно, пусть $g \in (\Gamma_1|F) \cdot (\Gamma_2|F)$. Пусть f_1 и f_2 — две мультипликативные функции, принадлежащие соответственно Γ_1 и Γ_2. Тогда

$$g \approx (f_1|F) \cdot (f_2|F) = (f_1 \cdot f_2)|F, \quad \text{откуда} \quad g \in (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2|F).$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Напомним обозначение $S_{F_0F_1}$, использованное в § 54, IX (для компактных F_0 и F_1):

$$S_{F_0F_1}(\Lambda) = \Lambda|F_0 \quad \text{для} \quad F_0 \subset F_1 \quad \text{и} \quad \Lambda \in \mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^{F_1}).$$

Согласно теореме 2, отображение $S_{F_0F_1}$: $\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^{F_1}) \to \mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^{F_0})$ — *гомоморфизм*. Более того, по теореме 1 § 57, IX это отображение *непрерывно*.

Отсюда в силу теоремы 5 § 57, IX вытекает следующая

Теорема 3. $\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^X) \subset \underset{\text{gr. top. } F,\ F_0 \subset F_1}{\mathrm{Lim}} \{\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^F),\ S_{F_0F_1}\}$, *где F пробегает все компактные подмножества X и где $\underset{\text{gr. top.}}{\subset}$ обозначает изоморфное и гомеоморфное вложение.*

Именно, отображение $R = \{R_F\}$ представляет собой искомый изо-гомеоморфизм; оно ставит в соответствие каждому $\Gamma \in \mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^X)$ элемент $\{\Gamma|F\}$ рассматриваемого предела обратного спектра.

Теорема 4. $\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^X)$ — *топологическая группа.*

Это следует из теоремы 1 § 55, VII (ибо указанный выше предел обратного спектра является подгруппой произведения $\prod\limits_F \mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^F)$ топологических (дискретных) групп).

Теорема 5. *Пусть X локально компактно и, следовательно,*

$$X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \quad \text{где } F_i \text{ компактно и } F_i \subset \mathrm{Int}_X(F_{i+1}).$$

Тогда

$$\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^X) \underset{\text{gr. top.}}{=} \underset{i,\ i \leqslant k}{\mathrm{Lim}} \{\mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^{F_i}),\ S_{F_iF_k}\}.$$

А именно, R есть отображение на. Это следует из теоремы 6 § 54, IX.

VII. Группа $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X)$, где X — компактное подмножество $\mathscr{E}^n$. Отношение $\approx$ будет иметь тот же смысл, что и в п. II.

Теорема 1. *Каждой непрерывной функции f: $\mathscr{S}_{n-1} \to \mathscr{P}_n$ соответствует целое число k, такое, что $f(x) \approx x^k$.*

Кроме того, *если $x^m \approx 1$, то $m = 0$* [1]).

Отсюда немедленно вытекает

Теорема 2. *Если X — поверхность n-мерного шара с центром p, то $f(x) \approx (x-p)^k$ для каждой непрерывной функции f: $X \to \mathscr{P}_n$.*

Более того, $(x-p)^m \approx 1$ *только тогда, когда $m = 0$.*

Теорема 3. *Пусть X — произвольное компактное подмножество $\mathscr{E}^n$, и пусть $R_0, R_1, \ldots$ — последовательность (конечная или бесконечная) компонент множества $\mathscr{S}_n - X$. Пусть $p_i \in R_i$ для $i = 1, 2, \ldots$, и пусть $\infty \in R_0$.*

Каждой функции $f \in \mathscr{P}_n^X$ соответствует конечная система целых чисел $k_1, \ldots, k_m$, такая, что ($\hat{f}$ обозначает компоненту $\mathscr{P}_n^X$, содержащую f)

(1) $$\hat{f} = (\widehat{x-p_1})^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (\widehat{x-p_m})^{k_m}.$$

Иными словами [2]),

(2) $$f(x) \approx (x-p_1)^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x-p_m)^{k_m}.$$

Более того, *если $\mathscr{S}_n - X = R_0$, то $f \approx 1$* (и группа $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X)$ сводится к нейтральному элементу).

Доказательство. Так как функцию f можно продолжить на $\mathscr{S}_n$ с конечным числом выброшенных точек p_i (теорема 9 § 59, II) и, следовательно, на элементарный континуум, то доказательство сводится (в силу VI (9)) к случаю, когда X — элементарный континуум, т. е. когда X имеет вид VI (0) (если там 3 заменить на n).

Положим $X = C_m$ ($m \geqslant 0$) и применим индукцию по m.

1) Если $m = 0$, то $\mathscr{S}_n - X = R_0$ и, следовательно, дополнение X связно. Тогда $f \simeq 1$, согласно теореме 10 § 59, II.

---

[1]) Доказательство первой части см. Борсук [23, стр. 231]. Доказательство второй части, которая существенно опирается на теорему Брауэра (о степени отображения), см., например Стинрод и Эйленберг [1] или Хилтон [1, стр. 29, теоремы 2—6]. Все известные доказательства этой части теоремы Брауэра используют алгебраическую топологию.

[2]) Ср. Куратовский [48], Гранас [1, стр. 46].

2) Пусть $m>0$; предположим, что теорема справедлива для $m-1$. Пусть

$$A_m = \overline{R}_m - R_m \quad \text{и} \quad C_{m-1} = \mathscr{S}_n - (R_0 \cup \ldots \cup R_{m-1}).$$

По теореме 2 существует целое число k_m, такое, что

$$(3) \qquad f(x) \approx (x-p_m)^{k_m} \quad \text{на} \quad A_m.$$

Положим $\Gamma = \widehat{f} \cdot \widehat{(x-p_m)}^{-k_m}$. Пусть $g \in \Gamma$. Другими словами,

$$(4) \qquad g(x) \approx f(x) \cdot (x-p_m)^{-k_m} \quad \text{на} \quad C_m.$$

Согласно (3), $g \approx 1$ на A_m, поэтому $g \simeq 1$ на A_m. Следовательно, по теореме 9 § 59, II существует непрерывная функция $g^*\colon C_m \cup R_m \to \mathscr{S}_n$, такая, что $g \subset g^*$. Так как $C_m \cup R_m = C_{m-1}$, то $g^*\colon C_{m-1} \to \mathscr{S}_n$. Поскольку наша теорема справедлива для $m-1$ (по предположению), то

$$(5) \quad g^*(x) \approx (x-p_1)^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x-p_{m-1})^{k_{m-1}} \quad \text{на} \quad C_{m-1}.$$

Так как $g^*(x) = g(x)$ для $x \in C_m$, то из (5) и VI (9) следует, что

$$(6) \qquad g(x) \approx (x-p_1)^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x-p_{m-1})^{k_{m-1}} \quad \text{на} \quad C_m.$$

Таким образом, соотношение (2) получается в результате деления (4) на (6).

Теорема 4. *Пусть F — замкнутое подмножество X, разделяющее каждую пару точек множества $\mathscr{S}_n - X$, которая разделяется множеством X. Пусть $f\colon X \to \mathscr{S}_n$ — непрерывная функция. Если $f \simeq 1$ на F, то $f \simeq 1$ на X.*

В частности, *если* $f \simeq 1$ *на* $\mathrm{Fr}(X)$, *то* $f \simeq 1$ *на* X.

Доказательство. Пусть R — произвольная компонента множества $\mathscr{S}_n - X$. Так как $\mathscr{S}_n - X \subset \mathscr{S}_n - F$, то существует компонента T множества $\mathscr{S}_n - F$, такая, что $R \subset T$. Отсюда

$$(7) \qquad R = T - X.$$

Действительно, если $p \in T - X - R$ и $q \in R$, то точки p и q разделяются множеством X и не разделяются множеством F, а это противоречит нашему предположению.

Так как $f|F \simeq 1$ по условию, то существует (согласно теореме 7 § 54, II) функция g, такая, что

$$(8) \qquad (f|F) \subset g \in \mathscr{P}_n^{\mathscr{S}_n}.$$

Положим

$$(9)\qquad h(x)=\begin{cases} g(x) & \text{для} \quad x\in\mathscr{S}_n-T,\\ f(x) & \text{для} \quad x\in X\cap\overline{T}.\end{cases}$$

Эти условия совместны, ибо

$$(\mathscr{S}_n-T)\cap(X\cap\overline{T})\subset\overline{T}-T=\operatorname{Fr}(T)\subset F.$$

Так как, с другой стороны (ср. (7)),

$$(\mathscr{S}_n-T)\cup(X\cap\overline{T})=(\mathscr{S}_n-T)\cup X=\mathscr{S}_n-R,$$

то отображение $h\colon \mathscr{S}_n-R\to\mathscr{P}_n$ непрерывно, а так как дополнение множества $\mathscr{S}_n-R$ связно (оно совпадает с R), то $h\simeq 1$ по теореме 10 § 59, II. Отсюда следует, что

$$(10)\qquad f\simeq 1 \quad \text{на} \quad \operatorname{Fr}(R),$$

поскольку из включений $\operatorname{Fr}(R)\subset X$ и $\operatorname{Fr}(R)\subset\overline{R}\subset\overline{T}$ вытекает (согласно (9)), что $f(x)=h(x)$ для $x\in\operatorname{Fr}(R)$.

Так как (10) имеет место для каждой компоненты R множества $\mathscr{S}_n-X$, то по теореме 9 § 59, II $f\simeq 1$ на X.

Теорема 5. *При предположениях теоремы* 3 (*где* $\mathscr{S}_n-X\neq R_0$) *элементы* $\widehat{x-p_1}$, $\widehat{x-p_2}$, ... *группы* $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X)$ *линейно независимы.*

Другими словами, *имеет место следующая импликация*:

$$(11)\qquad \left[(x-p_1)^{k_1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-p_m)^{k_m}\approx 1 \text{ на } X\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow[k_1=0,\ \ldots,\ k_m=0].$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда X — элементарный континуум (ср. VI (0)). Так как $A_m=\overline{R}_m-R_m\subset X$, то по предположению

$$(12)\qquad (x-p_1)^{k_1}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-p_m)^{k_m}\approx 1 \quad \text{на} \quad A_m.$$

С другой стороны, так как точки $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ принадлежат (связному) множеству $\mathscr{S}_n-\overline{R}_m$, то (ср. с теоремой 10 § 59, II)

$$(13)\quad x-p_1\simeq 1,\ \ldots,\ x-p_{m-1}\simeq 1 \text{ на } \overline{R}_m \text{ и потому на } A_m.$$

На основании (12) и (13) $(x-p_m)^{k_m}\approx 1$ на A_m. Следовательно, согласно теореме 2, $k_m=0$ (так как A_m — поверхность шара R_m). Таким образом, $k_i=0$ для $i=1, \ldots, m$.

Итак, для случая, когда X — элементарный континуум, теорема доказана.

В общем случае заключим каждую точку p_i, где $i=1, 2, \ldots, m$ (для данного m), в шар $Q_i\subset R_i$ и рассмотрим элементарный континуум $X^* = \mathcal{S}_n - (Q_1 \cup \ldots \cup Q_m)$. Тогда $X \subset X^*$ и X разделяет каждую пару точек множества $\mathcal{S}_n - X^*$, которые разделяются множеством X^*. Если левая часть импликации (11) имеет место на X, то она имеет место и на X^* (по теореме 4, где нужно X подставить вместо F и X^* — вместо X). Отсюда вытекает, как мы только что показали, что правая часть импликации (11) также имеет место.

Из теорем 3 и 5 вытекает следующая

Теорема 6. *Группа $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$ порождается конечной или бесконечной последовательностью $x - p_1$, $x - p_2$, ... (если только она не сводится к нейтральному элементу; это происходит в случае $\mathcal{S}_n - X = R_0$).*

Другими словами, *в формуле* (2) *показатели степени $k_i \neq 0$ определяются однозначно. Более того, они не зависят от выбора точек p_i в R_i.*

Доказательство. Последняя часть теоремы вытекает из того, что $x - p_i \simeq x - q_i$ на X, если p_i и q_i принадлежат R_i (и, следовательно, некоторой дуге в R_i).

Из теоремы 6 немедленно следует, что

$$(14) \qquad \mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathcal{J}^m, \text{ соответственно } \mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathcal{J}^{\omega},$$

в зависимости от того, конечно число компонент (скажем, $m+1$) или бесконечно.

Отсюда можно получить следующую *теорему инвариантности* (при $n = 2$ ср. с теоремой 4 § 62, IV):

Теорема 7. *Число (непустых) отделимых частей, на которые $\mathcal{S}_n$ разбивается произвольным множеством $A \subset \mathcal{E}^n$, есть внутренний инвариант* [1]).

Теорема 8. *Если X — произвольное подмножество (компактное или нет) пространства $\mathcal{E}^n$, то группа $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$ содержит счетное (или конечное) множество $\mathfrak{G}$, такое, что группа $\tilde{\mathfrak{G}}$, порождаемая $\mathfrak{G}$, всюду плотна в $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$. Поэтому пространство $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$ сепарабельно.*

Более точно, *пусть Q_0, Q_1, ... — последовательность (конечная или бесконечная) различных квазикомпонент множества*

[1]) Доказательство этой теоремы (в случае когда A компактно), не использующее ни упомянутую теорему Брауэра, ни теорию гомологий, см. Борсук [23]; случай произвольного множества A (который выводится отсюда) см. Куратовский [43]. См. также Эйленберг [13]. Теорема 7 (для компактного A) представляет собой частный случай теоремы двойственности Александера.

$Y = \mathcal{S}_n - X$, удовлетворяющая условию (6) § 58, II (где $\mathcal{X}$ нужно заменить на $\mathcal{S}_n - X$), и пусть $p_i \in Q_i$ при $i > 0$ и $\infty \in Q_0$. Тогда

$$\mathfrak{G} = (\widehat{x - p_1}, \widehat{x - p_2}, \ldots)$$

есть искомое множество.

Доказательство. Согласно теореме 3 § 54, IX, достаточно показать, что $\widehat{\mathfrak{G} \mid F} = \mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$ для любого компактного подмножества F множества X. Но это прямое следствие теоремы 6, так как компоненты $(\overline{x - p_i}) \mid F$, $i = 1, 2, \ldots$, пространства $\mathcal{P}_n^F$ образуют множество $\mathfrak{G} \mid F$.

Замечания. 1. Следующее утверждение (которое обобщает теорему Борсука (§ 59, II, 10) на некомпактные множества) является частным случаем теоремы 6:

Множество $\mathcal{S}_n - X$ связно тогда и только тогда, когда связно пространство $\mathcal{P}_n^X$ [1]).

2. Как мы уже видели (теорема 3 § 53, III), если $\mathcal{X}$ компактно и $\mathcal{Y}$ — абсолютный окрестностный ретракт, то компоненты пространства $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ дугообразно связны. Следует заметить, что предположение компактности нельзя опустить даже в случае, когда $\mathcal{Y} = \mathcal{P}_2$.

Более того, *если X — подмножество плоскости, такое, что множество $\mathcal{S}_n - X$ связно, но не является полуконтинуумом, то пространство $\mathcal{P}_2^X$ связно, но не является дугообразно связным.*

Это утверждение следует непосредственно из теоремы, сформулированной в предыдущем замечании, и из теоремы Эйленберга (теоремы 1 § 62, II).

3. По теореме 4 § 56, X (в сочетании с теоремой 3 п. IX и теоремой 6 § 54, I) если X — открытое подмножество $\mathcal{E}^2$, то компоненты $\mathcal{P}_2^X$ дугообразно связны. Однако для $\mathcal{E}^3$ это не так. Другими словами, *существует открытое подмножество X пространства $\mathcal{E}^3$, такое, что $\mathcal{P}_3^X$ содержит две функции, которые не гомотопны, хотя они гомотопны на любом компактном подмножестве X* [2]).

Отсюда следует, *что отношение гомотопии не замкнуто.*

4. Назовем компоненту *рациональной*, если она имеет вид

$$\Gamma_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \Gamma_m^{k_m}, \quad \text{где} \quad \Gamma_i = \widehat{(x - p_i) \mid X}.$$

---

[1]) Более прямое доказательство см. Куратовский [49].

[2]) См. Стинрод [2].

По теореме 8 семейство рациональных компонент всюду плотно в пространстве $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$.

В частном случае, когда X — *открытое* подмножество $\mathcal{E}^n$ (или, более общо, локально компактное подмножество), пространство $\mathfrak{C}(\mathcal{P}_n^X)$ метризуемо (следствие 6а § 54, IX) и, следовательно, *каждая компонента пространства $\mathcal{P}_n^X$ есть предел рациональных компонент*.

Это утверждение является замечательным обобщением теоремы Рунге на пространство $\mathcal{E}^n$ (в случае $n=2$ см. более точное утверждение в § 62, VII, теорема 2).

5. Теорему инвариантности (теорему 7) в случае, когда A компактно, можно распространить на отображения, *более общие, чем гомеоморфизмы* [1]).

А именно, пусть A и B — компактные подмножества $\mathcal{E}^n$, и пусть h: $A \to B$ — непрерывное отображение на, такое, что [2])

(i) $h[\mathrm{Fr}(A)] = \mathrm{Fr}(B)$,

(ii) $h[\mathrm{Int}(A)] = \mathrm{Int}(B)$,

(iii) сужение $h|\mathrm{Fr}(A)$ взаимно однозначно.

Более того, предположим, что множество $\mathcal{S}_n - \mathrm{Fr}(A)$ имеет конечное число компонент.

Тогда множества $\mathcal{S}_n - B$ и $\mathcal{S}_n - A$ имеют одно и то же число компонент [3]).

6. К тому же кругу идей относится следующая теорема [4]):

Пусть A и B — два компактных подмножества $\mathcal{E}^n$, F — замкнутое подмножество A и h: $A \to B$ — непрерывное отображение на, при котором F отображается на $\mathrm{Fr}(B)$ взаимно однозначно.

При этих условиях *число компонент множества $\mathcal{S}_n - B$ меньше или равно числу компонент множества $\mathcal{S}_n - A$* [5]).

7. Добавим, что условия (i) — (iii) эквивалентны условию (iii) в сочетании со следующим условием:

(iv) $$h[\mathrm{Fr}(A)] \cap h[\mathrm{Int}(A)] = 0 \text{ [6])}.$$

---

[1]) См. Куратовский [47].

[2]) Ср. эти условия с теми условиями, которые определяют «исчезающие» отображения (открытых множеств) в смысле Ситникова [1].

[3]) Если A и B — топологические полиэдры, то это свойство инвариантности распространяется на все числа Бетти размерности $\leqslant n-1$ (с рациональными коэффициентами).

По поводу перенесения соответствующих теорем в алгебраическую топологию см. Борсук и Косинский [1] и Косинский [1].

[4]) См. Куратовский [47, стр. 196].

[5]) См. примечание 2.

[6]) Доказательство см. Майкл Дж. [1].

Дополнительные условия, при которых из (i) — (iii) следует, что h — гомеоморфизм, см Уайберн [2, стр. 98], Мак-Оли [1], Мейстерс и Олех [1]. Случай высших размерностей см. Кроцин и Мак-Оли [1].

VIII. Теоремы двойственности для компактного $X \subset \mathscr{E}^n$ ($n \geqslant 2$). Пусть $Y = \mathscr{S}_n - X$. Поставим в соответствие каждой компоненте Γ пространства $\mathscr{P}_n^X$ меру $\mu \in \mathfrak{N}(Y)$, которую мы назовем *кратностью* Γ (см. § 58, III).

Пусть $f\colon X \to \mathscr{P}_n$ — непрерывная функция. Принимая во внимание теорему 3 п. VII и представляя f в форме VII (2), положим по определению

$$(1) \qquad \mu_{R_i} f = k_i \quad \text{для} \quad i > 0, \quad \mu_{R_0} f = -(k_1 + k_2 + \ldots)$$

и назовем $\mu_{R_i} f$ *кратностью* R_i *относительно* f.

Так как, очевидно, умножение инвариантно относительно отношения $f_0 \approx f_1$, то можно писать $\mu_{R_j}\Gamma = k_j$ ($j \geqslant 0$), если $f \in \Gamma$.

Так как открыто-замкнутое подмножество H множества Y можно (единственным образом) представить в виде $H = R_{j_1} \cup R_{j_2} \cup \ldots$, где $j_i \geqslant 0$, то понятие кратности можно распространить на все $H \in (0, 1)^Y$, полагая

$$(2) \qquad \mu_H \Gamma = \mu_{R_{j_1}} \Gamma + \mu_{R_{j_2}} \Gamma + \ldots .$$

Под кратностью Γ, *обозначаемой* $\mu\Gamma$, *мы будем понимать функцию, которая каждому* $H \in (0, 1)^Y$ *сопоставляет целое число* $\mu_H \Gamma$, *определяемое условием* (2).

Легко доказывается следующая

Теорема 1. $\mu_H \Gamma$ *есть алгебраическое число нулей и полюсов правой части формулы* (2) *п.* VII, *принадлежащих* H, *где* f — *произвольный элемент* Γ.

Теорема 2. *Если* X — *компактное подмножество* $\mathscr{E}^n$, *то*

$$(3) \qquad \mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathfrak{N}(Y).$$

Более точно, *изоморфизм группы* $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$ *на* $\mathfrak{N}(Y)$ *определяется сопоставлением каждой компоненте* Γ *множества* $\mathscr{P}_n^X$ *ее кратности* $\mu\Gamma$.

Доказательство. Легко показать, что

(i) $(\mu\Gamma) \in \mathfrak{N}(Y)$,

(ii) μ — *гомоморфизм, т. е.*

$$\mu(\Gamma_0 \cdot \Gamma_1) = \mu(\Gamma_0) + \mu(\Gamma_1),$$

(iii) *отображение* μ *взаимно однозначно, т. е.*

$$(\Gamma_0 = \Gamma_1) \equiv (\mu\Gamma_0 - \mu\Gamma_1),$$

другими словами, *каждое* Γ *определяется своей кратновтью.*

Остается показать, что для данной меры $\nu \in \mathfrak{N}(Y)$ существует $\Gamma \in \mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X)$, такое, что $\mu\Gamma = \nu$. Но для этого достаточно положить

$$\Gamma = (\widehat{x - p_1})^{k_1} \cdot (\widehat{x - p_2})^{k_2} \cdot \ldots,$$

где $k_i = \nu(R_i)$ и $\widehat{x - p_i}$ обозначает компоненту пространства $\mathscr{S}_n^X$, содержащую функцию $x - p_i$.

Теорема 3. *Если F — замкнутое подмножество компактного множества $X \subset \mathscr{E}^n$, то для каждого $\Gamma \in \mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X)$ имеем*

$$(4) \qquad (\mu\Gamma)^G = \mu(\Gamma \mid F), \quad \text{где} \quad G = \mathscr{S}_n - F.$$

Доказательство. Для $H \in (0, 1)^G$ (ср. § 58, IV (1)) имеем

$$(5) \qquad (\mu\Gamma)^G(H) = (\mu\Gamma)(H \cap Y) = \mu_{H \cap Y}\Gamma = \mu_H(\Gamma \mid F),$$

так как (ср. с теоремой 1) алгебраическое число нулей и полюсов каждой функции $f \in \mathscr{S}_n^X$, принадлежащих H и $H \cap Y$, одно и то же (ибо ни один из них не принадлежит X).

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 4. *При тех же предположениях коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^F) \arrow[d, "\mu\Lambda"'] & \mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X) \arrow[l, "\Gamma \mid F"'] \arrow[d, "\mu\Gamma"] \\
\mathfrak{N}(G) & \mathfrak{N}(Y) \arrow[l, "\mu^G"]
\end{tikzcd}$$

IX. Теоремы двойственности для произвольного $X \subset \mathscr{E}^n$. Пусть $Y = \mathscr{S}_n - X$.

Теорема 1. *Если $X \subset \mathscr{E}^n$, то*

$$(1) \qquad \operatorname*{Lim}_{F,\, F_0 \subset F_1} \{\mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^F),\ S_{F_0F_1}\} \underset{\text{gr. top.}}{=} \operatorname*{Lim}_{G,\, G_0 \supset G_1} \{\mathfrak{N}(G),\ \operatorname{ext}_{G_0G_1}\},$$

где, как обычно, F — компактное подмножество X, $G = \mathscr{S}_n - F$, а операции $S_{F_0F_1}$ и $\operatorname{ext}_{G_0G_1}$ определяются, как в п. VI и § 58, IV (11).

А именно, искомый изоморфизм мы определим, положив

$$(2) \qquad \nu_G = \mu\Lambda_F$$

для каждого семейства $\{\Lambda_F\}$, принадлежащего левой части (1), т. е. такого, что

$$(3) \qquad \Lambda_F \in \mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^F) \quad \text{и} \quad \Lambda_{F_1} \mid F_0 = \Lambda_{F_0}, \quad \text{если} \quad F_0 \subset F_1.$$

Доказательство. Достаточно применить теоремы 4 п. VIII и 2 § 55, VII, принимая во внимание следующие утверждения:

(i) $S_{F_0F_1}$ — гомоморфизм группы $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^{F_1})$ в группу $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^{F_0})$ (теорема 2 п. VI);

(ii) $\mathrm{ext}_{G_0G_1}$ — гомоморфизм группы $\mathfrak{R}(G_1)$ в группу $\mathfrak{R}(G_0)$ (§ 58, IV, теорема 4);

(iii) для каждого F операция μ является изоморфизмом группы $\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^F)$ на группу $\mathfrak{R}(G)$ (теорема 2 п. VIII);

(iv) пространства $\mathfrak{R}(\mathscr{P}_n^X)$ и $\mathfrak{R}(G)$ дискретны.

Теорема 2. *Если $X \subset \mathscr{E}^n$, то*

$$\underset{F,\,F_0 \subset F_1}{\mathrm{Lim}} \left\{\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^F),\ S_{F_0F_1}\right\} \underset{\mathrm{gr.\,top.}}{=} \mathfrak{R}(Y). \tag{4}$$

Более точно, *если $\{\Lambda_F\}$ принадлежит левой части* (4), *то искомый изоморфизм μ мы определим, положив для каждого $Z \in (0,1)^Y$*

$$\mu(Z) = \mu_H \Lambda_F, \tag{5}$$

где

$$Z = H \cap Y, \quad H \in (0,\ 1)^G \quad \text{и} \quad G = \mathscr{P}_n - F. \tag{6}$$

Доказательство. Изоморфизм между правыми частями соотношений (1) и (4) (ср. § 55, VIII, теорема 1, и § 58, IV, теорема 6 (8)) определяется формулой

$$\mu(Z) = \nu_G(H). \tag{7}$$

Из условий (7) и (2) непосредственно следует (5).

Следующее определение дает возможность распространить понятие кратности, определенное в п. VIII для компактных множеств X, на произвольные подмножества X пространства $\mathscr{E}^n$.

Определение. Пусть $\Gamma \in \mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X)$. Под *кратностью* Γ мы будем понимать функцию $\mu\Gamma$, определяемую условием

$$\mu_Z\Gamma = \mu_H(\Gamma \mid F), \text{ где } Z \in (0,\ 1)^Y, \tag{8}$$

а H и F удовлетворяют условиям (6).

Число $\mu_Z\Gamma$ называется *кратностью Z относительно* Γ.

Как уже было доказано (ср. § 58, IV (8)), $\mu_Z\Gamma$ не зависит от выбора H и F, если они удовлетворяют условиям (6).

Теорема 3. *Если $X \subset \mathscr{E}^n$, то*

$$\mathfrak{G}(\mathscr{P}_n^X) \underset{\mathrm{gr.\,top.}}{\subset} \mathfrak{R}(Y). \tag{9}$$

Более точно, *топологический изоморфизм группы* $\mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X)$ *на подгруппу группы* $\mathfrak{N}(Y)$ *определяется сопоставлением каждой компоненте* Γ *пространства* $\mathscr{S}_n^X$ *ее кратности* $\mu\Gamma$.

Доказательство. Согласно теореме 3 п. VI, в результате сопоставления компоненте Γ элемента $\{\Gamma \mid F\} \in \prod_F \mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^F)$ (где $\Delta_F = \Gamma \mid F$) определяется изоморфизм левой части (9) в левую часть (4). Далее, применим теорему 2 и условия (5) и (8). Тогда μ — искомый изоморфизм.

Теорема 4. *Пусть* $p \in Y$, $\hat{p}$ — *квазикомпонента* Y, *содержащая* p, *а* $\widehat{x-p}$ — *квазикомпонента* $\mathscr{S}_n^X$, *содержащая функцию* $x-p$. *Тогда*

$$\mu(\widehat{x-p}) = \beta_{\hat{p}} \tag{10}$$

(по поводу обозначений см. § 58, III (2); если $p = \infty$, условимся считать, что $x - p \equiv 1$).

Доказательство. Пусть $Z \in (0, 1)^Y$ и выполняются условия (6); тогда, согласно (8),

$$\mu_Z(\widehat{x-p}) = \mu_H[\widehat{(x-p) \mid F}]. \tag{11}$$

Пусть $p \in Z$ (и поэтому $\hat{p} \subset Z$) и $\infty \in Y - Z$; тогда $p \in H$ и $\infty \notin H$. Следовательно, алгебраическое число нулей и полюсов функции $x - p$, принадлежащих H, равно 1, т. е. $\mu_H[\widehat{(x-p) \mid F}] = 1$, значит, $\mu_Z(\widehat{x-p}) = 1$.

Это число равно 0, если $p, \infty \in Z$.

Требуемое заключение получается отсюда на основании § 58, III (4).

Теорема 4 дает возможность пополнить теорему 3 следующим образом:

$$\overline{\mu\mathfrak{C}(\mathscr{S}_n^X)} = \mathfrak{N}(Y). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — семейство всех компонент, имеющих вид $\widehat{x-p}$, где $p \in Y$, а $\mathfrak{Y}$ — множество мер β_Q, где Q пробегает все квазикомпоненты Y. По теореме 4 $\mu(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Y}$. Пусть $\widehat{\mathfrak{G}}$ и $\widehat{\mathfrak{Y}}$ — группы, порождаемые соответственно $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{Y}$; тогда $\mu(\widehat{\mathfrak{G}}) = \widehat{\mathfrak{Y}}$ (так как μ — гомоморфизм). По теореме 5 § 58, III $\overline{\widehat{\mathfrak{Y}}} = \mathfrak{N}(Y)$, откуда следует равенство (12).

Теорема 5. *Если точки $p_0=\infty$, $p_1, \ldots, p_m$ принадлежат различным квазикомпонентам пространства Y, то элементы $\widehat{x-p_1}, \ldots, \widehat{x-p_m}$ группы $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$ линейно независимы.*

Действительно, меры $\beta_{p_1}, \ldots, \beta_{p_m}$ линейно независимы (по теореме 2 § 58, III; ср. с теоремами 5 и 6 п. VII).

Теорема 6. *Если Y состоит из $m+1$ компонент, то*

$$\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X) \underset{\text{gr}}{=} \mathscr{G}^m.$$

Если $Q_0, \ldots, Q_m$ — эти компоненты и если $p_i \in Q_i$, где $p_0=\infty$, то $\widehat{x-p_1}, \ldots, \widehat{x-p_m}$ — образующие группы $\mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X)$.

Это следует из теоремы 4 § 58, III.

X. Теоремы двойственности для локально компактного $X \subset \mathscr{E}^n$. Как обычно, представим X в виде

$$X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots,$$

где F_i — компактные подмножества, $F_i \subset \operatorname{Int}_X(F_{i+1})$, а Int_X обозначает внутренность относительно X.

Тогда формулу (1) п. IX и теорему 9 § 58, IV можно заменить следующими:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname*{Lim}_{i,\, i<k}\left\{\mathfrak{C}\left(\mathscr{P}_n^{F_i}\right),\ S_{F_iF_k}\right\} \underset{\text{gr. top.}}{=} \operatorname*{Lim}_{i,\, i>k}\left\{\mathfrak{R}(G_i),\ \text{ext}_{G_iG_k}\right\};$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname*{Lim}_{i,\, i>k}\left\{\mathfrak{R}(G_i),\ \text{ext}_{G_iG_k}\right\} \underset{\text{gr. top.}}{=} \mathfrak{R}(Y),$$

где $G_i = \mathscr{S}_n - F_i$.

Из этих формул в сочетании с теоремой 5 п. VI и теоремой 3 п. II вытекает следующая

Теорема 1. *Если X — локально компактное подмножество $\mathscr{E}^n$, то*

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X) \underset{\text{gr. top.}}{=} \mathfrak{R}(Y)\,^{1)}.$$

Кратность μ есть искомый изоморфизм.

Теорема 2. *Если X открыто, а Y имеет бесконечное множество компонент, то*

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{C}(\mathscr{P}_n^X) \underset{\text{gr. top.}}{=} \mathscr{G}^{\aleph_0}.$$

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 1 и теоремы 7 из § 58, III.

---

[1]) Доказательство, основанное на теореме двойственности Александера и теореме классификации Хопфа, см. Николаишвили [1].

Следующая теорема соответствует теореме Вейерштрасса о разложении функции на простые множители (ср. также § 62, VIII (iii) для $n=2$).

Теорема 3. *Если X открыто и Y имеет бесконечную последовательность компонент $Q_0, Q_1, \ldots$, каждая из которых, за исключением Q_0 (содержащей точку ∞), открыта в Y, то каждая $\Gamma \in \mathfrak{G}(\mathscr{S}_n^X)$ представляет собой бесконечное произведение*

$$(5) \qquad \Gamma = \prod_{i=1}^{\infty} (\widehat{x - p_i})^{k_i}, \quad \text{где } k_i = \mu_{Q_i}\Gamma \quad \text{и} \quad p_i \in Q_i.$$

Доказательство. Так как $(\mu\Gamma) \in \mathfrak{R}(Y)$, то, согласно теореме 8 § 58, III,

$$(6) \qquad \mu\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} k_i\beta_i, \quad \text{где } k_i = \mu_{Q_i}\Gamma \quad \text{и} \quad \beta_i = \beta_{Q_i},$$

другими словами,

$$(7) \qquad \mu\Gamma = \lim_{j\to\infty} \sigma_j, \quad \text{где} \quad \sigma_j = k_1\beta_{Q_1} + \ldots + k_j\beta_{Q_j}.$$

По теореме 4 п. IX $\beta_{Q_i} = \mu(\widehat{x - p_i})$, а так как μ — гомоморфизм, то

$$(8) \qquad \sigma_j = \mu\left[(\widehat{x - p_1})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\widehat{x - p_j})^{k_j}\right].$$

Так как отображение μ, кроме того, гомеоморфизм (по теореме 1), то из (7) и (8) следует, что

$$\Gamma = \operatorname*{Lim}_{j\to\infty} (\widehat{x - p_1})^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\widehat{x - p_j})^{k_j},$$

откуда следует равенство (5).

ГЛАВА 10

ТОПОЛОГИЯ ПЛОСКОСТИ

§ 61. Качественные проблемы

I. Пространства Янишевского. $\mathscr{X}$ называется *пространством Янишевского*, если $\mathscr{X}$ — локально связный континуум, обладающий следующим свойством:

(J) *пусть C_0 и C_1 — два континуума, пересечение $C_0 \cap C_1$ которых несвязно; тогда объединение $C_0 \cup C_1$ представляет собой разрез пространства.*

Теорема 1. *Для локально связного континуума $\mathscr{X}$ свойство (J) эквивалентно следующему свойству:*

(J_0) если R — область, то $\mathscr{X} - R$ стягиваемо относительно $\mathscr{S}$.

Доказательство. $(J) \Rightarrow (J_0)$. Пусть R — область. Согласно теореме 8 § 57, I, достаточно показать, что всякая компонента C множества $\mathscr{X} - R$ стягиваема относительно $\mathscr{S}$.

По теореме 5 § 46, III множество $\mathscr{X} - C$ — область. В соответствии с теоремой 1 § 50, III пусть

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathscr{X} - R_n), \quad R_1 \subset R_2 \subset \ldots,$$

где R_n — область и $\mathscr{X} - R_n$ — локально связный континуум.

Согласно (J), континуум $\mathscr{X} - R_n$ уникогерентен, а потому стягиваем относительно $\mathscr{S}$ (по теореме 3 § 57, III).

Отсюда на основании теоремы 7 § 57, I следует, что C стягиваемо относительно $\mathscr{S}$.

$(J_0) \Rightarrow (J)$. Если C_0 и C_1 — два континуума, таких, что $\mathscr{X} - (C_0 \cup C_1)$ — область, то множество $C_0 \cup C_1$ стягиваемо относительно $\mathscr{S}$, согласно (J_0), а потому уникогерентно (на основании теоремы 2 § 57, II). Но тогда $C_0 \cap C_1$ связно.

Полагая $R = 0$ в (J_0), получим следующее утверждение:

Теорема 1'. *Всякое пространство Янишевского стягиваемо относительно $\mathscr{S}$ и, следовательно, уникогерентно* (ср. § 57, II, теорема 2).

Согласно теореме 10 ((i) и (iii)) из § 59, II, имеет место следующая

Теорема 2. *Сфера $\mathcal{S}_2$ есть пространство Янишевского*[1]).

Предположим теперь, что $\mathcal{X}$ — *пространство Янишевского*. Тогда имеют место следующие теоремы (3—9):

Теорема 3. *Если C — континуум, то $\mathcal{X} - C$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Пусть $R_1, R_2, \ldots$ — последовательность компонент множества $\mathcal{X} - C$ и $f\colon \mathcal{X} - C \to \mathcal{S}$ — непрерывная функция. По теореме 5 § 46, III множество $\mathcal{X} - R_m$ связно. Поэтому, согласно теореме 2 § 50, III,

$$R_m = C_{m,1} \cup C_{m,2} \cup \ldots \quad \text{и} \quad C_{m,n} \subset \operatorname{Int}(C_{m,n+1}),$$

где $C_{m,n}$ — континуум, а $\mathcal{X} - C_{m,n}$ — область. Так как $C_{m,n}$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$ в силу (J_0), то по теореме 6 § 57, I этим свойством обладает множество R_m, а следовательно, по теореме 8 § 57, I и множество $\mathcal{X} - C$.

Из условия (J_0) и теоремы 3 в сочетании с теоремой 2 § 57, II вытекают следующие утверждения:

Теорема 4. *Если A — континуум, а $\mathcal{X} - A$ — область, то A и $\mathcal{X} - A$ уникогерентны.*

Теорема 5. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества. Если эти множества связны, а их пересечение $A_0 \cap A_1$ несвязно, то их объединение $A_0 \cup A_1$ есть разрез пространства $\mathcal{X}$.*

Из тех же утверждений и теоремы 3 § 57, II вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества. Если $A_0 \cup A_1$ не есть разрез и если множества A_0 и A_1 связны между p_0 и p_1, то этим свойством обладает и множество $A_0 \cap A_1$.*

Следствие 6'. *Пусть A_0 и A_1 — два замкнутых или два открытых множества. Пусть C_0 и C_1 — компоненты соответственно A_0 и A_1. Если пересечение $C_0 \cap C_1$ не связно, то объединение $A_0 \cup A_1$ есть разрез.*

Доказательство. Пусть p_0, p_1 — пара точек множества $C_0 \cap C_1$. Тогда множества A_0 и A_1 связны между этими точками. Если $A_0 \cup A_1$ не является разрезом, то $A_0 \cap A_1$ связно между p_0 и p_1; это означает (ср. § 47, II, теорема 3, и § 49, II, теорема 17), что существует компонента Q множества $A_0 \cap A_1$,

[1]) Свойство (J) сферы $\mathcal{S}_2$ было установлено Янишевским [3]. Это *вторая теорема Янишевского*. Ср. Брауэр [4].

содержащая точки p_0 и p_1. Отсюда вытекает, что $Q \subset A_j$, следовательно, $Q \subset C_j$, поэтому $Q \subset C_0 \cap C_1$. Таким образом, любую пару точек множества $C_0 \cap C_1$ можно соединить в $C_0 \cap C_1$ связным множеством, следовательно, $C_0 \cap C_1$ связно.

Следствие 6″. *Если G открыто, C — компонента множества $\mathscr{X} - G$ и K — континуум, такой, что $K \cap C$ не связно, то множество $G - K$ также не связно.*

Доказательство. В следствии 6′ положим $A_0 = \mathscr{X} - G$, $A_1 = K = C_1$ и $C_0 = C$. Так как множество $C_0 \cap C_1 = K \cap C$ не связно, то множество $\mathscr{X} - (A_0 \cup A_1) = G - K$ также не связно.

Полагая $B_j = \mathscr{X} - A_j$ в теореме 6, получаем следующее утверждение:

Теорема 7. *Пусть B_0 и B_1 — два замкнутых или два открытых множества. Если ни одно из этих множеств не является разрезом между точками p_0 и p_1 и если $B_0 \cap B_1$ связно, то множество $B_0 \cup B_1$ также не является разрезом между точками p_0 и p_1* [1]).

Из теоремы 7 вытекает следующая

Теорема 8. *Всякое замкнутое множество F, неприводимо разделяющее пространство $\mathscr{X}$ между двумя точками p_0 и p_1, дискогерентно.*

Если, кроме того, множество F локально связно (и не сводится к точке), то F — простая замкнутая кривая (ср. 49, IV, теорема 6).

Заменяя в доказательстве теоремы 4 § 59, III теорему 3 § 59, III теоремой 8, получим следующее утверждение:

Теорема 8′. *Пусть C — континуум, R — компонента множества $\mathscr{X} - C$ и $F = \overline{F} \subset \mathrm{Fr}(R)$. Если множества F и $C - F$ связны, то связно и множество $\mathrm{Fr}(R) - F$.*

Теорема 9. *Понятие пространства Янишевского инвариантно относительно монотонных непрерывных отображений.*

Другими словами, *пространство каждого полунепрерывного разбиения $\mathscr{X}$ на континуумы является пространством Янишевского.*

Доказательство. Пусть $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — монотонное непрерывное отображение $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. Пусть R — область в пространстве $\mathscr{Y}$. По теореме 4 из § 47, VI $f^{-1}(R)$ — область в $\mathscr{X}$.

[1]) В случае когда B_0 и B_1 замкнуты, а $\mathscr{X} = \mathscr{S}$, это утверждение есть *первая теорема Янишевского* [3].

Две теоремы Янишевского *эквивалентны* (если $\mathscr{X}$ — локально связный континуум). Ср. Куратовский [17, стр. 311].

Поэтому множество $\mathcal{X} - f^{-1}(R) = f^{-1}(\mathcal{Y} - R)$ стягиваемо относительно $\mathcal{S}$ (в силу свойства (J_0)), но тогда по теореме 2 (ii) § 57, I и множество $ff^{-1}(\mathcal{Y} - R) = \mathcal{Y} - R$ обладает этим свойством.

Теорема 10. *Понятие пространства Янишевского приводимо и продолжимо*[1]).

Доказательство. Сначала предположим, что $\mathcal{X}$ — пространство Янишевского. Пусть C — циклический элемент, R — область относительно C, K и L — два континуума, таких, что $C - R = K \cup L$. Покажем, что $K \cap L$ связно.

Обозначим через R_1 и K_1 объединение всех таких компонент S множества $\mathcal{X} - C$, что соответственно $\operatorname{Fr}(S) \subset R$ или $\operatorname{Fr}(S) \subset K$. Пусть L_1 — объединение компонент S, которые не содержатся ни в R_1, ни в K_1; в этом случае $\operatorname{Fr}(S) \subset L$ (согласно теореме 4 § 52, I). Таким образом,

$$R \cup R_1 = \mathcal{X} - (K \cup K_1 \cup L \cup L_1).$$

По определению множества K_1 и теореме 1 § 49, III $\operatorname{Fr}(K_1) \subset K$. Следовательно, множество $K \cup K_1$ замкнуто, а потому замкнуто и множество $L \cup L_1$. Таким образом, множество $R \cup R_1$ открыто.

Так как $R \cup R_1$, $K \cup K_1$, $L \cup L_1$ связны (ср. § 46, II, теорема 2), то из условия (J) вытекает, что связно пересечение

$$(K \cup K_1) \cap (L \cup L_1) = K \cap L.$$

Теперь предположим, что $\mathcal{X}$ — локально связный континуум, не удовлетворяющий условию (J). Определим циклический элемент C, также не удовлетворяющий этому условию.

Пусть R — область, K и L — два континуума, M и N — два замкнутых множества, таких, что

$$\mathcal{X} - R = K \cup L, \tag{1}$$

$$K \cap L = M \cup N, \tag{2}$$

$$M \cap N = 0, \tag{3}$$

$$M \neq 0 \neq N. \tag{4}$$

Так как C — циклический элемент, то из теоремы 5' § 52, I следует, что $C \cap R$ — область относительно C, а $C \cap K$ и $C \cap L$ — континуумы. Более того, согласно (1) — (3),

$$C - (C \cap R) = (C \cap K) \cup (C \cap L),$$
$$(C \cap K) \cap (C \cap L) = (C \cap M) \cup (C \cap N),$$
$$(C \cap M) \cap (C \cap N) = 0.$$

---

[1]) Ср. Куратовский [19, стр. 139].

Поэтому для того, чтобы доказать продолжимость свойства Янишевского, достаточно установить существование циклического элемента C, такого, что

$$C \cap M \neq 0 \neq C \cap N. \tag{5}$$

Обозначим через A и B объединение всех циклических элементов C, таких, что $C \cap M \neq 0$ или $C \cap N \neq 0$ соответственно.

Если C_1 и C_2 — два различных циклических элемента, таких, что $C_1 \cap C_2 \neq 0$, то пересечение $C_1 \cap C_2$ состоит из одной точки p, которая разрезает $\mathcal{X}$ между $C_1 - C_2$ и $C_2 - C_1$ (ср. § 52, II, теорема 4). Следовательно, если мы предположим, что

$$C_1 \cap M \neq 0 \neq C_2 \cap N,$$

то из (2) получим, что $C_1 \cap K \neq 0 \neq C_2 \cap K$, откуда $p \in K$ и аналогично $p \in L$. Таким образом, в силу (2) либо $p \in M$, либо $p \in N$; следовательно,

$$\text{либо} \quad C_2 \cap M \neq 0, \quad \text{либо} \quad C_1 \cap N \neq 0.$$

Итак, один из циклических элементов C_1 и C_2 удовлетворяет условию (5).

Остается показать, что

$$A \cap B \neq 0. \tag{6}$$

Обозначим через V и W объединение всех циклических элементов C, таких, что $C \cap K \neq 0$ или соответственно $C \cap L \neq 0$. По теореме 9 из § 52, II множества V и W — континуумы, поэтому они вполне дугообразно связны (согласно теореме 11 § 52, II); следовательно, $V \cap W$ — континуум (ср. § 52, I, теорема 1).

Повторяя предыдущее рассуждение, можно установить, что $V \cap M$ состоит из всех циклических элементов C, таких, что

$$C \cap K \neq 0 \neq C \cap L. \tag{7}$$

Далее, так как $K \cup L$ — континуум (согласно (2) и (4)), то и множество $C \cap (K \cup L)$ — тоже континуум (согласно теореме 5′ § 52, I). Тогда из (7) и (2) следует, что $C \cap (M \cup N) \neq 0$. Другими словами, $V \cap W = A \cup B$. Так как множества A и B не пусты (согласно (4)) и замкнуты (согласно теореме 9 § 52, II) и так как $V \cap W$ — континуум, то соотношение (6) выполняется.

Следствие 11. *Всякий дендрит представляет собой пространство Янишевского.*

Это вытекает из теоремы 1 § 51, VI.

II. Локально связные подконтинуумы сферы $\mathscr{S}_2$. Пространство $\mathscr{X}$, рассматриваемое в этом пункте, есть *пространство Янишевского, не содержащее разделяющих точек* (и не сводящееся к одной точке). В силу теоремы 2 п. I все теоремы этого пункта применимы к $\mathscr{S}_2$ [1]).

Определение. Всякая область, граница которой представляет собой простую замкнутую кривую, называется *диском*.

Теорема 1 (Жордана [2])). *Всякая простая замкнутая кривая разрезает пространство $\mathscr{X}$ на две области и является их общей границей.*

Другими словами, *дополнение всякой простой замкнутой кривой состоит из двух непересекающихся дисков.*

Вначале докажем следующее утверждение:

Теорема 1′. *Никакая дуга не разрезает пространство $\mathscr{X}$.*

Доказательство. Предположим противное, что некоторая дуга L разрезает пространство $\mathscr{X}$ между точками p_0 и p_1. По теореме 1′ п. I и теореме 5 § 57, II дуга L содержит континуум, а потому дугу L^*, которая неприводимо разделяет пространство между точками p_0 и p_1. Но это несовместимо с теоремой 8 п. I.

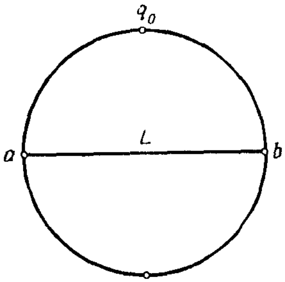

Рис. 16

Таким образом, теорема 1′ доказана. Теперь предположим, что C — простая замкнутая кривая.

Согласно условию (J), кривая C есть разрез пространства. Кроме того, C является общей границей компонент множества $\mathscr{X} - C$, так как в силу теоремы 1′ (ср. § 49, V, теорема 1) C — неприводимый разрез пространства $\mathscr{X}$.

Остается показать, что $\mathscr{X} - C$ содержит не более двух компонент [3]).

Предположим, что имеются три компоненты R_0, R_1 и R_2. Пусть L — дуга, соединяющая две точки a и b кривой C и достижимая из R_2 (ср. § 50, III, теорема 7), $L \subset R_2 \cup a \cup b$ (рис. 16). Пусть aq_jb ($j=0,\ 1$) — две дуги, определяемые в C точками a и b:

$$aq_0b \cup aq_1b = C \quad \text{и} \quad aq_0b \cap aq_1b = (a,\ b).$$

---

[1]) В п. III мы увидим, что $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2$.

[2]) Жордан [1, стр. 92]. См. Брауэр [2].

[3]) Действительно, это прямое следствие теоремы 6 § 60, III для $\mathscr{X} = \mathscr{S}_2$.

Пусть $p_j \in R_j$. Положим $A_j = aq_jb \cup L$. Тогда

(1) $$A_0 \cap A_1 = L.$$

Так как $C = \mathrm{Fr}(R_j)$, то множество $R_0 \cup q_j \cup R_1$ связно; поэтому множество A_{1-j} (не пересекающееся с ним) не разрезает пространство между p_0 и p_1. Согласно теореме 7 п. I и соотношению (1), объединение $A_0 \cup A_1$ обладает тем же свойством. Но это приводит к противоречию, так как $C \subset A_0 \cup A_1$ и C разрезает пространство между p_0 и p_1 по определению этих точек.

Теорема 2 (о θ-кривой). *Если C есть θ-кривая, состоящая из трех дуг L_0, L_1, L_2, каждая пара которых имеет общими только концевые точки, то*

(2) $$\mathscr{X} - C = D_0 \cup D_1 \cup D_2,$$

(3) $$\mathrm{Fr}(D_j) = L_j \cup L_{j+1},$$

где диски D_0, D_1 и D_2 — компоненты множества $\mathscr{X} - C$ (индексы приведены по mod 3).

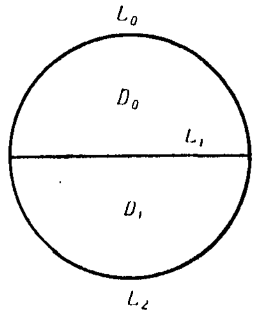

Рис. 17

Доказательство (рис. 17). Согласно теореме Жордана, простая замкнутая кривая $L_j \cup L_{j+1}$ разрезает пространство $\mathscr{X}$ на два диска, один из которых, скажем Q_j, содержит дугу L_{j+2} (без концевых точек), а другой, скажем D_j, не пересекается с L_{j+2}. Более того,

$$\mathrm{Fr}(D_j) = L_j \cup L_{j+1} \quad \text{и} \quad \mathscr{X} - \bar{D}_j = Q_j.$$

Диск D_j есть компонента множества $\mathscr{X} - C$, так как, с одной стороны, $D_j \subset \mathscr{X} - C$, а с другой — из включения $\mathrm{Fr}(D_j) \subset C$ вытекает, что $\bar{D}_j - C = D_j - C$, а потому D_j — открыто-замкнутое множество в $\mathscr{X} - C$.

Остается показать, что $\mathscr{X} - (C \cup D_0 \cup D_1) = D_2$. Но из равенств

$$\bar{D}_0 \cap \bar{D}_1 = (L_0 \cup L_1) \cap (L_1 \cup L_2) = L_1 \quad \text{и} \quad \mathscr{X} - \bar{D}_j = Q_j$$

следует в силу теоремы 7 п. I, что множество

$$\mathscr{X} - (\bar{D}_0 \cup \bar{D}_1) = \mathscr{X} - (C \cup D_0 \cup D_1)$$

связно. Это множество совпадает с D_2 как связное подмножество $\mathscr{X} - C$, содержащее компоненту D_2 множества $\mathscr{X} - C$.

Следствие 3. *Пусть L_0, L_1, ... — бесконечная сходящаяся последовательность дуг, имеющих общими только концевые* *точки a и b; тогда имеется самое большее два члена L_n, таких, что*

$$L_n \cap \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} L_m \neq (a,\ b). \tag{4}$$

Доказательство. Предположим, что это не так и что имеются три индекса n, скажем 0, 1 и 2, удовлетворяющих условию (4). Рассмотрим кривую $\theta = L_0 \cup L_1 \cup L_2$. Для каждого $n > 2$ множество $L_n - a - b$, согласно теореме 2, содержится в одной из трех областей D_0, D_1 или D_2. Поэтому можно считать, что существует бесконечное множество индексов k, таких, что $L_k - a - b \subset D_0$. Следовательно,

$$\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} L_m \subset \bar{D}_0 = D_0 \cup L_0 \cup L_1, \quad \text{и поэтому} \quad (L_2 - a - b) \cap \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} L_m = 0,$$

что противоречит предположению.

Теорема 4. *Если C — локально связный континуум, то всякая компонента R множества $\mathscr{S} - C$ обладает следующими свойствами:*

(i) $\mathrm{Fr}(R)$ *представляет собой регулярный континуум, не содержащий θ-кривых* [1];

(ii) *если C не содержит разрезающих точек, то R — диск, и потому $\mathrm{Fr}(R)$ — простая замкнутая кривая;*

(iii) $\bar{R}$ — *локально связный континуум.*

Доказательство. Так как $\mathscr{S}$ стягиваемо относительно $\mathscr{S}$ (ср. I, теорема 1′), то множество $K = \mathrm{Fr}(R)$ — континуум (§ 57, II, теорема 6). Если бы K не был локально связным, то в C существовали бы кривая $\theta = L_0 \cup L_1 \cup L_2$ и три континуума Q_0, Q_1 и Q_2, такие, что

$$Q_j \cap L_j \neq 0 \neq Q_j \cap K, \tag{5}$$

$$Q_j \cap (L_{j+1} \cup L_{j+2}) = 0, \tag{6}$$

где индексы приведены по mod 3 (ср. § 52, IV, теорема 4).

К такому же выводу мы придем, если предположим, что K содержит кривую θ; тогда в качестве Q_j можно взять точку из $L_j - (L_{j+1} \cup L_{j+2})$.

Пусть D_0, D_1 и D_2 — диски, являющиеся компонентами множества $\mathscr{S} - \theta$ (ср. с теоремой 2). Так как $R \cap \theta = 0$, то R содержится в одном из этих дисков, скажем $R \subset D_0$. Поэтому

$$K \subset \bar{D}_0, \quad \text{откуда} \quad Q_2 \cap \bar{D}_0 \neq 0$$

[1] См. Торхорст [1]. Ср. также Керекьярто [1, стр. 167] и Уайберн [7, стр. 267].

на основании (5). С другой стороны,

$$Q_2 \cap (L_2 - L_0 - L_1) \neq 0, \text{ и, следовательно, } Q_2 - \bar{D}_0 \neq 0.$$

Таким образом, $Q_2 \cap \mathrm{Fr}(\bar{D}_0) \neq 0$, так что (ср. (3)) $Q_2 \cap (L_0 \cup L_1) \neq 0$, что противоречит (6).

Итак, по теореме 3 § 52, IV множество K — регулярный континуум, так как оно является локально связным континуумом, не содержащим 0-кривых.

Если C не содержит ни одной разрезающей точки, то таких точек не содержит и $\mathrm{Fr}(R)$ (ср. I, теорема 8'). Следовательно, $\mathrm{Fr}(R)$ — простая замкнутая кривая (согласно теореме 1 из § 52, IV), так как она представляет собой локально связный континуум, не содержащий ни разрезающих точек, ни 0-кривых.

Наконец, так как $\mathrm{Fr}(R)$ локально связна, то по теореме 4 из § 49, III локально связно и $\bar{R}$.

Замечание. Граница локально связного континуума может и не быть локально связным континуумом (Розенталь [1]).

Теорема 5. *Всякий локально связный континуум C, разделяющий $\mathcal{X}$ между двумя континуумами A и B, содержит простую замкнутую кривую, разделяющую $\mathcal{X}$ между этими континуумами* [1]).

Доказательство. Пусть Q — компонента множества $\mathcal{X} - C$, содержащая A, и R — компонента множества $\mathcal{X} - \bar{Q}$, содержащая B; тогда $\mathrm{Fr}(R)$ — неприводимый разделитель между A и B (ср. § 49, V, теорема 2). Так как (по теореме 4 (iii)) $\bar{Q}$ локально связно, то локально связно множество $\mathrm{Fr}(R)$ (по теореме 4 (i)). Следовательно, $\mathrm{Fr}(R)$ — простая замкнутая кривая, так как это локально связный неприводимый разделитель (ср. с теоремой 8 п. I).

Из теоремы 5 и теоремы 2 § 57, III вытекает следующая

Теорема 5'. *Всякую пару непересекающихся континуумов можно разделить простой замкнутой кривой.*

Теорема 6. *Всякий континуум C, не являющийся разрезом пространства $\mathcal{X}$, представляет собой пересечение последовательности дисков*

$$(7) \qquad C = D_1 \cap D_2 \cap \ldots, \quad \text{где} \quad \bar{D}_n \subset D_{n-1}.$$

---

[1]) Ср. Уайлдер [1, стр. 354].

Доказательство. Покажем, что если G — открытое множество, такое, что $C \subset G$, то существует диск D, удовлетворяющий условию

$$C \subset D \subset \bar{D} \subset G. \tag{8}$$

По теореме 2 § 50, III (где G заменено на $\mathscr{X} - C$) существует такой континуум H, что

$$\mathscr{X} - G \subset H \subset \mathscr{X} - C. \tag{9}$$

Согласно теореме 5′, можно найти такой диск D, что

$$C \subset D \subset \bar{D} \subset \mathscr{X} - H. \tag{10}$$

Из (10) и (9) вытекает формула (8).

Следствие 7. *Пространство $\mathscr{X}$ имеет базу, состоящую из дисков.*

Доказательство. По теореме 6 каждой точке p и каждому числу $\varepsilon > 0$ соответствует диск D, такой, что $p \in D$ и $\delta(D) < \varepsilon$. Утверждение следствия вытекает из компактности пространства $\mathscr{X}$.

Следствие 8. *Если R — область, не разрезающая пространство, то существует последовательность дисков $\{D_n^*\}$, такая, что*

$$R = D_1^* \cup D_2^* \cup \ldots, \quad где \quad \overline{D_{n-1}^*} \subset D_n^*. \tag{11}$$

Следовательно, *если $F = \bar{F} \subset R$, то существует диск D, такой, что*

$$F \subset D \subset \bar{D} \subset R. \tag{12}$$

Доказательство. Достаточно в теореме 6 положить $R = \mathscr{X} - C$ и $D_n^* = \mathscr{X} - \bar{D}_n$.

Теорема 9. *Всякую пару замкнутых непересекающихся множеств A и B, не разрезающих пространство, можно разделить простой замкнутой кривой.*

Доказательство. По теореме 1 из § 50, III существует конечная система непересекающихся континуумов $C_1, \ldots, C_n$, такая, что $A \subset C_1 \cup \ldots \cup C_n \subset \mathscr{X} - B$ и множество $C_1 \cup \ldots \cup C_n$ не является разрезом пространства. По теореме 5 § 46, III ни один из континуумов $C_1, \ldots, C_n$ не является разрезом.

Следовательно, теорема сводится к случаю, когда A — объединение конечной системы континуумов $A = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, ни один из которых не является разрезом.

Применим индукцию. Так как для $n=1$ теорема верна (по теореме 6), предположим, что она верна для $n-1$.

Так как множество $C_n \cup B$ не является разрезом (ср. § 57, II, теорема 2), то по предположению существует простая замкнутая кривая K, разделяющая пространство между множествами $C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1}$ и $C_n \cup B$. Пусть D — такой диск, что

$$C_1 \cup \ldots \cup C_{n-1} \subset D \quad \text{и} \quad \operatorname{Fr}(D) = K.$$

Пусть L — дуга, не пересекающаяся с B и неприводимая между $\bar{D}$ и C_n. Из теоремы Янишевского (I, 7) легко вывести, что континуум $E = \bar{D} \cup L \cup C_n$ не разрезает пространство (ср. теоремы 1 и 1′). Следовательно, по теореме 6 существует простая замкнутая кривая, разделяющая пространство между E и B и потому между A и B.

Теорема 9 допускает следующее обобщение.

Теорема 9′. *Пусть $F_0, \ldots, F_n$ — система непересекающихся замкнутых множеств, ни одно из которых не разрезает пространство. Тогда существует система дисков $D_0, \ldots, D_n$, такая, что*

$$F_j \subset D_j \quad \textit{и} \quad \bar{D}_i \cap \bar{D}_j = 0 \quad \textit{для} \quad i \neq j.$$

Доказательство. Так как объединение конечной системы непересекающихся замкнутых множеств, ни одно из которых не разрезает пространство, не является разрезом (ср. § 58, II, теорема 2), то диски $D_0, \ldots, D_n$ последовательно можно определить таким образом, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

$$F_0 \subset D_0 \quad \text{и} \quad \bar{D}_0 \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_n) = 0,$$
$$F_1 \subset D_1 \quad \text{и} \quad \bar{D}_1 \cap (\bar{D}_0 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n \subset D_n \quad \text{и} \quad \bar{D}_n \cap (\bar{D}_0 \cup \ldots \cup \bar{D}_{n-1}) = 0.$$

Теорема 10 (Шёнфлиса[1]). *Если множество C замкнуто и локально связно и если последовательность $R_1, R_2, \ldots$ компонент множества $\mathscr{X} - C$ бесконечна, то*

$$\lim_{n \to \infty} \delta(R_n) = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Допустим, что это не так и что $\varepsilon > 0$, $i_1 < i_2 < \ldots$ и $\delta(R_{i_n}) > \varepsilon$ для $n = 1, 2, \ldots$. Можно считать (ср. § 29, VIII), что последовательность $\{R_{i_n}\}$ сходится. Пусть

[1]) Шёнфлис [I, стр. 199].

$r \in \operatorname{Lim}_{n \to \infty} R_{i_n}$. Тогда $r \in C$. В соответствии с теоремой 7 пусть U и V — два диска, таких, что

$$r \in V, \quad \bar{V} \subset U \quad \text{и} \quad \delta(U) < \varepsilon.$$

Пусть $K = \operatorname{Fr}(U)$ и $L = \operatorname{Fr}(V)$. Тогда для достаточно больших значений n имеем

$$V \cap R_{i_n} \neq 0, \quad \text{откуда} \quad K \cap R_{i_n} \neq 0 \neq L \cap R_{i_n},$$

так как $R_{i_n} - U \neq 0$.

Следовательно, существует дуга $A_{i_n} \subset R_{i_n}$, неприводимая между K и L. Это означает, что только концевые точки A_{i_n}, скажем k_{i_n}, l_{i_n}, принадлежат соответственно K и L.

Можно предположить, что последовательность $\{A_{i_n}\}$ сходящаяся,

$$Z = \operatorname{Lim}_{n \to \infty} A_{i_n}, \quad \text{следовательно,} \quad Z \subset C \quad \text{и} \quad Z \cap K \neq 0 \neq Z \cap L.$$

Так как Z — континуум, то существует точка $p \in Z - (K \cup L)$. Покажем, что множество C не является локально связным в точке p.

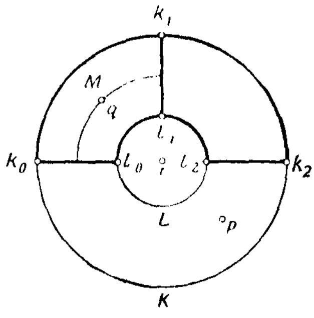

Рис. 18

Достаточно показать, что любая область G, такая, что

(14) $\quad p \in G \quad$ и $\quad G \cap (K \cup L) = 0,$

содержит точку множества C, которую нельзя соединить с p подконтинуумом из $C - (K \cup L)$.

Так как G — окрестность точки p, то множество G имеет общие точки с бесконечным множеством членов последовательности $\{A_{i_n}\}$. Ради простоты можно считать, что

(15) $\quad G \cap A_j \neq 0 \quad$ для $\quad j = 0, 1, 2.$

Рассмотрим кривую Θ, состоящую из дуг A_0, A_1, A_2 и дуг $k_0k_1k_2$ и $l_0l_1l_2$, содержащихся соответственно в K и L (рис. 18).

Пусть D_0, D_1 и D_2 — диски, являющиеся компонентами множества $\mathscr{X} - \Theta$; тогда (ср. с теоремой 2)

$$\operatorname{Fr}(D_j) = A_j \cup A_{j+1} \cup k_jk_{j+1} \cup l_jl_{j+1}.$$

Один из этих дисков, скажем D_2, содержит точку p (ибо $p \in C - K - L$). На основании (15) отсюда следует, что область G содержит дугу M, неприводимую между множествами A_1 и

$A_0 \cup A_2$, так что множество $M \cap (A_0 \cup A_1 \cup A_2)$ состоит из концевых точек дуги M, одна из которых есть $M \cap A_1$, а другая — $M \cap (A_0 \cup A_2)$. Поскольку множество $N = M - (A_0 \cup A_1 \cup A_2)$ связно и не пересекается с $K \cup L$ (согласно (14)), оно содержится в одном из дисков D_0, D_1 или D_2; так как $M \cap A_1 \neq 0$, то либо $N \subset D_0$, либо $N \subset D_1$. Предположим, что

$$(16) \qquad N \subset D_0.$$

Тогда $M \subset \overline{D}_0$. Так как

$$0 \neq M \cap A_1 \subset M \cap R_1 \quad \text{и} \quad 0 \neq M \cap (A_0 \cup A_2) \subset M \cap (R_0 \cup R_2),$$

то $M \cap C \neq 0$. Пусть $q \in M \cap C$. Тогда $q \in G \cap N$ и, согласно (16),

$$(17) \qquad q \in G \cap D_0.$$

Остается показать, что всякий континуум H, такой, что $p, q \in H \subset C$, пересекает множество $K \cup L$. Из (17) следует, что

$$0 \neq H \cap \mathrm{Fr}(D_0) = H \cap (A_0 \cup A_1 \cup k_0k_1 \cup l_0l_1) \subset$$
$$\subset C \cap (A_0 \cup A_1) \cup (H \cap (K \cup L)),$$

откуда мы приходим к требуемому заключению, ибо $C \cap (A_0 \cup A_1) = 0$.

Теорема 11. *Если C — замкнутое локально связное множество и R — компонента множества $\mathcal{X} - C$, то каждая точка $p \in \mathrm{Fr}(R)$ достижима из R.*

Более точно, *$R \cup p$ локально связно*[1]).

Доказательство. Для того чтобы доказать вторую часть теоремы 11, достаточно показать, что если D — диск, содержащий точку p (ср. с теоремой 7), то существует связное множество T, открытое в $R \cup p$ и такое, что $p \in T \subset D$. Но так как множества $\mathcal{X} - D$ и $\mathcal{X} - R$ замкнуты и локально связны (§ 49, II, теорема 1), то и их объединение $\mathcal{X} - (D \cap R)$ замкнуто и локально связно. Поэтому, согласно теореме 10, последовательность $R_1, R_2, \ldots$ компонент множества $D \cap R$ удовлетворяет условию (13) (если только она не является конечной).

Можно считать, что последовательность $\{R_n\}$ не сводится к одному члену (ибо в этом случае достаточно было бы положить $T = D \cap R \cup p$). Поскольку R связно и R_n открыто в R, то граница множества R_n относительно R (обозначим ее через

---

[1]) Эта теорема принадлежит Шёнфлису. Ср. Уайберн [8], [1, гл. VI, § 4].

$\mathrm{Fr}_R(R_n))$ непуста, так что $R \cap R_n - R_n \neq 0$. По теореме 3 из § 49, III

$$\mathrm{Fr}_R(R_n) \subset \mathrm{Fr}_R(R \cap D) = R \cap \overline{R \cap D} - R \cap D \subset \mathcal{X} - D,$$

$$\text{следовательно, } \overline{R}_n - D \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что $\delta(R_n) \geqslant \rho(p, \mathcal{X} - D)$, если $p \in \overline{R}_n$. Поэтому число областей R_n, таких, что $p \in \overline{R}_n$, конечно (вследствие равенства (13)). Пусть $R_1, \ldots, R_k$ — эти области. Тогда множество $T = R_1 \cup \ldots \cup R_k \cup p$ связно.

Остается показать, что T открыто в $R \cup p$, т. е. что $p \notin \mathrm{Ls}\, R_n$. Но если бы $p = \lim\limits_{i \to \infty} p_i$, где $p_i \in R_{n_i}$, то для достаточно больших значений i было бы

$$\delta(R_{n_i}) \geqslant \rho(p_i, \mathcal{X} - D) > \frac{1}{2}\rho(p, \mathcal{X} - D),$$

вопреки равенству (13).

Итак, локальная связность множества $R \cup p$ установлена, и p можно соединить с каждой точкой из R с помощью дуги в $R \cup p$. Действительно, $R \cup p$ связно, локально связно и топологически полно (ср. § 50, II теорема 1).

Теорема 12 (обратная к теореме Жордана[1]). *Пусть C — континуум, R_0 и R_1 — две компоненты множества $\mathcal{X} - C$, такие, что каждая точка C достижима из R_0 и из R_1. Тогда C — простая замкнутая кривая.*

Доказательство. Согласно теореме 2 § 47, V, достаточно показать, что каждая пара точек $a, b \in C$ разделяет C. Но так как a и b достижимы из R_j $(j = 0, 1)$, то существует дуга $(ab)_j$, такая, что, полагая $A_j = (ab)_j - a - b$, мы имеем

$$A_j \subset R_j. \tag{18}$$

Пусть D_0 и D_1 — диски, на которые простая замкнутая кривая $A_0 \cup a \cup b \cup A_1$ разрезает пространство. Покажем, что $D_0 \cap C \neq \neq 0 \neq D_1 \cap C$.

Так как множество $S_j = D_j \cup A_0 \cup A_1$ связно, то из неравенств $S_j \cap R_0 \neq 0 \neq S_j \cap R_1$ (которые получаются из (18)) следует, что

$$S_j \cap \mathrm{Fr}(R_0) \neq 0, \text{ так что } S_j \cap C \neq 0, \text{ поэтому } D_j \cap C \neq 0,$$

поскольку $(A_0 \cup A_1) \cap C = 0$, согласно (18).

[1] Ср. Шёнфлис [1, стр. 180]. См. также Рисс [3].

Теорема 13 (Гемана[1]). *Если C — наследственно локально связный подконтинуум $\mathscr{X}$ и если $K_0, K_1, \ldots$ — бесконечная последовательность попарно не пересекающихся подконтинуумов континуума C, то*

$$\lim_{n\to\infty} \delta(K_n) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что в C существует бесконечная последовательность $\{K_n\}$ подконтинуумов, такая, что

$$(19) \qquad \delta(K_n) > \eta, \quad \text{где} \quad \eta > 0,$$

$$(20) \qquad K_n \cap K_m = 0 \quad \text{для} \quad n \neq m.$$

Пусть в соответствии с (19) $p_n, q_n \in K_n$ и $|p_n - q_n| \geqslant \eta$. Так как K_n локально связно, пусть A_n — дуга $p_n q_n \subset K_n$. Можно предположить, что последовательности $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ сходятся;

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} q_n = q.$$

Так как точки p и q различны, пусть P и Q — два непересекающихся континуума, не разрезающих $\mathscr{X}$ и таких, что $p \in \operatorname{Int}(P)$ и $q \in \operatorname{Int}(Q)$ (ср. с теоремой 7).

Тогда для достаточно больших значений n мы имеем $P \cap A_n \neq 0 \neq Q \cap A_n$. Можно считать, что это соотношение имеет место для каждого значения n. Выберем в A_n дугу B_n, у которой только концевые точки принадлежат соответственно P и Q. Можно считать, что последовательность $\{B_n\}$ сходится.

Разбиение пространства $\mathscr{X}$ на отдельные точки множества $\mathscr{X} - P - Q$ и на множества P и Q полунепрерывно сверху. По теореме 9 п. I существует непрерывное отображение f пространства $\mathscr{X}$ такое, что

(i) $f(\mathscr{X})$ — пространство Янишевского, не имеющее разрезающих точек;

(ii) $f(P)$ и $f(Q)$ сводятся к двум различным точкам a и b;

(iii) f представляет собой гомеоморфизм $\mathscr{X} - P - Q$ на $f(\mathscr{X}) - a - b$.

Положим $L_n = f(B_n)$. Тогда $L_0, L_1, \ldots$ — сходящаяся последовательность дуг, каждая пара которых имеет общими только концевые точки (a и b) (ср. (20)). Согласно теореме 3, $L_n \cap \operatorname{Lim}_{m\to\infty} L_m = (a, b)$ для всех n, за исключением двух индексов (скажем, 0 и 1). Другими словами,

$$(L_n - a - b) \cap \operatorname{Lim}_{m\to\infty} (L_m - a - b) = 0 \quad \text{для} \quad n > 1.$$

[1] См. Геман [1, стр. 39].

Обозначим дугу B_n без концевых точек через B_n^*; тогда

$$B_n^* = f^{-1}(L_n - a - b), \text{ поэтому } B_n^* \cap \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} B_m^* = 0 \text{ для } n > 1.$$

Но тогда $\operatorname*{Lim}_{m\to\infty} B_m^*$ — континуум сходимости, содержащий более одной точки, следовательно, C не является наследственно локально связным (ср. § 50, IV, теорема 2).

Замечания. Теорема неверна в $\mathscr{E}^3$. См. § 50, IV, 3, замечание.

Из теоремы 13 непосредственно вытекает следующая

Теорема 13′. *Если наследственно локально связный подконтинуум пространства $\mathscr{X}$ разбит на непересекающиеся континуумы, то это разбиение полунепрерывно.*

Теорема 14[1]). *Если A и B — два отделимых множества, то существует открытое множество G, такое, что*

(21) $$A \subset G,$$

(22) $$\overline{G} \cap B = 0,$$

(23) $$\operatorname{Fr}(G) - (\overline{A} \cap \overline{B}) \subset [\operatorname{Fr}(G)]^{[\omega]},$$

т. е. множество $\operatorname{Fr}(G)$ *регулярно в каждой точке множества* $\operatorname{Fr}(G) - (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Доказательство. Положим

$$A_n = \operatorname*{E}_x (x \in \overline{A}) \left[\frac{1}{n+1} \leqslant \rho(x, \overline{B}) \leqslant \frac{1}{n} \right].$$

Тогда

(24) $$\overline{A} - \overline{B} = A_1 \cup A_2 \cup \ldots .$$

Так как множества A_n компактны, то существует конечная система дисков $D_1^n, \ldots, D_{k_n}^n$, такая, что

(25) $$A_n \cap D_i^n \neq 0,$$

(26) $$\overline{D_i^n} \cap \overline{B} = 0,$$

(27) $$\delta(D_i^n) < 1/n$$

и

(28) $$A_n \subset D_1^n \cup \ldots \cup D_{k_n}^n.$$

---

[1]) См. Куратовский [15, стр. 217].

Положим

$$(29)\qquad G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{k_n} D_i^n.$$

Так как множества A и B отделимы, то $A\subset \bar{A}-\bar{B}$, откуда следует включение (21) в силу соотношений (24), (28) и (29).

Прежде чем перейти к (22), заметим, что каждая точка p из $\bar{G}-\bar{A}$ принадлежит некоторому $\overline{D_{i_0}^{n_0}}$ и что в этой окрестности точки p содержится только конечное число дисков D_i^n.

Предположим, что

$$p=\lim_{m\to\infty} p_m,\quad \text{где}\quad p_m\in D_{i_m}^{n_m}\quad \text{и}\quad n_m<n_{m+1}.$$

Следовательно, в силу (25), (27) и (24)

$$p\in\overline{A_1\cup A_2\cup\ \dots}\subset\bar{A},$$

что противоречит предположению.

Отсюда вытекает существование пары индексов (n_0, i_0), такой, что $p\in\overline{D_{i_0}^{n_0}}$.

Далее, с одной стороны, на основании (26)

$$(30)\qquad \bar{G}\cap\bar{B}-\bar{A}=0,$$

откуда следует равенство (22), ибо $B\cap\bar{A}=0$.

С другой стороны, так как каждая точка p множества $\mathrm{Fr}(G)-(\bar{A}\cap\bar{B})=\mathrm{Fr}(G)-\bar{A}$ содержится в окрестности относительно $\mathrm{Fr}(G)$, состоящей из конечного числа простых замкнутых кривых, отсюда вытекает включение (23) (поскольку всякое конечное объединение дуг является регулярным множеством по теореме 8 § 51, IV).

Следствие 15. *Если A и B — два отделимых множества, то для каждой пары точек $a\in A$, $b\in B$ существует замкнутое множество C, такое, что $C\cap(A\cup B)=0$, неприводимо разделяющее $\mathscr{E}$ между a и b и локально являющееся дугой в каждой точке множества $C-\bar{A}\cap\bar{B}$.*

Более того, *если* $\dim\bar{A}\cap\bar{B}=0$, *то C — простая замкнутая кривая*[1]).

Доказательство. Так как $\mathrm{Fr}(G)$ есть разрез между a и b, он содержит неприводимый разрез C между этими точками (ср. § 49, V, теорема 3). По теореме 8 п. I множество C диско-

[1]) Ср. Мур [8] и Любен [1].

герентно и поэтому, согласно теореме 5 из § 49, VI, локально является дугой в каждой точке множества $C-(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Наконец, так как множество точек, в которых C не является локально связным, либо пусто, либо положительной размерности (ср. § 49, VI, теорема 1), то вторая часть следствия вытекает из дискогерентности множества C в силу теоремы 8 п. I.

Теорема 16. *Если A и B — два континуума, таких, что*
(i) *$A-B$ связно;*
(ii) $\dim A\cap B=0$;
(iii) *A не является разрезом между любой парой точек множества $B-A$,*
то существует простая замкнутая кривая, являющаяся разрезом между $A-B$ и $B-A$[1]).

Теорема 17. *Если R — область и A — дуга pq, такая, что $A-R=(p, q)$, то множество $R-A$ связно тогда и только тогда, когда концевые точки дуги A принадлежат различным компонентам множества $\mathcal{X}-R$ (а следовательно, множества* $\mathrm{Fr}(R)$)[2]).

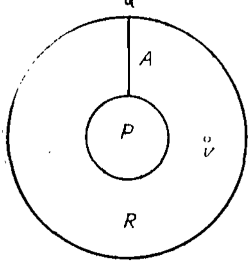

Рис. 19

Доказательство. Если точки p и q принадлежат одной и той же компоненте C множества $\mathcal{X}-R$, то множество $R-A$ не связно (по теореме 6″ п. I).

Далее, предположим, что точки p и q принадлежат различным компонентам множества $\mathcal{X}-R$. Тогда множество $\mathcal{X}-R$ не связно между этими точками, следовательно, существуют два замкнутых множества P и Q, таких, что

$$(31)\quad \mathcal{X}-R=P\cup Q,\ P\cap Q=0,\ p\in P,\ q\in Q.$$

Пусть u и v — две произвольные точки множества $R-A$ (рис. 19). Покажем, что множество $\mathcal{X}-R\cup A$ не разделяет их. Согласно (31),

$$(32)\quad \mathcal{X}-R\cup A=(P\cup A)\cup(Q\cup A)\ \text{и}\ (P\cup A)\cap(Q\cup A)=A.$$

Применяя теорему 1′, мы выводим из теоремы 7 п. I, что ни множество $P\cup A$, ни множество $Q\cup A$ не разделяют точки u и v. Отсюда, согласно (32) и теореме 7 п. I, следует, что множество $\mathcal{X}-R\cup A$ также их не разделяет.

---

1) Доказательство см. Куратовский [15, стр. 232]. Ср. также Мур [8, стр. 470].
2) Ср. Хаусдорф [2, стр. 350].

III. Элементарные множества. Как и выше, пусть $\mathscr{X}$ — пространство Янишевского, не содержащее разрезающих точек. Пусть $D_0, \ldots, D_n$ — система дисков, такая, что

(1) $$\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j.$$

Множества

$$\mathscr{X} - (D_0 \cup \ldots \cup D_n) \quad \text{и} \quad \mathscr{X} - (\bar{D}_0 \cup \ldots \cup \bar{D}_n)$$

называются соответственно *элементарным континуумом* и *элементарной областью*. Пространство $\mathscr{X}$ и пустое множество считаются одновременно элементарными континуумами и элементарными областями.

Установим ряд свойств элементарных множеств, которые нам понадобятся в дальнейшем (п. V и § 60, XII).

Конечное объединение непересекающихся элементарных континуумов называется *элементарным замкнутым множеством*. Конечное объединение элементарных областей, замыкания которых не пересекаются, называется *элементарным открытым множеством*.

Легко установить следующие пять утверждений:

Теорема 1. *Внутренность элементарного континуума есть элементарная область. Внутренность элементарного замкнутого множества есть элементарное открытое множество.*

Теорема 2. *Замыкание элементарной области есть элементарный континуум. Замыкание элементарного открытого множества есть элементарное замкнутое множество.*

Теорема 3. *Всякое элементарное замкнутое* (*открытое*) *множество есть замкнутая* (*открытая*) *область.*

Теорема 4. *Если $A_1, \ldots, A_m$ — компоненты элементарного множества A, то*

$$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(A_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Fr}(A_m) \quad \text{и}$$
$$\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Int}(A_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Int}(A_m).$$

Теорема 5. *Если R — элементарная область и D — диск, такой, что $\mathrm{Fr}(D) \subset R$, то множество $R \cap D$ есть элементарная область.*

Аналогично, *если C — элементарный континуум и D — диск, такой, что $\mathrm{Fr}(D) \subset \mathrm{Int}(C)$, то множество $C \cap \bar{D}$ — элементарный континуум.*

Теорема 6. *Если R — элементарная область и C — элементарный континуум, такой, что $C \subset R$, то $R - C$ — элементарное множество.*

Аналогично, *если C — элементарный континуум и R — элементарная область, такая, что $\overline{R} \subset \operatorname{Int}(C)$, то $C - R$ — элементарное множество.*

Доказательство. Положим $X' = \mathscr{X} - X$, и пусть

$$C = (D_0 \cup \ \ldots \ \cup D_n)' \quad \text{и} \quad K_j = \operatorname{Fr}(D_j).$$

Тогда $R - C = (R \cap D_0) \cup \ \ldots \ \cup (R \cap D_n)$. Поэтому из включения $K_j \subset R$ по теореме 5 следует, что множество $R \cap D_j$ — элементарная область.

Так как, согласно (1), $\overline{R \cap D_i} \cap \overline{R \cap D_j} = 0$, то $R - C$ — элементарное множество.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема 7. *Дополнение элементарного замкнутого (открытого) множества есть элементарное открытое (замкнутое) множество.*

Доказательство. Пусть $F = C_0 \cup \ \ldots \ \cup C_n$ и $C_i \cap C_j = 0$, где множества $C_0, \ldots, C_n$ — элементарные континуумы. Применим индукцию. Для $n = 0$ утверждение очевидно; предположим, что оно имеет место для $n - 1$. Тогда

$$F' = G - C_n, \quad \text{где} \quad G = C'_0 \cap \ \ldots \ \cap C'_{n-1}.$$

Открытое множество G элементарное (по предположению), поэтому $G = R_0 \cup \ldots \cup R_m$ и $\overline{R}_i \cap \overline{R}_j = 0$, где множества $R_0, \ldots, R_m$ — элементарные области.

Так как $C_n \cap (C_0 \cup \ \ldots \ \cup C_{n-1}) = 0$, то $C_n \subset G$. Поэтому континуум C_n содержится в одной из компонент множества G, скажем в $C_n \subset R_0$. Следовательно,

$$F' = (R_0 - C_n) \cup R_1 \cup \ \ldots \ \cup R_m. \tag{2}$$

Так как (по теореме 6) множество $R_0 - C_n$ — элементарная область, то F' — элементарное открытое множество.

В случае открытого множества доказательство аналогично.

Теорема 8. *Если $G_0, \ldots, G_n$ — элементарные открытые множества, такие, что $G_i \cup G_j = \mathscr{X}$ для $i \neq j$, то пересечение $G_0 \cap \ \ldots \ \cap G_n$ — элементарное множество.*

Если $F_0, \ldots, F_n$ — элементарные замкнутые множества, такие, что $\operatorname{Int}(F_i) \cup \operatorname{Int}(F_j) = \mathscr{X}$ для $i \neq j$, то пересечение $F_0 \cap \ldots \cap F_n$ — элементарное множество.

Более того,

$$\begin{aligned} b_0(G_0 \cap \ \ldots \ \cap G_n) &= b_0(G_0) + \ \ldots \ + b_0(G_n), \\ b_0(F_0 \cap \ \ldots \ \cap F_n) &= b_0(F_0) + \ \ldots \ + b_0(F_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство. Действительно, из условия $G'_i \cap G'_j = 0$ вытекает, что $G'_0 \cup \ldots \cup G'_n$ — элементарное множество, так как оно является объединением непересекающихся замкнутых элементарных множеств (ср. с теоремой 7).

Аналогично из условия $\overline{F'_i} \cap \overline{F'_j} = 0$ следует, что открытое множество $F'_0 \cup \ldots \cup F'_n$ элементарное.

Соотношения (3) следуют непосредственно из теоремы 4 § 57, II (обобщенной на случай n членов).

Теорема 9. *Если E — элементарное множество и K — компонента множества $\mathscr{X} - E$, то множество $E \cup K$ элементарное.*

Доказательство. Пусть $K_0, \ldots, K_n$ — компоненты множества E':

$$E' = K_0 \cup \ldots \cup K_n, \quad \overline{K}_i \cap \overline{K}_j = 0.$$

Тогда $(E \cup K_0)' = K_1 \cup \ldots \cup K_n$.

Так как компоненты элементарного множества сами являются элементарными множествами, то из теоремы 7 вытекает, что множество $E \cup K_0$ элементарное.

Теорема 10. *Если F — замкнутое подмножество открытого множества G, то существует элементарное замкнутое множество A, такое, что*

$$F \subset \operatorname{Int}(A) \subset A \subset G, \tag{4}$$

$$b_0(A) \leqslant b_0(F), \tag{5}$$

$$b_0(A') \leqslant b_0(G'). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $R_0, \ldots, R_k$ — компоненты множества G, содержащие точки множества F. Положим $F_i = F \cap R_i$. Тогда

$$F = F_0 \cup \ldots \cup F_k \quad \text{и} \quad 0 \neq F_i = \overline{F}_i, \tag{7}$$

так как $\overline{F \cap R_i} - (F \cap R_i) \subset F \cap \overline{R}_i - R_i \subset F - G = 0$.

Более того,

$$k \leqslant b_0(F). \tag{8}$$

Пусть $R_{i1}, \ldots, R_{im_i}$ (где $0 \leqslant i \leqslant k$) — компоненты множества F'_i, содержащие точки R'_i. Положим $H_{ij} = R_{ij} - R_i$. Тогда, как и раньше,

$$R'_i = H_{i0} \cup \ldots \cup H_{im_i} \quad \text{и} \quad \overline{H}_{ij} = H_{ij}. \tag{9}$$

Так как H_{ij} открыто-замкнуто в R'_i, то оно представляет собой объединение семейства компонент множества R'_i. Так как R_i — область, то H_{ij} не является разрезом, ибо в противном случае существовала бы компонента множества H_{ij} (и, следовательно, компонента множества R_i'), являющаяся разрезом (согласно теореме 1 § 57, III), что противоречит теореме 5 из § 46, III.

Таким образом, по теореме 9 п. II существует диск D_{ij}, такой, что

$$(10)\qquad H_{ij} \subset D_{ij} \subset \overline{D}_{ij} \subset R_{ij}.$$

Из соотношений (9) и (10) вытекает, что

$$(10')\qquad R_i' \subset D_{i0} \cup \ldots \cup D_{im_i} \subset \overline{D}_{i0} \cup \ldots \cup \overline{D}_{im_i} \subset F_i'$$

и

$$\overline{D}_{ij} \cap \overline{D}_{ij'} = 0.$$

Более того,

$$(11)\qquad m_i \leqslant b_0(R_i').$$

Согласно (10′), элементарный континуум $C_i = (D_{i0} \cup \ldots \cup D_{im_i})'$ удовлетворяет условию

$$(12)\qquad F_i \subset \operatorname{Int}(C_i) \subset C_i \subset R_i, \quad \text{где} \quad i = 0, \ldots, k,$$

а поэтому (ср. (7)) элементарное замкнутое множество

$$(13)\qquad A = C_0 \cup \ldots \cup C_k$$

удовлетворяет условиям (4).

Формула (5) получается из (8) и (13). Наконец,

$$b_0(A') = b_0(C_0') + \ldots + b_0(C_k') = m_0 + \ldots + m_k \leqslant$$
$$\leqslant b_0(R_0') + \ldots + b_0(R_k') = b_0(R_0' \cap \ldots \cap R_k') \leqslant b_0(G'),$$

согласно (13), (11), (3) и теореме 4 из § 57, II (ср. также § 49, II, теорема 4).

Из теоремы 10 вытекает (ср. § 50, III, теорема 2) следующая

Теорема 11. *Для каждого замкнутого множества F существует последовательность элементарных замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots,$ удовлетворяющих следующим условиям:*

$$(14)\qquad F = F_1 \cap F_2 \cap \ldots,$$
$$(15)\qquad F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n-1}),$$
$$(16)\qquad b_0(F_n) \leqslant b_0(F),$$
$$(17)\qquad b_0(\mathscr{X} - F_n) \leqslant b_0(\mathscr{X} - F).$$

В частности, *если F — континуум, то F_n — тоже континуум; если F не разделяет пространство, то F_n также его не разделяет.*

IV. Топологическая характеристика сферы $\mathscr{S}_2$[1]). Следствия. Пусть $\mathscr{X}$ — пространство Янишевского, не имеющее разрезающих точек. Покажем, что имеет место гомеоморфизм[2])

$$(1) \qquad \mathscr{X} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2.$$

С этой целью введем вспомогательное понятие и установим ряд его свойств.

Определение. Объединение $n+1$ дуг $L_0 \cup \ldots \cup L_n$ $(n \geqslant 1)$ называется *сетью*, если

(i) $L_0 \cup L_1$ — простая замкнутая кривая,

(ii) $L_k \cap (L_0 \cup \ldots \cup L_{k-1})$ состоит из концевых точек L_k.

Сеть $L_0 \cup \ldots \cup L_n$ называется *продолжением* сети $L_0 \cup \ldots \cup L_m$, если $m < n$.

С помощью конечной индукции легко доказывается следующая

Теорема 1. *Множество $\mathscr{X} - (L_0 \cup \ldots \cup L_n)$ состоит из $n+1$ непересекающихся дисков (являющихся его компонентами).*

Теорема 2. *Пусть D — диск, A и B — два подконтинуума замыкания $\bar{D}$ и L — такая дуга, что множество $L \cap \bar{D}$ разделяет $\bar{D}$ между A и B. Тогда существует компонента M множества $D \cap L$, разделяющая D между $A \cap D$ и $B \cap D$.*

Доказательство. Можно считать, что $A \cap D \neq 0 \neq B \cap D$. Пусть $a \in A \cap D$ и $b \in B \cap D$. Тогда множество $L \cap D$ разделяет D между a и b. Так как $\mathscr{X} - D$ — континуум (по теореме Жордана), то D стягиваемо относительно $\mathscr{S}$ (согласно теореме 3 п. I); следовательно, $L \cap D$ содержит (ср. § 58, III, теорема 1) компоненту M, разделяющую D между точками a и b. Очевидно, $\operatorname{Fr}(D) \cup M$ есть θ-кривая. Пусть U и V — компоненты множества $\mathscr{X} - \theta$, содержащие соответственно точки a и b; тогда $A \subset \bar{U}$ и $B \subset \bar{V}$, следовательно, $A \cap D \subset U$ и $B \cap D \subset V$.

Теорема 3. *Пусть R_0 — сеть, а A и B — два непересекающихся континуума, не разделяющих пространство. Тогда существует сеть R_1, являющаяся продолжением сети R_0 и разделяющая пространство $\mathscr{X}$ между множествами $A - R_1$ и $B - R_1$ (так что не существует компоненты множества $\mathscr{X} - R_1$, содержащей точки и множества A, и множества B).*

---

[1]) По этому вопросу см. Мур [1], Гавен [1]. См. также Унтни [2] и Кампен [1], где имеется много литературных ссылок.

[2]) См. Куратовский [17]. Ср. также Куратовский [16].

Доказательство. Пусть D — компонента множества $\mathcal{X}-R_0$, такая, что $D\cap A\neq 0\neq D\cap B$. Предположим сначала, что

(2) $$A\cap \operatorname{Fr}(D)\neq 0\neq B\cap \operatorname{Fr}(D).$$

Пусть C — простая замкнутая кривая, отделяющая A от B (ср. с теоремой 5′ п. II). Тогда множество $C\cap\bar{D}$ разделяет $\bar{D}$ между $\bar{D}\cap A$ и $\bar{D}\cap B$ и $C-\bar{D}\neq 0$, согласно (2). Следовательно, существует поддуга L дуги C, содержащая $C\cap\bar{D}$, концевые точки которой принадлежат $\operatorname{Fr}(D)$. Пусть (ср. § 50, III, теорема 1) $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$ — две системы континуумов, такие, что

$$\bar{D}\cap A\subset F\subset\bar{D},\quad \bar{D}\cap B\subset H\subset\bar{D},\quad F\cap H=0,\quad F\cap L=0=H\cap L,$$

где $F=A_1\cup\ldots\cup A_m$ и $H=B_1\cup\ldots\cup B_n$.

По теореме 2 для каждой пары i, j (где $i\leqslant m$ и $j\leqslant n$) существует компонента M_{ij} множества $D\cap L$, разделяющая D между $D\cap A_i$ и $D\cap B_j$. Положим

$$R(D)=\operatorname{Fr}(D)\cup\bigcup_{i,j}M_{ij};$$

тогда никакая компонента множества $\bar{D}-R(D)$ не содержит одновременно точек множеств A и B.

Если соотношение (2) не выполняется, например когда $A\cap\operatorname{Fr}(D)=0$, то $A\subset D$ и существует (ср. с теоремой 6 п. II) простая замкнутая кривая C, разделяющая A и B и содержащаяся в D. В этом случае $R(D)$ определяется как сеть, получающаяся в результате соединения кривых $\operatorname{Fr}(D)$ и C двумя дугами, неприводимыми между этими кривыми.

Наконец, положим $R_1=\bigcup R(D)$, где суммирование идет по всем компонентам D множества $\mathcal{X}-R_0$.

Теорема 4. *Для каждого $\varepsilon>0$ существует сеть R, такая, что компоненты множества $\mathcal{X}-R$ имеют диаметры $\leqslant\varepsilon$.*

Более того, *сеть R можно выбрать так, чтобы она была продолжением некоторой заданной сети R_0.*

Доказательство. Пусть (в соответствии со следствием 7 п. II) $K_1, \ldots, K_n$ — континуумы, не разрезающие пространство и такие, что

(3) $$\mathcal{X}=K_1\cup\ldots\cup K_n \quad\text{и}\quad \delta(K_i)<1/2.$$

Пусть

(4) $$(j_1, m_1),\ (j_2, m_2),\ \ldots,\ (j_r, m_r)$$

— система всех пар индексов, таких, что $K_{j_i}\cap K_{m_i}=0$.

Пусть R_0 — сеть (например, простая замкнутая кривая). Применяя последовательно теорему 3 к парам

$$(K_{j_1}, K_{m_1}), \ldots, (K_{j_r}, K_{m_r}),$$

найдем такую сеть R, что никакая компонента D множества $\mathcal{X}^{\cdot} - R$ ни при каком $i \leqslant r$ не удовлетворяет условию

$$D \cap K_{j_i} \neq 0 \neq D \cap K_{m_i}. \tag{5}$$

Мы утверждаем, что $\delta(D) \leqslant \varepsilon$. Предположим противное, т. е. что a, $b \in D$ и $|a-b| > \varepsilon$. Пусть $a \in K_\alpha$ и $b \in K_\beta$. Тогда, согласно (3), $K_\alpha \cap K_\beta = 0$, и потому пара α, β принадлежит системе (4), скажем $\alpha = j_i$ и $\beta = m_i$. Таким образом, соотношение (5) выполняется. Но это невозможно, как только что было доказано.

Для краткости гомеоморфизм h: $R \to R^*$ сети R на сеть R^* будем называть *регулярным*, если компоненты множества $\mathcal{X}^{\cdot} - R$ и множества $\mathcal{X}^{\cdot} - R^*$ можно расположить в виде двух систем

$$D_1, \ldots, D_n \quad \text{и} \quad D_1^*, \ldots, D_n^*$$

таким образом, чтобы

$$h\left[\mathrm{Fr}\left(D_i\right)\right] = \mathrm{Fr}\left(D_i^*\right) \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Теорема 5. *Пусть R_0 и R_1 — две сети, вторая из которых есть продолжение первой. Всякий регулярный гомеоморфизм h сети R_0 можно продолжить до регулярного гомеоморфизма h_1 сети R_1.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для случая, когда $R_1 = R_0 \cup L$, где L — дуга ab, такая, что $L \cap R_0 = (a, b)$.

Для простоты обозначений предположим, что $L \subset D_n \cup (a, b)$. В соответствии с (6) $h(a)$, $h(b) \in \mathrm{Fr}\left(D_n^*\right)$. Пусть (ср. с теоремой 11 п. II) L^* — дуга $h(a)\,h(b)$, такая, что $L^* \subset D_n^* \cup h(a) \cup h(b)$.

Гомеоморфизм h можно продолжить на $R_0 \cup L$ так, чтобы L отображалась на L^*. Пусть h_1 обозначает гомеоморфизм, продолженный таким образом.

Положим $E_i = D_i$ и $E_i^* = D_i^*$ для $i < n$. Обозначим через E_n и E_{n+1} (или через E_n^* и E_{n+1}^* соответственно) две компоненты множества $D_n - L$ (соответственно множества $D_n^* - L^*$), занумерованные таким образом, что выполняется соотношение (ср. II, теорема 2)

$$h_1\left[\mathrm{Fr}\left(E_j\right)\right] = \mathrm{Fr}\left(E_j^*\right) \quad \text{для} \quad j = n \quad \text{и} \quad j = n+1.$$

Этим доказательство завершается.

Замечание. В рассматриваемом случае, когда $R_1 = R_0 \cup L$, очевидно, что

(7) $$h_1(R_1 \cap \bar{D}_i) \subset \overline{D_i^*} \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Отсюда по индукции получаем, что то же самое включение имеет место в общем случае, когда $R_1 = R_0 \cup L_2 \cup L_3 \cup \ldots \cup L_m$, где дуги $L_2, \ldots, L_m$ удовлетворяют условию (ii) (если $L_0 \cup L_1$ заменить на R_0).

Основная теорема 6. *Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}^*$ — два пространства Янишевского, не содержащие разделяющих точек и содержащие более чем по одной точке, то $\mathscr{X} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{X}^*$.*

В частности (ср. с теоремой 2 п. I), *$\mathscr{X}$ гомеоморфно сфере $\mathscr{S}_2$.*

Доказательство. Предположим, что $\delta(\mathscr{X}) < 1$ и $\delta(\mathscr{X}^*) < 1$. Пусть R_0 и R_0^* — две простые замкнутые кривые, лежащие соответственно в $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}^*$ (ср. с теоремой 7 п. II). Пусть h_0: $R_0 \to R_0^*$ — гомеоморфизм R_0 на R_0^*. Обозначим через h_0^* гомеоморфизм, обратный к h_0.

В соответствии с теоремой 4 пусть R_1^* — такое продолжение сети R_0^*, что компоненты множества $\mathscr{X}^* - R_1^*$ имеют диаметры $< 1/2$. В соответствии с теоремой 5 пусть h_1^* — регулярный гомеоморфизм, такой, что $h_0^* \subset h_1^*$. Положим $R_1 = h_1^*(R_1^*)$ и обозначим через h_1 гомеоморфизм, обратный к h_1^*.

Аналогично пусть R_2 — продолжение сети R_1, такое, что компоненты множества $\mathscr{X} - R_2$ имеют диаметры $< 1/3$, и пусть h_2 — регулярный гомеоморфизм, такой, что $h_1 \subset h_2$. Положим $R_2^* = h_2(R_2)$ и обозначим через h_2^* гомеоморфизм, обратный к h_2.

Продолжая таким образом шаг за шагом, определим

(i) две последовательности сетей

$$R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset \mathscr{X}, \quad R_0^* \subset R_1^* \subset \ldots \subset \mathscr{X}^*,$$

такие, что компоненты множеств $\mathscr{X} - R_n$ и $\mathscr{X} - R_n^*$ имеют диаметры $< 1/n$;

(ii) две последовательности регулярных гомеоморфизмов

$$h_0 \subset h_1 \subset \ldots, \quad h_0^* \subset h_1^* \subset \ldots,$$

такие, что h_n^* — гомеоморфизм, обратный к h_n, и $h_n(R_n) = R_n^*$. Положим

$$R = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n, \quad R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n^*, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad h^* = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^*.$$

Тогда

$$h(R) = R^*, \quad h^*(R^*) = R$$

и отображения h и h^*, обратные друг к другу, взаимно однозначны. Покажем, что они непрерывны.

Пусть $x_0 \in R$, $\varepsilon > 0$ и $n > 1/\varepsilon$. Тогда $\delta(D^*) < \varepsilon$ для каждой компоненты D^* множества $\mathscr{X}^* - R_n^*$.

Пусть $D_1, \ldots, D_k$ — система всех компонент D_i множества $\mathscr{X} - R_n$, таких, что $x_0 \in \overline{D}_i$. Тогда множество $E = \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_k$ есть окрестность точки x_0. Согласно (7),

$$h(R \cap \overline{D}_i) \subset \overline{D_i^*},$$

поэтому $h(x_0) \subset \overline{D_1^*} \cap \ldots \cap \overline{D_k^*}$ и $h(R \cap E) \subset \overline{D_1^*} \cup \ldots \cup \overline{D_k^*}$, так что $\delta[h(R \cap E)] < 2\varepsilon$. Следовательно, функция h непрерывна в точке x_0.

Аналогично, функция h^* непрерывна на R^*.

Теперь покажем, что колебание функции h обращается в нуль в точках множества $\mathscr{X} - R$ (и что колебание функции h^* обращается в нуль в точках множества $\mathscr{X}^* - R^*$).

Пусть $x_0 \in \mathscr{X} - R$. Пусть индекс n выбран, как выше, и пусть D — компонента множества $\mathscr{X} - R_n$, содержащая точку x_0. Тогда

$$h(R \cap \overline{D}) \subset \overline{D^*}, \quad \text{откуда} \quad \delta[h(R \cap D)] \subset \varepsilon,$$

следовательно, колебание функции h обращается в нуль в точке x_0 (ср. § 21, III).

Таким образом, существует непрерывное продолжение g отображения h на все пространство $\mathscr{X}$ (ср. § 35, I, теорема 1). Аналогично $h^* \subset g^*$, где $g^*\colon \mathscr{X}^* \to \mathscr{X}$ — непрерывная функция.

Остается показать, что g^* — функция, обратная к g, т. е. что $g^*g(x) = x$. Пусть $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, где $x_n \in R$. Тогда

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} h(x_n),$$

откуда

$$g^*g(x) = \lim_{n \to \infty} g^*h(x_n) = \lim_{n \to \infty} h^*h(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Замечания. (i) Если R_0 — произвольная сеть и $R_0^* = h_0(R_0)$, где h_0 — *регулярный* гомеоморфизм, то можно, как и раньше, показать, что гомеоморфизм $g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}^*$, отображающий $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}^*$, является продолжением гомеоморфизма h_0.

(ii) Сферу $\mathscr{S}_2$ можно охарактеризовать следующим образом: *$\mathscr{X}$ — локально связный континуум, содержащий по крайней мере одну простую замкнутую кривую, и каждая простая замкнутая кривая является неприводимым разделителем $\mathscr{X}$* (см. Циппин [2]).

Следствие 7[1]). *Локально связный континуум является пространством Янишевского тогда и только тогда, когда каждый из его циклических элементов, не сводящийся к точке, гомеоморфен* $\mathscr{S}_2$.

Доказательство. Если $\mathscr{X}$ — пространство Янишевского, то пространством Янишевского является и каждый из его циклических элементов E (по теореме 10 п. I). Так как E не имеет разделяющих точек, то по теореме 6 $E \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2$ (при условии, что E не сводится к одной точке). Следовательно, рассматриваемое условие необходимо. Оно также и достаточно, поскольку свойство Янишевского продолжимо (ср. с теоремой 10 п. I), а $\mathscr{S}_2$ обладает этим свойством (ср. с теоремой 2 п. I).

Теорема 8[2]). *Если f — непрерывное отображение сферы $\mathscr{S}_2$, такое, что для каждого y множество $f^{-1}(y)$ — континуум, не разрезающий пространство, то $f(\mathscr{S}_2) \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2$.*

Другими словами, *пространство полунепрерывного разбиения $\mathscr{S}_2$ на континуумы, не разрезающие $\mathscr{S}_2$, гомеоморфно $\mathscr{S}_2$.*

Доказательство. Согласно теореме 9 п. I, $f(\mathscr{S}_2)$ является пространством Янишевского и не содержит разрезающих точек (по предположению). Следовательно, это пространство гомеоморфно $\mathscr{S}_2$ по теореме 6.

Следствие 9. *Всякая область $R \subset \mathscr{S}_2$ гомеоморфна сфере $\mathscr{S}_2$, из которой выброшено замкнутое множество размерности 0, а именно множество, гомеоморфное пространству разбиения $\mathscr{S}_2 - R$ на компоненты* (ср. § 47, VI, теорема 1).

В частности, *если область $R (\neq \mathscr{S}_2)$ не разрезает $\mathscr{S}_2$, то $R \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}^2$.*

Доказательство. С одной стороны, разбиение $\mathscr{S}_2$ на компоненты множества $\mathscr{S}_2 - R$ и отдельные точки R полунепрерывно; с другой стороны, компоненты множества $\mathscr{S}_2 - R$ не разрезают $\mathscr{S}_2$ (по теореме 5 из § 46, III).

Теорема 10. *Если D — диск, то $\bar{D} \underset{\text{top}}{=} \mathscr{J}^2$.*

Доказательство. Это прямое следствие замечания (i).

Теорема 11. *Если $C \neq \mathscr{S}_2$ — локально связный континуум, не разрезающий $\mathscr{S}_2$, то C — абсолютный ретракт. Если, более*

---

[1]) Ср. Циппин [1].

[2]) Теорема Мура [9]. См. также Мур [11], где рассматривается более общий вопрос (не предполагается, что $f^{-1}(y)$ не разрезает пространство).

того, C не содержит ни одной разрезающей точки, то $C \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}^2$ (при условии, что C содержит более одной точки).

Доказательство. Если C не содержит ни одной разрезающей точки, то, согласно II, 4 (ii), $R = \mathcal{S}_2 - C$ — диск и $D = \mathcal{S}_2 - \overline{R}$ — тоже диск. Следовательно, $C = \mathcal{S}_2 - R = \overline{D} \underset{\text{top}}{=} \mathcal{S}^2$. Чтобы доказать первую часть теоремы, достаточно (согласно теореме 16 § 53, III) показать, что каждый циклический элемент E континуума C есть абсолютный ретракт. Но это (как уже было показано) следует из того, что E не разрезает $\mathcal{S}_2$ (по теореме 15 § 53, III и теореме 8 § 59, IV).

Замечания. Пусть U — универсальный континуум Серпинского (см. § 51, I, пример 5). Пусть $D_0, D_1, \ldots$ — последовательность компонент множества $\mathcal{S}_2 - U$.

Разбиение $\mathcal{S}_2$ на континуумы $\overline{D}_0$, $\overline{D}_1$, ... и отдельные точки множества $V = U - (\overline{D}_0 \cup \overline{D}_1 \cup \ldots)$ является полунепрерывным. Пространство этого разбиения гомеоморфно $\mathcal{S}_2$ по теореме 8. Поэтому множество V гомеоморфно плоскости, из которой удалено счетное всюду плотное множество. Таким образом (ср. § 59, IV, теорема 11), имеет место следующая

Теорема 12. *Всякое граничное подмножество плоскости топологически содержится в континууме U.*

Теорема 13[1]. *Если C — одномерный континуум, то непрерывные функции $f\colon C \to \mathcal{E}^2$, такие, что $f(C) \underset{\text{top}}{=} U$, образуют остаточное множество в пространстве $(\mathcal{E}^2)^C$.*

V. Продолжение гомеоморфизмов. Топологическая эквивалентность.

Теорема 1. *Если $A (\subset \mathcal{S}_2)$ — дуга, или простая замкнутая кривая, или θ-кривая, то всякий гомеоморфизм $h\colon A \to \mathcal{S}_2$ можно продолжить на все пространство $\mathcal{S}_2$.*

Другими словами, *существует гомеоморфизм h^*, такой, что*

$$h \subset h^* \quad \text{и} \quad h^*(\mathcal{S}_2) = \mathcal{S}_2.$$

Доказательство. Если A — простая замкнутая кривая или θ-кривая, то теорема вытекает из замечания (i) к теореме 6 п. IV, так как в этом случае каждый гомеоморфизм множества A регулярен.

Пусть A — дуга ab и $h(A) = a_1b_1$. Так как точки a и b достижимы из $\mathcal{S}_2 - A$ (ср. с теоремой 11 п. II), то дугу A можно

[1]) Доказательство см. Мазуркевич [29]. Ср. также Мазуркевич [26] и Ярник [1].

дополнить до простой замкнутой кривой C. Аналогично, a_1b_1 содержится в простой замкнутой кривой C_1. Очевидно, существует гомеоморфизм h_1, такой, что

$$h \subset h_1 \quad \text{и} \quad h_1(C) = C_1,$$

и, как мы только что установили, существует гомеоморфизм h^*, такой, что

$$h^*(\mathscr{S}_2) = \mathscr{S}_2 \quad \text{и} \quad h_1 \subset h^*, \quad \text{откуда} \quad h \subset h^*.$$

Следствие 2. *Все дуги, лежащие в $\mathscr{S}_2$, топологически эквивалентны. Топологически эквивалентны также все простые замкнутые кривые и все θ-кривые, содержащиеся в $\mathscr{S}_2$.*

Замечания. (i) В $\mathscr{E}^3$ утверждение следствия не имеет места. Действительно, *существует дуга, топологически не эквивалентная $\mathscr{I}$* [1]).

(ii) Пусть Φ — пространство всех гомеоморфизмов f: $\mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}_3$. Тогда множество всех f, таких, что $f(\mathscr{S}_1)$ топологически эквивалентно $\mathscr{S}_1$, есть множество первой категории в Φ [2]).

(iii) В $\mathscr{S}_3$ существует поверхность, которая гомеоморфна, но топологически не эквивалентна сфере $\mathscr{S}_2$ [3]).

Теорема 3. *Пусть $D_0, \ldots, D_n$ и $D_0^*, \ldots, D_n^*$ — две системы дисков, таких, что*

$$\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = 0 = \overline{D_i^*} \cap \overline{D_j^*} \quad \textit{для} \quad i \neq j.$$

Пусть $C_i = \mathrm{Fr}(D_i)$ и $C_i^* = \mathrm{Fr}(D_i^*)$. Тогда всякий гомеоморфизм h: $C_0 \to C_0^*$ допускает гомеоморфное продолжение h^*, такое, что

(1) $$h^*(\mathscr{S}_2) = \mathscr{S}_2,$$

(2) $$h^*(D_i) = D_i^* \quad \textit{для} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Доказательство. Применим индукцию. Пусть $n = 1$. Пусть $A = a_0a_1$ и $B = b_0b_1$ — две непересекающиеся дуги, неприводимые между $\overline{D}_0$ и $\overline{D}_1$, и аналогично пусть $A^* = a_0^*a_1^*$ и $B^* = b_0^*b_1^*$ — две непересекающиеся дуги, неприводимые между $\overline{D_0^*}$ и $\overline{D_1^*}$, где $a_0^* = h(a_0)$ и $b_0^* = h(b_0)$ (ср. с теоремой 11 п. II).

---

[1]) Антуан [1], [2]. Ср. Артин и Фокс [1], Бланкиншип [1], Вонг [1] и Кли [1].

[2]) Милнор [1].

[3]) Ср. Александер [2] — [4].

Множество $\mathscr{S}_2-(C_0\cup C_1\cup A\cup B)$ состоит из четырех дисков D_0, D_1, D_2 и D_3. Чтобы показать это, достаточно применить теорему Жордана к пространству, которое получится из $\mathscr{S}_2$, если $\bar{D}_0$ и $\bar{D}_1$ рассматривать как отдельные точки.

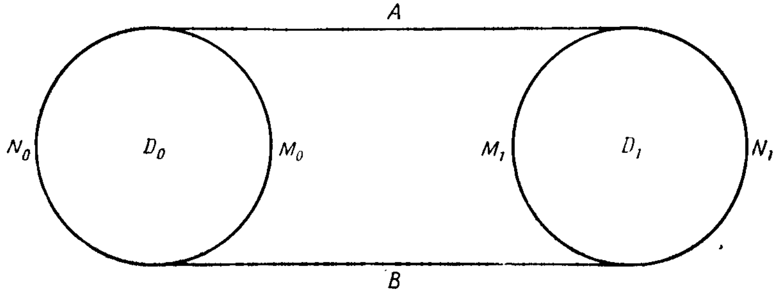

Рис. 20

Пусть M_j и N_j — две дуги a_jb_j множества C_j (рис. 20), заиндексированные таким образом, что

$$\text{(3)}\qquad \operatorname{Fr}(D_2)=M_0\cup A\cup M_1\cup B \quad\text{и, следовательно,}$$
$$\operatorname{Fr}(D_3)=N_0\cup A\cup N_1\cup B.$$

Аналогично, пусть

$$\text{(4)}\qquad \begin{gathered}\mathscr{S}_2-(C_0^*\cup C_1^*\cup A^*\cup B^*)=D_0^*\cup D_1^*\cup D_2^*\cup D_3^*,\\ M_0^*=h(M_0),\quad N_0^*=h(N_0),\end{gathered}$$

где множества M_1^* (и N_1^*) и D_2^* (и D_3^*) заиндексированы так, что выполняются условия

$$\text{(5)}\qquad \operatorname{Fr}(D_2^*)=M_0^*\cup A^*\cup M_1^*\cup B^*,\quad \operatorname{Fr}(D_3^*)=N_0^*\cup A^*\cup N_1^*\cup B^*.$$

Очевидно, гомеоморфизм h допускает продолжение до гомеоморфизма между множествами $C_0\cup C_1\cup A\cup B$ и $C_0^*\cup C_1^*\cup A^*\cup B^*$ и, следовательно, до гомеоморфизма h^*, такого, что $h^*(D_j)=D_j^*$ для $j=0,\ 1,\ 2,\ 3$ (в силу условий (3)—(5)).

Таким образом, при $n=1$ теорема доказана. Теперь предположим, что она верна для $n-1$. Покажем, что она имеет место для n.

Пусть a и b — две точки множества C_0, L_1 и L_2 — две поддуги C_0 с концевыми точками a и b. Как легко видеть, существует дуга ab, такая, что $\bar{D}_0\cap ab=(a,\ b)$. Обозначим через R_1

компоненту множества $\mathcal{S}_2 - C_2 - ab$ с границей $L_i \cup ab$ (где $i = 1, 2$); тогда

$$\overline{D}_n \subset R_1 \quad \text{и} \quad \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_{n-1} \subset R_2.$$

(Чтобы доказать это, достаточно применить теорему 8 п. IV, считая $\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_n$ отдельными точками.)

Аналогично, пусть $h(a)h(b)$ такая дуга, что

$$\overline{D^*_0} \cap h(a)\,h(b) = [h(a),\ h(b)]$$

и что, если обозначить через R^*_i компоненту множества $\mathcal{S}_2 - C^*_0 - h(a)\,h(b)$ с границей $h(L_i) \cup h(a)\,h(b)$, то

$$\overline{D^*_n} \subset R^*_1 \quad \text{и} \quad \overline{D^*_1} \cup \ldots \cup \overline{D^*_{n-1}} \subset R^*_2.$$

Пусть h_0 — продолжение гомеоморфизма h на множество $\overline{D}_0 \cup ab$, такое, что

$$h_0(D_0) = D^*_0 \quad \text{и} \quad h_0(ab) = h(a)\,h(b).$$

Применяя теорему 3 к случаю двух дисков $\mathcal{S}_2 - \overline{R}$ и D_n и к случаю n дисков $\mathcal{S}_2 - \overline{R}_2, D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$, можно, во-первых, продолжить гомеоморфизм $h_0 | L_1 \cup ab$ на $\overline{R}_1$, а затем гомеоморфизм $h_0 | L_2 \cup ab$ на $\overline{R}_2$ таким образом, чтобы при этом удовлетворялись соотношения (2), сначала для $i = n$, а затем для $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Теорема 4. *Всякий гомеоморфизм между двумя замкнутыми нульмерными множествами можно продолжить до гомеоморфизма на всем пространстве* $\mathcal{S}_2$.

В частности, *на сфере* $\mathcal{S}_2$ *всякое совершенное нульмерное множество топологически эквивалентно канторову дисконтинууму* $\mathscr{C}$.

Доказательство. Пусть

$$F = \overline{F}, \quad \dim F = 0 \quad \text{и} \quad F^* = h(F),$$

где h — гомеоморфизм.

Определим две последовательности замкнутых множеств $\{F_n\}$ и $\{F^*_n\}$ и последовательность гомеоморфизмов $h_n\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\quad F \subset F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n-1}), \quad F^* \subset F^*_n \subset \operatorname{Int}(F^*_{n-1});$

(ii) $\quad F_n = \overline{D}_{n1} \cup \ldots \cup \overline{D}_{nk_n}, \quad \overline{D}_{ni} \cap \overline{D}_{nj} = 0, \quad F \cap D_{ni} \neq 0;$

(iii) $\quad F^*_n = \overline{D^*_{n1}} \cup \ldots \cup \overline{D^*_{nk_n}}, \quad \overline{D^*_{ni}} \cap \overline{D^*_{nj}} = 0, \quad F^* \cap D^*_{ni} \neq 0;$

(iv) $$h_n(D_{ni}) = D^*_{ni};$$

(v) $$h(F \cap D_{ni}) = F^* \cap D^*_{ni};$$

(vi) $$h_{n-1} | \overline{\mathcal{S}_2 - F_{n-1}} \subset h_n;$$

(vii) $\delta(D_{ni}) < 1/n$ для четных значений n;

(viii) $\delta(D^*_{ni}) < 1/n$ для нечетных значений n,

где D_{ni} и D^*_{ni} — диски.

Воспользуемся индукцией. Пусть D_0 и D^*_0 — два диска, таких, что $F \subset D_0$ и $F^* \subset D^*_0$. Положим $F_0 = \bar{D}_0$ и $F^*_0 = \bar{D}^*_0$. Пусть h_0: $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2$ — гомеоморфизм, такой, что $h_0(D_0) = D^*_0$.

Пусть $n > 0$ четное. Предположим, что условия (i) — (vii) удовлетворяются для $n-1$. Так как F не является разрезом (согласно теореме 6 § 57, III), то пусть F_n — множество, удовлетворяющее условиям (i), (ii) и (vii) в соответствии с теоремой 11 п. III.

Определим последовательно диски $D^*_{n1}, \ldots, D^*_{nk_n}$ следующим образом. На основании (i) — (iii) можно предположить, что

$$\bar{D}_{n1} \cup \ldots \cup \bar{D}_{ns_n} \subset D_{n-1,1} \quad \text{и} \quad \bar{D}_{nm} \not\subset D_{n-1,1} \quad \text{для} \quad s_n < m \leqslant k_n.$$

Следовательно, $F \cap D_{n-1,1} = F \cap D_{n1} \cup \ldots \cup F \cap D_{ns_n}$ и, согласно (v) (для $n-1$),

$$h(F \cap D_{n1}) \cup \ldots \cup h(F \cap D_{ns_n}) = h(F \cap D_{n-1,1}) = F^* \cap D^*_{n-1,1}.$$

Отсюда по теореме 9′ п. II вытекает существование системы дисков $D^*_{n1}, \ldots, D^*_{ns_n}$, такой, что

$$h(F \cap D_{ni}) \subset D^*_{ni}, \quad \overline{D^*_{ni}} \subset D^*_{n-1,1} \quad \text{и} \quad \overline{D^*_{ni}} \cap \overline{D^*_{nj}} = 0 \quad \text{для} \quad i \neq j.$$

Определим аналогичным образом диски D^*_{nm} для $m > s_n$ и множества F^*_n с помощью первого равенства (iii). Тогда будут выполняться условия (i), (iii) и (v).

Наконец, в соответствии с теоремой 3 определим гомеоморфизм h_n так, чтобы удовлетворялись условия (iv) и (vi).

Итак, соотношения (i) — (vii) выполняются.

Для нечетных значений n поступим аналогичным образом, заменив F и F_n на F^* и F^*_n, а D^*_{ni} и F^*_{n-1} на D_{ni} и F_{n-1}. Получится гомеоморфизм h_n^{-1}, обратный к h_n. Положим

$$h^*(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x).$$

Так как сходимость равномерная, то функция h^* непрерывна и $h^*(\mathscr{S}_2)=\mathscr{S}_2$. При этом $h\subset h^*$, ибо в силу (iv), (v) и (viii) мы имеем

$$|h(x)-h_n(x)|\leqslant\delta(D^*_{ni})<1/(n-1)\quad \text{для}\quad x\in F\cap D_{ni}.$$

Так как $(h^*|\mathscr{S}_2-F)$: $\mathscr{S}_2-F\to\mathscr{S}_2-F^*$ — гомеоморфизм на (согласно (vi)), то h^* — гомеоморфизм всего пространства $\mathscr{S}_2$.

Замечание. В $\mathscr{E}^3$ эта теорема неверна [1]).

Теорема 5 (Данжуа — Рисса). *Всякое замкнутое нульмерное множество F содержится в некоторой дуге* [2]).

Доказательство. Пусть A — подмножество интервала $\mathscr{J}$ и h: $A\to F$ — гомеоморфизм на (ср. § 26, IV, теорема 2); чтобы получить дугу, содержащую F, достаточно продолжить этот гомеоморфизм на $\mathscr{J}$.

Замечание. Эта теорема остается справедливой, если $\mathscr{S}_2$ заменить локально связным континуумом, не содержащим локально разделяющих точек (т. е. никакая его точка не разделяет никакой области [3])).

Теорему 5 можно усилить следующим образом.

Теорема 6. *Если A и B — два компактных нульмерных подмножества пространства $\mathscr{E}^2$, то существует дуга L, такая, что*

$$L\cap B\subset A\subset L. \tag{6}$$

Более того, *если a_0 и a_1 — две любые заданные точки A, то можно считать, что они суть концевые точки дуги L.*

Доказательство. Так как $A\cup B\subset\mathscr{C}$ и так как $\mathscr{C}$ одно-
top
родно, то по теореме 4 существует гомеоморфизм h: $\mathscr{E}^2\to\mathscr{E}^2$, такой, что

$$h(A\cup B)\subset\mathscr{C},\quad h(\mathscr{E}^2)=\mathscr{E}^2,\quad h(a_0)=0\quad \text{и}\quad h(a_1)=1.$$

Положим

$$K=\mathop{\mathrm{E}}_{x,\,y}\{y=\rho[x,\,h(A)]\},\quad \text{где}\quad x\in\mathscr{J},\quad \text{и}\quad L=h^{-1}(K).$$

---

[1]) См. Антуан [1], [2]. См. также Бинг [11], Киркор [1] и Мак-Миллан [1].

[2]) См. Рисс [1] и Данжуа [1]. По поводу обобщений см. Клайн и Мур [1].

[3]) Теорема Уайберна [17].

Так как K — дуга (ср. § 21, IV, (5) и §15, V, теорема 1) с концевыми точками 0 и 1, то L — дуга a_0a_1. Более того,

$$K \cap \mathcal{J} = h(A), \text{ так что } L \cap h^{-1}(\mathcal{J}) = A,$$

откуда следует соотношение (6), ибо $B \subset h^{-1}(\mathcal{J})$.

Теорема 7. *Если R_0 и R_1 — две гомеоморфные области, такие, что* $\dim(\mathcal{S}_2 - R_0) = 0 = \dim(\mathcal{S}_2 - R_1)$, *то всякий гомеоморфизм h области R_0 на R_1 можно продолжить до гомеоморфизма $\mathcal{S}_2$ на $\mathcal{S}_2$*[1]).

Доказательство. Пусть $p \in \mathcal{S}_2 - R_0$. Покажем, что колебание $\omega_h(p)$ равно нулю.

Предположим, что $\omega_h(p) > 0$. Тогда существует последовательность точек $a_n \in R_0$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p, \tag{7}$$

$$|h(a_n) - h(a_{n+1})| > \eta, \quad \text{где } \eta > 0. \tag{8}$$

Пусть A — множество, состоящее из точки p и точек a_n, где $n = 1, 2, \ldots$. Так как $\overline{A} = A$ и $\dim A = 0$, то по теореме 6 (где $B = \mathcal{S}_2 - R_0$) существует дуга $L = a_1p$, такая, что $A \subset L$ и $L - R_0 = p$. Положим

$$C_n = h(a_na_{n+1}), \quad \text{где} \quad a_na_{n+1} \subset L. \tag{9}$$

Пусть $\{C_{k_n}\}$ — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{C_n\}$; пусть

$$C = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} C_{k_n}.$$

Согласно (8), $\delta(C) \geqslant \eta$. Поэтому континуум C содержит более одной точки. Следовательно, $C \cap R_1 \neq 0$, так как $\dim(\mathcal{S}_2 - R_1) = 0$. Но это невозможно, так как, согласно (9), $p = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(a_na_{n+1})$, поэтому $R_0 \cap \operatorname*{Lim}_{n\to\infty}(a_{k_n}a_{k_n+1}) = 0$ и, следовательно,

$$R_1 \cap \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} C_{k_n} = 0.$$

Таким образом, установлено, что $\omega_h(p) = 0$ для каждой точки $p \in \mathcal{S}_2 - R_0$; аналогично можно доказать, что $\omega_{h^{-1}}(q) = 0$ для каждой точки $q \in \mathcal{S}_2 - R_1$. Следовательно,

$$h \subset f, \text{ где } f\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2 \text{ непрерывно и } f(\overline{R_0}) = \mathcal{S}_2,$$

$$h^{-1} \subset g, \text{ где } g\colon \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_2 \text{ непрерывно и } g(\overline{R_1}) = \mathcal{S}_2.$$

[1]) Теорема 7 является частным случаем теоремы I § 57, IV (которая была приведена без доказательства).

Отсюда легко получаем, что $g = f^{-1}$ (ср. с последней частью доказательства теоремы 6 п. IV).

Теорему 9 п. IV можно более точно сформулировать следующим образом:

Теорема 8 [1]). *Пусть R_j — область и H_j — пространство разбиения множества $\mathscr{S}_2 - R_j$ на компоненты ($j = 0, 1$). Тогда имеет место следующее соотношение эквивалентности:*

$$(10) \qquad (R_0 \underset{\text{top}}{=} R_1) \equiv (H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1).$$

Доказательство. Будем рассматривать H_j как подмножество $\mathscr{S}_2$; тогда по теореме 9 п. IV

$$(11) \qquad R_j \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2 - H_j.$$

Так как $\dim H_j = 0$, то по теореме 7

$$(\mathscr{S}_2 - H_0 \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2 - H_1) \Rightarrow (H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1),$$

а на основании теоремы 4

$$(H_0 \underset{\text{top}}{=} H_1) \Rightarrow (\mathscr{S}_2 - H_0 \underset{\text{top}}{=} \mathscr{S}_2 - H_1).$$

Из этих импликаций в сочетании с (11) получаются соотношения (10).

Теорема 9 (об инвариантности). *Если R — область пространства $\mathscr{S}_2$, то мощность семейства компонент множества $\mathscr{S}_2 - R$ есть внутренний инвариант R.*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 8 [2]).

Аналогичный вопрос, касающийся открытых подмножеств пространства $\mathscr{S}_2$, мы рассмотрим в § 62, X (замечание 1).

§ 62. Количественные проблемы. Группа $\mathscr{P}^A$

I. Общие свойства и обозначения [3]). В соответствии с последним замечанием § 56, I все теоремы § 56 и 57 остаются

[1]) См. Керекьярто [2, стр. 123].

[2]) Ср. с примечанием по поводу теоремы 7.

[3]) Ряд теорем § 62 можно вывести из соответствующих теорем § 60 (подставляя $n = 2$). Однако автору казалось желательным дать здесь прямые и более элементарные доказательства рассматриваемых теорем, не используя когомотопное умножение (без которого в случае $n = 2$ можно обойтись, так как $\mathscr{P}_2$ — абелева группа и, следовательно, всякая пара функций со значениями в $\mathscr{P}_2$ мультипликативна).

справедливыми, если окружность $\mathscr{S}$ заменить множеством $\mathscr{P}$ (т. е. плоскостью $\mathscr{E}^2$ с выброшенной точкой 0), а множество $\mathscr{E}$ — множеством $\mathscr{E}^2$. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что соотношение $f\sim 1$, где f: $\mathscr{X}\to\mathscr{P}$ — непрерывная функция, означает существование непрерывной функции u: $\mathscr{X}\to\mathscr{E}^2$, такой, что

$$f(x)=e^{u(x)}\quad\text{для}\quad x\in\mathscr{X};$$

$\Psi(\mathscr{X})$ будет обозначать множество функций $f\in\mathscr{P}^{\mathscr{X}}$, таких, что $f\sim 1$; $\mathfrak{B}_1(\mathscr{X})$ будет обозначать факторгруппу $\mathscr{P}^{\mathscr{X}}/\Psi(\mathscr{X})$, а $b_1(\mathscr{X})$ — ее ранг.

Приведем несколько легко доказываемых утверждений, которыми мы часто будем пользоваться.

Теорема 1. *Пусть* f: $\mathscr{X}\to\mathscr{P}$ — *непрерывная функция. Определим* $\vec{f}$ *следующим условием*:

$$\vec{f}(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Для того чтобы $f(x)=e^{u(x)}$, *где* u: $\mathscr{X}\to\mathscr{E}^2$ — *непрерывная функция, необходимо и достаточно, чтобы* $\vec{f}(x)=e^{i\varphi(x)}$, *где* φ: $\mathscr{X}\to\mathscr{E}$ — *непрерывная функция.*

Следовательно, *условия* $f\sim 1$, f *гомотопна* 1 *относительно* $\mathscr{P}$ *и* $\vec{f}\sim 1$, $\vec{f}$ *гомотопна* 1 *относительно* $\mathscr{S}$ *эквивалентны.*

Теорема 2. $x\not\sim 1$ *на* $\mathscr{P}$.

Ср. § 56, III, 4 (i). Более общо, верна следующая

Теорема 3. $x-p\underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1$ *на* $\mathscr{E}^2-p$ *и* $\dfrac{x-p}{x-q}\not\sim 1$ *на* $\mathscr{S}_2-p-q$.

Доказательство. Гомографическая функция $f(x)=\dfrac{x-p}{x-q}$ отображает $\mathscr{S}_2-p-q$ на $\mathscr{P}$. Если $f(x)=e^{u(x)}$ для $x\in\mathscr{S}_2-$ $-p-q$, то $y=e^{uf^{-1}(y)}$ для $y\in\mathscr{P}$, что противоречит теореме 2.

Замечание. Условимся писать $x-q\equiv 1$, если $q=\infty$.

Теорема 4. *Если* C — *окружность* $|x-p|=r$, *где* $p\neq\infty$, *то для каждой непрерывной функции* f: $C\to\mathscr{P}$ *существует одно и только одно число* n, *такое, что* $f(x)\sim(x-p)^n$.

Другими словами, *функция* $x-p$ *есть базис группы* $\mathscr{P}^C$ *по* $\operatorname{mod}\Psi(C)$.

Доказательство. Это простое следствие теоремы 4 из § 56, III.

Теорема 5. *Из* $|q-p|>r$ *вытекает, что* $(x-q)\sim 1$ *на* C.

Доказательство. Действительно, луч R, выходящий из точки 0 и параллельный вектору $q-p$, не содержит значений функции $x-q$ для $x \in C$.

Теорема 6. *Если Q — замкнутый диск $|x-p| \leqslant r$, то всякая непрерывная функция $f: Q \to \mathscr{P}$ гомотопна единице, т. е. $f \sim 1$.*

Это прямое следствие теоремы 9 (i) из § 58, I.

Замечание. С помощью теорем 4 и 6 можно дать очень простое доказательство основной теоремы алгебры [1]).

А именно предположим, что полином

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

не обращается в нуль ни при каком x. Пусть $g(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_0$. Пусть r — действительное число, такое, что

$$(1) \qquad |x^n| > |g(x)| \quad \text{для} \quad |x| \geqslant r.$$

Пусть Q — замкнутый диск $|x| \leqslant r$ и C — его граница. По теореме 6 $f \sim 1$ на Q и, следовательно, на C.

Покажем, что $f(x) \sim x^n$ на C, что приведет к противоречию, так как по теореме 4 $x^n \nsim 1$ на C. Положим

$$h(x, t) = x^n + t \cdot g(x), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

тогда f гомотопно x^n на C. Действительно,

$$h(x, 0) = x^n, \; h(x, 1) = f(x) \quad \text{и} \quad h(x, t) \neq 0 \quad \text{для} \quad |x| = r,$$

ибо если $h(x, t) = 0$, то

$x^n = -t \cdot g(x)$, откуда $|x^n| = t \cdot g(x)$, следовательно, $|x^n| \leqslant |g(x)|$, что противоречит (1).

II. Разрезы сферы $\mathscr{S}_2$.

Теорема 1 (Эйленберга [2])). *Множество $A \subset \mathscr{S}_2 - p - q$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p и q тогда и только тогда, когда*

$$(1) \qquad \frac{x-p}{x-q} \sim 1 \text{ на } A.$$

Доказательство. Положим

$$(2) \qquad f(x) = \frac{x-p}{x-q}.$$

[1]) Ср. Александров и Хопф [1, стр. 469].

[2]) Эйленберг [7, стр. 75].

Сначала пусть C — такой континуум, что $p, q \in C \subset \mathcal{S}_2 - A$. Согласно теореме 3 из § 61, I, $f \mid \mathcal{S}_2 - C \sim 1$, откуда следует соотношение (1), так как $A \subset \mathcal{S}_2 - C$.

Обратно, предположим, что соотношение (1) имеет место. По теореме 9 из § 56, II существует открытое множество G, такое, что

$$(3) \qquad A \subset G \subset \mathcal{S}_2 - p - q \quad \text{и} \quad f \mid G \sim 1.$$

Предположим, что A — разрез между точками p и q; тогда G — тоже разрез между этими точками. Поэтому G содержит замкнутый разделитель F между p и q. Но тогда $f \mid F \nsim 1$ (согласно теореме 3 п. I и теореме 5 § 59, II), что противоречит (3).

Т е о р е м а 2. *Никакое множество, стягиваемое относительно $\mathcal{S}$, не является разрезом $\mathcal{S}_2$.*

В частности, *никакое множество, гомеоморфное подмножеству интервала, не является разрезом $\mathcal{S}_2$* (ср. § 58, I, 9 (iv)).

Т е о р е м а 3. *Если C — связное множество и D — разрез между точками p и q, такой, что $C \subset D \subset \overline{C} - p - q$, то существует точка $a \in D$, такая, что $C \cup a$ — разрез между p и q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если f определяется формулой (2), то из условий $f \mid D \nsim 1$ и $f \mid C \sim 1$ вытекает, согласно теореме 7 § 56, VI (если положить $\mathcal{X} = D$), существование такой точки a, что $(f \mid C \cup a) \nsim 1$.

Т е о р е м ы 4 и 5. *Если в утверждениях теорем 2 и 5 из § 59, IV заменить $\mathcal{S}_n$ на $\mathcal{S}_2$, то предположение о том, что F замкнуто, можно опустить.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того чтобы доказать теорему 4, достаточно в доказательстве теоремы 2 § 59, IV заменить следствие 6 § 59, II теоремой 1.

Для доказательства теоремы 5, чтобы упростить обозначения, положим $p = 0$ и $q = \infty$. Тогда по теореме 1 $x \mid F \sim 1$. А это означает, что множество F можно деформировать в точку в $\mathcal{P}$ (ср. § 54, IV).

Т е о р е м а 6 (обобщенная теорема Эйленберга). *Пусть $p_0, \ldots, p_n$ суть $n+1$ различных точек, и пусть $A \subset \mathcal{S}_2 - (p_0, \ldots, p_n)$. Для того чтобы A было разрезом между каждой парой точек p_i, p_j (где $i \neq j$), необходимо и достаточно, чтобы гомографические функции*

$$(4) \qquad f_1(x) = \frac{x - p_1}{x - p_0}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = \frac{x - p_n}{x - p_0}$$

были линейно независимыми на A *по* $\bmod \Psi(A)$, *т. е. чтобы из условий*

$$(5)\qquad (x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1 \quad \text{на} \quad A$$

и

$$(6)\qquad k_0+\ldots+k_n=0$$

вытекало, что $k_0=0, \ldots, k_n=0$.

Доказательство. Условие *необходимо.* Для доказательства применим индукцию. Утверждение верно для $n=1$, так как $f_1 \nsim 1$ по теореме 1. Предположим, что оно справедливо для $n-1$ и каждого A.

Пусть $k_0, \ldots, k_n$ — система целых чисел, удовлетворяющая условиям (5) и (6).

В соответствии с теоремой 9 § 56, II пусть G — открытое множество, такое, что

$$(7)\qquad A\subset G\subset \mathscr{S}_2-(p_0, \ldots, p_n) \quad \text{и} \quad (x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\sim 1 \text{ на } G.$$

Обозначим через C_j компоненту множества $\mathscr{S}_2-C$, содержащую точку p_j. Пусть L — дуга, неприводимая между C_0 и $C_1\cup\ldots\cup C_n$, т. е. такая дуга, что одна из ее концевых точек, скажем a, принадлежит C_0, а другая, скажем b, — одному из множеств $C_1, \ldots, C_n$, например C_n, и при этом $L\cap C_j=0$ для $0\neq j\neq n$. Легко видеть, что множества $C_0\cup L\cup C_n$, C_1, $C_2, \ldots$ $\ldots, C_{n-1}$ являются компонентами множества $\mathscr{S}_2-H$, где $H=G-L$. Поэтому H представляет собой разрез между каждой парой точек p_i, p_j, где $i<j<n$, однако не является разрезом между точками p_0 и p_n. По теореме 1 $f_n\sim 1$ на H, поэтому $f_n^{k_n}\sim 1$; отсюда в силу (7)

$$(x-p_0)^{k_0+k_n}\cdot(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_{n-1})^{k_{n-1}}\sim 1 \quad \text{на} \quad H,$$

и, следовательно, по предположению $k_0+k_n=0$, $k_1=0, \ldots, k_{n-1}=0$. Эти равенства вместе с (5) дают соотношение $f_n^{k_n}\sim 1$ на A, и значит, $k_n=0$, ибо A есть разрез между точками p_0 и p_n.

Условие *достаточно.* Предположим, что A не является разрезом между точками p_0 и p_1. По теореме 1 $f_1\sim 1$ на A. Положим $k_0=-1$, $k_1=1$, $k_2=0, \ldots, k_n=0$. Тогда выполняются условия (5) и (6).

Теорема 7. *Если* $A=\mathscr{S}_2-(p_0, \ldots, p_n)$, *где* $p_i\neq p_j$ *при* $i\neq j$, *то гомографические функции* (4) *образуют базис группы* $\mathscr{S}^A$ *по* $\bmod \Psi(A)$.

Другими словами (с учетом теоремы 6), *всякая непрерывная функция* $f\colon A \dashrightarrow \mathscr{P}$ *имеет следующий вид*:

(8) $$f(x) = e^{u(x)}(x-p_0)^{k_0}\cdot \ldots \cdot (x-p_n)^{k_n},$$

где $u\colon A \to \mathscr{E}^2$ — *непрерывная функция и* $k_0 + \ldots + k_n = 0$.

Доказательство. Применим индукцию.

(i) Пусть $n=0$. Так как $\mathscr{S}_2 - p_0 \underset{\text{top}}{=} \mathscr{E}^2$, то $f \sim 1$ (ср. § 57, I, 9 (i)). Следовательно, $k_0 = 0$.

(ii) Пусть $n > 0$ и теорема имеет место для $n-1$. Можно также предположить, что $p_n \neq \infty$. Пусть $K \subset \mathscr{S}_2 - (p_0, \ldots, p_{n-1})$ — замкнутый диск с центром p_n. Пусть $C = \operatorname{Fr}(K)$. По теоремам 4 и 5 п. I на C

$$f(x) \sim (x-p_n)^{k_n} \text{ и } x - p_0 \sim 1.$$

Положим

(9) $$h(x) = f(x)(x-p_0)^{k_n}(x-p_n)^{-k_n};$$

тогда $h \mid C \sim 1$.

Пусть в соответствии с теоремой 8 § 56, II

(10) $h \mid C \subset f^*$, где $f^*\colon K \to \mathscr{P}$ непрерывна и $f^* \sim 1$.

Положим

(11) $$g(x) = \begin{cases} f^*(x), & \text{если } x \in K, \\ h(x), & \text{если } x \in A - \operatorname{Int}(K). \end{cases}$$

Согласно (10) и (11), $g\colon A \cup p_n \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция. Таким образом, из предположений следует, что

(12) $$g(x) \sim (x-p_0)^{l_0}\cdot \ldots \cdot (x-p_{n-1})^{l_{n-1}} \quad \text{на} \quad A \cup p_n$$

$$\text{и} \quad l_0 + \ldots + l_{n-1} = 0.$$

С другой стороны,

(13) $$g \sim h \text{ на } A - \operatorname{Int}(K) \text{ и на } K - p_n,$$

так как $g = h$ на $A - \operatorname{Int}(K)$, согласно (11); следовательно, $g = h$ на C, откуда вытекает, что $g \sim h$ на $K - p_n$, так как $K - p_n$ деформируемо на C (ср. 54, IV, теорема 1).

Поскольку множества $A - \operatorname{Int}(K)$ и $K - p_n$ замкнуты в их объединении A, а их пересечение C связно, то, согласно (13), $g \sim h$ на A (ср. § 56, VI, теорема 3).

Согласно (9) и (12), отсюда следует, что

$$f(x) \sim (x-p_0)^{l_0-k_n}(x-p_1)^{l_1}\cdot \ldots \cdot (x-p_{n-1})^{l_{n-1}}\cdot (x-p_n)^{k_n} \quad \text{на} \quad A.$$

Полагая $k_0 = l_0 - k_n$, $k_1 = l_1, \ldots, k_{n-1} = l_{n-1}$, получаем формулу (8).

Теорема 8. *Пусть* $g\colon \mathcal{X}\to\mathcal{S}_2$ — *непрерывная функция. Если множество* $g(\mathcal{X})$ *не разрезает* $\mathcal{S}_2$ *между точками* p *и* q, *то*

$$(14)\qquad \frac{g(x)-p}{g(x)-q}\sim 1 \text{ на } \mathcal{X}.$$

Доказательство. По теореме 1

$$\frac{y-p}{y-q}=e^{v(y)},$$

где $v\colon g(\mathcal{X})\to\mathcal{E}^2$ непрерывна. Следовательно,

$$\frac{g(x)-p}{g(x)-q}=e^{vg(x)} \text{ для } x\in\mathcal{X}.$$

Теорема 9. *Если* $g\colon \mathcal{X}\to\mathcal{S}_2$ — *гомеоморфизм, удовлетворяющий условию* (14), *то множество* $g(\mathcal{X})$ *не разрезает* $\mathcal{S}_2$ *между точками* p *и* q.

Доказательство. Пусть $h\colon g(\mathcal{X})\to\mathcal{X}$ — функция, обратная к g. По условию (14) имеем

$$\frac{g(x)-p}{g(x)-q}=e^{u(x)}, \text{ откуда получаем } \frac{y-p}{y-q}=e^{uh(y)} \text{ для } y\in g(\mathcal{X}).$$

Согласно теореме 1, $g(\mathcal{X})$ не является разрезом между точками p и q.

III. Группы $\mathcal{P}^F$ и $\mathfrak{B}_1(F)$ для $F=\bar{F}\subset\mathcal{S}_2$.

Теорема 1. *Всякая непрерывная функция* $f\colon F\to\mathcal{P}$ *гомотопна рациональной функции, нули и полюсы которой принадлежат* $\mathcal{S}_2-F$.

Доказательство. По теореме 9 § 59, II существуют конечное множество точек $p_0, \ldots, p_n$, принадлежащих $\mathcal{S}_2-F$, и непрерывная функция f^*, такие, что

$$f\subset f^*\colon \Lambda\to\mathcal{P}, \text{ где } \Lambda=\mathcal{S}_2-(p_0, \ldots, p_n).$$

По теореме 7 п. II $f^*(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}$, так что

$$(1)\ f(x)\sim(x-p_0)^{k_0}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n} \text{ на } F \text{ и } k_0+\ldots+k_n=0.$$

Замечание. Пусть $R_0, R_1, \ldots$ — (конечная или бесконечная) последовательность компонент множества $\mathcal{S}_2-F$. В соответствии с теоремой 9 из § 58, II можно считать, что

$$(2)\qquad p_j\in R_j, \text{ где } j=0, 1, \ldots,$$
$$(3)\qquad k_j=0, \text{ если } f\,|\,\mathrm{Fr}(R_j)\sim 1.$$

Принимая во внимание (2), теорему 1 можно пополнить следующим образом:

Теорема 2. *Если r — произвольная рациональная функция, гомотопная f на F, то показатель степени k_j представляет собой алгебраическое число нулей и полюсов функции r, принадлежащих R_j, т. е. число нулей и полюсов, каждый из которых считается с учетом его кратности (кратность полюса отрицательна по определению).*

Следовательно, *показатели степени k_0, k_1, ... определяются однозначно* (*т. е. не зависят от выбора точек $p_j \in R_j$*).

Доказательство. Пусть $r(x) = c(x-q_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x-q_m)^{l_m}$, где $q_0 = \infty$, если F ограничено. Тогда

(3′) $f(x) \sim (x-q_0)^{l_0} \cdot \ldots \cdot (x-q_m)^{l_m}$ и $l_0 + \ldots + l_m = 0$.

Положим $Q_j = R_j \cap (q_0, \ldots, q_m)$. Для фиксированного j пусть $Q_j = (q_{t_1}, \ldots, q_{t_v})$.

По теореме 1 п. II на F

$$\frac{x-q_{t_1}}{x-p_j} \sim 1, \ldots, \frac{x-q_{t_v}}{x-p_j} \sim 1.$$

Следовательно,

$$(4) \qquad (x-q_{t_1})^{l_{t_1}} \cdot \ldots \cdot (x-q_{t_v})^{l_{t_v}} \cdot (x-p_j)^{-k'_j} \sim 1,$$

где $k'_j = l_{t_1} + \ldots + l_{t_v}$ и $k'_j = 0$, если $Q_j = 0$.

Таким образом, k'_j — алгебраическое число нулей и полюсов функции r, принадлежащих R_j.

Из (3′) и (4) следует, что

$$(5) \qquad \begin{gathered} f(x) \sim (x-p_0)^{k'_0} \cdot (x-p_1)^{k'_1} \ldots \text{ и} \\ k'_0 + k'_1 + \ldots = l_0 + \ldots + l_m = 0. \end{gathered}$$

Положим $k_j = 0$ для $j > n$, тогда из соотношений (1) и (5) вытекает, что

$$\begin{gathered} 1 \sim (x-p_0)^{k'_0-k_0} \cdot (x-p_1)^{k'_1-k_1} \cdot \ldots \text{ на } F \text{ и} \\ (k'_0 - k_0) + (k'_1 - k_1) + \ldots = 0, \end{gathered}$$

следовательно, $k'_j = k_j$ для $j = 0, 1, \ldots$ в силу (2) и теоремы 6 п. II.

Следствие 2′. *Для того чтобы $k_j = 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция f допускала непрерывное продолжение f^*: $F \cup R_j \to \mathscr{P}$.*

Доказательство. Согласно (1), для $x \in F$ имеем

(6) $$f(x) = e^{u(x)} \cdot (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n},$$

где u: $\mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2$ — непрерывная функция.

Допустим, что $k = 0$, и положим

(7) $$f^*(x) = e^{u(x)} (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_{j-1})^{k_{j-1}} \cdot (x - p_{j+1})^{k_{j+1}} \cdot \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}$$

для $x \in F \cup R_j$; тогда существует непрерывная функция f^*, такая, что

(8) $$f \subset f^*: F \cup R_j \to \mathscr{P}.$$

С другой стороны, если выполняются условия (8), то равенство (7) имеет место в $F \cup R_j$. Таким образом, в равенстве (7) можно опустить звездочку, и, следовательно, $k_j = 0$.

Теорема 3. *Если* (2) *выполняется, то гомографические функции*

(9) $$\frac{x - p_1}{x - p_0}, \frac{x - p_2}{x - p_0}, \ldots, \text{ где } x \in F,$$

образуют базис группы $\mathscr{P}^F$ *по* mod $\Psi(F)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что функции (9) линейно независимы на F по mod $\Psi(F)$, другими словами, что из соотношений

$$(x - p_0)^{m_0} \cdot (x - p_1)^{m_1} \cdot \ldots \sim 1 \text{ на } F \text{ и } m_0 + m_1 + \ldots = 0$$

вытекает, что $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, ...

Но это прямое следствие теоремы 6 п. II.

Из доказанного вытекает следующая теорема *о характеризации группы* $\mathfrak{B}_1(F)$:

Теорема 4.
$$\mathfrak{B}_1(F) = \mathscr{G}^n,$$

где $n = \omega$, *если число* $b_0(\mathscr{S}_2 - F)$ *компонент множества* $\mathscr{S}_2 - F$ *бесконечно, и* $n = b_0(\mathscr{S}_2 - F)$, *если это число конечно.*

Более точно, *искомый изоморфизм будет определен, если* $f \in \mathscr{P}^F$ *поставить в соответствие точку* $(k_1, k_2, \ldots) \in \mathscr{G}^n$, *определяемую условиями* (1) *и* (2).

Из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая

Теорема 5 (двойственности [1]). $b_1(F) = b_0(\mathscr{S}_2 - F)$.

---

[1]) Ср. с теоремой двойственности Александера [1] и алгебраической топологии. Ср. также Брушлинский [1] и Фрейденталь [1].

Теорема 6 (инвариантности). *Число (непустых) отделимых частей, на которые множество $A \subset \mathcal{S}_2$ разбивает $\mathcal{S}_2$, является внутренним инвариантом.*

Доказательство. При $A = \bar{A}$ эта теорема вытекает из предыдущей. Общий случай следует из этого частного случая и теоремы 7 § 49, IV (ср. с доказательством теоремы 6 из § 59, IV).

IV. Теоремы сложения.

Теорема 1. *Если ни одно из множеств A_0 и A_1, которые оба замкнуты (или оба открыты) в $A_0 \cup A_1$, не разрезает $\mathcal{S}_2$ ни между какой парой точек $p_0, \ldots, p_n$ $(n > 0)$, тогда как $A_0 \cup A_1$ разрезает $\mathcal{S}_2$ между любой парой этих точек, то множество $A_0 \cap A_1$ содержит по крайней мере $n+1$ компонент* [1]).

Доказательство. Согласно теореме 1 п. II,

$$\frac{x-p_k}{x-p_0} \sim 1 \text{ на } A_0 \text{ и на } A_1 \text{ для } k = 1, 2, \ldots, n,$$

а по теореме 6 п. II функции

$$\frac{x-p_1}{x-p_0}, \ldots, \frac{x-p_n}{x-p_0}$$

линейно независимы на $A_0 \cup A_1$ по $\operatorname{mod} \Gamma(A_0 \cup A_1)$.

Поэтому ранг $p_1(A_0, A_1)$ группы $\mathfrak{P}_1(A_0, A_1)$ (см. § 56, V (4), где нужно положить $\mathcal{X} = A_0 \cup A_1$) не меньше n. Так как, с другой стороны, $p_1(A_0, A_1) \leqslant b_0(A_0 \cap A_1)$ (согласно теореме 6 § 56, V), то $b_0(A_0 \cap A_1) \geqslant n$.

Лемма 2. *Если A_0 и A_1 — два множества, таких, что*

(0) $$A_0 \cup A_1 \neq \mathcal{S}_2 \quad \text{и} \quad A_0 \cap A_1 = \overline{A_0 \cap A_1},$$

то для всякой непрерывной функции f: $A_0 \cap A_1 \to \mathcal{P}$ существуют две непрерывные функции f_0: $A_0 \to \mathcal{P}$ и f_1: $A_1 \to \mathcal{P}$, такие, что

(1) $$f(x) = f_0(x) \cdot f_1(x) \text{ для } x \in A_0 \cap A_1.$$

Это означает, что (ср. § 56, IV (0))

(2) $\Theta_1(A_0, A_1) = \mathcal{P}^{A_0 \cap A_1}$, *следовательно,* $d_1(A_0, A_1) = b_1(A_0 \cap A_1)$, *если выполняется* (0).

Доказательство. Пусть $p_0, p_1, \ldots$ — последовательность, содержащая точно по одной точке из каждой компоненты

[1]) Теорема Страшевича [2] (для замкнутых A_0 и A_1).

множества $\mathscr{S}_2-(A_0\cap A_1)$; более того, предположим, что $p_0\in\mathscr{S}_2-(A_0\cup A_1)$. Положим $F=A_0\cap A_1$ в теореме 1 п. III; тогда

$$f(x)=e^{u(x)}\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_0}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n}\quad\text{для } x\in A_0\cap A_1,$$

где $u\colon \mathscr{S}_2\to\mathscr{E}^2$ непрерывно.

Так как $\mathscr{S}_2-(A_0\cap A_1)=(\mathscr{S}_2-A_0)\cup(\mathscr{S}_2-A_1)$, то можно считать, что

$$(p_1,\ldots,p_m)\subset\mathscr{S}_2-A_0 \text{ и } (p_{m+1},\ldots,p_n)\subset\mathscr{S}_2-A_1.$$

Положим

$$f_0(x)=e^{u(x)}\left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_0}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_m}{x-p_0}\right)^{k_m}$$

и

$$f_1(x)=\left(\frac{x-p_{m+1}}{x-p_0}\right)^{k_{m+1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{x-p_n}{x-p_0}\right)^{k_n}.$$

Тогда условие (1) выполняется.

Теорема 3. *Если A_0 и A_1 — два замкнутых (или два открытых) множества в $A_0\cup A_1$, таких, что*

$$\overline{A_0\cap A_1}=A_0\cap A_1\neq 0\neq\mathscr{S}_2-(A_0\cup A_1),$$

то, полагая $\operatorname{ind}(A)=b_0(A)-b_1(A)$, *имеем*

$$\text{(3)}\qquad \operatorname{ind}(A_0\cup A_1)+\operatorname{ind}(A_0\cap A_1)=\operatorname{ind}(A_0)+\operatorname{ind}(A_1).$$

Доказательство. Соотношение (3) вытекает из (2) и из (7.3) § 56, V.

Теорема 4 (Страшевича[1]). *Пусть* $A_j=\overline{A}_j$, $B_j=\mathscr{S}_2-A_j$ $(j=0, 1)$ *и*

$$\text{(4)}\qquad A_0\cap A_1\neq 0\neq B_0\cap B_1.$$

Тогда

$$b_0(A_0\cup A_1)+b_0(A_0\cap A_1)-b_0(A_0)-b_0(A_1)=$$
$$=b_0(B_0\cup B_1)+b_0(B_0\cap B_1)-b_0(B_0)-b_0(B_1).$$

Доказательство. Это следствие теоремы 3 и теоремы 5 п. III.

Замечание. Если одно из неравенств (4) не выполняется, то в силу теоремы 4 § 57, II и теоремы 10 § 55, X имеют место следующие импликации:

(i) если $A_0\cap A_1=0$, то $b_0(B_0\cap B_1)=b_0(B_0)+b_0(B_1)$ [2];

---

[1]) См. Страшевич [2, стр. 184].

[2]) В этом направлении см. также Стоун А. [1]; другие теоремы сложения см. Бинг [1], [2].

(ii) если $A_0 \cup A_1 = \mathscr{S}_2$ и $B_j \neq 0$, то

$$b_0(B_0 \cup B_1) = b_0(B_0) + b_0(B_1) + 1.$$

Теорема 5. *Если A_0 и A_1 — континуумы, то*

$$b_0(A_0 \cap A_1) \leqslant b_0[\mathscr{S}_2 - (A_0 \cup A_1)]. \tag{5}$$

Если, более того, A_0 и A_1 не разрезают $\mathscr{S}_2$, то

$$b_0(A_0 \cap A_1) = b_0[\mathscr{S}_2 - (A_0 \cup A_1)]. \tag{6}$$

Доказательство. Неравенство (5) легко получается из теоремы 4 (вследствие уникогерентности $\mathscr{S}_2$ и теоремы 9 § 55, X). Вторую часть теоремы можно вывести из (5) на основании теоремы 1 (из которой вытекает противоположное неравенство).

Теорема 6. *Если пересечение $A_0 \cap A_1$ двух континуумов A_0 и A_1 не связно, то существует пара точек $(p, q) \subset \mathscr{S}_2 - (A_0 \cup A_1)$, такая, что $A_0 \cup A_1$ разрезает $\mathscr{S}_2$ между ними, а A_0 не разрезает* [1]).

Доказательство. По теореме 4 § 56, VI существует непрерывная функция f: $A_0 \cup A_1 \to \mathscr{P}$, такая, что

$$f \not\sim 1, \tag{7}$$

$$f \mid A_0 \sim 1. \tag{8}$$

В соответствии с теоремой 1 п. III пусть

$$f(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n} \text{ на } A_0 \cup A_1, \tag{9}$$

$$k_0 + \ldots + k_n = 0, \tag{10}$$

$$|k_0| + \ldots + |k_n| \neq 0, \tag{11}$$

где точки $p_0, \ldots, p_n$ принадлежат различным компонентам множества $\mathscr{S}_2 - (A_0 \cup A_1)$.

Из соотношений (8) и (9) вытекает, что

$$(x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n} \sim 1 \text{ на } A_0.$$

Следовательно, согласно (10) и (11), функции

$$\frac{x - p_1}{x - p_0}, \ldots, \frac{x - p_n}{x - p_0}$$

не являются линейно независимыми по $\operatorname{mod} \Psi(A_0)$. Таким образом, по теореме 6 п. II существует пара точек p_i, p_j, где $0 \leqslant i < j \leqslant n$, между которыми A_0 не разрезает $\mathscr{S}_2$.

Замечание. Как показывает пример двух окружностей, имеющих две общие точки, в теореме 6 нельзя утверждать,

[1]) Теорема Куратовского и Страшевича [1, стр. 154].

что существует пара точек, между которыми множество $A_0 \cup A_1$ является разрезом, тогда как ни множество A_0, ни множество A_1 не является разрезом.

Следующие две теоремы обобщают *теорему о трех континуумах*[1]):

Теорема 7. *Пусть C_0, C_1 и C_2 — три связных множества и p_0, p_1 — две точки множества $\mathscr{S}_2-(C_0 \cup C_1 \cup C_2)$.*

Если ни одно из множеств $C_k \cup C_{k+1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p_0 и p_1 и если $C_0 \cap C_1 \cap C_2 \neq 0$, то множество $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ также не разрезает $\mathscr{S}_2$ между этими точками (*здесь* $k=0, 1, 2$ *и индексы приведены по* mod 3).

Доказательство. По предположению (ср. с теоремой 1 п. II)

$$\frac{x-p_1}{x-p_0} \sim 1 \text{ на } C_k \cup C_{k+1} \text{ для } k=0,\ 1,\ 2.$$

Поэтому по теореме 5 § 56, VI

$$\frac{x-p_1}{x-p_0} \sim 1 \text{ на } C_0 \cup C_1 \cup C_2,$$

откуда следует требуемое заключение (согласно теореме 1 п. II).

Теорема 8. *Пусть C_0, C_1 и C_2 — три связных множества и p_0, p_1, p_2 — три точки множества $\mathscr{S}_2-(C_0 \cup C_1 \cup C_2)$. Если ни одно из множеств $C_k \cup C_{k+1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ ни между какой парой точек (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_0), то множество $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ по крайней мере между одной из этих пар* (k — *такое же, как в теореме* 7).

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}=C_0 \cup C_1 \cup C_2$. Если точки p_0, p_1 и p_2 принадлежат трем различным компонентам множества $\mathscr{S}_2-\mathscr{X}$, то функции

$$f_1(x)=\frac{x-p_1}{x-p_0} \text{ и } f_2(x)=\frac{x-p_2}{x-p_0}$$

линейно независимы на $\mathscr{X}$ по mod $\Psi(\mathscr{X})$, согласно теореме 6 п. II.

Отсюда на основании теоремы 6 § 56, VI вытекает, что одна из шести функций $f_j \mid C_k \cup C_{k+1}$, где $j=1, 2$, $k=0, 1, 2$, не гомотопна 1. Пусть, например,

$$\frac{x-p_1}{x-p_0} \not\sim 1 \text{ на } C_0 \cup C_1.$$

[1]) Ср. Куратовский [21], Чех [2] и Эйленберг [7, стр. 78].

Тогда по теореме 1 п. II $C_0 \cup C_1$ разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p_0 и p_1.

Замечание. Из теорем 5' и 6' § 56, VI вытекает следующее обобщение теорем 7 и 8[1]) (индексы должны быть приведены по $\bmod n$).

Теорема 7'. *Пусть $A_0, \ldots, A_{n-1}$ суть $n (n \geqslant 3)$ произвольных множеств и p_0, p_1 — две точки множества $\mathscr{S}_2 - (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Если ни одно из множеств $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p_0 и p_1, все множества $C_k = A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-2}$ связны и $C_0 \cap \ldots \cap C_{n-1} \neq 0$, то множество $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ между p_0 и p_1.*

Теорема 8'. *Пусть $(p_0, p_1, p_2) \subset \mathscr{S}_2 - (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Если ни одно из множеств $A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ ни между какой парой точек (p_0, p_1), (p_1, p_2)* и *(p_2, p_0) и все множества $C_k = A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+n-2}$ связны, то множество $A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ не разрезает $\mathscr{S}_2$ между хотя бы одной из этих трех пар.*

Теорема 9. *Пусть C — локально связный континуум и F — замкнутое множество, не пересекающееся с C. Тогда существуют два локально связных континуума C_0 и C_1, таких, что $C = C_0 \cup C_1$ и ни один из них не является разрезом $\mathscr{S}_2$ ни между какой парой точек F.*

Доказательство. Так как F компактно, то существует конечная система $R_0, \ldots, R_n$ компонент множества $\mathscr{S}_2 - C$, такая, что $F \subset R_0 \cup \ldots \cup R_n$. Если $n = 0$, то можно положить $C_0 = C = C_1$. Поэтому будем считать, что $n \geqslant 1$[2]). Пусть $p_j \in R_j$ для $j = 0, \ldots, n$.

Пусть L — дуга, соединяющая точки $p_0, \ldots, p_n$. По теореме 9 (iv) § 58, I множество $L \cap C$ стягиваемо относительно $\mathscr{S}$. Следовательно,

$$\frac{x - p_j}{x - p_0} \sim 1 \text{ на } L \cap C \text{ для } j = 1, \ldots, n.$$

Согласно теореме 9 § 55, II, в C существует замкнутая окрестность F_0 множества $L \cap C$, такая, что

$$\frac{x - p_j}{x - p_0} \sim 1 \text{ на } F_0 \text{ для } j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Положим $F_1 = \overline{C - F_0}$. Тогда $F_1 \cap L = 0$ и, следовательно, F_1 не является разрезом между точками p_0 и p_j. Отсюда получаем

[1]) Доказательство см. Куратовский [42].

[2]) Частный случай, когда $n = 1$, см. в статье Куратовского [8].

(согласно теореме 1 п. II), что

$$(13)\qquad \frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \text{ на } F_1 \text{ для } j=1, \ldots, n.$$

Из соотношений (12) и (13) в силу теоремы 6 § 56, X (если положить $\mathscr{X}=C$) следует существование двух локально связных континуумов C_0 и C_1, таких, что при $m=0, 1$

$$F_m\subset C_m\subset C \text{ и } \frac{x-p_j}{x-p_0}\sim 1 \text{ на } C_m \text{ при } j=1, \ldots, n.$$

Таким образом, C_m не является разрезом ни между какой парой (p_0, p_j); поэтому существует компонента Q_m множества $\mathscr{S}_2-C_m$, такая, что $(p_0, \ldots, p_n)\subset Q_m$, следовательно, $R_0\cup\ldots$ $\ldots\cup R_n\subset Q_m$ и, значит, $F\subset Q_m$.

Кроме того, так как $C=F_0\cup F_1$, то $C=C_0\cup C_1$.

Следствие 10[1]. *Всякий локально связный континуум C, разрезающий $\mathscr{S}_2$ на конечное число областей, является объединением двух локально связных континуумов, не разрезающих $\mathscr{S}_2$.*

Доказательство. Пусть E — конечное множество, содержащее по одной точке из каждой компоненты множества $\mathscr{S}_2-C$.

По теореме 9 существуют два локально связных континуума C_0 и C_1 и две компоненты R_0 множества $\mathscr{S}_2-C_0$ и R_1 множества $\mathscr{S}_2-C_1$, такие, что

$$(14)\qquad C=C_0\cup C_1,$$

$$(15)\qquad E\subset R_m, \text{ следовательно, } \mathscr{S}_2-C\subset R_m \text{ для } m=0, 1.$$

Поэтому множество $C_m^*=\mathscr{S}_2-R_m$ есть локально связный континуум, не разрезающий $\mathscr{S}_2$ (ср. § 49, II, теорема 1). Далее, согласно (15),

$$\mathscr{S}_2-C\subset R_m\subset\mathscr{S}_2-C_m, \text{ так что } C_m\subset\mathscr{S}_2-R_m=C_m^*\subset C,$$

и потому $C=C_0^*\cup C_1^*$ на основании (14).

V. Неприводимые разрезы. Из теоремы 1 п. II вытекает следующая

Теорема 1. *Множество $A\subset\mathscr{S}_2-p-q$ неприводимо разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p и q тогда и только тогда, когда*

$$\frac{x-p}{x-q}\underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1 \quad \text{на} \quad A,$$

[1]) Теорема Борсука [12].

Это утверждение можно обобщить следующим образом[1]:

Теорема 2. *Пусть $A \subset \mathscr{S}_2 - (p_0, \ldots, p_n)$. Множество A неприводимо разрезает $\mathscr{S}_2$ между каждой парой p_i, p_j (где $i \neq j$) тогда и только тогда, когда гомографические функции*

$$\frac{x-p_1}{x-p_0}, \ldots, \frac{x-p_n}{x-p_0}$$

линейно независимы на A по $\operatorname{mod} \Psi(A)$ *и*

$$\frac{x-p_k}{x-p_0} \underset{\text{непр.}}{\not\sim} 1 \text{ на } A \text{ для } k=1, \ldots, n.$$

Доказательство. Это прямое следствие теорем 1 и 6 п. II.

Теорема 3. *Пусть $F = \bar{F} \subset \mathscr{S}_2$. Пусть $R_0, \ldots, R_m$ (m конечно или бесконечно) — компоненты множества $\mathscr{S}_2 - F$, такие, что* $\operatorname{Fr}(R_j) = F$. *Тогда* (ср. § 56, VIII (1))

$$\text{(1)} \qquad \text{ранг } [\Omega(F)/\Psi(F)] = m.$$

Другими словами, *множество F является общей границей $n+1$ областей ($n \geqslant 1$) тогда и только тогда, когда существуют n функций $f_1, \ldots, f_n$, линейно независимых на F по* $\operatorname{mod} \Psi(F)$ *и таких, что $f_i \sim 1$ на каждом собственном замкнутом подмножестве из F (для $i = 1, \ldots, n$).*

Доказательство. По теореме 1 из § 49, V множество F неприводимо разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p и q, если оно является общей границей компонент множества $\mathscr{S}_2 - F$, содержащих соответственно p и q. Следовательно, по теореме 2 ранг $[\Omega(F)/\Psi(F)] \geqslant m$.

С другой стороны, пусть $f_1, \ldots, f_n$ — система, удовлетворяющая второй части теоремы 3. Пусть $p_j \in R_j$, где $j = 0, \ldots, m$. По теореме 1 п. III

$$\text{(2)} \qquad f_i(x) \sim \left(\frac{x-p_1}{x-p_0}\right)^{k_{i,1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x-p_m}{x-p_0}\right)^{k_{i,m}} \text{ на } F \ (i = 1, \ldots, n),$$

так как (ср. III (3)), если R — компонента множества $\mathscr{S}_2 - F$, такая, что $\operatorname{Fr}(R) \neq F$, то по предположению $f_i | \operatorname{Fr}(R) \sim 1$ при $i = 1, \ldots, n$.

Из системы (2), содержащей n гомотопий, непосредственно вытекает, что $n \leqslant m$, откуда следует равенство (1).

---

[1]) Ср. Эйленберг [7, стр. 103].

Теорема 4 (инвариантности [1]). *Свойство быть общей границей n областей представляет собой внутренний инвариант.*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 3.

Теорема 5 (разложения). *Пусть $A \subset \mathscr{S}_2 - (p_0, \ldots, p_n)$. Если A неприводимо разрезает $\mathscr{S}_2$ между всякой парой p_i, p_j $(i \neq j)$ и если A разложимо, то A представляет собой объединение двух связных множеств A_0 и A_1, таких, что*

$$A_1 = A \cap \overline{A - A_0}, \quad A_0 = A \cap \overline{A - A_1}$$

и $A_0 \cap A_1$ есть объединение $n+1$ непустых множеств $F_0, \ldots, F_n$, замкнутых в $A_0 \cap A_1$ и таких, что каждое из множеств A_0 и A_1 неприводимо связно между F_k и $A_0 \cap A_1 - F_k$ для $k = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Это следует из теоремы 5 § 56, VII и теоремы 2, из которой вытекает, что ранг $[\Omega(A)/\Psi(A)] \geqslant n$.

Теорема 6 (объединения). *Пусть $A = A_0 \cup A_1$, где A_0 и A_1 — два континуума, таких, что $A_0 \cap A_1 = F_0 \cup \ldots \cup F_n$, где $F_0, \ldots, F_n$ суть $n+1$ $(\geqslant 2)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств. Если каждое из множеств A_0 и A_1 неприводимо связно между F_k и $A_0 \cap A_1 - F_k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, то в $\mathscr{S}_2 - A$ существует система точек $p_0, \ldots, p_n$, такая, что множество A неприводимо разрезает $\mathscr{S}_2$ между каждой парой точек p_i, p_j, где $i \neq j$.*

Другими словами, *A — общая граница $n+1$ областей.*

Доказательство. Это следствие теоремы 3 и теоремы 5 § 56, VII, из которой вытекает, что ранг $[\Omega(F)/\Psi(F)] \geqslant n$.

Теорема 7. *Всякое множество A, неприводимо разрезающее $\mathscr{S}_2$ между точками p и q, связно и дискогерентно.*

Более того, *если множество A локально связно, то оно является простой замкнутой кривой.*

Доказательство. Это следствие теоремы 1 и теорем 1 и 2 § 56, VII.

Теорема 8. *Всякое множество, неприводимо разрезающее $\mathscr{S}_2$ между точками p и q, либо неразложимо, либо является объединением двух множеств, неприводимых между той же парой точек [2].*

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 5.

[1]) Ср. Александров и Хопф [1, стр. 392] и Эйленберг [7, стр. 104].
[2]) Ср. Куратовский [6, стр. 137], [14, стр. 21].

Теорема 9. *Если множество A, неприводимое между точками a и b, неприводимо разрезает $\mathcal{S}_2$ между точками p и q, то A либо неразложимо, либо является объединением двух неразложимых множеств, замкнутых в A* [1]).

Доказательство. Это следствие теоремы 3 § 56, VII (ср. также § 48, VII, теорема 7).

Теорема 10. *Если A неприводимо разрезает $\mathcal{S}_2$ между точками p_0 и p_1, между p_1 и p_2 и между p_2 и p_0, то A либо неразложимо, либо является объединением двух неразложимых множеств, замкнутых в A* [2]).

Более того, если A компактно, то A — континуум, не приводимый между двумя точками.

Доказательство. Это следствие теоремы 2 и теоремы 6 § 56, VII.

Следующее утверждение вытекает из теоремы 10 и теоремы 1 § 49, V.

Теорема 11. *Общая граница трех областей представляет собой либо неразложимый континуум, либо объединение двух неразложимых континуумов* [3]).

На рис. 21 и 22 представлены общие границы трех областей; одна из них неразложима, а другая является объединением двух неразложимых континуумов [4]).

Добавим, что, слегка видоизменив конструкцию рассмотренных выше континуумов, можно заменить три на n или даже на ∞ [5]).

Замечание 1. Теорема 11 в $\mathcal{S}_3$ неверна. Действительно, в $\mathcal{S}_3$ существуют *абсолютные окрестностные ретракты*, являющиеся общими границами трех областей (см. Любанский [1]).

Замечание 2. Сформулируем без доказательства [6]) следующую теорему:

Пусть A — локально связное подмножество сферы $\mathcal{S}_2$ и $p_0, \ldots, p_n$ — система точек в $\mathcal{S}_2 - A$, такая, что A разрезает $\mathcal{S}_2$ между всякой парой p_i, p_j, $i \neq j$. Если рациональная функция

$$r(z) = (z - p_0)^{k_0} \cdot \ \ldots \ \cdot (z - p_n)^{k_n},$$

---

[1]) См. Куратовский [12, стр. 404]. Ср. Александров [3, стр. 537].

[2]) Эйленберг [7, стр. 82].

[3]) См. Куратовский [6, стр. 138] и [14, стр. 36].

[4]) По поводу точных определений см. Кнастер [5, стр. 277 и 280]

[5]) Куратовский [7, стр. 28].

[6]) Доказательство см. Куратовский [44]. По поводу обратной теоремы см. Куратовский [44, стр. 108] и Плись [1].

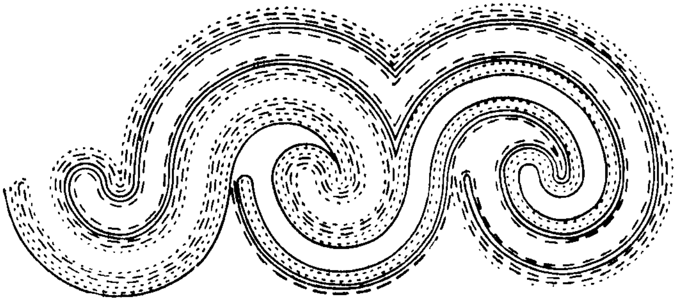

Рис. 21

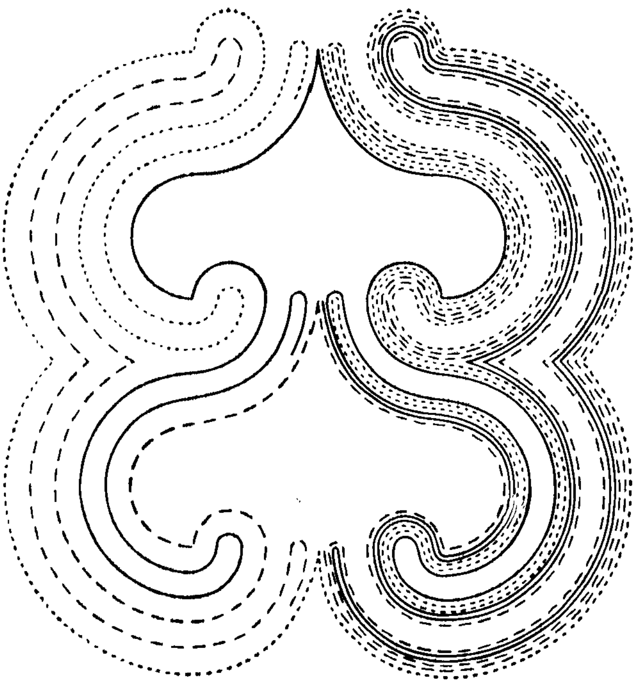

Рис. 22

где $k_0 + \ldots + k_n = 0$ *и* $k_j \neq 0$ *для* $0 \leqslant j \leqslant n$, *гомотопна на* A *гомеоморфизму* $f\colon A \to \mathscr{P}$, *то*

$$|k_0| + \ldots + |k_n| \leqslant 2n.$$

VI. Группы $\mathscr{P}^A$ и $\mathfrak{B}_1(A)$ для локально связного A [1]. Многие свойства плоских локально связных континуумов, установленные в § 61, II, будут теперь обобщены на локально связные множества (замкнутые или не замкнутые).

Из теорем 1 п. II и 4 § 56, X непосредственно вытекает следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы 5 § 61, II.

Теорема 1. *Всякое локально дугообразно связное множество* $A \subset \mathscr{S}_2 - p - q$, *разрезающее* $\mathscr{S}_2$ *между точками* p *и* q, *содержит простую замкнутую кривую, обладающую тем же свойством.*

Теорема 2. *Если* A — *локально дугообразно связное множество, то всякая компонента множества* $\mathscr{S}_2 - A$ *является полуконтинуумом (и, следовательно, конституантой множества* $\mathscr{S}_2 - A$).

Доказательство. Если p и q — две точки множества $\mathscr{S}_2 - A$, которые нельзя соединить в $\mathscr{S}_2 - A$ континуумом, то по теореме 1 они разделяются замкнутым подмножеством множества A (и даже простой замкнутой кривой). Но тогда они не принадлежат одной и той же компоненте множества $\mathscr{S}_2 - A$.

Теорема 3. *Если множество* A *не разрезает* $\mathscr{S}_2$, *то никакое множество* B, *такое, что*

$$A \subset B \subset A \cup L(A),$$

также не разрезает $\mathscr{S}_2$.

Более точно, *если* A *не разрезает* $\mathscr{S}_2$ *между* p *и* q, *то множество* $[A \cup L(A)] - p - q$ *также не разрезает* $\mathscr{S}_2$ *между* p *и* q.

Доказательство. По теореме 1 п. II $\dfrac{x-p}{x-q} \sim 1$ на A, следовательно, на $[A \cup L(A)] - p - q$, согласно теореме 3 § 56, X.

Теорема 4. *Для того чтобы локально связное множество* A *не разрезало* $\mathscr{S}_2$, *необходимо и достаточно, чтобы оно было стягиваемое относительно* $\mathscr{S}$ *(и, следовательно, относительно* $\mathscr{P}$).

Доказательство. 1. Пусть A — локально связное множество, не разрезающее $\mathscr{S}_2$. Пусть $f\colon A \to \mathscr{S}$ — непрерывная

[1]) См. Эйленберг [7, стр. 83 и 105].

функция. Покажем, что $f \sim 1$. Пусть в соответствии с теоремой 23 из § 49, II B — локально связное G_δ-множество, такое, что $A \subset B \subset L(A)$, и g: $B \to \mathscr{S}$ — (непрерывное) продолжение f.

Предположим, что $f \not\sim 1$ и потому $g \not\sim 1$.

Так как B — дугообразно связно (согласно теореме 1 § 50, II), то по теореме 4 § 56, X существует простая замкнутая кривая C, такая, что

(1) $$C \subset B,$$

(2) $$g \mid C \not\sim 1.$$

Пусть D_0 и D_1 — компоненты множества $\mathscr{S}_2 - C$. Так как B не разрезает $\mathscr{S}_2$ (по теореме 3), то одна из этих компонент, скажем диск D_0, удовлетворяет включению

(3) $$D_0 \subset B, \quad \text{следовательно,} \quad \overline{D}_0 \subset B$$

в силу условия (1).

Так как множество $\mathscr{S}_2 - \overline{D}_0 = D_1$ связно, то на основании теоремы 10 § 59, II

(4) $$g \mid \overline{D}_0 \sim 1, \quad \text{откуда} \quad g \mid C \sim 1,$$

что противоречит (2).

2. Обратно, если A разрезает $\mathscr{S}_2$ между p и q, то

$$\frac{x-p}{x-q} \not\sim 1 \quad \text{на} \quad A,$$

согласно теореме 1 п. II. Следовательно, A не стягиваемо относительно $\mathscr{S}$, а значит, и относительно $\mathscr{S}$.

Теорема 5. *Всякое связное и локально связное множество A, не разрезающее $\mathscr{S}_2$, является полуконтинуумом* [1]).

Доказательство. Пусть p, $q \in A$. Покажем, что множество $B = \mathscr{S}_2 - A$ не является разрезом между точками p и q. Ради простоты будем считать, что $p = 0$, $q = \infty$ и $1 \in B$. Положим

$$f(x, y) = \frac{xy - y}{x - y}, \quad \text{где} \quad x \in A \quad \text{и} \quad y \in B.$$

Легко видеть, что

(5) $$f\colon A \times B \to \mathscr{S} \text{ непрерывно},$$

(5′) $$f(0, y) = 1,$$

(5″) $$f(\infty, y) = y.$$

[1]) Теорема Эйленберга [11, стр. 159]. Напомним, что в $\mathscr{S}_2$ существуют связные, локально связные и вполне несовершенные множества (которые, однако, разрезают $\mathscr{S}_2$); ср. § 49, I, пример (viii).

Так как A стягиваемо относительно $\mathscr{S}$ (по теореме 4), то из (5) и (5′) в силу теоремы 2 § 56, X (если положить $\mathscr{X}=A$, $\mathscr{Y}=B$ и $a=0$) следует, что

$$f\sim 1 \text{ на } A\times B, \quad \text{откуда} \quad y\sim 1 \text{ на } B,$$

согласно соотношению (5″).

Тогда по теореме 1 п. II B не разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками 0 и ∞.

Ср. следующую теорему с теоремой 11 из § 59, II.

Теорема 6. *Если A — локально связное множество и C — конституанта множества $\mathscr{S}_2-A$, то любая точка p множества $A\cap\bar{C}$ достижима из C.*

Доказательство. Пусть $c\in C$. Покажем, что существует континуум K, такой, что

$$(6)\qquad c,\ p\in K\subset C\cup p.$$

Пусть F — замкнутое множество, такое, что

$$(7)\qquad c,\ p\in F\subset C\cup p \quad \text{и} \quad p\in\overline{F-p}$$

(например, можно предположить, что F состоит из c, p и последовательности элементов C, сходящейся к p). Согласно (7), всякую точку x множества $F-p$ можно соединить с точкой c континуумом, не пересекающимся с A, следовательно (ср. с теоремой 3), континуумом, не пересекающимся с $L(A)-x-c$ и потому с $L(A)-F$. Другими словами, существует конституанта D множества $\mathscr{S}_2-[L(A)-F]$, такая, что $F-p\subset D$. Согласно (7), $p\in\bar{D}$, и потому множество $D\cup(p)$ связно.

Так как $L(A)$ — локально связное G_δ-множество (согласно теоремам 20 и 22 § 49, II), то этим свойством обладает и $L(A)-F$. Поэтому это множество локально дугообразно связно (ср. § 50, II, теорема 1), и по теореме 2 множество D является компонентой множества $\mathscr{S}_2-[L(A)-F]$. Множество $D\cup(p)$ является его связным подмножеством (так как $p\in F$), и потому $p\in D$. Так как D — полуконтинуум, он содержит континуум K, неприводимый между c и p. По теореме 3 § 48, II множество $K-p$ связно. Пусть H — компонента множества $\mathscr{S}_2-[L(A)-F\cup p]$, содержащая $K-p$ и, следовательно, содержащая c. Включения (ср. (7))

$$(7')\qquad A\subset L(A)-F\cup p\subset L(A)$$

показывают, что $L(A)-F\cup p$ есть локально связное G_δ-множество (ср. § 49, II, теоремы 20—22) и, следовательно, оно локально дугообразно связно. Поэтому (см. теорему 2) множество H — полуконтинуум и $H\subset\mathscr{S}_2-A$, согласно (7′).

Так как C — конституанта точки c в $\mathscr{S}_2 - A$, то $H \subset C$ и, следовательно, $K - p \subset C$, откуда вытекает соотношение (6).

Теорема 7. *Пусть A — локально связное множество, дополнение которого $\mathscr{S}_2 - A$ состоит из конечного числа конституант:*

$$\mathscr{S}_2 - A = B_0 \cup \ldots \cup B_n.$$

Пусть $p_j \in B_j$ для $j = 0, \ldots, n$. Тогда всякая непрерывная функция $f\colon A \to \mathscr{S}$ гомотопна некоторой рациональной функции:

$$(8) \quad f(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_n}, \quad \textit{где} \quad k_0 + \ldots + k_n = 0.$$

Следовательно (ср. с теоремой 6 п. II), *функции*

$$\frac{x - p_1}{x - p_0}, \ldots, \frac{x - p_n}{x - p_0}$$

образуют базис группы $\mathscr{S}^A$ по $\operatorname{mod} \Psi(A)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда A дугообразно связно. Пусть в соответствии с теоремой 1 C_{ij} — простая замкнутая кривая, содержащаяся в A и разрезающая $\mathscr{S}_2$ между точками p_i и p_j. Пусть C — объединение кривых C_{ij} (где $i \neq j$), а R_j — компонента множества $\mathscr{S}_2 - C$, такая, что $p_j \in R_j$. Так как $C \subset A$, то $B_j \subset R_j$. Положим

$$(9) \qquad F = \mathscr{S}_2 - (R_0 \cup \ldots \cup R_n);$$

тогда

$$(10) \qquad F \subset A.$$

Можно предположить (согласно теореме 1 п. III), что условия (8) удовлетворяются на F, ибо в противном случае мы положили бы

$$(11) \qquad g(x) = f(x) \cdot (x - p_0)^{-k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{-k_n},$$

откуда следовало бы, что $g \not\sim 1$ на A.

Пусть в соответствии с теоремой 4 § 56,X K — простая замкнутая кривая, такая, что

$$(12) \qquad K \subset A,$$

$$(13) \qquad g \not\sim 1 \text{ на } K.$$

Пусть Q_j — компонента множества $\mathscr{S}_2 - (F \cup K)$, такая, что $p_j \in Q_j$. Так как $F \cup K \subset A$ (согласно (10) и (12)), то $B_j \subset Q_j$. Положим

$$(14) \qquad H = \mathscr{S}_2 - (Q_0 \cup \ldots \cup Q_n);$$

тогда

$$(15) \qquad F \cup K \subset H \subset A.$$

Согласно (14) и теореме 1 п. III, на H

$$(16)\qquad g(x)\sim(x-p_0)^{m_0}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-p_n)^{m_n},$$

$$(17)\qquad m_0+\ \ldots\ +m_n=0.$$

Поэтому, согласно (11) и (15), на F

$$(x-p_0)^{k_0+m_0}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-p_n)^{k_n+m_n}\sim f(x),$$

откуда

$$(18)\qquad (x-p_0)^{m_0}\cdot\ \ldots\ \cdot(x-p_n)^{m_n}\sim 1 \quad \text{на} \quad F,$$

ибо гомотопия (8) имеет место на F.

Так как множество F разрезает $\mathscr{S}_2$ между каждой парой точек p_i, p_j ($i\neq j$), то из (17), (18) и теоремы 6 п. II следует, что $m_0=\ \ldots\ =m_n=0$. Но тогда $g\sim 1$ на H (согласно (16)), а потому и на K (ср. (15)), что противоречит (13).

Итак, в случае когда A есть G_δ-множество, теорема доказана. Общий случай можно свести к этому частному случаю.

Пусть f: $A\to\mathscr{P}$ — непрерывная функция. Существует непрерывное продолжение f_1 функции f на некоторое G_δ-множество, скажем A_1, содержащее множество A; таким образом, $f\subset f_1$: $A_1\to\mathscr{P}$. Положим

$$A^*=A_1\cap L(A)-(p_0,\ \ldots,\ p_n) \quad \text{и} \quad f^*=f_1\,|\,A^*.$$

По теореме 3 A^* есть локально связное G_δ-множество, разрезающее $\mathscr{S}_2$ на $n+1$ конституант, содержащих соответственно точки $p_0,\ \ldots,\ p_n$. Как только что было показано, соотношения (8) выполняются на A^* (если f заменить на f^*). Отсюда следует требуемое заключение, ибо $A\subset A^*$ и $f(x)=f^*(x)$ для $x\in A$.

Пусть $c(\mathscr{X})+1$ — число конституант множества $\mathscr{X}$ (при условии, что это число конечно). Как и в случае замкнутых множеств, из теоремы 7 вытекает следующая

Теорема 8 (инвариантности и двойственности). *Если A — локально связное множество, такое, что $c(\mathscr{S}_2-A)=n<\infty$, то*

$$\mathfrak{B}_1(A)\underset{\mathrm{gr}}{=}\mathscr{I}^n.$$

Заметим, что многие теоремы п. IV можно применять к локально связным множествам, если заменить $b_1(A)$ на $c(\mathscr{S}_2-A)$.

VII. Группы $\mathscr{P}^G$ и $\mathfrak{B}_1(G)$ для открытых G.

Теорема 1. *Пусть G — открытое множество, дополнение которого $\mathscr{S}_2-G$ состоит из конечного числа компонент $C_0,\ \ldots,\ C_n$. Тогда всякая непрерывная функция f: $G\to\mathscr{P}$ гомотопна некоторой рациональной функции.*

Более точно, *если* $p_j \in C_j$, *то на* G

(1) $f(x) \sim (x-p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x-p_n)^{k_n}$, *где* $k_0 + \ldots + k_n = 0$.

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 7 п. VI.

Замечания. (i) Теорему 1 можно вывести из теоремы 1 п. III следующим образом. Пусть A_j — замкнутый разделитель между C_j и $\mathscr{S}_2 - G - C_j$, и пусть в соответствии с теоремой 2 из § 50, III $F_1, F_2, \ldots$ — последовательность замкнутых множеств, такая, что

$$A_0 \cup \ldots \cup A_n \subset F_1,$$

и при этом

$$G = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \tag{2}$$

$$F_m \subset \operatorname{Int}(F_{m+1}), \tag{3}$$

$$\mathscr{S}_2 - F_m = R_{m,0} \cup \ldots \cup R_{m,n} \text{ и } C_j \subset R_{m,j} \text{ для } j = 0, \ldots, n, \tag{4}$$

где $R_{m,0}, \ldots, R_{m,n}$ — компоненты множества $\mathscr{S}_2 - F_m$.

Согласно (4) и III (1) и (2), на F_m

(5) $f(x) \sim (x-p_0)^{k_{m,0}} \cdot \ldots \cdot (x-p_n)^{k_{m,n}}$ и $k_{m,0} + \ldots + k_{m,n} = 0$.

Так как $F_1 \subset F_m$, то гомотопия (5) имеет место на F_1. Поэтому, согласно теореме 2 п. III, $k_{m,j} = k_{1,j}$ для $j = 0, \ldots, n$. Пусть $k_{1,j} = k_j$. Тогда гомотопия (1) имеет место на F_m и, следовательно, на G в силу (2), (3) и теоремы 8 из § 56, X (если положить $\mathscr{X} = G$ и $G_m = \operatorname{Int}(F_m)$).

(ii) *Показатели степени* $k_0, \ldots, k_n$ *определяются однозначно.* Это простое следствие теоремы 2 п. III.

Следующая теорема аналогична *теореме Рунге* о представлении голоморфных функций в виде пределов рациональных функций.

Теорема 2. *Если* G — *открытое подмножество сферы* $\mathscr{S}_2$, *то всякая непрерывная функция* $f\colon G \to \mathscr{P}$ *имеет вид*

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} r_m(x) e^{u_m(x)}, \tag{6}$$

где $u_m\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2$ — *непрерывная функция, а* r_m — *рациональная функция, причем сходимость равномерна на всяком замкнутом подмножестве* F *множества* G.

Более того, *для каждого* F *существует число* m_0, *такое, что при* $m \geqslant m_0$ *и* $x \in F$

$$f(x) = r_m(x) \cdot e^{u_m(x)}. \tag{7}$$

Наконец, *если* $\{C_j\}$ — *последовательность компонент множества* $\mathscr{S}_2 - G$, *такая, что* $C \cap \overline{C_0 \cup C_1 \cup \ldots} \neq 0$ *для каждой компоненты* C *множества* $\mathscr{S}_2 - G$, *и если* $p_j \in C_j$, *то нули и полюсы функций* $r_1, r_2, \ldots$ *принадлежат последовательности* $\{p_j\}$.

Доказательство. Предположим, что условия (2) и (3) выполнены. Пусть $R_{m,0}, R_{m,1}, \ldots$ — последовательность компонент множества $\mathscr{S}_2 - F_m$; можно считать, что $R_{m,j}$ содержит некоторую компоненту множества $\mathscr{S}_2 - G$ (ср. § 50, III (iv)). Так как множество $R_{m,j}$ открыто, то существует индекс $t = t(m, j)$, такой, что
$C_t \cap R_{m,j} \neq 0$, следовательно, $C_t \subset R_{m,j}$, и поэтому $p_t \in R_{m,j}$.

Согласно теореме 1 п. III, равенство (7) имеет место на F_m для

$$r_m(x) = \left(x - p_{t(m,0)}\right)^{k_{m,0}} \cdot \ldots \cdot \left(x - p_{t(m,n_m)}\right)^{k_{m,n_m}}.$$

Пусть $F = \overline{F}$. Согласно (2) и (3), $F \subset F_{m_0}$ для достаточно больших значений m_0, а потому равенство (7) имеет место для каждого $x \in F$.

Теорема 3. *Если* G — *открытое множество, такое, что множество* $\mathscr{S}_2 - G$ *состоит из бесконечной последовательности компонент, которые все, за исключением одной, скажем* C_0, *открыты в* $\mathscr{S}_2 - G$, *то всякая непрерывная функция* $f\colon G \to \mathscr{P}$ *имеет вид*

$$(8) \qquad f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - p_n}{x - p_0}\right)^{k_n} \cdot e^{u_n(x)},$$

где $p_0 \in C_0$, $p_n \in \mathscr{S}_2 - G$ *и* $u_n\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2$ — *непрерывная функция, причем сходимость равномерна на любом замкнутом подмножестве* F *множества* G.

Более того, *для каждого* F *существует число* n_0, *такое, что при* $n > n_0$ *и* $x \in F$

$$(9) \qquad f(x) = \left(\frac{x - p_1}{x - p_0}\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - p_n}{x - p_0}\right)^{k_n} \cdot e^{v_n(x)},$$

$$(9') \qquad v_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x).$$

Если $\infty \in G_0$, *то член* $x - p_0$ *в равенствах* (8) *и* (9) *можно опустить* (*положив* $p_0 = \infty$).

Доказательство. По теореме 4 из § 50, III компоненты множества $\mathscr{S}_2 - G$ можно занумеровать в бесконечную последовательность C_0, C_1, C_2, ... таким образом, что

(10) $$\mathscr{S}_2 - F_n = R_{n,0} \cup \ldots \cup R_{n,n},$$

(11) $$C_j \subset R_{n,j} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

(12) $$C_0 \cup C_{n+1} \cup C_{n+2} \cup \ldots \subset R_{n,0},$$

где замкнутые множества F_n удовлетворяют условиям (2) и (3), а $R_{n,0}, \ldots, R_{n,n}$ — компоненты множества $\mathscr{S}_2 - F_n$.

Пусть $p_n \in C_n$. Тогда, согласно (11) и (12), $p_0 \in R_{n,0}, \ldots, p_n \in R_{n,n}$. В силу (10) и условий (1) и (2) п. III на F_n

(13) $$f(x) = \left(\frac{x - p_1}{x - p_0}\right)^{k_{n,1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - p_n}{x - p_0}\right)^{k_{n,n}} \cdot e^{v_n(x)},$$

где v_n: $\mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2$ — непрерывная функция. Следовательно,

(14) $$f(x) \sim \left(\frac{x - p_1}{x - p_0}\right)^{k_{n+1,1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - p_{n+1}}{x - p_0}\right)^{k_{n+1,n+1}} \quad \text{на } F_n,$$

так как $F_n \subset F_{n+1}$.

Согласно (12), множество F_n не разрезает $\mathscr{S}_2$ между точками p_0 и p_{n+1}. Поэтому (согласно теореме 1 п. II)

(15) $$\frac{x - p_{n+1}}{x - p_0} \sim 1 \quad \text{на} \quad F_n,$$

и в силу (14)

(16) $$f(x) \sim \left(\frac{x - p_1}{x - p_0}\right)^{k_{n+1,1}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x - p_n}{x - p_0}\right)^{k_{n+1,n}} \quad \text{на} \quad F_n.$$

Из соотношений (13) и (16) по теореме 2 п. III следует, что

$$k_{n,1} = k_{n+1,1}, \ \ldots, \ k_{n,n} = k_{n+1,n}.$$

Пусть $k_{n,n} = k_n$ для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда из условия (13) вытекает, что (9) выполняется на F_n.

Пусть $F = \bar{F} \subset G$. Согласно (2) и (3), существует число n_0, такое, что $F \subset F_n$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно, равенство (9) выполняется на F.

Наконец, положим

$$u_1(x) = v_1(x) \quad \text{и} \quad u_n(x) = v_n(x) - v_{n-1}(x);$$

тогда выполняется равенство (9′).

Замечания. (i) *Бесконечное произведение* (8) *сходится абсолютно. Следовательно, оно не зависит от порядка сомножителей.*

Таким образом, *можно считать, что $p_0, p_1, \ldots$ — заданная последовательность точек, выбранных по одной из всех компонент множества $\mathscr{S}_2 - G$ (причем $p_0 \in C_0$).*

Действительно, для каждого x существует только конечное число сомножителей, отличных от единицы.

(ii)[1] *Если* $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} C_n = \infty$, *то всякая непрерывная функция* $f\colon G \to \mathscr{P}$ *гомотопна функции, мероморфной на* $\mathscr{E}^2$.

(iii) Теорема 3 выявляет замечательную аналогию с *теоремой Вейерштрасса о разложении целой функции на простые множители.*

Если g — целая функция, а G — плоскость $\mathscr{E}^2$, из которой удалены нули функции g, то, очевидно, предположения теоремы 3 выполняются.

(iv) *Пусть G — открытое множество в $\mathscr{E}^2$. Для каждой непрерывной функции $f\colon G \to \mathscr{P}$ существует голоморфная функция $h\colon G \to \mathscr{P}$, такая, что $h \sim f$*[2]).

Другими словами,

$$f(x) = h(x) \cdot e^{u(x)}, \tag{1}$$

где $u\colon G \to \mathscr{E}^2$ — выбранная должным образом непрерывная функция.

Доказательство. Пусть

$$G = F_1 \cup F_2 \cup \ldots, \quad \text{где} \quad F_n \subset \operatorname{Int}(F_{n+1}), \tag{2}$$

причем F_n — компактное множество (полигональная область), такое, что

(3) ни одна компонента множества $\mathscr{S}_2 - F_n$ не содержится в G.

По теореме 1 п. III для каждого n существуют рациональная функция r_n, нули и полюсы которой принадлежат множеству $\mathscr{S}_2 - G$, и непрерывная функция $u_n\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2$, такие, что

$$f(x) = r_n(x) \cdot e^{u_n(x)} \quad \text{для} \quad x \in F_n. \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$r_{n+1}(x) : r_n(x) = e^{u_n(x) - u_{n+1}(x)} \quad \text{для} \quad x \in F_n, \tag{5}$$

а потому разность $u_n(x) - u_{n+1}(x)$ голоморфна в $\operatorname{Int}(F_n)$.

Определим по индукции последовательность рациональных функций $s_1, s_2, \ldots$, полюсы которых принадлежат множеству $\mathscr{S}_2 - G$, такую, что голоморфная (в $\operatorname{Int}(F_n)$) функция

$$v_n(x) = s_{n+1}(x) - s_n(x) + u_n(x) - u_{n+1}(x) \tag{6}$$

---

[1]) Доказательство см. Куратовский [40, стр. 340].

[2]) См. Хейльбронн [1]. Аналогичная теорема об отображении аналитических пространств в группы Ли имеется у Грауэрта [1]. Там можно найти также ссылки на работы А. Картана, Бенке и др., касающиеся этих вопросов.

удовлетворяет условию

$$(7) \qquad |v_n(x)| < 1/2^n \quad \text{для} \quad x \in F_{n-1}.$$

Положим $s_1(x) = 0$ для всех x. Допустим, что s_n — рациональная функция, полюсы которой принадлежат множеству $\mathscr{S}_2 - G$; тогда функция $u_{n+1}(x) - u_n(x) + s_n(x)$ голоморфна в $\operatorname{Int}(F_n)$. По теореме Рунге[1]) (и согласно (3)) эту функцию можно равномерно аппроксимировать на F_{n-1} рациональными функциями с полюсами, лежащими в $\mathscr{S}_2 - G$. Следовательно, среди них существует функция, скажем s_{n+1}, удовлетворяющая условию (7).

Итак, бесконечная последовательность $s_1, s_2, \ldots$ определена. Далее, положим

$$(8) \qquad g_1(x) = r_1(x) \quad \text{и} \quad g_{n+1}(x) = \frac{r_{n+1}(x) \cdot e^{s_{n+1}(x)}}{r_n(x) \cdot e^{s_n(x)}}.$$

Согласно (4) и (6),

$$(9) \qquad g_{n+1}(x) = e^{v_n(x)} \quad \text{для} \quad x \in F_n;$$

следовательно,

$$(10) \qquad |g_{n+1}(x) - 1| < 1/2^{n-1} \quad \text{для} \quad x \in F_{n-1}$$

в силу (7) и очевидного неравенства

$$|e^z - 1| < 2|z| \quad \text{для} \quad |z| \leqslant 1.$$

Из (10) следует, что бесконечное произведение

$$(11) \qquad h(x) = \prod_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

равномерно сходится на каждом множестве F_n, а поэтому (согласно (2)) на каждом компактном подмножестве множества G. Так как, более того, функции g_n голоморфны на G (и не обращаются в 0), то этим свойством обладает и h; итак, голоморфная функция h отображает G в $\mathscr{S}$. Остается доказать, что h удовлетворяет условию (1). Положим

$$(12) \qquad u(x) = \lim_{n \to \infty} [u_n(x) - s_n(x)] \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Этот предел существует и непрерывен, так как, согласно (6) и (7), последовательность $u_n(x) - s_n(x)$ равномерно сходится на каждом компактном подмножестве F множества G.

Положим $h_n(x) = g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_n(x)$; тогда в силу (8) и (4)

$$h_n(x) = r_n(x) \cdot e^{s_n(x)} = f(x)\, e^{s_n(x) - u_n(x)} \quad \text{для} \quad x \in F_n.$$

[1]) См., например, Зигмунд и Сакс [1, стр. 176].

Наконец, в пределе получится равенство (1) (на основании (11) и (12)).

VIII. Кратность множества относительно непрерывной функции f: $F \to \mathscr{P}$, **где** F **замкнуто.** Пусть

(1) $$F = \overline{F} \subset \mathscr{S}_2 \quad \text{и} \quad \mathscr{S}_2 - F = R_0 \cup R_1 \cup \ldots,$$

где R_0, R_1, ... — компоненты множества $\mathscr{S}_2 - F$. Положим

(2) $$G = R_{l_1} \cup R_{l_2} \cup \ldots .$$

Под *кратностью множества* G *относительно непрерывной функции* f: $F \to \mathscr{P}$ (обозначается $\mu_G f$) мы будем понимать алгебраическое число нулей и полюсов, принадлежащих множеству G, *произвольной рациональной функции, гомотопной* f (ср. § 60, VIII).

Другими словами, положим в соответствии с теоремой 1 п. III

$$f(x) \sim (x - p_0)^{k_0} \cdot (x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots, \quad k_0 + k_1 + \ldots = 0, \quad p_j \in R_j;$$

тогда

(3) $$\mu_G f = k_{l_1} + k_{l_2} + \ldots .$$

Согласно теореме 2 п. III, число $\mu_G f$ *не зависит от выбора рациональной функции.* В частности,

(4) $$\mu_{R_n} f = k_n.$$

Легко установить следующие шесть свойств $\mu_G f$:

Теорема 1. (*Норма*) $\mu_0 f = 0 = \mu_{\mathscr{S}_2 - F} f$.

Теорема 2. (*Аддитивность*) $\mu_{G_1 \cup G_2} f = \mu_{G_1} f + \mu_{G_2} f$, *если* $G_1 \cap G_2 = 0$.

Теорема 3. (*Гомоморфизм*) $\mu_G (f_1 \cdot f_2) = \mu_G f_1 + \mu_G f_2$.

Теорема 4. (*Инвариантность*) *если* $f_1 \sim f_2$, *то* $\mu_G f_1 = \mu_G f_2$; *в частности,*

из $f \sim 1$ *вытекает, что* $\mu_G f = 0$ *для любого* G.

Теорема 5. (*Характеристика гомотопии*) *если* $\mu_{R_j} f_1 = \mu_{R_j} f_2$ *для* $j = 0, 1, \ldots$, *то* $f_1 \sim f_2$.

Следовательно (ср. с теоремой 4),

$$(f_1 \sim f_2) \equiv (\mu_G f_1 = \mu_G f_2 \text{ для любого } G).$$

В частности,

$$(f \sim 1) \equiv (\mu_G f = 0 \text{ для любого } G).$$

Теорема 6. (*Непрерывность*) *если* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (*причем сходимость равномерна*), *то* $\mu_G f_n = \mu_G f$ *для достаточно больших* n.

Доказательство. Это следствие теоремы 4 и § 54, II (1).

Теорема 7. *Непрерывная функция* $f\colon F \to \mathscr{P}$ *допускает* (*непрерывное*) *продолжение* $f^*\colon F \cup R_j \to \mathscr{P}$ *тогда и только тогда, когда* $\mu_{R_j} f = 0$.

Доказательство. Это следует из (4) и теоремы 2′ п. III.

Теорема 8. *Если* $f_j = f \mid \mathrm{Fr}(R_j)$, *то* $\mu_{R_j} f_j = \mu_{R_j} f$.

Действительно, R_j есть компонента множества

$$\mathscr{S}_2 - \mathrm{Fr}(R_j) = R_j \cup (\mathscr{S}_2 - \overline{R}_j).$$

IX. Кратность относительно непрерывной функции $f\colon G \to \mathscr{P}$, **где** G **открыто.** Пусть F — открыто-замкнутое множество в $\mathscr{S}_2 - G$. Тогда

$$F = \overline{F} \text{ и } \mathscr{S}_2 - G - F = \overline{\mathscr{S}_2 - G - F}.$$

По теореме 2 п. VII существует последовательность рациональных функций $r_1, r_2, \ldots$, нули и полюсы которых принадлежат множеству $\mathscr{S}_2 - G$, и при этом

$$(1) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x) \cdot e^{u_n(x)}, \quad u_n\colon G \to \mathscr{E}^2,$$

где u_n — непрерывная функция, а сходимость равномерна на любом множестве $F^* = \overline{F^*} \subset G$. Положим

$$(2) \qquad \mu_F f = \lim_{n\to\infty} \mu_F(r_n \mid G),$$

где $\mu_F(r_n \mid G)$ — алгебраическое число нулей и полюсов функции r_n, принадлежащих F.

Покажем, что этот предел существует и не зависит от выбора функций r_n.

Пусть F^* — замкнутое множество, разделяющее F и $\mathscr{S}_2 - G - F$. Пусть G^* открыто-замкнуто в $\mathscr{S}_2 - F$, содержит F и не пересекается с множеством $\mathscr{S}_2 - G - F$; следовательно, $F \subset G^* \subset G \cup F$, и поэтому $F = G^* - G$. Пусть $f^* = f \mid F^*$. Согласно соотношениям (1) и § 54, II (1), $f^* \sim r_n \mid F^*$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно, согласно теореме 4 п. VIII, $\mu_{G^*} f^* = \mu_{G^*}(r_n \mid F^*)$. Но $\mu_{G^*}(r_n \mid F^*) = \mu_F(r_n \mid G)$, ибо $F = G^* - G$ и при этом ни нули, ни полюсы функции r_n не принадлежат G. Таким образом, при $n \geqslant n_0$ кратность $\mu_F(r_n \mid G)$ имеет постоянное значение, равное $\mu_{G^*} f^*$, а потому не зависящее от выбора функций r_n.

Замечания. (i) Одновременно было доказано, что *если F^* — замкнутое подмножество из G и G^* — открыто-замкнутое множество в $\mathscr{S}_2 - F^*$, такое, что $F = G^* - G$, то*

(3) $$\mu_F f = \mu_{G^*} f^*, \text{ где } f^* = f \mid F^*.$$

Это утверждение позволяет свести определение кратности относительно функции, заданной на открытом множестве, к определению кратности относительно функции, заданной на замкнутом множестве.

(ii) Допустим, что в формуле (1)

(4) $$r_n(x) = c_n (x - p_{n,0})^{k_{n,0}} \cdot \ldots \cdot (x - p_{n,l_n})^{k_{n,l_n}},$$

где $p_{n,0} = \infty$, если $\infty \in \mathscr{S}_2 - G$, и $k_{n,0} + \ldots + k_{n,l_n} = 0$.

Тогда, согласно (2),

(5) $$\mu_F f = \lim_{n \to \infty} (k_{n,j_1} + k_{n,j_2} + \ldots),$$

где $p_{n,j_1}, p_{n,j_2}, \ldots$ принадлежат F.

(iii) В частном случае, когда $\mathscr{S}_2 - G = C_0 \cup \ldots \cup C_m$ (конечное число компонент), согласно теореме 1 п. VII, имеем

$$f(x) = (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_m)^{k_m} e^{u(x)},$$
$$k_0 + \ldots + k_m = 0, \ u\colon G \to \mathscr{E}^2 \text{ непрерывно}, \ p_j \in C_j.$$

Предположим, что в (1) $r_n(x) = (x - p_0)^{k_0} \cdot \ldots \cdot (x - p_m)^{k_m}$; тогда, согласно (5),

(6) $$\mu_F f = k_{j_1} + \ldots + k_{j_s}, \text{ где } p_{j_1}, \ldots, p_{j_s} \in F,$$

$$\text{и, в частности, } \mu_{C_j} f = k_j.$$

Заменим G на F и F на G в теоремах 1 — 4 п. VIII. Тогда получим следующее утверждение:

Теоремы 1 — 4. *Если $f\colon G \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция и G открыто, то кратность обладает свойствами нормы, аддитивности, гомоморфизма и инвариантности.*

Теорема о *характеристике гомотопии* также имеет место.

Теорема 5. *Если $\mu_F f_1 = \mu_F f_2$ для каждого F, то $f_1 \sim f_2$. Следовательно* (в силу теоремы 4), *эти два условия эквивалентны.*

В частности, *условие $f \sim 1$ эквивалентно условию $\mu_F = 0$ для любого F.*

Доказательство. Пусть $f = f_1 : f_2$. Предположим, что $f \not\sim 1$. По теореме 4 § 56, X существует замкнутое множество $F^* \subset G$, такое, что если $f^* = f \mid F^*$, то $f^* \not\sim 1$. Поэтому, согласно теореме 5 п. VIII, существует открыто-замкнутое в $\mathscr{S}_2 - F^*$ множество G^*, такое, что $\mu_{G^*}f^* \neq 0$. Положим $F = G^* - G$. Это множество, очевидно, открыто в $\mathscr{S}_2 - G$ и одновременно замкнуто там, так как

$$G^* = \overline{G}^* - F^*, \quad \text{следовательно,} \quad F = \overline{G}^* - G^* - F = \overline{G}^* - G.$$

Согласно (3), $\mu_F f \neq 0$, откуда $\mu_F f_1 \neq \mu_F f_2$.

Связь с некоторыми теоремами об аналитических функциях [1]).

Теорема 6. *Кратность является локальным понятием, т. е. значение $\mu_F f$ не изменится, если область определения f сузить до любого открытого множества, объединение которого с F представляет собой окрестность множества F.*

Вообще, *пусть G и G_0 — два открытых множества, таких, что $G_0 \subset G \subset \mathscr{S}_2$, и пусть F и F_0 — два множества, открыто-замкнутых соответственно в $\mathscr{S}_2 - G$ и $\mathscr{S}_2 - G_0$ и таких, что $F = F_0 - G$. Пусть f: $G \to \mathscr{P}$ непрерывно. Тогда*

$$\mu_{F_0} f_0 = \mu_F f, \quad \text{где} \quad f_0 = f \mid G_0.$$

Теорема 7. *Если g — функция, голоморфная на открытом множестве, и если p — нуль порядка k этой функции, то*

$$\mu_p g^* = k,$$

где g^* — сужение g на множество тех значений x, для которых $g(x) \neq 0$.

Аналогичная теорема имеет место для *мероморфных* функций.

Замечание. Итак, при предположениях теоремы 7 мы имеем $\mu_p g^* > 0$. Однако для произвольных непрерывных функций (изолированный) нуль может иметь кратность, равную 0, или даже отрицательную кратность. Это видно из следующих примеров:

(i) $g(x) = e^{-1/|x|}$, $g(0) = 0$. Тогда $\mu_p g^* = 0$ для $p = 0$;

(ii) $g(x) = x^{-n} e^{-1/|x|}$, $g(0) = 0$. Тогда $\mu_p g^* = -n$ для $p = 0$.

Теорема 8. (Обобщенная теорема Руше.) *Пусть M — замкнутое подмножество сферы $\mathscr{S}_2$, и пусть g, g_1: $M \to \mathscr{E}^2$ — две непрерывные функции, такие, что $|g_1(x)| < |g(x)|$ для $x \in \mathrm{Fr}(M)$. Если F и F^* — множества нулей функций g и соответственно $g^* = g + g_1$, то*

$$\mu_F f = \mu_{F^*} f^*,$$

[1]) Доказательство см. Куратовский [40, п. XII и XX].

где

$$f=g\,|\,G, \quad f^*=g^*\,|\,G^*, \quad G=\operatorname{Int}(M)-F \quad \textit{и} \quad G^*=\operatorname{Int}(M)-F^*.$$

Замечание. Легко показать, принимая во внимание теорему 7, что если функции g и g_1 *голоморфны* на $\operatorname{Int}(M)$, то кратности $\mu_F f$ и $\mu_{F^*} f^*$ суть алгебраические числа нулей функций g и g^* соответственно.

Теорема 9. *Пусть $M=\overline{M}\subset\mathscr{S}_2$ и g_n: $M\to\mathscr{E}^2$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность непрерывных функций, равномерно сходящаяся к функции g, которая не обращается в нуль ни в какой точке множества* $\operatorname{Fr}(M)$. *Пусть F_n и F — множества нулей функций g_n и g соответственно. Тогда для достаточно больших n*

$$\mu_F f=\mu_{F_n} f_n, \quad \textit{где} \quad f=g\,|\,[\operatorname{Int}(M)-F] \quad \textit{и} \quad f_n=g_n\,|\,[\operatorname{Int}(M)-F_n].$$

Теорема 10. *Если A — элементарный континуум или область, то всякий гомеоморфизм f: $A\to\mathscr{P}$ гомотопен некоторой гомографической функции.*

Более общо, имеет место

Теорема 11. *Пусть G — открытое множество и f: $G\to\mathscr{P}$ — непрерывная функция. Если кратность $\mu_F f$ принимает только три значения k, 0 и $-k$ (при переменном F), то*

$$f(x)\sim\left(\frac{x-p}{x-q}\right)^k.$$

X. Характеристика группы $\mathfrak{B}_1(G)$. Напомним (см. § 58, III), что для заданного (компактного) пространства $\mathscr{X}$ символ $\mathfrak{N}(\mathscr{X})$ обозначает совокупность нормированных (конечно аддитивных) мер, определенных на семействе всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathscr{X}$.

Теорема 1. *Пусть множество $G\subset\mathscr{S}_2$ открыто и $f\in\mathscr{P}^G$. Положим $\nu_f(F)=\mu_F(f)$ для каждого открыто-замкнутого множества $F\subset\mathscr{S}_2-G$. Тогда $\nu_f\in\mathfrak{N}(\mathscr{S}_2-G)$.*

Более того, $(f_1\sim f_2)\equiv(\nu_{f_1}=\nu_{f_2})$. *Таким образом, ν сопоставляет каждому элементу группы $\mathfrak{B}_1(G)$ элемент множества $\mathfrak{N}(\mathscr{S}_2-G)$.*

Более того, ν — *гомоморфизм.*

Эта теорема вытекает непосредственно из теорем 1—5 п. IX. Покажем, что ν — изоморфизм.

Теорема 2 (двойственности). $\mathfrak{B}_1(G)=\mathfrak{N}(\mathscr{S}_2-G)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\rho \in \mathfrak{R}(\mathcal{S}_2 - G)$ существует $f \in \mathcal{P}^G$, такое, что $\nu_f(F) = \rho(F)$, т. е.

(1) $\mu_F f = \rho(F)$ для каждого открыто-замкнутого в $\mathcal{S}_2 - G$ множества F.

В соответствии с теоремой 2 § 50, III пусть

(2) $$G = F_1^* \cup F_2^* \cup \ldots, \quad F_n^* = \overline{F}_n^* \subset \operatorname{Int}(F_{n+1}^*),$$

где $\mathcal{S}_2 - F_n^*$ имеет только конечное число компонент и $R - G \neq 0$ для каждой компоненты R множества $\mathcal{S}_2 - F_n^*$.

Так как компоненты множества $\mathcal{S}_2 - F_n^*$ содержатся в компонентах множества $\mathcal{S}_2 - F_{n-1}^*$, то их можно заиндексировать с помощью конечного числа систем $i_1 \ldots i_n$, состоящих из n неотрицательных целых чисел, таким образом, что

(3) $$\mathcal{S}_2 - F_n^* = \bigcup R_{i_1 \ldots i_n},$$

(4) $$R_{i_1 \ldots i_{n+1}} \subset R_{i_1 \ldots i_n},$$

где суммирование распространяется на все системы $i_1 \ldots i_n$ (n фиксировано), для которых $R_{i_1 \ldots i_n}$ определено. Положим

(5) $$F_{i_1 \ldots i_n} = R_{i_1 \ldots i_n} - G.$$

Для каждого n (ср. (3)–(5))

(6) $$F_{i_1 \ldots i_n} = \bigcup_j F_{i_1 \ldots i_n j},$$

(7) $$F_{i_1 \ldots i_n} \cap F_{l_1 \ldots l_n} = 0, \quad \text{если} \quad (i_1 \ldots i_n) \neq (l_1 \ldots l_n),$$

(8) $$\mathcal{S}_2 - G = \bigcup F_{i_1 \ldots i_n},$$

так как из (2) и (3) следует, что

$$\mathcal{S}_2 - G = \mathcal{S}_2 - F_n^* - G = \bigcup R_{i_1 \ldots i_n} - G.$$

По определению множества F_n^* имеем $R_{i_1 \ldots i_n} - G \neq 0$. Пусть (ср. (5))

(9) $$p_{i_1 \ldots i_n} \in F_{i_1 \ldots i_n}.$$

Так как множество $F_{i_1 \ldots i_n}$ открыто-замкнуто в $\mathcal{S}_2 - G$, согласно (5), (7) и (8), то пусть

(10) $$k_{i_1 \ldots i_n} = \rho(F_{i_1 \ldots i_n}).$$

В силу теоремы 2 п. IX, (6) и (7), получаем

(11) $$k_{i_1 \ldots i_n} = \sum_j k_{i_1 \ldots i_n j},$$

а согласно (i) и (8), для каждого n

(12) $$\sum k_{i_1 \ldots i_n} = 0.$$

Рассмотрим рациональную функцию

(13) $$r_n(x) = \prod (x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n}}.$$

Покажем, что

(14) $$r_n(x) \sim r_{n+1}(x) \quad \text{на} \quad F_n^*.$$

Согласно (9), (6) и (5), $p_{i_1 \ldots i_n j} \in R_{i_1 \ldots i_n}$. Но так как $R_{i_1 \ldots i_n}$ — компонента множества $\mathscr{S}_2 - F_n^*$, содержащая точки $p_{i_1 \ldots i_n}$ и $p_{i_1 \ldots i_n j}$, то на F_n^* (ср. II, теорема 1)

$$\frac{x - p_{i_1 \ldots i_n}}{x - p_{i_1 \ldots i_n j}} \sim 1, \quad \text{откуда} \quad \frac{(x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n j}}}{(x - p_{i_1 \ldots i_n j})^{k_{i_1 \ldots i_n j}}} \sim 1,$$

и, согласно (11),

$$\frac{(x - p_{i_1 \ldots i_n})^{k_{i_1 \ldots i_n}}}{\prod_j (x - p_{i_1 \ldots i_n j})^{k_{i_1 \ldots i_n j}}} \sim 1,$$

откуда вытекает условие (14). В соответствии с этим условием пусть

(15) $$r_n(x) = r_{n+1}(x)\, e^{u_{n+1}(x)} \quad \text{для} \quad x \in F_n^*,$$

где

$$u_{n+1}\colon \mathscr{S}_2 \to \mathscr{E}^2 \text{ непрерывно и } u_1(x) = 0.$$

Положим

(16) $$f_n(x) = r_n(x)\, e^{u_1(x) + \ldots + u_n(x)}.$$

Согласно (15) и (16),

(17) $$f_n(x) = f_{n+1}(x) = \ldots \quad \text{для} \quad x \in F_n^*.$$

Положим

(18) $$f(x) = f_n(x) \quad \text{для} \quad x \in F_n^*.$$

Следовательно, функция f однозначно определена на G. Согласно (2), $f \in \mathscr{P}^G$.

Далее покажем, что

(19) $$\mu_{F_{i_1 \ldots i_n}} f = k_{i_1 \ldots i_n}.$$

Согласно (5), IX (3) и (18),

$$\mu_{F_{i_1\ldots i_n}} f = \mu_{R_{i_1\ldots i_n}} f \mid F_n^* = \mu_{R_{i_1\ldots i_n}} r_n \mid F_n^*,$$

так как на F_n^* (ср. (16)) $f = f_n \sim r_n$. Наконец, $\mu_{R_{i_1\ldots i_n}} r_n \mid F_n^* = k_{i_1\ldots i_n}$, согласно (13), (9) и (5).

Таким образом, $\mu_F f = \rho(F)$ (ср. (10)), если F имеет вид $F = F_{i_1\ldots i_n}$.

Если F — произвольное множество, открыто-замкнутое в $\mathscr{S}_2 - G$, то существует замкнутое множество F^*, разделяющее (непересекающиеся и замкнутые) множества F и $\mathscr{S}_2 - G - F$. Согласно (2), существует такое n, что $F^* \subset F_n^*$. Следовательно, можно считать, что $F^* = F_n^*$.

Так как множество $R_{i_1\ldots i_n}$ связно и не пересекается с F_n^*, то

$$\text{из } F \cap R_{i_1\ldots i_n} \neq 0 \text{ вытекает } (\mathscr{S}_2 - G - F) \cap R_{i_1\ldots i_n} = 0,$$

поэтому (ср. (5)) из соотношения $F \cap F_{i_1\ldots i_n} \neq 0$ вытекает включение $F_{i_1\ldots i_n} \subset F$.

В силу (13) F является объединением множеств $F_{i_1\ldots i_n}$, таких, что $F \cap F_{i_1\ldots i_n} \neq 0$. Отсюда в силу теорем 2 п. IX и соотношений (7) и (19) вытекает равенство (1), что завершает доказательство.

Из теоремы 2 и теоремы 4 § 58, III получаем следующую характеристику группы $\mathfrak{B}_1(G)$:

Теорема 3. *Если G — открытое подмножество $\mathscr{S}_2$, то*

$$\text{либо } \mathfrak{B}_1(G) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathscr{I}^n, \text{ либо } \mathfrak{B}_1(G) \underset{\mathrm{gr}}{=} \mathscr{I}^{\aleph_0}$$

в зависимости от того, имеет ли множество $\mathscr{S}_2 - G$ конечное число, скажем $n+1$, или бесконечное множество компонент.

Замечание 1. Из теоремы 3 следует, что если открытое множество G разделяет $\mathscr{S}_2$ на n континуумов (*n конечно*), то *n — внутренний инвариант G*. Это неверно, если G разделяет $\mathscr{S}_2$ на *бесконечное* множество континуумов; в следующем примере [1]) в $\mathscr{E}$ заданы два открытых гомеоморфных множества G и H, таких, что $\mathscr{E} - G$ имеет счетное множество компонент, тогда как семейство компонент множества $\mathscr{E} - H$ несчетно.

Именно, $\mathscr{E} - G = \mathscr{I}$ и $\mathscr{E} - H = \mathscr{C}$.

---

[1]) См. Эйленберг [13, стр. 75].

Умножая эти множества на $\mathcal{E}$ (или на $\mathcal{E}^{n-1}$), получаем простые примеры множеств в $\mathcal{E}^2$ (или в $\mathcal{E}^n$) с той же самой особенностью.

Напомним, что эта особенность может встречаться только в том случае, когда G не связно (ср. § 57, IV, теорема 3).

Замечание 2. В формуле (6) можно потребовать, чтобы функция f была голоморфной (см. VII, замечание (iv)).

XI. Приращение логарифма. Индекс. Пусть ζ: $\mathcal{J}\to\mathcal{E}^2$ — непрерывная функция, такая, что $\zeta(0)=\zeta(1)$. Положим $C=\zeta(\mathcal{J})$. Пусть f: $C\to\mathcal{P}$ — непрерывная функция. Тогда $f\zeta$: $\mathcal{J}\to\mathcal{P}$, откуда $f\zeta\sim 1$ (ср. § 56, III, теорема 3); следовательно,

(0) $$f\zeta(t)=e^{u(t)} \quad \text{для} \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \quad \text{и} \quad u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}.$$

Так как $\zeta(0)=\zeta(1)$, то $u(1)-u(0)=2n\pi i$.

Целое число

$$\Delta_\zeta f=\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)]$$

называется *логарифмическим приращением функции f относительно ζ.*

Легко видеть, что число $\Delta_\zeta f$ не зависит от выбора функции u, удовлетворяющей соотношению (0).

Напомним, что по теореме 4 из § 56, III если f: $\mathcal{S}\to\mathcal{P}$ — непрерывная функция, то $f(x)\sim x^n$, где $n=\Delta_\zeta f$ и $\zeta(t)=e^{2\pi i t}$.

Заметим, что при некоторых предположениях регулярности для f и C

$$\Delta_\zeta f=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Пусть $p\in\mathcal{S}_2-C$. Положим по определению

(1) $$\operatorname{ind}_\zeta p=\Delta_\zeta(x-p).$$

Другими словами, положим $\zeta(t)-p=e^{u(t)}$, где $u\in(\mathcal{E}^2)^{\mathcal{J}}$; тогда

(2) $$\operatorname{ind}_\zeta p=\frac{1}{2\pi i}[u(1)-u(0)].$$

В частности (ср. I, замечание),

(2′) $$\operatorname{ind}_\zeta\infty=0.$$

Обратно, приращение можно определить с помощью индекса, а именно

(3) $$\Delta_\zeta f=\Delta_{f\zeta}x=\operatorname{ind}_{f\zeta}0.$$

Более общо, если $g\colon C\to\mathscr{E}^2$ — непрерывная функция и $p\in\mathscr{S}_2-g(C)$, то положим $f(x)=g(x)-p$; тогда

(4) $$\Delta_\zeta f=\operatorname{ind}_{g\zeta} p.$$

Отображение ζ интервала $\mathscr{I}$ определяет отображение ζ^0 окружности $\mathscr{S}$.

Именно, если $2\pi t$ — аргумент x (где $0\leqslant t\leqslant 1$), то пусть

$$\zeta^0(x)=\zeta(t).$$

Легко видеть, что функция ζ^0 непрерывна,

(5) $$\zeta^0\colon \mathscr{S}\to\mathscr{E}^2,\quad \zeta^0(\mathscr{S})=C \quad \text{и} \quad \zeta^0(e^{2\pi it})=\zeta(t).$$

Обратно, если $g\colon\mathscr{S}\to\mathscr{E}^2$ — непрерывная функция, то

(6) $$\zeta^0(x)=g(x), \text{ если положить } \zeta(t)=g(e^{2\pi it}).$$

Легко установить следующие теоремы 1 и 2 (что касается теоремы 1, ср. § 56, III, 4 (ii) и I, 4).

Теорема 1. $[\operatorname{ind}_\zeta p=n]\equiv[\zeta^0(x)-p\sim x^n$ (на $\mathscr{S}$)$]$.

Теорема 2. *Функция ζ^0 является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда $\zeta(t)\neq\zeta(t')$ для каждой пары $t\neq t'$, за исключением случая $|t-t'|=1$.*

Теорема 3. *Если точки p и q принадлежат одной и той же компоненте множества $\mathscr{S}_2-C$, где $C=\zeta(\mathscr{I})\subset\mathscr{E}^2$, то* $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$.

Если p принадлежит неограниченной компоненте, то $\operatorname{ind}_\zeta p=0$ (ср. (2')).

Если ζ^0 — гомеоморфизм и p принадлежит ограниченной компоненте множества $\mathscr{S}_2-C$, то $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$.

Доказательство. В теоремах 8 и 9 п. II положим $g=\zeta^0$ и $\mathscr{X}=\mathscr{S}$. Тогда $\zeta^0(x)-p\sim\zeta^0(x)-q$ на $\mathscr{S}$, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что $\operatorname{ind}_\zeta p=\operatorname{ind}_\zeta q$.

Если ζ^0 — гомеоморфизм, то $\zeta^0(x)-p\not\sim\zeta^0(x)-\infty\sim 1$, согласно теореме 9 п. II. Следовательно, по теореме 1 $\operatorname{ind}_\zeta p\neq 0$.

Последнюю часть теоремы 3 можно усилить с помощью теорем, приводимых ниже.

Теорема 4[1]). *Пусть ζ^0 — гомеоморфизм, $f\colon C\to\mathscr{P}$ — непрерывная функция и $p\in\mathscr{S}_2-C$. Если* $\operatorname{ind}_\zeta p=1$ *и* $\Delta_\zeta f=n$, *то* $f(x)\sim(x-p)^n$.

[1]) Это обобщение теоремы 4 п. I.

Доказательство. Пусть

$$\zeta(t) - p = e^{u(t)}, \qquad u(1) - u(0) = 2\pi i,$$
$$f\zeta(t) = e^{v(t)}, \qquad v(1) - v(0) = 2n\pi i.$$

Определим функцию w: $C \to \mathcal{E}^2$, полагая

$$w(x) = v(t) - nu(t), \quad \text{где} \quad x = \zeta(t).$$

Хотя значению $x = \zeta(0) = \zeta(1)$ соответствуют два значения t, функция w определена однозначно, так как

$$v(1) - nu(1) = (v(0) + 2n\pi i) - (2n\pi i + nu(0)) = v(0) - nu(0).$$

Следовательно, w — непрерывная функция и $w\zeta(t) = v(t) - nu(t)$. Тогда

$$(\zeta(t) - p)^n e^{w\zeta(t)} = e^{nu(t)} \cdot e^{v(t) - nu(t)} = e^{v(t)} = f\zeta(t),$$

откуда следует, что $(x - p)^n e^{w(x)} = f(x)$, если положить $x = \zeta(t)$.

Теорема 5. *Пусть A — окружность $|x - p| = r$ и g: $\Lambda \to \mathcal{E}^2$ — гомеоморфизм A на простую замкнутую кривую C. Если q — точка ограниченной компоненты D множества $\mathcal{S}_2 - C$, то $g(x) - q \sim (x - p)^{\pm 1}$.*

Доказательство. Прежде всего рассмотрим случай, когда C — окружность с центром q радиусом s. Положим $\zeta(t) = p + re^{2\pi it}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, так что $A = \zeta(\mathcal{I})$. Тогда

$$g\zeta(t) - q = |g\zeta(t) - q| e^{2\pi i\varphi(t)} = se^{2\pi i\varphi(t)}, \quad \text{где} \quad \varphi \in \mathcal{E}^{\mathcal{I}}.$$

Предположим, что $|\varphi(1) - \varphi(0)| > 1$. Тогда существует число t_0, для которого $|\varphi(t_0) - \varphi(0)| = 1$, так что

$e^{2\pi i\varphi(t_0)} = e^{2\pi i\varphi(0)}$, следовательно, $g\zeta(t_0) = g\zeta(0)$, и потому $\zeta(t_0) = \zeta(0)$.

Отсюда по определению ζ следует, что $e^{2\pi it_0} = 1$; но это невозможно, так как $0 < t_0 < 1$.

Таким образом, $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant 1$ и $|\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q| \leqslant 1$.

С другой стороны, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q \neq 0$. Это вытекает из последней части теоремы 3, так как $g\zeta(t) \neq g\zeta(t')$ при $t \neq t'$ и $|t - t'| < 1$ (ср. также с теоремой 2).

Следовательно, $\mathrm{ind}_{g\zeta}\, q = \pm 1$. Полагая в теореме 4 $C = \Lambda$ и $f(x) = g(x) - q$ и принимая во внимание (4), получаем, что $g(x) - q \sim (x - p)^{\pm 1}$.

В общем случае пусть A_0 — окружность $|x - p| = r/2$, а C_0 — окружность, содержащаяся в D, с центром q. По теореме 3 из § 61, V гомеоморфизм g: $A \to C$ можно продолжить до гомеоморфизма g^* двух круговых колец, заключенных между A_0 и A и между C_0 и C, так что $g^*(A_0) = C_0$.

Пусть при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x \in A$

$$h(x, t) = g^*\left[p + (x-p)\left(1 - \frac{1}{2}t\right)\right] - q \quad \text{и} \quad g_0(x) = g^*\left(\frac{p+x}{2}\right).$$

Тогда h — непрерывная функция, такая, что

$$h\colon A \times \mathcal{I} \to \mathcal{P}, \quad h(x, 0) = g(x) - q \quad \text{и} \quad h(x, 1) = g_0(x) - q.$$

Следовательно, $g(x) - q \sim g_0(x) - q$, а поскольку $g_0\colon A \to C_0$ гомеоморфизм, то, как только что было доказано,

$$g_0(x) - q \sim (x-p)^{\pm 1}, \quad \text{откуда} \quad g(x) - q \sim (x-p)^{\pm 1}.$$

Определение. Если ζ^0 — гомеоморфизм и если $\operatorname{ind}_\zeta p = 1$ для каждой точки p, принадлежащей ограниченной компоненте D множества $\mathcal{S}_2 - C$, то ζ называется *положительным путем кривой* C.

Если $\operatorname{ind}_\zeta p = -1$ для каждого p, то путь называется *отрицательным.*

Теорема 6. *Если ζ^0 — гомеоморфизм, то ζ — либо положительный, либо отрицательный путь кривой $C = \zeta(\mathcal{I})$.*

Доказательство. Заменим в теореме 5 A на $\mathcal{S}$ и g на ζ^0. Тогда

$$\zeta^0(x) - p \sim x^{\pm 1}, \quad \text{откуда} \quad \operatorname{ind}_\zeta p = \pm 1$$

на основании теоремы 1. Более того, согласно теореме 3, $\operatorname{ind}_\zeta p$ имеет постоянное значение (для $p \in D$).

Замечание. Если $y = \zeta(t)$ описывает положительный путь, то $y = \zeta(1-t)$ описывает отрицательный путь. Следовательно, всякая простая замкнутая кривая допускает два пути, положительный и отрицательный.

Из теоремы 4 вытекает следующая

Теорема 7. *Пусть ζ — положительный путь кривой C, $f\colon C \to \mathcal{P}$ — непрерывная функция и $p \in D$. Если $\Delta_\zeta f = n$, то*

$$f(x) \sim (x-p)^n.$$

Если $g\colon C \to \mathcal{E}^2$ — непрерывная функция и $g \in \mathcal{S}_2 - g(C)$, то

$$g(x) - q \sim (x-p)^{\operatorname{ind}_{g\zeta} q}.$$

XII. Связь с кратностью. Характеристика Кронекера. Из теоремы 1 п. XI непосредственно вытекает следующая

Теорема 1. $\operatorname{ind}_\zeta p = \mu_Q[\zeta^0(x) - p]$, *где Q — диск $|x| < 1$.*

Теорема 2. *Пусть ζ — положительный путь простой замкнутой кривой $C \subset \mathscr{E}^2$, D — ограниченная компонента множества $\mathscr{S}_2 - C$ и f: $C \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция. Тогда*

$$(1) \qquad \mu_D f = \Delta_\zeta f = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0.$$

Следовательно, *если* g: $C \to \mathscr{E}^2 - q$ *непрерывно и* $f(x) = g(x) - q$, *то*

$$\mu_D f = \operatorname{ind}_{g\zeta} q.$$

Доказательство. Пусть $p \in D$. В соответствии с теоремой 1 п. III пусть $f(x) \sim (x-p)^n$. Тогда, согласно VIII (4), $\mu_D f = n$. С другой стороны, $\Delta_\zeta f = n$ в силу теоремы 7 п. XI.

Теорема 2′. *Если D_1 — неограниченная компонента множества $\mathscr{S}_2 - C$ и ζ^1 — отрицательный путь кривой C, то*

$$\mu_{D_1} f = \Delta_{\zeta_1} f = \operatorname{ind}_{f\zeta_1} 0.$$

Доказательство. Пусть $\zeta(t) = \zeta_1(1-t)$. Так как ζ положительный путь, то справедлива формула (1). Поскольку $\mu_D f + \mu_{D_1} f = 0$ (ср. VIII, теоремы 1 и 2) и $\Delta_\zeta f = -\Delta_{\zeta_1} f$, отсюда следует искомое соотношение.

Пусть $G \subset \mathscr{S}_2$ — открытое множество. Предположим, что *p — изолированная точка множества $\mathscr{S}_2 - G$*. Тогда существует диск D с центром в точке p, такой, что $\bar{D} - p \subset G$. Пусть C — граница D; можно считать, что $\infty \in \mathscr{S}_2 - C$. Докажем следующее утверждение:

Теорема 3. *Если f: $G \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция, то $\mu_p f = \Delta_\zeta f^* = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0$, где $f^* = f \mid C$ и ζ — положительный или отрицательный путь C в зависимости от того, какое из соотношений $p \neq \infty$ или $p = \infty$ имеет место*[1]).

Доказательство. Согласно IX (3), $\mu_p f = \mu_D f^*$, а в силу теорем 2 и 2′ $\mu_D f^* = \Delta_\zeta f^*$.

Далее пусть R — область, дополнение которой состоит из конечного числа компонент: $\mathscr{S}_2 - R = C_0 \cup \ldots \cup C_n$. Каждое множество C_j является континуумом, не разрезающим $\mathscr{S}_2$ (ср. § 46, III, теорема 5), поэтому его можно отделить от всех

---

[1]) Таким образом, если $g \in (\mathscr{E}^2)^G$ и p — изолированный нуль функции g и если f — сужение g на множество тех x, в которых $g(x) \neq 0$, то кратность $\mu_p f$ совпадает с «индексом» точки p в смысле Александрова — Хопфа [1, стр. 470] («Index» или «Vielfachheit einer 0-Stelle»).

Следовательно, если множество F нулей функции g конечно, то кратность $\mu_p f$ *совпадает с алгебраическим числом нулей* g.

остальных C_l простой замкнутой кривой (ср. § 61, II, теорема 6). Повторяя приведенное выше рассуждение, получаем следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть f: $R \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция. Если простая замкнутая кривая $K \subset \mathscr{E}^2$ отделяет континуум C_j от всех C_l, где $l \neq j$, и если D — компонента множества $\mathscr{S}_2 - K$, содержащая C_j, то $\mu_{C_j} f = \Delta_\zeta f^* = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0$, где $f^* = f \mid K$, при условии, что ζ — положительный или отрицательный путь кривой K в соответствии с тем, является ли компонента D ограниченной или неограниченной.*

Теорема 3 позволяет вычислить $\mu_R f$ также в случае, когда f определена на *замкнутом множестве.*

Теорема 5. *Пусть $F = \bar{F} \subset \mathscr{S}_2$, R — компонента множества $\mathscr{S}_2 - F$, $p \in R$ и f: $F \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция. Пусть f_1 — непрерывное продолжение f на $\mathscr{S}_2 - Z$, где Z конечно и $Z \cap R = (p)$* (f_1 можно, например, отождествить с правой частью соотношения III (6)). *Тогда* $\mu_R f = \mu_p f_1$.

Доказательство. Это прямое следствие формулы (3) п. IX, если в ней G^* заменить на R, F^* — на F, F — на p, f — на f_1 и G — на $\mathscr{S}_2 - Z$.

Определение. Пусть A — элементарный континуум $\subset \mathscr{E}^2$. Пусть

(2) $$\mathscr{S}_2 - A = D_0 \cup \ldots \cup D_n,$$

где D_j — компонента множества $\mathscr{S}_2 - A$ ($j = 0, \ldots, n$).

Пусть путь ζ_j кривой $\operatorname{Fr}(D_j)$ отрицателен или положителен в соответствии с тем, является ли компонента D_j ограниченной или неограниченной. Тогда число

(3) $$\operatorname{car}_A f = \operatorname{ind}_{f\zeta_0} 0 + \ldots + \operatorname{ind}_{f\zeta_n} 0$$

называется *характеристикой Кронекера* непрерывной функции f: $\operatorname{Fr}(A) \to \mathscr{P}$.

Более общо, если A — элементарное замкнутое множество

(4) $$A = A_1 \cup \ldots \cup A_m,$$

где A_k — компонента A, то

(5) $$\operatorname{car}_A f = \operatorname{car}_{A_1} f_1 + \ldots + \operatorname{car}_{A_m} f_m, \text{ где } f_k = f \mid \operatorname{Fr}(A_k).$$

Теорема 6. *Пусть A — элементарное замкнутое множество и f: $\operatorname{Fr}(A) \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция. Положим $I = \operatorname{Int}(A)$; тогда*

(6) $$\mu_I f = \operatorname{car}_A f.$$

Доказательство. Сначала пусть A — элементарный континуум. Согласно (2),

$$\mathscr{S}_2 - \mathrm{Fr}(A) = I \cup D_0 \cup \ldots \cup D_n,$$

следовательно (ср. VIII, теоремы 1 и 2),

$$\mu_I f + \mu_{D_0} f + \ldots + \mu_{D_n} f = 0. \tag{7}$$

Пусть $f_j = f \mid \mathrm{Fr}(D_j)$. Тогда (см. теорему 8 п. VIII)

$$\mu_{D_j} f = \mu_{D_j} f_j \quad \text{и} \quad \mu_{D_j} f_j = -\mathrm{ind}_{f\zeta_j} 0 \tag{8}$$

в силу теорем 2 и 2′.

Из равенств (7), (8) и (3) вытекает равенство (6).

Далее пусть A — элементарное замкнутое множество, удовлетворяющее условию (4). Пусть $I_k = \mathrm{Int}(A_k)$. По теореме 4 § 61, III множество I_k является компонентой множества $\mathscr{S}_2 - \mathrm{Fr}(A_k)$, а также множества $\mathscr{S}_2 - \mathrm{Fr}(A)$.

Пусть $f_k = f \mid \mathrm{Fr}(A_k)$; тогда (см. теорему 8 п.VIII) $\mu_{I_k} f = \mu_{I_k} f_k$.

Так как (ср. § 61, II, теорема 4) $I = I_1 \cup \ldots \cup I_m$, то (ср. VIII, теорема 2)

$$\mu_I f = \mu_{I_1} f + \ldots + \mu_{I_m} f = \mu_{I_1} f_1 + \ldots + \mu_{I_m} f_m =$$
$$= \mathrm{car}_{A_1} f_1 + \ldots + \mathrm{car}_{A_m} f_m = \mathrm{car}_A f.$$

Теорема 7. *Пусть G — открытое множество, $f\colon G \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция, F — множество, открыто-замкнутое в $\mathscr{S}_2 - G$, и A — элементарное замкнутое множество, такое, что*

$$F \subset \mathrm{Int}(A) \quad и \quad A \subset G \cup F. \tag{9}$$

Тогда

$$\mu_F f = \mathrm{car}_A [f \mid \mathrm{Fr}(A)]. \tag{10}$$

Доказательство. Согласно (9),

$$F \cap \mathrm{Fr}(A) = 0 \text{ и } \mathrm{Fr}(A) \subset G \cup F, \text{ поэтому } \mathrm{Fr}(A) \subset G.$$

Таким образом, функция f определена на $\mathrm{Fr}(A)$. Так как множество $I = \mathrm{Int}(A)$ открыто-замкнуто в $\mathscr{S}_2 - \mathrm{Fr}(A)$, то, согласно IX (3) (если заменить F^* на $\mathrm{Fr}(A)$ и G^* на I),

$$\mu_F f = \mu_I [f \mid \mathrm{Fr}(A)],$$

откуда на основании равенства (6) следует формула (10).

Из теоремы 6 и теоремы 7 п. VIII (если подставить $\mathrm{Fr}(A)$ вместо F и I вместо R_j) вытекают две следующие теоремы:

Теорема 8. *Если* $f\colon A \to \mathscr{P}$ — *непрерывная функция, то*

$$\operatorname{car}_A [f \mid \operatorname{Fr}(A)] = 0.$$

Теорема 9. *Если* $f\colon \operatorname{Fr}(A) \to \mathscr{P}$ — *непрерывная функция и* $\operatorname{car}_A f = 0$, *то* $f \subset f^* \in \mathscr{P}^A$.

Замечания. (i) При некоторых предположениях регулярности относительно f и A теорема 8 вытекает из классической теоремы Коши теории аналитических функций.

(ii) Теорема 7 позволяет определить кратность с помощью характеристики (и, следовательно, с помощью индекса), так как существование элементарного замкнутого множества, удовлетворяющего условиям (9), вытекает из теоремы 10, § 61, III (ибо множество $\mathscr{S}_2 - G - F$ замкнуто, а $G \cup F$ — открытая окрестность множества F).

Теорема 10. *Пусть* A — *элементарное множество и* $g\colon A \to \mathscr{E}^2$ — *непрерывная функция. Предположим, что* $g(x) \neq 0$ *для* $x \in \operatorname{Fr}(A)$, *и положим* $f = g \mid \operatorname{Fr}(A)$. *Если* $\operatorname{car}_A f \neq 0$, *то существует точка* x_0, *такая, что* $g(x_0) = 0$ [1].

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 8.

Более точно, *если множество нулей функции* g *конечно, то их алгебраическое число совпадает с* $\operatorname{car}_A f$ *и, следовательно, с* $\mu_I f$ [2].

Последнее утверждение представляет собой частный случай следующей теоремы [3].

Пусть $M = \overline{M} \subset \mathscr{S}_2$ и $h\colon M \to \mathscr{S}_2$ — непрерывная функция. Пусть F — множество тех x, для которых $h(x) = 0$ или ∞. Предположим, что $F \cap \operatorname{Fr}(M) = 0$. Тогда полагая $f = h \mid \operatorname{Fr}(M)$, $I = \operatorname{Int}(M)$ и $G = I - F$, мы имеем $\mu_I f = \mu_F(h \mid G)$.

Приложения к вычислению алгебраического числа неподвижных точек [4].

Пусть E — компактное подмножество $\mathscr{E}^2$ и $g\colon E \to E$ — непрерывная функция. Предположим, что

$$g(x) \neq x \text{ для } x \in \operatorname{Fr}(E),$$

и положим

$$f(x) = g(x) - x \quad \text{и} \quad f^* = f \mid [\operatorname{Fr}(E)].$$

Таким образом, $f^*\colon \operatorname{Fr}(E) \to \mathscr{P}$ — непрерывная функция.

---

[1] Ср. с *теоремой существования Кронекера* (случай $n = 2$), Александров и Хопф [1, стр. 467 и 470].

[2] Ср. Александров и Хопф [1, стр. 472, теорема II].

[3] Ср. Куратовский [40, стр. 358].

[4] Ср. Куратовский [41].

Другими словами, если Z обозначает множество неподвижных точек функции g, то $Z \subset I$, где $I = \operatorname{Int}(E)$.

Если p — изолированная точка множества Z, то *порядком неподвижной точки* p мы будем называть $\operatorname{ind}_{f\zeta} 0$, где ζ — положительный путь границы C диска D, такого, что

$$p \in D, \quad D \subset \operatorname{Int}(E) \quad \text{и} \quad (p) = D \cap Z.$$

Можно доказать следующие утверждения[1]).

Если Z конечно, то алгебраическое число неподвижных точек (сумма порядков неподвижных точек) *равно* $\mu_I f^*$.

Если E — континуум и абсолютный окрестностный ретракт, то след автоморфизма группы $\mathfrak{B}_1(E)$, индуцированного функцией g, равен $1 - \mu_I f^*$.

Другими словами, *пусть $p_1, \ldots, p_n$ — система точек, принадлежащих (различным) ограниченным компонентам множества $\mathcal{E}^2 - E$, и пусть*

$$g(x) - p_j \sim (x - p_1)^{k_{j1}} \cdot \ldots \cdot (x - p_n)^{k_{jn}} \quad \text{на} \quad E;$$

тогда

$$\mu_I f^* = 1 - (k_{11} + \ldots + k_{nn}).$$

XIII. Положительные и отрицательные гомеоморфизмы. Ориентированная топология.

Теорема 1. *Пусть $C \subset \mathcal{E}^2$ — простая замкнутая кривая, D — компонента множества $\mathcal{S}_2 - C$ и $f\colon C \to \mathcal{S}$ — гомеоморфизм. Если точка 0 принадлежит неограниченной компоненте множества $\mathcal{S}_2 - f(C)$, то $\mu_D f = 0$.*

Если она принадлежит ограниченной компоненте, то $\mu_D f = \pm 1$ в зависимости от того, положителен или отрицателен путь $f\zeta$ кривой $f(C)$ (ζ обозначает положительный или отрицательный путь C в соответствии с тем, ограничена или неограничена компонента D).

Следовательно, *если D ограничена, то $f(x) \sim (x - p)^{\pm 1}$ для $p \in D$.*

Доказательство. Так как $\mu_{\mathcal{S}_2 - \overline{D}} f = -\mu_D f$, то достаточно рассмотреть случай, когда D ограничена.

Положим $\eta(t) = f\zeta(t)$. Тогда отображение η^0, определенное на $\mathcal{S}$ (ср. XI (5)), — гомеоморфизм. Действительно, если $2\pi t$ — аргумент z, то $\eta^0(z) = \eta(t) = f\zeta(t)$ по определению η^0; поэтому из предположения $\eta^0(z) = \eta^0(z')$ вытекает, что

$$f\zeta(t) = f\zeta(t'), \quad \text{откуда} \quad \zeta(t) = \zeta(t'),$$

$$\text{и, следовательно,} \quad t = t' \ \text{либо} \ |t - t'| = 1.$$

[1]) Куратовский [41, стр. 264 и 267]. Ср. также Лефшец [3].

Таким образом, η^0 — гомеоморфизм, согласно теореме 2 п. XI.

Если точка 0 принадлежит неограниченной компоненте множества $\mathscr{S}_2 - f(C)$, то $\mu_D f = \operatorname{ind}_{f\zeta} 0 = 0$, по теоремам 2 и 3 п. XII и XI соответственно. Если же она принадлежит ограниченной компоненте, то (если заменить ζ на $f\zeta$ и p на 0) $\operatorname{ind}_{f\zeta} 0 = \pm 1$ в зависимости от того, положителен или отрицателен путь $f\zeta$ кривой $f(C)$; следовательно, по теореме 2 п. XII либо $\mu_D f = 1$, либо соответственно $\mu_D f = -1$.

Теорема 2. *Пусть* $G \subset \mathscr{S}_2$ — *открытое множество и* g: $G \to \mathscr{E}^2$ — *гомеоморфизм; тогда если положить* $h(x) = g(x) - g(p)$, *где* $x \in G - p$, *то*

(1) $\mu_p h = \pm 1$ *для каждого* $p \in G$.

Более того, *если* G — *область, то* $\mu_p h$ *имеет постоянное значение* [1]).

Доказательство. Пусть p — заданная точка множества G. Так как $h(x) = g(x) - g(p)$, то функция h принимает значение 0 только в точке p. Поэтому, полагая $H = G - p$ и $h^* = h \mid H$, мы заключаем, что функция h^*: $H \to \mathscr{S}$ непрерывна и p — изолированная точка множества $\mathscr{S}_2 - H$. Пусть D — диск, такой, что $p \in D$ и $\overline{D} \subset C$. Пусть $C = \operatorname{Fr}(D)$. Так как h — гомеоморфизм, то множество $h(D)$ ограничено, $h(C)$ — простая замкнутая кривая и диск $h(D)$ (в силу инвариантности понятия внутренней точки; ср. § 59, IV (0)) — ограниченная компонента множества $\mathscr{S}_2 - h(C)$. Так как $0 = h(p) \in h(D)$, то $\mu_D(h \mid C) = \pm 1$ по теореме 1, откуда вытекает равенство (1) (ср. IX (3)).

Теперь предположим, что G — область. Пусть $p_0 \in G$, $p_1 \in G$ и D — такой диск, что $p_0, p_1 \in D$, $\overline{D} \subset G$ и $C = \operatorname{Fr}(D)$. Положим $h_j(x) = g(x) - g(p_j)$ для $j = 0, 1$. Как и ранее, $\mu_{p_j} h_j = \mu_D(h_j \mid C)$. Так как $g(p_0)$ и $g(p_1)$ принадлежат множеству $g(D)$, которое является компонентой множества $\mathscr{S}_2 - g(C)$, то по теореме 8 п. II

$$g(x) - g(p_0) \sim g(x) - g(p_1) \quad \text{на} \quad C, \quad \text{т. е.} \quad (h_0 \mid C) \sim (h_1 \mid C);$$

поэтому (ср. VIII, 4)

$$\mu_D(h_0 \mid C) = \mu_D(h_1 \mid C) \quad \text{и, следовательно,} \quad \mu_{p_0} h_0 = \mu_{p_1} h_1.$$

Определение. Пусть $R \subset \mathscr{S}_2$ — область и g: $R \to \mathscr{S}_2$ — гомеоморфизм; g называется *положительным гомеоморфизмом*,

[1]) См. Александров и Хопф [1, стр. 475].

если $\mu_p h = 1$ (где $h(x) = g(x) - g(p)$) для каждой точки p, такой, что $g(p) \neq \infty$.

Если $\mu_p h = -1$, то гомеоморфизм g называется *отрицательным*.

Так как ни одна точка не разделяет R, то *всякий гомеоморфизм* g: $R \to \mathscr{S}_2$ в силу теоремы 2 *либо положителен, либо отрицателен.*

Для того чтобы узнать, положителен или отрицателен гомеоморфизм g, достаточно найти значение $\mu_p f$ в одной точке p (такой, что $g(p) \neq \infty$).

Из теоремы 3 п. XII и формулы (4) п. XI вытекает следующая

Теорема 3. *Если D — ограниченный диск с центром p, $\overline{D} \subset R$ и $\operatorname{ind}_{g\zeta} g(p) = 1$ (где ζ — положительный путь границы D), то гомеоморфизм g положителен.*

Следовательно, положительные гомеоморфизмы — это именно те отображения, которые не меняют *ориентации* рассматриваемой области.

Теперь рассмотрим некоторые частные случаи.

Теорема 4. *Если $R \subset \mathscr{E}^2$ — такая область, что множество $\mathscr{E}^2 - R$ связно, и если g: $R \to \mathscr{E}^2$ — гомеоморфизм, то g представляет собой положительный гомеоморфизм тогда и только тогда, когда для каждого $p \in R$*

$$(2) \qquad g(x) - g(p) \sim x - p \quad \text{на} \quad R - p.$$

Доказательство. Положим $h(x) = g(x) - g(p)$. Согласно теореме 1 п. VII (если положить $p_0 = \infty$), $h(x) \sim (x - p)^k$, а так как $\mu_p h = k$, то $k = \pm 1$ в соответствии с тем, положителен или отрицателен рассматриваемый гомеоморфизм.

Аналогичные рассуждения показывают, что имеет место следующая

Теорема 5. *Гомеоморфизм g: $\mathscr{S}_2 \to \mathscr{S}_2$ положителен тогда и только тогда, когда*

$$g(x) - g(p) \sim \frac{x - p}{x - p_0} \quad \text{на} \quad \mathscr{S}_2 - p - p_0, \quad \text{где} \quad g(p_0) = \infty.$$

В частности, *если $p_0 = \infty$, то выполняется соотношение* (2).

Отсюда вытекает, что *всякое гомографическое отображение есть положительный гомеоморфизм.*

Действительно,

$$\frac{ax - b}{cx - d} - \frac{ap - b}{cp - d} = \lambda \frac{x - p}{x - p_0}, \quad \text{где} \quad p_0 = \frac{d}{c}$$

и где λ — постоянная (предполагается, что $ad - bc \neq 0$).

Замечание. В качестве примера отрицательного гомеоморфизма сферы $\mathscr{S}_2$ рассмотрим функцию $g(\alpha+i\beta)=\alpha-i\beta$, т. е. $g(x)=|x|^2:x$. Легко показать, что $\operatorname{ind}_{g\zeta}0=-1$ для $\zeta(t)=e^{2\pi it}$, откуда вытекает требуемое заключение в силу теоремы 3.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть заданы две области $R_1\subset R$ и гомеоморфизм $g\colon R\to\mathscr{S}_2$. Если $g\,|\,R_1$ — положительный гомеоморфизм, то g — положительный гомеоморфизм.*

Теорема 7. *Отображение, обратное к положительному гомеоморфизму, есть положительный гомеоморфизм.*

Другими словами, *пусть R — область и $g\colon R\to Q$ — положительный гомеоморфизм на Q; тогда обратное отображение $h=g^{-1}$ представляет собой положительный гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть D — ограниченный диск с центром $p\neq 0$, $\overline{D}\subset R$ и $\infty\in\mathscr{S}_2-g(D)$. Пусть $q=g(p)$, $H=g(D)$, $f(x)=g(x)-g(p)$. По предположению $\mu_p f=1$. То же равенство имеет место, если область изменения x ограничить множеством D (ср. с теоремой 6). Тогда по теореме 4

$$g(x)-g(p)\sim x-p$$

на $D-p$; это означает, что $g(x)-g(p)=(x-p)\cdot e^{u(x)}$.

Подставим $h(y)$ вместо x; тогда $y-q\sim h(y)-h(q)$ на $H-q$, поэтому в силу теоремы 4 для $h^*(y)=h(y)-h(q)$ мы имеем $\mu_q h^*=1$.

Теорема 8. *Пусть $G\subset\mathscr{S}_2$ — открытое или замкнутое множество, F — множество, открыто-замкнутое в $\mathscr{S}_2-G$, и $f\colon G\to\mathscr{P}$ — непрерывная функция. Кратность $\mu_F f$ инвариантна относительно положительных гомеоморфизмов g множества $\mathscr{S}_2$.*

Другими словами,

$$\mu_{g^{-1}(F)}fg=\mu_F f. \tag{8}$$

В частности, *кратность является инвариантом относительно гомографических отображений.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда f — рациональная функция:

$$f(y)=\lambda(y-q_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(y-q_n)^{k_n},\quad y\in G, \tag{4}$$

$$k_1+\ldots+k_n=0. \tag{5}$$

Пусть

$$g(p_0)=\infty,\quad g(p_1)=q_1,\quad g(p_2)=q_2,\ \ldots,\quad g(p_n)=q_n.$$

По теореме 5 (так как g — положительный гомеоморфизм) имеем

$$(6)\quad fg(x)=\lambda[g(x)-g(p_1)]^{k_1}\cdot\ldots\cdot[g(x)-g(p_n)]^{k_n}\sim$$
$$\sim(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}\cdot(x-p_0)^{-(k_1+\ldots+k_n)}=$$
$$=(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n},$$

согласно (5).

Пусть $q_{j_1},\ldots,q_{j_m}$ — система точек q_j, принадлежащих F. По определению кратности

$$(7)\qquad \mu_F f=k_{j_1}+\ldots+k_{j_m}.$$

Далее, так как условия $q_j\in F$ и $p_j\in g^{-1}(F)$ эквивалентны, то для $r(x)=(x-p_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-p_n)^{k_n}$

$$(8)\qquad \mu_{g^{-1}(F)}r=k_{j_1}+\ldots+k_{j_m}.$$

С другой стороны, в силу (6) по теореме 4 п. VIII и теореме 4 п. IX имеем

$$\mu_{g^{-1}(F)}fg=\mu_{g^{-1}(F)}r,$$

и равенство (3) следует из (7) и (8).

Итак, случай, когда f — рациональная функция, рассмотрен. Рассмотрим теперь общий случай. Если множество G замкнуто, то по теореме 1 п. III существует рациональная функция r, такая, что $f\sim r$, откуда $fg\sim rg$.

Следовательно (ср. с теоремой 4 п. VIII),

$$\mu_F f=\mu_F r \text{ и } \mu_{g^{-1}(F)}fg=\mu_{g^{-1}(F)}rg,$$

и потому этот случай сводится к предыдущему.

Наконец, если G открыто, то существует замкнутое множество F^*, разделяющее множества F и $\mathscr{S}_2-G-F$. Поэтому его дополнение состоит из двух непересекающихся открытых множеств, одно из которых, скажем G^*, содержит F, а другое содержит $\mathscr{S}_2-G-F$. Следовательно, множество $g^{-1}(G^*)$ содержит множество $g^{-1}(F)$ и является открыто-замкнутым в $\mathscr{S}_2-g^{-1}(F^*)$. Согласно IX (3),

$$\mu_F f=\mu_{G^*}(f\,|\,F^*) \text{ и } \mu_{g^{-1}(F)}fg=\mu_{g^{-1}(G^*)}[fg\,|\,g^{-1}(F^*)].$$

Как мы только что показали, правые части этих равенств совпадают; отсюда вытекает формула (3).

Теорема 9. *Индекс является инвариантом положительных гомеоморфизмов* g: $\mathscr{E}^2\to\mathscr{E}^2$, *т. е.* $\operatorname{ind}_{g\zeta}g(p)=\operatorname{ind}_\zeta p$ [1].

[1] См. Александров и Хопф [1, стр. 476].

Доказательство. Положим $f(x)=\zeta^0(x)-p$ и $h(x)=$ $=g\zeta^0(x)-g(p)$. По теореме 1 п. XII

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{ind}_\zeta p=\mu_Q f \quad \text{и} \quad \operatorname{ind}_{g\zeta} g(p)=\mu_Q h.$$

По предположению (ср. с теоремой 4) $g(y)-g(p)\sim y-p$ на $\mathscr{E}^2-p$. Следовательно, $g\zeta^0(x)-g(p)\sim\zeta^0(x)-p$ на $\mathscr{S}$ (так как кривая $\zeta^0(\mathscr{S})$ лежит в $\mathscr{E}^2-p$). Из этой гомотопии по теореме 4 п. VIII следует, что правые части равенств (9) совпадают; это завершает доказательство.

Инварианты положительных гомеоморфизмов (пространств $\mathscr{S}^2$ или $\mathscr{E}^2$) можно назвать *инвариантами ориентированной топологии*. Как мы уже видели, в число этих инвариантов входят кратность множества и индекс точки.

Таким образом, абсолютные величины этих инвариантов являются инвариантами произвольных гомеоморфизмов; следовательно, они являются топологическими понятиями (хотя при их определении используются нетопологические понятия).

Логарифмическое приращение тоже является таким инвариантом. В самом деле, из условия XI (3) следует, что

$$\Delta_{g\zeta} fg^{-1}=\operatorname{ind}_{fg^{-1}g\zeta}0=\operatorname{ind}_{f\zeta}0=\Lambda_\zeta f.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Айрес (Ayres W. L.)

1. Concerning the arc-curves and basic sets of a continuous curve, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**, № 3 (1928), 567—578.
2. Continuous curves homeomorphic with the boundary of a plane domain, *Fund. Math.*, **14** (1929), 92—95.
3. Concerning continuous curves in metric spaces, *Amer. J. Math.*, **51**, № 4 (1929), 577—597.
4. Some generalizations of the Scherrer fixed-point theorem, *Fund. Math.*, **16** (1930), 332—336.
5. On the regular points of continuum, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33**, № 1 (1931), 252—262.
6. A new proof of the cyclic connectivity theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**, № 8 (1942), 627—630.

Акасаки (Akasaki T.)

1. The Eilenberg-Borsuk duality theorem for metric spaces, *Duke Math. J.*, **32** (1965), 653—659.

Александер (Alexander J. W.)

1. A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23** (1922), 343.
2. On the subdivision of 3-space by a polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10**, № 1 (1924), 6—8.
3. An example of a simply connected surface bounding region which is not simply connected, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10**, № 1 (1924), 8—10.
4. Remarks on a point set constructed by Antoine, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10**, № 1 (1924), 10—11.
5. New topological invariants expressible as tensors, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10** (1924), 99—101.
6. On certain topological invariants of a manifold, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10**, № 3 (1924), 101—103.
7. Topological invariants of manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **10** № 12 (1924), 493—494.
8. Ordered sets, complexes, and the problem of compactification, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **25** (1939), 296—298.

Александров П. С.

1. Комбинаторная топология, М., 1947.
2. Sur la dimension des ensembles fermés, *C. R. Paris*, **183** (1926), 640—643.
3. Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven, *Math. Ann.*, **96** (1927), 512—554.
4. Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Math. Ann.*, **96** (1927), 555—571.
5. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, *Ann. Math.*, ser. 2, **30**, № 1 (1928), 101—187.
6. Über endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurven, *Fund. Math.*, **13** (1929), 34—41.
7. Analyse géométrique de la dimension des ensembles fermés, *C. R. Paris*, **190** (1930), 475.
8. Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, **106**, 2—3 (1932), 161—238.

9. К теории топологических пространств, *ДАН СССР*, **2**, № 2 (1936), 51—54.
10. О счетно-кратных открытых отображениях, *ДАН СССР*, **4**, № 7 (1936), 283—287.

Александров П. С. и Пономарев В. И.
1. О диадических бикомпактах, *Fund. Math.*, **50**, № 4 (1962), 419—429.

Александров П. С. и Урысон П. С.
1. Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. K. Akad. Amsterdam*, **14** (1929), 1—96.

Александров и Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)
1. Topologie, I, Berlin, 1935.

Альберт и Юнгс (Albert G. E., Youngs J. W. T.)
1. The structure of locally connected topological spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51**, № 3 (1942), 637—654.

Альтман (Altman M.)
1. An extension to locally convex spaces of Borsuk's theorem on antipodes, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **6** (1958), 271—275.

Андерсон (Anderson R. D.)
1. Open mappings of compact continua, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42, № 6 (1956), 347—349.
2. Тезисы кратких сообщений Международного конгресса математиков в Москве, 1966, секция 8.

Антоновский М. Я.
1. К аксиоматике топологических полуполей, *ДАН УзССР*, № 10 (1961).
2. Система обобщенных метрик на произвольном множестве, *УМН*, 1 (1968).
3. Структуры, связанные с обобщенными метриками, Труды топологического симпозиума в Херцег-Нови (1968).

Антоновский М. Я., Болтянский В. Г., Сарымсаков Г. А.
1. Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963.
2. Очерк теории топологических полуполей, *УМН*, 4 (1966).

Антоновский М. Я. и Миронов А. В.
1. К теории топологических l-групп, *ДАН УзССР*, № 6 (1967), 6—8.

Антоновский М. Я. и Кожевникова И. Г.
1. Обобщенные нормированные пространства, Изв. АН УзССР, № 6 (1969).

Антуан (Antoine L.)
1. Sur l'homéomorphie de figures et de leurs voisinages, *J. de Math.* (1921), 221.
2. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes, *Fund. Math.*, **5** (1924), 265—287.

Аренс (Arens R.)
1. A topology for spaces of transformations, *Ann. Math.*, ser. 2, 47, № 3 (1946), 480—495.

Аренс и Дугундьи (Arens R., Dugundji J.)
1. Topologies for function spaces, *Pacific J. Math.*, **1**, № 1 (1951), 5—32.

Ароншайн (Aronszajn N.)
1. Über die Bogenverknüpfung in topologischen Räumen, *Fund Math.*, **15** (1930), 228—241.
2. Sur les invariantes des transformations continues d'ensembles, *Fund. Math.*, **19** (1932), 92—142.

Ароншайн и Борсук (Aronszajn N., Borsuk K.)
1. Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus, *Fund. Math.*, **18** (1932), 193—197.

Артин и Фокс (Artin E., Fox R. H.)
1. Some wild cells and spheres in three-dimensional space, *Ann. Math.*, ser. 2, 49, № 4 (1948), 979—990.

Архангельский А. В.
1. Условие сохранения метризуемости при факторных отображениях, *ДАН СССР*, **164**, № 1 (1965), 9—12.
2. Поведение метризуемости при факторных отображениях, *ДАН СССР*, **164**, № 2 (1965), 247—250.
3. Бикомпактные множества и топология пространств, Труды Моск. матем. об-ва, **13** (1965), 3—55.

Баланчандран (Balanchandran V. K.)
1. A mapping theorem for metric spaces, *Duke Math. J.*, **22**, № 3 (1955), 461—464.

Баррет (Barrett L. K.)
1. The structure of decomposable snake-like continua, *Duke Math. J.*, **28**, № 4 (1961), 515—522.

Бегль (Begle E. G.)
1. Intersections of contractible polyhedra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**, № 6 (1943), 386—387.
2. Regular convergence, *Duke Math. J.*, **11**, № 3 (1944), 441—450.

Беер (Beer G.)
1. *Monatsh. Math.-Phys.*, **38**.

Беннет (Benneth R.)
1. Embedding products of chainable continua, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, **16**, № 5 (1965), 1026—1027.

Берджесс (Burgess C. E.)
1. Some theorems on n-homogeneous continua, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**, № 1 (1954), 136—143.
2. Homogeneous continua, Summer Institute on Set Theoretic Topology, Madison, 1955, pp. 73—76.
3. Certain types of homogeneous continua, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, № 3 (1955), 348—350.
4. Chainable continua and indecomposability, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 653—660.
5. Some condition under which a homogeneous continuum is a simple closed curve, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**, № 4 (1959), 613—615.

Берж (Berge C.)
1. Теория графов и ее приложения, М., 1962.
2. Espaces topologiques, Paris, 1959, 1966.

Бетел (Bethel E. L.)
1. A note on a reducible continuum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1331—1333.

Бинг (Bing R. H.)
1. Generalizations of two theorems of Janiszewski, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**, № 12 (1945), 954—960.
2. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 478—480.
3. Skew sets, *Amer. J. Math.*, **69**, № 3 (1947), 493—496.
4. A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math. J.*, **15**, № 3 (1948), 729—742.
5. Solution of a problem of R. L. Wilder, *Amer. J. Math.*, **70**, № 1 (1948), 95—98.
6. Some characterizations of arcs and simple closed curves, *Amer. J. Math.*, **70**, № 3 (1948), 497—506.
7. Snake-like continua, *Duke Math. J.*, **18**, № 3 (1951), 653—663.
8. Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, № 2 (1951), 267—273.
9. Concerning hereditarily indecomposable continua, *Pacific J. Math.*, **1**, № 1 (1951), 43—52.

10. Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**, № 3 (1959), 345—346.
11. Tame Cantor Sets in $\mathscr{E}^3$, *Pacific J. Math.*, **11**, № 2 (1961), 435—446.

Бинг и Йонес (Bing R. H., Jones F. B.)
1. Another homogeneous plane continuum, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90**, № 1 (1959), 171—192.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.)
1. Теория структур, М., 1952.

Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.)
1. Proof of a recurrence theorem for strongly transitive systems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **17**, № 12 (1931), 650—655.
2. Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **17**, № 12 (1931), 656—660.

Биркгоф и Келлог (Birkhoff G. D., Kellog O. D.)
1. Invariant point in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **23**, № 1 (1922), 96—115.

Бланкиншип (Blankinship W. A.)
1. Generalization of a construction of Antoine, *Ann. Math.*, **53** (1951), 276—297.

Болтянский В. Г. и Солтан Р. П.
1. Обобщение теоремы Гуревича о размерности прообразов, *Матем. сб.*, **69**, 2 (1966), 257—285.

Борель (Borel E.)
1. *Ann. Ecole Norm. Sup.* (3), **12** (1895) (Thèse).

Борсук (Borsuk K.)
1. Sur les rétractes, *Fund. Math.*, **17** (1931), 152—170.
2. Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents, *Fund. Math.*, **17** (1931), 171—209.
3. *Monatsh. Math. Phys.*, 38 (1931), 381.
4. Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume, *Math. Ann.*, **106** (1932), 239.
5. Einige Sätze über stetige Streckenbilder, *Fund. Math.*, **18** (1932), 198—213.
6. Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen, *Fund. Math.*, **19** (1932), 220—242.
7. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177—190.
8. Über die Abbildungen der metrischen kompakten Räume auf die Kreislinie, *Fund. Math.*, **20** (1933), 224—231.
9. Über eine Bedingung die dem lokalen Zusammenhange äquivalent ist, *Mathematica*, 7 (1933), 144.
10. Zur kombinatorischen Eigenschaften der Retrakte, *Fund. Math.*, **21** (1933), 91—98.
11. Sur la décomposition des courbes régulières en dendrites, *Fund. Math.*, **22** (1934), 287—291.
12. *Fund. Math.*, 24 (1935), 135.
13. Quelques rétractes singuliers, *Fund. Math.*, **24** (1935), 249—258.
14. Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus, *Fund. Math.*, **27** (1936), 239—243.
15. Sur les groupes des classes des transformations continues, *C. R. Paris*, **202** (1936), 1400.
16. Sur les transformations continues n'augementant pas la dimension, *Fund. Math.*, **28** (1937), 90—98.
17. Sur les prolongements des transformations continues, *Fund. Math.*, **28** (1937), 99—110.
18. Un théorème sur les prolongements des transformations, *Fund. Math.*, **29** (1937), 161—166.

19. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **16** (1937), 218.
20. Sur l'addition homologique des types de transformations continues en surfaces sphériques, *Ann. Math.*, **38** (1937), 733.
21. Sur un espace compact localement contractile qui n'est pas un rétracte absolu de voisinage, *Fund. Math.*, **35** (1948), 175—180.
22. On an irreducible 2-dimensional absolute retract, *Fund. Math.*, **37** (1950), 137—160.
23. Set-theoretical approach to the disconnection theory of the Euclidean spaces, *Fund. Math.*, **37** (1950), 217—241.
24. On the imbedding of n-dimensional sets in $(2-n)$-dimensional absolute retracts, *Acta Scient. Math. Szeged*, **12** (1950), 112—116.
25. On some metrization of the hyperspace of compact sets, *Fund. Math.*, **41** (1955), 168—202.
26. On the concept of dependence for continuous mappings, *Fund. Math.*, **43** (1956), 95.
27. Concerning the classification of topological spaces from the standpoint of the theory of retracts, *Fund. Math.*, **46** (1959), 321—330.
28. An AR-set with an infinite number of R-neighbours, *Bull. Acad. Pol. Sci., ser. math.* **9**, № 5 (1961), 345—349.
29. On a family of n-dimensional AR-sets, *Fund. Math.*, **51** (1962), 283—297.
30. Theory of retracts, Warszawa, 1966.

Борсук и Косинский (Borsuk K., Kosiński A.)
1. On connections between the homology properties of a set and of its frontier, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 331—333.

Борсук и Мазуркевич (Borsuk K., Mazurkiewicz S.)
1. Sur l'hyperespace d'un continu, *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, **24** (1931), 149.
2. Sur les rétractes absolus indécomposables, *C. R. Paris*, **199** (1934), 110.

Борсук и Улам (Borsuk K., Ulam S.)
1. Über gewisse Invarianten der ε-Abbildungen, *Math. Ann.*, **108** (1933), 311—318.

Боте (Bothe H. G.)
1. Eine Einbettung m-dimensionaler Mengen in einen $(m+1)$-dimensionalen absoluten Retrakt, *Fund. Math.*, **52**, № 2 (1963), 209—224.

Брандт (Brandt H.)
1. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.*, **96** (1927), 360—366.

Браун (Brown R.)
1. Ten topologies for $X \times Y$, *Quart. J. Math.*, ser. 2, **14**, № 56 (1963), 303—319.
2. Function spaces and product topologies, *Quart. J. Math.*, Ser. 2, **15**, № 59 (1964), 238—250.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)
1. *Math. Ann.*, **68** (1910), 426.
2. Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, *Math. Ann.*, **69** (1910), 169.
3. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **12** (1910), 785.
4. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, **14** (1911), 138.

Брушлинский Н. К.
1. Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3, *Math. Ann.*, **109** (1934), 525—537.

Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Общая топология, основные структуры, М., 1958.

Бургин (Bourgin D. G.)
1. On some separation and mapping theorems, *Comment. Mat. Helvet.*, **29**, № 3 (1955), 199—214.
2. Some mappings theorems, *Rendic. di Matem.*, **15** (1956), 177—189.

3. Deformation and mapping theorems, *Fund. Math.*, **46**, № 3 (1959), 259—303.
4. Modern algebraic topology, New York — London, 1963.

Бусэкер и Саати (Busacker R. G., Saaty T. L.)
1. Finite graphs and networks, New York, 1965.

Бэкон (Bacon Ph.)
1. *Canad. J. M.*, **18** (1966), 492.

Вагнер (Wagner K.)
1. Über eine Erweiterung eines Satzes von Kuratowski, *Deutsche Math.*, **2** (1937), 280—285.

Важевский (Ważewski T.)
1. Sur les courbures de Jordan ne renfermant aucune courbe simple fermée de Jordan, *Ann. Soc. Polon. Math.*, **2** (1924), 49—170.

Вайнштейн И. А.
1. О замкнутых отображениях метрических пространств, *ДАН СССР*, **57**, № 4 (1947), 319—321.
2. Об одной теореме П. С. Александрова, *ДАН СССР*, **57**, № 5 (1947), 431—435.
3. О повышающих размерность отображениях, *ДАН СССР*, **67**, № 1 (1949), 9—12.

Вайнштейн И. и Каждан И.
1. Конечнократные непрерывные отображения, повышающие размерность, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **8**, № 3 (1944), 129—138.

Ватсон (Watson P. D.)
1. On the limits of sequences of sets, *Quart. J.*, **4** (1953), 1—3.

Веденисов Н. Б.
1. Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension, *Compos. Math.*, **7**, № 2 (1939), 194—200.

Войдыславский (Wojdysławski M.)
1. Rétractes absolus et hyperespaces des continus, *Fund. Math.*, **32** (1939), 184—192.
2. Некоторые приложения одного критерия для того, чтобы континуум был плоским, *Матем. сб.*, **18**, № 1 (1946), 29—40.

Вонг (Wong R. Y. T.)
1. A wild Cantor set in the Hilbert cube, *Pacific J. Math.*, **24** (1968), 189.

Вьеторис (Vietoris L.)
1. Stetige Mengen, *Monat. Math. Phys.*, **31** (1921), 49—62.
2. *Monat. Math. Phys.*, **31** (1921), 173—204.
3. *Proc. Akad. Amsterdam* (1926), 446.
4. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Math. Ann.*, **97** (1927), 454—472.
5. Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, *Mon. Math. Phys.*, **37** (1930), 159—162.

Гааль (Gaal S. A.)
1. Point set topology, Academic Press, 1964.

Гавен (Gawehn J.)
1. *Math. Ann.*, **98** (1927).

Гамильтон (Hamilton O. H.)
1. A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 173—174.

Ганя (Ganea T.)
1. On ε-maps onto manifolds, *Fund. Math.*, **47**, № 1 (1959), 35—44.

Гейне (Heine)
1. Elemente der Funktionenlehre, *J. Math.*, **74** (1872), 172.

Геман (Gehman H. M.)
1. *Ann. Math.*, **27** (1926).

2. Concerning irreducible continua, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **14**, № 5 (1928), 431—435.

Генба (Gęba K.)

1. Sur les groupes de cohomotopie dans les espaces de Banach, *C. R. Paris*, **254** (1962), 3293.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)

1. The Borel theorem and its applications, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32** (1926), 423—474.

Голомб (Gołąb S.)

1. Un théorème de balayage, *Fund. Math.*, **12** (1928), 4.

Гранас (Granas A.)

1. On local disconnection of Euclidean spaces, *Fund. Math.*, **41** (1954), 42—48.
2. К теории когомотопических групп Борсука, *Fund. Math.*, **44**, № 2 (1957), 159—164.
3. Theorem on antipodes and theorem on fixed points for a certain class of multi-valued mappings in Banach spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **7**, № 5 (1959), 271—275.
4. Extension homotopy theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of nonlinear equations, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **7** (1959), 387—394.

Гранас и Яворовский (Granas A., Jaworowski J. W.)

1. Some theorems on multi-valued mappings of subsets of the Euclidean space, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **7**, № 5 (1959), 277—283.

Грауэрт (Grauert H.)

1. Généralisation d'un théorème de Runge et applications à la théorie des espaces fibrés analytiques, *C. R. Paris*, **242** (1956), 603—605.

де Гроот (de Groot J.)

1. Sätze über topologische Erweiterung von Abbildungen, *Indag. Math.*, **3** (1944), 419.
2. A note on 0-dimensional spaces, *Ingad. Math.*, **9** (1947).
3. Subcompactness and the Baire category theorem, *Ingad. Math.*, **25** (1963), 761—767.

Гуревич (Hurewicz W.)

1. Über Stetige Bilder von Punktmengen (Zweite Mittelung), *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **30**, № 1 (1927), 159—165.
2. Über das Verhältniss separabler Räume zu kompakten Räumen, *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **30**, № 3 (1927), 425—430.
3. Normalbereiche und Dimensionstheorie, *Math. Ann.*, **96** (1927), 736—764.
4. Zur Theorie der analytischen Mengen, *Fund. Math.*, **15** (1930), 4—17.
5. Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, *Sgb. Preuss. Akad.*, **34** (1933), 754—765.
6. Beiträge zur Topologie der Deformationen (I. Höherdimensionale Homotopiegruppen), *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **38**, № 1 (1935), 112—119.
7. Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre, *Fund. Math.*, **24** (1935), 144—150.
8. Beiträge zur Topologie der Deformationen (II. Homotopie- und Homologiegruppen), *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **38**, № 5 (1935), 521—528.
9. Beiträge zur Topologie der Deformationen (III. Klassen und Homologietypen von Abbidungen), *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **39**, № 1 (1936), 117—126.
10. Beiträge zur Topologie der Deformationen (IV. Asphärische Räume), *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **39**, № 2 (1936), 215—224.

Гуревич и Уолмен (Hurewicz W., Wallman H.)
1. Dimension Theory, Princeton University Press, 1941. [Перевод: Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, М., 1948.]
Дайер (Dyer E.)
1. Irreducibility of the sum of the elements of a continuous collection of continua, *Duke Math. J.*, **20**, № 4 (1953), 589—592.
Дайсон (Dyson F. J.)
1. Continuous functions defined on spheres, *Ann. Math.*, *ser.* 2, **54**, № 3 (1951), 534—536.
Данжуа (Denjoy A.)
1. *C. R. Paris*, **151** (1910), 138.
Данциг (von Dantzig D.)
1. Über topologisch homogene Kontinua, *Fund. Math.*, **15** (1930), 104—125.
Даукер (Dowker C. H.)
1. Mapping theorems for non-compact spaces, *Amer. J. Math.*, **69**, № 2 (1947), 200—242.
2. On a theorem of Hanner, *Arkiv Math.*, **2**, № 4 (1952), 307—317.
Дектярев И. М.
1. Теорема о замкнутом графике для ультраполных пространств, *ДАН СССР*, **157**, № 4 (1964), 771—773.
2. Обобщенная теорема Борсука — Ямабе, *ДАН УзССР*, № 6 (1964), 18—20.
Джексон (Jackson J. R.)
1. Comparison of topologies on function spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, № 1 (1952), 156—158.
2. Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, № 2 (1952), 327—333.
Дирак и Шустер (Dirac G. A., Schuster S.)
1. A theorem of Kuratowski, *Indag. Math.*, **16** (1954), 343—346.
2. Corrigendum, *Indag. Math.*, **23** (1961), 360.
Дугундьи (Dugundji J.)
1. Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces, *Compos. Math.*, **13**, № 3 (1958), 229—246.
2. Topology, Allyn and Bacon, 1966.
Дуда (Duda R.)
1. Sur le prolongement des homéomorphies, *Fund. Math.*, **46**, № 2 (1959), 175—186.
2. Sur les prolongements ponctiformes des homéomorphies, *Indag. Math.*, **22** (1960), 132—136.
3. On biconnected sets with dispersion points, Rozpr. Matem, **37**, Warszawa, 1964.
Дэй и Куратовский (Day J. M., Kuratowski K.)
1. On the non-existence of a continuous selector for arcs lying in the plane, *Indag. Math.*, **28** (1966), 131—132.
Ефимов Б.
1. О весовом строении диадических бикомпактов, *Вестник МГУ*, математика, механика, **1**, № 2 (1964), 3—11.
2. Диадические бикомпакты, Труды Моск. матем. о-ва, **14** (1965), 211—247.
3. О диадических бикомпактах, *ДАН СССР*, **149**, № 5 (1963), 1011—1014.
4. О диадических пространствах, *ДАН СССР*, **151**, № 5 (1963), 1021—1024.
5. Метризуемость и Σ-произведение бикомпактов, *ДАН СССР*, **152**, № 4 (1963), 794—797.
Ефимов и Энгелькинг (Jefimov B., Engelking R.)
1. Remarks on dyadic spaces, II, *Colloq. Math.*, **13** (1965), 181—197.

Есенин-Вольпин А. С.
1. О зависимости между локальным и интегральным весом в диадических бикомпактах, *ДАН СССР*, **68**, № 3 (1949), 441—444.
Жордан (Jordan C.)
1. Cours d'analyse, I, Paris, 1893.
Завадонский и Словиковский (Zawadowski W., Słowikowski W.)
1. A generalization of maximal ideal method of Stone and Gelfand, *Fund. Math.*, **42** (1955), 215—231.
Заранкевич (Zarankiewicz C.)
1. Sur les points de division dans les espaces connexes, *Fund. Math.*, **9** (1927), 124—171.
2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33**, 447.
3. Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface spherique, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **2** (1954), 117—120.
Заранкевич и Куратовский (Zarankiewicz C., Kuratowski K.)
1. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33** (1927), 571.
Зигмунд и Сакс (Zygmund A., Saks S.)
1. Analytic functions, Warszawa, 1965.
Зоретти (Zoretti L.)
1. Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers, *J. Math. Pures Appl.*, Ser. 6, **1** (1905), 1—51.
2. La notion de ligne, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, **26** (1909).
Зыков А. А.
1. Теория графов, Труды симпозиума по теории графов в Смоленице, 1963, стр. 171—234.
Ивановский Л.
1. Об одной гипотезе П. С. Александрова, *ДАН СССР*, **123**, № 5 (1958), 785—786.
Ионеяма (Yoneyama K.)
1. *Tohoku Math. J.*, **12**, № 1 (1917), 43—158.
Исбелл (Isbell I. R.)
1. Embedding of inverse limits, *Ann. Math.*, ser. 2, **70**, № 1 (1959), 73—84.
2. Uniform spaces, Previdence, 1964.
Йонес (Jones F. B.)
1. Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x)+f(y)=f(x+y)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**, № 2 (1942), 115—120.
2. A note on homogeneous plane continua, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, № 2 (1949), 113—114.
3. On a certain type of homogeneous plane continuum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, № 5 (1955), 735—740.
Йонес и Томас (Jones F. B., Thomas E. S., Jr.)
1. Connected G_δ graphs, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 341—345.
Какутани (Kakutani S.)
1. A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in R^3, *Ann. Math.*, ser. 2, **43**, № 4 (1942), 739—741.
Кампен (v. Kampen E. R.)
1. On some characterizations of 2-manifolds, *Duke Math. J.*, **1**, № 1 (1935), 74—93.
Кантор (Cantor G.)
1. *Math. Ann.*, **17** (1880).
2. *Math. Ann.*, **21** (1883), 576.

Картрайт, Норман и Харари (Cartwright D., Norman R., Harary F.)
1. Structural models, J. Wiley, 1965.
Катетов (Katětov M.)
1. О размерности несепарабельных пространств, *Czechoslovak Math. J.*, 6, № 4 (1956), 485—516.
Келдыш Л. В.
1. Непрерывное отображение сегмента на n-мерный куб, *Матем. сб.*, **28**, вып. 2 (1951), 407—430.
2. Нульмерные отображения, повышающие размерность, *Матем. сб.*, **28** (1951), 537—566.
3. Пример одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на квадрат, *ДАН СССР*, н. с., **97**, № 2 (1954), 201—204.
4. Нульмерные открытые отображения, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **23**, № 2 (1959), 165—184.
Келли (Kelley J. L.)
1. General Topology, 1955. [Перевод: Общая топология, М., 1968.]
2. The hyperspaces of a continuum, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52**, № 1 (1942), 22—36.
Кёпке (Köpcke)
1. *Math. Ann.*, **29**.
2. *Math. Ann.*, **34**.
3. *Math. Ann.*, **35**.
Керекьярто (Kerékjártó B. v.)
1. Über stetige Kurven, *Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg*, **4** (1925), 164—171.
2. Topologie I.
Кертис (Curtis M. L.)
1. Deformation-free continua, *Ann. Math.*, ser. 2, **57**, № 2 (1953), 231—247.
Кинкейд (Kincaid W. M.)
1. On non-cut sets of locally connected continua, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49**, № 6 (1943), 399—406.
Киркор (Kirkor A.)
1. Wild 0-dimensional sets and the fundamental group, *Fund. Math.*, **45**, № 3 (1958), 228—236.
Клайн (Kline J. R.)
1. Concerning the complement of a countable infinity of point sets at a certain type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **23** (1917), 290—292.
2. Closed connected sets which remain connected upon the removal of certain connected subsets, *Fund. Math.*, **5** (1924), 3—10.
3. Concerning the sum of two continua each irreducible between the same pair of points, *Fund. Math.*, **7** (1925), 314—322.
Клайн и Мур (Kline J. R., Moore R. L.)
1. *Ann. Math.*, **20** (1918), 218.
Клейтор (Claytor S.)
1. Topological immersion of Peanian continua in a spherical surface, *Ann. Math.*, ser. 2, **35**, № 4 (1934), 809—835.
Кли (Klee V.)
1. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 673.
Кли и Рудин (Klee V. L., Rudin M. E.)
1. A note on certain function spaces, *Arch. Math.*, **7**, № 6 (1951), 469—470.
Кнастер (Knaster B.)
1. *Fund. Math.*, **3** (1922), 209.
2. Un continu dont tout sous-continu est indécomposable, *Fund. Math.*, **3** (1922), 247—286.
3. *Fund. Math.*, **7** (1925).

4. Sur un problème de M. R. Wilder, *Fund. Math.*, **7** (1925), 191—197.
5. Quelques coupures singulières du plan, *Fund. Math.*, **7** (1925), 264—289.
6. Sur les ensembles connexes irreductibles entre deux points, *Fund. Math.*, **10** (1927), 276—297.
7. Un continu irréductible à décomposition continue en tranches, *Fund. Math.*, **25** (1935), 568—577.
8. Sur les coupures biconnexes des espaces euclidiens de dimension $n>1$ arbitraire, *Матем. сб.* **10** (1946), 9—18.
9. *Colloq. Math.*, **1** (1947), 30.

Кнастер и Куратовский (Knaster B., Kuratowski K.)
1. *Fund. Math.*, **1** (1920).
2. Sur les ensembles connexes, *Fund. Math.*, **2** (1921), 206—255.
3. Sur les continus non-bornes, *Fund. Math.*, **5** (1924), 23—58.
4. Sur quelques propriétés topologiques des fonctions dérivées, *Rend. Palermo*, **49** (1925), 382—386.
5. Remark on a theorem of R. Moore, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **13**, № 9 (1927), 647—649.
6. A connected and connected in kleinen point set which contains no perfect subset, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33**, № 1 (1927), 106—110.

Кнастер и Урбаник (Knaster B., Urbanik K.)
1. Sur les espaces complets séparables de dimension 0, *Fund. Math.*, **40** (1953), 194—202.

Кодаира (Kodaira K.)
1. Die Kuratowskische Abbildung und der Hopfsche Erweiterungssatz, *Compos. Math.*, **7** (1940), 177—184.

Кодама (Kodama Y.)
1. Note on an absolute neighborhood extensor for metric spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **8**, № 3 (1956), 206—215.
2. On LC^n metric spaces, *Proc. Japan Akad.*, **33** (1957), 79—83.

Корсон и Майкл (Corson H. H., Michael E.)
1. Metrizability of countable unions, *Illinois J. Math.*, **8**, № 2 (1964), 351—360.

Косинский (Kosiński A.)
1. On mappings which satisfy certain conditions on the boundary, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 335—340.

Кох (Koch R. J.)
1. Arcs in partially ordered spaces, *Pacific J. Math.*, **9**, № 3 (1959), 723—728.

Коэн (Cohen H. J.)
1. Some results concerning homogeneous plane continua, *Duke Math. J.*, **18**, № 2 (1951), 467—474.

Красносельский М. А.
1. Об одном принципе неподвижной точки для вполне непрерывных операторов в функциональных пространствах, *ДАН СССР*, н.с., **73**, № 1 (1950), 13—15.
2. О вычислении вращения векторного поля на n-мерной сфере, *ДАН СССР*, **101**, № 3 (1955), 401—404.

Кронин и Мак-Оли (Cronin J., Mc Auley L. F.)
1. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **56** (1966), 405.

Кузьминов В.
1. О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп, *ДАН СССР*, **125**, № 4 (1959), 727—729.

Кук (Cook H.)
1. On subsets of indecomposable continua, *Colloq. Math.*, **13**, № 1 (1964), 37—43.

Куратовский (Kuratowski K.)

1. Topologie, II, Warszawa, 1961.
2. Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points, *Fund. Math.*, **2** (1921), 158—160.
3. Quelques propriétés topologiques de la demi-droite, *Fund. Math.*, **3** (1922), 59—64.
4. Théorie des continus irréductibles entre deux points. *Fund. Math.*, **3** (1922), 200—231.
5. Contribution à l'étude de continus de Jordan, *Fund. Math.*, **5** (1924), 112—122.
6. Sur les coupures irréductible du plan, *Fund. Math.*, **6** (1924), 130—145.
7. *Fund. Math.*, **7** (1925), 28.
8. Sur les continus de Jordan et le théorème de M. Brouwer, *Fund. Math.*, **8** (1926), 137—150.
9. Sur la puissance de l'ensemble des «nombres de dimension» au sens de M. Fréchet, *Fund. Math.*, **8** (1926), 201—208.
10. Théorie des continus irreductibles entre deux points, II, *Fund. Math.*, **10** (1927), 225—275.
11. *Ann. Soc. Pol. Math.*, **5** (1927), 109.
12. Über geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua, *Math. Ann.*, **98** (1927), 399—405.
13. Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts, *Fund. Math.*, **11** (1928), 169 -185.
14. Sur la structure des frontières communes à deux régions, *Fund. Math.*, **12** (1928), 20—42.
15. Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan, *Fund. Math*, **12** (1928), 214—239.
16. Un système d'axiomes pour la Topologie de la surface de la sphère, Atti del Congr. Int. dei Matemat. Bologna, 1928, VI, p. 239.
17. Une caractérisation topologique de la surface de la sphère, *Fund. Math.*, **13** (1929), 307—318.
18. Sur une condition qui caractérise les continus indécomposables, *Fund. Math.*, **14** (1929), 116—117.
19. Quelques applications d'éléments cycliques de M. Whyburn, *Fund. Math.*, **14** (1929), 138—144.
20. Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'Analysis situs, *Fund. Math.*, **14** (1929), 304—310.
21. Théorème sur trois continus, *Monatsh. Math. Phys.*, **36** (1929), 77—80.
22. Sur une propriété des continus Péanniens plans, *Fund. Math.*, **15** (1930), 180—184.
23. Sur le problème des courbes gauches en Topologie, *Fund. Math.*, **15** (1930), 271—283.
24. Sur les espaces complets, *Fund. Math.*, **15** (1930), 300—309.
25. Evaluation de la classe borélienne ou projective d'un ensemble de points a l'aide des symboles logiques, *Fund. Math.*, **17** (1931), 249—272.
26. Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, *Fund. Math.*, **18** (1931), 148—159.
27. Sur l'application des espaces fonctionnels à la Théorie de la dimension, *Fund. Math.*, **18** (1931), 285—292.
28. Sur un problème topologique concernant les systemes «strictement transitifs», *Fund. Math.*, **19** (1932), 252—256.
29. Une application des images de fonctions à la construction de certains ensembles singuliers, *Mathematica*, **6** (1932), 123.
30. Sur les transformations des sphères en des surfaces sphériques, *Fund. Math.*, **20** (1933), 206—213.

31. Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension *n*, *Fund. Math.*, **24** (1935), 269—287.
32. Sur les théorèmes du «plongement» dans la théorie de la dimension, *Fund. Math.*, **28** (1937), 336—342.
33. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **16** (1937), 220.
34. Quelques théorèmes sur le plongement topologique des espaces, *Fund. Math.*, **30** (1938), 8—13.
35. Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes, *Fund. Math.*, **30** (1938), 17—33.
36. Remarques sur les transformations continues des espaces métriques. *Fund. Math.*, **30** (1938), 48—49.
37. Sur la compactification des espaces à connexité *n*-dimensionnelle, *Fund. Math.*, **30** (1938), 242—246.
38. Sur les espaces des transformations continues en certains groupes abeliens, *Fund. Math.*, **31** (1938), 231—246.
39. *Ann. Soc. Polon. Math.*, **17** (1938), 118.
40. Théorèmes sur l'homotopie des fonctions continues de variable complexe et leurs rapports a la theorie des fonctions analytiques, *Fund. Math.*, **33** (1945), 316—367.
41. *Fund. Math.*, **34** (1947), 261—271.
42. Quelques généralisations des théorèmes sur les coupures du plan, *Fund. Math.*, **36** (1949), 277—282.
43. Remarque, *Fund. Math.*, **37** (1950), 251—252.
44. Fonctions rationnelles qui sont homotopes à des fonctions biunivoques sur certains sous-ensembles du plan, *Fund. Math.*, **41** (1954), 107—121.
45. Sur une méthode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles compacts, *Fund. Math.*, **43** (1956), 114—138.
46. Quelques propriétés de l'espace des ensemles LC^n, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **5**, № 10 (1957), 967—974.
47. Sur quelques invariants topologiques dans l'espace euclidien, *J. Math. Pures Appl.*, Ser. 9, **36** (1957), 191—200.
48. Sur l'extension de la notion de fonction rationnelle à l'espace euclidien *n*-dimensionnel, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Ser. Math., **6**, № 5 (1958), 281—287.
49. Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sousensemble arbitraire, *Math. Z.*, **72**, № 1 (1959), 88—94.
50. Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie, Genève, 1966.

Куратовский и Мазуркевич (Kuratowski K., Mazurkiewicz S.)
1. Sur les points d'ordre c dans les continus, *Fund. Math.*, **11** (1928), 29—34.

Куратовский и Марчевский (Kuratowski K., Marczewski-Szpilrajn E.)
1. Sur les cribles fermés et leurs applications, *Fund. Math.*, **18** (1931), 160—170.

Куратовский и Отто (Kuratowski K., Otto E.)
1. Sur les espaces à connexité *n*-dimensionnelle, *Fund. Math.*, **32** (1939), 259—264.

Куратовский и Рыль-Нардзевский (Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C.)
1. A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. Math., **13**, № 6 (1965), 397—402.

Куратовский и Серпинский (Kuratowski K., Sierpiński W.)
1. Le théorème de Borel-Lebesgue dans la théorie des ensembles abstraits, *Fund. Math.*, 2 (1921), 172—178.

2. Les fonctions de classe 1 et les ensembles connexes ponctiformes, *Fund Math.*, **3** (1922), 303—313.

Куратовский и Страшевич (Kuratowski K., Straszewicz S.)
1. Généralisation d'un théorème de Janiszewski, *Fund. Math.*, **12** (1928), 152—157.

Куратовский и Уайберн (Kuratowski K., Whyburn G. T.)
1. *Fund. Math.*, **15** (1930), 322—326.
2. Sur les éléments cycliques et leurs applications, *Fund. Math.*, **16** (1930), 305—331.

Куратовский и Улам (Kuratowski K., Ulam S.)
1. Sur un coefficient lié aux transformations continues d'ensembles, *Fund. Math.*, **20** (1933), 244—253.

Куратовский и Эйленберг (Kuratowski K., Eilenberg S.)
1. Théorèmes d'addition concernant le group des transformations en circonférence, *Fund. Math.*, **32** (1939), 193—200.
2. A remark on duality, *Fund. Math.*, **50**, № 5 (1962), 515—517.

Куратовский и Энгелькинг (Kuratowski K., Engelking R.)
1. Quelques théorèmes de l'Algèbre de Boole et leurs applications topologiques, *Fund. Math.*, **50**, № 5 (1962), 519—535.
2. On extending homeomorphisms in continua contractible relative to the circle, *Rendic. di Mat.*, **21**, № 3—4 (1962), 305—311.

Куратовский и Янишевский (Kuratowski K., Janiszewski S.)
1. Sur les continus indecomposables, *Fund. Math.*, **1** (1920), (nouvel edition 1937), 210—222.

Лебег (Lebesgue H.)
1. Leçons sur l'intégration, Paris, 1905.
2. Sur les correspondances entre les points de deux espaces, *Fund. Math.*, **2** (1921), 256—285.
3. Sur le théorème de Schönflies, *Fund. Math.*, **6** (1924), 96—99.

Лейа (Leja F.)
1. *Fund. Math.*, **10** (1927), 421.

Лелек (Lelek A.)
1. Remarks on Brouwer reduction theorem, *Prace Mat.*, **7** (1962), 107—108.
2. On weakly chainable continua, *Fund. Math.*, **51**, № 3 (1962), 271—283.
3. On the Knaster totally disconnected sets, *Bull. Polish Acad. Sci.*, Ser. Math., **15**, № 2 (1967), 81—83.

Леннес (Lennes N. J.)
1. *Amer. J. Math.*, **33** (1911), 303.

Лефшец (Lefschetz S.)
1. On locally connected and related sets, *Ann. Math.*, Ser. 2, 3, **35**, № 1 (1934), 118—129.
2. Topics in Topology, Princeton, 1942.
3. Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1942. [Перевод: Алгебраическая топология, М., 1947.]
4. Introduction to Topology, Princeton, 1949.
5. Planar graphs and related topics, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **54**, № 6 (1965), 1763—1765.

Лехнер (Lehner G. R.)
1. Extending homeomorphisms on the pseudo-arc, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98**, № 3 (1961), 369—394.

Ливсей (Livesay G. R.)
1. On a theorem of F. J. Dyson, *Ann. Math.*, Ser. 2, **59**, № 2 (1954), 227—229.

2. On maps of the three-sphere into the plane, *Michigan Math. J.*, **4**, № 2 (1957), 157—159.

Линденштраус (Lindenstrauss J.)

1. A selection theorem, *Israel J. Math.*, Sec. F, **2**, № 3 (1964), 201—204.

Локуциевский О. В.

1. К топологии континуумов, *ДАН СССР*, **164**, № 6 (1965), 1235—1238.

Любанский (Lubański M.)

1. An example of an absolute neighbourhood retract, which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space, *Fund. Math.*, 40 (1953), 29—38.

Любен (Lubben R. G.)

1. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30 (1928), 668.

Люстерник Л и Шнирельман Л.

1. Топологические методы в вариационных задачах и их приложение к дифференциальной геометрии поверхности, *Успехи матем наук, н. с.*, **2**, вып. 1 (1947), 166—217.

Мазур (Mazur S.)

1. On continuous images of cartesian products, *Fund. Math.*, **39** (1952), 229—238.

Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)

1. *C. R. Paris*, **151** (1910), 296.
2. *Bull. Acad. Polon.*, (1912), 44.
3. *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, **6** (1913).
4. *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, **9** (1916).
5. Un théorème sur les continus indécomposables, *Fund. Math.*, **1** (1920), 35—39.
6. Sur un ensemble G_δ ponctiforme qui n'est homéomorphe à aucun ensemble linéaire, *Fund. Math.*, **1** (1920), 61—81.
7. Sur les lignes de Jordan, *Fund. Math.*, **1** (1920), 166—209 (nouvel ed., 1937, p. 201).
8. Un théorème sur les lignes de Jordan, *Fund. Math.*, **2** (1921), 119—130.
9. *Fund. Math.*, **2** (1921), 286.
10. Sur les continus homogènes, *Fund. Math.*, **5** (1924), 137—146.
11. Sur les continus plans non bornés, *Fund. Math.*, **5** (1924), 188—205.
12. *Fund. Math.*, **8** (1926), 324.
13. Sur les continus indécomposables, *Fund. Math.*, **10** (1927), 305—310.
14. Sur les problèmes $\varkappa$ et λ de Urysohn, *Fund. Math.*, **10** (1927), 311—319.
15. Sur les ensembles de dimension faible, *Fund. Math.*, **13** (1929), 210—217.
16. Sur les points accessibles des continus indécomposables, *Fund. Math.*, **14** (1929), 107—115.
17. Un théorème sur l'accessibilité des continus indécomposables, *Fund. Math.*, **14** (1929), 271—276.
18. Sur les points d'ordre c dans les continus, *Fund. Math.*, **15** (1930), 222—227.
19. Sur les continus absolument indecomposables, *Fund. Math.*, **16** (1930), 151—159.
20. C. R. du I Congress des math. des Pays Slaves, Warsaw, 1930, p. 66.
21. Sur le type de dimension de l'hypespace d'un continu, *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, **24** (1931), 191.
22. Sur une classe de dendrites, *Fund. Math.*, **18** (1932), 88—98.
23. Sur l'hyperespace d'un continu, *Fund. Math.*, **18** (1932), 171—177.
24. Über nichtplättbare Kurven, *Fund. Math.*, **20** (1933), 281—284.
25. Sur l'espace des continus péaniens, *Fund. Math.*, **24** (1935), 118—134.

26. Über die stetigen Abbildungen der Strecke, *Fund. Math.*, **25** (1935), 253—260.
27. Sur l'existence des continus indécomposables, *Fund. Math.*, **25** (1935), 327—328.
28. *Fund. Math.*, **26** (1936), 150—155.
29. Sur les transformations continues des courbes, *Fund. Math.*, **31** (1938), 247—258.

Мазуркевич и Серпинский (Mazurkiewicz S., Sierpiński W.)
1. Contribution a la topologie des ensembles denombrables, *Fund. Math.*, **1** (1920), 17—27.

Мазуркевич и Янишевский (Mazurkiewicz S., Janiszewski S.)
1. *C. R. Paris*, **151** (1910).

Майер (Mayer W.)
1. Über abstrakte Topologie, *Mon Math. Phys.*, **36** (1929), 1—42.

Майкл Дж. (Michael J. H.)
1. Continuous mappings of subsets of the Euclidean n-sphere, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **5** (1957), 133—137.

Майкл Э. (Michael E.)
1. Topologies on spaces of subsets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, № 1 (1951), 152—182.
2. Some extension theorems for continuous functions, *Pacific J. Math.*, **3**, № 4 (1953), 789—806.
3. On a theorem of Kuratowski, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 444.
4. Continuous selections I, *Ann. Math.*, Ser. 2, **63**, № 2 (1956), 361—382.
5. Continuous selections II, *Ann. Math.*, Ser. 2, **64**, № 3 (1956), 562—580.
6. Continuous selections III, *Ann. Math.*, Ser. 2, **65**, № 2 (1957), 375—390.
7. On a theorem of Rudin and Klee, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**, № 6 (1961), 921.
8. Continuous selections in Banach space, *Studia Math.*, Ser. Specjalna, № 1 (1963), 75—76.
9. A note on closed maps and compact sets, *Israel J. Math.*, Sec. F, **2**, № 3 (1964), 173—176.
10. Cuts, *Acta Mathematica*, **111**, № 1 (1964), 1—36.

Мак-Аллистер (Mc Allister B. L.)
1. Cyclic elements in topology, History, *American Monthly*, **73** (1966), 337—350.

Мак-Лейн (Mac Lane S.)
1. A combinatorial condition for planar graphs, *Fund. Math.*, 28 (1937), 22—32.
2. A structural characterization of planar combinatorial graphs, *Duke Math. J.*, **3**, № 3 (1937), 460—472.

Мак-Миллан (McMillan D. R.)
1. Taming Cantor sets in $\mathcal{E}^n$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**, № 5 (1964), 706—708.

Мак-Оли (Mc Auley L. F.)
1. Conditions under which light open mappings are homeomorphisms, *Duke Math. J.*, **33**, № 3 (1966), 445—452.

Мардешич и Папич (Mardešić S., Papić P.)
1. Continuous images of ordered compacta, the Suslin property and dyadic compacta, *Glasnik*, Ser. 2, **17**, № 1—2 (1962), 3—25.

Мартин (Martin J.)
1. A countable Hausdorff space with a dispersion point, *Duke, Math. J.*, **33**, № 1 (1966), 165—167.
Марчевский (Marczewski-(Szpilrajn) E.)
1. Заметка о декартовых произведениях топологических пространств, *ДАН СССР*, н. с., **31**, № 6 (1941), 525—527.
2. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques, *Fund. Math.*, **34** (1947), 127—143.
Мёдушевский (Mioduszewski J.)
1. A functional conception of snake-like continua, *Fund. Math.*, **51**, № 2 (1962), 178—189.
Мейстерс и Олех (Meisters G. H., Olech C.)
1. *Duke Math. J.*, **30** (1963), 63—80.
Менгер (Menger K.)
1. Dimensionstheorie, Leipzig-Berlin, 1928.
2. Kurventheorie, Teubner, Berlin-Leipzig, 1932.
3. Grundzüge einer Theorie der Kurven, *Math. Ann.*, **95** (1926).
4. Über umfassendste n-dimensionale Mengen, *Proc. Akad. Amsterdam*, **29** (1926), 1125.
5. Das Hauptproblem über die dimensionelle Struktur der Räume, *Proc. Akad. Amsterdam*, Ser. A, **30** (1927), № 1, 138—144.
6. Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, **10** (1927), 96—115.
7. Über reguläre Baumkurven, *Math. Ann.*, **96** (1927), 576—582.
8. Über die Dimension von Punktmengen III, Zur Begründung reine axiomatischen Theorie der Dimension, *Monatsh. Math. Phys.*, **36**, № 2 (1929), 193—218.
9. Zur Dimensions- und Kurventheorie, *Monatsh. Math. Phys.*, **36** (1929), 411—432.
Миллер (Miller E. W.)
1. Concerning biconnected sets, *Fund. Math.*, **29** (1927), 123—133
Милнор (Milnor J.)
1. Most knots are wild, *Fund. Math.*, **54**, № 3 (1964), 335—338.
Мищенко А.
1. О пространствах с точечно-счетной базой, *ДАН СССР*, **144**, № 5 (1962), 985—988.
Моиз (Moise E. E.)
1. An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63**, № 3 (1948), 581—594.
2. A theorem on monotone interior transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55**, № 8 (1949), 810—811.
3. A note on the pseudo-arc, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64**, № 1 (1949), 57—58.
4. Remarks on the Claytor imbedding theorem, *Duke Math. J.*, **19**, № 1 (1952), 199—202.
Мольский (Molski R.)
1. On an irreducible absolute retract, *Fund. Math.*, **57**, № 2 (1965), 121—133.
2. On a family of AR-sets, *Fund. Math.*, **57**, № 2 (1965), 135—145.
Морита (Morita K.)
1. A generalization of a theorem of Kuratowski concerning functional spaces, *Science Reports, Tokyo*, **4** (1949), 151.
2. Cohomotopy groups for fully normal spaces, *Sci. Reports* Tokyo Bunrika Daigaku S. A., **4** (1953), 251—261.
Мрувка (Mrówka S.)
1. On function spaces, *Fund. Math.*, **45**, № 3 (1958), 273—282.

Мур (Moore R. L.)
1. On the foundations of plane analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **17**, № 2 (1916), 131—164.
2. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **4** (1918).
3. Concerning simple continuous curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **21**, № 3 (1920), 333—347.
4. Concerning the cut-points of continuous curves and of other closed and connected point-sets, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **9**, № 4 (1923), 101—106.
5. An extension of the theorem that no countable point set is perfect, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **10**, № 5 (1924), 168—170.
6 Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane, *Fund. Math.*, **6** (1924), 189—202.
7. Concerning the prime parts of a continuum, *Math. Z.*, **22** (1925), 307—315.
8. Concerning the separation of point sets by curves, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **11** (1925), 469—470.
9. Concerning upper semi-continuous collections of continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **27** (1925), 416.
10. A connected and regular point set which contains no arc, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32**, № 4 (1926), 331—332.
11. Concerning upper semi-coutinuous collections, *Monatsh. Math. Phys.*, **36** (1929), 81—88.
Нагами (Nagami K.)
1. Finite-to-one closed mappings and dimension, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 503—506; **35** (1958), 437—439.
2. Finite-to-one closed mappings and dimension IV, *Proc. Japan Acad.*, **37**, № 4 (1961), 193—195.
Нагата (Nagata J.)
1. Modern dimension theory, North-Holland, 1965.
Налли (Pia Nalli)
1. *Rend. di Palermo*, **32** (1911), 392.
Нёбелинг (Nöbeling G.)
1. Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}, *Math. Ann.*, **104** (1930), 71—80.
2. Über regular-eindimensionale Räume, *Math. Ann.*, **104**, № 1 (1931), 81—91.
Немыцкий В. В. и Тихонов А. Н.
1. Beweis des Satzes, dass ein metrischer Raum dann und nur dann kompakt ist wenn er in jeder Metrik vollständig ist, *Fund. Math.*, **12** (1928), 118—120.
Никодим (Nikodym O.)
1. *C. R. Soc. Sci. de Varsovie*, **19** (1926), 285.
Николаишвили В.
1. О теореме двойственности Куратовского, *Изв. АН Груз. ССР*, **35**, № 3 (1964), 513—518.
Новак (Novák J.)
1. On the cartesian product of two compact spaces, *Fund. Math.*, **40** (1953), 106—112.
Ньюман (Newman M. H. A.)
1. Plane Topology.
Оре (Ore O.)
1. Theory of graphs, Coll. Publ., 1962.
Отто (Otto E.)
1. Über Punkte der Ordnung c, *Monatsh. Math. Phys.*, **40**, № 1 (1933), 88—92.

Пархоменко А. С.
1. Об уплотнениях в компактные пространства, *Изв. АН СССР*, сер. мат., **5**, № 3 (1941), 225—232.
Пасынков Б. А.
1. О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности бикомпактных групп, *ДАН СССР*, **121**, № 1 (1958), 45—48.
2. Нульмерные открытые отображения, повышающие размерность, *Успехи матем. наук*, **18**, вып. 5 (1963), 183—190.
3. О змеевидных бикомпактах, *Czechoslovak Math. J.*, **13**, № 3 (1963), 473—476.
Пеано (Peano G.)
1. *Math. Ann.*, **36** (1890), 157.
Пелчинский (Pełczyński A.)
1. A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. Math., **13**, № 2 (1965), 85—89.
Пелчинский и Энгелькинг (Pełczyński A., Engelking R.)
1. Remarks on dyadic spaces, *Colloq. Math.*, **11**, № 1 (1963), 55—63.
Первин (Pervin W.)
1. Foundations of general topology, Academic Press, 1964.
Петерсон (Peterson F. P.)
1. Some results on cohomotopy groups, *Amer. J. Math.*, **78**, № 2 (1956), 243—258.
2. Generalized cohomotopy groups, *Amer. J. Math.*, **78**, № 2 (1956), 259—281.
Плись (Pliś A.)
1. Rational functions univalent on sets separating the plane, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **2** (1954), 255.
Помпейю (Pompéju D.)
1. *Math. Ann.*, **63** (1907), 326.
Пономарев В.
1. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, *Матем. сб.*, **48**, № 2 (1959), 191—212.
Понтрягин Л. С.
1. Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу I, *ДАН СССР*, н. с., **19**, № 3 (1938), 147—149.
2. Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу II, *ДАН СССР*, н. с., **19**, № 5 (1938), 361—363.
3. A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere, *Матем. сб.*, **9** (1941), 331—364.
4. Непрерывные группы, М., 1954.
Произволов В.
1. О конечнократных открытых отображениях, *ДАН СССР*, **166**, № 1 (1966), 39—40.
Радо и Рейхельдерфер (Radó T., Reichelderfer P.)
1. Cyclic transitivity, *Duke Math. J.*, **6**, № 2 (1940), 474—485.
2. On cyclic transitivity, *Fund. Math.*, **34** (1947), 14—29.
Раухваргер И. Д.
1. *Ученые записки МГУ*, **4** (1945).
Решовский (Reschovsky H.)
1. Über rationale Kurven, *Fund. Math.*, **15** (1930), 18—37.
Рисс (Riesz F.)
1. *C. R. Paris*, **141** (1906), 650.
2. Atti del IV. Congreso Int. Matemat. Roma, 1908, vol. 2, p. **21**.
3. *Math. Ann.*, **59** (1914), 409.

Робертс (Roberts J. H.)
1. On a problem of Menger concerning regular curves, *Fund. Math.*, **14** (1929), 327—333.
2. A theorem on dimension, *Duke Math. J.*, **8**, № 3 (1941), 565—574.
3. A problem in dimension theory, *Amer. Math. J.*, **70**, № 1 (1948), 126—128.
4. The rational points in Hilbert space, *Duke Math. J.*, **23**, № 3 (1956), 489—491.

Розенталь (Rozenthal A.)
1. Über Peanoflächen und ihren Rand, *Math. Z.*, **10** (1921), 102—104.

Рой (Roy P.)
1. A countable connected Urysohn space with a dispersion point, *Duke Math. J.*, **33** (1966), 331—333.

Рудин (Rudin M.)
1. Proceed. Madison Seminar, 1955, p. 84.

Самельсон (Samelson H.)
1. Remark on a paper by R. H. Fox, *Ann. Math.*, Ser. 2, **45**, № 3 (1944), 448—449.

Семадени (Semádeni Z.)
1. Sur les ensembles clairsemés, Rozprawy Matem., **39** (1959).

Серпинский (Sierpiński W.)
1. *C. R. Paris*, **160** (1915), 302.
2. Le continu linéaire comme un ensemble abstrait, *Prace Mat. Fiz.*, **27** (1915), 203.
3. *C. R. Paris*, **162** (1916), 629.
4. L'arc simple comme un ensemble de points dans l'espace à *m* dimensions, *Ann. Mat. Pura Appl.*, Ser. 3, **26** (1916), 131—150.
5. Un théorème sur les continus, *Tohoku Math. J.*, **13**, № 3 (1918), 300—303.
6. *Wiad. Mat.*, **23** (1919).
7. Sur une condition pour qu'un continu soit une courbe jordanienne, *Fund. Math.*, **1** (1920) (new edition 1937), 44—60.
8. Sur les ensembles connexes et non connexes, *Fund. Math.*, **2** (1921), 81—95.
9. Sur quelques propriétés topologiques du plan, *Fund. Math.*, **4** (1923), 1—6.

Сикорский (Sikorski R.)
1. On the representation of Boolean algebras as fields of sets, *Fund. Math.*, **35** (1948), 247—258.
2. Boolean algebras, 2nd ed., Springer, 1964. [Перевод: Булевы алгебры, М., 1969.]

Ситников К. А.
1. О непрерывных отображениях открытых множеств евклидова пространства, *Матем. сб.*, н. с., **31**, вып. 2 (1952), 439—458.
2. Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая новая характеристика размерности множеств в евклидовых пространствах, *ДАН СССР*, **88**, № 1 (1953), 21—24.
3. Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, не разрезающего никакой области этого пространства, *ДАН СССР*, **94**, № 6 (1954), 1007—1010.
4. Комбинаторная топология незамкнутых множеств II, *Матем. сб.*, н. с., **37**, вып. 3 (1955), 385—434.

Скляренко Е.
1. О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности, *ДАН СССР*, **123**, № 1 (1958), 36—39.

2. О продолжении гомеоморфизмов, *ДАН СССР*, **141**, № 5 (1961), 1045—1047.

Скляренко и Энгелькинг (Sklyarenko E., Engelking R.)

1. On compactifications allowing extensions of mappings, *Fund. Math.*, **53**, № 1 (1963), 65—79.

Скори (Schori R. M.)

1. A universal snake-like continuum, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16**, № 6 (1965), 1313—1316.

Спаньер (Spanier E.)

1. Borsuk's cohomotopy groups, *Ann. Math.*, Ser. 2, **50**, № 1 (1949), 203—245.

Стинрод (Steenrod N. E.)

1. Characterization of certain finite curve-sums, *Amer. J. Math.*, **56**, № 4 (1934), 558—568.
2. Regular cycles of compact metric spaces, *Ann. Math.*, Ser. 2, **41**, № 4 (1940), 833—851.

Стинрод и Эйленберг (Steenrod N., Eilenberg S.)

1. Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952. [Перевод: Основания алгебраической топологии, М., 1958.]

Стоун А. (Stone A. H.)

1. Incidence relations in unicoherent spaces, *Trans. Amer. Math., Soc.*, **65**, № 3 (1949), 427—447.
2. Metrizability of decomposition spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7**, № 4 (1956), 690—700.
3. A note on paracompactness and normality of mappings spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**, № 1 (1963), 81—83.

Стоун М. (Stone M. H.)

1. The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40**, № 1 (1936), 37—111.
2. Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**, № 3 (1937), 375—481.
3. Algebraic characterization of special Boolean rings, *Fund. Math.*, **29** (1937), 223—303.

Страшевич (Straszewicz S.)

1. Über den Begriff des einfachen Kurvenbogens, *Math. Ann.*, **78**, 3—4 (1918), 369—377.
2. Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen, *Fund. Math.*, **7** (1925), 168—184.

Судзуки (Suzuki J.)

1. Note on a theorem for dimension, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1958), 201.

Суингл (Swingle P. M.)

1. Generalization of biconnected sets, *Amer. J. Math.*, **53**, № 2 (1931), 385—400.

Тихонов А. Н.

1. Über einen Funktionenraum, *Math. Ann.*, **111**, 5 (1935)
2. Ein Fixpuktsatz, *Math. Ann.*, **111** (1935), 767—776.

Томас (Thomas E. S., Jr.)

1. Monotone decompositions of irreducible continua, Rozpr. Matem., **50**, Warszawa, 1966.

Торхорст (Torhorst M.)

1. Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete, *Math. Z.*, **9** (1921), 44—65.

Таки (Tukey J. W.)

1. Convergence and Uniformity in Topology, Princeton, 1940.

Трон (Thron W. J.)

1. Topological structures, Holt. Rinehart and Winston, 1966.

Тумаркин Л. А.
1. *C. R. Paris*, **186** (1928), 420.
Тутти и Харари (Tutte W. T., Harary F.)
1. A dual form of Kuratowski's theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71**, № 1 (1965), 168.
Уайберн (Whyburn G. T.)
1. Analytic Topology, Coll. Publ., 1942.
2. Topological analysis, Princeton, 1958.
3. Concerning the disconnection of continua by the omission of pairs of their points, *Fund. Math.*, **10** (1927), 180—185.
4. Concerning connected and regular point sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33**, № 6 (1927), 685—689.
5. Cyclicly connected continuous curves, *Proc. Nat. Acad, Sci. USA*, **13**, № 2 (1927), 30—38.
6. Concerning the cut points of continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **30**, № 3 (1928), 597—609.
7. Concerning Menger regular curves, *Fund. Math.*, **12** (1928), 264—294.
8. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34** (1928), 504.
9. Local separating points of continua, *Monatsh. Math. Phys.*, **36**, № 2 (1929), 305—314.
10. Concerning points of continuous curves defined by certain im kleinen properties, *Math. Ann.*, **102**, № 2 (1929), 313—336.
11. A general notion of accessibility, *Fund. Math.*, **14** (1929), 311—326.
12. Cut points of connected sets and of continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **32**, № 1 (1930), 147—154.
13. On the structure of connected and connected im kleinen point sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **32**, № 4 (1930), 926—943.
14. Concerning hereditarily locally connected continua, *Amer. J. Math.*, **53**, № 2 (1931), 374—384.
15. Non-separated cuttings of connected point sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33**, № 2 (1931), 444—454.
16. On the cyclic connectivity theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37**, № 6 (1931), 429—433.
17. *Fund. Math.*, **18** (1932), 57.
18. Characterizations of certain curves by continuous functions defined upon them, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 131—134.
19. Cyclic elements of higher orders, *Amer. J. Math.*, **56**, № 1 (1934), 133—146.
20. Non-alternating transformations, *Amer. J. Math.*, **56**, № 2 (1934), 294—302.
21. A decomposition theorem for closed sets, *Bull. Math. Soc.*, **41**, № 2 (1935), 95—96.
22. On sequences and limiting sets, *Fund. Math.*, **25** (1935), 408—426.
23. On *n*-arc connectedness, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **63**, № 3 (1948), 452—456.
Уайт (White P. A.)
1. Regular convergence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **60**, № 5 (1954), 431—443.
Уайтхед Г. (Whitehead G. W.)
1. Homotopy Theory, Cambridge, Mass., 1966.
Уайтхед Дж. (Whitehead J. H. C.)
1. Note on a theorem due to Borsuk, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, № 12 (1948), 1125—1132.
Уилдер (Wilder R. L.)
1. Concerning continuous curves, *Fund. Math.*, **7** (1925), 340—377.
2. A point set which has no true quasicomponents and which becomes con-

nected upon the addition of a single point, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33**, № 4 (1927), 423–427.
3. On connected and regular point sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34**, № 5 (1928), 649—655.
4. Characterizations of continuous curves that are perfectly continuous, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **15**, № 7 (1929), 614—621.
5. Concerning zero-dimensional sets in Euclidean space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31**, № 2 (1929), 345—359.
6. Concerning simple closed curves and related point sets, *Amer. J. Math.*, **53**, № 1 (1931), 39—55.

Уилсон (Wilson W. A)
1. On the structure of a continuum, limited and irreducible between two points, *Amer. J. Math.*, **48**, № 3 (1926), 147—168.

Уитни (Whitney H.)
1. Planar graphs, *Fund. Math.*, **21** (1933), 73—84.
2. A characterization of the closed 2-cell, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **35**, № 1 (1933), 261—273.

Улам (Ulam S.)
1. Scottish Book.

Уоллес (Wallace A. D.)
1. Quasi-monotone transformations, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 136—145.
2. The acyclic elements of a Peano space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**, № 10 (1941), 778—780.
3. Dimensional types, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**, № 10 (1945), 679—681.
4. Extension sets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **59**, № 1 (1946), 1—13.

Уолмен (Wallman H.)
1. Lattices and topological spaces, *Ann. Math.*, **42** (1941), 687—697.

Урысон П. С.
1. Sur la ramification des lignes cantoriennes, *C. R. Paris*, **175** (1922), 483.
2. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, **94** (1925), 262—295.
3. Sur les points accessibles des ensembles fermés, *Proc. Akad. Amsterdam*, **28** (1925), 984.
4. *Fund. Math.*, **7** (1925), 96.
5. Mémoire sur les multiplicités Cantorieпns, *Fund. Math.*, **8** (1926), 225—351.
6. Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes II, *Verh. Akad. Amsterdam*, **13** (1928), 1—172.

Фейделл (Fadell E.)
1. B paracompact does not imply $B^{\mathcal{T}}$ paracompact, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9**, № 6 (1959), 839—840.

Фернандес (A. de Mira Fernandes)
1. Funzioni continue sopra una superficie sferica, *Portug. Math.*, **5** (1946), 132—134.

Фирпли (Fearnley L.)
1. Neue Erweiterungs- und Überführungsätze, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, Ser. A, **42**, № 2 (1939), 139—140.
2. Neuaufbau der Endentheorie, *Ann. Math.*, Ser. 2, **43**, № 2 (1942), 261—279.
3. Über die Enden diskreter Räume und Gruppen, *Comment. Math. Helvet.*, **17**, № 1 (1944), 1—38.
4. Characterizations of the continuous images of the pseudo-arc, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **111**, № 3 (1964), 380—382.
5. Topological operations on the class of continuous images of all snake-like continua, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3, **15**, № 2 (1965), 289—300.

6. Characterization of the continuous images of all pseudo-circles, *Pacific J. Math.*, **23**, № 3 (1967), 491—513.
Флойд (Floyd E. E.)
1. Real valued mappings of spheres, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**, № 6 (1955), 957—959.
Флорес (Flores A.)
1. Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind, *Ergebn. math. Koll.*, **6** (1933), 4.
Фокс (Fox R. H.)
1. On topologies for function spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51**, № 6 (1945), 429—432.
Форт (Fort M. K., Jr.)
1. Points of continuity of semi-continuous functions, *Public. Mathem.*, Debrecen, **2** (1951), 100—102.
2. ε-mappings of a disc onto a torus, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. Math., **7**, № 2 (1959), 51—54.
3. The complements of bounded, open, connected subsets of euclidean space, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math.*, **9**, № 6 (1961), 457—460.
Фрагмен (Phragmén E.)
1. Über die Begrenzungen von Kontinua, *Acta Math.*, **7** (1885), 43—48.
Франкль (Frankl F.)
1. Über die zusammenhängenden Mengen von höchstens zweiter Ordnung, *Fund. Math.*, **11** (1928), 96—104.
Фрейденталь (Freudenthal H.)
1. Die Hopfsche Gruppe, *Comp. Math.*, **2**, № 1 (1935), 134—162.
2. Über die Entwicklung von Raumen und Gruppen, *Comp. Math.*, **4**, № 2 (1937), 145—234.
3. Über die Klassen der Sphärenabbildungen I, Grosse Dimensionen, *Comp. Math.*, **5**, № 2 (1937), 299—314.
4. *Proc. Akad. Amsterdam*, **42** (1939), 139.
5. *Ann. Math.*, **43** (1942), 261—279.
6. Über die Enden diskreter Räume und Gruppen, *Comment. Math. Helvet.*, **17** (1944/45), 1—38.
Фринк (Frink O.)
1. Topology in lattices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **51**, № 3 (1942), 569—582.
Фринк и Шевалле (Frink O., Chevalley C.)
1. Bicompactness of cartesian products, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**, № 8 (1941), 612—614.
де Фрис (de Vries H.)
1. Compact spaces and compactifications; an algebraic approach, Thesis, Amsterdam, 1962.
Фугейт (Fugate J. B.)
1. Decomposable chainable continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123**, № 3 (1966), 460—468.
2. Topological seminar, Wisconsin, 1965.
Халин (Halin R.)
1. Bemerkungen über ebene Graphen, *Math. Ann.*, **153**, № 1 (1964), 38—46.
Халмош (Halmos P. R.)
1. Measure Theory, New York, 1950. [Перевод: Теория меры, М., 1953.]
Хамстром (Hamstrom M. E.)
1. Concerning continuous collections of curves, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, № 2 (1953), 240—243.
Хан (Hahn H.)
1. *Jahresb. Deutsch. Math. Ver.*, **23** (1914), 318.
2. *Sgb. Akad. Wiss. Wien*, **123** (1914), 2433.
3. Über die Komponenten offener Mengen, *Fund. Math.*, **2** (1921), 189—192,

Ханнер (Hanner O.)
1. Some theorems on absolute neighborhood retracts, *Arkiv. Mat.*, **1**, № 5 (1951), 389—408.
2. Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces, *Arkiv. Mat.*, **2**, № 4 (1952), 315—360.
Харари (Harary F.)
1. Graph theory and theoretical physics, Akad. Press, 1967.
Харольд (Harrold O. G., Jr).
1. Continua of finite sections, *Duke Math. J.*, **8**, № 4 (1941), 682—688.
Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Теория множеств, М. — Л., 1934.
2. Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (Vien), 1914.
Хеемерт (van Heemert)
1. Topologische Gruppen und unzerlegbare Kontinua, *Comp. Math.*, **5**, № 2 (1937), 319—326.
Хейльброн (Heilbronn H.)
1. On the representation of homotopic classes by regular functions, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, ser. math., **6**, № 3 (1958), 181—184.
Хендерсон (Henderson G. W.)
1. The pseudo-arc as an inverse limit with one binding map, *Duke Math. J.*, **31**, № 3 (1964), 421—425.
2. Proof that every compact decomposable continuum which is topologically equivalent to each of its nondegenerate subcontinua is an arc, *Ann. Math.*, ser. 2, **12**, № 3 (1960), 421—428.
Хилл (Hill L. S.)
1. Properties of certain aggregate functions, *Amer. J. Math.*, **49**, № 3 (1927), 419—432.
Хилтон (Hilton P. J.)
1. An introduction to homotopy theory, Cambridge Tracts, 43, 1953.
Хильгерс (Hilgers A.)
1. Bemerkung zur Dimensionstheorie, *Fund. Math.*, **28** (1937); 303—304.
Хокинг и Юнг (Hocking J., Young G. S.)
1. *Amer. J. Math.*, **56** (1934), 137.
Холл (Hall D. W.)
1. On a decomposition of true cyclic elements, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **47**, № 2 (1940), 305—321.
2. A note on primitive skew-curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 935.
Холлет (Hallett)
1. Concerning the definition of a simple continuous arc, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, № 7 (1919), 325—326.
Хопф (Hopf H.)
1. Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, **104**, № 5 (1931), 637—655.
2. Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension, *Fund. Math.*, **25** (1935), 427—440.
3. Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze, *Portug. Math.*, **4** (1943—1945), 129—139.
Ху Сы-цзян (Hu Sze-Tsen)
1. Homotopy Theory, Academic Press, 1959. [Перевод: Теория гомотопий, М., 1964.]
2. Elements of general topology, Holden-Day, 1964.
3. Theory of retracts, Detroit, 1965.
Циппин (Zippin L.)
1. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31** (1929), 744.
2. On continuous curves and the Jordan curve theorem, *Amer. J. Math.*, **52** (1930), 331.

Чех (Čech E.)
1. Topological spaces, Czechoslovak Acad. Sci., 1966.
2. *Public. Univ. Masaryk*, **19** (1931), 20.
3. Une nouvelle classe de continus, *Fund. Math.*, **18** (1932), 85—87.
4. Théorie générale de l'homologie dans un espace quelque, *Fund. Math.*, **19** (1932), 149—183.
5. Sur les continus Péaniens unicohérents, *Fund. Math.*, **20** (1933), 232—243.
6. On bicompact spaces, *Ann. Math.*, ser. 2, **38**, № 4 (1937), 823—844.

Шанин Н.
1. О произведении топологических пространств, Труды матем. ин-та им. Стеклова, **24** (1948).

Шаудер (Schauder J.)
1. Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, **2** (1930), 171—180.

Шёнфлис (Schönflies A.)
1. Bericht über die Entwickelung der Mengenlehre II, Leipzig, 1908.
2. *Jahresber. D. Math. Ver.* (1908).

Шерер (Scherrer W.)
1. Über ungeschlossene stetige Kurven, *Math. Z.*, **24** (1925), 125—130.

Шиманский (Szymański P.)
1. Sur les constituants d'ensembles situés sur des continus arbitraires, *Fund. Math.*, **10** (1927), 363—374.

Шпернер (Sperner E.)
1. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und Gebietes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6**, № 3/4 (1928), 265—272.

Штанько М.
1. Пространство относительных расстояний, *Успехи матем. наук*, **18**, вып. 5 (1963), 213—218.

Штейнгауз (Steinhaus H.)
1. *Colloq. Math.*, **1** (1947), 30.

Шуберт (Schubert H.)
1. Topologie, Teubner, 1964.

Шура-Бура М. Р.
1. К теории бикомпактных пространств, *Матем сб.*, н. с., **9**, № 2 (1941), 385—388.

Эйленберг (Eilenberg S.)
1. Sur les transformations continues d'espaces métriques compacts, *Fund. Math.*, **22** (1934), 292—296.
2. Sur les decompositions des continus en ensembles connexes, *Fund. Math.*, **22** (1934), 297—302.
3. Remarque sur un théorème de M. Hurewicz, *Fund. Math.*, **24** (1935), 156—159.
4. Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence, *Fund. Math.*, **24** (1935), 160—176.
5. Sur l'invariance par rapport aux petites transformation, *C. R. Paris*, **200** (1935), 1003.
6. *C. R. Paris*, **200** (1935), 1005.
7. Transformations continues en circonference et la topologie du plan, *Fund. Math.*, **26** (1936), 61—112.
8. Sur le théorème de décomposition de la théorie de la dimension, *Fund. Math.*, **26** (1936), 146—149.
9. Un théorème de dualité, *Fund Math.*, **26** (1936), 280—281.
10. Sur les espaces multicohérents I, *Fund. Math.*, 27 (1936), 153—190.
11. Sur les espaces multicohérents II, *Fund. Math.*, **29** (1937), 101.

12. On continuous mappings of manifolds into spheres, *Ann. Math.* Ser. 2, **41**, № 3 (1940), 662—673.
13. An invariance theorem for subsets of S^n, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47**, № 2 (1941), 73—75.
14. Lectures in Topology, ed. by Wilder and Ayres, Ann. Arbor, 1941.

Эйчисон (Aitchison B.)
1. *C. R. Soc. Sci. Varsovie*, **27** (1934), 3.

Энгелькинг (Engelking R.)
1. Sur la compactification des espaces métriques, *Fund. Math.*, **48**, № 3 (1960), 321—324.
2. On the space of measurable sets of real numbers, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. Math., **9**, № 2 (1961), 75—76.
3. On the Freudenthal compactification, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. Math., **9**, № 5 (1961), 379—383.
4. Quelques remarques concernant les opérations sur les fonctions semi-continues dans les espaces topologiques, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Ser. math, **11**, № 2 (1963), 719—726.
5. Cartesian products and dyadic spaces, *Fund. Math.*, **57**, № 3 (1965), 287—304.
6. On functions defined on Cartesian products, *Fund. Math.*, **59**, № 2 (1966), 221—231.
7. General topology, North-Holland, 1967.

Эрдёш (Erdös P.)
1. Some remarks on connected sets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50**, № 6 (1944), 442—446.

Юдзёбо и Ямабе (Yujobo Z., Yamabe H.)
1. On the continuous functions defined on a sphere, *Osaka Math. J.*, **2**, № 1 (1950), 19—22.

Юнг (Young W. H.)
1. *Proc. London Math. Soc.*, (1), **35** (1902/03), 384.
2. *Rend. di Palermo*, **24** (1907).

Юнгс (Youngs J. W. T.)
1. *K*-cyclic elements, *Amer. J. Math.*, **62**, № 2 (1940), 449—456.

Яворовский (Jaworowski J. W.)
1. On antipodal sets on the sphere and on continuous involution, *Fund. Math.*, **43** (1956), 241—254.
2. Theorem on antipodes for multi-valued mappings and a fixed point theorem, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **4** (1956), 187—192.
3. Some remarks on Borsuk generalized cohomotopy groups, *Fund. Math.*, **50**, № 3 (1962), 257—264.
4. Generalized cohomotopy groups as limit groups, *Fund. Math.*, **50**, № 4 (1962), 393—402.

Ядзима (Yajima T.)
1. On a local property of absolute neighborhood retracts, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 59—62.

Янг (Yang C. T.)
1. On theorems of Borsuk — Ulam, Kakutani — Yamade — Yujobo and Dyson, I, *Ann. Math.* Ser. 2, **60**, № 2 (1954), 262—282.

Янишевский (Janiszewski S.)
1. Thesis, *J. Ec. Polyt.*, 2s., **16** (1911).
2. Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points, *Bull. Acad. Sci. Cracovie* (1912), 906.
3. Sur les coupures du plan, *Prace Mat.-Fiz.*, **26** (1913), 55.
4. Oeuvres choisies, Ihstyt. Matem. PAN, Warszawa, 1962.

Ярник (Jarnik V.)
1. *Monatsh. Math.-Phys.*, **41** (1934), 408.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Куратовский

ТОПОЛОГИЯ

ТОМ 2

Редактор *Н. И. Плужникова*
Художник *И. Д. Кричевский*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*
Корректор *И. Максимова*

Сдано в производство 22/V 1969 г. Подписано к печати 3/X 1969 г. Бумага книж.-журн. $60\times90^1/_{16}$ = 19,5 бум. л. 39 печ. л. Уч.-изд. л. 33,98. Изд. № 1/1761. Цена 2 р. 57 к. Зак. 190

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.